23

PROBABILIDADE

1 ○ Introdução

Getty Images

Considere os seguintes problemas:

- Fazendo a aposta mínima na Mega Sena, qual é a chance de acertar as seis dezenas?
- Se um aluno "chutar" cinco testes (cada um com quatro alternativas) em um exame vestibular, qual é a probabilidade de acertar pelo menos dois?
- Lançando dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de saírem números iguais?

Passaremos a estudar a teoria das probabilidades, que nos ajudará a resolver problemas como esses e muitos outros.

2 ○ Experimento aleatório

Quando lançamos um dado, não é possível saber que resultado irá ocorrer: esse experimento pode apresentar 6 possibilidades distintas.

Da mesma maneira, quando escolhemos ao acaso uma carta de baralho, não é possível saber de que valor e naipe será a carta escolhida.

Experimentos como esses recebem o nome de *experimentos aleatórios*, pois, repetidos em condições idênticas, apresentam diferentes resultados. Tal variabilidade deve-se ao acaso.

3 ○ Espaço amostral

Consideremos um experimento aleatório. O conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento é chamado *espaço amostral* e é indicado por Ω (letra grega que se lê "ômega").

Indicaremos o número de elementos de um espaço amostral por $n(\Omega)$.

Exemplo 1

Lançamos uma moeda honesta e observamos a face voltada para cima.

Temos:

$$\Omega = \{K, C\},$$

em que K: cara e C: coroa; $n(\Omega) = 2$.

Chamaremos cada um dos dois resultados possíveis de *ponto amostral*.

Exemplo 2

Ao lançarmos um dado perfeito, a face voltada para cima pode mostrar um número qualquer de 1 a 6. Assim:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ n(\Omega) = 6$$

Cada um dos elementos de Ω é um ponto amostral.

4 O Evento

Dois irmãos resolveram rifar uma bicicleta que tinham em casa. A rifa constava de 40 cupons, numerados de 1 a 40.

O resultado do sorteio da rifa é um experimento aleatório cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 39, 40\}$.

Para ajudá-los, seu pai decidiu comprar todos os *múltiplos de 6* disponíveis. O conjunto dos resultados que *interessam* ao pai dos rapazes é $P = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$.

Esse conjunto *P* expressa os resultados *favoráveis* ao palpite do pai.

É fácil perceber que *P* é um *subconjunto* de Ω. Vamos denominá-lo *evento* de Ω (representado pela letra *E*).

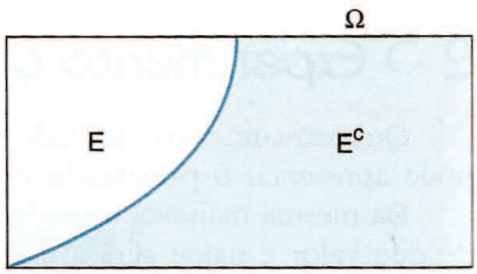
Assim, se você decidisse comprar apenas os números com dois algarismos iguais, estaria construindo *outro evento* de Ω, a saber: $E = \{11, 22, 33\}$.

Observações

1ª) Quando $E = \Omega$, o evento é dito *evento certo*.

2ª) Quando $E = \varnothing$, o evento recebe o nome de *evento impossível*.

Evento complementar



Consideremos um evento *E* relativo a um espaço amostral Ω. Chamamos *evento complementar de E* — indicado por E^c — ao evento que ocorre quando *E* não ocorre. Observe o diagrama ao lado.

Notemos que $E \cap E^c = \varnothing$ e $E \cup E^c = \Omega$.

Exemplo 3

Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retira-se, ao acaso, uma bola dessa urna. Se *E* é o evento "ocorre múltiplo de 3", vamos determinar E^c:

Temos:

$$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\} \text{ e } E = \{3, 6, 9\}$$

Assim, $E^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ e representa o evento "não ocorre múltiplo de 3".

Notemos que $E \cup E^c = \Omega$.

Exercícios

1 Numa caixa há bombons de chocolate, cereja, café, laranja e menta. Um homem escolhe, aleatoriamente, um bombom. Qual é o espaço amostral desse experimento?

2 Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Descreva os seguintes eventos:

a) Ocorre número maior que 4.
b) Ocorre número par.
c) Não ocorre o número 5.

3 Uma moeda é lançada duas vezes, simultaneamente. Em relação à seqüência de faces obtidas, qual é o evento "ocorrem faces diferentes"?

4 Um casal quer sortear dois destinos, para passar a lua-de-mel. Se a agência de turismo ofereceu Fortaleza (FOR), São Luís (SL), Manaus (MAN) e Recife (REC), construa o espaço amostral que representa os resultados possíveis desse sorteio.

5 Em uma urna há 60 bolas numeradas de 1 a 60. Uma delas é extraída ao acaso. Construa os seguintes eventos:

a) A: ocorre um divisor de 30.
b) B: ocorre um quadrado perfeito.

6 Um dado é lançado duas vezes sucessivamente e é observada a seqüência de números obtidos.

a) Determine Ω. Para isso, você deve construir uma tabela com 6 linhas e 6 colunas, em que serão marcadas as possibilidades para o primeiro e para o segundo lançamento, respectivamente.
b) Construa os eventos:
   - E_1: ocorrem faces com números iguais.
   - E_2: a soma dos números obtidos é igual a 9.

7 Em relação ao exercício anterior, se E é o evento "a diferença dos pontos obtidos, em qualquer ordem, é menor ou igual a 3", determine E^c.

5 ○ Probabilidades em espaços amostrais eqüiprováveis

Consideremos um espaço amostral Ω, formado por k pontos amostrais:

$$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$$

Vamos associar a cada um desses pontos amostrais um número real, $p\{a_i\}$, ou simplesmente p_i, chamado *probabilidade do evento* $\{a_i\}$ (ou probabilidade de ocorrência do ponto amostral a_i), tal que:

I. $0 \leq p_i \leq 1$

II. $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, isto é, $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$

Consideraremos, na maior parte dos exercícios, os *espaços amostrais eqüiprováveis*, isto é, aqueles cujos pontos amostrais têm a *mesma* probabilidade de ocorrer.

Assim, denotando por p a probabilidade de ocorrência de cada um dos pontos amostrais de Ω, temos, em (II):

$$\underbrace{p + p + \ldots + p}_{k \text{ vezes}} = 1 \Rightarrow k \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{k}$$

$\left(\text{Por exemplo, ao lançarmos um dado, a probabilidade de ocorrência de cada face é } \frac{1}{6}.\right)$

A probabilidade de ocorrência de um evento E, formado por r pontos amostrais $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, com $r \leq k$, é dada por:

$$p(E) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r \Rightarrow p(E) = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k}}_{r \text{ vezes}}$$

$$p(E) = \frac{r}{k} = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Como $E \subset \Omega$, temos que $n(E) \leqslant n(\Omega)$. Dessa forma:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \text{ é tal que } 0 \leqslant p(E) \leqslant 1$$

Essa definição de probabilidade é *intuitiva*, isto é, a probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pela *razão entre o número de casos favoráveis* (ou número de casos que nos interessam) e o *número de casos possíveis* (ou número total de casos).

Assim:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de casos "favoráveis"}}{\text{número de casos "possíveis"}}$$

Exemplo 4

De um baralho comum de 52 cartas (13 cartas de cada naipe), uma é selecionada ao acaso. Qual é a probabilidade de observarmos:

a) o sete de copas? b) o número sete? c) um número diferente de 7?

