Kauno technologijos universitetas
Informatikos fakultetas

Skaitiniai metodai ir algoritmai

Netiesinių lygčių sprendimas

Vytenis Kriščiūnas IFF-1/1

Studentas

doc. Kriščiūnas Andrius

Dėstytojas

Kaunas 2023

TURINYS

1. Pirma dalis

Išspręskite netiesines lygtis (1 ir 2 lentelės), kai lygties funkcija yra daugianaris $f(x) = 0$ ir transcendentinė funkcija $g(x) = 0$.

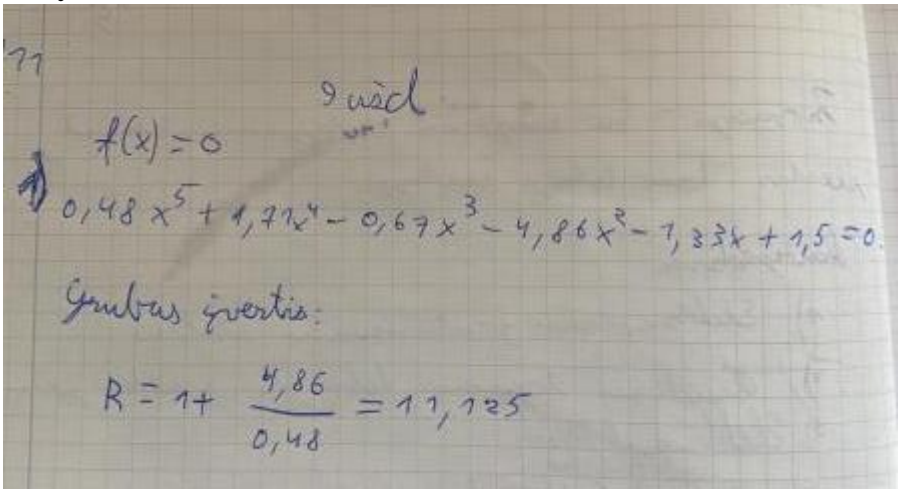
9	$0.48x^5 + 1.71x^4 - 0.67x^3 - 4.86x^2 - 1.33x + 1.50$	$e^{-x}\sin(x^2) + 0{,}001; 5 \leq x \leq 10$	2, 3

1.1. Nustatykite daugianario $f(x)$ šaknų intervalą.

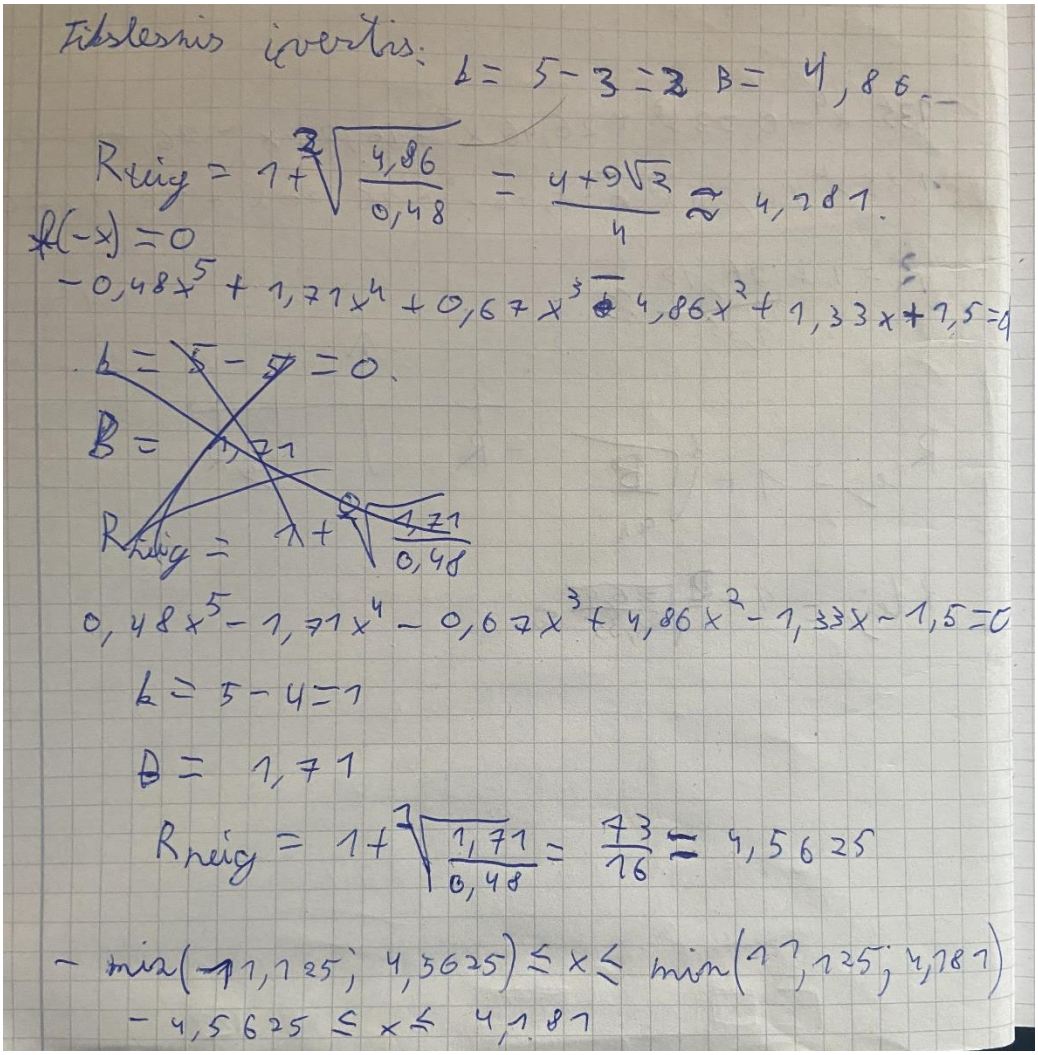
1.1.1. Užduotis

Nustatykite daugianario $f(x)$ šaknų intervalą, taikydami „grubų“ ir „tikslesnį“ įverčius. Grafiškai pavaizduokite daugianarį tokiame intervale, kad matytųsi abu įverčiai. Funkciją $g(x)$ grafiškai pavaizduokite užduotyje nurodytame intervale. Esant poreikiui, grafikų ašis pakeiskite taip, kad būtų aiškiai matomos funkcijų šaknys.

