УДК 519.1

С. А. Ложкин[1], **Л. И. Высоцкий**[2]

О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ОДНОСТОРОННИХ ВЛОЖЕНИЯХ ДЕРЕВЬЕВ ПОДОБНЫХ ФОРМУЛ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ РЕШЕТКИ

В данной работе рассматривается задача оптимального размещения в прямоугольных решетках деревьев формул. Проведено построение и анализ двух типов указанных деревьев и соответствующих способов их вложения (размещения) в такие решетки: на основе полных двоичных деревьев и на основе специальных двоичных деревьев. Для вложений деревьев второго типа доказана асимптотическая оптимальность по высоте получаемой решетки среди деревьев всех подобных исходной формуле формул не большей глубины.

Ключевые слова: вложение деревьев, прямоугольные решетки, подобные формулы, оптимизация по высоте.

1. Введение. Проблема оптимального взаимного моделирования вычислений является одной из актуальных задач теории дискретных управляющих систем. Обычно она сводится к задаче оптимизации размещения вычислительных узлов и связей между ними в геометрических структурах определенного вида, например, в прямоугольной решетке.

В такой постановке проблема возникает при проектировании различных цифровых и аналоговых схем в связи со стремлением производителей минимизировать размеры своего продукта, к примеру, при разработке сверхбольших интегральных схем или блока дискретного преобразования Фурье — важной части цифрового сигнального процессора.

В качестве модели геометрической структуры были выбраны прямоугольные решетки, в узлах которых можно размещать вычислительные узлы, а по ребрам проводить соединяющие их проводники. Моделью размещаемого устройства являются деревья формул над произвольным базисом двуместных ассоциативных и коммутативных операций. Само размещение задается т. н. вложением, т. е. отображением вершин дерева в узлы, а ребер — в непрерывные цепи решетки. На это отображение могут накладываться определенные ограничения, следующие из физических или технологических особенностей моделируемой системы. Например, в данной работе требуется, чтобы цепи–образы

[1]Факультет ВМК МГУ, проф., д.ф.-м.н., e-mail: lozhkin@cs.msu.su
[2]Факультет ВМК МГУ, студ., e-mail: vysotskylev@yandex.ru

ребер не пересекались друг с другом в узлах, отличных от вычислительных, а входы устройства располагались на одной (горизонтальной) стороне решетки.

Рассматривается следующая задача: для заданной формулы среди всех подобных ей (т.е. получающихся из нее применением тождеств ассоциативности и коммутативности) формул определенной глубины найти такую, для которой возможно указанное выше вложение в решетку минимальной высоты.

В данной работе приводится метод построения искомых подобных формул и их вложений на основе полных двоичных деревьев, а также на основе специальных двоичных деревьев. Для последнего метода доказана его асимптотическая оптимальность в смысле описанной задачи.

2. Постановка задачи и формулировка полученных результатов. Приведем определение формулы (те понятия, которые здесь не определены, могут быть найдены в [1]). Пусть задан счетный упорядоченный алфавит переменных $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, а также базис Б $= \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_b\}$, где φ_i — k_i-местная функция. Формула над базисом Б задается рекуррентно: переменная $x_j \in \mathcal{X}$ считается формулой; если $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}$ — формулы, то запись вида $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$ тоже считается формулой. В данной работе рассматривается базис двуместных ассоциативных и коммутативных функций. Каждой формуле естественным образом ставится в соответствие реализуемая ею функция, а также дерево, листья которого помечены переменными, а нелистовые вершины — функциями из базиса Б. Сложностью $L(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ называется число вхождений в нее функциональных символов, ее глубиной — глубина соответствующего дерева, а альтернированием $\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})$ — максимальное число изменений пометок функций вдоль пути от листа дерева, соответствующего формуле $\mathcal{F}$, до его корня. Формула $\mathcal{F}_2$ называется подобной формуле $\mathcal{F}_1$, если $\mathcal{F}_2$ может быть получена из $\mathcal{F}_1$ путем нескольких эквивалентных преобразований с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности для базисных функций.

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Они представляют собой пару множеств $G = (V_G, E_G)$, где V_G и E_G — множества вершин и ребер соответственно. Множество всех простых (без самопересечений) цепей графа F будем обозначать $C(F)$.

