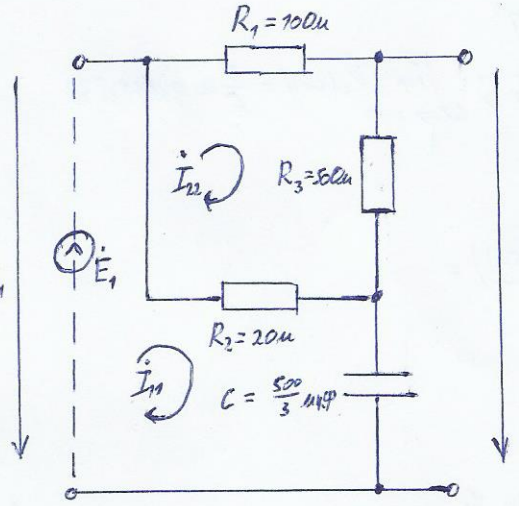
Залыгин Вячеслав ИУ6-33Б (Буква Г) Вариант 15



Дано:

$R_1 = 100м$

$R_2 = 200м$

$R_3 = 500м$

$C = \frac{500}{3}$ мкФ $= \frac{500}{3} \cdot 10^{-6}$ Ф $= \frac{5}{3} \cdot 10^{-4}$ Ф

перейдем в комплексные амплитуды

$Z_1 = R_1$

$Z_2 = R_2$

$Z_3 = R_3$

$Z_4 = \frac{1}{j\omega C}$

Решение: 1) Найдем $\dot{U}_2$ методом контурных токов

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(Z_2 + Z_4) - \dot{I}_{22} Z_2 = \dot{E}_1 \\ \dot{I}_{22}(Z_1 + Z_2 + Z_3) - \dot{I}_{11} Z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_{11}(Z_2 + Z_4) - \dot{I}_{22} Z_2 = \dot{E}_1 \quad (1) \\ \dot{I}_{22} = \dot{I}_{11} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad (2) \end{cases}$$

Подставим (2) в (1):

$$\dot{I}_{11}\left(Z_2 + Z_4 - \frac{Z_2^2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}\right) = \dot{E}_1; \quad \dot{I}_{11} \frac{(Z_2 + Z_4)(Z_1 + Z_2 + Z_3) - Z_2^2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \dot{E}_1;$$

$$\dot{I}_{11} \frac{Z_2(Z_1 + Z_3) + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \dot{E}_1 \Rightarrow \dot{I}_{11} = \dot{E}_1 \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_2(Z_1 + Z_3) + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)} \quad (3)$$

Подставим (3) в (2): $\dot{I}_{22} = \dot{E}_1 \frac{Z_2}{Z_2(Z_1 + Z_3) + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}$

Тогда: $\dot{U}_2 = \dot{I}_{11} Z_3 + \dot{I}_{22} Z_3 =$

$$\dot{U}_2 = \dot{E}_1 \frac{Z_3 \cdot Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_2(Z_1 + Z_3) + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}$$

Наконец найдем $\dot{K}_u$:

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_3 \cdot Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_2(Z_1 + Z_3) + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)} \cdot \frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_1}$$

Вернемся к $R_4 C$:

$$\dot{K}_u(\omega) = \frac{R_2 R_3 + \frac{1}{j\omega C}(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3) + \frac{1}{j\omega C}(R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{j\omega C R_2 R_3 + (R_1 + R_2 + R_3)}{j\omega C R_2(R_1 + R_3) + (R_1 + R_2 + R_3)}$$

– зависимость комплексного коэффициента передачи от напряжения

2) Получим формулы АЧХ и ФЧХ.

$$|\dot{K}_u(\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 C^2 R_2^2 R_3^2 + (R_1 + R_2 + R_3)^2}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R_2^2 (R_1 + R_3)^2 + (R_1 + R_2 + R_3)^2}} \quad \text{– АЧХ}$$

$$\arg(\dot{K}_u(\omega)) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega C R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega C R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}\right) \quad \text{– ФЧХ}$$

