

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Штыгашев

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА КОМПЬЮТЕРЕ.
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 537:004(075.8)

Ш948

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук Я.С. Гринберг

д-р физ.-мат. наук Ю.Г. Пейсахович

Работа подготовлена на кафедре общей физики

Штыгашев А.А.

Ш948 Решение задач на компьютере. Электричество и магнетизм: учебное пособие / А.А. Штыгашев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 146 с.

ISBN 978-5-7782-3469-7

Рассмотрены примеры решения задач по основным темам разделов «электричество и магнетизм» рабочей программы по физике для студентов АВТФ: « Электростатика», « Постоянный ток», «Магнитостатика», « Электромагнитная индукция».

Особенностью пособия является описание применения компьютера при решении задач по физике, в качестве языка программирования используется Python.

УДК 537:004(075.8)

ISBN 978-5-7782-3469-7

© Штыгашев А.А., 2017

© Новосибирский государственный
технический университет, 2017

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА	6
1.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Расчет поля на основе принципа суперпозиции	6
1.2. Потенциал электростатического поля. Применение теоремы Гаусса для расчета поля	21
1.3. Диэлектрики в электрическом поле	34
1.4. Проводники в электрическом поле. Электроемкость проводников. Энергия электрического поля	41
2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	50
2.1. Постоянный электрический ток. Законы Ома	50
2.2. Закон Джоуля–Ленца. Правила Кирхгофа	56
3. МАГНИТОСТАТИКА	78
3.1. Расчет магнитных полей. Движение заряженных ча- стиц в электрическом и магнитном поле	78
3.2. Расчет магнитных полей по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции. Поток магнитного по- ля. Проводники с током в магнитном поле	91
3.3. Магнитный момент. Магнитный момент в магнит- ном поле. Магнитное поле в веществе	100
4. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ	113
4.1. Явление электромагнитной индукции. Индуктивность. Самоиндукция. Энергия магнитного поля	113
4.2. Переходные процессы в электрических цепях	119
5. ПРИЛОЖЕНИЯ	137
5.1. Математические формулы	137
5.2. Алгоритм построения силовой линии поля	140
5.3. Размерности электрических и магнитных величин .	142
6. ОТВЕТЫ	143
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	144

ВВЕДЕНИЕ

Компьютерное моделирование физических процессов развивается со второй половины 20 века. Первые машинные расчеты носили сугубо военный характер и были связаны с расчетом баллистических траекторий и характеристик ядерного взрыва [1]. Параллельно с развитием вычислительной техники разрабатывалась наука о машинных вычислениях и алгоритмах (computer science). Постепенно расширялись области применения вычислительной техники, и в настоящее время цифровая электроника проникла практически во все сферы человеческой жизнедеятельности, поэтому формирование умений и навыков использования вычислительной техники у современного специалиста является актуальным. Такие умения и навыки можно приобрести только в процессе решения практических задач по математике, физике и другим учебным дисциплинам. Каждый специалист технического профиля должен обладать навыками алгоритмизации и программирования. В настоящем пособии из множества языков программирования выбран высокоуровневый язык программирования Python [2]-[6]¹.

Процесс решения физической задачи складывается из следующих этапов: 1) постановка задачи (какие физические величины заданы, что надо найти); 2) определение математической модели (физические законы, условия); 3) выбор и применение метода решения математической модели; 4) анализ полученного решения и формулировка вывода. При наличии компьютера пункт 3 расширяется: 3.1) выбор метода решения; 3.2) разработка алгоритма решения; 3.3) реализация алгоритма на языке программирования; 3.4) отладка и тестирование; 3.5) численный расчет.

Учебный материал разбит на части, соответствующие рабочей программе по физике для студентов АВТФ. Каждая часть содержит краткий перечень законов и формулировок теорем (подробнее, см. [7]-[9]), примеров решения «типовых» задач и задач для самостоятельного решения. Задачи подбирались, в основном, из

¹ Многие ведущие университеты США, такие как Массачусетский технологический институт, Стендфордский университет и другие, в качестве языка программирования **начального уровня** используют Python. Этот язык программирования используют в таких передовых компаниях как NASA, IBM, Google, Red Hat, Яндекс, Mail.Ru и др.

сборников задач для технических вузов [10]-[13]. Предполагается, что студенты знакомы с азами программирования, поэтому акценты перенесены на применение компьютеров при решении физических задач.

Пособие предназначено для самостоятельной работы при выполнении домашних заданий, расчетно-графических и контрольных работ по физике.

Данная работа является продолжением пособия [14].

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

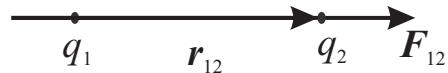
1.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Расчет поля на основе принципа суперпозиции

Закон Кулона. Два точечных заряда q_1 и q_2 взаимодействуют между собой с силой \mathbf{F}_{12} (рис. 1), равной

$$\mathbf{F}_{12} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}, \quad (1)$$

где $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – электрическая постоянная, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r_{1,2}$ – радиус-векторы точечных зарядов.

Напряженность \mathbf{E} электрического поля равна



$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q'}, \quad (2)$$

Рис. 1. К закону Кулона

где \mathbf{F} – сила, с которой электрическое поле действует на заряд q' .

Принцип суперпозиции

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i=1, i \neq j} \mathbf{F}_{ij}, \quad \mathbf{E}_j = \sum_{i=1, i \neq j} \mathbf{E}_{ij}. \quad (3)$$

Напряженность поля точечного заряда q , системы зарядов $\{q_n\}$

$$\mathbf{E} = k_0 \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0 \sum_n \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}. \quad (4)$$

В декартовой системе координат любой вектор \mathbf{a} может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (5)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты декартовой системы координат².

Напряженность поля заряженного металлического шара (сферы) радиуса R и заряда q

$$\mathbf{E} = \begin{cases} k_0 \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases} \quad (6)$$

² Здесь и далее мы будем использовать такие обозначения единичных векторов

Напряженность поля однородно заряженной плоскости

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n}, \quad (7)$$

где σ – поверхностная плотность заряда, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к плоскости.

Если заряд распределен непрерывно, то

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0 \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\mathbf{r}')dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0 \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (10)$$

где λ – линейная, σ – поверхностная и ρ – объемная плотности заряда и

$$q = \int_l \lambda dl, \quad q = \int_S \sigma dS, \quad q = \int_V \rho dV. \quad (11)$$

Электрический дипольный момент системы зарядов

$$\mathbf{p} = \sum_n q_n \mathbf{r}_n. \quad (12)$$

Электрический момент диполя

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}, \quad (13)$$

где \mathbf{d} – вектор, соединяющий отрицательный и положительный заряды.

Момент сил, действующий на диполь,

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (14)$$

Напряженность электрического поля точечного диполя

$$\mathbf{E} = k_0 \left(\frac{3pr}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right). \quad (15)$$

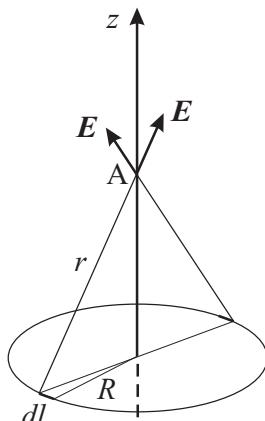


Рис. 2. К примеру 1.1

Пример 1.1. Тонкое кольцо радиусом $R = 0.1$ м равномерно заряжено зарядом $q = 1.03$ мКл. Определить напряженность поля: 1) на расстоянии $z=0.1$ м от центра кольца на оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр кольца; 2) в центре кольца; 3) на каком расстоянии от центра кольца на его оси напряженность поля будет максимальна?

Решение

Из соображений симметрии вектор напряженности поля будет направлен вдоль оси кольца от центра, как показано на рис. 2, так как компоненты E_x, E_y от диаметрально расположенных в плоскости xy элементарных зарядов λdl попарно компенсируются, тогда $E_z = E$. Заряд кольца равен $q = \lambda 2\pi R$.

Найдем dE_z от элемента заряда $dq = \lambda dl$, согласно (8), получаем $dE = k dE = k_0 \lambda dl (\mathbf{kr}) / r^3$, где $r = \sqrt{R^2 + z^2}$:

$$E = \int_{\Gamma} k_0 \frac{\lambda z}{r^3} dl. \quad (16)$$

Замечая, что подынтегральная функция не изменяется при интегрировании по кольцу, запишем

$$E = k_0 \frac{\lambda z}{r^3} \int_{\Gamma} dl = k_0 \frac{\lambda z}{r^3} 2\pi R = k_0 \frac{q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Чтобы найти максимальное значение напряженности поля на оси кольца, надо приравнять нулю производную dE/dz :

$$\frac{dE}{dz} = \frac{k_0 q}{(R^2 + z^2)^3} \left((R^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(R^2 + z^2)^{1/2} \right) = 0 \quad (18)$$

или $2z_{\max}^2 - R^2 = 0$ и $z_{\max} = R/\sqrt{2}$.

Составим программу расчета напряженности электростатического поля от кольца (рис. 2).

```

01 # Поле кольца
02 import math
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 eps0=8.85e-12; k0=1/(4*math.pi*eps0);
05 NZ=1000; R=0.1; q=1.03e-6;
06 def f(z):
07     f=k0*q*z/(R*R+z*z)**1.5;
08     return f
09 z0=0; z1=5*R; dz=(z1-z0)/NZ;
10 zmax=R/math.sqrt(2);
11 print ("1. R=",R)
12 print ("  E(R)=",f(R))
13 print ("2. z=",0)
14 print ("  E(0)=",f(0))
15 print ("3. zmax=",zmax)
16 print ("  Emax=",f(zmax))
17 z=[]; E=[]
18 z.append(0); E.append(0)
19 for i in range(1,NZ):
20     z2=z0+i*dz
21     z.append(z2)
22     E.append(f(z2))
23 plt.plot(z,E,'k-')
24 plt.xlabel('$z$', fontsize=20)
25 plt.ylabel('$E$', fontsize=20)
26 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки³: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета `math` вычисления математических функций; 03 – подключение пакета `matplotlib.pyplot` для графического вывода зависимости E от z ; 04–05 – определение исходных данных; 06–08 – определение функции $E(z)$; 09 – определение параметров расчетной координатной сетки $\{z_n\}$, где $z_n = z_0 + ndz$; 10 – вычисление координаты z_{\max} максимума

³ В приведенных листингах программ нумерация строк введена только для комментирования программ, в исходных текстах программ нумерация строк не используется. Здесь и далее используется версия python 3.4, которая отличается от более ранней версии python 2.x.

напряженности поля; 11–16 – вывод результатов расчета; 17 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{z\}_n, \{E\}_n$, 18 – запись начальных значений z_0 и $E(0)$; 19–22 – расчет массивов $\{z\}_n, \{E\}_n$; 23–26 – вывод графика $E(z)$.

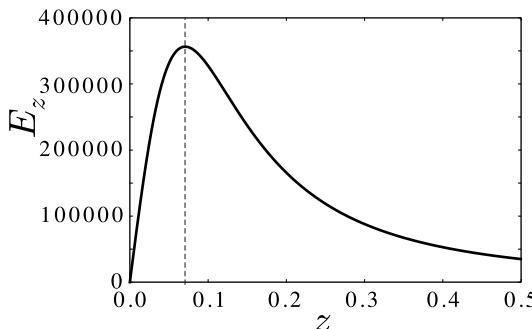


Рис. 3. Напряженность электрического поля E (В/м) вдоль полуоси z (м), штриховая линия отмечает положение максимума E

Приведем результаты расчета⁴ по программе:

```
>>>
1. R= 0.1
   E(R)= 327445.5528396254
2. z= 0
   E(0)= 0.0
3. zmax= 0.07071067811865475
   Emax= 356477.56577805756
```

>>>

При $z \rightarrow \pm\infty$, как видно из (17), напряженность поля $E \rightarrow 0$.

Картина распределения напряженности поля в области отрицательных z будет симметрична рассмотренной выше.

⁴ Культура приближенных вычислений, развитая в домашнюю эпоху, требовала сохранения минимально необходимого количества разрядов числа. Эти правила, выработанные практикой ручных вычислений, связаны со сравнительно большой стоимостью самих вычислений. С развитием вычислительной техники на современном этапе практически исчезла проблема скрупулезного учета минимального количества разрядов чисел. Расчеты проводятся с той точностью, которая обеспечивается машинным представлением числа и только на этапе выписывания ответа количество разрядов числа приводится в соответствие с точностью исходных данных.

Ответ: 1) $E(R) = 0.327 \text{ МВ/м}$; 2) $E(0) = 0 \text{ МВ/м}$; 3) $E(z_{\max}) = 0.356 \text{ МВ/м}$ при $z_{\max} = 0.0707 \text{ м}$.

Пример 1.2. Тонкий однородный диск радиусом $R=0.1 \text{ м}$, расположенный горизонтально, заряжен равномерно с поверхностной плотностью $\sigma=1.0 \text{ мкКл/м}^2$.

Определить напряженность E электрического поля: 1) на расстоянии $z = 0.1 \text{ м}$ на оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр диска; 2) в центре диска; 3) на каком расстоянии от центра диска на оси симметрии напряженность поля будет максимальной? 4) минимальной?

Решение

Аналогично соображениям, изложенным в решении предыдущей задачи, напряженность \mathbf{E} поля будет направлена вдоль оси z (рис. 4), т.е. $E = E_z$, поэтому сразу составим следующее выражение на основе (9) с учетом $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \rightarrow z\mathbf{k} - \mathbf{R} = \mathbf{r}$ и $dE_z = k dE$, $dE = k_0 \sigma dS \mathbf{r} / r^3$, где $r^2 = (z\mathbf{k} - \mathbf{R})^2 = z^2 + R^2$, $dS = 2\pi R dR$, $\mathbf{kr} = z$, $dE = k_0 \sigma 2\pi R dR z / (R^2 + z^2)^{3/2}$. Итак, интегрируем от 0 до R , получаем

$$E = k_0 \sigma 2\pi z \int_0^R \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = k_0 \sigma \pi z \int_0^R \frac{dR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (19)$$

или

$$E = 2k_0 \sigma \pi z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = k_0 \frac{q}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (20)$$

Максимальное значение напряженности электрического поля найдем из условия $dE/dz = 0$, вычисляя производную и приравнивая ее к нулю, получаем следующее условие:

$$-\sqrt{R^2 + z^2} + z^2 / \sqrt{R^2 + z^2} = -R^2 / \sqrt{R^2 + z^2} < 0,$$

т. е. экстремум отсутствует, функция E_z монотонно убывает, следовательно, максимальное значение E достигается при $z = 0$.

Составим программу расчета напряженности электростатического поля от заряженного диска.

```
01 # Поле диска
02 import math
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 eps0=8.85e-12; k0=1/(4*math.pi*eps0);
05 NZ=1000; R=0.1; sigma=1.0e-6;
06 q=sigma*math.pi*R**2;
07 def f(z):
08     f=k0*q*(1-z/math.sqrt(R*R+z*z))/R**2;
09     return f
10 z0=0; z1=5*R; dz=(z1-z0)/NZ;
11 print ("1. R=",R)
12 print ("    E(R)=",f(R))
13 print ("2. z=",0)
14 print ("    E(0)=",f(0))
15 z=[]; E=[];
16 z.append(0); E.append(0);
17 for i in range(1,NZ):
18     z2=z0+i*dz
19     z.append(z2)
20     E.append(f(z2))
21 plt.plot(z,E,'k-')
22 plt.xlabel('$z$', fontsize=20)
23 plt.ylabel('$E_z$', fontsize=20)
24 plt.show()
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** вычисления математических функций; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости E от z ; 04–06 – определение исходных данных; 07–09 – определение функции $E(z)$; 10 – определение параметров расчетной координатной сетки $\{z_n\}$, где $z_n = z_0 + ndz$; 11–14 – вывод результатов расчета; 15 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{z\}_n, \{E\}_n$, 16 – запись начальных значений z_0 и $E(0)$; 17–20 – расчет массивов $\{z\}_n, \{E\}_n$; 21–24 – вывод графика $E(z)$.

Приведем результаты расчета по программе:

>>>

1. R= 0.1

$$E(R) = 8273.819740493009$$

2. z= 0

$$E(0) = 28248.587570621465$$

>>>

Согласно (20), при $z \rightarrow \infty$ напряженность поля $E \rightarrow 0$, в центре диска $z = 0$ будет наибольшее значение напряженности поля $E = kq/R^2 = \sigma/2\epsilon_0 = 28.25$ кВ/м (рис. 5).

Ответ: 1) при $z = 0.1$ м, $E = 8.273$ кВ/м; 2) при $z = 0$ м, $E = 28.25$ кВ/м; 3) $E_{\max} = 28.25$ кВ/м при $z = 0$ м; 4) $E_{\min} \rightarrow 0$ кВ/м при $z \rightarrow 0$.

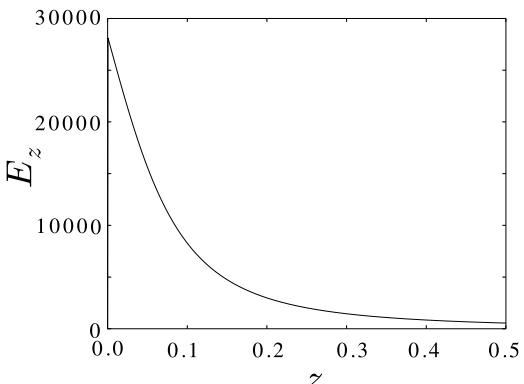


Рис. 5. Напряженность электрического поля E (В/м) вдоль полуоси z (м)

Пример 1.3. Две длинные параллельные нити равномерно заряжены, каждая с линейной плотностью $\lambda = 0.50$ мкКл/м. Расстояние между ними $2a = 0.45$ м. Пусть оси y и z декартовой системы координат лежат в плоскости, содержащей нити, и ось z равноудалена от них. Найти максимальное значение напряженности электрического поля. Построить силовые линии электростатического поля в плоскости $z = 0$.

Решение

Найдем напряженность поля E , согласно (8), от заряженной нити параллельной оси z и пересекающей плоскость $z = 0$ в точке $(0, \pm a)$

$$E(\mathbf{r}) = k_0 \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{R} - (z - z')\mathbf{k}}{\sqrt[3]{R^2 + (z - z')^2}} dz', \quad (21)$$

где $\mathbf{R} = xi + (y \pm a)\mathbf{j}$, интеграл (21) табличный (см. [16]) и равен

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0 2\lambda \mathbf{R}/R^2$. Результирующая напряженность поля, согласно принципу суперпозиции, равна $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0 2\lambda \left(\frac{x\mathbf{i} + (y+a)\mathbf{j}}{x^2 + (y+a)^2} + \frac{x\mathbf{i} + (y-a)\mathbf{j}}{x^2 + (y-a)^2} \right). \quad (22)$$

В плоскости симметрии $y = 0$ напряженность поля от нитей есть

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0 \frac{4\lambda x\mathbf{i}}{x^2 + a^2}, \quad (23)$$

тогда условие максимума

$$\frac{dE}{dx} = k_0 \frac{4\lambda(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2} = 0, \quad (24)$$

и при $x_{\max} = \pm a$ максимальное значение поля $E_{\max} = k_0 2\lambda/a$.

При $x \rightarrow 0$ напряженность поля изменяется как $4k_0\lambda x/a^2$, при $|x| \gg |a|$ напряженность поля $E \approx 4k_0\lambda/x$, а при $x \rightarrow \pm\infty$ напряженность поля стремится к нулю по гиперболическому закону (рис. 6).

Составим программу расчета напряженности поля от двух параллельных заряженных нитей.

```

01 # Поле двух нитей
02 import math
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 eps0=8.85e-12; k0=1/(4*math.pi*eps0);
05 a=0.225; lam=0.50e-6;
06 NX=1000; x0=0;x2=5*a; dx=(x2-x0)/NX;
07 def f(x):
08     f=4*k0*lam*x/(x*x+a*a);
09     return f
10 x1=a;
11 print (" x1 = ",x1)
12 print (" E(x1)=",f(x1))
13 x=[]; Ex=[]
14 x.append(0); Ex.append(f(0))
15 for i in range(1,NX):
16     x3=x0+i*dx

```

```

17     x.append(x3)
18     Ex.append(f(x3))
19     plt.plot(x,Ex,'k-')
20     plt.xlabel('$x$',fontsize=18)
21     plt.ylabel('$E_x$',fontsize=18)
22     plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** вычисления математических функций; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости E от x ; 04–05 – определение исходных данных; 06 – определение параметров расчетной координатной сетки $\{x_n\}$, где $x_n = x_0 + ndx$; 07–09 – определение функции $E(x)$; 10–12 – вывод результатов расчета; 13 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{x\}_n, \{E\}_n$, 14 – запись начальных значений x_0 и $E(0)$; 15–18 – расчет массивов $\{x\}_n, \{E\}_n$; 19–22 – вывод графика $E(x)$.

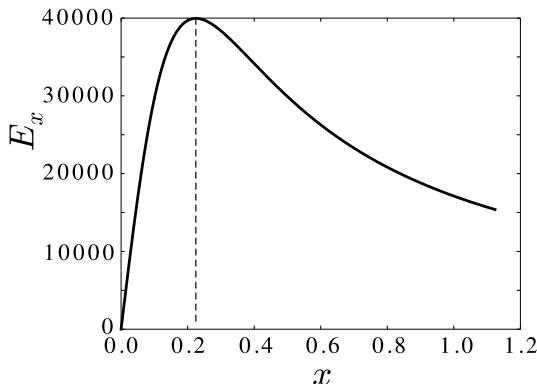


Рис. 6. Напряженность электрического поля E (В/м) вдоль полуоси x (м), штриховая линия отмечает положение максимума E_{\max}

Приведем результат расчета программы:

```

>>>
x1    = 0.225
E(x1)= 39963.5764198105
>>>

```

Составим программу построения силовых линий напряженности E (22) электростатического поля двух заряженных нитей в

плоскости $z = 0$, основываясь на алгоритме, описанном в приложении 5.2.

```
01 #Силовые линии поля двух нитей в плоскости z=0
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 a=0.25; N1=50; N=1000; dr=0.005; b=4*a;
05 dalp=2*mt.pi/N1; r0=10*dr; yb=[-a,a];
06 xg=[];yg=[];
07 for ya in yb:
08     for j in range(0,N1):
09         alp=j*dalp;
10         x=r0*mt.cos(alp);
11         y=ya+r0*mt.sin(alp);
12         for i in range(1,N):
13             R1=x*x+(y+a)*(y+a);
14             R2=x*x+(y-a)*(y-a);
15             EX=x*(1/R1+1/R2);
16             EY=((y+a)/R1+(y-a)/R2);
17             E=mt.sqrt(EX*EX+EY*EY);
18             dx=dr*EX/E;    dy=dr*EY/E;
19             x=x+dx;        y=y+dy;
20             xg.append(x); yg.append(y);
21 plt.scatter(xg,yg,s=0.25,c='k')
22 plt.xlim(-b, b)
23 plt.ylim(-b, b)
24 plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
25 plt.scatter(0,-a, s=10, c='k')
26 plt.scatter(0, a, s=10, c='k')
27 plt.xlabel('$x$', fontsize=16)
28 plt.ylabel('$y$', fontsize=16)
29 plt.show()
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math**; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot**; 04–05 – определение исходных данных: a, N1 – число силовых линий, N – число точек одной силовой линии, dr – длина шага вдоль силовой линии, b – полуширина квадратного окна вывода линий поля, dalp, r0 – начальные

полярные координаты линии, y^b – y -координата провода; 06 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{x\}_n, \{y\}_n$ координат силовых линий; 07–20 – расчет массивов $\{x\}_n, \{y\}_n$; 21–29 – вывод силовых линий поля x_n, y_n .

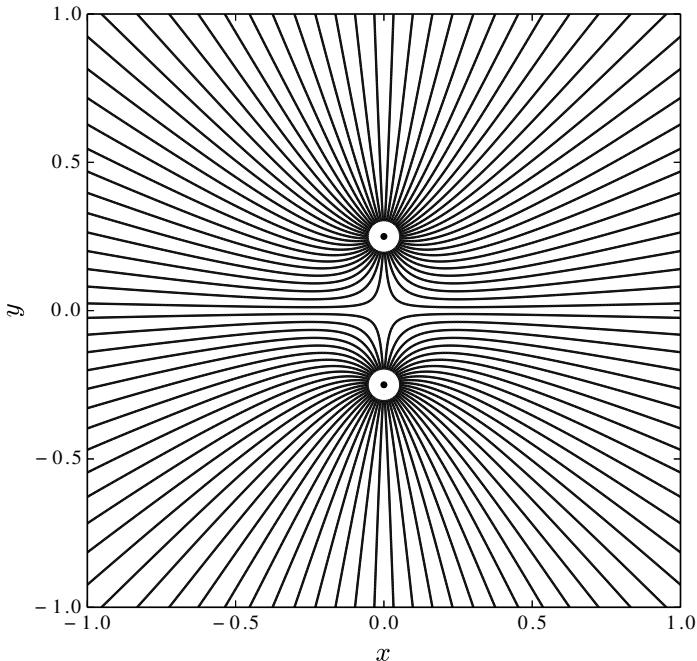


Рис. 7. Силовые линии электрического поля \mathbf{E} в плоскости $z = 0$. Силовые линии направлены от положительно заряженных нитей

На рис. 7 показаны силовые линии электрического поля \mathbf{E} , лежащие в плоскости $z = 0$, направленные от заряженных нитей (сечение нити схематично представлено в виде окружности с точкой в центре).

Ответ: $x_{\max} = \pm a = 0.225$ м, $E_{\max} \approx 40.0$ кВ/м.

Пример 1.4. Равные по модулю заряды $q = 1.0$ мКл лежат в плоскости xy в вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 1.0$ см, как показано на рис. 8. Найти электрический дипольный момент системы и определить в приближении точечного электрического диполя напряженность поля в точке с координа-

тами $(1, 1)$ м.

Решение

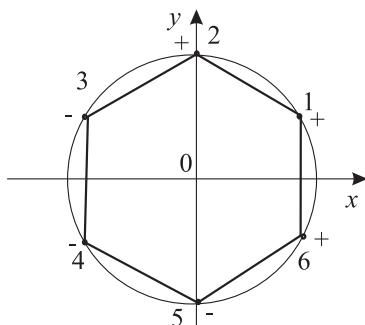


Рис. 8. К примеру 1.4

точке $(1,1)$ м. Радиус-вектор этой точки равен $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $r = \sqrt{2}$. Вычислим скалярное произведение $\mathbf{p}\mathbf{e} = 2qa(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2} = \sqrt{2}qa(\sqrt{3} + 1)$. Получаем $\mathbf{E} = k(3\sqrt{2}aq(\sqrt{3} + 1)\mathbf{e} - \mathbf{p})/r^3$ или $\mathbf{E} = kqa((\sqrt{3} + 3)\mathbf{i} + (3\sqrt{3} + 1)\mathbf{j})/2\sqrt{2}$. По модулю напряженность поля в точке $(1,1)$ м есть $E = kqa\sqrt{3\sqrt{3} + 10}/\sqrt{2}$.

Составим программу расчета.

```
01 # Момент p и напряженность E поля
02 import math
03 eps0=8.85e-12; k0=1/(4*math.pi*eps0);
04 a=0.01;q=1.0e-6;
05 p=4*q*a;
06 E=k0*q*a*(math.sqrt(3*math.sqrt(3)+10))/math.sqrt(2);
07 print (" p = ",p)
08 print (" E = ",E)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** вычисления математических функций; 03–04 – определение исходных данных; 05 – вычисление электрического дипольного момента p системы; 06 – вычисление напряженности электрического поля E в точке с координатами $(1,1)$ м; 07–08 – вывод результатов расчета.

Приведем результат расчета программы:

```

>>>
p = 4e-08
E = 247.85557274749186
>>>

```

Недостаток приведенного расчета состоит в том, что 1) используется приближение точечного диполя для расчета напряженности поля E ; 2) вычисляется $E(r)$ в одной пространственной точке, удаленной от системы ($r \gg a$). Применение компьютера позволяет получить точное значение поля в произвольной точке \mathbf{r} поля.

Расширим постановку задачи и составим программу для расчета напряженности E поля по (4) для произвольной точки с координатами (x, y) поля, сравним результат с ранее полученным значением $E = 247.85$ В/м в точке $(1,1)$ м.

```

01 # Напряженность поля E от заряженного 6-угольника
02 import math
03 eps0=8.85e-12; k0=1/(4*math.pi*eps0);
04 N=6; q0=1.0e-6; a=0.01; b=a*math.cos(math.pi/6);
05 rx=1; ry=1;
06 q=[]; x=[]; y=[];
07 q.append( q0); x.append(b); y.append(0.5*a);
08 q.append( q0); x.append(0); y.append(a);
09 q.append(-q0); x.append(-b); y.append(0.5*a);
10 q.append(-q0); x.append(-b); y.append(-0.5*a);
11 q.append(-q0); x.append(0); y.append(-a);
12 q.append( q0); x.append(b); y.append(-0.5*a);
13 EX=0; EY=0;
14 for j in range(0,N):
15     rx2=rx-x[j]; ry2=ry-y[j];
16     r3=math.pow(rx2*rx2+ry2*ry2,1.5);
17     EX=EX+k0*q[j]*rx2/r3;
18     EY=EY+k0*q[j]*ry2/r3;
19     E =math.sqrt(EX*EX+EY*EY);
20 print (" x =",rx," y =",ry)
21 print (" EX=",EX, "\n EY=",EY, "\n E =",E)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** вычисления математических функций; 03–04 – опре-

деление исходных данных; 05 – задание координат точки поля $(1, 1)$ м; 06 – инициализация одномерных массивов (списков) электрических зарядов $\{q\}_n$, координат вершин шестиугольника $\{x\}_n, \{y\}_n$; 07–12 – запись начальных значений $\{q\}_n, \{x\}_n, \{y\}_n$; 13 – инициализация компонент напряженности поля EX, EY ; 14–19 – вычисление напряженности электрического поля E в точке r (rx, ry); 20–21 – вывод результатов расчета.

Приведем результат расчета программы:

```
>>>
x = 1  y = 1
EX= 150.44090864213604
EY= 196.9808276413396
E = 247.85865619610436
>>>
```

Ответ: 1) $p = 4 \times 10^{-8}$ Кл·м; 2) $E = 248$ В/м.

Задания для самостоятельной работы

1.1. Два шарика одинакового радиуса и массы 20 мг подвешены на нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке подвеса. Один из шариков отвели в сторону и сообщили ему заряд q_0 , затем отпустили. После соударения с другим шариком они разошлись на угол $2\alpha = \pi/3$. Найти заряд q_0 шарика. Расстояние от центра шарика до точки подвеса $l = 0.20$ м.

1.2. Тонкое кольцо с внешним радиусом $R_1 = 0.10$ м и внутренним радиусом $R_2 = 0.05$ м расположено горизонтально и заряжено равномерно с поверхностью плотностью $\sigma = 1.00$ мКл/м². Определить напряженность E электрического поля: 1) на расстоянии $z = 0.10$ м на оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через центр диска; 2) в центре диска.

Указание: воспользуйтесь решением примера 1.2 и принципом суперпозиции.

1.3. Находящийся в вакууме очень тонкий прямой стержень длины $2a = 0.45$ м заряжен с одинаковой всюду линейной плотностью $\lambda = 0.50$ мКл/м. Для точек на прямой, перпендикулярной оси стержня и проходящей через его центр, найти модуль напряженности $E(R)$ поля как функцию расстояния от центра стержня. Вычислить E в точках $R_1 = a$ и $R_2 = 2a$.

1.2. Потенциал электростатического поля. Применение теоремы Гаусса для расчета поля

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ электростатического поля \mathbf{E} в пространственной точке \mathbf{r}

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q'}, \quad U(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (25)$$

где $U(\mathbf{r})$ потенциальная энергия электрического заряда q' в точке поля \mathbf{r} .

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ точечного заряда в точке поля \mathbf{r}

$$\varphi(\mathbf{r}) = k_0 \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}. \quad (26)$$

Принцип суперпозиции

$$\varphi_j = \sum_{i=1, i \neq j} \varphi_{ij}, \quad (27)$$

где $\varphi_j = \varphi(\mathbf{r}_j)$, $\varphi_{ij} = \varphi(\mathbf{r}_{ij})$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Эквипотенциальной поверхностью называют геометрическое место точек в которых потенциал поля имеет постоянное значение

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (28)$$

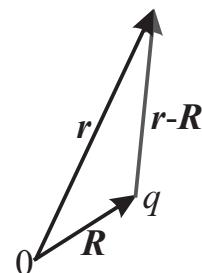


Рис. 9. К расчету φ по (26)

Связь напряженности поля с потенциалом

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (29)$$

Дифференциальная форма теоремы Гаусса

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (30)$$

Уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (31)$$

Вектор электрической индукции (смещения) \mathbf{D} для изотропных диэлектриков связан с напряженностью электростатического поля так

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (32)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Интегральная форма теоремы Гаусса

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad (33)$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ и q – задано (11).

Алгоритм расчета \mathbf{E} или \mathbf{D} в некоторой заданной точке Р:

- 1) Выписывается (33).
- 2) Построим замкнутую поверхность S , содержащую заданную точку Р и отражающую симметрию распределения заряда. В общем случае такая поверхность S может состоять из нескольких поверхностей S_j .
- 3) Поток вектора \mathbf{E} или \mathbf{D} поля в общем случае вычисляется как сумма скалярных произведений \mathbf{E} или \mathbf{D} на площадь соответствующих поверхностей $\mathbf{n}_j S_j$, составляющих замкнутую поверхность. Здесь \mathbf{n}_j – единичный вектор внешней нормали к поверхности S_j .
- 4) Вычисляются заряд, заключенный внутри поверхности S , и правая часть (33).
- 5) Подставляя в (33) вычисленные левые и правые части, находим искомую величину.