Nesse experimento, $n(\Omega) = 52$.

a) O evento de interesse é $A = \{7^\heartsuit\}$; assim, $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{52}$.

b) Há quatro casos *favoráveis*: $B = \{7^\heartsuit, 7^\diamondsuit, 7^\clubsuit, 7^\spadesuit\}$.

Daí, $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

c) Basta considerar o evento *complementar* do evento *B*, isto é, B^c = {cartas do baralho que *não* contêm o número 7}; $n(B^c) = 52 - 4 = 48$.

Daí, $p(B^c) = \frac{n(B^c)}{n(\Omega)} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$.

Note sempre que:

$$p(E) + p(E^c) = 1$$

Exemplo 5

Em um programa de prêmios da TV, são colocadas oito fichas sobre uma mesa, das quais três contêm prêmios. O participante deve escolher duas fichas ao acaso e virá-las simultaneamente.

Qual é a probabilidade de que haja prêmios nas duas fichas?

- O número de resultados possíveis desse experimento corresponde a todas as possíveis maneiras de o participante selecionar, sem importar a ordem, duas das oito fichas disponíveis. Isso pode ser feito de $C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$ maneiras; $n(\Omega) = 28$.
- O evento *E* de interesse é aquele em que as duas fichas escolhidas contêm prêmios. O número de maneiras de escolher duas entre as três fichas *premiadas* é: $n(E) = C_{3,2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$.

Assim, a probabilidade pedida é: $p(E) = \frac{3}{28} = 0{,}107 \cong 10{,}7\%$.

Exemplo 6

Uma moeda é viciada de tal modo que, com ela, obter cara (K) é 3 vezes mais provável que obter coroa (C). Qual é a probabilidade de se conseguir cara em um único lançamento dessa moeda?

Nesse experimento, o espaço amostral *não* é eqüiprovável, pois $p(K) \neq p(C)$.

Entretanto, vale sempre: $p(K) + p(C) = 1$ (ou 100%). Como por hipótese $p(K) = 3 \cdot p(C)$, segue que $3p(C) + p(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}$ e, portanto, $p(K) = \frac{3}{4}$.

Exercícios

8 Um dado perfeito é lançado. Qual é a probabilidade de que o número obtido seja múltiplo de 3?

9 Todo ano, uma igreja promove um bazar beneficente para seus freqüentadores. Se a escolha do mês é aleatória, qual é a probabilidade de que esse bazar seja realizado em:

a) fevereiro?
b) agosto?
c) no primeiro trimestre?
d) no segundo semestre?

10 Um professor quer sortear um CD entre seus alunos. Na sua turma, há 40 alunos e o número de rapazes excede o de moças em 12. Qual é a probabilidade de que o CD seja sorteado para:

a) uma moça?
b) um rapaz?

11 Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de observarmos:

a) duas caras e uma coroa?
b) pelo menos duas caras?

Sugestão: Construa um diagrama de árvore.

12 Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de:

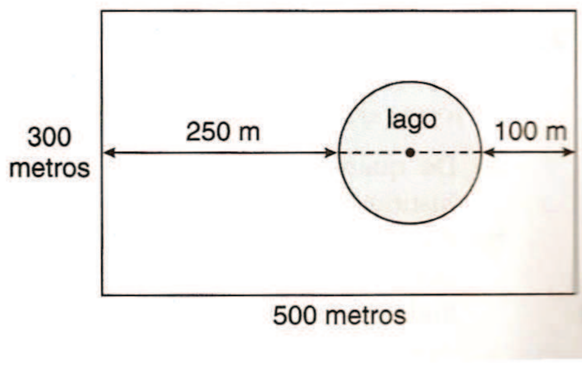
a) o primeiro número obtido ser maior que o segundo?
b) a soma dos pontos obtidos ser menor ou igual a 4?
c) o produto dos números obtidos ser par?
d) não obtermos, em nenhum lançamento, os números 1 e 6?

13 (UF-RJ) Para testar a eficácia de uma campanha de anúncio do lançamento de um novo sabão S, uma agência de propaganda realizou uma pesquisa com 2 000 pessoas. Por uma falha da equipe, a agência omitiu os dados dos campos x, y, z e w no seu relatório sobre a pesquisa, conforme mostra a tabela a seguir.

Número de pessoas que	Adquiriram S	Não adquiriram S	Total
Viram o anúncio	1200 x	300 y	1 500
Não viram o anúncio	200	300 z	500
Total	600	w	2 000

a) Indique os valores dos campos x, y, z e w.
b) Suponha que uma dessas 2 000 pessoas entrevistadas seja escolhida ao acaso e que todas as pessoas tenham a mesma probabilidade de serem escolhidas.
Determine a probabilidade de que esta pessoa tenha visto o anúncio da campanha e adquirido o sabão S.

14 Um pára-quedista programou seu pouso em uma fazenda retangular que possui um lago em seu interior, conforme indicado ao lado. Se as condições climáticas não favorecerem o pára-quedista, o local de pouso pode se tornar aleatório. Qual é, nesse caso, a probabilidade de o pára-quedista pousar em terra? Adote $\pi \cong 3$.



15 (Unaerp-SP) Em certa região metropolitana, 52% da população tem mais de 25 anos. Sabe-se ainda que 30% das pessoas com mais de 25 anos têm menos de 35 anos. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa dessa região, qual a probabilidade de que seja alguém com 35 anos ou mais?

16 (UF-RN) Para acessar o sistema de computadores da empresa, cada funcionário digita sua senha pessoal, formada por *4 letras distintas* do nosso alfabeto (que possui 23 letras), numa ordem preestabelecida. Certa vez, um funcionário esqueceu a respectiva senha, lembrando apenas que ela começava com *X* e terminava com *F*.
Qual é a probabilidade de ele ter acertado a senha ao acaso, numa única tentativa?

17 Três dados são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?

18 Considere a equação linear, na variável *x*:

$$(a - 2) \cdot x = 4$$

Se o coeficiente *a* for escolhido ao acaso entre os elementos de $\{0, 1, ..., 9\}$, qual é a probabilidade de que essa equação venha a ter:

a) uma única solução? b) nenhuma solução? c) uma solução inteira?

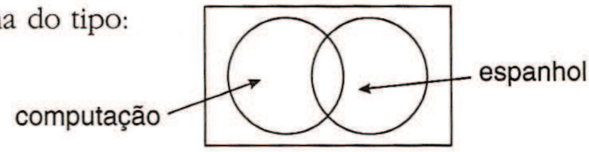
19 Os 64 funcionários de uma empresa responderam um questionário sobre os dois cursos opcionais oferecidos por ela. Os resultados foram os seguintes:

- 43 funcionários freqüentam o cursos de computação.
- 31 funcionários freqüentam o cursos de espanhol.
- 19 funcionários freqüentam ambos os cursos.

Escolhendo ao acaso um funcionário da empresa, qual é a probabilidade de que ele:

a) não freqüente nenhum dos cursos? b) freqüente exatamente um dos cursos?

Sugestão: Faça um diagrama do tipo:

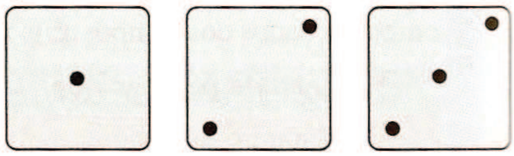


20 De um baralho de 52 cartas, 4 são extraídas simultaneamente. Qual é a probabilidade da ocorrência de:

a) duas cartas de ouros e duas de paus? b) uma carta de cada naipe?