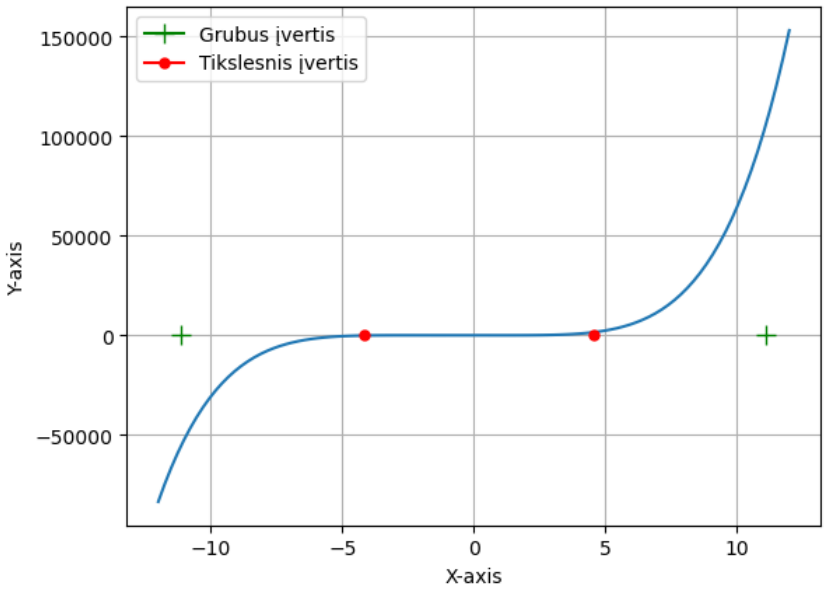
1.1.2. Grubus įvertis



1.1.3. Tikslesnis įvertis



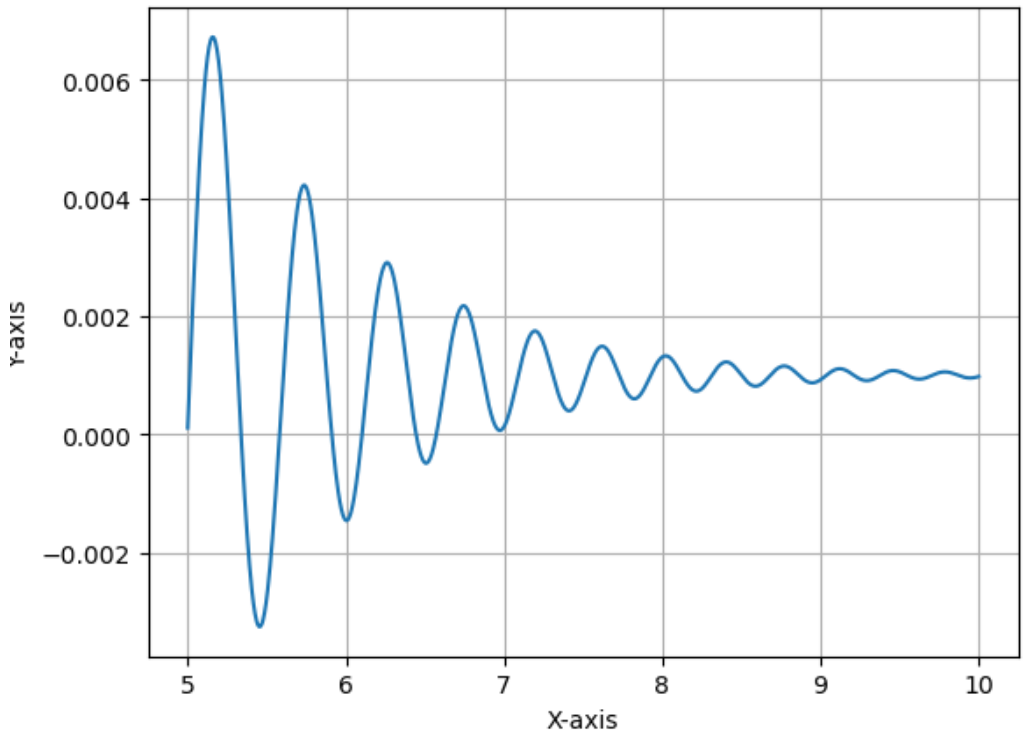
1.1.4. Grafinis vaizdavimas f(x) funkcijos




```
# funkcia, kuriai ieškome šaknų f(x)
def fx(x):
  return 0.48*x**5 + 1.71*x**4 - 0.67*x**3 - 4.86*x**2  - 1.33*x + 1.5
```

```
x = np.linspace(-12, 12, 100)
y = fx(x)
plt.xlabel('X-axis')
plt.ylabel('Y-axis')
plt.plot(x,y)
plt.grid()

#Grubus įvertis
plt.plot(11.125, 0, markersize=10, marker='+', color = 'green', label = "Grubus
įvertis")
plt.plot(-11.125, 0, markersize=10, marker='+', color = 'green')

#Tikslesnis įvertis
plt.plot(-4.181, 0, markersize=5, marker='o', color='red', label = "Tikslesnis
įvertis")
plt.plot(4.5625, 0, markersize=5, marker='o', color='red')

plt.legend()
plt.show()
```

1.1.5. Grafinis vaizdavimas g(x) funkcijos




```
#funkcija g(x)
def gx(x):
  return math.exp(-x) * math.sin(x**2) + 0.001

g = np.vectorize(gx)
x = np.linspace(5, 10, 1000)
y = g(x)
plt.grid()
plt.xlabel('X-axis')
plt.ylabel('Y-axis')
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

1.2. Skenavimo algoritmo panaudojimas

1.2.1. Užduotis

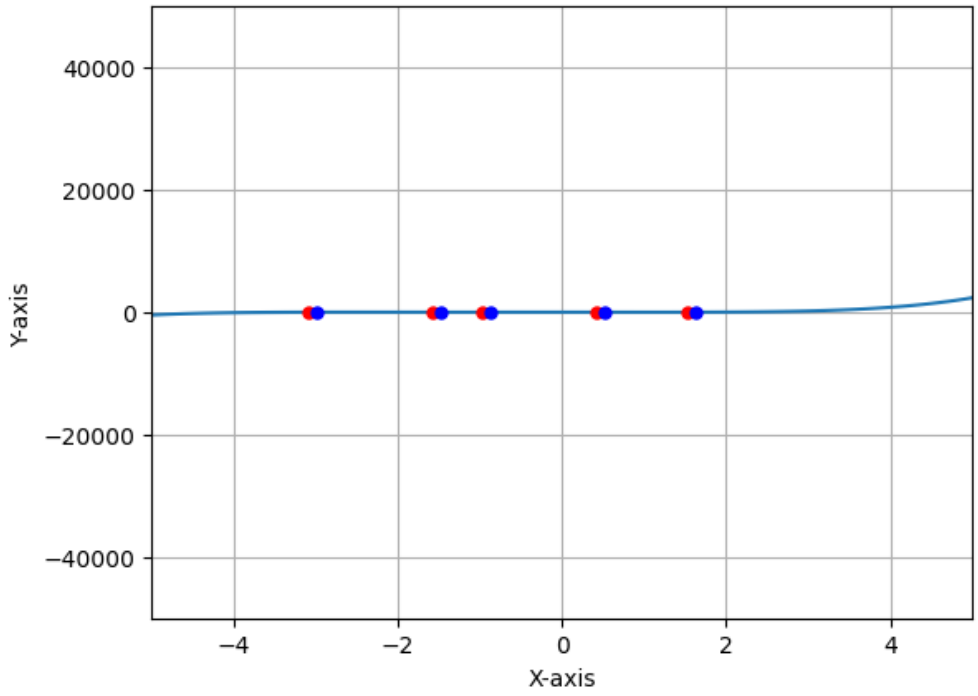
Naudodami skenavimo algoritmą su nekintančiu skenavimo žingsniu raskite šaknų atskyrimo intervalus. Daugianariui skenavimo intervalas parenkamas pagal 1 užduoties punkte gautas įverčių reikšmes. Funkcija $g(x)$ skenuojama užduotyje nurodytame intervale.

1.2.2. Funkcijos f(x) skenavimo intervalų radimas

```
#Skenavimo algoritmas
def scaning(func, From, To, arr1, arr2, postumis):
   li = 0
   while (From < To):
      zenkl1 = func(From)
      zenkl2 = func(From + postumis)

      if (np.sign(zenkl1) != np.sign(zenkl2)):
         plt.plot(From, 0, markersize=5, marker='o', color='red')
         plt.plot(From + postumis, 0, markersize=5, marker='o', color='blue')
         arr1.append(From)
         arr2.append(From + postumis)
         li += 1
      From = From + postumis
   print('Total number of intervals: = {0}'.format(li))
```

```
#Šaknų atskyrimo intervalai f(x) funkcijai (skenavimo žingsnis - 0.1)
x = np.linspace(-5, 5, 100)
y = fx(x)
plt.plot(x,y)
my_listStart2 = []
my_listEnd2 = []
scaning(fx, -4.181, 4.5625, my_listStart2, my_listEnd2, 0.1)
plt.ylim([-50000, 50000])
plt.xlim([-5, 5])
plt.xlabel('X-axis')
plt.ylabel('Y-axis')
plt.grid()
plt.show()
print('Nuo: {0}  iki {1}'.format(my_listStart2, my_listEnd2))
```

```
Total number of intervals: = 5
```

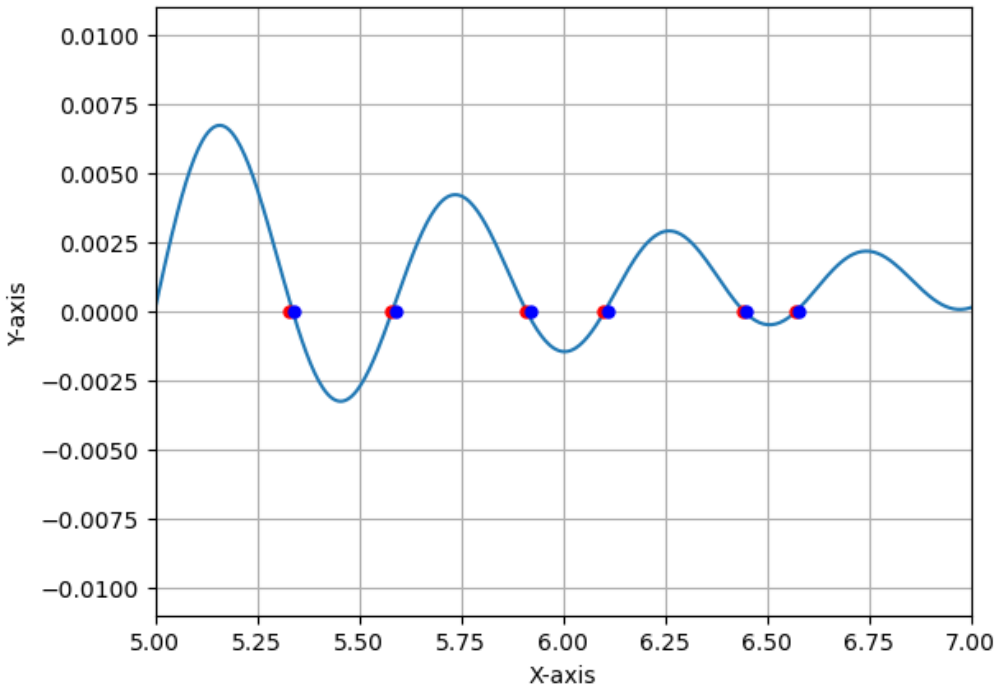



```
Nuo: [-3.0809999999999995, -1.5809999999999982, -0.9809999999999978, 0.41900000000000215, 1.5190000000000026]
iki [-2.9809999999999994, -1.480999999999998, -0.8809999999999978, 0.5190000000000021, 1.6190000000000027]
```

1.2.3. Funkcijos g(x) skenavimo intervalų radimas

```
#Šaknų atskyrimo intervalai g(x) funkcijai (skenavimo žingsnis - 0.01)
g = np.vectorize(gx)
x = np.linspace(5, 10, 1000)
y = g(x)
plt.plot(x,y)
my_listStart3 = []
my_listEnd3 = []
scaning(g, 5, 10, my_listStart3, my_listEnd3, 0.01)
plt.ylim([-0.011, 0.011])
plt.xlim([5, 7])
plt.grid()
plt.xlabel('X-axis')
plt.ylabel('Y-axis')
plt.show()
print('Nuo: {0}  iki {1}'.format(my_listStart3, my_listEnd3))
```