Границные условия для нормальных и тангенциальных составляющих \mathbf{E} , \mathbf{D} на поверхности раздела двух диэлектрических сред

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad D_{1\tau}/\varepsilon_1 = D_{2\tau}/\varepsilon_2; \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (34)$$

Пример 1.5. Найти потенциал φ точки поля \mathbf{r} , находящийся на расстоянии $r_1 = 0.10$ м от центра заряженного шара радиусом $R_0 = 0.01$ м. Задачу решить, если: а) задана поверхностная

плотность заряда $\sigma = 10.0$ мкКл/м²; б) задан потенциал шара $\varphi(R_0) = 300$ В.

Решение

Потенциал поля заряженного шара по определению равен отношению работы по перемещению пробного заряда из бесконечности в данную точку поля к величине этого заряда. Согласно (25) и (6) потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ поля заряженного шара равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^r \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{k_0 q e_r d\mathbf{l}}{r^2} = \frac{k_0 q dr}{r^2}. \quad (35)$$

Потенциал заряженного шара при $r > R_0$ равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{k_0 q}{r}. \quad (36)$$

а) Для заданной поверхностной плотности шара σ потенциал поля в точке r_1 равен

$$\varphi(r_1) = \frac{k_0 4\pi R_0^2 \sigma}{r_1}.$$

б) Для заданного потенциала шара $\varphi(R_0)$, потенциал поля в точке r_1 найдем из отношения потенциалов

$$\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(R_0)} = \frac{k_0 4\pi R_0 \sigma r_1}{k_0 4\pi R_0^2 \sigma} = \frac{R_0}{r_1}, \quad \varphi(r_1) = \varphi(R_0) \frac{R_0}{r_1}.$$

Составим программу расчета.

```
01 # Потенциал заряженного шара
02 import math as mt
03 k0=9.0e9; sigma=1.0e-5; R0=0.01; r1=0.1; ph0=300.0
04 ph1=k0*4*mt.pi*R0*R0*sigma/r1;
05 ph2=ph0*R0/r1;
06 print('ph1=',ph1)
07 print('ph2=',ph2)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для определения постоянной π ; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление потенциала $\varphi(r_1)$ ($ph1$) в случае а); 05 – вычисление потенциала $\varphi(r_1)$ ($ph2$) в случае б); 06–07 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета потенциала для двух случаев:

>>>

ph1= 1130.9733552923256

ph2= 30.0

>>>

Ответ: а) $\varphi(r_1) = 1.13 \text{ кВ}$, б) $\varphi(r_1) = 30 \text{ В}$.

Пример 1.6. Имеются два тонких проволочных кольца радиусом R каждое, оси которых совпадают (рис. 10). Заряды колец равны q и $-q$. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящих друг на расстоянии $h = 0.52 \text{ см}$, если $R = 0.30 \text{ см}$ и $q = 0.40 \text{ мККл}$.

Решение

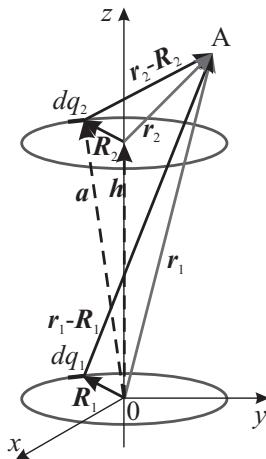


Рис. 10. К примеру 1.6

Пусть центры колец лежат на оси z , а начало координат поместим в центр нижнего кольца. Потенциал $\varphi_n(\mathbf{r}_n)$ n -го кольца в точке А равен

$$\begin{aligned}\varphi_n(\mathbf{r}_n) &= \int \frac{k_0 dq_n}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_n|} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{k_0 \lambda_n R_n d\alpha}{\sqrt{(x_n - X_n)^2 + (y_n - Y_n)^2 + (z_n - Z_n)^2}},\end{aligned}\quad (37)$$

где $n = 1, 2$, $X_n = R_n \cos \alpha$, $Y_n = R_n \sin \alpha$, $Z_1 = 0$ или $Z_2 = h$, λ_n – линейная плотность заряда. Для произвольной точки наблюдения А интеграл (37) проще вычислить численно, для этого воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников [15]:

$$\varphi_n(\mathbf{r}_n) = \Delta\alpha \sum_{m=1}^N \frac{k_0 \lambda_n R_n}{\sqrt{A_n - B_n \cos \alpha_m - C_n \sin \alpha_m}}, \quad (38)$$

где $A_n = x_n^2 + y_n^2 + (z_n - Z_n)^2 + R_n^2$, $B_n = 2R_n x_n$, $C_n = 2R_n y_n$.

Для расчета потенциала от двух колец воспользуемся принципом суперпозиции (28)

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \varphi_1(\mathbf{r}_1) + \varphi_2(\mathbf{r}_1). \quad (39)$$

Значения потенциала на оси n -го кольца ($x_n = y_n = 0$) определяются интегралом (37), который приводится к виду

$$\varphi_n(z_n) = \frac{k_0 q_n}{\sqrt{R_n^2 + (z_n - Z_n)^2}}. \quad (40)$$

Разность потенциалов равна $\Delta\varphi = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) - \varphi_1(h) - \varphi_2(h)$.

Составим программу расчета.

```
01 #Разность потенциалов между центрами колец
02 import math as mt
03 k0=9.0e9;R=0.3; h=0.52;q=4.0e-7;
04 Dph=2*k0*q*(1/R-1/mt.sqrt(R*R+h*h));
05 print('Dph=' ,Dph)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление разности потенциалов $\Delta\varphi$ (Dph) между центрами колец; 05 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета разности потенциалов:

```
>>>
Dph= 12006.66111625015
>>>
```

Дополнение. Построим сечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью $y = 0$. В этой плоскости $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, 0, z)$. Для построения изолиний⁵ воспользуемся функцией `contour()` пакета `matplotlib`.

Составим программу расчета.

```
01 #Сечение плоскостью y=0 эквипотенциальной поверхности
02 import numpy as np
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 k0=9.0e9;R=0.3; h=0.52;q=4.0e-7;NP=200;N=100;
05 da=2*np.pi/NP; D1=k0*q/2/np.pi; D2=-D1;
06 xmin=-1.5*R; xmax=1.5*R; zmin=-0.5*R; zmax=h+0.5*R;
```

⁵ Изолиния (линия уровня) есть кривая, которая получается сечением поверхности, описываемой функцией $z = \varphi(x, y)$, плоскостью $z = \text{const}$.

```

07 xl=np.linspace(xmin,xmax,N);
08 zl=np.linspace(zmin,zmax,N);
09 X,Z=np.meshgrid(xl,zl);
10 A=X**2+Z**2+R*R; B=2*R*X; s=0;
11 for i in range(0,NP):
12     alp=i*da;
13     s=s+1./np.sqrt(A-B*np.cos(alp));
14 ph=D1*da*s;
15 A=X**2+(Z-h)**2+R*R; s=0;
16 for i in range(0,NP):
17     alp=i*da;
18     s=s+1./np.sqrt(A-B*np.cos(alp));
19 ph=ph+D2*da*s;
20 plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
21 cs=plt.contour(ph,40,colors='k',linewidths=2);
22 plt.clabel(cs,fmt='%6.0f');
23 plt.text(48,14,r'0',fontsize=16)
24 plt.text(48,82,r'H',fontsize=16)
25 plt.xlabel('$x$',fontsize=16)
26 plt.ylabel('$z$',fontsize=16)
27 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета `numpy`; 03 – подключение пакета `matplotlib.pyplot` для графического вывода изолиний $\varphi(x, z) = \text{const}$; 04–05 – определение исходных данных; 06 – определение размера расчетной области, лежащей в плоскости $y = 0$; 07–09 – задание расчетной сетки и вспомогательного массива X, Z для расчета изолиний поля; 10 – расчет массивов коэффициентов A, B ; 11–19 – вычисление $\varphi(X, Z)$ в узлах координатной сетки; 20–27 – графический вывод изолиний.

Приведем результаты расчета изолиний.

На рис. 11 точки сгущения эквипотенциальных линий являются точками пересечения плоскостью $y = 0$ проводов колец. Значение потенциала φ_0 в точке 0 (центр нижнего кольца) равно 6 кВ, а в точке H (центр верхнего кольца) $\varphi_H = -6$ кВ, тогда разность потенциалов между точками 0 и H равна 12 кВ, что согласуется с ранее выполненным расчетом.

Ответ: $\Delta\varphi = 12$ кВ.

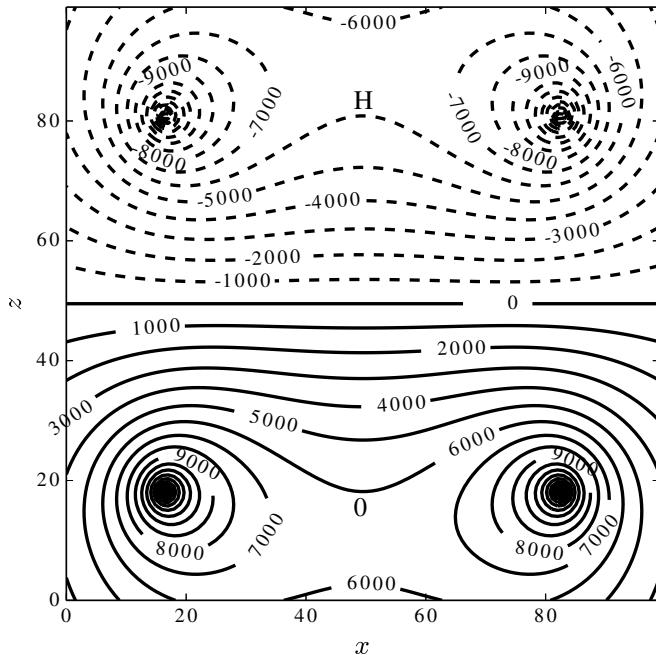


Рис. 11. Изолинии в сечениях эквипотенциальных поверхностей плоскостью $y = 0$. По оси абсцисс x изменяется от -0.45 до 0.45 м, по оси ординат z – от 0 до 0.67 м

Пример 1.7. Если напряженность E электрического поля больше 1 МВ/м в сухом воздухе, то происходит образование ионов, возникают искровые разряды. Какой максимальный электрический заряд q_{\max} можно сообщить металлической сфере радиусом
1) $R_1 = 0.01$ см и 2) $R_2 = 0.10$ см?

Решение

Воспользуемся формулой (6) для напряженности E поля заряженного металлического шара радиусом R : $E = k_0 q / r^2$, тогда $E_{\max} = k_0 q / R^2$ и соответственно $q_{\max} = E_{\max} R^2 / k_0$.

Составим программу расчета.

```
01 # Напряженность заряженного шара
02 k0=9.0e9; R1=1.0e-4; R2=1.0e-3; Emax=1.0e6;
```

```

03 qmax1=Emax*R1*R1/k0; qmax2=Emax*R2*R2/k0;
04 print('qmax1=',qmax1)
05 print('qmax2=',qmax2)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление максимального электрического заряда на шаре для: 1) $R_1 = 0.01$ см и 2) $R_2 = 0.10$ см; 04–05 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета q_{\max} для двух случаев:

```

>>>
qmax1= 1.11111111111112e-12
qmax2= 1.11111111111111e-10
>>>

```

Ответ: 1) $q_{\max 1} = 1.1$ пКл; 2) $q_{\max 1} = 110$ пКл.

Пример 1.8. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 0.01$ м и $R_2 = 0.02$ м несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1.0$ нКл/м² и $\sigma_2 = -0.5$ нКл/м². Определить напряженность E электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 1.5$ см и $r_2 = 3.0$ см от центра сфер. Пространство между сферами заполнено стеклом с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 10$.

Решение

Используем теорему Гаусса (33), где S – сферическая поверхность радиуса r , центр которой совпадает с центром концентрических заряженных сфер. Поток вектора напряженности E сквозь сферическую поверхность S , проходящую через точку поля r_1 (или r_2), равен

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_S E dS = E 4\pi r^2. \quad (41)$$

Правая часть (33) есть заряд, находящийся внутри сферической поверхности, деленный на $\epsilon_0 \epsilon$.

- а) $r < R_1$ и $q = 0$, по (33) $E = 0$;
- б) $R_1 < r < R_2$,

$$q = \int_{S_1} \sigma_1 dS = \sigma_1 4\pi R_1^2,$$

по теореме (33) $E4\pi r^2 = \sigma_1 4\pi R_1^2 / \varepsilon_0 \varepsilon_1$, тогда $E = \sigma_1 4\pi R_1^2 / \varepsilon_0 \varepsilon_1 r^2$;
 б) $r > R_2$,

$$q = \int_{S_1} \sigma_1 dS + \int_{S_2} \sigma_2 dS = \sigma_1 4\pi R_1^2 + \sigma_2 4\pi R_2^2 = q_1 + q_2,$$

по теореме (33) $E4\pi r^2 = (q_1+q_2)/\varepsilon_0 \varepsilon_2$, тогда $E = (q_1+q_2)/4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_2 r^2$.
 Составим программу расчета.

```

01 # Концентрические сферы
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 eps0=8.85e-12; k0=9.0e9;eps1=10; eps2=1;
05 R1=0.01; R2=0.02; r1=0.015; r2=0.03;
06 sigma1=1.0e-9; sigma2=-0.5e-9;
07 q1=4*mt.pi*R1*R1*sigma1; q2=4*mt.pi*R2*R2*sigma2;
08 E1=k0*q1/(eps1*r1*r1); E2=k0*(q1+q2)/(eps2*r2*r2);
09 print('E1=',E1,'\\n E2=',E2)
10 NR=5000; Rmin=0; Rmax=0.05; dR=(Rmax-Rmin)/NR;
11 r=[]; E=[];
12 r.append(0);
13 E.append(0);
14 for i in range(1,NR):
15     rr=Rmin+i*dR;
16     if rr<R1:
17         E.append(0);
18     elif rr<R2:
19         E.append(k0*q1/(eps1*rr*rr));
20     else:
21         E.append(k0*(q1+q2)/(eps2*rr*rr));
22     r.append(rr);
23 plt.plot(r,E,'k-',linewidth=2.0)
24 plt.plot([r1,r1], [-30,15], 'k--')
25 plt.plot([r2,r2], [-30,15], 'k--')
26 plt.grid(True)
27 plt.xlabel('$r$', fontsize=16)
28 plt.ylabel('$E$', fontsize=16)
29 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** вычисления математических функций; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости E от r ; 04–06 – определение исходных данных; 07 – вычисление электрических зарядов на внутренней q_1 и внешней q_2 сferах; 08 – вычисление значений напряженности E_1, E_2 поля в точках r_1, r_2 ; 09 – вывод результатов E_1, E_2 ; 10 – определение расчетной координатной сетки r_n , где $r_n = R_{\min} + ndR$; 11 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{r\}_n, \{E\}_n$, 12–13 – запись начальных значений r_0 и E_0 ; 14–22 – расчет массивов $\{r\}_n, \{E\}_n$; 23–29 – вывод графика $E(r)$.

График напряженности поля E представлен на рис. 12. При-

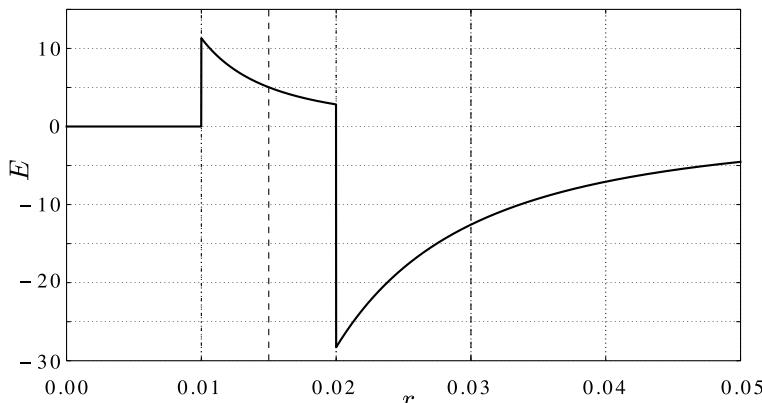


Рис. 12. Напряженность электрического поля E (В/м) вдоль радиального направления r (м). Пересечение штриховых линий при $r_1 = 0.15$ м и $r_2 = 0.30$ м с графиком $E(r)$ определяет искомые значения E_1 и E_2

ведем результаты расчета E для двух случаев:

```
>>>
E1= 5.02654824574367
E2= -12.566370614359174
>>>
```

Ответ: 1) $E(r_1) = 5.0$ В/м; 2) $E(r_2) = -10.6$ В/м.

Пример 1.9. Две длинные тонкостенные коаксиальные трубы радиусами $R_1 = 0.02$ м и $R_2 = 0.04$ м равномерно заряжены поверхностным зарядом, так что на единицу длины трубы прихо-

дятся заряды $\lambda_1 = 1$ нКл/м и $\lambda_2 = 0.5$ нКл/м. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 3$ см и $r_2 = 5$ см от оси трубок. Пространство между трубками заполнено фарфором с $\epsilon = 6.5$.

Решение

Вблизи длинных коаксиальных трубок $l \gg r_1, r_2$, где l – длина трубок, далеко от их концов силовые линии электрического поля перпендикулярны осям трубок. Выражение для потока вектора индукции \mathbf{D} через замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса r и длины l , ось которой совпадает с осью трубок, равно

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{D} d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (42)$$

где S_1 – нижнее основание; S_2 – верхнее основание; S_3 – цилиндрическая поверхность. Потоки \mathbf{D} через S_1 и S_2 равны нулю, так как равны нулю скалярные произведения $\mathbf{D} d\mathbf{S}$ взаимно перпендикулярных векторов, а поток \mathbf{D} через S_3 равен

$$\int_{S_3} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{S_3} D dS = D 2\pi r l.$$

Правая часть (33) есть заряд внутри цилиндрической поверхности, тогда согласно теореме Гаусса (33) $D 2\pi r l = q$. Рассмотрим три случая:

- а) $r < R_1$, тогда $D 2\pi r l = 0$, $D = 0$ и $E = 0$;
- б) $R_1 \leq r < R_2$, тогда $D 2\pi r l = q_1$, где $q_1 = \lambda_1 2\pi R_1 l$, $D = \lambda_1 R_1 / r$ и $E = \lambda_1 R_1 / \epsilon_0 \epsilon r$;
- в) $r \geq R_2$, тогда $D 2\pi r l = q_1 + q_2$, где $q_2 = \lambda_2 2\pi R_2 l$, $D = (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) / r$ и $E = (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) / \epsilon_0 \epsilon r$.

Составим программу расчета.

```

01 # Коаксиальные трубы
02 import matplotlib.pyplot as plt
03 eps0=8.85e-12; k0=9.0e9;eps1=6.5; eps2=1;
04 R1=0.02; R2=0.04; r1=0.03; r2=0.05;
05 lam1=1.0e-9; lam2=0.5e-9;
06 q1=lam1*R1/eps0; q2=lam2*R2/eps0;

```

```

07 E1=q1/(eps1*r1); E2=(q1+q2)/(eps2*r2);
08 print('E1=',E1,' E2=',E2)
09 NR=5000; Rmin=0; Rmax=0.1; dR=(Rmax-Rmin)/NR;
10 r=[]; E=[];
11 r.append(0); E.append(0);
12 for i in range(1,NR):
13     rr=Rmin+i*dR;
14     if rr<R1:
15         E.append(0);
16     elif rr<R2:
17         E.append(q1/(eps1*rr));
18     else:
19         E.append((q1+q2)/(eps2*rr));
20     r.append(rr);
21 plt.plot(r,E,'k-',linewidth=2.0)
22 plt.plot([R1,R1], [0,120], 'k-.')
23 plt.plot([R2,R2], [0,120], 'k-.')
24 plt.plot([r1,r1], [0,120], 'k--')
25 plt.plot([r2,r2], [0,120], 'k--')
26 plt.grid(True)
27 plt.xlabel('$r$', fontsize=16)
28 plt.ylabel('$E$', fontsize=16)
29 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости E от r ; 03–06 – определение исходных данных; 07 – вычисление значений напряженности E_1, E_2 поля в точках r_1, r_2 ; 08 – вывод результатов E_1, E_2 ; 09 – определение расчетной координатной сетки $\{r_n\}$, где $r_n = R_{\min} + n dR$; 10 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{r\}_n, \{E\}_n$, 11 – запись начальных значений r_0 и E_0 ; 12–20 – расчет массивов $\{r\}_n, \{E\}_n$; 21–29 – вывод графика $E(r)$.

График напряженности E поля представлен на рис. 13. Приведем результаты расчета E для двух случаев:

```

>>>
E1= 11.589164131537013
E2= 90.39548022598869
>>>

```

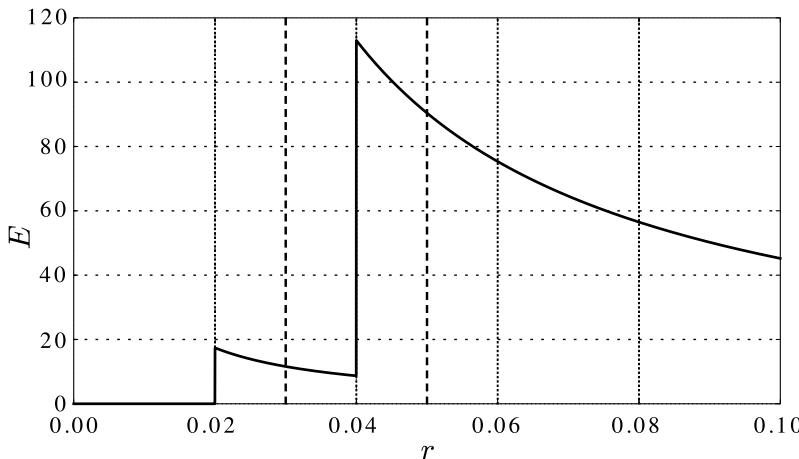


Рис. 13. Напряженность электрического поля E (В/м) вдоль радиального направления r (м). Точки пересечения штриховыми линиями определяют напряженности поля в точках, удаленных от центра на расстояния r_1, r_2

Ответ: 1) $E(r_1) = 11.6$ В/м; 2) $E(r_2) = 90.4$ В/м.

Задания для самостоятельной работы

1.4. Определите размер сферы, способной удержать в сухом воздухе потенциал в полумиллиона вольт. Чему равен электрический заряд этой сферы?

1.5. Какая работа совершается при перенесении точечного заряда $q = 20$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$ см от поверхности шара радиусом $R = 1$ см с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ мкКл/м²?

1.6. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 0.02$ м и $R_2 = 0.04$ м несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1.0$ нКл/м² и $\sigma_2 = -2.0$ нКл/м². Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 3$ см и r_6 см от центра сфер. Пространство между сферами заполнено парафином с $\epsilon = 2.2$.

1.7. В вакууме образовалось скопление зарядов в форме тонкого бесконечного длинного цилиндра радиусом $R_0 = 0.01$ м и с постоянной объемной плотностью $\rho = 10$ мкКл/м³. Найти напряженность поля в точке, лежащей внутри цилиндра на расстоянии

$r = 5.0$ мм от оси цилиндра.

1.8. Две длинные тонкостенные коаксиальные трубы радиусами $R_1 = 0.02$ м и $R_2 = 0.04$ м несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\lambda_1 = 1.0$ нКл/м и $\lambda_2 = -1.0$ нКл/м. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 3$ см и $r_2 = 5$ см от оси трубок. Пространство между трубками заполнено эбонитом с $\epsilon = 3.3$.

1.3. Диэлектрики в электрическом поле

Вектор поляризации диэлектрика

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (43)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов

$$P_n = \sigma', \quad \mathbf{n} \mathbf{P} = P_n, \quad (44)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности диэлектрика. Напряженность макроскопического поля E в диэлектрике равна

$$E = E_0 - E', \quad E = E_0 - P/\epsilon_0, \quad E = E_0/\epsilon, \quad (45)$$

где E_0 – внешнее поле, E' – поле связанных зарядов.

Вектор электрической индукции (смещения) D

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad 1 + \chi \equiv \epsilon. \quad (46)$$

Границные условия на поверхности раздела двух диэлектриков

$$\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, & \epsilon_1 E_{1n} &= \epsilon_2 E_{2n}, \\ D_{1\tau}/\epsilon_1 &= D_{2\tau}/\epsilon_2, & D_{1n} &= D_{2n}, \\ \sigma' &= P_{1n} - P_{2n}, & \mathbf{n} \mathbf{P}_k &= P_{kn}. \end{aligned} \quad (47)$$

Индукционный электрический момент p молекулы

$$p = \epsilon_0 \alpha E_{\text{loc}}, \quad (48)$$

где α - поляризуемость молекулы, E_{loc} – напряженность локально-го электрического поля. Напряженность локального поля E_{loc} для плотных газов, неполярных жидкостей и твердых диэлектриков:

$$E_{\text{loc}} = E + P/3\epsilon_0, \quad E_{\text{loc}} = (\epsilon + 2)E_0/3\epsilon, \quad (49)$$

а для разреженных газов: $E_{\text{loc}} \approx E_0$

Связь диэлектрической восприимчивости χ с поляризумостью молекулы α

$$\chi/(\chi + 3) = \alpha n/3, \quad (50)$$

где n – концентрация молекул.

Уравнение Клаузиуса–Моссотти

$$(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = \alpha n/3. \quad (51)$$

Пример 1.10. Диэлектрик поместили во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0 = 20$ кВ/м. Чему равна поляризация P диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м?

Решение

Поляризацию диэлектрика определяем из (45): $E = E_0 - P/\epsilon_0$, т.е. $P = \epsilon_0(E_0 - E)$.

Составим программу расчета P .

```
01 # Поляризация диэлектрика 1
02 eps0=8.85e-12; E0=2.0e4; E=4.0e3;
03 P=eps0*(E0-E);
04 print('P=' ,P)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление значения поляризации диэлектрика P ; 04 – вывод результата расчета P .

Приведем результаты расчета P :

```
>>>
P= 1.416e-07
>>>
```

Ответ: $P = 0.14$ мкКл·м.

Пример 1.11. Диэлектрическая восприимчивость χ газообразного аргона при нормальных условиях равна $5.54 \cdot 10^{-4}$. Определить диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 жидкого и твердого аргона. Молярная масса аргона $\mu = 0.040$ кг/моль, плотность аргона в жидком $\rho_1 = 1400$ кг/м³ и твердом $\rho_2 = 1650$ кг/м³ состояниях.

Решение

Представим частицу как электрически нейтральный проводящий шарик, который во внешнем поле поляризуется и приобретает дипольный момент (модель Моссотти). Поляризованность атома аргона можно определить из (50): $\alpha = 3\chi/n(\chi + 3)$.

Концентрацию газообразного аргона при нормальных условиях ($p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К) определим из основного уравнения кинетической теории газов: $p_0 = nkT_0$, где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана, тогда $n = p_0/kT_0$.

Из уравнения Клаузиуса–Моссотти (51) определим диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = (1 + 2\eta)/(1 - \eta)$, где $\eta = \alpha\rho N_A/3\mu$ для жидкого и твердого аргона.

Составим программу расчета.

```

01 # Поляризация диэлектрика 2
02 eps0=8.85e-12;k=1.38e-23;p0=1.0e5;T0=273;NA=6.02e23;
03 chi=5.54e-4; ro1=1400; ro2=1650; mu=0.040;
04 n=p0/(k*T0); alp=3*chi/(n*(chi+3));
05 eta1=alp*ro1*NA/3/mu; eta2=alp*ro2*NA/3/mu;
06 eps1=(1+2*eta1)/(1-eta1); eps2=(1+2*eta2)/(1-eta2);
07 print('n= ',n,'n\alp =',alp)
08 print('eps1=',eps1,'neps2=',eps2)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02–03 – определение исходных данных; 04 – вычисление значения концентрации n и поляризуемости атома аргона α ; 05 – вычисление вспомогательного параметра η ; 06 – вычисление диэлектрической проницаемости жидкого ϵ_1 и твердого ϵ_2 аргона; 07–08 – вывод результатов расчета n , α , ϵ_1 , ϵ_2 .

Приведем результаты расчета:

>>>

n= 2.654350480437437e+25

```

alp = 2.0867542460492297e-29
eps1= 1.5151843931154354
eps2= 1.6263903276481186
>>>

```

Ответ: $\varepsilon_1 = 1.52$, $\varepsilon_2 = 1.63$.

Пример 1.12. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 4$ мм. На пластины подано напряжение $U = 1200$ В. Найти: а) напряженность электростатического поля E в стекле; б) поверхностную плотность σ заряда на обкладках конденсатора; в) поверхностную плотность связанных зарядов σ' на стекле; г) диэлектрическую восприимчивость χ стекла. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 6$.

Решение

а) Напряженность поля в стекле равна $E = U/d$, с другой стороны $E = \sigma/\varepsilon_0\varepsilon$, где $\sigma = \sigma_0 - \sigma'$, где σ_0 – поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора в отсутствие диэлектрика. б) поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора: $\sigma = \varepsilon_0\varepsilon E$. в) Поверхностную плотность связанных зарядов на стекле найдем из (44) и (43), тогда $\sigma' = P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E$. г) Диэлектрическую восприимчивость стекла найдем из (46): $\chi = \varepsilon - 1$. Составим программу расчета.

```

01 # Поляризация диэлектрика 3
02 eps0=8.85e-12; U=1200; d=4.0e-3; eps=6;
03 E=U/d; sig=eps0*eps*E; sig1=(eps-1)*eps0*E; chi=eps-1;
04 print('E    =',E,'nsig =',sig)
05 print('sig1=',sig1,'nchi =',chi)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление значения напряженности поля E , поверхностной плотности заряда на обкладках конденсатора σ ; поверхностной плотности связанных зарядов σ' на гранях стекла; диэлектрической восприимчивости стекла χ ; 04–05 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
```

```

E      = 300000.0
sig   = 1.593e-05
sig1= 1.3275e-05
chi   = 5
>>>

```

Ответ: а) $E = 300 \text{ кВ}$; б) $\sigma = 16 \text{ мкКл}/\text{м}^2$; в) $\sigma' = 13 \text{ мкКл}/\text{м}^2$;
г) $\chi = 5$.

Пример 1.13. Между обкладками плоского конденсатора находятся две прилегающие друг к другу диэлектрические пластины из парафиновой бумаги $\epsilon_1 = 3.7$ и слюды $\epsilon_2 = 6$. На каждой пластине конденсатора распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = \pm 10^{-8} \text{ Кл}/\text{м}^2$. Определить плотность связанных зарядов на свободных поверхностях диэлектрических пластин и на их границе раздела. Диэлектрическая проницаемость незаполненного пространства между обкладками конденсатора равна $\epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$.

Решение

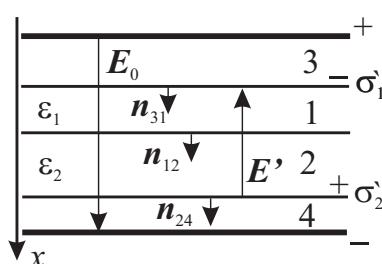


Рис. 14. Схема разреза конденсатора

$P_3 = P_4 = 0$. Итак, $E_1 = E_0/\epsilon_1$, $E_2 = \epsilon_1 E_1/\epsilon_2 = E_0/\epsilon_2$, где внешнее поле $E_0 = \sigma/\epsilon_0$.

Поляризация диэлектрических слоев, согласно (43), есть: $P_1 = \chi_1 \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 - 1)\epsilon_0 E_1$ и $P_1 = (\epsilon_1 - 1)\sigma/\epsilon_1$, $P_2 = \chi_2 \epsilon_0 E_2 = (\epsilon_2 - 1)\epsilon_0 E_2$ и $P_2 = (\epsilon_2 - 1)\sigma/\epsilon_2$.

Поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности пластины 1 равна $\sigma'_1 = -P_1$ и $\sigma'_1 = -(\epsilon_1 - 1)\sigma/\epsilon_1$, на поверхности пластины 2 $\sigma'_2 = P_2$ и $\sigma'_2 = (\epsilon_2 - 1)\sigma/\epsilon_2$, на границе раздела диэлектриков $\sigma'_{12} = P_1 - P_2 = (\epsilon_1 - 1)\sigma/\epsilon_1 - (\epsilon_2 - 1)\sigma/\epsilon_2 = \sigma(1/\epsilon_2 - 1/\epsilon_1)$.

Составим программу расчета.