21 (UF-RS) Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. Qual é a probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres?

22 (Unirio-RJ) Joga-se um dado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de surgirem os resultados ao lado, em qualquer ordem?

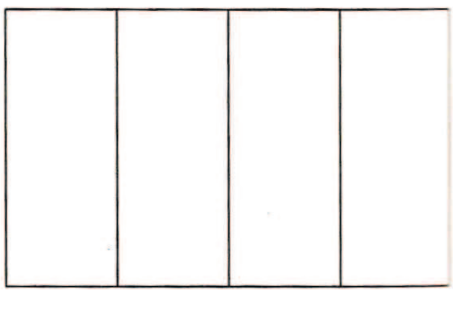


23 (UF-CE) Oito pessoas, sendo 5 homens e 3 mulheres, serão organizadas em uma fila. Qual é a probabilidade de as pessoas do mesmo sexo ficarem juntas?

24 Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 formamos números com três algarismos. Um desses números é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele:

a) seja formado por algarismos distintos? b) seja par?

25 (UF-GO) A figura ao lado representa uma bandeira com 4 listras. Dispondo-se de 4 cores distintas, deseja-se pintar todas as listras, de forma que listras vizinhas tenham cores diferentes.



a) De quantas maneiras distintas a bandeira pode ser pintada? Justifique.
b) Escolhendo-se aleatoriamente uma das formas possíveis de pintar a bandeira, qual é a probabilidade de que a forma escolhida seja uma que contenha as 4 cores?

26 Unindo aleatoriamente dois vértices quaisquer de um pentágono, qual é a probabilidade de que o segmento determinado seja uma diagonal?

27 (UFF-RJ) Os cavalos X, Y e Z disputam uma prova ao final da qual não poderá ocorrer empate. Sabe-se que a probabilidade de X vencer é igual ao dobro da probabilidade de Y vencer. Da mesma forma, a probabilidade de Y vencer é igual ao dobro da probabilidade de Z vencer.
Calcule a probabilidade de:

a) X vencer; b) Y vencer; c) Z vencer.

28 (Unesp-SP) Numa cidade com 30 000 domicílios, 10 000 domicílios recebem regularmente o jornal da loja de eletrodomésticos X, 8 000 recebem regularmente o jornal do supermercado Y e metade do número de domicílios não recebe nenhum dos dois jornais.
Determine:

a) o número de domicílios que recebem os dois jornais;
b) a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, receber o jornal da loja de eletrodomésticos X e não receber o jornal do supermercado Y.

29 Um dado é viciado de tal modo que, ao ser lançado, é duas vezes mais provável ocorrer face par que ocorrer face ímpar. Todas as faces pares têm a mesma chance de ocorrer, o mesmo acontecendo com as faces ímpares. Lançando esse dado uma vez, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) face igual a 3? b) face par?

30 Uma urna contém x bolas brancas, x^2 bolas vermelhas e 2 bolas pretas. Uma bola é escolhida ao acaso e sabe-se que a probabilidade de ela ser branca é maior que 20%.
Quantas bolas brancas essa urna pode conter?

31 (UF-RN) Um jogo consiste em um prisma triangular reto com uma lâmpada em cada vértice e um quadro de interruptores para acender essas lâmpadas. Sabendo que quaisquer três lâmpadas podem ser acesas por um único interruptor e cada interruptor acende precisamente três lâmpadas, calcule:

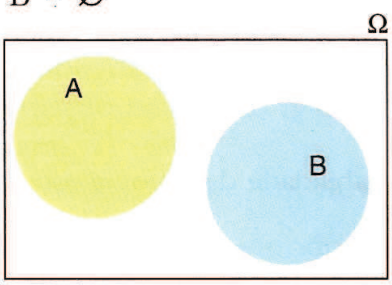
a) quantos interruptores existem nesse quadro;
b) a probabilidade de, ao se escolher um interruptor aleatoriamente, este acender três lâmpadas numa mesma face.

6 ○ Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A *ou* o evento B, isto é, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$.

Consideremos dois casos:

▶ **1º** $A \cap B = \varnothing$



Temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Como $n(\Omega) \neq 0$, podemos escrever:

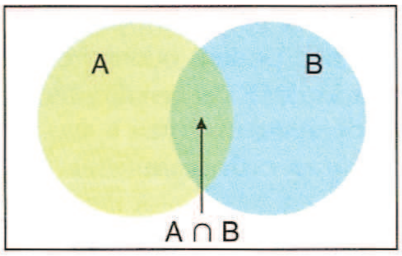
$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

Da definição de probabilidade apresentada, segue que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Nesse caso, A e B são chamados *eventos mutuamente exclusivos*.

▶ 2º $A \cap B \neq \varnothing$



Da teoria dos conjuntos, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

De modo análogo ao 1º caso, segue que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

O evento $A \cap B$ representa a ocorrência *simultânea* dos eventos *A* e *B*.

Exemplo 7

Dois dados são lançados simultaneamente.

a) Qual é a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a 9 ou números iguais?
Sejam os eventos:

A: soma vale 9; $A = \{(3, 6); (4, 5); (5, 4); (6, 3)\}$

B: os números são iguais; $B = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$

$$A \cap B = \varnothing \rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b) Qual é a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a 8 ou números iguais?
Temos os eventos:

A: soma vale 8; $A = \{(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)\}$

B: os números são iguais; $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$A \cap B = \{(4, 4)\}$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$$

Exercícios

32 Um dado é lançado. Qual é a probabilidade de observarmos:

a) um múltiplo de 2 ou um múltiplo de 3?

b) um número par ou um divisor de 5?

33 No cadastro de um cursinho pré-vestibular estão registrados 600 alunos assim distribuídos:

- 380 rapazes;
- 105 moças que já concluíram o ensino médio;
- 200 rapazes que estão cursando o ensino médio.

Um nome do cadastro é selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de o nome escolhido ser de:

a) uma moça?

b) um rapaz que já concluiu o ensino médio?

c) um rapaz ou de alguém que está cursando o ensino médio?

34 Numa urna há 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma delas é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de que o número indicado seja:

a) múltiplo de 2 ou de 3?

b) múltiplo de 5 ou de 7?

35 A probabilidade de chover 5 ou mais vezes ao mês em uma praia de Pernambuco é de 33%. A probabilidade de chover 5 ou menos vezes ao mês, nessa mesma praia, é de 81%. Qual é a probabilidade de chover exatamente 5 vezes ao mês?

7 ○ Probabilidade condicional

Na saída de um Fla-Flu, no Maracanã, foram ouvidos, para fins de pesquisa de opinião, 80 torcedores assim distribuídos:


Ricardo Beliel/Abril Imagens

	Homens	Mulheres	Total
Flamengo	27	14	41
Fluminense	23	16	39
Total	50	30	80

Escolhemos, entre os entrevistados, uma pessoa ao acaso. Constatando que a pessoa escolhida é homem, qual é a probabilidade de que ele seja torcedor do Flamengo?

Como a pessoa escolhida é homem, o número de casos possíveis desse experimento é 50.

Dos 50 homens entrevistados, 27 são flamenguistas; logo a probabilidade pedida é $p = \frac{27}{50}$.