Вложением графа G в граф F назовем пару отображений (φ, ψ):

$$\varphi \;:\; V_G \to V_F, \quad \psi \;:\; E_G \to \mathrm{C}(F),$$

обладающую тем свойством, что для любого ребра $e = (u, v) \in E_G$ цепь $\psi(e)$ соединяет вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$. При этом образы вершин из V_G будем называть основными вершинами вложения, цепи, являющиеся образами ребер из E_G, — транзитными цепями вложения, ребра и внутренние вершины (т. е. не совпадающие с концами) транзитных цепей — транзитными ребрами и вершинами соответственно.

Будем рассматривать лишь те вложения, для которых различные вершины графа G переходят в различные вершины графа F, транзитные цепи не имеют общих ребер, а через одну транзитную вершину проходит не более 1 транзитной цепи.

Обозначим через $A_{l,h}^{a,b}$ целочисленную прямоугольную решетку (ПР) высоты h и длины l с началом в точке (a, b), т. е. граф, множеством вершин которого является множество точек (x, y) плоскости с целочисленными координатами из прямоугольника $[a, a+(l-1)] \times [b, b+(h-1)]$, а ребра соединяют все пары точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2), таких, что $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$. Если не оговорено иное, будем считать, что $a = b = 0$, а $h \leqslant l$.

Вложение дерева в ПР назовем каноническим, если образ корня находится в первой строке решетки (т. е. имеет ординату 0), и строго каноническим, если дополнительно он является единственной основной вершиной в первой строке решетки.

Рассматривается следующая задача: для формулы $\mathcal{F}$ над конечным базисом (хотя результат естественным образом обобщается и на бесконечный базис) Б из коммутативных и ассоциативных функций построить подобную ей формулу $\mathcal{F}'$ минимальной глубины, допускающую вложение ее дерева в ПР минимальной высоты с расположением листьев на одной стороне решетки. При этом в ситуации неоднозначности решения задачи минимизации двух функционалов была выбрана следующая интерпретация: необходимо построить формулу $\mathcal{F}'$ глубины не более $\log L(\mathcal{F}) + c\,\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F}) + 1$ (все логарифмы, если не указано иное, берутся по основанию 2), где c — некоторая константа, и с минимальной высотой решетки, в которую возможно ее вложение.

В данной работе приведен метод построения для произвольной формулы $\mathcal{F}$ в базисе двуместных коммутативных и ассоциативных операций подобной ей формулы $\mathcal{F}_1$ глубины не более $d_1 = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})$ с указанием канонического вложения дерева формулы $\mathcal{F}_1$ в прямоугольную решетку высоты не более $\lfloor d_1/2 \rfloor + 1$. Также разработан метод построения подобной формуле $\mathcal{F}$ формулы $\mathcal{F}_2$ глубины не более

$$d_2 = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) + \log 6 \cdot \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F}) \rceil + 1,$$

с указанием канонического вложения дерева формулы $\mathcal{F}_2$ в прямоугольную решетку высоты не более $(d_2/3)(1+o(d_2))$, которое является асимптотически оптимальным среди всех вложений деревьев рассматриваемых формул глубины не более d_2.

3. Вложение деревьев формул на основе полных двоичных деревьев.

Для построения эффективных вложений в дальнейшем будем использовать идею композиции вложений. Формально, если заданы два вложения (φ_1, ψ_1) и (φ_2, ψ_2):

$$G \xrightarrow{\varphi_1, \psi_1} F \xrightarrow{\varphi_2, \psi_2} H,$$

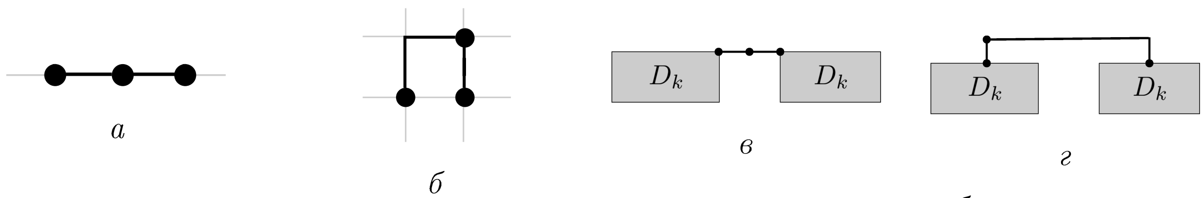
то можно естественным образом определить новое вложение (φ, ψ):

$$\varphi(v) = \varphi_2(\varphi_1(v)), \quad \psi(e) = \psi_2(e'_1) \Cup \cdots \Cup \psi_2(e'_n),$$

где $(e'_1, \ldots, e'_n) = \varphi_1(e)$, а $\Cup$ – операция конкатенации цепей. Заметим, что построенная пара функций действительно будет вложением: все цепи $\psi(e)$ будут простыми, так как две различные цепи $\psi_2(e')$ и $\psi_2(e'')$ могут пересечься лишь в основных вершинах вложения (φ_2, ψ_2).