Силовые линии электрического поля перпендикулярны плоскостям пластин, т.е. $E_{jn} = E_j$, $D_{jn} = D_j$, $P_{jn} = P_j$, где $j = 1, 2, 3, 4$. В конденсаторе имеются три внутренние границы раздела: 31, 12, 24 (рис. 14). Учитывая, что $E_4 = E_3 \equiv E_0$, граничные условия (47) для всех трех границ: $\epsilon_3 E_0 = \epsilon_1 E_1$, $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$, $\epsilon_2 E_2 = \epsilon_4 E_0$, $\sigma'_1 = P_3 - P_1$, $\sigma'_{12} = P_1 - P_2$, $\sigma'_2 = P_2 - P_4$,

```

01# Поляризация диэлектрика 4
02 eps1=3.7; eps2=6; eps3=1;eps4=1; s=1.0e-8;
03 sigma1=-(eps1-1)*s/eps1; sigma2=(eps2-1)*s/eps2;
04 sigma12=s*(1/eps2-1/eps1);
05 print('sigma1 = ',sigma1,'nsigma2 = ',sigma2)
06 print('sigma12=',sigma12)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление значения поверхностной плотности связанных зарядов: на свободной поверхности парафиновой бумаги σ'_1 (sigma1), на свободной поверхности слюды σ'_2 (sigma2); 04 – расчет плотности связанных зарядов σ'_{12} (sigma12) на поверхности раздела «парафиновая бумага–слюда»; 05–06 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
sigma1 = -7.297297297297298e-09
sigma2 = 8.333333333333334e-09
sigma12= -1.0360360360360357e-09
>>>

```

Ответ: а) $\sigma'_1 = -7.3 \text{ нКл}/\text{м}^2$; б) $\sigma'_2 = 8.3 \text{ нКл}/\text{м}^2$; в) $\sigma'_{12} = -1.04 \text{ нКл}/\text{м}^2$.

Пример 1.14. Металлический шар радиусом $R_1 = 5 \text{ см}$ окружен равномерно слоем фарфора толщиной $h = 2 \text{ см}$, так что внешний радиус равен $R_2 = R_1 + h = 7 \text{ см}$ (рис. 15). Определить поверхностные плотности σ'_1 и σ'_2 связанных электрических зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд шара равен $q = 10 \text{ нКл}$, диэлектрическая проницаемость фарфора $\epsilon = 5$.

Решение

Согласно (47) поверхностная плотность связанных зарядов равна $\sigma'_1 = -P_{2n}$ (знак заряда противоположен знаку заряда на сфере). Силовые линии поля радиальны, следовательно, $P_{2n} = P_2$ и $P_2 = \chi\epsilon_0 E_1 = (\epsilon - 1)\epsilon_0 q / 4\pi R_1^2$. Поверхностная плотность связанных зарядов внутренней поверхности равна $\sigma'_1 = -(\epsilon - 1)\epsilon_0 q / 4\pi R_1^2$.

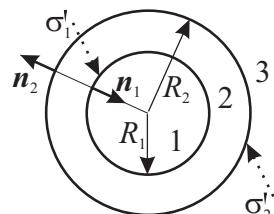


Рис. 15. Металлический шар с внешним слоем из фарфора

Граничные условия на внешней поверхности диэлектрической пролистки (47) имеют вид $\sigma'_2 = P_{2n} - P_{3n}$, где $P_{3n} = 0$. Поверхностная плотность связанных зарядов внешней поверхности равна $\sigma'_2 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 q / 4\pi R_2^2$. Вычислим и сравним заряд на внутренней и внешней стороне слоя фарфора: $Q'_1 = 4\pi R_1^2 \sigma'_1 = -(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 q$, $Q'_2 = 4\pi R_2^2 \sigma'_2 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 q$.

Составим программу расчета.

```
01 # Поляризация диэлектрика 5
02 import math as mt
03 eps2=5; R1=0.05; R2=0.07; q=1.0e-8;
04 sigma1=-(eps2-1)*q/(4*mt.pi*R1*R1);
05 sigma2= (eps2-1)*q/(4*mt.pi*R2*R2);
06 q1=4*mt.pi*R1*R1*sigma1;
07 q2=4*mt.pi*R2*R2*sigma2;
08 print('sigma1 =',sigma1,'nsigma2 =',sigma2)
09 print('q1      =' ,q1,'\\nq2      =' ,q2)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для вычисления π ; 03 – определение исходных данных; 04–05 – вычисление значения поверхности плотности связанных зарядов: на границе «металл–фарфор» σ'_1 (`sigma1`), на свободной поверхности фарфора σ'_2 (`sigma2`); 06–07 – расчет связанных зарядов на внутренней q_1 (`q1`) и внешней q_2 (`q2`) поверхности фарфора; 08–09 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
sigma1 = -1.2732395447351626e-06
sigma2 = 6.496120126199808e-07
q1      = -4e-08
q2      = 4e-08
>>>
```

Суммарные связанные заряды на поверхностях раздела равны по модулю.

Ответ: $\sigma'_1 = -1.3 \text{ нКл}/\text{м}^2$; б) $\sigma'_2 = 6.5 \text{ нКл}/\text{м}^2$.

Задания для самостоятельной работы

1.9. Определить поляризацию P стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0 = 5 \text{ МВ}/\text{м}$.

1.10. Определить поляризумость α молекул азота, если диэлектрическая проницаемость ε жидкого азота равна 1.445 и его плотность $\rho = 804 \text{ кг}/\text{м}^3$.

1.11. Вычислить поляризумость α атома водорода и диэлектрическую проницаемость ε атомарного водорода при нормальных условиях. Радиус электронной орбиты принять равным 53 пм.

1.12. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов $U = 1800$ В. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$. Определить диэлектрическую восприимчивость χ стекла и поверхностную плотность связанных зарядов σ' на поверхности стекла.

1.13. В электрическое поле с напряженностью $E_0 = 100 \text{ В}/\text{м}$ помещена бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2.00$. Определить: 1) напряженность поля и электрическое смещение внутри пластины; 2) поляризацию диэлектрика; 3) поверхностную плотность заряда.

1.4. Проводники в электрическом поле. Электроемкость проводников. Энергия электрического поля

Связь электрического заряда q и потенциала φ проводника

$$q = C\varphi, \quad (52)$$

где C – электрическая емкость проводника.

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d, \quad (53)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора, S – площадь, d – расстояние между обкладками конденсатора.

Напряженность E поля в плоском конденсаторе

$$E = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon, \quad (54)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на пластине конденсатора.

Электрическая емкость уединенной сферы радиуса R

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (55)$$

Электроемкость C параллельного соединения конденсаторов C_1, C_2

$$C = C_1 + C_2. \quad (56)$$

Электроемкость C последовательного соединения конденсаторов C_1, C_2

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (57)$$

Энергия электрического поля W заряженного конденсатора

$$W = CU^2/2 = q^2/2C, \quad (58)$$

где U – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Плотность энергии w электрического поля напряженности E

$$w = \epsilon_0\epsilon E^2/2. \quad (59)$$

Пример 1.15. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии $d = 0.5$ см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 0.2$ мКл/м² и $\sigma_2 = -0.3$ мКл/м². Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между плоскостями.

Решение

Напряженность поля между плоскостями, заряженными разными по знаку зарядами, равна $E = E_1 + E_2 = \sigma_1/2\epsilon_0 + |\sigma_2|/2\epsilon_0$. Разность потенциалов найдем из определения работы A_{12} поля по перемещению пробного заряда q' с одной пластины на другую: $\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = A_{12}/q' = \int_1^2 Edx$. Искомая разность потенциалов равна $\Delta\varphi = (\sigma_1 + |\sigma_2|)d/2\epsilon_0$.

Составим программу расчета.

```
01 # Проводник в электрическом поле 1
02 eps0=8.85e-12; d=0.005; s1=2.0e-7; s2=-3.0e-7;
03 U=(s1+abs(s2))*d/2/eps0;
04 print('U =' ,U)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление разности потенциалов между плоскостями U (U); 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
U = 141.24293785310735  
>>>
```

Ответ: $U = 141$ В.

Пример 1.16. Восемь заряженных водяных капель радиусом $R_1 = 1.0$ мм и зарядом $q_1 = 0.10$ нКл каждая сливаются в одну водяную каплю. Найти потенциал φ_N большой капли.

Решение

Известно, что дождевые капли имеют размеры в диапазоне от 0.1 до 5 мм. В облаке при температуре выше точки замерзания воды процесс слияния мелких капель облака в конечном счете приводит к выпадению капель из облака. Каждая из N водяных капель несет электрический заряд, поэтому имеет на поверхности капли ненулевой потенциал равный $\varphi_n = k_0 q_n / R_n$. При объединении N капель результирующая капля имеет заряд, равный $q_N = \sum_n q_n$ и радиус R_N равный $R_N = (3 \sum_n V_n / 4\pi)^{1/3}$.

Если исходные капли одинакового размера, то $R_N = N^{1/3} R_1$, потенциал большой капли равен $\varphi_N = k_0 q_N / R_N$.

Составим программу расчета.

```
01 # Слияние капель дождя 2  
02 k0=9.0e9; R1=0.001; N=8; q1=0.1e-9; ph1=k0*q1/R1;  
03 qN=N*q1; RN=N**((1/3)*R1; phN=k0*qN/RN;  
04 print('ph1=',ph1,'nphN =',phN)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных и потенциала исходной капли φ_1 ($ph1$); 03 – вычисление заряда q_N (qN), радиуса R_N (RN), потенциала φ_N (phN) результирующей капли; 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
ph1= 900.0  
phN = 3600.0  
>>>
```

Ответ: $\varphi_N = 3.6$ кВ.

Пример 1.17. Одному шарику сообщили заряд $q_1 = 12$ нКл, другому сообщили заряд $q_2 = 18$ нКл, затем шарики соединили проводником. Найти окончательное распределение зарядов на шариках, находящихся далеко друг от друга. Радиус первого шарика $R_1 = 8$ см, второго $R_2 = 16$ см. Емкостью соединительного проводника можно пренебречь.

Решение

До соединения шарики имели разный заряд, разную емкость и разный потенциал на поверхности шариков. Когда шарики соединили проводником, заряды перетекали с одного шарика на другой, до тех пор пока не сравнялись потенциалы шариков $\varphi'_1 = \varphi'_2 \equiv \varphi'$. В конечном состоянии первый шарик имеет электрический заряд q'_1 , а второй – q'_2 . Найдем эти заряды.

Согласно (52) $q_1 = C_1\varphi_1$ и $q_2 = C_2\varphi_2$, где по (55) для уединенных шариков их емкости равны $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$ и $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$. Из закона сохранения электрического заряда ([7]–[9]) следует, что $q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$. Шарики удалены на большое расстояние друг от друга, поэтому их взаимной емкостью можно пренебречь. Тогда $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = C_1\varphi'_1 + C_2\varphi'_2$ и $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = (C_1 + C_2)\varphi'$ и окончательно получаем

$$\varphi' = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}.$$

Заряд первого шарика равен $q'_1 = C_1\varphi'$, а заряд второго шарика равен $q'_2 = C_2\varphi'$.

Составим программу расчета:

```
01 # Два шарика
02 import math as mt
03 eps0=8.85e-12;R1=0.08;R2=0.16;q1=12.0e-9;q2=18.0e-9;
04 C1=4*mt.pi*eps0*R1; C2=4*mt.pi*eps0*R2;
05 ph=(q1+q2)/(C1+C2); Q1=C1*ph; Q2=C2*ph;
06 print('Q1=',Q1,'\\nQ2 =',Q2)
07 print('q1+q2=',q1+q2,'\\nQ1+Q2 =',Q1+Q2)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для вычисления π ; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление электроемкости шариков C_1 , C_2 ; 05 – расчет

потенциала соединенных шариков φ' (ph) и зарядов шариков q'_1 (Q1), q'_2 (Q2); 06 – вывод результата расчета q'_1 и q'_2 ; 07 – расчет и вывод суммарного заряда до $(q_1 + q_2)$ и после $(q'_1 + q'_2)$ соединения шариков.

Приведем результаты расчета:

>>>

Q1= 9.99999999999999e-09

Q2 = 1.99999999999997e-08

q1+q2= 3e-08

Q1+Q2= 3e-08

>>>

Ответ: $q'_1 = 10$ нКл, $q'_2 = 20$ нКл.

Пример 1.18. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U = 600$ В, находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной $d_1 = 7$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 3$ мм. Площадь каждой пластины $S = 200$ см². Найти: а) электрическую емкость C конденсатора; б) напряженность E_1, E_2 электростатического поля в слоях, электрическую индукцию D_1, D_2 и падение потенциала U_1, U_2 в каждом слое. Диэлектрическая проницаемость стекла $\epsilon_1 = 7$, эбонита $\epsilon_2 = 3$.

Решение

Конденсатор с таким слоистым диэлектрическим наполнением представляет собой батарею последовательно соединенных конденсаторов. При передаче положительного заряда q на одну из пластин конденсатора вследствие электрической индукции на границе раздела диэлектриков индуцируется связанный заряд, который в конечном счете индуцирует отрицательный заряд на другой пластине конденсатора. Емкость такой батареи конденсаторов равна $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$, где $C_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 S / d_1$, $C_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 S / d_2$.

Заряд q найдем из (52). Напряженность поля E в каждом слое найдем по (54): $E_1 = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_1$ и $E_2 = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_2$, где $\sigma = q / S$ и $q = CU$, тогда $\sigma = CU / S$. Электрическая индукция в первом слое диэлектрика $D_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 E = \sigma$, аналогично для второго слоя диэлектрика $D_2 = \sigma$, $D_1 = D_2 \equiv D$. Падение потенциала в первом слое равно $U_1 = E_1 d_1$, а во втором слое $U_2 = E_2 d_2$.

Составим программу расчета.

01 #Два слоя диэлектрика

```

02 eps0=8.85e-12; eps1=7; eps2=3;
03 S=0.02; d1=0.007; d2=0.003; U=600;
04 C1=eps0*eps1*S/d1; C2=eps0*eps2*S/d2;
05 C=C1*C2/(C1+C2);
06 s=C*U/S; E1=s/eps0/eps1; E2=s/eps0/eps2;
07 D=s; U1=E1*d1; U2=E2*d2;
08 print('C = ', C, '\nE1 = ', E1, ' E2 = ', E2)
09 print('D = ', s, '\nU1 = ', U1, ' U2 = ', U2)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02–03 – определение исходных данных; 04 – вычисление электроемкости конденсаторов C_1 , C_2 ; 05 – расчет электроемкости батареи конденсаторов C ; 06 – расчет поверхностной плотности зарядов σ (с), напряженности поля в слоях E_1 (E_1), E_2 (E_2); 07 – расчет электрического смещения D , разности потенциалов в слоях U_1 (U_1), U_2 (U_2); 08–09 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
C = 8.85e-11
E1 = 42857.14285714286  E2= 100000.00000000001
D= 2.6550000000000004e-06
U1 = 300.0000000000006  U2= 300.0000000000006
>>>

```

Проверка: $U_1 + U_2 = 600 = U$ В.

Ответ: а) $C=0.885$ пФ; б) $E_1=4.29 \cdot 10^4$ В/м, $E_2=10.0 \cdot 10^4$ В/м, $D_1 = D_2 = D = 2.66$ мкКл/м², $U_1 = 300$ В, $U_2 = 300$ В.

Пример 1.19. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 680$ пФ зарядили до разности потенциалов $U_1 = 1.5$ кВ и отключили от источника тока. Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный, конденсатор электроемкостью $C_2 = 470$ пФ. Определить энергию, израсходованную на образование искры, прокочившей между обкладками конденсаторов при их соединении.

Решение

Любой конденсатор может удерживать заряд, величина которого определяется емкостью конденсатора и предпробивной разностью потенциалов U_{max} , зависящей от свойств среды, окружающей обкладки конденсатора. В условиях задачи разность потенциалов батареи конденсаторов U_m заведомо меньше U_{max} . Согласно (58)

начальная энергия поля в конденсаторе равна $W_1 = C_1 U_1^2 / 2$, после параллельного подсоединения второго конденсатора энергия становится равной $W_2 = (C_1 + C_2) U_m^2 / 2$. Разность потенциалов U_m найдем из закона сохранения электрического заряда ([7]–[9]) $q = C_1 U_1 = (C_1 + C_2) U_m$, тогда $U_m = C_1 U_1 / (C_1 + C_2)$.

Энергия искрового разряда равна $\Delta W = W_1 - W_2$.

Составим программу расчета.

```
01 # Энергия искры
02 C1=6.8e-10; C2=4.7e-10; U1=1500;
03 C=C1+C2; W1=C1*U1*U1/2; Um=C1*U1/C;
04 W2=C*Um*Um/2; DW=W1-W2;
05 print('Um=' ,Um, '\nDW =' ,DW)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление: емкости батареи конденсаторов C , исходной энергии, запасенной первым конденсатором W_1 , разность потенциалов батареи конденсаторов U_m (Um); 04 – расчет энергии батареи конденсаторов W_2 и энергии искрового разряда ΔW (DW); 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
Um= 886.9565217391305
DW = 0.00031265217391304343
>>>
```

Ответ: $\Delta W = 0.31 \text{ мДж.}$

Пример 1.20. Электрическое поле создано равномерно заряженной сферой зарядом $q = 0.1 \text{ мКл}$ и радиусом $R = 10 \text{ см}$. Какова энергия W поля, заключенная в объеме, ограниченном поверхностью сферы и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в два раза больше радиуса сферы?

Решение

Чтобы найти энергию поля, воспользуемся определением энергии dW через объемную плотность энергии w (59), $dW = w dV$. Учитывая сферическую симметрию электрического поля, элемент объема dV удобно взять в виде шарового слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда

энергия всего слоя задана интегралом

$$W = \int_{R_1}^{R_2} w 4\pi r^2 dr = 2\pi \varepsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} E^2 r^2 dr = 2\pi \varepsilon_0 k_0^2 q^2 \int_{R_1}^{R_2} r^{-2} dr,$$

где $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $E = k_0 q / r^2$ – напряженность электростатического поля. Вычисляем последний интеграл и получаем $W = 2\pi \varepsilon_0 k_0^2 q^2 (1/R_1 - 1/R_2)$.

Замечание. Одним из способов проверки правильности полученного результата является совпадение размерности левой и правой частей расчетной формулы. Например, для последней формулы размерность левой части $[W] = L^2 M T^{-2}$, размерность правой части $[2\pi \varepsilon_0 k_0^2 q^2 (1/R_1 - 1/R_2)]$ равна $[\varepsilon_0][k_0^2][q^2][1/R_1 - 1/R_2]$, где размерность (см. приложение 5.3) $[\varepsilon_0] = L^{-3} M^{-1} T^4 I^2$, $[k_0^2] = [\varepsilon_0]^{-2}$, $[q^2] = T^2 I^2$, $[1/R_1 - 1/R_2] = L^{-1}$. Итак, размерность правой части есть $(L^3 M^1 T^{-4} I^{-2})(T^2 I^2)L^{-1} = L^2 M T^{-2}$. Размерности левой и правой частей совпали. Необходимо также отметить, что совпадение размерностей не гарантирует правильности анализируемого выражения.

Составим программу расчета.

```
01 # Энергия слоя
02 k0=9.0e9; q=1.0e-7; R1=0.1; R2=0.2;
03 W=0.5*k0*q*q*(1/R1-1/R2);
04 print('W=',W)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление энергии W , запасенной в шаровом слое толщины R ; 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
W= 0.000225
>>>
```

Ответ: $W = 0.225$ мДж.

Задания для самостоятельной работы

1.14. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены электрические заряды с поверхностными плотностями

$\sigma_1 = 0.2 \text{ мКл}/\text{м}^2$ и $\sigma_2 = 0.5 \text{ мКл}/\text{м}^2$. Определить разность потенциалов между плоскостями.

1.15. Сто одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала $\varphi = 20 \text{ В}$, сливаются в одну большую каплю. Каков электрический потенциал образовавшейся капли?

1.16. Шар радиусом $R_1 = 6 \text{ см}$ заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300 \text{ В}$, а шар радиусом $R_2 = 4 \text{ см}$ – до потенциала $\varphi_1 = 500 \text{ В}$. Определить потенциал шаров после того как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника можно пренебречь.

1.17. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0.2 \text{ мКл}/\text{м}^2$. Расстояние между пластинами равно $d_1 = 1 \text{ мм}$. Насколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния между пластинами до $d_3 \text{ мм}$?

1.18. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 0.6 \text{ мКФ}$ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300 \text{ В}$ и соединен со вторым конденсатором электроемкостью $C_2 = 0.4 \text{ мКФ}$, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 150 \text{ В}$. Найти заряд Δq , перетекший с пластин первого конденсатора на второй.

1.19. Какое количество теплоты Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами равна $U = 15 \text{ кВ}$, расстояние $d = 1 \text{ мм}$, диэлектрик – слюда и площадь каждой пластины равна $S = 300 \text{ см}^2$? Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$.

1.20. Уединенная металлическая сфера емкостью $C = 10 \text{ пФ}$ заряжена до потенциала 3 кВ. Определить энергию поля, заключенную в сферическом слое, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в три раза больше радиуса сферы.

2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

2.1. Постоянный электрический ток. Законы Ома

Сила тока I

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (60)$$

где dq – электрический заряд, протекший через поперечное сечение проводника за время dt .

Плотность j электрического тока

$$\mathbf{j} = I\mathbf{e}_v/S = en\mathbf{v}, \quad (61)$$

где e – заряд носителя тока, n – концентрация носителей заряда, \mathbf{v} – упорядоченная (дрейфовая) скорость носителей заряда, $\mathbf{e}_v = \mathbf{v}/v$ – единичный вектор, S – площадь поперечного сечения проводника.

Сопротивление R проводника

$$R = 1/G = \rho l/S, \quad (62)$$

где G – электропроводность, ρ – удельное сопротивление, l – длина проводника.

Удельное сопротивление ρ и сопротивление R проводника в зависимости от температуры t

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad R = R_0(1 + \alpha t), \quad (63)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления.

Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R = U/R, \quad (64)$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов участка цепи.

Закон Ома участка цепи с источником тока

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12})/(R + r), \quad (65)$$

где ε_{12} – ЭДС участка цепи 12, r – внутреннее сопротивление источника тока, R – сопротивление проводника на участке 12.

Закон Ома для полной (замкнутой) цепи

$$I = \varepsilon / (R + r). \quad (66)$$

Ток короткого замыкания равен

$$I^* = \varepsilon / r. \quad (67)$$

Пример 2.1. Вольфрамовая нить электрической лампочки при температуре $t_1 = 20^\circ \text{C}$ имеет сопротивление $R_1 = 35.8 \text{ Ом}$. Какова будет температура T_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением $U = 220 \text{ В}$ по нити идет ток $I = 0.5 \text{ А}$? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама при $t_1 = 20^\circ \text{C}$ равен $\alpha = 0.0051 \text{ К}^{-1}$.

Решение

Согласно (63) сопротивление вольфрамовой нити накала равно $R = R_1(1 + \alpha(t - t_1))$, тогда $R_2 = R_1(1 + \alpha(t_2 - t_1))$. С другой стороны, согласно закону Ома сопротивление нити $R = U/I$. Разность температур равна $t_2 - t_1 = (R_2/R_1 - 1)/\alpha$, тогда $T_2 = t_2 + 273$.

Составим программу расчета.

```
01 # Вольфрамовая нить
02 alp=5.1e-3; T0=273; t1=20; R1=35.8; U=220; I=0.5;
03 R2=U/I; Dt=(R2/R1-1)/alp; t2=t1+Dt; T2=t2+T0;
04 print('T2=', T2)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление сопротивления R_2 ($R2$), увеличения температуры $t_2 - t_1$ (Dt) и температуры нити лампы T_2 ($T2$); 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
T2= 2506.8240771168803
>>>
```

Ответ: $T_2 \approx 2510 \text{ K}$.

Пример 2.2. Имеются два одинаковых гальванических элемента с ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1.5 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r_1 = r_2 = r = 0.3 \text{ Ом}$. Как надо соединить эти элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить наибольший ток во

внешней цепи, если сопротивление нагрузки равно: а) $R_1 = 0.2$ Ом и б) $R_2 = 16$ Ом? Найти ток I в каждом случае.

Решение

Отбросим варианты, когда элементы дают заведомо малый ток:

1) при параллельном соединении элементов плюсовой полюс соединяется с минусовым; 2) при последовательном соединении элементов соединяются одноименные полюсы. Тогда остаются такие случаи:

1. Параллельное соединение элементов

$$r' = r_1 r_2 / (r_1 + r_2) = 0.5r, \varepsilon' = \varepsilon.$$

а) $R_1 = 0.2$ Ом, $I_1 = \varepsilon' / (R_1 + r')$;

б) $R_2 = 16$ Ом, $I_2 = \varepsilon' / (R_2 + r')$.

2. Последовательное соединение элементов

$$r'' = r_1 + r_2 = 2r, \varepsilon'' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon.$$

а) $R_1 = 0.2$ Ом, $I_3 = \varepsilon'' / (R_1 + r'')$;

б) $R_2 = 16$ Ом, $I_4 = \varepsilon'' / (R_2 + r'')$.

Составим программу расчета.

```
01 # Два источника тока
02 E1=1.5; E2=1.5; R1=0.2; R2=16.; r1=0.3; r2=0.3;
03 r3=r1*r2/(r1+r2); E3=E1;
04 I1=E3/(R1+r3);I2=E3/(R2+r3);
05 r4=r1+r2; E4=E1+E2;
06 I3=E4/(R1+r4);I4=E4/(R2+r4);
07 print('I1=',I1,'\\nI2=',I2,'\\nI3=',I3,'\\nI4=',I4)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление внутреннего сопротивления r' (r_3) и ЭДС ε' ($E3$) батареи параллельно соединенных элементов; 04 – расчет тока I_1 ($I1$) и I_2 ($I2$); 05 – вычисление внутреннего сопротивления r'' ($r4$) и ЭДС ε'' ($E4$) батареи последовательно соединенных элементов; 06 – расчет тока I_3 ($I3$) и I_4 ($I4$); 07 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
I1= 4.285714285714286
I2= 0.09287925696594428
I3= 3.75
I4= 0.18072289156626503
```

>>>

Ответ: Наибольший ток $I_1 \approx 4.3$ А достигается при параллельном соединении элементов питания и подключении наименьшего внешнего сопротивления.

Пример 2.3. Найти показания амперметра и вольтметра в схеме, показанной на рис.16. ЭДС батареи элементов $\varepsilon = 110$ В, сопротивления $R_1 = 400$ Ом, $R_2 = 600$ Ом, сопротивление вольтметра $R_V = 1000$ Ом.

Решение

В условиях задачи не указаны значения сопротивления R_A амперметра и внутреннего сопротивления r батареи

элементов, то считаем их равными нулю: $R_A = 0$, $r = 0$. Эквивалентное сопротивление схемы равно $R = R_1 + R'$, где $R' = R_2 R_V / (R_2 + R_V)$. Показания амперметра определяются из закона Ома (66): $I_A = \varepsilon / R$. Показание вольтметра найдем из соотношения $\varepsilon = I_A R_1 + U_V$, где $U_V = IR'$, т.е. $U_V = \varepsilon - I_A R_1$.

Составим программу расчета:

```
01 # Амперметр и вольтметр
02 E=110; R1=400; R2=600; RV=1000;
03 R3=R2*RV/(R2+RV);
04 IA=E/(R1+R3);
05 UV=E-IA*R3;
06 print('IA=' ,IA,' \nUV=' ,UV)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление эквивалентного сопротивления R' (R_3); 04 – расчет тока I_A (IA); 05 – вычисление напряжения U_V (UV); 06 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

>>>

IA= 0.14193548387096774

UV= 56.774193548387096

>>>

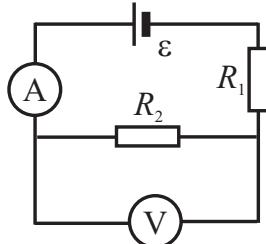


Рис. 16. К примеру 2.3

Ответ: $I_A \approx 0.14$ А, $U_V \approx 56.8$ В.

Пример 2.4. Четыре электролампочки, рассчитанные на напряжение $U_l = 3$ В и силу тока $I_l = 0.3$ А каждая, следует включить параллельно и питать от источника постоянного тока с ЭДС $\varepsilon = 5.4$ В. Какое дополнительное сопротивление R_d надо включить последовательно с цепочкой ламп? Внутренним сопротивлением r источника тока можно пренебречь.

Решение

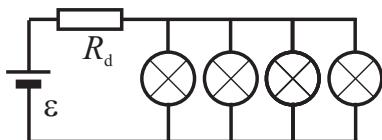


Рис. 17. К примеру 2.4

Для нормальной работы электролампочек необходимо, чтобы через каждую из них протекал ток I_l , следовательно, через дополнительное сопротивление R_d будет протекать суммарный ток равный $I = 4I_l$. Сопротивление электролампочки в штатном рабочем режиме равно $R_l = U_l/I_l$. Согласно закону Ома (66) для полной цепи $\varepsilon = I(R_d + R')$, где R' – эквивалентное сопротивление электролампочек $R'^{-1} = R_l^{-1} + R_l^{-1} + R_l^{-1} + R_l^{-1} = 4R_l^{-1}$. Итак, искомое добавочное сопротивление равно $R_d = \varepsilon/I - R'$.

Составим программу расчета:

```
01 # Батарея лампочек
02 E=5.4; U1=3; I1=0.3;
03 R1=U1/I1; R3=R1/4; I=4*I1; Rd=E/I-R3;
04 print('Rd=',Rd)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление сопротивления лампочки R_l ($R1$), эквивалентного сопротивления R' ($R3$), суммарного тока I (I), добавочного сопротивления R_d (Rd); 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
Rd= 2.000000000000001
>>>
```

Ответ: $R_d = 2.0$ Ом.

Пример 2.5. При внешнем сопротивлении $R_1 = 8$ Ом сила тока в цепи $I_1 = 0.8$ А, а при внешнем сопротивлении $R_2 = 15$ Ом,

сила тока равна $I_2 = 0.5$ А. Определить силу тока I^* короткого замыкания.

Решение

Короткое замыкание электрической цепи происходит при нулевом внешнем сопротивлении, тогда сила тока короткого замыкания равна $I^* = \varepsilon/r$, где r – внутреннее сопротивление источника тока. Составим, согласно (66), систему двух алгебраических уравнений относительно двух неизвестных ε и r :

$$\begin{cases} \varepsilon = I_1 R_1 + I_1 r, \\ \varepsilon = I_2 R_2 + I_2 r. \end{cases} \quad (68)$$

Из системы уравнений $I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 r$ находим внутреннее сопротивление источника тока: $r = (I_2 R_2 - I_1 R_1) / (I_1 - I_2)$, а из первого уравнения системы (68) находим ЭДС ε . Силу тока короткого замыкания найдем как отношение ε/r .

Составим программу расчета.

```
01 # Закон Ома 1
02 R1=8; R2=15; I1=0.8; I2=0.5;
03 r=(I2*R2-I1*R1)/(I1-I2); E=I1*(R1+r); IZ=E/r;
04 print('r =',r,'nE =',E,'nIZ =',IZ)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление внутреннего сопротивления источника тока r (r), ЭДС ε (E) и тока короткого замыкания I^* (IZ); 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
r = 3.6666666666666647
E = 9.333333333333332
IZ= 2.5454545454545463
>>>
```

Ответ: $I^* \approx 2.5$ Ом.

Задания для самостоятельной работы

2.1. Из медной проволоки длиной $l = 120$ м и площадью поперечного сечения $S = 24$ мм² намотана катушка. Найти приращение сопротивления катушки при нагревании от $t_1 = 200^\circ\text{C}$ до

$t_2 = 700^\circ\text{C}$. Температурный коэффициент сопротивления меди при $t_1 = 20^\circ\text{C}$ равен $\alpha = 0.0043 \text{ K}^{-1}$.

2.2. Элемент с ЭДС $\varepsilon = 2 \text{ В}$ имеет внутреннее сопротивление $r = 0.5 \text{ Ом}$. Найти падение потенциала внутри элемента при токе $I = 0.25 \text{ А}$. Каково внешнее сопротивление цепи при этих условиях?

2.3. Какую долю ЭДС элемента составляет разность потенциала на его зажимах, если сопротивление элемента в n раз меньше внешнего сопротивления? Задачу решить для: а) $n = 0.1$; б) $n = 1$; в) $n = 10$.

2.4. Амперметр и вольтметр подключили последовательно к батарее с ЭДС $\varepsilon = 6 \text{ В}$. Если параллельно вольтметру подключить некоторое сопротивление, то показание вольтметра уменьшается в 2 раза, а показание амперметра во столько же раз увеличивается. Найти показание вольтметра после подключения сопротивления.

2.2. Закон Джоуля–Ленца. Правила Кирхгофа

Мощность электрического тока

$$P = U_{12}I, \quad P = I^2R, \quad P = U_{12}^2/R, \quad (69)$$

где I – постоянный ток, U_{12} – напряжение, R – полное сопротивление на участке 12 цепи.

Закон Джоуля–Ленца

$$Q = U_{12}It, \quad Q = RI^2t, \quad Q = \frac{U_{12}^2}{R}t, \quad (70)$$

где Q – полное количество тепла, выделяемое проводником за время t .

Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме

$$w = \gamma E^2, \quad (71)$$

где w – объемная плотность мощности тока, $\gamma = 1/\rho$ – удельная электропроводность проводника, ρ – удельное сопротивление проводника, E – напряженность электрического поля.

Первое правило Кирхгофа. В каждой точке ветвления (узле⁶) проводов в контуре алгебраическая сумма токов равна нулю:

$$\sum_n I_n = 0. \quad (72)$$

Токи, идущие к узлу, считаются положительными, а токи, выходящие из узла, считаются отрицательными. Это правило есть следствие закона сохранения электрического заряда.

Второе правило Кирхгофа. Выделим из цепи произвольный замкнутый контур, состоящий из проводников и источников тока. Алгебраическая сумма ЭДС источников тока в данном контуре равна алгебраической сумме произведений сил токов отдельных участков контура на их сопротивления:

$$\sum_n \varepsilon_n = \sum_n I_n R_n. \quad (73)$$

Для определенности обход контура осуществляем по часовой стрелке. Если направление обхода совпадает с выбранным направлением тока, то ток считается положительным, в противном случае — отрицательным. ЭДС считается положительным, если при выбранном направлении обхода источник тока пересекается от минусового полюса (катод) к плюсовому полюсу (анод).