Esse número expressa a probabilidade de a pessoa escolhida ser torcedora do Flamengo, *sabendo-se que* é homem. Vamos denominar tal número de *probabilidade condicional* e indicá-lo por:

$$p(\text{Flamengo} \mid \text{homem})$$

↑

(lê-se: "dado que" ou "sabendo-se que")

Muitos problemas desse tipo podem ser assim resolvidos: reduzimos o espaço amostral a partir de uma informação parcial do resultado do experimento e calculamos a probabilidade nesse novo espaço amostral.

Apresentaremos, agora, um novo processo.

Retomando o exemplo introdutório, tomemos $p = \frac{27}{50}$ e dividamos numerador e denominador por $n(\Omega) = 80$ (espaço amostral original). Temos:

$$p = \frac{\frac{27}{80}}{\frac{50}{80}} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{probabilidade de ser escolhido homem } e \text{ torcedor do Flamengo} \\ \\ \longleftarrow \text{probabilidade de ser escolhido um homem} \end{array}$$

Assim:

$$p(\text{Flamengo} \mid \text{homem}) = \frac{p(\text{Flamengo } e \text{ homem})}{p(\text{homem})}$$

Isso sugere que, de modo geral, a probabilidade de ocorrer um evento A sabendo que já ocorreu o evento B é dada por:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Notemos que as probabilidades do lado direito dessa expressão são *sempre* calculadas no espaço amostral original.

Exemplo 8

Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Escolhe-se uma delas ao acaso e vê-se que o número nela marcado é maior que 8. Qual é a probabilidade de esse número ser múltiplo de 5?

Há dois modos de resolver esse problema.

▶ **1º** *Reduzindo o espaço amostral*

Com a informação conhecida, o número de casos possíveis passa a ser 12, a saber: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20. Dentre eles, o número de casos favoráveis é 3, a saber: 10, 15 e 20. A probabilidade pedida é, então:

$$p = p(\text{múltiplo de } 5 \mid \text{maior que } 8) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

▶ **2º** *Utilizando a fórmula*

$$p(\underbrace{A}_{\text{múltiplo de 5}} \mid \underbrace{B}_{\text{maior que 8}}) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{1}{4}$$

Exercícios

36 Um dado é lançado e se observa que o número obtido é par. Qual é a probabilidade de ele ser maior que 3?

37 Escolhe-se, ao acaso, um número do conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 100\}$.

a) Sabendo-se que o número escolhido é quadrado perfeito, qual é a probabilidade de ele ser par?

b) Sabendo-se que o número escolhido é múltiplo de 6, qual é a probabilidade de ele ser múltiplo de 10? E de 3?

38 Dois dados são lançados simultaneamente.

a) Qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja 10, sabendo-se que os números obtidos são distintos?

b) Qual é a probabilidade de que se obtenham números distintos, sabendo-se que a soma dos pontos é 10?

39 Num prédio residencial há 2 blocos: A e B. No bloco A, há 80 apartamentos, dos quais 15% estão em atraso com o condomínio. No bloco B, há 50 apartamentos, 10% dos quais com taxas atrasadas. As fichas de todos os moradores estão reunidas, e uma delas é escolhida ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de que a ficha escolhida seja do bloco A e esteja quite com o condomínio?

b) Sabe-se que a ficha escolhida é de um condômino em atraso. Qual é a probabilidade de que ele seja do bloco B?

40 (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas.
Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta?

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita?

8 ○ Probabilidade de dois eventos simultâneos (ou sucessivos)

Da fórmula $p(A | B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, encontrada para probabilidade condicional, segue que:

$$p(A \cap B) = p(A | B) \cdot p(B)$$

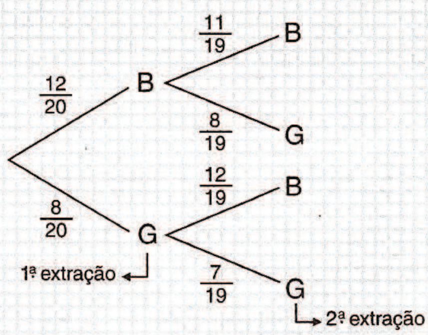
Isso significa que, para se avaliar a probabilidade de ocorrerem 2 eventos simultâneos (ou sucessivos), que é $p(A \cap B)$, basta *multiplicar* a probabilidade de ocorrer um deles ($p(B)$) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu ($p(A | B)$).

A utilização dessa fórmula fica clara nos exemplos seguintes.

Exemplo 9

Numa caixa estão guardados 20 livros, sendo 12 de Biologia e 8 de Geografia. Dois deles são retirados sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de terem sido escolhidos 2 livros de Biologia?

Vamos construir um diagrama de árvore para esse experimento e associar probabilidades a cada um de seus galhos. Observe que as probabilidades referentes à 2ª extração são condicionais.



Estamos interessados em calcular:

$$p(B \cap B) = \underbrace{\frac{12}{20}}_{\text{probabilidade de o 1º livro ser de Biologia}} \cdot \underbrace{\frac{11}{19}}_{\text{probabilidade de o 2º livro ser de Biologia, dado que o 1º também é}} = \frac{33}{95}$$

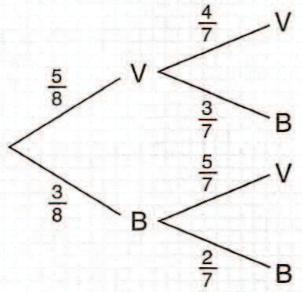
Qual será, então, a probabilidade de escolhermos livros de assuntos diferentes?
Há 2 casos que nos interessam. Assim:

$$p = p(B \cap G) \overset{\text{ou}}{+} p(G \cap B) \Rightarrow p = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = 2 \cdot \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{48}{95}$$

Exemplo 10

Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Duas delas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de terem saído 2 bolas brancas?

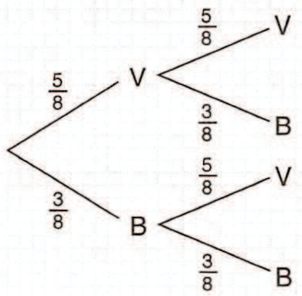
Temos:



Estamos interessados em:

$$p(B \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

Vamos resolver o mesmo exercício, supondo que as extrações sejam feitas com reposição.



Observe que o fato de sair branca na 1ª extração *não* muda a probabilidade de sair branca na 2ª extração, uma vez que a bola é reposta após a 1ª retirada. Nesse caso, dizemos que há *independência entre os eventos.*

A probabilidade pedida é:

$$p = p(B \cap B) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

Conclusão

De modo geral, quando $p(A|B) = p(A)$ — isto é, o fato de ter ocorrido o evento B não altera a probabilidade de ocorrer o evento A —, dizemos que A e B são *eventos independentes* e o teorema da multiplicação se reduz a:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Exercícios

41 Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de:

a) ocorrer cara e número 1?

b) ocorrer coroa e número primo?

42 Uma urna contém 10 etiquetas identificadas pelas letras A, B, C, ..., I, J. Duas delas são retiradas ao acaso, sucessivamente. Qual é a probabilidade de saírem 2 vogais, se a extração é feita:

a) com reposição?

b) sem reposição?

43 Uma urna (I) contém 3 bolas vermelhas, 4 brancas e 3 pretas. Outra urna (II) contém 2 bolas vermelhas, 5 brancas e 2 pretas. Uma das urnas é escolhida ao acaso, e dela é extraída uma bola.

a) Qual é a probabilidade de ocorrer urna I e bola branca?

b) Qual é a probabilidade de ocorrer bola vermelha?

