|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **им. Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ: **Информатика и системы управления**

КАФЕДРА: **Компьютерные системы и сети (ИУ6)**

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ: 09.03.01 **Информатика и вычислительная техника**

**Отчет**

**по домашнему заданию**

**Тема:** Поток в транспортной сети. Алгоритм Форда-Фалкерсона

**Дисциплина:** Дискретная математика



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Студент | ИУ6-43Б |  | 14.05.2024 | В.К. Залыгин |
|  | (группа) |  | (Подпись, дата) | (И.О. Фамилия) |
|  |  |  |  |  |
| Преподаватель |  |  |  | И.Б. Трамов |
|  |  |  | (Подпись, дата) | (И.О. Фамилия) |

Москва, 2024

**Задание**

Сеть в виде взвешенного орграфа задана матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер. При помощи алгоритма Форда – Фалкерсона определить максимальный поток 𝜑𝑚𝑎𝑥, доставляемый от источника 𝑠 = 𝑥1 к стоку 𝑡 = 𝑥12 и указать минимальный разрез, отделяющий 𝑡 от 𝑠.

Оптимизационную часть алгоритма реализовать в виде коррекции потока хотя бы на одном увеличивающем маршруте.

Матрица Ω для варианта 14 представлена на рисунке 1.

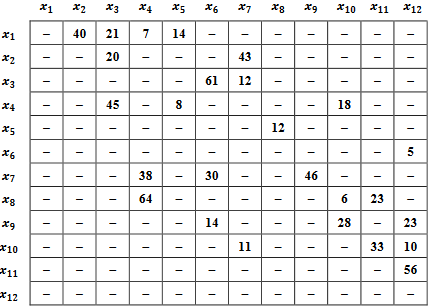


Рисунок 1 – Матрица Ω

**Базовые теоретические сведения**

Сетью называется связный, ориентированный, взвешенный граф без петель, в котором ровно 1 вершина не имеет входящих дуг – источник, ровно 1 вершина не имеет исходящих дуг – сток. Дуга сети – ребро.

На множестве дуг сети определена функция , называемая потоком, для которой верно неравенство .

Для всех вершин сети кроме источника и стока должно выполняться условие баланса потока: . Для всей сети должно выполняться условие баланса в сети: .

Разрез связного графа – множество дуг, удаление которых из графа делает его несвязным. Ориентированный разрез графа – множество дуг, имеющих начало в X` и окончание в X``.

Для выполнения задания необходимо использовать алгоритм Форда-Фалкерсона. В данном алгоритме используются 4 теоремы.

Теорема 1: если (s,xn,…,xk,t) – путь от источника к стоку, состоящий только из ненасыщенных дуг, то значение потока на всех его дугах можно увеличить на δ\* = minпо всем дугам пути {δ(xi, xj)} = minпо всем дугам пути {c(xi, xj) – φ(xi, xj)}. При этом величина потока в сети возрастет на δ\*.

Теорема 2: если (s,xn,…,xk,t) – увеличивающий маршрут, то значение потока на его прямых дугах можно увеличить, а на обратных – уменьшить на величину ε\* = min{δ\*, φ\*}, где δ\* = minпо прямым дугам {δ(xi, xj)} = minпо прямым дугам {c(xi, xj) – φ(xi, xj)}, φ\* = minпо обратным дугам {φ(xi, xj)}. При этом величина потока в сети возрастает на ε\*.  
 Теорема 3: величина потока в сети является максимальной тогда и только тогда, когда в сети не существует увеличивающего маршрута.

Теорема 4 (Форда-Фалкерсона): для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети, доставляемого от источника к стоку, равна пропускной способности минимального разреза Φmax = сmin.

**Решение**

**1 Присвоение начального значения потока в сети**

Пусть начальное значение на всех дугах равно нулю. Тогда начальная величина потока в сети: .

На рисунке 2 представлена сеть, построенная по матрице Ω. Каждая дуга имеет 2 числа – поток на данный момент решения и пропускная способность.