Алгоритм построения диаграммы изменения потенциала вдоль замкнутого контура ABC...A электрической цепи:

- 1) Разбиваем выделенный контур ABC...A на участки, содержащие по одному элементу цепи, и обозначаем каждую граничную точку.
- 2) Выбираем произвольную начальную точку контура, например A, и полагаем равным нулю ее потенциал («заземление»), $\varphi_A = 0$ и формально полагаем $R_A = 0$.
- 3) Последовательно обходя контур, вычисляем потенциал φ в каждой выбранной точке. Если направление обхода совпадает с направлением тока, то потенциал на i -м участке, согласно (65), уменьшается: $\varphi_i = \varphi_{i-1} - I_i R_i$, где $\{R_i\}$ – электрическое сопротивление i -го участка, т.е. участка между $i-1$ и i

⁶ Узлом (точкой ветвления) называют место соединения трех и более проводников.

точками контура. Если при обходе источник тока пересекается от катода (-) к аноду (+), то потенциал увеличивается на $\varepsilon_i - I_i r_i$, где r_i – электрическое сопротивление i -го источника тока. Если источник тока идеальный, то соответствующий участок на диаграмме отображается вертикальным отрезком. В итоге получаем два одномерных массива данных: $\{R_i\}$ и $\{\varphi_i\}$, где $i = A, B, C, \dots, A$.

- 4) На оси абсцисс в выбранном масштабе откладываются сопротивления участков между граничными точками. На оси ординат откладываются потенциалы граничных точек. Построенные точки соединяются отрезками прямых.

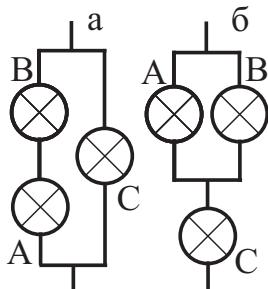


Рис. 18. К примеру 2.6

Пример 2.6. Имеются три 110-вольтовые электрические лампочки накаливания, мощности которых равны $P_A = P_B = 40$ Вт, $P_C = 80$ Вт. Как надо включить эти лампочки, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети $U_0 = 220$ В? Найдите токи I_A , I_B , I_C , текущие через лампочки при нормальном накале.

Решение

Лампочки А, Б, С характеризуются электрическим сопротивлением, равным $R_A = R_B = U_A^2 / P_A$, $R_C = U_C^2 / P_C$, а нормальный накал через лампочки обеспечивает ток, равный $I_A^* = I_B^* = P_A / U_A$, $I_C^* = P_C / U_C$.

Сначала рассмотрим схему а рис. 18 и рассчитаем токи, текущие через лампочки А и Б: $I_{A1} = I_{B1} = U_0 / (R_A + R_B)$, а ток через лампочку С равен $I_{C1} = U_0 / R_C$.

Рассмотрим схему б, показанную на рис. 18. Ток, проходящий через лампочку С, равен $I_{C2} = U_0 / R_3$, где полное сопротивление $R_3 = R_C + R_A R_B / (R_A + R_B)$. Одинаковые токи через лампочки А и Б равны $I_A = I_B = I_{C2} / 2$.

Составим программу расчета:

```
01 # Закон Ома 2
02 PA=40; PB=40; PC=80; UA=110; UB=110; UC=110; U0=220;
03 RA=UA*UA/PA; RB=UB*UB/PB; RC=UC*UC/PC;
```

```

04 IA=PA/UA; IB=PB/UB; IC=PC/UC;
05 IA1= U0/(RA+RB); IC1= U0/RC;
06 R3=RC+RA*RB/(RA+RB);
07 IC2= U0/R3; IA2= RB*IC2/(RA+RB); IB2=IC2-IA2;
08 print('IA =',IA,'nIC =',IC)
09 print('1) IA =',IA1,'n    IC =',IC1)
10 print('2) IA =',IA2,'n    IC =',IC2)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление сопротивления R_A (RA), R_B (RB), R_C (RC) лампочек; 04 – вычисление номинальных токов I_A (IA), I_B (IB), I_C (IC), текущих через лампочки; 05 – вычисление токов в схеме а; 06 – расчет эквивалентного сопротивления цепи схемы б; 07 – вычисление токов в схеме б; 08–10 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
IA = 0.36363636363636365
IC = 0.7272727272727273
1) IA = 0.36363636363636365
   IC = 1.4545454545454546
2) IA = 0.36363636363636365
   IC = 0.7272727272727273
>>>

```

Номинальные токи, обеспечивающие нормальный накал лампочек равны $I_A = I_B = 0.36$ А, $I_C = 0.73$ А. Сравнивая с расчетными токами левой схемы (рис. 18), убеждаемся, что значение тока I_C в два раза больше номинального, тогда как токи правой схемы соответствуют номинальным значениям.

Ответ: Необходимо соединять лампочки согласно правой схемы (рис. 18): $I_A = I_B = 0.36$ А, $I_C = 0.73$ А.

Пример 2.7. Определить сопротивление R_0 фрагмента электрической схемы, показанной на рис. 19, а, где $R_1 = 3R$, $R_2 = 4R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$, $R_5 = 2R$. **Решение**

Используем правила Кирхгофа для расчета эквивалентного сопротивления R_0 . С этой целью воспользуемся приемом «BOGUS DATA», т. е. дополним схему: подключим идеальный источник напряжения, например, $\varepsilon = 1.5$ В, как показано на рис. 19, б, и пусть

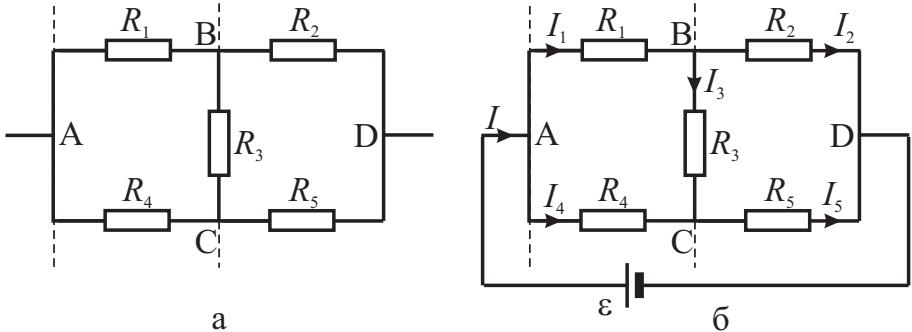


Рис. 19. Фрагмент электрической цепи; модифицированная электрическая схема для расчета эквивалентного сопротивления R_0 .

значение резистора R равно 1 Ом, тогда эквивалентное сопротивление, выраженное в единицах R , находится из закона Ома (65)

$$R_0 = \varepsilon / I. \quad (74)$$

Зададим в схеме рис. 19, а направления токов $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I$, как показано на рис. 19, б и составим по правилам Кирхгофа систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0 = I - I_1 - I_4, \\ 0 = I_1 - I_2 - I_3, \\ 0 = I_3 + I_4 - I_5, \\ \varepsilon = I_1 R_1 + I_2 R_2, \\ 0 = I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_4 R_4, \\ 0 = I_2 R_2 - I_5 R_5 - I_3 R_3. \end{cases} \quad (75)$$

В матричном виде $\boldsymbol{M}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}$ эту систему уравнений запишем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & -R_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Решение матричного уравнения $\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ найдем численно, пользуясь процедурой solve математической библиотеки numpy.

Составим программу расчета токов $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I$.

```
01 # Правила Кирхгофа 0A
02 import numpy as np
03 E=1.5;R=1.0;
04 R1=3*R;R2=4*R;R3=3*R;R4=4*R;R5=2*R;
05 M = np.array([[-1.,0.,0.,-1.,0.,1.],
06                 [1.,-1.,-1.,0.,0.,0.],
07                 [0.,0.,1.,1.,-1.,0.],
08                 [R1,R2,0.,0.,0.,0.],
09                 [R1,0.,R3,-R4,0.,0.],
10                 [0.,R2,-R3,0.,-R5,0.]])
11 B=np.array([0.,0.,0.,E,0.,0.])
12 I=np.linalg.solve(M, B);
13 R0=E/I[5];
14 print ('R0=',R0)
15 print ('I1=',I[0], 'I2=',I[1], 'I3=',I[2])
16 print ('I4=',I[3], 'I5=',I[4], 'I =',I[5])
17 print (I[5]-I[0]-I[3], I[0]-I[1]-I[2],I[2]+I[3]-I[4])
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки numpy для решения системы уравнений; 03–04 – определение исходных данных; 05–10 – задание матрицы исходной системы уравнений (76); 11 – задание вектор-столбца системы уравнений (76); 12 – решение матричного уравнения (76); 13 – вычисление значения эквивалентного сопротивления R_0 по (74); 14 – вывод значения R_0 ; 15–16 – вывод значений токов $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I$; 17 – проверка по первому правилу Кирхгофа для узла А, В, С (75) (в Python начальный индекс массива равен нулю).

Приведем результаты расчета:

```
>>>
R0= 3.13580246914
I1= 0.248031496063 I2= 0.188976377953 I3= 0.0590551181102
I4= 0.23031496063 I5= 0.28937007874 I = 0.478346456693
0.0 -5.55111512313e-17 1.66533453694e-16
>>>
```

Дополнение. Сопротивление фрагмента цепи можно рассчитать методом эквивалентных сопротивлений, основанным на замене одной схемы другой, более простой, но дающей те же значения токов и напряжений на входных и выходных узлах заменяемого участка цепи. Заменим участок фрагмента $R_1 - R_3 - R_4$ (рис. 19 а), схема «треугольник» выделена штриховыми линиями) на эквивалентный участок $r_1 - r_3 - r_4$ (рис. 20, схема «звезда» выделена штриховыми линиями).

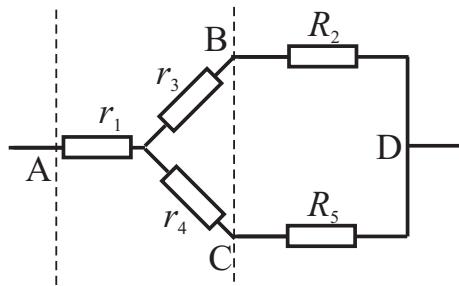


Рис. 20. Эквивалентная схема фрагмента сопротивлений схеме (рис. 19 а)

Сопротивления участков цепи (рис. 19, а) между точками А-В, А-С, В-С есть

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}, \\ R_{AC} &= \frac{R_4(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 + R_4}, \\ R_{BC} &= \frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}. \end{aligned} \quad (77)$$

Сопротивления участков цепи (рис. 20) между точками А-В, А-С, В-С есть

$$\begin{aligned} R_{AB} &= r_1 + r_3, \\ R_{AC} &= r_1 + r_4, \\ R_{BC} &= r_3 + r_4. \end{aligned} \quad (78)$$

Тогда, приравнивая правые части выражений, получаем систему уравнений

$$r_1 + r_3 = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}, \quad (79)$$

$$r_1 + r_4 = \frac{R_4(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 + R_4}, \quad (80)$$

$$r_3 + r_4 = \frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (81)$$

Складывая эти уравнения и приводя подобные члены, получаем простое соотношение

$$r_1 + r_3 + r_4 = \frac{R_1R_3 + R_1R_4 + R_3R_4}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (82)$$

Вычитая из этой суммы (79), (80) и (81), получаем

$$r_4 = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}, \quad r_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4}, \quad r_1 = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (83)$$

И, окончательно, полное сопротивление исходной цепи равно

$$R_{00} = r_1 + \frac{(R_2 + r_3)(R_5 + r_4)}{r_3 + R_2 + r_4 + R_5}. \quad (84)$$

Составим программу расчета сопротивления.

```
01 # Правила Кирхгофа ОВ
02 E=1.5;R=1.0;
03 R1=3*R;R2=4*R;R3=3*R;R4=4*R;R5=2*R;
04 r4=R3*R4/(R1+R3+R4);
05 r3=R1*R3/(R1+R3+R4);
06 r1=R1*R4/(R1+R3+R4);
07 R00=r1+(R2+r3)*(R5+r4)/(r3+R2+r4+R5);
08 print ('R00=' ,R00)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02–03 – определение исходных данных; 04 – вычисление значения r_4 по (83); 05 – вычисление значения r_3 по (83); 06 – вычисление значения r_1 по (83); 07 – вычисление значения эквивалентного сопротивления R_{00} по (84); 08 – вывод значения R_{00} .

Приведем результаты расчета:

```
>>>
R00= 3.135802469135802
>>>
```

Ответ: $R_0 = R_{00} \approx 3.14 R$ Ом.

Пример 2.8. Батарею элементов замыкают сначала на внешнее сопротивление $R_1 = 2$ Ом, а затем на внешнее сопротивление $R_2 = 0.5$ Ом. Найти ЭДС ε и внутреннее сопротивление r батареи гальванических элементов, если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова и равна $P_1 = P_2 = 2.54$ Вт.

Решение

Полезные тепловые мощности P_1 и P_2 , рассеивающиеся на внешних сопротивлениях R_1 и R_2 , равны, согласно (69), $P_1 = U_1 I_1$ и $P_2 = U_2 I_2$, где $U_1 = \varepsilon - I_1 r$, $I_1 = \sqrt{P_1/R_1}$, $U_2 = \varepsilon - I_2 r$, $I_2 = \sqrt{P_2/R_2}$. Согласно (66), составим систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon - I_1 r = U_1, \\ \varepsilon - I_2 r = U_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon I_1 - I_1^2 r = P_1, \\ \varepsilon I_2 - I_2^2 r = P_2. \end{cases}$$

Правую систему уравнений представим в виде $\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} I_1 & -I_1^2 \\ I_2 & -I_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

решение которой представим в виде $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & -I_1^2 \\ I_2 & -I_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Составим программу расчета:

```

01 # Закон Джоуля-Ленца
02 import numpy as np
03 R1=2; R2=0.5; P1=2.54; P2=2.54;
04 I1=np.sqrt(P1/R1); I2=np.sqrt(P2/R2);
05 M = np.array([[I1, -I1*I1], [I2, -I2*I2]]);
06 B = np.array([P1, P2]);
07 X=np.linalg.solve(M,B); [E,r]=X;
08 print('E=',E,' r=',r)
09 Y=np.dot(M,X)-B;
10 print(Y)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки numpy для решения системы уравнений; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление токов I_1 ($I1$), I_2 ($I2$); 05 – задание матрицы исходной системы уравнений (85); 06 – задание вектор–столбца системы уравнений (85); 07 – решение матричного уравнения (85); 08 – вывод решения системы (85); 09 – вычисление невязки⁷ решения $\mathbf{M}\mathbf{X} - \mathbf{B}$; 10 – вывод невязки.

Приведем результаты расчета:

⁷ Вектором невязки решения матричного уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ называют вектор \mathbf{Y} , равный $\mathbf{AX} - \mathbf{B}$.

```

>>>
E= 3.38082830088 r= 1.0
[ 4.44089210e-16 8.88178420e-16]
>>>

```

Ответ: $\varepsilon = 3.38$ В, $r = 1.0$ А.

Пример 2.9. ЭДС батареи аккумуляторов $\varepsilon = 12$ В, сила тока I^* короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{\max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

Решение

Ток короткого замыкания, согласно (67), равен $I^* = \varepsilon/r$, тогда внутреннее сопротивление батареи равно $r = \varepsilon/I^*$. Полезная мощность P равна $P = UI = (\varepsilon - Ir)I = \varepsilon I - I^2r$. Чтобы найти максимальную полезную мощность батареи, надо взять производную мощности по току и приравнять нулю, т.е. $dP/dI = 0$ или $\varepsilon - 2I_{\max}r = 0$ и $I_{\max} = \varepsilon/2r$. Знаменатель последней дроби равен $R + r = 2r$, следовательно, внешнее сопротивление при этом равно $R = r$. Максимальная полезная мощность батареи равна $P_{\max} = \varepsilon I_{\max} - I_{\max}^2 r$. Построим график $P = P(R)$ и проверим правильность аналитического расчета полезной мощности.

Составим программу расчета.

```

01 # Короткое замыкание
02 import matplotlib.pyplot as plt
03 E=12; IZ=5;
04 r=E/IZ; Imax=E/2/r; Pmax=E*Imax-Imax*Imax*r
05 print(r,Imax,E*Imax,Imax*Imax*r)
06 Rmin=0.0; Rmax=5.0*r; NR=500; dR=(Rmax-Rmin)/NR;
07 R=[]; P=[];
08 R.append(Rmin); P.append(0);
09 for i in range(1,NR):
10     RR=Rmin+i*dR;
11     PP=E*(1-r/(r+RR))/(r+RR);
12     R.append(RR); P.append(PP);
13 plt.plot(R,P,'k-')
14 plt.plot([r,r], [0,16], 'k--')
15 plt.grid(True)

```

```

16 plt.xlabel('R, \u03a9', fontsize=16)
17 plt.ylabel('P, Вт', fontsize=16)
18 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости мощности P от внешнего сопротивления R ; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление внутреннего сопротивления источника тока r (r), тока I_{\max} (I_{\max}), максимальной полезной мощности P_{\max} (P_{\max}); 05 – вывод расчетных данных r , I_{\max} , P_{\max} ; 06 – определение параметров расчетной сетки по переменной R ; 07 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{R\}_n$, $\{P\}_n$, 08 – запись начальных значений R_0 и P_0 ; 09–12 – расчет массивов $\{R\}_n$, $\{P\}_n$; 13–18 – вывод графика $P(R)$.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
r=      2.4
Imax=   2.5
Pmax= 15.0
>>>

```

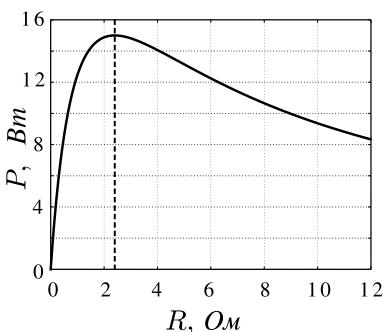


Рис. 21. К примеру 2.8

$R_6 = 6 \Omega$, $R_7 = 1 \Omega$. Внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Найти силы токов I_1 , I_2 и I_3 .

Решение

Неизвестных величин токов три: I_1 , I_2 и I_3 , следовательно, необходимо составить по правилам Кирхгофа три уравнения:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1(R_1 + R_2 + R_6) + I_3R_7 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ -I_2(R_3 + R_4 + R_5) - I_3R_7 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \end{cases}$$

В матричном виде эта система уравнений $\mathbf{MX} = \mathbf{B}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 + R_2 + R_6 & 0 & R_7 \\ 0 & R_3 + R_4 + R_5 & R_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Составим программу расчета:

```
01 # Правила Кирхгофа 1
02 import numpy as np
03 E1=10; E2=20; E3=30;
04 R1=1; R2=2; R3=3; R4=4; R5=5; R6=6; R7=1;
05 M=np.array([[1,1,-1],[R1+R2+R6,0,R7],[0,R3+R4+R5,R7]]);
06 B=np.array([0,E1-E2,-E2-E3]);
07 X=np.linalg.solve(M,B); [I1,I2,I3]=X;
08 print('I1=',I1,'\\nI2=',I2,'\\nI3=',I3)
09 IS=I1+I2-I3
10 print('IS=',IS)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **numpy** для решения системы уравнений; 03–04 – определение исходных данных; 05 – задание матрицы исходной системы уравнений (86); 06 – задание вектор-столбца системы уравнений (86); 07 – решение матричного уравнения (86); 08 – вывод решения системы (86); 09 – проверка решения по первому правилу Кирхгофа; 10 – вывод суммы токов в узле.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
I1= -0.62015503876
I2= -3.7984496124
I3= -4.41860465116
IS= -8.881784197e-16
>>>
```

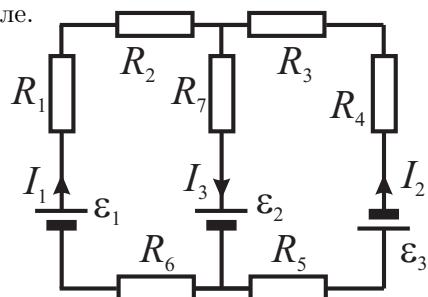


Рис. 22. К примеру 2.9

Знак «минус» в значениях тока I_1, I_2, I_3 означает, что направление тока в схеме выбрано противоположно действительному току.

Абсолютная погрешность расчета IS пренебрежимо мала по сравнению со значениями тока в цепи и сравнима с машинным эпсилон⁸.

Ответ: $I_1 = -0.62 \text{ A}$, $I_2 = -3.80 \text{ A}$, $I_3 = -4.42 \text{ A}$.

Пример 2.11. Генератор постоянного тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 12 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r_1 = 0.5 \text{ Ом}$ подключен к аккумулятору с ЭДС $\varepsilon_2 = 1.5 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r_2 = 0.25 \text{ Ом}$ через внешнее сопротивление R , как показано на рис. 23. При каком наименьшем значении R аккумулятор будет находиться в режиме зарядки?

Решение

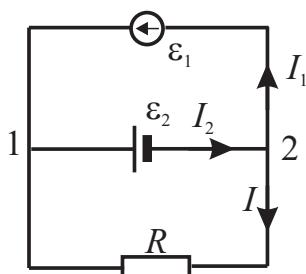


Рис. 23. Схема для зарядки аккумулятора

На схеме кружок со стрелкой обозначает генератор, стрелка указывает направление тока. Аккумулятор находится в режиме зарядки, когда ток течет через аккумулятор от плюсового полюса (анод) к минусовому полюсу (катод). В нашем случае это условие может быть записано так: $I_2 > 0$. В нашей схеме три неизвестных тока I_1 , I_2 и I , два узла и два независимых контура. Составим по правилам Кирхгофа систему из трех независимых линейных уравнений. Первое правило Кирхгофа для узла 2: $I_2 - I_1 - I = 0$. Второе правило Кирхгофа для нижнего контура: $-\varepsilon_2 = I_2 r_2 + IR$, для верхнего контура: $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1 r_1 + I_2 r_2$. Поскольку нас интересует только ток I_2 , текущий через аккумулятор, то достаточно произвести замену $I = I_2 - I_1$ и подставить эту замену во второе и третье уравнения, т.е. в итоге получаем систему из двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1 r_1 + I_2 r_2, \\ -\varepsilon_2 = -I_1 R + I_2(r_2 + R). \end{cases} \quad (87)$$

⁸ Машинный эпсилон ε – наименьшее число с плавающей точкой, такое, что $1 + \varepsilon > 1$, и равное $\varepsilon = 2.2204460492503131 \cdot 10^{-16}$.

В матричном виде эта система уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -R & r_2 + R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (88)$$

решение которой тривиально (приложение, формула (192)) и равно

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1(r_2 + R) + r_2 R} \begin{pmatrix} r_2 + R & -r_2 \\ R & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (89)$$

или

$$I_1 = \frac{(r_2 + R)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + r_2 \varepsilon_2}{r_1(r_2 + R) + r_2 R}, \quad (90)$$

$$I_2 = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - r_1 \varepsilon_2}{r_1(r_2 + R) + r_2 R}. \quad (91)$$

При $R = 0$ ток I_2 равен $-\varepsilon_2/r_2$ (аккумулятор разряжается).

При $R \rightarrow \infty$ ток I_2 асимптотически приближается к значению $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(r_1 + r_2)$.

При $R = r_1 \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ ток I_2 равен нулю.

Составим программу расчета тока I_2 через аккумулятор.

```

01 # Ток зарядки аккумулятора
02 import matplotlib.pyplot as plt
03 E1=12; E2=1.5; r1=0.5; r2=0.25;
04 Rmin=0.0; Rmax=0.50; NR=5000; dR=(Rmax-Rmin)/NR;
05 R=[];
06 I2=[];
07 R.append(Rmin);
08 I2.append(-E2/r2);
09 print('I2(0)=', -E2/r2)
10 print('I2(R>>r1,r2)=', (E1-E2)/(r1+r2))
11 print('R(I2=0)', r1*E2/(E1-E2))
12 for i in range(1,NR):
13     RR=Rmin+i*dR;
14     JJ=((E1-E2)*RR-r1*E2)/(r1*(r2+RR)+r2*RR);
15     R.append(RR);
16     I2.append(JJ);
17 plt.plot(R,I2,'k-')

```

```

18 plt.xlabel('$R$', fontsize=16)
19 plt.ylabel('$I_2$', fontsize=16)
20 plt.grid(True)
21 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета `matplotlib.pyplot` для графического вывода зависимости I_2 от R ; 03 – определение исходных данных для расчета тока I_2 : ε_1 (E_1), ε_2 (E_2), r_1 (r_1), r_2 (r_2); 04 – определение расчетной сетки по переменной R ; 05–06 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{R\}_n$, $\{I_2\}_n$, 07–08 – запись начальных значений R_0 и $I_2(0)$; 09–11 – вывод расчетных данных $I_2(R = 0)$, $I_2(R = \infty)$, $R(I_2 = 0)$; 12–16 – расчет массивов $\{R\}_n$, $\{I_2\}_n$; 17–21 – вывод графика $I_2(R)$

Приведем результаты расчета $I_2(R = 0)$, $I_2(R = \infty)$, $R(I_2 = 0)$:

```

>>>
I2(0)= -6.0
I2(R>>r1,r2)= 14.0
R(I2=0) 0.07142857142857142

```

Ответ: $R > 0.071$ Ом.

Пример 2.12. В электрической схеме (рис. 25) используются одинаковые батарейки с одинаковым внутренним сопротивлением 0.2 Ом и ЭДС в 1 В каждая. Все резисторы тоже одинаковые и имеют сопротивление 1 Ом каждый. Найдите токи, текущие через каждую батарейку и через каждый резистор. Построить диаграмму изменения потенциала вдоль контура HADBFCGH.

Решение Математическая модель основана на двух правилах Кирхофа (72) и (73). Согласно схеме (рис. 25), необходимо найти шесть неизвестных величин – токов, поэтому надо составить систему уравнений из шести линейно-независимых уравнений. В схеме имеется 4 узла – А, В, С, Д, тогда независимых уравнений

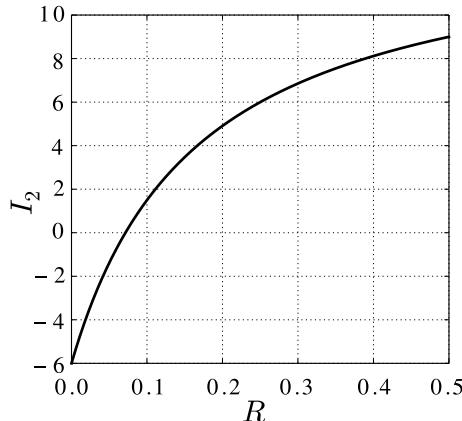


Рис. 24. Ток I_2 (А) текущий через аккумулятор в зависимости от R (Ом). При $I_2 < 0$ – разрядка, а при $I_2 > 0$ – зарядка аккумулятора

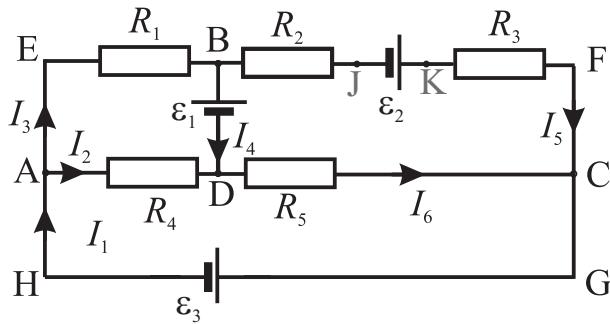


Рис. 25. Электрическая схема

можно составить на единицу меньше, чем узлов схемы [7, 8]. Применим первое правило Кирхгофа к трем узлам A, B, D:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ I_3 - I_4 - I_5 = 0, \\ I_5 + I_6 - I_1 = 0. \end{cases} \quad (92)$$

Оставшиеся три уравнения составим по второму правилу Кирхгофа для трех замкнутых контуров цепи, например, AEBD, BFCD, ACGH. Будем считать, что направление обхода в каждом контуре цепи проводится по часовой стрелке.

$$\begin{cases} -\varepsilon_1 = -I_2 R_4 + I_3 R_1 + I_4 r_1, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = I_5 R_2 + I_5 R_3 + I_5 r_2 - I_6 R_5 - I_4 r_1, \\ \varepsilon_3 = I_2 R_4 + I_6 R_5 + I_1 r_3. \end{cases} \quad (93)$$

Представим систему (92) – (93) в виде матричного уравнения

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -R_4 & R_1 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 & R_2 + R_3 + r_2 & -R_5 \\ r_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (94)$$

или в сокращенном виде

$$\mathbf{M}\mathbf{I} = \mathbf{B}. \quad (95)$$

Решение матричного уравнения

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \quad (96)$$

можно найти разными методами, но достаточно найти решение численно.

Составим программу решения системы (94).

```
01 # Правила Кирхгофа 2
02 import numpy as np
03 E1=1.0;E2=1.0;E3=1.0; r1=0.2;r2=0.2;r3=0.2;
04 R1=1.0; R2=1.0; R3=1.0; R4=1.0; R5=1.0;
05 M = np.array([[1.,-1.,1.,0.,0.,0.],
06                 [0.,0.,1.,-1.,-1.,0.],
07                 [-1.,0.,0.,0.,1.,1.],
08                 [0.,R4,-R1,r1,0.,0.],
09                 [0.,0.0,0.0,-r1,R2+R3+r2,-R5],
10                 [r3,R4,0.,0.,0.,R5]]));
11 B=np.array([0.,0.,0.,E1,E2+E3,-E3])
12 I=np.linalg.solve(M, B);
13 print (I[0],I[1],I[2],'\n',I[3],I[4],I[5])
14 print (I[0]-I[1]-I[2],I[2]-I[3]-I[4],I[4]+I[5]-I[0])
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **numpy** для решения системы уравнений; 03–04 – определение исходных данных; 05–10 – задание матрицы исходной системы уравнений (94); 11 – задание вектор-столбца системы уравнений (94); 12 – решение матричного уравнения (94); 13 – вывод решения системы (94); 14 – проверка по первому правилу Кирхгофа для узла A, B, D (92) (в Python начальный индекс массива равен нулю).

Приведем результаты расчета:

```
>>>
-0.785440613027    0.239463601533    -1.02490421456
-1.32183908046    0.2969348659    -1.08237547893
0.0      5.55111512313e-17    5.55111512313e-16
>>>
```

Проверка: последняя строчка вывода результатов для суммарных токов в узлах А, В, D показывает выполнение первого правила Кирхгофа (92).

Построим диаграмму распределения потенциала [9] вдоль выделенного контура HADBFCGH электрической схемы 25 согласно алгоритму, приведенному в начале подраздела. В исходной схеме необходимо добавить две граничные точки выделяющие второй источник тока (точки J и K выделены серым цветом). В качестве точки нулевого потенциала выберем точку Н, тогда $\varphi_H = 0$, а обход контура проведем по часовой стрелке. Потенциалы в остальных точках определим, согласно закону Ома для неоднородного участка цепи (65): $\varphi_H - \varphi_A = 0$ и $\varphi_H = \varphi_A = 0$; $\varphi_A - \varphi_D = I_2R_4$ и $\varphi_D = \varphi_A - I_2R_4$; $\varphi_B - \varphi_D = \varepsilon_1 + I_4r_1$ и $\varphi_B = \varphi_D + \varepsilon_1 + I_4r_1$; $\varphi_B - \varphi_J = I_5R_2$ и $\varphi_J = \varphi_B - I_5R_2$; $\varphi_K - \varphi_J = \varepsilon_2$ и $\varphi_K = \varphi_J + \varepsilon_2 - I_5r_2$; $\varphi_K - \varphi_F = I_5R_3$ и $\varphi_F = \varphi_K - I_5R_3$; $\varphi_F - \varphi_C = 0$ и $\varphi_F = \varphi_C$; $\varphi_C - \varphi_G = 0$ и $\varphi_C = \varphi_G$; $\varphi_H - \varphi_G = -\varepsilon_3 - I_1r_3$ и $\varphi_H = \varphi_G - \varepsilon_3 - I_1r_3$. Последнее равенство служит для проверки правильности решения, т.е. оно должно быть равным нулю. Составим программу расчета диаграммы изменения потенциала вдоль контура HADBFCGH схемы 25.