```
Total number of intervals: = 6
```




```
Nuo: [5.329999999999993, 5.579999999999988, 5.909999999999981, 6.0999999999999766, 6.439999999999969, 6.5699999999999665]
iki [5.339999999999993, 5.589999999999987, 5.91999999999998, 6.109999999999976, 6.449999999999969, 6.579999999999966]
```

1.3. Funkcijų šaknų tikslinimas

1.3.1. Užduotis

Skenavimo metodu atskirtas daugianario ir funkcijos šaknis tikslinkite užduotyje nurodytais metodais. Skaičiavimo scenarijuje turi būti panaudotos skaičiavimų pabaigos sąlygos. Skaičiavimų rezultatus pateikite lentelėje, kurioje nurodykite šaknies tikslinimui naudojamą metodą, pradinį artinį arba atskyrimo intervalą, gautą sprendinį (šaknį), funkcijos reikšmę ties šaknimi, tikslumą, iteracijų skaičių. Palyginkite, kuriuo metodu sprendiniui rasti panaudota mažiau iteracijų.

1.3.2. Funkcijos f(x) šaknų radimas pusiaukirtos metodu

```python
# pusiaukirtos metodas
def bisection(func, xFrom, xTo):
    xmid = (xFrom + xTo) / 2
    iter = 0
    while (np.abs(func(xmid)) > 1e-10):
        iter += 1
        if (np.sign(func(xmid)) == np.sign(func(xFrom))):
            xFrom = xmid
        else:
            xTo = xmid
        xmid = (xFrom + xTo) / 2
    print('Total iteration: = {0}'.format(iter))
    return xmid
```

```python
#Spausdina šaknis pusiaukirtos metodu
def printRootsPusiaukirtos(func, arr1, arr2):
   i=0
   while(i < len(arr1)):
      root = bisection(func, arr1[i], arr2[i])
      print("Šaknis: ", root)

      print("Reiksme: ", func(root))
      i += 1
```

```python
printRootsPusiaukirtos(fx, my_listStart2, my_listEnd2)
```

```
Total iteration: = 31
Šaknis:  -3.0765023327143854
Reiksme:  -1.7129409002336615e-11
Total iteration: = 29
Šaknis:  -1.565729997720568
Reiksme:  1.2502887614118663e-11
Total iteration: = 29
Šaknis:  -0.937846428569404
Reiksme:  -9.000356016031219e-12
Total iteration: = 31
Šaknis:  0.43790062510501815
Reiksme:  1.3672618592863728e-11
Total iteration: = 32
Šaknis:  1.5796781338923636
Reiksme:  9.426281977198414e-11
```

Naudotas metodas	Atskirimo intervalas	Šaknis	Funkcijos reikšmė	Tikslumas	Iteracijų skaičius
Pusiaukirtos	[-3.0765023327143854; -2.9809999999999994]	-3.076502332714385 4	-1.7129409002336615e-11	1e-10	31
Pusiaukirtos	[-1.5809999999999982; -1.4809999999999998]	-1.565729997720568	1.2502887614118663e-11	1e-10	29
Pusiaukirtos	[-0.9809999999999978; -0.8809999999999978]	-0.937846428569404	-9.00035601603121 9e-12	1e-10	29
Pusiaukirtos	[0.41900000000000215; 0.5190000000000021]	0.4379006251050181 5	1.367261859286372 8e-11	1e-10	31
Pusiaukirtos	[1.5190000000000026; 1.6190000000000027]	1.5796781338923636	9.426281977198414 e-11	1e-10	32

1.3.3. Funkcijos f(x) šaknų radimas Niutono (liestinių) metodu

```
def Niutono(func, dFunc, xFrom):
   iter = 0
   xi = xFrom
   eps = 1e-8
   while np.abs(func(xi)) > eps:
     iter += 1
     xi = xi - 0.5 * (1 / dFunc(xi)) * func(xi)
   print('Total iteration: = {0}'.format(iter))
   return xi
```

```
def printRootsNiutono(func, dFunc, arr1):
   i=0
   while(i < len(arr1)):
      root = Niutono(func, dFunc, arr1[i])
      print("Šaknis: ", root)
      print("Reiksme: ", func(root))
```

```
        i += 1

printRootsNiutono(fx, dfx, my_listStart2)
```

```
Total iteration: = 24
Šaknis:  -3.07650233298573
Reiksme:  -6.90348933574114e-9
Total iteration: = 23
Šaknis:  -1.56572999963357
Reiksme:  5.50195622395222e-9
Total iteration: = 24
Šaknis:  -0.937846430912868
Reiksme:  -5.24056886774815e-9
Total iteration: = 24
Šaknis:  0.437900624008705
Reiksme:  5.83423553912610e-9
Total iteration: = 27
Šaknis:  1.57967813353049
Reiksme:  -7.21822823734897e-9
```

Naudotas metodas	**Pradinis artinys**	**Šaknis**	**Funkcijos reikšmė**	**Tikslumas**	**Iteracijų skaičius**
Niutono(liesninių)	-3.0809999999999995	-3.07650233298573	-6.90348933574114e-9	1e-8	24
Niutono(liesninių)	-1.5809999999999982	-1.56572999963357	5.50195622395222e-9	1e-8	23
Niutono(liesninių)	-0.9809999999999978	-0.937846430912868	-5.24056886774815e-9	1e-8	24
Niutono(liesninių)	0.4190000000000215	0.437900624008705	5.83423553912610e-9	1e-8	24
Niutono(liesninių)	1.5190000000000026	1.57967813353049	-7.21822823734897e-9	1e-8	27

1.3.4. Funkcijos g(x) šaknų radimas pusiaukirtos metodu

```
# pusiaukirtos metodas
```

```python
def bisection(func, xFrom, xTo):
    xmid = (xFrom + xTo) / 2
    iter = 0
    while (np.abs(func(xmid)) > 1e-10):
        iter += 1
        if (np.sign(func(xmid)) == np.sign(func(xFrom))):
            xFrom = xmid
        else:
            xTo = xmid
        xmid = (xFrom + xTo) / 2
    print('Total iteration: = {0}'.format(iter))
    return xmid
```

```python
#Spausdina šaknis pusiaukirtos metodu
def printRootsPusiaukirtos(func, arr1, arr2):
   i=0
   while(i < len(arr1)):
      root = bisection(func, arr1[i], arr2[i])
      print("Šaknis: ", root)

      print("Reiksme: ", func(root))
      i += 1
```

```python
printRootsPusiaukirtos(g, my_listStart3, my_listEnd3)
```

```
Total iteration: = 21
Šaknis:  5.337017233371727
Reiksme:  -1.008098747708186e-11
Total iteration: = 20
Šaknis:  5.580983586311327
Reiksme:  -9.16669635163403e-11
Total iteration: = 18
Šaknis:  5.910615901947002
Reiksme:  -9.962999305765385e-11
Total iteration: = 19
Šaknis:  6.102124223709083
Reiksme:  3.566202238028393e-11
Total iteration: = 18
Šaknis:  6.443646373748749
Reiksme:  -5.5405460601398726e-11
Total iteration: = 17
Šaknis:  6.571631355285612
Reiksme:  9.287189420281727e-11
```

Naudotas metodas	Atskirimo intervalas	Šaknis	Funkcijos reikšmė	Tikslumas	Iteracijų skaičius
Pusiaukirtos	[5.329999999999993; 5.339999999999993]	5.337017233371727	-1.00809874770818 6e-11	1e-10	21
Pusiaukirtos	[5.579999999999988 ; 5.589999999999987]	5.580983586311327	-9.16669635163403 e-11	1e-10	20
Pusiaukirtos	[5.909999999999981 ; 5.91999999999998]	5.910615901947002	-9.96299930576538 5e-11	1e-10	18
Pusiaukirtos	[6.099999999999976 6 ; 6.109999999999976]	6.102124223709083	3.56620223 8028393 e-11	1e-10	19
Pusiaukirtos	[6.439999999999969; 6.449999999999969]	6.443646373748749	-5.54054606013987 26e-11	1e-10	18
Pusiaukirtos	[6.569999999999665 ; 6.579999999999966]	6.571631355285612	9.28718942028172 7e-11	1e-10	17

1.3.5. Funkcijos g(x) šaknų radimas Niutono (liestinių) metodu

```
def Niutono(func, dFunc, xFrom):
   iter = 0
   xi = xFrom
   eps = 1e-8
   while np.abs(func(xi)) > eps:
     iter += 1
     xi = xi - 0.5 * (1 / dFunc(xi)) * func(xi)
   print('Total iteration: = {0}'.format(iter))
   return xi
```

```
def printRootsNiutono(func, dFunc, arr1):
   i=0
   while(i < len(arr1)):
      root = Niutono(func, dFunc, arr1[i])
      print("Šaknis: ", root)
      print("Reiksme: ", func(root))
      i += 1
```

