ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна — 2010

**Тезисы докладов**

Воронеж 2010

УДК 517.5 517.9

*Напечатано по решению Ученого совета математического факультета*

*Издано при поддержке гранта РФФИ № 10-01-06000-г*

**Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2010. Тезисы докладов. Воронеж: ВорГУ, 2010 - 175 с.**



В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, содержащих новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и др. разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

# О свойствах уравнений Навье-Стокса

*А.Ш. Акыш*
(Алматы, Институт математики МОН РК; Akysh41@mail.ru )

Современное состояние математической теории уравнений Навье-Стокса (УНС) содержится, например, в [1], [2] и др. В ряде работ автора [3]-[5] и др. из системы УНС выведено нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энергии и выявлено важное свойство этого уравнения – принцип максимума. С помощью последнего доказана справедливость принципа максимума и для УНС, что с математической точки зрения является ключевым.

Рассматривается начально-краевая задача для УНС [1] относительно вектора скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления $P$ в области $Q = (0, T] \times \Omega$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \tag{1b}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{1c}$$

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x})\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{1d}$$

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset R_3$; $\Omega$ – выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega$ – граница области $\Omega$, $t \in [0, T]$, $T < \infty$; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ – вектор-функции соответственно внешних сил и начальных данных; $0 < \mu$ – динамический коэффициент вязкости; $\Delta$ и $\nabla$ – операторы Лапласа и Гамильтона соответственно.

Пусть $\mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$ – пространство соленоидальных векторов, а $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\nabla\eta$, где $\eta$ есть однозначная в $\Omega$ функция. Известно [1], ортогональное разложение $\mathbf{L}_2(Q) = \mathbf{G}(Q) \oplus \mathring{\mathbf{J}}(Q)$, причем элементы $\mathring{\mathbf{J}}(Q)$ при $\forall t$ принадлежат $\mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$, а элементы $\mathbf{G}(Q)$ – подпространству $\mathbf{G}(\Omega)$; $W^k_{2,0}(\Omega)$ – соболевское пространство функций равных нулю на $\partial\Omega$; Входные данные $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ задачи (1) удовлетворяют следующим требованиям:

$$\textbf{a)}\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q); \quad \textbf{b)}\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}(\Omega).$$

Из задачи (1) получена задача Неймана для уравнения Пуассона относительно давления $P$ с однородным граничным условием, которая объединено с задачей (1) в одну, последующим исключением уравнение неразрывности (1b). Тем не менее, вектор решение $\mathbf{U} \in \mathring{\mathbf{J}}(Q)$, когда входные данные $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ удовлетворяют требованиям **a**) и **b**). В итоге получена *полная постановка начально-краевой задачи для УНС,* которая имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{2a}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{x})\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2b}$$

$$-\Delta P = \operatorname{div}\big((\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U}\big), \tag{2c}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2d}$$

**Принцип максимума.** Из системы уравнений (2a) при $\mathbf{f} = 0$, воспользовавшись формулой

$$\Delta E = \sum_{\alpha=1}^{3} U_\alpha \Delta U_\alpha + |\nabla U_\alpha|^2,$$

получаем нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энергии (к. э.) $E = \frac{1}{2}\big(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2\big)$:

$$\mathbb{L}E \equiv \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \Delta E + \mu \sum_{\alpha=1}^{3} |\nabla U_\alpha|^2 + (\nabla E, \mathbf{U}) + (\nabla P, \mathbf{U}) = 0, \tag{3}$$

где $(\cdot\,, \cdot)$-обозначает скалярное произведение векторов.

**Теорема 1**[4]. *Пусть $\bar{\Omega}-$замкнутая ограниченная область в $R_3$ с границей $\partial\Omega$, и $\bar{Q} = [0, T] \times \bar{\Omega}$ - цилиндрическая область в пространстве переменных $t, \mathbf{x}$. Предположим, что функции $(P, E) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (2c), (3). Тогда функция $E(t, \mathbf{x})$ принимает свой максимум в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0, T] \times \partial\Omega$ , т. е.*

$$E(t, \mathbf{x}) \leq \max\Big\{ \sup_{t=0 \bigwedge \mathbf{x} \in \bar{\Omega}} E(t, \mathbf{x}), \sup_{t \in [0,T] \bigwedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} E(t, \mathbf{x}) \Big\} = C - const.$$

**Лемма**[5]. *Пусть плотность к. э. $E(t, \mathbf{x})$ имеет в некоторой точке $M_1 \in Q$ локальный максимум, тогда $M_1$ является стационарной точкой вектора скорости $\mathbf{U}$ и функции давления $P$, т. е.*

$$\nabla U_\alpha(M_1) = 0,\ \alpha = \overline{1, 3}; \quad \nabla P(M_1) = 0$$

*и $\mathbf{U}$ в точке $M_1$ достигает экстремума. Причем, по крайней мере в точке $M_1$ одна из компонент вектора скорости $\mathbf{U}$ достигает либо положительного максимума, либо отрицательного минимума.*

**Следствие**. *Если вектор-функция $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ - классическое решение начально-краевой задачи УНС (2) и вектор-функций $\mathbf{f}$, $\mathbf{\Phi}$ удовлетворяют условиям* **a)** *и* **b)**, *то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} \leq \|\mathbf{\Phi}\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + T\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} \equiv A_1,\ \forall T < \infty,$$

где $\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} = \max\limits_{1 \leq \alpha \leq 3} \sup\limits_{\bar{Q}} |U_\alpha(t, \mathbf{x})|$.

**Определение 1**. *Назовем слабым обобщенным решением полной начально-краевой задачи для УНС (2) функций $\mathbf{U}$ и $P$ из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathbf{L}_2\big(0, T; \mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)\big) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q);$$

$$P \in L_2\big(0, T; W_2^1(\Omega)\big) \wedge \Big(\int\limits_{\Omega} P \mathbf{dx} = 0,\ \forall t \in [0, T]\Big)$$

*и удовлетворяющие тождествам*

$$\int\limits_Q \Big(-\mathbf{U}\,\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \mu\sum_{k=1}^{3}\nabla U_k \nabla Z_k + \big((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U} + \nabla P\big)\mathbf{Z}\Big)\,\mathbf{dx}\,dt =$$

$$= \int\limits_\Omega \mathbf{\Phi Z}(0,\mathbf{x})\mathbf{dx} + \int\limits_Q \mathbf{fZdx}dt;\ \int\limits_Q \nabla P\,\nabla\eta\,\mathbf{dx}dt = -\int\limits_Q (\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\,\nabla\eta\,\mathbf{dx}\,dt. \quad (4)$$

*при* $\forall \mathbf{Z}(t,\mathbf{x}) \in W_2^1(Q) \wedge \big(\mathbf{Z}\,\Big|_{(t=T)\wedge(\mathbf{x}\in\partial\Omega)} = 0\big);\quad \forall\eta(t,\mathbf{x}) \in L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big).$

Из принципа максимума следует единственность слабых и существование сильных решений задачи (2).

**Теорема 2** [4]. *Если входные данные* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют требованиям* **a**) *и* **b**)*, тогда задача (2) имеет единственное слабое обобщенное решение* $\mathbf{U}$ *и* $P$ *удовлетворяющие тождествам (4) при любых* $\mathbf{Z}$ *и* $\eta$ *из определения 1.*

**Теорема 3**[4]. *Если входные данные задачи (2) удовлетворяют требованиям* **a**)*,* **b**) *и* $\partial\Omega \in C^2$*, тогда у задачи (2) существует единственное сильное обобщенное решение* $\mathbf{U}$ *и* $P$ *из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{W}_{2,0}^{2,1}(Q) \cap \mathring{\mathbf{J}}_\infty(Q);\quad P \in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big) \wedge \Big(\int\limits_\Omega P\mathbf{dx} = 0, \forall t\in[0,T]\Big),$$

*удовлетворяющие уравнениям (2a) и (2c) почти всюду в* $Q$*.*

**Литература**. 1. Ладыженская О. А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование гладкость //УМН, 2003, **58**:2(350),–С.45-78. 2. Ch. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation //http://claymath.org/Millenium Prize Problems/Navier-Stokes Equations. Cambridge, MA:Clay Mathematics Institute, 2000, P.1-5. 3. Акыш А.Ш. Принцип максимума для уравнений Навье-Стокса //Докл. Междунар. конф. по математическим методам в Геофизике ММГ-2008, Новосибирск, 13-15 окт. 2008г./-http://www.sscc.ru /conf/mmg2008 /abstracts,P.1-6. 4. Акыш А. Ш. Об одной проблеме теории уравнений Навье-Стокса //Труды шестого совещании Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям (16-18 марта 2009 г.), Алматы, Казах университетi, 2009, –С.54-61. 5. Акыш А. Ш. Об одной лемме математической теории уравнений Навье-Стокса //Материалы III международной научной конференции "Актуальные проблемы механики и машиностроение"(17-19 июня 2009 г.), Алматы, 2009, Т.3, –С.209-213.

# Об одном интегральном уравнении Вольтерра второго рода

*М.М. Амангалиева, М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов*
(Алматы, Институт математики, Казахстан; muvasharkhan@gmail.com )

Рассматривается интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, имеющее особенность. Так как интегральный оператор имеет особенность, то при определенных значениях спектрального параметра метод последовательных приближений не применим. В работе показано, что в этих случаях задача оказывается нетеровой и имеет положительный индекс. Установлено, что исследуемое в работе интегральное уравнение возникают естественным образом при изучении некоторых нелокальных граничных задач, граничных задач для нагруженных дифференциальных уравнений и т.д.

На вещественной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ рассматриваются вопросы разрешимости следующего интегрального уравнения

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = f(t),\ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

и его сопряженного

$$\mathbf{K}^*_\lambda \nu \equiv (I - \overline{\lambda}\mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda}\int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{t} = g(t),\ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где ядро $k(z)$ определено соотношением

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{4(1-z)}\right\}, & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \leqslant z < +\infty; \end{cases} \tag{3}$$

$$\lambda \in \mathbb{C} - \text{спектральный параметр},\ \ e^{-t}f(t) \in L_1(\mathbb{R}_+),\ \ e^t g(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{4}$$

Решения уравнений (1) и (2) соответственно ищутся в классах:

$$e^{-t}\mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad e^t\nu(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{5}$$

Заметим, что в уравнениях (1) и (2) ядро интегрального оператора $k(z)$ обладает свойством: норма интегрального оператора, определяемого ядром $k(z)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\mathrm{erfc}(1/2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{1/2}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi$. Это свойство определяет особенность рассматриваемого интегрального уравнения (1). Отметим, что необходимость исследования особых интегральных уравнений вида (1) возникает, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2, 3], задач с подвижной границей и обратных задач для параболических уравнений и т.д.

Вначале исследуем соответствующее (1) однородное уравнение

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Применяя к нему преобразование Меллина, с учетом теоремы о свертке, получим

$$\widehat{\mu}(s)\cdot[1-\lambda\widehat{k}(s)] = 0, \ \ s = s_1 + is_2,$$

где $\widehat{\mu}(s)$ — изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right)z^{-s-1}dx, \ \ \mathrm{Re}\, s < 0.$$

Сформулируем установленный результат для спектральной задачи (6).

**Теорема 1.** *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}$ *из (6) множество* $\sigma(\mathbf{K}) \equiv \{\lambda |\, \lambda \in \mathbb{C},\, Re\,\lambda \geq 0\}$ *является множеством характеристических чисел, а* $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{K})$ *— резольвентным множеством.*

Теперь перейдем к исследованию однородного сопряженного интегрального уравнения для уравнения (2):

$$\nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{t} = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Если в уравнении (7) произвести замены: $t = t_1^{-1}$, $\tau = \tau_1^{-1}$ и ввести следующее обозначение $\nu_1(t_1) = t^{-1}\nu(t_1^{-1})$, то (7) преобразуется к виду

$$\nu_1(t_1) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)\nu_1(\tau_1)\frac{d\tau_1}{\tau_1} = 0,$$

т.е. оно совпадает с интегральным уравнением (6), где неизвестной функцией выступает функция $\nu_1(t_1)$. Здесь справедлива следующая

**Теорема 2.** *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}^*$ *из (7) вся комплексная плоскость не содержит собственных значений.*

Полученные результаты применяются к нелокальным граничным задачам для параболического уравнения.

**Литература.** 1. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Туймебаева А.Е. Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. – Алматы: 2006. Препринт № 6. – 40 с. 2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: 1995. – 301 с. 3. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы: 1995. 269 с.

# Точная локальная управляемость течения вязкого газа

*Е.В. Амосова*
(ИПМ ДВО РАН, leb@iam.dvo.ru)

Работа посвящена изучению точной локальной управляемости двумерных уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вязкого газа без учета тепловых процессов.

Наиболее мощным методом доказательства точной локальной управляемости нелинейных параболических уравнений, известным в настоящее время, является метод построения решения с помощью экстремальной задачи и последующего применения карлемановских оценок. Основы этого метода были заложены А.В.Фурсиковым и О.Ю. Эмануиловым в работе [1], где исследована минимальная точная управляемость уравнения Бюргерса и двумерного уравнения Гемгольца.

В ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$ рассматривается двумерная система Навье-Стокса

$$u_t - \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla(\rho^\gamma) = f + g, \tag{1}$$

$$\rho_t + div(u\rho) = 0, \tag{2}$$

где $(t, x) \in Q \equiv (0, T) \times \Omega$, $u = (u_1(t, x), u_2(t, x))$ — скорость газа, $\rho = \rho(t, x)$ — плотность газа, $\gamma \geq 1$,

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t},$$

$g = g(t, x)$ — управление, сосредоточенное в подобласти $\omega \subset \Omega$:

$$g(t, x) \equiv \chi_\omega(x) g(t, x),$$

$$\chi_\omega = \begin{cases} 1, & x \in \omega; \\ 0, & x \notin \omega. \end{cases}$$

Ставятся краевые

$$(u, n) = 0, \quad rot u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где $n = (n_1, n_2)$ — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$. И начальные условия

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \quad \rho(t, x)|_{t=0} = \rho_0(x), \tag{3}$$

где $u_0(x)$ и $\rho_0(x)$ — заданные функции, причем

$$0 < m_0 \leq \rho_0 \leq M_0 < \infty.$$

Рассматриваемая система управляется с помощью распределенного управления, сосредоточенного в некоторой фиксированной подобласти $\omega \subset \Omega$, т.е. случай локального распределенного управления.

Пусть $\widehat{u}, \widehat{\rho} \in V^{1,2}(Q) \times V^{1,1}(Q)$ — заданное решение системы (1)-(3) при $g = 0$, а $u_0(x), \rho_0(x) \in V^2(0,1) \times V^1(0,1)$ — начальное условие, связанное с $\widehat{u}$, $\widehat{\rho}$ соотношениями

$$\|\widehat{u}(0,\cdot) - v_0\|^2_{H^2(0,1)} < \varepsilon, \quad \|\widehat{\rho}(0,\cdot) - \rho_0\|^2_{H^1(0,1)} < \varepsilon. \tag{4}$$

Задача локальной точной управляемости с локальным распределенным управлением состоит в построении управления $g(t,x)$ вида (1) такого, чтобы решение краевой задачи (1)-(3) при $t = T$ удовлетворяло соотношениям:

$$g(t,x)|_{t=T} = \widehat{v}(T,x), \quad \rho(t,x)|_{t=T} = \widehat{\rho}(T,x). \tag{5}$$

**Теорема 1** *Пусть заданы решение $\widehat{u}, \widehat{\rho} \in V^{1,2}(Q) \times V^{1,1}(Q)$ задачи (1)-(3) при $g = 0$ и начальное условие $u_0(x), \rho_0(x) \in V^2(0,1) \times V^1(0,1)$, удовлетворяющие (4) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Тогда существует управление $g(t,x) \in L^2(Q)$, supp $g \in (0,T) \times \omega$, такое, что решение $u(t,x), \rho(t,x)$ задачи (1)-(3) существует в пространстве $V^{1,1}(Q)$ и при $t = T$ удовлетворяет условиям (5).*

**Литература.** 1. Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu. On controllability of certain systems simulating a fluid flow // IAM Vol. Math.Appl.1995.V.68. P. 149-184.

## Алгоритм Шура для обобщенной функции Каратеодори[1]

*Е.Н. Андреищева*
(Севастополь; *anda_el@mail.ru*)

Рассматривается обобщённая функция Каратеодори $f(z)$, которая для некоторого целого $p \geqslant 1$ имеет в $z_1 \in \mathbb{T}, |z| < 1$ асимптотическое разложение

$$f(z) = \tau_0 + \sum_{i=1}^{2p-1} \tau_i (z - z_1)^i + O((z - z_1)^{2p}), \quad z \to z_1. \tag{1}$$

Дробно-линейное преобразование $\widehat{f}(z) = \chi_{\Theta^{-1}}(f(z))$, где $\Theta$ – матричная функция, называется обобщённым преобразованием Шура для обобщённой функции Каратеодори.

Доказано, что функция $\Theta(z)$ для $|z| < 1$ может быть представлена в виде

$$\Theta(z) = I_2 - \frac{(1 - zz_0^*)}{(1 - zz_1^*)^k} p(z) \begin{pmatrix} \tau_0^* & -\tau_0^* \tau_0 \\ -1 & \tau_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $z_0$ – точка единичной окружности, отличная от точки $z_1$,
$p(z)$ – полином степени $\deg p(z) \leqslant k - 1$, $p(z) = (1 - zz_1^*)^k R(z) G^{-1} R(z_0)^*$,

$$R(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1 - zz_1^*)} & \dfrac{z}{(1 - zz_1^*)^2} & \cdots & \dfrac{z^{k-1}}{(1 - zz_1^*)^k} \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00566-а

Матрица $G$ – подматрица размерности $k$ матрицы Грама векторов $f_i(z),\ i = 0, 1, ..., p-1$ вида
$$f_{j+1}(z) = \frac{z^{j+1}}{(1-zz_1^*)^{j+2}} \begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{z^{j+1-k}}{(1-zz_1^*)^{j+2-k}} \begin{pmatrix} \tau_k^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Получено обобщённое преобразование Шура в точке $z_1$ на окружности для обобщённой функции Каратеодори:
$$\widehat{f}(z) = \frac{\{(1-zz_1^*)^k - \tau_0(1-zz_0^*)p(z)\}f(z) - \tau_0\tau_0^*(1-zz_0^*)p(z)}{-(1-zz_0^*)p(z)f(z) + \{(1-zz_1^*)^k - \tau_0^*(1-zz_0^*)p(z)\}}. \qquad (3)$$
**Литература** 1. Alpay D. The transformation of Issai Schur and related topics in indefinite setting / D. Alpay, A. Dijksma, H. Langer // Operator Theory: Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel. – 2007. – Vol. 176. – P.1-98.

## О новой формуле решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом пространстве

*В.П. Аносов*
(Новосибирск, НГПУ; averi@ngs.ru)

В полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ точек $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ рассматривается задача
$$\Delta u(x) - Au(x) = 0 \ (x_n > 0), \ (1)$$
$$u(x', 0) = \varphi(x) \ (x' \in \mathbb{R}^{n-1}). \ (2)$$
Здесь $u$ – искомая, а $\varphi$ – заданные функции со значениями в некотором банаховом пространстве $E$; $\Delta$ – оператор Лапласа, $A$ – слабо позитивный оператор, действующий в банаховом пространстве $E$, имеющий плотную в $E$ область определения $\mathcal{D}(A)$ (см. [1,2]).

В работах [2,3,4] дано определение решения задачи (1)-(2) и изложен метод ее решения, состоящий в сведении уравнения (1) к неоднородному уравнению с нулевым граничным условием. При построении решения использовались фундаментальные решения уравнения (1), построенные в работе [5].

Здесь предлагается другой подход к решению задачи (1)-(2), при этом будут указаны преимущества такого подхода по сравнению с описанным выше.

**Литература.** 1. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 2. Аносов В.П., Соболевский П.Е., Коэрцитивная разрешимость краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом пространстве I // Дифференц. уравнения. 1971, т.VII, №11, с.2030-2044. 3. Аносов В.П., Соболевский П.Е., Коэрцитивная разрешимость краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом пространстве II // Дифференц. уравнения. 1971, т.VII, №11. с.2132-2138. 4. Аносов В.П., Соболевский П.Е., О первой краевой задаче для эллиптических уравнений в банаховом пространстве // Тр. Мат. ф-та ВГУ, 1971, с.13-21. 5. Picard E. Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des equations differéntielles, Gautier-Villars. Paris, 1930.

# Об одном критерии нечётности индекса особой точки векторного поля на плоскости

*И.В. Антюшина*
(Воронеж, ВГУ; iamveryok@mail.ru )

Носителем $supp\, f$ ряда $f(x) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}_+^2} a_m x^m,\ m = (m_1, m_2),\ x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$ называется множество $supp\, f = \{m \in \mathbb{Z}_+^2 :\ a_m \neq 0\}$; многогранником Ньютона $\Gamma_+$ ряда $f$ называется выпуклая оболочка $\Gamma_+ = co\left(\bigcup\limits_{m\in\, supp\, f} (m + \mathbb{R}_+^2)\right)$; объединение компактных граней многогранника $\Gamma_+$ называется диаграммой Ньютона $\Gamma$ ряда $f$, а эти грани - рёбрами диаграммы. Диаграмма Ньютона называется удобной, если она пересекает все координатные оси.

Отметим, что для всякого ребра $\Delta$ диаграммы Ньютона $\Gamma$ уравнение прямой, содержащей $\Delta$, можно записать в виде $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = d$, где $\alpha_1, \alpha_2, d \in \mathbb{Z}$ и НОД$(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ (здесь среди чисел $\alpha_1, \alpha_2$ по крайней мере одно нечётное). Мы будем рассматривать только такие уравнения. Пусть $\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \alpha_2^{(\Delta)} y_2 = d^{(\Delta)}$ — уравнение прямой, содержащей ребро $\Delta$ диаграммы Ньютона некоторого ряда. Будем говорить, что $\Delta$ имеет тип $(0/1)$ если $\alpha_1 \equiv 0 (mod\, 2),\ \alpha_2 \equiv 1 (mod\, 2)$. Аналогичным образом определим другие типы рёбер $(1/0)$ и $(1/1)$.

Пусть $F = (F_1, F_2)$ — аналитическое поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0, диаграммы Ньютона $\Gamma_1, \Gamma_2$ компонент которого удобны. Для всякого ребра $\Delta$ диаграммы Ньютона $\Gamma_1$ обозначим $\widetilde{\Delta}$ ребро или вершину диаграммы $\Gamma_2$, получаемую пересечением многогранника Ньютона $\Gamma_{2,+}$ с опорной к нему прямой, параллельной ребру $\Delta$. Поле $F$ назовём $\mathbb{R}$-невырожденным, если для всякого ребра $\Delta \in \Gamma_1$, имеющего тип $1/1$ или $1/0$, многочлены $F_{1,\Delta}(1, x_2), F_{2,\widetilde{\Delta}}(1, x_2)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней и для всякого ребра $\Delta \in \Gamma_1$, имеющего тип $0/1$, многочлены $F_{1,\Delta}(x_1, 1),\ F_{2,\widetilde{\Delta}}(x_1, 1)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней.

**Теорема 1** *Пусть $F = (F_1, F_2)$ — аналитическое векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 и удобными диаграммами Ньютона $\Gamma_1, \Gamma_2$ компонент, являющееся $\mathbb{R}$-невырожденным. Пусть $\Lambda$ — множество точек плоскости, принадлежащих тем рёбрам диаграммы $\Gamma_1$, каждое из которых параллельно какому-либо ребру диаграммы Ньютона $\Gamma$ ряда $F_1 \cdot F_2$, содержащему точку с обеими нечётными координатами. Если $N$ — число точек решётки $\mathbb{Z}^2$, принадлежащих множеству $\Lambda$, а $K$ — число связных компонент этого множества, то 0 — изолированная особая точка поля $F$ и для её топологического индекса справедливо равенство $ind(F, 0) \equiv (N - K)(mod\, 2)$.*

**Литература.** 1. Bliznyakov N.M. Cauchy Indices and the Index of a Singular Point of a Vector Field // Lecture Notes in Mathematics. 1986. V.1214. – P.1-20. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. 1967. – 576 с. 3. Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближённое решение операторных уравнений. – М.: Наука. 1969. – 456 с. 4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука. 1975. – 512 с.

# Геометрия взаиморасположения вещественных корней многочленов и остатка от их деления

*И.В. Антюшина, Н.М. Близняков*
(Воронеж, ВГУ; iamveryok@mail.ru, bliznyakov@math.vsu.ru)

**Теорема 1.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — вещественные взаимно простые многочлены, $deg\, g(x) \geqslant 2$ и все корни $g(x)$ вещественные простые. Если между любыми двумя соседними корнями многочлена $g(x)$ расположено нечётное число корней многочлена $f(x)$ (с учётом их кратностей), то остаток $r(x)$ от деления $f(x)$ на $g(x)$ имеет лишь вещественные простые корни, расположенные ровно по одному между каждыми двумя соседними корнями многочлена $g(x)$.

**Теорема 2.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — вещественные взаимно простые многочлены, $deg\, f(x) = deg\, g(x) = n \geqslant 2$, все корни $x_i$, $i = \overline{1,n}$ многочлена $f(x)$ и все корни $y_i$, $i = \overline{1,n}$ многочлена $g(x)$ вещественные простые. Если все корни $f(x)$, кроме некоторых двух $x_1, x_2$, лежат ровно по одному на каждом из интервалов $J_1, \ldots, J_{n-2}$, концы каждого из которых — соседние корни $g(x)$, то остаток $r(x)$ от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ имеет лишь вещественные простые корни, $n-2$ из которых расположены ровно по одному на каждом из интервалов $J_1, \ldots, J_{n-2}$. Если при этом:

1. $x_1, x_2 \in \left(-\infty; \underset{i=\overline{1,n}}{min}\{y_i\}\right)$, или $x_1, x_2 \in \left(\underset{i=\overline{1,n}}{max}\{y_i\}; +\infty\right)$, или $x_1, x_2 \in J$, где $J$ — интервал, концы которого — пара соседних корней многочлена $g(x)$, $J \neq J_1, \ldots, J \neq J_{n-2}$, то остаток $r(x)$ имеет корень $z_l \in$ $\in \left(-\infty; \underset{i=\overline{1,n}}{min}\{y_i\}\right)$, если $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i) > 0$; имеет корень $z_r \in \left(\underset{i=\overline{1,n}}{max}\{y_i\}; +\infty\right)$, если $\sigma < 0$; не имеет корней вне интервалов $J_1, \ldots, J_{n-2}$, если $\sigma = 0$;
2. $x_1 \in \left(-\infty; \underset{i=\overline{1,n}}{min}\{y_i\}\right)$, $x_2 \in \left(\underset{i=\overline{1,n}}{max}\{y_i\}; +\infty\right)$, то остаток $r(x)$ имеет корень $z'_r \in \left(\underset{i=\overline{1,n}}{max}\{y_i\}; +\infty\right)$, если $\sigma > 0$; имеет корень $z'_l \in$ $\in \left(-\infty; \underset{i=\overline{1,n}}{min}\{y_i\}\right)$, если $\sigma < 0$; не имеет корней вне интервалов $J_1, \ldots$ $\ldots, J_{n-2}$, если $\sigma = 0$.

**Литература.** 1. Marden M. The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variables, № 3. – AMS, Proviolence. 1966. – 183 p. 2. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, ч. 2. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит. 1978. – 432 с.

# Обратимость дифференциального оператора с неограниченным операторным коэффициентом

*А.А. Арсагова, М.С. Бичегкуев*
(Владикавказ, СОГУ; bichegkuev@yandex.ru)

Функцию $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ назовем *допустимым весом*, если скалярное семейство

$$U_{\widetilde{\alpha}} : \Delta \to LB(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R},\ U_{\widetilde{\alpha}}(t,s) = \frac{\widetilde{\alpha}(s)}{\widetilde{\alpha}(t)}, \quad (t,s) \in \Delta,$$

является семейством эволюционных операторов.

Для допустимого веса $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ символом $L^p_{\widetilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство измеримых (по Бохнеру) функций $x : \mathbb{R}_+ \to X$, для которых конечна величина $\|x\|_{\widetilde{\alpha},p} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\|x(t)\|}{\alpha(t)}\right)^p dt\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$, $\|x\|_{\widetilde{\alpha},\infty} = \mathrm{vrai}\sup \frac{\|x(t)\|}{\widetilde{\alpha}(t)}$, $\quad p = \infty$. Через $C_{b,\widetilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим подпространство непрерывных функций из $L^\infty_{\widetilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$.

Символом $F_{\widetilde{\alpha}} = F_{\widetilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ будет обозначаться одно из перечисленных функциональных пространств.

Пусть $U : \Delta \to LB(X)$ — семейство эволюционных операторов и $E$ — замкнутое линейное подпространство в $X$. Определим оператор $\mathcal{L}_{E,\widetilde{\alpha}} : D(\mathcal{L}_{E,\widetilde{\alpha}}) \subset F_{\widetilde{\alpha}} \to F_{\widetilde{\alpha}} = F_{\widetilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ следующим образом. Пару функций $(x, f) \in F_{\widetilde{\alpha}} \times F_{\widetilde{\alpha}}$ отнесем к графику оператора $\mathcal{L}_{E,\widetilde{\alpha}}$, если $x(0) \in E$ и

$$x(t) = U(t,s)x(s) - \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < \infty.$$

Пусть $T : \mathbb{R}_+ \to LB(X)$ — сильно непрерывная полугруппа операторов класса $C_0$ и $A$ — ее инфинитезиальный генератор. Тогда семейство $U(t,s) = T(t-s)$, $(t,s) \in \Delta$, является семейством эволюционных операторов. Определяемый этим символом оператор $\mathcal{L}_{E,\widetilde{\alpha}} : D(\mathcal{L}_{E,\widetilde{\alpha}}) \subset F_{\widetilde{\alpha}}\mathbb{R}_+, X) \to F_{\widetilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим $\mathcal{L}_{E,\widetilde{\alpha}} = -\frac{d}{dt} + A$.

**Теорема 1.** Пусть $æ_{\mathrm{int}}(\alpha) \neq 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}_{E,\widetilde{\alpha}}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$([æ_{\mathrm{int}}(\alpha), æ_{\mathrm{out}}(\alpha)]\sigma(B)) \cap \mathbb{T} = \varnothing, \quad \mathrm{Im}P_{\mathrm{out}} = E,$$

где $B = T(1)$.

**Теорема 2.** Пусть $æ_{\mathrm{int}}(\alpha) = 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ не является непрерывно обратимым для $E \neq \{0\}$. Если $E = \{0\}$, то оператор $\mathcal{L}_{\{0\}}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $æ_{\mathrm{out}}(\alpha) r(T(1)) < 1$.

**Следствие** Пусть $æ_{\mathrm{out}}(\alpha) = 0$ и $E = \{0\}$. Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ непрерывно обратим.

**Литература.** 1. Хилле Е., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.:ИЛ. 1962. 2. Баскаков А.Г., Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений// Изв.РАН.

Сер.матем., 73:2 (2009), 3-68. 3. Жиков В.В, Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения// Изв.АН СССР. Сер.матем., 40:6 (1976), 1380-1408.

## Асимптотические решения задачи конвективной диффузии около капли с учётом объёмной химической реакции[2]

*Р.Г. Ахметов*

(Башкирия, БГПУ им. М. Акмуллы; akrust@mail.ru)

Рассматривается краевая задача

$$\varepsilon^2 \Delta u - \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) - \mu F(u) = 0, \tag{1}$$

$$u = 1,\ r = 1;\quad u \to 0,\ r \to \infty, \tag{2}$$

где $\Delta$ - оператор Лапласа, малый параметр $\varepsilon > 0$, $\psi(r,\theta), F(u)$ - заданные функции.

Задача (1), (2) возникает при исследовании установившейся конвективной диффузии около сферической капли, обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при наличии объёмной химической реакции ( см. напр., [1], гл. 5, формулы (6.1) - (6.3)). При такой интерпретации $\varepsilon^{-2} = Pe$ - число Пекле, $\psi(r,\theta)$- функция тока, $r,\theta-$ сферические координаты. Функция $F(u)-$ скорость химической реакции. Число $\mu = k_v/Pe$, где $k_v$ - константа скорости химической реакции. При этом числа $k_v, Pe$ стремятся к бесконечности, а $\mu$ - ограничено. Задача, аналогичная задаче (1), (2), в случае обтекания частицы, исследовалась в работе [2] методом согласования асимптотических разложений [3]. Характерной особенностью рассматриваемой задачи является наличие особых точек типа седла на границе области. Задача носит бисингулярный характер ( см., [3]). В докладе предполагается дать обзор основных результатов автора по данной теме. В частности, рассматривается случай, когда функция $F(0) = 0,\ F'(0) = 0,\ F''(0) > 0$.

**Литература.** 1. Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. – 336 с. 2. Ахметов Р. Г. Асимптотика решения задачи конвективной диффузии с объёмной химической реакцией в следе за частицей // Журнал вычисл. матем. и матем. физ.– 2006. – Т. 46. N 5. С. 834–847. 3. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №09-01-00530 и научной школы (грант №НШ-2215.2008.1)

# О некоторых свойствах весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом

*А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский*
(Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим функцию $\alpha\left(t\right)$, $t\in R_{+}^{1}$, для которой $\alpha\left(+0\right)=\alpha'\left(+0\right)=0$, $\alpha\left(t\right)>0$ при $t>0$, $\alpha\left(t\right)=const$ для $t\geq d$ при некотором $d>0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_{\alpha}\left[u\left(t\right)\right]\left(\eta\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(t)\exp\left(i\eta\int\limits_{t}^{d}\frac{d\rho}{\alpha\left(\rho\right)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha\left(t\right)}}$, определенное, например, на функциях $u(t)\in C_{0}^{\infty}\left(R_{+}^{1}\right)$. Преобразование $F_{\alpha}$ связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ следующим равенством

$$F_{\alpha}[u(t)](\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_{\alpha}(\tau)],$$

где $u_{\alpha}(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int\limits_{t}^{d}\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования $F_{\alpha}$ справедлив аналог равенства Парсеваля $\left\|F_{\alpha}[u](\eta)\right\|_{L_2(R^1)}=\sqrt{2\pi}\left\|u\right\|_{L_2(R_{+}^{1})}$,что даёт возможность расширить преобразование $F_{\alpha}$ до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_{+}^{1})$. Для расширенного таким образом преобразования $F_{\alpha}$ сохраним старое обозначение. Обозначим через $F_{\alpha}^{-1}$ обратное к $F_{\alpha}$ преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_{+}^{1})$. Это преобразование можно записать в виде $F_{\alpha}^{-1}[w(\eta)](t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$.

Легко показать, что на функциях $u(t)\in C_{0}^{\infty}(\bar{R}_{+}^{1})$ выполняются соотношения

$$F_{\alpha}[D_{\alpha,t}^{j}u](\eta)=\eta^{j}F_{\alpha}[u](\eta),\ j=1,2,...,\ \text{где}\ D_{\alpha,t}=\frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t=\frac{\partial}{\partial t}.$$

**Условие 1.** Существует число $\nu\in(0,1]$ такое, что $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right|\leq c<\infty$ при всех $t\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha\left(t\right)\in C^{s_1}\left[0,+\infty\right)$ для некоторого $s_1=s_1(\nu)$.

С помощью преобразования $F_{\alpha}$ и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$, $x\in R^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K\left(x,t,D_x,D_{\alpha,t}\right)v\left(x,t\right)=F_{\xi\to x}^{-1}F_{\alpha}^{-1}\left[\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)F_{\alpha}F_{x\to\xi}\left[v\left(x,t\right)\right]\right]$$

. **Определение 1.** Будем говорить, что символ $\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)$ принадлежит классу символов $S_{\alpha}^{\sigma}(R^1\times\Omega)$ , $\sigma\in R^1$, $\Omega\subseteq(0;+\infty)$, $x\in R^1$, $t\in(0;+\infty)$, если $\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)\in C^{\infty}\left(\Omega\times R^{n-1}\times R^1\right)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{\tau}}{\partial x^{\tau}}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m}\frac{\partial^{l}}{\partial\xi^{l}}\frac{\partial^{p}}{\partial\eta^{p}}\lambda\left(x,t,\xi,\eta\right)\right|\leq c_{\tau,m,l,p}\left(1+\left|\xi\right|^2+\left|\eta\right|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)},$$

где $\tau, m, l, p = 0, 1, 2, ...$ ; $\quad c_{\tau,m,l,p} > 0$ — некоторые константы, не зависящие от $x, t, \xi, \eta, \sigma$.

**Определение 2.** Пусть $\Omega \subseteq (0; +\infty)$ - открытое множество. Будем говорить, что функция $a(x, t, y, \xi, \eta)$ принадлежит классу $S^{m,\alpha}(R^1 \times \Omega)$, $m \in R^1$, если функция $a(x, t, y, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $x \in R^1$, $\xi \in R^1$, $t \in \Omega$, $y \in \Omega$, $\eta \in R^1$ и на компактных подмножествах множества $\Omega \times \Omega$ имеет место при всех $\tau, j, k, l, p = 0, 1, 2, ...$ оценка

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\alpha(y)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\frac{\partial^l}{\partial \xi^l}\frac{\partial^p}{\partial \eta^p}a(t, y, \xi, \eta)\right| \le c_{\tau jklp}(1 + |\xi| + |\eta|)^{m-l-p}$$

с константами $c_{\tau jklp} > 0$, не зависящими от $x, \xi, t, y, \eta$.

Рассмотрим оператор вида

$$A(u(x, t)) = F^{-1}_{\alpha_{\eta \to t}} F_{\alpha_{y \to \eta}} F^{-1}_{\xi \to x}[a(x, t, y, \xi, \eta)\, F_{x \to \xi}[u(x, y)]], \tag{1}$$

где $F_{\alpha_{y \to \eta}}$ $(F^{-1}_{\alpha_{\eta \to t}})$ - прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее $y$ в $\eta$ ($\eta$ в $t$).

Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть $A$ – оператор вида (1), причём $a(x, t, y, \xi, \eta) \in S^{m,\alpha}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $m \in R^1$. Тогда найдётся такой символ $p(x, t, \xi, \eta) \in S^m_\alpha(R^1 \times \Omega)$, что $A = P(x, t, D_x, D_{\alpha,t})$, где $P(x, t, D_x, D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $p(x, t, \xi, \eta)$. Причём, справедливо равенство $p(x, t, \xi, \eta) = \sqrt{\alpha(t)}\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \cdot A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\exp(-i\eta\int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}))$.

При этом справедливо соотношение

$$p(x, t, \xi, \eta) - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(i)^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^j_\eta\, a(x, t, y, \xi, \eta)\,|_{y=t} \in S^{m-N}_\alpha(R^1 \times \Omega)$$

при любых $N = 1, 2, \ldots$.

## Первая краевая задача для общего уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области

*А.К. Баззаев*
(Владикавказ, СОГУ; alexander.bazzaev@gmail.com)

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, основанием которого служит $p$-мерный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, .., x_p) : 0 < x_\beta < l_\beta, \quad \beta = \overline{1,\ p}\}$ с границей $\Gamma$, рассмотрим задачу:

$$\partial^\alpha_{0t}u = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad t \geqslant 0, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{3}$$

$$Lu=\sum_{\beta=1}^{p} L_\beta u, \qquad L_\beta u=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+r_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}-q_\beta(x,t)u,$$

$$0<c_1\leqslant k_\beta(x,t)\leqslant c_2, \quad 0<q_\beta(x,t)\leqslant c_3,$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha}d\eta$, $\quad 0<\alpha<1$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha$, $\dot u=\dfrac{\partial u}{\partial t}$; $k_\beta(x,t)\in C^{3,1}(\overline{Q}_T), r_\beta(x,t), q_\beta(x,t), f(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, где $C^{3,1}(\overline{Q}_T)$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $m$ по $x$ и $n$ по $t$.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению $Ox_\beta$: $\overline{\omega}_h=\{x_\beta^{(i_\beta)}=i_\beta h_\beta : i_\beta=0,1,...,N_\beta,\ h_\beta=l_\beta/N_\beta,\ \beta=\overline{1,p}\ \}$. На отрезке $[0,T]$ введем сетку $\overline{\omega}'_\tau=\{0,t_{j+\frac{\beta}{p}}=\left(j+\frac{\beta}{p}\right)\tau, \quad j=0,1,...,j_0-1; \quad \beta=1,2,...,p\}$, содержащую наряду с узлами $t_j=j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{\beta}{p}}, \quad \beta=1,2,...,p-1; \omega'_\tau$— множество узлов сетки $\overline{\omega}'_\tau$, для которых $t>0$.

По аналогии с [1] уравнению (1) поставим в соответствие цепочку одномерных уравнений

$$\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}u=L_\beta u+f_\beta, \quad t_{j+\frac{\beta-1}{p}}<t\leqslant t_{j+\frac{\beta}{p}}, \quad \beta=1,2,...,p, \quad \sum_{\beta=1}^{p} f_\beta=f.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_\beta=\left(t_{j+\frac{\beta-1}{p}},t_{j+\frac{\beta}{p}}\right]$, $\beta=\overline{1,p}$ будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{P}_\beta v_{(\beta)}=\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}v_{(\beta)}-L_\beta v_{(\beta)}-f_\beta=0, \quad t\in\Delta_\beta, \quad \beta=\overline{1,p}, \tag{4}$$

$$v_{(\beta)}=\mu(x,t) \text{ при } x\in\Gamma_\beta, \tag{5}$$

$\Gamma_\beta$ — множество граничных точек по направлению $x_\beta$ ($\beta=\overline{1,p}$),
полагая при этом

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x,0)=u_0(x), \quad v_{(\beta)}(x,t_{j+\frac{\beta-1}{p}})=v_{(\beta-1)}(x,t_{j+\frac{\beta-1}{p}}), \quad \beta=2,3,...,p,\\ v_{(1)}(x,t_j)=v_{(p)}(x,t_j), \quad j=1,2,...,j_0-1. \end{gathered} \tag{6}$$

Дискретный аналог дробной производной $\partial_{0t}^{\alpha}u$ порядка $\alpha, 0<\alpha<1$ имеет вид [2]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}+O\left(\frac{\tau}{p}\right), \quad u_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\frac{u^{\frac{s}{p}}-u^{\frac{s-1}{p}}}{\tau/p}.$$

Аналогично [1] рассмотрим уравнение (4) при фиксированном $\beta$ с возмущенным оператором $\widetilde{L}_\beta$:

$$\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}v_{(\beta)}=\widetilde{L}_\beta v_{(\beta)}+f_\beta, \quad t\in\Delta_\beta, \quad \beta=\overline{1,p},$$

где $\widetilde{L}_\beta u = \varkappa_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + r_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta} - q_\beta(x,t)u$, $\varkappa_\beta = 1/(1+R_\beta)$, $R_\beta = 0,5h_\beta|r_\beta|/k_\beta, (\beta = \overline{1,p})$ — разностное число Рейнольдса.

Аппроксимируем каждое уравнение (4) номера $\beta$ двухслойной неявной схемой на полуинтервале $\Delta_\beta$, тогда получим цепочку $p$ одномерных разностных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \widetilde{\Lambda}_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}} + \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad x\in\omega_h,\ \beta=\overline{1,p},\\
\widetilde{\Lambda}_\beta y = \varkappa_\beta\left(a_\beta y_{\bar x_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}\right)_{x_\beta} + b^+_{\beta,i}a_\beta^{(+1)}y_{x_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}} + b^-_{\beta,i}a_\beta y_{\bar x_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}} - d_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}},\ \beta=\overline{1,p},\\
y^{j+\frac{\beta}{p}}|_{\gamma_{h_\beta}} = \mu^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad j=0,1,...,j_0-1,\\
y(x,0)=u_0(x), \quad \beta=\overline{1,p},
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
a_\beta = A_\beta[k_\beta(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar t)], \quad a_\beta^{(+1)} = a_\beta(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar t),\\
d_\beta = F_\beta[q_\beta(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar t)],\ b_\beta^\pm = F_\beta[\widetilde{r}_\beta^\pm(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar t)],\ \widetilde{r}_\beta^\pm = \frac{r_\beta^\pm}{k_\beta},\\
r_\beta^+ = 0,5(r_\beta+|r_\beta|)\geqslant 0, \quad r_\beta^- = 0,5(r_\beta-|r_\beta|)\leqslant 0,
\end{gathered}$$

$A_\beta$ и $F_\beta$ — шаблонные функционалы, используемые для вычисления коэффициентов $d_\beta$ и $\varphi_\beta$ и обеспечивающие второй порядок аппроксимации [1], $\gamma_{h_\beta}$ — множество граничных по направлению $x_\beta$ узлов.

Для решения задачи (7) — (9) получаем оценку получена априорная оценка:

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \max_{0<t'\leqslant j\tau}\|\mu(x,t')\|_{C_\gamma} + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\|_C, \tag{8}$$

из которой следует сходимость со скоростью $O(h^2+\tau)$ при условии $1\leqslant\alpha<1$

**Литература.** 1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 2. Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. 10. С.1878-1887.

## Обобщенная задача Штурма – Лиувилля на графе

*А.А. Баязитова*
(Челябинск, ЧелГУ; balfiya@mail.ru)

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер. Будем предполагать, что каждое ребро имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим уравнения

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = f_j, \tag{1}$$

с условиями „непрерывности“ и „баланса потока“

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i) \tag{2}$$

$$\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_jc_j(x)u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_kc_k(x)u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{3}$$

где $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине $V_i$.

Задача (1) – (3) в более простой постановке ($c_j(x) = 1$, $a_j(x) = a_j$) рассматривалась в [1]. Для решения поставленной задачи введем гильбертово пространство $L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots) : g_i \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением $\langle g, h\rangle = \sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_jh_jdx$, и банахово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено (2)$\}$. Отождествим $L_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, а через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$.

Таким образом, задача (1) – (3) редуцируется к уравнению

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle\,,$$

где $u = (u_1, ..., u_j, ...) \in \mathfrak{U}$, $f = (f_1, ..., f_j, ...) \in \mathfrak{F}$, $v = (v_1, ..., v_j, ...) \in \mathfrak{U}$, оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ задан формулой $\langle Au, v\rangle = \sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + a_j(x)u_jv_j)dx$. Основным результатом является следующая теорема.

**Теорема 1** *Пусть $c_j(x)$ и $a_j(x)$ – вещественные измеримые на $(0, l_j)$ функции, причем $0 < c \le c_j(x) \le C$ и $a_j(x) \ge 0$ при всех $j$. Тогда спектр оператора $A$ неотрицателен, вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$, при этом первое собственное значение оператора $A$ однократно и равняется нулю.*

**Литература.** 1. Свиридюк Г. А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г. А. Свиридюк, А. А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2009. -№1(18).- С.6 - 17.

## Математическая модель автопоезда с позиций теории автоматического управления

*В.В. Белозоров*
(Воронеж, ВГЛТА)

Автопоезд является сложной технической системой, в которой движение кинематических единиц взаимосвязано, т.е. продольно-горизонтальные и поперечно-горизонтальные перемещения автомобиля-тягача через буксирное устройство вызывают продольно-горизонтальные и поперечно-горизонтальные перемещения прицепного звена, в свою очередь перемещения прицепа сказываются через буксирное устройство на траектории движения автомобиля-тягача. В данной сложной технической системе можно выделить две подсистемы (автомобиль-тягач и прицеп), движение каждой из которых может быть описано с помощью уравнений теории автоматического регулирования. Общим элементом обеих подсистем является буксирное устройство.

Как объект автоматического регулирования автомобиль-тягач имеет генератор энергии (двигатель внутреннего сгорания), собственную колебательную систему (элементарное кинематическое звено с подвеской) и механизм обратной связи (эластичные шины).

В области соприкосновения эластичных шин с дорожным покрытием и в точках соединения кинематических звеньев приложены внешние силы.

Механизмом обратной связи (главным регулятором системы) являются эластичные шины. Их способность деформироваться в относительно широких пределах позволяет кинематическим звеньям не совершать "резких" перемещений относительно дорожного покрытия.

При движении автопоезда водитель получает сравнительно подробную информацию о положении автомобиля-тягача на дороге, в то время как получение информации о перемещении прицепа затруднено. При этом замкнутый контур управления автопоездом, т.е. управление непосредственно водителем, возможен только для ведущего звена (автомобиля-тягача), для ведомого же звена (прицепа) контур управления разомкнут, т.е. непосредственно воздействовать на него водитель не в состоянии.

Схема управляемого движения автопоезда, с позиции теории автоматического управления, описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_n = (1-G_2)A_i\delta\beta + G_2\delta y + G_1\delta k + G_1 k_D - (1-G_2)\frac{v^2}{p^2}k_D + G_3\delta_3 + G_2\delta_1 + G_1\delta_2 \\ \beta = -G_2\delta\beta_1 + G_2A_i^{-1}\delta y + G_1A_i^{-1}\delta k + G_1A_i^{-1}k_D + G_1A_i^{-1}k_D + G_2A_i^{-1}\frac{v^2}{p^2}k_D + G_3\delta_3, \end{cases}$$

где $G_1 = H_{уст}G_2$ – передаточная характеристика первой подсистемы (передняя ходовая ось) разомкнутой части системы; $G_2 = \frac{A_iH_B}{1+A_iH_B}$ – передаточная характеристика замкнутой части системы (автомобиля-тягача); $G_3 = H_{уст}G_1$ – передаточная характеристика второй подсистемы (задняя ходовая ось) разомкнутой части системы; $A_i$ – управляющее воздействие автомобиля-тягача; $A_{Л}$ – передаточная функция прицепа; $\delta\beta_1$ – внутренние возмущения автомобиля-тягача; $\delta\beta_2$ – внутренние возмущения прицепа; $\delta_k$ – действие боковой силы на автомобиль-тягач; $k_D$ – кривизна заданной траектории движения автомобиля-тягача; $\beta$ – угол поворота рулевого колеса, приведенный к углу поворота управляемых колес автомобиля-тягача; $H_B,\ H_y$ – передаточные функции водителя соответственно по отклонениям от заданной траектории и по кривизне заданной траектории движения; $\delta_1,\ \delta_2$ – действие боковой силы соответственно на первое и второе кинематические звенья прицепа; $\delta_3$ – внешние возмущения, приведенные к элементарному углу поворота.

Разомкнутый контур управления и, как следствие, неопределенность движения прицепа, особенно на кривых малого радиуса, создают значительные трудности для водителя.

Снизить неопределенность перемещения прицепа, т.е. повысить управляемость и устойчивость движения всего автопоезда, можно введением в конструкцию прицепа поворотного устройства.

Поворотное устройство прицепа будет являться дополнительным регулятором, повышающим управляемость всей рассматриваемой системы автоматического регулирования.

# О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах

*С.В. Бесаева*
(Владикавказ, СОГУ; besaevasv@mail.ru )

Пусть $X$ — конечномерное линейное нормированное пространство, $LB(X)$ — алгебра линейных операторов, действующих в $X$. Через $l^p_\alpha = l^p_\alpha(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство (двусторонних) последовательностей $x : \mathbb{Z} \to X$ векторов из $X$ суммируемых с весом (весовой функцией) $\alpha : \mathbb{Z} \to (0, \infty)$ с нормой $\|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}\right)^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$, и ограниченных относительно $\alpha$ : $\|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}, \quad p = \infty$.

Пусть весовая функция $\alpha$ удовлетворяет условию $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} < \infty$. Это условие эквивалентно ограниченности разностного оператора (оператора взвешенного сдвига)

$$\mathcal{K} : l^p_\alpha \to l^p_\alpha, \quad (\mathcal{K}x)(n) = Bx(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l^p_\alpha,$$

где оператор $B \in LB(X)$. По весу $\alpha$ определим следующие величины

$$æ_{\mathrm{out}}(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)}\right)^{1/n}, \; æ_{\mathrm{int}}(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)}\right)^{1/n}.$$

Пусть $\sigma(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — спектр оператора $B$. Рассмотрим модули $|\lambda_j|$, $1 \leqslant j \leqslant n$, собственных значений оператора $B$ и упорядочим их по возрастанию: $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_m$.

**Теорема 1** . *Спектр $\sigma(\mathcal{K})$ оператора $\mathcal{K} \in LB(l^p_\alpha)$ представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{K}) = \bigcup_{j=1}^{m} [r_j\, æ_{\mathrm{int}}(\alpha), r_j\, æ_{\mathrm{out}}(\alpha)]\mathbb{T} = \bigcup_{j=1}^{m} [æ_{\mathrm{int}}(\alpha), æ_{\mathrm{out}}(\alpha)]\mathbb{T}(r_j),$$

*где $\mathbb{T}(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ и $\mathbb{T} = \mathbb{T}(1)$.*

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A : D(\mathcal{L}) \subset L^p_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \to L^p_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X), \; p \in [1, \infty],$$

где $A \in LB(X)$, $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ — весовая функция, представимая в виде $\tilde{\alpha}(t) = \exp a(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и $a$ — дифференцируемая функция с $\dot{a} = b \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Теорема 2** . *Спектр оператора $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L^p_{\tilde{\alpha}} \to L^p_{\tilde{\alpha}}$ допускает представление вида $\sigma(\mathcal{L}) = \bigcup_{j=1}^m \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda_{\min}(b) + \operatorname{Re}\mu_j \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_{\max}(b) + \operatorname{Re}\mu_j\}$, если $\sigma(A) = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$.*

**Литература.** 1. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Известия РАН. Сер.матем. — 2009.— Т.73, №2. — С. 3–68. 2. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30. – №3. – С. 1-11.

## Встраиваемый язык автоматизированной системы управлению связью "М"

*В.В. Бессонов, С.В. Кручинин, А.В. Кузнецов, А.А. Свиридов*
(Воронеж, ОАО "Концерн "Созвездие"; stvm@list.ru, avkuz@bk.ru)

Авторами разработан метаязык "М", представляющий собой встраиваемый язык автоматизированной системы управления связью (АСУС), позволяющий осуществлять все виды операций, предусмотренных математической моделью АСУС: добавление, удаление, изменение и перемещение объектов и субъектов управления разных уровней, создание и удаление связей между объектами и субъектами управления.

Любая операция, предусмотренная языком "М", реализуема двумя методами: пакетным и визуальным. Пакетное представление является текстом из слов языка "М", задающим последовательности операций над объектами, с применением управляющих структур и функций. Визуальный метод представляет собой использование Среды Визуального Проектирования (СВП), в которой объекты математической модели представлены в виде графических изображений, а операции метаязыка производятся над ними путем манипуляций посредством мыши или клавиатуры. Сами операции, реализуемые в виде инструкций языка тождественны визуальным операциям СВП.

Реализация метаязыка может быть применена к данным, оперативно хранимым в СВП, к данным в формате XML и в виде базы данных. Для каждого из случаев предусматривается реализация агента, транслирующей высокоуровневые инструкции метаязыка "М" в инструкции более низкого уровня.