Подставим значения R и C в АЧХ и ФЧХ:

$$|\dot{K}_u(w)| = \frac{\sqrt{w^2\left(\frac{5}{3}\cdot 10^{-4}\cdot 20 - 50\right)^2 + (10+20+50)^2}}{\sqrt{w^2\left(\frac{5}{3}\cdot 10^{-4}\cdot 20(10+50)\right)^2 + (10+20+50)^2}} = \frac{\sqrt{w^2\frac{1}{36} + 6400}}{\sqrt{w^2\frac{1}{25} + 6400}}; \quad \lim_{w\to+\infty}|\dot{K}_u(w)| = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$$

$$\arg(\dot{K}_u(w)) = \operatorname{arctg}\left(\frac{w\cdot\frac{5}{3}\cdot 10^{-4}\cdot 20 - 50}{10+20+50}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{w\cdot\frac{5}{3}\cdot 10^{-4}\cdot 20(10+50)}{10+20+50}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{w}{480}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{w}{400}\right); \quad \lim_{w\to+\infty}\arg(\dot{K}_u(w)) = 0$$

Построим графики зависимости АЧХ и ФЧХ от w:

таблица 1.

w	0	100	200	400	600	800	1000
$\lvert\dot{K}_u(w)\rvert$	1	0,991	0,969	0,920	0,888	0,869	0,858

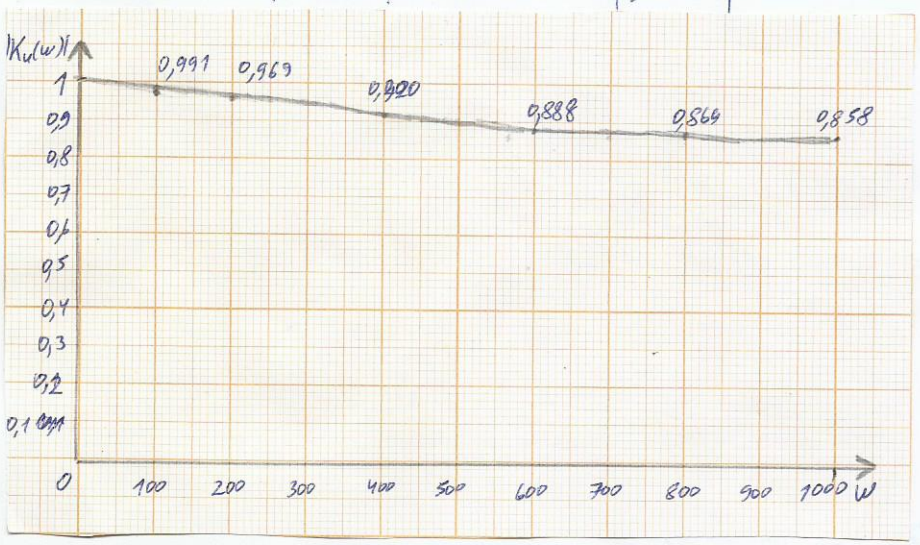


рис.1 График АЧХ

таблица 2.

w	0	100	200	300	400	500	600	800	1000	1400	1800	2200
$\arg(\dot{K}_u(w))$	0	-0,040	-0,069	-0,085	-0,090	-0,090	-0,087	-0,077	-0,067	-0,052	-0,042	-0,035