44 Na prateleira de um supermercado há 20 latas de achocolatado, das quais 4 estão além do prazo de validade. Uma mulher passa e apanha uma delas ao acaso; logo em seguida, um rapaz apanha outra lata ao acaso. Qual é a probabilidade de que:

a) ambos tenham comprado achocolatados com prazo dentro da validade?

b) a mulher tenha comprado o produto com prazo dentro da validade, mas o rapaz não?

45 Num canil há 10 cachorros, 7 de uma raça X e 3 de uma raça Y, cada um dentro de uma "jaula" fechada nas laterais. A probabilidade de um cachorro da raça X latir para um desconhecido é de 80% e, para a raça Y, essa probabilidade é de 60%. Um visitante chega ao canil, pára ao acaso diante de uma "jaula" e vê então o cachorro que está nela. Qual é a probabilidade de esse cão não latir para o visitante?

46 (UF-BA, adaptado) Em uma escola, o 3º ano colegial tem duas turmas: A e B. A tabela mostra a distribuição, por sexo, dos alunos dessas turmas.

Turma	Homens	Mulheres
A	20	35
B	25	20

Com base nesses dados, assinale V ou F nas afirmações seguintes, justificando as falsas:

a) Escolhendo-se, ao acaso, um aluno do 3º ano, a probabilidade de ser homem é igual a 0,45.
b) Escolhendo-se, ao acaso, um aluno do 3º ano B, a probabilidade de ser mulher é igual a 20%.
c) Escolhendo-se, ao acaso, simultaneamente, dois alunos, um de cada turma, a probabilidade de serem os dois do mesmo sexo é igual a $\frac{16}{33}$.
d) Escolhendo-se, ao acaso, um aluno do 3º ano, a probabilidade de ser mulher ou de ser da turma B é igual a 80%.
e) Reunindo-se as mulheres das duas turmas e escolhendo-se uma, ao acaso, a probabilidade de ser da turma A é igual a 35%.

47 Na tradicional *loteria esportiva* há 13 jogos. Em cada jogo aposta-se em um dos times (coluna 1 ou coluna 2) ou em empate (coluna do meio). A aposta mínima é de um duplo, isto é, num único jogo assinalam-se 2 opções, ao preço de R$ 0,50. Há também o palpite triplo: as 3 colunas são assinaladas para um determinado jogo. Apostar em 1 triplo custa R$ 0,75.

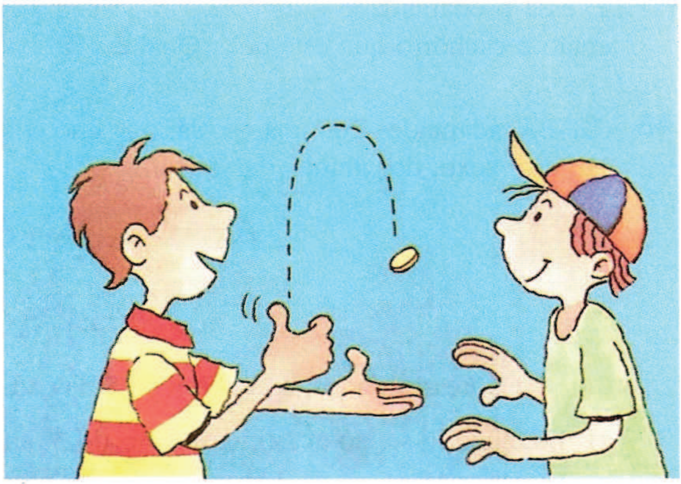
a) Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos com a aposta mínima?
b) Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos apostando 1 triplo?
c) Na aposta máxima, são assinalados 5 duplos e 3 triplos ao preço de R$ 216,00. Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos com a aposta máxima? Há proporcionalidade entre os valores apostados e as chances de acerto, considerando-se as apostas mínima e máxima?

48 (UF-RJ) Fernando e Cláudio foram pescar num lago onde só existem trutas e carpas. Fernando pescou, no total, o triplo da quantidade pescada por Cláudio. Fernando pescou duas vezes mais trutas do que carpas, enquanto Cláudio pescou quantidades iguais de carpas e trutas. Os peixes foram todos jogados num balaio e uma truta foi escolhida ao acaso desse balaio.
Determine a probabilidade de que esta truta tenha sido pescada por Fernando.

49 (Fuvest-SP) Um dado, cujas faces estão numeradas de um a seis, é dito *perfeito* se cada uma das seis faces tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer em um lançamento. Considere o experimento que consiste em três lançamentos independentes de um dado perfeito. Calcule a probabilidade de que o produto desses três números seja:

a) par;
b) múltiplo de 10.

9 ○ Experimentos binomiais



Há experimentos aleatórios que apresentam apenas dois possíveis resultados. Por exemplo, do lançamento de uma moeda só pode resultar cara ou coroa; um exame laboratorial para detecção de alguma doença pode resultar positivo ou negativo; se um jovem "chuta" num teste de vestibular, pode acertar ou errar.

Imagine um experimento dessa natureza repetido um certo número (finito) de vezes, em condições idênticas, levando-se em conta que essas repetições constituam eventos independentes: está caracterizado um *experimento binomial*.

Vamos mostrar, por meio de exemplos, como se calculam probabilidades nesses tipos de experimento.

Exemplo 11

Uma moeda é lançada 5 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos 3 caras (K) e 2 coroas (C)? Trata-se de um experimento binomial.

- Para fixar idéias, comecemos analisando a probabilidade de ocorrerem tais faces em uma determinada ordem, por exemplo, KKKCC. Como os lançamentos são independentes, segue, pelo Teorema da Multiplicação, que essa probabilidade é:

$$p(K \cap K \cap K \cap C \cap C) = p(K) \cdot p(K) \cdot p(K) \cdot p(C) \cdot p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32} \ (*)$$

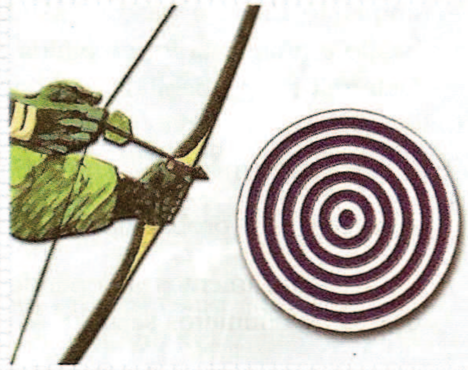
- Essas faces, porém, podem ser obtidas em outra ordem, por exemplo, (K, C, C, K, K) ou (C, K, K, C, K), etc. Já vimos que o número de seqüências desse tipo é o número de permutações de 5 elementos, com 3 repetições de K e 2 repetições de C, a saber:

$$\overset{(2,3)}{P_5} = \frac{5!}{2!\,3!} = C_{5,2} = 10$$

- Por fim, como a probabilidade de ocorrerem tais faces em uma determinada seqüência é dada por (*) e existem 10 diferentes seqüências, a probabilidade pedida é:

$$10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16} = 31{,}25\%$$

Exemplo 12



A probabilidade de um atirador acertar um alvo é de 75%. Fazendo 8 tentativas, qual é a probabilidade de acertar o alvo 5 vezes?