```
printRootsNiutono(g, dgx, my_listStart3)
```

```
Total iteration: = 16
Šaknis:  5.33701712323370
Reiksme:  5.411182022428684e-09
Total iteration: = 12
Šaknis:  5.58098334867873
Reiksme:  -9.967680069788293e-09
Total iteration: = 11
Šaknis:  5.91061559651715
Reiksme:  8.691046665763175e-09
Total iteration: = 13
Šaknis:  6.10212396531522
Reiksme:  -6.536927559582656e-09
Total iteration: = 13
Šaknis:  6.44364590418424
Reiksme:  6.960229326268344e-09
Total iteration: = 12
Šaknis:  6.57163095733060
Reiksme:  -5.42617859021835e-09
```

Naudotas metodas	**Pradinis artinys**	**Šaknis**	**Funkcijos reikšmė**	**Tikslumas**	**Iteracijų skaičius**
Niutono(liesninių)	5.329999999999993	5.33701712323370	5.411182022428684e-09	1e-8	16
Niutono(liesninių)	5.579999999999988	5.58098334867873	-9.967680069788293e-09	1e-8	12
Niutono(liesninių)	5.909999999999981	5.91061559651715	8.691046665763175e-09	1e-8	11
Niutono(liesninių)	6.099999999999976 6	6.10212396531522	-6.536927559582656e-09	1e-8	13
Niutono(liesninių)	6.439999999999969	6.44364590418424	6.960229326268344e-09	1e-8	13
Niutono(liesninių)	6.569999999999965	6.57163095733060	-5.42617859021835e-09	1e-8	12

1.3.6. Iteracijų palyginimas

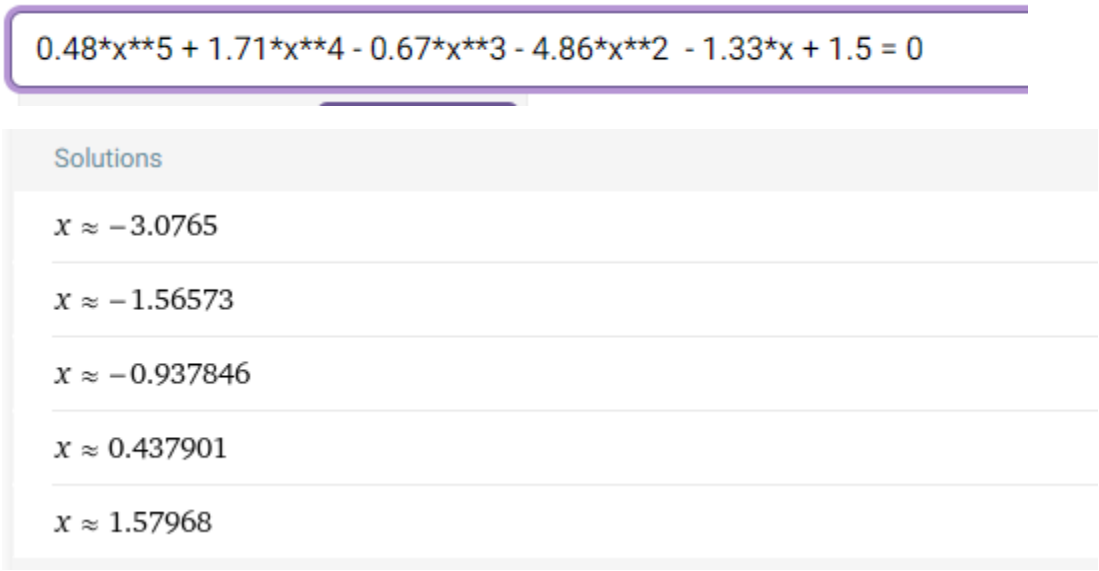
Funkcijos f(x) ir funkcijos g(x) iteracijų skaičius buna mažesnis naudojant Niutono (liestinių) metodą, nes naudodamas pusiaukirtos metodą pasirinkau didesnį tikslumą.

1.4. Gautų šaknų tikrinimas wolframalpha.com tinklapyje

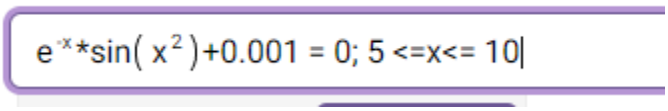
1.4.1. Užduotis

Gautas šaknų reikšmes patikrinkite naudodami išorinius išteklius (funkcijas roots arba fzero, tinklapį wolframalpha.com arba kitas priemones) ir pateikite patikrinimo rezultatus.

1.4.2. Funkcijos f(x) šaknų patikrinimo rezultatai



1.4.3. Funkcijos g(x) šaknų patikrinimo rezultatai



Solutions

$x \approx 5.33702$

$x \approx 5.58098$

$x \approx 5.91062$

$x \approx 6.10212$

$x \approx 6.44365$

$x \approx 6.57163$

2. Antra dalis

3 lentelėje pateiktą funkciją $h(x)$ išskleiskite Teiloro eilute (TE) nurodyto intervalo vidurio taško aplinkoje. Nustatykite TE narių skaičių, su kuriuo visos TE šaknys esančios nurodytame intervale, skiriasi nuo funkcijos $h(x)$ šaknų ne daugiau negu |1e-4|. Tiek pateiktos funkcijos $h(x)$ šaknis, tiek TE šaknis raskite antru iš pirmoje dalyje realizuotų skaitinių metodų (Niutono arba Kvazi-Niutono, priklausomai nuo varianto). Darbo ataskaitoje pateikite:

9	$2\cos(x) - 47\cos(2x) + 2$	$-6 \leq x \leq 0$

2.1. Tarpinių grafikų sudarymas (3, 4 ir 5 TE narių skaičius)

2.1.1. Užduotis

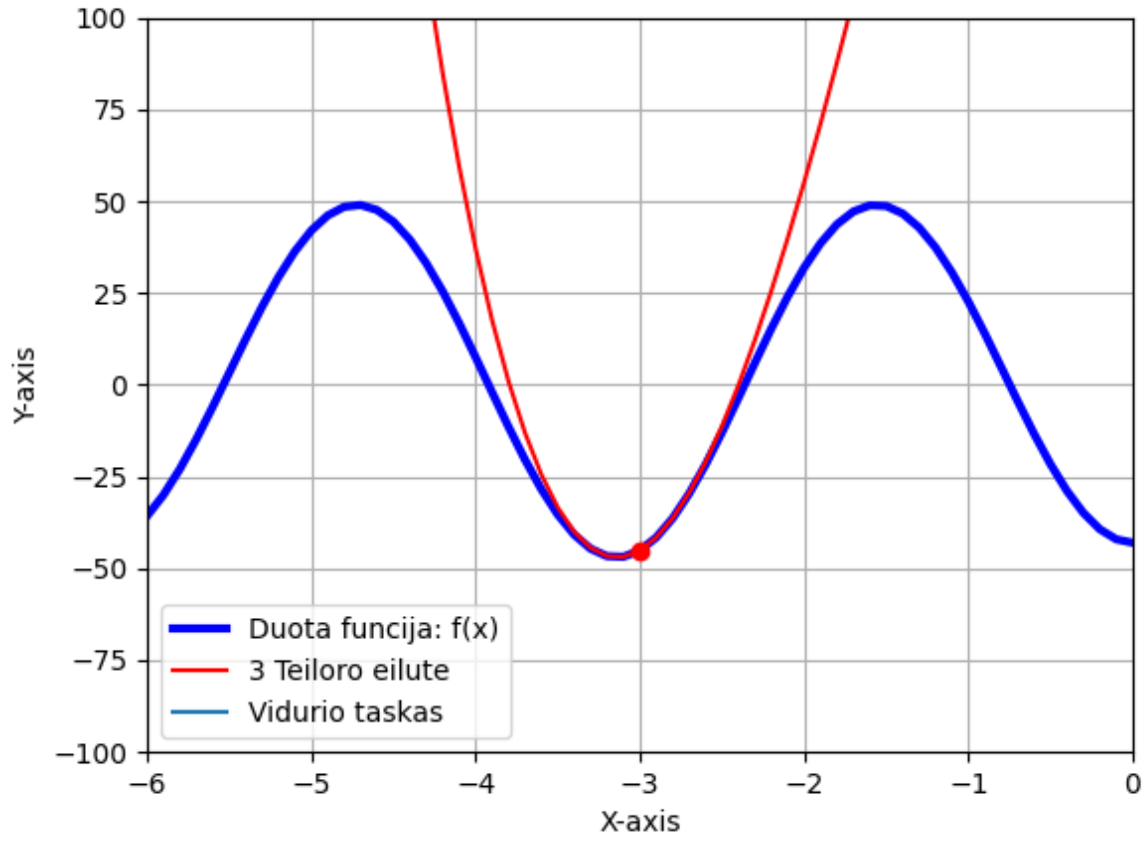
Tarpinius grafikus, kai drauge su pateikta funkcija $h(x)$ nurodytame intervale atvaizduojama TE, kai jos narių skaičius lygus 3, 4 ir 5.

2.1.2. Funkcijos h(x) ir TE 3, 4 ir 5 narių atvaizdavimas grafiškai

```
def fx(x):
   return 2 * np.cos(x) - 47 * np.cos(2*x) + 2 # -6 ir 0


def df1(x):
  return 2 * (-np.sin(x)) + 94 * np.sin(2*x)

def df2(x):
  return 2 * (-np.cos(x)) + 188 * np.cos(2*x)

def df3(x):
  return  2 * (np.sin(x)) - 376 * np.sin(2*x)

def df4(x):
  return 2 * (np.cos(x)) - 752 * np.cos(2*x)

def df5(x):
  return 2 * (-np.sin(x)) + 1504 * np.sin(2*x)



def ts3(x, x0):
  return fx(x0) + (x-x0)*df1(x0) + (np.power((x-x0), 2) / 2 ) *df2(x0) +
(np.power((x-x0), 3) / (3*2)) *df3(x0)

def ts4(x, x0):
  return fx(x0) + (x-x0)*df1(x0) + (np.power((x-x0), 2) / 2 ) *df2(x0) +
(np.power((x-x0), 3) / (3*2)) *df3(x0) + (np.power((x-x0), 4) / (4*3*2)) *df4(x0)