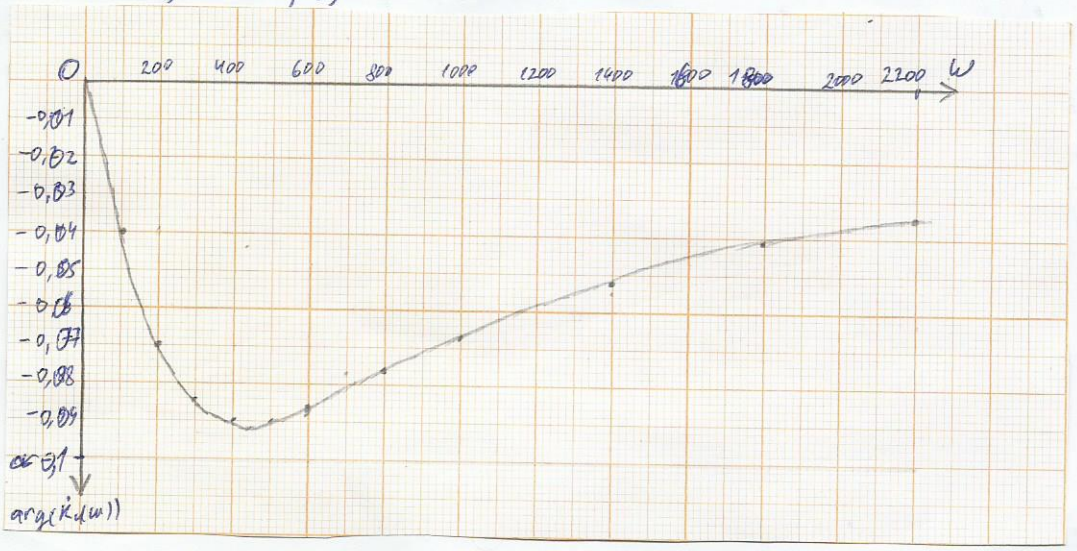


рис.2 ФЧХ

3) Построим годограф Найквиста

Для этого разложим $\dot{K}_u(w)$ на действительную и мнимую составляющие.

$$\dot{K}_u(w) = \frac{jwCR_2R_3 + (R_1+R_2+R_3)}{jwCR_2(R_1+R_3) + (R_1+R_2+R_3)} \cdot \frac{(R_1+R_2+R_3) - jwCR_2(R_1+R_3)}{(R_1+R_2+R_3) - jwCR_2(R_1+R_3)} =$$

$$= \frac{(R_1+R_2+R_3)^2 + w^2C^2R_2^2(R_1+R_3)R_3}{(R_1+R_2+R_3)^2 + w^2C^2R_2^2(R_1+R_3)^2} + jwCR_2 \frac{(R_3 - (R_1+R_3))(R_1+R_2+R_3)}{(R_1+R_2+R_3)^2 + w^2C^2R_2^2(R_1+R_3)^2}$$

Подставим R_1, R_2, R_3, C

$$\dot{K}_u(w) = \frac{6400 + w^2 \cdot \frac{1}{30}}{6400 + w^2 \cdot \frac{1}{25}} + j\frac{w\left(-\frac{8}{3}\right)}{6400 + w^2\frac{1}{25}} = \frac{6400 + w^2\frac{1}{30}}{6400 + w^2\frac{1}{25}} - j\frac{w\frac{8}{3}}{6400 + w^2\frac{1}{25}}$$

$\dot{K}_u(0) = 1 + 0j$

$\dot{K}_u(10) = 0{,}999 - 0{,}004j$

$\dot{K}_u(100) = 0{,}990 - 0{,}039j$

$\dot{K}_u(1000) = 0{,}856 - 0{,}057j$

$\dot{K}_u(2 \cdot 1000) = 0{,}839 - 0{,}032j$

$\dot{K}_u(\infty) = \frac{5}{6} + 0 \cdot j$

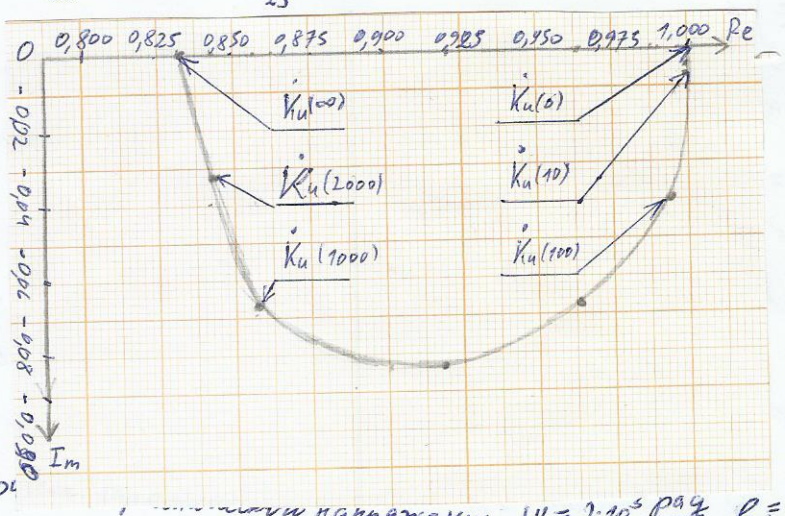
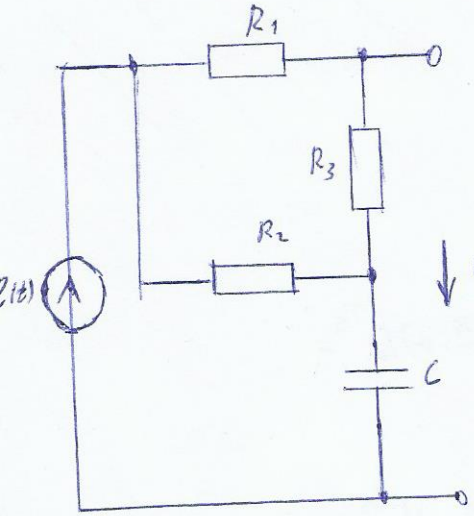


