积分大法

积分为术，变化为宗。授尔诸法，以窥门径。

然！法有形而意无形，招有尽而变无穷。得意忘形，是为大成！

敌之章法 / 所示范例	**我之招式 / 心法口诀**
初窥门径： 范例：$\int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx \to \int (x-1)\,dx$	**第一式：化繁为简** 内功为基，先理其形。 运用代数变化、三角恒等诸般法门，削其冗余，显其真身。
洞察本源： 基本积分形式 范例：$\int x^3\,dx, \int \frac{1}{x}\,dx, \int e^x\,dx, \int \cos x\,dx$	**第二式：本源探寻** 若遇本源之形，无需他法。 直取《积分宝典》基本名录，依谱取之。 （注：$\boxed{\text{对}}$与$\boxed{\text{反}}$(此二派需另寻他法或分部) 其原形不在此列）
敌阵变幻： • 含 $h(x)$ 与其变 $h'(x)\,dx$ • 含根基 $h(x) = \sqrt[n]{ax+b}$ 范例：$\int (2x+1)^5\,dx, \int xe^{x^2}\,dx, \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx,$ $\int \frac{\ln x}{x}\,dx, \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$	**第三式：易筋洗髓** 此乃换元大法。 试令 $u = h(x)$，施展易筋洗髓之功，化繁为简。 （若为 $\sqrt[n]{ax+b}$，则反解 x，求 dx 之变。）
敌阵变幻： • 不同门派函数相乘（如代数 $\times$ 指数） • 或含$\boxed{\text{对}}$、$\boxed{\text{反}}$ （但若伴其导数变身 $h'(x)dx$，优先试易筋洗髓） 范例：$\int xe^x\,dx, \int x^2 \cos x dx, \int e^x \sin x\,dx,$ $\int \ln x\,dx, \int \tan^{-1} x\,dx$	**第四式：左右互搏** 此为分部积分之技。 心法口诀：$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ 择取要领： • u 易施微分之术 • dv 易施积分之法（慎选$\boxed{\text{对}}$/$\boxed{\text{反}}$作 u，可选 $dv = dx$） • 必令 $v\,du$ 再积，其繁简不逾初形 (择 u 之详见要诀)。
敌阵变幻： • $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (有理分式) 范例：$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx, \int \frac{3x+1}{(x+1)(x-2)}\,dx,$ $\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx$	**第五式：条分缕析** 此为拆解之术。 i) 审其真伪：若为假分式（顶重脚轻），先以长除法降之。 ii) 洞察根基：分解分母 $Q(x)$ 之因子 (若含二次不可约因子，后或需配方，见要诀)。 iii) 设项待定：依 $Q(x)$ 因子之形，设部分分式。 iv) 逐一击破：解出待定系数，分别积分。

敌之章法 / 所示范例	**我之招式 / 心法口诀**

敌阵变幻:

- $\sin^m x \cos^n x$

范例: $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$, $\int \cos^5 x\,dx$, $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

第六式: 阴阳互济

m (sin)	n (cos)	**心法**
奇	-	令 $u = \cos x$ (借阴助阳)
-	奇	令 $u = \sin x$ (借阳助阴)
偶	偶	运降幂大法 (见要诀)

敌阵变幻:

- $\tan^m x \sec^n x$
- $\cot^m x \csc^n x$

范例: $\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx$, $\int \tan^3 x \sec x\,dx$, $\int \tan^2 x \sec x\,dx$, $\int \sec^3 x\,dx$

第七式: 切割变换

- $\tan x$ 积分: 化 $\frac{\sin x}{\cos x}$, 令 $u = \cos x$ (易筋洗髓)
- $\sec x$ 积分: 乘 $\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$, 令 $u = \sec x + \tan x$ (巧劲)
- $\sec^n x$, n 奇 (≥ 3): 左右互搏, 取 $dv = \sec^2 x\,dx$

m (tan)	n (sec)	**心法**
奇	-	令 $u = \sec x$
-	偶 (≥ 2)	令 $u = \tan x$
偶 (≥ 2)	奇	转化为仅含 $\sec x$, 再图他法