Основные понятия метаязыка "М": "Математическая модель АСУС" – формализованное описание АСУС, пригодное для использования при проектировании телекоммуникационной платформы, "Автономная группа" – совокупность абонентов разного типа, объединенных по назначению или географическому признаку, "Типовой ПТК" – вариант комплексирования технических средств, "Машина управления" – ПТК, осуществляющий администрирование в автономной группе.

Использование метаязыка "М" позволяет обеспечивать формальное описание сетей организации связи, а также автоматизировать сбор информации об объектах телекоммуникаций и анализ состояния сетей организации связи.

**Литература.** 1. Пентус А. Е., Пентус М. Р. Теория формальных языков: Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004 г. — 80 с.

# Применение теоремы Крейна - Далецкого к решению разностных схем для бигармонических уравнений

*Р.И. Бибикова*
(Вологда, ВоГТУ; emuhamadiev@rambler.ru )

Уравнения эллиптического типа с соответствующими граничными условиями являются наиболее распространённым классом задач математической физики. Они возникают во многих приложениях, имеющих практический интерес. Точные решения краевых задач удаётся получить лишь в частных случаях. Универсальным и эффективным методом решения краевых задач для эллиптических уравнений является метод сеток. Рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 u - ru = f \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u = 0, \quad \Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{2}$$

где $\Gamma$ - граница единичного квадрата $\Omega = (x, y) : 0 < x, y < 1$.

Ниже приводится алгоритм сведения разностной схемы для системы (1) -(2) к матричному уравнению вида

$$\sum_{k=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} c_{k,j} A_n^k U A_n^j = F$$

где $c_{r,j}$ - известные коэффициенты, $A_n$ - заданная матрица,;$U$ - искомая матрица, соответствующая значениям функции $u(x, y)$ на сетке,$F$ - матрица, определяющая правую часть уравнения (1) и граничные условия (2). Покроем замкнутый единичный квадрат $\bar{\Omega}$ равномерной сеткой [1]

$$\varpi_h = \{(ih, jh) : i, j = 0, 1, ...n + 1, h = 1/(n + 1)\}$$

Введём фиктивную границу $\gamma^1 \bigcup \gamma^2 \bigcup \gamma^3 \bigcup \gamma^4$, состоящую из множества узлов, лежащих вне сетки $\omega^h$ и отстающих от границы $\gamma^k (k = 1, 2, 3, 4)$ на шаг $h$:

$$\gamma^1 = \{(-h, jh) : j = 0, ..., n + 1\}, \gamma^2 = \{(ih, -h) : i = 0, 1, ..., n + 1\}$$

$$\gamma^3 = \{((n + 2)h, jh) : j = 0, 1, ..., n + 1\}, \gamma^4 = \{(ih, (n + 2)h) : i = 0, 1, ..., n + 1\},$$

Сеточную функцию $u^h$ считаем на $\gamma^h k = 1, 2, 3, 4$ определённой и принимающей значения $u_{-1,j}, u_{i,-1}, u_{n+2,j}, u_{i,n+2}$ соответственно. Введение фиктивной границы обладает тем преимуществом, что в процессе решения краевой задачи по сеточной схеме решение во всех узлах сетки ищется одним и тем же стандартным методом, благодаря тому, что фиктивный слой натянут на узлы сетки $\varpi_h$. Рассмотрим случай, когда $r = const$. Аппроксимируем уравнение (1) с краевыми условиями (2) разностными отношениями Рассмотрим уравнение

$$Lu^h \equiv u_{\bar{x}x\bar{x}x} + 2u_{x\bar{x}y\bar{y}} + u_{\bar{y}y\bar{y}y} - ru^h = f^h, \tag{3}$$

$$u^h|_\gamma = 0, \quad u_{\bar{x}x}|_{x=0} = 0, \quad u_{\bar{x}x}|_{x=1} = 0, u_{\bar{y}y}|_{y=0} = 0, u_{\bar{y}y}|_{y=1} = 0. \qquad (4)$$

Отметим, что сеточная функция $u^h$ определена на множестве внутренних узлов сетки $\varpi_h$, а граничные условия связывают ее значения в приграничных узлах $\gamma^i, i = 1, ..., 4$. Из условия (4) выразим $u^h$ на внешнем приграничном слое $\gamma^i$ через значения $u^h$ на $\varpi^h$ и подставим в (3). Тогда справедливы

**Лемма 1.** *Разностная схема эквивалентна матричному уравнению*

$$L_1 U \equiv \frac{1}{h^4}(16U - 8A_nU - 8UA_n + 2A_nUA_n + A_n^2U + UA_n^2) - rU = F, \qquad (5)$$

*где $U = (u_{ij}), F = (f_{ij})$, а матрица $A_n$ имеет вид:*

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \textbf{если } |i-j| = 1; \\ 0, & \textbf{если } |i-j| \neq 1. \end{cases}$$

**Лемма 2.** *Собственные значения оператора $L_1$ вычисляются по формулам:*

$$\gamma_{k,l}(L_1) = \frac{16}{h^4}(\sin^2\frac{k\pi h}{2} + \sin^2\frac{l\pi h}{2})^2 - r, k, l = 1, 2, ..., n.$$

Из леммы 2 следует, что при $r < 0$ оператор $L_1$ обратим. Нас интересует, при каких $h > 0$ и $r > 0$ оператор $L_1$ также обратим. Введём следующие обозначения: Пусть

$$r_0 = max(m_1^2 + m_2^2)^2\pi^4 : (m_1^2 + m_2^2)^2\pi^4 < r,$$

$$r_1 = max(m_1^2 + m_2^2)^2\pi^4 : (m_1^2 + m_2^2)^2\pi^4 > r.$$

Выберем $0 < \delta < \pi/2$ такое, что $\sin^2\delta \geq \delta^2\sqrt{\frac{r}{r_1}}$. Справедливо следующее утверждение

**Теорема 1.** *Пусть $r > 0$, $r \neq (m_1^2 + m_2^2)^{2\pi^4}, m_1, m_2 = 1, 2, ..., n, h < h_0$, где $h_0 < (2\sin\delta)/\sqrt[4]{\sqrt{r}}$ . Тогда оператор (5) обратим и для решения $U$ уравнения (5) справедлива оценка $||U|| \leq c_0||F||$, где*

$$c_0^{-1} = min\{r - r_0, \sqrt{rr_1} - r, \frac{16}{h_0^4}\sin^4(\frac{\pi h_0}{2}) - r\}.$$

По теореме Крейна - Далецкого [2] в условиях теоремы 1 уравнение (5) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$U = -\frac{1}{4\pi^2}\oint\oint(A_n - \lambda I)^{-1}F(A_n - \mu I)^{-1}\frac{d\lambda d\mu}{P(\lambda, \mu)}, \qquad (6)$$

где Г - криволинейный контур, охватывающий спектр матрицы $A_n$, а

$$P(\lambda, \mu) = \frac{1}{h^4}(16 - 8\lambda - 8\mu + 2\lambda\mu + \lambda^2/ + \mu^2 - r)$$

**Теорема 2.** *Криволинейный интеграл (5) вычисляется и решение $U$ уравнения (5) имеет вид*

$$U = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{R_n(\lambda_k) F R_n(\lambda_l)}{d_n'(\lambda_k) P(\lambda_k, \lambda_l) d_l'(\lambda_l)},$$

*где $d_n(\mu) = det(A_n - \mu I), d_n'(\mu)$ - производная полинома $d_n(\mu)$, $F$ - матрица, состоящая из значений функции $f(x,y)$ в узлах сетки $\varpi_h$ и граничных условий, а $R_n(\mu)$ - матрица , состоящая из алгебраических дополнений элементов матрицы $(A_n - \mu I)$(присоединённая к $(A_n - \mu I)$ матрица).*

**Литература.** 1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 614 с. 2. Далецкий Ю.Г. , Крейн М.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 636 с.

## О свойствах решений уравнения Штурма-Лиувилля

*Ш. Билал*

(Алматы, Институт математики МОН РК; Akysh41@mail.ru )

Рассматривается однородное уравнение Штурма-Лиувилля

$$-\big(\rho(x)y'(x)\big)' + \upsilon(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

где -$\rho(x)$–положительная непрерывно-дифференцируемая в $J$ функция, $\upsilon(x) \geq 1$ - непрерывная в $J$ функция. Пусть выполнено условие

$A$ : Для некоторого $c \in (a,b)$ функция

$$T_a(t) = \int_t^c \rho^{-1}(s) \int_s^c \upsilon(\tau) d\tau ds \quad \Big(T_b(t) = \int_c^t \rho^{-1}(s) \int_c^s \upsilon(\tau) d\tau ds\Big)$$

1) неинтегрируема в окрестности точки $a(b)$,

2)$\lim\limits_{t\to a} T_a(t) = \infty \quad \Big(\lim\limits_{t\to b} T_b = \infty\Big)$. Если $a(b)$ бесконечность, то условие А.1) всегда выполнено в силу монотонности функции . Если $a(b)$ конечна, то условие А.2) является следствием А.1). Кроме того, из условия А вытекает условие

$$\int_c^b \rho^{-1}(s) ds \int_c^b \upsilon(s) ds = \infty \quad \Big(\int_a^s \rho^{-1}(s) ds \int_a^c \upsilon(s) ds = \infty\Big).$$

Основным результатом является

**Теорема 1.** *Пусть выполнено условие A. Тогда уравнение (1) имеет два линейно независимых решения $y_+(x)$ и $Y_(x)$ , обладающие следующими свойствами: 1)$y_\pm > 0$, $y_\pm'(x) \neq 0$, $x \in J$;*

*2.1) $y_+$ монотонно убывает, $y_-$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{x\to b} y_+(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} y_-(x) = 0$ при $b = \infty$, $a = -\infty$ соответственно;*

*2.2)* $\lim\limits_{x\to b} y_+(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} y_+(x) = 0$, *при* $\int\limits_c^b v(s)ds = \infty$ *и* $b < \infty$, $\int\limits_a^c v(s)ds$ *и* $a < \infty$, *соответственно;* $c \in (a,b)$.

*3)* $\lim\limits_{x\to a} \rho(x)y'_-(x) = \lim\limits_{x\to b} \rho(x)y'_+(x) = 0$*;*

*4)* $\frac{1}{2}\varphi_\pm^{-1}(x)y_\pm(x) \le \mp\rho(x)y'_\pm \le 2\varphi_\pm^{-1}y_\pm(x)$, $x \in J$.

**Литература**. 1. Мынбаев К.Т., Отельбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988, 288 с. 2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с. 3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. 1978, 400 с.

## Об обратимости разностных операторов в весовых пространствах

*М.С. Бичегкуев*

(Владикавказ, СОГУ; bichegkuev@yandex.ru)

Пусть $X$ — комплексное банахово пространство и $LB(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $X$. Рассматривается функция (вес или весовая функция) $\alpha : \mathbb{Z}_+ \to (0,\infty)$, определенная на множестве неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Символом $l^p_\alpha = l^p_\alpha(\mathbb{Z}_+, X)$, где $p \in [1,\infty]$, обозначим банахово пространство последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to X$ векторов из $X$ суммируемых с весом $\alpha$: $\|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}\right)^p\right)^{1/p}$, $p \in [1,\infty)$, и ограниченных относительно $\alpha$: $\|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}$, $\quad p = \infty$.

Весовая функция $\alpha$ удовлетворяет условию: $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(n)}{\alpha(n+1)} < \infty$.

Получены необходимые и достаточные условия обратимости оператора

$$\mathcal{D}_E : D(\mathcal{D}_E) \subset l^p_\alpha \to l^p_\alpha, \quad (\mathcal{D}_E x)(n) = x(n+1) - Bx(n),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in l^p_\alpha.$$

с областью определения $D(\mathcal{D}_E) = \left\{x \in l^p_\alpha : x(0) \in E, \left(\frac{\alpha(n+1)}{\alpha(n)}x(n+1)\right)_{n\geqslant 0} \in l^p\right\}$, где $E$ — замкнутое подпространство из $X$ и оператор $B \in LB(X)$, используя следующие величины

$$æ_{\mathrm{int}}(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)}\right)^{1/n}, \quad æ_{\mathrm{out}}(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)}\right)^{1/n}.$$

**Теорема 1.** Пусть $æ_{\mathrm{int}}(\alpha) > 0$ и $E$ - инвариантное подпространство относительно оператора $B$. Для того, чтобы оператор $\mathcal{D}_E$ был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$([æ_{\mathrm{int}}(\alpha), æ_{\mathrm{out}}(\alpha)]\sigma(B)) \cap \mathbb{T} = \varnothing, \quad \mathrm{Im}P_{\mathrm{out}} = E,$$

где $P_{\text{out}}$ — проектор, построенный по спектральному множеству $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda|æ_{\text{int}}(\alpha) > 1\}$. При выполнении этих условий обратный оператор $\mathcal{D}_E^{-1} \in LB(l^p_\alpha)$ к $\mathcal{D}_E$ определяется формулой

$$(\mathcal{D}_E^{-1}y)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m-1)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ y \in l^p_\alpha,$$

где $G : \mathbb{Z} \to LB(X)$, $G(k) = B^k P_{\text{int}}, \quad k \geqslant 0$, и $G(k) = -B^k P_{\text{out}}, \quad k \leqslant -1$.

**Теорема 2.** Пусть $æ_{\text{int}}(\alpha) = 0$. Тогда для $E \neq \{0\}$ оператор $\mathcal{D}_E$ не является непрерывно обратимым. Если $E = \{0\}$, то оператор $\mathcal{D}_E$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $æ_{\text{out}}(\alpha)r(B) < 1$.

**Следствие.** Если $E = \{0\}$ и $æ_{\text{out}}(\alpha) = 0$, то оператор $\mathcal{D}_E$ непрерывно обратим.

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений// Изв.РАН. Сер.матем., 73:2 (2009), 3-68. 2. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов// Мат. сб. 193:11 (2002), 3-42.

## Об оценках норм семейства проекторов на пространстве типа конечных элементов и их приложения

*И.А. Блатов, Н.В. Добробог*

(Самара, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики; blatow@mail.ru, dogreen@mail.ru)

Всё большее значение для повышения точности численного решения, эффективности численных алгоритмов, позволяющих на порядок сократить компьютерные затраты времени и используемой памяти, приобретают методы адаптивных сеток. Эти подходы становятся особенно необходимы, например, в так называемых разномасштабных задачах гидро- и газодинамики, когда элементы потока на порядки отличаться от характерных размеров задачи, это тонкие пограничные слои при больших числах Рейнольдса, контактные разрывы, скачки уплотнения и др. В такой ситуации для получения достоверного численного решения необходимо использовать расчетные сетки с малыми пространственными шагами, что влечет значительные вычислительные затраты.

Для решения таких задач применяются численные методы на подвижных сетках, адаптирующихся к особенностям на основе апостериорной вычислительной информации. Процесс адаптации сетки к особенностям состоит в определении подобласти, на которой для уточнения решения требуется переизмельчение расчетной области. Использование адаптивных сеток является универсальным приемом при решении сингулярно возмущенных краевых задач.

Однако, несмотря на большое практическое значение и интерес к данной теме, остаются существенно менее изученными вопросы о строгом математическом обосновании сходимости адаптационных алгоритмов к некоторому предельному разбиению и получении оценок погрешности приближенного решения на этом предельном разбиении.

Мы рассматриваем вопросы сходимости алгоритмов адаптации численного решения сингулярно возмущенных краевых задач на основе метода конечных элементов. В основе математического обоснования сходимости метода и получения оценок погрешности приближенного решения лежит рассмотрение семейства ортопроекторов и биортогональные базисы [1]. Ключевым моментом в доказательстве является свойство квазиоптимальности галеркинских проекций, суть которого в равномерной по малому параметру ограниченности норм операторов проектирования.

Пусть $E$ – линейное нормированное пространство с нормой $\|.\|$ и $L : D(L) \subset E \to E$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Lu = f(t), \tag{2}$$

Предположим, что для любого $f(t) \in E$ уравнение (2) имеет единственное решение, т.е. оператор $L$ обратим.

Пусть $E_{n,p} \in E$, $n \in N$, $p \in R$ — семейство подпространств в $E$.

В дальнейшем через $C, C_1, C_2 \ldots$ будем обозначать положительные константы, не зависящие от $n$, $p$.

Рассмотрим в $E_{n,p}$ задачу отыскания приближенного решения уравнение (2)

$$L_{n,p}\, u_{n,p} = f_{n,p} \tag{3}$$

Предположим, что существуют такие $n_0 \in N$, $q_1$, $q_2 \in R$, что при $n \geq n_0$, $p \in [q_1, q_2]$ уравнение (3) имеет единственное решение $u_{n,p}$.

**Определение.** Линейный оператор $P_{n,p}\colon E \to E_{n,p}$ действующий по правилу $P_{n,p}u = u_{n,p}$ будем называть *галеркинским проектором*, соответствующим уравнению (3).

**Определение.** Метод (3) будем называть квазиоптимальным, если справедлива оценка $\|P_{n,p}\|_{E \to E} \leq C$, где $C$ не зависит от $n, p$.

Введем величину $\delta(p, n) = \inf_{v \in E_{n,p}} \|v - u\|$, которая характеризует точность наилучшего приближения $u$ в $E_{n,p}$.

Сделаем ряд предположений

**A1** Пусть для любого $n \in N$ : $\inf_{p \in R} \delta(p, n) = \delta_n > 0$, причем существует такое значение $p^* = p^*(n)$, что $\delta(p^*, n) = \delta_n$.

**A2** Существует последовательность $p_0 > p_1 > p_2 > \ldots > p_k > \ldots$, причем $p_0 > p^*$ и для некоторой константы $C_1$ при всех $p_k > p^*$ справедливо

$$\frac{\delta(p_{k-1}, n)}{\delta(p_k, n)} \geq C_1 > 1,$$

т.е. каждый последующий шаг улучшает аппроксимационные свойства пространства $E_{n,p_k}$.

**A3** Найдется константы $C_2 > 0$ такая, что $p_k - p_{k+1} \leq C_2$,.

**A4** Для любого $p < p^*$ справедливо $\delta(p, n) \leq g(p^* - p)\,\delta_n$, где $g(\tau) > 0$, $\tau \in [0; \infty)$ — непрерывная функция, $g(0) = 1$.

**A5** Проекционный метод (3) является квазиоптимальным в смысле определения 2.

Рассмотрим алгоритм отыскания приближенного решения уравнения (2), который будем называть алгоритмом адаптации. Для $n = 1, 2, 3, \dots$

I. фиксируем константу $C_3$

II. находим $u_{n,p_{k-1}}$, $u_{n,p_k}$

III. вычисляем $\mu_k = \|u_{n,p_{k-1}} - u_{n,p_k}\|$

IV. если $\mu_k > C_3\delta_n$, то $k := k+1$ и возвращаемся к п.2, иначе работа алгоритма закончена и найдено решение $u \approx u_{n,p_k}$.

**Теорема 1** *Найдутся такие константы $C_1 > 1$, $C_2$ $C_3$, $C_4 > 0$, что если предположения A1-A5 выполнены, тогда алгоритм (I)-(IV) закончит свою работу за $\bar{k} < K = \left[\log_q \frac{\delta_n}{\delta(p_0,n)}\right] + 1$ шагов, $q = \frac{1}{C_1}$, и будет справедлива оценка:*

$$\|u_{n,p_k} - u\| \le C_4 \inf_{p\in R} \delta(p,n). \tag{4}$$

**Литература.** 1. И.А.Блатов,Н.В.Добробог О квазиоптимальности метода конечных элементов Галеркина для сингулярно возмущенных краевых задач на сетках Шишкина. Вестник СамГУ, естественнонаучная серия, 2007, № 6(56), стр.119-132. 2. И.А.Блатов, В.В.Стрыгин. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем. Воронеж: ВГУ, 1997.

## О разрешимости квазистатической плоской задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе термоупругих тел[3]

*Е.М. Богатов*
(Старый Оскол, СТИ МИСиС; embogatov@inbox.ru)

Рассмотрим процесс переноса тепла в сечении $\Omega$ протяжённой связки чёрных цилиндрических тел при высокотемпературном боковом нагреве, считая, что эти тела плотно упакованы, изотропны и имеют выпуклое сечение с кусочно-гладкой границей. Этот процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений с начально-краевыми условиями, записанной

[3]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-12166

на основе [1], [2]

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}+\gamma T_c\frac{\partial}{\partial t}div\vec{u}=div(kgrad\,T),\quad (x,t)\in\Omega_{km}\times(0,\Theta) \tag{1}$$

$$div\hat{\sigma}=\gamma\nabla T\quad (x,t)\in\Omega_{km}\times(0,\Theta), \tag{2}$$

$$\left(k\frac{\partial T}{\partial\vec{\nu}}+h(T)\right)(\bar{x},t)=\sum_{q,r}\int\limits_{\partial\Omega'_{qr}}h(T(\xi,t))\varphi(\xi,\bar{x})dl_\xi \tag{3}$$

$$(\bar{x},t)\in\partial\Omega_{km}\times(0,\Theta)\quad\forall\{k,l\}:\ \partial\Omega_{km}\cap\partial\Omega=\emptyset$$

$$\left(k\frac{\partial T}{\partial\vec{\nu}}+h(T)\right)(\bar{x},t)=h(T_c)(\bar{x},t)+\sum_{q,r}\int\limits_{\partial\Omega'_{qr}}h(T(\xi,t))\varphi(\xi,\bar{x})dl_\xi, \tag{4}$$

$$(\bar{x},t)\in\partial\Omega_{km}\times(0,\Theta)\quad\forall\{k,l\}:\ \partial\Omega_{km}\cap\partial\Omega\neq\emptyset,$$

$$\sigma_{ij}\cdot n_j=\gamma(T-T_c)\cdot n_i,\quad (x,t)\in\partial\Omega_{km}\times(0,\Theta) \tag{5}$$

$$T(x,0)=T_0(x),\quad x\in\Omega_{km}; \tag{6}$$

$$u_i(x,0)=0,\quad x\in\Omega_{km}. \tag{7}$$

Здесь $\Omega_{km}$ - сечение выбранного тела; $T(x,t)$ - искомая температура, $x=(x_1,x_2)$- эйлеровы координаты; $T_0=T_0(x)$ - начальная температура ;
$i=1,2,\ j=1,2$; $c,\rho$, и $k$- коэффициенты удельной теплоемкости, плотности и теплопроводности; $\alpha$ - температурный коэффициент линейного расширения; $\lambda,\mu$ - постоянные Ламе; $\gamma=(3\lambda+2\mu)\alpha$; $\vec{\nu}=\{n_1,n_2\}$ - вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega_{km}$; $\partial\Omega'_{qr}$ - части границ соседних с $\Omega_{km}$ компонент, видимых из точки $\bar{x}$; $T_c=T_c(x,t)>0$- температура внешней среды; $\vec{u}=\{u_1,u_2\}$ - вектор перемещений, $u_i=u_i(x,t)$; $\sigma^0_{ij}$- компоненты тензора начальных напряжений; $\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$ - компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}$; $\kappa_0=const$; $h\left(T\right)=\kappa_0\left|T\right|^3\cdot T$- плотность потока теплового излучения по закону Стефана-Больцмана; $\varphi(\bar{x},\xi)$ - содержательная часть элементарного углового коэффициента излучения; $\partial\Omega$ - часть границы $\Omega$, контактирующая с внешней средой.

Предполагается, что мера пересечения $\Omega_{km}\cap\Omega_{qr}$ для любых $k\neq q,m\neq r$ равна нулю.

Для функций из класса $L^2\left((0,T),L^2(\Omega)\right)$ положим $<u,v>=\int\limits_{\Omega_{km}}uvdx$. Аналогично для функций из класса $X=L^2\left((0,T),L^5(\partial\Omega)\right)$ введём обозначение
$(f,\varphi)=\int\limits_{\partial\Omega_{km}}f\varphi dS_x$.

Обозначим $Q=\Omega\times(0,\Theta)$, $V(Q)=H^1\left((0,T),H^1(\Omega)\cap L^5(\partial\Omega)\right)$. Следуя [3], определим $\forall\hat{T}\in V(Q)$

$$(A(T),\hat{T})_\Sigma=\int\limits_{\partial\Omega_{km}}\kappa_0|T|^3T\cdot\hat{T}dl_x-\int\limits_{\partial\Omega_{km}}\left(\sum_{q,r}\int\limits_{\partial\Omega'_{qr}}h(T(\xi,t))\varphi(\xi,\bar{x})dl_\xi\right)\hat{T}dl_x.$$

Обозначим $W(Q) = H^1\left((0,T), H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\right)$;
$V_0$ - множество функций $\{T(x,t) \in V(Q) | T(x,0) = T_0\}$;
$W_0$ - множество функций $\{\vec{u}(x,t) \in W(Q) | \vec{u}(x,0) = 0\}$.

**Определение 1** *Слабым решением задачи (1)-(7) будем называть набор* $(T, \vec{u}) \in V_0 \times W_0$, *удовлетворяющий уравнению*

$$< \frac{d}{dt}\left(c\rho T + \gamma T_c div\vec{u}\right), \hat{T} > + < k\nabla T, \nabla \hat{T} > + (A(T), \hat{T})_\Sigma +$$
$$+ \gamma < T, div\vec{v}_t > -2\mu < \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}^t(v) > -\lambda < div\vec{u}, div\vec{v}_t > =$$
$$= (f, \hat{T}) + \gamma(T_c, \vec{v}_t \cdot \vec{n}) \quad \forall \left(\hat{T}, \vec{v}\right) \in V_0 \times W_0,$$

*где* $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ *- компоненты тензора деформаций;*
$\varepsilon_{ij}^t(v) = \frac{\partial \varepsilon_{ij}(v)}{\partial t}$; $f = \begin{cases} h(T_c), & \text{если } \partial\Omega_{km} \cap \partial\Omega \neq \emptyset \\ 0, & \text{если } \partial\Omega_{km} \cap \partial\Omega = \emptyset. \end{cases}$

**Теорема 2** *Пусть* $f(x,t) \in X$; $T_0 \in L^2(\Omega)$, *тогда существует единственное слабое решение задачи (1)-(7), непрерывно зависящее от начальных данных.*

Автор выражает признательность профессорам А.М. Мейрманову и А.А. Амосову за полезные обсуждения.

**Литература.** 1. Амосов А. А., Богатов Е. М., Савина Ю. В. Полудискретное приближение к задаче нагрева излучением периодической системы труб // Математические методы в технике и технологиях. Сб. трудов XXI Международ. науч. конф.: в 10 т. Т.1 Саратов, 2008. с.100-102. 2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 3. Амосов А.А. Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. уравн., 2005, Т.41, №1, с. 93-104.

## Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с гистерезисной нелинейностью

*В.И. Борздыко*
(Институт Математики АН Республики Таджикистан. г. Душанбе)

В соответствии с подходом к системам с гистерезисом, развитым в [1], рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения с гистерезисной нелинейностью в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = f[t, z(t), \omega(t)], \tag{1}$$

$$\omega(t) = T(t_0, z_0, \omega_0)z(t), \tag{2}$$

$$z(t_0) = z_0, \quad \omega(t_0) = \omega_0. \tag{3}$$

Предполагается, что оператор $T(t_0, z_0, \omega_0)$- это статический или переменный гистерон [1, 2], который каждой абсолютно непрерывной функции $z(t) \in C[t_0, t_1]$, $z(t_0) = z_0$, ставит в соответствие функцию $\omega(t) \in C[t_0, t_1]$, $\omega(t_0) = \omega_0$, и удовлетворяет условию Липшица в пространстве $C[t_0, t_1]$ с постоянной $k$. Используя принцип Шаудера о неподвижной точке, при соответствующих требованиях к функции $f(t, z, \omega)$, для задачи (1)–(3) доказана теорема существования решения типа теоремы Каратеодори для обыкновенных дифференциальных уравнений. Получен уточнений признак единственности решения для (1) – (3) типа теорем О. Перона и А. Розенблатта. Обозначим $\mu = \max\{1, k\}$.

**Теорема.** *Пусть функция $f(t, z, \omega)$ ограничена и непрерывна на множестве $G : t_0 < t \le T,\ |z - z_0| \le a,\ |\omega - \omega_0| \le b$, и удовлетворяет на $G$ неравенству $|f(t, z_1, \omega_1) - f(t, z_2, \omega_2)| \le l(t - t_0)^{-1} \cdot \sup\{|z_1 - z_2|, |\omega_1 - \omega_2|\}$. Пусть $\{z_1(t), \omega_1(t)\}$, $\{z_2(t), \omega_2(t)\}$ какие-либо два решения задачи (1)–(3) в области $G$, определенные на отрезке $[t_0, t_1]$, $t_1 \le T$. Тогда, если $0 < m = l\mu \le 1$, то эти решения либо совпадают, либо при $m = 1$ возможно тождество $[z_1(t) - z_2(t)](t - t_0)^{-1} \equiv c = konst, c \ne 0, t_0 < t \le t_1$.*

**Литература.** 1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. – М: Наука, 1983. – 271с. 2. Борздыко В.И. Гистерезисные нестационарные нелинейности // Украiн-ський математичний журнал (Украинский математический журнал) – 2008. – т. 60, №3. –С. 295–309.

## Об исследовании систем “хищник-жертва” с непрерывным запаздыванием на существование положительного периодического решения

*В.И. Борздыко*

(Институт Математики АН Республики Таджикистан. г. Душанбе)

Используя несколько уточненный метод, разработанный ранее автором на основе "альтернативного принципа"М.А. Красносельского для функционально-дифференциальных уравнений, доказана теорема о существовании положительного $\omega$ - периодического решения $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $t \in [0, \infty)$ у нескольких систем "хищник-жертва", одна из которых имеет вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a(t)x_1(t) - b_1(t)x_1(t) \int_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_1(t,h) -$$

$$-c_1(t)x_1(t) \int_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_2(t,h) + f(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -e(t)x_2(t) - b_2(t)x_2(t) \int_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_3(t,h) +$$

$$+c_2(t)x_2(t) \int_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_4(t,h) + g(t) \tag{1}$$

Предполагается, что функции $\alpha_j(t, h)$, $j = 1, ..., 4$ в системе (1) монотонно не убывают по $h$ и непрерывны по $h$ при каждом $t \in [0, \infty)$, измеримы по $t$ на

$0 \le t \le \omega$ при фиксированном $h \in [0,\infty)$; $\alpha_j(t+\omega,h) \equiv \alpha_j(t,h)$ при любом $h \in [0,\infty)$, $0 < l_j^{(0)} \le \int_0^\infty d_h\alpha_j(t,h) \le \overline{l_j} < +\infty$, $\alpha_j(t,0) \equiv 0$ при $t \in [0,\infty)$, $j = 1,...,4$.

Относительно коэффициентов и свободных членов системы (1) предполагается, что они непрерывны, неотрицательны, $\omega$ - периодичны и удовлетворяют нескольким естественным необременительным условиям. Из доказанной теоремы вытекают достаточные условия существования положительного $\omega$ - периодического решения у системы "хищник-жертва"Р.М. Мея, отличающиеся от достаточных условий, полученных для нее в [1] другим методом.

**Литература.** 1. Yongkun Li. Periodic solutions of periodic delay predator-prey system // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1999. – V.127, №5. – P.1331-1335.

## Вторая смешанная моментная функция решения уравнения диффузии с гауссовскими случайными коэффициентами

*М.М. Боровикова*
(Воронеж, ВГУ; monnya@yandex.ru )

Рассматривается начальная задача для уравнения диффузии

$$u_t = \varepsilon_1(t)u_{xx} + \varepsilon_2(t)u_{yy} + \varepsilon_3(t)u + f(t,x,y), \tag{1}$$

$$u(t_0,x,y) = g(x,y), \tag{2}$$

где $t \in [t_0,t_1] = T \subset \mathbb{R}$, $x,y \in \mathbb{R}$, $u(t,x,y)$ - искомая функция, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,f$ - случайные процессы, независящие от случайного процесса $g$.

Пусть $L_1(T)$ - пространство суммируемых на $T$ функций, $L_\infty(T)$ - пространство существенно ограниченных на $T$ функций, $*$ - знак свертки по переменным $(x,y)$, $M$ - знак математического ожидания.

Задача состоит в нахождении второй смешанной моментной функции решения задачи (1), (2).

**Теорема.** *Пусть случайные процессы $\varepsilon_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ не зависят от процесса $f(t,x,y)$ и распределены по нормальному закону распределения с характеристическим функционалом [1, с. 31]*

$$\varphi(v_1,v_2,v_3) = \exp(\sum_{j=1}^{3}[i\int_T M(\varepsilon_j(s))v_j(s)ds - \frac{1}{2}\int_T\int_T b_j(s_1,s_2)v_j(s_1)v_j(s_2)ds_1ds_2]),$$

*где $v_j \in L_1(T)$, $M(\varepsilon_j) \in L_\infty(T)$, $b_j \in L_\infty(T\times T)$, $b_j(s_1,s_2) = M(\varepsilon_j(s_1)\varepsilon_j(s_2)) - M(\varepsilon_j(s_1))M(\varepsilon_j(s_2))$ - ковариационная функция случайного процесса $\varepsilon_j(t)$ $(j = 1,2,3)$. Пусть, кроме того, функционал $\varphi$ имеет непрерывные по $v_1$, $v_2$, $v_3$ вариационные производные до второго порядка включительно, $M(g(x,y))$ суммируемо на $\mathbb{R}^2$, $M(f(t,x,y))$ суммируемо на $T\times\mathbb{R}^2$. Тогда вторая смешанная моментная функция решения задачи (1), (2) (в смысле обобщенных функций) имеет вид*

$$M(u(t,x,y)\varepsilon_1(s)) = \frac{N(t_0,t)}{4\pi\sqrt{M_1(t_0,t)M_2(t_0,t)}}(M(\varepsilon_1(s))E(t_0,t,x,y)+$$

$$+G(t_0,t,s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(t_0,t,x,y))*\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_1^k(t_0,t)B_2^m(t_0,t)}{2^{(k+m)}k!m!}\frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k}\partial y^{4m}}M(g(x,y))+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{N(\tau,t)}{4\pi\sqrt{M_1(\tau,t)M_2(\tau,t)}}(M(\varepsilon_1(s))E(\tau,t,x,y)+G(\tau,t,s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(\tau,t,x,y))*$$

$$*\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_1^k(\tau,t)B_2^m(\tau,t)}{2^{(k+m)}k!m!}\frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k}\partial y^{4m}}M(f(\tau,x,y))d\tau,$$

*где* $B_j(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}b_j(s_1,s_2)ds_1ds_2$, $M_j(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}M(\varepsilon_j(s))ds$, $j=1,2$,

$$E(t_0,t,x,y)=\exp(-\frac{x^2}{4M_1(t_0,t)}-\frac{y^2}{4M_2(t_0,t)}),G(t_0,t,s)=\int_{t_0}^{t}b_1(\tau,s)d\tau,$$

$$N(t_0,t)=\exp(\int_{t_0}^{t}M(\varepsilon_3(s))ds+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}b_3(s_1,s_2)ds_1ds_2).$$

**Литература.** 1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа. – М. - Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований. 2006. – 316 с. 2. Боровикова М.М. Вторая смешанная моментная функция решения двумерного уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XIX". – Воронеж. 2008. – С. 54 - 55.

## О резольвентной сравнимости сужений линейных отношений[4]

*В.М. Брук*

(Саратов, СГТУ; vladislavbruk@mail.ru )

Далее используются следующие обозначения. Если $M$ – линейное отношение, то $\ker M$ – множество элементов $x$ таких, что пара $\{x,0\}\in M$; $\mathrm{Ker}M$ – множество пар $\{x,0\}\in M$; $\rho(M)$ – резольвентное множество $M$; $\mathfrak{S}_p$ $(p\geqslant 1)$ – идеал Неймана-Шэттена в кольце ограниченных линейных операторов; $\mathfrak{S}_\infty$ – множество всех вполне непрерывных операторов.

Пусть $H$, $G_1$, $G_2$ – гильбертовы пространства, $T\subset H\times H$ – замкнутое линейное отношение с областью значений $\mathcal{R}(T)=H$; $\delta:T\to G_1\times G_2$ – линейный оператор. Обозначим $\delta_i=p_i\delta$ $(i=1,2)$, где $p_i$ – проектор $G_1\times G_2$ на $G_i$.

**Определение** [1]. Четверка $(G_1,G_2,\delta_1,\delta_2)$ называется пространством граничных значений для отношения $T$, если оператор $\delta$ непрерывно отображает $T$ на $G_1\times G_2$ и сужение оператора $\delta_1$ на $\mathrm{Ker}T$ является взаимно однозначным отображением $\mathrm{Ker}T$ на $G_1$.

Обозначим $T_0=\ker\delta$, $\Phi=\delta_2\beta$, где $\beta=(\delta_1|_{\mathrm{Ker}T})^{-1}$ – оператор, обратный к сужению $\delta_1$ на $\mathrm{Ker}T$. Между отношениями $\theta\subset G_1\times G_2$ и отношениями $S$ со

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00131

свойством $T_0 \subset S \subset T$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\delta S = \theta$. В этом случае пишем $S = T_\theta$. Можно доказать [1], что $\overline{T_\theta} = T_{\overline{\theta}}$ и $0 \in \rho(T_\theta)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \rho(\theta - \Phi)$.

В следующих утверждениях предполагается, что $\theta_i \subset G_1 \times G_2$ – замкнутые линейные отношения, $0 \in \rho(\theta_i - \Phi)$. Обозначим $N_i = (\theta_i - \Phi)^{-1}$ $(i = 1, 2)$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\lambda \in \rho(T_{\theta_1}) \cap \rho(T_{\theta_2})$, $R_\lambda^{(i)} = (T_{\theta_i} - \lambda E)^{-1}$ $(i = 1, 2)$. *Оператор* $R_\lambda^{(1)} - R_\lambda^{(2)} \in \mathfrak{S}_p$ *тогда и только тогда, когда оператор* $N_1 - N_2 \in \mathfrak{S}_p$, *где* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

**Следствие.** *Если оператор* $N_1 - N_2$ *вполне непрерывен, то существенные спектры отношений* $T_{\theta_1}$ *и* $T_{\theta_2}$ *совпадают.*

**Теорема 2.** *Пусть* $\lambda \in \rho(T_{\theta_1})$, $\mu \in \rho(T_{\theta_2})$ *и резольвента* $R_\lambda^{(1)} \in \mathfrak{S}_p$. *Резольвента* $R_\mu^{(2)} \in \mathfrak{S}_p$ *тогда и только тогда, когда* $N_1 - N_2 \in \mathfrak{S}_p$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\lambda \in \rho(T_{\theta_1})$, $\mu \in \rho(T_{\theta_2})$, *резольвента* $R_\lambda^{(1)}$ *является вполне непрерывным оператором и* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(R_\lambda^{(1)}) = a$ $(\alpha > 0)$. *Для выполнения равенства* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(R_\mu^{(2)}) = a$ *достаточно, чтобы* $N_1 - N_2$ *был вполне непрерывным оператором и* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha s_n(N_1 - N_2) = 0$. Здесь $s_n$ – $s$-числа соответствующего оператора, $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 4.** *Пусть* $\lambda \in \rho(T_{\theta_1})$, $\mu \in \rho(T_{\theta_2})$, $R_\lambda^{(1)}$ *является вполне непрерывным оператором и* $\lim_{n\to\infty} n^\beta s_n(R_\lambda^{(1)}) = 0$ $(\beta > 0)$. *Если оператор* $N_1 - N_2$ *вполне непрерывен, то для выполнения при* $\delta \leqslant \beta$ *и при всех* $n$ *неравенства* $b_1 \leqslant n^\delta s_n(R_\mu^{(2)}) \leqslant b_2$ $(0 < \delta,\ 0 < b_1, b_2 < \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $n$ *выполнялось неравенство* $c_1 \leqslant n^\delta s_n(N_1 - N_2) \leqslant c_2$ $(0 < c_1, c_2 < \infty)$.

**Литература.** 1. Брук В.М. О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами//Диф. уравн. 2007.–Т.43, № 1.–С. 21-27.

## Упруго-пластическая деформация изотропного твёрдого тела

*В.М. Бугаков, В.Б. Огарков*
(ВГЛТА)

Определяющая система уравнений для изотропного упруго-пластического тела по деформационной теории имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \qquad (5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \tag{6}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};\ \ldots \tag{8}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right);\ \ldots \tag{9}$$

$$\sigma_x - \sigma_0 = \psi_1(\varepsilon_x - \varepsilon_0);\ \sigma_y - \sigma_0 = \psi_1(\varepsilon_y - \varepsilon_0);\ \sigma_z - \sigma_0 = \psi_1(\varepsilon_z - \varepsilon_0) \tag{10}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\psi_1}{2}\gamma_{xy};\quad \tau_{yz} = \frac{\psi_1}{2}\gamma_{yz};\quad \tau_{xz} = \frac{\psi_1}{2}\gamma_{zx};\quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K} \tag{11}$$

$$\psi_1 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i};\quad \varepsilon_0 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{3};\quad \sigma_0 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3} \tag{12}$$

Условие пластичности Хубера-Мизеса:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T \tag{13}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \tag{14}$$

Из соотношений (10) можно получить:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z + \psi[2\sigma_x + \ \sigma_y - 3\sigma_0] \tag{15}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z + \psi[2\sigma_y + \ \sigma_x - 3\sigma_0] \tag{16}$$

При выполнении формул (15) и (16) третье соотношение (10) выполняется автоматически.

Подставим формулы (15) и (16) в последнее соотношение (11):

$$\psi = \frac{\left[\frac{1}{3K}(\sigma_x + \ \sigma_y + \sigma_z) - 3\varepsilon_z\right]}{\sigma_x + \ \sigma_y - 2\sigma_z} \tag{17}$$

$$\psi = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{18}$$

Если подставить в соотношение (18) формулы (15), (16) и (17), то оно будет выполнено тождественно.

Подставим соотношения Коши (5)-(7) в закон Гука (11):

$$\tau_{xy} = \frac{\psi_1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{19}$$

$$\tau_{yz} = \frac{\psi_1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tag{20}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\psi_1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tag{21}$$

Соотношения (1), (2), (3), (13), (19), (20), (21) и первые две формулы (10) представляют собой замкнутую систему девяти уравнений относительно девяти неизвестных $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz},\ u_x,\ u_y,\ u_z$.

Решение данной системы уравнений реализует полное пластическое состояние по всему объёму тела и впервые позволяет рассмотреть вопрос о расчёте слоистых упруго-пластических тел по деформационной теории.

**Литература.** 1. Н.Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. «Машиностроение», 1975, 400с.

## Асимптотическое решение двухточечной краевой задачи для сингулярно возмущённой дифференциально-алгебраической системы

*М.Б. Вира, В.П. Яковец*

(Украина, Нежин, НГУ им. Н.Гоголя; VyraMaryna@mail.ru,

Киев, Университет менеджмента образования АПН Украины;

Vasyl.Yakovets@gmail.com )

Рассматривается вопрос о построении асимптотического решения краевой задачи

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon); \tag{1}$$

$$Px(0,\varepsilon) + Qx(1,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

где $x(t,\varepsilon)$ — искомый $n-$мерный вектор, $t \in [0;1]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малый вещественный параметр, $h \in N$; $A(t,\varepsilon), B(t)$ — квадратные матрицы $n-$го порядка; $P, Q$ — $l \times n$-матрицы с постоянными елементами; $f(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — соответственно заданные $l-$ и $n-$мерные векторы.

При этом, предполагается выполнение следующих условий:

1) $\det B(t) = 0, \forall t \in [0;1]$;

2) матрица $A(t,\varepsilon)$ и вектор $f(t,\varepsilon)$ допускают на отрезке $[0;1]$ равномерные асимптотические разложения:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t),$$

3) коефициенты $f_k(t)$, $A_k(t)$ и матрица $B(t)$ - бесконечно дифференцированы на отрезке $[0;1]$;

4) предельный пучок матриц

$$A_0(t) - \lambda B(t) \tag{3}$$

регулярный при всех $t \in [0;1]$ и имеет постоянную кронекерову структуру.

В работах [1],[3] рассматриваются краевые задачи вида (1), (2), в которых $B(t)$ — единичная матрица.

Нами доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1 [2].** Если предельный пучок матриц (3) имеет $n-1$ простых конечных елементарных делителей $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ и простой бесконечный, а также выполняются условия:

$1^\circ det A_0(t) \neq 0, \forall t \in [0;1]$;

$2^\circ Re\lambda_i(t) < 0, i = \overline{1, n-1}, \forall t \in [0;1]$;

$3^\circ rank Q_0(\varepsilon) = n-1$,

$4^\circ P_{Q_0^*(\varepsilon)}[l_k - Q_1(\varepsilon)\widetilde{c}_{k-1}(\varepsilon) - \ldots - Q_k(\varepsilon)\widetilde{c}_0(\varepsilon)] = 0, k = 0, 1, ...,$

где

$$Q_k(\varepsilon) = [Mu_k^{(1)}(0) + Nu_k^{(1)}(1)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_1(t,\varepsilon)dt), \ldots,$$

$$Mu_k^{(n-1)}(0) + Nu_k^{(n-1)}(1)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_{n-1}(t,\varepsilon)dt)],$$

$$l_k = d_k - M\widetilde{v}_k(0) - N\widetilde{v}_k(1),$$

$P_{Q_0^*(\varepsilon)}$ — матрица-ортопроэктор [1], то при достаточно малом $\varepsilon$ краевая задача (1), (2) имеет единственное асимптотическое решение вида

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)dt)\widetilde{c}_m^{(i)}(\varepsilon) + v_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h+1}),$$

где $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$; $v_m(t,\varepsilon)$ — $n-$мерные вектор-функции, $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$ — скалярные функции, изображающиеся разложениями

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n-1},$$

$$\widetilde{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t).$$

**Теорема 2.** Если предельный пучок матриц (3) имеет конечный елементарный делитель $(\lambda - \lambda_0)^p$ кратностью $p$ и один бесконечный кратностью $q$ $(q + p = n)$, а также выполняются условия

$1^\circ \lambda_0(t) \neq 0, \forall t \in [0;1]$;

$2^\circ Re\lambda_0(t) < 0, \forall t \in [0;1]$;

$3^\circ Re(\Gamma_1\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) > 0, \forall t \in [0;1]$,где $\Gamma_1 = A_1 - B\frac{d}{dt}$; $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ — нули матриц $B(t)$ и $B^*(t)$ соответственно;

$4^\circ rankQ(\varepsilon) = n-1$, где

$$Q(\varepsilon) = MU(0,\varepsilon) + NU(1,\varepsilon)exp(\varepsilon^{-1}\int_0^1 \Lambda(t,\varepsilon)dt),$$

$$U(t,\varepsilon) = [u_1(t,\mu_1),\dots,u_p(t,\mu_1)), v_1(t,\mu_2),\dots,v_{q-1}(t,\mu_2))],$$

$$\Lambda(t,\varepsilon) = diag\{\lambda_1(t,\mu_1),\dots,\lambda_p(t,\mu_1),\frac{1}{\xi_1(t,\mu_2)},\dots,\frac{1}{\xi_{q-1}(t,\mu_2)}\},$$

$$\mu_1 = \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \mu_2 = \varepsilon^{\frac{1}{q-1}},$$

$5^\circ P_{Q^*}l(\varepsilon) = 0$, где $l(\varepsilon) = d(\varepsilon) - M\widetilde{v}(0,\varepsilon) - N\widetilde{v}(1,\varepsilon)$, то при достаточно малых $\varepsilon$ краевая задача (1), (2)(при $h = 1$) имеет единственное асимптотическое решение вида

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} u_m^{(i)}(t,\mu_1)exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t(\lambda_0(t)+\lambda_i(t,\mu_1))dt)c_m^{(i)}(\mu)+$$

$$+\sum_{j=1}^{q-1} v_m^{(j)}(t,\mu_2)exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\frac{dt}{\xi_j(t,\mu_2)})\overline{c}_m^{(j)}(\mu) + \widetilde{v}_m(t,\mu) + O(\varepsilon^{\alpha-1-\frac{p-1}{p}}),$$

где $\alpha = min(\frac{m+2}{q-1},\frac{m+2}{p})$, $u_m^{(i)}(t,\mu_1)$, $i = \overline{1,p}$, $v_m^{(j)}(t,\mu_2)$, $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)-$ $n-$мерные вектор-функции, $\lambda_i(t,\mu_1)$, $i = \overline{1,p}$, $\xi_j(t,\mu_2)$, $j = \overline{1,q-1}$ — скалярные функции изображающиеся разложениями

$$u_m^{(i)}(t,\mu_1) = \mu_1^{-(p-1)}\sum_{k=0}^{m}\mu_1^k u_k^{(i)}(t); \lambda_i(t,\mu_1) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{p-1}\mu_1^k\lambda_k^{(i)}(t); i = \overline{1,p};$$

$$v_m^{(j)}(t,\mu_2) = \mu_2^{-(q-2)}\sum_{k=0}^{m}\mu_2^k v_k^{(j)}(t); \xi_j(t,\mu_2) = \sum_{k=1}^{q}\mu_2^k\xi_k^{(j)}(t), j = \overline{1,q-1},$$

$$\mu_1 = \sqrt[p]{\varepsilon}, \mu_2 = \sqrt[q-1]{\varepsilon}, \mu = \sqrt[p(q-1)]{\varepsilon}.$$

**Литература.** 1. Бойчук А.А., Журавлёв В.Ф., Самойленко А.М. Обобщённо-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Інститут математики. 1995. – 318 с. 2. Віра М.Б. Асимптотика розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи // Динамические системы. – Симферополь. - 2009. - Вып. 26 - С.13-24. 3. Каранджулов Л.И., Бойчук А.А., Божко В.А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённой линейной краевой задачи // Докл. НАН Украины. – Киев. - 1994. - №4 - С.7-10.

# О спектральной задаче Стефана с классическим условием

*В.И. Войтицкий*
(Симферополь, ТНУ; victor.voytitsky@gmail.com )

Рассматривается следующая спектральная задача:

$$-\Delta u_j = \lambda u_j \quad (\text{в } \Omega_j), \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = -\lambda \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2}$$

$$u_1 + \varphi_1(x)\zeta = 0 \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{3}$$

$$u_2 + \varphi_2(x)\zeta = 0 \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{4}$$

$$u_j = 0 \qquad (\text{на } S_j). \tag{5}$$

Здесь неизвестные функции $u_j(x)$ заданы в областях $\Omega_j \subset \mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\Gamma \cup S_j$, функция $\zeta(x)$ задана на общей части границы $\Gamma$. Заданные функции $\varphi_j(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_j(x) \in C(\Gamma): \quad 0 < \alpha_j \le \varphi_j(x) \le \beta_j \le +\infty, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Данная задача описывает поведение нормальных решений задачи Стефана с классическим условием на малом отрезке времени.

Доказано, что из собственных элементов задачи (1)–(5) можно составить базис Абеля-Либского в пространстве $F_0 := \{u = (u_1, u_2) \in H^1_{0,S_1} \oplus H^1_{0,S_2}, \varphi_2(x)u_1 = \varphi_1(x)u_2\}$. При этом функция $\zeta$ однозначно восстанавливается по $u$.

Спектр задачи (1)–(5) состоит из изолированных конечнократных собственных значений $\lambda_n$ с единственной предельной точкой $+\infty$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ все $\lambda_n$ за исключением, быть может, конечного числа лежат в угле $-\varepsilon < \arg \lambda_n < \varepsilon$, причем для достаточно больших $n$ выполнено неравенство

$$|\lambda_n| \ge c n^{\frac{1}{m-1}}, \tag{7}$$

где некоторая константа $c > 0$, а $m$ — размерность областей $\Omega_j$.

В частном случае, при выполнении условия $\varphi_1(x)/\varphi_2(x) = const > 0$, задача (1)–(5) имеет собственный ортонормированный базис в $F_0$, а спектр состоит из положительных конечнократных собственных значений $\lambda_n$ таких, что для достаточно больших $n$ выполнена двусторонняя оценка $c_1 n^{\frac{1}{m-1}} \le \lambda_n \le c_2 n^{\frac{1}{m-1}}$.

**Литература.** 1. Visintin A. Models of Phase Transitions // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Boston: Birkhäuser. – 1996. – Vol. 28. – 322 pp. 2. Birman M.S., Solomjak M.Z. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. – Dordrecht: D.Reidel Publishing Company, 1987. – 300 pp. 3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

# Оценки решений линейных разностных уравнений

*А.А. Воробьев*
(Воронеж, ВГУ; antonvsu@gmail.com)

Пусть $H$ - гильбертово пространство и $EndH$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $H$. Символом $\ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, H)$, где $p \in [1, \infty]$ обозначим банахово пространство двусторонних последовательностей векторов из $H$, суммируемых со степенью $p$ для $p \in [1, \infty)$ и ограниченных для $p = \infty$, с нормой

$$\|x\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p)^{1/p}, 1 \leq p \leq +\infty,\ \|x\|_\infty = \sup_{k\in Z} \|x(n)\|,$$

Рассмотрим линейные разностные уравнения вида

$$x(n) - Ax(n-1) = f(n),$$

где $x$,$f$ - последовательности из $\ell_p$, $p \in [1, \infty]$, а $A \in EndH$ - линейный оператор, для которого верно следующее условие

$$\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \tag{1}$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in\ : |\lambda| = 1\}$. Здесь стоит отметить, что спектр $\sigma(A)$ оператора $A$ представим в виде $\sigma(A) = \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_{int} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > 1\}$. Поэтому пространство $H$ можно записать в следующем виде

$$H = H_{int} \oplus H_{out},$$

где $H_{int} = ImP_{int}$ - образ проектора Рисса, построенного по спектральной компоненте $\sigma_{int}$ и $H_{out} = ImP_{out}$, где $P_{out} = I - P_{int}$. Подпространства $H_{int}$ и $H_{out}$ инвариантны относительно оператора $A$. Поэтому он представим в виде $A = A_{int} \oplus A_{out}$, где $A_{int}$ и $A_{out}$ - сужения оператора $A$ на $H_{int}$ и $H_{out}$ соответственно, причем $\sigma(A_{int}) = \sigma_{int}$ и $\sigma(A_{out}) = \sigma_{out}$. Следовательно, $r(A_{int}) < 1$. Оператор $A_{out}$ обратим и $r(A_{out}^{-1}) < 1$.

Для того, чтобы разностный оператор $(Dx)(n) = x(n) - Ax(n-1), n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, X)$ был обратим необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1). Тогда обратный оператор имеет вид

$$(D^{-1}f)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(n-k)f(k), n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, H), \tag{2}$$

где $f \in \ell_p, n \in \mathbb{Z}$. Функция $G : \mathbb{Z} \longrightarrow EndH$, определяется равенствами

$$G(n) = \begin{cases} A^n P_{int}, & n \geq 0, \\ -B^{-n} P_{out}, & n < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где оператор $B \in EndH$ однозначно определяется из условий: $Bx = 0$, $x \in ImP$, $ABy = BAy = y$, $y \in D(A) \cap ImQ$ (т.е. $B$ совпадает на $ImQ$ с обратным к сужению $A$ на $ImQ \cap D(A)$). Соответствующий результат можно найти в статье [1].