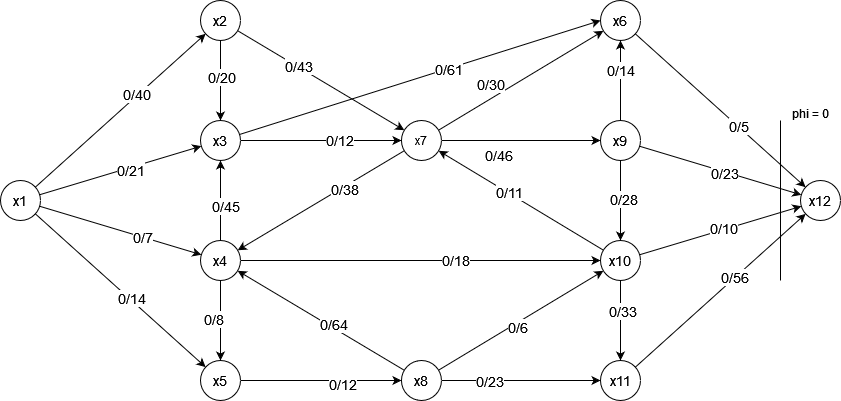


Рисунок 2 – Начальные значения сети

**2 Нахождение полного потока**

По теореме 1 для нахождения полного потока необходимо увеличить потоки на путях от источника к стоку, состоящих из ненасыщенных дуг.

1) Выбран путь . Путь изображен на рисунке 3. Для данного пути δ\* = min{δ(x1, x5), δ(x5, x8), δ(x8, x4), δ(x4, x3), δ(x3, x6), δ(x6, x12)} = min{14-0, 12-0, 64-0, 45-0, 61-0, 5-0} = min{14, 12, 64, 45, 61, 5} = 5. Тогда , а дуга (x6,x12) стала насыщенной.

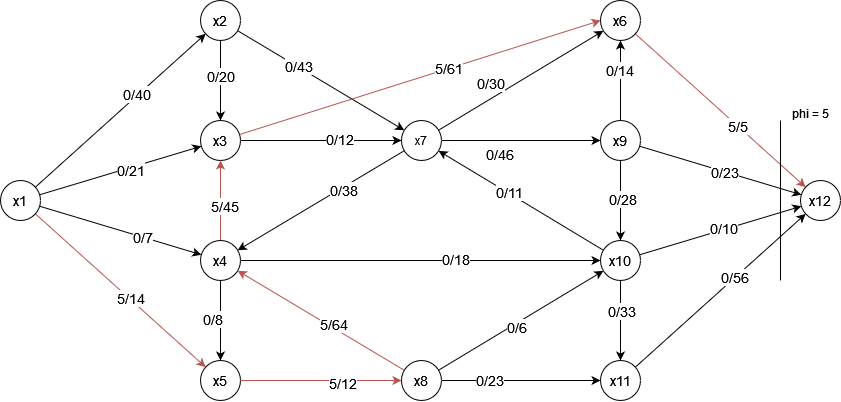


Рисунок 3 – Первый путь

2) Выбран путьПуть изображен на рисунке 4. Для данного пути δ\* = min{δ(x1, x2), δ(x2, x7), δ(x7, x4), δ(x4, x10), δ(x10, x12)} = min{40, 43, 38, 18, 10} = 10. Тогда , а дуга (x10,x12) стала насыщенной.

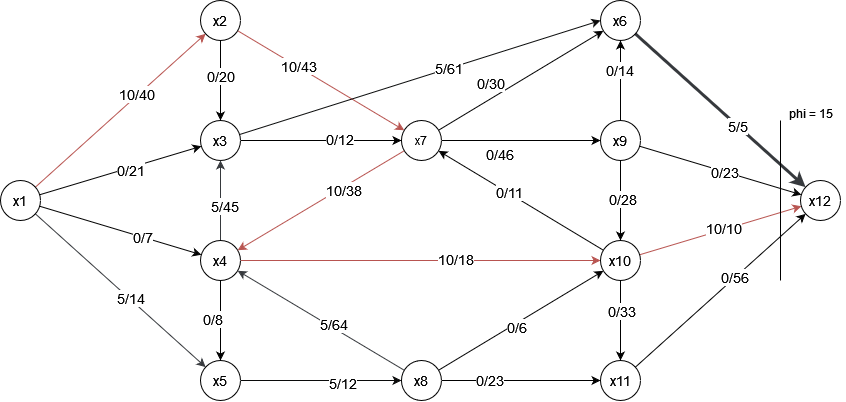


Рисунок 4 – Второй путь

3) Выбран путьПуть изображен на рисунке 5. Для данного пути δ\* = min{7, 8, 7, 6, 11, 46, 23} = 6. Тогда , а дуга (x8,x10) стала насыщенной.

