

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

по домашнему заданию

Тема: Поток в транспортной сети. Алгоритм Форда-Фалкерсона

Дисциплина: Дискретная математика

В.К. Залыгин
(И.О. Фамилия)

И.Б. Трамов
(И.О. Фамилия)

Москва, 2024

Задание

Сеть в виде взвешенного орграфа задана матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер. При помощи алгоритма Форда – Фалкерсона определить максимальный поток φ_{max} , доставляемый от источника $s = x_1$ к стоку $t = x_{12}$ и указать минимальный разрез, отделяющий t от s .

Оптимизационную часть алгоритма реализовать в виде коррекции потока хотя бы на одном увеличивающем маршруте.

Матрица Ω для варианта 14 представлена на рисунке 1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1	–	40	21	7	14	–	–	–	–	–	–	–
x_2	–	–	20	–	–	–	43	–	–	–	–	–
x_3	–	–	–	–	–	61	12	–	–	–	–	–
x_4	–	–	45	–	8	–	–	–	–	18	–	–
x_5	–	–	–	–	–	–	–	12	–	–	–	–
x_6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5
x_7	–	–	–	38	–	30	–	–	46	–	–	–
x_8	–	–	–	64	–	–	–	–	–	6	23	–
x_9	–	–	–	–	–	14	–	–	–	28	–	23
x_{10}	–	–	–	–	–	–	11	–	–	–	33	10
x_{11}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56
x_{12}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Рисунок 1 – Матрица Ω

Базовые теоретические сведения

Сетью называется связный, ориентированный, взвешенный граф $G(X, U, C)$ без петель, в котором ровно 1 вершина $s \in X$ не имеет входящих дуг – источник, ровно 1 вершина $t \in X$ не имеет исходящих дуг – сток. Дуга сети – ребро.

На множестве дуг сети определена функция $\phi = (x_i, x_j)$, называемая потоком, для которой верно неравенство $0 \leq \phi(x_i, x_j) \leq c(x_i, x_j)$.

Для всех вершин сети кроме источника и стока должно выполняться условие баланса потока: $\sum_{x_k \in \Gamma^{-1}x_i} \phi(x_k, x_i) = \sum_{x_k \in \Gamma x_i} \phi(x_k, x_i)$. Для всей сети должно выполняться условие баланса в сети: $\sum_{x_k \in X \setminus \{s\}} \phi(x_k, x_i) = \sum_{x_k \in X \setminus \{t\}} \phi(x_i, x_k)$.

Разрез связного графа – множество дуг, удаление которых из графа делает его несвязным. Ориентированный разрез графа – множество дуг, имеющих начало в X' и окончание в X'' .

Для выполнения задания необходимо использовать алгоритм Форда-Фалкерсона. В данном алгоритме используются 4 теоремы.

Теорема 1: если (s, x_n, \dots, x_k, t) – путь от источника к стоку, состоящий только из ненасыщенных дуг, то значение потока на всех его дугах можно увеличить на $\delta^* = \min_{\text{по всем дугам пути}} \{\delta(x_i, x_j)\} = \min_{\text{по всем дугам пути}} \{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$. При этом величина потока в сети возрастет на δ^* .

Теорема 2: если (s, x_n, \dots, x_k, t) – увеличивающий маршрут, то значение потока на его прямых дугах можно увеличить, а на обратных – уменьшить на величину $\varepsilon^* = \min\{\delta^*, \varphi^*\}$, где $\delta^* = \min_{\text{по прямым дугам}} \{\delta(x_i, x_j)\} = \min_{\text{по прямым дугам}} \{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$, $\varphi^* = \min_{\text{по обратным дугам}} \{\varphi(x_i, x_j)\}$. При этом величина потока в сети возрастает на ε^* .

Теорема 3: величина потока в сети является максимальной тогда и только тогда, когда в сети не существует увеличивающего маршрута.

Теорема 4 (Форда-Фалкерсона): для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети, доставляемого от источника к стоку, равна пропускной способности минимального разреза $\Phi_{\max} = c_{\min}$.

Решение

1 Присвоение начального значения потока в сети

Пусть начальное значение на всех дугах равно нулю. Тогда начальная величина потока в сети: $\phi = \phi(x_6, x_{12}) + \phi(x_9, x_{12}) + \phi(x_{10}, x_{12}) + \phi(x_{11}, x_{12}) = 0$.

На рисунке 2 представлена сеть, построенная по матрице Ω . Каждая дуга имеет 2 числа – поток на данный момент решения и пропускная способность.

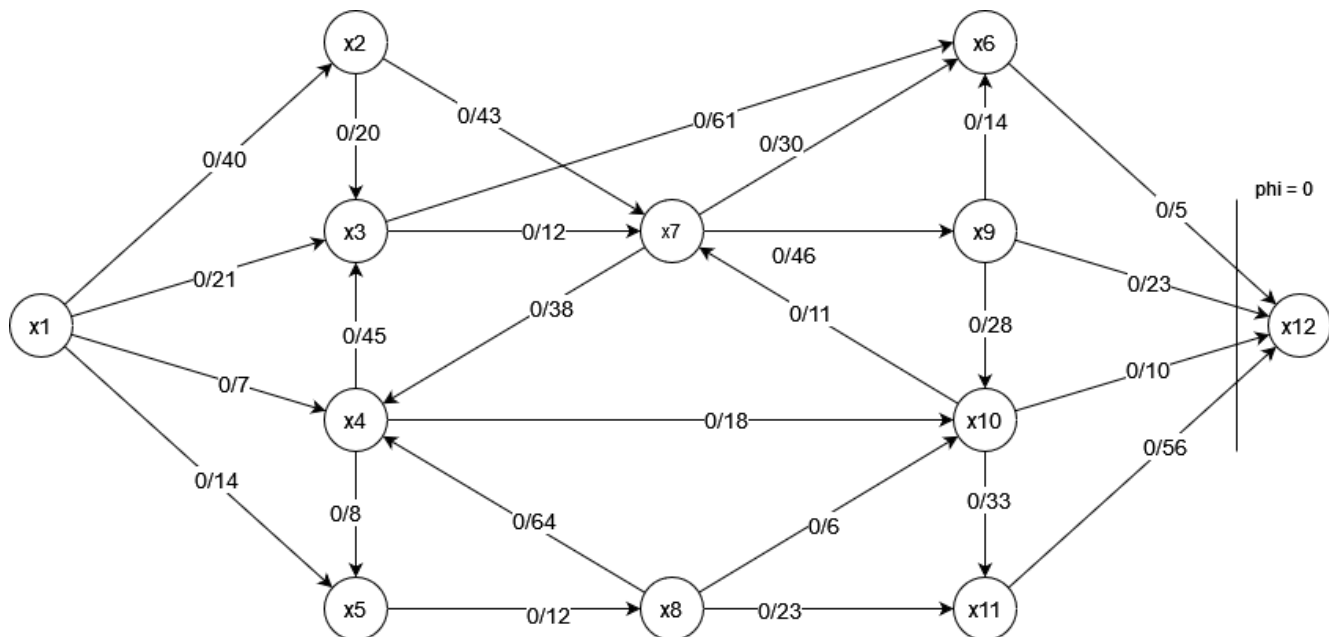


Рисунок 2 – Начальные значения сети

2 Нахождение полного потока

По теореме 1 для нахождения полного потока необходимо увеличить потоки на путях от источника к стоку, состоящих из ненасыщенных дуг.