```

01 # Диаграмма изменения потенциала
02 import numpy as np
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 E1=1.0;E2=1.0;E3=1.0; r1=0.2;r2=0.2;r3=0.2;
05 R1=1.0; R2=1.0; R3=1.0; R4=1.0; R5=1.0;
06 M = np.array([[1.,-1.,1.,0.,0.,0.],
07                 [0.,0.,1.,-1.,-1.,0.],
08                 [-1.,0.,0.,0.,1.,1.],
09                 [0.,R4,-R1,r1,0.,0.],
10                 [0.,0.0,0.,-r1,R2+R3+r2,-R5],
11                 [r3,R4,0.,0.,0.,R5]]));
12 B=np.array([0.,0.,0.,E1,E1+E2,-E3])
13 I=np.linalg.solve(M, B);
14 R=[]; P=[]; R.append(0); pH=0; P.append(pH);
15 RD=R4; R.append(RD); pD=pH-I[1]*R4; P.append(pD);
16 RB=RD; R.append(RB); pB=pD+E1; P.append(pB);
17 RJ=RB+R2; R.append(RJ); pJ=pB-I[4]*R2; P.append(pJ);

```

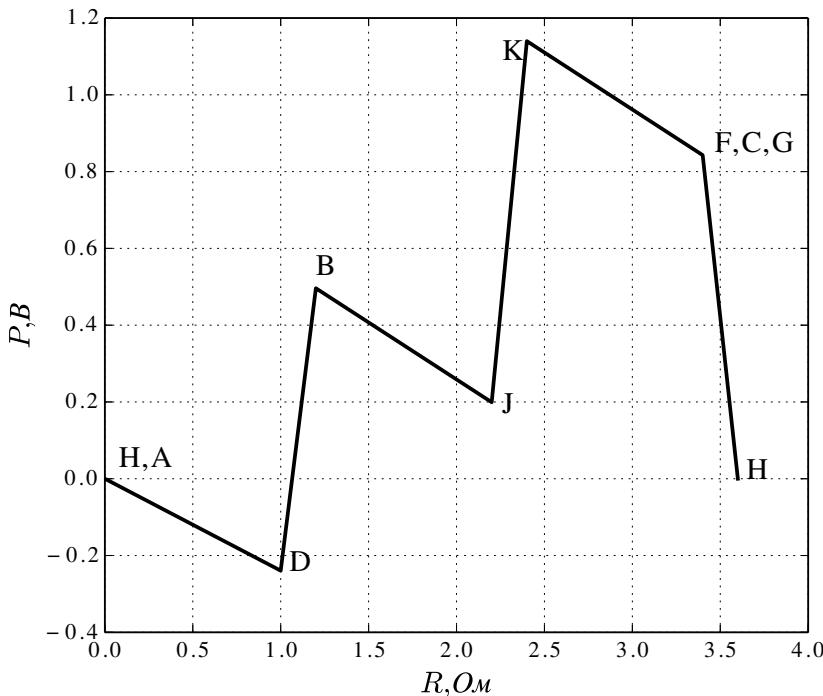


Рис. 26. Диаграмма распределения потенциала $\varphi = \varphi(R)$

```

18 RK=RJ;      R.append(RK); pK=pJ+E2;      P.append(pK);
19 RF=RK+R3;  R.append(RF); pF=pK-I[4]*R3; P.append(pF);
20 RH1=RF;    R.append(RH1); pH1=pF-E3;    P.append(pH1);
21 plt.plot(R,P,'k-',linewidth=3)
22 plt.xlabel('$R$', fontsize=16)
23 plt.ylabel('$P$', fontsize=16)
24 plt.text(0.5,  0.02, r'H,A', fontsize=16)
25 plt.text(10.5, -0.15, r'D', fontsize=16)
26 plt.text(10.5,  0.9,  r'B', fontsize=16)
27 plt.text(20.5,  0.4,  r'J', fontsize=16)
28 plt.text(19.0,  1.4,  r'K', fontsize=16)
29 plt.text(27.0,  0.92, r'F,C,G', fontsize=16)
30 plt.text(29.0, -0.05, r'H', fontsize=16)

```

```
31 plt.grid(True)
```

```
32 plt.show()
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки `numpy` для решения системы уравнений; 03 – подключение пакета `matplotlib.pyplot` для графического вывода зависимости φ от R ; 04–05 – определение исходных данных; 06–11 – задание матрицы исходной системы уравнений (94); 12 – задание вектор-столбца системы уравнений (94); 13 – решение матричного уравнения (94); 14 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{R\}_n, \{P\}_n$ и запись начальных значений R_0 и P_0 ; 15–20 – расчет массивов $\{R\}_n, \{P\}_n$; 21–32 – вывод графика $\varphi(R)$ ($P(R)$).

Результатом работы этой программы является диаграмма распределения потенциала $\varphi = \varphi(R)$, представленная на рис.26.

Ответ: $I_1 = -0.785$ А, $I_2 = 0.240$ А, $I_3 = -1.025$ А, $I_4 = -1.322$ А, $I_5 = 0.297$ А, $I_6 = -1.082$ А.

Пример 2.13. Найти заряд q и разность потенциалов $\varphi_J - \varphi_K$ между обкладками конденсатора схемы (рис. 27), если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.5$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $C = 4.7$ мкФ, внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

Решение

Разность потенциалов на обкладках конденсатора $\varphi_J - \varphi_K$ равна разности потенциалов между узлами $\varphi_B - \varphi_C$, которую определим из закона Ома для неоднородного участка цепи BDC: $\varphi_B - \varphi_C - \varepsilon_1 = U_{BC}$, где $U_{BC} = I_1 R_1$, тогда искомая разность потенциалов есть $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_C = \varepsilon_1 + I_1 R_1$.

Таким образом, задача свелась к вычислению тока I_1 , который можно вычислить из системы уравнений, составленной по правилам Кирхгофа,

$$\begin{cases} I_2 + I_3 - I_1 = 0, \\ -\varepsilon_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2, \\ -\varepsilon_2 = I_3 R_3 - I_2 R_2, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (97)$$

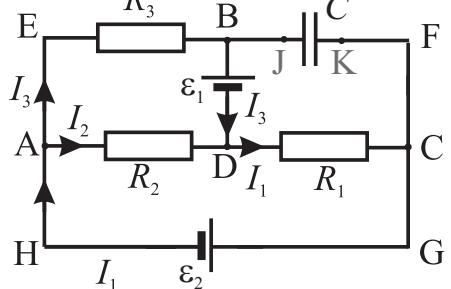


Рис. 27. Схема к примеру

Решение матричного уравнения проведем, как было описано в примерах 2.9–2.11. Зная ток I_1 , найдем разность потенциалов $\Delta\varphi$. Накопленный конденсатором заряд q рассчитаем из (52): $q = C\Delta\varphi$.

Составим программу расчета.

```
01 #Конденсатор в цепи постоянного тока
02 import numpy as np
03 E1=1.5; E2=1.5;
04 R1=10; R2=20; R3=30;
05 C=4.7e-6;
06 M=np.array([[-1,1,1],[R1,R2,0],[0,-R2,R3]]);
07 B=np.array([0,-E1,-E2]);
08 X=np.linalg.solve(M,B); [I1,I2,I3]=X;
09 print('I1=',I1,'nI2=',I2,'nI3=',I3)
10 IS=I2+I3-I1;
11 Dph=E2-R1*(E1*(R2+R3)+E2*R2)/(R1*R2+R1*R3+R2*R3);
12 q=C*Dph;
13 print('Dph=',Dph,' q=',q,'nIS=',IS)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки numpy; 03–05 – определение исходных данных; 06 – задание матрицы исходной системы уравнений (97); 07 – задание вектор-столбца системы уравнений (97); 08 – решение матричного уравнения (97); 09 – вывод решения системы (97); 10 – проверка по первому правилу Кирхгофа для узла D (72); 11 – вычисление разности потенциалов $\Delta\varphi$ (Dph) на обкладках конденсаторов; 12 – вычисление заряда q конденсатора; 13 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
I1= -0.0954545454545
I2= -0.0272727272727
I3= -0.0681818181818
Dph= 0.54545454545454 q= 2.5636363636363633e-06
IS= 1.38777878078e-17
>>>
```

Ответ: $q \approx 2.6$ мККл, $\Delta\varphi \approx 0.55$ В.

Задания для самостоятельной работы

2.5. Требуется изготовить нагревательную спираль для электрической плитки мощностью $P = 500$ Вт, предназначеннной для включения в сеть с напряжением $U = 220$ В. Сколько нужно взять для этого никромовой проволоки диаметра $d = 0.4$ мм? Удельное сопротивление никрома в нагретом состоянии $\rho = 1.05$ мкОм·м.

2.6. Батарея с ЭДС $\varepsilon = 240$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнута на внешнее сопротивление $R = 23$ Ом. Найти полную мощность, полезную мощность и КПД батареи.

2.7. ЭДС батареи равна $\varepsilon = 20$ В. Сопротивление внешней цепи равно $R = 2$ Ом, сила тока $I = 4$ А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления КПД батареи будет равно $\eta = 0.99$.

2.8. Батареи (рис. 28) имеют ЭДС $\varepsilon_1 = 2$ В, $\varepsilon_2 = 1$ В, сопротивления $R_1 = 1000$ Ом, $R_2 = 500$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, сопротивление амперметра равно $R_A = 200$ Ом. Найти показание амперметра.

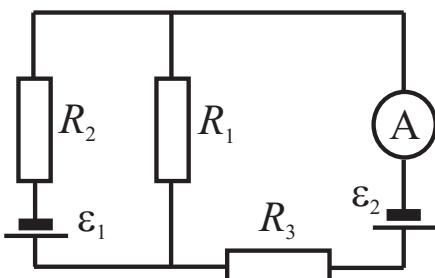


Рис. 28. К задаче 2.8

2.9.⁹ В электрической схеме (рис. 25) все батарейки одинаковые, идеальные и имеют ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ В каждая. Все резисторы тоже одинаковые и имеют сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10$ Ом каждый. Найдите токи, текущие через каждую батарейку и через каждый резистор. Построить диаграмму изменения потенциала вдоль контура HADBFCGH.

⁹Квант, 2012, № 3, стр. 19, Ф2272.

3. МАГНИТОСТАТИКА

3.1. Расчет магнитных полей. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном поле. Сила Лоренца

Закон Био–Савара–Лапласа

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma} d\mathbf{B} = \int_{\Gamma} k_1 \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (98)$$

где $k_1 = \mu_0/4\pi$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Направление вектора индукции \mathbf{B} магнитного поля определяется по правилу буравчика (правого винта).

Индукция магнитного поля отрезка прямого проводника с током I

$$B = k_1 \frac{I}{R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (99)$$

где α_1 – угол между проводником и направлением от начала проводника в точку наблюдения, α_2 – угол между проводником и направлением от конца проводника в точку наблюдения (рис. 38, б).

Индукция магнитного поля бесконечного прямого проводника с током I

$$B = k_1 \frac{2I}{R}, \quad (100)$$

где R – расстояние от точки поля до проводника с током ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$, см. (99)).

Индукция магнитного поля кругового тока I на оси, проходящей перпендикулярно плоскости витка через его центр,

$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (101)$$

где z – расстояние от точки поля до центра витка, R – радиус витка, p_m – магнитный момент витка

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \quad (102)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор вдоль оси витка, направление которого определяется по правилу буравчика, S – площадь витка.

Индукция магнитного поля кругового тока I в центре витка радиусом R

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3} = k_1 \frac{2\pi I}{R}. \quad (103)$$

Принцип суперпозиции полей

$$\mathbf{B} = \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_n. \quad (104)$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B, \quad (105)$$

где векторное произведение векторов \mathbf{v} и \mathbf{B} определяется как

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_y B_z - v_z B_y) \mathbf{i} + (v_z B_x - v_x B_z) \mathbf{j} + (v_x B_y - v_y B_x) \mathbf{k}, \quad (106)$$

а длина векторного произведения \mathbf{v} и \mathbf{B} равна $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = vB \cos \alpha$.

Траектория заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле \mathbf{B} , представляет винтовую линию, ось которой направлена вдоль направления вектора индукции \mathbf{B} магнитного поля, а начальная скорость частицы v_0 направлена под углом θ к силовой линии магнитного поля. Радиус винтовой линии $R = v_0 \sin \theta / \omega$, $\omega = qB/m$. Шаг винтовой линии $h = T v_0 \cos \theta = 2\pi m v_0 \cos \theta / qB$.

Пример 3.1. Определить магнитную индукцию поля в центре квадрата со стороной $a = 0.10$ м, по которому течет ток $I = 20$ А.

Решение

Согласно принципу суперпозиции (104) индукция магнитного поля есть сумма $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4 = 4B_1 \mathbf{n}$ (рис. 29), где B_1 определена (99) с учетом углов $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = 3\pi/4$ и $R = a/2$ (R – расстояние от центра квадрата до его стороны).

Составим программу расчета.

```
01 # Виток с током 1
02 import math as mt
03 k1=1.0e-7; a=0.1; I=20;
04 B=k1*8*I*mt.sqrt(2.0)/a;
05 print('B=',B)
```

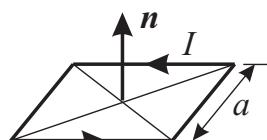


Рис. 29. Виток с током

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление индукции магнитного поля B в центре витка; 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
B= 0.00022627416997969522  
>>>
```

Ответ: $B = 2.2 \cdot 10^{-4}$ Тл.

Пример 3.2. Магнитное поле Земли представляет собой поле магнитного диполя. В одной из моделей, объясняющей природу земного магнетизма, было предположено, что в плоскости, близкой к плоскости экватора, течет кольцевой ток I радиусом $R_1 = 5000$ км от центра Земли. Найти величину этого тока, если вблизи магнитного полюса Земли индукция магнитного поля B_0 равна 0.1 мТл. Считать форму Земли сферической, радиус Земли $R_0 = 6380$ км.

Решение

Выражение для индукции магнитного поля кругового тока приведено выше (101), где $p_m = I\pi R_1^2$. Для индукции магнитного поля B_0 вдоль оси витка вблизи магнитного полюса Земли значение высоты z равно R_0 .

Итак, магнитный момент Земли равен $p_m = 2\pi B_z (R_1^2 + z^2)^{3/2} / \mu_0$, а сила кольцевого тока есть $I = 2B_z (R_1^2 + z^2)^{3/2} / \mu_0 R_1^2$, где $z = R_0$.

Составим программу расчета.

```
01 # Магнитное поле Земли 2  
02 import math as mt  
03 mu0=4*mt.pi*1.0e-7;R0=6.38e6;R1=5.0e6;B0=1.0e-4;  
04 I=2*B0*(R1*R1+R0*R0)**1.5/(mu0*R1*R1);  
05 pm=I*mt.pi*R1*R1;  
06 print('I=' ,I, ' pm=' ,pm)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление кольцевого тока I ; 05 – вычисление магнитного dipольного момента p_m витка с током; 06 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
I= 3390562884.4370537  pm= 2.6629418623204163e+23
>>>
```

Специалисты допускают существование такого тока в недрах Земли, соответственно и магнитный дипольный момент кругового тока огромный $p_m = 2.2 \cdot 10^{23} \text{ А}\cdot\text{м}^2$. Магнитное поле Земли, как силовой экран, защищает биосферу Земли от потоков частиц из космоса.

Дополнение. Построим силовые линии магнитного поля кругового тока. Начало декартовой системы координат поместим в центр витка, а ось z направим вдоль оси витка, как показано на рис. 30, при этом ток течет против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z .

Согласно закону Био–Савара–Лапласа индукция \mathbf{B} магнитного поля находится по (98), где $Idl = IdX\mathbf{i} + IdY\mathbf{j}$, $\mathbf{r} = (x - X)\mathbf{i} + (y - Y)\mathbf{j} + zk\mathbf{k}$.

Векторное произведение, согласно (184) приложения 5.1, равно

$$Idl \times \mathbf{r} = IdYz\mathbf{i} - IdXz\mathbf{j} + I(dX(y - Y) - dY(x - X))\mathbf{k}. \quad (107)$$

С учетом (107) компоненты индукции $d\mathbf{B}$ по (98) равны

$$\begin{cases} dB_x = k_1 I \frac{zdY}{r^{3/2}}, \\ dB_y = -k_1 I \frac{zdX}{r^{3/2}}, \\ dB_z = k_1 I \frac{(y - Y)dX - (x - X)dY}{r^{3/2}}. \end{cases} \quad (108)$$

Далее удобно перейти к цилиндрической системе координат

$$\begin{cases} X = R \cos \alpha, \\ Y = R \sin \alpha, \\ Z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dX = -R \sin \alpha d\alpha, \\ dY = R \cos \alpha d\alpha, \\ dZ = 0 \end{cases} \quad (109)$$

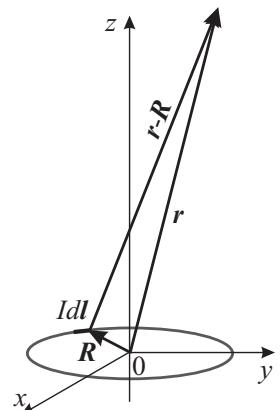


Рис. 30. Виток с током I

и $dl = \sqrt{dX^2 + dY^2} = R d\alpha$.

Компоненты вектора индукции \mathbf{B} даются интегралами

$$B_x = \int_0^{2\pi} dB_x, \quad B_y = \int_0^{2\pi} dB_y, \quad B_z = \int_0^{2\pi} dB_z. \quad (110)$$

Введем безразмерные координаты (x, y, z) : $x \rightarrow x/R$, $y \rightarrow y/R$, $z \rightarrow z/R$, тогда декартовы проекции вектора индукции магнитного поля равны

$$\begin{aligned} B_x &= \int_0^{2\pi} k_1 \frac{I}{R} \frac{z \cos \alpha}{((x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 + z^2)^{3/2}} d\alpha, \\ B_y &= \int_0^{2\pi} k_1 \frac{I}{R} \frac{-z \sin \alpha}{((x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 + z^2)^{3/2}} d\alpha, \\ B_z &= - \int_0^{2\pi} k_1 \frac{I}{R} \frac{(y - \sin \alpha) \sin \alpha + (x - \cos \alpha) \cos \alpha}{((x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 + z^2)^{3/2}} d\alpha. \end{aligned} \quad (111)$$

Данные интегралы более удобно вычислить численно. Воспользуемся квадратурным методом трапеций для приближенного расчета интегралов (199) приложения 5.1. Магнитное поле кругового тока имеет осевую (аксиальную) симметрию, поэтому достаточно построить силовые линии в плоскости, содержащей ось кругового витка (ось z) и, например, ось x , уравнение такой плоскости имеет вид $y = 0$.

Составим программу расчета.

```
01 #Магнитные силовые линии кругового тока
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 def sign(x):
05     if(x < 0.): return -1.;
06     elif(x > 0.): return 1.;
07     else: return 0.;
08 N2=6; N4=400;
09 k1=1.0e-7; R=5000.; I=3.39e9; dalp=2*mt.pi/N4;
10 B1=dalp*k1*I/R; dr=0.001; xb=[-1.,1.];
11 xg=[]; zg=[];
12 for xa in xb:
```

```

13     for i2 in range(1,N2):
14         xa=sign(xa)*i2*0.15; z=0.0;
15         for i3 in range(0,400+i2*550):
16             BX=0.; BZ=0.; FX=0.; FZ=0.;
17             for i4 in range(1,N4):
18                 alp=i4*dalp;
19                 cs=mt.cos(alp);sn=mt.sin(alp);
20                 r3=((x-cs)**2+sn*sn+z*z)**1.5;
21                 FX1=B1*z*cs/r3;
22                 FZ1=B1*((x-cs)*cs-sn*sn)/r3;
23                 BX=BX+0.5*(FX1+FX);
24                 BZ=BZ-0.5*(FZ1+FZ);
25                 B=mt.sqrt(BX*BX+BZ*BZ);
26                 FX=FX1;FZ=FZ1;
27                 dx=dr*BZ/B;dz=dr*BZ/B;x=x+dx;z=z+dz;
28                 xg.append(x); zg.append(z);
29 plt.scatter(xg,zg,c='k',s=0.5)
30 plt.plot([0,0],[-0.5,0.5],c='k')
31 plt.plot([-1,1],[0.,0.],c='k',lw=2)
32 plt.text(0.02, 0.48, r'z', fontsize=16)
33 plt.text(-0.05, -0.05, r'0', fontsize=16)
34 plt.xlabel(r'$x$', fontsize=16);
35 plt.ylabel(r'$z$', fontsize=16);
36 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода силовых линий магнитного поля x_n, z_n ; 04–07 – определение функции знака $\text{sign}(x)$ ¹⁰; 08–10 – определение исходных данных; 11 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{x\}_n, \{z\}_n$; 12–28 – расчет массивов $\{x\}_n, \{z\}_n$; 29–36 – вывод графика силовых линий кругового тока $\{x\}_n, \{z\}_n$.

На рис. 31 приведены замкнутые силовые линии, лежащие в плоскости $y = 0$.

Ответ: $I = 3.4 \cdot 10^9$ А.

¹⁰ Функция знака числа $\text{sign}(x)$ – кусочно-постоянная функция, определяемая так: $\text{sign}(x) = -1$ при $x < 0$, $\text{sign}(0) = 0$, $\text{sign}(x) = 1$ при $x > 0$.

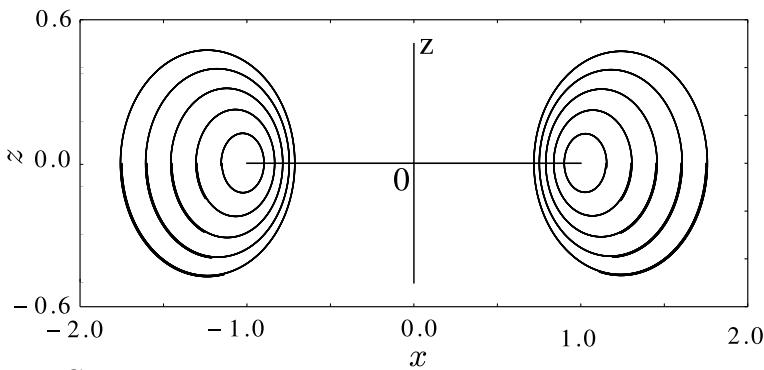


Рис. 31. Силовые линии магнитного поля кругового витка с током в плоскости $y = 0$. Направление силовых линий при $x < 0$ по часовой стрелке, а в области $x > 0$ – против часовой стрелки. Если смотреть на виток сверху, то ток по витку течет по часовой стрелке

Пример 3.3. Прямой бесконечный проводник имеет круговую петлю радиусом $R = 0.8$ м. Определить силу тока в проводнике, если известно, что в центре круговой петли магнитная индукция $B = 12.5$ мкТл.

Решение

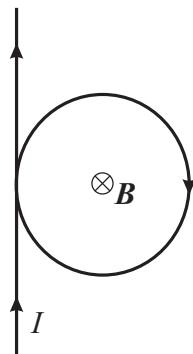


Рис. 32. Петля с током I

Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля есть векторная сумма поля \mathbf{B}_1 от прямого бесконечного проводника (100) и поля \mathbf{B}_2 от витка (101) при $z = 0$, т.е. $B(0) = 2k_1 p_m / R^3$. По правилу буравчика направления векторов \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 в центре витка совпадают и направлены от нас перпендикулярно плоскости витка, тогда в скалярном виде результирующее поле в центре витка есть

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3} + k_1 \frac{2I}{R} = k_1 \frac{2\pi I}{R} + k_1 \frac{2I}{R} = k_1 \frac{2I}{R} (\pi + 1),$$

откуда получим расчетную формулу для тока $I = BR / 2k_1(\pi + 1)$.

Составим программу расчета.

01 # Петля с током 3

```

02 import math as mt
03 k1=1.0e-7; R=0.8; B=1.25e-5;
04 I=B*R/(2*k1*(mt.pi+1.0));
05 print('I=',I)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление силы тока I ; 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
I= 12.072650350261194
>>>

```

Ответ: $I \approx 12.1$ А.

Пример 3.4. В электронно-лучевой трубке (ЭЛТ) с ускоряющей разностью потенциалов $U = 20$ кэВ катушки вертикального отклонения пучка электронов создают однородное магнитное поле $B = 5$ мТл. Внутри катушек магнитное поле, как показано на рис. 33, направлено вдоль оси y . В начальный момент времени скорости электронов $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$, $v_{0y} = v_{0z} = 0$. Вне катушек магнитное поле пренебрежимо мало. На какой угол φ отклонится пучок, если длина рабочей области катушек $l = 2$ см?

Решение

Сила Лоренца, действующая на электрон в магнитном поле, равна $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{B} = B\mathbf{j} = (0, B, 0)$ и, согласно (106), получаем $e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -ev_z B \mathbf{i} + ev_x B \mathbf{k}$.

Запишем уравнение движения электрона $m\mathbf{a} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, в декартовых координатах это уравнение есть ($q = |e|$)

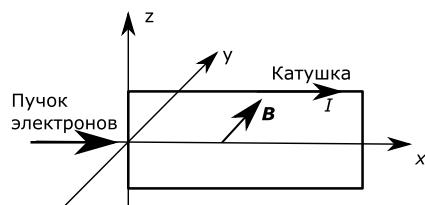


Рис. 33. Петля с током I

$$\begin{cases} mv'_x = +qv_z B, \\ mv'_y = 0, \\ mv'_z = -qv_x B, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_x = +\omega v_z, \\ v'_y = 0, \\ v'_z = -\omega v_x, \end{cases}$$

где $a_{x,y,z} = v'_{x,y,z} = dv'_{x,y,z}/dt$, $\omega = qB/m$. Продифференцируем верхнее уравнение правой системы по переменной t и подставим в полученный результат нижнее уравнение, тогда $v''_x = -\omega^2 v_x$, где $v'' \equiv d^2v/dt^2$. Решение этого однородного дифференциального уравнения второго порядка $v_x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Продифференцируем это уравнение по переменной t и подставим полученный результат в верхнее уравнение, тогда общее решение для v_z имеет вид: $v_z = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$. Чтобы определить постоянные интегрирования, используем начальные условия $v_{0x} = v_0 = A$, $v_{0y} = 0$ и $v_{0z} = 0 = B$.

Итак, получаем: $v_x = v_0 \cos \omega t$, $v_y = 0$, $v_z = -v_0 \sin \omega t$. Найдем время t_1 пролета электроном активной области катушек. Для этого проинтегрируем дифференциальное уравнение $dx/dt = v_0 \cos \omega t$, где $R = v_0/\omega$ и учтем размер активной области $l = x_1 - x_0$: $l = R \sin \omega t_1$. Угол отклонения $\varphi_1 \equiv \varphi(t_1)$ пучка электронов после прохождения отклоняющей системы найдем из соотношения $\varphi_1 = \arctan(v_z(t_1)/v_x(t_1))$ или $\varphi_1 = \omega t_1 = -\arcsin(l/R)$, где начальная скорость электрона находится из закона сохранения энергии $mv_0^2/2 = qU$ и $v_0 = \sqrt{2qU/m}$.

Составим программу расчета.

```
01 # Пучок электронов в ЭЛТ 1
02 import math as mt
03 q=1.6e-19; m=9.1e-31; U=2.0e4; B=5.0e-3; l=0.02;
04 v0=mt.sqrt(2*q*U/m); omega=q*B/m; R=v0/omega;
05 phi=-mt.asin(l/R);
06 print('phi=',phi,'rad =',phi*180/mt.pi,'deg')
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление начальной скорости электрона в пучке v_0 и его угловой скорости ω и радиуса кривизны траектории R ; 05 – вычисление угла отклонения φ_1 (phi) пучка электронов в конце активной области; 06 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
phi= -0.2112241167061578 rad = -12.102250418641585 deg
>>>
```

Дополнение. Построим траекторию электрона в активной области отклоняющей системы ЭЛТ. Уравнение траектории электронного пучка найдем интегрированием системы независимых дифференциальных уравнений $\{dx/dt = v_0 \cos \omega t, dz/dt = -v_0 \sin \omega t\}$ с учетом начальных условий: $x_0 = 0, z_0 = 0, v_{0x} = v_0, v_{0z} = 0$. Интегрирование первого уравнения системы приводит к решению $x = R \sin \omega t$, а интегрирование второго уравнения системы дает $z = R(-1 + \cos \omega t)$. В итоге, параметрическое уравнение траектории электрона пучка есть

$$\begin{cases} x = R \sin \omega t, \\ z + R = R \cos \omega t \end{cases}$$

или $x^2 + (z + R)^2 = R^2$. Траектория движения в катушке представляет дугу окружности, лежащей в плоскости $y = 0$ с центром в точке $(0, 0, -R)$ и радиусом R , равным v_0/ω .

Составим программу расчета.

```

01 # Пучок электронов в ЭЛТ 2
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 q=1.6e-19; m=9.1e-31; U=2.0e4; B=5.0e-3; l=0.02;
05 v0=mt.sqrt(2*q*U/m); omega=q*B/m; R=v0/omega;
06 phi=-mt.asin(l/R); t1=abs(phi)/omega;
07 def x(t):
08     return R*mt.sin(omega*t);
09 def z(t):
10     return R*mt.cos(omega*t)-R;
11 print('R=',R,'Dz=',z(t1))
12 tmin=0.0; tmax=t1; NT=5000; dt=(tmax-tmin)/NT;
13 xx=[]; zz=[];
14 xx.append(x(0)); zz.append(z(0));
15 for i in range(1,NT):
16     t=tmin+i*dt;
17     xx.append(x(t)); zz.append(z(t));
18 plt.plot(xx,zz,'k-')
19 plt.grid(True)
20 plt.xlabel('$x, m$', fontsize=20)

```

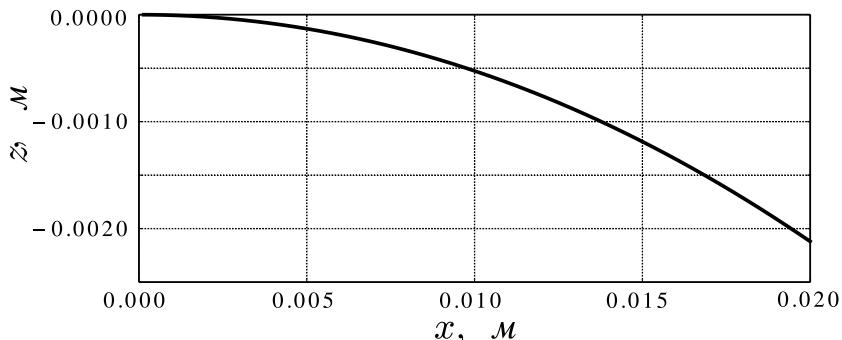


Рис. 34. Траектория электрона пучка в области отклоняющей катушки ЭЛТ

```
21 plt.ylabel('$z, \text{м}$', fontsize=20)
22 plt.show()
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости z от x ; 04 – определение исходных данных; 05 – вычисление начальной скорости электрона в пучке v_0 и угловой скорости электронов ω и радиуса кривизны траектории R ; 06 – вычисление угла отклонения φ_1 (phi) пучка электронов в конце активной области и времени пролета t_1 активной области длины l ; 07–10 – определение функций координат траектории $x(t), z(t)$; 11 – вывод расчетных данных: радиуса кривизны траектории R , отклонение от горизонтальной линии в конце активной области $\Delta z(t_1)$ (Dz); 12 – определение расчетной сетки по переменной t ; 13 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{x\}_n, \{z\}_n$; 14 – запись начальных значений x_0 и $z(0)$; 15–17 – расчет массивов $\{x\}_n, \{z\}_n$; 18–22 – вывод графика $z(x)$.

На рис. 34 показан участок траектории электрона в катушке системы вертикального отклонения

Приведем результаты расчета отклонения электрона (Dz):

```
>>>
R= 0.09539392014169458 Dz= -0.002120129610806404
>>>
```

Ответ: $\varphi_1 \approx -12.1^\circ$, $\Delta z \approx -2.1$ мм.

Пример 3.5. Электрон, движущийся в вакууме со скоростью $v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с, попадает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1.2$ мТл под углом $\theta = \pi/4$ к силовым линиям поля. Определить радиус R винтовой линии, по которой будет двигаться электрон, и ее шаг h .

Решение

Воспользуемся результатами предыдущего примера, для этого пусть ось y направлена вдоль линий магнитного поля, а начало координат и ось z выберем так, чтобы начальные условия были такими: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и $v_{0x} = v_0 \sin \theta$, $v_{0y} = v_0 \cos \theta$, $v_{0z} = 0$. Тогда компоненты скорости в любой момент времени t есть (см. пример 3.4): $v_x = v_{0x} \cos \omega t$, $v_y = v_0 \cos \theta$, $v_z = -v_{0x} \sin \omega t$, где частота $\omega = qB/m$. Интегрируя эти уравнения еще раз с учетом начальных условий, получаем выражения для координат: $x = R \sin \omega t$, $y = v_0 t \cos \theta$, $z = -R + R \cos \omega t$, где $R = v_0 \sin \theta / \omega$ – радиус цилиндра, на который навивается траектория электрона, ось цилиндра параллельна оси y и пересекает плоскость $y = 0$ в точке с координатами $(0, -R)$, шаг винтовой линии найдем из условия $h = v_{0y} T = 2\pi v_0 \cos \theta / \omega$. Составим программу расчета.