Для оценки функции Грина $G(k)$ зафиксируем некоторое число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $1 < m < k$, и рассмотрим величину

$$\gamma_m(A) = \sup_{\gamma \in \mathbb{T}} \|R^m(\gamma, A)\|^{\frac{1}{m}}. \tag{4}$$

Тогда $k$ можно представить в виде $k = lm + p$, где $0 \le p \le m-1$ – остаток.

Справедлива

**Теорема 1** *Для функции Грина* (3) *справедлива следующая оценка*

$$\|G(k)\| \le \frac{C}{4^k}\sqrt{k}\ dist(\sigma(A), \mathbb{T})^{-l},$$

*где* $C = 2 \max\limits_{0 \le p \le m-1} \| \sup\limits_{0 \le t \le 2\pi} R^{p+1}(e^{it}, A)\| \max\limits_{0 \le p \le m-1} \frac{1}{\gamma_m(A)^p}$.

**Следствие 1** *В частном случае, при* $m = 1$, *рассмотрим величину*

$$\gamma(A) = \sup_{\gamma \in \mathbb{T}} \|R(\gamma, A)\|.$$

*Тогда справедливо неравенство*

$$\|G(k)\| \le \frac{1}{4^k}\ 2\sqrt{k}\ \gamma(A)^{(k+1)}.$$

**Теорема 2** *Для оператора* (2) *справедлива следующая оценка*

$$\|D^{-1}\| \le 2C\left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma_m(A)}{4}}\right)^2.$$

**Литература.** 1. Баскаков А.Г., Пастухов А.И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэфициентами. // Сибирский математический журнал. 2001. Т.42. №.6 – С.1231-1242. 2. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Math. Anal. Appl. 2005. V. 38. P. 420-439.

## О безусловной базисности несепарабельных всплесков типа Мейера в пространствах Лизоркина-Трибеля

*С.А. Гарьковская*
(Воронеж; GarkovskayaSA@yandex.ru)

Пусть $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ — масштабирующая функция типа Мейера и всплеск-функция типа Мейера, соответствующие кратномасштабному анализу с матричным коэффициентом расширения $M$, где $M$ — целочисленная растягивающая матрица, $\det M = \pm 2$. Построение несепарабельных всплесков типа Мейера для таких матриц описано в [1]. Обозначим

$$\psi_{j,k}(x) := |detM|^{j/2}\psi(M^j x - k) \text{для } j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n.$$

**Теорема:** *Система* $\Psi = \{\varphi_{0k}, \psi_{jk}\}_{j=0,1,2,\dots,\ k\in\mathbb{Z}^2}$ *ортонормирована в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *и образует безусловный базис в пространствах* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ *при* $1 < q \leqslant \infty$, $1 < p < \infty$, *то есть для любой* $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_0^0 \varphi_{0k} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_{jk}\psi_{jk} \ \text{и}$$

$$\left\| f | F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2) \right\| \sim \Bigg\| \Bigg( \Big( \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |c^0_{0k}| \widetilde{\chi}_{B_{0k}} \Big)^q + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jsq} \Big( \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |c_{(j-1)k}| \widetilde{\chi}_{B_{(j-1)k}} \Big)^q \Bigg)^{1/q}, L_p \Bigg\|,$$

*где* $B_{jk} := \{x|\ x_1 \in M^{-j}\Big([k_1, k_1+1] \times [k_2, k_2+1]\Big)\}$ *при* $j = 0, 1, 2, \dots, k \in \mathbb{Z}^2$ *и* $\widetilde{\chi}_{B_{jk}}(x)$ — *нормированные в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *характеристические функции множеств* $B_{jk}$.

Вопрос о базисности в пространствах Бесова и Лизоркина-Трибеля системы сепарабельных всплесков, построенных на основе всплесков Мейера-Давида, изучен в [2]. Базисность несепарабельных всплесков в пространствах Бесова рассмотрена в [3].

**Литература** 1. M. Bownik M., D. Speegle, Meyer Type Wavelet Bases in $\mathbb{R}^2$, Journal of Approximation Theory 116 (2002), pp.49-75. 2. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М: Физматлит, 2005. 3. M. Lindemann Approximation Properties of Non-Separable Wavelet Bases with Isotropic Scaling Matrices and their Relations to Besov Spaces, University Bremen, 2005.

## Всероссийская студенческая олимпиада "Информатика. Программирование. Информационные технологии"и современное математическое образование

*О.Д. Горбенко, А.Е. Поляков, О.Ф. Ускова*

Всероссийские предметные студенческие олимпиады проводятся в соответствии с приказом Федерального агентства по образованию с целью повышения качества подготовки квалифицированных специалистов, повышения у студентов интереса к учебной деятельности и будущей профессии. Воронежский государственный университет в течение последних семи лет является базовым учебным заведением проведения третьего тура Всероссийской студенческой олимпиады "Информатика. Программирование. Информационные технологии". Олимпиада 2009 года проводилась в соответствии с приказом Федерального агентства по образованию №254 от 13 марта 2009 года "Об организации и проведении Всероссийской студенческой олимпиады в 2009 году"и была посвящена сорокалетию образования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета. Предыдущая, шестая, Всероссийская олимпиада по информатике посвящалась 60-летию Российской информатики, становление которой связано с именем известного математика, профессора С.Г. Крейна, который в 60 - 70 годы двадцатого столетия возглавлял в Воронежском университете кафедру вычислительной математики. Селим Григорьевич был одним из авторов первой в Советском Союзе компьютерной программы численного решения одной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

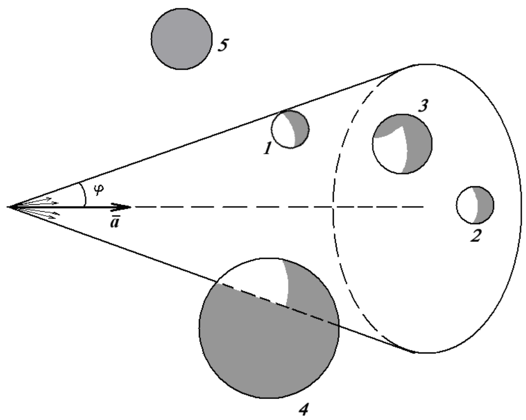
Многолетний опыт проведения Всероссийских олимпиад по информатике позволил выработать определенные традиции и инновации, которые получили положительную оценку Федерального агентства по образованию. При разработке олимпиадных заданий жюри исходило из того, что информатика, как индустрия программного обеспечения, является дисциплиной, интегрирующей знания из других предметных областей, в первую очередь, математические знания, необходимые для построения информационных и математических моделей и методов, которые в свою очередь являются основой для разработки алгоритмов и программ. Как правило, в олимпиадных заданиях требуются знания таких разделов вузовского курса математики, как математическая логика, дискретная математика, аналитическая и дифференциальная геометрия, математические методы исследования операций, теория графов.

Приведем одну из задач, предложенных участникам основного этапа Седьмой Всероссийской студенческой олимпиады "Информатика. Программирование. Информационные технологии", который проходил в Воронежском университете в октябре 2009 года.

В качестве трехмерной модели прожектора рассмотрим круговой конус, в вершине которого располагается точечный источник света. Положение прожектора задается пространственными координатами вершины конуса $(x_c, y_c, z_c)$, величиной угла раствора конуса $\varphi$ $(0 < \varphi < 45^0)$ и координатами вектора $(u, v, w)$, задающего направление его оси. На сцене также имеется несколько шаров, каждый из которых определяется координатами центра $(x_i, y_i, z_i)$ и радиусом $R_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Предполагается, что шары являются непрозрачными, а световые лучи от источника могут распространяться внутри конуса только прямолинейно (без отражения от шаров).

Считается, что сцена задана *корректно*, если источник света не лежит на границе или внутри какого-либо шара, а сами шары не пересекаются. Каждый шар предполагается открытым множеством (т.е. два шара соприкасающиеся границами не пересекаются), а конус, напротив, считается множеством замкнутым (т.е. свет распространяется и вдоль границ конуса). Будем называть шар *полностью освещенным*, если он лежит внутри конуса, и на него не падает тень от каких-либо других шаров. Требуется написать программу, которая по заданным параметрам сцены проверяет ее корректность и вычисляет количество полностью освещенных шаров (на рисунке полностью освещенными являются шары 1 и 2).

*Входные данные*




Файл *input.txt* содержит в первой строке координаты вершины конуса $(x_c, y_c, z_c)$, во второй строке - координаты вектора $(u, v, w)$, задающего направление оси прожектора, в третьей строке - величину угла $\varphi$ и в четвертой - число шаров $n$. Величины $x_c, y_c, z_c, \varphi, u, v, w$ – целые числа из диапазона от -1000 до 1000. Каждая из n последующих строк файла $(0 \leq n \leq 20)$ содержит четыре целых числа - координаты центра очередного шара в пространстве и его радиус. Все числа в файле отделены друг от друга пробелами.

*Выходные данные*

Файл *output.txt* должен содержать слово "INCORRECT", если сцена задана некорректно, или целое число - количество полностью освещенных шаров. Подобный подход к разработке заданий жюри использует уже в течение ряда лет, поэтому студенты при подготовке к участию в воронежской олимпиаде по информатике параллельно углубляют знания по разделам вузовских курсов математики. Как и олимпиады прежних лет, нынешняя олимпиада проводилась в два этапа. В первом, заочном, этапе, который проводился в телекоммуникационном режиме, приняло участие свыше 500 студентов из 35 городов России. Реализация такого режима основывалась на программном обеспечении, разработанном студентами факультета прикладной математики, информатики и механики. В основной этап прошли 40 иногородних и 30 воронежских студентов. Наилучшие результаты показали студенты Саратовского государственного университета им.Н.Чернышевского и Воронежского государственного университета. Победитель олимпиады, студент Саратовского университета Д.Левшунов и призеры студент Воронежского университета С.Бабкин и студент Саратовского университета А.Рахов представлены к награждению премией Правительства РФ в рамках президентской программы "Поддержка талантливой молодежи".

# Итерационные пространства Степанова в $\mathbb{R}^1$ и полугруппы Гаусса-Вейерштрасса

*В.А. Горлов*
(Воронеж, ВГУ; gorlov.vladimir@gmail.com)

Множество локально интегрируемых на $\mathbb{R}^1$ функций $f(x)$ определенных нормой

$$\|f\|_{S_p^{(m)}} = \sup_{t\in\mathbb{R}^1}\left[\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m} l_i}\int_0^{l_m}\dots\int_0^{l_1}|f(t+\sum_{i=1}^{m}x_i)|^p dx_1\dots dx_m\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad (1)$$

где $l_i > 0$, будем называть итерационными (по $m = 1, 2, \dots$) пространствами Степанова $m$-го порядка.

Пусть $z = a + ib$- комплексное число и

$$G_z(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}z}\exp(-\frac{x^2}{4z}),\ x\in R,\ Rez > a > 0 \qquad (2)$$

Семейство операторов:

$$(U(z)u)(x) = G_z(x) * u(x) = \int_R G_z(s)u(x-s)\,ds. \qquad (3)$$

образует полугруппу гаусса-Вейерштрасса.

**Теорема.** При каждом $z : Rez > 0$, операторы $U(z)$ являются линейными и непрерывными в пространстве $S_p^{(m)}$, при этом выполняется оценка:

$$\|U(z)u\|_{S_p^{(m)}} \le \frac{|z|}{Rez}\|u\|_{S_p^{(m)}} \qquad (4)$$

Следовательно, семейство операторов (3) является сжимающей, при $t \ge 0$, $C_0$-полугруппой, аналитической в полуплоскости $Rez > 0$, в пространстве $S_p^{(m)}$.

**Литература** 1. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова. / А.В. Костин, В.А. Костин, — Воронеж, ВГУ. 2007.— С.259. 2. Степанов В.В. О метрике в пространстве почти-периодических функций $S_2$ / В.В. Степанов, - ДАН СССР, т. LXIV, 3 (1949), с. 171.

# Асимптотическая устойчивость в целом и седло на бесконечности

*Г.Э. Гришанина*
(Дубна, Междунар. ун-т природы, об-ва и человека "Дубна"; anora66@mail.ru )

Рассмотрим систему
$$x' = F(x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$
где $F : R^n \mapsto R^n$ - непрерывное векторное поле. Будем предполагать, что каждое решение $x(t)$ уравнения (1) однозначно определено начальным условием x(0) = y и продолжимо на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Через $\varphi(t, y)$ обозначим решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y$, то есть $\varphi(0, y) = y$. Пусть $x_0$- стационарное решение уравнения (1): $F(x_0) = 0$.

Стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ называется устойчивым (по Ляпунову)[1-3], если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\varphi(t, y) - x_0| < \varepsilon, \forall (t, y) : t \geq 0, |y - x_0| < \delta$ ($|.|$ - норма в пространстве $R^n$ ); называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для некоторого $\delta_0 > 0$ $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t, y) - x_0| = 0, \forall y : |y - x_0| < \delta_0$; называется асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчиво и $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t, y) - x_0| = 0, \forall y \in R^n$.

Свойство асимптотической устойчивости в целом тесно связано с поведением решения системы (1) в окрестности бесконечно удаленной точки. В связи с этим приведем еще одно понятие, характеризующее поведение решения уравнения (1) на бесконечности. Будем говорить, что система (1) имеет седло на бесконечности [1], если существует последовательность решений $x_k(t)$ системы (1), удовлетворяющая условиям
$$\sup_k (|x_k(0)| + |x_k(T_k)|) < \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \max_{0\leq t\leq T_k} |x_k(t)| = \infty.$$

**Теорема 1.** *Пусть стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом. Тогда система (1) не имеет ограниченных на всей оси решений, отличных от $x(t) \equiv x_0$ и не имеет седла на бесконечности.*

Теорема 1 допускает обращение, а именно справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ системы (1) устойчиво. Пусть система (1) не имеет ограниченных решений, отличных от стационарного решения $x(t) \equiv x_0$, и не имеет седла на бесконечности. Тогда стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.*

Отметим одно характеристическое свойство решений системы (1), не имеющей седла на бесконечности.

**Теорема 3.** *Для того, чтобы система (1) не имела седла на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая функция $\sigma(u), 0 \leq u < \infty$ такая, что $|x(t)| \leq \sigma(|x(0)|+|x(T)|)$ для любого решения $x(t)$, и любого $T > 0$.*

**Литература.** 1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.;Л.;Гостехиздат, 1949. 550 с. 2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения М.; Физматгиз, 1959. 211 с. 3. Барбашин Е. А. Красовский Н. Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом, ПММ, 18, вып. 3 (1954), 445-450.

## О сходимости разностных схем для псевдопараболического уравнения третьего порядка с нелокальным условием

*Д.К. Гутнова*
(Владикавказ, СОГУ; gutnova@mail.ru)

В области $D \equiv \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + f(x,t) \text{ при } 0 < x < l, 0 < t \leqslant T, \quad (1)$$

$$\begin{gathered} k\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \beta_1(t)u + \int\limits_0^l u dx - \mu_1(t), \text{ при } x = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -\left[k\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] = \beta_2(t)u - \mu_2(t), \text{ при } x = l, 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (3)$$

где

$$0 < c_1 \leqslant k(x,t) \leqslant c_2,\ |k_t(x,t)|, |\beta_2|, |\beta_1| \leqslant c_3. \quad (4)$$

Предполагая, что регулярное решение рассматриваемой задачи существует, $u(x,t) \in C^{(2,1)}(D) \cap C^{(1,1)}(\overline{D})$, $k(x,t) \in C^{(0,1)}(\overline{D})$, $f \in C(\overline{D})$, $\beta_1(t), \beta_2(t) \in C[0,T]$, получена априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1} \leqslant M\left(\int\limits_0^t F(\tau)d\tau + \|u_0\|_0^2 + \|u_{0x}\|_0^2\right),$$

из которой следует единственность решения задачи (1)-(3) и непрерывная зависимость решения от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,l)$.

Дифференциальной задаче (1)-(3) ставится в соответствие разностная схема, которая аппроксимирует ее с порядком $O(h^2 + \tau)$.

$$y_{\bar{t}} = \bar{\Lambda} y + \Phi, \quad (5)$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad (6)$$

где

$$\bar\Lambda y = \begin{cases} \frac{a_1 y_{x,0} + (a_1 y_{x,0})_{\bar t} - \beta_1 y_0}{0{,}5h} - \frac{1}{0{,}5h}\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \hbar, & \text{если } x = 0, \\ (a y_{\bar x})_x + (a y_{\bar x})_{x\bar t}, & \text{при } x \in \omega_h, \\ -\frac{a_N y_{\bar x,N} + (a_N y_{\bar x,N})_{\bar t} + \beta_2 y_N}{0{,}5h}, & \text{при } x = l, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \bar\mu_1, & \text{если } x = 0, \\ \varphi, & \text{при } x \in \omega_h, \\ \bar\mu_2, & \text{при } x = l. \end{cases}$$

Методом энергетических неравенств получена априорная оценка

$$\|y^{j+1}]|_0^2 + \|y_{\bar x}^{j+1}]|_0^2 \leqslant MF^j,$$

из которой следует устойчивость и сходимость разностной схемы со скоростью $O(h^2 + \tau)$.

**Литература.** 1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 407 с. 2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

## Локальная разрешимость одного класса полулинейных уравнений соболевского типа

*П.Н. Давыдов, В.Е. Федоров*
(Челябинск, ЧелГУ; davydov@csu.ru, kar@csu.ru)

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного уравнения соболевского типа

$$\begin{cases} L\dot u(t) = Mu(t) + N(t, u(t)), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен* [1], *множество $V = U \cap (\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1)$ открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}$, сужение оператора $N : U \to \mathfrak{F}$ на множество $V$ непрерывно по $t$, локально липшицево по $u$, $\mathrm{im} N \subset \mathfrak{F}^1$. Тогда для любых $(t_0, u_0) \in V$ существует такое $T(t_0, u_0) > 0$, что задача* (1) *имеет единственное решение на $(t_0, t_0 + T)$* .

**Пример.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$, $n \le 3$, $g : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta) z_t(x,t) = \alpha \Delta z(x,t) + (\lambda - \Delta) g(t, x, z(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times J, \\ z(x, t_0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \\ z|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in J. \end{cases} \tag{2}$$

Это начально-краевая задача для уравнения типа Баренблата – Желтова – Кочиной. Будем считать, что $\lambda$ – точка спектра оператора Лапласа с областью определения $\{u \in H^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Слагаемое $(\lambda - \Delta) g(t, x, z)$ играет роль внешней нагрузки, зависящей в том числе от давления.

Пусть $g : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ трижды непрерывно дифференцируема по $x$ и $z$, кроме того, она сама и все ее производные до второго порядка включительно по второй и третьей переменным непрерывны по $t$. Возьмем $\mathfrak{U} = H^2(\Omega)$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$, $u(t) = z(\cdot, t)$, $N(t, u(t)) = g(t, \cdot, z(\cdot, t))$. Тогда найдется такое $c > 0$, что при всех $(t, u_1), (t, u_2) \in O$ $\|N(t, u_1) - N(t, u_2)\|_{\mathfrak{F}} \leq c\|u_1 - u_2\|_{\mathfrak{U}}$. Таким образом, для задачи (2) справедлива теорема 1 о локальной разрешимости.

**Литература** 1. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Boston: VSP. 2003. – 179 c.

## Примеры аффинно-однородных вещественных индефинитных гиперповерхностей

*М.С. Данилов, В.К. Евченко*
(Воронеж, ВГАСУ, damased@yandex.ru, lera_evk@mail.ru )

В зависимости от квадратичной формы $Q(z_1, z_2) \neq 0$ из уравнения

$$Imz_3 = |z_1|^2 - |z_2|^2 + Q(z_1, z_2) + \overline{Q(z_1, z_2)} + \sum_{k \geq 3} F_k(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, Rez_3)$$

индефинитные вещественно-аналитические гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$ распадаются (см. [1]) на 3 типа.

**Теорема.** Во всех трех типах имеются семейства аффинно-различных аффинно-однородных индефинитных алгебраических гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. Уравнения этих поверхностей имеют вид:

1) эллиптический тип:

$$a)\, y_3 = A_1x_1x_2 + A_2y_1y_2 + A_3x_2^2 + A_4y_2^2 + x_2(A_5x_2^2 + A_6y_2^3) +$$

$$+ (C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_2^2 + C_4y_2^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$b)\, y_3 = T_1(x_1x_2 + y_1y_2) + T_2(x_2^2 + y_2^2) + T_1x_2^3 + T_3y_2^3 + T_4x_2y_2^2;$$

2) гиперболический тип:

$$y_3 = (A_1x_1x_2 + A_2y_1y_2) + x_2(A_3x_2^2 + A_4y_2^2) + (C_0 + C_1x_1 + C_2x_2^2 + C_3y_2^2)^{\frac{3}{2}};$$

3) параболический тип:

$$y_3 = 2(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2^2 - 3y_2^2) + T_1x_2^3 - T_2y_2^3.$$

Коэффициенты поверхностей из пп. 1a) и 2) зависят от 2-х вещественных параметров, из пп. 1b) и 3) – от одного.

**Литература.** 1. Данилов М.С. Продолжение матричных алгебр Ли и индефинитные однородные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ // Труды матем. центра им. Лобачевского, Т. 38. Материалы 9-й Казанской международной летней школы-конференции. Казань, 2009, С. 102-103.

## Сегнетоэлектрические фазы кристалла вблизи критического состояния с особенностью 6–го порядка

*Б.М. Даринский, И.В. Колесникова, Ю.И. Сапронов*
(Воронеж, ВГУ; darinskii@mathd.vsu.ru, kolinna@mail.ru, yusapr@mail.ru )

Широко известно, что модулированные сегнетоэлектрические фазы неоднородных кристаллов (в теории Л.Д. Ландау [1]) определяются нелинейными дифференциальными уравнениями (уравнениями Эйлера – Лагранжа экстремалей функционалов энергии). Нелинейность уравнений задается термодинамическими потенциалами, алгебраическое строение которых определяется как на основе опытных данных, так и на основе общих теоретических соображений. В докладе предложена методика отыскания раскладов сегнетоэлектрических фаз, бифурцирующих из точек минимумов функционалов энергии с трехмерными вырождениями и особенностями 6–го порядка [1–3]. Использован модифицированный метод Ляпунова–Шмидта (редукция к ключевой функции на конечномерном пространстве), оснащенный элементами теории особенностей гладких функций [3–5]. Акцент сделан на случай ключевой функции с симметрией куба. Вычисление главной части ключевой функции осуществляется через нелинейную ритцевскую аппроксимацию функционала энергии по конечной совокупности мод бифуркации.

**Литература.** 1. Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. – Москва, Наука. 1984. – 247 с.
2. Широков В.Б., Юзюк Ю.И., Dkhil B., Леманов В.В. Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В.Н. $BaTiO_3$// Физика твердого тела. Том 50, вып. 5 (2008). С. 889–892.
3. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140. 4. Даринский Б.М., Колесникова И.В., Сапронов Ю.И. Ветвление сегнетоэлектрических фаз неоднородного кристалла вблизи критической фазы с трехмерной особенностью шестого порядка// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, Воронеж: ВГУ, 2009. № 1. С. 101–107. 5. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука. 1982. – 304 с.

## Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с краевым условием Дирихле

*А.В. Дербушев*
(Воронеж, ВГУ)

В данной работе получена асимтотика спектра и спектральных проекторов оператора Дирака с краевым условием Дирихле.

Рассматривается оператор Дирака

$$L_{dir}y = i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{dy}{dt} - vy, \qquad y\in D(L_{dir}),$$

$$L_{dir} : D(L_{dir}) \subset L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) \to L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right),$$

где $v(t) = \begin{pmatrix}0 & P(t)\\ Q(t) & 0\end{pmatrix}$, $t\in[0,\pi]$, $P,Q\in L_2[0,\pi], y=(y_1,y_2)\in L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$. Область определения $D(L_{dir})$ определяется краевым условием Дирихле ($dir$: $y_1(0)=y_2(0)$ и $y_1(\pi)=y_2(\pi)$), где $y=(y_1,y_2)\in W_2^1\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$. А именно, полагается $D(L_{dir})=\{y\in W_2^1\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) : y_1(0)=y_2(0)y_1(\pi)=y_2(\pi)\}$, и соответствующий операторы будут обозначаться через $L_{dir}$. Если $v=0$ (нулевой потенциал), то используется запись $L^0_{dir}$ . С помощью метода подобных операторов были получены следующие результаты:

**Теорема 1** *Существует число $m\in\mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора $L_{dir}$ представим в виде $\sigma(L_{dir}) = \sigma_{(m)}\bigcup\left(\bigcup\limits_{|n|\geq m+1}\sigma_n\right)$ (1), где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а множества $\sigma_n$, $|n|\geq m+1$, определяются равенством $\tilde\lambda_n = n-\theta_{2n}-\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}\ j\neq0}\frac{\theta^2_{j+2n}}{j}+\tilde\beta_n$, $\theta_n = \begin{cases}\frac12(p_{-\frac n2}+q_{\frac n2}), & n\in2\mathbb{Z},\\ \frac12(\tilde p_{-\frac{n+1}{2}}+\tilde q_{\frac{n+1}{2}}), & n\in1+2\mathbb{Z}.\end{cases}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\tilde\beta_n)|<\infty$*

**Теорема 2** *Существует число $m\in\mathbb{Z}_+$ такое, что оператор $L_{dir}$ спектрален по Данфорду относительно разложения (1).*

Локализационные оценки теоремы 1 являются новыми. Ранее даже не было установлено, что $\lim\limits_{|n|\to\infty}|\tilde\lambda_n-n|=0$ для собственных значений $\tilde\lambda_n$, $n\in\mathbb{Z}$, оператора $L_{dir}$ .

**Теорема 3** *Существует такое число $m\in\mathbb{Z}_+$, что для системы ортопроекторов $P_n, n\in\mathbb{Z}$, построенных по не возмущенному оператору $L^0_{dir}$ и $\widetilde P_n$, $|n|\geq m+1$, — спектральных проекторов Рисса, построенных по множествам $\sigma_n$, $|n|\geq m+1$, участвующим в разложении (1) имеет место свойство $\sum\limits_{k\geq m+1}\|\widetilde P_k - P_k\|^2<\infty$.*

## Версия локального метода в теории фредгольмовых операторов и банаховы алгебры операторов типа свертки.

*В.М. Деундяк*
(Ростов-на-Дону, ЮФУ; vlade@math.rsu.ru )

Работа посвящена вопросам разрешимости различных классов интегральных операторов типа свертки с помощью общих моделей локальной теории

[1], [2]. В частности, методами локальной теории решена задача об условиях существования согласованной пары регуляризаторов для согласованной пары операторов, что имеет приложения в теории индекса семейств фредгольмовых операторов, действующих в парах $L_p$–пространств.

Для $C^*$–алгебр многомерных сингулярных и бисингулярных операторов в гильбертовых модулях строится символическое исчисление, вычисляется операторный $K$–функтор, найдены условия фредгольмовости, проведена гомотопическая классификация пространств фредгольмовых и обратимых операторов, вычислен индекс, с помощью результатов о согласованных регуляризаторах рассмотрены приложения к операторам, действующих в $L_p$–пространствах [3]. Аналогичные результаты получены для операторов свертки на абелевых локально–компактных группах [4].

Для банаховых алгебр одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно–непрерывными коэффициентами и соответствующих бисингулярных операторов проведена гомотопическая классификация пространств фредгольмовых и обратимых операторов, вычислен индекс семейств, доказана теорема об алгебраической классификации [5]. Кроме того, на основе построенной теории идеалов Никольского получены результаты об условиях разрешимости для аналогичных операторов с более общими классами разрывных коэффициентов [6].

В работе установлены изоморфизмы подобия для ряда операторных алгебр, редуцирующие исследование одних операторов к другим. В частности, рассмотрены многомерные операторы с общими однородными и биоднородными ядрами, некоторые классы операторов со сдвигом и операторы, действующие в весовых $L_p$–пространствах.

**Литература.** 1. Симоненко И.Б. Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. – Ростов н/Д: ЦВВР, 2007. – 120 с. 2. Деундяк В.М., Симоненко И. Б. Локальный метод в парах $L_p$-пространств и индекс // Докл. РАН. 1996. Т.349. N 5. – С.592-595. 3. Deundyak V.M. On the Index Theorem for Multi-dimensional Bisingular Integral Operators on Hilbert modules.//Journal of Natural Geometry. V.20. 2001. – P. 2-22. 4. В.М.Деундяк. Индекс семейств операторов свертки на абелевых группах. // Сибир. мат. журнал. Т.31. N 1. 1990. С. 5. Deundyak V.M., Simonenko I. B. On Homotopy Properties and Indices of Families of Singular and Bisingular Operators with Piecewise-Continuous Coefficients. // Jornal of Mathematical Sciences. V.125. N 6. 2005. – P. 1593-1599. 6. Георгиев К.А., Деундяк В.М. Идеалы Никольского и их применение к исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов. // Алгебра и анализ. Т.11. N 2. 1999. – С. 88-108.

# Об обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями

*В.Б. Диденко*
(Воронеж, ВГУ; vladimir.didenko@gmail.com )

Пусть X - комплексное банахово пространство. Рассмотрим отрезок $[t_0, t_2]$ и точку $t_1$ из интервала $(t_0, t_2)$. Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}([t_0, t_2], X)$ обозначим (банахово) пространство непрерывных на каждом из интервалов $[t_0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$ ограниченных функций $x : [t_0, t_2] \to X$, имеющих предел справа в точке $t_1$. Норму в $\mathcal{F}$ определим равенством

$$||x|| = \sup_{t \in [t_0, t_2]} ||x(t)||.$$

Символами $\Delta_1$ и $\Delta_2$ обозначим множества $[t_0, t_1] \times [t_0, t_1]$, $[t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$ соответственно. Символом $\Delta$ обозначим объединение множеств $\Delta_1$ и $\Delta_2$.

Отображение $\mathcal{U}_i : \Delta_i \to EndX$ ( $i \in \{1, 2\}$ ), где $EndX$ - банахова алгебра эндоморфизмов пространства $X$, называется (непрерывным) *семейством эволюционных операторов* на $[t_{i-1}, t_i]$, если выполнены следующие условия:

(1) $\mathcal{U}_i(t, t) = I$ - тождественный оператор для любого $t \in [t_{i-1}, t_i]$;

(2) $\mathcal{U}_i(t, s)\mathcal{U}_i(s, \tau) = \mathcal{U}_i(t, \tau)$ для всех $t, s, \tau$ из $[t_{i-1}, t_i]$;

(3) отображение $\mathcal{U}_i$ непрерывно в $EndX$.

Отображение $\mathcal{U} : \Delta \to EndX$ определим следующим образом: на $\Delta_1$ оно совпадает с $\mathcal{U}_1$, а на $\Delta_2$ оно совпадает с $\mathcal{U}_2$.

Пусть $\Gamma$ и $\mathcal{A}$ - замкнутые линейные отношения из $X \times X$. Определим оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ следующим образом. Функция $x$ из $\mathcal{F}$, для которой $(x(t_0), x(t_2)) \in \Gamma$ и $(x(t_1), x^+(t_1)) \in \mathcal{A}$, включается в область определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует такая функция $f$ из $\mathcal{F}$, что справедливы равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) + \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau)d\tau, t_{i-1} < s \le t \le t_i, i \in \{1, 2\}.$$

При этом полагается $\mathcal{L}x = f$.

Введем следующие обозначения $\mathcal{D} = \Gamma - \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0)$, $\mathcal{X}_1 = \Gamma 0 \cap \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}0$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{U}(t_1, t_0)(D(\Gamma)) + D(\mathcal{A})$.

**Теорема 1.** Оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является отношение $\mathcal{D}$ и выполняются равенства $\mathcal{X}_1 = \{0\}$ и $\mathcal{X}_2 = X$.

**Теорема 2.** Оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение $\mathcal{D}$, пространство $\mathcal{X}_1$ является конечномерным и пространство $\mathcal{X}_2$ имеет конечную коразмерность. Если оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов, то его индекс можно вычислить по формуле $ind\mathcal{L} = dimKer(\mathcal{D}) - codimIm(\mathcal{D}) + dim\mathcal{X}_1 - codim\mathcal{X}_2$.

# О задаче сопряжения в плоских задачах теории пластичности неоднородных сред

*В.Л. Дильман, А.И. Носачева*
(Челябинск, ЧелГУ; Dilman49@mail.ru, )

Рассматривается система уравнений пластического равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0;\quad (\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k(x,y)$$

с граничными условиями $\tau_{xy}(x,0)=0,\ \ \sigma_x(x,0)=0$ на свободной поверхности (на рис. линия $B_1AC$) и внутренними граничными условиями (условиями сопряжения на контактной поверхности $HA$)

$$\tau_{xy}^{\text{МП}}(x,\varkappa)=K\tau_{xy}^{\text{БП}}(x,\varkappa),\ \ \sigma_x^{\text{МП}}(x,\varkappa)=K\sigma_x^{\text{БП}}(x,\varkappa),$$

где $K$ – отношение пластических постоянных в более прочной (БП) и менее прочной (МП) частях пластического тела. Если известны инварианты Римана на характеристиках этой задачи (например, когда $k$ постоянна), то вычисление напряжений на контактной поверхности сводится к решению системы трасцендентных (не дифференциальных) уравнений. Наряду с этим случаем в сообщении рассмотрен случай, когда функция $k$ зависит от одной переменной. Тогда при небольших $K-1$ удается найти приближенно (с контролируемой ошибкой) инварианты Римана и на этой основе найти напряжения на контактной границе. Как следствие, можно доопределить и, в конечной счете, решить задачу нахождения напряжений всюду в области $HAA_1H_1$.

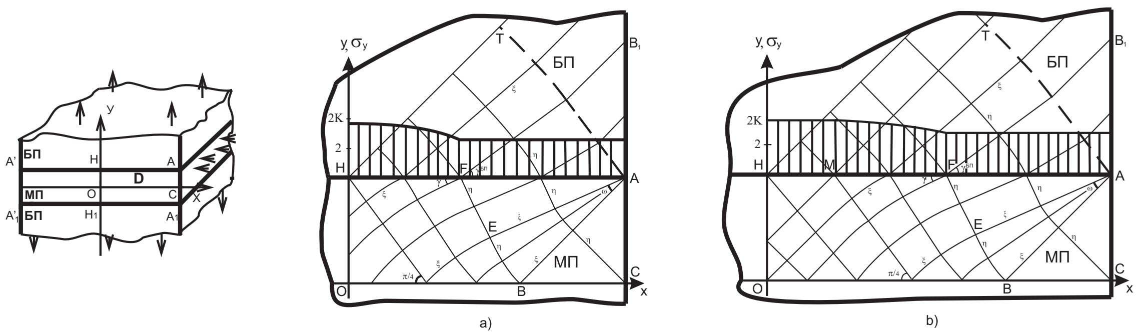



Рис. 1. Фрагмент пластического тела с МП слоем, поле характеристик и эпюра напряжений $\sigma_y$ на контактной поверхности в критический момент нагружения: a) напряжения $\sigma_y$ не достигают значения $2K$; b) напряжения $\sigma_y$ достигают значения $2K$ на отрезке $HM$ ($ACOH$ – четверть МП слоя)

## О симплектических структурах на многообразиях

*В.Н. Думачев*
(Воронеж)

В работе расматривается задача построения симплектической структуры на поверхности, погруженной в фазовое пространство динамической системы. Лагранжева поверхность индуцируется первым интегралом, а для нахождения явного вида гамильтонова векторного поля была использована техника построения векторных гамильтонианов [1]. В качестве примера рассмотрена динамика подвижного репера Френе

$$\dot{x} = Ay, \quad \dot{y} = -Ax + Bz, \quad \dot{z} = -By.$$

которая имеет два скалярных

$$H = \frac{1}{2} I_1^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad I_2 = Bx + Az$$

и один векторный гамильтониан:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{3}(By^2 + Bz^2 - Axz)dx - \frac{y}{3}(Bx + Az))dy \\ + \frac{1}{3}(Ay^2 + Az^2 - Bxz)dz$$

со скобкой Пуассона $\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{h,x}\} = \epsilon_{ijk} \nabla_i h_j \frac{\partial}{\partial x_k} \rfloor d\mathbf{x}$. Замена координат приводит к следующим выражениям для гамильтонова вектороного поля

$$X_H = \frac{1}{I_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

и фазового потока на $\Omega = d\theta \wedge d\varphi$:

$$\dot{\varphi} = B\cos\varphi\cos\theta - A\sin\theta, \quad \dot{\theta} = B\sin\varphi\sin\theta.$$

**Литература.** 1. Думачев В.Н. О фазовых потоках в в $J^n(\pi)$. / Нелинейная динамика, 2006, Т.2. №3, С.287-292.

## О предельно периодических решениях разностного уравнения

*А.Ю. Дуплищева*
(Воронеж, ВГУ; Nasyka@yandex.ru )

Пусть $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R})$-банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, $C_0 = C_0(\mathbb{R})$-замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций, $L^1 = L^1(\mathbb{R})$-банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со сверткой функций в качестве умножения. Через $\hat{f}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1$.

**Определение 1** *Функция $x \in C_{b,u}$ называется медленно меняющейся (стационарной) на бесконечности, если $(S(\alpha)x - x) \in C_0, x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \forall\alpha \in \mathbb{R}$, где $(S(\alpha)x)(s) = x(s+\alpha)$-оператор сдвига функций на $\alpha$.*

Такие функции образуют замкнутое подпространство $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R})$ из $C_{b,u}$, причем $C_{sl}$ является банаховой алгеброй с поточечным умножением. Отметим, что функции x$\in C_{sl}$ являются инвариантными относительно сдвигов функций.

**Определение 2** *Функцию $x \in C_{b,u}$ назовем периодической на бесконечности периода $\omega > 0$ относительно подпространства $C_0$, если $S(\omega)x - x \in C_0$.*

Множество таких функций образует банахову алгебру, обозначаемую далее через $C_{\omega,0}(\mathbb{R}) = C_{\omega,0}$. Введем в рассмотрение последовательность функций, играющих роль коэффициентов Фурье: $x_n(\tau) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\omega)e^{-int}dt, \tau \in \mathbb{R}$. Тогда функции $x \in C_{\omega,0}$ сопоставляется ряд Фурье: $x(\tau) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(\tau)e^{(in\tau)}$.

**Лемма 1** *Коэффициенты Фурье функции $x \in C_{\omega,0}$ обладают свойством: $x_n \in C_{sl}$.*

Банахово пространство $C_{b,u}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля [1] с помощью свертки: $(f * x)(t) = \int_R f(t-s)x(s)ds = \int_R f(\tau)x(t-\tau)d\tau, f \in L^1, x \in C_{sl}, n \in \mathbb{Z}$.

**Лемма 2** *Имеют место следующие свойства:*

*1). $f{*}x \in C_{sl}$, $\forall$ $x{\in}$ $C_{sl}$, $\forall$ $f{\in}$ $L^1$; 2). $f{*}x{-}x \in C_0$, $\forall$ $x{\in}$ $C_{sl}$,$\forall$ $f{\in}$ $L^1$, если $\hat{f}(0) = 1$; 3). $f{*}x \in C_0$, $\forall$ $x{\in}$ $C_{sl}$,$\forall$ $f{\in}$ $L^1$, если $\hat{f}(0) = 0$.*

**Теорема 1** *Пусть $X$-конечномерное пространство, $B : X \to X$-линейный оператор, спектр которого $\sigma(B)$ обладает свойством: число 1 является единственной точкой спектра оператора $B$ на единичной окружности $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Тогда каждое ограниченное непрерывное решение $x_0$ уравнения: $x(t+1) = Bx(t) + f(t), f \in C_0$ является периодической на бесконечности периода 1 функцией.*

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных опреторов. 1987.Воронеж.ВГУ-164с.

## Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной мягкой прослойки сплошного цилиндрического стержня

*Ерошкина Т.В.*
(Челябинск, ЧелГУ; Etv1980@mail.ru)

В сообщении изучается напряженное состояние (НС) менее прочного (МП) поперечного неоднородного слоя сплошного круглого стержня под осевой растягивающей нагрузкой. Предполагается, что параметр $k^{\text{МП}}$ зависит от координаты $z$: $k^{\text{МП}} = T(z)k_0, z \in [-\varkappa; \varkappa]$, причем $T$ – выпукла вверх или вниз четная дифференцируемая функция. Исследуется НС МП слоя в окрестности свободной границы методом характеристик. Запишим систему уравнений, описывающую НС неоднородного МП слоя, находящегося под растягивающей осевой нагрузкой в инвариантах Римана

$$\frac{\partial(\sigma_r+\nu_i)}{\partial r}\frac{dr}{dz}+\frac{\partial(\sigma_r+\nu_i)}{\partial z}=\frac{\partial\nu_i}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\tau_{rz}}{r},\quad i=1;2.$$

Оценка правых частей этих уравнений и замена их на более простые выражения позволила приближенно проинтегрировать эти выражения и на этой основе вычислить зависимости касательных и нормальных напряжений на контактной поверхности на контактной поверхности около свободной границы. Например, зависимость $\sigma_z$ от $r$, $\varkappa$ и $K$ имеет вид

$$\sigma_z(r,\varkappa)=\sqrt{3}T\left(\frac{\varkappa(2r-r_F-1)}{1-r_F}\right)(1+a(r)(K-1)+b(r)(K-1)^2).$$

Также исследуются математические модели НС неоднородного МП слоя с переменной по толщине прочностью в окрестности оси стержня при ГРП $\tau=Z(z)R(r)$. Задача сводится к исследованию дифференциального уравнения

$$\sqrt{3}R'\frac{(Z^2/T)'}{Z}+\frac{Z''}{Z}-\frac{R''}{R}-\frac{(R/r)'}{R}=0. \tag{1}$$

**Теорема 1** *Уравнение* (1) *при условии* $R(0)=0$; $Z(0)=0$ *не имеет решений, за исключением следующих частных вариантов. 1. Функция* $R$ *линейна. 2. Функция* $T$ *имеет вид* $T=\cos^2(\mu z/2)$, *а функция* $Z=\sin(\mu z)$. *3. Функция* $T$ *имеет вид* $T=\mathrm{ch}^2(\mu z/2)$, *а функция* $Z=\mathrm{sh}(\mu z)$. *Здесь* $\mu$ *– произвольная положительная постоянная.*

Когда касательные напряжения изменяются линейно в радиальном направлении (п. 1 теоремы 1), тогда

$$T=\frac{\sqrt{3}Z^2}{C-Z'}. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) для нахождения $Z$ затруднительно даже для самых простых аппроксимаций неоднородности МП слоя. Поэтому был использован обратный метод, при котором для $Z$ выбирается "естественная" аппроксимация с не менее чем тремя параметрами. В сообщении для $Z$ принята зависимость в виде нечетного полинома 5 степени. Получены явные формулы для вычисления $T$, а также нормальных напряжений в каждом из случаев, когда $\sigma_z$ в МП слое либо достигают, либо не достигают значения напряжений в БП части, равного $\sqrt{3}KK_{\text{сл}}$. На этой основе получены аналитические выражения для вычисления критических нагрузок в зависимости от значений трех параметров $K$, $K_{\text{сл}}$ и $\varkappa$. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными показано на рис. 1. Точки – экспериментальные данные из работы [1]. Квадратики – экспериментальные данные из работы [2]. Видно, что отклонения этих результатов друг от друга находятся в пределах точности приведенных экспериментальных данных. Это может объясняться некоторыми (незначительными) отклонениями прочности МП слоев в использованных в экспериментах образцах от прочности однородных. Поэтому полученные результаты могут быть основой для постановки новых экспериментов.

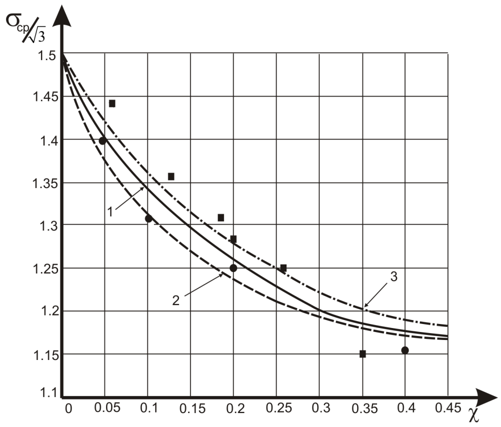



Рис. 1. Зависимость $\sigma_{\text{ср}}/\sqrt{3}$ от $\varkappa$. 1 – при $K = 1,5$, однородный слой (гл. 1); 2 – при $KK_{\text{сл}} = 1,5$, $K_{\text{сл}} = 0,8$; 3 – при $KK_{\text{сл}} = 1,5$, $K_{\text{сл}} = 1,2$.

**Литература.** 1. Satoh K., Toyoda M. Joint strength of heavy plastics with lower strength weld metal // Welding Jornal. – Sept. – 1975. – № 9. – P. 311–319. 2. К вопросу о расчетной прочности составных образцов с мягкой прослойкой при статическом растяжении/ А.В. Гурьев, В.П. Багмутов, Ю.Д. Хесин, Л.В. Бойков // Проблемы прочности. – 1973. – № 1. – С. 9–13.

## Второй метод Ляпунова в нормированных пространствах

*С.А. Загребина, П.О. Пивоварова*
(Челябинск, ЧелГУ; zsophiya@mail.ru)

Пусть $\mathfrak{U}$ – нормированное пространство. Говорят, что на $\mathfrak{U}$ задан *локальный поток* (в дальнейшем – *поток*), если существует отображение $S$ такое, что для любого $u \in \mathfrak{U}$ и некоторого $\tau = \tau(u) \in \mathbb{R}_+$ выполняются соотношения

(i) $S = S(t,u) \in \mathfrak{U}$, при всех $t \in (-\tau;\tau)\,; S\,(0,u) = u$;

(ii) $S(t+s,u) = S(t, S(s,u))$ при всех $t + s \in (-\tau,\tau)$.

Точка $u \in \mathfrak{U}$ такая, что

(iii) $S(t,u) = u, t \in \mathbb{R}$,

называется *стационарной точкой* потока $S$.

**Определение 1.** Стационарная точка $u$ потока $S$ называется

(i) *устойчивой* (по Ляпунову), если для любой окрестности $\mathfrak{O}_u$ точки $u$ существует (возможно, другая) окрестность $\mathfrak{O}'_u$ той же точки, что $S(t,v) \in \mathfrak{O}'_u$ при всех $v \in \mathfrak{O}_u$ и $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) *асимптотически устойчивой* (по Ляпунову), если для любой точки $v$ из некоторой окрестности $\mathfrak{O}_u$ точки $u$ выполняется $S(t,v) \to u$ при $t \to \infty$.

**Определение 2.** Функция $V \in C(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ называется *функцией Ляпунова* потока $S$, если

$$\dot{V}(u) = \overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{(V(S(t,u)) - V(u))}{t} \leq 0$$

для всех $u \in \mathfrak{U}$.

**Теорема 1** [1] *Пусть $u$ – стационарная точка потока $S$ на $\mathfrak{U}$. Если для потока $S$ существует функция Ляпунова такая, что* *(i)* $V(u) = 0$;

*(ii)* $V(v) \geq \varphi(\|v - u\|)$; *где* $\varphi$ *– строго возрастающая непрерывная функция такая, что* $\varphi(0) = 0$ *и* $\varphi(r) > 0$ *при* $r \in \mathbb{R}_+$, *то точка и устойчива.*

**Следствие 1** *Пусть выполнены условия теоремы 1, и существует строго возрастающая непрерывная функция* $\psi$ *такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(r) > 0$ *при* $r \in \mathbb{R}_+$, *причем* $\dot{V}(v) \leq -\psi(\|v - u\|)$, *тогда точка и асимптотически устойчива.*

Проиллюстрируем полученный результат на следующем примере.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, причем каждое ребро $E_j$ имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$ Уравнения Хоффа [2]

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + \beta u_j^3, \tag{1}$$

заданные на графе $\mathbf{G}$ моделируют динамику конструкции из двутавровых балок. Параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ характеризуют свойства материала балки, а параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ – продольную нагрузку на балку. В вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ заданы условия

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{3}$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине $V_i$, $t \in \mathbb{R}$.

**Теорема 2** *При любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *и* $\lambda \in [0, \lambda_0)$ *решение* $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ *задачи (1) – (3) асимптотически устойчиво.*

**Литература.** 1. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. 2. Hoff N.J. Creep buckling. – Aeron, Quarterly 7, 1956, № 1, p. 1–20. 2. Hoff N.J. Creep buckling // Aeron. Quarterly 7. 1956. № 1. P. 1–20.

## Обобщение задачи Бертрана на поверхности с метрикой вращения

*О.А. Загрядский, Д.А. Федосеев*

(Москва, МГУ; docxaos@mail.ru )

В работе произведено обобщение известной классической задачи Бертрана о поиске потенциалов, обеспечивающих замкнутое движение планеты в поле притяжения звезды, на двумерные поверхности с метрикой вращения.

Подробно рассмотрен случай конусов, указаны случаи, когда теорема Бертрана полностью обобщается: существует ровно два искомых потенциала. Написаны уравнения траекторий.
Найден критерий, гарантирующий, что на плоскость с выколотой точкой, оснащенной метрикой вида

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & (f(r))^2 \end{pmatrix}$$

теорема Бертрана обобщается. Указан явный вид метрик и соответствующих им поверхностей, удовлетворяющих полученному критерию.

## Обратная задача вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом

*В.Г. Задорожний, Г.А. Курина*
(Воронеж; zadorozhny@amm.vsu.ru, kurina@math.vsu.ru)

Доказано, что уравнение

$$\begin{gathered} Ay''(x) + B + Cy'(x-\theta) + \widetilde{D} = 0, \quad x \in [a, b-\theta], \\ Ay''(x) + B + Cy'(x-\theta) = 0, \quad x \in (b-\theta, b], \end{gathered} \tag{1}$$

где функции $A$, $B$, $C$, $D$ зависят от $x$, $y(x)$, $y(x-\theta)$, $y'(x)$, а $\widetilde{D} = D(x+\theta, y(x+\theta), y(x), y'(x+\theta))$, является уравнением Эйлера для функционала

$$J(y(\cdot)) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y(x-\theta), y'(x))dx \tag{2}$$

при условиях $y(x) = \varphi(x), a-\theta \le x \le a, y(b) = B$, тогда и только тогда, когда функции, входящие в (1), удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} C_{y'(x)} - A_{y(x-\theta)} = 0, \quad x \in [a, b], \\ B_{y'(x)} - A_x - y'(x)A_{y(x)} = 0, \quad x \in [a, b], \\ D_{y'(x)} + C = 0, \quad x \in [a+\theta, b], \\ D_{y(x)} + \int\limits_0^{y'(x)} C_{y(x)}dy'(x) - G_{y(x)y(x-\theta)} = 0, \quad x \in [a+\theta, b], \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} G = \int\limits_0^{y(x)} (B - \int\limits_0^{y'(x)} B_{y'(x)}dy'(x) + E_x)dy(x) + Q, \\ Q = \begin{cases} 0, \quad x \in (b-\theta, b], \\ \int\limits_0^{y(x)} (\widetilde{D} + \int\limits_0^{y'(x+\theta)} \widetilde{C}dy'(x+\theta) - \widetilde{G}_{y(x)})dy(x), x \in [a, b-\theta], \end{cases} \\ E = \int\limits_0^{y(x-\theta)} (\int\limits_0^{y'(x)} A_{y(x-\theta)}dy'(x) - C)dy(x-\theta), x \in [a, b]. \end{gathered}$$

При этом функцию $F$ из (2) можно найти следующим образом:

$$F = -\int\limits_0^{y'(x)} (\int\limits_0^{y'(x)} A dy'(x)) dy'(x) + Ey'(x) + G, \quad x \in [a, b].$$

## О задаче Коши для уравнения соболевского типа с относительно диссипативным пучком операторов

*А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова*
(Челябинск, ЧелГУ; alzama@mail.ru)

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{G}$ - гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $[\cdot,\cdot]$ соответственно, операторы $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{G})$, $B_1, B_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{V};\mathcal{G})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0, \quad v^{'}(0) = v_1 \tag{1}$$

для операторно-дифференциального уравнения соболевского типа

$$Av^{''} = B_1 v^{'} + B_0 v. \tag{2}$$

**Определение 1** *Операторный пучок* $(B_0, B_1) = \vec{B}$ *будем называть диссипативным относительно оператора A (короче, A-диссипативным), если*

*(i)* $\forall v_1, v_2 \in dom\vec{B}(dom\vec{B} = dom B_1 \bigcap dom B_0) \quad Re(\langle v_1, v_2\rangle + [Av_2, B_0 v_1 + B_1 v_2]) \leq 0$;

*(ii)* $im(\alpha^2 A - \alpha B_1 - B_0) = G$;

*(iii)* $\forall v_1, v_2 \in dom\vec{B} \quad Re(\langle R_\alpha B_0 v_1 + \alpha R_\alpha A v_2, R_\alpha(\alpha A - B_1 + \alpha B_0) v_1 + R_\alpha(A + \alpha B_1 + B_0) v_2\rangle) \leq 0$, *здесь* $R_\alpha = (\alpha^2 A - \alpha B_1 - B_0)^{-1}$ – *относительная A-резольвента пучка* $\vec{B}$ *[1].*

Сведем задачу (1), (2) к задаче

$$u(0) = u_0, \ L\dot{u} = Mu,$$

где $u(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$, операторы $L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$, пространства $\mathcal{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $\mathcal{F} = \mathcal{V} \times \mathcal{G}$.

**Лемма 1** *Если пучок операторов* $\vec{B}$ *A-диссипативен, то оператор M является L-диссипативным [2].*

**Теорема 1** *Если пучок операторов* $\vec{B}$ *A-диссипативен, то для любых* $(v_0, v_1) \in \overline{im(\mu L - M)^{-1} L}$ *задача (1),(2) имеет единственое решение* $v(t) \in \mathcal{C}^2([0,T],\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}^1([0,T], dom\vec{B})$.

**Литература.** 1. Замышляева А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка. – Вычислит. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С.45–54. 2. Федоров В.Е. Сжимающие полугруппы уравнений соболевского типа и относительно диссипативные операторы. – Мат. заметки ЯГУ. 2001., Т. 8, вып. 2. С.75–83.

## О связности множества решений начально-краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений

*А.В. Звягин*
(Воронеж, ВГУ; zvyagin.a@mail.ru)

Из результатов работы [1] вытекает следующее:

Пусть $f : \bar{D} \to F$ - собственное фредгольмово отображение нулевого индекса, D - ограниченная область банахова пространства E; F - банахово пространство. Пусть $k : \bar{D} \to F$ - компактное отображение. Предположим, что уравнение

$$f(v) + k(v) = h \tag{$*$}$$

сглаживаемо, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует компактный оператор $k_\varepsilon : \bar{D} \to F$, такой что $\|k_\varepsilon(v) - k(v)\| \leqslant \varepsilon$ и уравнение $f(v) + k_\varepsilon(v) = h$ имеет не более одного решения при малых по норме $h \in F$.