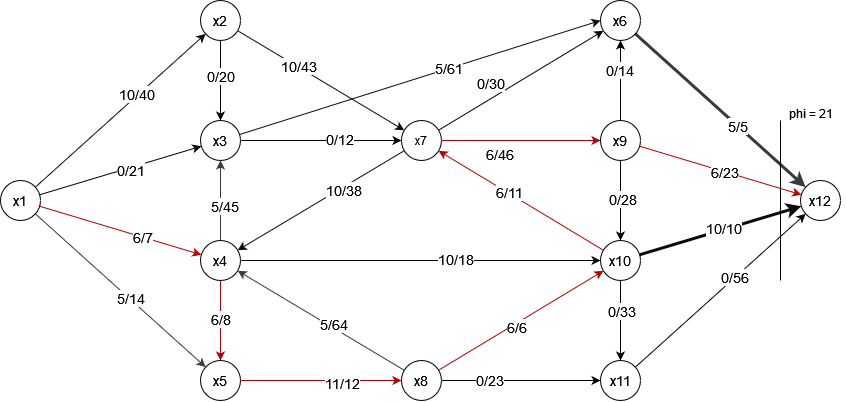


Рисунок 5 – Третий путь

4) Выбран путьПуть изображен на рисунке 6. Для данного пути δ\* = min{21, 12, 40, 17} = 12. Тогда , а дуга (x3,x7) стала насыщенной.

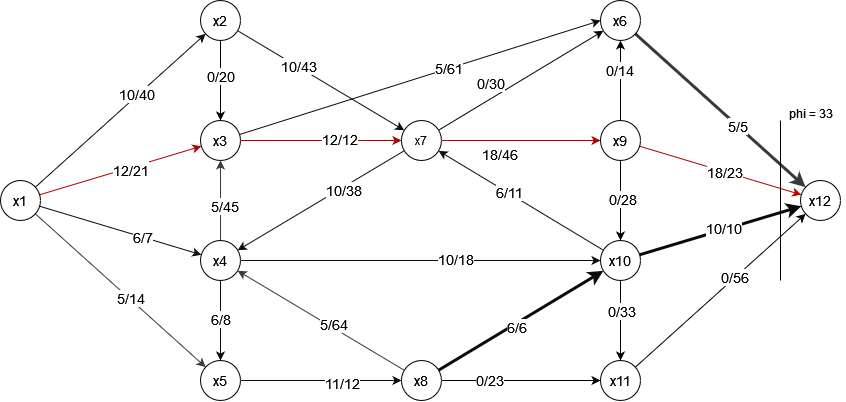


Рисунок 6 – Четвертый путь

5) Выбран путьПуть изображен на рисунке 7. Для данного пути δ\* = min{30,33,28,28,33,56} = 28. Тогда , а дуги (x7,x9), (x9,x10) стали насыщенными.

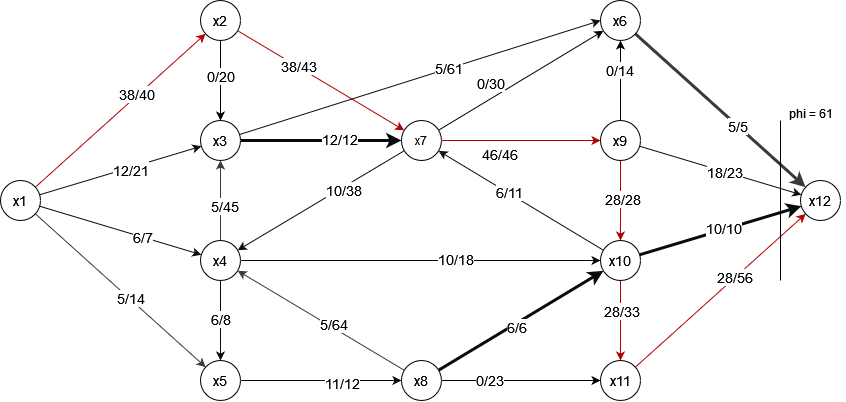


Рисунок 7 – Пятый путь

6) Выбран путьПуть изображен на рисунке 8. Для данного пути δ\* = min{9, 1, 59, 8, 5, 28} = 1. Тогда , а дуга (x5,x8) стала насыщенной.