def ts5(x, x0):
  return fx(x0) + (x-x0)*df1(x0) + (np.power((x-x0), 2) / 2 ) *df2(x0) +
(np.power((x-x0), 3) / (3*2)) *df3(x0) + (np.power((x-x0), 4) / (4*3*2)) *df4(x0)
+ (np.power((x-x0), 5) / (5*4*3*2)) *df5(x0)
```

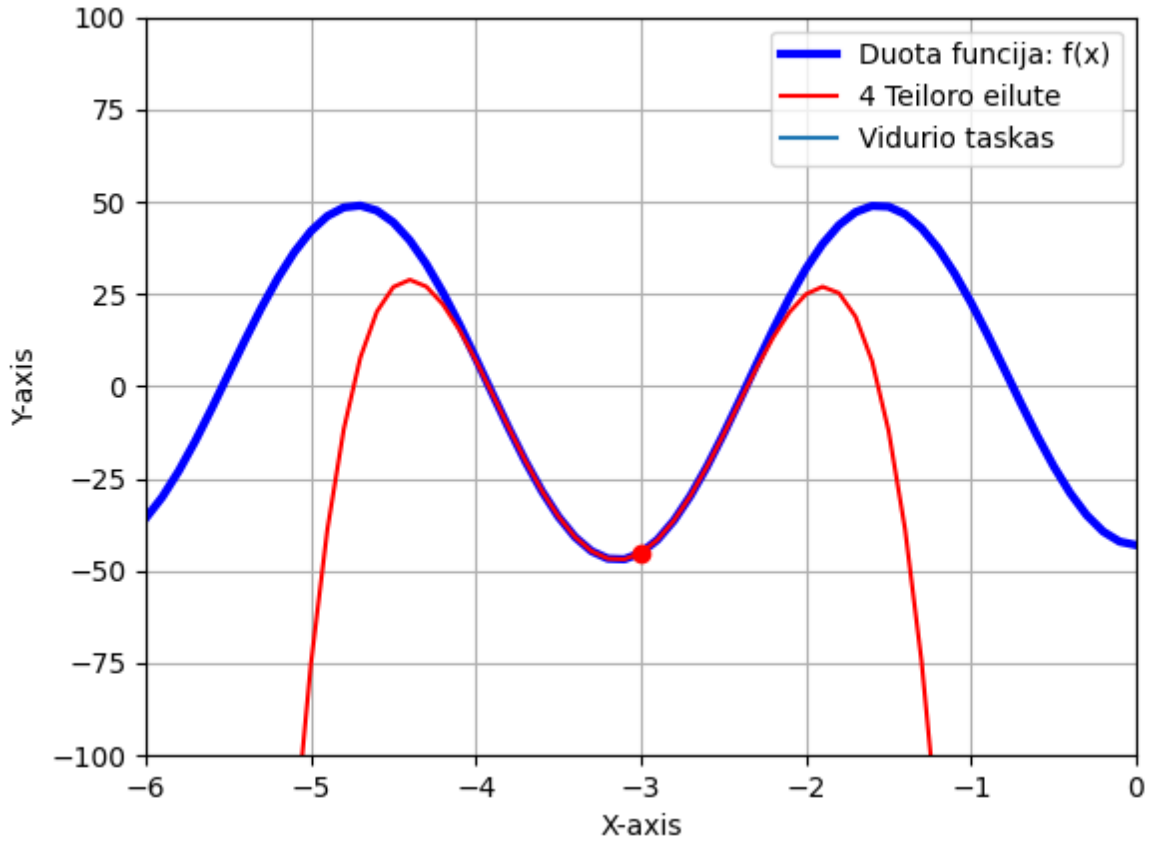
```
dx= 0.1
x=np.arange(-6, 0+dx, dx)
y = fx(x)

#3 Teiloro eilute
plt.xlim([-6, 0]); plt.ylim([-100, 100])

x0 = -3; # vidurio taskas

tsy3 = ts3(x, x0)
```

```
plt.xlabel('X-axis')
plt.ylabel('Y-axis')
plt.plot(x, y, 'b',  linewidth=3.0) # pagrindine funkcija
plt.plot(x, tsy3, 'r', 1) # 3 order
plt.plot(x0, fx(x0), 'or') # vidurio tasko atvaizdavimas

plt.legend(['Duota funcija: f(x)', '3 Teiloro eilute', 'Vidurio taskas'])
plt.grid()
plt.show()
```



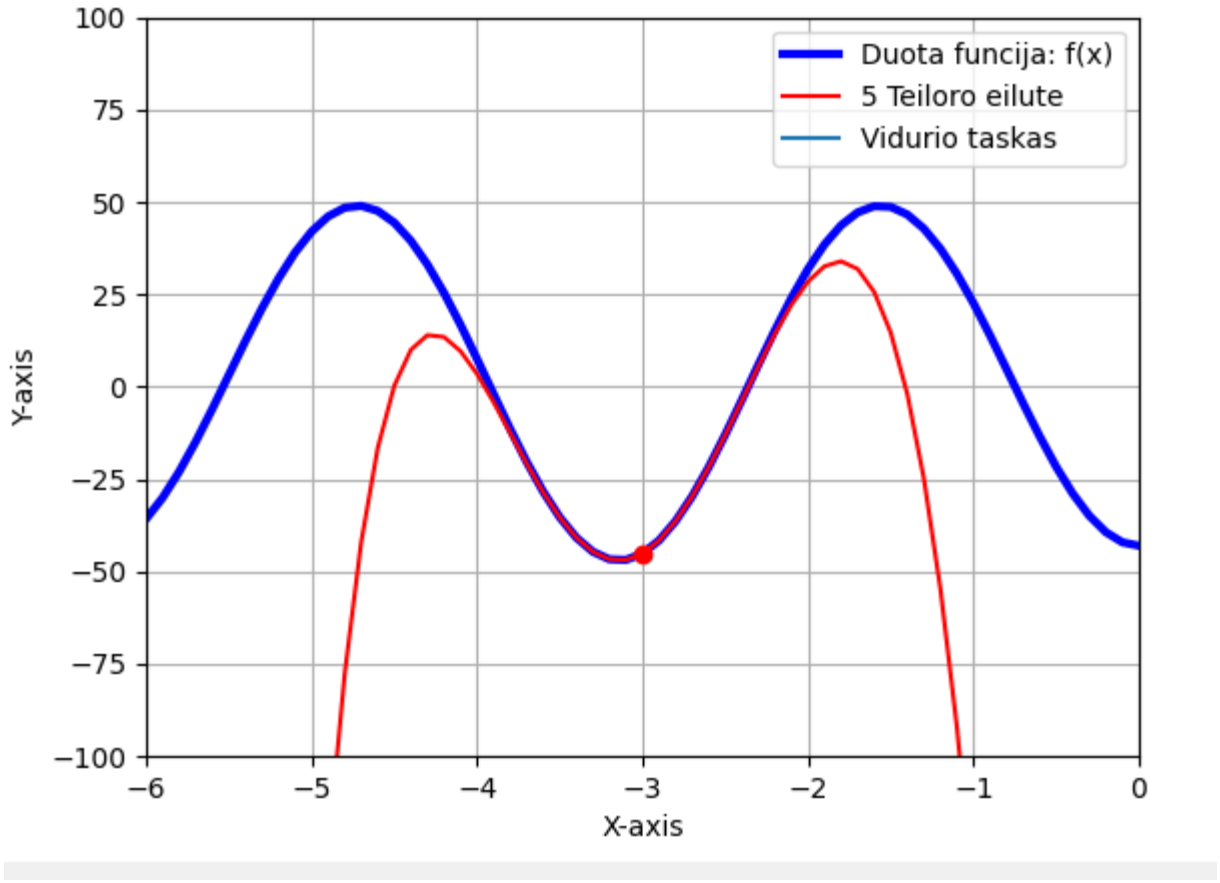

```
#4 Teiloro eilute
plt.xlim([-6, 0]); plt.ylim([-100, 100])

x0 = -3; # vidurio taskas

tsy4 = ts4(x, x0)

plt.xlabel('X-axis')
```

```
plt.ylabel('Y-axis')
plt.plot(x, y, 'b',  linewidth=3.0) # pagrindine funkcija
plt.plot(x, tsy4, 'r', 1) # 4 order
plt.plot(x0, fx(x0), 'or') # vidurio tasko atvaizdavimas

plt.legend(['Duota funcija: f(x)', '4 Teiloro eilute', 'Vidurio taskas'])
plt.grid()
plt.show()
```




```
#5 Teiloro eilute
plt.xlim([-6, 0]); plt.ylim([-100, 100])

x0 = -3; # vidurio taskas

tsy5 = ts5(x, x0)

plt.xlabel('X-axis')
plt.ylabel('Y-axis')
plt.plot(x, y, 'b',  linewidth=3.0) # pagrindine funkcija
```

