Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С.Г. КРЕЙНА – 2024

Материалы международной Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В. П. Маслова

(26–30 января 2024 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2024

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

Конференция поддержана МЦМУ МИАН, Московским и Воронежским госуниверситетами

С56 **Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2024** : материалы международной Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В. П. Маслова (26–30 января 2024 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН . — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. — 317 с.
ISBN 978–5–9273–3692–0

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика охватывает широкий спектр проблем теорий функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, нелинейного анализа, геометрии, топологии, математического моделирования и истории математики.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978–5–9273–3692–0

Организаторы

Воронежский государственный университет

Московский государственный университет

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Содержание

Contents

В ЭПИЦЕНТРЕ ДВУХ КАТАСТРОФ (ИЗ ЖИЗНИ АКАДЕМИКА В. П. МАСЛОВА)

В.А. Костин (Воронеж, ВГУ)

«В математике академик Виктор Маслов
такая же величина как Пикассо в живописи
или Маяковский в литературе.
Он сделал ряд настолько неожиданных
открытий,
что давно бы получил Нобелевскую премию,
если бы Альфред Нобель в своем завещании
не обидел математиков»
Журнал «Атмосфера» (март 2005 г.)

В последнее десятилетие Воронежские зимние математические школы, созданные С.Г Крейном, возглавляет выдающийся математик современности, академик РАН В.П Маслов. Вместе с тем, его научные связи с воронежскими математиками начались значительно раньше. В нашем университете В.П. Маслов впервые появился в 1972 году вместе со своим другом и коллегой В. И. Арнольдом, по случаю их участия в шестой («романтической», по слова С.Г. Крейна) зимней математической школе. И если уже в то время об Арнольде говорили вдохновенно, что называется «взахлеб» (еще бы, ученик самого А.Н. Колмогорова, стал Лауреатом Ленинской премии, будучи студентом третьего курса), то Маслов представлял некоторую загадку, видимо потому, что он пришел, так сказать, из физики. Но «исчисление некоммутирующих операторов» и «канонический оператор Маслова» уже тогда были у нас на слуху и активно обсуждались, восторженно комментируемые С.Г. Крейном, оппонентом В.П. Маслова при защите докторской диссертации.

В настоящее время информацию об академике В.П. Маслове можно получить по многочисленным ссылкам в интернете.

Крупнейший специалист в области математической физики, дифференциальных уравнений, функционального анализа, механики и квантовой физики. Разработал асимптотические методы, широко применяемые к уравнениям, возникающим в квантовой механике, теории поля, статистической физике, абстрактной математике, и носящие его имя. Асимптотические методы Маслова тесно связаны с такими проблемами, как теория самосогласованного поля в квантовой и классической статистике, сверхтекучесть и сверхпроводимость, квантование солитонов, квантовая теория поля в сильных внешних полях и в искривленном пространстве-времени, метод разложения по обратному числу типов частиц.

Занимался проблемами жидкости и газа, проводил фундаментальные исследования по проблемам магнитной гидродинамики.

Участвовал в расчетах по саркофагу для аварийного блока Чернобыльской АЭС, моделированию и прогнозированию экономической ситуации в России (1991 год).

С начала 1990-х гг. Маслов работал над использованием уравнений математической физики в экономике и финансовом анализе. В частности, ему удалось спрогнозировать дефолт 1998 года в России, а еще ранее - крах экономической и как следствие политической системы СССР. В 2008 г. Маслов спрогнозировал крах американской (а с ней и мировой) финансовой системы. Он рассчитал критическое число долгов США, и выяснил, что в ближайшее время должен разразиться кризис. При расчетах использовались уравнения, аналогичные уравнениям фазового перехода в физике.

Автор более 300 научных работ, в том числе 11 монографий.

1. В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. - М.: Изд-во Московского Университета, 1965.

2. В. П. Маслов. Операторные методы. - М.: Наука, 1973.

3. В. П. Маслов, М. В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. - М.: Наука, 1976.

4. В. П. Маслов. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1976.

5. В. П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1977.

6. В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. - М.: Наука, 1987.

7. В. П. Маслов. Асимптотические методы и теория возмущений. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1988.

8. В. П. Маслов, В. П. Мясников, В. Г. Данилов. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1988.

9. М. В. Карасев, В. П. Маслов. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. - М.: Наука, 1991. ISBN 5-02-014325-1

10. В. П. Маслов. Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. - М.: Институт компьютерных исследований, 2001. ISBN 5-93972-082-X

11. В.П. Маслов Квантовая экономика.- М.: Наука, 2006.

Премии и награды:

1. Государственная премия СССР (1978) - за цикл работ по некоммутативному анализу (совместно с А. П. Прудниковым и В. А. Диткиным).

2. Золотая медаль имени А. М. Ляпунова (1982).

3. Ленинская премия (1985) - за монографию «Теория возмущений и асимптотические методы».

4. Государственная премия Российской Федерации (1997) - за новые методы в нелинейных проблемах математической физики и механики.

5. Демидовская премия

6. Почетный член международного физико-химического Сольвейского института.

Даже, «сухой» список научных трудов показывает необъятный исследовательский диапазон и удивительную научную плодотворность В.П. Маслова.

Совершенно ясно, что потребуется не один том исследований и не менее семи пядей во лбу у исследователей, чтобы адекватно оценить значение В.П. Маслова для отечественной и мировой науки, а также осветить его человеческий дар. Я же просто хочу поделиться впечатлениями, накопившимися в результате наших десятилетних контактов, при проведении Воронежских зимних математических школ, и отметить проявленную Виктором Павловичем высокую ответственность перед обществом (человечеством), в экстремальных условиях страшных катастроф, связанных с аварией на Чернобыльской АЭС и «шоковой перестройкой» (грустные юбилеи которых мы отмечаем в этом году), когда Виктор Павлович, в силу своего научного авторитета, оказался в самом центре этих событий.

Математическая модель «во спасение» всего живого

Дата 26 апреля 1986 года надолго останется в памяти человечества. Авария на Чернобыльской АЭС стала новой точкой отсчета в истории атомной энергетики. В той ситуации суровый экзамен держали и ученые нашей страны. Так в выступлении М.С. Горбачева по советскому телевидению 14 мая 1986 года говорится: «В этих сложных условиях многое зависело от правильной научной оценки происходящего, так как без этого нельзя было бы выработать и применить эффективные меры по борьбе с авариями и ее последствиями. С этой задачей успешно справляются наши крупные ученые Академии наук...». И далее: «Думаю, у нас еще будет возможность назвать имена этих отважных людей и оценить их подвиг по достоинству».

О ситуации на АЭС в монографии Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС В.П. Маслов с соавторами пишут «Драматическая обстановка аварии и осознанная ответственность за обоснованность выводов и рекомендаций (курсив мой В.А. К.) обуславливали, несмотря на сжатые сроки исполнения, особенно тщательный и беспристрастный анализ всей совокупности полученных данных».

И, тем не менее, в этих условиях, после анализа нескольких механизмов, из которых адекватной реальной ситуации, и, как показали события, единственно верной была выбрана математическая модель фильтрационного охлаждения, которая не только объясняла все факты так или иначе связанные с изучаемым процессом, но и позволила обнаружить ряд неизвестных свойств, анализ которых привел к практически полезным рекомендациям в борьбе с последствиями аварии, в частности к предотвращению попыток наглухо замуровать все отверстия «саркофага», в целях защиты от излучения, что привело бы к неблагоприятным изменениям в тепловом режиме «саркофага» и трудно предсказуемым осложнениям, включая выброс радиоактивных веществ.

Здесь весьма важно подчеркнуть, что, не смотря на чрезвычайность ситуации был применен строго научный подход решения конкретных задач, с использованием фундаментальных исследований.

В [1] говорится: «Хотя уравнения модели являются классическими (основополагающие результаты по уравнениям тепломассопереноса получены еще великими математиками XVIII-XIX вв., а в наше время в их списке находится В.П. Маслов), новый тип краевой задачи для них, привел к открытию новых физических эффектов, которые позволили последовательно объяснить важные особенности в поведении аварийного реактора.» Вот так действовали настоящие ученые, понимая как свою ответственность, так и ответственность науки, которую они представляли перед человечеством.

К сожалению, спустя некоторое время обнаружились и другие подходы ответственных перед обществом лиц в борьбе с катастрофами.

Шоковая перестройка

В монографии «Квантовая экономика» В.П. Маслов пишет: «Так, казалось бы, какое отношение имеет дефолт к атомной промышленности? Оказывается, самое прямое, хотя это для кого-то и будет полным сюрпризом. Дефолт, как некоторый фазовый переход нулевого рода, с математической точки зрения - это то же явление, что и выбросы в аварийных атомных электростанциях и атомных станциях, исчерпавших свой ресурс. Дефолт - катастрофа в стране, революция, эти явления имеют математическую подоплеку».

Эти мысли Виктора Павловича, после упорного замалчивания властями, были, наконец, впервые опубликованы в газете «Известия» за 7 дней до путча 1991 г. в статье «Как избежать полной катастрофы», за которой последовал развал СССР.

В 1988 году, в связи со сложной экономической ситуацией в СССР, зам. Председателя (в то время) Совета министров СССР И.С. Силаев обратился к В.П. Маслову с экономическими вопросами. Об актуальности и сложности проблемы можно судить по тому, что за ним был прислан один из министров в семь часов утра.

После встречи с И.С. Силаевым Вычислительному центру Института новых технологий, который в то время возглавлял В.П. Маслов, был дан зеленый свет в экономических исследованиях, что позволило достаточно быстро справиться с конкретными постановками и позже уточнить их на ЭВМ.

Подход В.П. Маслова

Анализируя совершенно новые для советского человека (общества) понятия рыночных отношений, Виктор Павлович пришел к выводу, что в капиталистическом мироустройстве используется и капиталистическая арифметика с нелинейным сложением и умножением. Так, для покупки всего предприятия нужно не 100 % акций, а 51%.

Эта «другая арифметика» учитывает и психологические моменты: человек выигрывает какую-то сумму, а «кайф» (выражение В.П. Маслова) получает гораздо больший, чем он выиграл. Или наоборот - проигрывает какую-то сумму и переживает.

И как говорит В.П. Маслов, он эту арифметику «вычислил» [7].

Интересно отметить, что она укладывается в так называемую «идемпотентную математику», им же разработанную, и примененную при исследовании моделей в квантовой механике.

Идемпотент (от лат. Idem-тот же самый и potens-сильный, способный). В математике - элемент равный своему квадрату, например, проекторы в кольце операторов (см.[11] с.223). В более широком смысле идемпотент можно рассматривать как операцию, не меняющую свойств некоторого объекта. Таким образом, в зависимости от ситуации, один и тот же объект можно рассматривать как результат одной или нескольких операций. Но, если же, каждой операции приписывать цену, то в разных условиях этот объект будет иметь разную цену.

Пример с икрой, цены на которую в СССРв тысячу раз ниже, чем за границей [7]. Именно этот экономический эффект и привел к термину «тропическая математика», так как благодаря которому, капитализм закабалял «целые народы», обменивая погремушки на золото.

В [6] он говорит, что в физике есть понятие «энергетически выгодные состояния». И любое тело, любая частица стремится к нему. В экономике человек стремится к максимальному выигрышу, то есть, стремится к выгодному состоянию, не отдать, а взять себе. Даже может поступить нечестно. В связи с этим, Маслов, анализируя фундаментальную работу А.Н. Ширяева «Введение в стохастическую финансовую математику», в [4] пишет: «Результаты исследований, проведенные А.Н. Ширяевым, блестяще изложенные им в двухтомнике «Финансовая математика», основаны, по сути, на презумпции справедливости. Иначе говоря, выводы, приводимые А.Н. Ширяевым, сводятся к решению проблемы: как уравновесить данные величины, чтобы все было совершенно справедливо. Но, на «диком рынке» каждый думает о том, как выгадать и выиграть, а не как поступить по справедливости, по отношению к своему сопернику или партнеру. И прежняя (классическая) арифметика не годится для людей, стимулом которых является, грубо говоря, «нажива».

Со слов Виктора Павловича, существенные упрощения их математического аппарата дал большой параметр, в качестве которого в те времена выступал доллар. Поэтому, основной рекомендацией по выводу экономии из провала являлось введение второй валюты. Да и вообще становилось ясно, что она возникла сама собой в виде доллара. Что собственно и произошло.

Свои выводы В.П. Маслов обсуждал со многими известными экономистами, но получил одобрение только у нобелевского лауреата В.В. Леонтьева.

И.С. Силаев, ставший к этому времени премьер министром РФ их полностью отверг, сославшись на то, что уже выбран «польский путь».

Многократные разговоры с Е.Т. Гайдаром, который в то время был редактором отдела экономики в газете «Правда», также ни к чему не привели. Он даже не захотел их публиковать. Любопытны слова, которые он произнес [7]: «Я такой же экономист, как Вы - математик, я понимаю все намного лучше».

Ну и как вам нравится ответ этого, в то время никому неизвестного наглеца, не имеющего за собой даже намека на какой-либо экономический результат и определяющего свой уровень в экономике адекватным уровню математика мирового калибра, к тому времени лауреатом трех премий, включая государственную (1976) и Ленинскую (1985). А Чернобыльский «саркофаг»?!

Все это говорит о научной «дремучести» случившихся «мальчишей-перестройщиков» и их гипертрофированной самовлюбленности, чей подход к решению проблемы сводился к одному принципу «рынок все расставит по своим местам».

Экспертизы и эксперименты

Что же касается собственно экономических проблем, то смею утверждать, что «экономист-любитель» силаевского призыва В.П. Маслов понимал их не хуже «экономиста-профессионала» Е. Гайдара. Но к их решению он подходил с учетом мирового и исторического опыта в этом вопросе.

В связи с этим, вспоминаю, что при первом моем посещении Виктора Павловича на даче в Троицке, я обратил внимание на раскрытую книгу его деда П.П. Маслова «Теория развития народного хозяйства» СПб, 1910 г. Это очередное доказательство того, что В.П. Маслов руководствуясь четкой научной методикой решения разного рода задач, всегда опирается на фундаментальные исследования. Примером тому является и его статья «Экспертизы и эксперименты», напечатанная в журнале «Новый мир» 1991 г.

Здесь Виктор Павлович рекомендует при принятии решений учитывать специфику регионов. Так сказать учитывать реакцию организма на предлагаемое лечение, и эту роль предлагается взять экспертам. Он говорит: «Именно наличие экспертов, выражающих усредненное мнение самых разных слоев, их возможною реакцию, способы обхода того или иного закона данным слоем населения, можно в известной степени заменить статистические данные и изучение тех правил - полурыночных, полуприватизационных, которыми они руководствуются». И далее: «Экспертная система должна способствовать оптимальному и осторожному вмешательству в сложившуюся систему отношений, учитывать психологию советского человека». Золотые слова. Подтверждением служит поступок моего друга, директора школы-лицея села Верхний Мамон Воронежской области Дудкина Василия Ивановича, который наотрез отказался от повышения своей заработной платы в пользу низкооплачиваемых преподавателей со словами: «Да если я себе сделаю зарплату 36 000 рублей, а учителей посажу на минималку, как я им в глаза буду смотреть?» Вот поэтому в этом лицее, как пишет газета «Профсоюзный щит» №7(65), ноябрь-декабрь 2010 в статье «Провинциалы» «...по последнему слову техники оборудованные кабинеты физики, химии, иностранного языка, компьютерный класс и видеостудия». А в системе образования района с успехом реализуется такой нехарактерный для нашего времени принцип, как «человек человеку - друг». Здесь школьные директора не переманивают друг у друга учеников, считая это неэтичным. Хотя в рамках наших нынешних капиталистических реалий, при подушевом финансировании наполнение кармана педагога напрямую зависит от количества детских душ в школе.

Как видим, в этом регионе, выводы В.П. Маслова остаются справедливыми даже спустя двадцать лет после их опубликования, и приручении народа к «долларовой игле».

Почему же в нашей провинции не принимается «тропическая психология» на которую так рассчитывали реформаторы?

Думается потому, что благодаря лучшему в мире, на тот момент образованию, жертвы перестройки (почти все граждане нашей страны) по культурному и интеллектуальному уровню не уступали реформаторам, отличаясь от них лишь наличием совести и ответственности перед живущими, то есть категориями чуждыми «тропической психологии».

Думаю, по той же причине не были приняты и рекомендации В.П. Маслова о введении экспертной системы, ибо в случае ее введения имело бы место сглаживание возможности экстремальных нажив.

Можно ли представить введение ЕГЭ при наличии экспертной системы, учитывая, что эту реформу не поддержал ни один специалист, от рядового преподавателя до академика РАН? В результате, по типичным образцам «тропической математики» страна променяла на джинсы и жвачку, самое ценное, что было создано - лучшее в мире классическое образование.

Теперь, когда страна осталась без специалистов, что отмечают уже и ее первые лица, в связи с угрозой безопасности, тем самым признается правота академика В.П. Маслова, высказанная двадцать лет назад И. Силаеву и Е. Гайдару, да и другим экономистам, которые «захлопывали» его на различного уровня собраниях.

«И именно страсть наживы приводит к другой арифметике и к усилению «кровообращения» экономики. Инстинкт бессмертия, как другое «таинство природы», ведет к заботе о потомках и идеологии, а иногда вырождается в фанатизм. Этот инстинкт «плановый», как «плановое хозяйство», и ему отвечает обычная «социалистическая арифметика» [4].

Присоединяясь к этим словам Виктора Павловича, хочется надеяться, что в нашем обществе не приживется «тропическая дикость», и в этом будет великая заслуга выдающегося ученого, академика В.П. Маслова.

Истоки

Отец Виктора Павловича - Павел Петрович Маслов был одним из известнейших советских профессоров в области статистики, действительным членом Международного статистического института. Он является автором более 250 опубликованных научных работ по вопросам статистики и социологии, соавтором многих фундаментальных коллективных монографий, переводчиком (он владел пятью иностранными языками) и редактором многих уникальных иностранных изданий. Научная деятельность Павла Петровича тесно связана с основными работами российской статистики, в которых он принимал самое деятельное участие. Он внес большой вклад в развитие статистики сельского хозяйства, статистики населения, статистики доходов и расходов населения, бюджетных исследований. Ряд работ П.П. Маслова, в частности, две фундаментальные - «Социология и статистика»(1967) и «Статистика и социология»(1971), посвящен статистическому моделированию социальных процессов, где автор выдвигает новые подходы к их количественному изучению. При его непосредственном участии и по его инициативе были подготовлены интереснейшие переводные работы из серии «Библиотека иностранных книг» по статистике в издательстве «Статистика» членом редколлегии которой он являлся. Он перевел книгу Миллза «Статистические методы» снабдив перевод своими комментариями.

Павел Петрович Маслов - автор учебников по сельскохозяйственной статистике, общей теории статистики, финансовой статистике, которые и сейчас не утратили своего значения. Его отличало умение рассказать о сложном простым и доступным языком. Примером этому служит неоднократно переиздававшаяся популярная книга «Техника работы с цифрами». Возглавляя кафедру статистики МКЭИ и

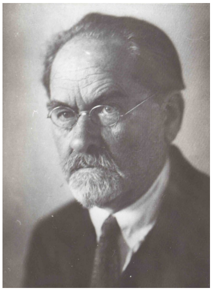
Павел Петрович Маслов (1902-1978 гг.)

МФИ на протяжении более 40 лет, Павел Петрович уделял огромное внимание преподавательской работе, считая ее не менее сложной и важной, чем чисто научная деятельность. Он был талантливым педагогом, внес большой вклад в развитие методики преподавания различных курсов статистики в экономических вузах, в создание учебных программ и методических пособий.

Круг интересов Павла Петровича Маслова был весьма широк. Он автор книги «История архитектурных памятников Москвы». Павел Петрович увлекался деревянной скульптурой. В 1973 г1973 г. состоялась персональная выставка его работ, получившая высокую оценку. Большой популярностью пользовались его лекции по истории искусств. Высшая школа профдвижения и Университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы приглашали П.П. Маслова для занятий с иностранными студентами (на английском, французском языках). Он оказывал большую помощь другим институтам в научной, учебной, методической работе, подготовке научно-педагогических кадров. В сентябре 1970 г. П.П. Маслов был награжден медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина».

В своем интервью газете «Московский комсомолец» от 22.12.2003 г. Виктор Павлович начинает свою родословную с прадеда-казака-староверца, открывшего золотые прииски на Урале. Там даже образовался выселок Масловский (деревня Маслово) Уйской станицы Троицкого уезда Оренбургской губернии.

Здесь и родился 15(27) июля 1867 года дед Виктора Павловича, Петр Павлович Маслов, который после окончания казачьей школы обучался в Троицкой гимназии и уже 14-летним подростком посещал



Академик Петр Павлович Маслов (1867-1946 гг.)

революционный кружок и участвовал в выпуске журнала «Бродяга» ([10]).

Таким образом, не смотря на то, что семья была зажиточной, юный Петр Маслов интересовался идеей социальной справедливости.

Поступив в Казанский университет (1887), П.П. Маслов продолжает заниматься революционной деятельностью и посещает марксистский кружок Н.Е. Федосеева. Надо сказать, что в это же время в университете обучался В.И. Ленин. Не исключено, что именно тогда произошли их первые встречи при участии в сходке студентов 4 декабря 1887, требовавших отмены реакционного университетского устава ([11], стр. 11), после которой уже 5 декабря Ленин с 1-го курса покинул университет, а Маслов был также исключен с 1-го курса и выслан из Казани.

В 1889 году П.П. Маслов поступил на 2-й курс Харьковского ветеринарного института, но по доносу за «Казанское дело» был арестован и провел три года в заключении. В 1892 году был отправлен в ссылку на родину, откуда наладил связь с Лениным, обмениваясь с ним письмами, рецензиями на книги и статьи. Затем приезжает в Самару, где в 1893-1894 г. работал в «Самарской газете». Но уже в 1894 году выехал в Вену, где изучал политическую экономию в Венском университете. В 1896 году вернулся в Россию, редактировал легальную марксистскую газету «Самарский вестник» (1896-1897), затем переехал в Петербург, где сотрудничал с журналами «Научное обозрение», «Жизнь», «Начало». Был делегатом 2-го съезда РСДРП (1903) (Брюссель-Лондон). После съезда примкнул к меньшевикам, написал программу муниципализации земли, поддержанную ими. Как говорит Виктор Павлович: «Всего там было четыре программы-Ленина, Шмидта, Ларина и Маслова. Все они по очереди голосовались. Ленин, когда его собственная программа провалилась, был сначала за программу Шмидта, потом за программу Ларина, а победила программа Маслова. После чего их отношения сильно обострились». Есть даже статья Ленина «Петр Маслов в истерике».

В 1906-1907 гг. П.П. Маслов работал в петербургских журналах, а также преподавал в качестве доцента в Петербургском сельскохозяйственном институте. В 1908 г. он был вынужден эмигрировать за границу, где в том же году издал 2-й том своего труда «Аграрный вопрос в России». В 1910-1914 гг. Петр Павлович Маслов опубликовал ряд монографий и брошюр по теории развития народного хозяйства в России и Западной Европе на немецком, русском и французском языках (в частности, книгу «Теория развития народного хозяйства»). В 1913 г. вернувшись в Россию, работал сначала в Петербурге, а затем с 1914 г. в Москве. В 1914-1915 гг. он выпустил две книги «Капитализм, наемный труд и заработная плата» и «Курс истории народного хозяйства». В 1916-1917 гг. П.П. Маслов редактировал в Москве журналы «Экономическое обозрение» и «Дело».

В 1918 г. Петр Павлович Маслов читал лекции по истории народного хозяйства в Омском сельскохозяйственном институте. В 1919-1920 гг. он занимал кафедру политэкономии в Иркутском государственном университете. С 1920 г. П.П. Маслов - профессор физико-математического факультета, затем декан гуманитарного факультета Государственного института народного образования (ГИНО) в Чите. Он вел курсы «Наука о народном хозяйстве» и «Теория кооперации». В 1923 г. после реорганизации и перевода ГИНО во Владивосток, Маслов вернулся в Москву. В политической жизни Петр Павлович Маслов не участвовал, вел научную работу, занимаясь проблемами политэкономии социализма. В 1923-1925 гг. П.П. Маслов являлся профессором 1-го МГУ. В 1925-1929 гг. он был председателем теоретической секции Экономического института.

С 1929 г. П.П. Маслов действительный член АН СССР.

Заканчивая эту заметку, хочу напомнить слова, приписываемые А.Эйнштейну: «Если я и видел дальше всех, то только потому, что стоял на плечах гигантов». Как важно, чтобы эту истину знали, понимали и разделяли лидеры нашего общества. Но, разумеется, для этого они должны хотя бы знать об этих гигантах, одному из которых и посвящается эта публикация.

Литература

1. Маслов В.П. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС / Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. // М.: Наука, 1987, 143 с.

2. Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений / Маслов В.П. // М.: наука, 1987, 408 с.

3. Маслов В.П. Операторные методы / Маслов В.П. // М.: Наука, 1973, 543 с.

4. Маслов В.П. Квантовая экономика / Маслов В.П. // М.: Наука 2006, 92 с.

5. Маслов В.П. Эксперты и экспертизы Новый мир / Маслов В.П. // 1991, №1, — с. — 243-252

6. Маслов В.П. Квазистабильная экономика и ее связь с термодинамикой сверхтекучей жидкости. Дефолт как фазовый переход нулевого рода I. ОП и Пм / Маслов В.П. // М.:2005, Т.12, — вып. 1, — с. timeHour3Minute403-40

7. Маслов В.П. «Ошибка Нобеля» интервью газете <Московский комсомолец»

8. БСЭ статья Маслов П.П.

9. Титов В.Т., Маслов В.П., Фоменко А.Т., Костин В.А., Овчинников В.И., Сапронов Ю.И., Семенов Е.М. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008 Вестник РФФИ, №2(58) апрель-май 2008

10. БЭС, МАТЕМАТИКА, М: 2000, 847с

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_e@mail.ru

В последнее время вышло немало работ, посвященных вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для дифференциальных уравнений четного порядка, поскольку оно естественным образом возникают во многих различных областях прикладной математики и физики (см. [1-3]). Однако, несмотря на достаточно бурное развитие теории дифференциальных уравнений, следует отметить, что статей в которых рассматривались бы вопросы существования и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейных функционально - дифференциальных уравнений четного порядка немного.

В данной публикации в некоторой мере предпринята попытка устранить этот пробел. С помощью известной теоремы Го - Красносельского о неподвижной точке положительного оператора получены достаточные условия существования хотя бы одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально – дифференциального уравнения порядка. Далее доказывается единственность такого решения.

Рассматривается краевая задача

$$x^{(2n)}(t) + (-1)^{1-n} f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(n-1)}(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(1) = x'(1) = \ldots x^{(n-1)}(1) = 0, \tag{3}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ – линейный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Теорема. *Пусть $p \neq q$ и при п.в. $t \in [0, 1]$ и $u \geqslant 0$*

$$a(t)u^{p/q} \leqslant f(t, u) \leqslant bu^{p/q},$$

где $b > 0$, $\quad a(t) \in \mathbb{L}_q$ – неотрицательная и не равная тождественно нулю функция.

Кроме того, допустим

$$\int_0^1 a(s) \left(T\gamma\right)^{\frac{p}{q}}(s)\, ds > 0,$$

где $\gamma(s) = \frac{s^n(1-s)^n}{[(n-1)!]^2}$.

Тогда существует единственное положительное решение краевой задачи (1)–(3).

Литература

1. Zhang S.Q. A Class Nonlinear Boundary Value Problem for Third-order Differential Equation with Singular Perturbation / S.Q. Zhang // Journal of Sanming University. — 2010. — Vol. 27. — P. 106–108.

2. Liu Y. Two-point Boundary Value Problems for n-Order Nonlinear Differential Equation / Y. Liu // Journal of Shenyang Institute of Aeronautical Engineering. — 2007. — Vol. 24. — P. 95–96.

3. He J.H. Positive Solutions of BVPs for a System of Even-Order ODEs / J.H. He, L. Hu, L.L. Wang // Journal of Anhui University Natural Science Edition. — 2007. — Vol. 31. — P. 1–4.

РАЗДЕЛЯЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО ПСЕВДОЕВКЛИДОВА АНАЛОГА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ЖУКОВСКОГО[1]

Е.С. Агуреева (Москва, МГУ)
Agureevamath@yandex.ru

В работе [1] А.В. Борисов и И.С. Мамаев рассмотрели следующее преобразование координат $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$ пространства $\mathbb{C}^6$

$$J_1 = \frac{\vec{J_1}}{i},\ J_2 = \frac{\vec{J_2}}{i},\ J_3 = \vec{J_3},\ x_1 = \frac{\vec{x_1}}{i},\ x_2 = \frac{\vec{x_2}}{i},\ x_3 = \vec{x_3}.$$

В результате замены многие известные классические вещественные интегрируемые системы переходят в соответствующие псевдоевклидовы аналоги, также интегрируемые и вещественные. Их интегралами являются функции Казимира полученной скобки:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \qquad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b,$$

При описанном выше преобразовании энергия и дополнительный интеграл переходят в функции H, K. Отметим, что вид K совпадает с таковым для псевдоевклидова аналога волчка Эйлера:

$$H = \frac{(J_1+\lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2+\lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3+\lambda_3)^2}{2A_3},$$
$$K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Образ множества критических точек функции H на квадриках $K = k$ составляет параметрическую кривую $k(t), h(t)$:

$$h(t) = \frac{t^2}{2}\left(\frac{A_1\lambda_1^2}{(1+2A_1t)^2} + \frac{A_2\lambda_2^2}{(1+2A_2t)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(1+2A_3t)^2}\right),$$
$$k(t) = \frac{A_1^2\lambda_1^2}{(1+2A_1t)^2} + \frac{A_2^2\lambda_2^2}{(1+2A_2t)^2} - \frac{A_3^2\lambda_3^2}{(1+2A_3t)^2}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-00111) в МГУ имени М.В.Ломоносова. Автор является стипендиатом Фонда «БАЗИС»

В работе [2] автора и В.А.Кибкало изучался осесимметричный случай этой системы, т.е. $A_1 = A_2 \neq A_3$. Применялся топологический подход к изучению топологии слоения фазового пространства системы, развитый в работах А.Т.Фоменко и его научной школы [3]. Построены бифуркационные диаграммы, описано критическое множество системы, проверена невырожденность его точек, в осесимметричном случае найдены типичные бифуркации в изоэнергетических поверхностях при фиксированных неособых парах (a, b) значений функций Казимира f_1 и f_2. В частности, были получены некомпактные некритические бифуркации.

Кривая $(k(t), h(t))$ имеет две непрерывные ветви на $t \in S^1$, разделенные значениями $t = -\frac{1}{A_1}$ и $t = -\frac{1}{A_3}$, точку возврата и касается каждой из осей по одному разу.

Информация о расположении точек важна для описания набора инвариантов слоения Лиувилля на изоэнергетичечких и изоинтегральных поверхностях, образами которых при отображении момента будут прямые $\mathrm{H} = \mathrm{h}$ и $\mathrm{K} = \mathrm{k}$.

Пусть $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad \alpha = (\frac{A_3}{A_1})^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = (\frac{\lambda_3}{\lambda})^{\frac{2}{3}}$.

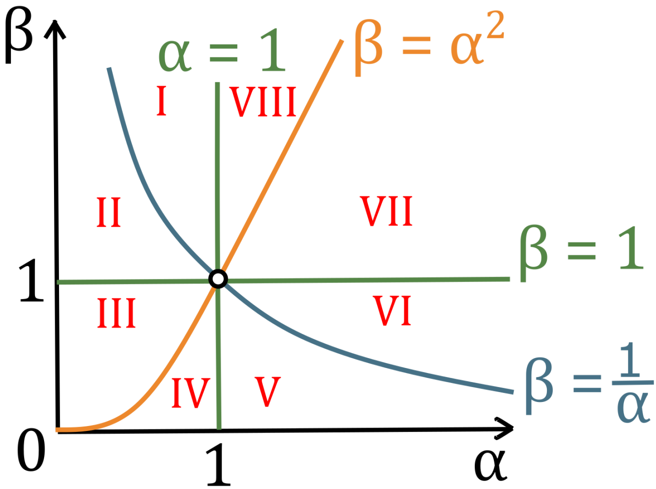
Теорема 1. *Следующие кривые на плоскости (α, β) разбивают квадрант на области, точкам которых соответствуют системы с фиксированным порядком особых точек на кривой и знаками h, k в точках касания Oh и Ok соответственно:*

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \beta = \alpha^2, \quad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Случаю $\alpha = 1$ соответствует совпадение всех моментов инерции $A_1 = A_2 = A_3$. Смена знака абсциссы и ординаты точки возврата происходит на кривых $\beta = \alpha^2, \beta = \frac{1}{\alpha}$ соответственно. Абсцисса точки касания бифуркационной кривой с осью Ok меняет знак на прямой $\beta = 1$.

Помимо кривой $(k(t), h(t))$, в бифуркационную диаграмму системы могут входить прямые $k = 0$ и $k = \frac{b^2}{a}$. Вычислив значения $k(t)$ интеграла в точках возврата и касания осей Oh и Ok и сравнив эти числа друг с другом, узнаем как при фиксированных $(a, b) \neq (0, 0)$ прямая $k = \frac{b^2}{a}$ может располагаться относительно особых точек, а значит, получим ответ об устройстве изоэнергетических поверхностей.

об устройстве набора слоений Лиувилля на изоэнергетических поверхностях Вычислив значения $k(t)$ интеграла в точках возврата и



Разделяющее множество на пространстве параметров α, β для осесисметричной псевдоевклидовой системы Жуковского.

касания осей Oh и Ok и сравнив эти числа друг с другом, узнаем как при $(a, b) \neq (0, 0)$ кривая $k = \frac{b^2}{a}$ может располагаться относительно особых точек, а значит, получим ответ об устройстве изоэнергетических поверхностей.

Литература

1. Borisov A.V. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces / A.V. Borisov, I. S. Mamaev // Rus. J. of Math. Phys. — 2016. — Vol. 23, № 4. — P. 431–454.

2. Агуреева Е.С. Топологический анализ осесимметричной системы Жуковского в случае алгебры Ли $e(2, 1)$ / Е.С. Агуреева, В.А. Кибкало // Вестник МГУ. Сер. : Математика. Механика — 2023. — в печати.

3. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет». — 1999.

К ТЕОРЕМЕ МОРДЕЛЛА

Р.С. Адамова (Воронеж, ВГУ)
adamova_rs@mail.ru

Теорема Морделла о структуре группы точек рациональной эллиптической кривой обычно формулируется для любой такой кривой, хотя Морделлом она доказана для кривых с уравнением вида $y^2 = x^3+px+q$, при этом в доказательстве существенно используется вид уравнения. В то же время не всякая рациональная эллиптическая кривая может быть описана уравнением такого вида, например, кривая $y^2 - yx^2 + 2x = 0$.

В работе построено бирациональное соответствие между кривой, не обладающей уравнением формы Вейерштрасса $y^2 = x^3 + px + q$ и кривой, имеющей такое уравнение, которое устанавливает изоморфизм их групп точек. Тем самым убеждаемся, что теорема Морделла справедлива для всех эллиптических кривых над полем рациональных чисел.

Теорема. *Уравнение рациональной эллиптической кривой, не имеющей точки перегиба, преобразованием координат можно привести к виду*

$$y^2 - y + a_0xy + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0. \tag{1}$$

Теорема. *Для всякой рациональной эллиптической кривой, не имеющей точки перегиба, существует бирациональное соответствие с кривой, обладающей уравнением $y^2 = x^3 + px + q$, порождающее изоморфизм групп точек этих кривых.*

Доказательство. Располагая уравнение (1) по степеням переменной x, получаем описание кривой в виде

$$x = \frac{-(a_0y + a_2) \pm \sqrt{(a_0y + a_2)^2 - 4(a_1 - y)(y^2 + a_3)}}{2(a_1 - y)}$$

$$\text{и } x = \frac{a_1^2 + a_3}{a_0a_1 + a_2}, \text{ если } (a_1 - y) = 0.$$

По виду квадратного корня составим уравнение

$$v^2 = (a_0u + a_2)^2 - 4(a_1 - u)(u^2 + a_3). \tag{2}$$

Оно описывает эллиптическую кривую.

Связь между кривыми (1) и (2) осуществляется формулами

$$x = \frac{-(a_0u + a_2) + v}{2(a_1 - u)}, \ y = u; \quad u = y, \ v = 2x(a_1 - y) + (a_0y + a_2).$$

Они устанавливают бирациональное соответствие между этими кривыми.

Пусть при сложении точек A и B кривой (1) прямая, их соединяющая, содержит третью точку C этой кривой и при указанном соответствии переходит в параболу с уравнением $v = lu^2 + mu + n$. Эта парабола проходит через точки A^*, B^* и C^* кривой (2), которые соответствуют точкам A, B и C.

Вычисления показывают, что $A^* + B^* = \pm(A+B)^*$. Когда B — нулевая точка, то в этом соотношении справедлив знак $+$. При непрерывном изменении точки B вдоль кривой знак может измениться только тогда, когда вторая координата точки $A^* + B^*$ равна 0.

Если при дальнейшем движении точки B от нулевой точки знак в этом соотношении изменился на $-$, то дальше он должен измениться на знак $+$, т.к. эта кривая гомеоморфна окружности или паре непересекающихся окружностей. Но другой точки, где бы знак мог измениться, на ветви, содержащей нулевую точку, нет.

Если кривая (2), рассматриваемая над полем $\mathbb{R}$ состоит из двух компонент связности, то вторая компонента пересекает ось Ou в двух точках, и знак в соотношении может меняться при положении $A^* + B^*$ в этих двух точках. Можно показать, что и в этом случае построенное соответствие является гомеоморфизмом групп точек кривых (1) и (2).

Литература

1. Прасолов В.В. Эллиптические функции и алгебраические уравнения / В.В. Прасолов, С.П. Соловьёв. — М.: Изд-во Факториал, 1997. — 288 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ПОВЫШЕННАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА СО СНОСОМ[1]

Ю.А. Алхутов, Г.А. Чечкин (Владимир, ВлГУ, Москва, МГУ)
yurij-alkhutov@yandex.ru, chechkin@mech.math.msu.su

В ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, введем соболевское пространство функций $W_2^1(D, F)$, где $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, как пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F, по

[1] Первая часть работы выполнена первым автором в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004), а результаты второго автора во второй части работы поддержаны грантом РНФ (проект № 20-11-20272).

норме

$$\| u \|_{W_2^1(D,F)}= \Bigg(\int\limits_D v^2\,dx + \int\limits_D |\nabla v|^2\,dx\Bigg)^{1/2}.$$

Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u := \Delta u + b\cdot\nabla u = l \ \text{ в } \ D, \quad u=0 \ \text{ на } \ F, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \ \text{ на } \ G, \qquad (1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ означает внешнюю нормальную производную функции u, вектор-функция $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$ удовлетворяет условию

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p > 2 \text{ при } n = 2, \quad p \geqslant n \text{ при } n > 2, \qquad (2)$$

а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_2^1(D,F)$.

Под решением задачи (1) понимается функция $u \in W_2^1(D,F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int\limits_D (b\cdot\nabla u)\varphi\,dx = -l(\varphi)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D,F)$.

Используя теорему Рисса о представлении функционала в гильбертовых пространствах, нетрудно показать, что функционал l можно записать в виде

$$l(\varphi) = -\sum_{i=1}^n \int\limits_D f_i\varphi_{x_i}\,dx,$$

где $f_i \in L_2(D)$. Поэтому в силу интегрального тождества для каждого конкретного функционала решение задачи (1) можно понимать в смысле интегрального соотношения

$$\int\limits_D \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int\limits_D (b\cdot\nabla u)\varphi\,dx = \int\limits_D f\cdot\nabla\varphi\,dx$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D,F)$, в котором компоненты вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ являются функциями из $L_2(D)$.

Ключевую роль в работе играет условие на структуру множества носителя данных Дирихле F. Для формулировки результата нам потребуется понятие ёмкости. Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ ёмкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < n$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^q \, dx : \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ \varphi \geqslant 1 \text{ на } K \right\}.$$

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый n-мерный шар радиуса r с центром в точке x_0 и полагается $q = \dfrac{p}{p-1}$ при $n = 2$, $p > 2$ и $q = \dfrac{2n}{n+2}$ при $n > 2$, $p \geqslant n$. Предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leqslant r_0(D)$ справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geqslant c_0 r^{n-q}, \tag{3}$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2) *и* (3), *то задача Зарембы* (1) *однозначно разрешима в* $W_2^1(D, F)$ *и для ее решения справедлива оценка*

$$\| \nabla u \|_{L_2(D)} \leqslant C \|f\|_{L_2(D)}$$

с постоянной C, зависящей только от коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, области D и размерности пространства.

Сформулируем теперь второе утверждение.

Теорема 2. *Если* $n = 2$, *выполнены условия* (2), (3) *и* $f \in \Big(L_{2+\delta_0}(D)\Big)^2$, *где* $\delta_0 > 0$, *то существуют положительные постоянные* $\delta(p, \delta_0) < \delta_0$ *и C такие, что для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leqslant C \int\limits_D |f|^{2+\delta} \, dx, \tag{4}$$

где C зависит только от δ_0, *величины* c_0 *из* (3), *а также от области D и* $\|b\|_{L_p(D)}$.