В наших дальнейших рассуждениях будут строиться композиции вида $F \to D \to A$, где F – некоторое дерево формулы, D – дерево с некоторой регулярной структурой (например, полное), а A – прямоугольная решетка.

Заметим, что вложение одного дерева в другое обладает тем свойством, что оно полностью определяется отображением вершин. Действительно, в дереве существует ровно один путь между любыми двумя вершинами, позволяя определить $\psi(e)$ однозначно.



Построение канонических вложений полного двоичного дерева: *а* — базовое каноническое вложение дерева D_1; *б* — базовое строго каноническое вложение D_1; *в* — каноническое вложение дерева D_{k+1}(для строго канонического вложения D_k); *г* — строго каноническое вложение дерева D_{k+1} (для нестрого канонического вложения D_k)

Теорема 1. *Для любой формулы $\mathcal{F}$ в базисе двуместных коммутативных и ассоциативных функций* Б $= \{\varphi_1, \ldots, \varphi_b\}$ *существует подобная ей формула $\mathcal{F}'$ глубины не более* $d = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})$, *а также каноническое вложение дерева этой формулы в прямоугольную решетку высоты не более* $\lfloor d/2 \rfloor + 1$.

Доказательство. Построим искомое вложение как композицию двух вложений. Сначала найдем подобную $\mathcal{F}$ формулу $\mathcal{F}'$, дерево которой мы могли бы вложить в полное двоичное дерево D глубины d, а затем воспользуемся доказанным в [2] фактом о вложении полного дерева в ПР высоты $\lfloor d/2 \rfloor + 1$ (см. рисунок).

Покажем индукцией по сложности, что для $\mathcal{F}$ существует подобная формула $\mathcal{F}'$ и ее вложение в полное двоичное дерево глубины $\lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})$.

База ($L(\mathcal{F}) = 1$) очевидна: $\mathcal{F}' = \mathcal{F} = x_i$. Обоснуем шаг индукции. Представим формулу $\mathcal{F}$ в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{F}_s$, где $\circ \in$ Б. По аналогии с теоремой 2.1 из [1] выделим в полном дереве глубины d непересекающиеся поддеревья D_i, $i = 1, \ldots, s$, глубины $d_i = \lceil \log(L(\mathcal{F}_i) + 1) \rceil + \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F}_i)$ и обозначим через v_i корень дерева D_i. Применим индуктивное предположение к подформулам $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \ldots, s$, построив подобные им формулы $\mathcal{F}_i'$ и их вложения в D_i. Рассмотрим такой подграф T дерева D, который сам явяется деревом, имеет корень в корне D, а листьями являются только вершины v_i, $i = 1, \ldots, s$. Это можно сделать, рассмотрев в качестве такого подграфа объединение всех цепей, соединяющих v_i, $i = 1, \ldots, s$, с корнем D.

Построим формулу $\mathcal{H}(y_1, \ldots, y_s)$ следующим образом: рассмотрим в дереве T множество $W \subset V_T$, состоящее из всех вершин степени 3 (и корня, если его степень равна 2) и листьев, а затем проведем ребро (w_1, w_2), если путь от w_1 до w_2 (определяемый однозначно) не содержит других вершин из W. Ясно, что полученный граф $T' = (W, E_{T'})$ является деревом: связность и наличие ровно одного пути между вершинами из W следует из построения. Корнем T' назначим ближайшую к корню дерева D вершину. Это и будет дерево формулы $\mathcal{H}$ — достаточно приписать всем вершинам функциональный символ $\circ$. Вложение $T' \to T$ очевидно из построения.

