Домашнее задание 30.10

Вышеславова Анна

8 ноября 2019 г.

2

Найдите ОМП параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $\theta x^{\theta-1}$ при $x \in [0,1]$.

$$L(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \theta X_i^{\theta-1}, & \text{если } \forall i : X_i \in [0,1] \\ 0, & \text{если } \exists i : X_i \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\ln L(\theta) = \begin{cases} n \ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln X_i, & \text{если } \forall i : X_i \in [0,1] \\ 0, & \text{если } \exists i : X_i \notin [0,1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} n \ln\theta + n(\theta-1)\overline{\ln X}, & \text{если } \forall i : X_i \in [0,1] \\ 0, & \text{если } \exists i : X_i \notin [0,1] \end{cases}$$

$\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = \dfrac{n}{\theta} + n\overline{\ln X} = 0 \Rightarrow \theta^* = -\dfrac{1}{\overline{\ln X}}$ - точка экстремума функции $L(\theta)$

$\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2} = -\dfrac{n}{\theta^2} < 0 -$ то есть θ^* является максимумом - ОМП параметра θ

3

Найдите ОМП параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $2x/\theta^2$ при $x \in [0,\theta]$.

$$L(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{2X_i}{\theta^2}, & \text{если } \forall i : X_i \in [0,\theta] \\ 0, & \text{если } \exists i : X_i \notin [0,\theta] \end{cases}$$

$$\ln L(\theta) = \begin{cases} n\ln 2 - 2n\ln\theta + \sum_{i=1}^n \ln X_i, & \text{если } \forall i : X_i \in [0,\theta] \\ 0, & \text{если } \exists i : X_i \notin [0,\theta] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} n\ln 2 - 2n\ln\theta + n\overline{\ln\theta}, & \text{если } \forall i : X_i \in [0,\theta] \\ 0, & \text{если } \exists i : X_i \notin [0,\theta] \end{cases}$$

$\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = -\dfrac{2n}{\theta} < 0 \Rightarrow$ функция $L(\theta)$ убывает на промежутке $X_n \leq \theta$ $(X_1 > 0)$, то есть максимум достигается в левой границе промежутка в точке X_n - ОМП параметра θ

4

Найдите ОМП параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $e^{-|x|}/2(1-e^{-\theta})$ при $|x| \le \theta$.

$$L(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{e^{-|X_i|}}{2(1-e^{-\theta})}, & \text{если } \forall i : |X_i| \le \theta \\ 0, & \text{если } \exists i : |X_i| > \theta \end{cases}$$

$$\ln L(\theta) = \begin{cases} -n \ln 2 - n \ln 1 - e^{-\theta} + (-1)^n n \overline{|x_i|}, & \text{если } \forall i : |X_i| \le \theta \\ 0, & \text{если } \exists i : |X_i| > \theta \end{cases}$$

$\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = -\dfrac{n}{e^{\theta}-1} < 0 \Rightarrow$ функция $L(\theta)$ убывает на промежутке
$x \le \theta \le -x,$ то есть максимум достигается в левой границе промежутка в точке $max|X_i|$
- ОМП параметра θ

5

Вычислите среднеквадратическое отклонение ОМП равномерного распределения $U[0,\theta]$ и информацию Фишера. Вспомните неравенство Рао–Крамера и объясните, как такое могло получиться.

$$L(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & \text{если } \forall i : X_i \in [0,\theta] \\ 0, & \text{если } \exists i : X_i \notin [0,\theta] \end{cases} \text{ - ОМП параметра } \theta$$

$\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = -\dfrac{n}{\theta^{n+1}} < 0 \Rightarrow$ функция $L(\theta)$ убывает на промежутке
$X_n \le \theta,$ то есть максимум достигается в левой границе промежутка в точке X_n
- ОМП параметра θ

Посчитаем среднеквадратическое отклонение ОМП:

$$D_\theta(\theta^*) = \mathbb{E}_\theta(\theta^*)^2 - (\mathbb{E}_\theta(\theta^*))^2 = \int_0^\theta \frac{ny^{n+1}}{\theta^n} dy + \left(\int_0^\theta \frac{ny^n}{\theta^n} dy \right)^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \theta^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2}}$$

Посчитаем информацию Фишера:

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \mathbb{E}_\theta \left(-\frac{n}{\theta} \right)^2 = \frac{n^2}{\theta^2}$$

Запишем неравенство Рао-Крамера:

$$D_\theta(\theta^*) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

$\dfrac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2} \geq \dfrac{\theta^2}{n^2}$ - неверно, т. к. $\dfrac{n^3}{(n+2)(n+1)^2} \leq 1$

Почему неравентсов Рао-Крамера может не выполняться? Неравенство выполняется только для регулярных семейств распределений, коим не является равномерное распределение.