Seja p a probabilidade de acerto em uma tentativa ($p = 0{,}75$) e $1 - p$ a probabilidade de erro em uma tentativa ($1 - p = 0{,}25$).

- Calculamos a probabilidade de haver 5 acertos (C) e depois 3 erros (E) nessa ordem:

$$p(\underbrace{C \cap C \ldots \cap C}_{5 \text{ vezes}} \cap \underbrace{E \cap \ldots E}_{3 \text{ vezes}}) = \underbrace{p(C) \ldots p(C)}_{5 \text{ vezes}} \cdot \underbrace{p(E) \ldots p(E)}_{3 \text{ vezes}} = p^5 \cdot (1 - p)^3 = 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^3$$

- O número de seqüências que apresentam 5C e 3E é:

$$P_8^{(5,3)} = \frac{8!}{5!\ 3!} = C_{8,5}$$

A probabilidade pedida é dada por:

$$C_{8,\,5} \cdot p^5 \cdot (1 - p)^3 = 56 \cdot 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^3 \cong 0{,}207 = 20{,}7\%$$

Exercícios

50 Uma moeda "honesta" é lançada 7 vezes. Qual é a probabilidade de ocorrerem 2 caras e 5 coroas?

51 A incidência de uma doença numa população é de 30%. Se 8 pessoas submetem-se a um teste para detecção da doença, qual é a probabilidade de 5 delas apresentarem teste positivo?

52 Um aluno, afobado com o tempo que lhe resta de prova, decide "chutar" os 10 últimos testes de um exame vestibular. Como cada teste apresenta 5 alternativas distintas, a probabilidade de acerto, em cada um, é de 20%.
Qual é, então, a probabilidade de o aluno acertar 4 das 10 questões?

53 Um casal planeja ter 5 filhos. Qual é a probabilidade de nascerem 3 meninos e 2 meninas? E a de nascerem todos meninos?

54 (FGV-SP) Numa grande cidade, a probabilidade de que um carro de certo modelo seja roubado, no período de um ano, é $\frac{1}{20}$. Se considerarmos uma amostra aleatória de 10 destes carros:

a) Qual a probabilidade de que nenhum seja roubado no período de um ano?
b) Qual a probabilidade de que exatamente um carro seja roubado no período de um ano?

Nota: admitir independência entre os eventos associados aos roubos de cada carro.

55 (FGV-SP) Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa, são tais que a probabilidade de sair cara num lançamento é o triplo da de sair coroa.

a) Lançando-se uma vez a moeda, qual a probabilidade de sair cara?
b) Lançando-se três vezes a moeda, qual a probabilidade de sair exatamente uma cara?

56

Bill Watterson

(*O Estado de S. Paulo*, 4/9/2001.)

Suponha que Calvin tenha-se submetido a uma prova de 6 questões e, em cada questão, mantenha a performance citada. Se, para receber um conceito *A* é preciso acertar pelo menos 4 questões, qual é a probabilidade de Calvin receber um *A*?

57 (Fuvest-SP) São efetuados lançamentos sucessivos e independentes de uma moeda perfeita (as probabilidades de cara e de coroa são iguais) até que apareça cara pela segunda vez.

a) Qual é a probabilidade de que a segunda cara apareça no oitavo lançamento?
b) Sabendo-se que a segunda cara apareceu no oitavo lançamento, qual é a probabilidade condicional de que a primeira cara tenha aparecido no terceiro?

Testes de vestibulares

1 (Enem-MEC) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, Andabem e Bompasseio, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horário dos ônibus	
Andabem	**Bompasseio**
...	...
6h00min	6h10min
6h30min	6h40min
7h00min	7h10min
7h30min	7h40min
...	...

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa Andabem é:

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

2 (UF-PB) A probabilidade de se escolher, no conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 21\}$, um número que seja divisor de 12 e de 16 é:

a) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{4}{7}$
b) $\frac{4}{21}$ d) $\frac{1}{21}$

3 (UMC-SP) A tabela a seguir fornece, por sexo e área escolhida, o número de inscritos em um vestibular para ingresso no curso superior.

	Área		
Sexo	**Biomédicas**	**Exatas**	**Humanas**
Masculino	2500	1500	1500
Feminino	1500	1000	2000

Escolhido, ao acaso, um dos inscritos e representada por p_1 a probabilidade de o escolhido ser do sexo masculino e ter optado por Exatas e por p_2 a probabilidade de o escolhido ser do sexo feminino sabendo que optou por Biomédicas, pode-se concluir que:

a) $p_1 = 0,6$ e $p_2 = 0,375$
b) $p_1 = 0,6$ e $p_2 = 0,15$
c) $p_1 = 0,15$ e $p_2 = 0,15$
d) $p_1 = 0,15$ e $p_2 = 0,375$
e) $p_1 = 0,375$ e $p_2 = 0,15$

4 (Mackenzie-SP) Considere todos os números de 4 algarismos distintos que podem ser formados utilizando-se 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Escolhido ao acaso um desses números, a probabilidade de ele conter o algarismo 3 e não conter o algarismo 5 é:

a) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{8}{15}$ e) $\frac{5}{12}$
b) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{4}{15}$

5 (Unirio-RJ) O dispositivo que aciona a abertura do cofre de uma joalheria apresenta um teclado com nove teclas, sendo cinco algarismos (0, 1, 2, 3, 4) e quatro letras (x, y, z, w). O segredo do cofre é uma seqüência de três algarismos seguidos de duas letras. Qual a probabilidade de uma pessoa, numa única tentativa, ao acaso, abrir o cofre?

a) $\frac{1}{7200}$ c) $\frac{1}{1500}$ e) $\frac{1}{200}$
b) $\frac{1}{2000}$ d) $\frac{1}{720}$

6 (UF-RN) Uma caixa contém 20 bolas brancas e 15 bolas vermelhas. Retira-se uma amostra de 10 bolas, simultaneamente.
A probabilidade de que *todas* as bolas retiradas sejam vermelhas é:

a) $\frac{15}{C_{35}^{10}}$ b) $\frac{C_{20}^{10}}{C_{35}^{10}}$ c) $\frac{20}{C_{35}^{10}}$ d) $\frac{C_{15}^{10}}{C_{35}^{10}}$

7 (Ucsal-BA) Uma escola de línguas tem somente alunos de inglês e espanhol, nenhum deles estudando as duas línguas. Do total de alunos, 20% estudam espanhol, 65% são do sexo feminino e 30% são do sexo masculino e estudam inglês. Se escolhermos ao acaso um aluno dessa escola, a probabilidade de ele ser do sexo feminino e estudar inglês é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{3}{20}$ e) $\frac{1}{20}$

8 (UE-RJ) "Protéticos e dentistas dizem que a procura por dentes postiços não aumentou. Até declinou um pouquinho. No Brasil, segundo a Associação Brasileira de Odontologia (ABO), há 1,4 milhão de pessoas sem nenhum dente na boca, e 80% delas já usam dentadura. Assunto encerrado."

(Adaptado de *Veja*, outubro/1997.)