```

01 # Винтовая линия 1
02 import numpy as np
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
05 q=1.6e-19;m=9.1e-31;v0=2.0e6;B=1.2e-3;teta=np.pi/4;
06 omega=q*B/m; T=2*np.pi/omega;
07 R=v0*np.sin(teta)/omega; h=v0*np.cos(teta)*T;
08 print('R=',R,' h=',h)
09 t = np.linspace(0, 2*T, 100)
10 x = R*np.sin(omega*t);
11 y = v0*t*np.cos(teta);
12 z = R*np.cos(omega*t)-R;
13 fig = plt.figure()
14 ax = fig.gca(projection='3d')
15 ax.plot(x, z, y)
16 plt.xlabel('x')
17 plt.ylabel('z')
18 plt.show()
```

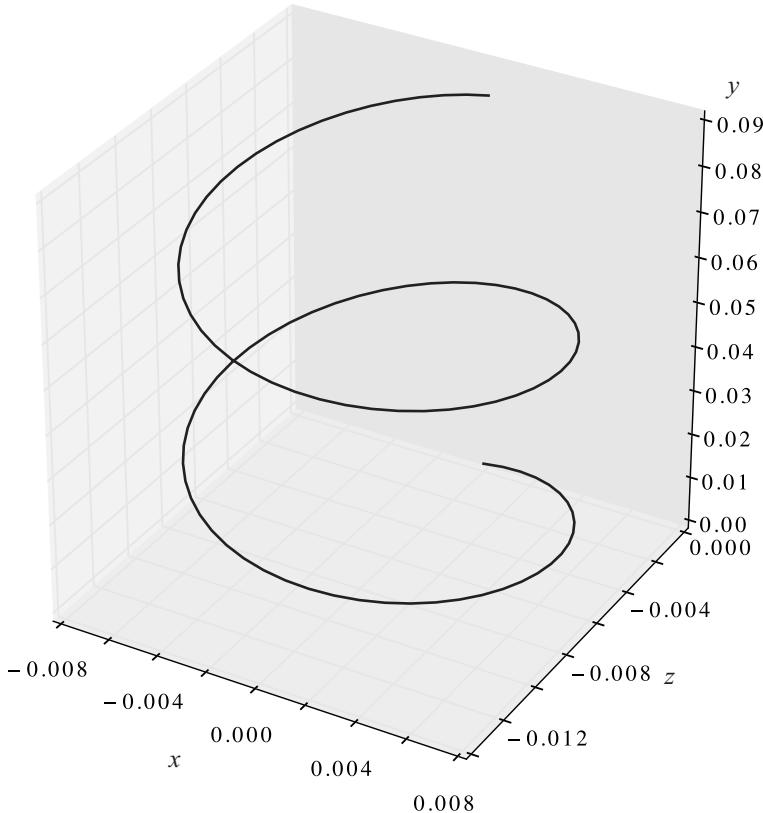


Рис. 35. Траектория электрона в однородном магнитном поле

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **numpy**; 03–04 – подключение пакета **matplotlib** для графического вывода зависимости x, y, z от t ; 05 – определение исходных данных; 06 – вычисление угловой скорости ω (omega) и периода T (Γ); 07 – вычисление радиуса R (R) и шага h (h) винтовой линии; 08 – вывод результата расчета R и h ; 09 – определение расчетной сетки $\{t\}$; 10–12 – вычисление координат винтовой линии x, y, z ; 13–18 – вывод графика траектории электрона.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
R= 0.00670278303  h= 0.0421148278513
>>>
```

Ответ: $R \approx 6.7$ мм, $h \approx 4.2$ см.

Задания для самостоятельной работы

3.1. Ток $I = 10$ А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти магнитную индукцию в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии $a = 0.2$ м от вершины.

3.2. По круговому витку радиуса $R = 0.1$ м циркулирует ток силы $I = 1.00$ А. Найти магнитную индукцию B : а) в центре витка; б) на оси витка на расстоянии $z = 0.1$ м от его центра.

3.3. Чему равна магнитная индукция поля на оси кругового витка в точке, расположенной на расстоянии $z = 0.40$ м от центра, если в центре витка, радиус которого равен $R = 0.30$ м, индукция $B_0 = 25$ мкТл?

3.4. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кэВ, пролетает однородное магнитное поле с индукцией $B = 0.51$ Тл. Толщина области с полем $l = 10$ см. Найти угол отклонения φ протона от первоначального направления движения.

3.5. Определите силу Лоренца, действующую на электрон, влетевший со скоростью $v_0 = 4 \cdot 10^6$ м/с в однородное магнитное поле под углом $\theta = \pi/6$ к линиям индукции. Магнитная индукция поля равна $B = 0.2$ Тл.

3.2. Расчет магнитных полей по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции. Поток магнитного поля. Проводники с током в магнитном поле

Циркуляция C вектора индукции \mathbf{B} магнитного поля вдоль произвольного контура Γ

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{B} dl. \quad (112)$$

Закон полного тока (закон Эрстеда)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} dl = \mu_0 \sum m. \quad (113)$$

Потоком Φ вектора \mathbf{B} через поверхность S называется величина

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (114)$$

Сила Ампера

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (115)$$

Сила взаимодействия на единицу длины двух параллельных бесконечно длинных проводников с токами I_1 и I_2

$$F = k_1 2 I_1 I_2 / R, \quad (116)$$

где R – расстояние между проводниками.

Пример 3.6. По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью $j = 2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$. Найти циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиусом $R = 5 \text{ мм}$, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол $\beta = \pi/6$ с вектором плотности тока \mathbf{j} .

Решение

Прямой расчет циркуляции C вектора магнитной индукции \mathbf{B} в случае объемного распределения тока не просто выполнить (подробности в [8]), поэтому воспользуемся законом полного тока (113). Левая часть (113) – искомая циркуляция C , а правая часть – произведение магнитной постоянной μ_0 на поток вектора \mathbf{j} через поверхность S , ограниченную контуром Γ ,

$$C = \mu_0 \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \rightarrow C = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \mathbf{n} dS = \mu_0 j \cos \alpha S,$$

где $S = \pi R^2$, угол α – угол между вектором плотности тока \mathbf{j} и единичным вектором нормали \mathbf{n} к поверхности S .

Составим программу расчета.

```
01 # Циркуляция магнитного поля в проводнике с током
02 import math as mt
03 mu0=4*mt.pi*1.0e-7;R=0.005;j=2.0e6;beta=mt.pi/6;
04 C=mu0*j*mt.cos(mt.pi/2-beta)*(mt.pi*R*R);
05 print('C=',C)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление циркуляции C вектора магнитной индукции B ; 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
C= 9.869604401089358e-05  
>>>
```

Ответ: $C \approx 99$ мкТл·м.

Пример 3.7. Вдоль длинного прямолинейного однородного проводника радиусом $R = 1$ см течет ток силой $I = 50$ А. 1. Определить магнитную индукцию поля внутри проводника на расстоянии $r_1 = 0.8$ см от осевой линии. 2. Чему равна индукция поля вне проводника на расстоянии $r_2 = 5.0$ см от осевой линии?

Решение

1. Используем симметрию задачи и введем контур Γ как окружность радиусом r_1 , проходящую через точку наблюдения с центром на оси проводника. Окружность лежит в плоскости перпендикулярной оси проводника. Согласно закону Эрстеда (113) можно записать результат интегрирования левой и правой частей: $B_1 2\pi r_1 = \mu_0 j S$, где $S = \pi r_1^2$ и $j = I/\pi R^2$, тогда $B_1 = \mu_0 j r_1 / 2 = \mu_0 I r_1 / 2\pi R^2$.

2. Аналогично пункту 1 введем контур Γ в виде окружности радиусом r_2 , проходящей через точку наблюдения. Согласно закону Эрстеда (113), можно записать результат интегрирования левой и правой частей: $B_2 2\pi r_2 = \mu_0 I$, тогда $B_2 = \mu_0 I / 2\pi r_2$.

Составим программу расчета.

```
01 # Индукция магнитного поля в проводнике с током  
02 import math as mt  
03 mu0=4*mt.pi*1.0e-7; R=0.01; I=50; r1=0.008; r2=0.05;  
04 B1=mu0*I*r1/(2*mt.pi*R*R); B2=mu0*I/(2*mt.pi*r2);  
05 print('B1=',B1,'B2=',B2)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление индукции B_1, B_2 магнитного поля; 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
B1= 0.0008 B2= 0.00020000000000000004  
>>>
```

Ответ: 1. $B_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ Тл. 2. $B_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ Тл.

Пример 3.8. На тонкий тороид¹¹ из диэлектрического материала намотана катушка из $N = 1000$ равномерно распределенных витков. Найти отношение индукции магнитного поля на оси тонкой катушки к индукции магнитного поля в центре тороида, если по катушке пропускается ток $I = 10$ А, радиус катушки $R_1 = 5$ мм, радиус тороида $R_2 = 250$ мм.

Решение

Тонкий тороид - это тороид, для которого $R_2 \gg R_1$. Это означает, что индукцию магнитного поля в центре тороида можно найти как индукцию магнитного поля в центре кругового витка $B_2 \approx k_1 2\pi I / R_2$. Индукцию магнитного поля тороида найдем из теоремы о циркуляции, для этого из соображения симметрии выберем контур Γ в виде концентрической окружности лежащей внутри тороида, тогда левая часть (113) есть $B_1 2\pi R_2$, а правая часть (113) есть $\mu_0 NI$, тогда $B_1 = \mu_0 NI / 2\pi R_2$. Итак, искомое отношение $B_1 / B_2 = N / \pi$, которое не зависит от размеров R_1, R_2 .

Составим программу расчета.

```
01 # Индукция магнитного поля тороида  
02 import math as mt  
03 mu0=4*mt.pi*1.0e-7; R1=0.005; R2=0.25; I=10; N=1000;  
04 B1=mu0*N*I/(2*mt.pi*R2); B2=mu0*I/(2*R2);  
05 print('B1=' ,B1, 'B2=' ,B2, '\nB1/B2=' ,B1/B2)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление индукции B_1, B_2 магнитного поля и отношения B_1 / B_2 ; 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
B1= 0.008 B2= 2.5132741228718347e-05
```

¹¹ Тор (тороид) – тело, образуемое вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости круга, но непересекающей ее [17].

B1/B2= 318.3098861837907

>>>

Ответ: $B_1 = 0.008 \text{ Тл}$, $B_2 = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$, $B_1/B_2 = 318$.

Пример 3.9. Плоская квадратная рамка со стороной 20 см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 100 \text{ А}$. Рамка расположена так, что ближайшая сторона параллельна проводу и находится на расстоянии $x_1 = 10 \text{ см}$ от него. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий рамку.

Решение

Выполним расчет по (114),

для этого представим элемент $d\mathbf{S} = nadx$, где n – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости рамки и направленный за плоскость рис. 36, коллинеарный с вектором \mathbf{B} магнитной индукции в плоскости рамки, тогда $\mathbf{B}d\mathbf{S} = Badx$.

Индукция магнитного поля прямого провода с током I рассматривалась ранее (100) и равна $B = k_1 2I/x$. Полученные выражения подставляем в (114) и интегрируем:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = \int_{x_1}^{x_1+a} Badx = k_1 2Ia \int_{x_1}^{x_1+a} \frac{dx}{x} = k_1 2Ia \ln \left(\frac{x_1 + a}{x_1} \right).$$

Составим программу расчета.

```
01 #Поток индукции магнитного поля через квадратную рамку
02 import math as mt
03 k1=1.0e-7; a=0.2; x1=0.1; x2=0.3; I=100;
04 Phi=k1*2*I*a*mt.log(x2/x1);
05 print('Phi=',Phi)
```

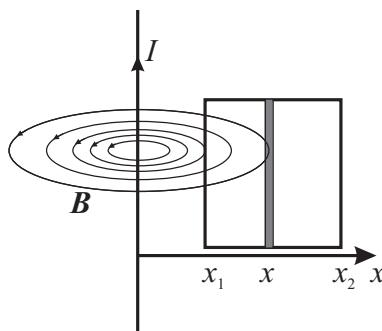


Рис. 36. Поток магнитного поля прямого провода с током I через рамку

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление потока индукции магнитного поля Φ ; 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
Phi= 4.394449154672438e-06
>>>
```

Ответ: $\Phi \approx 4.4 \cdot 10^{-6}$ Вб.

Пример 3.10. По медному стержню массой $m = 0.14$ кг, лежащему поперек двух рельсов, расположенных друг от друга на расстоянии $l = 0.30$ м, проходит ток $I = 50$ А. Коэффициент трения скольжения стержня по рельсам $\mu = 0.6$. Определите минимальную индукцию B_{\min} магнитного поля, при которой проводник начнет движение по рельсам.

Решение

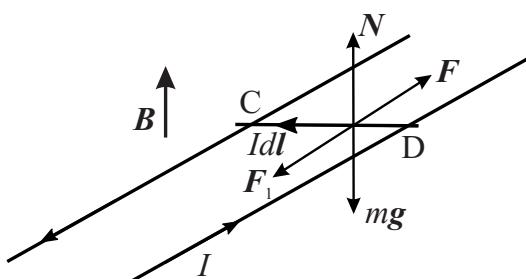


Рис. 37. Поток магнитного поля прямого провода с током I через рамку

Описанное в условии задачи устройство является электромагнитной пушкой – рельсотроном (англ. railgun). Сила Ампера, действующая на перемычку (снаряд) CD, равна $\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}$, где \mathbf{B} направлено вдоль силы реакции опоры \mathbf{N} вертикально вверх, $F_1 = \mu mg$ – сила трения. Выписывая уравнение движения Ньютона $ma = \mathbf{F} + mg + \mathbf{N} + \mathbf{F}_1$ и проецируя векторы $\mathbf{a}, \mathbf{F}, mg, \mathbf{N}, \mathbf{F}_1$ на направление движения, получаем уравнение $ma = F - \mu mg$, где $F = lIB$ – сила Ампера. Условие минимальной индукции поля означает равномерное движение перемычки, т.е. $a = 0$, тогда $0 = lIB_{\min} - \mu mg$ и $B_{\min} = \mu mg / Il$.

Составим программу расчета.

```
01 # Электромагнитная пушка (рельсотрон)
02 g=9.8; mu=0.6; m=0.14; l=0.3; I=50;
```

```

03 Bmin=mu*m*g/(I*l);
04 print('Bmin=',Bmin)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление минимальной индукции магнитного поля B_{\min} , при которой начинается перемещение перемычки с нулевым ускорением; 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
Bmin= 0.05488000000000001
>>>

```

Значения индукции магнитного поля в современных рельсопротяжках значительно больше, а скорость движения перемычки-снаряда порядка космических (км/с).

Ответ: $B_{\min} \approx 0.055$ Тл.

Пример 3.11. Шины генератора представляют собой две параллельные медные полосы длиной $l = 2.0$ м каждая, отстоящие друг от друга на расстоянии $d = 0.20$ м (рис. 38). Определите силу F взаимного отталкивания шин в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток $I^* = 10$ кА.

Решение

По условию задачи длина шин на порядок больше расстояния между ними, поэтому сначала оценим силы отталкивания, считая шины бесконечными параллельными прямыми проводниками с антипараллельными токами, тогда согласно (116) получим, что на участке $l = 2.0$ м амперова сила отталкивания равна $F_0 = k_1 2I^2 l / d$.

Однако в реальности шины имеют конечную длину,

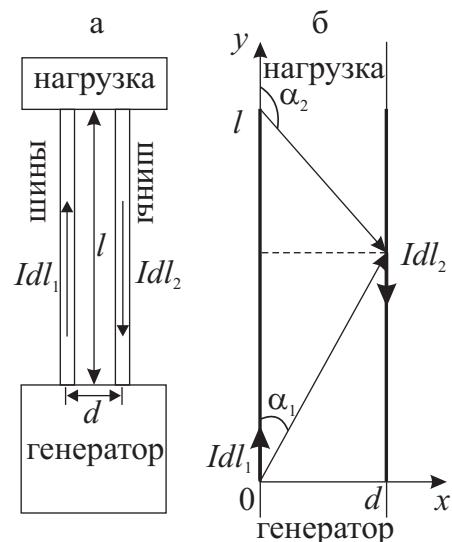


Рис. 38. Генератор - шина - нагрузка

поэтому более детальный расчет взаимодействия требует использования формулы (99):

$$B = k_1 \frac{I_1}{d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где α_1 – угол между проводником и направлением от начала проводника в точку наблюдения, α_2 – дополнительный угол между проводником и направлением от конца проводника в точку наблюдения, как показано на рис. 38, б. Косинусы легко найти из тригонометрических соотношений

$$\cos \alpha_1 = \frac{y}{\sqrt{d^2 + y^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{l - y}{\sqrt{d^2 + (l - y)^2}}. \quad (117)$$

Сила Ампера, согласно (115), направлена вдоль оси x и в скалярном виде ее можно записать как

$$F_1 = \int_0^l I_2 B dy = k_1 \frac{I_1 I_2}{d} \int_0^l (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) dy.$$

Учитывая (117), перепишем выражение для силы в виде интеграла

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 \frac{I^2}{d} \int_0^l \left(\frac{y}{\sqrt{d^2 + y^2}} + \frac{l - y}{\sqrt{d^2 + (l - y)^2}} \right) dy = \\ &= k_1 \frac{2I^2}{d} \left(\sqrt{d^2 + l^2} - d \right). \end{aligned}$$

Составим программу расчета.

```
01 # Короткое замыкание 2
02 import math as mt
03 k1=1.0e-7; L=2.0; d=0.2; IZ=10000;
04 F0=k1*2*IZ*IZ*L/d;
05 F1=k1*2*IZ*IZ*(mt.sqrt(d*d+L*L)-d)/d;
06 dF=abs(F0-F1)/F1;
07 print('F0=',F0,' F1=',F1,' \ndF=',dF)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – оценка силы Ампера F_0 ; 05 – вычисление силы Ампера F_1 ; 06 – оценка погрешности $\Delta F = |F_0 - F_1|/F_1$ (dF); 07 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
F0= 200.0  F1= 180.9975124224178  
dF= 0.10498756211208907  
>>>
```

Начальная оценка $F_0 = 200$ Н является завышенной, поскольку в ней учитывалось воздействие на проводник магнитного поля от бесконечного проводника с током. Погрешность этой оценки составляет чуть больше 10 %. Для реальных практических задач такая быстрая оценка F_0 приемлема, например, когда исходные параметры известны с некоторой погрешностью.

Ответ: $F_0 = 200$ Н, $F_1 = 181$ Н.

Задания для самостоятельной работы

3.6. Вычислить циркуляцию вектора индукции магнитного поля вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 10$ А, $I_2 = 15$ А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 20$ А, текущий в противоположном направлении.

3.7. В тонкой трубе радиусом $R = 5.0$ см сила тока $I = 100$ А. Найти магнитную индукцию поля в центре трубы и вне трубы на расстоянии $r = 5$ см от ее поверхности.

3.8. Плоский контур, площадь которого равна $S = 25$ см², находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.04$ Тл. Определить магнитный поток, пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол $\varphi = \pi/6$ с линиями индукции.

3.9. Прямой провод, по которому течет ток $I = 1$ кА, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. С какой силой действует поле на отрезок провода длиной один метр, если магнитная индукция равна $B = 1$ Тл?

3.10. Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии $d = 4$ мм друг от друга. По проводам текут одинаковые токи $I_1 = I_2 = 50$ А. Опреде-

лите силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины.

3.3. Магнитный момент. Магнитный момент в магнитном поле. Магнитное поле в веществе

Механический момент M силы F относительно произвольного центра

$$M = \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}, \quad (118)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки приложения силы \mathbf{F} .

Магнитный дипольный момент \mathbf{p}_m контура с током

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \quad (119)$$

где S – площадь контура с током, направление \mathbf{p}_m определяется направлением \mathbf{n} и связано с направлением обхода контура правилом буравчика.

Сила F , действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле индукции B ,

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha, \quad (120)$$

где ось x направлена в сторону наибольшего изменения магнитного поля, α – угол между \mathbf{p}_m и \mathbf{B} .

Механический момент M , действующий на магнитный момент \mathbf{p}_m в магнитном поле индукции \mathbf{B} ,

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (121)$$

Потенциальная энергия U_m магнитного момента \mathbf{p}_m в магнитном поле индукции \mathbf{B}

$$U_m = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (122)$$

Работа A по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока I в контуре на изменение магнитного потока $\Delta\Phi$, проходящего через поверхность, ограниченной контуром,

$$A = I \int_1^2 \mathbf{B} d\mathbf{S} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi. \quad (123)$$

Механический момент импульса электрона

$$\mathbf{L}_e = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad L_e = rmv. \quad (124)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор и \mathbf{v} – скорость электрона относительно ядра.

Магнитомеханическое отношение

$$g_e = \frac{p_e}{L_e} = -\frac{e}{2m}, \quad (125)$$

где $p_e = ev/2$ – магнитный момент электрона, e – заряд электрона.

Напряженность магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}, \quad (126)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (127)$$

где μ – магнитная проницаемость вещества, \mathbf{J} – вектор намагниченности.

Закон полного тока (закон Эрстеда) – циркуляция вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} по некоторому контуру Γ равна алгебраической сумме макроскопических токов I_n , охватываемых этим контуром,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} dl = \sum_n I_n. \quad (128)$$

Пример 3.12. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка равна $H = 200$ А/м. Магнитный момент витка с током $p_m = 1.00$ А/м². Вычислить силу тока I в витке и радиус R витка.

Решение

По условию задачи $\mu = 1$, тогда, согласно (127), $B = \mu_0 H$. Магнитная индукция связана с магнитным моментом витка по (103): $B = k_1 2 p_m / R^3$, откуда $R = (k_1 2 p_m / B)^{1/3}$. Зная R и p_m , силу тока можно рассчитать по (119): $I = p_m / \pi R^2$.

Составим программу расчета.

```

01 # Круговой виток с током 3
02 import math as mt
03 k1=1.0e-7; mu0=4*mt.pi*1.0e-7; H=200; pm=1;
04 B=mu0*H; R=(k1*2*pm/B)**(1/3); I=pm/(mt.pi*R*R);
05 print('B=' ,B, ' R=' ,R, '\nI=' ,I)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление индукции магнитного поля B , радиуса витка R , силы тока в витке I ; 05 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
B= 0.0002513274122871835  R= 0.0926680544815213
I= 37.0672217926085
>>>

```

Ответ: $B = 25.1 \text{ мкТл}$, $R = 9.27 \text{ см}$, $I = 37.1 \text{ А}$.

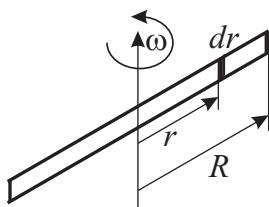


Рис. 39. К примеру 3.13

Пример 3.13. По тонкому стержню длиной $l = 2R = 0.2 \text{ м}$ равномерно распределен заряд $Q = 240 \text{ нКл}$. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить:

- 1) магнитный момент p_m , обусловленный вращением заряженного стержня;
- 2) отношение магнитного момента к моменту импульса p_m/L , если стержень имеет массу $m = 12.0 \text{ г}$.

Решение

1. Рассмотрим ток, который определяется элементом заряда dQ , расположенного на стержне на расстоянии r от оси вращения: $I = 2dQ/T$, где $T = 2\pi/\omega$ – период вращения стержня, двойка учитывает, что для каждого значения r имеется два элементарных заряда dQ , расположенных симметрично относительно оси вращения. Тогда мы можем записать для dp_m выражение: $dp_m = 2dQ\pi r^2/T = 2\lambda dr\pi r^2/T$, где $\lambda = dQ/dl$ – линейная плотность равномерно распределенного заряда. Преобразуем получен-

ное выражение: $dp_m = \lambda\omega r^2 dr$ и проинтегрируем его от 0 до R , получаем: $p_m = \lambda\omega R^3/3$.

2. Момент импульса L стержня относительно середины стержня найдем из формулы $L = I\omega$, где $I = ml^2/12$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через середину стержня длины l . Искомое отношение есть $p_m/L = \lambda R/m = Q/2m$.

Составим программу расчета.

```
01 # Вращение заряженного стержня 3
02 import math as mt
03 l=0.2; Q=2.4e-7; omega=10; m=0.012;
04 R=l/2; lam=Q/l; pm=lam*omega*R**3/3;
05 I=m*R**2/3; L=I*omega; pmL=Q/2/m; pmL1=pm/L;
06 print('pm=',pm,' L=',R,' \n pmL=',pmL,' pmL1=',pmL1)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение математической библиотеки **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – расчет R (R) – полудлины стержня, λ (lam) – линейной плотности заряда, p_m – магнитного момента стержня; 05 – вычисление I – момента инерции и L – момента импульса стержня относительно его середины, $p_m/L = Q/2m$ (pmL) – отношение магнитного к механическому моментам, p_m/L ($pmL1$) – проверка прямым расчетом этого отношения; 06 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
pm= 4e-09  L= 0.1
pmL= 9.99999999999999e-06  pmL1= 9.99999999999999e-06
>>>
```

Ответ: $p_m = 4.00 \text{ нA} \cdot \text{м}^2$, $p_m/L = 10 \text{ мкA}/\text{кг}$.

Пример 3.14. Рамка гальванометра длиной $a = 4$ см и шириной $b = 1.5$ см, содержащая $N = 200$ витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией $B = 0.1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти: 1) механический момент M , действующий на рамку, когда по витку течет ток $I_1 = 1$ мА; 2) магнитный момент p_m рамки при этом токе.

Решение

Найдем магнитный момент рамки гальванометра, согласно (119): $p_m = I_N S = NI_1 ab$, где $I_N = NI_1$. Механический момент связан

с магнитным, согласно (121): $M = |\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}| = p_m B \sin \alpha$, где α – угол между вектором индукции \mathbf{B} магнитного поля и вектором магнитного момента \mathbf{p}_m , который нормален к плоскости рамки, тогда $\alpha = \pi/2$.

Составим программу расчета.

```
01 # Рамка гальванометра с током 4
02 B=0.1; N=200; a=0.04; b=0.015; I1=0.001;
03 pm=N*I1*a*b; M=pm*B
04 print('pm=' ,pm, ' M=' ,M)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление магнитного момента рамки гальванометра p_m (pm), механического момента, действующего на рамку с током в магнитном поле M (M); 04 – вывод результатов расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
pm= 0.00012  M= 1.2e-05
>>>
```

Ответ: $p_m = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ А}\cdot\text{м}^2$, $M = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

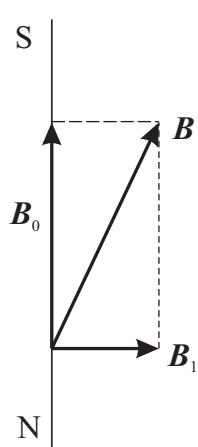


Рис. 40

Согласно принципу суперпозиции результирующее поле равно $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, где \mathbf{B}_0 – индукция магнитного поля Земли, \mathbf{B}_1 – индукция магнитного поля витка с током. Виток с током отклоняет магнитную стрелку компаса. На рис. 40 показана силовая линия SN магнитного поля Земли, индукция магнитного поля Земли в среднем равна $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Индукция B_1 магнитного поля в центре кругового витка равна $B_1 = k_1 2\pi I/R$, где $k_1 = \mu_0/4\pi$. По условию задачи стрелка компаса отклонилась на угол α , тогда $B_1 = B_0 \tan \alpha$, а сила тока равна $I = B_0 R \tan \alpha / 2\pi k_1$.

Пример 3.15. Проволочный виток радиусом $R = 0.2$ м расположен в плоскости магнитного меридиана Земли. В центре витка установлен компас. Какой ток I течет по витку, если магнитная стрелка компаса отклонена на угол $\alpha = 9^\circ$ от плоскости магнитного меридиана.

Решение

Согласно принципу суперпозиции результирующее поле равно $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, где \mathbf{B}_0 – индукция магнитного поля Земли, \mathbf{B}_1 – индукция магнитного поля витка с током. Виток с током отклоняет магнитную стрелку компаса. На рис. 40 показана силовая линия SN магнитного поля Земли, индукция магнитного поля Земли

в среднем равна $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Индукция B_1 магнитного поля в центре кругового витка равна $B_1 = k_1 2\pi I/R$, где $k_1 = \mu_0/4\pi$. По условию задачи стрелка компаса отклонилась на угол α , тогда $B_1 = B_0 \tan \alpha$, а сила тока равна $I = B_0 R \tan \alpha / 2\pi k_1$.

Составим программу расчета.

```
01 #Отклонение стрелки компаса
02 import math as mt
03 k1=1.0e-7;
04 R=0.2; alp=9*mt.pi/180; B0=2.0e-5;
05 B1=B0*mt.tan(alp); I=B1*R/(k1*2*mt.pi);
06 print('I=',I)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для вычисления тангенса и числа π ; 03 – определение размерной постоянной k_1 ; 04 – определение исходных данных для расчета тока R, α, B_0 ; 05 – вычисление индукции B_1 магнитного поля и силы тока витка I ; 06 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
I= 1.0083066634597306
>>>
```

Ответ: $I \approx 1.01$ А.

Пример 3.16. Замкнутый соленоид¹² со стальным сердечником имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток $I = 1.25$ А. Вычислить магнитный поток Φ в сердечнике, если его сечение $S = 4$ см².

Решение

Магнитное поле в тороиде почти однородно, поэтому магнитный поток Φ через поперечное сечение, согласно (113), равен

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = BS. \quad (129)$$

Индукция B магнитного поля в ферромагнитной (сталь) среде нелинейно зависит от напряженности H магнитного поля, определяется из опыта и, как правило, приводится в табличной или

¹² Соленоидом называется цилиндрическая обмотка из провода, характеризуемая числом витков n на единицу длины, длиной l , диаметром d . Толщина провода и шаг винтовой линии малы по сравнению с d и l . Замкнутый соленоид – это цилиндрическая обмотка из провода, согнутая в кольцо (тороид).

графической форме (см. табл. 1–3). Напряженность поля в тороиде равна $H = nI$.

Составим программу расчета.

```
01 # Тороид с током 2
02 n=1000; S=4.0e-4; I=1.25;
03 H=n*I;
04 print('H=', H)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – расчет напряженности магнитного поля H (H); 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
H= 1250.0
>>>
```

В табл. 3 приведены значения $B(H)$. Для значений напряженностей магнитного поля $H_1 = 1000 \text{ A/m}$ и $H_2 = 1500 \text{ A/m}$ индукция магнитного поля равна $B_1 = 1.12 \text{ Тл}$ и $B_2 = 1.25 \text{ Тл}$ соответственно. Чтобы найти индукцию B при значении напряженности поля $H = 1250 \text{ A/m}$, используем линейную интерполяцию¹³ (приложение 5.1, (195)). Магнитный поток в сердечнике найдем по (129).

Окончательно, программа расчета принимает вид:

```
01 # Тороид с током 2A
02 n=1000; S=4.0e-4; I=1.25;
03 H=n*I;
04 print('H=', H)
05 H1=1000; H2=1500; B1=1.12; B2=1.25;
06 B=B1+(B2-B1)*(H-H1)/(H2-H1);
07 Phi=B*S;
08 print('B=', B, 'Phi=', Phi)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – расчет напряженности магнитного поля H

¹³ Интерполяция (лат. *interpolatio* – изменение, переделка) – отыскание промежуточных значений величины по некоторым известным её значениям.

(H); 04 – вывод расчетного значения напряженности магнитного поля в сердечнике тороида; 05 – табличные значения H_1, H_2, B_1, B_2 из табл. 3, необходимые для интерполяции B ; 06 – линейная интерполяция по (135) индукции магнитного поля B ; 07 – расчет магнитного потока Φ (Phi) через поперечное сечение сердечника тороида; 08 – вывод расчетных значений B и Φ .

Приведем результаты расчета:

```
>>>
H= 1250.0
B= 1.185 Phi= 0.0004740000000000000003
>>>
```

Ответ: $\Phi = 4.74 \cdot 10^{-4}$ Вб.

Пример 3.17. Стальной сердечник (сталь марки 1572 [18]), согнутый в виде кольца со средним диаметром $d = 0.5$ м, несет на себе обмотку из $N = 800$ витков с током $I = 3$ А. В кольце имеется прорезь шириной $h = 2$ мм. Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, найти индукцию B магнитного поля в зазоре и магнитную проницаемость μ сердечника.

Решение

Используем закон полного тока (128) и считаем, что магнитное поле однородно внутри сердечника, включая и область прорези, тогда циркуляцию можно представить в виде $H_1l + H_2h$, где H_1, H_2 - напряженность магнитного поля в сердечнике и в области прореза, $l = 2\pi R - h$, а правую часть (128) представим в виде $\sum_n I_n = NI$, т.е.

$$H_1(2\pi R - h) + H_2h = NI, \quad (130)$$

где $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Учитывая (127), запишем связь индукции B_2 с напряженностью H_2 магнитного поля в воздухе

$$\mu_0 H_2 = B_2. \quad (131)$$

Умножим (130) на μ_0 и, учитывая (131), получаем

$$\mu_0 H_1(2\pi R - h) + B_2h = \mu_0 NI \quad (132)$$

или

$$B_2 = \frac{\mu_0 NI}{h} - \frac{H_1(2\pi R - h)}{h}. \quad (133)$$

Учитывая то, что силовые линии магнитного поля перпендикулярны к поверхности раздела сред, запишем условия на границе раздела «сердечник-прорезь»

$$B_1 = B_2 \equiv B. \quad (134)$$

В ферромагнитной среде (сталь марки 1572 [18]) связь индукции B_1 с напряженностью H_1 магнитного поля представляется в виде нелинейной эмпирической зависимости $B_1 = f(H_1)$, которая приведена в виде табл. 1. Используем линейную интерполяцию

Таблица 1. Связь между напряженностью H_1 и индукцией B

N	$H_1, \text{ А/м}$	$B, \text{ Тл}$	N	$H_1, \text{ А/м}$	$B, \text{ Тл}$
1	10	0.040	5	100	0.74
2	20	0.14	6	200	0.92
3	50	0.48	7	500	1.20
4	70	0.63	8	1000	1.29

(приложение 5.1, (195)) для определения значения магнитной индукции из табличных данных на участке $[H_n, H_{n+1}]$:

$$B = f(H) = H_n + \frac{B_{n+1} - B_n}{H_{n+1} - H_n}(H - H_n). \quad (135)$$

Решение системы из (135) и (133), с учетом (134), наиболее просто выполнить графическим способом, для этого составим программу.

```

01 #Пример 3.1. Магнитопровод
02 import matplotlib.pyplot as plt
03 import numpy as np
04 from scipy import interpolate
05 mu0=4*np.pi*1.0e-7;
06 x1 = np.array([10,20,50,70,100,200,500,1000], 'float')
07 y1 = np.array([.04,.14,.48,.62,.74,.92,1.2,1.29])
08 f = interpolate.interp1d(x1, y1)
09 x2 = np.arange(10, 1000, 0.1)
10 y2 = f(x2)
11 NV =800; I=3.0; R=0.5; h=0.002;
```

```

12 A0 = mu0*NV*I/h; A1= mu0*(2*np.pi*R-h)/h;
13 x3 = np.arange(10, 700, 0.1)
14 y3 =A0-A1*x3;
15 plt.plot(x1, y1, 'o', x2, y2, '--',x3, y3, '-')
16 plt.xlabel('$H_1$',fontsize=16)
17 plt.ylabel('$B$',fontsize=16)
18 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости B от H ($H \equiv H_1$); 03 – подключение пакета **numpy** для определения π (np.pi) и одномерных массивов x1, y1, x2, y2, x3, y3; 04 – подключение пакета **scipy** для подключения процедуры кусочно-линейной интерполяции; 05 – определение μ_0 (mu0); 06–07 – определение одномерных массивов данных (H (x1) и B (y1), табл. 1); 08 – определение функции $f(H)$ кусочно-линейной интерполяции; 09 – определение одномерного массива x2 – сетки (напряженности магнитного поля H_n); 10 – интерполяция B_n в узлах сетки H_n ; 11 – определение исходных данных для расчета индукции B по формуле (133); 12 – вычисление коэффициентов $A0 = \mu_0 N I / h$ и $A1 = (2\pi R - h) / h$ линейной функции (133); 13 – определение одномерного массива x3 – сетки (напряженности магнитного поля H_n); 14 – вычисление индукции B_n в узлах сетки x3; 15–18 – вывод графиков $B(H)$ в узлах сеток x2 (формула (135)) и x3 (формула (133)).

На рис. 41 представлены рассчитанные графики зависимостей $B = B(H_1)$ (135) – линия 1 и (133) – линия 2.

Графическое решение системы есть $H_1 = 267$ А/м, $B = 0.98$ Тл. Магнитную проницаемость сердечника найдем из материального уравнения (127), тогда для магнитопровода

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H_1}.$$

Составим программу расчета.