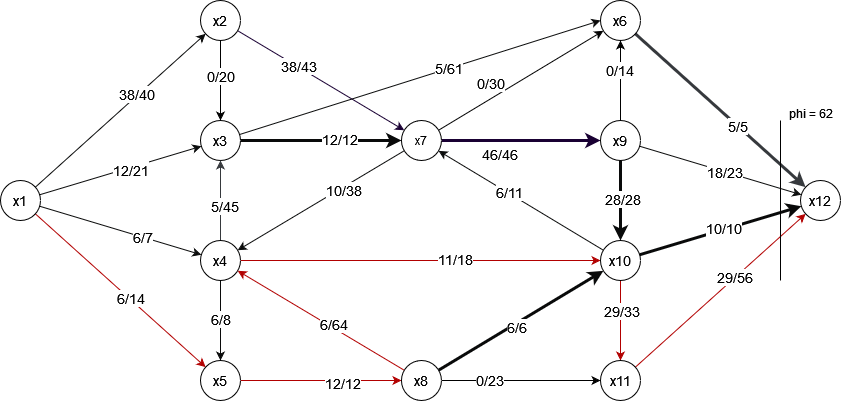


Рисунок 8 – Шестой путь

7) Выбран путьПуть изображен на рисунке 9. Для данного пути δ\* = min{1, 7, 4, 27} = 1. Тогда , а дуга (x1,x4) стала насыщенной.

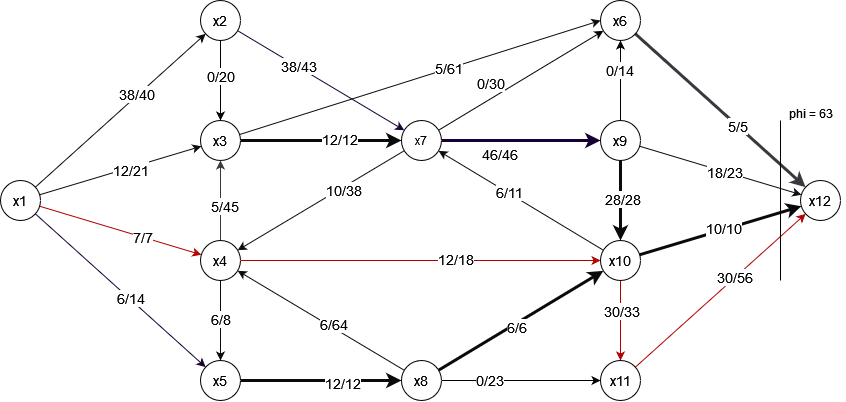


Рисунок 9 – Седьмой путь

8) Выбран путьПуть изображен на рисунке 10. Для данного пути δ\* = min{2, 5, 28, 6, 30, 26} = 2. Тогда , а дуга (x1,x2) стала насыщенной.

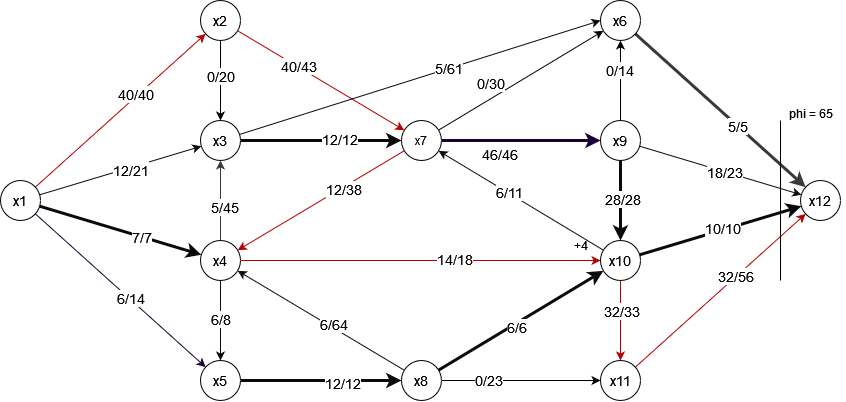


Рисунок 10 – Восьмой путь

9) После перебора не осталось путей, которые бы не проходили через насыщенные дуги. Тогда полный поток через сеть становится . На рисунке 10 показана сеть с выделенными жирным насыщенными дугами.