Если $n > 2$, *выполнены условия* (2), (3) *и* $f \in \Big(L_{2+\delta_0}(D)\Big)^n$, *где* $\delta_0 > 0$, *то существуют положительные постоянные* $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ *и C такие, что для решения задачи* (1) *справедлива оценка* (4), *где C дополнительно зависит от размерности пространства n.*

Аналогичные результаты для линейного уравнения без сноса см. в [1] и [2], резултаты для p-лапласиана см. в [3]. А результаты в области с малыми отверстиями см. в [4].

Литература

1. Alkhutov Yu.A. On the Boyarsky–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem / Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin, V.G. Maz'ya // Arch Rational Mech Anal. — 2022. — V. 245, № 2. — P. 1197–1211.

2. Чечкин Г.А. Оценка Боярского–Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера / Г.А. Чечкин, Т.П. Чечкина // Проблемы математического анализа. — 2022. — Т. 119. — С. 107–116.

3. Алхутов Ю.А. Многомерная задача Зарембы для уравнения $p(\cdot)$-Лапласа. Оценка Боярского-Мейерса / Ю.А. Алхутов, Г.А. Чечкин // Теоретическая и математическая физика. — 2024. — Т. 218, № 1. — С. 3–22.

4. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary // Mathematics. — 2021. — V. 9, № 23. — Art.No 3015.

ОБ УРАВНЕНИИ $y''(x)+p(x)f(y(x))g(y'(x))=0$, КАК ОБ УРАВНЕНИИ ЭЙЛЕРА В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ.

Н.Д. Арахов, В.Л. Прядиев (Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим обратную задачу вариационного исчисления для дифференциального уравнения

$$y''(x)+p(x)f(y(x))g(y'(x))=0, \tag{1}$$

а точнее, об отыскании функции (интегрирующего множителя) $\mu = \mu(x,y,y')$ такой, что дифференциальное уравнение

$$\mu(x,y,y')y''+\mu(x,y,y')p(x)f(y)g(y')=0$$

будет являться уравнением Эйлера для интегрального функционала вида

$$I(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx.$$

От p, f и g потребуем непрерывности на $[a;b]$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$, соответсвенно.

Теорема *Если $p = const$, то интегрируюший множитель для уравнения (1) существует и может быть дан формулой:*

$$\mu(x,y,y') = exp\left(p\int f(y)dy + \int \frac{y'dy'}{g(y')}\right)\frac{1}{g(y')}.$$

При этом

$$F(x,y,y') = -exp\left(p\int f(y)dy\right)y' \cdot \int \frac{1}{y'^2} exp\left(\int \frac{y'dy'}{g(y')}\right)dy'.$$

С привлечением общих фактов теории вариационных производных (см., например, в [1] раздел I.3) получается, следующее утверждение.

Утверждение. *Если p, f и g дважды дифференцируемы, то интегрирующий множитель для уравнения (1) существует и является решением дифференциального уравнения*

$$\mu_x - p(x)f(y)g(y')\mu_{y'} + y'\mu_y = p(x)f(y)g'(y')\mu.$$

Вопрос о возможности снизить требования к гладкости p, f и g в этом утверждении остаётся для нас пока открытым. Уравнение вида (1) изучалось в работах [2] и [3].

Литература

1. Задорожний В. Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. — 316 с.

2. Bihari I. Note to an extension of a Sturmain comparison theorem / I. Bihari // Stud. sci. math. hung, 1985. — 15-19 c.

3. Прядиев В.Л. Свойства Штурма нелинейных уравнений на сетях / В.Л. Прядиев // Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1995. — 15 с.

УСЛОВИЯ 2-ГО ПОРЯДКА ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Н.Ю. Аскерова, Э.М. Галеев

(Баку, филиал МГУ, Москва, МГУ)

narmina2000@gmail.com, galeevem@mail.ru

Работа посвящена вопросам о необходимых и достаточных условиях экстремума в задаче вариационного исчисления с одним закрепленным концом. В данной работе формулируются и доказываются теоремы о необходимых условиях слабого экстремума и достаточных условиях сильного экстремума. В частности, рассматривается случай квадратичного функционала.

Рассмотрим задачу вариационного исчисления с одним закрепленным концом

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}), dt \to \min; \quad x(t_0) = x_0. \tag{P}$$

Теорема 1. Необходимые условия первого порядка. *Пусть* $\widehat{x} \in C^1([t_0; t_1])$ *доставляет слабый локальный минимум в задаче* (P), $L, L_x, L_{\dot{x}}$ *непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}}$. *Тогда выполнены следующие условия:*

a) уравнение Эйлера: $-\dfrac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}} + \widehat{L}_x = 0$;

b) условие трансверсальности: $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = 0$.

Теорема 2. Необходимые условия слабого экстремума. *Пусть функция* $\widehat{x} \in C^2([t_0;\, t_1], \mathbb{R})$ *доставляет слабый локальный минимум в задаче* (P) $(\widehat{x} \in \operatorname{wlocmin} P)$, *интегрант* L *трижды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}}$ $(L \in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}})))$. *Тогда на* $\widehat{x}$ *выполняются:*

a) уравнение Эйлера: $-\dfrac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}} + \widehat{L}_x = 0$

и условие трансверсальности: $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = 0$;

b) условие Лежандра;

c) если выполнено усиленное условие Лежандра, то выполняется условие Якоби;

d) если выполнено усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби, то для любых $h_0, h_1 \in \mathbb{R}$ *существует единственное решение уравнения Якоби такое, что* $h(t_0) = h_0,\ h(t_1) = h_1$ *и выполняется неравенство*

$$P(h) = h_1\big(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}(t_1) + \widehat{L}_{\dot{x}x}h(t_1)\big) \geqslant 0 \quad \forall\ h_1 \in \mathbb{R},$$

где $h(t)$ *— это решение уравнения Якоби с граничными условиями* $h(t_0) = 0,\ h(t_1) = h_1$.

Теорема 3. Достаточные условия сильного экстремума. *Пусть* $\widehat{x} \in C^2([t_0;\, t_1], \mathbb{R}^n)$ *— допустимая экстремаль* (P)*, интегрант* $L \in C^3(V \times \mathbb{R}^n)$*, где* $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *— некоторая окрестность графика* $\Gamma_{\widehat{x}}$*, на* $\widehat{x}$ *выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, выполняется условие* $P(h) = h_1\big(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}(t_1) + \widehat{L}_{\dot{x}x}h(t_1)\big) > 0 \ \forall \ h_1 \in \mathbb{R}$*, где* $h(t)$ *— это решение уравнения Якоби с граничными условиями* $h(t_0) = 0,\ h(t_1) = h_1$*, интегрант* L *является выпуклым по* $\dot{x}$ *на* V*. Тогда* $\widehat{x} \in \operatorname{strlocmin} P$.

Рассмотрим задачу с одним закрепленным концом с квадратичным функционалом

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (A\dot{x}^2 + 2Bx\dot{x} + Cx^2)dt \to \min;\ x(t_0) = x_0. \qquad (P)$$

Теорема 4. О квадратичном функционале в задаче с одним закрепленным концом. $A, B \in C^1[t_0, t_1]$, $C \in C[t_0, t_1]$, *выполнено усиленное условие Лежандра на минимум. Тогда*

a) если допустимая экстремаль $\widehat{x}$ *существует, выполнено усиленное условие Якоби,* $P(h) = h_1(A\dot{h}(t_1) + Bh(t_1)) \geqslant 0 \ \forall \ h_1 \in \mathbb{R}$*, где* $h(t)$ *— это решение уравнения Якоби такое, что* $h(t_0) = 0,\ h(t_1) = h_1$*, то* $\widehat{x} \in \operatorname{absmin} P$

b) если не выполнено условие Якоби или выполнено усиленное условие Якоби, но не выполняется $P(h) \geqslant 0$*, то* $S_{\text{absmin}} = -\infty$*. Если при этом существует допустимая экстремаль* $\widehat{x}$*, то* $\widehat{x} \notin \operatorname{wlocmin} P$*.*

Литература

1. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. — М. Наука, 1984. — 288 с.

2. Галеев Э.М. Методы оптимизации / Э.М. Галеев — Баку, 2016. — 200 с.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СУММЫ АРГУМЕНТОВ[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ; Долгопрудный, МФТИ)
askhabov@yandex.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00177).

В вещественных пространствах Лебега $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, с обычной нормой $\|\cdot\|_p$, рассматриваются три различных класса нелинейных интегральных уравнений с ядром, зависящим от суммы аргументов:

$$\lambda\cdot F\big(x,u(x)\big)+\int\limits_0^1\frac{K(x,t)\,u(t)\,dt}{(x+t)^\nu}=f(x), \tag{1}$$

$$u(x)+\lambda\cdot\int\limits_0^1\frac{K(x,t)\,F\big(t,u(t)\big)\,dt}{(x+t)^\nu}=f(x), \tag{2}$$

$$u(x)+\lambda\cdot F\left(x,\int\limits_0^1\frac{K(x,t)\,u(t)\,dt}{(x+t)^\nu}\right)=f(x), \tag{3}$$

где $K(x,t)=b(x)\cdot b(t)$, $b(x)\neq 0$, $\lambda>0$ и $0<\nu<1$.

Предполагается, что функция $F(x,t)$, порождающая нелинейность в указанных уравнениях, определена при $x\in[0,1]$, $t\in\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}$ и непрерывна по t почти для всех $x\in[0,1]$. В зависимости от рассматриваемого класса уравнений, будем предполагать, что нелинейность $F(x,t)$ для почти всех $x\in[0,1]$ и всех $t\in\mathbb{R}$ удовлетворяет либо условиям:

1) $|F(x,t)|\leqslant c(x)+d_1|t|^{p-1}$, где $c(x)\in L^+_{p'}(0,1)$, $d_1>0$;

2) $F(x,t_1)\leqslant F(x,t_2)$, если $t_1<t_2$;

3) $F(x,t)\cdot t\geqslant d_2|t|^p-D(x)$, где $d_2>0$, $D(x)\in L^+_1(0,1)$,

либо условиям:

4) $|F(x,t)|\leqslant g(x)+d_3|t|^{1/(p-1)}$, где $g(x)\in L^+_p(0,1)$, $d_3>0$;

5) $F(x,t_1)<F(x,t_2)$, если $t_1<t_2$;

6) $F(x,t)\cdot t\geqslant d_4|t|^{p/(p-1)}-D(x)$, где $d_4>0$, $D(x)\in L^+_1(0,1)$,

где $p'=p/(p-1)$ и $L^+_p(0,1)$ означает множество всех неотрицательных функций из $L_p(0,1)$.

Пусть X есть банахово пространство и X^* – сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y,x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y\in X^*$ на элементе $x\in X$.

Лемма 1. *Пусть $p\geqslant 2$, $0<\nu<1$ и $b\in L_{2p/(p-2)}(0,1)$ ($b\in L_\infty(0,1)$, если $p=2$). Тогда оператор*

$$\big(Bu\big)(x)=\int\limits_0^1\frac{K(x,t)\,u(t)}{(x+t)^\nu}\,dt,\quad\text{где}\quad K(x,t)=b(x)\cdot b(t),$$

действует непрерывно из $L_p(0,1)$ в $L_{p'}(0,1)$ и строго положителен, причем

$$\|Bu\|_{p'} \leqslant \frac{1}{1-\nu}\,\|b\|^2_{2p/(p-1)}\|u\|_p \quad \text{и} \quad \langle Bu, u\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in L_p(0,1).$$

Используя лемму 1, методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказываются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Если нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1)–3), то при любом $f \in L_{p'}(0,1)$ уравнение (1) имеет единственное решение в $L_p(0,1)$.*

Теорема 2. *Пусть $1 < p \leqslant 2$, $0 < \nu < 1$, $K(x,t) = b(x) \cdot b(t)$ и $b \in L_{2p/(2-p)}(0,1)$ ($b \in L_\infty(0,1)$ при $p = 2$). Если нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то при любом $f \in L_p(0,1)$ уравнение (2) имеет единственное решение в $L_p(0,1)$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1. Если нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 4)–6), то при любом $f \in L_p(0,1)$ уравнение (3) имеет единственное решение в $L_p(0,1)$.*

Следуя работе [1], при дополнительных ограничениях на нелинейность $F(x,t)$ в теоремах 1–3 можно получить оценки норм соответствующих решений, а при $p = 2$ и любом значении параметра $\lambda > 0$ можно показать, что эти решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и получить оценки скорости их сходимости. Заметим также, что используя результаты работ [2] и [3], теоремы 1–3 можно обобщить на случай пространств Лебега с общим (не обязательно степенным) весом.

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега / С.Н. Асхабов // Матем. заметки — 2015. — Т. 97, № 5. — С. 643–654.

2. Porter D., Stirling D. Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications / D. Porter, D. Stirling — Cambridge : Cambr. Univ. Press, 1990. — 382 p.

3. Askhabov S.N. Nonlinear singular integral equations in Lebesgue spaces / S.N. Askhabov // Journal of Mathematical Sciences — 2011. — V. 173, № 2. — P. 155–171.

ОБ ОРБИТАХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ, СОДЕРЖАЩИХ 3-МЕРНЫЙ АБЕЛЕВ ИДЕАЛ[1]

А.В. Атанов, А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ)
atanov.cs@gmail.com, lobvgasu@yandex.ru

В сообщении практически завершается изучение невырожденных вещественных голоморфно однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$, на которых транзитивно действуют 7-мерные алгебры Ли из списка [1]. Весьма редкими в этом пространстве оказываются не сводимые к трубкам невырожденные орбиты 7-мерных алгебр, содержащих абелевы идеалы размерности 4 и выше (см. [2,3]). Оставшиеся пять типов алгебр Ли из [1], а именно $[7,[6,12],1,1]$ и $[7,[6,16],1,j]$ $(j=1,\dots,4)$, содержат лишь 3-мерные абелевы идеалы.

Теорема 1. *У семейства алгебр* $[7,[6,12],1,1]$ *имеется один тип невырожденных орбит, у семейства* $[7,[6,16],1,1]$ *— 4 типа невырожденных орбит, у семейства* $[7,[6,16],1,3]$ *— 2 типа невырожденных орбит.*

Выпишем далее орбиты (являющиеся невырожденными при «общем положении» параметров) шести последних типов:

$$y_4 = Cy_1^{\alpha} + T_j, \quad \alpha \neq 0, \tag{1}$$

$$y_4 = C\ln y_1 + T_j, \tag{2}$$

$$y_4 = \varepsilon y_1 \ln y_1 + T_j, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{3}$$

где $j = 1, 2$ и

$$T_1 = -\tfrac{3}{2y_1^3}\left(x_1y_2 - y_3\right)^2 - \tfrac{3A}{y_1^2}\left(x_1y_2 - y_3\right) - \tfrac{1}{2y_1}\left(3A^2 - (B - y_2)^2\right),$$
$$T_2 = Kx_1y_2 - \tfrac{L}{2}y_1y_2 + \tfrac{1}{6}y_1y_2^2 + \tfrac{y_2}{2y_1}\left(y_3 + Lx_1^2 - x_1^2y_2\right).$$

Здесь A, B, C, K, L — некоторые вещественные константы.

Приведенные уравнения (1)–(3) получены интегрированием голоморфных реализаций в пространстве $\mathbb{C}^4$ абстрактных 7-мерных алгебр Ли, упомянутых в теореме 1. Для базисов семейства алгебр Ли $[7,[6,12],1,1]$ такая реализация имеет (с точностью до голоморфных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00109).

преобразований) вид,

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (0,0,0,1)\,,\\
e_2 &= (0,0,1,0)\,,\\
e_3 &= (0,0,-z_1,z_2)\,,\\
e_4 &= (0,1,0,0)\,,\\
e_5 &= \left(0,-z_1,z_2+\tfrac{1}{3}z_1^3,z_3+qz_1^5\right)\,,\\
e_6 &= \left(1,0,-z_1z_2-5qz_1^4,\tfrac{1}{2}z_2^2+rz_1^6\right)\,,\\
e_7 &= (z_1,3z_2,5z_3,7z_4)\,,
\end{aligned}
$$

где p, q,r — комплексные константы.

Громоздкие формулы, описывающие орбиты этого семейства и содержащие алгебраические полиномы степени 9, мы здесь не приводим.

Важный тип однородных гиперповерхностей — просто однородные многообразия, размерность которых совпадает с размерностью их (полных) алгебр симметрий. В $\mathbb{C}^3$ имеется только одна (см. [4]) нетрубчатая просто однородная гиперповерхность; аналогичный пример в $\mathbb{C}^4$ обнаружен среди полученных орбит.

Теорема 2. *При* $j=1,\varepsilon=1,A=B=0$, *поверхность (3) имеет дискретный голоморфный стабилизатор и не сводится голоморфными преобразованиями к трубчатым гиперповерхностям.*

Литература

1. Parry A.R. A Classification of Real Indecomposable Solvable Lie Algebras of Small Dimension with Codimension One Nilradicals / A.R. Parry // Master of Science thesis. — Utah State University, 2007. — 225 p.

2. Лобода А.В. О 7-мерных алгебрах Ли, допускающих Леви-невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ / А.В. Лобода // Труды Московского математического общества. — 2023. — Т. 84, вып. 2.

3. Atanov A. V. On Degenerate Orbits of Real Lie Algebras in Multidimensional Complex Spaces / A.V. Atanov, A.V. Loboda // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2023. — Vol. 30, № 4. — P. 345–355.

4. Атанов А.В. Об орбитах одной неразрешимой 5-мерной алгебры Ли / А.В. Атанов, А.В. Лобода // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 5–20.

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Е.А. Бадерко, К.Д. Федоров
(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики)
baderko.ea@yandex.ru, konstantin-dubna@mail.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, выделяется полуограниченная область $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ с боковой границей Σ класса $C^1[0,T]$, где $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$.

В D рассматривается равномерно-параболический матричный оператор $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{l=0}^{2} A_l(x,t) \frac{\partial^l u}{\partial x^l}$, где $A_l = ||a_{ijl}||_{i,j=1}^m$, $m \geqslant 1$. Предполагается, что коэффициенты a_{ijl} определены и ограничены в $\overline{D}$ и $|\Delta_{x,t} a_{ijl}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$ в $\overline{D}$, где ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини:

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1} dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \ z > 0.$$

Для первой начально-краевой задачи:

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u\Big|_{t=0} = h, \quad u\Big|_{\Sigma} = \psi, \tag{1}$$

доказывается, что если функция f непрерывна, ограничена в $\overline{D}$ и $|\Delta_x f(x,t)| \leqslant \omega(|\Delta x|)$ в $\overline{D}$, где ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини:

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z \omega(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \ z > 0,$$

функция h непрерывна и ограничена вместе со своими первой и второй производными, $\psi \in C^1[0,T]$ и выполнены условия согласования:

$$\psi(0) = h(g(0)), \tag{2}$$

$$\psi'(0) = g'(0)h'(g(0)) + \sum_{l=0}^{2} A_l(g(0),0) h^{(l)}(g(0)), \tag{3}$$

то классическое решение $u \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$ задачи (1) принадлежит классу $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$. Дается интегральное представление решения. Существование и единственность решения поставленной задачи в классе $C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$ следует из [1 – 3].

Отдельно рассматривается случай, когда отсутствует условие согласования (3).

Случай негладкой при $t = 0$ боковой границы для однородной системы с нулевым начальным условием ранее был рассмотрен в [4].

Литература

1. Baderko E.A. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Applicable Analysis. — 2021. — Vol. 100, № 13 — P. 2900–2910.

2. Бадерко Е.А. Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58. № 10. — С. 1333–1343.

3. Бадерко Е.А. О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Журнал вычислительной математики и математичсекой физики. — 2023. — Т. 63, № 4. — С. 584—595.

4. Федоров К. Д. Гладкое решение первой начально-краевой задачи для параболических систем в полуограниченной области с негладкой боковой границей на плоскости / К.Д. Федоров // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58. № 10. — С. 1400–1413.

ЗАДАЧА О КЛАССИФИКАЦИИ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ УПЛОЩАЮЩИХСЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

Г.А. Банару, М.Б. Банару (Смоленск, СмолГУ)
mihail.banaru@yahoo.com

Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав интенсивно развивается с 60-х годов прошлого века. Результаты в этой области получили многие известные геометры, среди которых особо выделился выдающийся американский специалист Альфред Грей. С начала 70-х годов многие замечательные результаты в данном направлении получил отечественный геометр Вадим Фёдорович Кириченко. Среди них полная классификация 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли [1]. Отметим, что в обзоре [2] отражены основные достижения в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав (разумеется, кроме результатов, полученных в последнее десятилетие).

Напомним [3], что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J,\ g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, определяемая равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется эрмитовой, если ее тензор Нейенхейса

$$N(X,Y)\ = \frac{1}{4}(\ J^2\,[X,Y] \,+\, [JX,JY] \,-\, J[JX,Y] \,-\, J[X,JY]\ )$$

обращается в нуль, и келеровой, если $\nabla F = 0$.

Известно [1], что в алгебре Кэли $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,\ Y,\ Z\,) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X,\ Y\rangle\,Z + \langle Y,\ Z\rangle\,X - \langle Z, X\rangle\,Y;$$

$$P_2(X,\ Y,\ Z\,) = -(X\bar{Y})Z + \langle X,\ Y\rangle\,Z + \langle Y,\ Z\rangle\,X - \langle Z, X\rangle\,Y.$$

Здесь $X,\,Y,\,Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \bar{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры октав, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением: $J_\alpha(X) = P_\alpha(X,\,e_1,\,e_2), \quad \alpha = 1,\ 2,$ где $\{e_1,\ e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$. Точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры октав [1]. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие$M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся (planar, реже flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры Кэли. Отметим, что понятие уплощающегося подмногообразия алгебры октав ввели в рассмотрение В.Ф. Кириченко и М.Б. Банару [4], [5]. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся, например, все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав [4], [5]. При этом нужно обязательно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, отличной от келеровой [6], [7], [8].

Авторами данной заметки за последние 30 лет опубликовано около 20 работ, связанных с геометрией 6-мерных эрмитовых уплощающихся подмногообразий алгебры октав (кроме указанных выше работ [4], [5], [6], [7] и [8] обратим внимание на статью [9] о косимплектических гиперповерхностях уплощающихся $M^6 \subset \mathbf{O}$). Практически все представленные в этих и других работах результаты указывают на то, что свойства 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли очень близки к свойствам 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. Это касается как свойств голоморфной секционной и голоморфной бисекционной кривизн, кривизны Риччи и скалярной кривизны, необходимых и достаточных условий эйнштейновости, так и большинства свойств (например, минимальности) почти контактных метрических гиперповерхностей таких $M^6 \subset \mathbf{O}$. При этом, как уже было отмечено выше, существует немало примеров отличных от келеровых 6-мерных эрмитовых уплощающихся подмногообразий алгебры октав.

Естественным образом возникает задача о полной классификации 6-мерных эрмитовых уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли — подобной классификации, которую провел В.Ф. Кириченко в [1] для келеровых $M^6 \subset \mathbf{O}$.

Первым существенным результатом в этом направлении может служить доказанная для самого важного примера отличных от келеровых 6-мерных эрмитовых уплощающихся подмногообразий алгебры октав

Теорема. *Отличное от келерова локально-симметрическое 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли локально голоморфно изометрично произведению келеровых многооб-*

разий C^2 и CH^1, скрученному (warped) вдоль CH^1 , где CH^1 — комплексное гиперболическое пространство, а C^2 — двумерное комплексное евклидово пространство.

Литература

1. Кириченко В.Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли / Кириченко В.Ф. // Известия вузов. Математика. — 1980. — №8. — С. 32–38.

2. Banaru M.B. Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra / Banaru M.B. // J. Math. Sci., New York. — 2015. — V. 207, N3. — P. 354–388.

3. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Кириченко В.Ф. // М.: МПГУ, 2003.

4. Банару М.Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли / Банару М.Б. // Дисс. … к.ф.-м.н. Москва. МПГУ им. В.И. Ленина. 1993.

5. Банару М.Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли / Банару М.Б., Кириченко В.Ф. // Успехи математических наук. — 1994. — Т. 49, №1. — С. 205–206.

6. Banaru M.B. A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra / Banaru M.B., Banaru G.A. // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. — 2014. — V. 74, N1. — P. 23–32.

7. Banaru M.B. 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian / Banaru M.B., Banaru G.A. // SUT Journal of Mathematics. — 2015. — V. 51, N1. — P. 1–9.

8. Банару М.Б. Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли / Банару М.Б. Банару Г.А. // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2017. — Вып. 48. — С. 21–25.

9. Banaru M.B. Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian sub-manifolds of Cayley algebra / Banaru M.B. // Journal of Harbin Institute of Technology (New Series). — 2001. — V. 8, N1. — P. 38–40.

О ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В АНИЗОТРОПНОМ CL_p КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

И.В. Барышева, Н.И. Трусова, Е.В. Фролова

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
barysheva_ iv@mail.ru

Через $D = \{x : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \ i = \overline{1,n}\}$ обозначим конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$ и пусть α, $\overline{\alpha}$ – мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \ldots, n)$ и $D = D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}$, m – размерность параллелепипеда D_α $(1 \leqslant m \leqslant n)$.

Частно-интегральным оператором (ЧИ-оператором) со слабой особенностью называется выражение

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{D_\alpha} \frac{k(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha, \tag{1}$$

где $x = (x_\alpha, x_{\overline{\alpha}})$, $\beta < m$.

Непрерывность и “интегральная ограниченность” таких операторов в $\mathbb{R}_2$ с непрерывными ядрами и в пространстве непрерывных функций двух переменных изучена в [1]. Ранее ЧИ-операторы в пространствах непрерывных функций в $\mathbb{R}_2$ изучались в работе [2]; в анизотропном лебеговом пространстве и в пространстве смешанных $(\sup - L_p)$-норм рассматривались в [3].

В этой работе изучаются ЧИ-операторы в анизотропных пространствах непрерывных функций со значениями в лебеговском классе функций L_p, $p \in (1, \infty)$. Соответствующее пространство функций, заданных в параллелепипеде D, с нормой

$$\|u\|_{CL_p} = \sup_{x_{\bar{\alpha}} \in D_{\bar{\alpha}}} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)|^p \ dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$

обозначим через $CL_p = C(D_{\bar{\alpha}};\, L_p(D_\alpha))$ (введено в [4]).

По терминологии С.М. Никольского этот класс функций называется анизотропным (см. [5]), т.е. эти функции обладают разными свойствами по разным направлениям своего аргумента.

Воспользовавшись неравенством Гельдера с показателями p и p' ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), получим

$$|K_\alpha^{(m)} u(x_{\overline{\alpha}}, t_\alpha)| \leqslant \int_{D_\alpha} \left| \frac{k(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right| \, |u(x_{\overline{\alpha}}, t_\alpha)| \, dt_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|^{p'}}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'}} \, dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{CL_p} .$$

В последнем выражении вновь применим неравенство Гельдера с произвольными сопряженными показателями q и q'. Но при этом можно по разному распределить эти показатели между подынтегральными функциями. В результате получим два неравенства:

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leqslant \|k\|_{CL_{p'q}} \ \|u\|_{CL_p} \ \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p' q'}}\, dt_\alpha\right)^{\frac{1}{p'q'}} , \qquad (2)$$

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leqslant \|k\|_{CL_{p'q'}} \ \|u\|_{CL_p} \ \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p' q}}\, dt_\alpha\right)^{\frac{1}{p'q}} . \qquad (3)$$

Таким образом, можем сформулировать теорему о равномерной ограниченности ЧИ-оператора со слабой особенностью.

Теорема 1. *Пусть p, p' – фиксированные сопряженные показатели Гельдера и число β удовлетворяет условию $\beta pp' < m$, функция $u \in CL_p$ и $k(x;t_\alpha) \in CL_{(p')^2}$. Тогда для ЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ справедлива следующая равномерная оценка*

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leqslant A \ \|k\|_{CL_{(p')^2}} \ \|u\|_{CL_p}, \ \textit{где } A = \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta pp'}}\, dt_\alpha\right)^{\frac{1}{pp'}} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (2) при $q = p'$. Ограниченность константы A достаточно просто вытекает применением сферических координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_m$.

Замечание. *При $q' = p$ для числа β получим условие $\beta(p')^2 < m$. Тогда неравенство* (3) *примет вид*

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leqslant B \ \|k\|_{CL_{pp'}} \ \|u\|_{CL_p} , \ B = \ \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta(p')^2}}\, dt_\alpha\right)^{\frac{1}{(p')^2}} .$$

Доказательство вытекает из (3) при $q' = p$.

Другая часть нашей работы посвящена исследованию вполне непрерывности действия ЧИ-оператора (1) при тех же условиях, что и в теореме 1. Но здесь для упрощения рассуждений потребуем выполнения дополнительного условия. Будем предпологать, что ядро $k(x;t_\alpha)$ непрерывно в некоторой δ-окрестности параллелепипеда D, которую будем обозначать D^δ. Аналогичное условие распространяется на функцию $u \in CL_p$ в соответствующей δ-окрестности области $D_{\overline{\alpha}}$, которую обозначим $D^\delta_{\overline{\alpha}}$. Эти условия позволяют определить равностепенную непрерывность функций $(K_\alpha^{(m)}u)(x)$ в указанных выше параллепипедах, поскольку внутри каждого из них ядро и функция равномерно непрерывны. Получаем следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть функция* $k(x;t_\alpha)$ *принадлежит пространству* $C(D^\delta;\, L_{(p')^2}(D_{t_\alpha})) = CL_{(p')^2}$, *тогда функции* $(K_\alpha^{(m)}u)(x)$ *являются равностепенно непрерывными, т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| (K_\alpha^{(m)}u)(x+\Delta x) - (K_\alpha^{(m)}u)(x) \right| = 0\,.$$

На основании теоремы Арцела из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть* $k(x;t_\alpha) \in C(D;\, L_{(p')^2}(D_{t_\alpha})) = CL_{(p')^2}$, *тогда ЧИ-оператор со слабой особенностью* (1) *является вполне непрерывным оператором из* CL_p *в* C.

Авторы выражают искренную благодарность профессору Л.Н. Ляхову за поставленную задачу и многочисленные консультации.

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / А.С. Калитвин, Н.И. Фролова – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с. – 323 с.

2. Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. – New York: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.p.

3. Lyakhov L.N. About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev, N.I. Trusova // Jornal of Mathematical Sciences. – Springer. – 2020. – Vol. 251. – № 6. – P. 839–849.

4. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.Л. Лионс. – М.: Мир. 1972. – 587 с.

5. Бессов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бессов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1975. – 478 с.

О СОСТОЯНИЯХ ОБРАТИМОСТИ И СЛАБОМ ПОДОБИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГУ, ВГПУ, ВГУ, ВГТУ)

anatbaskakov@yandex.ru, gala_69@mail.ru, kostinalubov@bk.ru, nat-uskova@mail.ru

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра эндоморфизмов в $\mathcal{X}$, $\operatorname{Aut}\mathcal{X}$ — подпространство автоморфизмов, действующих в $\mathcal{X}$ (обратимых линейных операторов),

$\mathrm{Matr}\,(\mathbb{C}^n)$ — подпространство всех комплексных матриц n-го порядка, $\mathrm{Matr}\,(n, m, \mathbb{C})$ — пространство матриц размера $n \times m$.

В работе рассматривается развитие понятия слабого подобия от понятия эквивалентных матриц до понятия эквивалентных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

В стандартном учебнике [1, с. 92] приводится следующее определение. Две матрицы A, $B \in \mathrm{Matr}\,(n, m, \mathbb{C})$ называются эквивалентными, если найдутся невырожденные матрицы $P \in \mathrm{Matr}\,(\mathbb{C}^n)$, $Q \in \mathrm{Matr}\,(\mathbb{C}^m)$, такие, что $A = PBQ$. Отметим, что основополагающим свойством эквивалентных матриц является равенство их рангов, во множестве $\mathrm{Matr}\,(n, m, \mathbb{C})$ есть $\min(n, m) + 1$ классов эквивалентности.

Обобщением понятия эквивалентных матриц является понятие слабого подобия матриц [2, с. 248], [3, с. 46].

Определение 1. *Пусть A, $B \in \mathrm{Matr}\,(\mathbb{C}^n)$. Матрицы A и B называются слабо подобными, если существуют такие невырожденные матрицы P, $Q \in \mathrm{Matr}\,(\mathbb{C}^n)$, что $A = PBQ$.*

Отметим, что подобные матрицы являются слабо подобными и любая невырожденная матрица слабо подобна единичной. Более того (см. [3, с. 51]), каждая матрица $A \in \mathrm{Matr}\,(\mathbb{C}^n)$ слабо подобна диагональной матрице с единицами и нулями на диагонали.

Введем определение состояний обратимости некоторого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Определение 2 ([4]). *Рассмотрим следующие условия:*

1) $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ *(оператор A инъективен);*

2) $1 \leqslant n \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, A \leqslant \infty$*;*

3) $\mathrm{Ker}\, A$ *— дополняемое подпространство либо в $D(A)$, либо в $\mathcal{X}$;*

4) $\mathrm{Im}\, A = \overline{\mathrm{Im}\, A}$*, что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)*

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \mathrm{Ker}\, A} \frac{\|Ax\|}{\mathrm{dist}\,(x, \mathrm{Ker}\, A)},$$

где $\mathrm{dist}\,(x, \mathrm{Ker}\, A) = \inf_{x_0 \in \mathrm{Ker}\, A} \|x - x_0\|$*;*

5) оператор A равномерно инъективен (корректен), т. е. $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ *и* $\gamma(A) > 0$ *(в этом случае $\|Ax\| \geqslant \gamma \|x\|$);*

6) $\mathrm{Im}\, A$ *— замкнутое, дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство и, следовательно,* $\gamma(A) > 0$*;*

7) $\mathrm{Im}\, A$ *— замкнутое подпространство из $\mathcal{X}$ коразмерности* $1 \leqslant m = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, A \leqslant \infty$*, где* $\mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, A = \dim \mathcal{X} / \mathrm{Im}\, A$*;*

8) $\operatorname{Im} A = \mathcal{X}$*, т. е. оператор* A *сюръективен;*

9) оператор A *непрерывно обратим.*

Если для оператора A *выполнены все условия из совокупности условий* $S_0 = \{i_1, \ldots, i_k\}$*, где* $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant 9$*, то будем говорить, что оператор* A *находится в состоянии обратимости* S_0*. Множество состояний обратимости оператора* A *обозначим символом* $\mathrm{St}_{inv}(A)$*.*

Линейные операторы $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называются эквивалентными, если $\mathrm{St}_{inv}(A) = \mathrm{St}_{inv}(B)$.

Отметим, что в [4] определение состояний обратимости давалось для оператора A, действующего из банахова пространство $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, а также для линейных отношений.

Лемма 1. *Операторы* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *и* $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *эквивалентны, если существуют операторы* P*,* $Q \in \operatorname{Aut} \mathcal{X}$ *такие, что* $A = PBQ$*,* $QD(A) = D(B)$*.*

Таким образом, эквивалентные операторы являются обобщением слабо подобных.

С другой стороны, эквивалентные операторы можно рассматривать как обобщение подобных операторов (в подобных $P = Q^{-1}$). Отметим, что кроме эквивалентных операторов, обобщением понятия подобных операторов являются сплетаемые операторы, т. е. требуется выполнение равенства $AQ = QB$, $QD(B) = D(A)$, то оператор Q, в отличие от подобия, не должен быть обратим и (или) может не быть ограниченным. Тогда оператор U называется сплетаемым оператором, а соответствующий метод — методом операторов преобразования [5].

Методом эквивалентных операторов А.Г. Баскаковым решена проблема М.Г. Крейна [6] построения теории дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

Литература

1. Кострикин А.И. Введение в линейную алгебру. Часть 1 / А.И. Кострикин. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

2. Курбатов В.Г. Алгебра. Учебное пособие / В.Г. Курбатов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — 604 с.

3. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. — М. : МЦНМО, 2004. — 552 с.

4. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и

линейных отношений / А.Г. Баскаков // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, № 1(409). — С. 77–128.

5. Ситник С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. — М. : Физматлит, 2019. — 246 с.

6. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с.

ТРАЕКТОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ БИЛЛИАРДОВ[1]

Г.В. Белозеров, А.Т. Фоменко
(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
gleb0511beloz@yandex.ru

В настоящее время активно изучаются интегрируемые биллиарды и их обобщения. Хорошо известно, что биллиардные книжки, введенные В.В. Ведюшкиной, реализуют слоения Лиувилля многих интегрируемых гамильтоновых систем из физики, механики и геометрии (см. [1], [2]). Напомним, что первыми интегралами таких биллиардов являются полная механическая энергия H и параметр софокусной каустики Λ.

Настоящая работа посвящена исследованию траекторных инвариантов биллиардных книжек. Как оказалось, в окрестности любого регулярного слоя биллиардной книжки можно ввести переменные действие-угол. Более того, верен следующий аналог классической теоремы Лиувилля.

Теорема 1. *Пусть T_ξ — связная компонента неособой поверхности уровня (h, λ) пары интегралов (H, Λ) биллиарда на книжке D, не содержащей свободные ребра на фокальной прямой. Тогда*

1. *Поверхность T_ξ гомеоморфна двумерному тору.*
2. *Слоение Лиувилля в малой окрестности U слоя T_ξ тривиально, т.е. гомеоморфно прямому T^2 и диска D^2.*
3. *В окрестности U существуют непрерывные координаты $(s_1, s_2, \varphi_1, \varphi_2)$, такие, что*
   - *s_1, s_2 — координаты на диске D^2, а φ_1, φ_2 — 2π-периодические координаты на торах Лиувилля;*

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-71-00111.

- *$s_1, s_2 \in C^1(H, \Lambda)$;*
- *интегральные кривые биллиарда в этих координатах задаются системой дифференциальных уравнений;*

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = h_i(s_1, s_2) \quad \forall i = 1, 2,$$

где h_i — некоторые непрерывные функции (т.е. интегральные траектории есть не что иное, как прямолинейные обмотки торов Лиувилля).

Замечание. *Отметим, что первые два пункта этой теоремы доказаны В.В. Ведюшкиной.*

Помимо этого, нам удалось найти общую формулу функций вращения биллиардной книжки на любом ребре грубой молекулы.

Теорема 2. *Функции вращения ρ биллиардной книжки на ребрах ее молекулы вычисляются по формуле*

$$\rho(\Lambda) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_1} \int\limits_{a_{1,j}}^{b_{1,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda - t)(a - t)(b - t)}}}{\sum\limits_{j=1}^{N_2} \int\limits_{a_{2,j}}^{b_{2,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda - t)(a - t)(b - t)}}},$$

где $N_i, a_{i,j}, b_{i,j}$ зависят от комбинаторного устройства книжки. При этом числа N_i постоянны на ребрах, а функции $a_{i,j}, b_{i,j}$ принимают следующие значения:

- *числа a и b (параметры семейства софокусных квадрик),*
- *параметры квадрик, входящих в границы листов книжки,*
- *параметр каустики, то есть Λ.*

Для нескольких биллиардных столов исследована монотонность функций вращения, вычислены реберные траекторные инварианты. Оказалось, что функции вращения биллиардных книжек, вообще говоря, не являются монотонными, как изначально предполагала гипотеза А. Т. Фоменко (см. [3]). Тем не менее, для нескольких важных серий биллиардов эта гипотеза подтвердилась. В частности, было показано, что надлежащим изменением параметров топологических биллиардов, реализующих слоения Лиувилля линейно интегрируемых геодезических потоков на двумерных поверхностях, можно добиться монотонности сразу всех функций вращения.

Литература

1. Ведюшкина В.В. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами / В.В. Ведюшкина , А.Т. Фоменко, И.С. Харчева // ДАН. — 2018. — Т. 479, №6. — С. 607–610.

2. Ведюшкина В.В. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем / В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева // Матем. сб. — 2018. — Т. 209, № 12. — С. 17–56.

3. Фоменко А.Т. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности / А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2019. — № 3. — С. 15–25.

О РАЗВИТИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА И ВКЛАДЕ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ МАТЕМАТИКОВ

Е.М. Богатов

(Старый Оскол, СТИ НИТУ МИСИС; Губкин, ГФ НИТУ МИСИС)

embogatov@inbox.ru

Предыстория.

К топологическим методам нелинейного анализа (ТМНА) мы будем относить здесь метод неподвижной точки, теорию степени отображения и теорию индекса. Конечномерные результаты в этой области принадлежат Л. Кронекеру (1869), П. Болю (1904) и Л. Брауэру (1912); наибольшее влияние на развитие ТМНА оказали, по-видимому, идеи голландского математика Л. Брауэра, который дал определение степени отображения сферы S в себя ($degf$), как кратности покрытия S её образом *f(S)* с учётом ориентации [1]. В качестве одного из важнейших приложений степени, принесших Брауэру мировую известность, была теорема о неподвижной точке (ТНТ) [2, p.115]:

Если $degf \neq (-1)^{(n+1)}$*, то непрерывное отображение сферы* S^n *в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Операторный подход.

Перенос результатов Брауэра на бесконечномерную ситуацию был осуществлён американскими математиками Дж. Биркгофом и

О. Келлогом (1922), которые доказали теорему о о существовании инвариантной функции у непрерывнных отображений вида

$$Af = f, \tag{1}$$

переводящих в себя замкнутые выпуклые ограниченные подмножества функций из пространств C, C^n и L^2 [3].