1) Выбран путь $(x_1, x_5, x_8, x_4, x_3, x_6, x_{12})$. Путь изображен на рисунке 3. Для данного пути $\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_8), \delta(x_8, x_4), \delta(x_4, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_{12})\} = \min\{14-0, 12-0, 64-0, 45-0, 61-0, 5-0\} = \min\{14, 12, 64, 45, 61, 5\} = 5$. Тогда $\phi = 5$, а дуга (x_6, x_{12}) стала насыщенной.

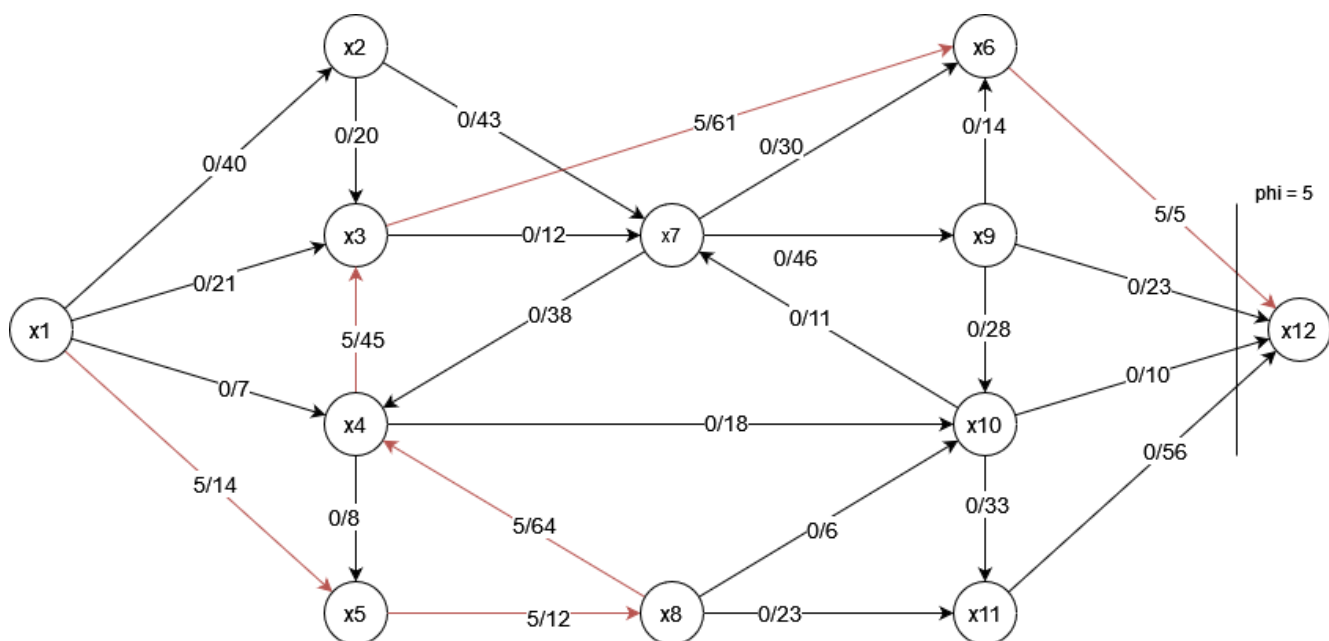


Рисунок 3 – Первый путь

2) Выбран путь $(x_1, x_2, x_7, x_4, x_{10}, x_{12})$. Путь изображен на рисунке 4. Для данного пути $\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_7), \delta(x_7, x_4), \delta(x_4, x_{10}), \delta(x_{10}, x_{12})\} = \min\{40, 43, 38, 18, 10\} = 10$. Тогда $\phi = 15$, а дуга (x_{10}, x_{12}) стала насыщенной.

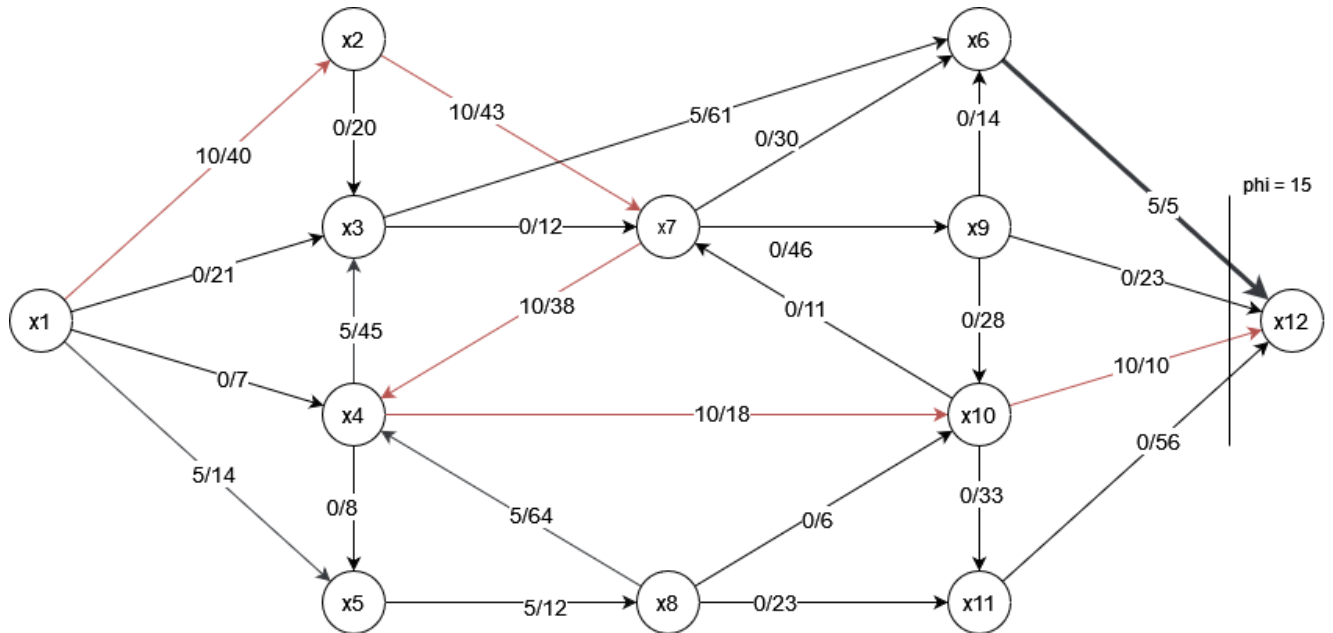


Рисунок 4 – Второй путь

3) Выбран путь $(x_1, x_4, x_5, x_8, x_{10}, x_7, x_9, x_{12})$. Путь изображен на рисунке 5. Для данного пути $\delta^* = \min\{7, 8, 7, 6, 11, 46, 23\} = 6$. Тогда $\phi = 21$, а дуга (x_8, x_{10}) стала насыщенной.