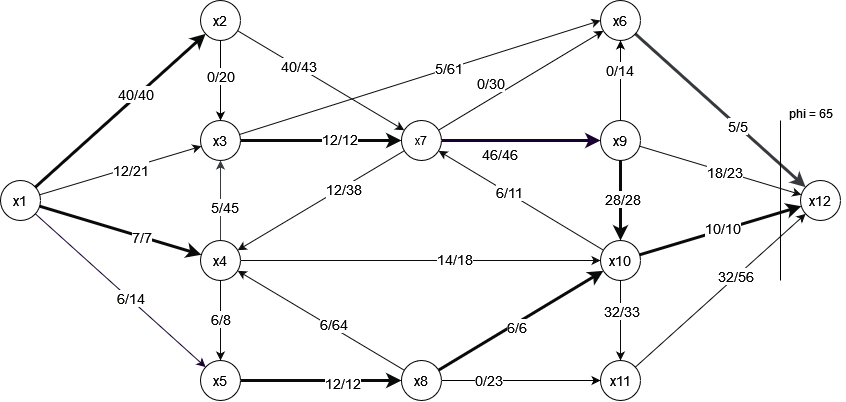


Рисунок 11 – Сеть с найденным полным поток и насыщенными дугами

**3 Достижение максимального потока**

По теореме 2 необходимо выполнить максимизацию потока. Для этого нужно найти увеличивающие маршруты.

1) После разметки вершин по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут Маршрут показан на рисунке 12. Тогда переменные будут иметь следующие значения:

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на , а обратная дуга уменьшает поток на , а . Причем дуга (x10,x11) стала насыщенной.

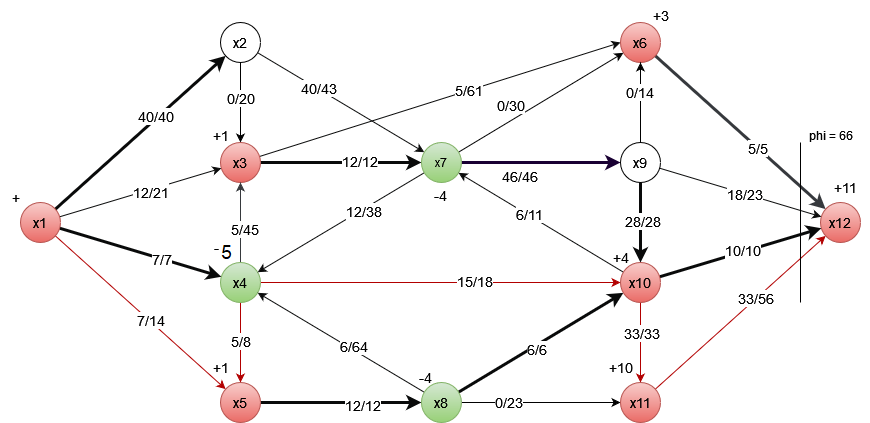


Рисунок 12 – Первый увеличивающий маршрут

2) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут Маршрут показан на рисунке 13. Тогда переменные будут иметь следующие значения:

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на , а поток на обратных дугах уменьшается , а имеет значение . Причем дуга (x4,x10) стала насыщенной.

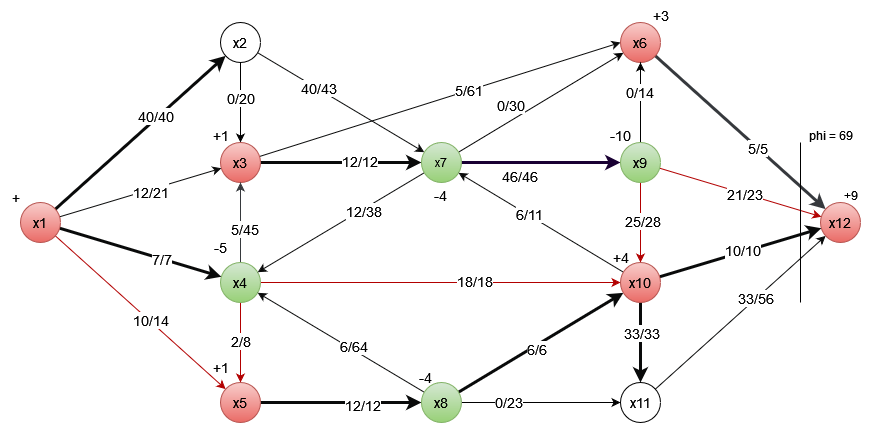


Рисунок 13 – Второй увеличивающий маршрут

3) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут Маршрут показан на рисунке 14. Тогда переменные будут иметь следующие значения:

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на , а поток на обратных дугах уменьшается , а имеет значение . Причем дуга (x9,x12) стала насыщенной.