```
plt.plot(x, tsy5, 'r', 1) # 5 order
plt.plot(x0, fx(x0), 'or') # vidurio tasko atvaizdavimas

plt.legend(['Duota funcija: f(x)', '5 Teiloro eilute', 'Vidurio taskas'])
plt.grid()
plt.show()
```



2.2. Reikalaujamą tikslumą užtikrinantis daugianaris

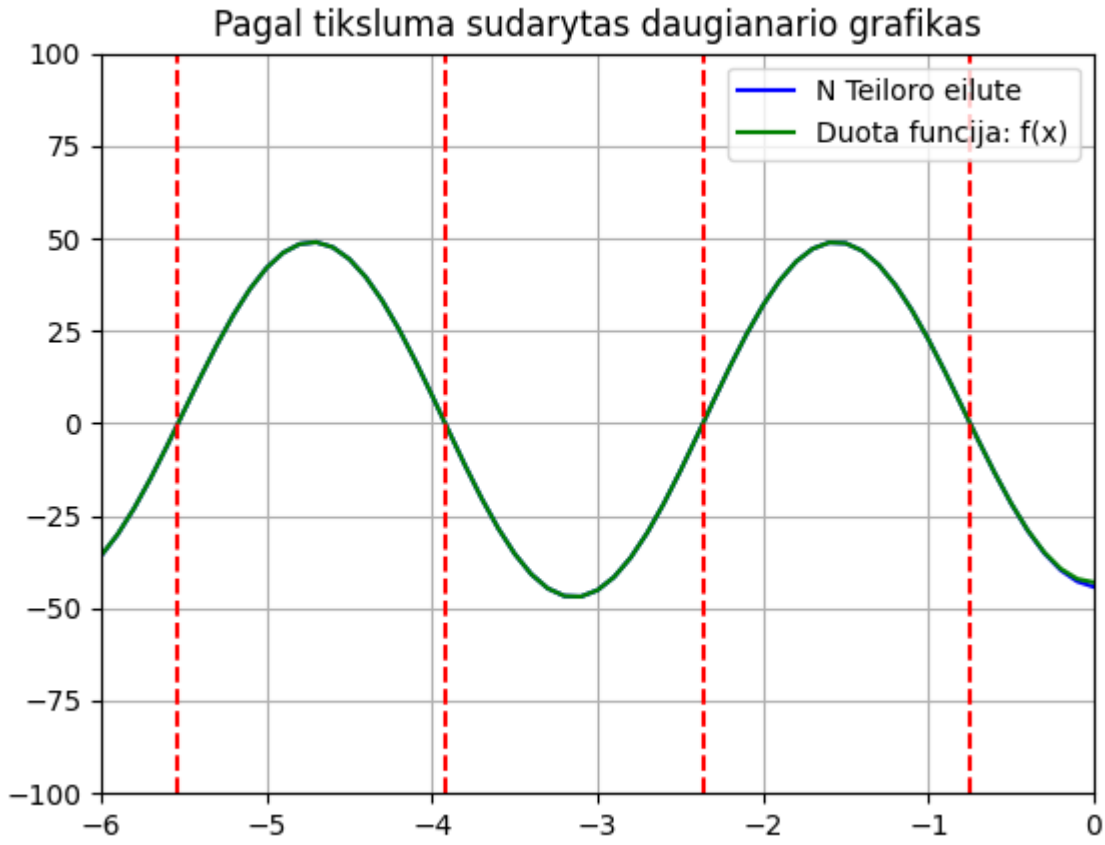
2.2.1. Užduotis

Grafiką, kuriame pavaizduotas reikalaujamą tikslumą užtikrinantis pagal TE sudarytas daugianaris, drauge pateikiant ir funkcijos $h(x)$ grafiką.

2.2.2. Gautas TE narių skaičius

TE nariu skaicius: 17

2.2.3. Gautas grafikas



2.2.4. Skaičiavimams ir grafiko braižymui naudotas Python kodas

```
#Pradinės funkcijos šaknys
def hSaknys(h_Saknys, Artiniai):
   i = 0
   while(i < len(Artiniai)):
      root = Niutono(fx, df1, Artiniai[i])
      h_Saknys.append(root)
      print(root)
      i += 1
```

```
#Teiloro funkcija
def Taylor(f, N):
    x, f, fp = sp.symbols(('x','f','fp'))
    f = 2 * sp.cos(x) - 47 * sp.cos(2*x) + 2 #Turima funkcija
```

```
    fp = f.subs(x, -3) #Pirmasis TE narys

    for i in range(1, N):
        f=f.diff(x)
        fp = fp + f.subs(x, -3)/math.factorial(i)*(x+3)**i
        i += 1
        N += 1
    return fp
```

```
#Šaknų lyginimas pagal 1e-4 tikslumą
def SaknuPanasumas(saknis, mas):
   x, fp = sp.symbols(('x','fp'))
   f_prad = 2 * sp.cos(x) - 47 * sp.cos(2*x) + 2 #Pradine funkcija, kuri nekis

   i = 2
   fp = Taylor(f_prad, 1)
   mas.append(0)
   fp = Taylor(f_prad, 2)
   mas.append(np.abs(saknis - Niutono(sp.lambdify(x, fp, modules=['numpy']),
sp.lambdify(x, fp.diff(x), modules=['numpy']), saknis)))
   while (np.abs(saknis - Niutono(sp.lambdify(x, fp, modules=['numpy']),
sp.lambdify(x, fp.diff(x), modules=['numpy']), saknis)) >= 1e-4):
      i += 1
      fp = Taylor(f_prad, i)
      mas.append(np.abs(saknis - Niutono(sp.lambdify(x, fp, modules=['numpy']),
sp.lambdify(x, fp.diff(x), modules=['numpy']), saknis)))
   return i, fp
```

```
VisiTESkaiciai = []
Artiniai = [-5.5, -4, -2.5, -0.5]
h_Saknys = []
hSaknys(h_Saknys, Artiniai)

mas = [] #Nereikalingas
maximum = 0
for saknis in h_Saknys:
   SkaiciusTE, Daugianaris = SaknuPanasumas(saknis, mas)
   VisiTESkaiciai.append(SkaiciusTE)
   print(SkaiciusTE)
   if SkaiciusTE > maximum:
      maximum = SkaiciusTE
      DidziausiasDaugianaris = Daugianaris

print("TE nariu skaicius: ", maximum)
```

```
#Grafiko h(x) ir N-tosios Teiloro eilutes braizymas
x = sp.symbols('x')
dx= 0.1
f_prad = 2 * sp.cos(x) - 47 * sp.cos(2*x) + 2
xvalue=np.arange(-6, 0+dx, dx)
y_vals = [DidziausiasDaugianaris.subs(x, val) for val in xvalue]
y_vals_f_prad = [f_prad.subs(x, val) for val in xvalue]

plt.plot(xvalue, y_vals, 'b')
plt.plot(xvalue, y_vals_f_prad,  'g', 1)
plt.legend(['N Teiloro eilute', 'Duota funcija: f(x)'])
plt.ylim(-100, 100)
plt.xlim(-6, 0)
for saknis in h_Saknys:
      plt.axvline(x=saknis, color='r', linestyle='--')
plt.title('Pagal tiksluma sudarytas daugianario grafikas')
plt.grid()
plt.show()
```

2.3. TE analitinė išraiška daugianario pavidalu

2.3.1. Užduotis

Nustatytos reikalaujamą tikslumą užtikrinančios TE analitinę išraišką daugianario pavidalu.

2.3.2. Gauta išraiška

TE daugianario pavidalas: (x + 3)**16*(-94*cos(6)/638512875 + cos(3)/10461394944000) + (x + 3)**15*(752*sin(6)/638512875 - sin(3)/653837184000) + (x + 3)**14*(-cos(3)/43589145600 + 376*cos(6)/42567525) + (x + 3)**13*(sin(3)/3113510400 -

376*sin(6)/6081075) + (x + 3)**12*(-188*cos(6)/467775 + cos(3)/239500800) + (x + 3)**11*(376*sin(6)/155925 - sin(3)/19958400) + (x + 3)**10*(-cos(3)/1814400 + 188*cos(6)/14175) + (x + 3)**9*(sin(3)/181440 - 188*sin(6)/2835) + (x + 3)**8*(-94*cos(6)/315 + cos(3)/20160) + (x + 3)**7*(376*sin(6)/315 - sin(3)/2520) + (x + 3)**6*(-cos(3)/360 + 188*cos(6)/45) + (x + 3)**5*(sin(3)/60 - 188*sin(6)/15) + (x + 3)**4*(-94*cos(6)/3 + cos(3)/12) + (x + 3)**3*(188*sin(6)/3 - sin(3)/3)

+ (x + 3)**2*(-cos(3) + 94*cos(6)) + (x + 3)*(2*sin(3) - 94*sin(6)) - 47*cos(6) + 2*cos(3) + 2

2.3.3. Programos kodas reikalingas skaičiavimams

```
#Pradinės funkcijos šaknys
def hSaknys(h_Saknys, Artiniai):
```

```
   i = 0
   while(i < len(Artiniai)):
      root = Niutono(fx, df1, Artiniai[i])
      h_Saknys.append(root)
      print(root)
      i += 1
```

```
#Teiloro funkcija
def Taylor(f, N):
    x, f, fp = sp.symbols(('x','f','fp'))
    f = 2 * sp.cos(x) - 47 * sp.cos(2*x) + 2 #Turima funkcija

    fp = f.subs(x, -3) #Pirmasis TE narys

    for i in range(1, N):
        f=f.diff(x)
        fp = fp + f.subs(x, -3)/math.factorial(i)*(x+3)**i
        i += 1
        N += 1
    return fp
```

```
#Šaknų lyginimas pagal 1e-4 tikslumą
def SaknuPanasumas(saknis, mas):
   x, fp = sp.symbols(('x','fp'))
   f_prad = 2 * sp.cos(x) - 47 * sp.cos(2*x) + 2 #Pradine funkcija, kuri nekis

   i = 2
   fp = Taylor(f_prad, 1)
   mas.append(0)
   fp = Taylor(f_prad, 2)
   mas.append(np.abs(saknis - Niutono(sp.lambdify(x, fp, modules=['numpy']),
sp.lambdify(x, fp.diff(x), modules=['numpy']), saknis)))
   while (np.abs(saknis - Niutono(sp.lambdify(x, fp, modules=['numpy']),
sp.lambdify(x, fp.diff(x), modules=['numpy']), saknis)) >= 1e-4):
      i += 1
      fp = Taylor(f_prad, i)
      mas.append(np.abs(saknis - Niutono(sp.lambdify(x, fp, modules=['numpy']),
sp.lambdify(x, fp.diff(x), modules=['numpy']), saknis)))
   return i, fp
```