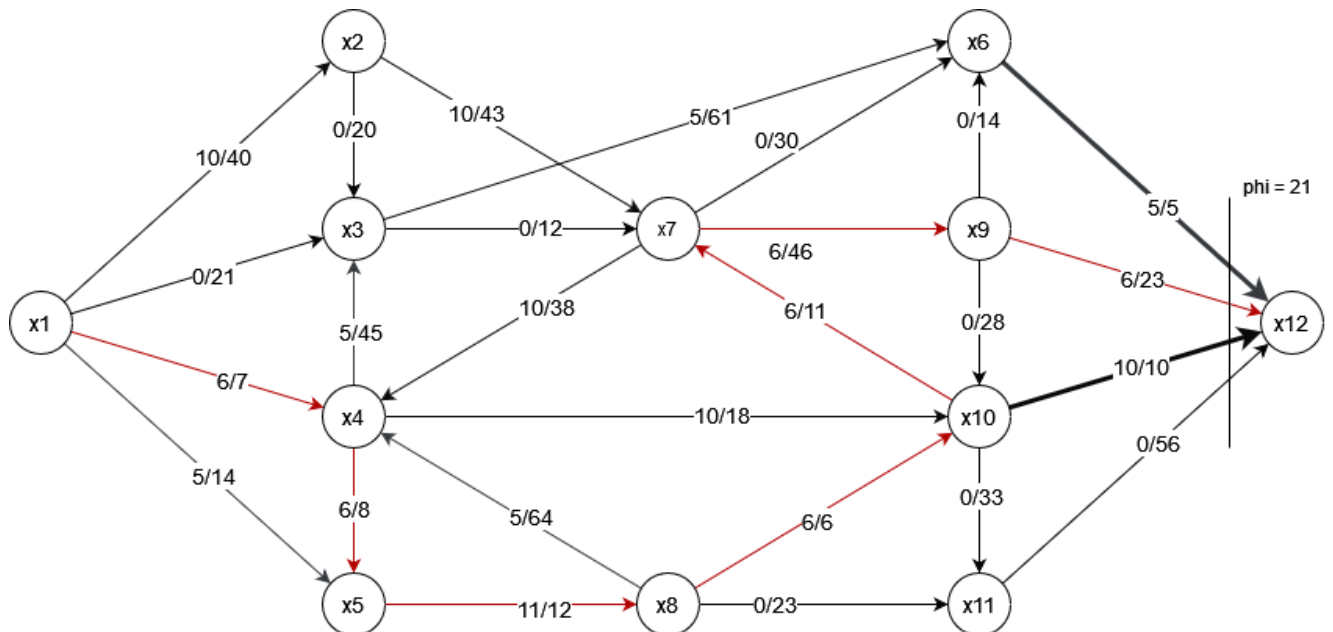


Рисунок 5 – Третий путь

4) Выбран путь $(x_1, x_3, x_7, x_9, x_{12})$. Путь изображен на рисунке 6. Для данного пути $\delta^* = \min\{21, 12, 40, 17\} = 12$. Тогда $\phi = 33$, а дуга (x_3, x_7) стала насыщенной.

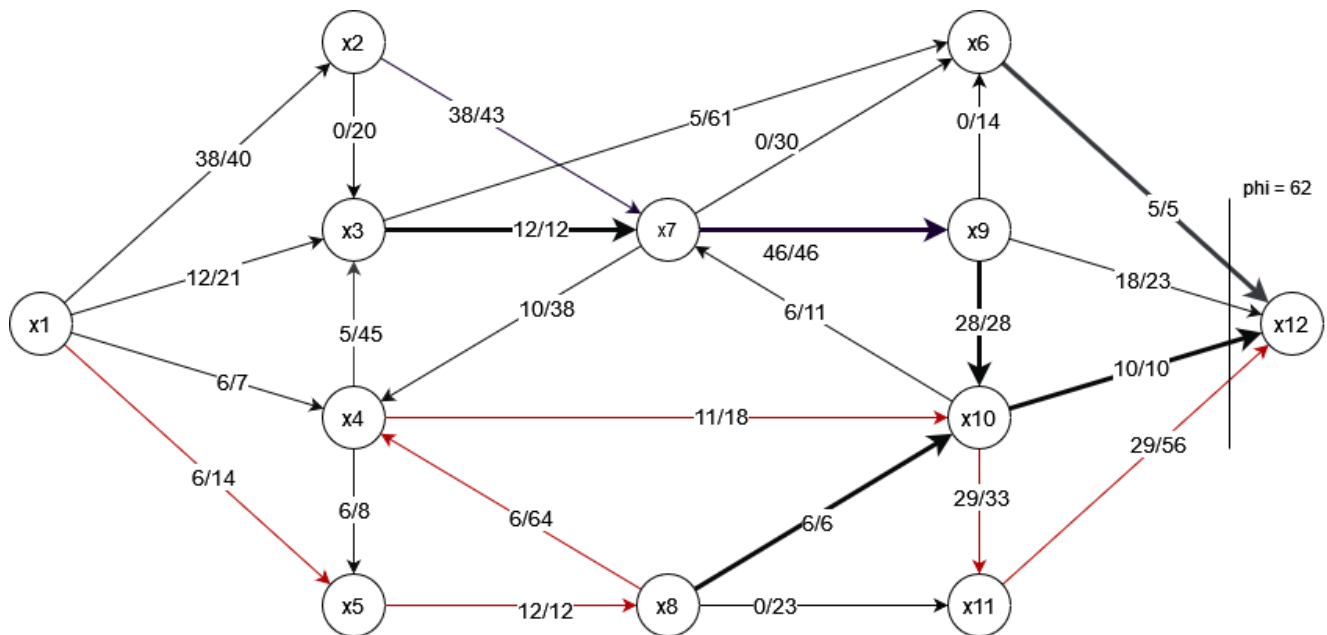


Рисунок 8 – Шестой путь

7) Выбран путь $(x_1, x_4, x_{10}, x_{12})$. Путь изображен на рисунке 9. Для данного пути $\delta^* = \min\{1, 7, 4, 27\} = 1$. Тогда $\phi = 63$, а дуга (x_1, x_4) стала насыщенной.