Развитие теории нормированных пространств создало предпосылки для распространения теоремы Биркгофа-Келлога на нелинейные уравнения (1) в банаховых пространствах. Этот шаг был сделан польским математиком Ю. Шаудером (1927), доказавшим принцип неподвижной точки [4]:

Если в линейном полном нормированном пространстве (с базисом) непрерывный оператор переводит замкнутое выпуклое тело в свою компактную часть, то существует неподвижная точка.

Указанный принцип сделался важнейшей основой для доказательства разрешимости нелинейных операторных уравнений. Определяющую роль в его применении при исследовании конкретных задач с уравнением вида (1) стали играть вполне непрерывные (нелинейные) операторы, преобразующие ограниченные области банахова пространства в компактные. При этом метод Шаудера доказательства разрешимости уравнений $Fu = 0$ должен был включать в себя следующме шаги:

1) преобразование исходного уравнения к виду $Au = u$;

2) выбор банахова пространства E, в котором действует и вполне непрерывен оператор A;

3) выделение компактного множества $K \subset E$, которое переводит в себя оператор A;

4) применение теоремы Шаудера.

Приведённая схема была, в частности, реализована московским математиком В.В. Немыцким (1936) при исследовании нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна и Урысона в пространствах C и L^2 [3].

Ряд интересных обобщений теоремы Шаудера было получено силами отечественных математиков - А.Н. Тихонова (Москва, 1935), А.А. Маркова (Лениград, 1936), М.Г. Крейна и В.Л. Шмульяна (Одесса, 1940), М.А. Красносельского (Воронеж, 1955), Б.Н. Садовского (Воронеж, 1967) и др. Остановимся на результате из [5], известного сейчас, как *ТНТ Красносельского*:

Если оператор A переводит в себя шар банахова пространства и представляется в виде суммы вполне непрерывного и сжимающего операторов, то у него имеется неподвижная точка.

Данная теорема была усилена в нескольких направлениях, в том числе воронежскими математиками [6]; наибольший интерес здесь (с нашей точки зрения) представляет собой *ТНТ Садовского*, в которой фигурировал новый класс операторов - *уплотняющих* операторов, уменьшающих меру некомпактности любого множества, замыкание которого не компактно. Приведём соответствующий результат [7, с. 74]:

Если уплотняющий оператор преобразует выпуклое замкнутое ограниченное множество T банахова пространства E в себя, то он имеет в T хотя бы одну неподвижную точку.

Эта теорема явилась, по-видимому, отправной точкой для разработки Садовским теории уплотняющих операторов.

Геометрический подход.

Операторная запись исследуемого нелинейного уравнения, помимо общности решаемых задач (интегральные, интегро-дифференциальные, дифференциальные уравнения и системы), даёт также возможность для привлечения методов, допускающих изучение целого семейства уравнений, связанных с исходным. Такой подход, также восходящий к Брауэру, был основан на гомотопных переходах между отображениями и использовании степени функциональных преобразований $deg f$. Обобщение степени на бесконечномерный случай было выполнено Ю. Шаудером и его французским коллегой Ж. Лере (1934), причём аналогом непрерывной функции *f*, фигурирующей в определении Брауэра, стало "вполне непрерывное возмущение тождественного оператора" : $\Phi = F - I$. Основных причин здесь две:

1. только полная непрерывность оператора F гарантирует сохранение области G под действием Φ;

2. вполне непрерывный оператор хорошо аппроксимируется конечномерным.

Задача определения степени отображения Φ была решена Лере и Шаудером в два этапа:

1. Приближение вполне непрерывного оператора F конечномерным оператором F_n (проектор Шаудера) со значениями в подпространстве E_n.

Эвристические соображения, раскрывающие мотивацию Лере и Шаудера для введения $Deg\ \Phi$, изложены в [3].

2. Определение степени отображения $Deg\,\Phi$ для $\Phi = I - F$ в точке $z \in U$, $U \subset E$ через локализованную (конечномерную) степень отображения Брауэра оператора Φ_n (сужения Φ на E_n) по формуле

$$Deg(\Phi, U, z) \stackrel{def}{=} deg[\Phi|_{E_n}, U \cap E_n, z]. \tag{2}$$

Новая степень отображения $Deg(\Phi, U, z)$ унаследовала все свойства конечномерной степени, в том числе следующий принцип [8]: *Пусть $F : U \to U$ - вполне непрерывный оператор, такой, что оператор $\Phi = I - F$ не имеет нулей на ∂U. Тогда, если $Deg(\Phi, U, \theta) \neq 0$, то существует такой элемент $x_0 \in U$, что $Fx_0 = x_0$ (принцип неподвижной точки Лере-Шаудера).*

Прямым следствием явились теоремы существования решений семейства квазилинейных краевых задач с параметром λ, доказанные Лере и Шаудером для случая, когда эти решения ограничены и установлена разрешимость одной задачи при $\lambda = \lambda_0$.

В 1938 г. немецкий математик Э. Роте постарался придать геометрический смысл степени отображения Лере-Шаудера. Он счёл удобным переформулировать данное понятие в терминах так называемого *порядка* Γ векторного поля $\Phi x = x + Fx$, заданного на сфере S^∞ банахова пространства E [9, p. 183]:

$$\Gamma(\Phi, S^\infty, z) \stackrel{def}{=} deg(\Phi_n, S^n, z), \tag{3}$$

где E_n - конечномерное подпространство E, содержащее точку z; S^n - сфера пространства E_n: $S^n = S^\infty \cap E_n$; $\Phi_n = \Phi|_{E_n}$; F - вполне непрерывный оператор.

Роте показал, что левая часть в формуле (3) равна $Deg\,(\Phi, B^\infty, z)$, где B^∞ - шар пространства E с границей S^∞.

Геометрический подход Э. Роте был продолжен в начале 1950-х гг. в работах М.А. Красносельского. Красносельский также связал степень отображения $\Phi = I - F$ области $U \subset E$ с вращением соответствующего векторного поля $\mathbf{\Phi}$ на её границе ∂U [10, гл. II, §3]

$$Deg(\Phi, U) \stackrel{def}{=} \gamma(\mathbf{\Phi}, \partial U), \tag{4}$$

где $\gamma(\mathbf{\Phi}, \partial U) \equiv \gamma(\mathbf{\Phi}_n, F(U_B))$; $\mathbf{\Phi}_n$, как обычно - проектор Шаудера; U_B - покрытие U конечной системой шаров $\{B_i^\infty\}$ пространства E, содержащих все нулевые векторы поля $\mathbf{\Phi}$.

Отличие от определения Роте состояло в следующем:

I) U - произвольная область (связная и ограниченная);

II) степень отображения по Красносельскому - *нелокальная* (не привязана к какой-либо точке).

Опираясь на определение (4), Красносельский доказал, что

Для существования неподвижной точки вполне непрерывного поля $\mathbf{\Phi}$ *внутри области* G *банахова пространства* E *достаточно, чтобы вращение этого поля на границе* G *было отлично от нуля (принцип неподвижной точки Красносельского).*

Подход Красносельского к исследованию разрешимости нелинейных уравнений не ограничивался принципом Лере-Шаудера и его аналогами. Он продемонстрировал, что геометрическая интерпретация $Deg\,\Phi$ позволяет не только отвечать на вопрос о разрешимости (1), но и *решать большое число задач качественного характера*, как-то [10, Гл. III, §3; Гл. IV]:

а) обоснование сходимости приближённых решений уравнений вида (1);

б) исследование структуры и свойств спектра оператора A;

в) исследование множества собственных векторов нелинейных операторов;

г) получение условий законности линеаризации в задаче о точках бифуркации;

д) изучение свойств точек бифуркации и ветвления A.

Кроме того, к началу 1960-х гг. теория вращения вполне непрерывных векторных полей была распространена на слабо непрерывные отображения (Ю.Г. Борисович [11]), а к концу 1960-х гг. операторная и геометрическая ветви ТМНА соединились в контексте построения теории степени отображения уплотняющих операторов (Б.Н. Садовский [12]; Ю.Г. Борисович, Ю.И. Сапронов [13]).

Вместе с развитием теории уплотняющих операторов в конце 1960-х г. в рамках воронежской математической школы интенсивно исследовались многозначные векторные поля. Здесь для построения топологических характеристик Ю.Г. Борисовичем была предложена идея использования гомологических секущих многозначных отображений, моделирующих эти отображения, как расслоения. В случае выпуклых образов для вполне непрерывных векторных полей на этом пути было определено обычное и относительное вращение и выведены основные принципы неподвижной точки, имеющие приложение в теории игр и теории динамических систем без единственности (Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, Э.М. Мухамаддиев, В.В. Обуховский [14]).

Этим она отличается также и от степени отображения Лере-Шаудера.

После 1970-го г. исследования в обсуждаемом направлении продолжились; их анализ ещё предстоит провести.

Литература

1. Богатов Е.М. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях / Е.М. Богатов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2019. — Т.27, № 1. — С. 96–114.

2. Brouwer L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten / L. E. J. Brouwer// Math. Annalen. — 1912. — V. 71. — P. 97–115.

3. Богатов Е.М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е-1950-е гг.)/ Е.М. Богатов // Чебышевский сборник. — 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 30–55.

4. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen / J. Schauder // Math. Zeitschrift. — 1927. — V. 26, № 1. — P. 47–65.

5. Красносельский М.А. Два замечания о методе последовательных приближений /М.А. Красносельский // Успехи мат. наук. — 1955. — Т. 10, вып. 1(63). — С. 123–127.

6. Забрейко П. П. Об одном принципе неподвижной точки для операторов в гильбертовом пространстве / П. П. Забрейко, Р. И. Качуровский, М. А. Красносельский // Функц. анализ и его прил. — 1967. — Т.1, №2. — С. 93–94.

7. Садовский Б.Н. Об одном принципе неподвижной точки / Б.Н. Садовский // Функц. анализ и его прил. — 1967. — Т.1, вып.2 — С. 74–76.

8. Leray J. Topologie et équations fonctionnelles / J. Leray, J. Schauder // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. — 1934. — Vol. 61. — P. 45–73.

9. Rothe E. Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen / E. Rothe // Compositio Math. — 1938. — V. 5. — P. 177–197.

10. Красносельский М.А. Топологические методы в теории интегральных уравнений / М.А. Красносельский. М.: ГИТЛ, 1956. — 392 с.

11. Борисович Ю.Г. Об одном применении понятия вращения векторного поля / Ю.Г. Борисович // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1. — С. 12–15.

12. Садовский Б.Н. О мерах некомпактности и уплотняющих операторах / Б.Н. Садовский // Пробл. матем. анализа сложн. сист. — 1968. — Вып. 2. — С. 89–119.

13. Борисович Ю.Г. К топологической теории уплотняющих операторов / Ю.Г. Борисович, Ю. И. Сапронов // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 183, № 1. — С. 18–20.

14. Борисович Ю. Г. О вращении многозначных векторных полей / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, Э.М. Мухамадиев, В. В. Обуховский // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 187, № 5. — С. 971–973.

ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ ЛИ В ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А.В. Боровских (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)
bor.bor@mail.ru

Пусть G – n-мерная группа, реализованная как множество в $\mathbb{R}^n$, соответствующие переменные мы будем обозначать через $x = (x^1, \ldots, x^n)$); $\{\Xi_\alpha = \xi^i_\alpha \partial_i(x)\}^n_{\alpha=1}$ – базис соответствующей порождающей алгебры.

Теорема 1. *Множество метрик $g_{ij}(x)dx^i dx^j$, заданных на G и остающихся инвариантыми при действии этой группы, образует линейное пространство размерности $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Теорема 2. *Пусть G – группа Ли размерности n, алгебра Ли которой имеет базис $\Xi_\alpha = \xi^i_\alpha(x)\partial_i$ и структурные константы $C^\gamma_{\alpha\beta}$. На этой группе существует ровно n линейных дифференциальных форм, инвариантных относительно этой алгебры.*

Следствие. *Все метрические формы из формулировки теоремы 1, инвариантные относительно алгебры, имеют вид квадратичной формы $ds^2 = q_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$ от линейных дифференциальных форм $\omega^\alpha = \omega^\alpha_i dx^i$, $\alpha = 1, \ldots, n$ с постоянными коэффициентами $q_{\alpha\beta}$.*

Обозначим через ω^i_α матрицу, обратную к матрице ω^α_i, задающей инвариантные дифференциальные формы $\omega^\alpha = \omega^\alpha_i dx^i$. Тогда для операторов $\Omega_\alpha = \omega^i_\alpha \partial_i$ выполнено $[\Xi_\alpha, \Omega_\beta] = 0$.

Определение. *Алгебру, образованную решениями Ω системы уравнений* $[\Xi_\alpha, \Omega] = 0$, мы назовем двойственной к алгебре, образованной операторами Ξ_α.

Замечание 1. Двойственная алгебра в принципе не совпадает с исходной.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2023-939).

Замечание 2. Инвариантные относительно Ξ_α формы ω^β являются формами Маурера-Картана для алгебры с базисом Ω_β. Аналогично, формы Маурера-Картана алгебры с базисом Ξ_α оказываются инвариантными относительно Φ_β, так что здесь действительно наблюдается определенная двойственность.

Замечание 3. Если исходная алгебра – это порождающая алгебра группы автоморфизмов, порожденных левыми сдвигами, то двойственная алгебра – это порождающая алгебра группы автоморфизмов, порожденных правыми сдвигами.

Пусть

$$\frac{dx^1}{\varphi^1(x)} = \cdots = \frac{dx^n}{\varphi^n(x)} \tag{1}$$

– уравнение семейства кривых, инвариантного относительно группы G. Умножением (1) на подходящий множитель можно добиться, чтобы $\omega_i^\alpha \varphi^i$ оказались константами. Обозначим их через λ^α.

Для любой инвариантной метрики $ds^2 = q_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$ единичный касательный вектор $\tau = (\tau^i)$ к кривой (1) имеет вид

$$\tau^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{\varphi^i(x)}{\sqrt{Q}}, \qquad Q = q_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$$

и поэтому на касательном векторе τ соответствующая линейная форма оказывается постоянной: $\omega_i^\alpha \tau^i = \frac{\lambda^\alpha}{\sqrt{Q}}$.

Замечание. Вектор $\varphi^i = \lambda^\alpha \omega_\alpha^i$ является линейной комбинацией векторных полей, порождающих двойственную алгебру Φ, поэтому изучаемые нами траектории, инвариантные относительно алгебры Ξ, являются траекториями однопараметрической подгруппы, порожденной оператором из двойственной алгебры.

Обозначим через $\tau_N = (\tau_N^k)$ репер Френе, занумерованный индексом $N = 1, \ldots, n$, и, соответственно, $\lambda_N^\alpha = \omega_i^\alpha \tau_N^i$.

Теорема 3. *В терминах величин λ_N^α система Френе имеет вид*

$$\frac{d\lambda_N^\gamma}{ds} + H_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_N^\alpha \lambda_1^\beta = -\varkappa_{N-1}\lambda_{N-1}^\gamma + \varkappa_N \lambda_{N+1}^\gamma,$$

где $H_{\alpha\beta}^\gamma$ – постоянные, определяемые формулой

$$H_{\alpha\beta}^\gamma = -\frac{1}{2}[q^{\gamma\sigma} q_{\mu\beta} C_{\alpha\sigma}^{*\mu} + C_{\alpha\beta}^{*\gamma} + q^{\gamma\sigma} q_{\alpha\nu} C_{\beta\sigma}^{*\nu}], \tag{2}$$

$C_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ – структурные константы алгебры с базисом Ω_α.

Следствие. *Для всех инвариантных кривых все кривизны и все величины λ_N^α являются постоянными.*

Теорема 4. *Для любой метрики $g_{ij}(x) = q_{\alpha\beta}\omega^\alpha$ соответствующие тензоры Римана и Риччи имеют вид*

$$R^l_{ijk} = M^\theta_{\alpha\beta\gamma}\omega^l_\theta\omega^\alpha_i\omega^\beta_j\omega^\gamma_k,$$

$$R_{ij} = M_{\alpha\beta}\omega^\alpha_i\omega^\beta_j,$$

где

$$M^\theta_{\alpha\beta\gamma} = -C^{*\sigma}_{\beta\gamma}H^\theta_{\alpha\sigma} + H^\theta_{\sigma\beta}H^\sigma_{\alpha\gamma} - H^\theta_{\sigma\gamma}H^\sigma_{\alpha\beta},$$

$M_{\alpha\beta} = M^\gamma_{\alpha\beta\gamma}$, $H^\sigma_{\alpha\beta}$ – постоянные, определяемые формулой (2), а $C^{*\gamma}_{\alpha\beta}$ – структурные константы алгебры с базисом Ω_α.

Следствие. *Все кривизны рассматриваемого риманова пространства на группе являются собственными значениями матричной задачи $M_{\alpha\beta} = Rq_{\alpha\beta}$ или, что то же самое, собственными значениями матрицы $M^\beta_\alpha = M_{\alpha\sigma}q^{\sigma\beta}$.*

Замечание 1. То, что кривизны оказались постоянными, естественно – ведь автоморфизмы переводят группу в себя, а значит для инвариантной метрики все ее характеристики при автоморфизмах должны сохраняться.

Замечание 2. Римановы пространства, кривизны которых не зависят от точки пространства, в геометрии известны и называются *однородными.*

Замечание 3. Представляет интерес анализ групп Ли (хотя бы даже трехмерных) с точки зрения выявленных геометрий и использования этих геометрий для классификации групп Ли.

Литература

1. Боровских А.В. Геометрия группы Ли. Инвариантные метрики и динамические системы, двойственная алгебра и их приложения в групповом анализе одномерного кинетического уравнения / А.В. Боровских // Теоретическая и математическая физика. — 2023. — Т. 217, № 1. — С. 127-141.

ОБОБЩЕННЫЙ $\mathbb{T}$-ПСЕВДОСДВИГ И ФОРМУЛА ПУАССОНА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ-КИПРИЯНОВА[1]

Ю.Н. Булатов (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
y.bulatov@bk.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Рассматриваемая в работе задача поставлена профессором Ляховым Л.Н. и автор выражает ему глубокую благодарность.

Пусть $-1 < -\gamma < 0$. Уравнением Эйлера–Пуассона–Дарбу–Киприянова (ЭПДК) будем называть уравнение

$$B_{-\gamma,\,t}\, u(x,t) = B_{-\gamma,x}\, u(x,t), \tag{1}$$

где $B_{-\gamma,y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{y}\,\frac{\partial}{\partial y}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, с указанным выше отрицательным параметром $-\gamma$.

Сингулярное уравнения Бесселя

$$B_{-\gamma} u(y\xi) = -\xi^2\, u(y\xi)$$

имеет два линейно независимых решения

$$u_1 = \mathbb{J}_\mu(y) = \Gamma(1+\mu)\, 2^\mu\, y^\mu\; J_\mu(y)\,,$$

$$u_2 = \mathbb{J}_{-\mu}(y) = \Gamma(1-\mu)\, 2^\mu\, y^\mu\; J_{-\mu}(y)\,,$$

которые выражаются через функции Бесселя первого рода $J_{\pm\mu}$, где $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$.

Для $\frac{1}{2} < \mu < 1$ имеет место следующая теорема сложения

$$\mathbb{J}_\mu(x\xi)\; \mathbb{J}_\mu(t\xi) = \mathbb{T}_x^t \mathbb{J}_\mu(x\xi)\,,$$

см. [1], где обобщенный $\mathbb{T}$-псевдосдвиг определен следующим выражением

$$\mathbb{T}_x^t f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \frac{(xt)^{\gamma+1} f\left(\sqrt{x \overset{\alpha}{\to} t}\right)}{\left(\sqrt{x \overset{\alpha}{\to} t}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha d\alpha,$$

$$\sqrt{x \overset{\alpha}{\to} t} = \sqrt{x^2 + t^2 - 2xt\,\cos\alpha}.$$

Лемма 1. *Если $u(x)$ суммируемая с весом $x^{-\gamma}$ дважды непрерывно дифференцируемая четная по Киприянову функция, то*

$$B_{-\gamma,\,x}\mathbb{T}^t u(x) = B_{-\gamma,\,t}\mathbb{T}^t u(x)$$

Отметим также, что переменные x и t равносильны в смысле симметрии $\mathbb{T}_x^t f(x) = \mathbb{T}_t^x f(t)$.

Поставим следующую задачу Коши: найти функцию $u(x,t) \in S_{ev}$, удовлетворяющую следующим начальным условиям в предельной форме С.А. Терсенова [2]:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{\gamma+1}}\ u(x,t) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

где второе условие связано с четностью по Киприянову функции $f(x,t)$, заданной на $\overline{\mathbb{R}_2^+}$.

В данной работе решение представлено ясной формулой, которая по аналогии с формулой Пуассона из [3] есть применение оператора $\mathbb{T}$-псевдосдвига к начальному условию. Однако единственность этого решения требует удовлетворению условию Коши в предельной форме и не может быть задана непосредственно в точке $t = 0$. Мы воспользовались идеей С.А. Терсенова, которую он ввел для решений дифференциальных уравнений с вырождением на границе [2].

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая четная по Киприянову функция. Тогда решение задачи Коши (1), (2) определено следующей формулой Пуассона*

$$u(x,t) = \mathbb{T}^t f(x) = \frac{\Gamma\left(\mu+1\right)(xt)^{2\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi \frac{f\left(x \overset{\alpha}{\to} t\right)}{\left(x \overset{\alpha}{\to} t\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu}\alpha d\alpha.$$

Литература

1. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение оператора Δ_B Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665.

2. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А. Терсенов. — Новосибирск. : НГУ, 1973. — 144 с.

3. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б.М. Левитан // УМН. — 1951. — Т. 6, № 2. — С. 102–143.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ РИСКА

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)

ebulinsk@yandex.ru

Риск-менеджмент, иначе принятие решений в условиях неопределенности, — это очень важная проблема, возникающая во всех приложениях теории вероятностей. Отметим среди них наиболее известные: страхование, финансы, теория запасов и водохранилищ, массовое обслуживание и надежность, динамика популяций, биология и медицина.

Для этих областей характерны так называемые модели входа-выхода (input-output models), см. [1]. Для их описания необходимо задать набор $(Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$, т.е. входящий и выходящий процессы, управление, функционал, описывающий структуру и способ функционирования системы, а также целевую функцию, оценивающую качество функционирования системы.

Основное внимание в докладе будет уделено математическим моделям страхования, где входящий процесс — это поступление премий, выплачиваемых клиентами страховой компании (полисодержателями). Выходящий процесс — выплаты компании по наступившим страховым случаям. Что касается выбора управления, то здесь существует целый ряд возможностей в зависимости от поставленной цели.

Наиболее распространенные подходы: надежностный и стоимостной. Первый из них предполагает, что изучается вероятность разорения и ее надо минимизировать. Такой подход возник в 1903 году в диссертации Ф.Лундберга, где были заложены основы теории коллективного риска, развитой в 30-х годах в работах Х.Крамера. Этот подход до сих пор популярен, в частности, появились новые модели, где изучается так называемая парижская вероятность разорения. В качестве управления может выбираться начальный капитал страховой компании, метод подсчета страховой премии, создание резервов, перестрахование, банковские займы, дивиденды и инвестиции. Поскольку точный подсчет вероятности разорения возможен лишь для узкого класса выходящих процессов, существенный интерес представляют оценки вероятности разорения. Причем основная масса работ такого типа посвящена оценкам сверху (типа неравенства Лундберга). В докладе будут приведены новые результаты, полученные автором совместно со своим учеником А.А.Шатохиным, относящиеся к оценкам сверху и снизу для вероятности разорения страховщика и/или перестраховщика при использовании пропорционального перестрахования квотного типа.

В рамках стоимостного подхода речь идет о максимизации ожидаемого дисконтированного дохода страховой компании за время ее бездефицитного функционирования. Наряду с упомянутыми моделями будут рассматриваться дуальные модели, которые возникают, если поменять местами входящий и выходящий процессы. Такие задачи возникают в страховании жизни и при изучении венчурных компаний, которые несут фиксированные расходы и могут получать случайные доходы. Используется широкий спектр математических методов, включающий исследование интегральных и дифференциальных уравнений, а также порядки случайных величин. Часто это дает возможность заменять реальную сложную модель риска более простой, которая совместима с имеющимися реальными данными. В этой связи полезным оказывается понятие асимптотически оптимальных политик, см. [2].

В заключение будет показано, как полученные результаты могут быть распространены на другие приложения теории вероятностей.

Литература

1. Bulinskaya E.V. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E.V. Bulinskaya. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — V. 208, — P. 349–408.

2. Булинская Е.В. Эмпирические асимптотически оптимальные политики / Е.В. Булинская // Современные проблемы математики и механики : сборник, посвященный 190-летию П.Л. Чебышева. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 2011. — Т. 7, вып. 1. — С. 8–15.

О МЕТОДЕ РЕДУКЦИИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.Б. Васильев (Белгород, НИУ «БелГУ»)
vbv57@inbox.ru

1. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений возникают во многих теоретических и прикладных исследованиях, и, в частности, они появились в работах автора по дискретным псевдодифференциальным уравнениям и связанных с ними дискретным краевым задачам [1,2,3,4]. В этих работах описаны условия однозначной разрешимости таких уравнений, однако процесс нахождения решения представляет определенные вычислительные трудности. В связи с этим представляется целесообразным заменить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений конечной и объявить решение последней системы приближенным решением исходной бесконечной системы. Этот прием, грубо говоря, и носит название метода редукции. В работах [5,6] этот метод был обоснован как для одномерных, так и многомерных дискретных сверток при некоторых дополнительных предположениях.

2. Здесь рассматривается бесконечная система линейных алгебраических уравнений с матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, которая представляет собой линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X со стандартным базисом $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots)$,

$$A : X \to X.$$

Введем уравнение в пространстве X

$$Ax = y, \qquad (1).$$

Обозначим P_n проектор на линейную оболочку векторов $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$, которую мы обозначим X_n. Положим $A_n = P_n A P_n$, так что $A_n : X_n \to X_n$, и запишем "усеченное уравнение"

$$A_n x_n = P_n y \qquad (2)$$

в пространстве X_n. Таким образом, оператор A_n представлен матрицей $(a_{i,j=1}^n)$.

Теорема. *Если существует ограниченный обратный оператор $A^{-1} : X \to X$, то справедливы следующие утверждения:*

1) начиная с некоторого $N, \forall n \geqslant N$, операторы $A_n : X_n \to X_n$ обратимы и

$$||A_n^{-1}|| \leqslant C,$$

с постоянной C, не зависящей от n;

2) решение x_n уравнения (2) сходится к решению x уравнения (1) при $n \to \infty$.

Возможно, подобный результат представлен в математической литературе, однако автор не имеет соответствующей информации.

3. В упомянутых работах автора [1–4] решения дискретных краевых задач было получено в образах Фурье, и с вычислительной точки зрения предстоит выяснить, какой вариант приближенных вычислений более предпочтителен. Возможно, вычисления с дискретной системой в исходном пространстве приведет к более быстрому нахождению дискретного приближенного решения, например, в случае

исходных данных из класса функций, быстро убывающих на бесконечности.

Литература

1. Vasilyev A.V. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev // Math. Model. Anal. — 2018. — V. 23, No 3. — P. 492–506.

2. Васильев В.Б. О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах / В.Б. Васильев, О.А. Тарасова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2020. — Т. 174. С. 12–19

3. Васильев В.Б. О дискретных краевых задачах в четверти плоскости / В.Б. Васильев, А.А. Ходырева // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — Т. 223. — С. 14–23.

4. Васильев В.Б. О дискретной краевой задаче в четверти плоскости / В.Б. Васильев, А.А. Машинец // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т. 28, № 142. — С. 169–181.

5. Гохберг И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. — М. : Наука, 1971. — 352 с.

6. Козак А.В. Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свертках / А.В. Козак, И.Б. Симоненко // Сиб. матем. журн. — 1980. — Т. 21, № 2. С. 119–127.

СЛОЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК В ОКРЕСТНОСТИ ФОКАЛЬНОГО УРОВНЯ[1]

В.В. Ведюшкина (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)

arinir@yandex.ru

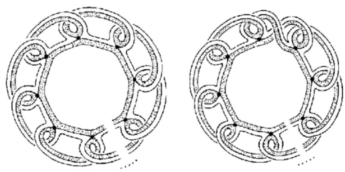
А.Т. Фоменко и Х. Цишанг разработали топологический подход, позволяющий эффективно описывать слоение Лиувилля классических интегрируемых гамильтоновых систем, таких как системы Лагранжа, Эйлера, Жуковского и Ковалевской [1]. Данный метод основывается на вычисление инварианта Фоменко Цишанга, который является графом Риба дополнительного интеграла на трехмерной изоэнергетической поверхности дополнительного интеграла системы, который снабжен дополнительной информацией. А именно, типом бифуркаций торов Лиувилля, а также некоторыми числовыми метками, кодирующими склейки граничных торов, принадлежащих

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-71-10106 в МГУ имени М.В. Ломоносова.

разным бифуркациям. В качестве новых ярких результатов, которые оказались возможны благодаря вычислению вышеупомянутых инвариантов, можно упомянуть эквивалентность задачи Якоби и случая Эйлера, а также невозможность понижения степени дополнительных интегралов в системах Ковалевской и Горячева-Чаплыгина [1].

С другой стороны, В. Драговичем и М. Раднович [2] этот подход был применён для анализа слоения Лиувилля плоских интегрируемых биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик [3]. Вычисление инвариантов здесь с одной стороны весьма наглядно, а с другой позволяет наглядно промоделировать ряд трехмерных бифуркаций. Однако, класс таких биллиардов весьма невелик, что привело к появлению нового объекта, а именно биллиардной книжки [4]. Рассмотрим клеточный комплекс, двумерными клетками которого являются плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Занумеруем их некоторым образом и припишем каждой одномерной клетке циклическую перестановку, состоящую из номеров двумерных клеток, ей инцидентных. Спроектируем комплекс на плоскость. Каждому образу одномерной клетки припишем перестановку, составленную из циклов в каждом прообразе этой дуги. Потребуем теперь, что если дуги имеют общую точку и образуют прямой угол, то приписанные им перестановки на плоскости коммутируют. В этом случае на комплексе можно корректно задать динамическую систему, описывающую движение биллиардной точки следующим образом. Внутри двумерных клеток происходит прямолинейное движение, а после удара о одномерную клетку точка меняется номер листа по соответствующей циклической перестановке. Интегрируемость плоских биллиардов влечёт интегрируемость биллиардной системы на книжке.

При решении задачи описания слоения произвольной биллиардной книжки методом Фоменко-Цишанга встает ряд трудностей. Одна из них состоит в обычной классификации биллиардных книжек как комплексов, с точностью до некоторого естественного отношения эквивалентности. Вторая состоит в том, что даже в случае фиксированного комплекса вычисление инварианта весьма трудоёмко. Отметим здесь, что биллиардные книжки позволяют, во-первых, реализовывать произвольные атомы-бифуркации, возникающие в невырожденных интегрируемых гамильтоновых системах [4], во-вторых, произвольные графы Фоменко – молекулы без числовых меток [5]. Эти результаты были получены построением биллиардных книжек, листы которых не содержат фокусов семейства квадрик. Наличие фокусов в двумерных клетках биллиардных книжек как правило приводит к тому, что топология изоэнергетической поверхности и соответствующее слоение Лиувилля становятся весьма нетривиальными. Тем не менее, тип атома-бифуркации на фокальном уровне (т.е. соответствующего перестройке траекторий касающихся эллипсов в траектории, касающиеся гипербол) уже не может быть произвольным. Как оказалось в случае, если биллиардная книжка склеена из биллиардов, ограниченных дугой эллипса и дугой гиперболы, то базой расслоения Зейферта будут максимально-симметричные атомы X_m и Y_m.



Базы расслоения Зейферта максимально симметричных атомов серий X_m и Y_m.

Литература

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, Т.1,2 / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. // Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. — 444 с.,447 с.

2. Драгович В. Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе / В. Драгович, М. Раднович // Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.

3. Козлов В.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами / В.В. Козлов, Д.В. Трещёв. // М.: Изд-во МГУ, 1991. — 168 с.

4. Ведюшкина В.В. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем / В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева // Матем. сб. — 2018. — Т. 209, № 12. — С. 17–56.

5. Ведюшкина В.В. Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем / В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева // Матем. сб. — 2021. — Т. 212, № 8. — С. 89–150.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ С ОБОСТРЕНИЕМ РЕЖИМА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ю.П. Вирченко, В.В. Ченцова (Белгород, БелГУ)
virch@bsu.edu.ru

Изучаются решения $u(x,t) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ с компактным носителем $[c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$ одномерного нелинейного уравнения теплопроводности

$$\dot{u} = \big(uu_x\big)_x + f(u)\,, \tag{1}$$

относительно функций $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ с самосогласованным источником $f(u) = \alpha u + \beta u^2$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ при $t \geqslant 0$ с *транспортным коэффициентом* $k(u) = u$ (см., например, [1]). Устанавливаются двусторонние оценки времени обострения для решений с компактным носителем, функционально зависящие от начальных условий $u(x,0)$. В этом случае возможно возникновение решений со слабым разрывом с компактным носителем [1]. При $\beta > 0$ такое уравнение уже не имеет глобальных решений, ввиду образования за конечное время разрывов второго рода — т.н. решения с обострением режима. Они существуют только лишь на конечном интервале времени $t \in [0, t_*)$ так, что $u(x,t) \to \infty$ в какой-то точке $x \in \mathbb{R}$ при $t \to t_*$, где t_* называется *временем обострения*. Для уравнения (1) имеет место принцип максимума

Теорема 1. *Пусть $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые по $x \in \mathbb{R}$ функции такие, что при $t \geqslant t_0 \in \mathbb{R}_+$ они удовлетворяют неравенствам*

$$\dot{u}^{(1)}(x,t) \leqslant \Big[\big(k(u^{(1)})u_x^{(1)}\big)_x + f(u_x^{(1)}, u^{(1)})\Big](x,t)\,,$$

$$\dot{u}^{(2)}(x,t) \geqslant \Big[\big(k(u^{(2)})u_x^{(2)}\big)_x + f(u_x^{(2)}, u^{(2)})\Big](x,t)\,,$$

соответственно. Если $u^{(1)}(x,t_0) \leqslant u^{(2)}(x,t_0)$, $x \in \mathbb{R}$, то для любого $t > t_0$ также имеет место неравенство $u^{(1)}(x,t) \leqslant u^{(2)}(x,t)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $u(x,t)$ слабые решения, которые конструируются следующим образом. Пусть также $w(x,t)$ классическое решение уравнения, то есть имеет место $\dot{w}(x,t) = (k(w)w_x)_x + g(w)$ и при этом $w(x_-(t),t) = w(x_+(t),t) = 0$. Определим функции

$$u(x,t) = \begin{cases} w(x,t) & , x \in [x_-(t), x_+(t)]\,; \\ 0 & , \mathbb{R} \setminus (x_-(t), x_+(t))\,. \end{cases} \tag{2}$$

Если $u(x,t)$ не является точным решением, то, по крайней мере, в одной из точек $x' = x_\pm(t)$ производная $\big(du/dx\big)_{\langle x_\pm(t),t\rangle}$ не равна нулю. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ — слабые решения вида (2), которые при $t \geqslant t_0 \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют неравенствам*

$$\dot u^{(1)}(x,t) \leqslant \Big[\big(k(u^{(1)})u_x^{(1)}\big)_x + g(u^{(1)})\Big](x,t)\,,$$

$$\dot u^{(2)}(x,t) \geqslant \Big[\big(k(u^{(2)})u_x^{(2)}\big)_x + g(u^{(2)})\Big](x,t)\,,$$

соответственно. Если $u^{(1)}(x,t_0) \leqslant u^{(2)}(x,t_0)$, $x \in \mathbb{R}$, то для любого $t > t_0$ также выполняется неравенство $u^{(1)}(x,t) \leqslant u^{(2)}(x,t)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Имеет место

Теорема 3. *Если решение $u(x,t)$ уравнения (1) расположено на компактном носителе в отрезке $[c_-, c_+]$ и обладает равномерным по $x \in [c_-, c_+]$ асимптотическим поведением $u(x,t) = u(x)\varphi(t)(1 + o(1)) \to \infty$ при $t \to t_*$, то неотрицательная функция $u(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(uu_x)_x + \beta u^2 = A^2 u\,, \quad A = \text{const}$$

так, что $\varphi(t) = \varphi(0)(1 - A^2\varphi(0)t)^{-1}$ и $t_* = [A^2\varphi(0)]^{-1}$.

Следствие. *Класс всех допустимых функций равномерно асимтотически точно приближающих неотрицательные решения $u(x,t) \to \infty$ при $t \to t_*$ уравнения (1), сосредоточенные на компактном носителе $\operatorname{supp} u(x,t) \subset [c_-, c_+]$ не пуст, только если $\beta > 0$ и $c_+ - c_- \geqslant \pi\sqrt{2\beta}$, и он описывается формулой*

$$u(x,t) = \frac{2A^2}{3\beta}(1 - A^2\varphi(0)t)^{-1}\Big(1 + \cos(L + (\beta/2)^{1/2}x)\Big)\,,$$

где $t_* = [A^2\varphi(0)]^{-1}$ и крайние точки $x_\pm$ носителя решения должны удовлетворять условиям $x_- > c_-$, $x_+ < c_+$, где

$$c_-(\beta/2)^{1/2} + L < \pi(2n_- + 1)\,, \quad c_+(\beta/2)^{1/2} + L > \pi(2n_+ + 1)\,,$$

$n_+ > n_-$. При этом необходимо, чтобы $c_+ - c_- \geqslant \pi(2\beta)^{1/2}$.

Определим эталонные решения $w(x,t)$ уравнения (1)

$$w(x,t) \;=\; a(t) \;+\; b(t)\cos\pi L_*^{-1}(x + x_0)\,.$$

Здесь $L_* = \pi\,(2/\beta)^{1/2}$, а функции $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot a = \alpha a + \beta\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right), \quad \dot b = \alpha b + \frac{3}{2}\,\beta\, ab\,. \tag{3}$$

Семейство решений $w(x,t)$ полностью описывается: $a(0), b(0)$ — начальными данными решений системы (3) и координатой x_0.

Будем считать, что решение $u(x,t)$ обладает компактным носителем, начальный размер которого r меньше L_*. Тогда найдутся такие: точка $x_0^{(1)}$ и значения параметров $a_1(0)$, $b_1 > 0$, $|a_1| \leqslant b_1$, для которых имеет место неравенство $u^{(1)}(x,0) \leqslant u(x,0)$. Выбором параметров $x_0^{(1)}, a_1(0), b_1(0)$ среди совокупности всех допустимых для них значений можно добиться, чтобы функция $u^{(1)}(x,0)$ аппроксимировала функцию $u(x,0)$ снизу наиболее оптимальным образом.

Точно также построим эталонное решение $u^{(2)}(x,t)$ с набором параметров $a_2(0)$, $b_2(0)$, $x_0^{(2)}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $u^{(2)}(x,0) \geqslant u(x,0)$, но его носитель не превосходил L_*. Выбрав параметры $a_j(0)$, $b_j(0)$, $x_0^{(j)}$, мы, тем самым, зафиксировали решения $\langle a_j(t), b_j(t)\rangle$, $j \in \{1,2\}$ динамической системы $\langle a(t), b(t)\rangle$, для которых выбранные значения являются начальными данными. В результате, аппроксимируемое точное решение уравнения (1) подчинено, в силу Теорем 2.2, неравенствам $u^{(1)}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant u^{(2)}(x,t)$.

Пусть это решение обладает обострением режима с временем обострения $t_* < \infty$. Заметим, что при $\alpha \geqslant 0$ любое эталонное решение обладает обострнием режима. Если же $\alpha < 0$, и, в этом случае, параметры $\langle a_-(0), b_-(0)\rangle$ могут быть выбраны так, что эталонное решение $u^{(1)}(x,t)$ также обладает обострением режима с некоторым временем обострения $t_*^{(1)}$, то, в силу указанного неравенства, $t_*^{(1)} \geqslant t_*$. Кроме того, обострением режима обладает эталонное решение $u_2(x,t)$ с временем обострения $t_*^{(2)}$, которое удовлетворяет неравенству $t_*^{(2)} \leqslant t_*$.

В силу неравенства $u^{(1)}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant u^{(2)}(x,t)$, зависящий от времени размер носителя $r(t)$ решения $u(x,t)$ также подчинен неравенствам $r_1(t) \leqslant r(t) \leqslant r_+(t) \leqslant L_*$, где $r_j(t)$ — размеры носителей эталонных решений $j \in \{1,2\}$. Поэтому, имеет место $r(t_*) \leqslant L_*$. Из Теоремы 3 следует, что предельные значения всех носителей совпадают и равны L_*. Таким образом, мы получаем возможность оценивать время обострения и размер области локализации произвольного решения уравнения (1) с компактным носителем, не превосходящим L_*.

Система (3) интегрируется. Это позволяет построить эталонные решения $u_j(x,t)$, $j \in \{1,2\}$, у которых $b(t) > |a(t)|$. На основе этих решений находятся главные члены асимптотик решений при $u(x,t) \to \infty$. Эти асимптотики характеризуются временем обострения

$$t_* = \alpha^{-1} \ln \Big(1 + \frac{\alpha}{\beta b(0)}\Big(1 - \Big(\frac{a(0)}{b(0)}\Big)^2\Big)^{-3/2} \times$$

$$\times \Big[\arcsin \Big[1 - \Big(\frac{a(0)}{b(0)}\Big)^2\Big]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)}\Big[1 - \Big(\frac{a(0)}{b(0)}\Big)^2\Big]^{1/2}\Big]\Big),$$

выраженным через начальные данные.