Теперь определим формулу $\mathcal{F}' = \mathcal{H}(\mathcal{F}_1', \ldots, \mathcal{F}_s')$. Ее вложение в дерево D определяется однозначно на основе вложений $\mathcal{F}_i' \to D_i$, а также $\mathcal{H} \to T$. Несложно также видеть, что глубина формулы $\mathcal{F}'$ не превосходит глубины D. Теорема доказана. $\square$

4. Вложение деревьев формул на основе специальных двоичных деревьев. В работе [3] описываются двоичные деревья, имеющие максимальное число листьев среди деревьев глубины не более d и допускающие вложение в решетку высоты не более h. Это максимальное число листьев, зависящее от d и h, обозначается через $N(d, h)$ и равно

$$N(d, h) = 2^d - 2^h \sum_{k=0}^{d-2h} C_{d-h}^k.$$

Оказывается, при построении различных схем, оптимальных по высоте или площади вложения в прямоугольные решетки, во многих случаях разумнее использовать указанные “специальные” деревья вместо “классических” полных.

4.1. Асимптотически оптимальное по высоте вложение деревьев формул. Рассмотрим деревья $\widehat{D}(d, h)$ (определяемые лишь при $d \leqslant 3h + 2$) и $\widehat{D}_L(d, h)$ (определяемые лишь при $d \leqslant 3h + 1$), которые в случае $d = 0$ представляют собой отдельные вершины, а при $d > 0$ задаются рекуррентно следующим образом:

1) $\widehat{D}(d, h)$ имеет два одинаковых поддерева $\widehat{D}_L(d - 1, h)$;

2) $\widehat{D}_L(d,h)$ при $d = 3h+1$ имеет два поддерева $\widehat{D}_L(d-2,h)$ и $\widehat{D}(d-2,h-1)$, а при $d \leqslant 3h$ два поддерева $\widehat{D}_L(d-1,h)$ и $\widehat{D}(d-1,h-1)$ (таким образом, деревья $\widehat{D}_L(3h+1,h)$ и $\widehat{D}_L(3h,h)$ совпадают).

Заметим, что глубина деревьев $\widehat{D}(d,h)$ и $\widehat{D}_L(d,h)$ не превосходит d. Кроме того, для них несложно определить каноническое вложение в решетку высоты h. Дерево $\widehat{D}(d,h)$ назовем регулярным симметричным, а $\widehat{D}_L(d,h)$ — регулярным асимметричным. Для числа листьев у рассматриваемых деревьев можно записать следующие рекуррентные соотношения:

$$\widehat{N}(d,h) = 2\widehat{N}_L(d-1,h), \tag{1}$$

$$\widehat{N}_L(d,h) = \begin{cases} 2\widehat{N}(d-1,h-1) + \widehat{N}_L(d-1,h), & \text{если } d \leqslant 3h, \\ \widehat{N}_L(d-1,h), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

По построению первое соотношение должно выполнятся при всех $d \leqslant 3h+2$, а второе — при всех $d \leqslant 3h+1$.

4.2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пара функций*

$$\widehat{N}(d,h) = 2^h \sum_{k=d-2h+1}^{h+3} C_{d-h}^k, \quad \widehat{N}_L(d,h) = \frac{1}{2}\widehat{N}(d+1,h) \tag{3}$$

удовлетворяет соотношениям (1), (2).

Доказательство. Соотношение (1), очевидно, выполнено. Перепишем соотношение (2), выразив $\widehat{N}_L(d,h)$ через $\widehat{N}(d,h)$:

$$\widehat{N}(d+1,h) = \begin{cases} 2\widehat{N}(d-1,h-1) + \widehat{N}(d,h), & \text{если } d \leqslant 3h, \\ \widehat{N}(d,h), & \text{иначе.} \end{cases}$$

В обоих случаях равенство проверяется прямой подстановкой и применением тождества $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Лемма доказана. □

Лемма 2 (о регулярном делении)**.** *Для величины* $r(d,h)$, *определяемой равенством*

$$r(d,h) = \frac{\widehat{N}_L(d-1,h)}{\widehat{N}_L(d,h)},$$

при $h > 1$ *и* $d \leqslant 3h$ *выполнены неравенства* $1/2 \leqslant r(d,h) \leqslant 5/6$.