рис.3.

4) Подключим к входу системы источник [illegible] напряжения $w = 2 \cdot 10^5 \frac{рад}{с}$, $e = 10$ в



$e(t) = 10\cos(wt)$

$|\dot{K}_u(2000)| = 0{,}840$

$\arg(\dot{K}_u(2000)) = -0{,}038$

$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Rightarrow \dot{U}_2 = \dot{K}_u\dot{U}_1 = 0{,}840 \cdot 10 \cdot \cos(wt - 0{,}038) =$

$= 8{,}4\cos(wt - 0{,}038)$

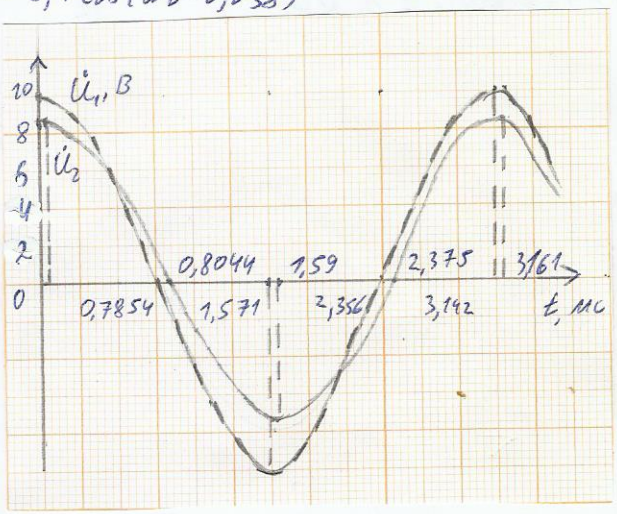
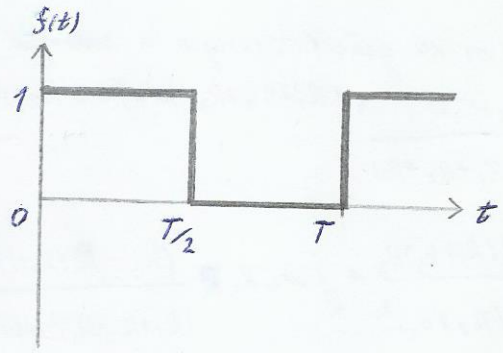


рис. 4

5) Опишем знакоположительный меандр аналитически

$$S(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } \sin t \geq 0 \\ 0 \text{ при } \sin t < 0 \end{cases}$$



Разложим в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \text{ где } a_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos(k\omega t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\sin(k\omega t)dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)dt = \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2} = 1$$; Будем исследовать только $[0; \frac{T}{2}]$, т.к. ф-ции $e(t)\cos(k\omega t)$ и $e(t)\sin(k\omega t)$ равны нулю на $[\frac{T}{2}; T]$

Рассчитаем первую гармонику: $k=1$

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e(t)\cos(\omega t)dt = 0$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e(t)\sin(\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = -\frac{2}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cdot\frac{T}{2\pi}\Big|_{t=0}^{t=T/2} = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}$$