Considere que a população brasileira seja de 160 milhões de habitantes. Escolhendo ao acaso um desses habitantes, a probabilidade de que ele não possua nenhum dente na boca e use dentadura, de acordo com a ABO, é de:

a) 0,28% b) 0,56% c) 0,70% d) 0,80%

9 (Faap-SP) Suponha que você tenha 40% de chance de receber uma oferta de emprego da firma de sua primeira escolha, 40% de chance de receber uma oferta da firma de sua segunda escolha e 16% de chance de receber uma oferta de ambas as firmas. Qual é a probabilidade de receber uma oferta de qualquer uma das firmas?

a) 0,96 b) 0,80 c) 0,64 d) 0,32 e) 0,16

10 (PUC-RJ) As cartas de um baralho são amontoadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de a carta de cima ser de copas e a de baixo também? O baralho é formado por 52 cartas de 4 naipes diferentes (13 de cada naipe).

a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{35}$ e) $\frac{1}{45}$

11 (UFF-RJ) Em uma bandeja há dez pastéis, dos quais três são de carne, três de queijo e quatro de camarão. Se Fabiana retirar, aleatoriamente e sem reposição, dois pastéis dessa bandeja, a probabilidade de os dois pastéis retirados serem de camarão é:

a) $\frac{3}{25}$ b) $\frac{4}{25}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{4}{5}$

12 (FEI-SP) Para desligar-se um sistema de segurança, devem ser acionados simultaneamente 3 determinados botões de um painel que possui 5 botões. Qual a probabilidade de desligar-se o sistema, escolhendo-se aleatoriamente os 3 botões?

a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{4}$

13 (U. F. São Carlos-SP) Gustavo e sua irmã Caroline viajaram de férias para cidades distintas. Os pais recomendam que ambos telefonem quando chegarem ao destino. A experiência em férias anteriores mostra que nem sempre Gustavo e Caroline cumprem esse desejo dos pais. A probabilidade de Gustavo telefonar é 0,6 e a probabilidade de Caroline telefonar é 0,8. A probabilidade de pelo menos um dos filhos contactar os pais é:

a) 0,20 b) 0,48 c) 0,64 d) 0,86 e) 0,92

14 (Covest-PE) Um vestibulando arrumou numa prateleira, de forma aleatória, seus 5 livros de Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Combinatória). Qual a probabilidade de os livros de Aritmética e Combinatória não estarem juntos?

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{3}$

Enunciado para as questões 15 e 16.

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas uma dentre as letras *T*, *V* e *E*. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

15 (Enem-MEC) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

16 (Enem-MEC) A probabilidade de o participante não ganhar nenhum prêmio é igual a:

a) 0 c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

17 (PUC-MG) Em uma urna há 10 fichas idênticas, numeradas de 1 a 10. Retiram-se 2 fichas ao acaso (sem reposição). A probabilidade de que a soma dos dois números seja igual a 10 é:

a) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{3}{65}$ e) $\frac{4}{45}$

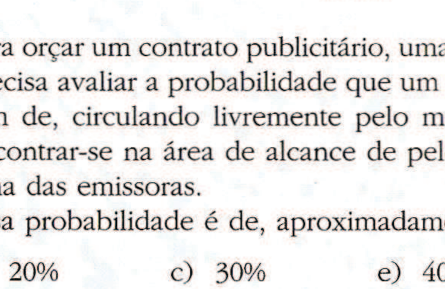
b) $\frac{9}{100}$ d) $\frac{1}{50}$

18 (UF-RS) Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

a) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{5}$

19 (Enem-MEC) Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas *A* e *B* alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.
Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20% c) 30% e) 40%

b) 25% d) 35%

20 (Mackenzie-SP) A probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é $\frac{1}{4}$. Então, supondo que o casal venha a ter três filhos, a probabilidade de serem exatamente dois do mesmo sexo é:

a) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{9}{16}$

b) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{8}$

21 (Puccamp-SP) Em uma escola, 10 alunos (6 rapazes e 4 garotas) apresentam-se para compor a diretoria do Grêmio Estudantil, que deverá ter os seguintes membros: 1 presidente, 1 vice-presidente e 2 secretários. Os nomes dos candidatos são colocados em uma urna, da qual serão sorteados os membros que comporão a diretoria. A probabilidade de que na equipe sorteada o presidente ou o vice-presidente sejam do sexo masculino é:

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{27}{30}$

b) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{13}{15}$

22 (UF-PE) Um casal planeja ter *4 filhos*. Supondo igual a chance de um filho nascer do sexo masculino ou do sexo feminino, qual a probabilidade de o casal vir a ter, no mínimo, *dois* filhos do sexo masculino?

a) 0,6871 c) 0,6873 e) 0,6875

b) 0,6872 d) 0,6874

23 (Fuvest-SP) Um arquivo de escritório possui 4 gavetas, chamadas *a*, *b*, *c*, *d*. Em cada gaveta cabem no máximo 5 pastas. Uma secretária guardou, ao acaso, 18 pastas nesse arquivo. Qual é a probabilidade de haver exatamente 4 pastas na gaveta *a*?

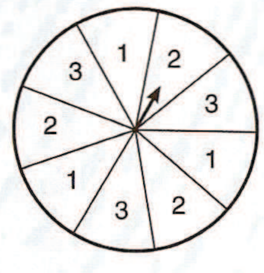
a) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{20}$ e) $\frac{1}{30}$

b) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{20}$

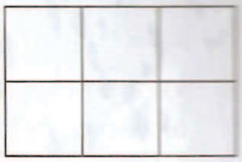
24 (U. F. Uberlândia-MG) Um conhecido jogo, presente em muitas festas populares, é a roleta da sorte, na qual gira-se o ponteiro e anota-se o número que este aponta ao parar (ver figura). Após duas rodadas, qual a probabilidade de que a soma dos dois números obtidos seja igual a 5?
Obs.: Considere que a área de todos os setores circulares em que os números estão inseridos é a mesma.

a) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{27}$

b) $\frac{4}{27}$ d) $\frac{2}{9}$



25 (UF-RS) Cada cartela de uma coleção é formada por seis quadrados coloridos, justapostos como indica a figura ao lado.



Em cada cartela, dois quadrados foram coloridos de azul, dois de verde e dois de rosa. A coleção apresenta todas as possibilidades de distribuição dessas cores nas cartelas nas condições citadas e não existem cartelas com a mesma distribuição de cores. Retirando-se ao acaso uma cartela da coleção, a probabilidade de que somente uma coluna apresente os quadrados de mesma cor é de:

a) 6% b) 36% c) 40% d) 48% e) 90%

Desafios

1

O risco da cidade grande

O estatístico Paulo Guimarães, do instituto de pesquisa GPP, de São Paulo, criou uma nova fórmula para comparar as taxas de violência das principais capitais brasileiras. Ele levantou qual é o risco de uma família de quatro pessoas ter um de seus integrantes assassinado a tiros em treze cidades. Confira os resultados