Литература

1. Маслов В.П. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур / В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов.// — М. : Наука, 1969. — 352 с.

2. Потемкина Е.В. Режимы с обострениями в задаче Коши для неоднородного уравнения теплопроводности/ Е.В. Потемкина // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 6. — С. 221–222.

АСИМПТОТИКИ ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ БЕРЕГОВЫХ ВОЛН ИХ СВЯЗЬ С БИЛЛИАРДАМИ С ПОЛУЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ[1]

М.М. Вотякова, Д.С. Миненков

(Москва, ИПМех РАН; МГУ, механико-математический факультет)

votiakova.mm@phystech.edu, minenkov.ds@gmail.com

Под береговыми волнами мы понимаем периодические или близкие к периодическим по времени гравитационные волны на воде в бассейне глубины $D(x)$, $x = (x_1, x_2)$, локализованные в окрестности береговой линии $\Gamma^0 = \{D(x) = 0\}$. В двух конкретных примерах мы строим отвечающие береговым волнам асимптотические решения системы нелинейных уравнений мелкой воды в виде параметрически заданных функций, определяемых через асимптотики линеаризованной системы (см. [1]), которые в свою очередь связаны с асимптотическими собственными функциями оператора $\hat{L} = -\nabla g D(x) \nabla$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 22-71-10106 в МГУ имени М.В.Ломоносова

Область определения оператора — гладкие функции $\xi(x)$ в области $\Omega = \{x : D(x) > 0\}$ с конечной энергией: $|\xi|_{x \in \Gamma^0} < \infty$. Также обсуждается связь построенных асимптотик с классическими (почти интегрируемыми) "биллиардами с полужесткими стенками".

Литература

1. Dobrokhotov S.Y. Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach / S.,Y. Dobrokhotov, D.S. Minenkov, V.E. Nazaikinskii // Russ. J. Math. Phys. — 2022. — vol. 29, — p. 28–36.

ЗАДАЧИ ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

М.В. Гасанов, В.Н. Орлов (Москва, НИУ МГСУ)
GasanovMV@mgsu.ru, Orlovvn@mgsu.ru

При описании процессов и явлений очень часто используются дифференциальные уравнения. В случае линейных дифференциальных уравнений, существует классическая теория для их решения, но когда при описаний явлений и процессов используются нелинейные дифференциальные уравнения, то возникают сложности, связанные с наличием подвижных особых точек, которые являются условием неразрешимости таких уравнений, в общем случае, в квадратурах. На данный момент, для решения нелинейных уравнений существует всего два варианта: либо разрешимость в квадратурах, с помощью использования специальной замены переменной (преобразование Шварца, преобразование групп Ли и т. п.), как показано в работах [1], [2], либо аналитический приближенный метод решения [3 – 5], основанный на решении следующих математических задач:

1. Теорема существования и единственности решения в области аналитичности и окрестности подвижной особой точки

2. Построение структуры аналитического приближенного решения в области аналитичности и окрестности подвижной особой точки.

3. Влияние возмущения начальных данных на структуру аналитического приближенного решения в области аналитично-

сти. Влияние погрешности приближенного значения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения в окрестности подвижной особой точки

4. Расширение границ области применения аналитического приближенного решения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки

5. Необходимые, необходимые и достаточные условия существования подвижной особой точки

6. Алгоритм нахождения подвижной особой точки с заданной точностью

Рассматривается задача Коши

$$y''' = y^2(z) + r(z). \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(z_0) = y_0, \\ y'(z_0) = y_1, \\ y''(z_0) = y_2. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Потребуем выполнение следующих условий:*
1. Пусть z^* – подвижная особая точка решения задачи Коши (1) – (2)
2. Функция $r(z)$ голоморфна в области $|z^* - z| < \rho_1$,
тогда решение задачи Коши (1) – (2) имеет вид:

$$y(z) = (z^* - z)^{-3} \sum_{0}^{\infty} C_n (z^* - z)^n \tag{3}$$

в области

$$|z^* - z| < \rho_2, \tag{4}$$

где

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}\right\},$$

$$M = \max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \left\{\frac{\left|r^{(n)}(z^*)\right|}{n!}\right\}\right\}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для определения критериев существования воспользуемся технологией регуляризации подвижной особой точки, сделав замену $y(z) = \frac{1}{w(z)}$.

Инверсная задача Коши имеет вид:

$$w'''w^2 = -6w'^3 + 6ww'w'' - w^2 - r(z)\,w^4 \tag{5}$$

$$\begin{cases} w(z_0) = w_0, \\ w'(z_0) = w_1, \\ w''(z_0) = w_2. \end{cases} \tag{6}$$

Решение данной задачи Коши, с учетом замены, имеет вид:

$$w(z) = (z^* - z)^3 \sum_0^\infty D_n (z^* - z)^n .$$

Критерии существования в комплексной и вещественной области отличаются. В случае комплексной области используется переход к фазовым пространствам.

Далее будут сформулированы критерии для случая вещественной области. В формулировках теорем будем использовать независимую переменную x.

Теорема 2. *(точечный критерий существования подвижных особых точек) Точка x^* является подвижной особой точкой, кратности 3, функции $y(x)$, решение задачи Коши (1)–(2), тогда и только тогда когда для функции $x(w)$, $x(w)$ — есть обратная функция к решению инверсной задачи Коши (5)–(6), выполняются условия:*

$$x(0) = x^*, x'(0) = 0, x''(0) = 0, x'''(0) = \frac{1}{10}. \tag{7}$$

Теорема 3. *(интервальный критерий существования подвижной особой точки) x^* является подвижной особой точкой решения задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда существует некоторая окрестность подвижной особой точки $[x_1; x_2]$, $x^* \in [x_1; x_2]$, для которой функция $w(x)$ являлась бы непрерывной, и выполнялось условие:*

$$w(x_1) \cdot w(x_2) < 0.$$

Литература

1. Carillo S. Schwarzian derivative, Painleve XXV–Ermakov equation, and Backlund transformations,/ S. Carillo, A. Chichurin, G. Filipuk, F. Zullo // Math. Nachr. — 2023. — P. 1–19. `https://doi.org/10.1002/mana.202200180`

2. Carillo S. A short note on the Painleve XXV–Ermakov equation / S. Carillo, A. Chichurin, G. Filipuk, F.

Zullo // Applied Mathematics Letters, Vol. 131, — 2022. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108064

3. Orlov V. Moving Singular Points and the Van der Pol Equation, as Well as the Uniqueness of Its Solution. / V. Orlov // Mathematics — 2023. https://doi.org/10.3390/math11040873

4. Pchelova A. Construction of approximate solutions for a class of first-order nonlinear differential equations in the analyticity region, Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. / Pchelova // Nat. Sci., — 2016. — P. 3–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-3-15

5. Gasanov M. A Study of a Mathematical Model with a Movable Singular Point in a Fourth-Order Nonlinear Differential Equation/ M. Gasanov, A. Gulkanov // Rus. J. Nonlin. Dyn., — 2023. https://doi.org/10.20537/nd230904

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРУППАХ ЛИ[1]

Ю.Е. Гликлих (Воронеж, ВГУ)
yeg@math.vsu.ru

К настоящему веремени множество процессов в технике и инженерном деле описывается математически в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений на нелинейных многообразиях. И очень часто возникает задача о нахождении периодических решений указанных уравнений. Эта задача особенно сложна, если правая часть уравнения только непрерывна и не удовлетворяет, например, условию Липшица, т.е. задача Коши для уравнения не имеет единственного решения. В этом случае для уравнений в линейном пространстве для исследования периодических решений используется метод интегральных операторов. Напомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение в векторном пространстве может быть преобразовано в эквивалентное интегральное уравнение. Например, задача Коши $\dot{x} = f\big(t, x(t)\big)$, $x(0) = x_0$ в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна интегральному уравнению $x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(\tau, x(\tau)\big)\, d\tau$.

Однако классические интегральные операторы на многообразиях не ковариантны, т.е., зависят от выбора карты. Ранее нами были построены так называемые интегральные операторы с римановым параллельным переносом, которые ковариантны, что позволило

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00004).

использовать их для исследования дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью, но которые были не применимы в задаче о периодических решениях. Здесь мы строим новый тип указанных операторов на группах Ли такой, что их неподвижные точки являются периодическими решениями дифференциальных уравнений с непрерывными периодическими правыми частями. Отметим, что эти операторы действуют в пространстве (многообразии) C^1- кривых и только из вторые итерации являются вполне непрерывными операторами. Мы описываем конструкцию топологического индекса для этих операторов и не основе использования направляющих функций приводим пример, в котором индекс оператора не равен нулю откуда следует существование периодического решения.

ЗАДАЧА ХОДЖА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА И УСЛОВИЕ ПРИЛИПАНИЯ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

А.В. Горшков (Москва, МГУ)
alexey.gorshkov.msu@gmail.com

Задачей Ходжа-Гельмгольца называется задача восстановления соленоидального векторного поля по вихревой функции. Рассмотрим внешнюю область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, которая является дополнением односвязной области с кусочно-гладкой границей. С условием прилипания и заданным потоком на бесконечности внешняя задача имеет вид

$$\operatorname{div}\, v(x) = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{curl}\, v(x) = w(x), \tag{2}$$

$$v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

$$v(x) \to (v_\infty, 0),\ |x| \to \infty. \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$ - двумерное векторное поле, $\operatorname{curl}\, v(x) = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$.

С условием прилипания эта задача вообще говоря не разрешима. Для её разрешимости требуется ряд дополнительных условий на вихревую функцию.

В работе Квартапэлли, Уальс-Гриза[1] выведены проекционные условия на вихревую функцию, заключающиеся в ортогональности ротора гармоническим функциям. Векторное поле представляется как орто-градиент $v = \nabla^\perp \psi$ функции тока ψ, где $\nabla^\perp_x = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$.

Тогда в ограниченных областях с нулевыми граничными условиями $\psi(x) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} = 0,\ x \in \partial\Omega$ из соотношения $\Delta\psi = \mathrm{curl v}$ согласно формуле Грина следует ортогональность curlv гармоническим функциям. Это и есть условие прилипания, выраженное в терминах только вихревой функции.

Оказывается, этот принцип ортогональности может быть распространен на внешние области[2]. Аналогичное условие ортогональности для внешних областей имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{w(x)}{\Phi(z)^k}dx = \begin{cases} 0,\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ k \neq 1, \\ iv_\infty,\ k = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь Φ — это отображение Римана области Ω на единичный круг B_1. Для функции ротора будем рассматривать весовое пространство

$$L_{2,N}(\Omega) = \{f(x) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(\Omega)} = \int_{\Omega}|f(x)|^2(1+|x|^2)^N \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Теорема *Если $w \in L_{2,N}(\Omega)$ с $N > 1$ удовлетворяет (5), то тогда существует единственное решение задачи (1)-(4), удовлетворяющее оценке*

$$\|v(\cdot) - v_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}.$$

Как было показано Финном[4], для стационарных течений величина $v(\cdot) - v_\infty$ имеет бесконечную L_2 норму. Однако из (5) следует, что среднее ротора равняется нулю, и, следовательно, согласно формуле Стокса, отсутствует циркуляция на бесконечности, и энергия становится конечной.

Условие ортогональности (5) позволяет найти граничное условие для ротора curl $v(t,x)$ нестационарной системы Стокса. Пусть $w(t,x) = \mathrm{curl}\ v(t,\Phi^{-1}(x))$ есть вихревая функция потока Стокса, заданная во внешности круга. Для нее граничное условие прилипание в терминах коэффициентов Фурье w_k будет иметь вид

$$r_0\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k|w_k(t,r_0) = 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Используя эти граничные условия в работе автора [2] была найдена явная формула решения системы Стокса обтекания кругового цилиндра в вихревой форме. В работе [3] найдено схожее граничное условие для ротора, соответствующее условию прилипания, для системы Навье-Стокса.

Литература

1. Quartapelle L. Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows. / Quartapelle L., Valz-Gris, F. // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1981. — 1(2), — pp. 129–144.

2. Gorshkov A.V. No-Slip Boundary Condition for Vorticity Equation in 2D Exterior Domain / Gorshkov A.V. // J. of Math. Fluid Mech. — 2023. — 25:47.

3. Gorshkov A.V. Associated Weber-Orr Transform, Biot-Savart Law and Explicit Form of the Solution of 2D Stokes System in Exterior of the Disc. / Gorshkov A.V. // J. Math. Fluid Mech. — 2019. 21:3.

4. Finn R. An energy theorem for viscous fluid motions./ Finn R. // Arch. Rational Mech. Anal. — 1960. 6 — pp. 371–381.

ТУННЕЛЬНЫЕ ПО МАСЛОВУ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕПРЕРЫВНЫМИ И ДИСКРЕТНЫМИ АРГУМЕНТАМИ

В.Г. Данилов (Москва, НИУ ВШЭ)

vgdanilov@mail.ru

Туннельные асимптотики это асимптотические решения имеющие вид

$$U_{as} = \exp(-S/\varepsilon)\varphi(x,t,\varepsilon), S \geqslant \text{const},$$

$\varepsilon \to +0$ – малый параметр. Естественное приложение для такой техники – параболические задачи различного происхождения. Принципиальное отличие асимптотических решений такого вила от обычных ВКБ решений состоит в том, что $\exp(-S/\varepsilon)$ играет роль "второго"малого параметра. Это проявляется в том, что оценка $\max|U - U_{as}| = O(\varepsilon^N)$ – фиксированное число >0, вполне хорошая для асимптотических ВКБ решений, оказывается малосодержательной в области $S \geqslant \delta > 0$, где $U_{as} = O(\varepsilon^M)$ для всех $M > 0$, то есть асимптотика меньше разности между асимптотическим и точным решением. Далее, в отличие от ВКБ решений, к туннельным задачам с трудом применимы техники, основанные на преобразовании Фурье. Это затрудняет построение фундаментальных решений и разрушает конструкцию канонического оператора Маслова, широко используемого для гиперболических задач.

В докладе я расскажу о малоизвестной (моей) формуле для асимптотических фундаментальных решений задач Коши в пространстве и на сетке, о возможных способах построения глобальных асимптотических решений (включая случай с каустиками). Также будет рассказано о применении этой техники к задачам случайного блуждания.

Литература

1. Danilov V. G. A representation of the delta-function via creation operators and gaussian exponentials, and multiplicative fundamental solution asymptotics for some parabolic pseudodifferential-equations / V. G. Danilov // Russian Journal of Mathematical Physics. — 1995. — Vol. 3. — no. 1. — P. 25–40.

2. Danilov V. G. Nonsmooth non-oscillating exponential-type asymptotics for linear parabolic PDE / V. G. Danilov // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2017. — Vol. 49. — no. 5. — P. 3550–3572.

3. Данилов В.Г. Асимптотика фундаментальных решений параболических задач / В. Г. Данилов // Математические заметки. — 2024. — Т. 115. — В. 2.

ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОДВИЖНЫМИ И ФИКСИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Г. Джангибеков., Г. Козиев (Душанбе, ИМ НАНТ и МУТПТ)
gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $a(z), b(z), c(z), d(z), e(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ функции; $K_1(z,\zeta)$, $K_2(z,\zeta)$ - измеримые ограниченные функции, имеющие пределы $\lim_{z,\zeta\to 0} K_j(z,\zeta) = K_j(0,0)$; $h_1(\sigma)$ и $h_2(\sigma)$ - измеримые на всей комплексной плоскости функции, причем

$$\iint_{|\sigma|<\infty} |h_j(\sigma)||\sigma|^{-\beta} ds_\sigma < \infty, \quad j = 1, 2,$$

где β – некоторое число из интервала $(0,2)$, ds_σ – элемент плоской меры Лебега; пусть, наконец, $B(z,\zeta)$ – керн-функция Бергмана области D, представимая в виде (см., например, [1], стр. 252, 258)

$$B(z,\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{(1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^2},$$

где $\omega(z)$ – однолистное конформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат, причем $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) > 0$. Штрих обозначает производную, черта над функцией - операцию комплексного сопряжения.

Рассматривается уравнение

$$a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + \frac{c(z)}{\pi}\frac{z}{\overline{z}}\iint_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} + \frac{d(z)}{\pi}\frac{\overline{z}}{z}\iint_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} +$$

$$+e(z)\iint_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta + \frac{1}{|z|^2}\iint_D K_2(z,\zeta)h_1\left(\frac{\zeta}{z}\right)\overline{f(\zeta)}ds_\zeta +$$

$$+\frac{1}{|z|^2}\iint_D K_2(z,\zeta)h_2\left(\frac{\zeta}{z}\right)f(\zeta)ds_\zeta = g(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

где первые два интеграла понимаются в смысле главного значения по Коши.

Операторы из (1) включаются в класс многомерных сингулярных интегральных операторов изученных в [2] – [5], а также относятся к классу операторов с однородными ядрами, разрешимость которых исследована в работах [6]–[8]. Добавим к этому, что при $b(z) \equiv 0$, $c(z) \equiv 0$, уравнение (1) рассматривалось в [8].

Для уравнения (1) получены условия нетеровости и формула индекса в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

где β - число из интервала (0,2), $1 < p < \infty$.

Литература

1. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности / Р. Курант. — М. : 1953. — 310 с.

2. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. — М. : Наука, 1962. — 254 с.

3. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений / И.Б. Симоненко // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1965. I,II. — Т. 29, № 3, 4, С. — 567–580; 757–782.

4. Duduchava R. On multidimensional singular integral operators / R. Duduchava // Jour. of Oper. Theory — 1984. I,II, — vol. 11, P. 41–76; 199–214.

5. Джураев А. Метод сингулярных интегральных уравнений / А. Джураев. — М. : Наука, 1987. —415 с.

6. Михайлов Л.Г. О некоторых двумерных интегральных уравнениях с однородными ядрами / Л.Г. Михайлов // ДАН СССР. — 1970. —Т. 190, — № 2, С. 272–275.

7. Бойматов К.Х. Об одном сингулярном интегральном операторе / К.Х. Бойматов, Г. Джангибеков // Успехи математических наук. — 1988. — Т. 43, вып. 3, (261). — С. 171–172.

8. Бильман Б.М. Об условиях нетеровости и индексе некоторых особых двумерных интегральных уравнений / Б.М. Бильман, Г.Джангибеков // ДАН СССР. — 1990. — Т. 312, № 1 — С. 15–19.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОГОГО БЕРЕГА[1]

С.Ю. Доброхотов, Д.С. Миненков,
В.Е. Назайкинский (Москва, ИПМех РАН)
s.dobrokhotov@ gmail.com

Предлагается метод редукции нелинейных задач со свободной границей к линейным для решений нелинейной системы уравнений мелкой воды в одно– или двумерной области. Предполагается, что амплитуда решений достаточно мала (характеризуется параметром ε) и что задающая глубину бассейна гладкая функция (x_1, x_2) такова, что $\nabla D \neq 0$ на береговой линии $\Gamma = \{x : D = 0\}$. Асимптотическим решением системы называется гладко зависящая от ε тройка (область, возвышение свободной поверхности, скорость), такая, что сумма возвышения свободной поверхности и глубины положительна внутри области и равна нулю на ее границе, а сами функции, задающие возвышение свободной поверхности и скорость, являются гладкими в этой области и удовлетворяют исходной нелинейной системе всюду в области с точностью до некоторой степени ε. Для построения асимптотических решений задачи для нелинейной системы уравнений мелкой воды предлагается замена переменных (типа упрощенного преобразования Карриера–Гринспана), зависящая от самого неизвестного решения и преобразующая область, в которой последнее определено, в независящую от решения невозмущенную область, и затем полученная нелинейная система решается стандартными методами теории возмущений. В качестве нулевого приближе-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-30011).

ния, определяющего старший член асимптотики, возникает линейная гиперболическая система с вырождением на границе области. В докладе будут даны точные конструктивные формулировки этого и связанных с ним других полезных подходов. утверждений и описаны связи с имеющимися в литературе результатами, а также приведены примеры, в том числе для волн цунами. Также будет проведено сравнение полученных решений с результатами лабораторного эксперимента.

Литература

1. Dobrokhotov S. Yu. Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach / S. Yu. Dobrokhotov, D. S. Minenkov, V. E. Nazaikinskii // Russ.J. Math. Phys — 2022 — Vol. 29, № 1, — pp. 28–36.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.Ю. Егорова (Рязань, РГУ имени С. А. Есенина)

an_batseva@mail.ru

Разрешимость задачи Коши для параболических систем зависит от гладкости входящих в них коэффициентов, функций правой части и начального условия. В фундаментальной работе [1] В. А. Солонниковым установлена разрешимость задачи Коши для параболической системы порядка $2p$ и построена шкала гладкости решений в анизотропных пространствах Гёльдера для нецелого показателя гладкости.

В настоящей работе результаты, полученные В. А. Солонниковым, обобщены для параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, и построена шкала гладкости решений таких систем в анизотропных пространствах Зигмунда с целым показателем гладкости. Кроме того, в данной работе используются рассуждения, приведенные в [2] для уравнения теплопроводности, и распространяются на случай параболических систем второго порядка.

Рассмотрим в слое $D = \mathbb{R}^n \times (0;T)$, $0 < T < \infty$, задачу Коши для параболической системы вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k,r=1}^{n} a_{ijkr} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k x_r} = f_i, \quad u_i|_{t=0} = \psi_i, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (1)$$

Система (1) в слое D удовлетворяет условиям равномерной параболичности в смысле И. Г. Петровского и ее решение u выражается через сумму потенциала Пуассона с плотностью ψ и объемного потенциала с плотностью f, то есть $u = \Pi\psi + Vf$.

Используя результаты работы [3], получаем

Теорема 1. *Пусть m и l — натуральные числа, причем $m \geqslant 2$, $l \leqslant m$. Тогда отображение $V : f \to Vf$ является ограниченным оператором из пространства $H^{(2-l)}_{m-2}(D)$ в $H^{(-l)}_{m}(D)$.*

Так как функции из пространства $H^{(2-l)}_{m-2}$ при $m \geqslant 3$ и $0 < l \leqslant m$ локально непрерывны по Гёльдеру [2], то объемный потенциал с плотностью $f \in H^{(2-l)}_{m-2}$ удовлетворяет системе (1) в слое D. Тогда $u = \Pi\psi + Vf \in (\bar{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D)$ — классическое решение задачи Коши (1). Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть $m \geqslant 3$ и $0 < l \leqslant m$, $f \in H^{(2-l)}_{m-2}$ и $\psi \in H_l(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует единственное классическое решение u задачи Коши (1) из пространства $H^{(-l)}_{m}(D)$ и удовлетворяет оценке*

$$|u|^{(-l)}_{m;D} \leqslant C(|f|^{(2-l)}_{m-2;D} + |\psi|_{l;\mathbb{R}^n}).$$

Из разрешимости задачи Коши в анизотропных пространствах Зигмунда можно получить локальную гладкость решений системы $Lu = f$. В частности, из теоремы 2 следует, что любое решение системы (1), где $f \in H_l(D)$ при $l \geqslant 1$, в слое D будет принадлежать пространству $H_{l+2}(D)$.

Литература

1. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В. А. Солонников // Тр. МИАН СССР. — 1965. — Т. 83. — С. 3–163.

2. Конёнков А. Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 820–831.

3. Егорова А. Ю. Задача Коши для системы параболических уравнений в анизотропных пространствах Зигмунда / А. Ю. Егорова // Вестник БГУ. Математика, информатика. — 2023. — №3. — С. 14–22.

МЕТОД ПОЛЕВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Д.С. Жалукевич (Белосток, БГУ)
den.zhal@yandex.by

Рассмотрим автономную систему 3-го порядка [1-3]:

$$\begin{gathered}\dot{x} = P(x,y,z), \quad \dot{y} = Q(x,y,z), \quad \dot{z} = R(x,y,z),\\ (x,y,z) \in G \subseteq \Re^3.\end{gathered} \tag{1}$$

Введем обозначения

$$\vec{v} = \hat{T}\vec{r}, \quad \vec{a} = \hat{T}\vec{v}, \quad \vec{w} = \hat{T}\vec{a}, \tag{2}$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\hat{T} = \dfrac{d}{dt} = \vec{v}\cdot\nabla$, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Дифференцируя систему (1) по времени, мы получаем систему

$$\begin{gathered}\ddot{x} = F_1(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \quad \ddot{y} = F_2(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\\ \ddot{z} = F_3(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$F_1 = \dot{P} = \vec{v}\cdot\nabla P, \quad F_2 = \dot{Q} = \vec{v}\cdot\nabla Q, \quad F_3 = \dot{R} = \vec{v}\cdot\nabla R. \tag{4}$$

Дифференцируя систему (3) по времени, мы получаем систему

$$\begin{gathered}\dddot{x} = \Phi_1(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}), \quad \dddot{y} = \Phi_2(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}),\\ \dddot{z} = \Phi_3(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}),\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_1 = \dot{F_1} = \ddot{P} = \vec{a}\cdot\nabla P + \vec{v}\cdot\nabla F_1, \quad \Phi_2 = \dot{F_2} = \ddot{Q} = \vec{a}\cdot\nabla Q + \vec{v}\cdot\nabla F_2,\\ \Phi_3 = \dot{F_3} = \ddot{R} = \vec{a}\cdot\nabla R + \vec{v}\cdot\nabla F_3.\end{gathered} \tag{6}$$

Теорема 1. *Для стационарного объемного поля системы (1) связи между первичной, вторичной и третичной матрицами имеют вид*

$$A_2 = A_1^2 + \vec{v}\cdot\nabla A_1, \tag{7}$$

$$A_3 = A_1A_2 + A_2A_1 + \vec{v} \cdot \nabla A_2 + \vec{a} \cdot \nabla A_1. \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\sigma_1 = TrA_1 = \nabla \cdot \vec{v}, \quad \sigma_2 = TrA_2 = \nabla \cdot \vec{a}, \quad \sigma_3 = TrA_3 = \nabla \cdot \vec{w}, \tag{9}$$

$$\vec{\rho}_1 = \nabla \times \vec{v}, \quad \vec{\rho}_2 = \nabla \times \vec{a}, \quad \vec{\rho}_3 = \nabla \times \vec{w}, \tag{10}$$

где TrA_1, TrA_2 и TrA_3 являются следами первичной, вторичной и третичной матриц.
Циркуляции можно записать через проекции на оси координат

$$\vec{\rho}_k = \rho_{k1}\vec{i} + \rho_{k2}\vec{j} + \rho_{k3}\vec{k}, \tag{11}$$

где $k = \overline{1,3}$.

Потоки и циркуляции произвольного порядка связаны выражениями

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k^{(1)} = \sigma_1^{(k)}, \quad \vec{\rho}_{k+1} = \vec{\rho}_k^{(1)} = \vec{\rho}_1^{(k)}, \tag{12}$$

где $\sigma_1^{(k)} = \dfrac{d^{(k)}\sigma_1}{dt^{(k)}}, \vec{\rho}_1^{(k)} = \dfrac{d^{(k)}\vec{\rho}_1}{dt^{(k)}}, k = \overline{1,n}.$

Характеристические уравнения для первичной, вторичной и третичной матриц имеют вид

$$\lambda_{kl}^3 - \sigma_k\lambda_{kl}^2 + \tau_k\lambda_{kl} - J_k = 0, \tag{13}$$

$$D_k = -4\sigma_k^3 J_k + \sigma_k^2\tau_k^2 - 4\tau_k^3 + 18\sigma_k\tau_k J_k - 27J_k^2, \tag{14}$$

где $k = \overline{1,3}, l = \overline{1,3}$.

Определитель произвольного порядка и скаляр τ_k могут быть записаны в виде

$$J_k = detA_k = \sum_{j=1}^{3} a_{kij}A_{kij}, \tag{15}$$

$$A_{kij} = (-1)^{i+j}M_{kij}, \tag{16}$$

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{3} M_{kjj}, \tag{17}$$

где A_{kij} - алгебраическое дополнение элемента a_{kij}, M_{kij} - минор элемента a_{kij}, $i = \overline{1,3}$.

Теорема 2. *Для стационарного объемного поля системы (1) сумма миноров главной диагонали вторичной матрицы имеет вид*

$$\tau_2 = \tau_1^2 - 2\sigma_1 J_1 + \vec{v} \cdot \nabla\tau_1. \tag{18}$$

Теорема 3. *Для стационарного объемного поля системы (1) соотношения между первичными, вторичными и третичными характеристиками поля имеют вид [4]*

$$\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\tau_1 + \vec{v} \cdot \nabla\sigma_1, \tag{19}$$

$$\vec{\rho}_2 = \sigma_1\vec{\rho}_1 + \vec{v} \cdot \nabla\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_1 \cdot \nabla\vec{v}, \tag{20}$$

$$\sigma_3 = 2\sigma_1\sigma_2 - 2\dot{\tau}_1 + \vec{a} \cdot \nabla\sigma_1 + \vec{v} \cdot \nabla\sigma_2, \tag{21}$$

$$\vec{\rho}_3 = \sigma_2\vec{\rho}_1 + \sigma_1\vec{\rho}_2 + \vec{a} \cdot \nabla\vec{\rho}_1 + \vec{v} \cdot \nabla\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_2 \cdot \nabla\vec{v} - \vec{\rho}_1 \cdot \nabla\vec{a}, \tag{22}$$

где

$$\dot{\tau}_1 = \sigma_1\tau_1 - 3J_1 + \vec{v} \cdot \nabla\tau_1.$$

Литература

1. Жалукевич Д.С. Метод полевых характеристик для автономных систем второго порядка / Д.С. Жалукевич // Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXIV», посвященная 115-летию со дня рождения академика Л.С. Понтрягина. — Воронеж. — 2023. — с. 149—151.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. — Ижевск : Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.

3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. // М. : Наука, 1986. — 736 с.

4. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности / А.Н. Матвеев. — М. : Высшая школа, 1964. — 424 с.

ЭТА-ИНВАРИАНТ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ[1]

К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)

zhuykovcon@gmail.com, antonsavin@mail.ru

Атья, Патоди и Зингер [1] ввели понятие η-инварианта для эллиптических самосопряженных псевдодифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии как регуляризацию типа дзета-функции сигнатуры квадратичной формы, отвечающей оператору. η-инвариант по определению является спектральным инвариантом и входит во многие формулы индекса, например, в случае

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00336.

эллиптических операторов на многообразиях с коническими точками [2], на многообразиях с периодическими концами [3], и т.д. В работе [4] было построено обобщение η-инварианта на случай эллиптических краевых задач.

Позднее Мельроуз [5], используя методы эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО) с параметром [6], определил η-инвариант как регуляризацию числа вращения и показал, что построенный η-инвариант совпадает с η-инвариантом Атьи–Патоди–Зингера для некоторого обратимого оператора с параметром. Более точно, η-инвариант обратимого ПДО с параметром $D(p)$, $p \in \mathbb{R}$, формально вычисляется по формуле

$$\eta(D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr} \left(D^{-1} \frac{dD}{dp} \right) dp, \tag{1}$$

где след, как правило, не существует, а интеграл расходится. Поэтому ключевую роль при исследовании η-инварианта играет построение регуляризаций для следа и интеграла.

В данной работе мы строим η-инвариант вида (1) (и соответствующие регуляризации) в случае, когда $D(p)$ — эллиптическая (в смысле работы [6]) краевая задача с параметром. При этом регуляризация следа подразумевает получение асимптотики на бесконечности следа композиций обратимых краевых задач с параметром — основной технический результат работы. Доказательство этого результата задействует аппарат краевых задач для ПДО [7-8] и состоит в сведении краевых задач для ПДО с параметром к краевым задачам для ПДО (без параметра) на цилиндре. Кроме того, получены некоторые свойства η-инварианта: логарифмическое свойство, связь с η-инвариантом из работы [4], а также получена явная формула для вариации η-инварианта.

Первый автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и выражает благодарность его спонсорам и жюри.

Литература

1. Atiyah M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I,II,III / M. Atiyah, V. Patodi, I. Singer // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — Vol. 77. — PP. 43–69; — 1976. — Vol. 78. — PP. 405–432; — 1976. — Vol. 79. — PP. 71–99;

2. Fedosov B.V. The index of higher order operators on singular surfaces / B.V. Fedosov, B.W. Schulze, N. Tarkhanov // Pacific J. of Math. — 1999. — Vol. 191, No 1. — PP. 25–48.

3. Mrowka T. An index theorem for end-periodic operators / T. Mrowka, D. Ruberman, N. Saveliev // Compositio Math. — 2016. — Vol. 152, No 2. — PP. 399–444.

4. Gilkey P.B. The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems / P.B. Gilkey, L. Smith // Comm. Pure Appl. Math. — 1983. — Vol. 36. — PP. 85–132.

5. Melrose R. The eta invariant and families of pseudodifferential operators / R. Melrose // Math. Research Letters. — 1995. — Vol. 2, No. 5. — PP. 541–561.

6. Агранович М.С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М.С. Агранович, М.И. Вишик. // Успехи матем. наук. — 1964. — Т. 19, № 3. — С. 53–161.

7. Ремпель Ш. Теория индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.В. Шульце. — М. : Москва, 1986. — 576 с.

8. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudodifferential operators / L. Boutet de Monvel // Acta Math. — 1971. — Vol. 126. — PP. 11–51.

ИНВАРИАНТЫ ФОМЕНКО-ЦИШАНГА КРУГОВЫХ БИЛЛИАРДОВ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА РАЦИОНАЛЬНЫЙ УГОЛ[1]

В.Н. Завьялов (Москва, МГУ)
vnzavyalov@mail.ru

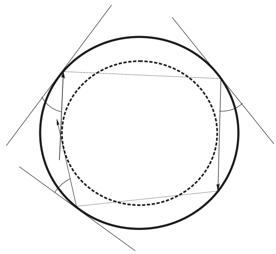
В работе [1] А.Т.Фоменко был введен новый класс биллиардов с проскальзыванием. Рассмотрим F — изометрию плоской окружности, переводящую точку x в диаметрально противоположную ей точку y. Пусть материальная точка движется равномерно и прямолинейно внутри круга и попадает на границу под углом α. Продолжим ее из точки $y = F(x)$ по лучу, выходящему из нее под углом α. При этом направление траектории «по» или «против» часовой стрелки сохранится. Иными словами, ее продолжение выходит из новой точки под тем же углом, «проскальзывая» вдоль границы. На основании этого такой класс систем был назван «биллиардами с проскальзыванием».

Недавние результаты В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко показывают, что рассмотрение класса интегрируемых биллиардов на столах-комплексах (биллиардные книжки и топологические биллиарды)

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-00111).

позволяет промоделировать слоения Лиувилля многих интегрируемых систем динамики. В частности, им удалось реализовать биллиардами слоения Лиувилля геодезических потоков на двумерных **ориентируемых** поверхностях, имеющих линейный или квадратичный интеграл [3]. Как оказалось, биллиарды с проскальзыванием реализуют некоторые такие потоки на **неориентируемых** поверхностях.

В докладе будет представлено обобщение проскальзывания путем изменения изометрии, которая будет переводить точку x окружности в точку y, полученную поворотом радиус–вектора точки x на фиксированный угол, рационально выражающийся через π. Будут представлены инварианты Фоменко-Цишанга данных систем.



Звенья траектории биллиарда в круге с проскальзыванием на рациональный угол до и после удара о границу.

Литература

1. Fomenko A.T. Liouville foliations of topological billiards with slipping / A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina, V.N. Zav'yalov // Russ. J. Math. Phys. — 2021. — Vol. 28, No. 1. —P. 37–55.

2. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко // Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» — 1999. — Т.1,2.

3. Ведюшкина (Фокичева) В.В. Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы / В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко // Известия РАН, серия Математика — 2017. — Т. 81, № 4 — С. 20–67.

4. Завьялов В.Н. Биллиард с проскальзыванием на любой рациональный угол / В.Н. Завьялов // Матем. сб. — 2023. — Т. 214, № 9 — С. 3–26.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В РЕОЛОГИЧЕСКОМ СООТНОШЕНИЕ[1]

А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)
zvyagin.a@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \Big) -$$

$$- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)\big(s, z(s; t, x)\big)\, ds + \mathrm{grad}\ p = f;$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v\big(s, z(s; t, x)\big)\, ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega,$$

$$\mathrm{div}\ v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega;$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0.$$

Здесь v – вектор–функция скорости, p – функция давление среды, f – плотность внешних сил, $z(\tau; t, x)$ – траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x, $\alpha > 0$ – скалярный параметр, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0, 0 < \beta < 1$ – некоторые константы. $\Gamma(\beta)$ – гамма–функция Эйлера, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, $i, j = \overline{1, n}$ – тензор скоростей деформации, $W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) W(t, y)\, dy$ – сглаживание тензора завихренности $W = (W_{ij}(v))$, $W_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, $i, j = \overline{1, n}$,, где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами, Div A – дивергенция тензора A, то есть вектор

$$\mathrm{Div}\ A = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \Big).$$

Начально–краевая задача описывает движение вязкоупругой среды с памятью вдоль траектории движения частиц среды (см. [1]–[5]). Данная модель описывается реологическим соотношением Кель-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-71-10026).

вина–Фойгта с дробной производной Капуто. В докладе описывается изучаемая задача и доказывается существование слабой разрешимости начально–краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Тогда начально–краевая задача имеет хотя бы одно слабое решение*

$$v \in W := \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1), v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}.$$

Литература

1. Звягин А.В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2011. — Н. 1. — С. 147–156.

2. Звягин А.В. Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина-Фойгта / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2018. — Н. 3. — С. 91–95.

3. Звягин А.В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды / А.В. Звягин // Успехи математических наук. — 2019. — Т. 74, В. 3. — С. 189–190.

4. Звягин А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта / А.В. Звягин // Известия Академии Наук. Серия математическая. — 2021. — Т. 85, В. 1. — С. 66–97.

5. Zvyagin A. Solvability of the non-linearly viscous polymer solutions motion model / A. Zvyagin // Polymers. — 2022. — V. 14, N. 6. — P. 1264.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

А.В. Звягин, М.И. Струков (Воронеж, ВГУ)
zvyagin.a@mail.ru, mixail.strukov12@gmail.com

В ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$ с достаточно гладкой границей, на временном интервале $[0,T]$, $T > 0$ рассматривается задача ([1], [2]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\mu_1 \mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) -$$

$$-2\mu_1 \mathrm{Div}(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) -$$

$$-\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{Div}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)\big)\,ds + \nabla p = f, \qquad (1)$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^\tau v\big(s, z(s;t,x)\big)\,ds, \quad t,\tau \in [0,T], \quad x \in \Omega, \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \qquad (3)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $v(x,t)$ — вектор-функция скорости движения частицы среды, $p(x,t)$ — функция давления в точке x в момент времени t, а $f(x,t)$ — функция плотности внешних сил. $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$ — тензор скоростей деформации, а через $W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $W_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ обозначается тензор завихренности. $W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n}\rho(x-y)W(t-y)dy$ — сглаживание тензора завихренности, где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n}\rho(y)dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для всех x и y с одинаковыми евклидовыми нормами.

Определение 1. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$. Слабым решением начально-краевой задачи (1) - (4) называется функция $v \in W_1$, $W_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T,V^1),\ \ v' \in L_2(0,T,V^1)\}$, удовлетворяющая равенству*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx + \mu_1 \int\limits_\Omega \nabla(\frac{\partial v}{\partial t}) : \nabla\varphi\,dx -$$

$$-\mu_1 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - \mu_1 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$

$$+2\mu_1 \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi dx +$$

$$+\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s, z(v)(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) = \langle f, \varphi\rangle$$

и начальному условию

$$v|_{t=0} = v_0.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ *и* $v_0 \in V^1$. *Тогда начально краевая задача* (1) - (4) *имеет хотя бы одно слабое решение* $v \in W_1$.

Литература

1. Zvyagin A.V. Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative / A.V. Zvyagin // Nonlinear Analysis. — 2013. — V. 90 — С. 70–85.

2. Звягин А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта / А.В. Звягин // Известия Академии Наук. Серия математическая. — 2021. — Т. 85, № 1 — С. 66–97.

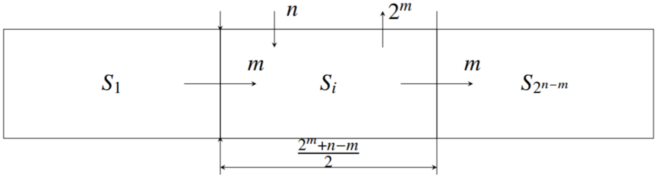
ДИНАМИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ ДЕШИФРАТОРОВ В МОДЕЛИ ДЛИННЫХ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ

В.С. Зизов (Москва, МГУ)

vzs815@gmail.com

Канонический базис работы [1] состоит из 3 функциональных элементов и описывает модель и поведение клеточной схемы (КС) из функциональных и коммутационных элементов. Позднее в работе [2] было дано описание КС через вложение схемы из функциональных элементов (СФЭ) в прямоугольную решётку. Описание функционала мощности клеточных схем, определение соответствующей функции Шеннона, её оценки и отвечающие этим оценкам клеточные схемы приведены в работе Г.В. Калачева [3]. В его работе все оценки приведены для расширенного базиса, состоящего из 8 функциональных элементов, и в частности, показана асимптотика $W(n) = \Theta(2^{\frac{n}{2}})$ и для среднего значения мощности, и для максимальной мощности схемы. Другим функционалом является потенциал схемы, который также описан в данной работе. Показанная в ней схемная реализация для произвольной функции имеет площадь $2^n + o(2^n)$, и большую часть занимают элементы типов «блокировка» и «импликация».