**Теорема 1**: Предположим, что определена и отлична от нуля степень $\deg(f+k, \bar{D}, 0)$ и уравнение (*) сглаживаемо. Тогда множество решений уравнения (*) связно.

Приведем приложение этой теоремы и исследуем связность множества решений одной квазилинейной параболической задачи.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $T > 0$ - произвольное число, $Q_T = (0,T) \times \Omega$.

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,v,\frac{\partial v}{\partial x_1},...,\frac{\partial v}{\partial x_n})\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + g(t,x,v,\frac{\partial v}{\partial x_1},...,\frac{\partial v}{\partial x_n}) = h(t,x), \tag{1}$$

где $(t,x) \in Q_T$.

$$v(t,x) = 0, \quad (0 < t \leqslant T, x \in \partial\Omega) \tag{2}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} \tag{3}$$

Наложим на задачу (1)-(3) условия, необходимые для исследования связности множества решений:

1)Условие эллиптичности:

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \geq \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(t,x,\eta_0,\eta_1,...,\eta_{n+1})\xi_i\xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \text{где } \mu,\lambda > 0$$

для любых $(t, x, \eta_0, \eta_1, ..., \eta_{n+1}) \in [0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n+1}$

2)Условие непрерывности функций: $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_1}(t, x, \xi_1, ..., \xi_n), ..., \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_n}(t, x, \xi_1, ..., \xi_n)$, $g(t, x, \xi_1, ..., \xi_n)$ по всем переменным

3)Условие существования априорной оценки:
Предполагается, что для семейства задач:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x, sv, s\frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., s\frac{\partial v}{\partial x_n})\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + sg(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n}) = \tag{4}$$

$$= h(t, x), \text{ где } (t, x) \in Q_T.$$

$$v(t, x) = 0, \quad (0 < t \leqslant T, x \in \partial\Omega) \tag{5}$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} \tag{6}$$

где $0 \leqslant s \leqslant 1,$ имеет место априорная оценка решений:
$\|v\|_{W_p^{2,1}(Q_T)} \leqslant c(\|h\|_{L_p(Q_T)}, \|v\|_{W_p^{2-2/p}(\Omega)})$, где $c(\lambda, \beta)$ - функции двух числовых переменных.

Положим $E = W_p^{2,1}(Q_T), F = L_p(Q_T) \times W_p^{2-2/p}(\Omega) \times W_p^{2-2/p, 1-1/(2p)}(S_T)$, где $S_T = (0, T) \times \partial\Omega$; и определим отображения $f, k : E \to F$ равенствами:

$$f(u) = (\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, u\mid_{t=0}, u\mid_{S_T})$$

$$k(u) = (g(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), v_0, 0)$$

Заметим, что задача (1)-(3) эквивалентна операторному уравнению:
$f(u) + k(u) = h$, где $u \in E$.

Из Теоремы 1 следует:
**Теорема 2**: Пусть $v_0 \in W_p^2(\Omega), h \in L_p(Q_T)$ и p>n. Предположем, что выполнены условия 1) - 3). Тогда множество решений задачи (1)-(3) непусто и связно.

Отметим, что локальная теорема связности множества решений была приведена в работе [2].

**Литература.** 1. Звягин А.В. Об аксиоматическом подходе к исследованию связности множества решений операторных уравнений // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. Воронежский университет, 2008, выпуск 3 - стр. 31-36. 2. Красносельский М.А.,Соболевский П.Е. Структура множества решений уравнений параболического типа // ДАН СССР, 1962г., Т.146, №1, стр. 86 - 89.

# Конволюционное решение вырожденной абстрактной задачи Коши[5] [6]

*С.В. Здобнова*
(Магнитогорск, МГТУ им. Г.И. Носова; svsdobnova@mail.ru)

В банаховом пространстве $E$ рассматривается локальная вырожденная абстрактная задача Коши

$$Bu'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, \tau), \tau < \infty, \quad u(0) = x, \tag{1}$$

где оператор $B$ — ограниченный в пространстве $E$, причем $KerB \neq \{0\}$, оператор $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый.

**Определение 1** *Конволюционным решением задачи (1) называется функция $v(t)$, удовлетворяющая на промежутке $[0, \tau)$ уравнению*

$$Bv(t) = A \int_0^t v(s)\ ds + B \int_0^t K(s)x\ ds + B \int_0^t \int_0^s K(s-r)f(r)dr\ ds.$$

Для описания структуры конволюционного решения вводится в рассмотрение специальное семейство операторов.

**Определение 2** *Пусть $K(t)$ – непрерывная на промежутке $[0, \tau)$, $\tau < \infty$, числовая функция. Сильно непрерывное на $[0, \tau)$ семейство $\{S_K(t)|\ t \in [0, \tau)\}$ линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $E$, коммутирующих с замкнутым линейным оператором $A$ на $D(A) \subset E$ и удовлетворяющих уравнению*

$$BS_K(t)x = A \int_0^t S_K(s)x\ ds + B \int_0^t K(s)x\ ds, \quad x \in E, \quad t \in [0, \tau),$$

*с ограниченным оператором $B$, $KerB \neq \{0\}$, называется вырожденной локальной конволюционной полугруппой операторов, порожденной операторами $A$ и $B$.*

**Теорема 1** *Пусть операторы $A$ и $B$ порождают вырожденную локальную конволюционную полугруппу операторов $S_K$. Тогда функция*

$$v(t) = S_K(t)x + \int_0^t S_K(t-s)f(s)\ ds,$$

*является конволюционным решением вырожденной задачи (1).*

[5]При финансовой поддержке Рособразования (2.1.1/2000)
[6]При финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 06-03-00148)

**Литература.** 1. Irina V. Melnikova and Alexei Filinkov *The Cauchy problem: Three approaches* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. 2001. Vol. 120, CRC Press, London. 2. Здобнова С. В. *Абстрактная стохастическая задача Коши с генератором полугруппы класса* $(1, A)$ *и с генератором* $K$*-конволюционной полугруппы.* Дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2007. – 100с.

## Решение задачи Коши в банаховом пространстве с нерегулярным операторным пучком [7]

*С.П. Зубова*
(Воронеж, ВГУ)

Рассматривается задача Коши

$$A\frac{dx}{dt} = Bx(t), \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где A - замкнутый линейный нётеров оператор (он же полуфредгольмовский или фредгольмовский с ненулевым индексом $æ = dimKerA - dimCokerA$ ), действующий из банахова пространства $E_1$ в банахово пространство $E_2$, $\overline{D(A)} = E_1$, $dimKerA = n_0 < \infty$, $dimCokerA = m_0 < \infty$, $B \in L(E_1, E_2)$, $t \in [0, \infty)$, $x^0 \in E_1$.

Задача (1) решалась многими авторами, как правило, рассматривался случай регулярного операторного пучка $A - \varepsilon B$ (оператор $A - \varepsilon B$ обратим при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, или, что то же самое, пара $(A, B)$ регулярная).

Для фредгольмовского ($æ = 0$) оператора $A$ известно, что решение задачи (1) единственно только при условии регулярности пары $(A, B)$.

В случае нётерова оператора $A$ пара $(A, B)$ не может быть регулярной, однако и в этом случае задача (1) может быть однозначно разрешимой.

В случае отсутствия ядра у пучка $A - \varepsilon B$ в $E_1$ существует подпространство $M$, инвариантное относительно некоторого оператора $A_\varepsilon$. Сужение $\widetilde{A}_\varepsilon$ оператора $A_\varepsilon$ на $M$ имеет ограниченный обратный. Жордановы цепочки элементов для $A_\varepsilon$ имеют конечные длины. В корневом подпространстве $N$ оператора $A_\varepsilon$ решение $x(t)$ задачи (1) существует в том и только том случае, когда $x^0 = 0$. При этом $x(t) \equiv 0$, $t \in [0, \infty)$.

**Теорема.** *Решение $x(t)$ задачи (1) существует тогда и только тогда, когда $x^0 \in M$. Само решение лежит в $M$, единственно и имеет вид $x(t) = e^{tT_p}x^0$.*

В случае наличия ядра у пучка $A - \varepsilon B$ в $E_1$ вложено некоторое подпространство $M_1$. Цепочки $B$ - присоединенных элементов для $A$ могут иметь бесконечную длину. Имеет место

**Теорема.** *Решение задачи (1), существует тогда и только тогда, когда $x^0 \in M_1$. Решение принадлежит $M_1$, неединственно и имеет вид $x(t) = e^{tT_p}x^0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)T_p}u(s)ds$, где $u(s)$ - произвольная функция из $KerA_p$,*

[7] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00397)

*для которой последний интеграл существует и является дифференцируемым при $t \in [0, \infty)$.*

**Следствие**. Задача Коши однозначно разрешима лишь при выполнении условий $x^0 \in M$ и

$$(A - \varepsilon B)v = 0 \to v = 0.$$

## Построение быстро убывающего на бесконечности решения линейной системы управления

*С.П. Зубова, Чан Тхань Туан*
(Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим следующую управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t) \qquad (1)$$

с условиями

$$x(0) = a_1,\ x(\tau) = a_2,\ x(T) = a_3, \qquad (2)$$

$$u^{(i)}(0) = b_i^1,\ u^{(i)}(T) = b_i^2,\ i = \overline{0, m}, \qquad (3)$$

где $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n),\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^s,\ t \in [0, T],\ \tau \in [0, T]$, $u^{(i)}$ - производная порядка $i$.

Справедлива следующая теорема

**Теорема.** *Существует управление $u(t)$ системы* (1)*, удовлетворяющее условиям* (3)*, под действием которого состояние $x(t)$ удовлетворяет условиям* (2) *и является быстро убывающей при $t \to \infty$ функцией вида*

$$x(t) = \sum_{\xi=1}^{r} c_\xi e^{-\xi t},\ c_\xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (4)$$

Здесь $r = 3(m+p+2)$, где число $p \in \mathbb{N}$ - наименьшее из всех $q$ ($p = \min q$), таких что $rank(D\ BD\ B^2D \cdots B^qD) = n$.

Вектор-функция управления u(t) задачи (1)-(3) находится в виде многочлена по степеням $e^{-t}$ с векторными коэффициентами вида (4), степень которого меньше или равна $3(m+p+2)$.

**Литература.** 1. Зубова С.П., Раецкая Е. В., Ле Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // Автоматика и телемеханика. 2008. №11. С. 41-47. 2. Зубова С.П., Ле Хай Чунг, Чан Тхань Туан. О полиномиальных управлениях линейной стационарной системой с контрольными точками // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: материалы II Международной научной конференции. Воронеж. 2007. с. 79.

# Смешанное управление системой уравнений, описывающей переходные процессы в полупроводнике

*А.Ф. Исламова*

(Челябинск, ЧелГУ; islamovaaf@inbox.ru)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$. Рассмотрим задачу оптимального управления системой, описывающей переходные процессы в полупроводнике [1] управления системой, описывающей переходные процессы в полупроводнике [1]

$$(\lambda - \Delta)w_t(x,t) = \alpha w(x,t) + u(x,t) + y(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$w(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$(u,v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{4}$$

$$J(x,u,v) = \frac{1}{2}\|x - w_0\|^2_{H^1(0,T;H^2(\Omega))} + \frac{N_1}{2}\|u - u_0\|^2_{H^r(0,T;L_2(\Omega))} + \frac{N_2}{2}\|v - v_0\|^2_{H^2(\Omega)} \to \inf, \tag{5}$$

где $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства $\mathfrak{U} = H^r(0,T;L_2(\Omega)) \times H^2_0(\Omega)$ – *множество допустимых управлений*, $w_0 \in H^1(0,T;H^2_0(\Omega))$, $u_0 \in H^r(0,T;L_2(\Omega))$, $v_0 \in H^2_0(\Omega)$, $y \in H^1(0,T;L_2(\Omega))$ – заданные функции, пара $(u,v) \in \mathfrak{U}$ – управление, константы $N_1, N_2 > 0$.

При выборе пространств $\mathcal{X} = H^2_0(\Omega)$, $\mathcal{Y} = \mathcal{U} = L_2(\Omega)$ задача (1) – (4) редуцируется к абстрактной задаче смешанного управления для уравнения соболевского типа $L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t)$. Следуя схеме исследования, использованной в [2], введем множество $H_\partial(y)$, которое для $y \in H^1(0,T;L_2(\Omega))$ состоит из множества пар $(u,v) \in H^1(H^2_0(\Omega)) \times H^2_0(\Omega)$, таких что

$$\langle u(\cdot,0), \varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k + \alpha\langle v, \varphi_k\rangle\varphi_k = -\langle y(\cdot,0), \varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k.$$

$$\mathcal{Z}_r = \{z \in H^1(0,T;H^2_0(\Omega)) : (\lambda - \Delta)\dot{z} - \alpha z \in H^r(0,T;L_2(\Omega))\}, \quad r = 0,1.$$

**Теорема 1** *Пусть $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial(y) \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Z}_r \times \mathfrak{U}$ задачи (1) – (5).*

**Литература.** 1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007. 2. Федоров В. Е., Плеханова М. В. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа, Дифференц. уравнения, **40**:11 (2004), 1548–1556 с.

# Операторное представление уравнения с частными производными, имеющими вид локального закона сохранения

*В.М. Ищенко*
(Ставрополь; *ishchenko_vm@mail.ru*)

Если уравнение с частными производными является моделью задачи естествознания, то, рассматривая его как динамическую систему с бесконечным числом степеней свободы, задаемся вопросом, имеет ли это уравнение законы сохранения.

Пусть исследуемая модель имеет вид локального закона сохранения

$$T_t + X_x = 0, \tag{1}$$

где $T$ и $X$ - определенные функции решения $u$ уравнения с частными производными и его производных, $T$ - плотность, $X$ - поток.

**Утверждение 1.** Если нелинейное уравнение с частными производными имеет вид локального закона сохранения, то для него справедливо следующее представление в виде коммутирующих операторов $L$ и $A$:

$$L_t = [L, A] = LA - AL, \tag{2}$$

где

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\alpha$, $\beta$ - постоянные, $u(x, y)$, $v(x, y)$ - функции.

Непосредственная подстановка в (2) дает

$$(-\beta u(x, t) + \alpha v(x, t))_x = u_t(x, t). \tag{4}$$

Если операторы, входящие в уравнение (2), удовлетворяют требованиям теоремы Лакса [1], то нелинейное уравнение (4) эквивалентно системе линейных уравнений:

$$L\varphi = \mu\varphi, \tag{5}$$

$$\varphi_t = -A\varphi, \tag{6}$$

для оператора $L$ поставлена спектральная задача ($\varphi$ - собственная функция, $\mu$ - собственное значение оператора $L$), оператор $A$ определяет эволюцию собственных функций по времени. Возможно, что представление (3) позволит решить (4) с помощью системы (5)-(6).

**Утверждение 2.** Если в уравнении $u_t(x, t) = \alpha e^{-u(x,t)} u_{xx}(x, t) + \beta u_x(x, t)$ функция $u^{u(x,t)} \to 0$, $u_x \to c$, c-const, c<0 при $x \to \infty$, собственные значения $\mu$ вещественны, то уравнение имеет решения вида:

$$u = ln \mid \frac{ich\, exp((c\beta + ic)t + cx)}{1 + h\, exp((c\beta + ic)t + cx)} \mid,$$

где $h$ - постоянная.

Решение получено с помощью операторов вида (3) и системы (5)-(6).

**Литература** 1. Лакс П. Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. // Математика, 13:5. - М.: Мир, 1969. - С. 128-150.

## Сравнение метода прямой схемы асимптотического решения задач оптимального управления с методом последовательных приближений И.А. Крылова, Ф.Л. Черноусько при решении регулярно возмущенных задач

*М.А. Калашникова*

(Воронеж, ВГУ)

Рассматривается задача минимизации функционала

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \int_0^T F(x, u, t, \varepsilon)dt \to \min_u, \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t, \varepsilon),\ x(0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь $T > 0$ фиксировано, $t \in [0, T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon$ – малый параметр. Проводится сравнение двух методов асимптотического решения задачи (1), (2), а именно, метода последовательных приближений из [1], получаемой из (1), (2) при $\varepsilon = 0$, и метода прямой схемы асимптотического решения задач оптимального управления, заключающегося в непосредственной подстановке в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения в виде $x(t) = \sum\limits_{j \geq 0} \varepsilon^j x_j(t)$, $u(t) = \sum\limits_{j \geq 0} \varepsilon^j u_j(t)$ и определении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики (см. например, [2]).

**Утверждение 1** *$n$ - е приближение решения регулярно возмущенной задачи (1)-(2), полученное при помощи прямой схемы, отличается от (n+1) -го приближения решения, полученного методом последовательных приближений, на величину порядка $\varepsilon^{n+1}$, то есть $\widehat{x_{n+1}} - \widetilde{x_n} = O(\varepsilon^{n+1})$, $\widehat{u_{n+1}} - \widetilde{u_n} = O(\varepsilon^{n+1})$, где $\widetilde{u_n} = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j u_j$, $\widetilde{x_n} = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j x_j$, $n = 0, 1, 2...$ - $n$-ое приближение решения при помощи метода прямой схемы, а $(\widehat{u_{n+1}}, \widehat{x_{n+1}})$ - (n+1)-ое приближение в методе последовательных приближений, если в качестве начального приближения взять решение вырожденной задачи, получаемой из (1), (2) при $\varepsilon = 0$.*

**Литература.** 1. И.А. Крылов, Ф.Л. Черноусько О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления// Журн. вычисл. математики и мат. физики том 2, №6, 1962г., стр. 1132 - 1139. 2. М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика №1, 2006г., стр. 3 - 51.

# Об уравнениях типа Гаммерштейна с частными интегралами в пространстве непрерывных функций

*А.С. Калитвин*

(Липецк, ЛГПУ; kalitvin@mail.ru)

Рассматривается уравнение типа Гаммерштейна с частными интегралами

$$x(t,s) = \int_T l(t,s,\tau) f(\tau,s,x(\tau,s))d\tau + \int_S m(t,s,\sigma) g(t,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma +$$

$$+ \iint_D n(t,s,\tau,\sigma) h(\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \qquad (1)$$

где $T$ и $S$ — компактные множества положительной лебеговой меры в пространствах $R^m$ и $R^n$, $D = T \times S$, заданные функции $l, m, n$ и $f, g, h$ определены на множествах $D \times T, D \times S, D \times D$ и $D \times (-\infty, +\infty)$ соответственно, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Отметим, что нелинейные операторы и уравнения с частными интегралами изучались в [1,2].

Пусть $\Omega$ — одно из множеств $T, S, D$, $C(\Omega)$ — пространство непрерывных на $\Omega$ функций, $L = L(\Omega)$ — пространство суммируемых на $\Omega$ функций и $C(L)$ — пространство непрерывных на $D$ вектор-функций со значениями в $L$.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия:

а) $l \in C(L(T)), m \in C(L(S)), n \in C(L(D))$;

б) $|l(t,s,\tau)| \le l_1(t,\tau), |m(t,s,\sigma)| \le m_1(s,\sigma), |n(t,s,\tau,\sigma)| \le l_1(t,\tau)m_1(s,\sigma)$ и операторы $(L_1x)(t) = \int_T l_1(t,\tau)x(\tau)d\tau$, $(M_1x)(s) = \int_S m_1(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma$ действуют в $C(T)$ и $C(S)$ соответственно;

в) функции $f(t,s,u), g(t,s,u), h(t,s,u)$ непрерывны и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по $u$ : $|f'_u(t,s,u)| \le c_1, |g'_u(t,s,u)| \le c_2, |h'_u(t,s,u)| \le c_3$;

г) $r(L_1)c_1 + r(M_1)c_2 + r(L_1)r(M_1)c_3 < 1$, где $r(L_1)$ и $r(M_1)$ — спектральные радиусы операторов $L_1$ и $M_1$ в $C(T)$ и $C(S)$.

Тогда уравнения (1) имеет в $C(D)$ единственное решение.

Пусть $T = [a,b], S = [c,d]$. Условия однозначной разрешимости в $C(D)$ уравнений Вольтерра - Гаммерштейна с частными интегралами содержит

**Теорема 2.** Если функции $f(t,s,u), g(t,s,u)$ и $h(t,s,u)$ непрерывны, имеют ограниченные непрерывные частные производные по $u$ и выполнено одно из условий:

а) $l \in C(L(T)), m \in C(L(S)), n \in C(L(D))$;

б) ядра $l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ ограничены и в $C(D)$ действуют операторы $(Lx)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau$, $(Mx)(t,s) = \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, $(Nx)(t,s) = \iint_G n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$, где $G$ — одно из множеств $[a,t] \times [c,s], [a,t] \times [c,d], [a,b] \times [c,s]$, то в $C(D)$ имеет единственное решение уравнение $x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)f(\tau,s,x(\tau,s))d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)g(t,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma +$
$+ \iint_G n(t,s,\tau,\sigma)h(\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma$.

**Литература.** 1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p. 2. Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. —Липецк: ЛГПУ, 2002. — 208 с.

# О численном решении уравнений Вольтерра-Фредгольма-Романовского с частными интегралами

*В.А. Калитвин*
(Липецк, ЛГПУ; kalitvin@mail.ru)

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра - Фредгольма - Романовского с частными интегралами (ВФР) $x = (L + M\Pi + N)x + f$, где $(Lx)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau$, $(Mx)(t,s) = \int_a^b m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, $\Pi x(t,s) = x(s,t), (Nx)(t,s) = \int_a^t \int_a^b n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$, $t,s \in [a,b]$, $f,l,m,n$ — заданные и измеримые на $D = [a,b]\times[a,b], D\times[a,b], D\times[a,b], D\times D$ соответственно функции. Частными случаями уравнения ВФР с частными интегралами являются уравнение Романовского (при нулевых функциях $l,n,f$ одной задачи теории марковских цепей с двухсторонней связью и интегральное уравнение (при $m(t,s,\sigma) \equiv 0$), к которому приводятся интегро-дифференциальные уравнения Барбашина. Свойства уравнений ВФР изучались в [1]. Точные решения этих уравнений находятся в редких случаях. Непосредственное же применение для численного решения метода типа метода механических квадратур для интегральных уравнений Фредгольма второго рода требует обоснования, так как интегральные уравнения ВФР принципиально отличаются от интегральных уравнений Фредгольма второго рода (из-за некомпактности операторов $L$ и $M$). Поэтому уравнение ВФР сводится к обычному двумерному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, среди решений которого содержатся решения исходного уравнения ВФР. Полученное уравнение решается численно с применением кубатурных формул для вычисления интегралов, а для обоснования сходимости вычислительных схем могут быть использованы хорошо разработанные для интегральных уравнений Фредгольма второго рода методы.

Пусть функции $l,m,n,f$ непрерывны, а уравнение ВФР рассматривается в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D$ функций. В этом случае на $C(D)$ обратим оператор $I-L$, причем $(I-L)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_a^t r(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau \equiv x(t,s) + (Rx)(t,s)$, где $r(t,s,\tau)$ — сумма ряда из итерированных ядер $l^{(i)}$ операторов $L^{(i)}$ $(i = 1,2,\dots)$. Тогда уравнение ВФР равносильно уравнению $x = M\Pi x + (N + RM\Pi + RN)x + Rf$, где второе слагаемое в правой части уравнения есть двумерный интегральный оператор Вольтерра $N_1$ с непрерывным ядром. Поэтому $x = M\Pi x + N_1 x + g$, где $g = Rf$. Предположим, что это уравнение имеет единственное решение $x$. Подставляя вместо $x$ в правую часть уравнения $M\Pi x + N_1 x + g$, приходим к двумерному интегральному уравнению с непрерывными заданными функциями. Если это уравнение имеет единственное решение, то для его нахождения могут быть применены методы численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В результате получается численное решение исходного уравнения ВФР.

**Литература.** 1. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Об уравнениях Вольтерра-Фредгольма-Романовского с частными интегралами // Труды института математики НАН Беларуси. —Минск, 2004. —Т. 12 —№1. —С. 71-75.

# Теорема Бёрлинга для функций из однородных пространств

*Н.С. Калужина*
(Воронеж, ВГУ)

Пусть $G$ - компактно-порожденная локально-компактная абелева группа, $\hat{G}$ - двойственная группа характеров группы $G$. Будем рассматривать пространства $C_b(G)$, $C_{b,u}(G)$ непрерывных и равномерно непрерывных комплексных функций с "suppremum--нормой, а также пространство Степанова [2] $S^p(G)$, где $p \in [1, \infty)$, измеримых локально суммируемых со степенью $p$ функций, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup\limits_{s \in G} \left( \int\limits_V |x(s+g)|^p \, dg \right)^{1/p}$, где $V$ - компактная окрестность нуля группы $G$.

Также рассматривается коммутативная банахова алгебра $L^1(G)$ суммируемых функций со свёрткой в качестве умножения.

**Определение 1** *Банахово пространство $\mathcal{F}(G)$ комплексных функций, определенных на $G$, называется однородным пространством [1] функций, если выполнены условия:*

1. *$\mathcal{F}$ содержит $C_{b,u}(G)$ и содержится в $S^1(G)$, причем вложения $C_{b,u}(G) \subset \mathcal{F}(G) \subset S^1(G)$ непрерывны;*
2. *в $\mathcal{F}$ определена и ограничена группа $S(g)$, $g \in G$, операторов сдвига функций $(S(g)x)(s) = x(s+g)$, $s, g \in G$, $x \in \mathcal{F}$;*
3. *для любых функций $f \in L^1(G)$, $x \in \mathcal{F}$ их свёртка $f * x = \int\limits_G f(\tau)(S(-\tau)x d\tau$ принадлежит $\mathcal{F}$ и $\|f * x\| \leq \|f\|_1 \|x\|$;*
4. *$\hat{G} \subset \mathcal{F}(G)$;*
5. *$\varphi x \in \mathcal{F}(G)$ для любой $x \in \mathcal{F}(G)$ и любой функции $\varphi \in C_b(G)$ с компактным носителем, причем $\|\varphi x\| \leq \|\varphi\|_\infty \|x\|$.*

Банаховы пространства $C_{b,u}(G)$, $C_b(G)$, $L^\infty(G)$, $S^p(G)$, $p \in [1, \infty)$, являются однородными.

**Определение 2** *Спектром Бёрлинга функции $x \in \mathcal{F}(G)$ называется множество $\Lambda(x) = \{\gamma \in \hat{G} | fx \neq 0, \forall f \in L^1(G), \hat{f}(\gamma) \neq 0\}$.*

Для формулировки основных теорем введем понятия $c$-сходимости [4] и дискретного спектра функции.

**Определение 3** *Пусть $\Omega$ - направленное множество. Направленность функций $(x_\alpha)$, $\alpha \in \Omega$ из $\mathcal{F}(G)$ называется $c$-сходящейся к $x_0 \in \mathcal{F}(G)$, если она ограничена и $\lim \|\varphi(x_\alpha - x_0)\| = 0$, для любой $\varphi \in C_{b,u}(G)$ с компактным носителем.*

*Если, к тому же, $\lim \|x_\alpha\| = \|x_0\|$, то направленность $(x_\alpha)$ называется узко сходящейся к $x_0$.*

**Определение 4** *Характер $\gamma \in \hat{G}$ отнесем к дискретному спектру $\Lambda_d(x)$ функции $x \in \mathcal{F}(G)$, если существует такая направленность $(f_\alpha)$, $\alpha \in \Omega$, из $L^1(\mathbb{G})$, для которой выполнены свойства: 1) $\hat{f}_\alpha(0) = 1$ и $f_\alpha \geq 0$, $\alpha \in \Omega$; 2) $\lim\limits_{G} |f_\alpha(g+u) - f_\alpha(g)|dg = 0$, $u \in G$; 3) $\overline{\lim}\|\gamma f_\alpha * x\| > 0$.*

В статье [3] А.Бёрлингом был сформулирован "оригинальный и действительно поразительный результат"(цитата из [5]) в спектральном синтезе.

**Теорема 1** *[Бёрлинг [3]] Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ и $x \neq 0$. Тогда существует число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и последовательность $(x_n)$ линейных комбинаций сдвигов функции $x$, которая узко сходится к функции $\exp(i\lambda_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Получен аналог теоремы Бёрлинга для более широкого класса функций, а именно, для функций из однородного пространства, имеющих непустой дискретный спектр.

**Теорема 2** *Пусть $x \in \mathcal{F}(G)$ и $\gamma_0 \in \hat{G} \in \Lambda_d(x)$. Тогда существует направленность $(x_\alpha)$, составленная из линейных комбинаций сдвигов функции $x$, которая $c-$сходится к характеру $\gamma_0$.*

Полученная теорема применима в теории стабилизации решений параболических уравнений, в частности, при оценке нормы решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов/ А. Г. Баскаков// СМФН - 2004. - № 9. - P.3–151. 2. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова./ А. В. Костин, В. А. Костин. - Воронеж.: Изд–во ВГУ, 2007. 3. Beurling A. Un theoreme sur les fonctions borness et uniformement continues sur l'axe reel/ A. Beurling// Acta Math. - 1945. - № 77. - P.127–136. 4. Koosis P. On the spectral analysis of bounded functions/ P. Koosis// Pacific Journal of Mathematics. - 1966. - № 16. - P. 121–128. 5. Хьюитт Э. Абстрактный гармонический анализ./ Э. Хьюитт, К. Росс. - М.: Мир, 1975. - Т. 2.

## О вариационной трактовке задачи о бифуркации периодических решений дифференциального уравнения в случае неизолированных положений равновесия усредненного уравнения[8]

*М.И. Каменский, Б.А. Михайленко*
(Воронеж, ВГУ; Mikhailkamenski@mail.ru, Mikh@mail.ru)

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$\dot{x} = Ax + f(\frac{t}{\varepsilon}, x), \tag{1}$$

[8]Работа частично поддержана грантами РФФИ №09-01-92003, №09-01-92492

где $A-$ невырожденная $n \times n-$матрица с постоянными коэффициентами, $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n-$непрерывная и $T-$периодическая по первой переменной и дважды дифференцируемая по второй переменной функция, $\varepsilon \in [0, 1]$.

**Условие У1.** Пусть усредненное уравнение

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x)dt$$

имеет одномерное связное многообразие положений равновесия $\{x_0(\theta) : \theta \in [0, 1]\}$, причем существует $x_0''(\theta)$ и $x_0'(\theta) \neq 0$.

Рассмотрим линеаризованное уравнение

$$\dot{y} = Ay + [\frac{1}{T}\int_0^T f_2'(t, x_0(\theta))dt]y.$$

Очевидно, $x_0'(\theta)-$собственный вектор оператора, стоящего в правой части этого уравнения, отвечающий нулевому собственному значению.

**Условие У2.** Будем считать, что это собственное значение простое.

Определим функции $P : C([0, T], \mathbb{R}^n) \to C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $Q : C([0, T], \mathbb{R}^n) \times [0, 1] \to C([0, T], \mathbb{R}^n)$, действующие по следующим правилам:

$$Py(\tau) = y(\tau) - \frac{1}{T}(-A^{-1})\int_0^T f(\zeta, y(\zeta))d\zeta,$$

$$Q(y, \varepsilon)(\tau) = \begin{cases} -\int_0^T ((\frac{1}{2} + \frac{\zeta - \tau}{T}) + o(\varepsilon^2))f(\zeta, y(\zeta))d\zeta, 0 \leq \zeta \leq \tau \leq T \\ -\int_0^T ((-\frac{1}{2} + \frac{\zeta - \tau}{T}) + o(\varepsilon^2))f(\zeta, y(\zeta))d\zeta, 0 \leq \tau < \zeta \leq T, \end{cases}$$

где $o(\varepsilon^2)-$бесконечно малая величина порядка $\varepsilon^2$. Обозначим собственный вектор сопряженного к $P'(x_0(\theta))$ оператора, отвечающий нулевому собственному значению, через $z_0(\theta) \in (C([0, T], \mathbb{R}^n))^*$ и определим абстрактную бифуркационную функцию Малкина-Луда:$M(\theta) = (Q(x_0(\theta), 0), z_0(\theta))$, где скобками $(c, z)$ обозначен результат действия функционала $z$ из сопряженного пространства на элемент $c$ пространства $C([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Введем в рассмотрение функционал

$$W_\theta(y) = \int_0^T \langle ((I - P)y)(\zeta), z_0(\theta)(\zeta)\rangle d\zeta.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема (О вариационном представлении).** Пусть в точке $x_0(\theta_0)$ выполнено условие $M'(\theta_0) \neq 0$. Тогда точка $x_0(\theta_0)$ является порождающей бифуркацию $\varepsilon T-$периодических решений $x^\varepsilon$ уравнения (1) в том и только том случае, когда точка является подозрительной на экстремум для функционала $W_{\theta_0}(y)$ по направлению $Q(x_0(\theta_0), 0)$.

# Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла-Шредингера.

*А.В. Карпикова*
(Воронеж, ВГУ; karpikovaAV@mail.ru )

Рассматривается одномерный оператор Хилла-Шредингера [1]

$$L = A - B : D(L) \subset L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) \to L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right),$$

$Ly = -y'' - v(t)y$, $y \in D(L) = \{y \in W_2^2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) : y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi)\}$, где $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{2ikt}$, $t \in [0,\pi]$ - комплекснозначный потенциал, причем $v \in L_2[0,\pi]$. Предполагается, что $v_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi v(t)dt = 0$. Если $v = 0$ , то оператор $L$ обозначается символом $L^0$. Спектр и собственные функции оператора $L^0$ имеют следующий вид: $Sp(L^0) = \{n^2, n = 0, 2, 4...\}$-спектр оператора $L^0$; $E_n^0 = Span\{e^{2int}, e^{-2int}\}$-собственное подпространство для собственного значения $n^2$ , $n \neq 0$ ; $E_0^0 = \{\alpha\}, \alpha \in \mathbb{C}$. Положим $\omega_n = v_{-n}v_n$ , $\widetilde{\omega_n} = p_{-n}p_n, n \in \mathbb{Z}$, где $p_n = v_{2n} + c_{n,-n}$ , $p_{-n} = v_{-2n} + c_{-n,n} = \overline{p_n}$ , $c_{n,-n} = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z},|j|\neq|n|} v_{n-j}\frac{v_{j+n}}{j^2-n^2}$, $c_{-n,n} = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z},|j|\neq|n|} v_{-(n+j)}\frac{v_{j-n}}{j^2-n^2} = \overline{c_{n,-n}}$. Тогда с помощью метода подобных операторов [2] можно получить

**Теорема 1** *Существует число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора $L = A - B$ представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left( \bigcup_{|n|\geq m+1} \sigma_n \right), \tag{1}$$

*где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а множества $\sigma_n$, $|n| \geq m+1$ двухточечны и определяются равенством*

$$\sigma_n = \{n^2 - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |k|\neq 2n}} \omega_k \pm \sqrt{\widetilde{\omega_n}} \ + \beta_n^{\pm}\}, \tag{2}$$

*где $\sum\limits_{|n|\geq m+1} |\beta_n^{\pm}| < \infty$.*

**Теорема 2** *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что оператор $L$ спектрален [3] относительно разложения (1).*

**Литература.** 1. Джаков П, Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака//Успехи математических наук. 2006. Т.61. – №4. – с. 77-182. 2. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. – Воронеж: изд-во Воронежского государственного университета. 1987. – 165 с. 3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т III. – М.: Мир. 1974. – 661 с.

# Вычисление асимптотик амплитуд резонансно бифурцирующих циклов системы гидродинамического типа

*А.П. Карпова*
(Воронеж, ВГУ; karpovaantonina@mail.ru)

Рассмотрим динамическую систему с квадратично–кубической нелинойстью из класса "систем гидродинамического типа"

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \nu \Delta(v) + \mu v + c\, grad\,(P) + \lambda B \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \tag{1}$$

($\Delta$ — двумерный лапласиан) с условием несжимаемости

$$\mathrm{div(v)} = 0 \tag{2}$$

на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и "какими-нибудь" стандартными краевыми условиями. Будем предполагать, что кроме вектора силы вязкости $\nu\Delta(v)$ уравнение содержит векторы силы торможения $\mu v$ и упругой вязкости $\lambda B(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2})$.

Рассмотрев решения, периодические по $x_1, x_2$ и посредством одной из процедур дискретизации по пространственным переменным получим обобщенную конечномерную систему гидродинамического типа

$$\dot{w} = Aw + B(w, w) + C(w, w, w), \qquad w \in \mathbb{R}^6. \tag{3}$$

Переход к системе такого вида дает возможность исследовать зарождения условно периодических колебаний, устойчивость зарождающихся волновых движений и др.

Записав уранение в операторном виде и применив соотношения полученные в предыдущих работах, получим асимптотическое представление решения. На его основе нетрудно получить компьютеоные изображения, дающие представление о процессе зарождения волновых движений жидкости вблизи ламинарных течений.

**Литература.** 1. Карпова А.П. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов/ А.П. Карпова, Ю.И. Сапронов// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008, вып. 3. С.12-22. 2. Зачепа В.Р. Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В.Р.Зачепа, Ю.И.Сапронов – Воронеж: ВГУ, 2002. – 185 с.

## Фредгольмовы уравнения с круговой симметрией и циклогенез

*А.П. Карпова, Н.А. Копытин, Ю.И Сапронов*
(Воронеж, ВГУ; karpovaantonina@mail.ru, nicktwin@bk.ru, yusapr@mail.ru )

Цель сообщения — изложение новой методики дискриминантного анализа решений фредгольмовых уравнений (на банаховом пространстве) с круговой симметрией ($SO(2)-$эквивариантностью), бифурцирующих из изолированной особой точки. В качестве приложения предлагается процедура вычисления дискриминантного множества и амплитудно–частотных характеристик периодических решений, бифурцирующих с сильными и двойными сильными резонансами из точек покоя дифференциальных уравнений достаточно широкого класса, включающего в себя уравнение колебаний упругой балки на упругом основании, нелинейные уравнения С.Л. Соболева, автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнение Навье–Стокса и др. Методологической основой представленных в докладе результатов исследования является спектральный метод Ляпунова–Шмидта [1] – [4], оснащенный элементами теории особенностей гладких отображений [5].

**Литература** 1. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л., Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3-140. 2. Sapronov Yu.I., Darinskii B.M. Discriminant sets and layerings of bifurcating soluions of fredholm equations// Journ. of Math. Sc. Vol. 126, N 4. 2005. P.1297-1311. 3. Карпова А.П., Копытин Н.А., Непринцев В.И., Сапронов Ю.И. Алгоритм численного исследования резонансных бифуркаций колебательных режимов в электрической цепи с дополнительным контуром// Вестник ВГТУ. - Т. 5. - № 4. - 2009. - С. 116-119. 4. Карпова А.П., Копытин Н.А., Сапронов Ю.И. Ключевые уравнения в динамических системах с 2-кратными резонансами// Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей (под ред. В.А. Костина и Ю.И. Сапронова). - Т. 6. - Воронеж: ВорГУ, 2009. - С. 51-58. 5. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн–Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО. 2004. 672 с.

## Об устойчивости решений систем леонтьевского типа

*А.В. Келлер, Е.И. Назарова*
(Челябинск, ЧелГУ; alevtinak@inbox.ru)

Устойчивость решений уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{1}$$

с начальным условием Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

в случае $(L, \sigma)$–ограниченности оператора $M$ рассмотрена в [1], в случае $(L, p)$–радиальности оператора $M$ – в [2].

Пусть $L$ и $M$ – квадратные матрицы порядка $n$, причем $detL = 0$, матрица $M$ является $L$-регулярной ($\exists\lambda \in \mathbb{C} : det\,(\lambda L - M) \neq 0$), $u : [0;T) \to \mathbb{R}^n$, $f$– некоторая вектор-функция, тогда (1) – система леонтьевского типа, поскольку является обощением модели межотраслевого баланса В.Леонтьева. В этом случае $L$-спектр оператора $M$ ($\sigma^L(M) = C \setminus \{\mu \in \ : (\mu L - M)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$ находится из уравнения

$$det(\mu L - M) = a_n\mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + ... + a_1\mu + a_0. \qquad (3)$$

Поскольку $a_n = detL$, то $a_n = 0$. Коэффициент $a_l$ есть сумма слагаемых, каждое их которых есть произведение одного из миноров порядка $l$ матрицы $L$ на число, $l = 1, ..., n-1$, свободный коэффициент $a_0 = det(-M)$. Поэтому степень многочлена $q = det(\mu L - M)$ не выше $rankL$, т.е. ранга матрицы $L$. Итак,

$$det(\mu L - M) = a_q\mu^q + a_{q-1}\mu^{q-1} + ... + a_1\mu + a_0. \qquad (4)$$

При рассмотрении вопроса об устойчивости решений задачи (1), (2) будем использовать критерий Рауса–Гурвица [3], устанавливающий необходимые и достаточные условия устойчивости решений систем леонтьевского типа на основе вычислений определителей Гурвица, составленных из коэффициентов многочлена (4).

В докладе приводятся примеры матриц $L$ и $M$, при которых решения задачи (1), (2) устойчивы и неустойчивы.

**Литература.** 1. Келлер, А.В. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений соболевского типа / А.В. Келлер // Изв. ВУЗов. Матем. 1997.– №5 (420) – С. 60-68. 2. Сагадеева, М.А. Устойчивость решений линейных уравнений соболевского типа: Дисс. ..канд. физ.-мат. наук. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2006. 3. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Ганмахер – М.: Наука, 1965. – 576 с.

## Классическая задача о движении вихрей на плоскости и основные пути ее обобщения

*Н.А. Кирин*
(Коломна, МГОСГИ; Kirin_N_A@mail.ru)

Рассматривая гамильтоновы системы, отвечающие инвариантам Васильева, заданных с помощью итерированных интегралов Чена от логарифмических дифференциальных форм, можно доказать

**Теорема** Пусть гамильтониан Н является мнимой частью инварианта Васильева первого порядка, представленного 1-итерированным интегралом Чена $W(I_1) = \sum_{i<j}\left(\frac{W(X_{ij})}{2\pi\sqrt{-1}} \otimes \int_\gamma d\log(z_i - z_j)\right)$ с весовой системой $W(X_{ij}) = \Gamma_i\Gamma_j$. Тогда динамическая система на конфигурационном пространстве $X_n = \mathbb{C}^n \setminus (\cup_{i<j} H_{ij})$, определяемая гамильтонианом $H$ совпадает с системой n точечных декартовых вихрей на плоскости.

Данная задача связана с классической задачей о движении материальных точек на плоскости, с потенциалом $U(r_1, \ldots, r_n) = -\frac{G}{2}\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}$.

Нетрудно показать, что система декартовых вихрей на плоскости является дискретной аппроксимацией уравнения Эйлера $\frac{\partial v}{\partial t} = -(v, \nabla)v - \nabla p$; $div\, v = 0$.

Обобщение указанной задачи можно проводить в нескольких направлениях. Во-первых, можно рассмотреть возмущения рассмотренной нами гамильтоновой системы, отвечающей инварианту Васильева первого порядка, дополнительными слагаемыми, отвечающими инвариантам Васильева более высокого порядка, в том числе, рассмотрев полный инвариант Васильева. Такие системы будут обладать рядом сходных динамических свойств. Например, для случая полного инварианта можно показать, что, если зафиксировать уровень энергии, то уравнения движения в новой задаче будут пропорциональны соответствующим уравнениям классической задачи.

Нетрудно, так же, доказать, что если некоторый интеграл является интегралом движения для классической задачи движения вихрей, то он будет интегралом движения и для задачи движения неклассических вихрей на плоскости.

Во-вторых, можно обобщить нашу задачу на случай комплексных интенсивностей. Второй способ приведет к задаче исследования движения вихреисточников на плоскости. Вихреисточники в данной модели осуществляют механизмы конвекции (в оба направления) между тонкими параллельными слоями жидкости.

**Литература.** 1. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике/ Перевод с англ.–М.: МЦНМО, 2007.–392с. 2. Козлов, В.В. Общая теория вихрей [Текст]/В.В.Козлов.–Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1998.–238 с. 3. Berger M.A. Hamiltonian dynamics generated by Vassiliev invariants// J. Phys. A: Math. Gen., 2001.–v.34.–P.1363–1374. 4. Кирин, Н.А. Гамильтоновы системы и инварианты Васильева// Современная математика и ее приложения: Труды международной конференции по динамическим системам и дифференциальным уравнениям. Суздаль 2006, часть 3. - Тбилиси: Изд-во: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2008, Том 57, С. 10-18. 5. Kirin, N.A. Hamiltonian systems and Vasil'ev invariants// Journal of Mathematical Sciences: Springer New York, Volume 160, Number 1, 2009. - pp. 10-20.

## Численное отыскание ограниченных на всей оси решений параболических краевых задач в в случае знаконеопределенного эллиптического оператора

*Е.В. Китаева*
(Самара, СамГУ; el_kitaeva@mail.ru)

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a(t, \xi)u + f(t, \xi), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u\Big|_{\xi=-1} = u\Big|_{\xi=1} = 0. \tag{2}$$

Предположим, что

E1. Функции $f(t,\xi), a(t,\xi)$ и все их частные производные $\frac{\partial^{|i|}f}{\partial t^{i-s}\partial\xi^s}, \frac{\partial^{|i|}a}{\partial t^{i-s}\partial\xi^s}$ ,$0 \le i \le 2k_1+1$, $0 \le s \le i$ при некотором $k_1 \ge 2$ равномерно ограничены при $t \in R, \xi \in [-1,1]$.

E2. При каждом фиксированном $t \in R$ для собственных значений оператора $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + a(t,\xi)$ с краевыми условиями (2) справедливы неравенства $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \cdots$, $|\lambda_i(t)| \ge \lambda_0 > 0$ и выполняются условия $\lambda_s = O^*(s^2), |\lambda_i - \lambda_j| \ge C|i-j|^2, i \ne j, \inf\limits_{t\in(-\infty,+\infty)} |\lambda_i(t)| \ge \lambda_0 > 0$.

**Теорема 1** *Задача (1)-(2) имеет единственное ограниченное при* $t \in (-\infty,+\infty)$, $\xi \in [-1,1]$ *решение* $u(t,\xi)$. *Для этого решения справедливы оценки* $\sup\limits_{t\in(-\infty,+\infty)} \parallel \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \parallel_{C[-1,1]} \le C,\ 0 \le i \le k_1-1,\ \sup\limits_{t\in(-\infty,+\infty)} \parallel \frac{\partial^i u}{\partial \xi^i} \parallel_{C[-1,1]} \le C,\ 0 \le i \le 5$.

Данная задача является модельной для описания критических режимов горения. Ее решение неустойчиво как в прямом так и в обратном времени.

В докладе предлагается итерационный метод [1], суть которого состоит в подавлении части компонент вектора ошибки решения разностной задачи при движении в прямом времени, а остальных компонент - в обратном времени, с применением быстрого преобразования Фурье. Излагается алгоритм метода и приводятся результаты численных экспериментов.

**Литература.** 1. Китаева Е.В., Соболев В.А. Численное отыскание ограниченных на всей оси решений дискретных сингулярно возмущенных уравнений и критических режимов горения. Журн. вычисл.матем. и матем. физики. 2005. Т.45, №1. с.56-87.

## Об условиях обратимости дифференциальных операторов в пространствах периодических функций.

*К.С. Кобычев*

(Воронеж, ВГУ; KirillKobychev@gmail.com)

Пусть $X$ - комплексное банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $X$. Далее $\mathcal{U} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to EndX$ - сильно непрерывное $\omega$ - периодическое семейство эволюционных операторов, т.е. выполнены следующие условия:

1. $\mathcal{U}tt = I$, $t \in \mathbb{R}$;
2. $\mathcal{U}ts\mathcal{U}s\tau = \mathcal{U}t\tau$ для всех $\tau \le s \le t$ из $\mathbb{R}$;
3. $\sup_{0\le t-\tau\le\omega} \|\mathcal{U}\| = M < \infty$;
4. $\mathcal{U}t+\omega s+\omega = \mathcal{U}ts$ для всех $t$,$s \in \mathbb{R}$ ( условие периодичности семейства $\mathcal{U}$ ).

Отправляясь от произвольного $\omega$-периодического сильно непрерывного семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to EndX$, определим оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} = d/dt - A(t) : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$, где через $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ обозначается одно из пространств $L^p_\omega(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$ - банахово пространство измеримых (по Бохнеру) суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) периодических периода $\omega > 0$ (классов) функций , действующих из $\mathbb{R}$ в $X$, $C_\omega = C_\omega(\mathbb{R}, X)$ - банахово пространство непрерывных периодических функций. Оператор $A \in L^\infty_\omega(\mathbb{R}, EndX)$, если $\mathcal{F}_\omega = L^p_\omega$, $p \in [1, \infty]$ и $A \in C_\omega(\mathbb{R}, EndX)$, если $\mathcal{F}_\omega = C_\omega$. Непрерывная $\omega$-периодическая функция $x \in \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ относится к области определения оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, если существует функция $f \in \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ такая, что верны равенства $x(t) = \mathcal{U}t0x(0) - \int_0^t \mathcal{U}t\tau f(\tau)d\tau, \quad t \in [0, \omega]$. Отметим, что функция $f$ единственна и при этом полагается $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$. Для заданного семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to EndX$ символом $V(t)$, $t \in [0, \omega]$, обозначим оператор $\mathcal{U}t + \omega t \in EndX$. Справедливы следующие утверждения, для доказательства которых существенно используются результаты статьи [1]:

**Теорема 3** . *Для того, чтобы линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы был обратим оператор $\mathcal{U}_\omega = I - \mathcal{U}\omega 0$ (т.е. $1 \notin \sigma(\mathcal{U}w0)$). Если оператор $\mathcal{U}_\omega$ обратим, то обратимы операторы $I - V(t)$, $t \in [0, \omega]$, и имеют место оценки*

$$\|(I - V(t))^{-1}\| \leq M^2 \|\mathcal{U}_\omega^{-1}\|, \quad t \in [0, \omega].$$

**Теорема 4** . *Если оператор $\mathcal{U}_\omega$ обратим, то обратим оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ и обратный к $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ оператор определяется формулой*

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1} f) = \int_0^\omega G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad f \in \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X),$$

*где функция (Грина) $G : [0, \omega] \times [0, \omega] \to EndX$ имеет вид*

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (\mathcal{U}(t, t - \omega) - I)^{-1} \mathcal{U}(t, \tau), & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ (\mathcal{U}(t, t - \omega) - I)^{-1} \mathcal{U}(t, \tau - \omega), & t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

**Теорема 5** . *Из обратимости оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ в одном из пространств $L^p_\omega(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, $C_\omega(\mathbb{R}, X)$ следует его обратимость во всех остальных.*

Пусть теперь семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to EndX$ однородно, т.е. оно представимо в виде

$$\mathcal{U}t\tau = T(t - \tau), \quad \tau \leq t, \tag{3}$$

где $T : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \to EndX$ - полугруппа класса $C_0$ [2]. Следовательно, такое семейство периодично с любым периодом $\omega > 0$. В данном случае $U(t) = \mathcal{U}t + \omega t = T(\omega)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, и поэтому условие обратимости оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ эквивалентно выполнению условия

$$1 \notin \sigma(T(\omega)). \tag{4}$$

Если $A$ -(инфинитезимальный) генератор полугруппы $T$, то из условия (4) следует , что выполнено условие

$$s(A) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|R(\frac{i2\pi n}{\omega}, A)\| < \infty, \tag{5}$$

где $R(\cdot, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ - резольвента оператора $A$. Из теоремы 3 следует

**Теорема 6** . *Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ - генератор полугруппы $T : [0, \infty) \to EndX$ класса $C_0$. Тогда для обратимости дифференциального оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$, где семейство $\mathcal{U}$ определено формулой (3), необходимо и достаточно выполнение условия (4). Если $X$ - гильбертово пространство, то условия (4) и (5) эквивалентны.*

**Литература.** 1. Баскаков А.Г., Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных уравнений.// Функциональный анализ и его приложения, 1996, Т. 30, вып. 3, с. 1-11. 2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.//Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.

## $S-$ весовые пространства Степанова и двойственные им

*А.В. Костин*
(Воронеж, ВГУ)

Как известно ([1]), банаховы пространства В.В. Степанова, локально интегрируемых функций со степенью $1 \leq p < \infty$ на всей действительной оси $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ функций, определяются нормой

$$\|f\|_{S_p} = \sup_{t\in\mathbb{R}^1} \left[\frac{1}{l}\int_t^{t+l} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Из различных норм эквивалентных норме (1) в пространствах Степанова, мы будем пользоваться нормой

$$\|f\|_{S_p} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\int_n^{n+1} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{q}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\int_0^1 |f(x+n)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty).$$

Здесь $Z-$ множество целых чисел.

Наряду с этим, рассмотрим множество $S_q^*$ локально интегрируемых на $\mathbb{R}^1$ со степенью $q \in (1, \infty)$ функций $g(x)$ для которых конечна норма

$$\|g\|_{S_q^*} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_n^{n+1} |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{p}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 |g(x+n)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Множество $S_q^*$ является банаховым пространством.

Далее, для $f \in S_p$ и $g \in S_q^*$ рассмотрим билинейный функционал

$$B(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

Очевидно, что по терминологии ([2], с. 39) функционал $B(f,g)$ приводит линейные системы $S_p$ и $S_q^*$ в двойственность, так как для каждого $f \in S_p$, $f \neq 0$ существует $g \in S_q^*$ такой, что $B(f,g) \neq 0$, и для $g \neq 0$ из $S_q^*$ существует $f \in S_p$ такой, что $B(f,g) \neq 0$. При этом справедлива

**Теорема.** Имеют место равенства

$$\|f\|_{S_p} = \sup_{\|g\|_{S_q^*}=1} |B(f,g)|,$$

$$\|g\|_{S_q*} = \sup_{\|f\|_{S_p}=1} |B(f,g)|.$$

**Литература** 1. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В. Костин, В.А. Костин.— Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.— 259 с. 2. Функциональный анализ.// под общей редакцией С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972.— 544 с.

## Пространства Соболева-Степанова и оператор Лапласа

*В.А. Костин*

(Воронеж, ВГУ)

Пусть $K_n$— единичный куб в $\mathbb{R}^n$, с гранями $0 \leq x_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $K_{n,a}$— куб $K_n$ сдвинутый на вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $(T_a u)(x) = u(x+a)$.

**Определение 1.** Обозначим через $S_p(\mathbb{R}^n)$ множество локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left[ \int_{K_n} |u(x+a)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1). \tag{1}$$

Очевидно, что при $n = 1$ они совпадают с классическими пространствами Степанова $S_p(\mathbb{R}^1)$.

$S_p(\mathbb{R}^n)$– пространства являются банаховыми.

Замечая, что нормы (1) не обладают свойством непрерывности в целом, в том смысле, что для них, вообще говоря, не выполняется предельное соотношение

$$\lim_{h \to 0} \|u(x+h) - u(x)\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{2}$$

мы будем рассматривать подпространство $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$, как множество функций $u \in S_p(\mathbb{R}^n)$ для которых справедливо соотношение (2).