Доказательство. В соответствии с доказанным рекуррентным соотношением (3)

$$r(d,h) = \frac{\widehat{N}(d,h)}{\widehat{N}(d+1,h)} = \frac{\sum\limits_{k=d-2h+1}^{h+3} C_{d-h}^{k}}{\sum\limits_{k=d-2h+2}^{h+3} C_{d-h+1}^{k}} = \frac{\sum\limits_{k=d-2h+1}^{h+3} C_{d-h}^{k}}{2\sum\limits_{k=d-2h+1}^{h+3} C_{d-h}^{k} - C_{d-h}^{d-2h+1} - C_{d-h}^{h+3}}.$$

Отсюда сразу видно, что $r(d,h) \geqslant 1/2$, так как знаменатель не превосходит удвоенный числитель. Для получения верхней оценки величины $r(d,h)$ достаточно оценить величины

$$A(d,h) = \frac{C_{d-h}^{d-2h+1} + C_{d-h}^{h+3}}{\sum\limits_{k=d-2h+1}^{h+3} C_{d-h}^{k}} = \frac{C_{d-h}^{d-2h+1} + C_{d-h}^{h+3}}{C_{d-h}^{d-2h+1} + \sum\limits_{k=d-2h+2}^{h+2} C_{d-h}^{k} + C_{d-h}^{h+3}} = \frac{1}{1+B(d,h)},$$

$$B(d,h) = \frac{\sum\limits_{k=d-2h+2}^{h+2} C_{d-h}^{k}}{C_{d-h}^{d-2h+1} + C_{d-h}^{h+3}}.$$

Для установления нижней оценки величины $B(d,h)$ заметим, что в условиях леммы (т. е. при $d \leqslant 3h$) верно неравенство $h+2 > (d-h)/2$, из которого вытекает неравенство $C_{d-h}^{h+2} > C_{d-h}^{h+3}$. Заметим также , что при $d < 3h-2$ выполняется неравенство $d-2h+1 < (d-h)/2$, из чего следует, что $C_{d-h}^{d-2h+1} \leqslant C_{d-h}^{d-2h+2}$. Учитывая это, достаточно рассмотреть случаи $d < 3h-2$, $d = 3h-2$, $d = 3h-1$ и $d = 3h$. В результате для любых d и h из условия леммы получим оценку $B(d,h) \geqslant 1/4$. Значит,

$$r(d,h) = (2 - A(d,h))^{-1} = (2 - \frac{1}{1+B(d,h)})^{-1} \leqslant \frac{5}{6}.$$

Лемма доказана. □

Для удобства формулирования следующей леммы доопределим $\widehat{N}_L(d,h)$ в точке $(3h+2,h)$: $\widehat{N}_L(3h+2,h) = \widehat{N}_L(3h+1,h)$.

Лемма 3. *Пусть заданы натуральные числа $m_1,\dots,m_n$, сумма которых равна M. Тогда для целых неотрицательных чисел d и h, таких, что $d \leqslant 3h+2$ и $\widehat{N}(d,h) \geqslant M$ (соответственно $d \leqslant 3h+1$ и $\widehat{N}_L(d,h) \geqslant M$) в дереве $\widehat{D}(d,h)$ (соответственно $\widehat{D}_L(d,h)$) можно выделить n попарно не пересекающихся поддеревьев $D_1,\dots,D_n$, таких, что число N_i листьев дерева D_i, $i = 1,\dots,n$, удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$N_i \geqslant \begin{cases} m_i, & \text{если } n = 1, \\ \frac{1}{6}m_i, & \text{если } n > 1 \text{ и } 1 < i < n, \\ \frac{1}{3}m_i, & \text{если } n > 1 \text{ и } i \in \{1,n\}. \end{cases} \qquad (4)$$

Доказательство. Проведем индукцию по $n = 1, 2, \ldots$. Для $n = 1$ лемма очевидно верна.

Докажем сначала часть утверждения, связанную с деревом $\widehat{D}_L(d, h)$, причем рассмотрим случай $d \leqslant 3h$ (случай $d = 3h{+}1$ тривиален, так как $\widehat{D}_L(3h{+}1, h) = \widehat{D}_L(3h, h)$). Положим $r = r(d, h)$ (см. лемму 2) и будем считать, что Mr — целое число. Если это не так, то положим $M' = r\,\lceil M/r \rceil$ и соответствующим образом увеличим любое из чисел m_i. Ясно, что так как $\widehat{N}_L(d, h)r = \widehat{N}_L(d-1, h)$ — целое число и $\widehat{N}_L(d, h) \geqslant M$, то $M' \leqslant \widehat{N}_L(d, h)$, т. е. условия леммы выполняются, а результирующие соотношения (4) лишь усилятся.