Длинные клеточные схемы являются выделенным классом клеточных схем, реализующих системы ФАЛ, входы которых могут повторяться неограниченное число раз и выходы которых расположены на одной или на двух заранее выбранных сторонах. В рамках



Общий вид схемы S, реализующей дешифратор Q_n

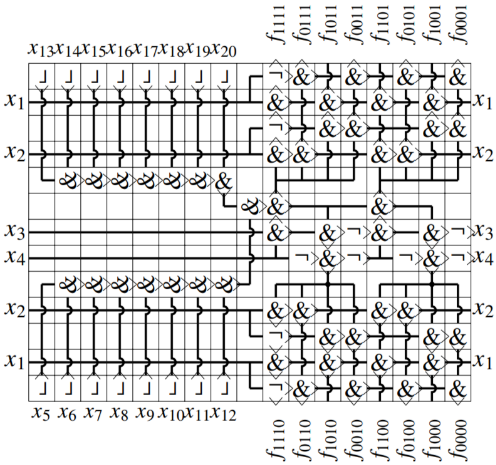
этих ограничений реализуется математическая абстракция некоторой интегральной схемы, у которой сравнительно небольшая площадь, что достигается путём повторения входных переменных булевых функций и использования нескольких схожих по строению блоков. Минимальная площадь прямоугольной схемы достигается при минимизации высоты, поэтому визуально построенные схемы становятся «длинными», вытянутыми вдоль стороны, содержащей повторяющиеся входы.

Ранее в работе [4] были показаны верхние оценки площади дешифраторов в такой модели, в в работе [5] доказаны нижние оценки площади. В настоящей работе показываются верхние оценки динамической активности длинных клеточных схем при достижении минимальной площади.

Согласно упрощённой модели [6] средняя величина мощности, рассеиваемой на выходах синхронной схемы (комбинационного узла) при постоянном напряжении питания и частоте синхронизации выражается как $P_{dyn} = KE_sC_L$, где E_s - переключательная активность схемы, а C_L - ёмкостная нагрузка. Значение K определяется при архитектурном проектировании и в отдельных узлах схемы может быть принято за константу. Тогда можно ввести функционал D мощности КС следующим образом.

Мощностью одного функционального элемента будем считать мощность самого ФЭ, принятую за ёмкостную характеристику участка схемы, непосредственно подключенного в выходу ФЭ (характеристику сети). При переключении его состояния с «1» на «0» или обратно, произведение E_sC_L будет равно сумме ёмкостных характеристик ФЭ и КЭ, принятых за 1 и С соответственно.

Введём функционал $D(S, \alpha, \beta)$ для КС как сумму мощностей всех ФЭ схемы, выделяющихся при переключении с набора входных зна-



Пример схемной реализации блока дешифратора порядка 20 при $m = 4$.

чений α на β. Тогда для данной модели верно

$$D(S, \alpha, \beta) = \Sigma_{a=1}^{a=A(S)} D(F_a, \alpha, \beta)$$

где за $D(F_a, \alpha, \beta)$ обозначена мощность одного элемента схемы на данной смене наборов.

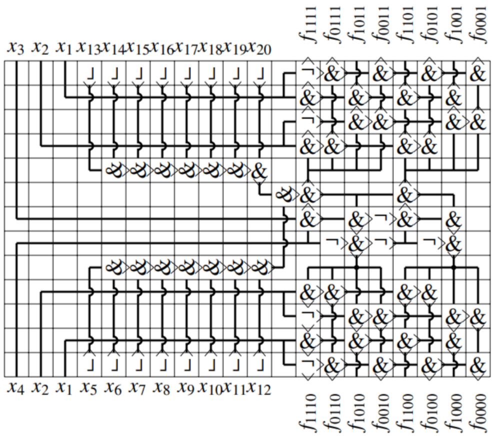
Теорема 1. (о верхней оценке) *Существует КС Σ с повторяющимися входами, имеющая оптимальную по порядку площадь и динамическую активность*

$$D(\Sigma) \leqslant 2^{n-2} \log_2(n) + O(2^n)$$

Доказательство. Динамическая активность при прочих построениях может быть оценена как полная активность двух блоков, один из которых при смене набора отключается, а другой включается. Оценка активности одного блока есть активность всей разводки $n-m$ адресных переменных, в сумме с активностью разводки m переменных и активностью малых дешифраторов.

$$D(S') = 2(n-m) + m^2 + m2^{m-2} + C = 4n + m2^{m-2} + O(m^2)$$

Дополнительно следует учесть, что разводка m переменных активностью $m2^m$ имеет значение во всех блоках S'. Также сохраняют



Пример схемной реализации блока дешифратора порядка 20 при $m = 4$ с пониженной глубиной.

активность все разводки $n - m$ адресных переменных.

$$D(S) = \frac{2^n}{n}(2n + m2^{m-2}) + 2D(S') = 2^{n-2}\log_2(n) + O(2^n)$$

Тогда для любой схемы S, реализующей такой дешифратор, верно, что

$$D(S) \leqslant 2^{n-2}\log_2(n) + O(2^n), n \to \infty$$

В случае, когда возможно пренебречь площадью схемы, можно дублировать также m входов в каждом блоке схемы. Это снизит глубину до $2^m + n + 2m$, но увеличит площадь схемы на $m2^{n-m-1}$. Такой вариант схемы обладает значительно лучшими характеристиками при той же асимптотике площади. При выборе $m = log_2(n)$ глубина окажется не больше $n + 2log_2(n)$.

Теорема 2. (о верхней оценке) *Существует КС Σ с повторяющимися входами, имеющая динамическую активность*

$$D(\Sigma) \leqslant 2nC + 8n + O(1 + C)$$

и площадь $A(S) = 2^n \log_2(n) + O(2^n)$

Доказательство. Активность одного блока равна активности всей разводки n адресных переменных $D_1 = (4 + C)(n - m) + 4C$

в сумме с активностью разводки m переменных $D_2 = (m+4)2^m$ и активностью малых дешифраторов $D_3 = 3C$.

$$D(S') = (4+C)(n-m) + 4C + (m+4)2^m + 3C =$$

$$= 4(n-m) + (n-m+7)C + m2^m + O(2^m)$$

Если принять m достаточно небольшим, $m = 4$, минимально обеспечивающим функционирование схемы, и дублировать все n переменных во всех блоках, то за счёт увеличения второго члена разложения асимптотики площади возможно уменьшить динамическую активность до

$$D(S) = 2(4n + (n+3)C + 4 * 2^4 - 16 + O(1)) = (2n+6)C + 8n + O(1),$$

то есть достичь линейной динамической активности. Тогда для любой схемы S, реализующей такой дешифратор, верно, что

$$D(S) \leqslant 2nC + 8n + O(1+C), n \to \infty$$

Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов / С.С. Кравцов // Проблемы кибернетики. — 1967. — Т. 19 — С. 285–292.

2. Ложкин С.А. Асимптотически точные оценки для площади мультиплексоров в модели клеточных схем / Ложкин С.А., Зизов В.С. // Дискретная математика. — 2022. — Т. 34, № 4. — С. 52–68.

3. Калачев Г.В. Асимптотически точные оценки для площади мультиплексоров в модели клеточных схем / Калачев Г.В. // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 1. — С. 49–74.

4. Зизов В.С. Сложность клеточных дешифраторов с повторяющимися входами / В.С. Зизов // Материалы XIV Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова — 2022. — С. 68–71

5. Зизов В.С. Нижние оценки сложности длинных дешифраторов в модели клеточных схем / В.С. Зизов // Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and External Problems (NLA-2022) —ISDCT SB RAS Irkutsk: 2022. — С. 155–158

6. Yeap G.P. Practical Low Power Digital VLSI Design / G.P. Yeap // Kluwer Academic Publisher — 1998.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОДЯНЫХ ВОЛН НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ С УЧЕТОМ ОТРАЖЕНИЯ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ[1]

А.А. Золотухина (Москва, ИПМех РАН)
a.zolotukhina19@yandex.ru

Поверхностные волны на воде над неровным дном $D(x)$ описываются уравнением с псевдодифференциальным оператором [1], символ которого равен:

$$L(x,p) = |p| \tanh(|p| D(x)).$$

В данной работе рассматривается одномерный случай и ставится задача Коши с локализованным начальным условием и краевым условием непротекания (условие Неймана) на жесткой вертикальной стенке. В работе исследуется отражение волны от стенки и влияние дисперсии. Асимптотики задачи строятся в виде канонического оператора Маслова с использованием метода отражений. В окрестности головного фронта асимптотика выражается через функцию Эйри. При использовании равномерных формул из [2] можно выразить через функцию Эйри и всю асимптотику, что при использовании современных программных пакетов значительно удобнее традиционного сшивания решений в регулярных и сингулярных картах.

Литература

1. Dobrokhotov S.Yu. Asymptotic Expansions and the Maslov Canonical Operator in the Linear Theory of Water Waves. I. Main Constructions and Equations for Surface Gravity Waves / S.Yu. Dobrokhotov, P.N. Zhevandrov // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2003. — Vol. 10, № 1. — P. 1–31.

2. Аникин А.Ю. Равномерная асимптотика в виде функции Эйри для квазиклассических связанных состояний в одномерных и радиально-симметричных задачах / А.Ю. Аникин, С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский, А.В. Цветкова // Теоретическая и математическая физика. — 2019. — Т. 201, № 3. — С. 382–414.

ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

[1] Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700044-0).

ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПРИ ОТКАЗЕ В РАДИАЛЬНОЙ ТЯГЕ

С.П. Зубова(1)**, Е.В. Раецкая**(2) (Воронеж, ВГУ(1), ВГЛТА(2))
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается линеаризованная модель движения спутника (ЛА) по экваториальной круговой орбите на высоте 450 км. над поверхностью Земли. Движение спутника в плоскости орбиты во взаимосвязи каналов крена и рыскания описывается системой

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_r + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_y \end{pmatrix} u_t, \qquad (1)$$

где x_1 и x_2 — угол и угловая скорость крена, x_3 и x_4 — угол и угловая скорость рыскания, $a_{21} = -4\omega_0^2 k_1$, $a_{24} = -\omega_0(1 - k_1)$, $k_1 = (J_x - J_y)/J_x$, $a_{42} = \omega_0(1 - k_2)$, $a_{43} = -\omega_0^2 k_2$, $k_2 = (J_z - J_x)/J_y$ — коэффициенты линеаризации, $\omega_0 = 0,0011$ радиан — орбитальная угловая скорость ЛА на заданной высоте ($\approx$ один оборот за 90 сек.), J_x, J_y, J_z — осевые моменты инерции ЛА, u_r и u_t— входные сигналы, характеризующие соответственно тягу двигателей в радиальном и тангенциальном направлениях [1,2].

Здесь $u = (u_r, u_t)$ — программное управление для реализации описанного программного состояния $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Решается задача стабилизации программного движения в случае отказа тяги в радиальном направлении: $u_t = 0$.

Для построения стабилизирующего управления u_{rs} вводится матрица обратной связи K такая, что $u_{rs} = Kx_s$, где x_s — стабилизирующее состояние. Тогда $\dot{x}_s = (A + BK)x_s$.

Требуется быстрое сближение программного движения и стабилизированного, то есть чтобы $x_s = x_s(t)$ быстро стремилось к нулю с течением времени t, для чего достаточно, чтобы спектр матрицы $A + BK$ лежал в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Требуется построить матрицу K такую, чтобы спектр $A + BK$ удовлетворял заданному требованию.

Поставленная задача решается в случае, когда λ^* — четырехкратное собственное значение матрицы $A + BK$, для чего рассматриваются уравнения

$$(A + BK)v_1 - \lambda^* v_1 = 0, \qquad (2)$$

$$(A+BK)v_i - \lambda^* v_i = v_{i-1}, \quad i = 2,3,4, \tag{3}$$

относительно неизвестных K, v_1 и v_i.

Уравнения (2), (3) расщепляются на подсистемы, что дает возможность находить вначале v_1, v_i, а затем из других подсистем находить коэффициенты матрицы K. В результате получено:

$$K = (k_{11} \quad k_{12} \quad k_{13}),$$

где

$$k_{11} = \frac{1}{a_{24}}(4a_{21}\lambda^* + 4(\lambda^*)^3),$$

$$k_{12} = \frac{1}{a_{24}}(-a_{21} - a_{42}a_{24} - 6(\lambda^*)^2 - \frac{\lambda^*)^4}{a_{21}}) - a_{43} + \frac{(\lambda^*)^4}{a_{21}},$$

$$k_{13} = 4\lambda^*.$$

Литература

1. Дорф Ф. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. — 832 с.

2. Зубов Н.Е. Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата во взаимосвязанных каналач крена и рысканья при отсутствии измерений угла и угловой скорости рысканья / Н.Е. Зубов, А.В. Лапин // Королёвские чтения. XIVII Академические чтения по космонавтике. 2023. — С. 1/4-4/4. `https//korolev bmstupress/preprints/4116/`

3. Зубова С.П. Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом / С.П. Зубова // Доклады АН, — 2012. —Т. 447, № 6. — С. 599–602.

4. Зубова С.П. Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая //Автоматика и телемеханика, — 2017. — Т. 59, № 3. — С. 22–39.

5. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivativesI / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — AIMS Press, New York, 2021. —V. 44, № 15, — P. 11998–12009.

О НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОТЕРМИИ

М.И. Илолов, Дж.Ш. Рахматов (Душанбе, ЦИРННТ НАНТ)
ilolov.mamadsho@gmail.com

Рассматривается решение прямой задачи геотермии в условиях седиментации для геотермальных резервуаров. При этом наиболее полно учитываются основные факторы формирующие тепловое поле осадочных бассейнов — это затраты энергии теплового потока на основания на прогрев холодного осадочного материала, частичное экранирование теплового потока из-за различия теплофизических осадков и пород основания, теплогенерация в накапливающихся осадках, различная скорость осадконакопления. Постановлена также задача расчета значения теплового потока из основания по температурным наблюдениям в скважинах — обратная задача геотермии в условиях седиментации. Аналогичные задачи ранее рассматривались для гравиметрии [1], [4].

Многие трехмерные задачи геотермии формулируются с помощью линейых интегральных уравнений первого рода типа свертки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, y-\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta = u(x,y), \tag{1}$$

где $x, y \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $K(x-\xi, y-\eta) = K(\xi - x, \eta - y) = K(s,t)$ — симметричное ядро уравнения, $u(x,y)$ — заданная и $f(\xi,\eta)$ — искомая функции.

При решении задач геотермии интегрирование в (1) осуществляется только в конечных пределах, поэтому задача (1) записывается в форме

$$Af = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} K(x-\xi, y-\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta = u(x,y), \tag{2}$$

где $-b \leqslant x \leqslant b, -a \leqslant y \leqslant a$, $A : H \to H$ — линейный интегральный оператор, H — действительное гильбертово пространство.

Задача (2) некорректно поставлена по Тихонову [2]. Далее вводим быстрое двумерное преобразование Фурье [3] и на его основе построим регуляризующий алгоритм решения задачи (2).

Рассмотрим случай, когда оператор A является оператором Гильберта-Шмидта, т.е. ядро уравнения (2) удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} K^2(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta dx ddy < \infty, \tag{3}$$

и функции $f(\xi, \eta)$ и $u(x, y) \in L_2[-a, a; -b, b]$.

В случае выполнения (3) оператор A будет компактным в L_2. Достаточным условием положительности оператора A является неравенство

$$0 \leqslant k(\omega_1, \omega_2) < \infty,$$

где

$$k(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(s, t) \exp[i(\omega_1 s + \omega_2 t)] ds dt. \tag{4}$$

Преобразованию (4) соответствует обратное преобразование Фурье

$$K(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\omega_1, \omega_2) \exp[-i(\omega_1 s + \omega_2 t)] d\omega_1 d\omega_2. \tag{5}$$

Для положительного оператора A решение уравнения

$$\int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} K(x - \xi, y - \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \alpha f(x, y) = u(x, y), \tag{6}$$

где α — параметр параметризации, будет регуляризующее решение уравнения (2).

Решение (6), в свою очередь, получается с помощью преобразования Фурье.

Литература

1. Галушкин Ю.Н. Термическая история осадочных бассейнов; экспресс-методы оценки теплового потока / Ю.Н. Галушкин, Я.Б. Смирнов // Геология и геофизика. — 1987. — № 11. — С. 105-112.

2. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М. : Наука, 1986.

3. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б.Гоулд. — М. : Мир, 1978.

4. Илолов М. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности / М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов // Вестник

Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. — № 2 (123). — С. 71-75.

О ТРЕУГОЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ В ПАРАХ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.В. Кабанко (Курск, КГУ)
kabankom@gmail.com

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{H}(w) = \left\{ f(z)|f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_n z^n, (a_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2(w) \cap \mathcal{E} \right\}$$

В работах [1,2] авторы для пространства $\mathcal{H}(w_{\mathcal{E}})$ ввели в рассмотрение характеристику

$$w_\rho = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log w_n}{n \log n}$$

и доказали (Theorem 2.4., Corollary 2.6.)

1. Пространство состоит из функций конечного порядка если и только если $w_\rho > 0$;

2. Пространство состоит из функций нулевого порядка если и только если $w_\rho = +\infty$.

Таким образом имеет смысл рассматривать пары пространств целых функций с различным порядком и интерполяционные пространства для этих пар.

Определение 1. *Два гильбертовых пространства H_0, H_1 называются гильбертовой парой $\overline{H} = \{H_0, H_1\}$, если они линейно и непрерывно вложены в некоторое топологическое пространство $\mathfrak{A}$.*

Также можно ввести понятие суммы пространств и норму в сумме, одной из которых является т.н. K-функционал:

$$K(t, x, \overline{H}) = \inf_{x=x_0+x_1, x_i \in H_i} \|x_0\| + t\|x_1\|$$

Определение 2. *Пространство H называется промежуточным пространством пары $\overline{H} = \{H_0, H_1\}$ если верны непрерывные вложения $H_0 \cap H_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow H_0 + H_1$.*

Пространстово H называется интерполяционным, если оно промежуточное и из того, что оператор ограниченно действует в пространствах пары следует, что он ограничен и в пространстве H.

Теорема 1. *Интерполяционное пространство $(\mathcal{H}(w_{\mathcal{E}}), \mathcal{H}(v_{\mathcal{E}}))_{\theta,2}$ при $0 < w_\rho < \infty$, $v_\rho = \infty$ построенное по вещественному методу состоит из функций нулевого порядка.*

Интерполяционное пространство $(\mathcal{H}(w_{\mathcal{E}}), \mathcal{H}_\infty)_{\theta,2}$ при $0 < w_\rho < \infty$ построенное по вещественному методу состоит из целых функций конечного порядка.

Рассмотрим в дальнейшем пару пространств $\{l_2, l_2(n^{cn})\}$ и операторы действующие в пространствах этой пары. Мы будем применять удобное матричное представление этих операторов. Пусть $A : \{l_2, l_2(n^{cn})\} \to \{l_2, l_2(n^{cn})\}$ и $(a_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ – матрица этого оператора.

Теорема 2. *Оператор A действующий в паре $\{l_2, l_2(n^{cn})\}$ можно представить в виде суммы двух операторов, каждый из которых имеет верхне- и нижнетреугольную структуру соответственно.*

Литература

1. Doan M. L. Composition operators on Hilbert spaces of entire functions / M.L. Doan, L.H. Khoi // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. Ser I. — 2015. — T. 353, № 6. — C. 495–499.

2. Doan M. L. Hilbert Spaces of Entire Functions and Composition Operators / M.L. Doan, L.H. Khoi // Complex Analysis and Operator Theory. — 2016. — T. 10. — C. 213–230.

АТОМНЫЕ ИНВАРИАНТЫ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК И МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ АТОМЫ[1]

В.А. Кибкало (Москва, МГУ)

slava.kibkalo@gmail.com

Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам и их классификация, построенная в работах А.Т.Фоменко и его научной школы [1] недавно получили неожиданное развитие и применение в теории интегрируемых биллиардов. Движение шара по

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 22-71-10106) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

введенным В.В.Ведюшкиной [2, 3] кусочно-плоским двумерным столам (биллиардным книжкам и топологическим биллиардам) остается интегрируемым, как и движение в плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик из семейства

$$(b-\lambda)x^2+(a-\lambda)y^2=(a-\lambda)(b-\lambda), \qquad 0<b<a. \tag{1}$$

Значением интеграла Λ является параметр λ, с которым каустика траектории входит в семейство квадрик (1). Каждый лист e_i^2 книжки (2-клетка комплекса X) изометрично и биективно проецируется на плоскую софокусную биллиардную область, а переход шара с листа на лист при достижении дуги склейки (1-клетки комплекса) происходит по циклической перестановке, действующей на склеенных по ребру 2-клетках. При этом в вершине e_i^0 книжки (0-клетке) возникает две перестановки, отвечающие наборам ребер, проецирующихся на пересекающиеся в точке $\pi(e_i^0)$ софокусные квадрики. Эти перестановки обязаны коммутировать для корректного продолжения траекторий, попавших в вершину.

В классе книжек удалось промоделировать произвольные невырожденные бифуркации интегрируемых систем с 2 степенями свободы [3], базы таких слоений, режимы движения многих известных систем их приложений. Вместе с тем, задача классификации книжек остается весьма непростой: листы комплекса имеют разный тип (например, с фокусами квадрик или без них), и каждая из них входит в несколько перестановок. При этом задача классификации книжек весьма непроста, см. [4], где было показано, что последовательностью перегибаний вдоль квадрик любую книжку можно привести к одному из 9 видов.

В настоящей работе книжке сопоставлен новый инвариант: атом гамильтоновой системы, вложенный в ориентируемую двумерную поверхность (или несвязное объединение таких атомов). Напомним, что 2-атомом называют класс послойной гомеоморфности слоения Лиувилля гамильтоновой системы вблизи связного особого слоя, содержащего одну или несколько невырожденных по Морсу критических точек. Точки минимума или максимума совпадают с содержащим их слоем, а слой с седловыми точками является графом с вершинами степени 4. Ориентация на такой поверхности задает направление потока на слоях. Если фиксирован и атом, и направление роста гамильтониана, то говорят об f-атомах, см. [1, глава 2].

Если книжка склеена из листов e_j^2, то сопоставим каждому из них по два креста c_j^δ (окрестности морсовского седла), сепаратрисы которых проецируются на дуги софокусных эллипса и гиперболы (знак отвечает за то, какая пара из них входящие, а какая выходящие). Подразобьем книжку по прообразу осей Ox, Oy при проекции $\pi : X^2 \to R^2(x, y)$, т.е. включим его в 1-остов комплекса X^1. Фокусы квадрик также добавим в X^0.

Склеим два креста $c_{j_1}^{\delta_1}$ и $c_{j_2}^{\delta_2}$ по дуге e^1, если
1. $\sigma(e_{j_1}^2) = e_{j_2}^2$ для σ — перестановки на e^1,
2. одна из двух склеиваемых сепаратрис входящая, другая выходящая (для соотв. крестов),
3. $\delta_1 = -\delta_2$ и проекции листов $\pi(e_{j_1}^2)$ и $\pi(e_{j_2}^2)$ на Oxy лежат по одну сторону от $\pi(e^1)$, или $\delta_1 = \delta_2$ и проекции листов лежат по разные стороны от $\pi(e^1)$.

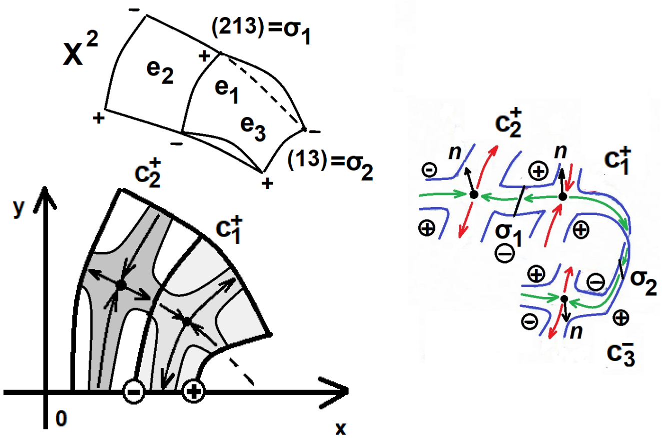
Получаем двулистное накрытие над книжкой X, из которой удалили окрестности ее вершин.

Теорема 1. *Пусть множество вершин π книжки X^2, подразбитой по прообразу осей Ox и Oy, образует двудольный граф. Тогда описанная выше склейка определяет 2-атом гамильтоновой системы (или их несвязное объединение).*

Полученное слоение назовем *атомным инвариантом (атомом) книжки*. Поясним, как оно строится и проиллюстрируем это на рис. 1. Из двудольности 1-остова пометим все вершины знаками $+$ и $-$. Поскольку $x, y \geqslant 0$ и фокусы входят в X^0, то каждый лист есть четырехугольник в эллитических координатах λ_1, λ_2. Выберем для него «угол» с $(\max_{1,\ldots,4} \lambda_1, \min_{1,\ldots,4} \lambda_2)$ и сопоставим листу ее знак (на рис. 1 эта вершина для листов 1, 2 отмечена знаком). Зафиксируем c_j^+ как тот из двух крестов, где проецирующаяся на софокусный эллипс сепаратриса входит в седловую точку для положительных листов и выходит из нее для отрицательных.

В каждой вершины e_0 книжки коммутируют две перестановки σ и ω, отвечающие пересекающимся в $\pi(e_0)$ квадрикам. **Утверждение 1.** Количество граничных окружностей атомного инварианта книжки равно количеству независимых циклов перестановки $\sigma \circ \omega$. Отсюда легко получить условие на сумму родов атомов атомного инварианта. Опишем несколько примеров.

Пример 1. Склеив два четырехугольника по всем сторонам с перестановками $\sigma = (12)$, получим несвязный инвариант, состоящий из двух атомов C_2: с креста c_j^δ можно перейти по выходящим сепаратрисам только на лист $c_{\bar{j}}^{-\delta}$ для $\bar{j} \neq j$ из $\{1, 2\}$. Для книжки из $2N$ листов и $\sigma = (1 \ldots 2N)$, получим $2N$ атомов C_2.



Книжка X^2, склеенная из трех листов, проекция крестов c_1^+ и c_2^- на плоскость Oxy и интерпретация склейки крестов как движение по двумерной поверхности с нормалью n. Смене знака крестов отвечают особые точки проекции этой поверхности на плоскость. Граничные окружности атома отмечены как отрицательные или положительные в зависимости от знака вершины комплекса.

Комбинаторное строение комплекса, т.е. информация о количествах ребер, инцидентных вершинам и листов, инцидентных ребрам, недостаточна для задания атомов в инварианте и даже нахождения их рода. Существенную роль играют сам набор перестановок.

Пример 2. Склеим $p = 5$ четырехугольников по перестановкам $\sigma_1 = id, \sigma_2 = (12345)$ и $\omega_1 = id, \omega_2 = (12345)$ на парах противоположных ребер. Инвариант будет атомом рода $g = 2$ с 10 вершинами (седлами) и восемью граничными окружностями:

$$g = 1 - (10 - 20 + 2 + 6)/2 = 1 + 1 = 2$$

Для простого $p \geqslant 3$ получаем атом рода $g(p) = (p-1)/2 \geqslant 1$. Заменив теперь σ_2 на $\tilde{\sigma_2} = \sigma_2^{-1} = (54321)$, получим композицию $\tilde{\sigma_2} \circ \omega_2 = id$, в отличие от $\sigma_2 \circ \omega_2 = (13524)$. Теперь число граничных окружностей атома равно не $1 + 5 = 6$, а $5 + 5 = 10$. Инвариант будет связным атомом рода $\tilde{g} = 0$, т.е. вложен в сферу.

$$\tilde{g} = 1 - (10 - 20 + 2 + 10)/2 = 1 - 1 = 0$$

Теорема 2. *Стол топологического биллиарда X без фиктивных вершин и ребер и такой, что $\pi(X^2) \subset \{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, обладает атомным инвариантом. Если стол X гомеоморфен сфере или тору, то в инварианте две связных компоненты, а если диску или цилиндру — то одна. Род каждого атома $g = 0, 1$ при этом совпадает с родом X как двумерной поверхности.*

Теперь покажем, что в классе атомных инвариантов биллиардных книжек встречаются f-атомы из четырех известных серий A_n, B_n, C_n, D_n максимально симметричных атомов. Напомним, что так называют f-атомы, группа собственных симметрий которых (сохраняющих также направление потока $\operatorname{sgrad} H$) имеет максимально возможный порядок, равный числу вершин. Они также отвечают нормальным делителям конечного индекса группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ без элементов конечного порядка. Подробнее см. [1, 5].

Теорема 3. *Максимально симметричные атомы B_{2n}, C_{2n}, D_{2n} для $n \in \mathbb{N}$ и A_{2n} для нечетных $n \in \mathbb{N}$ реализуются как атомные инварианты биллиардных книжек, сленных из n листов по перестановкам $\sigma_1, \omega_1, \sigma_2, \omega_2$, см. рис.2. Здесь $\sigma = (1, \ldots, n)$, $\gcd(k+m, n) = 1, 0 < k, m < 0$. Стрелка a на паре граничных дуг обозначает проскальзывания вдоль них.*

$$\begin{array}{rl} A_{2n} & \sigma_1 = \sigma, \quad \omega_1 = id(a), \quad \sigma_2 = \sigma^k, \quad \omega_2 = id(a); \\ B_{2n}: & \sigma_1 = \sigma^m, \quad \omega_1 = \sigma^k, \quad \sigma_2 = \sigma^m, \quad \omega_2 = \sigma^k; \\ C_{2n}, D_{2n}: & \sigma_1 = \sigma^m, \quad \omega_1 = \sigma^k, \quad \sigma_2 = \sigma^{-k}, \quad \omega_2 = \sigma^{-m}. \end{array}$$

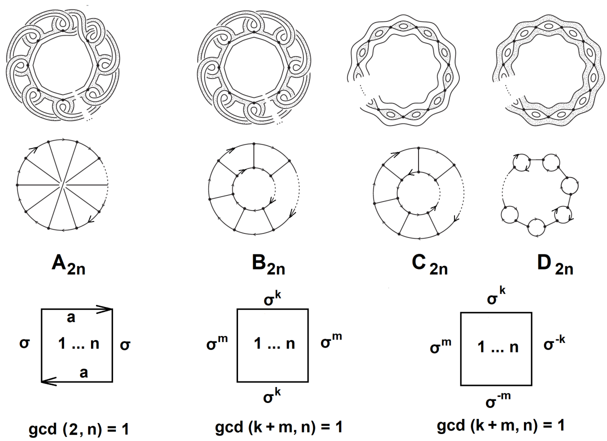
Литература

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск. : Изд. д. «Удмуртск. унив.», 1999. — 444 с.

2. Фокичева В.В. Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик /В.В. Фокичева // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 127–176.

3. Ведюшкина В.В. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем /В.В. Ведюшкина, И.С. Харчёва // Матем. сб. — 2018. — Т. 209, № 12. — С. 17–56.

4. Fomenko A.T. Topology of Liouville foliations of integrable billiards on table-complexes /A.T. Fomenko, V.A. Kibkalo // Europ. J. of Math. — 2022. — T. 8. — C. 1392–1423.



Максимально симметричные атомы, их f-графы и биллиардные книжки из n листов, реализующие их как свои атомные инварианты. Всюду перестановка σ равна $(1, \ldots, n)$.

5. Кудрявцева Е.А. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия /Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, № 9. — С. 3–96.

УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МЕТАГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

А.В. Климишин (Москва, РУДН)
sa-sha-02@yandex.ru

Пусть задана область в виде полубесконечного цилиндра прямоугольного сечения:

$$D^{\infty} = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, 0 < z < \infty\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Для данной области будем рассматривать математическую модель, описываемую смешанной краевой задачей для метагармонического уравнения с правой частью ρ. Будем рассматривать на плоскости $z = 0$ краевое условие третьего рода (условие Ньютона). На боковых гранях цилиндра будем рассматривать однородные краевые условия второго рода (условия Неймана):

$$\begin{aligned}
&\Delta u - k^2 u = \rho,\\
&\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{z=0} = -hu\big|_{z=0},\\
&u'_x\big|_{x=0,\,l_x} = 0;\ u'_y\big|_{y=0,\,l_y} = 0,\\
&u \to 0 \text{ при } z \to +\infty.
\end{aligned}$$

При этом носитель плотности будем рассматривать как тело постоянной толщины, то есть ρ равно:

$$\rho(x, y, z) = \sigma(x, y)\theta(z - H)\theta(H + s - z),$$

где $\theta(z)$ — функция Хевисайда, H — координата тела по оси z, а s — толщина тела.

Для получения решения применяется метод Фурье с разложением по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. В результате получаем интегральное представление решения прямой задачи в заданной области.

Интегральное представление решения прямой задачи представляется в виде

$$u(x, y, z) = \int\limits_0^{l_x} dx' \int\limits_0^{l_y} dy' K(x, y, z, x', y')\sigma(x', y'),$$

$$K(x, y, z, x', y') = -\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{8\,\varepsilon_n\varepsilon_m}{l_x l_y} \frac{\operatorname{sh}\frac{s}{2} e^{-k_{nm}\left(H+\frac{s}{2}\right)}}{k_{nm}^2} \times$$

$$\times \frac{k_{nm}\operatorname{ch}(k_{nm}z) + h\operatorname{sh}(k_{nm}z)}{k_{nm} + h} \cos\frac{\pi n x'}{l_x} \cos\frac{\pi m y'}{l_y} \cos\frac{\pi n x}{l_x} \cos\frac{\pi m y}{l_y},$$

$$k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_y}\right)^2 + k^2}, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{n} \neq 0,\\ 0,5 & \text{n} = 0. \end{cases}$$

Введем обозначение:

$$K_{nm} = -2\frac{\operatorname{sh}\frac{s}{2} e^{-k_{nm}\left(H+\frac{s}{2}\right)}}{k_{nm}(k_{nm} + h)}.$$

Сформулируем обратную задачу, а именно: пусть на множестве

$$\Pi = \{(x, y) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, \} \subset \mathbb{R}^2$$

известна

$$f(x, y) = u(x, y, z)\big|_{z=0}$$

Требуется найти $\sigma(x, y)$. Из интегрального представления решения прямой задачи получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода [1] относительно σ при $z = 0$:

$$\int\limits_0^{l_x} \int\limits_0^{l_y} \tilde{K}(x, y, x', y')\sigma(x', y')dx'dy' = f(x, y),$$

$$\tilde{K}(x, y, x', y') = -\frac{8}{l_x l_y} \sum_{n,m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \frac{\operatorname{sh} \frac{S}{2} e^{-k_{nm}\left(H + \frac{S}{2}\right)}}{k_{nm}(k_{nm} + h)} \times$$

$$\times \cos \frac{\pi n x'}{l_x} \cos \frac{\pi m y'}{l_y} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y}.$$

Поиск решения обратной задачи осуществляется как поиск решения интегрального уравнения. Точное решение обратной задачи в виде ряда Фурье

$$\sigma(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sigma_{nm} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm} K_{nm}^{-1} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y}$$

Таким образом, получено точное решение обратной задачи как решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода — искомое выражение функции плотности источников.

Интегральное уравнение первого рода — некорректно поставленная задача [2]. В качестве приближенного решения интегрального уравнения выбираем экстремаль функционала Тихонова

$$M^{\alpha}[\mathrm{w}] = ||\tilde{K}\mathrm{w} - f^{\delta}||^2 + \alpha||\mathrm{w}||^2, \ \alpha > 0$$

$$\tilde{K}\mathrm{w} = \int\limits_0^{l_x} \int\limits_0^{l_y} \tilde{K}(x, y, x', y')\mathrm{w}(x', y')dx'dy',$$

$$\tilde{K}(x,y,x',y') = -\frac{8}{l_x l_y}\sum_{n,m=0}^{\infty}\varepsilon_n\varepsilon_m\frac{\operatorname{sh}\frac{S}{2}e^{-k_{nm}\left(H+\frac{S}{2}\right)}}{k_{nm}(k_{nm}+h)}\times$$
$$\times\cos\frac{\pi n x'}{l_x}\cos\frac{\pi m y'}{l_y}\cos\frac{\pi n x}{l_x}\cos\frac{\pi m y}{l_y}.$$

Экстремаль получена как решение уравнения Эйлера для функционала $M^\alpha[\mathrm{w}]$ методом Фурье.

$$\mathrm{w}_\alpha^\delta(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm}^\delta K_{nm}^{-1}\left(\frac{1}{1+\alpha K_{nm}^{-2}}\right)\cos\frac{\pi n x}{l_x}\cos\frac{\pi m y}{l_y}$$

Экстремаль $\mathrm{w}_\alpha^\delta(x,y)$ отличается от выражения точного решения наличием регуляризурующего множителя.

В результате применения метода регуляризации Тихонова, было построено приближенное устойчивое решение интегрального уравнения, как модели для решения обратной задачи. Доказана его сходимость к точному решению. Таким образом, для искомой функции плотности источников σ получено приближенное устойчивое решение, сходящееся к точному решению.

Литература

1. Ланеев Е.Б. Некорректные задачи продолжения гармонических функций и потенциальных полей и методы их решения / Е.Б. Ланеев. // М. : Изд-во РУДН, 2006. — 139 с.

2. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. // М. : Наука, 1979. — 288 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВИБРАЦИЙ ПЛАСТИНЫ С ОСЦИЛЛЯТОРОМ

Д.М. Коростелева (Казань, КГЭУ)
diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

Рассмотрим задачу о собственных вибрациях защемлённой по контуру однородной изотропной квадратной пластины постоянной толщины с присоединённым осциллятором. Пусть область срединной поверхности пластины совпадает с плоской квадратной областью Ω с границей Γ, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Пусть ρ и E — плотность и модуль Юнга материала пластины, ν — коэффициент Пуассона материала пластины, d — толщина пластины, $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жёсткость материала пластины. Предположим, что в точке с координатой $\varkappa \in \Omega$ упруго присоединён груз массой M с коэффициентом упругости подвески K, $M > 0$, $K > 0$. Тогда собственные вибрации механической системы пластина–осциллятор моделируются задачей на собственные значения, состоящей в нахождении чисел λ, функций $u(x)$, $x \in \Omega$, чисел ξ, образующих ненулевой вектор $(u, \xi)^\top$, для которых справедлива система уравнений [1,2]:

$$D\Delta^2 u(x) - K(\xi - u(\varkappa))\delta(x - \varkappa) = \lambda\, \rho d\, u(x), \; x \in \Omega, \tag{1}$$

$$K(\xi - u(\varkappa)) = \lambda M \xi, \quad u(x) = \partial_n u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$, $i, j = 1, 2$, ∂_n — производная по внешней нормали к границе Γ, $\delta(x)$ — дельта–функция, сосредоточенная в точке $x = 0$.

Через $L_2(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ будем обозначать вещественные гильбертовы пространства Лебега и Соболева, снабжённые нормами:

$$|v|_0^2 = \int\limits_\Omega v^2\, dx, \|v\|_2^2 = \sum_{i=0}^{2} |v|_i^2, |v|_1^2 = \sum_{i=1}^{2} |\partial_i v|_0^2, |v|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{2} |\partial_{ij} v|_0^2.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ обозначим пространство функций v из $W_2^2(\Omega)$, подчиняющихся краевым условиям $v(x) = \partial_n v(x) = 0$, $x \in \Gamma$. $W_2^\alpha(\Omega)$ обозначает пространство Соболева при $\alpha \in (0, 4]$.

Обозначим через $\mathbb{R}$ числовую прямую. Зададим гильбертовы пространства $V = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ с нормой $\|\overline{v}\|_V = \left(|v|_2^2 + \zeta^2\right)^{1/2}$ и $H = L_2(\Omega) \times \mathbb{R}$ с нормой $\|\overline{v}\|_H = \left(|v|_0^2 + \zeta^2\right)^{1/2}$, $\overline{v} = (v, \zeta)^\top$. Определим билинейные формы $a : V \times V \to \mathbb{R}$ и $b : H \times H \to \mathbb{R}$ по формулам:

$$a(\overline{u}, \overline{v}) = D \int\limits_\Omega \Delta u(x) \Delta v(x) dx + K(\xi - u(\varkappa)(\zeta - v(\varkappa)),$$

$$b(\overline{u}, \overline{v}) = \rho d \int\limits_\Omega u(x) v(x)\, dx + M \xi \zeta.$$

Вариационная формулировка дифференциальной задачи на собственные значения (1), (2), заключается в нахождении $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{u} \in V \setminus \{0\}$ из уравнения

$$a(\overline{u}, \overline{v}) = \lambda b(\overline{u}, \overline{v}) \quad \forall \overline{v} \in V. \tag{3}$$

Задача (3), имеет последовательность конечнократных собственных значений λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$, и соответствующую полную ортонормированную систему собственных векторов $\overline{u}_k = (u_k, \xi_k)^\top \in V$, $k = 1, 2, \ldots$, $a(\overline{u}_i, \overline{u}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(\overline{u}_i, \overline{u}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$

На $\overline{\Omega}$ зададим сетку $x_{ij} = (x_i, x_j)$, $x_i = ih$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, $h = l/n$, с ячейками $e_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\varkappa = x_{n_1 n_2}$, $0 < n_1 < n$, $0 < n_2 < n$. Введём пространство $W_h = \{v^h : v^h \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), v^h|_{e_{ij}} \in Q_3(e_{ij}), i, j = 1, 2, \ldots, n\}$, где $Q_3(e)$ — пространство полиномов степени три по каждой переменной на множестве e. Определим подпространство $V_h = W_h \times \mathbb{R}$ пространства V, $\dim V_h = N$, $N = m^2 + 1$, $m = 2(n-1)$.