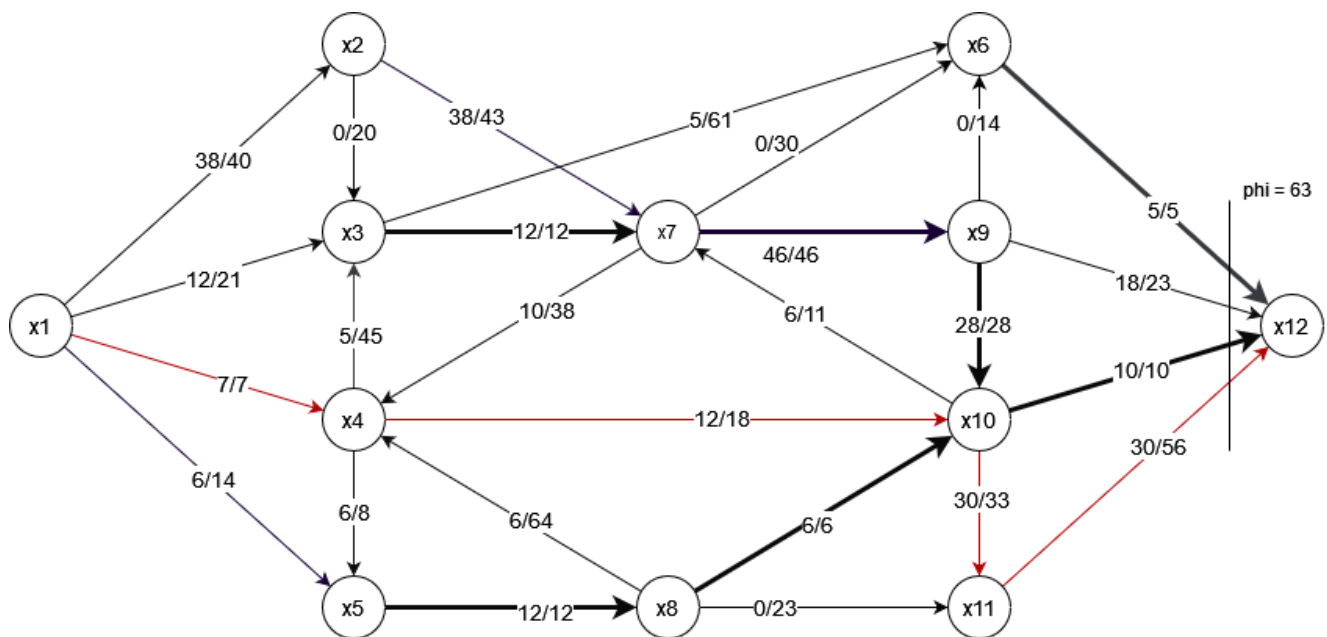


Рисунок 9 – Седьмой путь

8) Выбран путь $(x_1, x_2, x_7, x_4, x_{10}, x_{11}, x_{12})$. Путь изображен на рисунке 10. Для данного пути $\delta^* = \min\{2, 5, 28, 6, 30, 26\} = 2$. Тогда $\phi = 65$, а дуга (x_1, x_2) стала насыщенной.

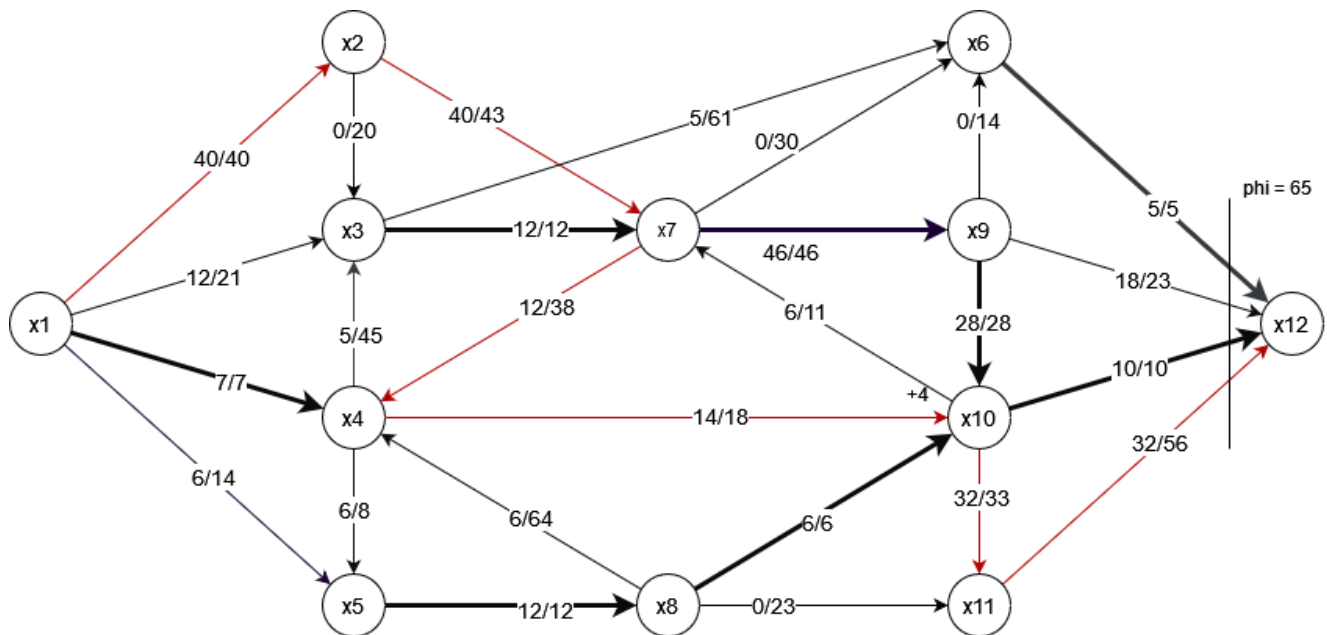


Рисунок 10 – Восьмой путь

9) После перебора не осталось путей, которые бы не проходили через насыщенные дуги. Тогда полный поток через сеть становится $\phi = 65$. На рисунке 10 показана сеть с выделенными жирным насыщенными дугами.

