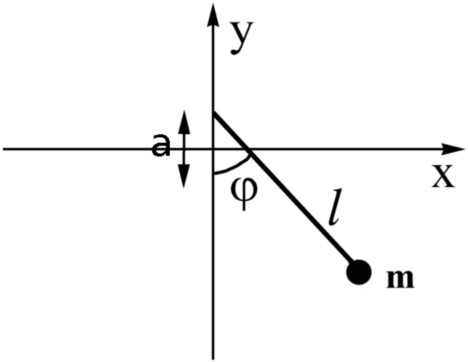
Исследование маятника с осциллирующим подвесом (маятника Капицы)

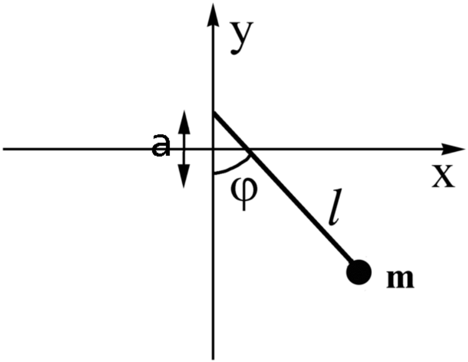
Л.И.Высоцкий

Москва, 2018

Рассматривается физический маятник с лёгкой нерастяжимой спицей длины ℓ, прикреплённой одним концом к подвижной точке подвеса, совершающей вертикальные колебания по закону $y = a\sin(\omega t)$.

Модель маятника Капицы





Система параметризуется одной обобщённой координатой φ – углом отклонения спицы от вертикали.

Отступление: механика Лагранжа

- В ньютоновской механике всем рулит 2-ой закон Ньютона $F = m\ddot{r}$.

Отступление: механика Лагранжа

- В ньютоновской механике всем рулит 2-ой закон Ньютона $F = m\ddot{r}$.
- Зная начальные условия (положение и скорость) всех материальных точек системы, а также силы взаимодействия, можно найти положение и скорость в любой момент времени.

Отступление: механика Лагранжа

- В ньютоновской механике всем рулит 2-ой закон Ньютона $F = m\ddot{r}$.
- Зная начальные условия (положение и скорость) всех материальных точек системы, а также силы взаимодействия, можно найти положение и скорость в любой момент времени.
- Однако это не всегда удобно!

Отступление: механика Лагранжа

- Жозеф Луи Лагранж в 1788 предложил свою переформулировку законов классической механики.

Отступление: механика Лагранжа

- Жозеф Луи Лагранж в 1788 предложил свою переформулировку законов классической механики.
- Система характеризуется обобщёнными координатами q. Это могут быть как обычные координаты x, y, z, так и любые другие числа, в каждый момент времени полностью описывающие конфигурацию системы.

Обобщённые координаты

- Плоский маятник на жёсткой спице с жёстко закреплённым подвесом — одна степень свободы и одна обобщённая координата: угол отклонения от вертикали.

Обобщённые координаты

- Плоский маятник на жёсткой спице с жёстко закреплённым подвесом — одна степень свободы и одна обобщённая координата: угол отклонения от вертикали.
- Маятник Фуко — две обобщённые координаты: угол поворота плоскости колебаний и угол отклонения маятника от вертикали.

Отступление: механика Лагранжа

- Системе сопоставляется *Лагранжиан* — функция $L(q, \dot{q}, t)$, обычно это $E_K - E_P$

Отступление: механика Лагранжа

- Системе сопоставляется *Лагранжиан* — функция $L(q, \dot{q}, t)$, обычно это $E_K - E_P$
- *Действие* S — это интеграл Лагранжиана вдоль заданной траектории:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Отступление: механика Лагранжа

- Системе сопоставляется *Лагранжиан* — функция $L(q, \dot{q}, t)$, обычно это $E_K - E_P$
- *Действие* S — это интеграл Лагранжиана вдоль заданной траектории:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

- *Принцип наименьшего действия* — система движется по траектории, соответствующей стационарному действию (концы (q_0, t_0) и (q_1, t_1) фиксированы).

Отступление: механика Лагранжа

- *Принцип наименьшего действия* — система движется по траектории, соответствующей стационарному действию (концы (q_0, t_0) и (q_1, t_1) фиксированы).

Отступление: механика Лагранжа

- *Принцип наименьшего действия* — система движется по траектории, соответствующей стационарному действию (концы (q_0, t_0) и (q_1, t_1) фиксированы).
- Отсюда можно выводить все законы классической механики и, что интереснее, *уравнение Эйлера–Лагранжа*:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы через φ, $\dot\varphi$ и t.

$$E_K = \frac{m}{2}\left([\ell\cos\varphi\dot\varphi]^2 + [\ell\sin\varphi\dot\varphi + \omega a\cos(\omega t)]^2\right),$$

$$E_P = mg(-\ell\cos\varphi + a\cos(\omega t)).$$

Уравнение для маятника Капицы

- Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы через φ, $\dot{\varphi}$ и t.

$$E_K = \frac{m}{2}\left([\ell\cos\varphi\dot{\varphi}]^2 + [\ell\sin\varphi\dot{\varphi} + \omega a\cos(\omega t)]^2\right),$$

$$E_P = mg(-\ell\cos\varphi + a\cos(\omega t)).$$

- Уравнение Эйлера–Лагранжа (после упрощения):

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\ell}(\omega^2 a\sin(\omega t) - g).$$

- Запишем в более удобной для численного решения форме:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = \frac{\sin\varphi}{\ell}(\omega^2 a \sin(\omega t + \gamma) - g) \end{cases}$$

Численное моделирование

- Запишем в более удобной для численного решения форме:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = \frac{\sin\varphi}{\ell}(\omega^2 a \sin(\omega t + \gamma) - g) \end{cases}$$

- Далее будем применять метод Рунге-Кутты 4-го порядка.