Приближение по методу конечных элементов задачи (3) сводится к определению $\lambda^h \in \mathbb{R}$, $\overline{u}^h \in V_h \setminus \{0\}$ из уравнения

$$a(\overline{u}^h, \overline{v}^h) = \lambda^h b(\overline{u}^h, \overline{v}^h) \quad \forall \overline{v}^h \in V_h. \tag{4}$$

Зададим функции $\varphi_i(x)$, $x \in [0, l]$, $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$, являющиеся кубическими полиномами на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\varphi_{2i-1}(x_j) = \delta_{ij}$, $\varphi'_{2i-1}(x_j) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\varphi_{2i}(x_j) = 0$, $\varphi'_{2i}(x_j) = \delta_{ij}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $\varphi_{2n-1}(x_j) = 0$, $\varphi'_{2n-1}(x_j) = \delta_{nj}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Введём матрицы H^{pp}, $p = 0, 1, 2$, с элементами

$$H^{pp}_{ji} = \int\limits_0^l \varphi_i^{(p)}(x) \varphi_j^{(p)}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

при $p = 0, 1, 2$. Определим блочные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

с ненулевыми блоками

$$A_{11} = D(H^{22} \otimes H^{00} + 2H^{11} \otimes H^{11} + H^{00} \otimes H^{22}) +$$
$$+ K(e^m_{2n_1-1}(e^m_{2n_1-1})^\top) \otimes (e^m_{2n_2-1}(e^m_{2n_2-1})^\top),$$
$$A_{12} = -K(e^m_{2n_1-1} \otimes e^m_{2n_2-1}),\ A_{21} = -K(e^m_{2n_1-1} \otimes e^m_{2n_2-1})^\top,$$
$$A_{22} = K,\ B_{11} = \rho d H^{00} \otimes H^{00},\ B_{22} = M,$$

где $\otimes$ — прямое произведение матриц, $e^m_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{mi})^\top$.

Конечно–элементная задача (4) эквивалентна обобщённой алгебраической задаче на собственные значения: найти $\lambda^h \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, такие, что

$$Ay = \lambda^h By. \tag{5}$$

Задачи (4), (5), имеют собственные значения λ_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N$, $0 < \lambda_1^h \leqslant \lambda_2^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N^h$, и соответствующие полные ортонормированные системы собственных векторов $\overline{u}_k^h = (u_k^h, \xi_k^h)^\top \in V_h$, $y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $a(\overline{u}_i^h, \overline{u}_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij}$, $b(\overline{u}_i^h, \overline{u}_j^h) = \delta_{ij}$, $(Ay^{(i)}, y^{(j)}) = \lambda_i^h \delta_{ij}$, $(By^{(i)}, y^{(j)}) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Пусть λ_k — собственное значение задачи (3) кратности s такое, что $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+s-1} < \lambda_{k+s}$, $\overline{u}_i$, $i = k, k+1, \ldots, k+s-1$, — соответствующие собственные векторы, λ_i^h, $\overline{u}_i^h$, $i = k, k+1, \ldots, k+s-1$, — приближения по схеме (4), $U_k = \operatorname{span}\{\overline{u}_k, \overline{u}_{k+1}, \ldots, \overline{u}_{k+s-1}\}$, $U_k^h = \operatorname{span}\{\overline{u}_k^h, \overline{u}_{k+1}^h, \ldots, \overline{u}_{k+s-1}^h\}$. Тогда для $\alpha \in (0,1)$ имеют место оценки: $0 \leqslant \lambda_i^h - \lambda_i \leqslant ch^{2\alpha}$, $\|\overline{u}_i^h - \overline{u}_i\|_V \leqslant ch^\alpha$, при $b(\overline{u}_i^h, \overline{u}_i) > 0$, $i = k, k+1, \ldots, k+s-1$, $\vartheta(U_k, U_k^h) \leqslant ch^\alpha$. Если $u_k(\varkappa) = \xi_k = 0$, то справедливы оценки: $0 \leqslant \lambda_k^h - \lambda_k \leqslant ch^4$, $\|\overline{u}_k^h - \overline{u}_k\|_V \leqslant ch^2$, при $b(\overline{u}_k^h, \overline{u}_k) > 0$. Если $u_i(\varkappa) = \xi_i = 0$, $i = k, k+1, \ldots, k+s-1$, то $0 \leqslant \lambda_i^h - \lambda_i \leqslant ch^4$, $\|\overline{u}_i^h - \overline{u}_i\|_V \leqslant ch^2$, при $b(\overline{u}_i^h, \overline{u}_i) > 0$, $\vartheta(U_k, U_k^h) \leqslant ch^2$.

Литература

1. Андреев Л.В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л.В. Андреев, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Машиностроение, 1988. — 200 с.

2. Андреев Л.В. Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Издательство МАИ, 2012. — 214 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ[1]

Е.И. Костенко (Воронеж, ВГУ)

ekaterinalarshina@mail.ru

В области $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T \geqslant 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается задача, описывающая движение нелинейно-вязкой жидкости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div}\,[2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)]$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-71-10026).

$$-\mu\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{Div}\int_{-\infty}^{t}e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds$$

$$+\nabla p = f(t,x), \qquad (t,x)\in Q; \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\ v(t,x)=0, \quad (t,x)\in Q; \tag{2}$$

$$v\mid_{(-\infty,T]\times\partial\Omega}=0; \tag{3}$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))ds, \qquad t,\tau\in(-\infty,T], \quad x\in\bar{\Omega}. \tag{4}$$

Здесь $v(t,x)=(v_1(t,x),...,v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ искомые скорость и давление рассматриваемой среды, $\mathcal{E}(v)=\{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с элементами $\mathcal{E}_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, $\mu\geqslant 0$, $0<\alpha<1$, $\lambda>0$ — константы, а $z(\tau;t,x)$ — траектория движения частицы жидкости, $\Gamma(\alpha)$ — гамма–функция Эйлера. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов- столбцов матрицы. Функция I_2 определяется равенством:

$$I_2^2=\sum_{i,j=1}^n\mathcal{E}_{ij}^2(v).$$

Данная математическая модель описывает движение нелинейно-вязкой жидкости с памятью вдоль траектории движения среды (см. [1]–[4]). На вязкость накладываются естественные ограничения: $\nu(s)$ должна быть определенная при $s\geqslant 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства *a*) $0<C_1\leqslant\nu(s)\leqslant C_2<\infty$; *b*) $-s\nu'(s)\leqslant\nu(s)$ при $\nu'(s)<0$; *c*) $|s\nu'(s)|\leqslant C_3<\infty$.

Введём функциональное пространство, в котором будет доказана слабая разрешимость рассматриваемой задачи:

$$W=\{v\in L_2(-\infty,T;V^1)\cap L_\infty(-\infty,T;V^0), v'\in L_{4/3,loc}(-\infty,T;V^{-1})\}$$

Определение 1. *Слабым решением задачи (1)–(4) называется функция* $v\in W:=\{v\in L_2(-\infty,T;V)\cap L_\infty(-\infty,T;H),\quad v'\in L_{4/3}(-\infty,T;V^*)\}$, *удовлетворяющая при любой* $\varphi\in V^1$ *и п.в.* $t\in(-\infty,T)$ *тождеству*

$$\langle v',\varphi\rangle-\int_\Omega\sum_{i=1}^n v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+2\int_\Omega\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v))\varepsilon(\varphi)\,dx$$

$$+\mu\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds\,\varepsilon(\varphi)\,dx$$
$$=\langle f,\varphi\rangle.$$

Здесь z — регулярный Лагранжевый поток, порожденный v.

Теорема 1. *Пусть $f\in L_2(-\infty,T;V^*)$ и вязкость жидкости ν удовлетворяет условиям a)– c). Тогда задача (1)–(4) имеет по крайней мере одно слабое решение $v\in W$.*

Литература

1. Zvyagin V.G. Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory / V.G. Zvyagin, E.I. Kostenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — V. 44, N. 3 — C. 969–988.

2. Звягин А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа- модели Фойгта / А.В. Звягин // Известия Академии Наук. Серия математическая. — 2021. — Т. 85, № 1 — С. 66–97.

3. Zvyagin A. Solvability of the non- linearly viscous polymer solutions motion model / A. Zvyagin // Polymers. — 2022. — V. 14, № 6. — P. 1264.

4. Zvyagin A.V. Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model / A.V. Zvyagin, E.I. Kostenko // Mathematics. — 2023. — V. 21, № 11. — P. 4472.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕИДЕЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО ПОГРУЖАТЕЛЯ

Д.В. Костин, Т.И. Костина, С.Д. Бабошин, А.В. Журба (Воронеж, Воронежский государственный университет, Воронеж, Воронежский государственный технический университет)

(dvk605@mail.ru, tata_sti@rambler.ru, ijustbsd@gmail.com, av.zhurba.93@gmail.com)

В настоящем сообщении вводится понятие *неидельного* импульсного погружателя, которое описывает конструкцию линейки изделий импульсного погружателя с учетом допусков на изготовление и динамические характеристики.

Математическая модель «идеального» импульсного погружателя, являющегося по сути вибропогружателем с полигармоническим законом вдавливающего усилия, представляет собой функцию:

$$F_{\text{вс}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kt), \tag{1}$$

где t - время, n - число пар дебалансов, λ_k - коэффициент, зависящий от масс, скорости вращения, плотности материала дебаланса.

Подробно о импульсном погружателе и его оптимизации описано в работах [1], [2], [3], при этом значения масс, скорости вращения, плотности материалов, а также центровка основных узлов установки являются абсолютно точными, то есть их можно расчитать с точностью арифметических операций.

Однако, при изготовлении и эксплуатации импульснх погружателей неизбежны отклонения вышеперечисленных параметров. Это может оказаться критичным, так как основной идеей работы импульсного погружателя является своего рода «резонанс» — момент, когда все пары дебалансов создают услиие в едином направлении. Разбалансировка будет снижать максимальное усилие развиваемое подобной установкой. Данной проблеме были посвящены работы [4], [5].

В статье [5], был отмечен интересный факт: при увеличении частоты вращения наименьшего колеса, когда снимается условие целочисленности отношения окружних скоростей дебалансов, система попадает в ситуацию, когда от идеального погружателя с n звеньями, мы переходим к ситуации неидельного погружателя с $n+1$ числом звеньев. Но в этом случае коэффициент асимметрии может оказаться лучше. То есть становиться задача поиска оптимальной конструкции при нецелом отношении частот.

Литература

1. Костин В.А. Многочлены Максвелла–Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // ДАН, 2012. Т.445. №3. — С. 271–273.

2. Ермоленко В.Н. Оптимизация полигармонического импульса / В.Н. Ермоленко, В.А. Костин, Д.В. Костин , Ю.И. Сапронов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. Челябинск 2012, №27(286), выпуск 13. — С. 35–44.

3. Костин, Д.В. Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии / Д. В. Костин // Математический сборник. — 2016. — Т. 207. — № 12. — С. 90–109.

4. Костин Д.В. Нелинейная математическая модель импульсного погружателя / Д.В. Костин, Т.И. Костина, А.В. Журба, А.С. Мызников // Челябинский физико-математический журнал. — 2021. — Т. 6. — № 1. — С. 34–41.

5. Kostina T. Mathematical Model of a Pulse Submerger and the Influence of Manufacturing Tolerances. / Kostina, T., Baboshin, S., Zhurba, A. // Lobachevskii J Math 44 — 2023 — С. 3404–3410.

ФОРМИРОВАНИЕ ПАКЕТА ЦЕННЫХ БУМАГ МЕТОДОМ EDAS[1]

К.Н. Кудрявцев, П.К. Симаков (Челябинск, ЮУрГУ(НИУ))

kudrkn@gmail.com, pavelsimakov35707@gmail.com

Задачи принятия решений, возникающие в реальных приложениях, как правило, требуют одновременного учета большого числа факторов. Они достаточно сложны и не могут рассматриваться как однокритериальные. Чтобы получить адекватное действительности решение, приходится переходить к классу многокритериальных задач. При этом лицо, принимающее решение, как правило не имеет полной информации о системе, либо обладает некоторой неточной или нечеткой информацией. В последние годы, для многокритериальных задач принятия решений (MCDM) разработан ряд эффективных методов [1-3].

Классическим решениями многокритериальных задач являются векторные оптимумы, например, оптимум по Парето. Проблема в том, что этих оптимумов может быть бесконечно много [4].

Одним из методов принятия решений в многокритериальных задачах позволяющей выбрать один конкретный из таких оптимумов является метод оценки EDAS [5].

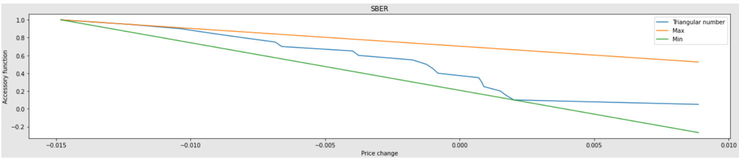
В рассматриваемом ниже примере будем предполагать, что информация о значениях критериев имеет нечеткий характер [6-8]. Дефаззификация нечеткой информации будет проводиться с помощью следующих методов: Адамо, центр максимумов, центр масс, медианы, индекс Чанга, возможное среднее, индекс Ягера и методов, предложенных в [9].

Далее рассмотрим следующую задачу. ЛПР собирает портфель акций, торгуемых на московской межбанковской валютной бирже (ММВБ). В портфель планируется включить 5 бумаг на сумму в 1

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00539, `https://rscf.ru/project/23-21-00539/`

мил. руб. Этот портфель планируется динамически обновлять 1 раз в неделю. Т.е. формально можно считать, что купленный портфель держится ровно одну неделю, затем продается и покупается новый портфель. При этом портфель должен показывать доходность большую, чем портфель, собранный по биржевому индексу. Будем рассматривать эту задачу как многокритериальную задачу принятия решений при нечеткой информации.

Для прогноза на предстоящую неделю будем использовать информацию за предыдущие 3 месяца. Таким образом для каждой последующей недели используемый набор данных будет постепенно обновляться. Поскольку нас интересует поведение акций на период длиной в одну неделю, то мы случайным образом выбираем некоторое количество, например, 20 торговых недель. И вычисляем для них относительное изменение цены акции за эти недели. На основе этих данных для каждой акции строится 2 треугольных числа, как верхняя и нижняя аппроксимации.



Верхняя и нижняя аппроксимация

Далее применется метод EDAS в двухкритериальной задаче с нечеткими треугольными критериями. Примеры оптимальных пакетов акций, сформированные в результате использования метода приведены на рисунках 2-3.

	SECID	SHORTNAME	change
0	KBSB	ТНСэКубань	-4.411765
1	VRSB	ТНСэнВорон	-9.497859
2	VJGZP	Варьеган-п	-5.108359
3	SAGOP	СамарЭн-ап	2.276632
4	NFAZ	НЕФАЗ	-1.865164

Оптимальный портфель при дефазификации методом Адамо

Отметим, что за рассматриваемую в примере торговую неделю, индекс ММВБ упал на 5,03 %. Собранные с использованием предла-

	SECID	SHORTNAME	change
0	VRSB	ТНСэнВорон	-9.497859
1	SAGOP	СамарЭн-ап	2.276632
2	NFAZ	НЕФАЗ	-1.865164
3	VRSBP	ТНСэнВор-п	-7.557118
4	IGST	Ижсталь2ао	0.262375

Оптимальный портфель при дефазификации методом Ухоботова-Стабулит

гаемого метода портфели упали меньше, так, при дефаззификации методом Адамо на 3,72 % а методом Ухоботова-Стабулит на 3,28 %, т.е. построенные портфели ведут себя лучше, чем портфель, построенный на основе индекса ММВБ.

Литература

1. Chakraborty S. et al. Applications of WASPAS method as a multi-criteria decision-making tool / Chakraborty S. // Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research. — 2015. — Vol. 49, No. 1. — P. 1–17.

2. Dadelo S. et al. Algorithm of maximizing the set of common solutions for several MCDM problems and it's application for security personnel scheduling / Dadelo S. // International Journal of Computers Communications and Control. — 2015. — Vol. 9, No. 2. — P. 151–159.

3. Elsayed A. et al. Fuzzy linear physical programming for multiple criteria decision-making under uncertainty International / Elsayed A. // Journal of Computers Communications and Control. — 2015. — Vol. 11 — No. 1. — P. 26–38.

4. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. / Подиновский В.В., Ногин В.Д. // М.: Физматлит, 2007.

5. Ghorabaee. et al. «Multi-Criteria Inventory Classification Using a New Method of Evaluation Based on Distance from Average Solution (EDAS).» / Ghorabaee, Mehdi Keshavarz // Informatica 26 — (2015) — P. 435–451.

6. Zadeh L.A. Fuzzy sets / Zadeh L.A // Information and Control. — 1965. — Vol. 8, No. 3. — P. 338–353.

7. Zimmermann H.J. Fuzzy set theory and its applications. / Zimmermann H.J. // N.Y.: Springer — 2011.

8. Ukhobotov V.I. On decision making under fuzzy information about an uncontrolled factor / Ukhobotov V.I., Stabulit I.S., Kudryavtsev K.N. // Procedia Computer Science. — 2019. — Vol. 150. — P. 524–531.

9. Ухоботов В.И. Сравнение нечетких чисел треугольного вида / Ухоботов В.И., Стабулит И.С., Кудрявцев К.Н. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, №. 2. — С. 197–210.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ КВАЗИЧАСТИЦЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И АНТИЭРМИТОВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

А.Е. Кулагин[1], А.В. Шаповалов[2]
(Томск, ТПУ[1], ИОА СО РАН[1], ТГУ[2])
aek8@tpu.ru

Метод комплексного ростка Маслова [1] является мощным инструментом построения асимптотических решений уравнений в частных производных с малым параметром перед производными. В работе [2] были впервые построены квазиклассически сосредоточенные решения нелокального нелинейного уравнения Шредингера, основанные на идеях метода комплексного ростка Маслова. В работе [3] с помощью этого подхода была рассмотрена задача построения решений, отвечающих квазичастицам при условии небольшого расстояния между ними. Однако в системах с существенным взаимодействием на больших расстояниях представляет интерес и задача построения таких решений, когда расстояние между квазичастицами не имеет оценки по малому параметру. Фактически это задача построения решений, которые будут локализованы в окрестности не одной траектории в фазовом пространстве, а сразу нескольких, которая и решалась в рамках данной работы. Более того, в этот формализм удалось успешно вписать и антиэрмитову добавку к уравнению Шредингера [4], которая расширяет применения данного подхода на случай открытых систем.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01047, https://rscf.ru/project/23-71-01047/.

Рассматривается нелокальное нелинейное уравнение Шредингера с антиэрмитовой частью следующего вида:

$$\Big\{ - i\hbar\partial_t + H(\hat{z},t)[\Psi] - i\hbar\Lambda\breve{H}(\hat{z},t)[\Psi]\Big\}\Psi(\vec{x},t) = 0,$$

$$\begin{aligned} H(\hat{z},t)[\Psi] &= V(\hat{z},t) + \varkappa\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\,\Psi^*(\vec{y},t)W(\hat{z},\hat{w},t)\Psi(\vec{y},t), \\ \breve{H}(\hat{z},t)[\Psi] &= \breve{V}(\hat{z},t) + \varkappa\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\,\Psi^*(\vec{y},t)\breve{W}(\hat{z},\hat{w},t)\Psi(\vec{y},t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\partial_x$, $\hat{\vec{p}}_y = -i\hbar\partial_y$, $\hat{z} = (\hat{\vec{p}},\vec{x})$, $\hat{w} = (\hat{\vec{p}}_y,\vec{y})$, а $V(\hat{z},t)$, $\breve{V}(\hat{z},t)$, $W(\hat{z},\hat{w},t)$ и $\breve{W}(\hat{z},\hat{w},t)$ — псевдодифференциальные операторы с гладкими символами. Формальным малым параметром является $\hbar$.

Функции, удовлетворяющие для любого псевдодифференциального оператора $\hat{A} = A(\hat{z},t,\hbar)$ соотношению

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar\to 0}\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle(t,\hbar) &= \sum_{s=1}^{K}\sigma_s(t)A(Z_s(t),t,0), \\ \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle(t,\hbar) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Psi(\vec{x},t,\hbar)\hat{A}\Psi^*(\vec{x},t,\hbar)d\vec{x}, \end{aligned} \qquad (2)$$

можно трактовать как квазиклассические частицы в открытой системе, описываемой уравнением (1). Число s указывает на номер квазичастицы, кривая $z = Z_s(t) = \Big(\vec{P}_s(t),\vec{X}_s(t)\Big)$ — траектория s-ой квазичастицы в $2n$-мерном фазовом пространстве, $\sigma_s(t)$ показывает количество материи («массу»), отнесенной к s-ой квазичастице.

Классические уравнения на решениях уравнения (1) с условием (2), описывающие динамику квазичастиц, т.е. их траекторию и «массу», имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_s(t) &= -2\Lambda\sigma_s(t)\left(\breve{V}(Z_s(t),t) + \varkappa\sum_{r=1}^{K}\sigma_r(t)\breve{W}(Z_s(t),Z_r(t),t)\right), \\ \dot{Z}_s(t) &= JV_z(Z_s(t),t) + \varkappa\sum_{r=1}^{K}\sigma_r(t)JW_z(Z_s(t),Z_r(t)), \quad s=\overline{1,K}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где J — единичная симплектическая матрицы.

В работе построены асимптотические решения задачи Коши для уравнения (1), квазиклассически сосредоточенные в окрестности траекторий $z = Z_s(t)$, определяемых системой (3). Для построения асимптотических решений использовался следующий квазиклассический анзатц:

$$\begin{gathered}\Psi_s(\vec{x},t,\hbar) = \hbar^{-n/4}\cdot\varphi\Big(\frac{\Delta\vec{x}_s}{\sqrt{\hbar}},t,\hbar\Big)\times\\ \times\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\Big(S_s(t,\hbar)+\langle\vec{P}_s(t),\Delta\vec{x}_s\rangle\Big)\Big]\Big\}.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь функция $\varphi(\vec{\xi},t,\hbar)$ принадлежит пространству Шварца по переменным $\vec{\xi}$, $\Delta\vec{x}_s = \vec{x} - \vec{X}_s(t)$, а функция $S_s(t,\hbar)$ выбиралась специальным образом и в частном случае $\varkappa = 0$, $\Lambda = 0$ совпадает с классическим действием. Асимптотическое решение уравнения (1) искалось в виде

$$\Psi(\vec{x},t,\hbar) = \sum_{s=1}^{K}\Psi_s(\vec{x},t,\hbar), \tag{5}$$

где функции Ψ_s задавались (4).

Построение таких асимптотических решений сведено к вспомогательной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, через решения которой выражается квазиклассический нелинейный оператор эволюции уравнения (1).

Литература

1. Maslov V.P. The Complex WKB Method for Nonlinear Equations. I. Linear Theory / V.P. Maslov. — Basel : Birkhauser Verlag, 1994. — 311 p.

2. Belov V.V. The trajectory-coherent approximation and the system of moments for the Hartree type equation / V.V. Belov, A.Yu. Trifonov, A.V. Shapovalov // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2002. — V. 32, №. 6. — P. 325–370.

3. Кулагин А.Е. Квазичастицы, описываемые уравнением Гросса–Питаевского в квазиклассическом приближении / А.Е. Кулагин, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов // Известия ВУЗов. Сер. : Физика. — 2015. — Т. 58, № 5. — С. 20–28.

4. Kulagin A.E. Semiclassical approach to the nonlocal nonlinear Schrodinger equation with a non-Hermitian term / A.E. Kulagin, A.V. Shapovalov // arXiv :2308.08286, 2023. — 29 p.

УЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ В МОДЕЛИ МУЛЬТИПЛИКАТОР-АКСЕЛЬРАТОР[1]

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов
(Ярославль, ЯРГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov_d_a@mail.ru

Одной из самых известных математических моделей следует считать ту, которая носит название «мультипликатор-аксельратор» (см., например, [1,2]). В монографии [1] было отмечено, что учет пространственных факторов вносит существенный вклад при изучении динамики макроэкономических процессов. Для этого была предложена модификация известной математической модели мультипликатор – аксельратор.

Анализ этой математической модели в нелинейной постановке удалось свести к изучению дифференциального уравнения с частными производными

$$u_{tt} - \alpha u_t - \beta^2 u_{txx} + u - \sigma^2 u_{xx} = F(u, u_t), \tag{1}$$

где $\alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}, u = u(t, x)$. Нелинейное слагаемое $F(u, u_t)$ может быть выбрано разными способами, но, как правило, в качестве его выбирают следующую функцию [1]

$$F(u, u_t) = -c_1 u_t^3 - c_2 u^3,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Уравнение (1) следует дополнить соответствующими краевыми условиями. Например,

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0,\ x \in [0, \pi] \tag{2}$$

или

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0,\ x \in [0, \pi]. \tag{3}$$

Возможен вариант периодических краевых условий

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{4}$$

Подчеркнем, что уравнение (1) и краевые условия (2), (3), (4) приведены уже в нормированном варианте.

[1] Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ. (проект №075-02-2023-948).

Если рассмотреть краевую задачу (КЗ) (1), (2) при таких α, β, что $\alpha - \beta^2 = \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то можно показать следующее. Такая КЗ имеет однопараметрическое семейство t периодических пространственно неоднородных решений, порождающих цикл. Этот цикл – локальный аттрактор для решений КЗ (1), (2).

Если же $\alpha = 2\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, а $\beta = 0$, то КЗ (1), (2) имеет асимптотически большое число t периодических решений (см. [3]).

Если же дополнительно к последним требованиям выполнено условие $\sigma^2 = \varepsilon\omega^2$, то анализ КЗ (1),(2); (1),(3); (1),(4) можно свести к изучению соответствующей КЗ для одной из версий известного в математической физике уравнения Гинзбурга-Ландау.

Литература

1. Puu T. Nonlinear Economic Dynamics. Berlin / T. Puu. — Berlin. : Springer-Verlag, 1989. — 333 p.

2. Zhang W.B. Synergetic economics. Time and change in nonlinear economics / W.B. Zhang. — Berlin. : Springer-Verlag, 1991. — 246 p.

3. Косарева Е.С. Об одной нелинейной краевой задачи, моделирующей экономические циклы / Е.С. Косарева, А.Н. Куликов // Моделир. и анализ информ. систем. — 2003. — Т. 10. — №. 2. — С. 18–21.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

О.В. Кунаковская (Воронеж, ВГУ)

newovk@yandexl.ru

Доклад посвящен топологическому направлению нелинейного анализа.

Вступительная часть доклада предполагается в виде обзора, доступного молодым исследователям. Здесь будет преобладать исторический принцип расположения материала: индексы Пуанкаре, степень Брауэра, теорема Хопфа, степень Лере-Шаудера, индекс Морса, индекс Арнольда и т.д.

Основная часть доклада посвящена развитию теоретических и прикладных направлений в теории топологических индексов. Будет изложена теория краевых индексов векторного поля (1-формы) и теория индексов пары векторных полей на многообразии с краем. Развитие теории идет по пути расширения списка категорий многообразий, в которых возможно построение теории топологических индексов. Здесь же будут очерчены приложения в нелинейном анализе и математической физике.

Литература

1. Кунаковская О.В. Об одном топологическом принципе для собственных векторов нелинейных операторов / Ю.Г. Борисович, О.В. Кунаковская // VIII Всесоюзной школы по теории операторов в функц. пространствах: тез. докл. — Рига, 1983. — С. 29-30.

2. Кунаковская О.В. Топологические индексы пары полей. Монография / О.В. Кунаковская. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2020. – 88 с.

3. Борисович Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. — 1977. — Т.32. — N 4. — С.3-54.

4. Кунаковская О.В. Топологические индексы в механике разрушения / О.В. Кунаковская, Д.М. Долгополов // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXXI» (3-9 мая 2020 г.). — Воронеж, 2020. — С. 120.

5. Кунаковская О.В. Топологические индексы в двумерных моделях сверхтекучести и высокотемпературной сверхпроводимости / О.В. Кунаковская, А.М. Никулин, А.Е. Шаповалова // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Материалы молодежной международной научной конференции «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы»; В.В. Обуховский (глав. ред.). – Вып. 7. – Часть 1. – Воронеж, ИПЦ «Научная книга», 2017. – С. 137-138.

6. Кунаковская О.В. Топологические методы в теории квантовых жидкостей / О.В. Кунаковская, А.М. Никулин // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Материалы молодежной международной научной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения». Выпуск 5. – Воронеж, ИПЦ «Научная книга», 2016. – С. 170-172.

7. Кунаковская О.В. О вычислении топологических индексов пары полей / О.В. Кунаковская // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXIV» .— Воронеж, 2013 .— С. 117-118 .— 0,1 п.л.

8. Кунаковская О.В. Топологические инварианты и их применения в задачах естествознания / О.В. Кунаковская // Современные

проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011): материалы IV Международной научной конференции (Воронеж, 12-17 сентября 2011 г.). – Воронеж: Изд.- полиграф. центр ВорГУ, 2011. – С. 169-170.

9. Кунаковская О.В. Теория препятствий и индексы краевых особенностей пары непрерывных сечений векторных расслоений (Obstructions Theory and Indices of Boundary Singularities of a Pair of Continuous Sections of Vector Bundles) // Дифференциальные уравнения и топология. Международная конф., посв. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Тез. докл. Москва, 17-22 июня 2008. С. 471.

10. Кунаковская О.В. Индексы краевых особенностей пары непрерывных векторных полей // Воронежская зимняя матем. школа С.Г. Крейна – 2008. Тез. докл. Воронеж, ВорГУ, 2008. С. 99-100.

11. Кунаковская О.В. Краевые особенности и их индексы в задачах теории сверхтекучих квантовых жидкостей / О.В. Кунаковская // Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения: материалы международной науч. конф. ТВМНА-2005. - Воронеж: Изд-во Воронежского госуниверситета, 2005. - С. 71-72.

12. Кунаковская О.В. Индексы множеств особенностей сечений векторных расслоений со значениями в группе оснащенных бордизмов // Математика. Образование. Экология. Гендерные проблемы. Материалы междунар. конф. Т.1. Воронеж, 22-27 мая 2000. – С. 167-168.

13. Кунаковская О.В. Топологические методы анализа нелинейных краевых задач и задач оптимизации / Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Борисович А.Ю., Сапронов Ю.И., Звягин В.Г., Кунаковская О.В. // Информационный бюллетень РФФИ. 1994. Т. 2. № 1. С. 95.

14. Кунаковская О.В. Применение топологических методов для оценки числа продольных упругих волн в кристаллах / Ю.Г. Борисович, Б.М. Даринский, О.В. Кунаковская // Теорет. и матем. физика. – 1993. – Т. 94, № 1. – С. 146-152.

15. Kunakovskaya O.V. Boundary indices of nonlinear operators and the problem of eigenvectors / Yu.G. Borisovich, O.V. Kunakovskaya // Methods and applications of global analysis: coll. of sc. proceedings / Voronezh: Voronezh University Press. — Voronezh, 1993. P. 39-44.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ЦЕНТРЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМКНУТОГО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.О. Курбанов (Москва, МГУ)
azim4fs@gmail.com

В работе М.Фригон 1996 года [1] содержится следующая теорема о существовании неподвижной точки у нерасширяющего (нерастягивающего) многозначного отображения, связанного с семейством сжимающих отображений.

Теорема (M.Frigon [1]) *Пусть E равномерно выпуклое Банахово пространство, U непустое ограниченное выпуклое подмножество в E, $F : \overline{U} \rightrightarrows E$ многозначное нерасширяющее отображение с компактными образами. Пусть существует отображение $H : \overline{U} \times [0,1] \rightrightarrows E$ с замкнутыми ограниченными образами такое, что:*
1) $H(\cdot, 1) = F$;
2) $H(\cdot, 0)$ имеет неподвижную точку;
3) Для любого $t \in [0,1)$ существует $\alpha < 1$ такое, что
$D(H(x,s), H(y,s)) \leqslant \alpha ||x - y||$ для любых $x, y \in \overline{U}$ и для $s \in [0,t]$;
Тогда либо F имеет неподвижную точку в $\overline{U}$, либо существует $t \in [0,1)$ и $x \in \partial U$ такие, что $x \in H(x,y)$.

В 1999 году авторами работы [2] было замечено, что доказательство этой теоремы содержит пробел, так как опирается на недоказанное утверждение о том, что если для точки $y \in E$ выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k \geqslant n} d(x_k, y) = r$, то $y \in A(C, \{x_n\})$.

Здесь C – выпуклое замкнутое множество в E, $\{x_n\} \subset C$ — ограниченная последовательность, $A(C, \{x_n\})$ и r — её асимптотический центр и асимптотический радиус относительно C (см. определения в [3]).

В работе [2] также указано, что вопрос о справедливости этого утверждения является открытым. Ответа на него в других работах найти не удалось.

Во время нашей совместной работы с Т.Н.Фоменко, связанной с приведенной теоремой М.Фригон, возник интерес к этому вопросу.

Автором получен частичный ответ на него, который будет изложен в докладе.

Литература

1. M. Frigon, On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings / M. Frigon — Recent Advances on Metric Fixed Point Theory (Sevilla, 1995), Univ. of Sevilla, 19–30.

2. Brailey Sims, The homotopic invariance for fixed points of set-valued nonexpansive mappings / Brailey Sims, Hong-Kun Xu, George Xian-Zhi Yuan // Josai mathematical monographs —1999 — vol. 1, 55–65

3. Michael Edelstein, The construction of an asymptotic center with a fixed-point property / Michael Edelstein. — Bull.Amer. Math. Soc. — 1972 — vol. 78, 206–208

ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАКСА В ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ

В.А. Кыров (Горно-Алтайск, ГАГУ)

KyrovVA@yandex.ru

Как известно, в теории солитонов возникает операторное уравнение Лакса, которое принимает следующий вид [1,2]:

$$L_t = [L, A] = LA - AL. \tag{1}$$

Нелинейное уравнение (1) является условием совместности системы линейных уравнений:

$$L\varphi = \mu\varphi,\ \varphi_t = -A\varphi,$$

где L и A — операторы, φ — собственная функция, а μ — собственное значение, причем

$$L = a\partial/\partial x + U,\ A = b\partial/\partial x + V,$$

$a = (a_{ij}), b = (b_{ij}),\ i, j = 1, 2, 3$ — постоянные матрицы, $U = (u_{ij}), V = (v_{ij}),\ i, j = 1, 2, 3$ — матрицы дифференцируемых функций. Далее матрица b берётся в жордановом виде.

Из уравнения Лакса (1) следует

$$L_t = U_t = [a, b]\partial^2/\partial_{x^2} + ([U, b] + [V, a])\partial/\partial_x + [U, V] + aV_x - bU_x.$$

Сравнивая коэффициенты перед оператором дифференцирования, получаем

$$[a, b] = 0,\ [U, b] + [V, a] = 0,\ U_t = [U, V] + aV_x - bU_x. \tag{2}$$

Так как матрица b жорданова, то первый коммутатор в (2) даёт существенные ограничения на матрицу a:

$$b = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\beta \neq 0$.

Далее в (2) рассматриваются дополнительные условия

$$[U, b] = 0,\ [U, V] = 0.$$

Эти дополнительные условия позаволяют свести третье равенство из (2) к эквивалентным нелинейным уравнениям.

Литература

1. Захаров В.Е. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. — М. : Наука, 1980. — 319 с.

2. Яновская О.С. Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка / О.С. Яновская, О.Б. Сурнёва // Наука. Инновации. Технологии. — 2018. — № 3. — С. 37–52.

О ПРОБЛЕМЕ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ В МЕТОДЕ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ

Д.Р. Лепетков (Тула, ТулГУ)
shipsdays@gmail.com

На абсолютно жесткое тело $D \subset \mathbb{R}^3$ падает плоская звуковая волна с потенциалом $\Psi_i(x) = e^{ikxd}$. Требуется найти акустический потенциал $\Psi_s(x)$ рассеянной волны (см. [1–4]). Аналитическое решение данной задачи известно в исключительных случаях, например, для шара. В случае произвольного тела применяются численные методы. Популярен подход на основе метода граничных элементов (МГЭ). В этом случае для суммарного потенциала $\Psi = \Psi_i + \Psi_s$ с учетом условия жесткости $\partial_n \Psi|_S = 0$ имеем [3, 4]

$$\int_S \partial_{n_{x'}} G(x', x)\Psi(x')\, dx' + \Psi_i(x) = \begin{cases} \Psi(x), & x \in D^c, \\ C(x)\Psi(x), & x \in S, \\ 0, & x \in D \setminus S. \end{cases}$$

где $S = \partial D$, n_x — внешняя нормаль к S, G — функция Грина пространства, $C(x) = 1/2$ для точек гладкости S.

В МГЭ решается граничное интегральное уравнение CBIE $= 0$ для $x \in S$ [4], затем оно подставляется в интеграл для расчета $\Psi(x)$ при $x \in D^c$. Применение МГЭ сопряжено с проблемой неединственности решения ГИУ, когда численный метод становится неустойчивым. В [3] показано, что если квадрат волнового числа k^2 является собственным значением внутренней задачи Дирихле в D, то решение будет неединственным. Чтобы оно стало единственным нужно одновременного выполнения условия Неймана $\partial_n \Psi|_S = 0$. В [3] доказано, что достаточно решать смешанное интегральное уравнение CBIE $+ (i/k)$HBIE $= 0$, где уравнение HBIE получается дифференцированием CBIE. Интеграл в CBIE сингулярный, а в HBIE — гиперсингулярный. Применяются разные методы регуляризации [4].

Предлагается новый метод регуляризации HBIE на основе вычитания среднего значения потенциала в окрестности точки сингулярности, который удобно применять для тела D, заданного неструктурированной полигональной сеткой.

Проблема неединственности наглядно видна на примере шара $\mathbb{B}^3$. Хорошо известное аналитическое решение можно записать в виде

$$\Psi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(kr) P_l(\cos\theta),$$

где $B_l(z) = \gamma_l j_l(z) + A_l h_l(z)$, $B_l(k) = \frac{i\gamma_l}{k^2 h_l'(k)}$, $\gamma_l = (2l+1)i^l$, j_l и h_l — сферические функции Бесселя и Ганкеля. Для вывода этого разложения из CBIE использовались сферические разложения для Ψ_i и G. В ходе выкладок с использованием вронскиана функций Бесселя устанавливается, что $j_l(k)B_l(k) = \frac{i\gamma_l j_l(k)}{k^2 h_l'(k)}$. Отсюда следует, что если k — корень функции Бесселя или, эквивалентно, k^2 — собственное значение внутренней задачи Дирихле для шара, то решение неединственно. Такие значения распределены достаточно плотно и при близости к ним численный метод без учета условия Неймана начинает ошибаться. При разработке численного метода следует учитывать этот факт.

Литература

1. Авдеев И.С. Рассеяние звука телами неканонической формы / Авдеев И.С. // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2011.

2. Скобельцын С.А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах / Скобельцын С.А. // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2020.

3. Burton A.J. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems / Burton A.J., Miller G.F. // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1971. — V. 323, no. 1553. — P. 201–210.

4. Simpson R.N. Acoustic isogeometric boundary element analysis / Simpson R.N., Scott M.A., Taus M., Thomas D.C., Lian H. // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2014. — V. 269. — P. 265–290.

ОТБОР СОДЕРЖАНИЯ ЗАНЯТИЙ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко

(Зеленокумск, Центр внешкольной работы;

Москва, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»)
lobantchik@yandex.ru, yaremki@yandex.ru

В работе рассматривается методика преподавания дифференциальных уравнений (ДУ) в системе дополнительного образования (ДО). Дифференциальные уравнения выступают в качестве основного инструментария формирования целостной картины (ЦКМ) мира старшеклассника. Сделан отбор содержания занятий по изучению элементов теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с использованием метода математического моделирования, целью которого является способность и готовность старшеклассников к применению изученного материала и полученных практических умений и навыков в квазипрофессиональной, а затем и в профессиональной деятельности [1, с. 1]. В качестве составляющих процесса обучения старшеклассников в системе дополнительного образования принимаем: опыт усвоения знаний, в результате которого приобретаются новые знания, опыт практической деятельности, в результате повышается мастерство в применении знаний, опыт творческой и исследовательской деятельности, что ведет к самостоятельности мышления и развитию творческих качеств личности, формированию целостной картины мира.

Взаимосвязь обязательного обучения математике в общеобразовательной школе и математических занятий в рамках дополнительного образования выступает как средство реализации дидактических принципов непрерывности, преемственности, системности и способствует целостности знаний выпускников и их подготовке к выбору профессии. С целью обучения старшеклассников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений необходимо использовать практико-ориентированный подход, который позволяет значительно повысить эффективность обучения [1, с. 1], [2].