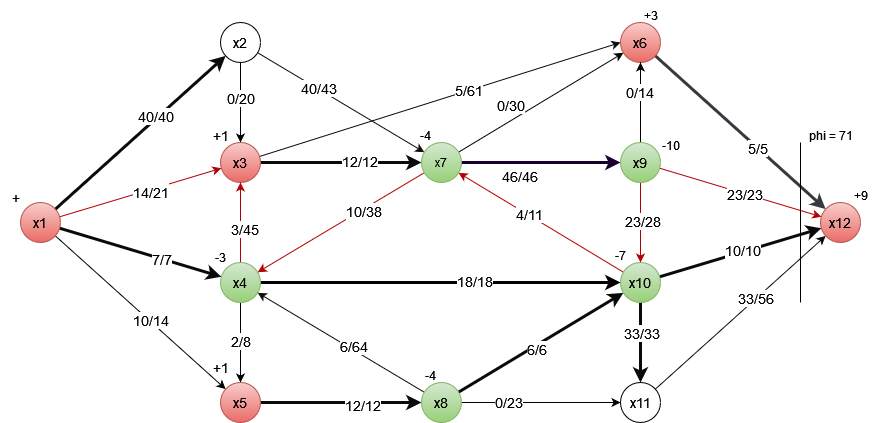


Рисунок 14 – Третий увеличивающий маршрут

4) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут Маршрут показан на рисунке 15. Тогда переменные будут иметь следующие значения:

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на , а поток на обратных дугах уменьшается , а имеет значение .

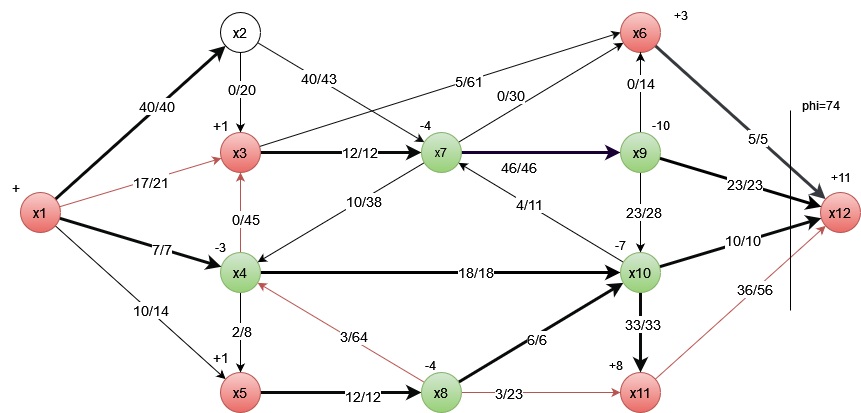


Рисунок 15 – Четвертый увеличивающий маршрут

5) После повторной разметки по алгоритму до момента достижения стока найден увеличивающий маршрут Маршрут показан на рисунке 14. Тогда переменные будут иметь следующие значения:

Тогда все прямые дуги увеличивают поток на , а поток на обратных дугах уменьшается , а имеет значение .