Известно, что эти пространства являются банаховыми. Они получаются замыканием в классе $C(\overline{\mathbb{R}}^n)$ равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций.

Далее, используя нормы с пространствами $W_p^l(\Omega)$ введем

**Определение 2.** Множество локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$ со степенью $p \geq 1$ функций $u(x)$ вместе со всеми производными до порядка $l$ включительно и для которых конечна норма

$$\|u\|_{W^l S_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|T_a u\|_{W_p^l(K_n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|u\|_{W_p^l(K_{n,a})} \qquad (3)$$

будем называть функциональными пространствами Соболева–Степанова и обозначать $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$.

Пространства $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$ являются банаховыми.

**Теорема.** Оператор $A$, заданный дифференциальным выражением $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ и областью определения $D(A) = W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ является генератором полугруппы Гаусса-Вейерштрасса в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$.

**Литература** 1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике/ С.Л. Соболев.— М.: Наука, 1988.— 393 с. 2. Степанов В.В. Об одном классе почти–периодических функций/ В.В. Степанов// ДАН СССР, Т. LXIV, 3(1949).— с. 297.

## Нелокальный анализ ветвления периодических решений в вариационных задачах

*Т.И. Костина*
(Воронеж, ВГУ; tata_sti@rambler.ru)

Рассматривая уравнение Белецкого [1], уравнение колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu$$

(при $\varepsilon = 0$ получаем уравнение колебаний маятника $\ddot{x} + \mu\sin(x) = 0$), заметим, что оно является вариационным [2], это позволяет применить к нему нелокальную аналитическую схему Ляпунова-Шмидта и основанные на ней новые вычислительные технологии [3],[4].

Исследование вариационных уравнений в случае периодической задачи можно осуществить посредством нелокальной редукции Ляпунова–Шмидта с параллельным применением метода скорейшего спуска (метода градиента) для приближенно вычисляемой ключевой функци. "Общий" $k-$ый шаг в разработанной численной процедуре состоит в переходе от функции

$$W_{(k)}(\xi,\lambda) = V(u + v_k(\xi,\lambda)), \;\; u = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \;\; v_k \bot N = Lin(e_1, e_2)$$

($e_0 = 1, e_1 = cos(t), e_2 = sin(t)$ — главные моды бифуркации) к функции

$$W_{(k+1)}(\xi,\lambda) = V(u + v_{k+1}(\xi,\lambda),$$

$$v_{k+1}(\xi,\lambda) = v_k(\xi,\lambda) + h_k(\xi,\lambda), \;\; h_k(\xi,\lambda) = -s_k\, \mathrm{grad}V(u + v_k(\xi,\lambda)) = s_k\, \nabla_k(\xi,\lambda).$$

Выбор $s_k$ существляется через вспомогательную выпуклую функцию $\omega(s) = V(u+v_k+s\nabla_k)$, $s \geq 0$ ($s_k$ — приближение к точки $min$ по методу Ньютона).

Также для приближенного вычисления ключевой функции можно использовать метод галеркинских аппроксимаций.

**Литература** 1. Белецкий В.В Движение искуственного спутника вокруг центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с. 2. Костина Т.И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова–Шмидта// Математические модели и операторные уравнения. Том 5, вып. 1. Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 98–104. 3. Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах// Матем. заметки. – 2000. Т. 58, № 5. – С. 745-754. 4. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи матем. наук. – 1996. – Т. 51, N 1. – С. 101-132.

## Вырожденная операторно-дифференциальная система специального вида в банаховых пространствах

*О.В. Коробова*

(Иркутский государственный университет; ollis@mail.ru)

Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$B\mathcal{D}^{\alpha}\overline{u}(\overline{x}) = \Lambda A\overline{u}(\overline{x}) + \overline{f}(\overline{x}),$$

здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M)$ — мультииндекс, т.е. целочисленный $M$-мерный вектор с неотрицательными координатами $\alpha_i$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_M)$, $\overline{u}(\overline{x})$, $\overline{f}(\overline{x})$ — вектор-функции (столбцы) размерности $s$, компоненты которых $u_\nu(\overline{x})$ — функции со значениями в банаховом пространстве $E_1$, а $f_\nu(\overline{x})$ — функции со значениями в банаховом пространстве $E_2$, $\nu = 1, \ldots, s$, $B$, $A$ — замкнутые линейные операторы из $E_1$ в $E_2$ с плотными областями определения, оператор $B$ необратим, под записью $A\overline{u}(\overline{x})$ $(B\mathcal{D}^{\alpha}\overline{u}(\overline{x}))$ понимается вектор-функция (столбец) с компонентами $Au_\nu(\overline{x})$ $(B\mathcal{D}^{\alpha}u_\nu(\overline{x}))$, $\nu = 1, \ldots, s$,

$$\mathcal{D}^{\alpha}u_\nu(\overline{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|}u_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_M)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_M^{\alpha_M}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_M,$$

$\Lambda$ — невырожденная квадратная матрица порядка $s$.

В работах [1], [2] была введена конструкция фундаментальной оператор-функции, позволяющая в замкнутом виде строить обобщенные решения различных типов вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Строились обобщенные решения в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем. В работе [3] было построено обобщенное решение вырожденной системы дифференциальгых уравнений первого порядка в баноховых пространствах. Идеи работ [1] – [3] можно применить и для построения обобщенного решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений в частных производных.

**Литература.** 1. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. —

Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.,2002. 2. Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах. Сиб.мат.журн. —2000. —Т. 41, № 5. —С. 1167–1182. 3. Фалалеев М.В., Коробова О.В. Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах. Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 916–927.

## Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности

*А.А. Короткевич*

(Москва, МГУ им. Ломоносова; Korotkevich_aa@mail.ru)

В настоящем докладе будет рассказано о построении интегрируемых гамильтоновых систем с полиномиальными первыми интегралами на коалгебре для каждой вещественной алгебры Ли размерности три, четыре, пять и нильпотентных размерности шесть методом С.Т. Садэтова.

**Литература.** 1. Садэтов С. Т. Доказательство гипотезы Мищенко – Фоменко. Доклады РАН. 2004. 397. №6. 751 – 754. 2. Болсинов А. В. Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко - Фоменко // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 2005, вып. 26, М.: МГУ стр. 87-109. 3. J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus Invariants of real low dimension Lie algebras.// Journal of Mathematical Physics, Vol. 17, №6., June 1976 4. Морозов В. В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. высш. учебн. зав. Математика. 1958, №4(5) стр.161-171. 5. Мубаракзянов Г. М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. высш. учебн. зав. Математика. 1963, №3(34) стр. 99-106

## Индекс фредгольмова отображения 1-й степени

*М.Н. Крейн*

(Липецк, ЛГПУ; travkin@lipetsk.ru )

В предыдущих работах автора, например, в [1] введены и рассмотрены отображения в некоммутативных алгебрах вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x \cdot b_i$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ - фиксированные элементы. Такие отображения названы отображениями 1-й степени, и их множество обозначено $d_1(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ - алгебра, в которой действуют отображения. $d_1(\mathcal{A})$ также является алгеброй с операцией композиции отображений в качестве умножения. Если $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ - конечно- или счетнопорожденные $\mathcal{A}$-модули, то отображение $F: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ названо отображением 1-й степени, если оно "покоординатно"является таковым. При $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$ множество $d_1(\mathcal{M})$ отображений 1-й степени из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ также является алгеброй с композицией в качестве умножения. Понятие отображения 1-й степени обобщает понятие линейного отображения модулей (множество отображений 1-й степени включает в себя множество линейных отображений).

Фредгольмово отображение 1-й степени модуля $l_2(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ - C*-алгебра, определяется аналогично линейному фредгольмову как сумма изоморфизма и компактного отображения (оба слагаемых в этом случае подразумеваются отображениями 1-й степени). У линейного фредгольмова отображения ядро и коядро являются конечнопорожденными проективными модулями и определяют поэтому элемент в $K(\mathcal{A})$, называемый индексом отображения. У отображения 1-й степени ядро и образ (и, соответственно, коядро) в общем случае модулями, ни левыми, ни правыми, не являются, являются только линейными пространствами.

Предлагается следующая конструкция, сопоставляющая фредгольмову отображению 1-й степени алгебраический объект. Пусть $F: l_2(\mathcal{A}) \to l_2(\mathcal{A})$ - фредгольмово отображение 1-й степени. Нетривиальная, т.е. отличная от изоморфизма его часть является $d_1$-отображением свободных конечнопорожденных $\mathcal{A}$-модулей $\tilde{F}: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. $d_1(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ является свободным конечнопорожденным $d_1(\mathcal{A})$-модулем. Пусть $\mathcal{P}_1$ означает множество тех отображений из $d_1(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, ядро которых содержит $\ker \tilde{F}$, а $\mathcal{P}_2$ означает множество тех отображений из $d_1(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, образ которых содержится в $\operatorname{im} \tilde{F}$. $\mathcal{P}_1$ является левым подмодулем, а $\mathcal{P}_2$ - правым подмодулем в $d_1(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$. Пару $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ и назовем индексом отображения $F$.

**Литература.** 1. Krein M.N. The mappings of degree 1. Abstract and Applied Analysis. Special Issue.
http://www.hindawi.com/GetArticle.aspx?doi=10.1155/AAA/2006/90837

## Оценки элементов обратных матриц

*И.И. Кудрявцева, В.Е. Струков*
(Воронеж, ВГУ; irina-zvezdochka@mail.ru, sv.post_of_chaos@mail.ru)

Пусть $X$, $Y$ – бесконечномерные банаховы пространства, $Hom(X,Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $X$ в $Y$. Пусть $EndX = Hom(X,X)$, $EndY = Hom(Y,Y)$ – банаховы алгебры операторов.

Рассмотрим две периодические с периодом $2\pi$ изометрические группы операторов $P: \mathbb{R} \to EndX$, $\quad Q: \mathbb{R} \to EndY$.

Пусть подпространства $X_0 = \{x \in X : P(t)x$ непрерывна$\}$, $Y_0 = \{y \in Y : Q(t)y$ непрерывна$\}$ ненулевые.

**Лемма 1** *$X_0$ и $Y_0$ – замкнутые инвариантные подпространства для операторов $P(t)$ и $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, соответственно.*

Рассмотрим сужения $P_0$ и $Q_0$ групп операторов $P$ и $Q$ на подпространства $X_0$ и $Y_0$ соответственно. Периодическим функциям $P_0: \mathbb{R} \to EndX_0$ и $Q_0: \mathbb{R} \to EndY_0$ поставим в соответствие их ряды Фурье:

$$P_0(t)x_0 \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^0 x_0 e^{ikt},\ x_0 \in X_0, \quad Q_0(t)y_0 \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^0 y_0 e^{ikt},\ y_0 \in Y_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $P_k^0 x_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(t)x_0 e^{-ikt}dt$, $x_0 \in X_0$, $\quad Q_k^0 y_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(t)y_0 e^{-ikt}dt$, $y_0 \in Y_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Лемма 2** *Коэффициенты Фурье $P_k^0$, $Q_k^0$ – дизъюнктные проекторы на $X_0$, $Y_0$ соответственно, причем $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|P_k^0\| < \infty$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|Q_k^0\| < \infty$.*

**Предположение 1** *Существуют дизъюнктные последовательности проекторов $(P_k)$ и $(Q_k)$ на $X$ и $Y$ соответственно, обладающие свойствами:*

1. $\sup\limits_k \|P_k\| < \infty$, $\sup\limits_k \|Q_k\| < \infty$;
2. *сужение $P_k$ $(Q_k)$ на $X_0$ $(Y_0)$ совпадают с $P_k^0$ $(Q_k^0)$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$;*
3. *$P_k$ перестановочны с $P(t)$, $Q_k$ перестановочны с $Q(t)$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$;*
4. *$ImP_k \subset X_0$, $ImQ_k \subset Y_0$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$;*
5. *из равенств $P_k x = 0$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$ (соответственно, из равенств $Q_k y = 0$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$) следует, что $x = 0$ $(y = 0)$.*

Каждому оператору $A \in Hom(X,Y)$ поставим в соответствие матрицу $\mathcal{A} = (A_{ij})$, $(1 \le i,j < \infty)$, составленную из операторных блоков $A_{ij} = Q_i A P_j \in Hom(X,Y)$. Определим двустороннюю числовую последовательность $(d_A(k))$, положив $d_A(k) = \sup\limits_{i-j=k} \|A_{ij}\|$, $k \in \mathbb{Z}$.

Каждому оператору $A \in Hom(X,Y)$ поставим в соответствие функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \to Hom(X,Y)$, задаваемую равенством: $\Phi_A(t) = Q(t)AP(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение замкнутое подпространство $Hom_c(X,Y)$, состоящее из операторов $A \in Hom(X,Y)$, для которых функция $t \mapsto \Phi_A(t)$ , $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в равномерной операторной топологии пространства $Hom(X,Y)$. Для рассматриваемых операторов из пространства $Hom_c(X,Y)$ будем считать выполненным одно из условий следующего предположения:

**Предположение 2** *Для матрицы $\mathcal{A} = (A_{ij})$ оператора $A \in Hom_c(X,Y)$ выполнено одно из условий:*

1. $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k) < \infty$;
2. $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\alpha(k) < \infty$, *где $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ - неубывающий субэкспоненциальный вес (т.е. $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln\alpha(k)}{|k|} = 0$ и $\alpha(k) \ge 1$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$, $\alpha(m+n) \le \alpha(m)\alpha(n)$ $\quad \forall m,n \in \mathbb{Z}$);*
3. $d_A(k) \le M\gamma^{|k|}$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, *для некоторых постоянных $M = M(A) > 0$ и $\gamma = \gamma(A) \in (0,1)$;*

4. *$d_A(k) = 0$ при $|k| \geq m$ для некоторого $m = m(A) \in \mathbb{N}$ (матрица $\mathcal{A}$ оператора $A$ конечнодиагональна или $m$-ленточна);*

5. *$d_A(k) = 0$ при $|k| \geq 2$ (матрица $\mathcal{A}$ трехдиагональна).*

Каждое из выписанных условий определяет класс линейных операторов, образующих линейное подпространство из $Hom_c(X, Y)$. Обозначим первые три из этих подпространств соответственно символами: $Hom_1(X, Y)$, $Hom_\alpha(X, Y)$, $Hom_0(X, Y)$.

Введем в первых двух подпространствах следующие нормы:

$$\|A\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k), \ \ \|A\|_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\alpha(k).$$

Функции $\Phi_A$ поставим в соответствие ее ряд Фурье: $\Phi_A \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} A_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}$, где $A_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(t)AP(-t)e^{-ikt}dt, \quad k \in \mathbb{Z}$.

**Предположение 3** *Для любого оператора $B \in Hom_c(Y, X)$, обладающего свойством $P(t)BQ(-t) = e^{ikt}B$, $t \in \mathbb{R}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, имеет место равенство $\|B\| = \|B_0\|$, где $B_0 \in Hom_c(Y_0, X_0)$ – сужение $B$ на $Y_0$.*

Множество непрерывно обратимых операторов из пространства $Hom(X, Y)$ обозначим символом $Inv(X, Y)$, при этом $InvX = Inv(X, X)$ – группа обратимых операторов из алгебры $EndX$.

**Теорема 1** *Пусть $A \in Inv(X, Y)$ имеет трехдиагональную матрицу $(A_{ij})$. Тогда для норм элементов матрицы $(B_{ij})$ оператора $B = A^{-1}$ имеют место оценки*

$$\|B_{ij}\| \leq d_B(k) \leq \left(\frac{16\overline{\eta}(A) + 4}{8\overline{\eta}(A) + 3}\right)\|A^{-1}\|\left(\frac{4\overline{\eta}(A)}{1 + 4\overline{\eta}(A)}\right)^{|k|} \leq$$

$$\leq 2\|A^{-1}\|\left(\frac{4\overline{\eta}(A)}{1 + 4\overline{\eta}(A)}\right)^{|k|},$$

$$\|B_{ii}\| \leq d_B(0) \leq \|A^{-1}\| \quad \forall i \geq 1,$$

*и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \leq \left(16\overline{\eta}(A) + \frac{3 - 8\overline{\eta}(A)}{3 + 8\overline{\eta}(A)}\right)\|A^{-1}\| \leq 16\eta(A)\|A^{-1}\|,$$

*где $\overline{\eta}(A) = max\{\|A_{-1}\|, \|A_1\|\}\|A^{-1}\| \leq \eta(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ ($\eta(A)$ – число обусловленности оператора $A$).*

**Теорема 2** *Пусть $A$ – обратимый оператор из $Hom_1(X,Y)$. Тогда оператор $B = A^{-1}$ принадлежит пространству $Hom_1(Y,X)$ и имеет место оценка*

$$\|A\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) \le 64\eta(A)\psi_A\left(\frac{1}{(4+32\eta(A))\|A^{-1}\|}\right)\|A^{-1}\|,$$

*где* $\eta(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

**Теорема 3** *Если обратимый оператор принадлежит одному из подпространств $Hom_\alpha(X,Y)$, $Hom_0(X,Y)$, то оператор $A^{-1} \in Hom(Y,X)$ принадлежит соответствующему подпространству из $Hom_\alpha(Y,X)$, $Hom_0(Y,X)$.*

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. №6. С. 3-26

## Нелинейный панельный флаттер. Резонанс 1:3 как одна из причин жесткого возбуждения колебаний[9]

*А.Н. Куликов*
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; anat_kulikov@mail.ru)

Исследование колебаний пластинки в сверхзвуковом потоке газа в нелинейной постановке в случае цилиндрического изгиба [1], [2] приводит к рассмотрению нелинейной краевой задачи

$$w_{tt} + gw_t + w_{xxxx} + cw_x + ac^3w_x^3 = bw_{xx}\int_0^1 w_x^2dx, \tag{1}$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = w_{xx}|_{x=0} = w_{xx}|_{x=1} = 0. \tag{2}$$

Здесь $w(t,x), g, c$ – нормированные прогиб пластинки, коэффициент демфирования и скорость набегающего потока, постоянные $a, b > 0$. Уравнение (1) рассматривается вместе с краевыми условиями шарнирного опирания (2).

Стандартный подход для описания такого явления как нелинейный флаттер [1,2] состоит в следующем. Можно указать такое $c = c_0 > 0$, что при $c > c_0$ (скорость флаттера) состояние равновесия краевой задачи (1), (2) теряет устойчивость колебательным образом и с математической точки зрения сводится к распространению бифуркационной теоремы Андронова – Хопфа на соответствующий класс нелинейных краевых задач [2,3].

Иные объяснения для возбуждения колебаний можно предложить если $g = \varepsilon g_0 (\varepsilon << 1)$. В сообщении излагается один из возможных вариантов.

Оказывается при $\varepsilon = 0$ можно указать такое $c = c_1 < c_0$, что спектр устойчивости краевой задачи (1), (2) содержит две пары значений $\pm i\sigma_1, \pm\sigma_2$

[9]Работа выполнена в рамках государственного контракта №02.552.11.7068.

($\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 3$), а среди остальных собственных частот отсутствуют младшие резонансы. В таком случае при $c = c_1 + \alpha\varepsilon, |\varepsilon| << 1, \ \alpha \in R_+$ можно привести достаточные условия в терминах коэффициентов уравнения (1), при выполнении которых краевая задача (1), (2) имеет неустойчивое по Ляпунову периодическое решение с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$. Его амплитуда имеет порядок $\sqrt{|\varepsilon|}$. Устойчивость понимается в смысле нормы фазового пространства решений (пространства начальных условий). В данном случае его можно выбрать как прямое произведение соболевских пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^4[0;1] \times \overset{\circ}{W}{}_2^2[0;1]$.

Предложенный механизм жесткого возбуждения колебаний дополняет результаты работ [4], [5], где рассмотрены иные внутренние резонансы.

**Литература.** 1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит. 1961. – 339 с. 2. Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcation to divergence and flutter in flow - induced oscillations: an infinite – dimensional analysis // Automatica.1978. V. 14. №4. P. 367 – 384. 3. Колесов В.С., Колесов Ю.С., Куликов А.Н., Федик И.И. Об одной математической задаче теории упругой устойчивости // ПММ. 1978. Т.42. Вып. 3. С. 458 – 465. 4. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний пластины при малом коэффициенте демпфирования в сверхзвуковом потоке газа // ПММ. 2009. Т.73. Вып. 2. С. 271 – 281. 5. Kulikov A.N. Resonance of proper frequence 1:2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate in ultrasonic gas // Труды Международного конгресса "ENOC 2008". Saint - Petersburg. Russia. 2008. P. 201 – 205.

## Локальные динамические режимы в двух задачах о связанных генераторах[10]

*Д.А. Куликов*
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; kulikov_d_a@mail.ru)

Предлагается к рассмотрению две задачи из монографий [1,2], в которых идет речь о динамике автогенераторов в случае прямой и необязательно слабой связи. В последнее время большое внимание уделялось изучению диффузионно связанных осцилляторов в предположении слабости связи [3-5].

Итак, рассматривается система из двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\delta_1\dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = f_1(y_1, \dot{y}_1) + \beta_1 y_2, \\ \ddot{y}_1 + 2\delta_2\dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = f_2(y_j, \dot{y}_j) + \beta_2 y_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Во втором уравнении нелинейная функция зависит от $y_1, \dot{y}_1$, если выбран вариант задачи, предложенный К.Ф. Теодорчиком [1] или от $y_2, \dot{y}_2$ в случае задачи из монографии [2]. Наконец, $f_j(u, v) = K_j(S_0 + S_2 u^2)v$, где положительные постоянные $K_j (j = 1, 2), S_0, S_2$ характеризуют параметры первой или второй электрической цепи. Положительные постоянные $\beta_1, \beta_2$ – характеризуют связь между осцилляторами.

[10]Работа выполнена в рамках государственного контракта №02.552.11.7068.

Применяя метод нормальных форм Пуанкаре – Дюлака, задачу удается свести к исследованию системы их двух уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= (\gamma_1 + i\Theta_1)z_1 - d_1[|z_1|^2 z_1 + 2z_1|z_2|^2], \\ z_2' &= (\gamma_2 + i\Theta_2)z_2 - d_2[|z_2|^2 z_2 + 2z_2|z_1|^2], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\gamma_j, \Theta_j, d_j \in R, s = \varepsilon t, z_j(t)$ – комплекснозначная функция, $j = 1, 2$, а параметр $\varepsilon > 0$ – мера надкретичности. Система (2) выведена в случае ситуации общего положения. Резонанс собственных частот 1:3 приводит к иной нормальной форме, где правые части уравнений системы (2) следует дополнить еще одним слагаемым.

Нормальная форма позволила найти в исходной задаче периодические решения, а также двухчастотные колебания. Исследована их устойчивость.

**Литература.** 1. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат. 1948. – 244 с. 2. Блакьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир. 1969. – 400 с. 3. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное явление. М.: Техносфера. 2003. – 431 с. 4. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11. №6. С. 48 – 63. 5. Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабосвязанных осцилляторах // ПММ. 2010. Т. 74. Вып.2 (принята в печать).

## Об обратном к оператору с полиномиально убывающей памятью

*В.Г. Курбатов*

(Липецк, ВЗФЭИ; kv51@inbox.ru)

Пусть $\mathbb{E}$ — комплексное банахово пространство с нормой $|\cdot|$. Обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, $1 \le p < \infty$, пространство всех измеримых функций $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$, ограниченных по обычным нормам. Символом $L_{p,k}$, где $k \in \mathbb{Z}$, обозначим пространство всех измеримых функций $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$, для которых функция $x \mapsto u(x)/(1+|x|^2)^{k/2}$ принадлежит $L_p$; здесь $|x|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Символом $\mathbf{B}(X,Y)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\big(\Psi_\xi u\big)(x) = e^{i\langle \xi, x\rangle} u(x),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, операторы $\Psi_\xi$ действуют в $L_{p,k}$ и соответствие $\xi \mapsto \Psi_\xi$ является представлением группы $\mathbb{R}^n$ в $L_{p,k}$, сильно непрерывным при $p < \infty$.

Будем говорить, что оператор $\dfrac{\partial T}{\partial \xi_i} \in \mathbf{B}(L_p, L_p)$ является *частной производной* оператора $T \in \mathbf{B}(L_p, L_p)$ (относительно действия представления $\Psi_\xi$), если для любого $u \in L_p$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} u = \lim_{\xi_i \to 0} \frac{\Psi_{\xi_i} T \Psi_{-\xi_i} - T}{\xi_i} u.$$

Аналогично определим частные производные более высокого порядка. Множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(L_p, L_p)$, имеющих все производные до $k$-го порядка включительно, где $k \in \mathbb{Z}$, обозначим символом $\mathbf{B}^k(L_p, L_p)$.

Пример. Пусть $\mu$ — ограниченная мера на $\mathbb{R}^n$, а $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ — непрерывная ограниченная функция, причем функция $(x, y) \mapsto |y|^k g(x, y)$ также ограничена. Тогда оператор

$$\big(Tu\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x, y) u(x - y)\, d\mu(y)$$

принадлежит классу $\mathbf{B}^k(L_p, L_p)$.

**Предложение.** Оператор класса $\mathbf{B}^k(L_p, L_p)$ переводит $L_{p,m}$ в $L_{p,m}$ при $m = -1, \dots, -k$, и продолжается по непрерывности до оператора из $L_{p,m}$ в $L_{p,m}$ при $m = 1, \dots, k$.

**Теорема.** Если оператор класса $\mathbf{B}^k(L_p, L_p)$ обратим, то обратный оператор также принадлежит классу $\mathbf{B}^k(L_p, L_p)$.

Близкие вопросы для задачи об устойчивости рассматривались в [1].

**Литература.** 1. Kurbatov V. G. Stability of neutral type equations in different phase spaces// Functional differential equations. — 1995. Vol. 3. — P. 99–133.

## Некоторые свойства операторных пучков порядка $n$

*И.В. Курбатова*
(Воронеж, ВГУ; la_soleil@bk.ru )

Рассмотрим пучок $n$-го порядка

$$\lambda \mapsto \lambda^n F_n + \lambda^{n-1} F_{n-1} + \dots + \lambda F_1 + F_0,$$

где $F_k\colon X \to Y$, $k = 0, 1, \dots, n,$ — линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$. Обозначим через $\rho(\{F_k\})$ *резольвентное множество* этого пучка, т. е. множество тех $\lambda$, для которых оператор $\lambda^n F_n + \lambda^{n-1} F_{n-1} + \dots + \lambda F_1 + F_0$ имеет обратный, через $R_\lambda = (\lambda^n F_n + \lambda^{n-1} F_{n-1} + \dots + \lambda F_1 + F_0)^{-1}$ — *резольвенту*, а через $\sigma(\{F_k\}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\{F_k\})$ — *спектр пучка.*

Обозначим через $\mathbf{BO}(Y, X)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $Y$ в $X$, а через $\mathbf{BO}_{(\{F_k\})}(Y, X)$ — замыкание по норме пространства $\mathbf{BO}(Y, X) \oplus \dots \oplus \mathbf{BO}(Y, X)$ линейной оболочки всех *векторных резольвент* $\mathfrak{R}_\lambda = (R_\lambda, \lambda R_\lambda, \lambda^2 R_\lambda, \dots, \lambda^{n-1} R_\lambda)$. Введем на $\mathbf{BO}_{(\{F_k\})}(Y, X)$ умножение по правилу

$$(A_1, \dots, A_n) \circledast (B_1, \dots, B_n) = (C_1, \dots, C_n),$$

где $C_k$ определены по формуле

$$C_{k+1} = \sum_{i=0}^{n-k-1} \sum_{l=1}^{n-k-i} A_{k+l} F_{n-i} B_{n+1-i-l} - \sum_{i=n-k+1}^{n} \sum_{l=0}^{i-(n-k+1)} A_{k+l} F_{n-i} B_{n+1-i+l}.$$

Семейство $\mathfrak{R}_\lambda$, $\lambda \in \rho(\{F_k\})$, удовлетворяет $\circledast$-*тождеству Гильберта*

$$\mathfrak{R}_\lambda - \mathfrak{R}_\mu = -(\lambda - \mu)\mathfrak{R}_\lambda \circledast \mathfrak{R}_\mu.$$

Относительно умножения $\circledast$ пространство $\mathbf{BO}_{(\{F_k\})}(Y, X)$ является коммутативной банаховой алгеброй. Эта алгебра содержит единицу тогда и только тогда, когда оператор $F_n$ обратим; при этом единица есть $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, F_n^{-1})$.

Символом $\mathbf{O}\big(\sigma(\{F_n\})\big)$ обозначим множество функций, аналитических в некоторой окрестности множества $\sigma(\{F_n\})$. Очевидно, оно образует алгебру с единицей относительно поточечных операций.

**Теорема.** Пусть оператор $F_n$ обратим. Тогда отображение

$$\Upsilon = \chi_0 \oplus \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \dots \oplus \chi_{n-1} \colon \mathbf{O}\big(\sigma(\{F_n\})\big) \to \mathbf{BO}_{(\{F_n\})}(Y, X),$$

где отображения $\chi_k \colon \mathbf{O}\big(\sigma(\{F_n\})\big) \to \mathbf{BO}(Y, X)$, $k = 0, \dots, n-1$, определены по формулам

$$\chi_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^k f(\lambda)(\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1}\, d\lambda,$$

а $\Gamma$ — контур, являющийся ориентированной огибающей спектра пучка $\sigma(\{F_n\})$ относительно точки $\infty$ и дополнения к области определения функции $f$, является морфизмом алгебр с единицей.

## О периодических решениях одного класса дифференциальных уравнений шестого порядка в случае чередования знаков четных производных в линейной части

*А.Б. Кущев*
(Воронеж, ВГАСУ)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$x^{(6)} + a_5 x^{(5)} + a_4 x^{(4)} + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' + f(x) + \varphi(t, x, x', x'', x''', x^{(4)}, x^{(5)}) = 0, \quad (1)$$

где функции $f(x)$ и $\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ непрерывны по совокупности переменных $(-\infty < t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 < \infty)$, а функция $\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \varphi(t, X)$ $\omega$-периодична по $t$:

$$\varphi(t + \omega, X) = \varphi(t, X) \quad (2)$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании $\omega$-периодических решений $y$ уравнения (1). Исследование будет проводиться методом направляющих функций [1].

Всюду ниже мы будем предполагать, что

$$k_1 < \frac{f(x)}{x} < k_2, \ (|x| > R_1, \ k_1 k_2 > 0) \tag{3}$$

и равномерно относительно $t$

$$\lim_{||X|| \to \infty} \frac{\varphi(t, X)}{||X||} = 0, \tag{4}$$

где $||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_6^2}$.

Имеет место

**Теорема 1**. Пусть выполнены условия (2)-(4) и, кроме того,

$$a_2 > 0, \ a_4 < 0, \ k_2 < 0. \tag{5}$$

Тогда у уравнения (1) есть хотя бы одно $\omega$-периодическое решение.

С помощью принципа родственности полученный результат распространяется на соответствующее дифференциальное уравнение с простейшим запаздыванием:

$$\begin{gathered} x^{(6)} + a_5 x^{(5)} + a_4 x^{(4)} + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' + f(x) + \\ + \varphi(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), x^{(4)}(t), x^{(5)}(t), \\ x(t-h), x'(t-h), x''(t-h), x'''(t-h), x^{(4)}(t-h), x^{(5)}(t-h)) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где функции $f(x)$, $\varphi(t, x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)$ непрерывны по совокупности переменных, а последняя функция $\omega$ – периодична по $t$

$$\varphi(t + \omega, X, X_1) = \varphi(t, X, X_1) \tag{7}$$

и равномерно относительно $t, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$

$$\lim_{||X|| \to \infty} \frac{\varphi(t, X, X_1)}{||X||} = 0. \tag{8}$$

Нас будет интересовать $\omega$ – периодические решения у уравнения (6). Справедлива

**Теорема 2**. Пусть выполнены соотношения (3), (7) и (8). Пусть выполнены условия (5) теоремы 1.

Тогда у уравнения (6) есть хотя бы одно $\omega$-периодическое решение.

**Литература.** 1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. –М.: Наука, 1975. – 512 с. 2. Кущев А.Б. Достаточный признак существования правильной направляющей функции для одного класса систем дифференциальных уравнений. // Прикл. методы функц. анализа. – Воронеж: изд-во ВГУ, 1985. С. 100-110. 3. Кущев А.Б. О вынужденных колебаниях нелинейных систем пятого порядка. // Application of Topology and Nonlin. Analisis in Texnolodgy and Building Engineering. – Gdansk University Press, metricconverterProductID1997. C1997. С. 37-45.

## Топология неособого слоя интегрируемой гамильтоновой системы и особенности векторного поля косой градиент в условии неполноты

*Т.А. Лепский*

(Москва, МГУ; timur.lepsky@gmail.com )

В работе рассмотрена комплексная интегрируемая гамильтонова система $(\mathbb{C}^2, f, \omega)$ с двумя степенями свободы, где $f(z,w)$ — гамильтониан, $\omega$ — симплектическая структура.

Вводится понятие многоугольника Ньютона, в терминах которого формулируются основные теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть $f(z,w)$ — многочлен двух комплексных переменных и $\xi \in \mathbb{C}$ — комплексное число, такие что многочлен $f(z,w) - \xi$ является невырожденным, тогда:*

*1) поверхность уровня $\Sigma_\xi = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 | f(z,w) = \xi\}$ является связной неособой римановой поверхностью;*

*2) поверхность $\Sigma_\xi$ гомеоморфна сфере с $n_g$ ручками без $n_\mu$ точек , где $n_g$ — количество целочисленных точек, лежащих строго внутри многоугольника Ньютона , $n_\mu$ — увеличенное на единицу количество целочисленных точек, лежащих на границе многоугольника Ньютона , без учета точек лежащих на осях координат.*

**Теорема 2.** *Пусть $f(z,w)$ — многочлен двух комплексных переменных и $\xi \in \mathbb{C}$ — комплексное число, такие что многочле $f(z,w) - \xi$ является невырожденным, тогда:*

*1) пополнение $\overline{\Sigma}_\xi$ множества $\Sigma_\xi = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 | f(z,w) = \xi\}$ компактно;*

*2) множество $\overline{\Sigma}_\xi \setminus \Sigma_\xi$ конечно;*

*3) для каждой стороны многоугольника Ньютона, не лежащей на осях координат и содержащей ровно $k+1$ целочисленную точку, существует конечное подмножество из $k$ различных точек множества $\overline{\Sigma}_\xi \setminus \Sigma_\xi$, в каждой из которых векторное поле $sgrad\, f(z,w)|_{\Sigma_\xi}$ имеет особенность полюс одного и того же порядка;*

*4) различным сторонам соответствуют непересекающиеся подмножества особых точек, каждая точка из $\overline{\Sigma}_\xi \setminus \Sigma_\xi$ соответствует ровно одной стороне.*

**Литература.** 1. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия, Москва, Мир, 1981. 2. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия, Функциональный анализ и его приложения, т.11, вып. 4, 1977, стр. 56-67, УДК 513.015.7. 3. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений, Функциональный анализ и его приложения, т.12, вып. 1, 1978, стр. 51-61, УДК 513.015.7. 4 Форстер О. Римановы поверхности, Москва, Мир, 1980 ‘

## О слабой коэрцитивности в анизотропном пространстве Соболева

*Д.В. Лиманский*
(Донецк, ДонНУ, Украина; lim9@telenet.dn.ua)

В работе [1] были сформулированы различные критерии слабой коэрцитивности для скалярной системы дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha:l|\leq 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad |\alpha : l| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{l_k}, \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

действующих в изотропном и анизотропном пространствах Соболева $\overset{o}{W}{}^l_p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В частности, там был найден общий вид слабо коэрцитивных операторов с постоянными коэффициентами в изотропном пространстве $\overset{o}{W}{}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, $l = l_1 = l_2$, зависящих от двух переменных. Мы переносим этот результат на случай анизотропного соболевского пространства $\overset{o}{W}{}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^n$, при условии, что $l_1$ делится на $l_2$.

**Литература.** 1. Д.В. Лиманский, М.М. Маламуд. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Мат. сборник. 2008. — Т. 199, № 11. — С. 75-112.

## К вопросу о жесткости аффинн-однородных вещественных гиперповерхностей[11]

*А.В. Лобода*
(Воронеж, ВГАСУ, lobvgasu@yandex.ru)

В последнее время автором получено (см. [1]) большое количество частных результатов, связанных с нерешенной задачей описания однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. Все они относятся к т.н. "жестким" (цилиндрическим) поверхностям. Вопрос о классификации аффинно-однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, не являющихся жесткими, остается открытым.

Ниже обсуждается аналогичный вопрос в пространстве $\mathbb{C}^2$; обобщение техники этого случая на 3-мерное пространство представляется естественным и возможным.

Рассмотрим каноническое аффинное уравнение

$$Im\ w = |z|^2 + \varepsilon(z^2 + \overline{z^2}) + F_3(z, \bar{z}) + \sum_{k\geq 4} F_k(z, \bar{z}, Rew)\ (0 < \varepsilon \neq \frac{1}{2}) \qquad (1)$$

вещественно-аналитической гиперповерхности общего положения в $\mathbb{C}^2$.

**Теорема.** *Если гиперповерхность (1) аффинно-однородна, то она является жесткой (т.е. уравнение (1) не зависит от переменной Re w).*

[11] Поддержано грантами НШ-3877.2008.1 и РФФИ-08-01-00743-а

Доказательство теоремы вытекает из следующих утверждений.

**Предложение 1.** Если для коэффициентов канонического уравнения (1) аффинно-однородной поверхности выполняются условия $f_{201} = 0$ и $f_{002} = 0$, то эта поверхность - жесткая.

**Предложение 2.** Не существует аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей (1), удовлетворяющих условию $f_{002} \neq 0$.

**Предложение 3.** Если поверхность (1) однородна, и $f_{002} = 0$, то $f_{201} = 0$.

**Литература.** 1. Лобода А.В. Аффинно - однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства // Вестник ВГУ. Серия "Физика. Математика". – 2009. N 2. – С. 109-129

## Задача термоконтроля для уравнения диффузии

*А.М. Лучанская*
(Москва, РУДН; annascience@gmail.com)

Рассматривается задача автоматического термоконтроля для уравнения диффузии. Подобные задачи возникают в химических реакторах и сталелитейных конвекторах, где температура внутри области управляется при помощи термостата, расположенного на границе области. Действие термостата определяется функцией управления, имеющей переключения типа гистерезиса.

Проведено качественное исследование решений рассматриваемой задачи с использованием понятия средней температуры, изучено существование периодического решения.

*Работа поддержана грантом «Аналитическая ведомственная программа «Развитие научного потенциала высшей школы».*

**Литература.** 1. Гуревич П. Л., Егер В., Скубачевский А. О существовании периодических решений некоторых нелинейных задач термоконтролю// Докл. АН. – 2008. Т.418, №2. – с. 151-154.

## Анализ уравнения конфигураций слабо неоднородных упругих систем при двухмодовом вырождении в условиях нарушения потенциальности

*М.М. Малюгина*
(Вороенж, ВГУ; Malyugina-vrn@mail.ru)

Следующее уравнение на отрезке $[0, 1]$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(q\frac{d^2p}{dx^2}\right) + \kappa\frac{d^2p}{dx^2} + \varepsilon\frac{dp}{dx} + \alpha p + p^3 = 0,$$

при локализизации параметров $\kappa = 5 + \delta_1, \alpha = 4 + \delta_2$, где $\varepsilon, \delta_1, \delta_2$ — малые параметры, $q(x) = 1 + \delta\gamma(x)$ — функция неоднородности материала, при краевых условиях $p(0) = \frac{d^2p}{dx^2}(0) = p(1) = \frac{d^2p}{dx^2}(1) = 0$ не является потенциальным.

При изучении ветвлений его решений подход с использованием ключевой функции $W(\xi)$ заменяется изучением ветвлений решения ключевого уравнения $\theta(\xi)$ на координатной плоскости.

На основе структуры ключевой функции при $\varepsilon = 0$, которая была ранее вычислена в работах Костина Д.В. [1], и при $q = 1$ - в работе [3], была вычислена главная часть ключевого уравнения и дано локальное описание дискриминантного множества. Полученная параметризация выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \widetilde{\varepsilon} = -3s\frac{sin^3(\psi)}{cos(\psi)} - \frac{\delta_3 sin^2\psi+\delta_3}{2cos\psi}\ , \\ \delta_1 = -3s(1+cos^2(\psi)) + \frac{\delta_3}{2}sin\psi + s\frac{(5cos^2(\psi)-3)}{cos(\psi)} - \frac{3\delta_3 sin\psi}{2cos\psi}\ , \\ \delta_2 = -3s(1+cos^2(\psi)) + \frac{\delta_3}{2}sin\psi - s\frac{(5cos^2(\psi)-3)}{cos(\psi)} + \frac{3\delta_3 sin\psi}{2cos\psi}\ . \end{cases}$$

тут $\widetilde{\varepsilon}$, $\delta_1$, $\delta_2$ и $\delta_3$ - линейные функции от закритических приращений параметров $\varepsilon$, $\kappa$, $\alpha$ и параметра $\delta$.

**Литература.** 1. Костин Д.В. Ортопроектор теории возмущения линейных операторов и бифуркации равновесий слабо неоднородной упругой балки// Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2006. С. 106–113. 2. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004), с. 3–140. 3. Малюгина М.А. К анализу посткритических прогибов слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения потенциальности//Семинар по глобальному и стохастическому анализу/ Сборник научных статей под ред. Ю.Е.Гликлиха и Ю.И.Сапронова. - Воронеж: ВГУ,2009. - Вып.4 – С.32-37

## О разрешимости разностных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами

*С.В. Марюшенков*
(Воронеж, ВГУ; stasint1@mail.ru)

Пусть $X$- комплексное банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $X$, $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X), 1 \leq p \leq \infty$ - банахово пространство последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to X$ с нормой $\|x\|_p = (\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|x(n)\|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|x(n)\|$, где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В банаховом пространстве $l_p$ рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = B(n)x(n) + f(n), n \geq 0 \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $f \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $B : \mathbb{Z}_+ \to EndX$.

Рассматривается задача об условиях разрешимости данного уравнения, то есть о существовании единственного решения для любой последовательности $f \in l_p$.

Введем оператор $D : \mathfrak{D}(D) \subset l_p \to l_p$, где $\mathfrak{D}(D) = \{x \in l_p : x(0) = 0\}$, определяемый по правилу $(Dx)(n) = x(n+1) - B(n)x(n)$. Тогда объявленная разрешимость задачи (1)-(2) эквивалентна обратимости оператора $D$.

**Определение 1** *Ограниченная последовательность $x : \mathbb{Z}_+ \to X$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|x(n+1) - x(n)\| = 0$.*

**Условие 1** Существует $N \geq 1$ такое, что спектральный радиус $r(B(n)) < 1$ для любого $n \geq N$ и множество $\{B(n); n \geq N\}$ предкомпактно и ограничено в $EndX$.

**Условие 2** $B : \mathbb{Z}_+ \to EndX$ - медленно меняющаяся на бесконечности функция, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|B(n+1) - B(n)\| = 0$.

Используя способы построения левого и правого обратных операторов, была доказана следующая теорема.

**Теорема 1** *При выполнении условий 1,2 оператор $D$ непрерывно обратим.*

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений М.: Известия академии наук. 2009. – Т. 73, №2, С.3-68. 2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.– 536 с.

## Лингвистическая модель оценочной системы

*Е.М. Мелькумова*
(Воронеж,ВГУ; melkumova@vsu.ru )

В условиях многокритериальности оценочная модель позволяет получить обобщенную оценку, которая является основой для упорядочения альтернатив по предпочтению, разбиения альтернатив на упорядоченные по качеству группы или выбора наилучшей альтернативы. В случае количественных оценок альтернатив по критериям для формирования обобщенной оценки используются различные свертки. Однако в условиях неопределенности, имеющей характер нечеткости, неточности получение количественных оценок является практически невозможным или затруднительным. Возникает необходимость в привлечении экспертных знаний, как средства получения оценок. Использование нечетких словесных понятий, которыми оперирует эксперт, позволяет ввести в рассмотрение качественные описания, формализация которых обеспечивается введением лингвистической переменной.

При этом рассматривается лингвистическое оценивание, которое предполагает измерение свойств в заданной лингвистической шкале $S = \{S_0, .., S_T\}$, так что оценка представляет собой некоторый лингвистический терм из S [1].

Рассмотрим модель формирования обобщенной оценки, предполагая, что частные оценки альтернатив являются лингвистическими, а весовые коэффициенты - числовыми из [0,1]. При таком предположении для формирования обобщенной оценки может быть использован лингвистический оператор агрегирования (LOWA-оператор) $\Phi_W(A)$, а для определения весовых коэффициентов используются лингвистические кванторы [2].

Пусть некоторая фирма занимается выбором подходящей кандидатуры на вакантное место из списка претендентов: Матвиенко И.В., Потунина И.Г., Селезнев В.П., Малюгин А.А., Воронова А.В. В качестве критериев выбраны следующие: квалификация, опыт работы, ответственность, коммуникабельность, организованность. Так как все критерии являются качественными, то целесообразно использовать лингвистические оценки.

В результате собеседования с претендентами были получены оценки:

| | квалиф-я | ответ-сть | опыт работы | коммун-ность | организов-сть |
|---|---|---|---|---|---|
| Матвиенко И.В. | H | M | M | VL | P |
| Потунина И.Г. | VL | H | M | H | N |
| Селезнев В.П. | M | P | L | M | VL |
| Малюгин А.А. | L | L | VH | P | H |
| Воронова А.В. | H | L | H | H | M |

Используя лингвистический оператор агрегирования необходимо выявить наиболее подходящую кандидатуру на вакантное место.

Решая данную задачу, получаем, что наиболее подходящей кандидатурой на вакантное место является Воронова А.В., так как ее обобщенная оценка является максимальной среди всех обобщенных оценок.

**Литература.** 1. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств - М.: Радио и Связь. 1982. – 431 с. 2. Леденева Т.М. Модели и методы принятия решений - В.: ВГТУ. 2004. – 189 с.

## Дифференциально-разностные уравнения и функции Бесселя

*В.В. Мещеряков*

(Коломна, Коломенский государственный педагогический институт; metcherykov@mail.ru )

В конце 80-х годов прошлого века американским математиком Ч. Дунклом были введены дифференциально-разностные операторы, которые представляли собой обобщение оператора взятия производной по направлению. В настоящее время они называются операторами Дункла.

Рассмотрим оператор Дункла $T$, ассоциированный с системой корней типа $A_1$. Оператор $T$ действует на функции по правилу

$$Tf(x) = f'(x) + k\frac{f(x) - f(-x)}{x}.$$

В докладе будет рассмотрено дифференциально-разностное уравнение $Tf = f$. Решение этого уравнения выражается через функции Бесселя. При помощи этого факта получен новый способ вывода рекуррентных соотношений и дифференциального уравнения, которым удовлетворяют функции Бесселя.

**Литература.** 1. Dunkl C.F.Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc., 311, no 1 (1989), 167–183. 2. Opdam E.M. Dunkl operators, Bessel function and the discriminant of a finite Coxeter group. Composito mathematica, 85, 3 (1993), p. 333–373. 3. Sisi M, Soltani F. Generalized Fock spaces and Weyl relations for the Dunkl kernel on the real line//J. Math. Anal. Appl., 270, 2002.

# Осесимметричная деформация упруго-пластического тела

*А.Н. Мильцин, В.Б. Огарков*
(ВГЛТА)

Осесимметричные задачи теории пластичности представляют собой значительный интерес для практики [1]. Пусть ось рассматриваемого тела совпадает с осью цилиндрической системы координат $r$, $\varphi$, $z$, а нагрузки и смещения также обладают осевой симметрией. Можно принять, что отсутствуют окружная составляющая смещения $V$ и компоненты напряжения $\tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0$.

Определяющая система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r};\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r};\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\ \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \tag{3}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \psi(\ \sigma_r - \sigma_0);\ \varepsilon_\varphi - \varepsilon_0 = \psi(\ \sigma_\theta - \sigma_0) \tag{4}$$

$$\varepsilon_z - \varepsilon_0 = \psi(\ \sigma_z - \sigma_0);\ \gamma_{rz} = 2\psi\ \tau_{rz} \tag{5}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K};\quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z);\quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) \tag{6}$$

$$\psi = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{7}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + 6\tau_{rz}^2} = \sigma_T \tag{8}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{rz}^2} \tag{9}$$

Из соотношений (4) получим:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_z + \psi(2\sigma_r +\ \sigma_\varphi - 3\sigma_0) \tag{10}$$

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_z + \psi(2\sigma_\varphi +\ \sigma_r - 3\sigma_0) \tag{11}$$

Если подставить формулы в первое соотношение (5), то получим тождество:

$$\sigma_0 = \frac{(\sigma_r +\ \sigma_\varphi + \sigma_z)}{3} \tag{12}$$

Подставим теперь формулы (10) и (11) в соотношение (6):

$$\psi = \frac{(\sigma_r + \ \sigma_\varphi + \sigma_z)}{3K(\sigma_r + \ \sigma_\varphi - 2\sigma_z)} - \frac{3\varepsilon_z}{(\sigma_r + \ \sigma_\varphi - 2\sigma_z)} \tag{13}$$

Если теперь использовать формулы (7), (9), (10), (11) и (13), то получим тождество для функции $\psi$, выраженной формулой (13). Подставим соотношения Коши в формулы (4) и (5):

$$2\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi - \varepsilon_z = 3\psi(\sigma_r - \sigma_0) \tag{14}$$

$$2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r - \varepsilon_z = 3\psi(\sigma_\theta - \sigma_0) \tag{15}$$

$$2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - \frac{\partial w}{\partial z} = 3\psi(\sigma_r - \sigma_0) \tag{16}$$

$$2\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} = 3\psi(\sigma_\theta - \sigma_0) \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 2\psi\tau_{rz} \tag{18}$$

Уравнения (1), (2), (8), (16), (17) и (18) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций: $\sigma_r$, $\sigma_\varphi$, $\sigma_z, \tau_{rz}$, $u$, $w$.

Решение данной системы реализует полное пластическое состояние во всём объёме тела. Это позволяет впервые рассмотреть вопрос о расчёте слоистых упруго-пластических тел.

**Литература.** 1. Л.М. Качанов. Основы теории пластичности. «Наука», 1969, 420с.

## Об ограниченных решениях нелинейного стационарного уравнения Шредингера на полуоси

*Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов*

(Вологда, ВоГТУ; emuhamadiev@rambler.ru; nan67@rambler.ru)

Рассматривается вопрос о ненулевых решениях одномерного стационарного уравнения Шредингера

$$\psi''(x) = \left(1 - \frac{\varphi(x)}{x}\right)\psi(x), \quad 0 < x < +\infty \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(+\infty) = 0, \tag{2}$$

здесь $\psi(x)$ - волновая функция, $\varphi(x)/x$ - потенциал. Функция $\varphi(x)$ нелинейно зависит от $\psi(x)$ посредством уравнения

$$\varphi''(x) = -\frac{\psi^2(x)}{x}, \quad 0 < x < +\infty \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(+\infty) = 0. \tag{4}$$

Задача (1)-(4) возникает при исследовании собственных значений $\lambda > 0$ и собственных функций $\widetilde{\psi}(x)$ нелинейной задачи

$$\widetilde{\psi}''(x) = 2m\left(\lambda - \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{x}\right)\widetilde{\psi}(x), \quad \widetilde{\varphi}''(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\widetilde{\psi}^2(x)}{x}, \quad 0 < x < +\infty, \tag{5}$$

$$\widetilde{\psi}(0) = 0, \quad \widetilde{\psi}(+\infty) = 0, \quad \widetilde{\varphi}(0) = 0, \quad \widetilde{\varphi}'(+\infty) = 0, \quad \int_0^{+\infty} \widetilde{\psi}^2(s)ds = 1, \tag{6}$$

где $m$, $\varepsilon$ - положительные параметры ([1], [2]). Экспериментально установлено, что динамика движения полярона в однородной среде описывается собственными функциями $\widetilde{\psi}(x)$ и числом нулей $\widetilde{\psi}(x)$, а также найдены приближенные решения задачи (5), (6) для отдельных значений $m$ и $\varepsilon$ ([2]). В настоящей работе приводится математическое обоснование существования множества решений задачи (5), (6). Для этого задача (5), (6) заменой

$$\widetilde{\psi}(x) = \sqrt{\lambda\varepsilon}\psi(x\sqrt{2m\lambda}), \quad \widetilde{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2m}}\varphi(x\sqrt{2m\lambda})$$

сводится к задаче (1)-(4), где отсутствуют какие-либо параметры. Доказано существование счетного числа ненулевых решений задачи (1)-(4) и выведена асимптотика решений при $x \to +\infty$.

Исследование ненулевых решений задачи (1)-(4) проводится по следующей схеме. В начале изучаются свойства решений, и, в частности, доказывается существование в точке $x = 0$ правосторонних производных $\psi'(0)$ и $\varphi'(0)$. Значит, ненулевые решения задачи (1)-(4) можно находить среды решений задачи Коши

$$\psi''(x) = \left(1 - \frac{\varphi(x)}{x}\right)\psi(x), \quad \varphi''(x) = -\frac{\psi^2(x)}{x}, \quad x > 0, \tag{7}$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = a, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = b, \tag{8}$$

зависящей от двух параметров $a$ и $b$. На основе анализа задачи Коши (7), (8) доказано, что если решение этой задачи продолжимо на правую полуось $[0, +\infty)$ и $a \neq 0$, то функции $\psi(x)$, $\varphi'(x)$ ограничены, $\psi(x)$ имеет конечное число нулей и задача (1)-(4) имеет ненулевое решение. Далее выясняется существуют ли такие значения $a$ и $b$, где $a \neq 0$, при которых решение задачи (7), (8) продолжимо на правую полуось $[0, +\infty)$.

**Теорема 1**. *Любое ненулевое решение задачи (1)-(4) обладает свойствами:*
*а) функции $\psi(x)$, $\psi'(x)$ принадлежат пространству Лебега $L_2(0, +\infty)$, а функция $\varphi(x)$ неотрицательна, и имеет место равенство*

$$\sup_{x>0} \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \psi^2(s)ds;$$

*б) пара функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ является решением системы интегральных уравнений*

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(e^{-|x-s|} - e^{-|x+s|}\right)\frac{\varphi(s)}{s}\psi(s)ds,$$

$$\varphi(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{\psi^2(s)}{s}ds + \int_0^x \psi^2(s)ds;$$

*в) в точке $x=0$ существуют правосторонние производные*

$$\psi'(0) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\frac{\varphi(s)}{s}\psi(s)ds, \quad \varphi'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\psi^2(s)}{s}ds.$$

Перечислем некоторые свойства решения задачи (7), (8).