```

01 #Магнитная проницаемость сердечника
02 mu0=4*3.1415*1.0e-7;
03 H1=267; B=0.982;
04 mu=B/(mu0*H1);
05 print('mu=',mu)

```

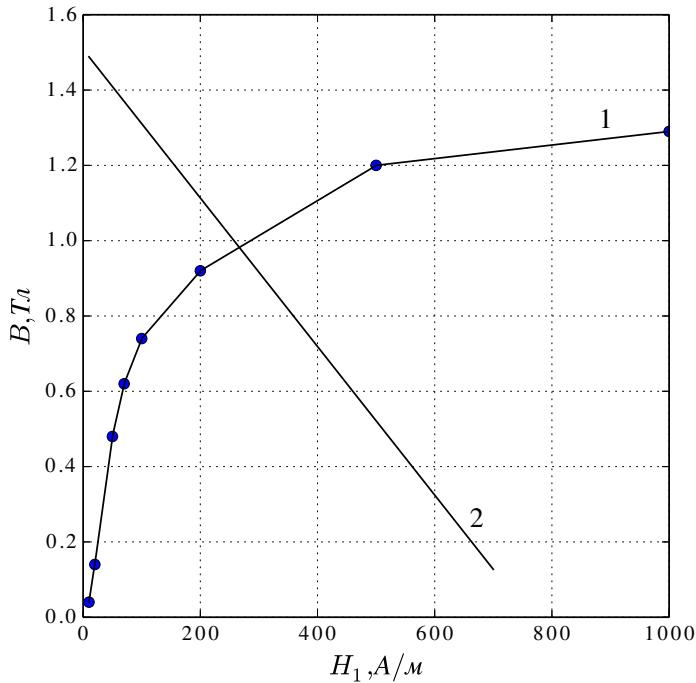


Рис. 41. Магнитное поле в прорези магнитопровода

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02–03 – определение исходных данных; 04 – вычисление магнитной проницаемости μ ($\text{m}\mu$); 05 – вывод результата расчета (μ).

Приведем результаты расчета:

```
>>>
mu= 2926.8682331074697
>>>
```

Ответ: $B = 0.98 \text{ Тл}$, $\mu = 2900$.

Пример 3.18. Железный сердечник, согнутый в виде кольца, имеет длину $l_1 = 1 \text{ м}$ и несет на себе обмотку из $N = 1000$ витков. В кольце имеется прорезь ширины $l_2 = 1 \text{ см}$. При токе

$I = 20$ А индукция магнитного поля в воздушном зазоре равна $B = 1.6$ Тл. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника при этих условиях.

Решение

Воспользуемся законом полного тока (128) для напряженности магнитного поля, с учетом однородности полей в сердечнике и в зазоре, запишем: $H_1l_1 + H_2l_2 = IN$. Учитывая материальное уравнение (127) и пренебрегая рассеянием магнитного потока в зазоре, считаем, что индукция в сердечнике тороида такая же как в воздушном зазоре ($B_1 = B_2 \equiv B$), тогда $IN = B_1l_1/\mu\mu_0 + B_2l_2/\mu_0$ и $\mu = l_1/(\mu_0IN/B - l_2)$.

Составим программу расчета.

```
01 # Тороид с током 3
02 import math as mt
03 mu0=4*mt.pi*1.0e-7;N=1000;I=20;l1=1;l2=0.01;B=1.6;
04 mu=l1/(mu0*I*N/B-l2);
05 print('mu=',mu)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для вычисления числа π ; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление магнитной проницаемости μ (**mu**) сердечника тороида; 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
mu= 175.19383938841085
>>>
```

Ответ: $\mu \approx 175$.

Задания для самостоятельной работы

3.11. По кольцу радиусом R течет ток. На оси кольца на расстоянии $z = 1$ м от его плоскости магнитная индукция $B = 10$ нТл. Определить магнитный момент p_m кольца с током. Считать R много меньше z .

3.12. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет заряд $Q = 10$ нКл. Кольцо равномерно вращается с частотой $\omega = 10$ с^{-1} относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определить: 1) магнитный момент кругового тока, обусловленный вращением заряженного кольца; 2) отношение

магнитного момента к моменту импульса, если кольцо имеет массу $m = 10$ г.

3.13. Проволочный виток радиусом $R = 5$ см находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 2$ кА/м. Плоскость витка образует угол $\pi/3$ с направлением магнитного поля. Найти механический момент M , действующий на виток.

3.14. Длинный прямой соленоид, содержащий $n = 5$ витков на каждый сантиметр длины, расположен перпендикулярно плоскости магнитного меридиана Земли с горизонтальной составляющей индукции земного магнетизма $B_0 = 20$ мкТл. Внутри соленоида в его средней части находится магнитная стрелка, установившаяся в магнитном поле Земли. Когда по соленоиду пустили ток, стрелка отклонилась на $\pi/3$. Найти силу тока I .

3.15. На железное кольцо намотано в один слой $N = 500$ витков провода. Средний диаметр кольца $d = 25$ см. Определить магнитную индукцию B в железе и магнитную проницаемость μ железа, если сила тока в обмотке равна $I = 2.5$ А.

3.16. Стальной сердечник тороида, длина которого по средней линии равна $l = 1$ м, имеет вакуумный зазор длиной $l_2 = 4$ мм. Обмотка содержит $n = 8$ витков на 1 см. При какой силе тока I индукция в зазоре будет равна $B = 1$ Тл? Указания: воспользоваться фрагментом табл. 3.

Таблица 2. Железо. Связь $B(H)$

H , А/м	1500	1600	1700
B , Тл	1.355	1.375	1.400

Таблица 3. Сталь. Связь $B(H)$

H , А/м	500	1000	1500	1800	2000	2200
B , Тл	0.875	1.12	1.225	1.255	1.300	1.325

4. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

4.1. Явление электромагнитной индукции. Индуктивность. Самоиндукция. Энергия магнитного поля

ЭДС электромагнитной индукции (закон Фарадея)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (136)$$

Правило Ленца: индукционный ток всегда имеет такое направление, что его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока.

Индукция магнитного поля внутри соленоида и тороида приближенно равна

$$B \cong \mu_0 n I, \quad (137)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, μ - магнитная проницаемость среды.

Магнитный поток Φ пропорционален силе тока I :

а) для одного витка

$$\Phi = LI, \quad (138)$$

б) для N витков (соленоида, катушки индуктивности) полный магнитный поток (потокосцепление)

$$\Psi = L_N I. \quad (139)$$

Здесь L_N называется индуктивностью контура или соленоида (индекс N обычно опускают)

$$L_N = \alpha L_\infty, \quad \alpha = (1 + 0.45d/l)^{-1}, \quad (140)$$

где L_∞ – индуктивность идеального бесконечно длинного соленоида.

$$L_\infty = n^2 \mu \mu_0 V, \quad (141)$$

где $n = N/l$ – число витков соленоида на единицу длины, $V = Sl$, где S – площадь поперечного сечения катушки.

Если $d/l \ll 1$, то $\alpha \approx 1$ и $L_N = L_\infty \equiv L$.

Потокосцепление связано с магнитным потоком через виток:

$$\Psi = N\Phi. \quad (142)$$

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{d}{dt} I. \quad (143)$$

Для двух связанных контуров (катушек) при изменении тока I_1 в первом контуре, во втором контуре индуцируется ЭДС, равная

$$\varepsilon_2 = -L_{21} \frac{d}{dt} I_1. \quad (144)$$

При изменении тока I_2 во втором контуре, в первом контуре индуцируется ЭДС, равная

$$\varepsilon_1 = -L_{12} \frac{d}{dt} I_2, \quad (145)$$

где L_{nm} – взаимная индуктивность, $L_{12} = L_{21}$.

Пример 4.1. Тонкий металлический стержень длиной $l_0=1.2$ м вращается с частотой $\nu = 2.0$ об/с в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной стержню и отстоящей от одного из концов на расстояние $l_1 = 0.95$ м. Вектор магнитной индукции параллелен оси вращения и равен $B = 1.0$ мТл. Найти разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, возникающую между концами стержня.

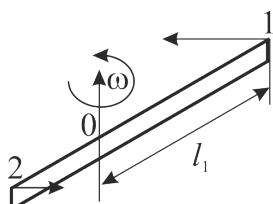


Рис. 42. Вращение стержня в магнитном поле

При вращении стержня в магнитном поле на электроны действует сила Лоренца, которая приводит к разделению зарядов в стержне и на концах стержня возникает разность потенциалов. ЭДС индукции между точками 0–1 равна $\varphi_1 - \varphi_0 = -d\Phi_1/dt$, где $d\Phi_1 = BdS_1$, а элемент площади, замечаемой частью стержня равен $dS_1 = l_1^2 d(\omega t)/2 = l_1^2 \omega dt/2$. Тогда на участке 0–1 разность потенциалов равна $\varphi_1 - \varphi_0 = -Bl_1^2 \omega/2$. Аналогично для второй части стержня 0–2: $\varphi_2 - \varphi_0 = -Bl_2^2 \omega/2$.

Решение

При вращении стержня в магнитном поле на электроны действует сила Лоренца, которая приводит к разделению зарядов в стержне и на концах стержня возникает разность потенциалов. ЭДС индукции между точками 0–1 равна $\varphi_1 - \varphi_0 = -d\Phi_1/dt$, где $d\Phi_1 = BdS_1$, а элемент площади, замечаемой частью стержня равен $dS_1 = l_1^2 d(\omega t)/2 = l_1^2 \omega dt/2$. Тогда на участке 0–1 разность потенциалов равна $\varphi_1 - \varphi_0 = -Bl_1^2 \omega/2$. Аналогично для второй части стержня 0–2: $\varphi_2 - \varphi_0 = -Bl_2^2 \omega/2$.

Разность потенциалов между концами стержня 1–2 равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_0 - \varphi_2 + \varphi_0 = -B(l_1^2 - l_2^2)\omega/2$.

Составим программу расчета.

```
01 # ЭДС индукции вращающегося стержня 1
02 import math as mt
03 l0=1.2; l1=0.95; B=0.001; v=2;
04 omega=2*mt.pi*v; l2=l0-l1; Dp=-B*(l1*l1-l2*l2)*omega/2;
05 print('Dp=',Dp)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для вычисления числа π ; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление циклической частоты ω (omega), $l_2 = l_0 - l_1$ (l2), разности потенциалов между концами стержня $\varphi_2 - \varphi_1$ (Dp); 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
Dp=-0.0052778756580308525
>>>
```

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = -5.3$ мВ.

Пример 4.2. В магнитном поле с индукцией $B = 0.35$ Тл равномерно с частотой $v = 8$ об/с вращается рамка, содержащая $N = 500$ витков площадью $S = 50$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции ε_m , возникающую в рамке.

Решение

ЭДС индукции ε в рамке находится по (136), где полный поток Ψ определяется по (142), тогда $\Psi = NBS \cos \omega t$, а ЭДС индукции равна $\varepsilon = -d\Psi/dt = \omega NBS \sin \omega t$. Максимальная ЭДС индукции есть амплитуда $\varepsilon_m = \omega NBS$.

Составим программу расчета.

```
01 # ЭДС индукции вращающейся рамки 2
02 import math as mt
03 N=500; S=5.0e-3; B=0.35; v=8;
04 omega=2*mt.pi*v; Em=omega*B*N*S;
05 print('Em=',Em)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для вычисления числа π ; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление циклической частоты ω (omega), амплитуды ЭДС индукции рамки ε_m (Em); 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
Em= 43.982297150257104  
>>>
```

Ответ: $\varepsilon_m \approx 44$ В.

Пример 4.3. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества $Q = 10$ мКл. Определить магнитный поток Φ , пересеченный кольцом, если сопротивление цепи гальванометра равно $R = 30$ Ом.

Решение

Пренебрегаем сопротивлением витка, тогда полное сопротивление цепи определяется сопротивлением гальванометра. Изменение магнитного потока $d\Phi$ за промежуток времени dt , согласно (136), равно $d\Phi = -\varepsilon dt$, а ЭДС индукции есть $\varepsilon = IR$, следовательно $d\Phi = -RIdt$. Так как сила тока есть $I = dQ/dt$, то получаем $d\Phi = -RdQ$, тогда $\Phi = RQ$. Составим программу расчета.

```
01 # Магнитный поток через кольцо 3  
02 Q=1.0e-5; R=30;  
03 Phi=R*Q;  
04 print('Phi=',Phi)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление магнитного потока через кольцо Φ (Phi); 04 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
Phi= 0.00030000000000000003  
>>>
```

Ответ: $\Phi = 0.3$ мВб.

Пример 4.4. Индуктивность катушки равна $L = 2$ мГн. Ток частотой $\nu = 50$ Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определить среднюю ЭДС самоиндукции за интервал времени $[t_1, t_2]$, в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение силы тока $I_m = 10$ А.

Решение

Согласно определению (приложение 5.1, (203)) средняя ЭДС самоиндукции по интервалу времени $[t_1, t_2]$ есть

$$\langle \varepsilon_s \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_s(t) dt, \quad (146)$$

где ε_s определяется (143) и равна $\varepsilon_s = -Ldi/dt$. По условию задачи сила тока есть $I = I_m \sin \omega t$, а ЭДС самоиндукции $\varepsilon_s = -LdI/dt = -\omega L I_m \cos \omega t$.

Среднюю ЭДС самоиндукции найдем из (146):

$$\langle \varepsilon_s \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} L I_m (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2). \quad (147)$$

Средняя ЭДС $\langle \varepsilon \rangle$ существенно зависит от временного интервала усреднения. По условию задачи отрезок усреднения есть $t_1 = T/4$ и $t_2 = 3T/4$, где $T = 1/\nu$, тогда

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{T} L I_m \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{4}{T} L I_m.$$

Составим программу расчета.

```
01 # Средняя ЭДС через соленоид 4
02 L=2.0e-3; Im=10; nu=50;
03 E=4*nu*L*Im;
05 print('E=',E)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – определение исходных данных; 03 – вычисление средней ЭДС самоиндукции $\langle \varepsilon \rangle$ (E); 05 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
E= 4.0  
>>>
```

Дополнение. 1. Область от \min до \max занимает половину периода колебания тока. Проверим как меняется средняя ЭДС самоиндукции, если смещать область $[t_1, t_2]$ вправо в течение одного периода. Интегрируем (146), получаем

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{T} \int_t^{t+T/2} \varepsilon dt = -\frac{2}{T} LI_m (\sin(\omega t + \pi) - \sin \omega t) = \frac{4}{T} LI.$$

Средняя ЭДС самоиндукции не является константой и синфазна с током.

2. Средняя ЭДС зависит также от длины отрезка $[t_1, t_2]$, например, если усреднение проводится по периоду колебания тока, то, согласно (147), $\langle \varepsilon \rangle$ не зависит от T_1 и $\langle \varepsilon \rangle = 0$.

Ответ: $\langle \varepsilon \rangle = 4.0$ В.

Пример 4.5. На цилиндрический каркас диаметром $d = 120$ мм намотано в один слой $N = 100$ витков проволоки. Вся намотка разместилась на длине $l = 60$ мм. Определить индуктивность L_N такой катушки. Магнитную проницаемость сердечника катушки принять равной единице.

Решение

Индуктивность катушки конечной длины вычисляется по формулам (140) и (141), где $V = \pi d^2 l / 4$.

Составим программу расчета.

```
01 # Индуктивность катушки 5
02 import math as mt
03 mu0=4*mt.pi*1.0e-7; d=0.12; l=0.06; N=100;
04 alp=1/(1+0.45*d/l); V=mt.pi*d*d*l/4; n=N/l;
05 L0=n*n*mu0*V; LN=alp*L0;
06 print('L0=', L0, ' LN', LN)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math** для вычисления числа π ; 03 – определение исходных данных; 04 – расчет α (alp) и объема катушки V (V); 05 – вычисление индуктивности L_∞ (L0) соленоида бесконечной длины и L_N (LN) соленоида конечной длины; 06 – вывод результата расчета.

Приведем результаты расчета:

```
>>>  
L0= 0.002368705056261446 LN= 0.0012466868717165504  
>>>
```

Ответ: $L_\infty = 2.37$ мГн, $L_N = 1.25$ мГн.

Задания для самостоятельной работы

4.1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.4$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, вращается стержень длиной $l = 10$ см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов на концах стержня при частоте вращения $\nu = 16$ об/с.

4.2. Рамка площадью $S = 100$ см² содержит $N = 1000$ витков провода сопротивлением $r = 12$ Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление $R = 20$ Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.1$ Тл с частотой вращения $\nu = 8$ об/с. Определить максимальную мощность тока в цепи.

4.3. Проволочный виток радиусом $R = 4$ см находится в однородном магнитном поле с $B = 0.04$ Тл. Плоскость витка образует угол $\alpha = \pi/6$ с направлением магнитного поля. Какое количество заряда протечет по витку, если магнитное поле исчезнет? Сопротивление витка равно $r = 0.01$ Ом.

4.4. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока I в катушке на 0.1 А в 1 с. Индуктивность катушки равна $L = 0.01$ Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции $\langle \varepsilon \rangle$.

4.5. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет $N_1 = 750$ витков и индуктивность $L_1 = 25$ мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до $L_2 = 36$ мГн, обмотку с катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Определить число витков N_2 катушки после перемотки.

4.2. Переходные процессы в электрических цепях, содержащих R, C и L

Переходной процесс – процесс возникающий в электрических цепях при скачкообразном изменении одного из параметров цепи.

Квазистационарный ток – ток в цепи, чьи характерные размеры l много меньше $c\Delta t$, где c – скорость света, Δt – длительность изменения параметров для непериодического тока (для периодического тока Δt есть период колебаний тока). Для всех задач подраздела выполняется условие квазистационарного тока, соответственно, выполняются законы Ома и применимы правила Кирхгофа.

Связь между током и напряжением на R, L, C элементах

$$U_R = RI_R, \quad (148)$$

$$U_L = LdI_L/dt, \quad (149)$$

$$I_C = CdU_C/dt. \quad (150)$$

Напряжение U_C , ток I и заряд q на конденсаторе являются непрерывными функциями времени.

Для RC- и RL-цепи изменение заряда, тока и напряжения описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка типа

$$\frac{dX}{dt} + \alpha X = 0. \quad (151)$$

Решение этого уравнения имеет вид $X = Ae^{-\alpha t}$, где постоянная интегрирования A определяется начальным условием $X_0 = X(0)$.

Для RCL цепи изменение заряда, тока и напряжения описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка типа

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0, \quad (152)$$

решение которого зависит от параметров системы.

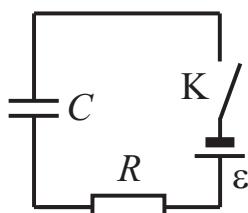
Для переходного неколебательного процесса

- 1) при $\beta = \omega_0$: $X = (A + Bt)e^{-\beta t}$;
- 2) при $\beta > \omega_0$: $X = Ae^{\lambda_1 t} + Ae^{\lambda_2 t}$, $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Пример 4.6. Конденсатор C емкостью 0.47 мкФ в момент времени $t = 0$ включен в цепь последовательно с генератором напряжения $\varepsilon = 12$ В и сопротивлением $R = 1.0$ Ом, как показано на рис. 43. Определить U_C и I в момент времени $t_1 = 1.0$ мкс.

Решение

Рис. 43. RC-цепь



Согласно второму правилу Кирхгофа

$$\varepsilon = U_C + U_R. \quad (153)$$

В последовательной цепи $I_R = I_C \equiv I$ с учетом (150) запишем (153) в виде

$$\varepsilon = U_C + RC \frac{dU_C}{dt}$$

или

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} (U_C - \varepsilon) = 0. \quad (154)$$

Ведем параметр $\alpha = 1/\tau$, где $\tau = RC$ – время релаксации, и переменную $X = U_C - \varepsilon$, тогда (154) принимает вид простейшего обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dX}{dt} + \alpha X = 0. \quad (155)$$

Решение (155) представим в виде $X = X_0 \exp(-\alpha t)$ или

$$U_C - \varepsilon = (U_C(0) - \varepsilon) \exp(-\alpha t). \quad (156)$$

Так как $U_C(0) = 0$, то

$$U_C = \varepsilon(1 - \exp(-\alpha t)). \quad (157)$$

Согласно (150) ток I в цепи есть

$$I = CdU_C/dt = C\varepsilon\alpha \exp(-\alpha t) = \varepsilon \exp(-\alpha t)/R. \quad (158)$$

Итак, (157) и (158) – искомые зависимости от времени.

Составим программу расчета.

```
01 #Релаксация тока в RC-цепи
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 C=0.47e-6; R=1.0; E=12.0; t1=1.e-6;
05 tau=R*C; alpha=1./tau;
06 U1=E*(1.-mt.exp(-alpha*t1));
07 I1=E*mt.exp(-alpha*t1)/R;
```

```

08 print('U1=',U1,'\\nI1=',I1,'\\ntau',tau,'\\nt1/tau',t1/tau)
09 NT=500; tmin=0; tmax=3.*tau; dt=(tmax-tmin)/NT;
10 t=[]; U=[]; I=[];
11 t.append(tmin/tau);U.append(E);I.append(E/R);
12 for i in range(1,NT):
13     tt=tmin+i*dt; t.append(tt/tau);
14     U.append(E*(1.-mt.exp(-alpha*tt)));
15     I.append(E*mt.exp(-alpha*tt)/R);
16 plt.subplot(1,2,1)
17 plt.plot(t,U,'k-',linewidth=2.0)
18 plt.grid(True)
19 plt.xlabel('$t$',fontsize=16)
20 plt.ylabel('$U_C$',fontsize=16)
21 plt.subplot(1,2,2)
22 plt.plot(t,I,'k-',linewidth=2.0)
23 plt.grid(True)
24 plt.xlabel('$t$',fontsize=16)
25 plt.ylabel('$I$',fontsize=16)
26 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math**; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости U_C и I от t/τ ; 04 – определение исходных данных; 05 – вычисление τ (τ) – времени релаксации и параметра α (α); 06 – вычисление напряжения на конденсаторе U_C ($U1$) в момент времени t_1 ; 07 – вычисление тока I ($I1$) в момент времени t_1 ; 08 – вывод результата расчета $U1, I1, \tau, t1/\tau$; 09 – определение временной сетки на отрезке $[0, 3\tau]$; 10 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{t/\tau\}_n$, $\{U_C\}_n$, $\{I\}_n$; 11 – запись начальных значений t_0/τ , $U_C(0)$, $I(0)$; 12-15 – расчет массивов $\{t/\tau\}_n$, $\{U_C\}_n$, $\{I\}_n$; 16-26 – вывод графиков $U_C(t/\tau)$, $I(t/\tau)$. Приведем результаты расчета:

```

>>>
U1= 10.570611007029202
I1= 1.4293889929707988
tau= 4.7e-07
t1/tau= 2.127659574468085
>>>

```

Ответ: $U_C(t_1) \approx 10.6$ В, $I(t_1) \approx 1.43$ А.

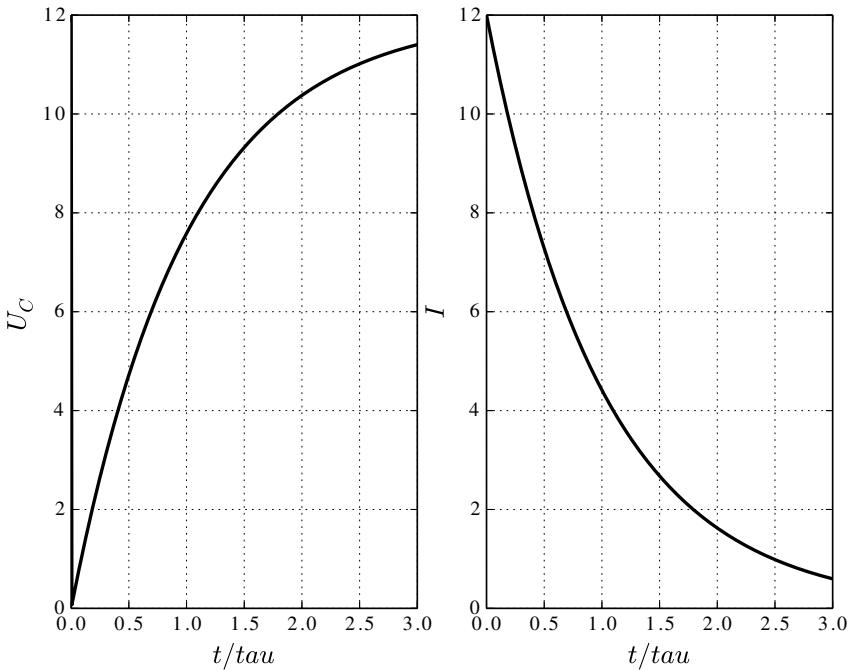


Рис. 44. Увеличение напряжения U_C (В) на конденсаторе (левая панель) и уменьшение тока I (А) в цепи (правая панель) с течением времени. Время релаксации $\tau = 0.47$ мкс, $t_1/\tau \approx 2.13$

Пример 4.7. Определить зависимость от времени заряда $q(t)$ на обкладках конденсатора C в схеме, приведенной на рис. 45 после замыкания в момент времени $t = 0$ ключа К. Найти заряд q и напряжение U_C в момент времени $t_1 = 1.0$ мкс. Принять, что $R_1 = R_2 = 1.0$ Ом, $C = 0.47$ мкФ, $\varepsilon = 1.5$ В.

Решение

Составим, согласно правилам Кирхгофа, систему уравнений

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2, \\ \varepsilon = IR_2 + I_1R_1, \\ 0 = U_C - I_1R_1, \end{cases} \quad (159)$$

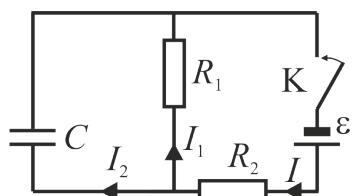


Рис. 45. RC-цепь

где I – сила тока через R_2 , I_1 – сила тока через R_1 , I_2 – сила тока через C . Из последнего уравнения системы (159) имеем $I_1 = U_C/R$, согласно (150) сила тока $I_2 = CdU_C/dt$, а из второго уравнения системы (159) имеем $I = (\varepsilon - U_C)/R_2$. Полученные выражения для токов подставляем в первое уравнение системы (159)

$$\frac{\varepsilon - U_C}{R_2} = \frac{U_C}{R_1} + C \frac{dU_C}{dt}$$

или

$$\frac{dU_C}{dt} = \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right) U_C - \frac{\varepsilon}{R_2 C}. \quad (160)$$

Вводя параметр $\alpha = (R_1 + R_2)/R_1 R_2 C$ и переменную $X = U_C - \varepsilon/\alpha R_2 C$, (160) можно привести к виду простейшего обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (155). Решение (160) представим в виде $X = X_0 \exp(-\alpha t)$ или

$$U_C - \frac{\varepsilon}{\alpha R_2 C} = \left(U_C(0) - \frac{\varepsilon}{\alpha R_2 C} \right) e^{-\alpha t}. \quad (161)$$

Так как $U_C(0) = 0$, (161) принимает вид

$$U_C = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (162)$$

а заряд на обкладках конденсатора равен

$$q = CU_C = \frac{\varepsilon R_1 C}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (163)$$

Итак, (162) и (163) – искомые зависимости от времени.

Составим программу расчета.

```

01 #Релаксация тока в R1R2C-цепи
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 C=0.47e-6; R1=1.0; R2=1.0; E=1.5; t1=1.e-6;
05 alpha=(R1+R2)/(R1*R2*C); tau=1./alpha;
06 U1=E*R1*(1.-mt.exp(-alpha*t1))/(R1+R2);
07 q1=E*R1*C*(1.-mt.exp(-alpha*t1))/(R1+R2);

```

```

08 print('U1=',U1,'\\nq1=',q1,'\\ntau=',tau,'\\nt1/tau=',t1/tau)
09 NT=500; tmin=0; tmax=5.*tau; dt=(tmax-tmin)/NT;
10 t=[]; U=[]; q=[];
11 t.append(tmin/tau); U.append(0.); q.append(0.);
12 for i in range(1,NT):
13     tt=tmin+i*dt; t.append(tt/tau);
14     U.append(E*R1*(1.-mt.exp(-alpha*tt))/(R1+R2));
15     q.append(E*R1*C*(1.-mt.exp(-alpha*tt))/(R1+R2));
16 plt.subplot(1,2,1)
17 plt.plot(t,U,'k-',linewidth=2.0)
18 plt.grid(True)
19 plt.xlabel('$t/\\tau$',fontsize=16)
20 plt.ylabel('$U_C$',fontsize=16)
21 plt.subplot(1,2,2)
22 plt.plot(t,q,'k-',linewidth=2.0)
23 plt.grid(True)
24 plt.xlabel('$t/\\tau$',fontsize=16)
25 plt.ylabel('$q$',fontsize=16)
26 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math**; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости U_C и q от t/τ ; 04 – определение исходных данных; 05 – вычисление τ (tau) – времени релаксации и параметра α (alpha); 06 – вычисление напряжения на конденсаторе U_C (U1) в момент времени t_1 ; 07 – вычисление заряда q (q1) в момент времени t_1 ; 08 – вывод результата расчета $U_1, q_1, \tau, t_1/\tau$; 09 – определение временной сетки на отрезке $[0, 5\tau]$; 10 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{t/\tau\}_n, \{U_C\}_n, \{q\}_n$; 11 – запись начальных значений $t_0/\tau, U_C(0), q(0)$; 12–15 – расчет массивов $\{t/\tau\}_n, \{U_C\}_n, \{q\}_n$; 16–26 – вывод графиков $U_C(t/\tau), q(t/\tau)$.

Приведем результаты расчета:

```

>>>
U1= 0.7393585786811142
q1= 3.474985319801237e-07
tau= 2.35e-07
t1/tau= 4.25531914893617
>>>

```

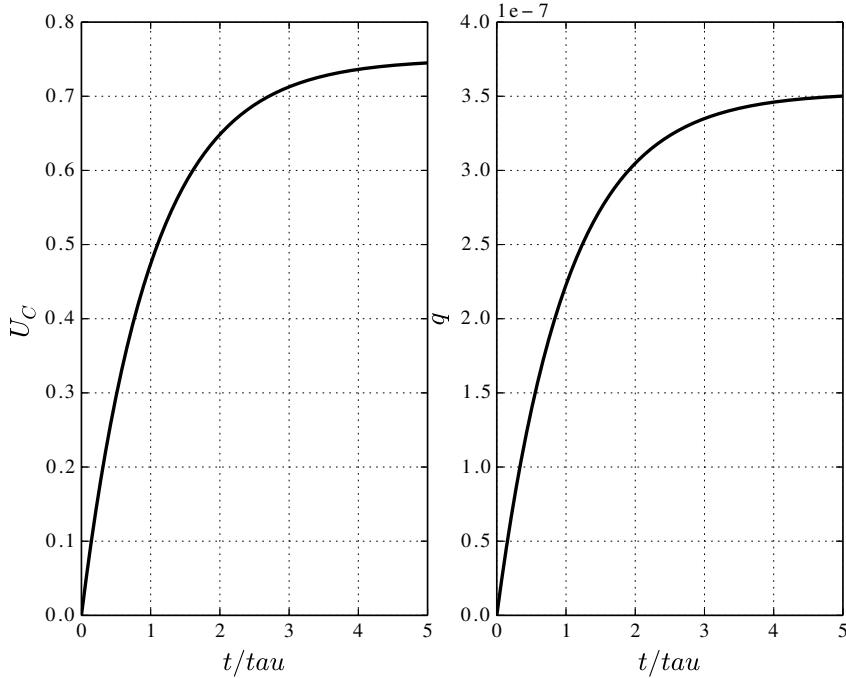


Рис. 46. Увеличение заряда q (Кл) на конденсаторе (правая панель) и увеличение напряжения U_C (В) на конденсаторе (левая панель) с течением времени. Время релаксации $\tau = 0.235$ мкс, $t_1/\tau \approx 4.26$

Ответ: $U_C(t_1) \approx 0.74$ В, $q(t_1) \approx 0.35$ мКА.