敌阵变幻:

- $\sin(ax)\cos(bx)$
- $\sin(ax)\sin(bx)$
- $\cos(ax)\cos(bx)$

范例: $\int \sin(5x)\cos(2x)\,dx$

第八式: 乾坤挪移

施展积化和差大法 (见要诀),
化乘积为加减，分而破之。

敌阵变幻:

- 三角有理函数

范例: $\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$

第九式: 万法归一 (三角 IV)

- 此乃通解之道: 令 $t = \tan\frac{x}{2}$ (万能代换, 见要诀)
- 若阵法仅含 $\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x$, 可试 $t = \tan x$ 简化之 (此为变招, 见要诀)

敌阵变幻:

- 含 $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ 之根基

范例: $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

第十式: 移形换位 (移形换位之策)

借三角之力，破根式之缚 (或需配方, 见要诀)。

根式之形	**换位心法**
$\sqrt{a^2-x^2}$	令 $x = a\sin\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\sqrt{a^2+x^2}$	令 $x = a\tan\theta$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\sqrt{x^2-a^2}$	令 $x = a\sec\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$

换位之后，运用三角平方关系，解开根式枷锁。

心法要诀

修习心要 (戒骄戒躁): 积分险途，变化莫测。一招不成，再试一法。戒骄戒躁，静心思变。反复推敲，或能柳暗花明。

门派标记:

- $\boxed{\text{对}}$: 对数派 (如 $\ln x, \log_a x$ 等)
- $\boxed{\text{反}}$: 反三角派 (如 $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ 等)

左右互搏要诀:

- 欲明左右互搏精髓，以定取舍之策，当观此变体：
$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int u'\left(\int v\,dx\right)dx$$
- 择 u 秘诀: *左右互搏，择 u 为先。对数 (L)、反三角 (I) 优先，代数 (A) 次之，三角 (T)、指数 (E) 殿后。此序可鉴，非为铁律，须审时度势，随机应变。*

降幂大法:

- $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

积化和差大法:

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

配方炼形术: 凡遇二次式 (ax^2+bx+c) 盘踞阵眼（如根式下、或需凑微分标准型之分母），常需先行“配方”炼形，化诸般变化为标准架势（如 u^2+k^2、u^2-k^2、k^2-u^2）。此术能显神通，为后续施展移形换位（三角换元）、或直取特定圭臬（如反三角函数积分）打通关窍。

万能代换 (万法归一正宗):

- 立诀曰：$t = \tan\frac{x}{2}$ (此乃归一之法门)
- 推演得：$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ (源自倍角心法)
- 构筑三角阵图 → 洞悉诸般玄机
- 反观其本 $x = 2\tan^{-1} t$，则运化枢要在于 $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

简化代换 (万法归一变招):

- 变通之法曰：$t = \tan x$ (此为捷径)
- 亦可构筑三角阵 → 推演其余变化
- 此时其本 $x = \tan^{-1} t$, 则运化关隘在于 $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

先天之限 (非初等之形): 天地有常，连续则积分必存；然人力有穷，未必能以凡俗（初等）之法描摹其形。须知，世间大多初等功法，其逆炼归元（求原函数）之态，竟非初等面目。此非功法不精，实乃天道、造化之限也。

此类先天受限、非可语于凡俗之形，略举如下以警：
$\int \frac{1}{\ln x}\,dx$, $\int \ln(\ln x)\,dx$, $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$, $\int \sqrt{1-x^4}\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$, $\int \cos e^x\,dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int e^{x^2}\,dx$, $\int x^2 e^{x^2}\,dx$, $\int e^{e^x}\,dx$, $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, $\int x^x\,dx$.

圆满归真 (+C): 求得原形，功成身退时，莫忘凡尘常量 C。此乃不定积分圆满归真之符，缺之则功亏一篑。

验功心法 (回溯求证): 真金不怕火炼，积分岂无验证？功成之后，逆施微分之术，回溯本源，即可校验真伪，方保无虞。