Рассчитаем вторую гармонику: $k=2$

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e(t)\cos(2\omega t) = 0$$

$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e(t)\sin(2\omega t) =$$

Найдем a_k и b_k в общем виде для произвольного k.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e(t)\cos(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi k}{T}\cdot t\right)\Big|_0^{T/2} =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left(\sin\left(\frac{2\pi k}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - \sin(0)\right) = 0 \ \forall k$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e(t)\sin(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = -\frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2\pi k}\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\Big|_0^{T/2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - \cos(0)\right) = -\frac{1}{\pi k}(\cos(\pi k) - 1)$$

Пусть $k = 2n \ \forall n \in \mathbb{Z}$ (четные гармоники) $\Rightarrow \cos(\pi k) = 1 \Rightarrow b_k = 0$

Пусть $k = 2n+1 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ (нечетные гармоники) $\Rightarrow \cos(\pi k) = -1 \Rightarrow b_k = +\frac{2}{\pi k}$

Составим таблицу с амплитудами гармоник:

Таблица 3. Значения a_k и b_k для разных k.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_k	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_k	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0	$\frac{2}{7\pi}$	0	$\frac{2}{9\pi}$

Гармоники входного сигнала:

$e^{(0)}(t) = \frac{1}{2}$

$e^{(1)}(t) = \frac{2}{\pi}\sin \omega t$

$e^{(2)}(t) = 0$

$e^{(3)}(t) = \frac{2}{3\pi}\sin 3\omega t$

$e^{(4)}(t) = 0$

$e^{(5)}(t) = \frac{2}{5\pi}\sin 5\omega t$

$e^{(6)}(t) = 0$

$e^{(7)}(t) = \frac{2}{7\pi}\sin 7\omega t$

$e^{(8)}(t) = 0$

$e^{(9)}(t) = \frac{2}{9\pi}\sin 9\omega t$

Найдем гармоники ~~входа~~ выходного сигнала

Таблица 4.

n	0	1	3	5	7	9
$\lvert \dot{K}_u(2000n) \rvert$	1	0,8403	0,8341	0,8336	0,8334	0,8334
$\arg(\dot{K}_u(2000n))$	0	-0,0381	-0,0132	-0,0079	-0,0057	-0,0044

$\dot{U}_2^{(n)} = \dot{K}_u(n\cdot\omega)\cdot E^{(n)}$

$\dot{U}_2^{(0)} = 1\cdot\frac{1}{2} = 0,5$

$\dot{U}_2^{(1)} = 0,8403\cdot\frac{2}{\pi}\sin(\omega t - 0,0381) = 0,535\sin(\omega t - 0,0381)$

$U_2^{(3)} = 0,8341\cdot\frac{2}{3\pi}\sin(\omega t - 0,0132) = 0,177\sin(3\omega t - 0,0132)$

$U_2^{(5)} = 0,8336\cdot\frac{2}{5\pi}\sin(\omega t - 0,0079) = 0,106\sin(5\omega t - 0,0079)$

$U_2^{(7)} = 0,8334\cdot\frac{2}{7\pi}\sin(\omega t - 0,0057) = 0,075\sin(7\omega t - 0,0057)$

$U_2^{(9)} = 0,8334\cdot\frac{2}{9\pi}\sin(\omega t - 0,0044) = 0,0585\sin(9\omega t - 0,0044)$

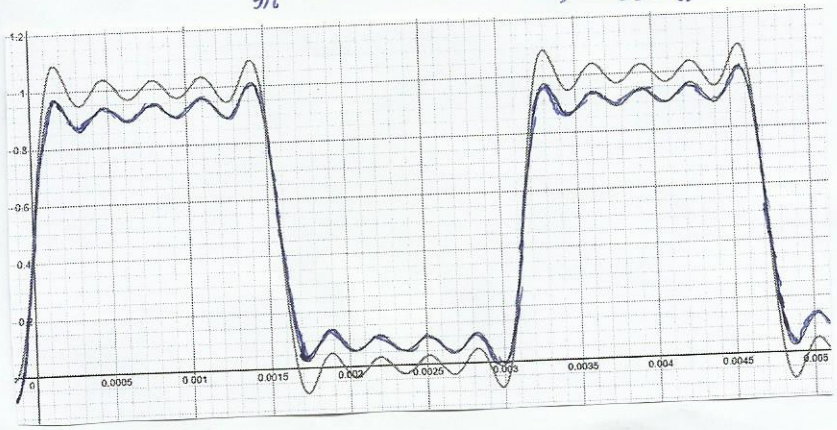


рис. 5 черный – входной сигнал
синий – выходной сигнал

б) Изобразим на графиках модуль спектра входного сигнала,
модуль спектра выходного сигнала,
модуль спектра фазы выходного сигнала.