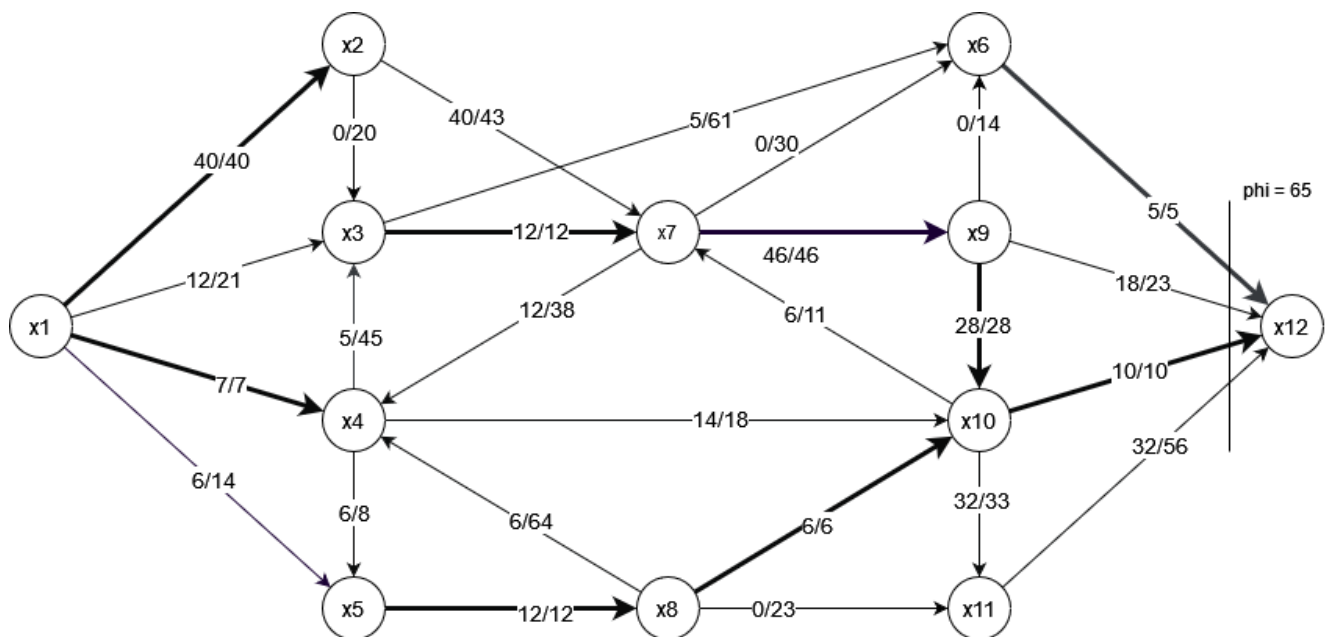


Рисунок 11 – Сеть с найденным полным потоком и насыщенными дугами

3 Достижение максимального потока

По теореме 2 необходимо выполнить максимизацию потока. Для этого нужно найти увеличивающие маршруты.

1) После разметки вершин по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут $(x_1, x_5, x_4, x_{10}, x_{11}, x_{12})$. Маршрут показан на рисунке 12. Тогда переменные $\delta^*, \phi^*, \epsilon^*$ будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned}\delta^* &= \min_{\text{по прямым дугам}} \{\delta(x_1, x_5), \delta(x_4, x_{10}), \delta(x_{10}, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} \\ &= \min\{14 - 6, 18 - 14, 33 - 32, 56 - 32\} = \min\{8, 4, 1, 24\} = 1 \\ \phi^* &= \min_{\text{по обратным дугам}} \{\phi(x_5, x_4)\} = \min(5) = 5 \\ \epsilon^* &= \min(\delta^*, \phi^*) = 1\end{aligned}$$

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на ϵ^* , а обратная дуга уменьшает поток на ϵ^* , а $\phi = 66$. Причем дуга (x_{10}, x_{11}) стала насыщенной.

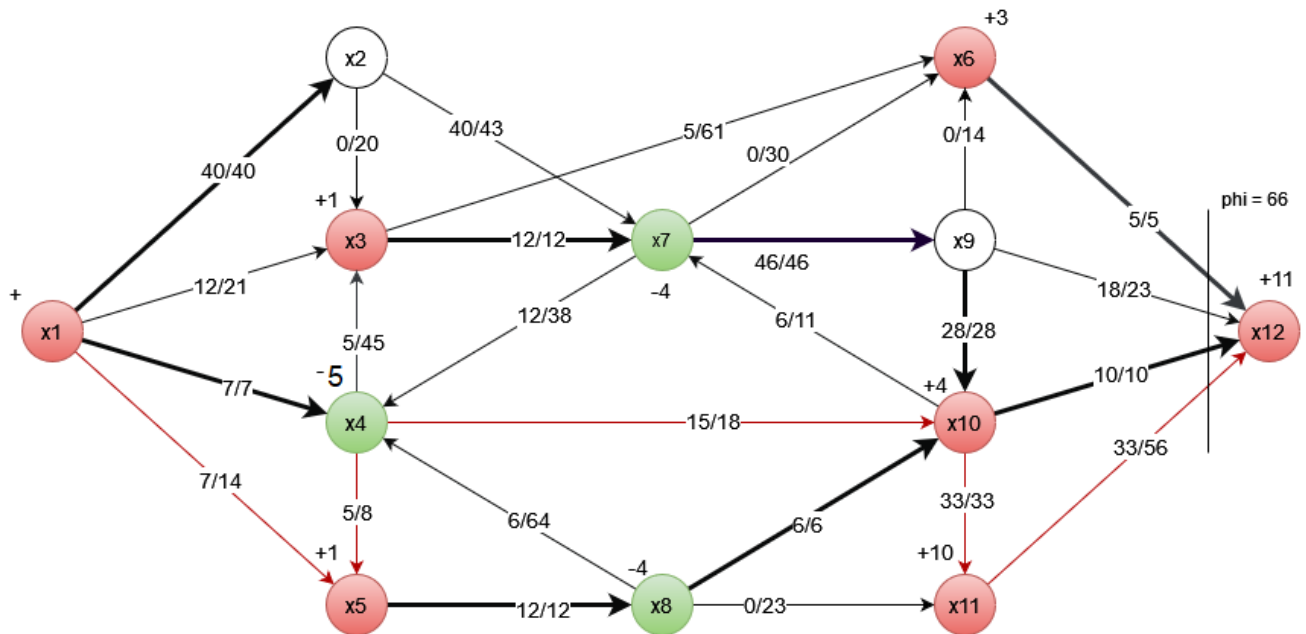


Рисунок 12 – Первый увеличивающий маршрут

2) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут $(x_1, x_5, x_4, x_{10}, x_9, x_{12})$. Маршрут показан на рисунке 13. Тогда переменные $\delta^*, \phi^*, \epsilon^*$ будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned}\delta^* &= \min_{\text{по прямым дугам}} \{\delta(x_1, x_5), \delta(x_9, x_{12}), \delta(x_4, x_{10})\} = \min\{14 - 7, 18 - 15, 23 - 18\} \\ &= \min\{7, 3, 5\} = 3 \\ \phi^* &= \min_{\text{по обратным дугам}} \{\phi(x_5, x_4), \phi(x_{10}, x_9)\} = \min(5, 28) = 5 \\ \epsilon^* &= \min(\delta^*, \phi^*) = 3\end{aligned}$$

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на ϵ^* , а поток на обратных дугах уменьшается ϵ^* , а ϕ имеет значение $\phi = 69$. Причем дуга (x_4, x_{10}) стала насыщенной.