```
VisiTESkaiciai = []
Artiniai = [-5.5, -4, -2.5, -0.5]
h_Saknys = []
```

```
hSaknys(h_Saknys, Artiniai)

mas = [] #Nereikalingas
maximum = 0
for saknis in h_Saknys:
   SkaiciusTE, Daugianaris = SaknuPanasumas(saknis, mas)
   VisiTESkaiciai.append(SkaiciusTE)
   print(SkaiciusTE)
   if SkaiciusTE > maximum:
      maximum = SkaiciusTE
      DidziausiasDaugianaris = Daugianaris
```

```
print("TE daugianario pavidalas: ", DidziausiasDaugianaris)
```

2.4. Sprendinių gerėjimo grafikai

2.4.1. Užduotis

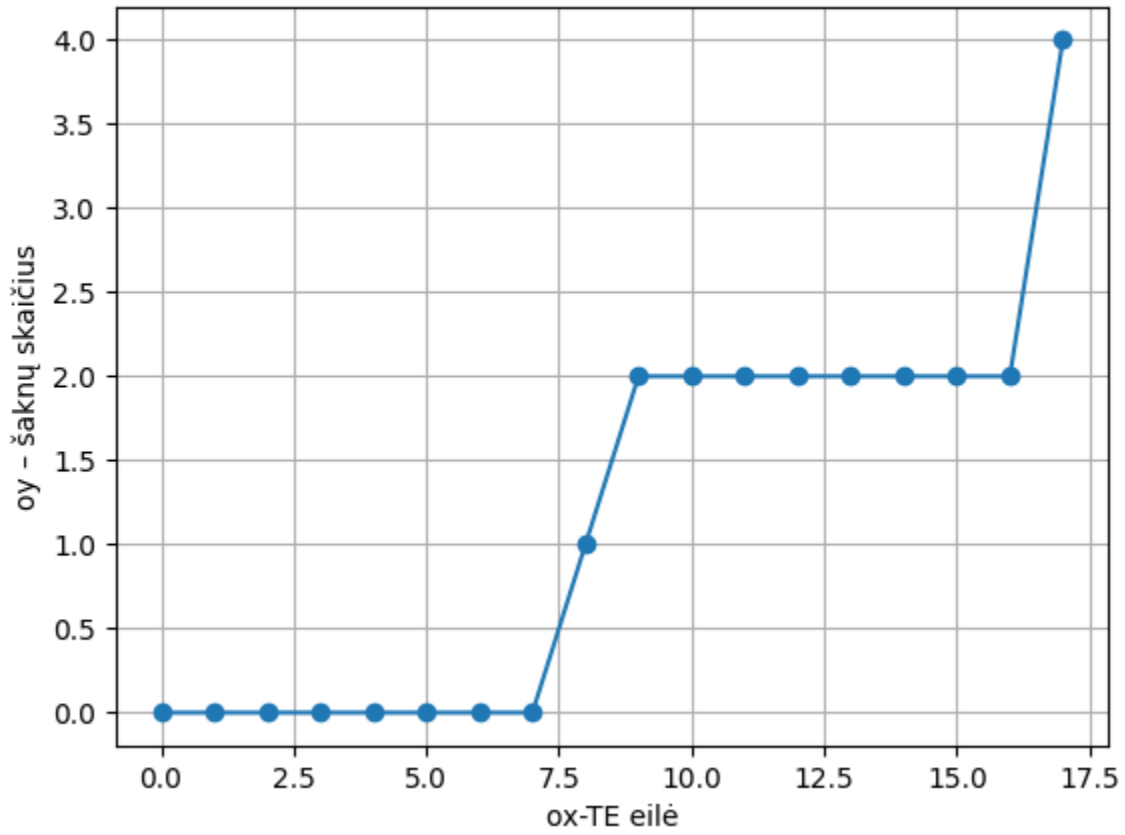
Grafikus, pagal kuriuos būtų galima įvertinti, kaip gerėjo sprendinys priklausomai nuo TE narių skaičiaus.

a) grafikas, kuris nurodo visą randamų šaknų skaičių nagrinėjamame intervale (ox-TE eilė, oy – šaknų skaičius);

b) atskiri grafikai kiekvienai šakniai, kuriuose oy ašyje pateikti tikslumo įverčiai tarp $h(x)$ apskaičiuotos šaknies ir artimiausios TE šaknies, o ox ašyje TE narių skaičiai.

2.4.2. Randamų šaknų skaičius nagrinėjamame intervale

2.4.2.1. Gautas grafikas



2.4.2.2. Naudotas kodas

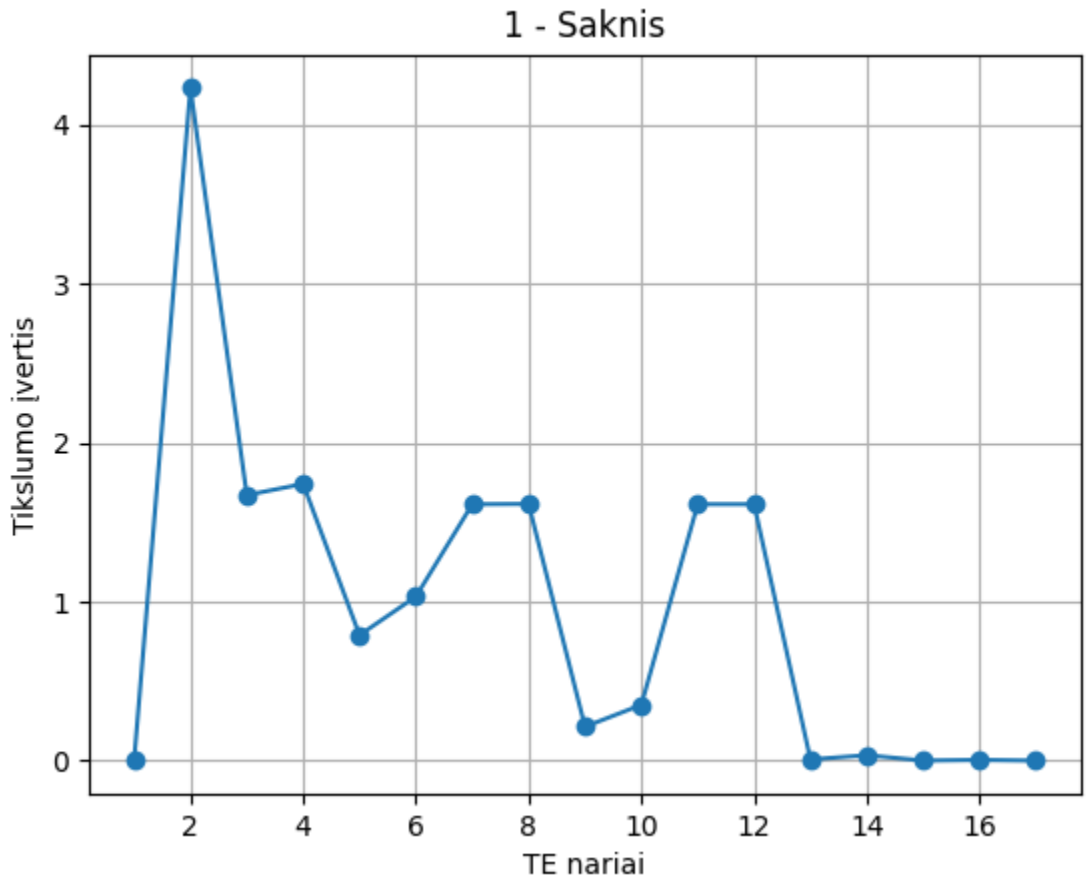
```
#Gaunamas bendras šaknų kiekis prilausantis nuo TE eilių
def GetSaknysTEskaiciu(masTE, SaknuSk):

   i = 0
   z = 0
   while (i < len(masTE)):
      j = 0

      if (i + 1 < len(masTE)):
          while (j <= (masTE[i + 1] - 1) - masTE[i]):
            SaknuSk.append(i)