Выберем номера k_1 и k_2, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k_1} m_i \geqslant (1-r)M, \quad \sum_{i=1}^{k_1-1} m_i < (1-r)M,$$
$$\sum_{i=1}^{k_2} m_i \geqslant rM, \quad \sum_{i=1}^{k_2-1} m_i < rM.$$

При этом возможны две ситуации.

1. $\{k_1, k_2\} \subseteq \{1, n\}$. Рассмотрим два случая:

а) $k_1 = k_2$. В этом случае без ограничения общности будем считать, что $k_1 = k_2 = 1$. Применим индуктивное предположение к поддереву $\widehat{D}_L(d-1, h)$ с набором $\mathcal{M}_1 = \{rM\}$ и к поддереву $\widehat{D}(d-1, h-1)$ с набором $\mathcal{M}_2 = \{m_2, \ldots, m_n\}$. В силу того, что $m_1 \leqslant M$ и $r \geqslant 1/2$, получим выполнение всех условий (4) для системы поддеревьев S дерева $\widehat{N}_L(d, h)$ с набором $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$, которая является объединением указанных подсистем.

б) $k_1 \neq k_2$. Так как $k_1 \leqslant k_2$, то $k_1 = 1$, $k_2 = n$. Без ограничения общности можно считать, что $m_1 \leqslant m_n$. Применим индуктивное предположение к поддереву $\widehat{D}(d{-}1, h{-}1)$ с набором $\mathcal{M}_1 = \{(1{-}r)M\}$ (ведь $(1{-}r)M = \widehat{N}(d{-}1, h{-}1)$) и к поддереву $\widehat{D}_L(d-1, h)$ с набором $\mathcal{M}_2 = \{m_2, \ldots, m_n\}$. Выполнение условия (4) для определенной аналогично системе S системы нужно проверить лишь для N_1. Учитывая, что $m_1 \leqslant m_n$, а значит, $M \geqslant 2m_1$, и применяя лемму 2, получим

$$N_1 \geqslant (1-r)M \geqslant (1-r)2m_1 \geqslant \frac{2}{6}m_1 = \frac{1}{3}m_1.$$

2. $\{k_1, k_2\} \not\subseteq \{1, n\}$. Пусть для определенности $k_1 \notin \{1, n\}$. Введем обозначения

$$M^L = (1-r)M, \quad M^R = rM, \quad m_k^L = M^L - \sum_{i=1}^{k-1} m_i, \quad m_k^R = \sum_{i=1}^{k} m_i - M^L$$

и, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $m_k^L \geqslant m_k^R$. Применим индуктивное предположение к поддереву $\widehat{D}(d-1, h-1)$ с набором $\{m_1, \ldots, m_k^L\}$ и поддереву $\widehat{D}_L(d-1,h)$ с набором $\{m_{k+1},\ldots,m_n\}$. Среди условий (4) для определенной аналогично системе S системы нужно проверить лишь условие для N_k:

$$N_k \geqslant \frac{1}{3}m_k^L \geqslant \frac{1}{3}\frac{1}{2}m_k = \frac{1}{6}m_k.$$

Таким образом, для деревьев $\widehat{D}_L(d,h)$ утверждение леммы верно. Доказательство леммы для деревьев $\widehat{D}(d,h)$ проводится аналогично: нужно лишь заменить r на $1/2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть дана формула $\mathcal{F}$ в базисе двуместных коммутативных и ассоциативных функций* Б $=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_b\}$. *Пусть также числа d и h таковы, что $\widehat{N}(d,h) \geqslant L(\mathcal{F})\cdot 6^{\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})}$ или $\widehat{N}_L(d,h) \geqslant L(\mathcal{F})\cdot 6^{\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})}$. Тогда существует подобная $\mathcal{F}$ формула $\mathcal{F}'$, дерево которой имеет глубину не более d и допускает каноническое вложение в решетку высоты не более h.*

Доказательство. Аналогично теореме 1 будем строить искомое вложение как композицию. Сначала найдем формулу $\mathcal{F}'$, подобную $\mathcal{F}$, которую мы могли бы вложить в дерево $\widehat{D}(d,h)$ (соответственно в $\widehat{D}_L(d,h)$), а затем воспользуемся тем, что деревья $\widehat{D}(d,h)$ и $\widehat{D}_L(d,h)$ можно вложить в ПР высоты h.