Пример 4.8. Сопротивление $R = 5.0$ Ом, катушка индуктивности $L = 0.25$ мГн и генератор напряжения ε соединены последовательно. Определить напряжение на сопротивлении в момент $t_1 = 1.0$ мкс, если генератор включили в момент времени $t = 0$, установившееся напряжение генератора $\varepsilon = 12.0$ В.

Решение

Работу генератора напряжения можно моделировать функцией

Хевисайда: $\varepsilon(t) = \varepsilon\theta(t)$, где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (164)$$

Составим уравнение по второму правилу Кирхгофа

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = U_R. \quad (165)$$

В последовательной цепи $I_L = I_R \equiv I$, с учетом (149), запишем (165) в виде

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + RI$$

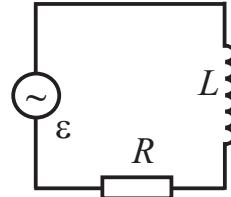


Рис. 47. RL-цепь

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \left(I - \frac{\varepsilon}{R} \right) = 0. \quad (166)$$

Ведем параметр $\alpha = R/L$ и переменную $X = I - \varepsilon/R$, тогда (166) представимо в виде простейшего обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (155). Решение (166) представим в виде $X = X_0 \exp(-\alpha t)$ или

$$I - \frac{\varepsilon}{R} = \left(I(0) - \frac{\varepsilon}{R} \right) e^{-\alpha t}. \quad (167)$$

Так $I(0) = 0$, то (167) принимает вид

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (168)$$

и напряжение на сопротивлении равно

$$U_R = \varepsilon (1 - e^{-\alpha t}). \quad (169)$$

Поведение тока I и напряжения U_R описывается аналогично (162), детально рассмотренных выше, поэтому проведем расчет U_R и I для момента времени t_1 .

Составим программу расчета.

01 #Релаксация тока в RL-цепи

02 import math as mt

```

03 L=0.25e-3; R=5.0;E=12; t1=1.e-6;
04 alpha=R/L; tau=1./alpha;
05 I1=E*(1.-mt.exp(-alpha*t1))/R;
06 U1=E*(1.-mt.exp(-alpha*t1));
07 print('U1=',U1,'nI1=',I1,'ntau=',tau,'nt1/tau=',t1/tau)

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math**; 03 – определение исходных данных; 04 – вычисление τ (tau) – времени релаксации и параметра α (alpha); 05 – вычисление тока I (I1) в момент времени t_1 ; 06 – вычисление напряжения U_R (U1) в момент времени t_1 ; 07 – вывод результата расчета U1, I1, tau, t1/tau.

Приведем результаты расчета

```

>>>
U1= 0.23761592031893697
I1= 0.047523184063787395
tau= 5e-05
t1/tau= 0.019999999999999997
>>>

```

Ответ: $U_R(t_1) \approx 0.24$ В, $I(t_1) \approx 0.048$ А.

Пример 4.9. Катушка с индуктивностью $L = 2$ мГн и сопротивлением $R_0 = 1$ Ом подключена к источнику постоянного тока с ЭДС $\varepsilon = 1.5$ В (рис. 48). Параллельно катушке подключено сопротивление $R = 3$ Ом. После того как ток в катушке достигает установившегося значения, источник тока отключается выключателем К. Найти временную зависимость ЭДС в цепи и количество теплоты Q , выделившееся в сопротивлении R после разрыва цепи. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов можно пренебречь.

Решение

В установившемся режиме, согласно первому правилу Кирхгофа (72), суммарный ток равен

$$I = I_{R0} + I_{L0}, \quad (170)$$

где $I_{R0} = \varepsilon/R$, $I_{L0} = \varepsilon/R_0$ – постоянные токи. Сразу после выключения источника тока ($I = 0$) в цепи возникает ЭДС самоиндукции

ε_s и в контуре начинает течь экстрапоток, для определения которого используем второе правило Кирхгофа (73)

$$-L \frac{d}{dt} I_L = I_L R_0 - I_R R. \quad (171)$$

Так как суммарный ток равен нулю, из (170) получаем $I_L = I_R$ и (171) можно представить в виде (151)

$$\frac{d}{dt} I_L = -\frac{R_0 + R}{L} I_L, \quad (172)$$

решение которого имеет вид

$$I_L = I_{L0} e^{-\alpha t}, \quad (173)$$

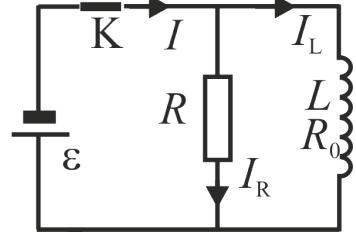


Рис. 48. RL-цепь

где $\alpha = (R_0 + R)/L \equiv 1/\tau$, τ – время релаксации тока. Найдем ЭДС самоиндукции по (143), т.е.

$$\varepsilon_s = -L \frac{d}{dt} I_L = \alpha L I_{L0} e^{-\alpha t}$$

и окончательно

$$\varepsilon_s = \varepsilon \left(1 + \frac{R}{R_0}\right) e^{-\frac{R_0 + R}{L} t}. \quad (174)$$

Согласно закону Джоуля–Ленца (70) количество теплоты dQ , выделившееся на резисторе R за промежуток времени dt , равно $dQ = RI_R^2 dt$ или, учитывая, что $I_L = I_R$, получаем с учетом (173)

$$dQ = R \left(\frac{\varepsilon}{R_0}\right)^2 e^{-2\alpha t} dt. \quad (175)$$

Интегрируя (175) по времени, получаем

$$Q = \int_0^\infty R \left(\frac{\varepsilon}{R_0}\right)^2 e^{-2\alpha t} dt = R \left(\frac{\varepsilon}{R_0}\right)^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt$$

и окончательно – расчетную формулу

$$Q = \left(\frac{\varepsilon}{R_0}\right)^2 \frac{RL}{2(R_0 + R)}. \quad (176)$$

Составим программу расчета.

```

01 #Экстраток в RL-цепи
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 L=2.0e-3; R0=1.0; R=3.0; E=1.5;
05 alpha=(R0+R)/L; tau=1./alpha;
06 Es0=E*(1.+R/R0);
07 Q=(E/R0)**2*R*L/2./(R0+R);
08 print('Es0=',Es0,' \n Q=',Q,' \ntau=',tau)
09 NT=500; tmin=0.; tmax=3.*tau; dt=(tmax-tmin)/NT;
10 t=[]; Es=[]; Qs=[];
11 t.append(tmin/tau); Es.append(E); Qs.append(0.);
12 for i in range(1,NT):
13     tt=tmin+i*dt; t.append(tt/tau);
14     Es.append(Es0*mt.exp(-alpha*tt)/E);
15     Qs.append((E/R0)**2*R*mt.exp(-2.*alpha*tt));
16 plt.subplot(1,2,1)
17 plt.plot(t,Es,'k-',linewidth=2.0)
18 plt.grid(True)
19 plt.xlabel('$t/\tau$', fontsize=16)
20 plt.ylabel('$E_s/E$', fontsize=16)
21 plt.subplot(1,2,2)
22 plt.plot(t,Qs,'k-',linewidth=2.0)
23 plt.grid(True)
24 plt.xlabel('$t/\tau$', fontsize=16)
25 plt.ylabel('$Q$, Дж$', fontsize=16)
26 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math**; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости ЭДС $\varepsilon_s/\varepsilon$ и мощности теплоты $P = dQ/dt$ от t/τ ; 04 – определение исходных данных; 05 – вычисление коэффициента затухания α (alpha) и времени релаксации τ (tau); 06 – вычисление ЭДС самоиндукции в момент времени $t = 0$; 07 – вычисление суммарной теплоты Q , выделившейся на R ; 08 – вывод $\varepsilon_s(0)$, Q , τ ; 09 – определение параметров расчетной временной сетки на отрезке $[0, 3\tau]$; 10 – инициализация одномерных массивов (списков) $\{t/\tau\}_n$, $\{\varepsilon_s/\varepsilon\}_n$, $\{dQ/dt\}_n$; 11 – запись начальных значений t_0/τ , $\varepsilon_s(0)/\varepsilon$, $P(0)$; 12–15 – расчет массивов $\{t/\tau\}_n$, $\{\varepsilon_s/\varepsilon\}_n$, $\{P\}_n$; 16–26 – вывод графиков

$\varepsilon_s(t/\tau)/\varepsilon$, $P(t/\tau)$.

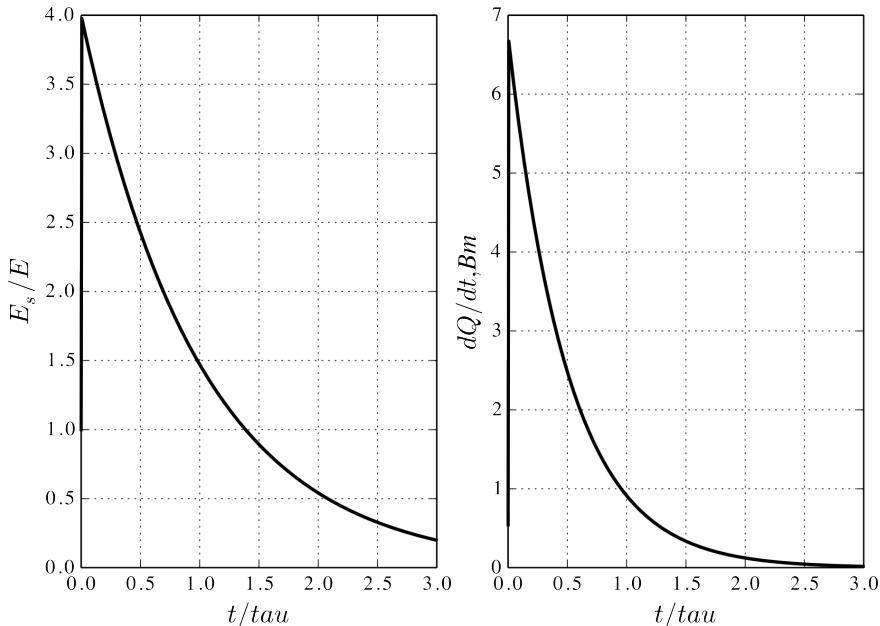


Рис. 49. ЭДС самоиндукции после разрыва цепи (левая панель), мощность теплоты выделившаяся на резисторе (правая панель), время релаксации $\tau = 0.5$ мс

Приведем результат расчета

```
>>>
Es0= 6.0
Q= 0.0016875
tau= 0.0005
>>>
```

Как показано на рис. 49, ЭДС самоиндукции и, соответственно, экстраток в цепи в 4 раза больше своих постоянных значений.

Ответ: $\varepsilon_s = 6$ В, $Q \approx 1.7$ мДж.

Пример 4.10. Конденсатор емкости $C = 0.47$ мкФ заряжается от источника постоянного ЭДС $\varepsilon = 12.0$ В через индуктивность $L = 2.5$ мкГн и сопротивление R , причем $R^2 = 4L/C$. Определить, как изменяются со временем напряжение на конденсаторе U_C и сила тока I . Вычислить U_C и I в момент времени $t_1 = 1.0$ мкс.

Решение

Для последовательного соединения элементов цепи составим, согласно (73), уравнение

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = U_C + U_R. \quad (177)$$

В последовательной цепи $I_C = I_L = I_R \equiv I$, с учетом (150) запишем (177) в виде

$$\varepsilon = U_C + RC \frac{dU_C}{dt} + LC \frac{d^2U_C}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} (U_C - \varepsilon) = 0. \quad (178)$$

Ведем параметр $\beta = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$ и переменную $X = U_C - \varepsilon$, тогда (178) представимо в виде простейшего обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0, \quad (179)$$

решение которого зависит от параметров системы.

Для переходного неколебательного процесса:

- 1) при $\beta = \omega_0$: $X = (A + Bt)e^{-\beta t}$;
- 2) при $\beta > \omega_0$: $X = Ae^{\lambda_1 t} + Ae^{\lambda_2 t}$, $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

В условиях нашей задачи реализуется первый случай: начальное условие $U_C(0) = 0$, $X(0) = -\varepsilon$, $I(0) = 0$, $dX/dt = dU_C/dt = 0$. Постоянные интегрирования найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} -\varepsilon = A, \\ 0 = -\beta A + B, \end{cases}$$

$A = -\varepsilon$, $B = -\beta\varepsilon$. В итоге решение системы (179) таково

$$U_C = \varepsilon(1 - (1 + \beta t)e^{-\beta t}), \quad (180)$$

$$I = CdU_C/dt = \varepsilon\beta^2 te^{-\beta t}. \quad (181)$$

Составим программу расчета.

```

01 #Релаксация тока в RLC-цепи
02 import math as mt
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 C=0.47e-6; L=2.5e-6; E=12.0; t1=1.e-6;
05 R=mt.sqrt(4.*L/C);
06 print(' R=',R)
07 beta=R/(2.*L); tau=1/beta;
08 U1=E*(1.-(1+beta*t1)*mt.exp(-beta*t1));
09 I1=E*C*beta*beta*t1*mt.exp(-beta*t1);
10 print('U1=',U1,'\\nI1=',I1,'\\ntau=',tau,'\\nt1/tau=',t1/tau)
11 NT=500; tmin=0; tmax=5.*tau; dt=(tmax-tmin)/NT;
12 t=[]; U=[]; I=[];
13 t.append(tmin/tau);U.append(0);I.append(0);
14 for i in range(1,NT):
15     tt=tmin+i*dt; t.append(tt/tau);
16     U.append(E*(1.-(1+beta*tt)*mt.exp(-beta*tt)));
17     I.append(E*C*beta*beta*tt*mt.exp(-beta*tt));
18 plt.subplot(1,2,1)
19 plt.plot(t,U,'k-',linewidth=2.0)
20 plt.grid(True)
21 plt.xlabel('$t/\\tau$',fontsize=16)
22 plt.ylabel('$U_C$',fontsize=16)
23 plt.subplot(1,2,2)
24 plt.plot(t,I,'k-',linewidth=2.0)
25 plt.grid(True)
26 plt.xlabel('$t/\\tau$',fontsize=16)
27 plt.ylabel('$I$',fontsize=16)
28 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета **math**; 03 – подключение пакета **matplotlib.pyplot** для графического вывода зависимости U_C и I от t/τ ; 04 – определение исходных данных; 05 – вычисление значения критического сопротивления R (R); 06 – вывод результата расчета R ; 07 – вычисление параметра β (beta) и τ (tau) – времени релаксации; 08 – вычисление напряжения на конденсаторе U_C (U1) в момент времени t_1 ; 09 – вычисление тока I (I1) в момент времени t_1 ; 10 – вывод результата расчета U1 , I1 , tau , $t1/\text{tau}$; 11 – определение временной сетки на отрезке $[0, 5\tau]$; 12 – инициализация

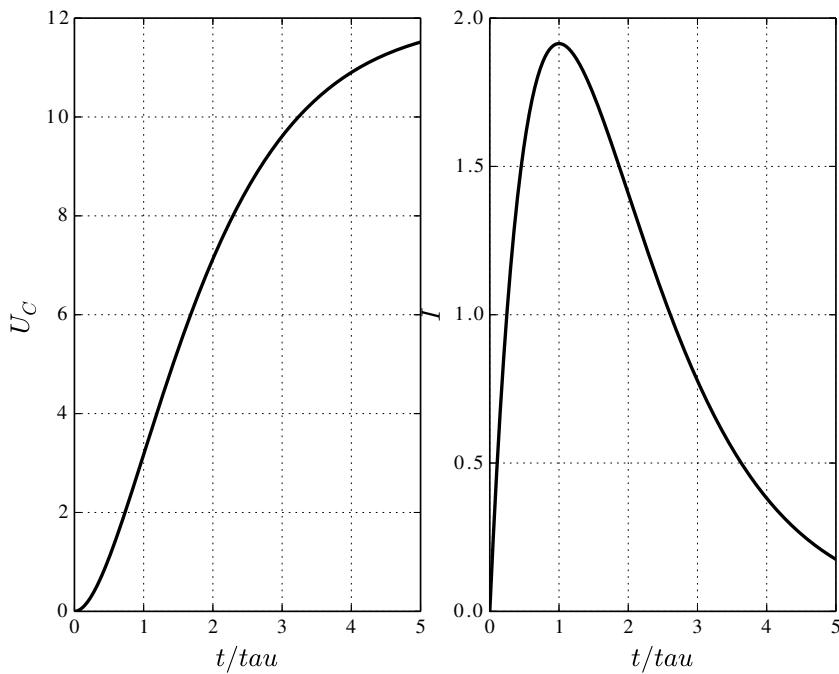


Рис. 50. Увеличение напряжения U_C (В) на конденсаторе (левая панель) и изменение тока I (А) в цепи (правая панель) с течением времени. Критическое значение сопротивления для апериодического изменения напряжения и тока в контуре $R = 4.613$ Ом, время релаксации $\tau = 1.08$ мкс, $t_1/\tau \approx 0.923$

одномерных массивов (списков) $\{t/\tau\}_n, \{U_C\}_n, \{I\}_n$; 13 – запись начальных значений $t_0/\tau, U_C(0), I(0)$; 14–17 – расчет массивов $\{t/\tau\}_n, \{U_C\}_n, \{I\}_n$; 18–28 – вывод графиков $U_C(t/\tau), I(t/\tau)$.

Приведем результаты расчета:

```
>>>
R= 4.612656040144426
U1= 2.829258935006859
I1= 1.9080555939366275
tau= 1.08397416943394e-06
t1/tau= 0.922531208028885
```

>>>

Примечание. Как следует из графика (правая панель рис. 50), максимальное значение тока наступает в момент времени $t_m = \tau$. Приравняем нулю производную тока по времени $dI/dt = 0$, тогда из (181) найдем $\varepsilon\beta^2e^{-\beta t} - \varepsilon\beta^3te^{-\beta t} = \varepsilon\beta^2(1 - \beta t)e^{-\beta t} = 0$, отсюда $1 - \beta t_m = 0$ и $t_m = 1/\beta$.

Ответ: $U_C(t_1) \approx 2.83$ В, $I(t_1) \approx 1.91$ А.

Задания для самостоятельной работы

4.7. Заряженный до напряжения $U_C = 12$ В конденсатор емкостью $C = 0.47$ мкФ соединен последовательно с сопротивлением $R = 2.0$ Ом, как показано на рис. 51, а. Определить U_C и I в момент времени $t_1 = 1.0$ мкс после подключения.

4.8. Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе после замыкания в нулевой момент времени ключа К (рис. 51, б). Сопротивления $R_1 = R_2 = 1$ Ом, емкость конденсатора $C = 0.47$ мкФ, ЭДС источника напряжения $\varepsilon = 1.5$ В. Найти силу тока в моменты времени $t_1 = 1.0$ мкс, $t_2 = 2.0$ мкс.

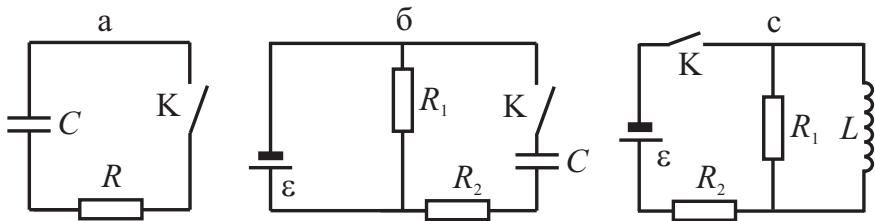


Рис. 51. RC-цепь и RL-цепь

4.9. Катушка с индуктивностью $L = 0.250$ Гн и сопротивлением $R = 0.300$ Ом подключается к источнику постоянного напряжения. Через какой промежуток времени сила тока в катушке достигнет: а) 50%, б) 75 % установившегося значения? Сопоставьте оба значения промежутка времени.

4.10. Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии $R = 10$ Ом, подключается через дроссель к 12-вольтовому аккумулятору. Индуктивность дросселя $L = 2.0$ Гн, сопротивление $r = 1.0$ Ом. Через какое время t после включения лампочка загорится, если она начинает заметно светиться при напряжении на ней $U = 6.0$ В?

4.11. Найти временную зависимость тока, текущего через индуктивность после замыкания ключа К в начальный момент времени (рис. 51, с). Принять, что $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $L = 0.25 \text{ мГн}$, $\varepsilon = 12 \text{ В}$. Найти силу тока в моменты времени $t_1 = 1.0 \text{ мкс}$, $t_2 = 2.0 \text{ мкс}$.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. Математические формулы

Векторная алгебра

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}. \quad (182)$$

1. Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (183)$$

2. Векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \quad (184)$$

3. Смешанное произведение векторов

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (185)$$

5. Двойное векторное произведение векторов

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}). \quad (186)$$

Векторный анализ

Оператор «набла»

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (187)$$

Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (188)$$

1. Градиент скалярной функции

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (189)$$

2. Дивергенция векторного поля

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \equiv \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (190)$$

3. Ротор вектора векторного поля

$$\nabla \times \mathbf{a} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \quad (191)$$

Линейная алгебра

1. Обратная матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (192)$$

Вычислительная математика

1. Интерполяция Лагранжа

$$y(x) = \sum_{i=0}^N y_i \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (193)$$

а) Линейная интерполяция на интервале $[x_n, x_{n+1}]$

$$y(x) = y_n \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} + y_{n+1} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \quad (194)$$

или

$$y(x) = y_n + \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} (x - x_n). \quad (195)$$

б) Квадратичная интерполяция на интервале $[x_n, x_{n+2}]$

$$\begin{aligned} y(x) = & y_n \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} \frac{x - x_{n+2}}{x_n - x_{n+2}} + \\ & + y_{n+1} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \frac{x - x_{n+2}}{x_{n+1} - x_{n+2}} + y_{n+2} \frac{x - x_n}{x_{n+2} - x_n} \frac{x - x_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}}. \end{aligned} \quad (196)$$

2. Приближенное вычисление интегралов

Определенный интеграл I можно приближенно представить в виде конечной суммы

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{n=0}^N w_n f(x_n). \quad (197)$$

Правая часть (197) называется «механической» квадратурой w_n и x_n – вес и узел квадратуры¹⁴.

1. Составная формула (правых) прямоугольников

$$I_N = \sum_{n=1}^N \Delta x f_n. \quad (198)$$

2. Составная формула трапеций

$$I_N = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta x}{2} (f_n + f_{n+1}) = \frac{\Delta x}{2} (f_0 + f_N) + \sum_{n=0}^N \Delta x (f_n + f_{n+1}). \quad (199)$$

3. Составная формула Симпсона

$$I_N = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta x}{3} (f_{2n} + 4f_{2n+1} + f_{2n+2}). \quad (200)$$

Формулы для погрешности $\varepsilon \equiv |I - I_N|$ квадратурных формул приведены в учебниках по численному анализу (например, [6, 15]). В практических вычислениях, как правило, используют процедуру повторного расчета с удвоенным количеством узлов сетки: если для некоторого N и заданного ε выполняется условие

$$|I_{2N} - I_N| < \varepsilon,$$

то считается, что требуемая точность достигнута.

Среднее значение случайной величины y

Среднее значение случайной величины $y(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ равно

$$\langle y \rangle = \int_a^b y(x)dW(x) = \int_a^b y(x)w(x)dx, \quad (201)$$

¹⁴ Множество ω_N называется сеткой, где $\omega_N = \{x_n | x_n = a + i\Delta x, i = 0, 1, \dots, N, \Delta x = (b - a)/N\}$, x_n – узел сетки, а $f_n \equiv f(x_n)$ – сеточная функция или таблица.

где $dW(x) = w(x)dx$ – вероятность случайной величины x находиться в интервале от x до $x + dx$, а $w(x)$ – плотность распределения случайной величины x , для которой выполняется условие

$$\int_a^b w(x)dx = 1. \quad (202)$$

Если величина x распределена на отрезке $[a, b]$ равномерно, то $w(x) = 1/(b - a)$ и

$$\langle y \rangle = \frac{1}{b - a} \int_a^b y(x)dx. \quad (203)$$

5.2. Алгоритм построения силовой линии поля

Построим силовые линии векторного электростатического поля основываясь на определении силовой линии, как линии, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением вектора напряженности поля \mathbf{E} , т.е.

$$\frac{dx}{dr} = \frac{E_x}{E}, \quad \frac{dy}{dr} = \frac{E_y}{E}, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{E_z}{E}, \quad (204)$$

где $dr = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ и $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$. Если силовая линия лежит в плоскости, то

$$\frac{dx}{dr} = \frac{E_x}{E}, \quad \frac{dy}{dr} = \frac{E_y}{E}, \quad (205)$$

где $dr = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ и $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$.

Алгоритм

1. Задание распределения точечных зарядов.
 - 1.1. Электрические заряды $q_n, n = 1, 2, \dots, N_q$.
 - 1.2. Координаты зарядов X_n, Y_n, Z_n , где $n = 1, 2, \dots, N_q$.
2. Задается Δr фиксированной длины шага.
3. Задается начальная точка x_0, y_0, z_0 силовой линии.
4. Задается условие окончания счета.
 - 4.1. Предельное число шагов N .
 - 4.2. Условие $A()$ окончания счета.

5. Инициализация.

5.1. Инициализация счетчика цикла $i = 0$.

5.2. Инициализация элементов массива: $x = x_0, y = y_0, z = z_0$.

5.3. Запись начальных значений элементов x, y, z в массив $\{x, y, z\}$.

6. *while* $i \leq N$

6.1. $E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z)$.

6.1.1. $E_x(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N_q} E_x(x - X_n, y - Y_n, z - Z_n)$.

6.1.2. $E_y(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N_q} E_y(x - X_n, y - Y_n, z - Z_n)$.

6.1.3. $E_z(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N_q} E_z(x - X_n, y - Y_n, z - Z_n)$.

6.1.4. $E(x, y, z) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$.

6.2. $\Delta x = \Delta r E_x/E, \Delta y = \Delta r E_y/E, \Delta z = \Delta r E_z/E$.

6.3. $x = x + \Delta x, y = y + \Delta y, z = z + \Delta z$.

6.4. Запись текущих значений элементов x, y, z в массив $\{x, y, z\}$.

6.5. if A(x,y,z)==”true” then goto 7

6.6. $i = i + 1$

6.7. end {while}

7. Процедура построения графика $\{x_n, y_n, z_n\}_{n=1}^N$.

Комментарии. $E_x \equiv E_x(x, y, z), E_y \equiv E_y(x, y, z), E_z \equiv E_z(x, y, z)$, $E \equiv E(x, y, z)$. Данный алгоритм можно с небольшими изменениями использовать для построения силовых линий произвольных векторных полей.

5.3. Размерности электрических и магнитных величин

Таблица 4. Единицы электрических и магнитных величин [19]

Наименование	Размерность	Обозначение
Электрический заряд	TI	Кл
Напряженность поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	В/м
Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	Кл/м ³
Электрический потенциал	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	В
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	Ф
Электрический момент диполя	LTI	Кл·м
Поляризованность	$L^{-2}TI$	Кл/м ²
Диэлектрическая проницаемость	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	Ф/м
Сила тока	I	А
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	А/м ²
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ом
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	См
Удельное сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	Ом·м
Удельная проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	См/ъ
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	Вб
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	Тл
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	А/м
Магнитный момент диполя	L^2I	А·м ²
Индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	Гн
Намагниченность	$L^{-1}I$	А/м
Магнитная проницаемость	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	Гн

6. ОТВЕТЫ

1.1. $q_0 = 44.9$ нКл. **1.2.** 1) $E(0.1) = 10.6$ кВ/м; $E(0) = 0$ кВ/м.
1.3. $E_1 = 28.3$ кВ/м, $E_2 = 8.94$ кВ/м. **1.4.** $r = 0.5$ м, $q = 27$ мкКл.
1.5. $A = 0.11$ мДж. **1.6.** $E_1 = 22.8$ В/м, $E_2 = -12.6$ В/м. **1.7.** $E = 2.8$ кВ/м. **1.8.** $E_1 = 182$ В/м, $E_2 = 180$ В/м. **1.9.** $P = 38$ мкКл/м².
1.10. $\alpha = 2.24 \cdot 10^{-29}$ м³. **1.11.** $\alpha = 1.87 \cdot 10^{-30}$ м³, $\varepsilon = 1.00005$.
1.12. $\chi = 6$, $\sigma = 47.7$ мкКл/м². **1.13.** 1) $E = 50$ В/м, $D = 0.885$ нКл/м²; 2) $P = 0.44$ нКл/м²; 3) $\sigma = 0.44$ нКл/м². **1.14.** $\Delta\varphi = 169$ В. **1.15.** $\varphi = 431$ В. **1.16.** $\varphi = 380$ В. **1.17.** $\Delta\varphi = 45.2$ В. **1.18.** $q = 36$ мкКл. **1.19.** $Q = 0.209$ Дж. **1.20.** $Q = 3.0 \cdot 10^{-5}$ Дж.

2.1. $\Delta R = 0.018$ Ом. **2.2.** $U = 7.5$ В, $Ir = 0.125$ В. **2.3.** а) $\delta U = 0.09$, б) $\delta U = 0.5$, в) $\delta U = 0.91$. **2.4.** $U_V = 2$ В. **2.5.** $l = 11.6$ м.
2.6. $P = 2.4$ кВт, $P = 2.3$ кВт, $\eta = 0.96$. **2.7.** $\eta = 0.4$, $R = 297$ Ом.
2.8. $I_A = 0.45$ мА.

3.1. $B = 4$ мкТл. **3.2.** а) $B = 6.28$ мкТл. б) $B = 2.22$ мкТл.
3.3. $B = 5.4$ мкТл. **3.4.** $\alpha = \pi/6$. **3.5.** $F = 6.4 \cdot 10^{-14}$ Н. **3.6.** $C = 6.28$ мкТл·м. **3.7.** $B_1 = 0$, $B_2 = 0.2$ мкТл. **3.8.** $\Phi = 50$ мкВб. **3.9.** $F = 1$ кН/м. **3.10.** $F = 0.125$ кН/м. **3.11.** $p_m = 0.05$ А·м². **3.12.** $p_m = 3.14$ А·м², $p_m/L = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл/кг. **3.13.** $M = 39.5$ мкН·м. **3.14.** $I = 0.055$ А. **3.15.** $B = 1.4$ Тл, $\mu = 700$. **3.16.** $I = 4.8$ А.

4.1. $U = 0.2$ В. **4.2.** $P = 79$ Вт. **4.3.** $q = 0.01$ Кл. **4.4.** $\varepsilon_s = 1$ мВ. **4.5.** $N = 900$. **4.6.** $L_{21} = 0.02$ Гн. **4.7.** $U_C(t_1) = 4.14$ В, $I(t_1) = 2.07$ А, $U_C(t_2) = 1.43$ В, $I(t_2) = 0.72$ А. **4.8.** $I(t_1) = 1.68$ А, $I(t_2) = 1.52$ А. **4.9.** $t_1 = 0.58$ с, $t_2 = 1.16$ с. **4.10.** $t = 145$ мс.
4.11. $I = \varepsilon(1 - \exp(-\alpha t))/R_2$, где $\alpha = R_1 R_2 / L(R_1 + R_2)$, $I_1 = 0.016$ А, $I_2 = 0.032$ А.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Наука, 1997. – 320 с.
- [2] Лутц М. Программирование на Python. 4-е изд. Том 1. – СПб.: Символ-Плюс, 2011.
- [3] Лутц М. Программирование на Python. 4-е изд. Том 2. – СПб.: Символ-Плюс, 2011.
- [4] Сузи Р. Язык программирования Python. – М.: Бином, 2007.
- [5] Васильев А.Н. Python на примерах. –СПб.: Наука иТехника, 2016. – 432 с.
- [6] Вабишевич П.Н. Численные методы. Вычислительный практикум. Изд. 2-е. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 320 с.
- [7] Савельев И.В. Курс общей физики. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М.: Наука, 1988. – 496 с.
- [8] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 3. Электричество. – М.: Наука, 1983. -688 с.
- [9] Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – СПб: Лань, 2003. – 464 с.
- [10] Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. Изд. 5-е. – М. Высшая школа, 1988.
- [11] Иродов И.Е. Задачи по общей физике. 5-е изд. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 432 с.
- [12] Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – СПб: Лань, 2005. – 288 с.
- [13] Киселев Д.Ф., Жукарев А.С., Иванов С.А., Киров С.А., Лукашева Е.В. Электричество и магнетизм. Методика решения задач. – М.: МГУ, 2010. – 332 с.

- [14] Практикум по решению физических задач с применением компьютера. Молекулярная физика и термодинамика / Штыгашев А.А. Новосибирск: НГТУ, 2016. – 64 с.
- [15] Калиткин Н.Н. Численные методы. 2-е изд.– СПб: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
- [16] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
- [17] Математический энциклопедический словарь/Под ред. Ю.В.Прохорова. – М.: Сов. Энциклопедия, 1988. – 847 с.
- [18] Физические величины: Справочник / Под ред. И.С.Григорьева, Е.З.Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
- [19] Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности: Учебно-справочное руководство. - 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

Штыгашев Александр Анатольевич

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА КОМПЬЮТЕРЕ.
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

Учебное пособие

Выпускающий редактор: *И.П. Брованова*

Корректор: *И.Е. Семенова*

Дизайн обложки: *А.В. Ладыжская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 25.12.2017. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 8,6 Печ. л. 9,25. Изд. №357. Заказ № 231. Цена договорная.