1°. Для любых значений $a$ и $b$ существует единственное решение $(\Psi(x,a,b),\Phi(x,a,b))$ задачи (7), (8), определенное на некотором максимальном полуинтервале $[0,T(a,b))$, где $0 < T(a,b) \le +\infty$.

2°. Функции $\Psi(x,a,b)$ , $\Phi(x,a,b)$ определены и непрерывно дифференцируемы на множестве

$$\Omega = \left\{(x,a,b): \quad -\infty < a,b < +\infty, \quad 0 \le x < T(a,b)\right\}.$$

3°. При любых $a$ и $b$ справедливы следующие равенства:

$$(\Psi(x,0,b),\Phi(x,0,b)) = (0,bx),$$

$$(\Psi(x,-a,b),\Phi(x,-a,b)) = (-\Psi(x,a,b),\Phi(x,a,b)),$$

$$(\Psi(x,\lambda a,1+\lambda(b-1)),\Phi(x,\lambda a,1+\lambda(b-1))) =$$
$$= \left(\sqrt{\lambda}\Psi(\sqrt{\lambda}x,a,b),(1-\lambda)x + \sqrt{\lambda}\Phi(\sqrt{\lambda}x,a,b)\right) \quad \forall\lambda > 0,$$

$$\Phi(x,a,b) = x\Phi'(x,a,b) + \int_0^x \Psi^2(s,a,b)ds,$$

$$\left(\frac{1}{x}\Phi(x,a,b)\right)' = -\frac{1}{x^2}\int_0^x \Psi^2(s,a,b)ds,$$

$$\Psi''(x,a,b)\Psi(x,a,b) = (\Psi'(x,a,b))^2 - a^2 + \int_0^x \frac{\Psi^2(s,a,b)}{s^2}\left(\int_0^s \Psi^2(\tau,a,b)d\tau\right)ds.$$

4°. Если $T(a,b) < +\infty$, то функции $\Psi(x,a,b)$ , $\Phi(x,a,b)$ неограничены и $\Phi(x,a,b)$, $\Phi'(x,a,b) \to -\infty$ при $x \to T(a,b)$.

5°. Если $a > 0$ и $b \le 1$, то $\Psi(x,a,b) > 0$, $\Psi'(x,a,b) > 0$ $\forall x \in (0,T(a,b))$ и $\Psi(x,a,b),\Psi'(x,a,b) \to +\infty$, $\Phi(x,a,b),\Phi'(x,a,b) \to -\infty$ при $x \to T(a,b)$.

6°. Если функция $\Phi'(x,a,b)$ обращается в ноль в какой-нибудь точке, то $\Phi(x,a,b) \to -\infty$ при $x \to T(a,b)$.

7°. Если $T(a,b) = +\infty$ и функция $\Psi(x,a,b)$ имеет конечное число нулей, то при больших $x$ справедливо неравенство $\Phi(x,a,b) < x$.

$8^\circ$. Если нулей функции $\Psi(x,a,b)$ не более, чем $n$, то $b < 1 + 2\pi n|a|/\sqrt{6}$.

**Теорема 2**. *Пусть $a \neq 0$ и $T(a,b) = +\infty$. Тогда решение $(\Psi(x,a,b), \Phi(x,a,b))$ задачи (7), (8) обладает следующими свойствами:*
*а) функция $\Phi'(x,a,b)$ при $x \to +\infty$ имеет конечный предел меньше 1;*
*б) функция $\Psi(x,a,b)$ имеет конечное число нулей и ограничена.*

**Следствие 1**. *Продолжимость решения $(\Psi(x,a,b), \Phi(x,a,b))$ задачи (7), (8) на правую полуось $[0,+\infty)$ равносильна ограниченности функции $\Psi(x,a,b)$.*

**Следствие 2**. *Если при некоторых $a$ и $b$, где $a \neq 0$, функция $\Psi(x,a,b)$ ограничена, то пара функций*

$$\psi(x) = \Psi(x, \lambda a, 1 + \lambda(b-1)), \qquad \varphi(x) = \Phi(x, \lambda a, 1 + \lambda(b-1))$$

*при $\lambda = 1/\sigma^2$, где $\sigma^2$ - предел функции $1 - \Phi'(x,a,b)$ на бесконечности, будет ненулевым решением задачи (1)-(4) (согласно свойству $3^\circ$).*

**Следствие 3**. *Для любых $a$ и $b$, где $a \neq 0$, функция $\Psi(x,a,b)$ имеет конечное число нулей, и для числа нулей $N(\Psi)$ функции $\Psi(x,a,b)$ верна оценка $N(\Psi) > \sqrt{6}(b-1)/(2\pi|a|)$ (согласно свойствам $4^\circ$ и $8^\circ$).*

**Теорема 3**. *Пусть при некоторых $a$ и $b$, где $a \neq 0$, решение $(\Psi(x,a,b), \Phi(x,a,b))$ задачи (7), (8) продолжимо на правую полуось $[0,+\infty)$. Тогда справедливы следующие асимптотические формулы при $x \to +\infty$*

$$\Psi(x,a,b) = e^{-\sigma x}x^{\nu}(C + o(1)), \quad \Psi'(x,a,b) = e^{-\sigma x}x^{\nu}(-\sigma C + o(1)), \tag{9}$$

$$\Phi(x,a,b) = (1-\sigma^2)x + 2\nu + e^{-2\sigma x}x^{2\nu-1}\left(-\frac{C^2}{4\sigma^2} + o(1)\right), \tag{10}$$

$$\Phi'(x,a,b) = 1 - \sigma^2 + e^{-2\sigma x}x^{2\nu-1}\left(\frac{C^2}{2\sigma} + o(1)\right),$$

*где $C$- постоянное, $C \neq 0$, $\sigma > 0$, $\sigma^2$ - предел функции $1 - \Phi'(x,a,b)$ при $x \to +\infty$,*

$$\nu = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \Psi^2(s,a,b)ds.$$

**Теорема 4**. *Существует счетное число значений $a_k$, $b_k$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что при каждом $k = 1, 2, \ldots$*
*а) $a_k > 0$, $max(1, a_k) < b_k < 1 + 2\pi k a_k/\sqrt{6}$;*
*б) пара функций $(\Psi(x,a_k,b_k), \Phi(x,a_k,b_k))$ является ненулевым решением задачи (1)-(4);*
*в) функция $\Psi(x,a_k,b_k)$ имеет ровно $k$ нулей.*

**Теорема 5**. *Существует единственное ненулевое неотрицательное решение задачи (1)-(4).*

Вычислительные эксперименты, где для различных значений параметров $a$ и $b$ находились приближенные решения задачи (7), (8), подтверждают отсутствие других ненулевых решений задачи (1)-(4), кроме решений $(\pm\Psi(x, a_k, b_k), \Phi(x, a_k, b_k))$, $k = 1, 2, \ldots$, существование которых доказывается в теореме 4. Теорема 5 выводится на основе доказательство того, что функция $\Psi(x, a_1, b)$ при $b < b_1$ неограничена и имеет ровно один нуль, а при $b > b_1$ имеет хотя бы два нуля.

**Литература.** 1. Давыдов А.С., Энольский В.З. Трехмерный солитон в ионном кристалле // ЖЭТФ, 1981, том 81, вып. 3(9). 2. Амирханов И.В. и др. Численное исследование динамики поляронных состояний // Препринт Р11-2008-169 Объединенного института ядерных исследований, Дубна, 2008.

## Метод направляющих функций в гильбертовом пространстве

*Нгуен Ван Лой*
(Воронеж, ВГУ)

Метод направляющих функций был разработан впервым М.А. Красносельским, А.И. Перовым и др. и является одним из наиболее эффективных средств решения задач о периодических колебаниях (см., например, [2]). Различные модификации этого метода можно найти в работе [1]. Однако до сих пор все развития этого метода касались лишь дифференциальных уравнений и включений в конечномерных пространствах. В данной работе автор предлагает новый подход к распространению этого метода на бесконечномерное гильбертово пространство и применяет его к доказательству существования периодических решений дифференциальных включений первого порядка.

**Литература.** 1. Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский, Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, -М.: КомКнига, 2005. -216с. 2. М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, Наука, М., 1966.

## Гладкие модели упора и люфта

*Нгуен Тхи Хиен*
(Воронеж, ВГУ; hienvp@mail.ru)

Для непрерывной на $[t_0, t_0 + T]$ функции $x(t)$ определим "*сглаженную*" $\xi(t)$ входную функцию соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = K[(x(t) - x(t - \frac{1}{K})] \\ \xi(t_0) = x(t_0) =: x_0 \end{cases}, \tag{1}$$

(при $t < t_0$ полагаем $x(t) = x(t_0)$).

Мы дадим новые определения упора и люфта, которые будем называть *гладкими*. Именно, гладкие выходные функции упора $u(t)$ и люфта $v(t)$, соответствующие непрерывному входу $x(t)$ и (большому) параметру $K$, зададим уравнениями:

$$\dot{u} = \dot{\xi} + K[(-u(t))_+ - (u(t) - 1)_+], \tag{2}$$

$$\dot{v} = K[(\xi(t) - v(t))_+ - (v(t) - 1 - \xi(t))_+]. \tag{3}$$

Здесь:
$\xi = \xi(t)$ - определенная выше "*сглаженная*" входная функция;
$x_+$ - положительная часть числа $x$, т.е. $max\{x, 0\}$.
Цель данной работы заключается в том, что доказать корректность этих определений. Это означает, что при $K \to +\infty$ и заданных начальных условиях функции $u(t)$ и $v(t)$, определяемые уравнениями (2) и (3), стремятся к выходам, соответственно, упора $\varphi(t)$ и люфта $\psi(t)$ в смысле определения Красносельского - Покровского [1]. При этом устанавливается оценка близости в зависимости от параметра $K$:

$$|u(t) - \varphi(t)| \le 3\omega(x, \tfrac{1}{K}),$$

$$|v(t) - \psi(t)| \le 2\omega(x, \tfrac{1}{K}),$$

где $\omega(x, \frac{1}{K}) = sup\{|x(t_1) - x(t_2)| : |t_1 - t_2| \le \frac{1}{K}\}$ - модуль непрерывности функции $x(t)$.

**Литература.** 1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом, М., 1983.

## Гладкая модель реле с гистерезисом

*Нгуен Тхи Хиен, Б.Н. Садовский*
(Воронеж, ВГУ; hienvp@mail.ru, bs37@mail.ru)

Рассматриваются различные модели реле с гистерезисом (см. [1] - [3]). Предлагается новая модель, которая называется "*гладкой*"и описывается с помощью обыкновенного дифференциального уравнения с большим параметром;

$$\begin{cases} \dot{w} = K[(\sigma - \beta)_+(1 - w) - (\alpha - \sigma)_+ w], \\ u = int(w + 0.5). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь: $w(t)$ - промежуточная (*гладкая*) выходная функция; $K$ - большой параметр, $\sigma(t)$ - входная непрерывная функция; $u = u(t)$ - (дискретная) выходная функция; $x_+$ - положительная часть числа, т.е. $\max\{0, x\}$ ; $int(x)$ - *непрерывная слева целая часть числа* $x$, т.е. наибольшее целое число, меньшее $x$. Гладкая модель удобна для анализа систем релейного управления с помощью современных прикладных пакетов программ.

Изучается система релейного управления, описываемая уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), \\ \sigma(t) = \varphi(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Основной результат заключается в том, что в некоторых естественных условиях выходная функция $\widetilde{x}(t)$ с гладкой модели реле (1) на любом наперёд заданном промежутке равномерно близка к выходной функции $x(t)$ соответствующей системы с дискретной моделью реле из [4]. При этом устанавливается оценка близости в зависимости от параметра $K$ :

$$\|\widetilde{x}(t) - x(t)\| \leq \tfrac{C}{K} \quad (t_0 \leq t \leq T).$$

**Литература.** 1. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы, М., 1974. 2. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом, М., 1983. 3. Красносельский А.М., Рачинский Д.И. О континуумах циклов в системах с гистерезисом / / Доклады Академии наук, 378, 3, 2001, 314-319. 4. Прядко И.Н., Садовский Б.Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем, Автом. и телемех., 2004, №10, с. 40-50.

## Асимптотическое решение сингулярно возмущенной линейно - квадратичной задачи оптимального управления с разрывными коэффициентами

*Нгуен Тхи Хоай*
(Воронеж; nthoai0682@yahoo.com)

Рассматривается линейно - квадратичная задача вида

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^T (z'Q(t)z + u'R(t)u)dt \to \min_u, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(t)x + A_2(t)y + B_1(t)u, \quad x(0) = x^0, \ \ x \in R^n, \\ \varepsilon\dot{y} &= A_3(t)x + A_4(t)y + B_2(t)u, \quad y(0) = y^0, \ \ y \in R^m, u \in R^r, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z = (x', y')'$ (штрих означает транспонирование), $T > 0 = \mathrm{const}$, $Q \geq 0$, $R > 0$, $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{pmatrix}$, все матрицы достаточно гладкие при $t \neq \xi \in (0, T)$ и разрывны в точке $t = \xi$. Из необходимого условия оптимального управления получаем двухточечную краевую задачу с разрывными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(t)x + A_2(t)y + S_1(t)\varphi + S_2(t)\psi, \ \ x(0) = x^0, \\ \dot{\varphi} &= Q_1(t)x + Q_2(t)y - A_1'(t)\varphi - A_3'(t)\psi, \ \ \varphi(T) = 0, \\ \varepsilon\dot{y} &= A_3(t)x + A_4(t)y + S_2'(t)\varphi + S_3(t)\psi, \ \ y(0) = y^0, \\ \varepsilon\dot{\psi} &= Q_2'(t)x + Q_3(t)y - A_2'(t)\varphi - A_4'(t)\psi, \ \ \psi(T) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $S_1 = B_1R^{-1}B_1',\ S_2 = B_1R^{-1}B_2',\ S_3 = B_2R^{-1}B_2'$.

Строится асимптотика решения задачи (3) по степеням $\varepsilon$, содержащая наряду с функциями, зависящими от $t$, функции погранслоя в окрестностях точек $t = 0$, $t = \xi$ и $t = T$.

Отметим, что в работе [1] была построена асимптотика решения краевой задачи для линейного уравнения с малым параметром при производной и коэффициентами, разрывными в промежуточной точке.

**Литература.** 1. Покорная И.Ю. Метод коллокации решения сингулярно возмущенных краевых задач с помощью кубических сплайнов минимального дефекта, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук, Воронеж 1996.

## О нулевом приближении метода прямой схемы построения асимптотики решения линейно - квадратичной задачи управления с разрывными коэффициентами

*Нгуен Тхи Хоай*
(Воронеж; nthoai0682@yahoo.com)

Рассматривается задача $P_\varepsilon$, состоящая в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \overset{(j)}{x} \\ \overset{(j)}{y} \end{pmatrix}, \overset{(j)}{W}(t,\varepsilon)\begin{pmatrix} \overset{(j)}{x} \\ \overset{(j)}{y} \end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{u}, \overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}\right\rangle\right\}dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\begin{gathered} \dot{\overset{(j)}{x}} = \overset{(j)}{A_1}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{x} + \overset{(j)}{A_2}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{y} + \overset{(j)}{B_1}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}, \\ \varepsilon\dot{\overset{(j)}{y}} = \overset{(j)}{A_3}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{x} + \overset{(j)}{A_4}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{y} + \overset{(j)}{B_2}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}, \quad t_{j-1} \le t \le t_j, \ \ j = 1,2, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \overset{(1)}{x}(0,\varepsilon) = x^0, \ \overset{(1)}{y}(0,\varepsilon) = y^0, \ \overset{(2)}{x}(t_1+0,\varepsilon) = \overset{(1)}{x}(t_1-0,\varepsilon), \\ \overset{(2)}{y}(t_1+0,\varepsilon) = \overset{(1)}{y}(t_1-0,\varepsilon). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$, значения $t_j (j = 0,1,2)$ фиксированы; $\overset{(j)}{x} = \overset{(j)}{x}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $\overset{(j)}{y} = \overset{(j)}{y}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, $\overset{(j)}{u} = \overset{(j)}{u}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, штрих означает транспонирование, угловые скобки означают скалярное произведение в соответствующих пространствах, $\varepsilon \ge 0$ - малый параметр, точка сверху означает дифференцирование по $t$, соответствующих размеров матрицы $\overset{(j)}{W_i}(t,\varepsilon)(i=\overline{1,3})$, $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{A_i}(t,\varepsilon)(i=\overline{1,4})$, $\overset{(j)}{B_i}(t,\varepsilon)(i=1,2)$, являются достаточно гладкими при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$ и $\varepsilon \ge 0$, матрицы $\overset{(j)}{W}(t,\varepsilon)$ и $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$ симметричны, а матрицы $\overset{(j)}{W}(t,0)$ и $\overset{(j)}{R}(t,0)$ положительно определены при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,2$.

В качестве допустимых управлений $u(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overset{(1)}{u}(t,\varepsilon), t \in [t_0, t_1], \\ \overset{(2)}{u}(t,\varepsilon), t \in [t_1, t_2] \end{cases}$ выбираются кусочно - непрерывные функции. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ траектория $y(t,\varepsilon)$ будет иметь разрыв при $t = t_1$.

Следуя прямой схеме [1] и методу пограничных функций [2], решение $\overset{(j)}{z} = (\overset{(j)}{u}{}', \overset{(j)}{x}{}', \overset{(j)}{y}{}')'$, $j = 1,2$, возмущенной задачи $P_\varepsilon$ будем искать в виде разложения по целым неотрицательным степеням $\varepsilon$:

$$\overset{(j)}{z}(t,\varepsilon)=\sum_{i\geq 0}\varepsilon^i(\overset{(j)}{\overline{z}}_i(t)+\overset{(j)}{\Pi}_i z(\tau_{j-1})+\overset{(j)}{Q}_i z(\tau_j)),\ \ t_{j-1}\leq t\leq t_j,\ j=1,2, \qquad (4)$$

где символ $\overset{(j)}{\Pi}, j=1,2$, означает функции погранслоя экспоненциального типа вблизи левых концов промежутков $[0,t_1]$ и $[t_1,T]$, а $\overset{(j)}{Q}, j=1,2$, - функции погранслоя экспоненциального типа вблизи правых концов этих же промежутков, $\tau_0=\frac{t}{\varepsilon}$, $\tau_1=\frac{t-t_1}{\varepsilon}$, $\tau_2=\frac{t-T}{\varepsilon}$.

Предполагается, что $\mathrm{Re}\,\overset{(j)}{\lambda}_i(t)<0$, $i=\overline{1,m}$, $j=1,2$, $t\in[t_{j-1},t_j]$, где $\overset{(j)}{\lambda}_i(t)$ - собственные значения матриц $\overset{(j)}{A}_4(t,0)$. Для определения $\overset{(j)}{\overline{z}}_0$ используется вырожденная задача, получаемая из (1) - (3) при $\varepsilon=0$, если отбросить условие (3) для $\overset{(j)}{y}$. Для определения функций погранслоя нулевого порядка из разложения (4) построены три задачи оптимального управления. Из первой задачи находится $\overset{(1)}{\Pi}_0 z$, из второй - $\overset{(1)}{Q}_0 z$ и $\overset{(2)}{\Pi}_0 z$, а из третьей - $\overset{(2)}{Q}_0 z$.

**Литература.** 1.Belokopytov S. V., Dmitriev M. G. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions. Systems and Control Letters. 1986. V. 8. № 2. P.129 - 135. 2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

## Об одном представлении $C_0$-операторных многочленов Чебышева

*М.Н. Небольсина*
(Воронеж, ВГУ)

Изучение свойств многочленов Чебышева 1-го и 2-го рода позволяет получить представление операторных полиномов Чебышева в виде

$$T_n(A)=\frac{1}{2}[(\mu^{-1}(A))^n+(\mu(A))^n],$$

$$U_n(A)=\frac{1}{2}(\sqrt{A^2-I})^{-1/2}[(\mu^{-1}(A))^{n+1}-(\mu(A))^{n+1}],$$

где

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=(A-\sqrt{A^2-I}),$$

$$\mu^{-1}(A)=2A-\mu(A),\mu^{-1}(A)\mu(A)x=x,x\in D(A).$$

Пусть $A$ – генератор полугруппы $V(t)$ класса $C_0$, действующий в банаховом пространстве $E$ с нормой $\|.\|_E=\|.\|$, для которой справедлива оценка

$$\|V(t)\|\leq Ke^{-\omega t},\quad t\geq 0,\omega>1.$$

Обозначим через

$$I_1^{[n]}(t) = \underbrace{I_1(t) * \cdots * I_1(t)}_{n} = \int_0^t I_1(t-s) I_1^{[n-1]}(s) ds$$

- $n$ – кратную свертку функции Бесселя $I_1(t)$ мнимого аргумента 1-го рода.

Тогда справедлива

**Теорема** *Для $C_0$ - операторных многочленов Чебышева второго рода $U_n(A)$ существует равномерный операторный предел*

$$\mu_j(A) = \lim_{n\to\infty} U_{n-j}(A) U_n^{-1}(A) \quad 1 \le j \le n$$

*и для него справедливо представление*

$$\mu_j(A) = \mu^j(A) = \int_0^\infty I_1^{[j]}(t) V(t) dt.$$

## Асимптотическое поведение решений дискретного уравнения Шредингера[12]

*П.Н. Нестеров*
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; mathematix@mail.ru)

В работе строится асимптотическое представление для решений дискретного одномерного уравнения Шредингера

$$x(n+2) - 2x(n+1) + \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} p(n)\right) x(n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

при $n \to \infty$. Здесь параметр $0 < \alpha \le 1$, а действительная функция $p(n)$ является периодической или представляет собой дискретный тригонометрический многочлен

$$p(n) = \sum_{j=1}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\lambda_j n},$$

где коэффициенты $p_j$, вообще говоря, комплексные, а $\lambda_j$ — действительные числа. Кроме того, предполагается, что функция $p(n)$ имеет нулевое среднее значение, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} p(k) = 0.$$

[12]Работа выполнена при финансовой поддержке целевых программ «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты РНП.2.2.2.3.8064 и РНП.2.2.1.1.5859), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197), а также Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) (проект # RUB1-020-YA-07 / BF7M20).

Построение асимптотики решений уравнения (1) происходит в два этапа. Сначала с помощью ряда преобразований, использующих на финальной стадии специальным образом конструируемые усредняющие замены переменных [1, 2], исходное уравнение приводится к так называемому $\ell$-диагональному виду. На следующем этапе для получения асимптотических формул применяется дискретный аналог теоремы Левинсона (теорема Бензаида-Латса) [3].

**Литература.** 1. Нестеров П.Н. Асимптотическое представление решений систем линейных разностных уравнений и метод усреднения // Моделирование и анализ информационных систем. – Ярославль. 2007. Т. 14, №2. – С. 63-67. 2. Бурд В.Ш., Нестеров П.Н. Системы дифференциальных и разностных уравнений: метод усреднения и асимптотика решений: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2008. – 192 с. 3. Benzaid Z., Lutz D.A. Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations // Studies in Appl. Math. — 1987. V. 77. – P. 195-221.

## Индекс Банаха-Сакса сопряженного пространства[13]

*А.И. Новикова*
(Воронеж, ВГУ; annnovikova@mail.ru)

Рассмотрим вопрос о том, как связаны между собой индексы Банаха-Сакса пространства последовательностей с симметричным базисом $E$ и сопряженного к нему пространства $E^*$. Прежде всего, заметим, что $\gamma(c_0) = \gamma(l_1) = \infty$ и, следовательно, $\frac{1}{\gamma(E)} + \frac{1}{\gamma(E^*)} = 0$ для $E = c_0$. Однако, этот случай является исключительным.

**Теорема 1** *Пусть $E \neq c_0$ пространство последовательностей с симметричным базисом, $E^*$ сопряженное к нему пространство. Тогда выполнено*

$$1 \leq \frac{1}{\gamma(E)} + \frac{1}{\gamma(E^*)} \leq 2.$$

Константу правого неравенства нельзя улучшить, т.к. для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют $1 < p < q < \infty$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 2 - \epsilon$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$), и $\gamma(l_{p,q}) = \min(p,q) = p$, $\gamma(l^*_{p,q}) = \gamma(l_{p',q'}) = \min(p',q') = q'$ [1]. Левое неравенство теоремы 1 очевидно превращается в равенство для пространств $l_p$, $1 \leq p < \infty$. Кроме того, для пространств $l^0_{p,\infty}$, $1 < p < \infty$ имеем $\gamma(l^0_{p,\infty}) = p$ [2] и $\gamma(l_{p',1}) = \gamma((l^0_{p,\infty})^*) = p'$ [3], т.е. $\frac{1}{\gamma(l^0_{p,\infty})} + \frac{1}{\gamma((l^0_{p,\infty})^*)} = 1$.

Следующая теорема показывает, что эти пространства не единственные.

**Теорема 2** *Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Существует пространство $E$ с симметричным базисом, не содержащее подпространства, изоморфного $l_p$, и такое, что его индекс Банаха-Сакса удовлетворяет условию $\gamma(E) = p$, $\gamma(E^*) = p'$, где $E^*$ — сопряженное к $E$ пространство.*

[13] Статья поддержана грантом РФФИ 08-01-00226.

**Литература.** 1. Новикова А.И., Семенов Е.М., Сукочев Ф.А. Индекс Банаха-Сакса пространств с симметричным базисом // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 420, № 3. С. 314–315. 2. Astashkin S.V., Sukochev F.A. Banach-Saks property in Marcinkiewicz spaces // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 336. P. 1231–1258. 3. Раков С.А. О показателе Банаха-Сакса некоторых банаховых пространств последовательностей // Математические заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 613–626.

## Об одной регулярной задаче термовязкоупругости[14]

*В.П. Орлов*
(Воронеж; orlov_vp@mail.ru)

В ограниченной области $\Omega \in R^2$ с границей $\partial\Omega \subset C^2 Q = [0,T] \times \Omega$ рассматривается задача

$$v_t+\sum_{i=1}^{n} v_i \partial v/\partial x_i - \mu_0 \Delta v(t,x) - \mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t \exp(\lambda(s-t))\, E(v)(s,z(s;t,x))\, ds - \quad (1)$$

$$-\mathrm{Div}(\mu(\theta(t,x))\, E(v)(t,x)) +$$
$$\nabla\, \theta(t,x) = f(t,x),\ (t,x) \in Q;\ \mathrm{div}\, v(t,x) = 0,\ (t,x) \in Q;$$

$$\theta_t + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial\theta/\partial x_i - \mu_2 \triangle\, \theta - \mu_0^2 \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}^2(v)(t,x) - \quad (2)$$

$$\mu_0 \mu_1 \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}(v)(t,x) \int_0^t \exp(\lambda(s-t))\, e_{ij}(v)(s,z(s;t,x))\, ds -$$

$$\mu_0 \mu(\theta(t,x)) \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}^2(v)(t,x) = \varphi(t,x),\ (t,x) \in Q;$$

$$v(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega; v(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega. \quad (3)$$

$$\theta(0,x) = \theta^0(x),\ x \in \Omega;\ \ \theta(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь $v$ и $\theta$ искомые векторная и скалярная функции, $E(v)$ - матрица с коэффициентами $\{e_{ij}(v)\}_{i,j=1}^n$, $e_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_1$, $\lambda \geq 0$, $\mu(s) \geq 0$- непрерывно дифференцируемая при $s \geq 0$ функция, $z(\tau;t,x)$ - решение задачи Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s,z(s;t,x))\, ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Установлены сильные априорные оценки для $v$ и $\theta$ в случае регуляризованной ($\theta$ в $(\mu(\theta(t,x))$ и $v$ в последнем уравнении сглажены) задачи.

[14]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00137.

## Алгебра Ли системы уравнений механики двухфазных сред

*А.В.Панов*
(Челябинск, ЧелГУ; gjd.y@ya.ru)

Рассматривается система уравнений механики двухфазных сред [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} = 0, \qquad i = 1, 2, \\ \rho_1 \left( \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right) + m_1 \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\rho_2 (u_1 - u_2)}{\tau}, \\ \rho_2 \left( \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right) + m_2 \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\rho_2 (u_1 - u_2)}{\tau}, \end{cases}$$

где $p = \dfrac{a^2 \rho_1}{1 - \dfrac{\rho_2}{r}}$, $m_1 + m_2 = 1$, $m_2 = \dfrac{\rho_2}{r}$, $\tau, r$ — постоянные.

Методом Ли – Овсянникова [2] найдена трехмерная алгебра Ли группы допускаемых преобразований с базисом:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\ .$$

**Литература.** 1. Яненко, Н.Н. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц / Н.Н. Яненко, Р.И. Солоухин, А.Н. Папырин, В.М. Фомин. – Новосибирск: Наука, 1980. – 160с. 2. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 399с.

## О структуре полугруппы операторов, имеющих конечномерный образ

*А.В. Печкуров*
(Воронеж, ВГУ; apechkurov@gmail.com)

Пусть $X$ и $Y$ — комплексные банаховы пространства. Обозначим через $\mathrm{Hom}(X, Y)$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на $X$ со значениями в $Y$, а через $\mathrm{End}\, X = \mathrm{Hom}(X, X)$ — банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $X$.

Отображение $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\, X$, где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, называют *полугруппой операторов*, если

$$T(t + s) = T(t)T(s), \qquad t, s > 0.$$

Полугруппу операторов $T(t)$, $t > 0$, из $\mathrm{End}\, X$ называют *сильно непрерывной*, если функция вида $\varphi_x : \mathbb{R}_+ \to X$, где $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной при любом $x \in X$.

В докладе речь пойдет о следующей теореме.

**Теорема.** *Пусть $X$ — банахово пространство, а $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$ — сильно непрерывная полугруппа операторов, обладающая свойством*

$$\dim \operatorname{Im} T(t) < \infty, \qquad t > 0,$$

*причем* $\dim \operatorname{Im} T(t)$ *априори может зависеть от* $t$. *Тогда пространство* $X$ *допускает разложение*

$$X = E^0 \oplus E^1$$

*в прямую сумму двух замкнутых инвариантных относительно* $T(t)$, $t > 0$, *подпространств* $E^0$ *и* $E^1$, *не зависящих от* $t > 0$. *При этом сужение полугруппы* $T(t)$ *на* $E^0$ *состоит из нулевых операторов,* $E^1$ *конечномерно, а сужение операторов* $T(t)$ *на подпространство* $E^1$ *является обратимым.*

**Литература.** 1. Крейн С.Г., Чернышов К.И. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Новосибирск: инт матем. СО АН СССР. 1979. 2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ. 1962. 3. Favini A., Yagi A. Degenerate evolution equations in Banach spaces. – New York: M. Dekker. 1998.

## Аппроксимация проинтегрированных полугрупп операторов[15]

*С.И. Пискарев*
(Москва, МГУ; piskarev@gmail.com )

Рассмотрим в банаховом пространстве $E$ задачу Коши

$$\begin{aligned} &u'(t) = Au(t) + f(t),\ t \in [0,T], \\ &u(0) = u^0 \in E, \end{aligned} \tag{1}$$

с оператором $A$, порождающим проинтегрированную полугруппу $e_1^{tA}, t \geq 0$.

Функция $u(\cdot)$ называется классическим решением задачи (1), если она принадлежит $C^1([0,T];E) \cap C([0,T];D(A))$ и удовлетворяет (1). Определим функцию $v(t) = e_1^{tA}u^0 + \int_0^t e_1^{(t-s)A} f(s)ds, t \in [0,T]$. Если задача (1) имеет классическое решение, то $v(\cdot) \in C^1([0,T];E)$ и $v'(\cdot) = u(\cdot)$.

Проинтегрированная полугруппа операторов – это семейство линейных ограниченных операторов $e_1^{tA}$, которое сильно непрерывно по $t \in [0,\infty)$ и удовлетворяет уравнению

$$e_1^{tA} = A\int_0^t e_1^{sA} ds + tI, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Аппроксимируем (2), например, следующим образом: $e_1^{\tau A} \approx \tau A e_1^{\tau A} + \tau I$. Тогда аппроксимация $e_1^{\tau A}$ может быть записана в следующем виде $W(\tau) = \tau(I - \tau A)^{-1}$. Кроме того, проинтегрированная полугруппа удовлетворяет уравнению

$$e_1^{sA} e_1^{tA} = \int_0^s (e_1^{(r+t)A} - e_1^{rA}) dr \quad \text{для любых} \quad s,t \geq 0. \tag{3}$$

[15] Исследования поддерживались грантами РФФИ ГФЕН 07-01-92104 и 07-01-00269-а.

Полагая в (3) $s=\tau, t=k\tau$, получаем наводящее соображение

$$e_1^{k\tau A}e_1^{\tau A} \approx \tau e_1^{(k+1)\tau A} - \tau e_1^{\tau A},$$

которое приводит к аппроксимации по схеме

$$W((k+1)\tau) = W(k\tau)W(\tau)/\tau + W(\tau), \quad W(\tau) = \tau(I-\tau A)^{-1}. \tag{4}$$

Такая схема является неявной разностной схемой для аппроксимации $e_1^{tA}, t \geq 0$, поскольку выражение (4) является аналогом неявной разностной схемы для $C_0$-полугрупп (см. [1-2]).

В докладе будет рассмотрена устойчивость явной и неявной разностных схем, а также устойчивость схемы Кранка-Николсон при аппроксимации экспоненциально ограниченных проинтегрированных полугрупп.

**Литература.** 1. Guidetti D., Karasozen B. and Piskarev S. Approximation of abstract differential equations// Journal of Mathematical Sciences. – 2004. Vol. 122. N 2. C. 3013–3054. 2. Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их аппроксимация. – М.: Изд. МГУ. 2005. – 287 с.

## Жесткое смешанное управление линеаризованной системой уранений Буссинеска

*М.В. Плеханова*
(Челябинск, ЧелГУ; kar@csu.ru)

Рассмотрим задачу управления для линеаризованной в нуле системы уравнений Буссинеска

$$(u,w,\varphi,\psi,\eta) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{1}$$

$$J(z) = \frac{1}{2}\|z-z_0\|^2_{H^1(0,T;\mathbb{L}_2)} + \frac{1}{2}\|r-r_0\|^2_{H^1(0,T;\mathbb{L}_2)} + \frac{1}{2}\|\theta-\theta_0\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))} \to \inf, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \nu\Delta z(x,t) - r(x,t) - \alpha\theta(x,t)e_3 + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega\times(0,T), \tag{3}$$

$$\nabla\cdot z = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = \beta\Delta\theta(x,t) + z_3(x,t) + w(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{5}$$

$$z(x,0)=\varphi(x), \quad r(x,0)=\psi(x), \quad \theta(x,0)=\eta(x), \quad x\in\Omega, \tag{6}$$

$$z(x,t)=\theta(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T). \tag{7}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$, выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U} = H^1(0,T;\mathbb{L}_2\times L_2(\Omega))\times\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times L_2(\Omega)$ – множество допустимых управлений, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\nu,\beta\in\mathbb{R}_+$, $z=(z_1,z_2,z_3)$ – вектор скорости, $r$ – градиент динамического давления, $e_3=(0,0,1)$. Разрешимость задачи (3) – (7) в пространстве $\mathcal{X}=\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times L_2(\Omega)$ исследована в [1].

Введем обозначения

$$H_\partial(0) = \{(u,w,\varphi,\psi,\eta)\in H^1(0,T;\mathbb{L}_2\times L_2(\Omega))\times\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times L_2(\Omega):$$

$$\psi - \nu\Pi\Delta\varphi + \Pi C\eta = 0\};$$
$$Z_k = \{(z, r, \theta) \in H^1(0,T;\mathcal{X}) : \dot{z} - \nu\Sigma\Delta z + \Sigma C\theta \in H^k(0,T;\mathbb{H}_\sigma);$$
$$r - \nu\Pi\Delta z + \Pi C\theta \in H^k(0,T;\mathbb{H}_\pi); \quad \dot{\theta} - Dz - \beta\Delta\theta \in H^k(0,T;L_2(\Omega))\}, \quad k = 0,1.$$

**Теорема 1** *Пусть $\mathfrak{U}_\partial$ – ограниченное в пространстве $H^k(0,T;\mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega)) \times \mathcal{X}$ множество, причем $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial(0) \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{z}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{u}, \hat{w}, \hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\eta}) \in Z_k \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи* (1) – (7).

**Литература.** 1. Плеханова М.В., Исламова А.Ф. Исследование линеаризованной системы уравнений Буссинеска методами теории вырожденных полугрупп // Вестник Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – вып. 11. – С.62-70.

## Атомы как специального вида разбиения двумерных многообразий

*Ю.И. Пономаренко*

(Минск, Белорусский государственный университет;
y.i.ponomarenko@gmail.com)

Атомом называется двумерное компактное замкнутое гладкое многообразие со вложенным в него графом со следующими свойствами:

- граф связный и имеет валентность 4;
- при выбрасывании графа многообразие распадается на непересекающиеся клетки, гомеоморфные дискам;
- на клетках можно задать раскраску в два цвета так, что любое ребро будет граничить с одной черной и одной белой клеткой.

При этом раскраска клеток фиксирована.

В статье [1] было опредено накрытие атомов как накрытие многообразий, сохраняющее граф и раскраску, доказан ряд утверждений и приведена классификация атомов через накрытия специального вида, называемые отображениями примитивизации.

Результаты вышеуказанного исследования мною распространены на случай неориентируемых атомов. В моём докладе рассмотрены некоторые утверждения, характеризующие соотношения атома, подгрупп в группе его симметрий и индуцированных ими накрытий.

Таким образом, удалось получить некоторые общие выводы для ориентированных и неориентированных многообразий.

**Литература.** 1. Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко, Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия, Матем. сб., 199:9 (2008) 2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1. Ижевск, Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.

## О некоторых дифференциально-разностных операторах с вырождением[16]

*В.А. Попов*
(Москва, РУДН; volodimir.a@gmail.com )

Рассматривается первая краевая задача в прямоугольнике $Q = (0, 3\frac{1}{3}) \times (0,1)$ для дифференциально-разностного уравнения с вырождением вида

$$L_R u = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} R_{11} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} R_{12} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1} R_{21} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} R_{22} \right) = f(x),$$

где $R_{ij}$—разностные операторы с нетривиальным ядром, действующие в пространстве $L_2(Q)$ и определенные по формуле

$$R_{ij}u = a_{ij}\left[u(x_1,x_2) + u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)\right] +$$
$$+ b_{ij}\left[u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2) + u(x_1+3,x_2) + u(x_1-3,x_2)\right],$$
$$u(x) = 0, \qquad x \notin Q$$

Здесь $a_{ij}$, $bij$—положительные вещественные числа.

В работе получены условия на коэффициенты разностных операторов, при которых выполнены априорные оценки. Существование априорных оценок влечет за собой секториальность рассматриваемого дифференциально-разностного оператора, а также существование фридрихсова расширения, являющегося $m$–секториальным оператором. Построено фридрихсово расширение и изучены его спектральные свойства. Результаты работы обобщаются на задачи общего вида в ограниченной области с гладкой границей.

**Литература.** 1. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications// Birkhauser, Basel-Boston-Berlin. 1997. 2. Skubachevskii A.L. Elliptic differential-difference equations with degeneration. – Trudy Moskov. Matem. Obshtsh, English transl. in Trans. of Moscow Math. Soc. 1997 (59). – p. 240-285. 3. В. А. Попов, А. Л. Скубачевский Секториальные дифференциально-разностные операторы с вырождением. – ДАН, 2009, т. 428, №4 – с. 450 - 453

## Решение одной задачи управления для дескрипторной системы [17]

*Е.В. Раецкая*
(Воронеж, ВГЛТА; raetskaya@inbox.ru)

Рассматривается дескрипторная система:

$$A\frac{dx}{dt} = Bx(t) + Du(t), \tag{1}$$

[16]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00586) и аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы"(№ 2.1.1/5328).

[17]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00397)

где $A, B \in L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n)$, $D \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$,$t \in [0, T]$, с условиями:

$$\frac{dx^j}{dt^j}|_{t=0} = a_{01},$$
$$\frac{dx^j}{dt^j}|_{t=ti} = a_{ij}, \tag{2}$$
$$\frac{dx^j}{dt^j}|_{t=T} = a_{Tj},$$

где $i = \overline{1, n}$ , $j = \overline{0, r}$. Методом каскадного расщепления за $p$ шагов ($p \leq n$) от системы (1) переходим к редуцированной системе в подпространстве:

$$\frac{dx_p}{dt} = B_p x_p(t) + D_p u_p(t),$$

а от условий (2) перейдем к условиям:

$$\frac{dx_p^j}{dt^j}|_{t=0} = a_{01}^p,$$
$$\frac{dx_p^j}{dt^j}|_{t=t_i} = a_{ij}^p,$$
$$\frac{dx_p^j}{dt^j}|_{t=T} = a_{T_j}^p,$$

где $i = \overline{1, n}$ , $j = \overline{0, r+p}$. Если матрица $D_p$ является сюръективной и матрицы $A$,$B$, $D$ исходной системы удовлетворяют некоторым условиям, система (1) является полностью управляемой. В этом случае существуют функции управления и функции состояния системы (1) в виде многочленов по $t$ степени $[(p + r + 1)(n + 2) - 1]$.

Строятся функции управления и функции состояния системы.

**Литература.** 1. Зубова С.П., Раецкая Е.В., Ле Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления// АиТ, № 1, 2008, с. 41-47.

## О преобразованиях подобия оператора Дирака

*Е.Ю. Романова*
(Воронеж, ВГУ; elenrom@list.ru )

Пусть $L_p([0, \pi], \mathbb{C}^2) \simeq L_p[0, \pi] \times L_p[0, \pi]$ - банахово пространство измеримых на $[0, \pi]$ со значениями в $C^2$ и суммируемых со степенью $p$ нормы функций. Через $W_p^1([0, \pi], \mathbb{C}^2), p \geq 1$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_p([0, \pi], \mathbb{C}^2), p \geq 1 : y$ абсолютно непрерывна и $y' \in L_p([0, \pi], \mathbb{C}^2)\}$

Рассматривается оператор Дирака $L : D(L) \subset L_p([0, \pi], \mathbb{C}^2) \to L_p([0, \pi], \mathbb{C}^2)$

$$Ly = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy, y \in D(L),$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, t \in L_p[0,\pi], P, Q \in L_p[0,\pi]$$

$$D(L) = \{y \in W_p^1([0,\pi], \mathbb{C}^2) : y(0) = y(\pi) \in \mathbb{C}^2\}$$

Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то $L^0$. Оператор $L$ можно представить следующим образом $L = L^0 - B$ , где $B$ - оператор умножения на потенциал $v$. Спектром оператора $L^0$ является $\sigma(L^0) = 2\mathbb{Z}$ , $\lambda_n = 2n \in 2\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ ,а собственное подпространство $E_n^0 = Span\{e_n^1, e_n^2\}$, где $e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix}$, $t \in [0,\pi]$

Символом $P_n$ обозначим проектор, отвечающий собственному значению $\lambda_n = 2n \in 2\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, оператора $L^0$:$P_n x = \langle x, e_n^1 \rangle e_n^1 + \langle x, e_n^2 \rangle e_n^2, n \in \mathbb{Z}$, где $\langle x, e_n^i \rangle e_n^i = \int\limits_0^\pi (x(t), e_n^i(t)) dt, i = 1,2, t \in [0,\pi]$

Операторы $JB$ и $\Gamma B$ имееют вид :

$$((JB)x)(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & P(\frac{s+\tau}{2}) \\ Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

$$((\Gamma B)x)(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & f(\frac{s-\tau}{2}) P(\frac{s+\tau}{2}) \\ f(\frac{\tau-s}{2}) Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

где $x = (x_1, x_2) \in L_p([0,\pi], \mathbb{C}^2), p \geq 1, s \in [0,\pi], f(t) = i(t - \frac{\pi}{2}), t \in [0,\pi], f \in L_p([0,\pi], \mathbb{R})$

Таким образом, оператор $B\Gamma B$ является интегральным с ядром $\widetilde{K}$

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} f(\frac{\tau-s}{2}) P(s) Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \\ 0 & f(\frac{s-\tau}{2}) Q(s) P(\frac{s+\tau}{2}) \end{pmatrix}$$

**Теорема.** Если число $k \in \mathbb{Z}_0$ таково, что $\|\Gamma_k B\|_2 < 1$, (т.е. оператор $I + \Gamma_k B$ обратим), то оператор $L = L^0 - B$, $B$ - оператор умножения на $v$, подобен оператору $\widetilde{L} = L^0 - \widetilde{B}$, где интегральный оператор $\widetilde{B} = J_k B + (I + \Gamma_k B)^{-1}(B\Gamma_k B - (\Gamma_k B) J_k B)$, $J_k B = JB - J(P_{(k)} B P_{(k)}) + P_{(k)} B P_{(k)} = JB - P_{(k)} JB P_{(k)} + P_{(k)} B P_{(k)}$, $\Gamma_k B = \Gamma B - \Gamma(P_{(k)} B P_{(k)}) = \Gamma B - P_{(k)} \Gamma B P_{(k)}$,$P_{(k)} = \sum\limits_{|m| \leq k} P_m$.


**Литература.** 1. Джаков П, Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака//Успехи математических наук. 2006. Т.61. – №4. – с. 77-182.

# Об одной новой оценке функции Грина

*М.Ю. Романова*
(Воронеж, ВГУ; masynyrom@yandex.ru )

Пусть $\mathcal{H}$ - комплексное гильбертово пространство, $End\mathcal{H}$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - генератор сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\mathcal{H}$ и полугруппа $T$ является гиперболической, т.е. спектр $\sigma(T(1))$ оператора $T(1)$ не пересекается с единичной окружностью $\mathbb{T}$.

Обозначим через $R(\cdot, A)$ резольвенту оператора $A$.

Условие гиперболичности полугруппы $T$ гарантирует, что $\sigma(A) \bigcap (i\mathbb{R}) = \emptyset$ и величина $\gamma(A) = \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\|$ конечна.

Рассмотрим уравнение Ляпунова $A^*W + WA = -I$, решением которого является оператор $W \in End\mathcal{H}$. Обозначим через $\nu(A)$ величину $\nu(A) = \|W\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \int\limits_{\mathbb{R}} \|R(i\xi, A)x\|^2 d\xi$.

Для двух введённых констант, верно следующее неравенство $\gamma(A) \le 2\nu(A)$.

Функция Грина является обратным преобразованием Фурье резольвенты, т.е.$G(t)x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} R(i\lambda, A)xe^{i\lambda t}d\lambda$.

Используя данное свойство, получаем оценку функции Грина для всех $|t| \ge 1$

$$\|G(t)\| \le \frac{\nu(A)}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{\gamma(A)}} \cdot \frac{\gamma(A)+1}{\gamma(A)}.$$

Для всех $|t| < 1$ верна следующая оценка

$$\|G(t)\| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\nu(A)\beta(A))^{1/4},$$

где величина $\beta(A) = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \int\limits_{\mathbb{R}} \|\xi R(i\xi, A)x\|^2 d\xi$ считается ограниченной.

Полученные оценки в отличие от работы [3], в которой рассматривалось конечное пространство $\mathcal{H}$, не используют условие ограниченности оператора $A$.

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений – Дифференциальные уравнения, 2003 – Т.39,№3 – С.413-415. 2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука. 1970. – 536 с. 3. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. – Новосибирск: Науч. кн. 1997. – 388 с.

# Об одном свойстве гиперплоскостей конечномерных пространств

*В.С. Рублев, Н.П. Федотова*
(Ярославль; natatulik@yandex.ru)

Для гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ $n$-мерного пространства известно [1] следующее свойство:
*для любого многогранника в этой плоскости вида*

$$a_i \leq x_i \leq b_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

*существует точка, норма которой минимальна для многогранника в любом симметрическом пространстве.*

Это свойство может быть использовано при решении некоторых дискретных оптимизационных задач с соответствующим условием [2].

Будем говорить, что свойство $U$ выполнено для гиперплоскости (или многогранника в гиперплоскости), если точка этой гиперплоскости (или многогранника в гиперплоскости), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой симметрической нормы. Гиперплоскость пространства $R^n$ будем называть *униэкстремальной*, если любой многогранника вид $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ в этой гиперплоскости обладает свойством $U$. Исследуется:

1) задача описания всех гиперплоскостей пространства $R^n$, обладающих свойством $U$;

2) задача описания всех униэкстремальных гиперплоскостей пространства $R^n$;

3) возможность расширения класса униэкстремальных гиперплоскостей за счет наложения ограничений на симметрическую норму.

**Теорема 1**. Любая гиперплоскость $n$-мерного ($n>2$) пространства, удовлетворяющая условию $U$, имеет вид (1) либо (2):

(1) $\sum_{i=1}^{n} x_i = const$,

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ $(\alpha_i \in \{-1, 0, 1\},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0)$.

**Теорема 2**. Любая униэкстремальная гиперплоскость $n$-мерного ($n>2$) пространства имеет вид: $\sum_{i=1}^{n} x_i = const$.

**Теорема 3**. Любая униэкстремальная гиперплоскость $n$-мерного пространства со специальной симметрической нормой ($||(|x_1|, \ldots, |x_n|)|| = ||(\ x_{\xi_1}, \ldots, x_{\xi_n}\ )||$ для любой перестановки $\xi$) имеет вид:
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ $(\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, \ldots, n)$.

Ограничение не сильно сужает класс исследуемых задач. Например, все нормы $L_p$ являются специальными симметрическими нормами.

**Литература.** 1. Рублев В.С., Чаплыгина Н.Б. О некоторой характерной точке одного класса многогранников в симметрических пространствах // ДАН, 2006, т. 407, № 2, 176-178. 2. Коршунова Н.М., Рублев В.С. Задача целочисленного сбалансирования матрицы // Современные проблемы математики и информатики - Вып 3. - Ярославль ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2000. С.145-150.

# О разрешимости вырождающегося уравнения теплопроводности в пространствах Соболева-Слободецкого

*Ю.Б. Савченко, С.А. Ткачева*
(ВГУ, Воронеж)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{x'} u - \alpha(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\alpha(x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f(x', x_n, t) \qquad (1)$$

$$u|_{t=+0} = u_0(x', x_n), \qquad (2)$$

где $x' \in E_{n-1}$, $x_n \in E_1$, $0 < t < \infty$, $\Delta_{x'} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}$, $\alpha(x_n)$ - весовая функция.

Определим пространство $W_{\alpha,p}^{2l+2-\frac{2}{p}}$ ($l = 0, 1, 2, ..., 1 < p < \infty$) как множество функций $u^0(x_n)$ таких, что существуют пределы $\gamma_j = \lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha(x_n)\frac{\partial}{\partial x}\right)^j u^0(x_n)$, $j = 0, ..., r$ и конечна норма $\|u^0\|_{W_{\alpha,p}^{2l+2-\frac{2}{p}}} = \sum_{j=0}^r |\gamma_j| + \langle u^0\rangle_\alpha^{2l}$ , где $r = 2l-1$ при $1 < p \le \frac{3}{2}$; $r = 2l$ при $\frac{3}{2} < p \le 3$; $r = 2l+1$ при $3 < p < \infty$, норма $\langle u^0\rangle_\alpha^{2l}$ определена в работе [1].

Норма в пространстве $W_{\alpha,p}^{2m,m}$ вводится по формуле

$$|||f|||_{W_{\alpha,p}^{2m,m}} =$$

$$\left\{\sum_{|k'|+k_n+2k_0\le 2m}\left(\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{k'}\left(\alpha(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0} f(x', x_n, t)\right\|_{p,\alpha} dx\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

**Теорема.** Пусть $1 < p < \infty$, $m = 0, 1, 2, ...,$ функция $f(x', x_n, t) \in W_{\alpha,p}^{2m,m}(E_{n+1}^+)$, $u^0(x', x_n) \in W_{\alpha,p}^{2l+2-\frac{2}{p}}(E_n)$, при $l = 0, ..., m$. Тогда существует единственное решение $u(x', x, t)$ задачи (1)-(2), для которого $\frac{\partial u}{\partial t} \in W_{\alpha,p}^{2m,m}$, $\left(\alpha(x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 u \in W_{\alpha,p}^{2m,m}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in W_{\alpha,p}^{2m,m}$ $(i, j = 1, ..., n-1)$, причем справедлива оценка

$$\left|\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|\right|_{W_{\alpha,p}^{2m,m}} + \left|\left|\left|\left(\alpha(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 u\right|\right|\right|_{W_{\alpha,p}^{2m,m}} + \sum_{i,j=1}^{n-1}\left|\left|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right|\right|_{W_{\alpha,p}^{2m,m}} \le$$

$$\le c\,|||f|||_{W_{\alpha,p}^{2m,m}} + \sum_{l=0}^m \left\|u^0\right\|_{W_{\alpha,p}^{2l+2-\frac{2}{p}}}$$

**Литература.** 1. Глушко В.П.Уравнение теплопроводности с вырождением // В.П. Глушко, С.А. Ткачева. – Мат. заметки, 1995. – Т 58, №2. – С. 189-203.

# Неравенство Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов нового класса

*П.В. Садчиков*
(Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор, определенный равенством

$$K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[v(x,t)]].$$

Здесь $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$ - функция, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определено первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Преобразование $F_\alpha$ связано с преобразованием Фурье следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}\, u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ – функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования $F_\alpha$ справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L_2(R_+^1)}\,,$$

что дает возможность расширить преобразование $F_\alpha$ до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$. Для расширенного таким образом преобразования $F_\alpha$ сохраним старое обозначение. Обозначим через $F_\alpha^{-1}$ обратное к $F_\alpha$ преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)] = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)\,]|_{\tau=\varphi(t)}$.

(**Определение.** Будем говорить, что символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\delta}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $\sigma \in \mathrm{R}^1$, $0 < \delta < 1$, если функция $\lambda(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\ l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки $|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(t,\xi,\eta)| \leq c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - l + \delta j}$ с константами $A_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in \Omega$.

**Теорема.** Пусть $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $p(t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,\delta}^m(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $m \in R^1$, $\delta \in (0,1)$. Пусть $\mathrm{Re}\ p(t,\xi,\eta) \geq c(1 + |\xi| + |\eta|)^m$ для всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in \mathrm{R}^1$, $t \in \mathrm{K} \subset \Omega$, где K – произвольное компактное множество. Тогда для любого $s \in R^1$ и $u(t) \in C_0^\infty(K)$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}(P(t, D_x, D_{\alpha,t})u(x,t), u(x,t)) \geq c_0 \|u\|_{\frac{m}{2},\alpha}^2 - c_1 \|u\|_{s,\alpha}^2$$

с некоторыми константами $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$.

# Мультистабильность в модели одноконтурного RCL-генератора с запаздыванием в цепи обратной связи

*Д.В. Сандуляк*

(Ярославль,ЯрГУ им. П.Г.Демидова; danzova@hotmail.ru )

Рассмотрим уравнение, возникающее при математическом моделировании работы одноконтурного RCL-генератора с запаздыванием в цепи обратной связи:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = F\big(kx(t-\theta)\big). \tag{1}$$

Функция $F(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ и допускает представление $F(x) = -x + cx^3 + ...$, где $c, a, k, \theta -$ положительные параметры, и $a \in (0, \sqrt{2})$. В качестве фазового пространства уравнения (1) возьмем $C[-\theta, 0] \times \mathbb{R}$ и поставим вопрос о существовании и устойчивости его периодических решений, бифурцирующих из нуля при увеличении параметра $\theta$.