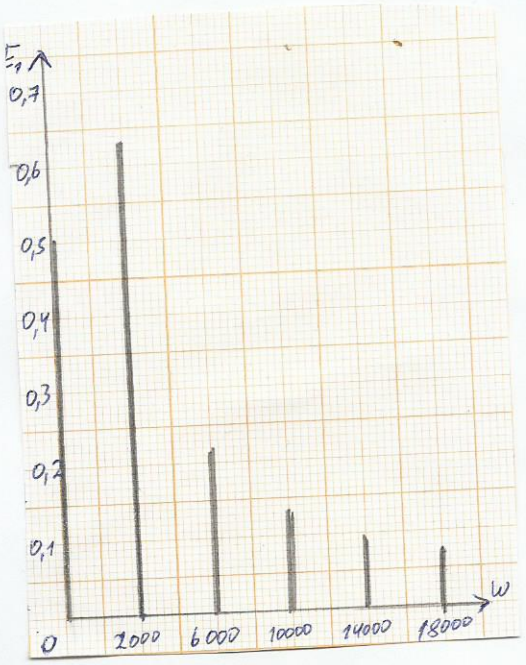


рис.6 спектр входного сигнала

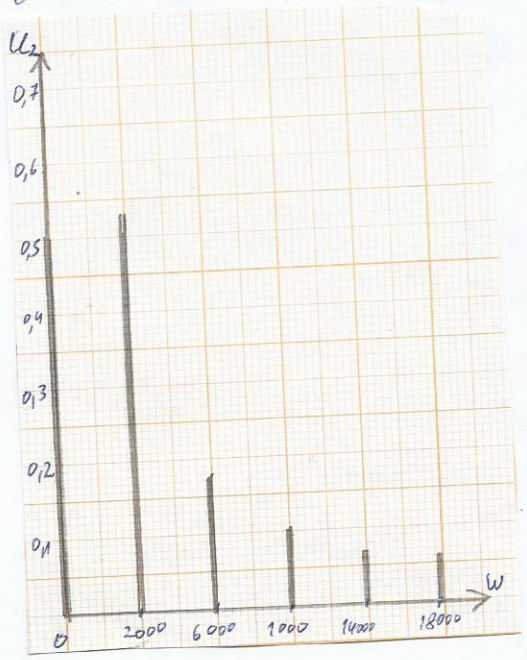


рис. 7 спектр выходного сигнала

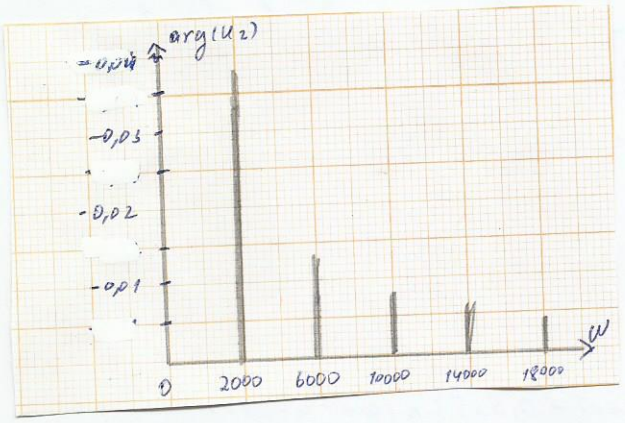


рис. 8 спектр фазы выходного сигнала

7) Введем формулу зависимости комплексного входного сопротивления от частоты.