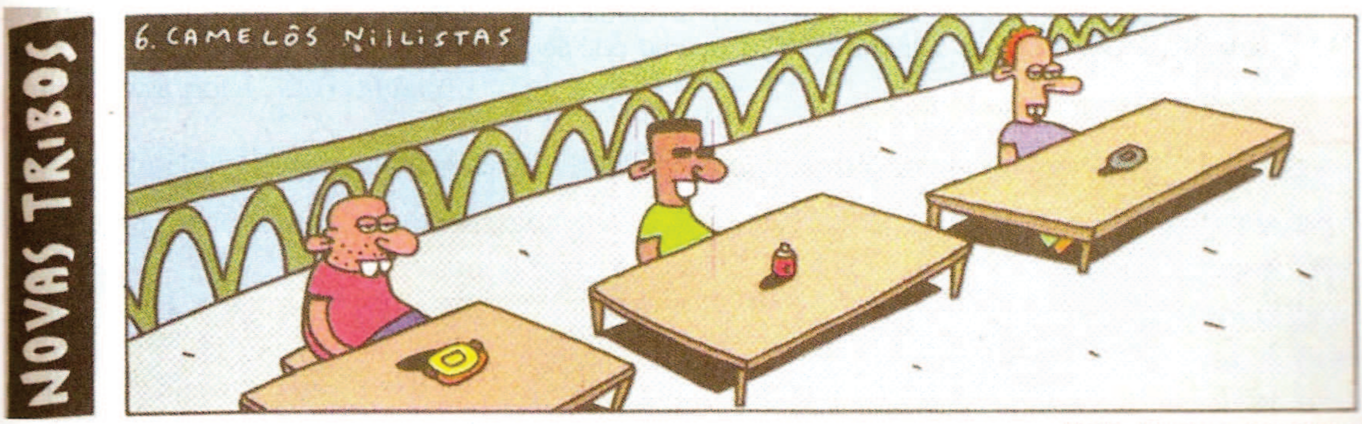
Cidade	Probabilidade de alguém da família ser morto com um tiro	
Recife		5
Vitória		6
Rio de Janeiro		9
Cuiabá		9
Salvador		11
Campo Grande	1 em	12
São Paulo		14
Brasília		14
Porto Alegre		16
Belo Horizonte		20
Curitiba		25
Fortaleza		33
Florianópolis		50

Fonte: *Veja*, 17/10/2001.

a) Duas irmãs, Ana e Maria, casaram-se e tiveram, cada uma, dois filhos. A família de Ana vive em Vitória, e a de Maria em Salvador.
Qual é a probabilidade de um integrante de cada uma das duas famílias ser morto com um tiro? E a probabilidade de ninguém ser morto com um tiro?

b) A família de Abel (esposa e 2 filhos) vive no Recife. Seu irmão Michel vive com a família (esposa e 2 filhos) em uma das capitais relacionadas na tabela, exceto Recife. Sabendo que a probabilidade de exatamente um integrante dessas duas famílias ser morto com um tiro é menor que 24%, em que cidades é possível que a família de Michel more?

2 **OS PESCOÇUDOS** — Caco Galhardo



(*Folha de S.Paulo*, 3/11/2001.)

Uma onda de pessimismo tomou conta desses camelôs, que expõem, cada um, exatamente um produto. As probabilidades de se efetivar uma venda, em um certo dia, são dadas por 3%, 5% e 8%. Admitindo independência nas vendas entre as barracas, calcule:

a) a probabilidade de, em um único dia, não ocorrer venda alguma;

b) a probabilidade de que pelo menos dois camelôs efetuem suas vendas.

3 A Mega Sena é uma das loterias mais populares do Brasil. Pode-se concorrer escolhendo de 6 a 15 números entre os 60 do volante. O resultado virá quando 6 números forem sorteados entre os 60 primeiros naturais (não nulos).

Há prêmios para quem acertar 4 números (quadra), 5 números (quina) ou 6 números. A aposta mínima (6 números) é de R$ 1,00.

a) De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mega Sena?

b) Apostando R$ 1,00, qual é a probabilidade de acertar uma quadra? E uma quina? E as 6 dezenas?

c) Apostando 10 números, qual é a probabilidade de acertar os 6 números sorteados?

d) Qual é a probabilidade de acertar os 6 números sorteados apostando-se 15 números (aposta máxima)?

e) Qual é a probabilidade de não acertar nenhum número fazendo-se a aposta máxima?

4 (Fuvest-SP) Um investidor quer aplicar 120 mil reais. Seu corretor lhe oferece um investimento, em duas fases, com as seguintes regras:

- Na 1ª fase do investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade p, o investidor ganha metade do que investiu; com probabilidade $(1 - p)$, o investidor perde um terço do que investiu.
- Na 2ª fase do investimento, a quantia final da 1ª fase será reinvestida, de forma independente da 1ª fase. Neste novo investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade $\frac{1}{2}$, o investidor ganha a quarta parte do que foi reinvestido; com probabilidade $\frac{1}{2}$, o investidor perde metade do que foi reinvestido.

a) Se o investidor aplicar seu dinheiro dessa forma, com que valores pode ficar ao término do investimento? Qual é, em função de p, a probabilidade de ficar com cada um desses valores?

b) Uma revista especializada informa que, nesse investimento, a probabilidade de perder dinheiro é 70%. Admitindo como correta a informação da revista, calcule p.

23 PROBABILIDADE

EXERCÍCIOS

1 Ω = {chocolate, cereja, café, laranja, menta}

2 a) A = {5, 6}
b) B = {2, 4, 6}
c) C = {1, 2, 3, 4, 6}

3 {(K, C), (C, K)}, em que K → cara e C → coroa

4 Ω = {{FOR, SL}, {FOR, MAN}, {FOR, REC}, {SL, MAN}, {SL, REC}, {MAN, REC}}

5 a) A = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
b) B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}

6 a) Ω = {(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), ..., (6, 1), ..., (6, 6)}
b) E_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}
E_2 = {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}

7 E^c = {(1, 5), (1, 6), (2, 6), (5, 1), (6, 1), (6, 2)}

8 $\frac{1}{3}$

9 a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

10 a) 35% b) 65%

11 a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$

12 a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{9}$

13 a) x = 400, y = 1 100, z = 300, w = 1 400
b) 20%

14 88,75%

15 36,4%

16 $\frac{1}{420}$

17 $\frac{35}{36}$

18 a) 90% b) 10% c) 50%

19 a) $\frac{9}{64}$ b) $\frac{9}{16}$

20 a) 2,25% b) 10,5%

21 60%

22 $\frac{1}{36}$

23 $\frac{1}{28}$

24 a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{2}$

25 a) 108 b) $\frac{2}{9}$

26 50%

27 a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{7}$

28 a) 3 000 b) $\frac{7}{30}$

29 a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{3}$

30 1, 2 ou 3

31 a) 20 b) 70%

32 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$

33 a) $\frac{11}{30}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{33}{40}$

34 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

35 14%

36 $\frac{2}{3}$

37 a) 50% b) $\frac{3}{16}$; 100%

38 a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{2}{3}$

39 a) $\frac{34}{65}$ b) $\frac{5}{17}$

40 a) 2% b) 52,6%

41 a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{4}$

42 a) 9% b) $\frac{1}{15}$

43 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{47}{180}$

44 a) $\frac{12}{19}$ b) $\frac{16}{95}$

45 26%

46 a) V b) F; é 44,4%. c) V d) V e) F; é $\frac{7}{11}$.

47 a) 0,000125%
b) 0,000188%
c) 0,054%; sim, pois tanto o valor apostado como as chances de acerto são 432 vezes maiores.

48 80%

49 a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{36}$

50 16,4%

51 4,67%

52 8,8%

53 $\frac{5}{16}$; $\frac{1}{32}$

54 a) 59,8% b) 31,5%

55 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{64}$

56 83,04%

57 a) $\frac{7}{256}$ b) $\frac{1}{7}$

TESTES DE VESTIBULARES

1 d	**6** d	**11** c	**16** b	**21** d
2 c	**7** a	**12** c	**17** e	**22** e
3 d	**8** c	**13** e	**18** b	**23** a
4 d	**9** c	**14** a	**19** b	**24** d
5 b	**10** a	**15** a	**20** e	**25** c