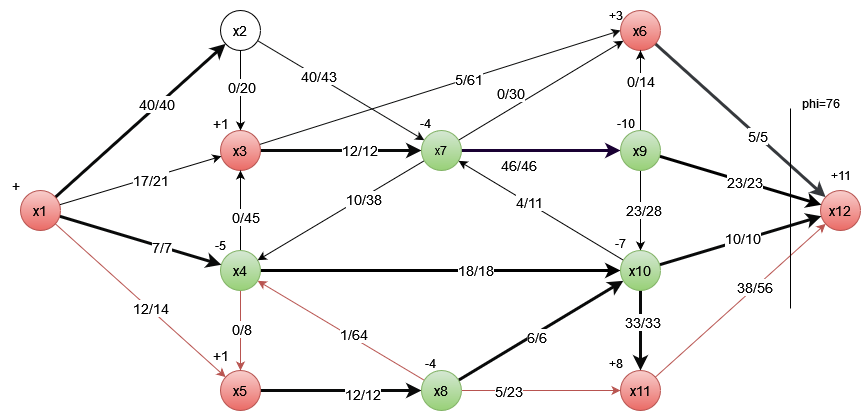


Рисунок 16 – Пятый увеличивающий маршрут

6) Наконец после повторной разметки достигнуть стока не удалось, увеличивающего маршрута нет. Следовательно, по теореме 3 текущий поток является максимальным . На рисунке 17 представлены результаты последней разметки.

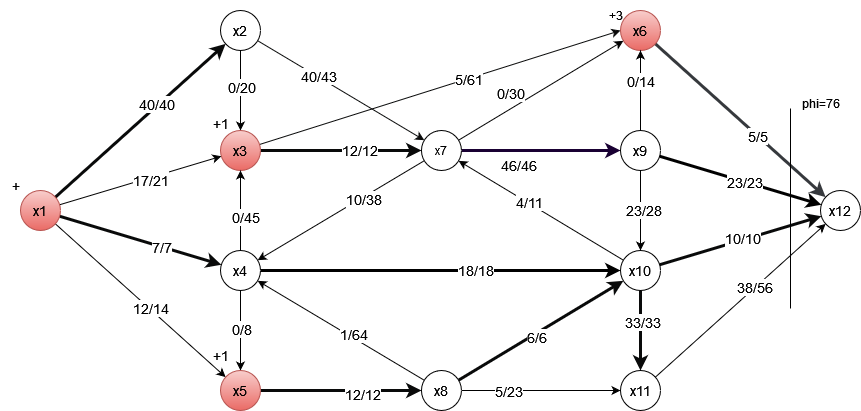
**

Рисунок 17 – Шестая разметка

**4 Построение минимального разреза**

Для построение минимального разреза необходимо разделить вершины графа, помеченные в ходе последней попытки построения увеличивающего маршрута. Минимальный разрез содержит только насыщенные дуги. Тогда граф делится на 2 множества вершин и . Разрез показан на рисунке 18.

По теореме 4 пропускная способность минимального разреза равна величине максимального потока . Пропускная способность сделанного разреза определяется таким образом:

Таким образом выполненный разрез действительно является минимальным.

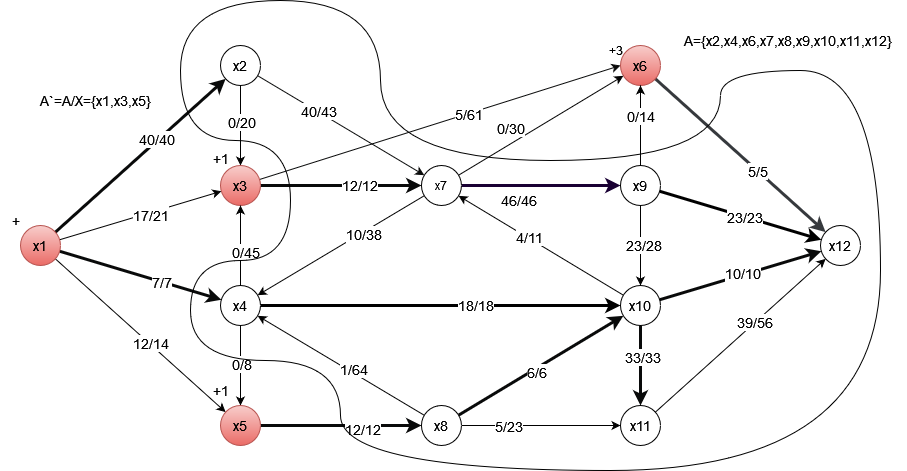


Рисунок 18 – Минимальный разрез

**Ответ**

Максимальный поток .

Минимальный разрез:

**Вывод**

На основе матрицы Ω было построено визуальное представление сети. С помощью алгоритма Форда – Фалкерсона определен сначала полный поток , затем при помощи увеличивающих маршрутов найден максимальный поток . Построен минимальный разрез для данной сети и проведена проверка по теореме 4, что данный разрез действительно является минимальным.