$$Z_{13} = z_1 + z_3$$

$$Z_{123} = \frac{z_2 z_{13}}{z_2 + z_{13}} = \frac{z_2(z_1+z_3)}{z_1+z_2+z_3}$$

$$Z_{общ} = z_{123} + z_4 = \frac{z_2(z_1+z_3)}{z_1+z_2+z_3} + z_4 = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} + \frac{1}{j\omega C} = \underbrace{\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}}_{Re\{Z_{общ}\}} - \underbrace{j\frac{1}{\omega C}}_{Im\{Z_{общ}\}}$$

$$Z_{вх}(\omega) = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} + j\frac{(-1)}{\omega C}$$ - зависимость комплексного входного напряжения от частоты

$$|Z(\omega)| = \sqrt{\frac{R_2^2(R_1+R_3)^2}{(R_1+R_2+R_3)^2} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{225 + \frac{9\cdot 10^8}{256\omega^2}}$$

$$arg(Z(\omega)) = arctg\left(\frac{(R_1+R_2+R_3)}{\omega C R_2(R_1+R_3)}\right) = arctg\left(\frac{400}{\omega}\right)$$

$$Re\{Z(\omega)\} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} = 15$$

$$Im\{Z(\omega)\} = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{50000}{3\omega}$$

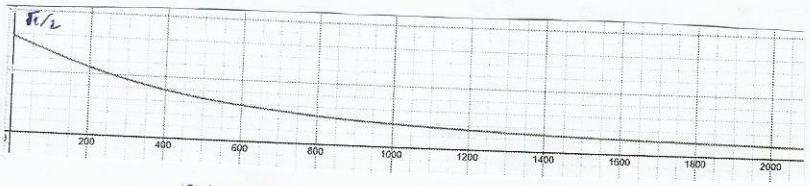


рис 9. фаза комплексного сопротивления

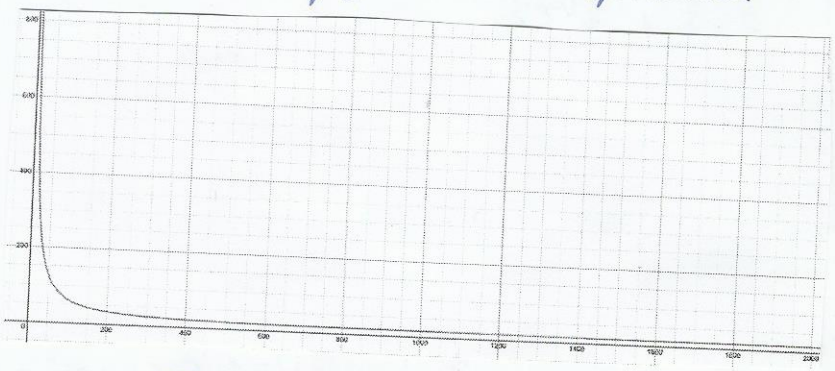


рис. 10 модуль комплексного сопротивления

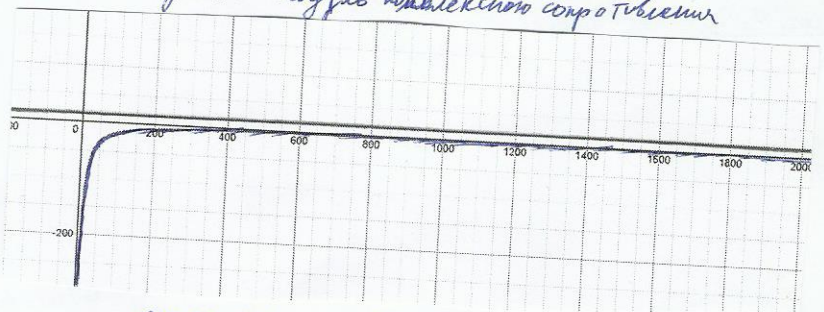


рис. 11 контуры комплексного сопротивления
черный – действительная
синий – мнимая