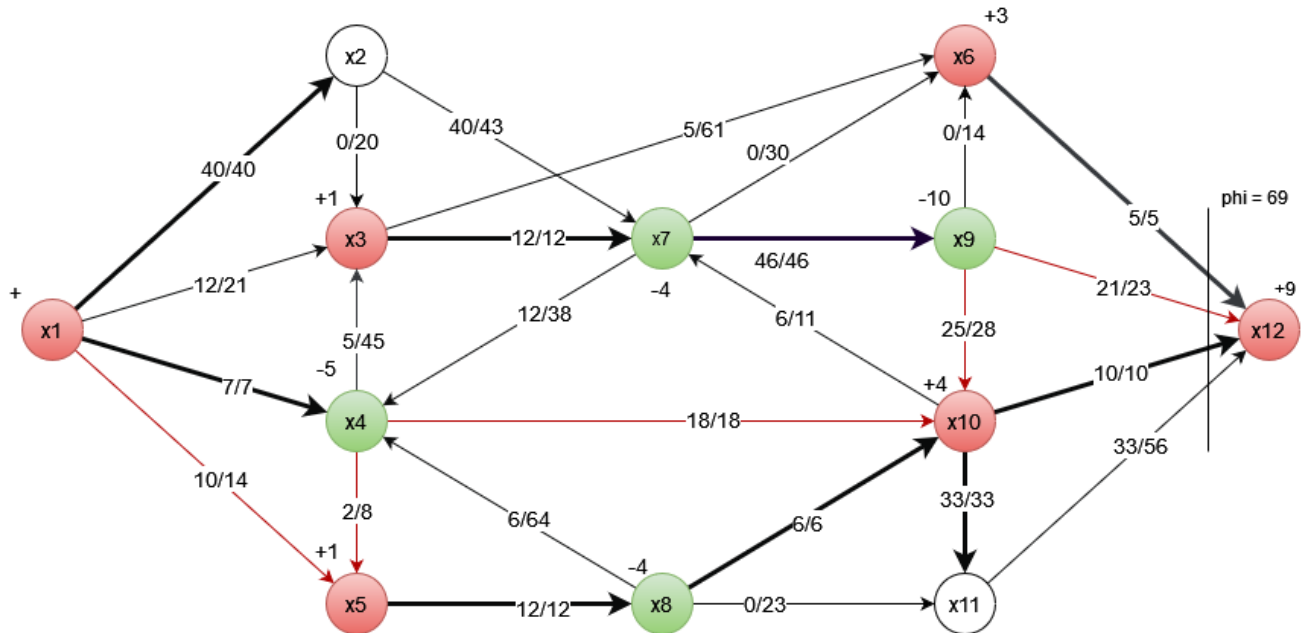


Рисунок 13 – Второй увеличивающий маршрут

3) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут $(x_1, x_3, x_4, x_7, x_{10}, x_9, x_{12})$. Маршрут показан на рисунке 14. Тогда переменные $\delta^*, \phi^*, \epsilon^*$ будут иметь следующие значения:

$$\delta^* = \min_{\text{по прямым дугам}} \{\delta(x_1, x_5), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{21 - 12, 23 - 21\} = \min\{9, 2\} = 2$$

$$\phi^* = \min_{\text{по обратным дугам}} \{\phi(x_3, x_4), \phi(x_4, x_7), \phi(x_7, x_{10}), \phi(x_{10}, x_9)\} = \min(5, 12, 6, 25) = 5$$

$$\epsilon^* = \min(\delta^*, \phi^*) = 2$$

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на ϵ^* , а поток на обратных дугах уменьшается ϵ^* , а ϕ имеет значение $\phi = 71$. Причем дуга (x_9, x_{12}) стала насыщенной.

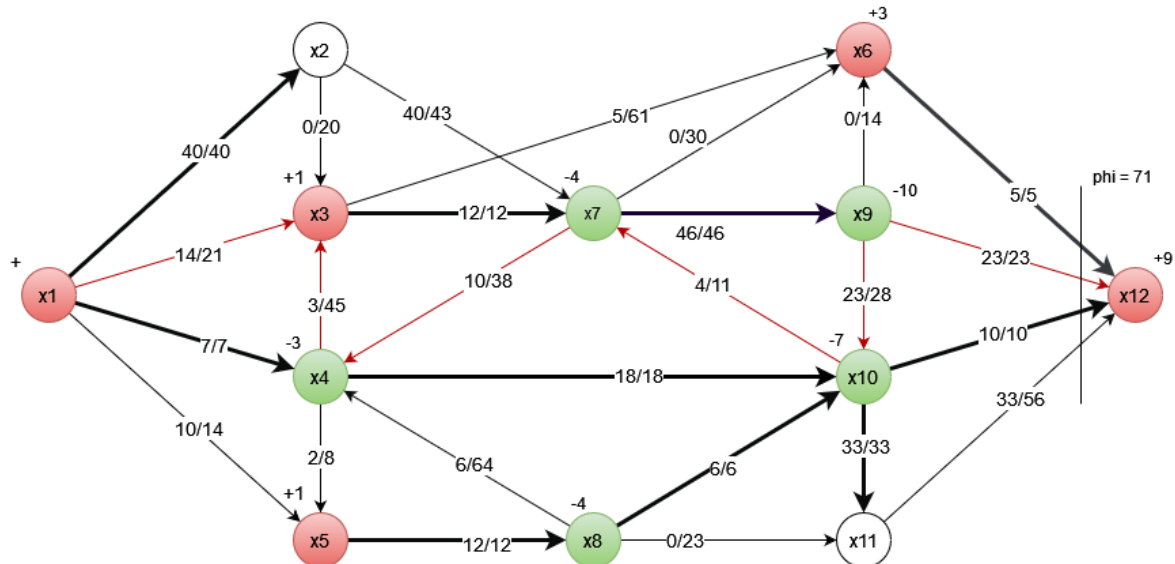


Рисунок 14 – Третий увеличивающий маршрут

4) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут $(x_1, x_3, x_4, x_8, x_{11}, x_{12})$. Маршрут показан на рисунке 15. Тогда переменные $\delta^*, \phi^*, \epsilon^*$ будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \min_{\text{по прямым дугам}} \{\delta(x_1, x_3), \delta(x_8, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} \\ &= \min\{21 - 14, 23 - 0, 56 - 33\} = \min\{7, 23, 23\} = 7 \\ \phi^* &= \min_{\text{по обратным дугам}} \{\phi(x_3, x_4), \phi(x_4, x_8)\} = \min(3, 6) = 3 \\ \epsilon^* &= \min(\delta^*, \phi^*) = 3 \end{aligned}$$

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на ϵ^* , а поток на обратных дугах уменьшается ϵ^* , а ϕ имеет значение $\phi = 74$.