Покажем индукцией по сложности, что если $\widehat{N}(d,h) \geqslant L(\mathcal{F})\cdot 6^{\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})}$ ($\widehat{N}_L(d,h) \geqslant L(\mathcal{F})\cdot 6^{\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})}$), то существует формула $\mathcal{F}'$, подобная $\mathcal{F}$ и допускающая вложение своего дерева в дерево $\widehat{D}(d,h)$ (соответственно в $\widehat{D}_L(d,h)$).

База ($L(\mathcal{F}) = 1$) очевидна: $\mathcal{F}' = \mathcal{F} = x_i$. Обоснуем шаг индукции. Представим формулу $\mathcal{F}$ в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{F}_s$, где $\circ \in$ Б. Обозначим $a = \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})$. По лемме 3 в дереве $\widehat{D}(d,h)$ (соответственно $\widehat{D}_L(d,h)$) выделим непересекающиеся поддеревья $D_1,\ldots,D_s$ для набора чисел $\{L(\mathcal{F}_1)\cdot 6^a,\ldots,L(\mathcal{F}_s)\cdot 6^a\}$. По утверждению леммы при любом $i=1,\ldots,s$ количество листьев N_i в поддереве D_i будет не менее

$$L(\mathcal{F}_i)\cdot 6^{a-1} \geqslant L(\mathcal{F}_i)\cdot 6^{\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F}_i)}.$$

Учитывая, что все поддеревья D_i, $i=1,\ldots,s$ также имеют вид $\widehat{D}(d_i,h_i)$ или $\widehat{D}_L(d_i,h_i)$, можно применить индуктивное предположение и построить формулы $\mathcal{F}_i'$, подобные $\mathcal{F}_i$, и их вложения в поддеревья D_i, а затем провести такое же рассуждение, как в теореме 1. Лемма доказана. $\square$

4.3. Доказательство основной теоремы.

Теорема 2. *Для любой формулы $\mathcal{F}$ в базисе двуместных коммутативных и ассоциативных функций* Б $=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_b\}$ *и числа, определяемого равенством*

$$n = \lceil \log(L(\mathcal{F})+1) + \log 6\cdot \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})\rceil\,,$$

существует формула $\mathcal{F}'$*, подобная* $\mathcal{F}$*, глубины не более* $d = n+1$*, а также каноническое вложение дерева* $D(\mathcal{F}')$ *в прямоугольную решетку высоты не более*

$$h = \frac{n}{3}(1+\alpha(n)), \text{ где } \ \alpha(n) = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) = o(1) \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. По лемме 4 мы могли бы построить подобную $\mathcal{F}$ формулу глубины d и высоты вложения h, если только $\widehat{N}(d,h) \geqslant 2^n \geqslant 6^{\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})} \cdot L(\mathcal{F})$. Применяя формулу (3) для $\widehat{N}(d,h)$ при $d = n+1$, получим, что первое из этих неравенств равносильно следующим неравенствам:

$$2^h \sum_{k=n-2h+2}^{h+3} C_{n-h+1}^k \geqslant 2^n, \qquad \sum_{k=0.5(n-h+1)-a}^{0.5(n-h+1)+a} C_{n-h+1}^k \geqslant 2^{n-h},$$

где $a = 1.5(h - n/3 - 1)$. Обозначив сумму в этих неравенствах через S, можем записать

$$2^{n-h+1} = \sum_{k=1}^{n-h+1} C_{n-h+1}^k \leqslant S + 2\sum_{k=1}^{0.5(n-h+1)-a} C_{n-h+1}^k < S + 2\frac{0.5(n-h+1)+a}{2a} C_{n-h+1}^{0.5(n-h+1)-a}. \quad (5)$$

Последнее неравенство следует из того факта, что при $k < \lfloor n/2 \rfloor$

$$\sum_{r=0}^{k} C_n^r < \frac{n-k}{n-2k} C_n^k$$

(см., например, [4]). Из характера монотонности биномиальных коэффициентов следует, что для всех $(2a+1)$ целых чисел i, $i \in [\,0.5(n-h+1)-a,\ 0.5(n-h+1)+a\,]$ верно $C_{n-h+1}^{0.5(n-h+1)-a} \leqslant C_{n-h+1}^i$. Из этого непосредственно следует, что

$$C_{n-h+1}^{0.5(n-h+1)-a} \leqslant \frac{1}{2a+1} \sum_{k=1}^{n-h+1} C_{n-h+1}^k \leqslant \frac{2^{n-h+1}}{2a+1}.$$