В отечественной научно-педагогической литературе термин «практико-ориентированное обучение» трактуется неоднозначно. Если речь идет о школьном образовании, то это понятие означает «обучение, ориентированное на применение математики в повседневной жизни и формирование у старшеклассников понимания базовой роли математики» [3] при этом математическое моделирование признается в качестве ведущего средства описания и разрешения реальных жизненных ситуаций. Определение понятия «практико-ориентированное обучение математике в школе» дано в работе М.В. Егуповой как «специально организованный познавательный процесс, направленный на формирование у старшеклассников представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные объекты, а также на развитие умений применять изученные математические понятия, результаты, методы для исследования простейших объектов действительности, решения практико-ориентированных задач» [4], [5],[6, с. 64].

Изучение дифференциальных уравнений с целью формирования ЦКМ старшеклассника направлено на познание законов природы, которые выражены на математическом языке дифференциальных уравнений, при этом абстрактность математических понятий и методов должна быть воспринята старшеклассниками как основа для системного изучения реального мира и его закономерностей. Изучение ДУ обуславливается потребностями мировосприятия старшеклассника, демонстрацией универсальности и применимости математических принципов ко всем классам явлений [7].

Для успешного изучения старшеклассниками элементов теории дифференциальных уравнений и применения их к решению практико- ориентированных задач необходимо опираться на имеющиеся у старшеклассников знания и на их субъектный опыт, поэтому следует активизировать известные старшеклассникам сведения и способы деятельности [1, с. 2], [8].

Важно правильно выделить объем и содержание материала теории дифференциальных уравнений для изучения его старшеклассниками в системе дополнительного образования. При этом следует учитывать ряд требований. Перечислим их:

1. Не следует включать в программу весь тот материал, который старшеклассники будут изучать, поступив в вуз,

2. Отобранный материал должен обладать элементами новизны, чтобы мог заинтересовать старшеклассников,

3. Предлагаемый материал должен иметь практико-ориентированный характер, показывать его востребованность в жизни,

4. Необходимо включение историко-математических сведений (историю открытий, символов, фрагменты из жизни математиков и др.),

5. При соблюдении всех дидактических принципов особое внимание уделить развитию гуманитарной составляющей математического

образования (развитию мыслительных операций, способов рассуждений, творческих умений),

6. Использовать в полной мере активную деятельность самих старшеклассников (заслушивать сообщения, презентации и пр.), 7. Применять IT- технологии в процессе обучения.

При этом задачами для педагога являются:

- формирование у старшеклассников понимание роли дифференциальных уравнений в решении разнообразных задач,

- обеспечение усвоения понятий фрагмента предлагаемой теории,

- обучение старшеклассников решению выделенных видов дифференциальных уравнений,

- показ применения дифференциальных уравнений к решению практико-ориентированных задач [1, с. 3], [2].

Перед началом занятий важно мотивировать старшеклассников на изучение предлагаемого материала. Это можно сделать с привлечением самих слушателей.

Информируя старшеклассников через выступления их соучеников (именно такие сообщения заинтересовывают старшеклассников в наибольшей степени) о значимости и широком распространении теории дифференциальных уравнений с целью повышения у старшеклассников мотивации к изучению предлагаемого материала, следует проиллюстрировать вышесказанное примером. Предлагаемая нами методика изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования принципиально отличается от традиционной методики преподавания курса ДУ в высших учебных заведениях. Учитывая объём знаний, имеющийся у старшеклассников, включающий в себя знание геометрического и физического смысла производной, мы строим таким образом курс элементов теории ДУ в учреждениях ДО [7]. Вначале рассматриваем основные понятия ДУ, далее ДУ с разделением переменных, затем к решению ДУ с помощью средств компьютерной алгебры (среда MathCad) или интернет-решателей, потом переходим к решению задач на закон естественного роста и логистический закон (в качестве математической модели выступают ДУ 1- го порядка), закон колебаний (ДУ 2- го порядка), закон взаимодействия двух противоборствующих видов (системы ДУ). На протяжении всего обучения «красной линией» проходит главная идея курса: однотипный характер существенных связей между объектами окружающего мира ведет к изоморфизму реально функционирующих систем, и одно и то же дифференциальное уравнение, одна и та же математическая модель может описывать целую группу различных, но изоморфных, процессов или явлений реального мира [8, с. 104]. Таким образом происходит формирование целостной картины мира (ЦКМ) старшеклассника. Проверка сформированности ЦКМ проходит вовремя всего обучения посредством анкетирования, тестирования, в конце — защита исследовательских проектов методом экспертной оценки. Приведенный объем материала теории дифференциальных уравнений при опоре на школьные знания:

- в полной мере позволяет сформировать у старшеклассников понимание роли ДУ при решении самых разнообразных, в том числе, востребованных практикой задач:

- обеспечивает усвоение первоначальных понятий теории,

- обладает определенной новизной для развития интереса старшеклассников,

- дает возможность обучить старшеклассников решению некоторых видов ДУ,

- рассмотреть применение ДУ при решении геометрических, физических, экономических и другого рода задач,

- сформировать ЦКМ.

Кратко проведём обзор отобранного материала.

Сначала старшеклассники знакомятся с общей теорией дифференциальных уравнений. По аналогии с теорией алгебраических уравнений, изучаемой ими в рамках школьного курса, старшеклассники под контролем педагога дают определение решения дифференциального уравнения. Те сведения, которые старшеклассники не могут получить по аналогии, им сообщает педагог. В итоге они приобретают знания об основных понятиях ДУ.

Изучение различных типов дифференциальных уравнений целесообразно начинать с уравнений с разделенными переменными, с такого вида простейшими уравнениями старшеклассники знакомятся в рамках учебной программы в общеобразовательной школе. Поскольку это не вновь узнаваемый материал, то не будем на нем останавливаться. Старшеклассникам необходимо предложить для решения определенное количество таких задач, чтобы старшеклассники вспомнили метод решения и приобрели необходимые навыки. Затем следует перейти к их обобщению — дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.

Чтобы получить уравнение с разделенными переменными, приходится умножать обе части уравнения на одно и то же выражение. С этим свойством старшеклассники знакомы, так как пользовались им при решении алгебраических уравнений (квадратных, иррациональных дробно-рациональных, симметрических и др.).

Чтобы старшеклассники освоили рассмотренные методы решения уравнений, им предлагается совокупность задач, часть из которых решается непосредственно в аудитории, а другая часть предназначается для самостоятельной работы старшеклассников.

Изучение тех видов уравнений, которые мы выделили, не представляют затруднений для старшеклассников в системе дополнительного образования, тем более, что идут туда интересующиеся и неплохо владеющие математическим аппаратом. Включение выделенных тем несет элементы новизны, удовлетворяющие математические интересы старшеклассников, дает возможность познакомить старшеклассников с больших кругом практико-ориентированных задач, что способствует формированию целостной картины мира, а также и профориентации старшеклассников. Кроме того, изучение выделенных нами разделов теории дифференциальных уравнений позволяет закрепить в их сознании метод математического моделирования — один из основных в математике. Стремиться же к расширению отобранного нами фрагмента теории дифференциальных уравнений вряд ли целесообразно, так как поставит перед старшеклассниками дополнительные, ничем не оправданные трудности. С другими видами уравнений они познакомятся в высшей школе. Того, что они узнают здесь, вполне достаточно для расширения их кругозора, усвоения сути и значимости метода математического моделирования, роли дифференциальных уравнений в решении задач из разных областей науки и практики.

Литература

1. Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования / Н. И. Лобанова // Интернет-журнал «Мир науки» (серия Педагогика и психология). — 2016. — № 6. — Том 4. — С. 1–9.

2. Лобанова Н.И. Обучение методу моделирования средствами дифференциальных уравнений при решении геометрических задач в системе дополнительного образования школьников / Н. И. Лобанова, Н. В. Аммосова // Современные проблемы науки и образования. — 2017. № 5. ;

3. Егупова М. В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе : специальность 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)» : диссертация на соискание ученой

степени доктора педагогических наук / М. В. Егупова. // Москва — 2015. — 452 с.

4. Егупова М. В. Достижение метапредметных результатов в практико-ориентированном обучении геометрии / М. В. Егупова // Калуга: Центр дистанционного образования "Эйдос —2019. — 152 с.

5. Егупова М. В. Составление задач на практические приложения математики как средство развития речевой культуры студентов-педагогов / М. В. Егупова // Проблемы современного педагогического образования. —2017. № 55 (2). — С. 170–180.

6. Яремко Н.Н. Содержательная трансформация математической практико-ориентированной задачи в уровневом образовании. Практико-ориентированный подход в условиях трансформации образования: монография / Н. Н. Яремко, Н. Б. Тихонова, М. В. Глебова // под ред.Т. И. Шукшиной; Мордов. гос. пед. университет. Саранск, —2022. Глава IV, С. 62–78. Текст : электронный. ISBN 978-58156-1545-8

7. Яремко Н.Н. Закон естественного роста как основа математического моделирования при формировании целостной картины мира школьника / Н. Н. Яремко, Н. И. Лобанова // «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе», Москва, МПГУ, 24-28 апреля 2023 года.

8. Лобанова Н.И. К вопросу изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования / Н. И. Лобанова // В сборнике: Математическое образование в школе и вузе: инновации в информационном пространстве (MATHEDU' 2018) Материалы VIII Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Л.Р. Шакирова. Казань, —2018. — С. 102–108.

9. Семиохин И.А. Сборник задач по химической кинетике. / И. А. Семиохин // Москва —2005. С. 89.

10. Александрова Е.Б. Математика. Часть II. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Учебное пособие. Под ред. Г.Г.Хамова./ Е. Б. Александрова, А. А. Атоян, И. Е. Водзинская, Е. Г. Копосова, Р. А. Мыркина, Т. А. Семенова, Л. Н. Тимофеева, Г. Г. Хамов, М. Ю. Чурилова // – СПб. Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена —2009. — 353 с.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПЕРАТОРА, ДВОЙСТВЕННОГО К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА-КИПРИЯНОВА[1]

Л.Н. Ляхов, В.А. Калитвин, М.Г. Лапшина (Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, РАНХиГС, Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

levnlya@mail.ru, kalitvin@gmail.com, marina.lapsh@ya.ru

Различные задачи естествознания, порожденные сферической симметрией аргумента соответствующих функций, приводят к пребразованию Радона специального вида, введенного в работе И. А. Киприянова и Л. Н. Ляхова [1]. Л.Н. Ляхов впоследствии назвал это интегральное преобразование *преобразованием Радона-Киприянова.* Оно определено в виде следующей конструкции:

$$K_\gamma[f](\theta;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\, \mathcal{P}_{x_1}^\gamma\, \delta(p - \langle x, \theta\rangle)\, x_1^\gamma\, dx, \gamma > 0,$$

где $\langle x, \theta\rangle$ — скалярное произведение n - мерных векторов, θ — единичный вектор нормали к плоскости $\langle x, \theta\rangle = p$ (при этом $|p|$ — расстояние от начала координат до плоскости $\langle x, \theta\rangle = p$), а символ $\mathcal{P}_{x_1}^\gamma$ $(\gamma > 0)$ обозначает действие оператора Пуассона [2] по переменной x_1. Преобразование Радона—Киприянова удобно исследовать в виде вращения $f(x_1, x') \to f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x'\right) = \widetilde{f}(z)$. Тогда K_γ-преобразование сводится к *специальному весовому преобразованию Радона* в $\mathbb{R}_{n+1}^+$ (см. [1], [2])

$$K_\gamma[f](\theta;p) = C(\gamma) \int\limits_{\{p=\langle z,\, \Theta\rangle\}^+} \widetilde{f}(z)\ z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z)$$

в виде интеграла по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\theta}\rangle = \langle z, \Theta\rangle\}^+$, определенную неравенством $z_2 > 0$, которая параллельна весовой оси координат z_2 с единичным вектором нормали $\tilde{\theta} = (\theta_1, 0, \theta') = \Theta \in \overline{\mathbb{R}_{n+1}^+}$. Для удобства полуплоскость интегрирования обозначим символом $\Theta_\perp^+$, т.е. $\Theta_\perp^+ = \{z\colon \langle \Theta, z\rangle = p, \quad z_2 > 0\}$. Обратим внимание на то, что $(z_1, z_2, x') \in \Theta_\perp^+$ при всех $z_2 \geqslant 0$, если только точка $(z_1, x') \in \Theta^\perp \cap \{z : \ z_2 = 0\}$. При фиксированном векторе Θ примем обозначение

$$K_\gamma[f](\Theta;p) = K_{\gamma,\Theta}[f](p).$$

Следуя [3], запишем преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости $\Theta_\perp^+$ в $\in \mathbb{R}_{n+1}^+$:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

$K_{\gamma,\Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1}\ d\Gamma(z).)$

Двойственное преобразование в R_1. Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Введем линейную форму в $\mathbb{R}_1$

$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\Theta}[f](p)\ g(p)\ dp = C(\gamma)\ \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(p\Theta + z)\ g(p)\ z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp.$

Положив

$$y = p\Theta + z \in \mathbb{R}_{n+1}^+ = \{y = (z_1, z_2, x') :\ z_2 > 0\},$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p)\, g(p)\, dp = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\, K_{\gamma,\theta}^{\#} g(x)\ x_1^\gamma dx_1\, dx',$$

с двойственным оператором $K_{\gamma,\theta}^{\#}\, g(x) = \mathcal{P}_{x_1}^\gamma\ (g(\theta,\ \langle\theta, x\rangle))$.

Теорема 1. $\int\limits_{S_1^+(n)} \int\limits_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p)\, g(p)\, dp\, \theta_1^\gamma dS(\theta) =$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\, \mathcal{K}_\gamma^{\#} g(x)\ x_1^\gamma dx_1\, dx' \ \textit{где}\ \ \mathcal{K}_\gamma^{\#} g(x) = \int\limits_{S_1^+(n)} K_{\gamma,\theta}^{\#} g(x) x_1^\gamma dx$$

Отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}_\gamma^{\#}$ получен дополнительным интегрированием функции $K_{\gamma,\theta}^{\#}\, g(x)$ по полусфере $S_1^+(n)$, поэтому не зависит от вектора нормали к плоскости.

О преобразованиях Фурье—Бесселя и Фурье. Напомним, что через $S_{ev} = S_{ev}^+(\mathbb{R}_n^+)$ обозначено подпространство пространства Л.Шварца, пробных функций, четных по Киприянову (см. [4], с.21) по переменной x_1.

Смешанное преобразование Фурье—Бесселя (введено в [4]) с преобразованием Ганкеля по первой переменной (введено в [5]) определено формулой $F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{R_n^+} f(x) j_\nu(x_1\xi_1)\, e^{-i\langle x', \xi'\rangle}\ x_1^\gamma dx,\ \gamma = 2\nu{+}1{>}0$, где $j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)\ J_\nu(t)}{t^\nu}$, J_ν — функция Бесселя первого рода, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$. Пространство основных функций S_{ev} инвариантно относительно преобразование F_B и обратимо [4]. Обратное преобразование определено равенством

$$F_B^{-1}\left[\widehat{f}\right](x) = (2\pi)^{1-n}\ 2^{-2\nu}\ \Gamma^{-2}(\nu+1)\ F_B[\widehat{f}\ ](-x) = f(x).$$

В этих исследованиях используется представление j-функции Бесселя интегралом Пуассона [5].

Преобразование Фурье в направлении вектора нормали. Пусть $\mathbb{Z}_n^+ = \mathbb{Z}_n^+(S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1)$ — пространство основных функций Л.Шварца, заданных на единичном цилиндре $S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_{n+1}$. Очевидно, что функция $K_\gamma[f](\xi, p)$ определена на цилиндре $\mathbb{Z}_n^+$ и является четной в следующем смысле: $K_\gamma[f](-\xi, -p) = K_\gamma[f](\xi, p)$.

Известны следующие равенства

$$F_{(p\to s)}\left[K_{\gamma,\theta}[f](p)\right](s)=F_B[f](s\theta)=F_B[f](\xi).$$
$$K_{\gamma,\theta}[f](p)=F^{-1}_{(s\to p)}\left[F_B[f](s\theta)\right](p)=F^{-1}_{(s\to p)}\left[F_B[f](\xi)\right](p),$$
где $s\theta=\xi,\ |\theta|=1$.

K_γ—**Преобразования обобщенной свертки.** Обобщенной сверткой (сверткой Пуассона) функций называется выражение
$$(f*g)_\gamma=\int_{\mathbb{R}_n^+}T_{x_1}^{y_1}f(x_1,x'-y')\ g(y)\ y_1^\gamma\ dy_1dy',$$
где обобщенный сдвиг Пуассона определен формулой
$$T_{x_1}^{y_1}f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi f\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2-2x_1y_1\cos\alpha},x'\right)\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha.$$
Если $f,\ g{\in}S_{ev}$, то

$K_\gamma[(u{*}v)_\gamma](\xi;p){=}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_\gamma[u](\xi,t)\,K_\gamma[v](\xi;p{-}t)\,dt$, где $(u{*}v)_\gamma$ — обобщенная свертка функций u и v, порожденная обобщенным смешанным сдвигом Пуассона.

Теорема 2. *Если $f\in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, то*
$$K_\gamma^{\#}\ K_\gamma[f](x)=|S_1(n-1)|\ \left(\frac{1}{|x|}\ *\ f\right)_\gamma,$$
где $|S_1(n-1)|$ — площадь единичной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n-1}$.

Литература

1. Киприянов И.А. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // Докл. АН СССР. — 1998. — 360. — № 2. — С. 157–160.

2. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова—Радона / Л.Н. Ляхов // Тр. МИАН. — 2005. — Т. 248. — С. 153–163.

3. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии / Ф. Наттерер. — М.: Мир. — 1990. — С. 279.

4. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М.: Наука. — 1997. — С. 199.

5. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. / Б.М. Левитан. — УМН. — 1951. — Т.6. — № 2. — С. 102–143.

ВОЗМОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В $\mathbb{R}_n$ СВЕДЕНИЕМ ЕГО К УРАВНЕНИЮ «РАДИАЛЬНОЙ СТРУНЫ»[1]

Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина, Д.А. Моисеев

(Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Липецк,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, Воронеж, ВГУ)
levnlya@mail.ru, sanina08@mail.ru, dimonmoiseev48@mail.ru

Сферическим средним функции f называется следующее выражение

$$\widetilde{f_x}(r) = \frac{1}{|S_1(n)|} \int\limits_{S_1(n)} f(P)\, dS, \quad P \in S_{1,x}(n). \tag{1}$$

где $S_{1,x}(n)$ — единичная сфера с центром в точке $x \in \mathbb{R}_n$, $|\theta|$=1, $|S_1(n)| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь единичной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$.

Возможности применения классического метода сферических средних к изучению дифференциальных уравнений с частными производными продемонстрированы в известной монографии Ф. Джона [1], в которой, в частности, получен новый способ решения однородного гиперболического уравнения, путем сведения его к известному уравнению с одной пространственной переменной — радиальной (см. также учебники [2], [3]), даже если координаты аргумента функции не связаны сферической симметрией.

Применением сферического среднего (к оператору Лапласа) решение волнового уравнения в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_3$ сводится к решению, основанном на формуле Даламбера. Но возникает вопрос: существует-ли оператор Лапласа другой размерности, сферическое среднее которого представляется второй производной по радиус-вектору $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ точки x. Задача свелась к доказательству для функции $\widetilde{u(r,t)}$=$\frac{v(r,t)}{r}$ формулы

$$\widetilde{\Delta}_n u = \left(\widetilde{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}} \right) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} \widetilde{u(r,t)}) = \frac{v}{r^2}(3-n) + \frac{v_r}{r}(n-3) + v_{rr},$$

из которой с очевидностью следует, что только при $n = 3$ сферическое усреднение (1) оператора Лапласа Δ_n окажется второй радиальной производной.

В связи с этим возник другой вопрос: существует ли дифференциальный оператор в частных производных второго порядка в $\mathbb{R}_n$, который применением к нему сферического усреднения окажется второй радиальной производной?

Далее мы покажем, что при любом натуральном $n \geqslant 1$ такой оператор существует. Его примером служит оператор Лапласа—Бесселя— Киприянова

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{n} B_\gamma, \quad B_\gamma=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i>-1,$$

где коэффициент скрытой сферической симметрии (введен в [4]) $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ при $\gamma_i>-1$ подобран так, чтобы $n+|\gamma|=3$. При этом мы применяем аппарат *весового сферического среднего*

$$\widetilde{f}_x(r)=\frac{1}{|S_1(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1(n)} f(x+r\theta)\,\prod_{i=1}^{n}|\theta_i|^{\gamma_i}dS(\theta), \quad \gamma_i>-1. \qquad (2)$$

При $\gamma_i>-1$ площадь взвешанной сферы существует и определяется по формуле (см. [3], [4])

$$|S_1(n)|_\gamma=2^n\int\limits_{S_1^+=\{\theta:\ |\theta|=1,\theta_i>0\}}\prod_{i=1}^{n}\theta^{\gamma_i}dS=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\,\Gamma((\gamma_i+1)/2)}{\Gamma((n+|\gamma|)/2)}. \qquad (3)$$

Ранее, в работе [5], веовые сферические средние при $\gamma_i>0$ вводились для исследования уравнений с оператором Лапласа—Бесселя Δ_{B_γ} при $\gamma_i>0$.

2. Весовое сферическое среднее оператора Лапласа—Бесселя—Киприянова

В этой работе изучаются весовые сферические средние с ,возможно, всеми отрицательными параметрами $\gamma_i\in(-1,0)$. Данное исследование инициировано работами [4], [5].

Лемма 1. *Пусть $u\in C^2$ и четная по Киприянову ([4], с. 21). Тогда*

$$\widetilde{\Delta_{B_\gamma}u}(r)=B_{n+|\gamma|-1}\widetilde{u}(r), \quad \gamma_i>-1.$$

3. Значения коэффициента скрытой сферической симметрии $|\gamma|$, при котором $\left(\widetilde{(\Delta_{B_\gamma}u)_x}\right)(r)=(\widetilde{u_x})''(r)$.

Введем обозначение $\mu=n+|\gamma|$. Тогда утверждение леммы 1 примет вид

$$\left(\widetilde{(\Delta_B u)_x}\right)(r)=\frac{1}{r^{\mu-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\mu-1}\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{u_x}(r)\right)=\frac{1}{r}\left((\mu-1)\frac{\partial\widetilde{u_x}(r)}{\partial r}+r\frac{\partial^2\widetilde{u_x}(r)}{\partial r^2}\right),$$

Произведем замену $\widetilde{u_x}(r)=\frac{v(r)}{r}$. Тогда $\left(\widetilde{(\Delta_B u)_x}\right)(r)=\frac{v(r)}{r^2}(3-\mu)+$

$\frac{v'(r)}{r}(\mu-3)+v''(r)$. Как видим, главный вопрос решился просто: $\mu{=}n{+}|\gamma|{=}3 \quad \Longrightarrow \quad |\gamma|{=}3-n$. И тогда $\left(\widetilde{(\Delta_B u)_x}\right)(r)=\left(\widetilde{u_x}\right)''(r)$.

В частности, 1) если $n=1$, то $|\gamma|=\gamma=2$; 2) если $n=2$, то $|\gamma|=1$; 3) если $n=3$, то $|\gamma|=0$; 4) если $n>3$, то число $|\gamma|$ $(=3-n)$ — отрицательное.

Заключение. Как видим, при $n{+}|\gamma|{=}3$ решение уравнения $u_{tt}{=}\Delta_{B,x}u$ будет выражено через посредство весовых сферических интегралов (2) с нормирующим множителем

$$|S_1(n)|_\gamma^{-1}=$$

$$=\left(\int_{S_1(n)}\prod_{i=1}^{n}\theta_i^{\gamma_i}\ dS\right)^{-1}=\left(4(\pi)^{-1/2}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)^{-1},$$

который не совпадает с классическим в (1) и с весовым в работе (5). Поэтому полученное нами решение сингулярного B-гиперболического уравнения с оператором Лапласа—Бесселя—Киприянова с коэффициентом скрытой сферической симметрии (=3-n<0) является новым. Поскольку решение выражено сферическими интегралами (весовыми), то оно удовлетворяет принципу Гюйгенса. При $\gamma_i>0$ это известно из работы [6] для всех нечетных чисел $n+|\gamma|$. Стало быть, свойство гюйгеновсти решения B-гиперболического уравнения справедливо и в расширении области значений параметров мультииндекса $\gamma:\ \gamma_i>-1$.

Литература

1. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Пер. с англ. Н.Д. Введенской ; Под ред. С.Г. Михлина. - Москва : Изд-во иностр. лит., 1958. - 158 с.

2. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики./ М.: ФИЗМАТЛИТ. 2013. с. 352.

3. Л.Н. Ляхов «Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха» / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Матем. заметки, 113:4 (2023), 517–528; Math. Notes, 113:4 (2023), с.502–511.

4. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциалные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610-1520.

5. И.А. Киприянов «О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями и о принципе Гюйгенса», Дифференц. уравнения, / И.А. Киприянов, Ю.В. Засорин // 28:3 (1992), 452–462; Differ. Equ., 28:3 (1992), 383–393.

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КИПРИЯНОВА[1]

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов (Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru, y.bulatov@bk.ru

Псевдодифференциальные операторы, построенные на основе преобразований Бесселя, называются сингулярными псевдодифференциальными операторами Киприянова (введены И.А. Киприяновым в 1970 г.; первая публикация по этой теме в работе [1]) и предназначены для исследования сингулярных дифференциальных уравнений. Их конструкции основаны на интегральных преобразованиях Ганкеля, которые, в свою очередь, построены на функциях Бесселя, являющихся решениями сингулярного дифференциального уравнения Бесселя $B_\gamma u+\xi^2 u=0$, $B_\gamma=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\ \frac{\partial}{\partial t}$, $\gamma > -1$. Эти решения связаны с функциями Бесселя первого рода $J_{\pm\nu}(t)$, $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$, $\gamma > 0$ следующими равенствами:

1) j-малое функции Бесселя (нормированные функции Бесселя) $j_\nu(t) = \frac{2^{\pm\nu}\Gamma(1\pm\nu)}{t^{\pm\nu}} J_{\pm\nu}(t)$, $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$, $\gamma > 0$, $j_\nu(0) = 1$.

2) $\mathcal{J}^{\pm}_\gamma$ -Функции Бесселя—Киприянова—Катрахова
$\mathcal{J}^{\pm}_\nu(t)=j_\nu(t)\pm i\frac{t}{2\nu+1}\, j_{\frac{\nu+1}{2}}(t)$, $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$, $\gamma > 0$, $\mathcal{J}^{\pm}_\nu(0)=1$.

3) $\mathbb{J}$-Функции Бесселя
$\mathbb{J}_\mu=\Gamma(1+\mu)2^\mu\, t^\mu J_\mu(t)=t^{2\mu} j_\mu(t)$, $\mu=\frac{\gamma+1}{2}$, $-1<\gamma<0$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathbb{J}_\mu(t)}{t^{2\mu}}=1$;
$\mathbb{J}_{-\mu} = \Gamma(1-\mu)\, 2^{-\mu}\, t^\mu\, J_{-\mu}(t) = t^{2\mu}\, j_{-\mu}(t)$, $\mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1$.

Отметим, что $\mathbb{J}$-функции с отрицательным параметром $-\mu$ нашли применение в спектральной теории начально-граничных задач (см. [2], [3] и [4]). В работах [4], [5], [6] использованы $\mathbb{J}$-функции Бесселя с положительным индексом μ для исследования проблем связанных с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя с отрицательным индексом.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Преобразования Фурье—Бесселя основанные на указанных выше функциях Бесселя обозначены символами соответственно F_B, $\mathcal{F}_B$ и $\mathbb{F}_B$. Сингулярные пдо, построенные в рамках j-преобразования были применены для исследования B-эллиптических задач. Этот вид сингулярных ПДО описан в [10]. Сингулярные пдо, построенные в рамках $\mathcal{J}$-преобразования позволили построить алгебру истинного порядка $-\infty$; одномерный и многомерный случаи евклидовых переменных рассмотрены в работах [7], [8] и [9].

$\mathbb{J}$-Псевдодифференциальные операторы Киприянова введены на основе $\mathbb{F}_B$-преобразования. Некоторые результаты приведены в [10], [11].

Пусть α — целое не отрицательное число и $\gamma{\in}(-1,0)$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D^{\alpha}_{B_{-\gamma_i}}\right)_t=\begin{cases} B^{\alpha}_{-\gamma_i}, & \text{если число } \alpha \text{ четное,}\\ \frac{\partial}{\partial t}B^{\alpha-1}_{-\gamma_i}, & \text{если число } \alpha \text{ нечетное.}\end{cases}.$$

Рассматриваемые далее функции удобно считать принадлежащими основному подпространству Л. Шварца, состоящему из функций четных по Киприянову. Было введено их обозначение $S_{ev}(\mathbb{R}^+_n)$, $\mathbb{R}^+_n{=}\{x{=}(x_1,\ldots,x_n),\, x_i{>}0\}$.

Пространство Соболева—Киприянова. Для любого вещественного s через $H^s_{-\gamma}(0,\infty)$ обозначим пополнение множества S_{ev} по норме $\|u\|_{H^s_{-\gamma}}=\int\limits_{\mathbb{R}^+_n}\left|\left(1+|\xi|^2\right)^s\ |\widehat{u}(\xi)|^2\right|^{\frac{1}{2}}\ \xi^{-\gamma}\,d\xi$, где $\widehat{u}$ — прямое $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя (введено в [5]).

Пространство символов: $a(x,\xi){\in}\Xi^m_{-\gamma}{=}\Xi^m_{-\gamma}(\mathbb{R}^+_n\ \times\ \mathbb{R}^+_n)$, если $\left|\left(D^{\alpha}_{B_{-\gamma_i}}\right)_x\left(D^{\beta}_{B_{-\gamma_i}}\right)_\xi\ a(x,\xi)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta}\ (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$ при любых α и β с постоянными $C_{\alpha,\beta}$ не зависящими от x и ξ.

Через $\mathbb{T}$ обозначим оператор обобщенного псевдосдвига (введен [4]). Оператор, действующий на функцию, принадлежащую пространству $S_{ev}(0,\infty)$, по формуле $A\,u(x){=}\int\limits_{\mathbb{R}^+_1}\int\limits_{\mathbb{R}^+_1}\mathbb{T}^y_x\mathbb{J}_\mu(x\xi)\ a(x,\xi)\ u(y)\ y^{-\gamma}\ dy\ \xi^{-\gamma}\,d\xi,\quad -\gamma{=}-2\mu{+}1$ будем называть сингулярным $\mathbb{J}$-псевдодифференциальным оператором Киприянова.

Теорема *Сингулярный $\mathbb{J}$-псевдодифференциальный оператор (1) с символом $a(x,\xi)\in\Xi^m_{ev}$, является оператором порядка m, т.е.* $\|A\ u\|_{H^s_{-\gamma}}\leqslant C\ \|u\|_{H^{s+m}_{-\gamma}}$.

В докладе также будут приведены теоремы о произведении и коммутаторе $\mathbb{J}$-псевдодифференциальных операторов.

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов. / Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. // ДАН СССР. — 1974. — Т.218. № 2. С. —278–280.

2. Сабитов К. Б. Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 123.

3. Сабитов К. Б. Вторая начально-граничная задача для В-гиперболического уравнения / К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2019. — № 10. — С. 75–86.

4 . Сабитов К. Б. О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье-Бесселя / К. Б. Сабитов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2022. — № 11. — С. 89–96.

5. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение оператора Δ_B Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения — 2022. — Т. 58,№ 12. — С. 1654–1665.

6. Ляхов Л.Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рощупкин, Ю. Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52–65.

7. Киприянов И. А. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / Киприянов И. А., Катрахов В. // Матем. сб., 104(146):1(9) —1977, — С. 49–68.

8. Катрахов В. В. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов / В. В. Катрахов, Л. Н. Ляхов // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 5. — С. 681–695

9. Lyakhov L. N. A priori estimate for solutions of singular B–elliptic pseudodifferential equations with bessel Δ_B–Operators / L. N. Lyakhov, S. A. Roschupkin // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 196, No. 4. — P. 563–571.

10. Lyakhov L. N. Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel J-transform / L. N. Lyakhov, S. A. Roshchupkin, Yu. N. Bulatov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 269, No. 2. — P. 205–216.

11. Lyakhov L. N. Composition and Commutator of Singular J-Pseudodifferential Kipriyanov Operators in $\mathbb{R}_{\boldsymbol{N}}$ / L. N. Lyakhov, Y.

N. Bulatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Т. 44, № 8. — С. 3438–3454.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ НА ПАРАБОЛОИДАХ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.П. Маланкин (Москва, МГУ)
andrei.malankin@math.msu.ru

В настоящее время активно изучаются интегрируемые биллиарды и их обобщения. Слоения Лиувлля плоских биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик, изучались в работах В. Драговича, М. Раднович [1] и В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [2], [3]. В. В. Ведюшкина ввела и рассмотрела новый класс интегрируемых биллиардов: биллиарды на столах–комплексах, склееных из плоских биллиардных столов. Как оказалось, такие биллиарды моделируют слоения Лиувилля многих важных интегрируемых гамильтоновых систем (см. [4]). Настоящая работа посвящена интегрируемым геодезическим биллиардам на поверхностях положительной и отрицательной гауссовой кривизны, а именно на эллиптическом и гиперболическом параболоидах. Софокусные геодезические биллиарды на эллипсоиде и гиперболоидах изучались Г. В. Белозеровым в работе [5].

Напомним, что *семейством софокусных параболоидов* в $\mathbb{R}^3$ называется однопараметрическое семейство квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x^2}{4(a-\lambda)} + \frac{y^2}{4(b-\lambda)} = z - \lambda,$$

где $a > b > 0$ — фиксированные числа, а $\lambda \in \mathbb{R}$ — вещественный параметр.

Определение 1. *Биллиардным столом на параболоиде назовем замкнутую область, ограниченную конечным числом квадрик, софокусных с данной, и имеющую углы излома на границе равные* $\frac{\pi}{2}$.

Мы будем рассматривать следующую динамическую систему: материальная точка (шар) движется по биллиардному столу вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Такой биллиард является интегрируемым по

Лиувиллю в кусочно–гладком смысле. Его интегрируемость следует из знаменитой теоремы Якоби–Шаля.

На множестве биллиардных столов (на фиксированной квадрике) введем следующее отношение эквивалентности.

Определение 2. *Будем говорить, что два биллиардных стола комбинаторно эквивалентны, если один из них может быть получен из другого последовательностью следующих преобразований:*

- *изменением сегмента границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, при этом значение изменяемого параметра λ при каждой деформации не может принимать значений a и b;*

- *симметрией относительно координатных плоскостей.*

Автором получена полная классификация биллиардных столов на параболоидах относительно комбинаторной эквивалентности.

Теорема 1. *На эллиптическом параболоиде существует в точности* 13 *типов комбинаторно неэквивалентных биллиардных столов, а на гиперболическом параболоиде — ровно* 9.

Оказывается верным следующее утверждение.

Утверждение 1. *Биллиарды на комбинаторно эквивалентных столах грубо лиувиллево эквивалентны.*

На основе этого утверждения были найдены инварианты Фоменко биллиардов на всевозможных параболических биллиардных столах.

Как оказалось, существует полное соответствие между геодезическими биллиардами на эллиптическом параболоиде и плоскими биллиардами. При этом омбилические точки заменяются фокусами, а сетка параболических координат на эллиптическом параболоиде — на сетку плоских эллиптических координат.

Литература

1. Dragovich V. Bifurcations of Liouvilletori in elliptical billiards / V. Dragovich, M. Radnovich // Regul. Chaotic Dyn., — 2009, — Т. 14, № 4–5. — С. 479–494.

2. Фокичева В.В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами/ В.В. Фокичева // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., — 2014, — № 4. — С. 18–27.

3. Фокичева В.В. Классификация биллиардных движений в областях, ограниченных софокусными параболами/ В.В. Фокичева // Матем. сб., — 2014, — Т. 205, № 8. — С. 139–160.

4. Ведюшкина В.В. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами/ В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева // Докл. РАН, — 2018, — Т. 479, № 6. — С. 607–610.

5. Белозеров Г.В. Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве/ Г.В. Белозеров // Матем. сб., — 2020, — Т. 211, № 11. — С. 3–40.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ БИЛЛИАРДЫ НА ПАРАБОЛОИДАХ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Д.Д. Маслов (Москва, МГУ)
daniil.maslov@math.msu.ru

В настоящее время активно изучаются интегрируемые гамильтоновы системы (ИГС) с двумя степенями свободы. Таковыми системами, в частности, являются плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик (см. [1], [2]), интегрируемые геодезические биллиарды на квадриках в $\mathbb{R}^3$ (см. [3]), а также обобщения этих систем путем добавления к ним интегрируемых потенциалов (см. [4], [5]). Настоящая работа посвящена изучению топологии слоения Лиувилля геодезических биллиардов на параболоидах в поле силы тяжести.

Определение 1. *Семейством софокусных параболоидов называется множество квадрик, заданных уравнением*

$$z - \lambda = \frac{x^2}{4(a-\lambda)} + \frac{y^2}{4(b-\lambda)}, \quad \text{где} \quad a > b.$$

Определение 2. *Биллиардным столом на параболоиде назовем компактное множество с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом софокусных параболоидов, у которого все углы излома на границе равны $\pi/2$.*

Мы изучаем следующую динамическую систему: материальная точка движется по биллиардному столу в поле силы тяжести с потенциалом $V = mgz$, отражаясь от границы абсолютно упруго. Такая динамическая система оказалась интегрируемой. Помимо полной механической энергии она обладает дополнительным первым интегралом, который был найден с помощью метода В. В. Козлова.

Теорема 1. *В параболических координатах долонительный первый интеграл биллиарда на параболоиде в поле силы тяжести имеет следующий общий вид:*

$$F = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_2\lambda_3(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\dot{\lambda_1}^2 + \frac{\lambda_1\lambda_3(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\dot{\lambda_2}^2 +$$

$$+\frac{\lambda_1\lambda_2(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\dot{\lambda_3}^2\Big) + g\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Замечание 1. *Отметим, что в формуле выше фигурируют три переменные, в то время как размерность любого параболида из определения 1 равна двум. Однако на любом таком параболоиде всегда зафиксирована одна из параболических координат: $\lambda_i = \hat{\lambda}$. Следовательно, $\dot{\lambda_i} = 0$ и формула выше, действительно, корректно определена.*

Для биллиардного стола на эллиптическом параболоиде, ограниченного другим софокусным эллиптическим параболоидом, были описаны области возможного движения, построены бифуркационные диаграммы, вычислены инварианты Фоменко. Как оказалось, эта система ведет себя по-разному в зависимости от знака g.

Литература

1. Фокичева В.В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами/ В.В. Фокичева // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., — 2014, — № 4. — С. 18–27.

2. Фокичева В.В. Классификация биллиардных движений в областях, ограниченных софокусными параболами/ В.В. Фокичева // Матем. сб., — 2014, — Т. 205, № 8/ — С. 139–160.

3. Белозеров Г.В. Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве/ Г.В. Белозеров // Матем. сб., — 2020, — Т. 211, № 11. — С. 3–40.

4. Кобцев И.Ф. Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ/ И.Ф. Кобцев // Матем. сб., — 2020, — Т. 211, № 7. — С. 93–120.

5. Пустовойтов С.Е. Топологический анализ биллиарда в эллиптическом кольце в потенциальном поле/ С.Е. Пустовойтов // Фунд. и прикл. матем., — 2019, — Т. 22, № 6. — С. 201–225.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ В ВИДЕ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА МАСЛОВА

ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ГРАФЕНЕ[1]

Д.С. Миненков (Москва, ИПМех РАН)
minenkov.ds@gmail.com

Рассматривается надбарьерное рассеяние дираковских электронов в графене с массой на гладком электростатическом потенциале, то есть решается двумерное уравнение Дирака [1]. В случае гладких функций потенциала и массы и больших энергий можно исследовать задачу в квазиклассическом приближении: строить коротковолновые асимптотики по малому параметру — отношению длины волны к характерному масштабу изменения потенциала и массы. В подобных задачах как правило происходит фокусировка волновой функции и образование каустики — цикла особенностей, связанных с классическими траекториями. Соответствующие квазиклассические асимптотики задаются каноническим оператором Маслова [2]. Важно отметить при этом, что, благодаря использованию геометрических объектов — лагранжева многообразия и рассчитанному для него индексу Маслова, канонический оператор дает ответ глобально. Полученные формулы легко реализуются на компьютере, что позволяет исследовать поведение решения в окрестности каустик, в частности, влияние фазы Берри на положение и амплитуду главного максимума волновой функции [1].

Литература

1. Reijnders K.J.A. Electronic optics in graphene in the semiclassical approximation / K.J.A. Reijnders, D.S. Minenkov, M.I. Katsnelson, S.Yu. Dobrokhotov // ANN PHYS (NY). — 2018. — V. 397, No. 65. — P. 65–135.

2. Маслов В.П. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики / В.П. Маслов, М.В. Федорюк. — М. : Наука, 1976. — 296 с.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ С ПРОПУСКАМИ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНУЛЛИ И ЭЙЛЕРА[1]

К.А. Мирзоев (Москва, МГУ, Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ)
mirzoev.karahan@mail.ru

[1] Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700044-0).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из равенств

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\qquad \frac{2e^{tx}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t|<2\pi$, а второе - при $|t|<\pi$, а символами B_n и E_n - числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами $B_n=B_n(0)$ и $E_n=2^nE_n(1/2)$ $(n=0,1,\ldots)$.