            z += 1
            j += 1
```

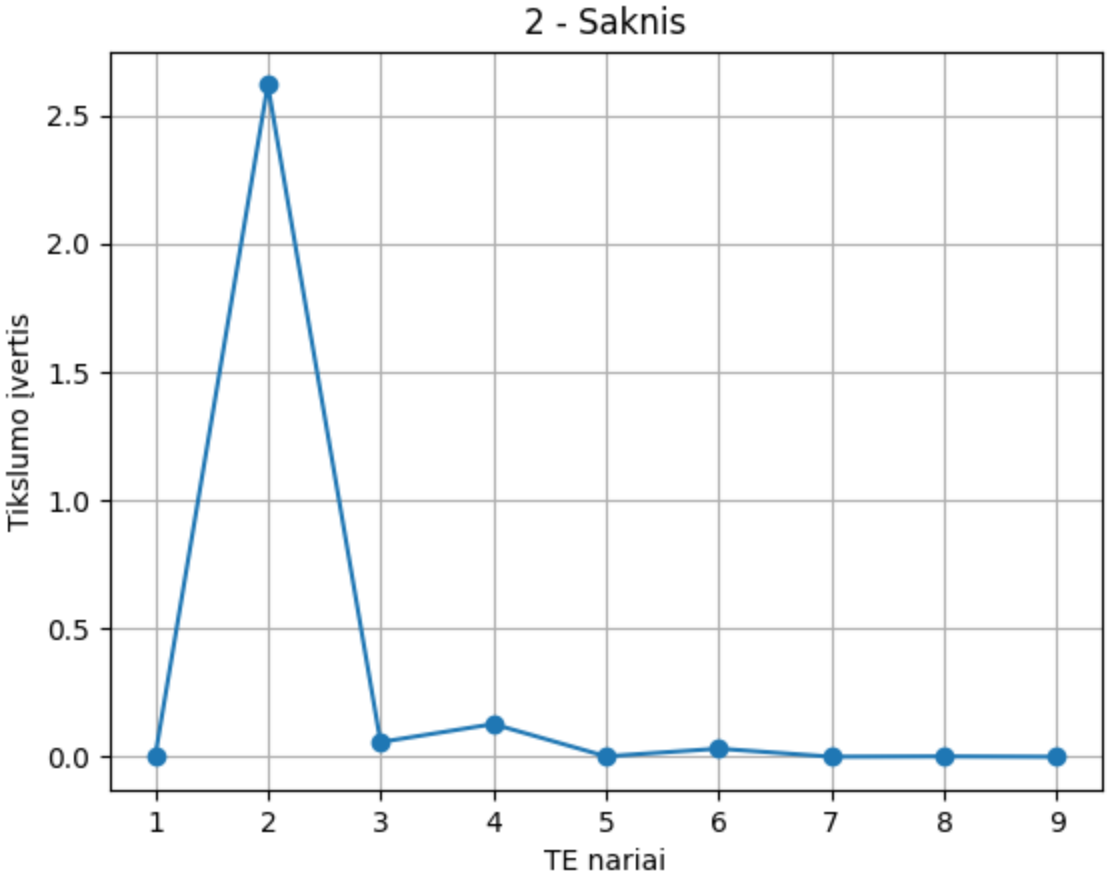
```
        i += 1
    SaknuSk.append(i - 1)
```

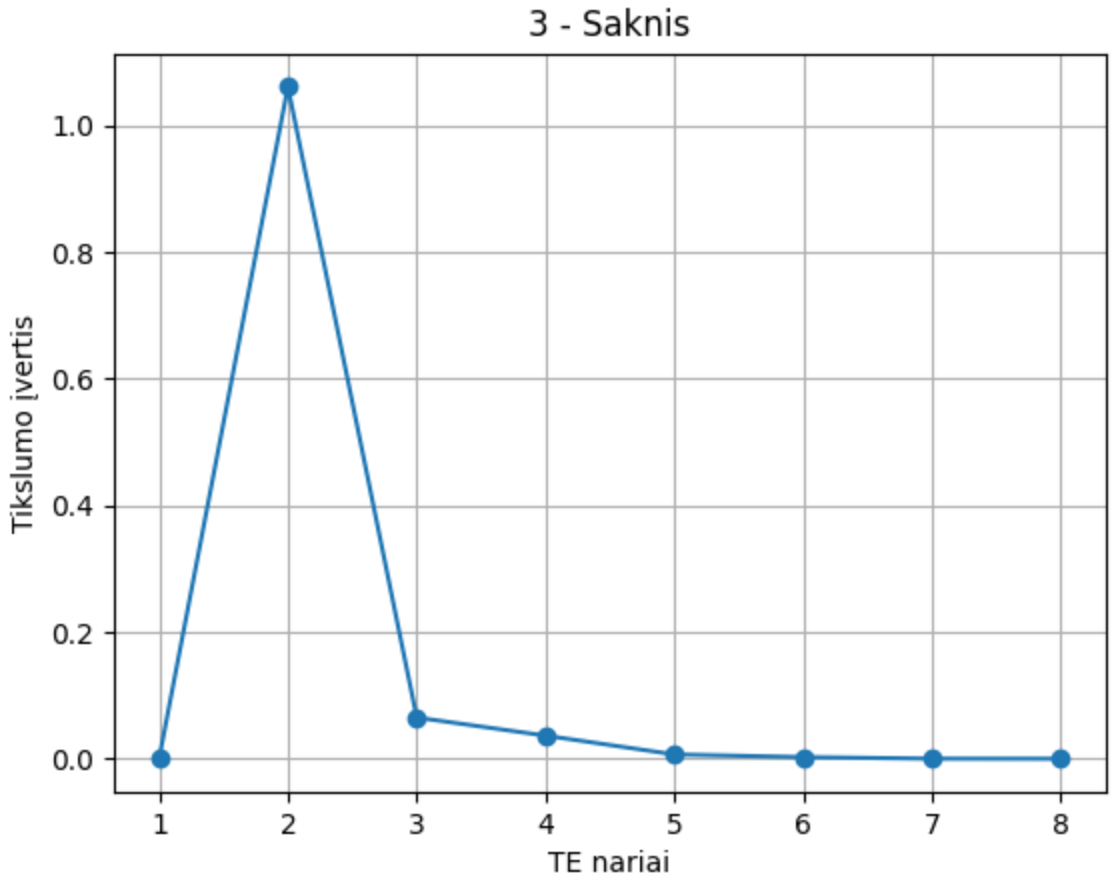
```
#4. a dalis
saknuSk = []
VisiTESkaiciai = VisiTESkaiciai + [0]
VisiTESkaiciai.sort()
GetSaknysTEskaiciu(VisiTESkaiciai, saknuSk) #Gražinamas saknuSk masyvas
y_values = np.linspace(0, 4, 100)
plt.figure()
plt.plot(range(0, maximum + 1), saknuSk, marker='o', label='tikslumai')
plt.xlabel('ox-TE eilė')
plt.ylabel('oy – šaknų skaičius')
plt.grid(True)
plt.show()
```

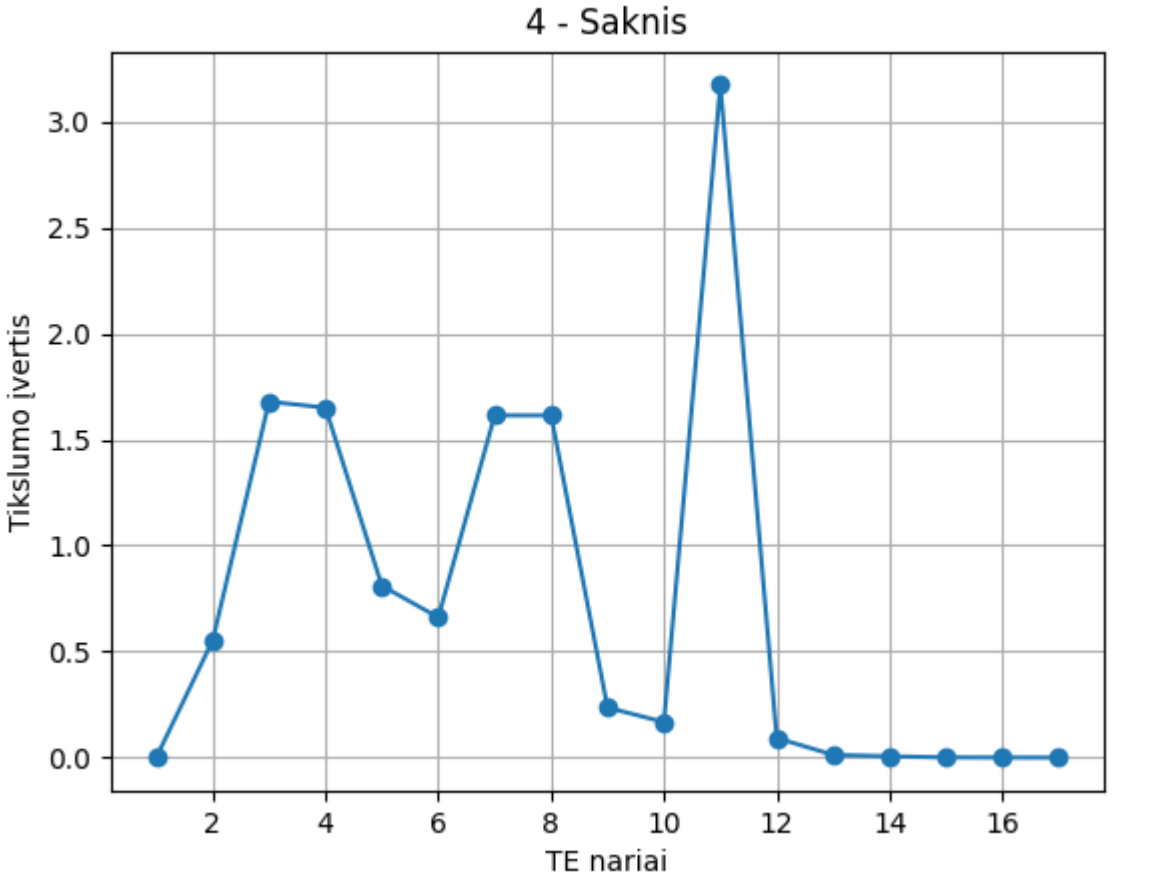
2.4.3. Tikslumo įverčių ir TE narių ieškojimas kiekvienai šakniai

2.4.3.1. Gauti grafikai




2 - Saknis
Tikslumo įvertis
TE nariai
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
1
2
3
4
5
6
7
8
9


3 - Saknis
Tikslumo įvertis
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
1
2
3
4
5
6
7
8
TE nariai



2.4.3.2. Naudotas kodas

```
#4. b dalis
i = 1
for saknis in h_Saknys:
   tikslumuMas = []
   SkaiciusTE, daugianaris = SaknuPanasumas(saknis, tikslumuMas)


   # Atskiras grafikas kiekvienai šakniai
   plt.figure()
   plt.plot(range(1, SkaiciusTE + 1), tikslumuMas, marker='o', label='tikslumai')
   plt.xlabel('TE nariai')
   plt.ylabel('Tikslumo įvertis')
   plt.title('{0} - Saknis'.format(i))
   plt.grid(True)
   i += 1
```

```
plt.show()
```