8) Найдем зависимость силы тока от времени. при $\omega = 2 \cdot 10^3 \frac{рад}{с}$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{z} = \frac{1}{\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C(R_1+R_2+R_3)}{j\omega C R_2(R_1+R_3)+(R_1+R_2+R_3)}$$

$$|\dot{I}| = \frac{\sqrt{\omega^2 C^2 (R_1+R_2+R_3)^2}}{\sqrt{(R_1+R_2+R_3)^2 + \omega^2 C^2 R_2^2 (R_1+R_3)^2}} = \frac{\sqrt{26}}{78} = 0{,}065$$

$$\arg(\dot{I}) = \operatorname{arctan}\left(\frac{\omega C(R_1+R_2+R_3)}{0}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega C R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}\right) = \frac{\pi}{2} - 1{,}373 = 0{,}197$$

$$I_{вх}(t) = 0{,}065 \cos(\omega t + 0{,}197)$$

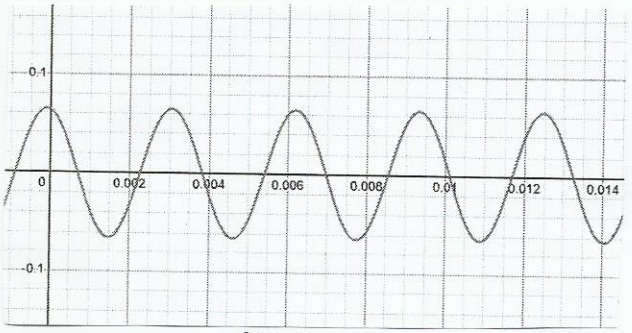
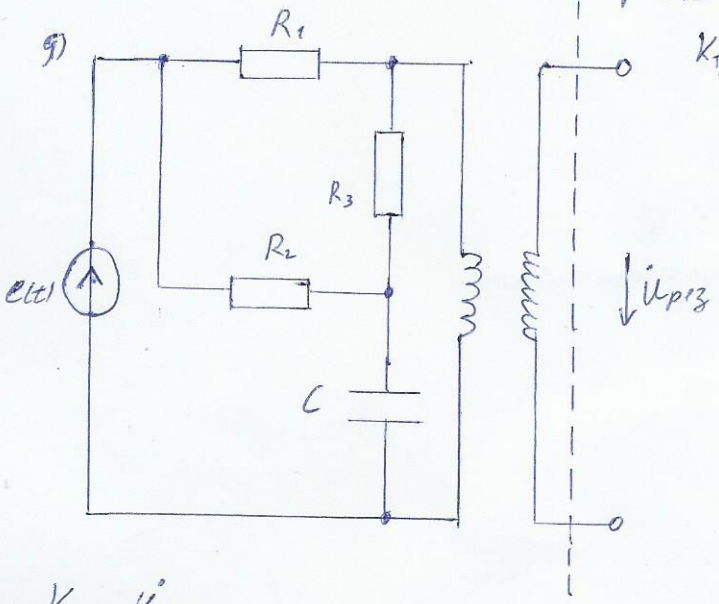


рис 12 сила тока от времени

9)



$K_{тр} = 15$, $\omega = 2 \cdot 10^3 \frac{рад}{с}$, $E_{вх} = 16$

$$K_{тр} = \frac{\dot{U}_{рез}}{\dot{U}_{вых}} = 15 \Rightarrow \dot{U}_{рез}; = \dot{U}_{вых} K_{тр} = 15(0{,}839 - 0{,}032j) = 12{,}585 - 0{,}48j = \dot{E}_э$$

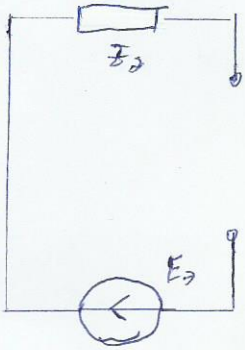
$$\dot{U}_{вых} = \dot{K}_u U_{вх} = 1 \cdot \frac{j\omega C R_2 R_3 + (R_1+R_2+R_3)}{j\omega C R_2(R_1+R_3)+(R_1+R_2+R_3)} = \frac{131}{156} - \frac{5}{156}j = 0{,}839 - 0{,}032j$$

Найдем внутреннее сопротивление ~~здесь~~ эквивалентного источника:

$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$ $R_{12} = R_1 + R_2$; $R_{123} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}$; $R_{123L} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} + \frac{1}{j\omega C} = 18{,}75 - \frac{6000j}{\omega}$

$Z = R_{123L}\big|_{\omega=2000} = 18{,}75 - 3j$

Эквивалентная схема



$$Z_э = K_{тр}^2 Z$$

$$Z_э = 225 \cdot (18{,}75 - 3j) = 4218{,}75 - 675j$$