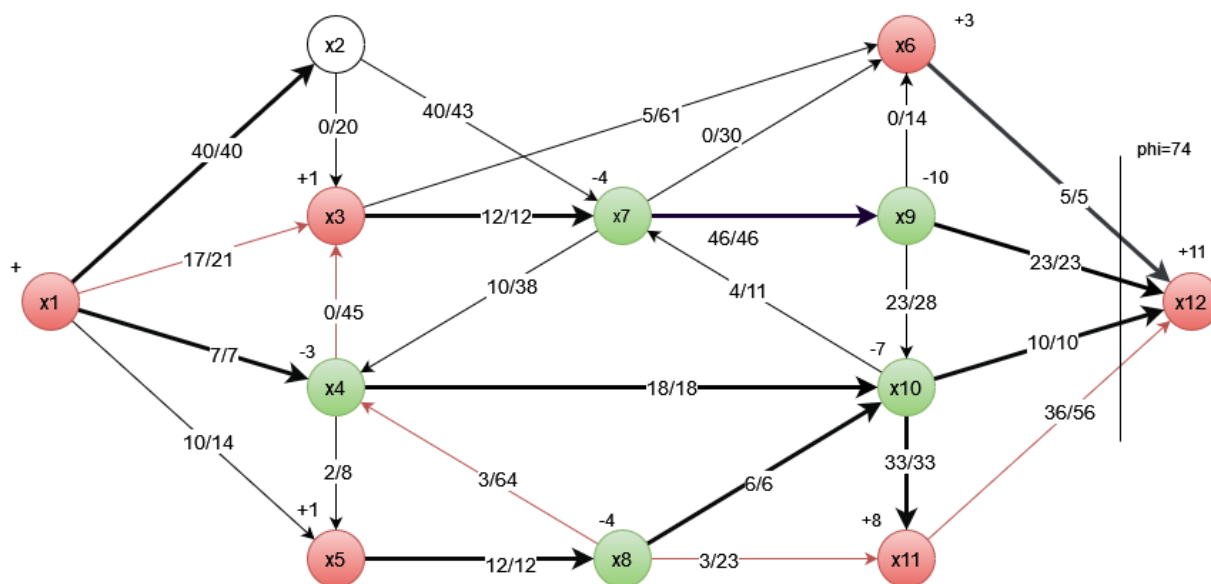


Рисунок 15 – Четвертый увеличивающий маршрут

5) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут $(x_1, x_5, x_4, x_8, x_{11}, x_{12})$. Маршрут показан на рисунке 14. Тогда переменные δ^* , ϕ^* , ϵ^* будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned}\delta^* &= \min_{\text{по прямым дугам}} \{\delta(x_1, x_5), \delta(x_8, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} \\ &= \min\{14 - 10, 23 - 3, 56 - 36\} = \min\{4, 20, 20\} = 4\end{aligned}$$

$$\phi^* = \min_{\text{по обратным дугам}} \{\phi(x_5, x_4), \phi(x_4, x_8)\} = \min(2, 3) = 2$$

$$\epsilon^* = \min(\delta^*, \phi^*) = 2$$

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на ϵ^* , а поток на обратных дугах уменьшается ϵ^* , а ϕ имеет значение $\phi = 76$.

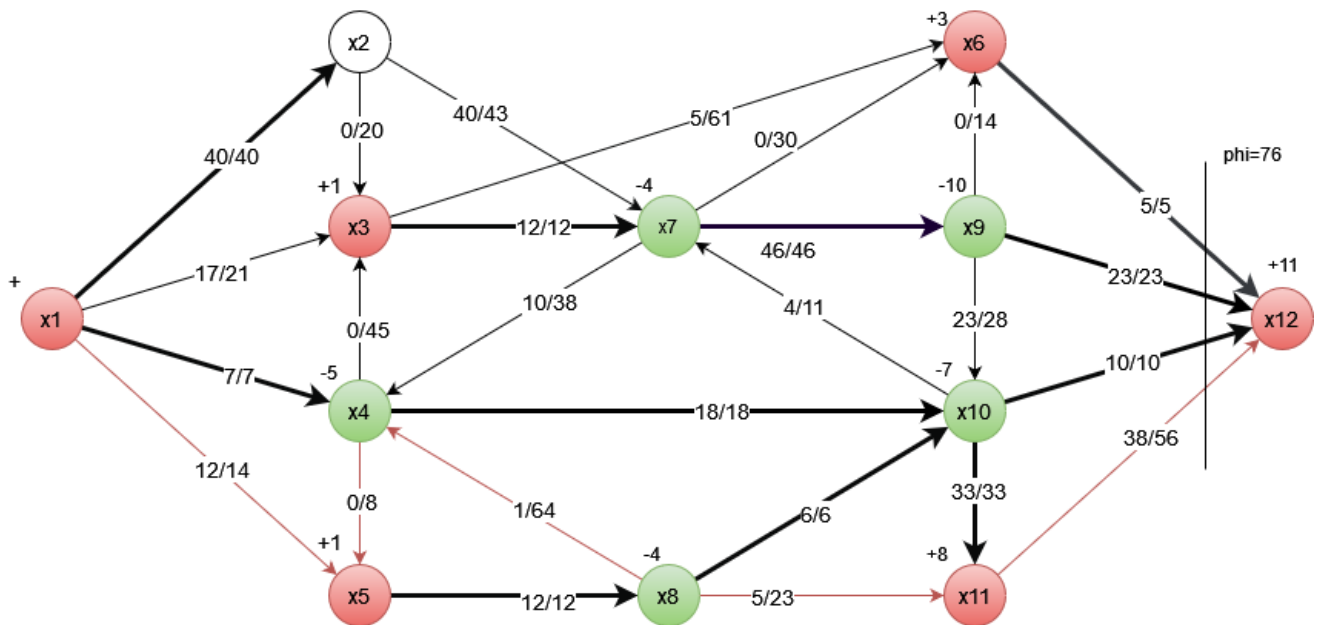


Рисунок 16 – Пятый увеличивающий маршрут

6) Наконец после повторной разметки достигнуть стока не удалось, увеличивающего маршрута нет. Следовательно, по теореме 3 текущий поток является максимальным $\phi_{max} = \phi = 76$. На рисунке 17 представлены результаты последней разметки.