Подставляя полученное неравенство в (5) и выбирая $h = \lceil n/3 + \sqrt{n} \rceil + 1$, получим

$$S \geqslant 2^{n-h+1}(1 - \frac{0.5(n-h+1)+a}{a(2a+1)}) \geqslant 2^{n-h+1}(1 - \frac{2}{27} - \frac{2}{9\sqrt{n}}) \geqslant 2^{n-h}.$$

Теорема доказана. □

Доказанный в теореме результат означает, что построено дерево, допускающее асимптотически оптимальное по высоте вложение среди деревьев всех формул, подобных данной и глубины не более $n+1$. Имеется в виду следующее

Утверждение 1. *Пусть задана последовательность формул* $\mathcal{F}_i$*,* $i = 1, \ldots,$ *такая, что* $L(\mathcal{F}_i)$ *неограниченно возрастает, причем все* $\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F}_i)$ *совпадают. Пусть также фиксированы числа*

$$n_i = \lceil \log(L(\mathcal{F}_i)+1) + \log 6 \cdot \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F}_i) \rceil$$

и $d_i = n_i + 1$. *Рассмотрим последовательность формул* $\{\mathcal{F}'_i\}$, *таких, что* $\mathcal{F}'_i$ *подобна* $\mathcal{F}_i$, *имеет глубину не более* d_i *и оптимальна по высоте* ПР, *в которую возможно ее вложение. Обозначим последовательность оптимальных высот через* $\{h_i\}$.

Тогда h_i *асимптотически равно* $d_i/3$, *т. е.* $3h_i/d_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 1$.

Доказательство. Рассмотрим нижний предел последовательности $\{3h_i/d_i\}$. Предположим, что он меньше 1. Тогда существует подпоследовательность $\{h_{i_k}\}$, такая, что $3h_{i_k}/d_{i_k} < \gamma < 1$ (в дальнейшем индекс k будем опускать, чтобы не загромождать выкладки). Ясно, что число листьев в дереве формулы $\mathcal{F}_i$ не превосходит

$$N(d_i, h_i) = 2^{h_i} \sum_{j=0}^{h_i-1} C^k_{d_i-h_i} \leqslant 2^{h_i}(2^{d_i-h_i} - \sum_{j=h_i}^{d_i-2h_i} C^k_{d_i-h_i}) = 2^{h_i}2^{d_i-h_i}\Big(1-\big(1+o(1)\big)\Big) = 2^{d_i}\cdot o(1).$$

Предпоследний переход следует из того факта, что при $n \to \infty$, если $\varphi(n) \to \infty$ и $\varphi(n)\sqrt{n} < n/2$, то

$$\sum_{r=\lfloor \frac{n}{2}-\varphi(n)\sqrt{n}\rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2}+\varphi(n)\sqrt{n}\rfloor} C_n^r \sim 2^n.$$

(см., например, [4]). Вычитаемая сумма попадает в условия этого утверждения, а следовательно, асимптотически равна $2^{d_i-h_i}$.

В силу того, что сложность формулы не превосходит числа листьев, получаем цепочку неравенств

$$o(1)\cdot 2^{d_i} = N(d_i, h_i) \geqslant L(\mathcal{F}_i) \geqslant \delta\cdot 2^{d_i},\ \text{где } 0 < \delta = \text{const}.$$

Установленное противоречие доказывает, что нижний предел последовательности $\{3h_i/d_i\}$, $i = 1, \ldots,$ не меньше 1. Из теоремы 2 следует, что верхний предел указанной последовательности не превосходит 1, из чего получаем $\lim\limits_{i\to\infty} 3h_i/d_i = 1$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: Изд-во МГУ, 2004.
2. Ложкин С.А., Ли Да Мин. О некоторых оптимальных вложениях двоичным и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибер. 1995. №4. С.49–55. (Lozhkin S.A., Li Da Ming. On some optimal embeddings of binary and ternary trees in planar rectangular lattices. Moscow University Comp. Math. and Cybern. 1995. N4. P.47–53.)
3. Ли Да Мин. Некоторые оптимальные вложения древовидных графов в плоские прямоугольные решетки. Дисс. канд. физ.-матем. наук. МГУ, 1994.
4. Селезнева С.Н. Основы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2010.

Поступила в редакцию
02.12.16