Линейный анализ показывает, что при $k > k_0$, где $k_0 = a\sqrt{1-(a/2)^2}$, область неустойчивости нулевого решения уравнения (1) по параметру $\theta$ имеет вид $\theta \in \bigcup_{n=0}^{\infty}(\theta_n^+, \theta_n^-)$. В связи с этим нас будут интересовать периодические решения $x_n(t, \theta)$, рождающееся из нуля при значении параметра $\theta = \theta_n^+$ и умирающее в нуле при $\theta_n^-$, где $n = 0, 1, 2, ...$

Примем дополнительное предположение о малости интервала $(\theta_0^+, \theta_0^-)$, что при фиксированном $a$ дает $k = k_0 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$. В рамках данного предположения уместно положить $\theta = \theta_0 + \delta\sqrt{\varepsilon}$, где параметр $\delta$, порядка единицы, изменяется в интервале $(-\Delta_+(\varepsilon), \Delta_-(\varepsilon))$, что отвечает за изменение $\theta$ на интервале $(\theta_0^+, \theta_0^-)$.

*При указанных предположениях удается показать, что* $\exists\, \varepsilon_0\ \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ $\forall \delta \in (-\Delta_+(\varepsilon), \Delta_-(\varepsilon))$ *уравнение (1) обладает экспоненциально орбитально устойчивым циклом* $x = \sqrt{\varepsilon}\, x_0(\tau, \varepsilon, \delta),\ d\tau/dt = \omega_0(\varepsilon, \delta)$,

$$x_0(\tau, \varepsilon, \delta)\big|_{\delta = \mp\Delta_\pm(\varepsilon)} \equiv 0;\ \omega_0(\varepsilon, \mp\Delta_\pm(\varepsilon)) = \omega_\pm(\varepsilon),\ x_0(\tau, \varepsilon, \delta) \equiv x_0(\tau + 2\pi, \varepsilon, \delta),$$

*где функция* $x_0(\tau, \varepsilon, \delta)$ *и частота* $\omega_0(\varepsilon, \delta)$ *раскладываются в ряды по целым степеням* $\sqrt{\varepsilon}$, *сходящиеся равномерно по* $\delta$ *из любого фиксированного отрезка* $[\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_*, \Delta_*)$.

С помощью принципа подобия, описанного в [1], можно показать,что на каждом интервале $(\theta_n^+, \theta_n^-)$ рождается неустойчивое периодическое решение $x_n(t)$, которое приобретает устойчивость на интервале $(\theta_n^*, \theta_n^{**}) \subset (\theta_n^+, \theta_n^-)$. Кроме того, в силу структуры области неустойчивости нулевого состояния равновесия уравнния (1), с ростом $n$ интервалы $(\theta_n^*, \theta_n^{**})$ начинают пересекаться во все большем числе, а значит, и количество сосуществующих устойчивых циклов $x_n(t)$ при $\theta \to \infty$ неограниченно растет. То есть в рассматриваемой задаче при подходящем выборе параметров может существовать любое наперед заданное число устойчивых периодических решений. Данный вид мультистабильности принято называть буферностью.

**Литература** 1. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

## О методе квазиинвариантных подмногообразий

*Т.Ю. Сапронова*
(Воронеж, ВГУ, tsapr@mail.ru)

Доклад является обзором примеров использования метода квазиинвариантных подмногообразий (КИ–подмногообразий), ранее разработанного автором при изучении гладких фредгольмовых функционалов в ситуации разрушения непрерывной симметрии [1], [2]. Компактные морсовские критические орбиты превращаются (в результате возмущения, разрушающего непрерывную симметрию) в КИ–подмногообразия, диффеоморфные исходным орбитам. Изучение экстремалей и многообразий уровней функционала в такой ситуации можно осуществлять, перейдя к сужению фунционала на квазиинвариантное подмногообразие. Критические точки сужения остаются критическими и для функционала в целом. Если сужение на КИ–подмногообразие регулярно и эллиптическое (индекса нуль), то переход к сужению не изменит свойств критических точек: сохранятся индексы Морса, кратности, структура локальных колец особенности и т.д., то есть имеется прямая связь между топологическими строениями многообразий уровней исходного функционала и его эллиптического сужения.

КИ–подмногообразие появляются в задачах о формах упругих прогибов стержней и оболочек, о фазовых переходах в кристаллах, о циклогенезе в динамических и системах и т.д [2]– [4].

**Литература.** 1. Сапронова Т.Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях// Труды математического факультета. Новая серия. – Воронеж, ВГУ. 1997. N2. – С.54-58. 2. Сапронова Т.Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов// В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж, ВГУ. 2000. – С.107-124. 3. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004). М., 2004. С.3–140. 4. Долженков А.А., Сапронов Ю.И., Сапронова Т.Ю. Нелокальный бифуркационный анализ некоторых конфигураций кирхгофова стержня// Математические модели и операторные уравнения. Том 6. Воронеж: ВГУ, изд-во "Созвездие", 2009. - С.27-41.

## Особенности фазовых пространств вырожденных уравнений реакции - диффузии на геометрическом графе

*Г.А. Свиридюк, И.А. Плюхина*
(Челябинск, ЧелГУ; Polovinochka_88@mail.ru)

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер, причем каждому ребру $E_j$ сопоставлены числа $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$, которые удобно трактовать как длину и площадь поперечного сечения ребра соответственно. (Такие графы принято называть геометрическими [1]). Пусть на графе $\mathbf{G}$ задана вырожденная система уравнений реакции - диффузии

$$u_{jt} = \alpha u_{jxx} + f_j(u_j, v_j), \quad 0 = \beta v_{jxx} + g_j(u_j, v_j), \tag{1}$$

где $x \in (0, l_j)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Система (1) моделирует процессы реакции и диффузии в трубчатом реакторе двух веществ с концентрациями $u = (u_1, \ldots, u_j, \ldots)$, $u_j = u_j(x,t)$, и $v = (v_1, \ldots, v_j, \ldots)$, $v_j = v_j(x,t)$, соответственно при условии, что скорость изменения одной концентрации ($u = u(x,t)$) существенно превосходит скорость изменения другой ($v = v(x,t)$). (Подробности см. в [2]). В вершинах $\mathfrak{E}$ графа $\mathbf{G}$ заданы условия „непрерывности“

$$\begin{gathered} w_j(0,t) = w_k(0,t) = w_m(l_m,t) = w_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), \quad E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i) \end{gathered} \tag{2}$$

и „баланса потока“

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j w_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k w_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{3}$$

где сначала $w_j = u_j$, а потом $w_j = v_j$ во всех уравнениях одновременно.

Дифференциальные уравнения на графах начали изучаться во второй половине прошлого века (см. прекрасный обзор в [1] и библиографию там же). Впервые вырожденные уравнения (уравнения соболевского типа) на графах появились в [3]. Затем появились работы [4] – [6], в которых описаны фазовые пространства уравнений на графах, возникшие в приложениях. Особенности фазовых пространств начали изучаться в [2], а затем продолжены в [7],[8]. Система (1) на графе $\mathbf{G}$ при условиях (2), (3) рассматривается впервые. В докладе будет дано описание сборок Уитни в моделях Пригожина – Лефевра и Бонгоффера – Ван дер Поля.

**Литература.** 1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. 2. Бокарева Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Матем. заметки. 1994. Т.5, №3. С. 3 - 10. 3. Свиридюк Г.А. Уравнения соболевского типа на графах /Г.А. Свиридюк// Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002.- С. 221 - 225. 4. Свиридюк Г.А. Фазовое пространство уравнений Корпусова – Плетнера – Свешникова на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Вычислит. технологии. 2005. Т.10. №6. С.82 - 90. 5. Свиридюк Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. ВУЗ. Математика. 2005. №11. С.47 - 52. 6. Свиридюк Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. 2006. Т.24. №1. С.126 - 131. 7. Свиридюк Г.А. Сборки Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Изв. ВУЗ. Математика. 2005. №10. С.54 - 59. 8. Свиридюк Г.А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф.Карамова // Дифференц. уравнения. 2005. №10. С.1476 - 1481.

## Ортогональные финитные функции Леонтьева. Сравнение со всплесками Добеши и атомарными функциями Рвачева

*Г.Ю. Северин*
(Воронежский государственный Университет; akg.77@mail.ru)

В обзорном докладе сравнивается эффективность численных методов решения различных краевых задач с использованием ООФ Леонтьева, up-функций и всплесков Добеши.

**Литература.** 1. Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: УлГУ, 2003. 178 с. 2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 464 с. 3. Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах/ В.Л. Рвачев.-Киев: Наук. думка 1979.- 196 с.

## О фреймах порожденных мультивсплесками

*П.Г. Северов*
(Воронеж, ВГУ; severovpg@gmail.com)

Пусть $\boldsymbol{\psi}$ – мультивсплеск [1]. Дискретизируем масштабный параметр $s$ и параметр сдвига $\xi$ непрерывного мультивсплескового преобразования. Обозначим $\xi_{j,k} = \frac{k}{2^j}\xi_0$, где $j,\, k \in \mathbb{Z}$, а $\xi_0 > 0$ – фиксированная константа, которую назовем *темпом измерений.*

Введем обозначение

$$\psi_{i,j,k}^{\xi_0} = \psi_{i,\xi_{j,k}}^{s_j} := 2^{j/2}\psi_i(2^j t - k\xi_0).$$

Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ также обозначим:

$$W_i f(\xi_{j,k},\, s_j) := \langle f,\, \psi_{i,j,k}^{\xi_0}\rangle, \tag{1}$$

где $j,\, k \in \mathbb{Z}$, $i = 0,\, \ldots,\, r-1$.

**Определение 1** *Будем говорить, что вектор-функция $\boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R})^r$ порождает фрейм $\{\psi_{i,j,k}^{\xi_0}\}$ в $L_2(\mathbb{R})$ с темпом измерений $\xi_0 > 0$, если выполняется условие*

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j,\,k\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{r-1} |\langle f,\, \psi_{i,j,k}^{\xi_0}\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \tag{2}$$

*где константы $A$ и $B$ такие, что $0 < A \le B < \infty$, которые называются границами фрейма. Если $A = B$, то фрейм назовем жестким фреймом.*

Определение фрейма можно найти в [2].

**Теорема 1** *Если вектор-функция $\boldsymbol{\psi}$ порождает фрейм, то любую функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ можно восстановить по значениям $W_i f(\xi_{j,k},\, s_j)$, где $i = 0, \ldots, r-1$, $j,\, k \in \mathbb{Z}$.*

**Литература.** 1. Keinert F. Wavelet and Multiwavelet / F. Keinert. Chapman & Hall/CRC, 2004. 2. К. Чуи. Введение в вэйвлеты. – М.: Мир, 2001.

# Начально-конечная задача для линейного уравнения Хоффа на графе

*Н.П. Семенова*
(Челябинск, ЧелГУ; npsemenova@rambler.ru)

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор $M$ $(L,p)$-ограничен [1].Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad \ker L \neq \{0\}. \tag{1}$$

Пусть относительный спектр $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, причем $\sigma^L_{in}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют проекторы

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}),\ Q_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

где контур $\gamma = \partial\Omega$, такой, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in};\ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im}P_{in};\mathrm{im}Q_{in})$, $M \in Cl(\ker P_{in};\ker Q_{in}) \cap Cl(\mathrm{im}P_{in};\mathrm{im}Q_{in})$.

Рассмотрим проектор $P_{ex} = P - P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, возьмем $T \in \mathbb{R}_+$, $u_0$, $u_T \in \mathfrak{U}$ и поставим начально-конечную задачу [2]

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0. \tag{2}$$

Пусть теперь $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, – конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро $E_i$ имеет длину $l_i \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линейное уравнение Хоффа

$$\lambda u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + f_j, \tag{3}$$

которое моделирует динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок.
Нас интересуют решения уравнения (3), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \tag{4}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i)(E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине $V_i$), а также

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{5}$$

Чтобы редуцировать задачу (3) - (5) к задаче (1) - (2) ведем в рассмотрение банаховы пространства $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0,l_j)\}$, $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W^2_2(0,l_j)$ и выполняются (4), (5)$\}$ Формулой $A : u \to (u_{1xx}, u_{2xx}, ..., u_{jxx}, ...)$, зададим оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Выберем $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим оператор $L = \lambda + A$. Оператор $M$ зададим формулой $M = \alpha\mathbb{I}$.

**Теорема 1** *При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathfrak{F}$ существует единственное решение $u \in C([0,T];\mathfrak{U}) \cap C^1((0,T);\mathfrak{U})$ задачи (4), (5) для уравнения (3) вида*

$$u(t) = \sum_{\mu_k \in \sigma^L_{ex}} \left[ \exp\left(\frac{t\alpha}{\lambda+\lambda_k}\right) \langle u_0 + \alpha^{-1} f, \varphi_k \rangle \varphi_k - \alpha^{-1} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right] +$$

$$+ \sum_{\mu_k \in \sigma^L_{in}} \left[ \exp\left(\frac{(T-t)\alpha}{\lambda+\lambda_k}\right) \langle u_T - \alpha^{-1} f, \varphi_k \rangle \varphi_k + \alpha^{-1} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right] - \alpha^{-1} f.$$

**Литература.** 1. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. 2. Загребина С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова. – Изв. вузов. Математика, 2007, № 3, с.22-28.

## О факторизации операторов и о свойствах образов операторных дробно-линейных отношений

*В.А. Сендеров, В.А. Хацкевич*
(Москва; valery.senderov@gmail.com)

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ — комплексное индефинитное ($\min\{\dim \mathfrak{H}_1, \dim \mathfrak{H}_2\} > 0$) пространство Крейна, $\mathcal{K}$ — замкнутый единичный шар пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. Формула

$$A_{21} + A_{22} K_+ = K'_+ (A_{11} + A_{12} K_+),$$

где $K_+$, $K'_+ \in \mathcal{K}$ и $A_{ij} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_j, \mathfrak{H}_i)$ при $i$, $j = 1, 2$, определяет в $\mathcal{K}$ дробно-линейное отношение (д.л.о.) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A = \{K_+, K'_+\}$. Область определения д.л.о. $\mathcal{F}_A$ (которая в общем случае может быть и пустой) в случае плюс-оператора $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ совпадает со всем шаром $\mathcal{K}$.

В частном случае дробно-линейного *отображения* $\mathcal{F}_A$ множество $\operatorname{Im} \mathcal{F}_A$ изучалось во многих работах. Однако общий случай д.л.о. требует принципиально новых методов и подходов.

**Лемма 1** *Пусть $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $T_{12} = T_{11}\Gamma^*$, где $\|\Gamma\| < 1$. Тогда $T = BU$, где $B_{12} = 0$, а $U$ — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор.*

**Доказательство** проводится с помощью канонического представления $\mathfrak{J}$-унитарного оператора в базисе $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$ [1, Теорема 2.5.10].

**Теорема 1** *Пусть плюс-оператор $A = T$ удовлетворяет условиям Леммы 1. Тогда множество $\operatorname{Im} \mathcal{F}_A$ выпукло и компактно в слабой операторной топологии (с.о.т.).*

**Доказательство** получается с помощью равенства $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B \circ \mathcal{F}_U$; это равенство справедливо, поскольку $\mathcal{F}_U$ — дробно-линейное отображение $\mathcal{K}$ [2, Предложение 4.20].

**Лемма 2** *Строгий плюс-оператор $A$ удовлетворяет условиям Леммы 1 в точности если $D = A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0$.*

**Доказательство**, опирающееся на равномерную отрицательность $\mathrm{Ker}(A_{11} + A_{12})$, получается с помощью геометрических рассуждений.

Из Леммы 1, Теоремы 1 и Леммы 2 вытекает

**Теорема 2** *Пусть $A$ — строгий плюс-оператор, $D \geq 0$. Тогда множество $\mathrm{Im}\,\mathcal{F}_A$ выпукло и компактно в с.о.т.*

**Литература.** 1. Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Москва. Наука. 1986. 2. V. Khatskevich, M. Ostrovskii, V. Shulman. Math. Nachrichten. 279 (2006). 875–890.

## Сравнение уточнений некоторых интегральных неравенств

*С.В. Синегубов*

Известно, что неравенство Коши–Буняковского является одним из самых знаменитых неравенств Анализа [1-4].

Рассмотрим полученные в работах [5-13] уточнения интегрального неравенства Коши–Буняковского следующего вида:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b (\Phi_1(f,g))\,dx \cdot \int_a^b (\Phi_2(f,g))\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\,dx \qquad (1)$$

которые должны выполняться для произвольных функций $f(x), g(x)$ при выборе некоторых неотрицательных функционалов $\Phi_1, \Phi_2$.

**Определение 1.** Введем отношение частичной упорядоченности на множестве уточнений вида (1): будем записывать $M \prec N$, если справедливы неравенства

$$\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 \leq \int_a^b [M(f,g)]^2\,dx \cdot \int_a^b [M^*(f,g)]^2\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b [N(f,g)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b [N^*(f,g)]^2\,dx \leq \int\limits_a^b f^2dx \int\limits_a^b g^2dx,$$

где $M, N$ — абстрактные средние, а $M^*, N^*$ — сопряженные к ним.

Следует отметить, что выполнение соотношения упорядоченности $M \prec N$ в наших терминах означает, что усиление, построенное по среднему $M$ лучше приближает левую, а усиление, построенное по среднему $N$ — правую части неравенства Коши-Буняковского.

**Теорема 1.** Справедливы отношения

$$M_1 \prec M_\alpha \prec M_\beta, 1 \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty,$$
$$M_1 \prec M_\beta \prec M_\alpha, -\infty \leq \alpha \leq \beta \leq 1.$$

Аналогично решен вопрос и для средних Радо.

Из теоремы 1 следует, что остаются содержательными сравнения усилений со степенными средними, один из порядков которых больше, а другой меньше единицы.

В результате все доказанные отношения или их опровержения можно собрать на специальной диаграмме. Отметим среди них еще такие цепочки:

$$R_1 = M_1 \prec M_{\frac{3\ln 2}{2\ln\frac{5}{2}}} \prec R_{\frac{3}{2}} \prec M_{\frac{7}{6}} \prec M_{\frac{2\ln 2}{\ln 3}} \prec R_2 \prec M_{\frac{4}{3}} \ldots,$$
$$R_1 = M_1 \prec R_{\frac{1}{2}} \prec M_{\frac{5}{6}} \prec M_{\ln 2} \prec R_0 \prec M_{\frac{2}{3}} \prec M_{\frac{1}{2}} =$$
$$= R_{-\frac{1}{2}} \prec R_{-1} \prec \mu(M_1, M_0) \prec R_{-2} = M_0 \prec R_{-5} \ldots$$

Некоторые из доказанных результатов по упорядоченности приводят к интересным свойствам самих средних. Например, справедлива

**Теорема 2.** При $0 \leq \alpha \leq \beta$ и неотрицательных числах $x_1, x_2, y_1, y_2$ справедливо неравенство

$$(M_\alpha(x_1,y_1)\,M_\beta(x_2,y_2) - M_\alpha(x_2,y_2)\,M_\beta(x_1,y_1)) \cdot$$

$$(x_1y_1M_\alpha(x_2,y_2)\,M_\beta(x_2,y_2) - x_2y_2M_\alpha(x_1,y_1)\,M_\beta(x_1,y_1)) \geq 0.$$

Разумеется, любое уточнение неравенств Коши–Буняковского в дискретном или интегральном случаях ведет к уточнению соответствующих неравенств Минковского.

Полученные неравенства могут быть также использованы для уточнения оценок: специальных функций, норм интегральных операторов, решений некоторых дифференциальных уравнений.

**Литература.** 1. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е, Полиа Г. Неравенства.—М.: ИЛ, 1948.—456 с. 2. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Classical and new inequalities in analysis.—Kluwer, 1993.—740 p. 3. Dragomir S. S. A Survey on Cauchy–Buniakowsky–Schwartz Type Discrete Inequalities.—RGMIA monographs, 2003.—214 p. 4. Steele J. M. The Cauchy-Schwarz Master Class:

An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.—Cambridge University Press, 2004.—306 p. 5. Sitnik S.M. Refinements of the Bunyakovskii - Schwartz inequalities with applications to special functions estimates //Conference in Mathematical Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's 60 th Birthday. Linkoping University, Sweden. June 10-15. - 1996. - P. 97. 6. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши-Буняковского // Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. "Физико-математические науки". - 2000. - №9. - С.37-45. 7. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского // Вестник Самарской государственной экономической академии. - 2002. - № 1(8). - С. 302-313. 8. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения //Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика", 2005, №1 (1). - С. 3-42. 9. Ситник С. М. Обобщения неравенства Коши–Буняковского в пространствах с индефинитной метрикой // Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции. Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 19, Казань, 2003. - С. 202-203. 10. Ситник С.М. Уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского и их приложения к дифференциальным уравнениям/ Сб. тезисов Межд конф., посвящ. И.Г.Петровскому. М., 2004. - С. 210. 11. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши-Буняковского и их приложения / Тез. межд. конф, посв. 200 - летию В.Я.Буняковского, Киев, 2004. - С. 119-120. 12. Ситник С. М. О некоторых обобщениях неравенства Коши - Буняковского // Анализ и особенности: тезисы докладов международной конференции, посвящённая 70-летию В.И. Арнольда. М.: МИАН, 2007. - С. 92-94. 13. Ситник С. М. Уточнения и обобщения классических неравенств // В кн.: Исследования по математическому анализу. Сер. Мат. форум / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—Т. 3.—С.221–266.

## Исследование корректности дифференциального оператора первого порядка

*Ю.Н. Синтяев*
(Воронеж, ВГУ; sintjuri@yandex.ru )

В работе [1] получены условия существования и оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка с ограниченными операторными коэффициентами. Здесь же получены соответствующие условия для неограниченных операторов.

Пусть $X$ - комплексное гильбертово пространство и $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $X$. Символом $L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$ обозначим банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых по Бохнеру и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty]$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций, определенных на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве $X$ и с нормой $\|x\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p dt)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$, $\|x\|_\infty = vrai\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$. Через

$C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в $X$ с нормой. Таким образом, $C_b \subset L_\infty$. Символ $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ используется для обозначения одного из введенных в рассмотрение пространств.

Пусть $U$ - сильно непрерывное семейство эволюционных операторов $U : \triangle = \{(t,s) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : t \geq s\} \to EndX$. По этому семейству строится линейный оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ следующим образом: функция $x \in \mathcal{F}$ относится к области определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для почти всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ верны равенства $x(t) = \mathcal{U}(t,s)x(s) - \int\limits_s^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad s \leq t,\ s,t \in \mathbb{R}$. Эти равенства следует понимать на представителях класса. Функция $x$ почти всюду совпадает с непрерывной функцией и функция $f$ единственна. Далее полагается $\mathcal{L}x = f$ (см [2])

Для каждого линейного оператора $B : D(B) \subset X \to X$ рассмотрим величину $\gamma(B) = \inf\limits_{x \in D(B)\setminus KerB} \frac{\|Bx\|}{d(x,KerB)}$, где $d(x, KerB) = \inf\limits_{x_0 \in KerB} \|x - x_0\|$.

**Определение 1** *Линейный замкнутый оператор $B : D(B) \subset X \to X$ называется корректным(или равномерно инъективным), если $KerA = \{0\}$ и $\gamma(B) > 0$.*

**Теорема 1** *Пусть оператор $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} + A(t) : W_2^1(\mathbb{R}, X) \subset L_2 \to L_2$ корректен,т.е. $\gamma(\mathcal{L}_2) > 0$. Тогда он корректен в пространстве $L_\infty$ и имеет место оценка $\|x\|_\infty \leq 4\frac{1}{\gamma(\mathcal{L}_2)}(1 + \|A\|_\infty \frac{1}{\gamma(\mathcal{L}_2)})\|\mathcal{L}x\|_\infty$ или, что эквивалентно $4\frac{1}{\gamma(\mathcal{L}_2)}(1 + \|A\|_\infty \frac{1}{\gamma(\mathcal{L}_2)}) \leq \frac{1}{\gamma(\mathcal{L}_\infty)}$.*

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39. – С.413-415. 2. Баскаков А.Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1996. Т.30. №3. – С.1-11.

## Гармонический анализ почти периодических векторов

*К.А. Синтяева*
(Воронеж, ВГУ; ZenzinaKs@yandex.ru )

Рассматривается $L_1(\mathbb{R})$-модуль $(X, T)$ [1], где $T : \mathbb{R} \to EndX$ - ограниченное представление. Без ограничения общности можно считать, что $T$ - изометрическое представление, т.е. $\|T(s)\| = 1\ \forall s \in \mathbb{R}$. Рассматривается двусторонняя последовательность вещественных чисел $(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{Z}$ со свойствами: 1). $\lambda_k = -\lambda_{-k}, k \geq 1, \lambda_0 = 0$; 2). $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

Пусть $L = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим $N_L(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_k \leq \lambda} 1$. Рассмотрим подпространство почти периодических векторов из $X$, которое дальше будем обозначать $X_{AP}$. Ряд Фурье вектора $x \in X_{AP}$ имеет вид $x \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k$, где $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Теорема 1.** Пусть $b \to \infty$, $a$ остается меньше $b$, причем так, что отношение $\frac{a}{b}$ остается меньше фиксированного числа $\theta < 1$. Тогда для каждого $x \in X_c$

$$\lim_{b\to\infty \frac{a}{b}<\theta<1} \psi_{a,b} * x = x$$

Для исследования сходимости ряда Фурье вектора $x$ введем в рассмотрение следующие числовые характеристики. Первой характеристикой является $\omega(\delta, x) = \sup\limits_{|t|\leq\delta} \|T(t)x - x\|$, которая называется модулем непрерывности вектора $x$. Второй характеристикой является наилучшее приближение $E(\lambda, x) = \inf\limits_{y\in X([-\lambda,\lambda])} \|x - y\|$.

Будем говорить, что вектор $x \in X_c$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$(Гёлдера), если для него верно неравенство

$$\|T(h)x - x\| \leq C|h|^{\alpha}, h \in \mathbb{R},$$

где $C$ от $h$ не зависит.

**Теорема 2.** Пусть $0 < \lambda < \mu$. Тогда для любого $x \in X_{AP}$, выполняется неравенство.

$$\|x - \sum_{|\lambda_k|<\lambda} x_k\| \leq E(\lambda, x)\{1 + \frac{4}{\pi} + 2[N_l(\mu) - N_l(\lambda)] + \frac{2}{\pi} ln\frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda}\}.$$

**Теорема 3.** Ряд Фурье вектора $x \in X_{AP}$ сходится, если существует числовая последовательность $\{\mu_n\}$, $n \geq 1$, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned}
&\mu_n > \lambda_n, n > n_0;\\
&\lim_{n\to\infty} E(\lambda_n, x)[N_L(\mu_n) - N_L(\lambda_n)] = 0;\\
&\lim_{n\to\infty} E(\lambda_n, x) ln\tfrac{\mu_n+\lambda_n}{\mu_n-\lambda_n} = 0.
\end{aligned}$$

**Теорема 4.** Ряд Фурье вектора $x \in X_{AP}$ сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} E(\lambda_n, x) ln\frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0.$$

**Следствие 1.** Ряд Фурье вектора $x \in X_{AP}$ сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \omega(\frac{1}{\lambda_n}, x) ln\frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0.$$

**Следствие 2.** Ряд Фурье вектора $x \in X_{AP}$ сходится, если $x$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha \leq 1$, и если

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-\alpha} ln\frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0.$$

**Следствие 3.** Если $x \in AP(\mathbb{R}) = C_b(\mathbb{R})_{AP}$ - непрерывная почти периодическая функцмя, удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$ и если

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-\alpha} ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

то

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{i\lambda_n t}.$$

**Следствие 4.** Если $x \in S_p(\mathbb{R})_{AP}$, где $S_p(\mathbb{R})$ - пространство Степанова [2] удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$ и если

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-\alpha} ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

то

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{i\lambda_n t}.$$

**Теорема 5.** Пусть $x \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k$, $(\lambda_{k+1} < \lambda_k,\ \lambda_k \to 0$ при $k \to \infty,\ \lambda_{-k} = \lambda_k)$ и $x \in X_{AP}$. Если выполняются условие $|\int\limits_0^\tau T(t)xdt| < C|\tau|^{1-\alpha}(0 < \alpha \leq 1)$, и условие

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{\alpha} ln \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} = 0,$$

то

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} x_k.$$

**Литература.** 1. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов /А. Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления.- Москва.-2004.- Т. 9.- С. 3-151. 2. Костин А. В. К теории фукнциональных пространств Степанова / А. В. Костин , В. А. Костин .- Воронеж,2007.-259 С.

## Неравенства для функций гипергеометрического типа

*С.М. Ситник*

Специальные функции играют фундаментальную роль во многих разделах математики. Поэтому необходимо согласиться с другим названием для них, которое предложил Пол Туран -**полезные функции!** Среди самих специальных функций значительную роль играют функции гипергеометрического типа и их различные обобщения.

В докладе представлен небольшой обзор результатов, в получении которых участвовал автор, по неравенствам для некоторых гипергеометрических функций. Приводятся неравенства для гипергеометрической функции ${}_1F_1$ [1] и ${}_2F_1$ [1–8], функций Бесселя [9–11], гипергеометрической функции Райта [12], а также различных типов эллиптических интегралов Лежандра [13–21] и тета–функций Якоби [22–26].

**Литература.** 1. Karp D., Sitnik S.M. Log–convexity and log–concavity of hypergeometric-like functions// Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. (in print). 2. Karp D., Sitnik S.M. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function// Journal of Approximation Theory. 2009. V. 161. P. 337—352. 3. Karp D., Sitnik S.M. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function.// Arxiv:math.CA/0703084. 4. Ситник С.М. Неравенства для остаточного члена ряда Тэйлора экспоненциальной функции.// Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. 1993, Владивосток, 30 с. 5. Karp D., Sitnik S.M. Two-sided inequalities for generalized hypergeometric function.// Доклады международной исследовательской группы по теории неравенств и их приложениям (RGMIA, Австралия, университет Виктории): RGMIA Research Report Collection, 10(2), Article 7, 2007. 14 P. 6. Карп Д.Б., Ситник С.М. Представления и неравенства для обобщенной гипергеометрической функции отрицательного аргумента.// XXXI Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В.Золотова. Тезисы докладов. Владивосток, 2006, стр. 12-13. 7. Karp D., Sitnik S.M. Log-convexity and Log-concavity of hypergeomertic-like functions.// Тезисы докладов международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(АМАДЕ). 14-19 сентября 2009 года, Минск, Беларусь. P. 79. 8. Карп Д.Б., Ситник С.М. Неравенства для некоторых гипергеометрических функций. Труды участников международной школы -семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Абрау-Дюрсо, Ростов-на-Дону, Южный Федеральный университет, 2008. С. 111-112. 9. Ситник С.М. Неравенства для функций Бесселя.// Доклады РАН. 1995, т. 340, N 1, С. 29–32. 10. Ситник С.М. Леонард Эйлер и теория специальных функций.// Материалы Международной научной конференции "Леонард Эйлер и современная наука". Санкт-Петербург, 2007. С. 192–200. 11. Синегубов С.В., Ситник С.М. Теория специальных функций в трудах Леонарда Эйлера.// Материалы региональной научно-практической конференции "Информационные технологии в науке, технике и образовании". Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, 2008, С. 40–46. 12. Ситник С.М. Об обобщении биноминальной теоремы, возникающем в теории дифференциальных уравнений.// Вестник Воронежского института МВД России. Воронеж, 2004, № 1 (16), С. 143–147. 13. D. Karp, A. Savenkova, S.M. Sitnik. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions.// Journal of Computational and Applied Mathematics. Volume 207, 2007, P. 331–337. 14. D. Karp, S.M. Sitnik. Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity.// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007, № 205, P. 186 – 206. 15. D. Karp, A. Savenkova, S.M. Sitnik. Series expansions and asymptotics for incomplete elliptic integrals via partial fraction decompositions.// Proceedings of the fifth annual conference of the Society for special functions and their applications. Lucknow (India), 2004, P. 4–30. 16. Ситник С.М. Неравенства для полных эллиптических интегралов Лежандра.// Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. 1994, Владивосток, 17 с. 17. D. Karp, S.M. Sitnik. Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity.// arXiv:math.CA/0604026. 2006, 20 P. 18. D.Karp, A.Savenkova,S.M. Sitnik. Series expansions and asymptotics for incomplete elliptic integrals.// arxiv. math. CA/0410009/2004. 2004, 11 P. 19. Карп Д.Б., Костюченко Е.В., Формулы для разложения некоторых дробей на простейшие и их применения к специальным функциям.// Вестник Дальневосточной государственной академии экономики и управления. Владивосток, 2004, № 4 (32), с. 82-93. 20. Ситник С.М. Теоремы Радо и среднее логарифмическое. //Препринт института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН.—Владивосток, 1992.—16 с. 21. Ситник С.М. Неравенства для среднего логарифмического и итерационных средних //Препринт института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН.—Владивосток, 1992.—14 с. 22. Минин Л.А., Ситник С.М. О неравенствах для тета–функций Якоби // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". Спец. выпуск, посвященный 85-летию со дня рождения И.А. Киприянова. Воронеж. 2009. С. 3-73. 23. Минин Л.А., Ситник С.М. Неравенства для третьей тета–функции Якоби. Материалы Всероссийской заочной научно–практической конференции "Современная математика и проблемы математического образования". Орёл, Орловский государственный университет, 2009, С. 61–68. 24. Минин Л.А., Ситник С.М. Неравенства для третьей тета–функции Якоби.// Тезисы докладов международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(АМАДЕ). 14-19 сентября 2009 года, Минск, Беларусь. С. 111. 25. Дикарева Е.В., Минин Л.А., Ситник С.М. Об оценках минимумов тета–функций Якоби. Материалы Российско–Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы Анализа и информатики". Нальчик, Эльбрус. КБНЦ РАН, 2009, С. 82–84. 26. Минин Л.А., Ситник С.М. О неравенствах для тета-функций Якоби. Труды участников международной школы -семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Абрау-Дюрсо, Ростов-на-Дону, Южный Федеральный университет, 2008. С. 124–126. 27. Ситник С.М. Неравенства для специальных функций. Материалы Российско–Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы Анализа и информатики ". Нальчик, Эльбрус. КБНЦ РАН, 2009, С. 202–204. 28. Ситник С.М. О неравенствах для специальных функций. В сб.: Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XIX". Воронеж, ВГУ, 2008, С. 198–199

# О применимости проекционного метода для решения некоторых парных уравнений дискретной свертки с несуммируемыми ядрами

*Г.Г. Смолкин*

(Ростов-на-Дону, ЮФУ; smolkin4@rambler.ru )

Пусть $1 < p < +\infty$, $\mathbb{T}$ — единичная окружность; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$, $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^+$; $L_p(\mathbb{T})$ и $L_p(\mathbb{Z})$ — стандартные банаховы пространства; $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в $L_p(\mathbb{Z})$; $I$ — единичный оператор, $P^+$, $P^-$, $P^n$ — операторы умножения на характеристическую функцию множеств $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, $[-n, n]$ соответственно, действующие в $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))$; $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{Z})$ — преобразование Фурье. Следуя [1], с. 48, через $M^p$ обозначим множество всех таких функций $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$, для которых корректно определен и ограничен в $L_p(\mathbb{Z})$ оператор одномерной дискретной свертки $C_{\mathcal{F}(\varphi)}$ с ядром $\mathcal{F}(\varphi)$. Пусть $H_\infty(\subset L_\infty(\mathbb{T}))$ — пространство Харди функций, имеющих аналитическое продолжение на внутренность $\mathbb{T}$; $H^p_\infty = H_\infty \cap M^p$, $C^p$ — замыкание в $M^p$ множества тригонометрических полиномов на $\mathbb{T}$; $D^p_+ = C^p + H^p_\infty$ — $L_p$-аналог алгебры Дугласа $D^2_+ = C + H_\infty$ [2], $D^p_- = \bar{D}^p$; $\mathrm{QC}^p = D^p_+ \cap D^p_-$ — аналог алгебры Сарасона $\mathrm{QC}^2 = \mathrm{QC}$ квазинепрерывных функций [2].

Рассмотрим парный оператор одномерной дискретной свертки

$$L = C_{\mathcal{F}(\varphi_+)} P^+ + C_{\mathcal{F}(\varphi_-)} P^-, \quad \varphi_\pm \in D^p_\pm. \tag{1}$$

Отметим, что множество ядер $\mathcal{F}(D^p_\pm)$ существенно шире $L_1(\mathbb{Z})$.В [3] получен критерий фредгольмовости и формула индекса для операторов вида (1).

Говорят, что к обратимому оператору $A \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))$ применим проекционный метод по системе проекторов $P^n$, и при этом пишут $A \in \Pi\{P^n\}$, если начиная с некоторого $n$ усеченное уравнение $P^n A P^n \varphi = P^n \psi$, где $\varphi, \psi \in L_p(\mathbb{Z})$, имеет единственное решение $\varphi_n$ и при $n \to +\infty$ функции $\varphi_n$ стремятся к решению уравнения $A\varphi = \psi$. Критерий применимости проекционного метода для парных операторов дискретной свертки с суммируемыми ядрами получен в [4], с.194, а для операторов Винера-Хопфа $P^+ C_{\mathcal{F}(\varphi_+)} P^+ (\in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}^+))$, где $\varphi_+ \in D^p_+$, — в [1], гл.7. В настоящей работе доказана

**Теорема 1.** *Пусть оператор $L$ обратим, функции $\varphi_+$, $\bar{\varphi}_-$ обратимы в $D^p_+$ и их индексы равны нулю. Тогда $L \in \Pi\{P^n\}$.*

В случае $p$-квазинепрерывных символов теорему 1 можно уточнить.

**Теорема 2.** *Пусть функции $\varphi_\pm$ принадлежат алгебре $\mathrm{QC}^p$, обратимы в ней и их индексы равны нулю. Тогда $L \in \Pi\{P^n\}$.*

**Литература.** 1. Boettcher A., Silbermann B. Analisys of Toeplitz operators. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 2006. – 665 p. 2. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир. 1984. – 470 с. 3. Смолкин Г.Г. Замечание о разрешимости некоторых парных операторов дискретной свертки с разрывными символами в $L_p$-пространстве // Известия вузов. Сев.-Кав. регион. Ест. науки. – 2009. №3. – С.27-29. 4. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука. 1971. – 352 с.

# Взаимодействие пары осцилляторов ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью между ними

*Е.А. Солдатова*
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; lenochka_s24@mail.ru )

Рассматривается пара слабо связанных осцилляторов типа ФитцХью–Нагумо [1] с запаздыванием $h$ в цепи связи между ними:

$$\begin{array}{rcl} v_1' & = & v_1 + v_* - (v_1 + v_*)^3/3 - (w_1 + w_*) + I_{\text{Кр.}} + \varepsilon D(v_2(t-h) - v_1)\,, \\ w_1' & = & p(v_1 + v_* + a_{\text{Кр.}} + \varepsilon - b(w_1 + w_*))\,, \\ v_2' & = & v_2 + v_* - (v_2 + v_*)^3/3 - (w_2 + w_*) + I_{\text{Кр.}} + \varepsilon D(v_1(t-h) - v_2)\,, \\ w_2' & = & p(v_2 + v_* + a_{\text{Кр.}} + \varepsilon - b(w_2 + w_*))\,. \end{array} \qquad (1)$$

Здесь переменные $v_1$, $v_2$ – нормированные мембранные потенциалы нервной клетки. Точка $(v_*, w_*, v_*, w_*)^T$, где $v_* = -\sqrt{1-pb}$, $w_* = (a - \sqrt{1-pb})/b$, является состоянием равновесия системы (1). Выберем параметры системы близкими к критическим значениям (см. [2]): $I_{\text{Кр.}} = w_* - v_* + v_*^3/3$, $a_{\text{Кр.}} = bI_{\text{Кр.}} + \sqrt{1-pb}(3 - pb^2 - 2b)/3$. Параметр $D$ характеризует связь между нервными клетками, а $0 < \varepsilon << 1$.

С помощью стандартной замены [3] система (1) сводится к следующей нормальной форме:

$$\begin{array}{rcl} \xi_1' & = & (1 - d\cos\delta^* - \xi_1^2)\xi_1 + d\xi_2\cos(\alpha + \delta^*)\,, \\ \xi_2' & = & (1 - d\cos\delta^* - \xi_2^2)\xi_2 + d\xi_1\cos(-\alpha + \delta^*)\,, \\ \alpha' & = & -b_0(\xi_2^2 - \xi_1^2) + d\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\sin(-\alpha + \delta^*) - \dfrac{\xi_2}{\xi_1}\sin(\alpha + \delta^*)\right)\,, \end{array} \qquad (2)$$

где $\xi_1$, $\xi_2$ – нормированные амплитуды колебаний осцилляторов, а $\alpha$ – разность фаз между ними. Величины $d$, $\delta^*$ определяются матрицей связи осцилляторов, а $b_0$ – нелинейностью задачи (1).

Бифуркационным параметром системы (2) удобно выбрать величину $d$, пропорциональную параметру $D$ и характеризующую силу связи осцилляторов. При фиксированных значениях параметров $p$, $b$, $h$ нетрудно найти величины $b_0$ и $\delta$ и затем, изменяя $d$ проследить за фазовыми перестройками системы. Как оказалось, система (2) в этом случае может иметь одновременно пару устойчивых состояний равновесия, а также 2 симметричных устойчивых цикла, которым в исходной системе (1) соответствуют синхронный и асинхронный циклы, а также 2 симметричных тора.

Интерес представляет изучение изменения сценария фазовых перестроек при уменьшении $a$. Как оказалось, в этом случае возникают режимы, представляющие собой случайно распределенные по времени пакеты импульсов.

**Литература.** 1. FitzHugh R. Threshold and plateaus in the Hodgkin-Huxley nerve equations// The Journal of Generical Physiology. – 1960. – P.867-896. 2. Солдатова Е.А. Эффект слабой запаздывающей связи для пары осцилляторов типа ФитцХью-Нагумо// Современные проблемы математики и информатики: Яросл. гос. ун-т. – 2008. – С. 56 - 65. 3. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие// Яросл. гос. ун-т. – 2006. – 92 с.

**Проекционно-разностный метод приближенного решения слабо разрешимых квазилинейных параболических уравнений**

*Д.С. Сотников*
(Воронеж, ВГУ )

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство $V'$ – двойственное к $V$, а пространство $H$ отождествляется со своим двойственным $H'$. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$ на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных, симметричных форм $a(t,u,v)$. Предполагается, что для всех $u, v \in V$ функции $t \to a(t,u,v)$ измеримы на $[0,T]$ и выполнены оценки:

$$|a(t,u,v)| \leq M_1 \|u\|_V \|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(t,u,u) \geq \delta \|u\|_V^2,$$

где $\delta > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = \big(A(t)u,\, v\big)$.Кроме того, для формы $a(t,u,v)$ для всех $t, s \in [0,T]$ и $u, v \in V$ выполняется условие Липшица

$$|a(t,u,v) - a(s,u,v)| \leq M_2 |t-s| \|u\|_V \|v\|_V.$$

Предположим также, что на $[0,T] \times H$ задана функция $f(t,u)$, со значениями в $V'$ такая, что $f(t,u) \in L_2(0,T;V')$ при каждом фиксированном $u \in H$ и для $u_1, u_2 \in H$

$$\|(f(t,u_1) - f(t,u_2)\|_{V'} \leq M_3 \|u_1 - u_2\|_H.$$

В пространстве $V'$ рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u^0 \in H.$$

При дополнительном предположении компактности вложения $V \subset H$ задача Коши при сделанных выше предположениях имеет единственное решение u(t) такое, что $u(t) \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ и $u'(t) \in L_2(0,T;V')$. Такое решение будем называть слабым.

Опишем приближенную задачу. Пусть $V_h$ - конечномерное подпространство $V$. Пусть $N$ - натуральное число, $N\tau = T, t_k = k\tau (k = \overline{1,N})$. Набор элементов $(u_1^h, u_2^h, ..., u_N^h)$, где $u_k^h \in V_h$, назовём приближённым решением точной задачи, найденным проекционно-разностным методом, если для всех $v_h \in V_h$

$$\left(\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}, v_h\right) + a(t_k, u_k^h, v_h) = \left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t, u_{k-1}^h)\, dt, v_h\right) \qquad (k = \overline{1,N})$$

В условиях существования слабого решения точной задачи установлена среднеквадратичная оценка погрешности $\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau$. Для предельно плотной в $V$ при $h/to0$ последовательности подпространств $\{V_h\}$ получена сходимость этой погрешности к нулю при $h/to0$ и $\tau/to0$. Для подпространств $V_h$ типа конечных элементов найдена скорость сходимости $\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau$ к нулю, точная по порядку аппроксимации как по времени так и по пространству.

# Уравнение соболевского типа с памятью

*О.А. Стахеева*
(Челябинск, ЧелГУ; alda_87@mail.ru)

При моделировании некоторых процессов в естественных и технических науках встречаются так называемые системы с памятью, поведение которых не определяется целиком состоянием в настоящий момент, а зависит от всей «истории» системы (см. по этому поводу [1]). Такие уравнения возникают, например, при описании термомеханического поведения полимеров [2], вязкоупругих жидкостей при низких температурах.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для уравнения соболевского типа с памятью

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + (Ju)(t),\ t \in \bar{\mathbb{R}}_+. \tag{2}$$

Оператор $(Ju)(t)$ имеет вид

$$(Ju)(t) = \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s)ds = \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t+s)u_-(-s)ds,$$

где $\{\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})\}_{t\geq 0}$ — семейство оператор-функций, $u_- : \mathbb{R}_- \to \mathfrak{U}$ — функция, описывающая «историю» системы. Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

**Теорема 1** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален* [3], $\sup\{Re\mu : \mu \in \sigma^L(M)\} < 0$, $u_- \in L^1(\mathbb{R}_-; \mathfrak{U}^1)$, $\mathrm{im}\mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{F}^1$, $u_0 \in \mathrm{dom} M_1$. *Если*

$$\exists N > 0 \quad \exists \alpha \in (0,1] \quad \forall t, s \geq 0 \ \ \|Q(\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s))\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \leqslant N|t-s|^\alpha,$$

*то при некотором $T > 0$ существует единственное решение $u \in C^1((0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];\mathfrak{U})$ задачи* (1), (2).

**Литература.** 1. Grasselli M., Pata V. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory. In the book: Progress in nonlinear differential equations and their applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002. Vol. 50. P. 155–178. 2. Coleman B.D., Gurtin M.E., Angew Z. Equipresence and costitutive equations for rigid heat conductors. Math.Phys., 1967. Vol.18. P. 199–208. 3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

# О асимптотическом решении задачи оптимального управления

*О.В. Тарасенко*

(Украина, Нежин, НГУ; sanya2167@rambler.ru)

Рассматривается управляемый процесс, описываемый линейной неавтономной системой дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

который переводит ее из положения

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon)$$

в положение

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon)$$

за фиксированное время $T$, доставляя минимум функционалу:

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \tag{2}$$

где $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратные матрицы $n$-го порядка, $C(t,\varepsilon)$ — $(n \times m)$-матрица, $x(t,\varepsilon)$ — $n$-мерный вектор состояния, $u(t,\varepsilon)$ — $m$-мерный вектор управления, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малый параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1. матрицы $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ допускают на отрезке $[0;T]$ равномерные асимптотические разложения по степеням малого параметра
$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t), \qquad C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k C_k(t), \qquad D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k D_k(t);$$
2. коэффициенты $A_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $k = 0,1,2,...$, этих разложений неограниченно дифференцируемы на $[0;T]$;
3. матрица $D(t,\varepsilon)$ симметричная, положительно определенная на $[0;T]$ и $detD_0(t) \neq 0$, $\forall t \in [0;T]$.

Рассматривается случай, когда $detB(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0;T]$ и предельный пучок матриц $A_0(t) - \lambda B(t)$ имеет постоянную кронекерову структуру на заданном отрезке.

Оптимальное управление выбирается из области допустимых значений $u(t,\varepsilon)$, которая совпадает со всем заданным $m$–мерным пространством.

Используя результаты асимптотического анализа общего решения вырожденных сингулярно возмущенных систем, проведенного в [1], доказано, что задача (1)–(2) имеет единственное асимптотическое решение и построена его асимптотика.

**Литература.** 1. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. — 294 с.

# О некоторых уточнениях неравенства Коши–Буняковского

*С.А. Телкова*

В работах [1-9] рассматриваются уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского следующего вида:

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \le \int\limits_a^b \left(\Phi_1(f,g)\right)dx \cdot \int\limits_a^b \left(\Phi_2(f,g)\right)dx \le$$

$$\le \int\limits_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int\limits_a^b (g(x))^2\,dx \tag{1}$$

которые должны выполняться для произвольных функций $f(x), g(x)$ при выборе некоторых неотрицательных функционалов $\Phi_1, \Phi_2$.

Будем считать выполненными следующие простейшие предположения: все встречающиеся функции непрерывны, а интегралы существуют в смысле Римана.

Назовем функционалы, для которых выполнено предыдущее неравенство, взаимно дополнительными уточняющими функционалами.

Для дифференцируемых функций получен другой ряд уточнений.

**Теорема 1.** Для подходящих функций справедливо уточнение интегрального неравенства вида (1) при следующем виде функционалов:

$$\Phi_1(f,g) = \exp\left(2\int\limits_a^x M\left(Lf(y), Lg(y)\right)dy\right), \Phi_2(f,g) = \frac{f^2g^2}{\Phi_1(f,g)},$$

где $Lh(t)$ - логарифмическая производная $Lh = \frac{h'}{h}$, $M$ - произвольное абстрактное среднее (логарифмические производные $Lf$ , $Lg$ предполагаются неотрицательными).

**Следствие.** При сделанных предположениях справедливо следующее уточнение неравенства (1):

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \le \int\limits_a^b \exp\left[2\int\limits_a^x Max\left(Lf, Lg\right)\right]dx\cdot$$

$$\cdot\int\limits_a^b f^2g^2\exp\left[-2\int\limits_a^x Max\left(Lf, Lg\right)\right]dx \le \int\limits_a^b f^2dx\int\limits_a^b g^2dx.$$

Во всех приведенных выше неравенствах получены условия, при которых в них достигаются равенства.

**Определение 1.** Введем отношение частичной упорядоченности на множестве уточнений вида (1): будем записывать $M \prec N$, если справедливы неравенства

$$\left(\int\limits_a^b fgdx\right)^2 \leq \int\limits_a^b [M(f,g)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b [M^*(f,g)]^2\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b [N(f,g)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b [N^*(f,g)]^2\,dx \leq \int\limits_a^b f^2dx \int\limits_a^b g^2dx,$$

где $M, N$ — абстрактные средние, а $M^*, N^*$ — сопряженные к ним.

Аналогично можно ввести частичное упорядочение в более общем случае на парах взаимно дополнительных уточняющих функционалов $(\Phi_1, \Phi_2)$ из (1).

Ясно, что одним из первых возникает вопрос: упорядочены ли между собой усиления из шкал средних степенных $M_\alpha$ или Радо $R_\beta$? Ответы дает

**Теорема 2.** Пусть $0 < \alpha < \beta < +\infty$ . Тогда выполнены соотношения

$$M_\alpha \prec M_\beta,\ R_\alpha \prec R_\beta.$$

Эта теорема полностью решает вопрос для функционалов типа средних Радо или степенных. Распишем содержащиеся в ней оценки более подробно: при $\alpha < \beta$

$$\left(\int\limits_a^b fgdx\right)^2 \leq \int\limits_a^b [M_\alpha(f,g)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b [M_{-\alpha}(f,g)]^2\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b [M_\beta(f,g)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b [M_{-\beta}(f,g)]^2\,dx \leq \int\limits_a^b f^2dx \int\limits_a^b g^2dx\ ,$$

$$\left(\int\limits_a^b fgdx\right)^2 \leq \int\limits_a^b [R_\alpha(f,g)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b [R_\alpha^*(f,g)]^2\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b [R_\beta(f,g)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b \left[R_\beta^*(f,g)\right]^2 dx \leq \int\limits_a^b f^2dx \int\limits_a^b g^2dx\ .$$

В частности, из этого следует, что нами получено бесконечное число неравенств, которые улучшают неравенство Милна с ( $M_2, M_{-2}$ ) как с точки зрения приближения к скалярному произведению (при $0 < \alpha < 2$ ), так и к правой части (при $2 < \alpha < +\infty$).

Следует отметить, что выполнение соотношения упорядоченности $M \prec N$ в наших терминах означает, что усиление, построенное по среднему $M$ лучше приближает левую, а усиление, построенное по среднему $N$ — правую части неравенства Коши-Буняковского.

**Литература.** 1. Sitnik S.M. Refinements of the Bunyakovskii - Schwartz inequalities with applications to special functions estimates //Conference in Mathematical Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's 60 th Birthday. Linkoping University, Sweden. June 10-15. - 1996. - P. 97. 2. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши-Буняковского // Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. "Физико-математические науки". - 2000. - №9. - С.37-45. 3. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского // Вестник Самарской государственной экономической академии. - 2002. - № 1(8). - С. 302-313. 4. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения //Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика", 2005, №1 (1). - С. 3-42. 5. Ситник С. М. Обобщения неравенства Коши–Буняковского в пространствах с индефинитной метрикой // Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции. Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 19, Казань, 2003. - С. 202-203. 6. Ситник С.М. Уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского и их приложения к дифференциальным уравнениям/ Сб. тезисов Межд конф., посвящ. И.Г.Петровскому. М., 2004. - С. 210. 7. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши-Буняковского и их приложения / Тез. межд. конф, посв. 200 - летию В.Я.Буняковского, Киев, 2004. - С. 119-120. 8. Ситник С. М. О некоторых обобщениях неравенства Коши - Буняковского // Анализ и особенности: тезисы докладов международной конференции, посвящённая 70-летию В.И. Арнольда. М.: МИАН, 2007. - С. 92-94. 9. Ситник С. М. Уточнения и обобщения классических неравенств // В.кн.: Исследования по математическому анализу. Сер. Мат. форум / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—Т. 3.—С.221–266.

## Вложимость 3-многообразий с краем в замкнутые 3-многообразия

*Д.И. Тонконог*
(Москва, МГУ им. Ломоносова; tauberr@gmail.com)

Будем рассматривать группы гомологий с коэффициентами в произвольном поле. Пусть $M$ — компактное ориентируемое 3-многообразие с краем.