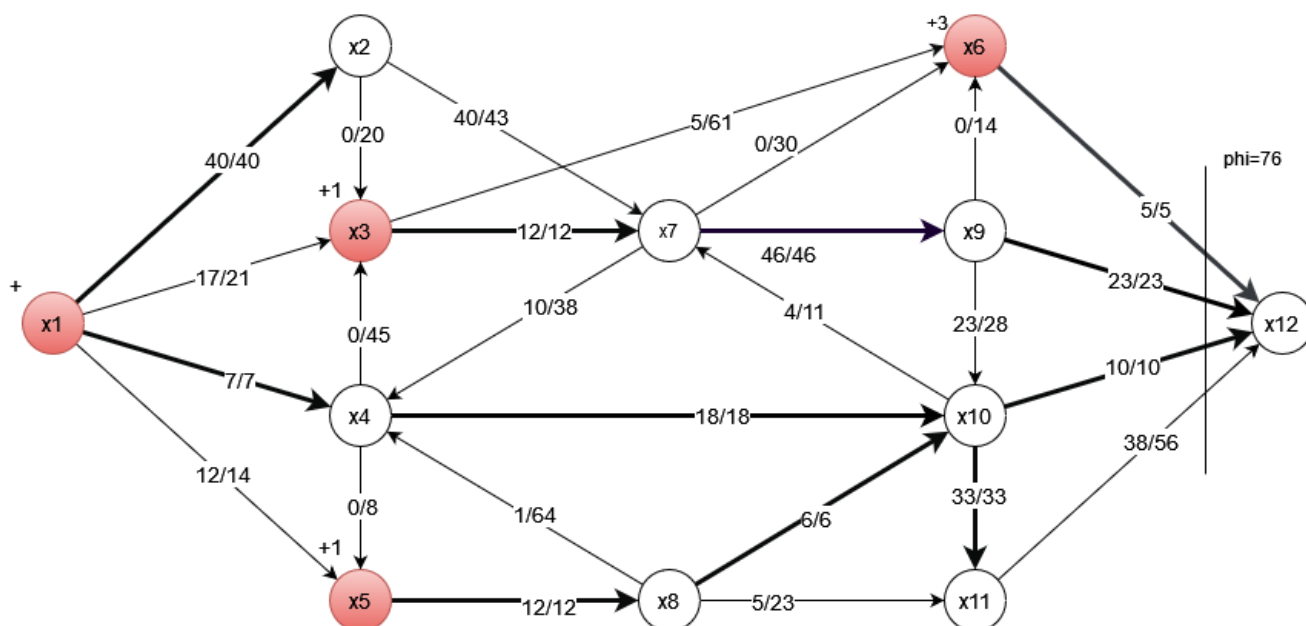


Рисунок 17 – Шестая разметка

4 Построение минимального разреза

Для построение минимального разреза необходимо разделить вершины графа, помеченные в ходе последней попытки построения увеличивающего маршрута. Минимальный разрез содержит только насыщенные дуги. Тогда граф делится на 2 множества вершин $A = \{x_2, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}\}$ и $A' = \{x_1, x_3, x_5\}$. Разрез показан на рисунке 18.

По теореме 4 пропускная способность минимального разреза c_{min} равна величине максимального потока ϕ_{max} . Пропускная способность сделанного разреза $(A' \rightarrow A) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_3, x_7), (x_5, x_8), (x_6, x_{12})\}$ определяется таким образом:

$$\begin{aligned} C(A' \rightarrow A) &= C(x_1, x_2) + C(x_1, x_4) + C(x_3, x_7) + C(x_5, x_8) + C(x_6, x_{12}) \\ &= 40 + 7 + 12 + 12 + 5 = 76 \end{aligned}$$

Таким образом выполненный разрез действительно является минимальным.

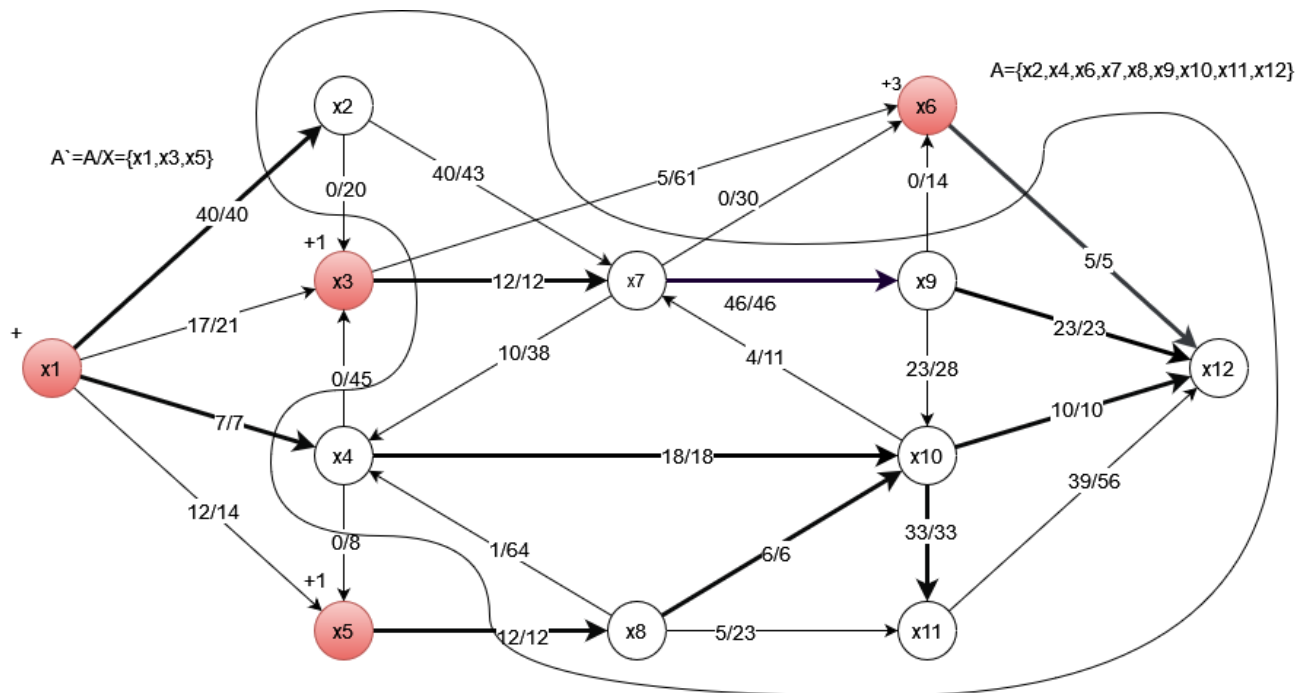


Рисунок 18 – Минимальный разрез

Ответ

Максимальный поток $\phi = 76$.

Минимальный разрез:

$$(A' \rightarrow A) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_3, x_7), (x_5, x_8), (x_6, x_{12})\}.$$

Вывод

На основе матрицы Ω было построено визуальное представление сети. С помощью алгоритма Форда – Фалкерсона определен сначала полный поток $\phi = 65$, затем при помощи увеличивающих маршрутов найден максимальный поток $\phi = 76$. Построен минимальный разрез для данной сети $(A' \rightarrow A) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_3, x_7), (x_5, x_8), (x_6, x_{12})\}$ и проведена проверка по теореме 4, что данный разрез действительно является минимальным.