**Теорема 1** *Если $M$ вложено в замкнутое ориентируемое 3-многообразие $Q$, то* $\dim H_1(Q) \geq \dim H_1(M) - \frac{1}{2} \cdot \dim H_1(\partial M)$. *Более того, существует замкнутое ориентируемое 3-многообразие $Q$, содержащее $M$ и такое что* $\dim H_1(Q) = \dim H_1(M) - \frac{1}{2} \cdot \dim H_1(\partial M)$.

**Следствие 1** *Многообразие $M$ вложимо в некоторую гомологическую 3-сферу если и только если* $2\dim H_1(M) = \dim H_1(\partial M)$.

Следующее следствие представляет интерес в связи с тем, что неизвестно, существует ли алгоритм распознавания вложимости 2-полиэдров в $\mathbb{R}^3$ [1].

**Следствие 2** *Следующая задача алгоритмически разрешима: По данному 2-полиэдру определить, вложим ли он в некоторую (не фиксированную заранее) гомологическую 3-сферу.*

Из теоремы 1 получены следствия в другом направлении. *Ориентируемым родом* графа $G$ называется минимальное число $g$ такое, что граф $G$ вложим в сферу с $g$ ручками [2].

**Следствие 3** *Пусть $G$ — граф ориентируемого рода $g$. Если полиэдр $G \times S^1$ вложен в замкнутое ориентируемое 3-многообразие $Q$, то $\dim H_1(Q) \geq 2g$. Более того, существует замкнутое ориентируемое 3-многообразие $Q$, содержащее $G \times S^1$ и такое что $\dim H_1(Q) = 2g$.*

Также изучены «неориентируемые» аналоги приведенных результатов.

**Литература.** 1. *J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner* Hardness of embedding simplicial complexes in $\mathbb{R}^d$, Preprint, arXiv:0807.0336 [cs.CG]. 2. *B. Mohar and C. Thomassen*, Graphs on Surfaces, Johns Hopkins Univ. Press, 2001. 3. *M. Skopenkov*, Embedding products of graphs into Euclidean spaces. Fund. Math. 2003. 179. P. 191-198. 4. *D. Repovš, N. Brodsky, A. Skopenkov*, A classification of 3-thickenings of 2-polyhedra, Topol. Appl. 1999. 94. P. 307—314.

## Существование слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений Павловского-Околкова

*М.В. Турбин*
(Воронеж, ВГУ; mrmike@math.vsu.ru)

Рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$divv = 0 \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ с локально липшицевой границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0, T], 0 < T < \infty$. Данная система уравнений впервые была введена в рассмотрение В.А. Павловским. Отметим, что данная система уравнений подтверждается экспериментальными исследованиями растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы ([1] - [3]). Одновременно этим важно отметить, что данная система уравнений независимым образом была получена как частный случай модели движения жидкости второго порядка (например, [6],[7])

Для системы (1),(2) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным условием

$$v\mid_{t=0} = a(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

и граничным условием

$$v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{4}$$

Задача (1)-(4) впервые была рассмотрена А.П. Осколковым в работах [8], [9]. В работе [10] А.П. Осколковым было замечено, что работы [8], [9] содержат пробелы и что в ограниченной области $\Omega$ ему методом Галёркина-Фаэдо не удалось доказать теоремы существования даже слабых решений для данной начально-краевой задачи. О.А. Ладыженская в своей работе [5] отмечает, что метод введения вспомогательной вязкости использованный А.П. Осколковым для изучения этой начально-краевой задачи в уже упомянутых работах [8], [9], является ошибочным и вопрос о существовании решений данной начально-краевой задачи оставался открытым.

1. Функциональные пространства необходимые для постановки задачи

Следуя [11] введём следующие функциональные пространства:

$$V^0 = H; V^1 = V; V^2 = W_2^2(\Omega)^n \cap V^1.$$

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $V$ оператор

$$A = -\pi\Delta.$$

Оператор $A$ продолжается в пространстве $V^0$ до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения $A$ совпадает с $V^2$. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора $A$ образуют ортонормированный базис в $V^0$. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора $A$. Положим

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\},$$

где $N$ зависит от $v$ и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение $E_\infty$ по норме

$$\|v\|_\alpha = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Из определения пространств $V^\alpha$ следует, что оператор $A : V^\alpha \to V^{\alpha-2}$ — непрерывно обратим.

2. Задача о слабых решениях для задачи (1)-(4)

**Определение.** *Слабым решением начально-краевой задачи* (1)-(4) *называется функция* $v \in W = \{u : u \in L_2(0,T;V^2) \cap C([0,T],V^1), v' \in L_2(0,T,V^1)\}$, *удовлетворяющая для любого* $\varphi \in V^1$ *и почти всех* $t \in (0,T)$

*равенству*

$$\int\limits_\Omega v'\varphi dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla(v') : \nabla\varphi dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla : \nabla\varphi\, dx -$$
$$- \int\limits_\Omega v_i(I - \varkappa\Delta)v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_\Omega f\varphi\, dx. \quad (5)$$

*и начальному условию*

$$v(0) = a. \quad (6)$$

Основным результатом являетя следующая теорема:

**Теорема.** *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи* (1)-(4).

**Литература.** 1. Амфилохиев В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П., Ходорковский Я.С. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений// Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института — 1975. — 96. — С. 3–9. 2. Амфилохиев В.Б., Павловский В.А. Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах// Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института — 1976. — 104. — С. 3–5. 3. Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров// ДАН СССР — 1971. — 200, №4. — С. 809–812. 4. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. том 31, с. 1-147. 5. Ладыженская О.А. О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье-Стокса и их исправлениях// Записки научных семинаров ПОМИ — 2000. — 271. — С.151–155. 6. Noll W., Truesdell C. The nonlinear field theory of mechanics. — "Handbuch für Physics", Vol.III. Springer, Berlin, 1965. — 602 p. 7. Rivlin R.S., Ericksen J.L. Stress-deformation relations for isotropic materials// Journal of Rational Mechanics and Analysis.— 1955.— 4. — pp. 323–425. 8. Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров// Записки научных семинаров ЛОМИ — 1973. — 38. — С. 98–136. 9. Осколков А.П. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы третьего порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости// Записки научных семинаров ЛОМИ — 1972. — 27. — С. 145–160. 10. Осколков А.П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей// Записки научных семинаров ЛОМИ — 1975. — 52. — С. 128–157. 11. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с. 12. Zvyagin V., Vorotnikov D. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics. — De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications, 12. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2008. — 248 p.

## О жизни и научном творчестве П.В. Черпакова

*Н.Н. Удоденко*
(Воронеж, ВГУ)

9 января 1910 года исполнилось 100 лет со дня рождения доктора физико-математический наук, профессора Павла Васильевича Черпакова( 9.01.1910 - 2.06.1980).

Приведем некоторые данные из его биографии.

П.В.Черпаков родился в слободе Замостье Суджанского уезда Курской губернии в крестьянской семье.

Окончив среднюю школу он поступил на физико-техническое отделение педагогического факультета Воронежского университета. В течении четырех лет (1931-1935г.г.) учился в аспирантуре физико-математических факультетов МГУ и ВГУ.

После защиты кандидатской диссертации (1936 г)[1] работал доцентом физико-математического факультета ВГУ; с июля 1941 по октябрь 1945 - доцент кафедры высшей математики Воронежского авиационного института. В 1945 году переведен на кафедру высшей математики Куйбышевского авиационного института, которой заведовал до 1945 года.

В 1949 году защитил докторскую диссертацию [2].

С 1954 года работал на физико-математическом и физическом факультетах ВГУ: деканом факультета (1954-1958 г.г.), заведующим кафедрой математической физики (1954-1980)

Автор более 70 работ по проблемам тепломассопереноса, турбулентности и статистической радиофизики и монографии [3]

**Литература.** 1. Обращение рядов, представляющих решения уравнения теплопроводности, Труды ВГУ, вып.9,1936, вып.10 1938; 2. О предельных соотношениях между интегралами уравнений параболического и эллиптического типа (докторская диссертация) Казань,1949; 3. Теория регулярного теплообмена, М.Энергия, 1975.

## Лев Александрович Гуревич (1910-1993) страницы биографии.

*Н.Н. Удоденко*
(Воронеж)

В работе рассказывается о судьбе одного из математиков, учившегося и работавшего на физико-математическом факультете Воронежского университета в довоенное время.

Л.А.Гуревич родился 24 апреля 1910 года в семье фармацевта. Окончив школу он поступил на математическое отделение педагогического факультета ВГУ.

В 1933 года Лев Александрович поступил в аспирантуру к приехавшему в Воронеж годом раньше доценту М. М. Гринблюму и "проделавшего весьма значительную работу по насаждению в Воронеже культуры современного анализа"[1]. После окончания аспирантуры был оставлен на работе в ВГУ, сначала ассистентом, а после защиты кандидатской диссертации [2] - доцентом кафедры математического анализа, где проработал до октября 1941 года.

В 1942 году был призван в ряды действующей армии, прошел дорогами войны от Астрахани до Эльбы, участвовал в освобождении Праги, был награжден орденом Отечественной войны 2-ой степени, Богдана Хмельницкого 3-ей степени , медалями "За победу над Германией"и "За освобождение Праги". После демобилизации в 1946 году был заведующим кафедрой высшей математики Ивановского текстильного института, где проработал до 1950 года. С 1950 по 1976 годы работал в должности доцента и заведующего кафедрой высшей математики Воронежского СХИ. Научные интересы Л.А.Гуревича связаны с банаховыми алгебрами и проблемами базисов в гильбертовом и банаховом пространствах.

**Литература.** 1. Математическая хроника, УМН, вып.2, 1936, вып.3, 1937. 2. Линейно независимые и биортогональные системы в функциональном гильбертовом пространстве, канд. дис. Воронеж, 1936.

## Инварианты интегрируемых систем с двумя степенями свободы и задача «шар Чаплыгина»

*В.В. Фокичева*
(Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова; arinora.mail.ru)

Две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если их фазовые пространства вместе с соответствующими слоениями Лиувилля послойно гомеоморфны. В случае интегрируемых систем на 4-мерных симплектических многообразиях существует полный инвариант лиувиллевой эквивалентности изоэнергетических 3-поверхностей — *инвариант Фоменко-Цишанга* [1]. Для этого инварианта развита содержательная техника его вычисления [2,3,4].

Новым результатом (который получен совместно с А. Ю. Москвиным) является нахождение инварианта Фоменко-Цишанга для интегрируемой системы «шар Чаплыгина» [5]. Данная система описывает движение динамически несимметричного (тензор инерции не скалярный) уравновешенного (центр масс совпадает с геометрическим центром) шара по абсолютно шероховатой поверхности (скорость точки контакта равна нулю). Эта система, вообще говоря, не гамильтонова, но становится гамильтоновой после замены времени. Это не влияет на слоение Лиувилля. Изучены бифуркационные диаграммы отображения момента, бифуркации торов Лиувилля на изоэнергетических 3-поверхностях фазового пространства при разных уровнях энергии, построены инварианты Фоменко-Цишанга для соответствующих слоений.

**Литература.** 1. *А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. РХД, Ижевск, 1999. 2. *П. Топалов.* Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. Матем. сборник, 1996, т. 187, №3, с. 143-160. 3. *А.В. Болсинов, П. Рихтер, А.Т. Фоменко.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. Матем. сборник, 2000, т. 191, №2, с. 3-42. 4. *П.В. Морозов.* Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа. Матем. сборник, 2004, 195, №3, с. 69–114. 5. *A.A. Kilin.* The Dynamics of Chapligin Ball: the Qualitative and Computeral Analysis. Reg. Chaot. Dyn., 2001, v. 6, №3, p. 291-306.

## О равносильности уравнения с частными интегралами двумерному интегральному уравнению

*Фролова Е.В.*
(Липецк, ЛГПУ; lsn@lipetsk.ru)

Различные задачи теории переноса излучения в атмосферах звезд и планет, теории упругих оболочек и многие другие приводятся к уравнениям с частными интегралами вида

$$x = Kx + f, \tag{1}$$

где $K = L + M + N$, операторы $L$, $M$, $N$ определяются равенствами

$$(Lx)(t,s) = \int_a^{+\infty} l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau, \quad (Mx)(t,s) = \int_c^{+\infty} m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$
$$(Nx)(t,s) = \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau;$$

$t,\tau \in [a,+\infty), s,\sigma \in [c,+\infty)$, $l,m,n$ — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Пусть $D = [a,+\infty) \times [c,+\infty)$, $C(D)$ – пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $D$ функций с supremum-нормой и $p(t,s) = e^{-kts}$, где $k > 0$. Через $C_p(D)$ обозначим множество равномерно непрерывных на $D$ функций, таких, что $px \in C(D)$. Норма в $C_p(D)$ определяется равенством $\|x\|_{C_p(D)} = \|px\|_{C(D)}$. В заметке изучаются достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (1) в пространстве $C_p(D)$.

**Теорема 1.** *Если оператор $K$ действует в пространстве $C_p(D)$, то он непрерывен.*

Критерии действия линейных операторов с частными интегралами в пространстве $C_p(D)$ не известны. Приведем достаточные условия действия оператора $K$ в $C_p(D)$.

**Определение.** Пусть $\Omega \in \big\{[a,+\infty),[c,+\infty),D\big\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется непрерывной в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot) - u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ при $|t_1 - t_2|$, $|s_1 - s_2| < \delta$, и интегрально ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq U < \infty$.

**Теорема 2.** *Пусть $l(t,s,\tau) = e^{-kts}l_1(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma) = e^{-kts}m_1(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = e^{-kts}n_1(t,s,\tau,\sigma)$, где $k > 0$, а функции $l_1,m_1,n_1$ непрерывны в целом и интегрально ограничены. Тогда оператор $K$ действует в пространстве $C_p(D)$ и непрерывен.*

**Теорема 3.** *Пусть операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы на любом конечном прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, $l(t,s,\tau) = e^{-kts}l_1(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma) = e^{-kts}m_1(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = e^{-kts}n_1(t,s,\tau,\sigma)$, где $k > 0$, а функции $l_1,m_1,n_1$*

*непрерывны в целом и интегрально ограничены. Тогда уравнение* (1) *равносильно в* $C_p(D)$ *уравнению*

$$x(t,s) = g(t,s) + \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

*где* $h(t,s,\tau,\sigma)$ *— непрерывное в целом и интегрально ограниченное ядро оператора* $H = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}(LM+N)$, *а* $g = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$.

## О разрешимости краевой задачи электродиффузионного процесса переноса

*Чопчиян А.С., Коржов Е.Н., Архипов В.П.*
(г.Старый Оскол ,СТИ НИТУ МИСиС; channst_18@mail.ru)

Рассматривается стационарный процесс электродиффузионного переноса двухкомпонентной смеси во внешнем электрическом поле около ионоселективной мембраны. Действие электрического поля предполагается таким, что вектор плотности возникающего в системе тока ортогонален поверхностям мембраны. Модельная задача в рамках приближения Нернста [1] описывает процесс электродиффузии в подобласти, непосредственно примыкающей к поверхности мембраны и называемой диффузионным слоем. В рассматриваемой модели пренебрегается конвективным движением раствора, а перенос заряженных компонентов осуществляется за счет двух механизмов – диффузии и миграции.

Краевая задача, описывающая рассматриваемый процесс, имеет вид [2]:

$$\frac{dC_i}{dX} = -\eta z_i \frac{d\Phi}{dX} C_i + (-1)^i \beta_i J, \quad i = 1,2 \tag{1}$$

$$\mu^2 \frac{d^2\Phi}{dX^2} = -\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2, \tag{2}$$

$$\begin{array}{l} X = 0: \ C_i(0) = C_i^0,\ \Phi(0) = 0, \\ X = 1: \ \Phi(1) = -1, \end{array} \tag{3}$$

где $C_1(X),\ C_2(X),\ \Phi(X)$ - неизвестные функции – приведенные концентрации двух сортов ионов и электрический потенциал, рассматриваемые при $X \in [0;1]$, $J$ - константа, характеризующая плотность тока в смеси. Остальные величины – заданные положительно определенные параметры, описывающие внутренние свойства процесса, при этом, $\mu^2$ - малый параметр.

Исключив из системы (1)-(2) функции $C_i(X)$, $i = 1,2$, для определения потенциала $\Phi(X)$ получим нелинейное интегро – дифференциальное уравнение:

$$\begin{array}{l} \mu^2 \frac{d^2\Phi}{dX^2} = -\gamma_1[C_1^0 \exp\{-\eta z_1 \Phi(X)\} - \beta_1 J \int\limits_0^X \exp\{\eta z_1(\Phi(X_1) - \Phi(X))\}dX_1] + \\ +\gamma_2[C_2^0 \exp\{-\eta z_2 \Phi(X)\} + \beta_2 J \int\limits_0^X \exp\{\eta z_2(\Phi(X_1) - \Phi(X))\}dX_1] \end{array}, \tag{4}$$

которое должно удовлетворять граничным условиям:

$$\Phi(0) = 0,\ \Phi(1) = -1. \tag{5}$$

В определенных (естественных) условиях на коэффициенты установлена разрешимость уравнения (4) в конусе отрицательных функций, получено решение "вырожденной" задачи (при $\mu = 0$), исследованы методы численного решения. Так классическая Ньютоновская линеаризация приводит к итерационному процессу для линейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром:

$$\mu^2 \frac{d^2 u^n}{dx^2} + b^n(x) u^n(x) + \int\limits_0^x d^n(x, x_1) u^n(x_1) dx_1 = f^n(x),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad u^n(0) = u^n(1) = 0,$$

решение которого может быть реализовано методом прогонки на специальной неравномерной сетке. Отметим, что при нахождении потенциала $\Phi(X)$ значения концентраций $C_{1,2}(X)$ определяются однозначно.

**Литература**. 1. Заболоцкий В.И., Никоненко В.В. Перенос ионов в мембранах. М.:Наука, 1996. 396 с. 2. Коржов Е.Н., Чопчиян А.С. Математическое моделирование электродиффузионного процесса переноса около ионоселективной мембраны с учётом объёмного электрического заряда. Сорбционные и хроматографические процессы, 2007, т.7, №5, с.815.

## Построение общего решения линейной системы дифференциальных уравнений с параметром и особой точкой

*Е.В. Чорнеькая*
(Украина, г. Нежин, НГУ им. Николая Гоголя; elenagolovch@rambler.ru )

Изучается задача построения общего асимптотического решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x, \varepsilon) z + f(x, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \frac{\theta x^{g+1}}{g+1}\right) \tag{1}$$

с иррегулярной особой точкой $x = \infty$, где $\varepsilon$ - малый комплексный параметр, $\varepsilon \in \pi_\varepsilon = \{0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \gamma \le \arg \varepsilon \le \delta\}$, $x \in S = \{|x| \ge a, \alpha \le \arg x \le \beta\}$, $h > 0$, $g \ge 0$, $A(x, \varepsilon)$ - $(n \times n)$-матрица, $f(x, \varepsilon)$ - $n$-мерный вектор, которые в секторах $S$ и $\pi_\varepsilon$ представляются двойными асимптотическими разложениями

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk}, f(x, \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} f_{sk},$$

$\theta$ - комплексное число. При этом рассматривается случай, когда главный оператор системы имеет кратный спектр.

Подробно исследуется случай одномерного ветвления, когда кратному собственному значению предельной матрицы отвечает один элементарный делитель такой же кратности. Показано, что асимптотические разложения линейно независимых решения однородной системы можно построить в виде двойных рядов по дробным степеням параметра и отношения независимой переменной и параметра. Найдены условия, при выполнении которых такое построение возможно. Используя методы [1], выведено уравнение разветвления, проведено его исследование с помощью пространственного аналога диаграмм Ньютона [2]. Это дало возможность установить связь между внутренними свойствами системы и показателями степеней, по которым строятся соответствующие разложения. Разработан алгоритм определения коэффициентов этих разложений, выведены рекуррентные формулы, которые позволяют находить их в явном виде.

Рассмотрен также случай многомерного ветвления, когда кратному собственному значению предельной матрицы системы отвечает несколько элементарных делителей одинаковой кратности. Применив метод внутреннего проектирования [3], удалось многомерную задачу о возмущении собственных значений и собственных векторов предельной матрицы спроектировать в более сложную задачу о возмущении, но в пространстве меньшей размерности, и перейти от многомерного случая к одномерному.

Исследован также наиболее общий случай, когда соответствующие элементарные делители имеют как одинаковую, так и разную кратность. Найдены условия, при выполнении которых возможно построение формальных решений однородной системы и в этом случае.

Подробно изучен вопрос о построении частного решения неоднородной системы (1) в резонансном случае. Приведен алгоритм определения показателей степеней независимой переменной и параметра, с которых начинается соответствующее разложение.

Исследован асимптотический характер построенных формальных решений, получены соответствующие асимптотические оценки.

**Литература.** 1. Яковец В.П. Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малими параметрами. – Киев. 1992. – 52 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т. Математики; 92.34). 2. Айзенгендлер П.Г. Метод диаграм Ньютона для уравнений с несколькими малыми параметрами и его приложения. – Псков, 1989. – 52с. – Деп. в ВИНИТИ, 30 октября 1989 г., №6852-89. 3. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294с.

## О генераторах полугруппы операторов Сильченко

*А.Г. Чшиев*
(Воронеж; Zchaslan@mail.ru)

Пусть $X$ - комплексное банахово пространство и $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $X$. Полугруппу операторов $T : (0, \infty) \to EndX$ назовем полугруппой Сильченко класса $A(\varphi)$, если выполнены следующие условия: 1) $T(t) : X \to D$, где $t > 0$ и $D$ - некоторое линейное подпространство в $X$, которое может быть незамкнутым в $X$ и может быть неплотным в $X$; 2) $\lim_{t\to 0+} T(t)x = x$, для $x \in D$; 3) $\|T(t)\| \le \varphi(t)$, для $t > 0$, где $\varphi$ - некоторая суммируемая на $[0,1]$ функция. Символом $ImT$ обозначим подпространство $\cup_{t>0} ImT(t)$.

В статье [2] следующим образом были введены определения старшего генератора $\mathbb{A}$, генератора $\mathbb{A}_c$ и базового генератора. Старшим генератором $\mathbb{A}$ называется линейное отношение, состоящее из пар $(x,y) \in X \times X$ со свойствами: 1) $x \in \overline{ImT}$; 2) верны равенства $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)y d\tau, 0 < s \le t < \infty$. Генератором $\mathbb{A}_c$ называется линейное отношение, обладающее следующими свойствами: 1) $\mathbb{A}_c \subset \mathbb{A}$; 2) $\lim_{t\to 0+} T(t)x = x$, для $x \in D(\mathbb{A}_c)$. Базовым генератором называется линейное отношение $\mathcal{A}$, обладающее следующими свойствами: 1) $\mathcal{A} \subset \mathbb{A}$; 2) $\rho(\mathcal{A}) \supset \mathbb{C}_w$, где $\mathbb{C}_w = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > w\}$ и $\rho(\mathcal{A})$ - резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

***Теорема.*** *Пусть $T : (0,\infty) \to EndX$ - полугруппа операторов Сильченко класса $A(\varphi)$. Тогда имеют место следующие утверждения: 1) полугруппа $T$ имеет базовый генератор $\mathcal{A}$; 2) $\mathbb{A}_c$- базовый генератор полугруппы $T$; 3) $\mathbb{C}_0 \subset \rho(\mathbb{A}_c)$ и $R(\lambda, \mathbb{A}_c)x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, x \in X, \lambda \in \mathbb{C}_0$, где $\mathbb{C}_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$; 4) если $\int_0^\infty \varphi(t)dt < \infty$, то $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathbb{A}_c)$ и $R(i\alpha, \mathbb{A}_c)x = -\int_0^\infty e^{-i\alpha t} T(t)x dt, x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$; 5) если функция $\varphi$ ограничена на $(0,1]$, то старший генератор $\mathbb{A}$- базовый и $\mathbb{A} = \mathbb{A}_c$.*

**Литература.** 1. Сильченко Ю. Т. "Полугруппы с неплотно заданным производящим оператором". Известия вузов. Математика. 2005 выпуск 7, с. 57-62. 2. Баскаков А. Г. "Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов". Математические заметки, 2008, т.84, № 2 с. 175-192.

## Функционально-дифференциальные уравнения и включения типа Коши-Ковалевской

*Р.В. Шамин*

(Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН; roman@shamin.ru)

Рассматриваются эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в частных производных. Приведем постановку в абстрактной форме. Пусть $H$, $D$ — банаховы пространства. Рассмотрим, вообще говоря, нелинейное непрерывное отображение

$$F : [0,T] \times C([0,T]; D) \to H.$$

Показано, что в условиях, аналогичных условиям теоремы Ниренберга-Нисиды [1] на оператор $F$, для задачи:

$$u'(t) = F[t,u],$$

$$u(0) = 0$$

верна теорема, обобщающая теорему Коши-Ковалевской о локальной разрешимости. Приведенное уравнение является функционально-дифференциальным, поскольку правая часть зависит не только от текущего значения искомой функции, но и, вообще говоря, от всех предыдущих значений.

В докладе будут представлены результаты, позволяющие конструктивно исследовать решения таких уравнений с помощью дифференциальных включений, построенных по эволюционным функционально-дифференциальным уравнениям.

Полученные результаты находят свое применения в задачах описания нелинейной динамики поверхностных волн идеальной жидкости (см. [2], [3]).

**Литература.** 1. Nishida T. A note on a theorem of Nirenberg // J. Differential Geometry. V. 12. 1977. PP. 629–633. 2. Шамин Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008. 3. R.V. Shamin Dynamics of an Ideal Liquid with a Free Surface in Conformal Variables // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 160, No. 5, 2009. P. 537-678.

## Интегрируемость и неинтегрируемость в трансцендентных функциях динамических систем

*М.В. Шамолин*
(Москва, МГУ; shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru)

Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают так называемой переменной диссипацией, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координаты диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства системы может присутствовать как подкачка энергии извне, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в плоской и пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. В результате обнаружен целый спектр случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В заключительной части работы получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем [1].

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию некоторой задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением, где пришлось иметь дело с первыми интегралами, обладающими нестандартными свойствами. А именно, они не были ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они были даже разрывными. При этом они выражались через конечную комбинацию элементарных функций. Последние обстоятельства, тем не менее, позволили-таки провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, который обладали «грубостью» и сохранялись для систем более общего вида, которые обладали некоторыми нетривиальными симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов динамических систем, обладающих аналогичными свойствами, и при этом взятыми из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой [2].

**Литература.** 1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: "Экзамен", 2007. — 256 с. 2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. – 2008. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 3–237.

## Классификация конфигураций прямых на проективной плоскости по числу областей

*И.Н. Шнурников*
(Москва, МГУ; shnurnikov@yandex.ru)

На какое число областей $n$ прямых могут разделить вещественную проективную плоскость? Если все прямые пересекаются в одной точке, то на $n$ областей, если прямые – общего положения, то на $\frac{n(n-1)}{2}+1$ область. Это – наименьшее и наибольшее возможное число областей. Оказывается, однако, что далеко не все промежуточные значения реализуются. Какие же числа из отрезка $[n, \frac{n(n-1)}{2}+1]$ могут служить числом областей разбиения? Б. Грюнбаум в 1972 году сформулировал гипотезу, что все числа из отрезка $[3n-4, 4n-13]$ не реализуются при $n \geqslant 9$. Н. Мартинов доказал гипотезу Б. Грюнбаума и в 1993 году предложил формулу для всех возможных чисел областей разбиения. В.И. Арнольд в 2007 году (не зная о работах своих предшественников) вывел формулу Н. Мартинова и частично ее доказал. Полное решение этой задачи – теорема 3 получено мною с помощью теорем 1 и 2. Обозначим конфигурацию прямых буквой П. Количество прямых и областей конфигурации П обозначим за $n(\Pi)$ и $f(\Pi)$ соответственно. Максимальное число прямых конфигурации П, пересекающихся в одной точке, обозначим за $r(\Pi)$. Равенство $n(\Pi) = r(\Pi)$ означает, что все прямые конфигурации пересекаются в одной точке.

**Теорема 1.** Для всех конфигураций прямых П, в которых не все прямые пересекаются в одной точке, верно следующее неравенство:

$$f(\Pi) \geqslant 2\left(\frac{n(\Pi)^2 - n(\Pi) + 2r(\Pi)}{r(\Pi)+3}\right).$$

**Теорема 2.** Для всех конфигураций прямых П, таких что $r(\Pi) \geqslant 5$ и

$$n(\Pi) \geqslant \frac{r(\Pi)(r(\Pi)+1)}{2} + 3,$$

верно следующее неравенство:

$$f(\Pi) \geqslant (r(\Pi)+1)(n(\Pi)-r(\Pi)).$$

**Теорема 3.** Конфигурация из $n$ прямых и $f$ областей существует тогда и только тогда, когда существует целое число $k$, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant k \leqslant n-2$, такое что

$$(n-k)(k+1) + C_k^2 - min\left\{n-k, C_k^2\right\} \leqslant f \leqslant (n-k)(k+1) + C_k^2.$$

**Литература.** 1. Арнольд В.И., На сколько частей делят плоскость $n$ прямых?// Матем. просвещение, серия 3. – 2008. Т. 12. – С. 95–104. 2. Grünbaum B., Arrangements and spreads// CBMS Regional Conference Series in Mathematics. – AMS Providence, R.I. 1972. No. 10. – P. 114. 3. Martinov N., Classification of arrangements by the number of their cells// Discrete and Comput. Geometry. – 1993. V. 9. – P. 39-46.

## The upper bound of the percolation threshold of the Bernoulli field on the cubic lattice

*E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko*
(Belgorod State University)

Infinite set $V \in \mathbb{R}^3$ is called the periodic one if there is the sequence $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ of not collinear vectors in $\mathbb{R}^3$ such that for any $n_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1,2,3\}$, $V = V + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ takes place. The periodic set is the mathematical model of the crystal lattice in $\mathbb{R}^3$ if it consists of isolated points. The crystal lattice assumes the disjoint decomposition

$$V = \bigcup_{\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3} \{V_0 + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3\},$$

where finite set $V_0$ is called the crystal cell. If the number of points in $V_0$ is minimal among all admissible crystal cells, it is named the elementary one.

**Definition 1.** *The infinite nonoriented graph $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ with the support $V$ and the edge set $\Phi \subset V \times V \times V$ is called the periodic one with the dimension three if there is such an inclusion $\mathsf{M}$ in $\mathbb{R}^3$ that its image $\mathsf{M}V$ is the crystal lattice in $\mathbb{R}^3$ and the image $\mathsf{M}\Phi$ of the set $\Phi$ is invariant relative to translations with periods $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, i.e. $\mathsf{M}\Phi + n_1\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + n_2\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = \mathsf{M}\Phi$, $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3$ where the set $\{\phi \in \Phi : \phi = \langle x, y \rangle, \mathsf{M}x \in V_0\}$ is finite.*

The infinite periodic graph $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ with the dimension three is called the cubic lattice if the elementary cell $\mathsf{M} : V \mapsto \mathbb{R}^3$ contains one vertex $\mathsf{M}V_0 = \{0\}$, i.e. $V = \mathbb{Z}^3$. Besides, the set $\mathsf{M}\Phi$ assumes the disjoint decomposition

$$\mathsf{M}\Phi = \bigcup_{\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3} \{\mathsf{M}\Phi_0 + n_1\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + n_2\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle + n_3\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle\}$$

with the set $\Phi_0$,

$$\mathsf{M}\Phi_0 = \{\langle 0, z \rangle; z = \alpha_1\mathbf{e}_1, \alpha_2\mathbf{e}_2, \alpha_3\mathbf{e}_3\},$$

$\alpha_i \in \{\pm 1\}$, $i = 1,2,3$ which determines completely the adjacancy structure of the cubic lattice.

The random Bernoulli field $\{\tilde{c}(x) \in \{0,1\}; x \in V\}$ on the cubic lattice $\Lambda$ is considered. It is parameterized by the number $\Pr\{\tilde{c}(x) = 1\} = c$.

**Definition 2.** *The random field $\{\tilde{c}(x); x \in V\}$ posseses the percolation if the existence probability $P(c)$ of the infinite not self-intersected way from the point $0$ on the random subgraph $\tilde{\Lambda} = \langle \tilde{W}, \tilde{\Phi} \rangle$ with $\tilde{W} = \{x \in W : \tilde{c}(x) = 1\}$ differs from zero. The value $\inf\{c \in [0,1] : P(c) > 0\}$ is called the percolation threshold.*

The probability $P(c)$ assumes the following representation

$$P(c) = c - \sum_{W\,:\,0\in W\in\Gamma} \Pr\{W \subset \tilde{W}\}\,, \tag{1}$$

where $\Gamma$ is the class of finite, $\Phi$-connected subsets of $V$ and the following estimate is valid for summands in the sum

$$\Pr\{W \subset \tilde{W}\} \le (1-c)^{|\partial_+ W|}\,. \tag{2}$$

Here, $\partial_+ W$ is the so-called external border of the connected set $W$. It represents the connected set on the periodic graph $\Lambda^* = \langle \mathbb{Z}^3, \Phi^* \rangle$ being adjoint to the graph $\Lambda$ [1] where the edge set $\Phi^*$ is defined by translations of $\mathbb{R}^3$ with the periods $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ on the basis of the finite set

$$\Phi_0^* = \{\langle 0, \pm\mathbf{e}_1 + \alpha_{i_1}^{(1)}\mathbf{e}_{i_1}, \pm\mathbf{e}_2 + \alpha_{i_2}^{(2)}\mathbf{e}_{i_2}, \pm\mathbf{e}_3 + \alpha_{i_3}^{(3)}\mathbf{e}_{i_3}\}$$

where $i_1 = 2,3$, $i_2 = 1,3$, $i_3 = 1,2$ and $\alpha_i^j \in \{-1,0,1\}$, $j = 1,2,3$. It is obtained the upper estimate $O(1)9^n n$, $n \in \mathbb{N}$ of the cardinality of the class $\Delta_n$ containing all subsets from $V$ which represent external borders of finite clusters on $\Lambda^*$ including the vertex 0 and having the cardinality $n$. On the basis of this estimate, the decomposition (1) and estimates (2), using the Borel-Cantelli lemma, the upper estimate $c_* \le 8/9$ of the percolation threshold is found.

**References.** 1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians. – Boston: Birkhauser, 1982.

## Difference Operators with Incommensurable Shifts. Smoothness of Solutions

*Ya. V. Chubis*
(Moscow, PFUR)

The work is devoted to the boundary value problem for differential-difference equations with incommensurable shifts. Some results for such equations were obtained more than 200 years ago. A general theory of functional differential equations was put forward by A. D. Myshkis , R. Bellman and K. Cooke , J. Hale , and others. They considered the boundary value problem for differential-difference equations with the integer shifts in the highest derivatives, and the shifts map the points of the boundary into the domain. The influence of such shifts on the solvability and smoothness of generalized solutions was studied in one-dimension in the papers of G. A. Kamenskiĭ [2][3] and A. D. Myshkis and A. G. Kamenskiĭ [4], and others.It was found out that the smoothness of the generalized solutions could be broken in a bounded domain and was preserved only in some subdomains even with infinitely differentiable right-hand side. In the book of A. L. Skubachevskiĭ[1]“Elliptic Functional Differential Equations and Applications” necessary and sufficient conditions, solvability of boundary-value problems for differential-difference equations, and various applications are considered. In[1],the following example of the boundary value problem for difference operator with two incommensurable shifts was studied

$$-(v - \varepsilon Rv)''(t) = f_0(t) \qquad (t \in (0, \pi)), \tag{1}$$

$$v(t) = 0 \qquad (t \in [-1, 0] \cup [\pi, \pi + 1]), \tag{2}$$

where $(Rv)(t) = v(t-1)+v(t+\tau)$, $\tau$ is an irrational number such that $0.9 < \tau < 1$ and, for all integers $p$, $q$, $p-q\tau \neq \pi$, $0 < \varepsilon < 1/4$ is sufficiently small, $f_0 \in L_2(0, \pi)$. It was proved that the set of discontinuity points of the first derivative $v'$ is dense on the interval $(0, \pi)$.

In the work it is investigated the boundary-value problem for differential-difference equation with $m \geq 2 \in \mathbb{Z}$ incommensurable shifts and we prove that the set of discontinuity points of the first derivative $v'$ is dense on the interval $(0, d)$. Along with the theoretical analysis of the problem, numerical calculations are done, which allows one to visualize the structure of the set of discontinuity points for different $\varepsilon$.

**References.** 1. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications-Basel-Boston-Berlin:Birkhäuser, 1997. 2. Kamenskiĭ, G. A. and A. D. Myshkis.Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments containing highest-order terms, *Differentsialnye Uravneniya* **10** (1974), 409–418; English transl. in *Differential Equations* **10** (1975). 3. Kamenskiĭ, A. G. Boundary value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators, *Differentsialnye Uravneniya* **12** (1976), 815–824; English transl. in *Differential Equations* **12** (1977).

## Multidimensional modelling of the academic group structure on progress in probationer's pedagogical activity acmeological approach

*V.N.Dontsov, V.K.Musienko, G.J.Ovsyannikov*
(Voronezh, VSU, don@math.vsu.ru)

At the initial stage of the student-mathematician pedagogical practice in the higher school, in the attached group of evening branch college students, there was a local professional-pedagogical problem about student's multidimensional classification by cluster analysis methods of the official summer session results.

The purpose of the student's group classification choice in the beginning of an educational semester was the necessity of an adequate and operative probationer's choice of professional strategy and tactics at pro-conducting teaching and educational work. In a pedagogical, psychological and acmeological context of higher school, the statement and the decision of the outspoken problem is executed for the first time in our region.

Group's clustering by official results of three examinations has allowed to break students into six homogeneous clusters. Particularly, clustering results have allowed the probationer to design a didactic system of significant activity kinds with a support on a zone of the nearest trainee development.

This system includes: the differentiated analysis of pupils peculiarity using of the psychogeometrical test; Information about the psychological reasons of backlog in educational process, about infringements in thinking and memory mechanisms (dormancy, oblivion, lack of logic); the help to chairs and dean's office in scheduling of exams retaking; stimulation of competitive and informative activity in group, publicity of summer session personal results; organization of thematic consultations in subjects: at systematization and ordering of mathematical knowledge; at algorithmization of the typical problems decision; at training of heuristic educational-scientific mathematical activity methods, at a concrete definition of theoretical approach; at designing of examples and counterexamples; reference instructing; the help to the lecturer in the organization and increase of the intercessional control and certification frequency (construction and duplicating of test tasks, KIMs, continuous or spot check with the differentiated mark), etc.

The obtained experience of research can become an acmeological invariant of author's pedagogical activity perfection.

**References.** 1. Акмеология /под общ. ред. акад. А.А. Деркача. - М.: РАГС, 2002. - 681с. - (Учебники РАГС при Президенте РФ).

## Multi-Dimensional Matrix Schrödinger operators with point interactions

*N.I. Goloschapova*

Multi-dimensional Schrödinger operators with point interactions have been intensively studied in the three last decades (see [1] - [5]). In the present talk, we apply boundary triplets and the corresponding Weyl functions approach to study the matrix multi-dimensional Schrödinger operators with point interactions. Namely, in $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$ ($d \in \{2,3\}$), we consider the following matrix Schrödinger differential expression with singular potential localized on the set $X := \{x_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^d$

$$-\Delta \otimes I_n + \sum_{j=1}^m \Lambda_j \delta(\cdot - x_j), \quad \Lambda_j \in \mathbb{R}^{n\times n},\ j \in \{1,..,m\}.$$

The minimal symmetric operator associated with this expression in $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$ is defined by

$$H := -\Delta \otimes I_n, \quad \mathrm{dom}(H) := \big\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n) : f(x_j) = 0, \quad x_j \in X \big\}.$$

Matrix three-dimensional Schrödinger operator with one point interaction was studied in [4]. We generalize the results of [4] to the case of $m$ point interactions and $d = 2, 3$. Namely, we construct a boundary triplet $\Pi$ for $H^*$. Moreover, we compute the corresponding Weyl function and the $\gamma$-field for $\Pi$, as well as the scattering matrix for a pair $\{H_0, H_\Theta\}$. In addition, we describe proper, self-adjoint, and nonnegative self-adjoint extensions of the initial minimal symmetric operator $H$ and characterize their spectrum.

**References.** 1. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Texts and Monographs in Physics, Springer, Berlin-New York, 1988. 2. Yu. Arlinskii, E. Tsekanovskii, *The von Neumann Problem for Nonnegative Symmetric Operators*, Integral Equations and Operator Theory, **51** 2005, 319-356. 3. F.A.Berezin, L.D.Faddeev, *Remark on the Schrödinger equation with singular potential*, Dokl.Acad.Sci. USSR **137** (1961), 1011–1014. 4. J. Behrndt, M. Malamud, H. Neidhardt, *Scattering matrices and Weyl functions*, Proc. London Math. Soc. 97 (2008), 568–598. 5. S. Hassi, S. Kuzhel, *On symmetries in the theory of singular perturbations*, J. Funct. Anal., **256** (2009), 777-809.

## About a theorem for the nonlinear transfer equation in $H_\infty(D) \times L_\infty(G \times V)$

*K.V. Golubnichiy*
(Moscow, PFUR; kiril-golubnichi@yandex.ru )

We prove local unique solvability in $H_\infty(D) \times L_\infty(G \times V)$ of the inverse problem with final overdetermination for the modified nonlinear transfer equation in the case $\Sigma(x, v, t) = \sigma(x, v)\, g(x, v, t) + h(x, v, t)$. In this paper the local unique solvability inverse problem with final overdetermination modified equation for nonlinear Transfer. These tasks can be viewed as the problem of controllability, which management is, for example, the multiplier on the right side, or in any other factors, depending only on spatial variables in the case of the final overdetermination and independent only occasionally in the case of integral overdetermination.

***Theorem 1.*** **(***Unique solvability of the inverse problem for the nonlinear modified transport equation in $H_\infty(D) \times L_\infty(G \times V)$***).**

Let $F, F_t \in L_\infty(D)$, $|\sum(x, v, T)| \geq \sum_0 > 0$, $(x, v) \in G \times V$;$J, J_t \in L_\infty\big(D, L_2(V)\big)$; $u_0 \in H_\infty(D)$ $u_{0_t} \in L_\infty(D)$, $g, g_t \in L_\infty\big(G \times V, L_2(0, T)\big)$, $|g(x, v, T)| \geq g_0 > 0$; $\psi, (v, \nabla)\psi \in L_\infty(G \times V)$, $\psi|_{\gamma_-} \in L_\infty(\gamma_-)$; $v_0^{-1} diamG < b$ and condition $\psi(x, v) = 0$ when $(x, v) \in \gamma_-$. Then the problem

$$\begin{aligned} &u_t(x, v, t) + (v, \nabla)u(x, v, t) + \textstyle\sum(x, v, t)u_0(x, v, t) + [S(u)](x, v, t) = \\ &\int\limits_V J(x, v', t, v)u(x, v', t)dv', \quad \text{where} \quad (x, v, t) \in D \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(x, v, t) = 0, \quad (x, v, t) \in \gamma_- \times [0, T], \tag{2}$$

$$u(x, v, 0) = 0, \quad (x, v) \in \bar{G} \times V \tag{3}$$

$$u(x, v, T) = \psi(x, v), \quad (x, v) \in \bar{G} \times V \tag{4}$$

$$\Sigma(x, v, t) = \sigma(x, v)\, g(x, v, t), \tag{5}$$

where $\sigma$ — desired, and $g$ — apriori given function, has unique solution $(u, \sigma)$ in a neighborhood of zero in $H_\infty(D) \times L_\infty(G \times V)$ for sufficiently small in the norm $\psi \in L_\infty(G \times V)$.

***Remark.*** Proof of Theorem *1* boils down to checking the feasibility conditions of the theorem on the inverse functions.

**References.** 1. Volkov N.P. Sufficient conditions of solvability Some inverse problems (tasks) for mass. / / Inverse problems for mathematical models physical processes. Moscow Engineering Physics Institute (State University), 1991. - p. 16.(in Russian). 2. Prilepko A.I, Volkov N.P. Inverse Problems determine the parameters of the unsteady transport equation for redefinition of the integral type. / / Differ. Equ., 23 (1987).(in Russian). 3. Golubnichiy K.V. On one the controllability problems for modified transfer equation. // Proceedings of the Voronez Winter School of Mathematics under S.G. Crain. VSU, Voronez, 2008, p 87-95.(in Russian).

## Probabilistic solutions of kinetic equations of statistical physics

*T.V. Karabutova, Yu.P. Virchenko*
(Belgorod State University)

The Cauchy problem for the class of nonlinear evolution equations of statistical physics is solved on the basis of the special probabilistic construction. Let $C$ be the cone of vectors $\mathsf{p} = \langle p_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ with nonnegative components in $\mathbf{l}_\infty$, $\sup_n p_n < \infty$. Let the vector function $\mathsf{p} : [0, T] \mapsto C \cap \mathbf{l}_1$, $\mathsf{p}(t) = \langle p_n(t); n \in \mathbb{N}\rangle$ with values in $C \cap \mathbf{l}_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) < \infty$ satisfies the differential equation

$$\dot{p}_n(t) = (\mathsf{Q}[\mathsf{p}])_n(t) - p_n(t)(\mathsf{K}[\mathsf{p}])_n(t), \tag{1}$$

where $\mathsf{K}[\cdot]$ is linear operator, $\mathsf{K} : \mathbf{l}_1 \cap C \mapsto \mathbf{l}_\infty \cap C$, $\sup_n (\mathsf{K}[\mathsf{p}])_n < \infty$; $\mathsf{Q}[\cdot]$ is the quadratic operator, $\mathsf{Q} : C \cap \mathbf{l}_1 \mapsto C \cap \mathbf{l}_1$,

$$(\mathsf{Q}[\mathsf{p}])_n = \sum_{k,l=1}^{\infty} Q_{n;k,l} p_k p_l$$

with "matrix elements"$Q_{n;k,l}$ which have the following properties $Q_{n;k,l} \geq 0$, $Q_{n;k,l} = Q_{n;l,k}$, $\nu = \sup_{k,l} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n;k,l} < \infty$. Besides, the equality

$$(\mathsf{K}[\mathsf{p}])_n = \sum_{k,l=1}^{\infty} Q_{k;n,l} p_l \tag{2}$$

takes place. The property (2) guarantees the norm constancy of solutions of the equation (1). We assume that the operator $\mathsf{Q}$ is nondegenerate. It is mean that the equality $\mathsf{Q}[\mathsf{p}] = 0$, $\mathsf{p} \in C \cap \mathbf{l}_1$ involves $\mathsf{p} = 0$. The last condition leads to the fact that the solutions of the equation (1) do not intersect the boundary of the cone $C$. Thus, if the pointed out conditions are fulfilled, the equation (1) may have the probabilistic solutions $\mathsf{p}(t)$ such that the vector $\mathsf{p}(t)$ represents the probability distribution on $\mathbb{N}$ at all $t \in [0, T]$. The following statement takes place.

**Theorem.** *For any probability distribution $\langle p_l; l \in \mathbb{N}\rangle$, the equation (1) has the unique probabilistic solution $\mathsf{p}(t)$ at $t \in \mathbb{R}_+$ if operators $\mathsf{Q}$ and $\mathsf{K}$ satisfy the above pointed out conditions. This solution satisfy the initial condition $p_l(0) = p_l$, $l \in \mathbb{N}$.*

The proof is based on the construction of infinite component random process $\langle \tilde{\mathsf{x}}(t); t \in \mathbb{R}_+\rangle$ with values in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\tilde{\mathsf{x}}(t) = \langle \tilde{x}_n(t); n \in \mathbb{N}\rangle$ where components $\tilde{x}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ are process trajectories. They are piecewise constant with the probability one and have their values in $\mathbb{N}$. The discrete random variables $\langle \tilde{x}_n(0); n \in \mathbb{N}\rangle$ are independent and distributed identically with the probability distribution $\langle p_l; l \in \mathbb{N}\rangle$, i.e. $\Pr\{\tilde{x}_n(0) = l\} = p_l$, $l \in \mathbb{N}$. The random process $\langle \tilde{\mathsf{x}}(t); t \in \mathbb{R}_+\rangle$ is built on the basis of the Poisson queue $\langle \tilde{\tau}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ with the intensity $\nu$ and on the basis of the random sequence $\langle \tilde{\mathsf{x}}^{(n)}; n \in \mathbb{N}_+\rangle$ with the values in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. The process trajectories $\tilde{\mathsf{x}}(t)$ are determined by the formula $\tilde{\mathsf{x}}(t) = \tilde{\mathsf{x}}^{(\tilde{n})}$ where $\tilde{n} = \max\{l; \tilde{\tau}_l < t\}$ if this set is not empty and $\tilde{n} = 0$ otherwise. The sequence $\langle \tilde{\mathsf{x}}^{(n)}; n \in \mathbb{N}_+\rangle$ is the Markov chain that has the probability distribution defined by the probability distribution $\langle p_l; l \in \mathbb{N}\rangle$, $\Pr\{\tilde{x}_n^{(0)} = l\} = p_l$, $l, n \in \mathbb{N}$ and the matrix of conditional transition probabilities

$$\Pr\{\tilde{x}_1^{(n+1)} = m_1, ..., \tilde{x}_j^{(n+1)} = m_j | \tilde{x}_{2j}^{(n)} = k_1, ..., \tilde{x}_{2j}^{(n)} = k_{2j}\} =$$

$$= \nu^{-j} \prod_{i=1}^{j} \bar{Q}_{m_i; k_{2i-1}, k_{2i}} \,,$$

$$\bar{Q}_{m;k,l} = Q_{m;k,l} + \frac{1}{2}(\delta_{mk} + \delta_{ml}) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n;k,l}\right) .$$

In this case, the relation

$$\Pr\{\tilde{x}_j^{(n+1)} = m\} = \nu^{-1} \sum_{k,l=1}^{\infty} \bar{Q}_{m;k,l} \Pr\{\tilde{x}_{2j-1}^{(n)} = k\} \Pr\{\tilde{x}_{2j}^{(n)} = l\} \tag{3}$$

takes place for probabilities $\Pr\{\tilde{x}_j^{(n)} = m\}$, $m \in \mathbb{N}$ of random values of sequence components with numbers $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

The relation (3) implies that the probability distribution $\Pr\{\tilde{x}_1(t) = l\} = p_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, generated by the probability distribution of the process $\langle \tilde{\mathsf{x}}(t); t \in \mathbb{R}_+\rangle$ constructed, satisfies the equation (1). The solution constructed is unique on $\mathbb{R}_+$. This fact follows from the contraction in $C \cap \mathbf{l}_1$ of the operator

$$\left(\mathsf{R}[\mathsf{p}]\right)(t) = \mathsf{p}(t') + \int_{t'}^{t} \left[\left(\mathsf{Q}[\mathsf{p}]\right)_n(s) - p_n(s)\left(\mathsf{K}[\mathsf{p}]\right)_n(s)\right] ds$$

on all intersecting intervals of the $t$ variation which have the length $T$ and overlap $\mathbb{R}_+$ since the contraction power $2\nu T < 1$ does not depend on $\mathsf{p} \in C \cap \mathbb{R}_+$ and, consequently, on $t'$ and $t$.

## One-dimensional problem of the heat radiative conductance

*M.A. Saprykin, Yu.P. Virchenko*
(Belgorod State University)

The one-dimensional problem of heat radiative conductivity in the dielectric medium is considered. It is formulated the mathematical model describing the heat transfer in such media on the basis of the presentation of the heat exchange between different medium areas by means of electromagnetic radiation. For this, the energy flux of electromagnetic radiation is calculated. Then, it is find its divergence in the form of the functional on the local temperature.

The heat transfer in solids is realized by two mechanisms. The first is the thermal conductivity and the second is connected with thermal electromagnetic field irradiated by the medium volume near the point $\mathbf{x}$ at the time moment $t$ which has the temperature $T(\mathbf{x}, t)$

$$\rho\lambda\dot{T}(\mathbf{x}, t) = \kappa\Delta T(\mathbf{x}, t) - (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)) \tag{1}$$

where $\kappa > 0$ is the thermal conductivity of medium, $\rho$ is its density and $\lambda$ is the thermal capacity. These values are constant and not as dependent on the temperature. First term in the right part of (1) is connected with thermal conductivity, the vector field $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ represents the energy flux of the thermal electromagnetic radiation. The central mathematical problem of the evaluation of the physical theory of the radiative conductance in solids is the calculation of the energy flux $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ in the form of the functional $\mathbf{S}[T(\mathbf{x}, t)]$ on the local temperature $T(\mathbf{x}, t)$.

The formulation of the mathematical model is based on the system Maxwell equations in the dielectric medium describing the evolution of the electromagnetic field.

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0\,, \tag{3}$$

$$(\nabla, \mathbf{D}) = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0 \tag{4}$$

where $c$ is the light velocity, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mu$ is constant and $\mathbf{H}$ is the strength of magnetic field irradiated by the heated medium. Besides, the medium is characterized by the permeability $\varepsilon(\omega)$ depending on the frequency of the electromagnetic field. Therefore, the vector field $D(\mathbf{x}, t)$ of the electrical induction is expressed using the electrical strength $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ in the following form

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{5}$$

and

$$\bar{D}_i(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) + 4\pi U(T, \omega)\varphi_i(\mathbf{x}, \omega\,, \quad i = 1, 2, 3 \tag{6}$$

where

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i\frac{\nu}{\omega} + o(\omega^{-1})\,, \quad \nu > 0 \tag{7}$$

and the second term contains the multiply $\varphi(\mathbf{x}, \omega)$ which is the uncorrelated gaussian random field $\langle \varphi_i(\omega) \rangle = 0$

$$\langle \varphi_i(\mathbf{x}, \omega) \varphi_j(\mathbf{x}', \omega') \rangle = \delta_{jj'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \,, \quad j, j' = 1, 2, 3 \tag{8}$$

where angular brackets denote the mathematical expectation. It is supposed that the function $U(T, \omega)$ satisfy the condition

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |U(T, \omega)|^2 d\omega < \infty \,. \tag{9}$$

In frameworks of formulated mathematical model which is performed by stochastic differential equations (2 - 4) and conditions (5 - 8), the one-dimensional problem on $[-L/2, L/2]$ is solved. The asymptotics of the mathematical expectation of the energy flux

$$\mathbf{S}(x, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t)]$$

and its divergence are calculated at $\omega \to \infty$. It gives the functional $S_i(x, t) = \delta_{i3} S[T(x, t)]$, $i = 1, 2, 3$ and its divergence in the following form

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = - \frac{2\alpha\gamma}{1 - (\varkappa e^{-\delta})^4} \int\limits_{-L/2}^{L/2} T^4(y, t) \times$$

$$\times \Big[ \exp\left(-2\delta |x - y| / L\right) + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^4 \exp\left(2\delta |x - y| / L\right) +$$

$$+ 2 \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^2 \mathrm{ch} \left[2\delta (x + y) / L\right] \Big] \, dy + 4\alpha T^4(x, t)$$

where $\varkappa$ is the reflection coefficient corresponding to boundary conditions and $\alpha, \delta$ are constant.

# Содержание