Рекуррентные соотношения с пропусками для чисел B_n и E_n изучаются с середины XIX века по настоящее время (см. [1] — [3]), и, напротив, соответствующие соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера в математической литературе крайне мало изучены. Этой теме посвящены наши недавние работы [4] и [5], содержащие соотношения с пропусками длины 4 и 8 соответственно, и, кроме того, нам известна работа [6], содержащая рекуррентные соотношения с пропусками длины 4 и 6 для этих многочленов.

Нами предложен метод, основанный на спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, позволяющий получить лакунарных рекуррентных соотношений с пропусками длины $2n$ для многочленов Бернулли и Эйлера. Сформулируем основной результат этой работы.

Пусть $n\geqslant 2$ - фиксированное натуральное число и $\varepsilon=e^{i\pi/n}$. Мощность множества всевозможных отображений множества $\{1,2,\ldots,n{-}1\}$ на множество $\{0,1\}$ равна 2^{n-1}. Элементы этого множества занумеруем символами m_s и определим числа α_s, полагая

$$\alpha_s=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{m_s(j)}\varepsilon^j,\qquad s=1,2,\ldots,2^{n-1}$$

(случай $n=1$ мы также включаем в рассмотрение, полагая, что сумма по пустому множеству равно 0, т.е. $\alpha_1=0$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При $n=1,2,\ldots$ и $m=0,1,\ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{[m/(2n)]}2^{m-2nk}C_{m+n}^{2nk+n}B_{m-2nk}(z)\sum_{s=1}^{2^{n-1}}(-1)^{\nu(s)}\left(1+\alpha_s\right)^{2nk+n-1}=$$

$$=(-1)^{n-1}\left(1+\frac{m}{n}\right)\sum_{s=1}^{2^{n-1}}(-1)^{\nu(s)}\left(2z-1-\alpha_s\right)^{m+n-1}\qquad(1)$$

и

$$2^{m+n-1}E_m(z)+\sum_{k=1}^{[m/(2n)]}2^{m-2nk}C_m^{2nk}E_{m-2nk}(z)\sum_{s=1}^{2^{n-1}}(1+\alpha_s)^{2nk}=$$

$$=\sum_{s=1}^{2^{n-1}}(2z-1+\alpha_s)^m\,, \qquad (2)$$

где $[a]$ *- целая часть числа* a *и* $\nu(s)=0$*, если количество слагаемых со знаком плюс в числе* α_s *чётное, и* $\nu(s)=1$ *в противном случае при* $n\geqslant 2$*, и, кроме того,* $\nu(1)=0$ *при* $n=1$*.*

Из этой теоремы немедленно следуют новые и, по-видимому, представляющие самостоятельный интерес представления в терминах введённых выше чисел α_s для многочленов $E_{2n-1}(z)$

$$E_{2n-1}(z)=\frac{1}{2^{3n-2}}\sum_{s=1}^{2^{n-1}}(2z-1+\alpha_s)^{2n-1} \qquad (3)$$

и чисел Бернулли B_{2n} и Эйлера E_{2n-2}

$$B_{2n}=\frac{1}{2^{3n-2}(2^{2n}-1)}\sum_{s=1}^{2^{n-1}}(1+\alpha_s)^{2n}\,,\quad E_{2n-2}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{s=1}^{2^{n-1}}\alpha_s^{2n-2}.$$

Кроме того, из теорем 1 следуют многочисленные рекуррентные соотношения с пропусками длины $2n$ для чисел Бернулли и Эйлера, некоторые из которых новы, а другие - хотя бы в неявном виде были известны.

Доклад основан на совместной ещё не опубликованной работе с Сафоновой Т.А.

Литература

1. Ramanujan S. Some properties of Bernoulli's numbers / S. Ramanujan// J. Indian Math. Soc. — 1911. — № 3. — P. 219–234.

2. Lehmer D.H. Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler / D.H. Lehmer// Ann. of Math. — 1935. — Vol. 36, № 3. — P. 637–649.

3. Merca M. On lacunary recurrences with gaps of length four and eight for the Bernoulli numbers / M. Merca// Bull. Korean Math. Soc. — 2019. — Vol. 56, № 2. — P. 491–499.

4. Мирзоев К.А. Лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины четыре для многочленов Бернулли и Эйлера / К.А.

Мирзоев, Т.А. Сафонова // Проблемы математического анализа. — 2023. — № 122. — С. 87–94.

5. Мирзоев К.А. Лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Бернулли и Эйлера / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Математические заметки. — 2024. — Т. 115, № 2. — С. 312–317.

6. ZHI-Hong Sun Recurrence formulas with gaps for Bernoulli and Euler polynomials /ZHI-Hong Sun // `arXiv:1403.0435v1`

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.Н. Миронов, Е.Ф. Зарипова (Елабуга, КФУ)
miro73@mail.ru

При исследовании граничных задач для гиперболических систем в ряде работ используются различные варианты методов Римана и Римана-Адамара [1]–[11].

Здесь рассматривается система уравнений с кратными характеристиками с тремя независимыми переменными

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1 v_x + b_1 w_x + c_1 u + d_1 v + e_1 w + f_1(x,y,z), \\ v_{yy} = a_2 u_y + b_2 w_y + c_2 u + d_2 v + e_2 w + f_2(x,y,z), \\ w_{zz} = a_3 u_z + b_3 v_z + c_3 u + d_3 v + e_3 w + f_3(x,y,z), \end{cases} \tag{1}$$

где все коэффициенты зависят от (x,y,z) и в замыкании рассматриваемой области G пространства R^3 удовлетворяют условиям a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i = \overline{1,3}$. Решение системы (1) класса u, v $w \in C^1(G)$, u_{xx}, v_{yy} $w_{xx} \in C(G)$ назовем регулярным в G.

Пусть G_0 — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0 > 0$, $z = x$, $z = z_0 > 0$. Обозначим через X, Y, T грани G_0 при $x = 0$, $y = 0$, $z = x$ соответственно.

Задача D**:** *найти в области* G_0 *регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{aligned} &u|_X = \varphi_1(y,z), \quad (u_x - a_1 v - b_1 w)|_X = \varphi_2(y,z), \\ &v|_Y = \psi_1(x,z), \quad (v_y - a_2 u - b_2 w)|_Y = \psi_2(x,z), \\ &w|_T = \chi_1(x,y), \quad (w_z - a_3 u - b_3 v)|_T = \chi_2(x,y), \end{aligned}$$

где $\varphi_1(y,z)$, $\varphi_2(y,z) \in C^2(\overline{X})$, $\psi_1(x,z)$, $\psi_2(x,z) \in C^2(\overline{Y})$, $\chi_1(x,y)$, $\chi_2(x,y) \in C^2(\overline{T})$.

Методом интегральных уравнений доказаны существование и единственность решения задачи D. Предложен аналог метода Римана-Адамара, определен аналог матрицы Римана-Адамара [9], [10] для задачи D, опирающийся на определение матрицы Римана [5]. Построено решение задачи D в терминах аналога матрицы Римана-Адамара.

Литература

1. Романовский Р.К. О матрицах Римана первого и второго рода / Р.К. Романовский // Матем. сб. — 1985. — Т. 127, № 4. — С. 494–501.

2. Романовский Р.К. Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными / Р.К. Романовский // Матем. сб. — 1987. — Т. 133, № 3. — С. 341–355.

3. Миронова Л.Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными / Л.Б. Миронова // Вестн. СамГТУ. Сер. : Физ.-мат. науки. — 2006. — Вып. 43. — С. 31–37.

4. Жегалов В.И. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными / В.И. Жегалов, Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Матем. — 2007. — № 3. — С. 12–21.

5. Миронова Л.Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками / Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Матем. — 2006. — № 1. — С. 34–39.

6. Созонтова Е.А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа / Е.А. Созонтова // Изв. вузов. Матем. — 2013. — № 10. — С. 43–54.

7. Миронова Л.Б. Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве / Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Матем. — 2019. — № 6. — С. 48–57.

8. Mironova L.B. Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations / L.B. Mironova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — V. 41, № 3. — P. 400–406.

9. Миронов А.Н. Метод Римана — Адамара для одной системы в трехмерном пространстве / А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1063–1070.

10. Миронов А.Н. О задаче типа Дарбу для гиперболической системы уравнений с кратными характеристиками / А.Н. Миронов, А.П. Волков // Изв. вузов. Матем. — 2022. — № 8. — С. 39–45.

11. Миронов А.Н. К задаче Дарбу для гиперболических систем / А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 5. — С. 642–651.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ФАКТОРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Л.Б. Миронова (Елабуга, КФУ)
lbironova@yandex.ru

Краевые задачи для факторизованных дифференциальных уравнений, дифференциальный оператор которых является произведением оператора Бианки (не содержащего кратного дифференцирования ни по одной из переменных) и оператора первого порядка рассмотрены в работах [1, глава 4], [2], [3]. Краевая задача с условиями на характеристиках для факторизованного уравнения с псевдопараболическим оператором третьего порядка с двумя независимыми переменными рассмотрена в [1], где решение построено в терминах функции Римана псевдопараболического дифференциального оператора третьего порядка. Здесь аналогичный метод исследования применяется к уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xxyy}+a_{21}u_{xxy}+a_{12}u_{xyy}+a_{11}u_{xy}+ \\ +a_{20}u_{xx}+a_{02}u_{yy}+a_{10}u_x+a_{01}u_y+a_{00}u)=0. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения (1) — достаточно гладкие функции переменных (x,y). Дифференциальный оператор уравнения (1) представляет собой произведение оператора первого порядка и псевдопараболического оператора четвертого порядка.

Пусть $D=\{0<x<x_1,\ 0<y<y_1\}$, а X, Y — части ∂D, лежащие на осях x, y соответственно. Отрезок характеристики $y=x$, расположенный внутри D, обозначим через M.

Задача 1. Найти в D функцию, являющуюся в $D\backslash M$ регулярным решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$u\,|_{\overline{Y}}=\varphi_1(y),\ \ u\,|_{\overline{X}}=\varphi_2(x),\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{Y}}=\psi_1(y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{X}}=\psi_2(x),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\overline{Y}}=\lambda_1(y),\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\overline{Y}}=\lambda_2(y),$$

$$\varphi_1,\,\psi_1,\,\lambda_1\in C^2([0,y_1]),\,\varphi_2,\,\psi_2,\,\lambda_2\in C^2([0,x_1]),$$
$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0),\,\psi_1(0)=\varphi_2'(0),\,\varphi_1'(0)=\psi_2(0),$$
$$\lambda_1(0)=\varphi_2''(0),\,\lambda_2(0)=\varphi_1''(0).$$

Получено достаточное условие, представляющее собой условие на граничные значения φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, λ_1, λ_2 в точке $(0,0)$, обеспечивающее существование и единственность решения задачи 1. Решение задачи построено в терминах функции Римана соответствующего псевдопараболического дифференциального оператора четвертого порядка, определение которой приведено, например, в [1, с. 127].

Литература

1. Жегалов В.И. Уравнения с доминирующей частной производной / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина // Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014. — 385 с.

2. Жегалов В.И. К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов // Дифференциалные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 364–371.

3. Миронов А.Н. Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n-мерном пространстве / А.Н. Миронов // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 54–60.

4. Миронова Л.Б. Задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим дифференциальным оператором / Л.Б. Миронова // Известия вузов. Математика. — 2020. — № 8. — С. 44–49.

ОБ ОДНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ АНДРОНОВА-ХОПФА МЕТОДАМИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов,
И.Дж. Нуров (Вологодский государственный университет, Таджикский национальный университет)
azharsoft@mail.ru

В работе предложен ослабленный вариант теоремы Андронова-Хопфа о бифуркации. Основной акцент придается условию непрерывности правой части системы. Условия дифференцируемости предполагаемой части теоремы, заменяется на знак-переменности функций. Применяются топологические методы такие, как вполне непрерывные векторные поля, гомотопия и принцип смены индекса для анализа существования бифуркационных значений параметров. Следует отметить, что в теории бифуркации исследуется качественное поведение решения динамических систем при изменении параметров.

Основная идея теоремы Андронова-Хопфа заключается в том, что если система дифференциальных уравнений зависит от параметра, то при изменении этого параметра решения системы могут изменять свое поведение. При определенных значениях параметра могут происходить бифуркации, то есть качественные изменения поведения решений.

В частности, теорема Андронова-Хопфа устанавливает, что при определенных условиях (например, при наличии особой точки) при изменении параметра системы могут появляться циклические решения, которые ранее отсутствовали. Это явление называется бифуркацией Андронова-Хопфа.

В работе [1] для автономной системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{1}$$

приведена классическая теорема Хопфа. Здесь $x \in R^n$, $\mu \in \Lambda \subset R$, а $F(x, \mu)$ – непрерывно дифференцируемый вектор – функция по совокупности переменных x, μ. Предполагается, что система дифференциальных уравнений (1) допускает аналитическое семейство $x = x(\mu)$ состояний равновесия, т.е. $F(x(\mu), \mu) = 0$. Производя замену, без ограничения общности можно предполагать, что $x(\mu) \equiv 0$, то есть $F(0, \mu) \equiv 0$. Предположим, что при некотором $\mu = \mu_0$, (например, при $\mu_0 = 0$), матрица Якоби $F_x(0, \mu_0)$ имеет два чисто мнимых простых собственных значения $\pm i\beta$ и не существует других собственных значений матрицы $F_x(0, \mu_0)$, целочисленных кратных $i\beta$. Пусть $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ является продолжением по параметру μ собственного значения $i\beta$. Предполагается, что $\alpha^{'}(0) \neq 0$.

Теорема 1 (теорема Андронова-Хопфа). *При сформулированных условиях существуют непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε, $\mu(0) = 0, T(0) = 2\pi\beta^{-1}$ и такие, что у уравнения (1) существуют ненулевые периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, которые удовлетворяют условию*

$$a(\varepsilon) = \max_t |x(t, \varepsilon)| \to 0, \varepsilon \to 0$$

.

Настоящий доклад посвящён бифуркации Андронова - Хопфа, при менее ограничительных условиях на функцию $F(x, \mu)$. Предположим, что $F(x, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных, $F(0, \mu) \equiv 0$ и имеет место преставление

$$F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu), \tag{2}$$

где $A(\mu)$ – матрица, а $\omega(x, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \to 0, |x| \to 0, \tag{3}$$

равномерно относительно μ. Отметим, что из непрерывности по совокупности переменных функции $F(x, \mu)$, представления (2) и условия (3) следует, что матрица $A(\mu)$ - непрерывно зависит от μ, а $\omega(x, \mu)$ непрерывно по совокупности переменных. В отличие от условий Хопфа, где предполагается, что функция $F(x, \mu)$ – дифференцируема по совокупности переменных x, μ нам достаточно условия непрерывности правой части системы по совокупности переменных.

При этих условиях дифференцируемость собственного значения $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ по параметру μ не гарантирована. Поэтому условие $\alpha^{'}(\mu_0) \neq 0$, предпологаемое в формулировке теоремы Андронова-Хопфа заменяется, на условие существования последовательности чисел $\delta_k^+ > 0, \delta_k^- > 0$ стремящихся к нулю, при $k \to \infty$ такие, что $\alpha(\mu_0 - \delta_k^-)\alpha(\mu_0 + \delta_k^+) < 0, k = 1, 2, \ldots$. Ниже это условие получаем непосредственно через элементы матрицы $A(\mu)$.

В работе для выяснения бифуркационных значений параметров применяются топологические методы.

Предполжим, что матрица $A(\mu)$ является невырожденной для всех $\mu \in \Lambda$. Тогда система уравнений (1), в силу условий (2),(3), при всех $\mu \in \Lambda$, имеет изолированное нулевое стационарное (периодическое любого периода) решение. Нас интересует множество предельных точек Λ^* последовательности $\mu_k \in \Lambda$, $k = 1, 2, ...$ для которых система (1) при $\mu = \mu_k$ имеет ненулевое периодическое решение $x_k(t)$, удовлетворяющее условию:

$$\max_t |x_k(t)| \to 0, \text{ при } k \to \infty.$$

Отметим, что если $\mu_0 \in \Lambda$ является бифуркационным значением Андронова - Хопфа, то спектр $\sigma(A(\mu_0))$ матрицы $A(\mu_0)$ содержит пару чисто мнимых собственных значений: $\sigma(A(\mu_0)) = (\pm i\beta_0)$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu) \in \sigma(A(\mu)), \alpha(\mu) = 0, \beta(\mu) > 0$, *при* $\mu = \mu_0$ *и* $\pm im\beta(\mu_0) \notin \sigma(A(\mu_0)), m \in Z, m \neq \pm 1$ *причем* $i\beta(\mu_0)$ -

простое собственное значение матрицы $A(\mu_0)$. Пусть существуют такие числа $\delta_k^+ > 0, \delta_k^- > 0$, стремящиеся к нулю, при $k \to \infty$ такие, что $\alpha(\mu_0 - \delta_k^-)\alpha(\mu_0 + \delta_k^+) < 0$. Тогда значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа для системы (1).

Литература

1. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М. : Наука, 1980. — 366 с.

2. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЗАВИСЯЩЕГО ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Э.М. Мухамадиев, З.И. Шарифзода

(Вологда, ВоГУ , Душанбе, ТНУ)

sakhara-2803@mail.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x, \varepsilon), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, а $f(x, \varepsilon)$ - непрерывная — вектор - функция по совокупности переменных x, ε; ε — положительный и достаточно малый параметр; A — квадратная матрица. Кроме того, относительно матрицы A предполагаем, что она имеет следующие собственные значения:$\pm i\beta \in \sigma(A), \beta \neq 0$, $\gamma \in \sigma(A), \gamma \neq 0, \gamma \in R^1$. Следует отметить, что в случае $x \in R^2$ система (1) было рассмотрено в работе [1]. В данной работе для исследования вопроса о существовании циклов отправным пунктом послужила классическая теорема Л.С. Понтрягина [2], которая сформулирована при предположении аналитичности функции $f(x, \varepsilon)$ по совокупности переменных x, ε. В отличие от условий Понтрягина ниже не предполагалась дифференцируемость всех входящих функций. Далее, интерес представляет, когда $x \in R^3$.

При сделанных относительно спектра матрицы А предположениях, согласно теореме Жордано, имеем

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \beta y_2 + \varepsilon g_1(y_1, y_2, y_3, \varepsilon), \\ \dot{y_2} = -\beta y_1 + \varepsilon g_2(y_1, y_2, y_3, \varepsilon), \\ \dot{y_3} = \gamma y_3 + \varepsilon g_3(y_1, y_2, y_3, \varepsilon). \end{cases} \qquad (2)$$

По функциям $g_1(y_1, y_2, 0, 0), g_2(y_1, y_2, 0, 0)$ определим скалярную функцию

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} [g_1(rcos\varphi, rsin\varphi, 0, 0)cos\varphi + g_2(rcos\varphi, rsin\varphi, 0, 0)sin\varphi]d\varphi$$

Для исследования необходимого условия существования циклов, приведем систему (2) к более простому виду. С этой целью введя обозначения $x(t) = rcos\varphi(t), y(t) = rsin\varphi(t)$ переходя к полярной системе координат, имеем

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon[g_1(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3, \varepsilon)cos\varphi + g_2(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3, \varepsilon)sin\varphi], \\ \dot{\varphi} = -\beta - \frac{\varepsilon}{r}[g_1(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3, \varepsilon)sin\varphi - g_2(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3, \varepsilon)cos\varphi], \\ \dot{y_3} = \gamma y_3 + \varepsilon g_3(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3, \varepsilon). \end{cases} \qquad (3)$$

При этих предположениях справедлива следующая

Лемма 1. *Решение $(y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), y_3(t, \varepsilon))$ системы (2), при данном значении ε периодическое периода $\omega = \omega(\varepsilon)$, где*

$$\omega = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{-\beta - \frac{\varepsilon}{\rho}[g_1(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi, Y, \varepsilon)sin\varphi - g_2(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi, Y, \varepsilon)cos\varphi]}$$

тогда и только тогда, когда соответствующее решение $\rho(\varphi) = r(T(\varphi))$ и $Y(\varphi) = y_3(T(\varphi))$ системы уравнений (3) 2π - периодическое, т.е. $(\rho(\varphi + 2\pi, \varepsilon), Y(\varphi + 2\pi, \varepsilon)) \equiv \rho(\varphi, \varepsilon), Y(\varphi, \varepsilon))$.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторой последовательности значений $\varepsilon = \varepsilon_k \neq 0, \varepsilon_k \to 0$, при $k \to \infty$ система (2) имеет периодическое решение $y(t + \omega_k, \varepsilon_k) \equiv y(t, \varepsilon_k)$, с наименьшим периодом $\omega_k = \omega(\varepsilon_k) > 0$, удовлетворяющее условию $\|y(t)\| < C$. Тогда существует такое ρ_0, что $F(\rho_0) = 0$.*

Теорема 2. *Пусть $\rho_0 > 0$ — решение уравнения $F(\rho) = 0$ и в окрестности точки ρ_0, $[\rho_0 - \xi_0, \rho_0 + \xi_0], \rho_0 - \xi_0 > 0$ функция $F(\rho) \neq 0$ при $\rho \neq \rho_0$, причем $F(\rho_0 - \varepsilon_0) \cdot F(\rho_0 + \varepsilon_0) < 0$. Тогда система (2) при достаточно малых значениях ε имеет $\omega = \omega(\varepsilon)$ периодическое решение $(t + \omega_k, \varepsilon_k) \equiv y(t, \varepsilon_k)$ и следовательно система (1) имеет $\omega = \omega(\varepsilon_k)$ периодическое решение $x(t, \varepsilon) = Uy(t, \varepsilon)$.*

Литература

1. Мухамадиев Э.М. О периодических решениях нелинейного дифференциального уравнения, зависящего от параметра / Э.М. Мухамадиев, Н.И. Нуров, З.И. Шарифзода // ДАН РТ. — 2018. — Т. 61, № 11–12. — С. 822–828.

2. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М. : Наука, 1976. — 496 с.

КОНТАКТНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД[1]

С.С. Мухина (Москва, ИПУ РАН)
ssmukhina@edu.hse.ru

В работе рассматривается геометрический подход к интегрированию некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение в сплошных средах. В частности, гиперболических уравнений типа Монжа–Ампера и нелинейных систем в частных производных типа Якоби [1].

Пусть $J^1\mathbb{R}^2$ — 5-мерное пространство 1-джетов гладких функций с двумя независимыми переменными t, x. На этом пространстве задана контактная структура — распределение Картана [1]. Согласно подходу В.В. Лычагина [2], уравнение типа Монжа–Ампера можно рассматривать как эффективную дифференциальную 2-форму ω на пространстве $J^1\mathbb{R}^2$. Классическое решение такого уравнения — это функция, на 1-джете которой 2-форма ω аннулируется, а многозначное решение — это максимальное интегральное многообразие L распределения Картана, такое, что $\omega|_L = 0$.

Для решения проблемы контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера А.Г. Кушнером [3] были введены две дифференциальные 2-формы на пространстве $J^1\mathbb{R}^2$, которые он назвал формами Лапласа. Это название оправдано тем, что коэффициенты этих форм, записанные для линейных гиперболических уравнений, в точности совпадают с известными инвариантами Лапласа h и k.

Если обе формы Лапласа тождественно равны нулю, то контактным преобразованием соответствующее гиперболическое уравнение Монжа–Ампера можно привести к линейному волновому уравнению с постоянными коэффициентами [3]. В результате получился полный

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00390).

аналог теоремы о приведении линейного гиперболического уравнения к волновому, но только для уравнений Можна–Ампера. А так как общее решение волнового уравнения хорошо известно, то мы можем построить и многозначное решение исходного нелинейного уравнения, зависящее от двух произвольных функций.

В случае, когда одна из форм Лапласа нулевая, а другая — нет, уравнение Монжа–Ампера контактным преобразованием приводится к линейному, решения которого можно найти методом каскадного интегрирования.

Покажем как это работает на примере двух задач: фронтального вытеснения нефти раствором активных реагентов и интегрирования обобщенного уравнения Хантера–Сактона. Для этих уравнений найдены необходимые и достаточные условия их контактной линеаризации и построены точные решения.

Модель вытеснения нефти раствором карбонизированной воды в крупномасштабном приближении имеет вид [4]

$$\begin{cases} s_t + H_x = 0, \\ (cs + \varphi(1-s))_t + (cH + (1-H)\varphi)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $s(t,x)$ — водонасыщенность, $c(t,x)$ — концентрация углекислого газа в воде, $H = H(s,c)$ — функция Бакли–Леверетта, $\varphi = \delta_1 c + \delta_2$ — концентрация углекислого газа в нефти ($\delta_{1,2} \in \mathbb{R}$), t — время, x — координата в направлении движения флюида. Система (1) — это частный случай системы Якоби. С помощью замен переменных система сводится к уравнению Монжа–Ампера

$$\begin{aligned} &-2((\delta_1-1)v_t-\delta_1)v_{xx}H_{v_x}^2 + (-2((\delta_1-1)v_t-\delta_1))v_{tx}H_{v_x} \\ &+2x((\delta_1-1)v_t-\delta_1)(-v_{tx}^2+v_{tt}v_{xx})H_{v_tv_t} + 2((\delta_1-1)H-\delta_1)v_{tx}H_{v_x} \\ &-2xH_{v_tv_x}(-v_{tx}^2+v_{tt}v_{xx})(((\delta_1-1)v_t-\delta_1)H_{v_t}+(-\delta_1+1)H+\delta_1)=0. \end{aligned}$$

Формы Лапласа для этого уравнения равны нулю тогда и только тогда, когда функция Бакли–Леверетта имеет вид

$$H(s,c) = (\mu_1 s + \mu_2)h(c),$$

где μ_1, μ_2 — произвольные константы, а $h(c)$ — произвольная функция [5]. Найдя условие контактной эквивалентности, можно построить цепочку контактных преобразований и получить точное решение исходной задачи.

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение второго порядка Хантера–Сакстона–Калоджеро [6]

$$u_{tx} = uu_{xx} + G(u_x). \tag{2}$$

Данное уравнение в зависимости от вида функции G возникает в теории управления нематическими жидкими кристаллами и нестационарными газовыми потоками, а также в геометрии пространств Эйнштейна–Вейля и в гидродинамике [7].

Уравнению (2) в пространстве $J^1\mathbb{R}^2(t, x, u, p_1, p_2)$ соответствует эффективная дифференциальная 2-форма

$$\omega = -2G(p_2)dt \wedge dx + dt \wedge dp_1 - dx \wedge dp_2 - 2udt \wedge dp_2.$$

Одна из форм Лапласа равна нулю тогда и только тогда, когда $G(p_2) = p_2^2 + 2\alpha_1 p_2 + \alpha_0$, а другая в нуль не обращается. В этом случае уравнение (2) можно линеаризовать с помощью контактных преобразований. Применяя преобразование Лежандра

$$\Phi : (t, x, u, p_1, p_2) \to (t, -p_2, -xp_2 + u, p_1, x),$$

получаем линейное уравнение

$$u_{tx} + (x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)u_{xx} + xu_x - u = 0. \tag{3}$$

Это уравнение решается методом каскадного интегрирования. Произведя обратные преобразования, мы получим многозначное решение исходного уравнения (2).

Литература

1. Kushner A.G. Contact geometry and nonlinear differential equations / A.G. Kushner, V.V. Lychagin, V.N. Rubtsov // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2007. — Vol. 101. — P. 496.

2. Lychagin V.V. Contact geometry and non-linear second-order differential equations / V.V. Lychagin // Russian Math. Surveys. — 1979. —Vol. 34, № 1. —P. 149–180.

3. Kushner A.G. A contact linearization problem for Monge-Ampere equations and Laplace invariants / A.G. Kushner // Acta Appl. Math. — 2008. — Vol. 101. — N. 1–3. — P. 177–189.

4. Баренблатт Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик // М. : Недра, 1984. — 208 с.

5. Mukhina S.S. Contact transformations in theory of frontal oil displacement / S.S. Mukhina // Lobachevskii Journal of Mathematics. — Kazan State University. — 2023. — Vol. 44. — N. 9. — P. 3976–3980.

6. Hunter J. K. (1991) Dynamics of director fields / J.K. Hunter, R. Saxton // SIAM J. Appl. Math. —1991. — Vol. 51. —P. 1498–1521.

7. Морозов О.И. Линеаризуемость и интегрируемость обобщенного уравнения Калоджеро-Хантера-Сакстона / О.И. Морозов // Научный вестник МГТУ ГА. — 2007. — Т. 114. — С. 34–42.

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

А.Н. Наимов (Вологда, ВоГУ)
naimovan@vogu35.ru

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^n, \tag{1}$$

где $n \geqslant 2$, ∇v – градиент функции $v \in C^1(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}^1)$, положительно однородной порядка $m + 1 > 2$, $\nabla v(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$, $f : \mathrm{R}^{1+n} \mapsto \mathrm{R}^n$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям

$$f(t+\omega, x) \equiv f(t, x), \qquad |y|^{-m} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |f(t, y)| \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{2}$$

Вектор-функцию $x(t) \in C^1([0, \omega], \mathrm{R}^n)$ называем ω-периодическим решением системы уравнений (1), если она удовлетворяет данной системе уравнений при $t \in (0, \omega)$ и условию $x(0) = x(\omega)$. Такое решение ω-периодически и гладко продолжимо на $(-\infty, +\infty)$.

Обозначим через $\chi(\overline{\Omega}_-(v))$ эйлерову характеристику замыкания множества

$$\Omega_-(v) = \{x \in S^{n-1} : v(x) < 0\},$$

где

$$S^{n-1} = \{x \in \mathrm{R}^n : |x| = 1\}.$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00032.

Имеет место

Теорема 1. *Система уравнений (1) имеет ω-периодическое решение при любом непрерывном отображении f, удовлетворяющем условиям (2), тогда и только тогда, когда*

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) \neq 1. \tag{3}$$

Достаточность условия (3) следует из теоремы 41.8, доказанной в [1, с. 334], и из формулы

$$\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 1 - \chi(\overline{\Omega}_-(v)), \tag{4}$$

анонсированной в работе [2]. В этой формуле $\gamma(\nabla v, S^{n-1})$ – вращение (степень отображения) градиента $x \mapsto \nabla v(x)/|\nabla v(x)|$) функции v на сфере S^{n-1}. Необходимость условия (3) доказана по аналогии с работой [3].

Представляется актуальным вопрос о вычислении $\chi(\overline{\Omega}_-(v))$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть функция v представима в виде произведения $v = v_1 \cdot \ldots \cdot v_N$ положительно однородных функций $v_i \in C^1(\mathrm{R}^n \setminus \{0\}; \mathrm{R}^1)$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяющих условиям*

1) $\nabla v_i(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$, $i = \overline{1, N}$;

2) $|v_i(x)| + |v_j(x)| > 0 \ \forall x \neq 0$, $i \neq j$;

3) $\forall i = \overline{1, N-1}$ либо $\Omega_-(v_i) \subset \Omega_+(v_{i+1} \cdot \ldots \cdot v_N)$, либо $\Omega_-(v_i) \subset \Omega_-(v_{i+1} \cdot \ldots \cdot v_N)$.

Тогда верна формула

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma(v_i; v_{i+1} \cdot \ldots \cdot v_N)\chi(\overline{\Omega}_-(v_i)) + \chi(\overline{\Omega}_-(v_N)), \tag{5}$$

где

$$\sigma(u_1; u_2) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Omega_-(u_1) \subset \Omega_+(u_2), \\ (-1)^n, & \text{если} \quad \Omega_-(u_1) \subset \Omega_-(u_2). \end{cases}$$

В частности,

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = \sum_{i=1}^{N} \chi(\overline{\Omega}_-(v_i)), \qquad \text{если} \quad n - \text{четно}.$$

Теорема 3. *Если множество*

$$\Omega_0(v) = \{x \in S^{n-1} : v(x) = 0\}.$$

состоит из $p_0(v)$ связных компонент, каждая из которых диффеоморфна сфере S^{n-2}, то верна формула

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = \begin{cases} p_0(v), & \text{если } n \text{ – четно}, \\ 1 - p_+(v) + p_-(v), & \text{если } n \text{ – нечетно}, \end{cases}$$

где $p_\pm(v)$ – число связных компонент множества

$$\Omega_\pm(v) = \{x \in S^{n-1} : \pm v(x) > 0\}.$$

Теорема 2 доказана совместно с профессором Э. Мухамадиевым.

Аналогично работе [4] можно показать, что любую положительно однородную (порядка $m > 0$) функцию $v \in C^1(\mathrm{R}^n \setminus \{0\}; \mathrm{R}^1)$, градиент которой не обращается в ноль, можно представить в виде произведения $\underline{v(x)} = |x|^{m-N} v_1(x) \cdot \ldots \cdot v_N(x)$, где функции $v_i \in C^1(\mathrm{R}^n \setminus \{0\}; \mathrm{R}^1)$, $i = \overline{1, N}$ положительно однородные порядка 1 и удовлетворяют условиям 1) – 3), а соответствующие им множества $\Omega_0(v_i)$, $i = \overline{1, N}$ совпадают со связными компонентами множества $\Omega_0(v)$.

Литература

1. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

2. Мухамадиев Э. Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Докл. РАН. — 1996. — Т. 351, № 5. — С. 596-598.

3. Мухамадиев Э. Критерии существования периодических и ограниченных решений для трехмерных систем дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 1. — С. 157–172.

4. Mukhamadiev E. On the homotopy classification of positively homogeneous functions of three variables / E. Mukhamadiev, A.N. Naimov // Issues Anal. — 2021. — V. 10. № 2. — С. 67–78.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА [1]

А. В. Нестеров (Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова)
andrenesterov@yandex.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSSW-2023-0004.)

Строится асимптотика решения (АР) задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения

$$\varepsilon^2(U_t + \sum_{i=1}^{m} D_i(p)U_{x_i}) = L_pU + \varepsilon^2 F(U,p) + \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{m} B_i(p)U_{x_ix_i}, \qquad (1)$$

$$U(\bar{x},0,p) = \omega\left(\bar{x}\varepsilon^{-1},p\right) \qquad (2)$$

$0 < \varepsilon << 1$, линейный оператор L_p, действующий по переменной p, имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda = 0$,$\forall\lambda \neq 0$ $Re\lambda < 0$; начальные условия имеют вид узкой «шапочки»

$|\omega^{(k)}(\bar{z},p)| \leqslant Ce^{-\sigma\|\bar{z}\|^2}, \sigma > 0, \forall k = 0,1,\ldots$. Настоящая работа является продолжением работ [1] , [2]. Наличие нулевого собственного значения у оператора L_p относит задачу к т. н. критическому случаю [3].

АР задачи (1)-(2) построено в виде

$$U(\bar{x},t,p,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i(s_i(\bar{\zeta},t,p) + p_i(\bar{\xi},\tau,p)) + R = U_N + R \qquad (3)$$

переменные $\bar{\xi}$, τ, $\bar{\zeta}$ выражаются через данные задачи. Получены задачи для определения всех членов разложения (3). При определенных условиях на функции $D_i(p), B_i(p)$, главный член АР имеет вид $s_0(\bar{\zeta},t,p) = h(p)\varphi_0(\bar{\zeta},t)$, где $h(p)$- собственная функция, отвечающая нулевому собственному значению оператора L, функция $\varphi_0(\bar{\zeta},t)$ описывается параболическим квазилинейным уравнением

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i=1,j=1}^{m} M_{ij}\varphi_{0,x_i,x_j} = F_{eff}(\varphi_0) + \sum_{i=1,j=1}^{m} B_{eff,ij}\varphi_{0,x_i,x_j} \qquad (2)$$

коэффициенты $M_{ij}, B_{eff,ij}$ и функция $F_{eff}(\varphi)$ выражаются через данные уравнения (1).

Оценка остаточного члена R в АР (3) проведена по невязке.

Литература

1. Нестеров А.В. Об одном эффекте влияния малой взаимной диффузии на процессы переноса в многофазной среде./ Нестеров А.В. // Журнал выч. матем. и матем физики, — 2021, — Т.61, №3, — С. 519–528.

2. Заборский А.В. Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного диференциально-операторного уравнения

переноса с малой диффузией. / А.В. Заборский , А.В. Нестеров // Журнал выч. матем. и матем физики, — 2023, — Т.63, №2, — С. 273–281.

3. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов — М. : Изд-во МГУ, — 1978, — 262 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ МАТРИЦ

В.Г. Николаев (Великий Новгород, НовГУ)
vg14@inbox.ru

Пусть все собственные числа матрицы $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ лежат выше вещественной оси. Пусть 2-вектор-функция $\varphi = \varphi(z) \in C^1(D)$, где область $D \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим в области D следующую однородную эллиптическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

Определение 1. *Функция $\varphi = \varphi(z)$ как решение системы* (1) *называется аналитической по Дуглису* (*A. Douglis*), *или функцией, J-аналитической с матрицей J.*

Рассмотрим для системы (1) следующую граничную *задачу Шварца.*

Пусть конечная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\varphi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет граничному условию

$$\operatorname{Re}\varphi(z)\big|_\Gamma = \psi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \tag{2}$$

где вещественная функция $\psi(\xi) \in C(\Gamma)$ известна.

Пусть 2×2-матрица J имеет диагональную жорданову форму $J_1 = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$. Обозначим через x, y собственные векторы матрицы J, соотвествующие ее собственным числам λ, μ. При этом $\lambda \neq \mu$. Таким образом, столбцы матрицы $Q = (x, y)$ есть жорданов базис матрицы J. Пусть $\overline{y}$ — комплексное сопряжение вектора y. Введем в рассмотрение следующий вещественный параметр:

$$l = l(J) = \Big|\frac{\det(x,\overline{y})}{\det(x,y)}\Big|, \quad \det(x,y) \neq 0. \tag{3}$$

Параметр $l(J)$ определен корректно, поскольку имеет место

Лемма 1. *Число* $l(J)$ (3) *не зависит от выбора жорданова базиса* $Q = (x, y)$ *матрицы* J.

С учетом сделанных выше определений справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица* $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *имеет разные собственные числа* λ, μ, *лежащие выше вещественной оси. Пусть число* $l = l(J)$ *найдено по формуле* (3), *и пусть* $l \in [0, 1]$.

Тогда для любой граничной функции $\psi(\xi) \in H^\sigma(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$ *решение задачи Шварца* (2) *в произвольном эллипсе* K *с границей* Γ *в классах функций* $\varphi(z) \in H^\sigma(\overline{K})$ *существует и единственно с точностью до вектор-постоянной.*

Литература

1. Николаев В.Г. О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова / В.Г. Николаев, А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 965–969.

2. Васильев В.Б. О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости / В.Б. Васильев, В.Г. Николаев // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 10. — С. 1351–1361.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ КВАНТОВОЙ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЕКТОРЕ[1]

М.А. Никулин (Москва, МГУ, МЦФиПМ)

nikmihale@gmail.com

В последние годы достигнут значительный прогресс в понимании гипотезы Биркгофа об интегрируемых плоских бильярдах (например, см. [1]). С другой стороны, были построены математически строгие доказательства неинтегрируемости некоторых бильярдов, например, эллиптических бильярдов в сильном магнитном поле [2,3]. Неинтегрируемые бильярды, так же как и бильярды в магнитном поле, исследуются в течение долгого времени, см. [4,5]. Изменение формы бильярдного стола от эллипса к, например, стадиону, немедленно приводит к хаотической динамике [6,7].

Хорошо известно свойство интегрируемости классических бильярдов в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Оно

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00272).

следует из того, что в дополнение к полной энергии системы, существует другая сохраняющаяся величина: произведение угловых моментов относительно обоих фокусов. В случае круга степень этого дополнительного интеграла может быть понижена, поскольку сохраняется угловой момент относительно центра круга. С другой стороны, в [8] показано, что для бильярда в круговом секторе сохраняющаяся величина является не угловым моментом относительно центра, а его квадратом. Недавние работы А.Т. Фоменко и В.В. Ведюшкиной ([9 —11], а также другие работы этих авторов) вновь привлекли внимание специалистов в этой теме.

В настоящей работе рассмотрено обобщение классической задачи, рассмотренной [12]. А именно, пусть задана область («эллиптический сектор»), ограниченная эллипсом с большой полуосью $0 < r_0$ и эксцентриситетом ε и дугой софокусной гиперболы (область A_ε) или двумя дугами софокусных гипербол (область B_ε). Общие для эллипса и гипербол фокусы имеют координаты $(\pm\varepsilon r_0, 0)$. Для обеих областей мы изучаем решения стационарного уравнения Шрёдингера $\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi = E\psi$. Мы устанавливаем асимптотику для уровней энергии $E(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ с точностью до $o(\varepsilon^2)$, включительно.

Доклад основан на результатах совместной работы Ф.Ю. Попеленского, А.И. Шафаревича и докладчика [13].

Литература

1. Bialy M., Mironov A. E. The Birkhoff-Poritsky conjecture for centrally-symmetric billiard tables / M. Bialy, A. E. Mironov // Annals of Mathematics. — 2022. — Т. 196. — №. 1. — С. 389–413.

2. Bialy, M., Mironov, A.E., Shalom, L. Magnetic billiards: non-integrability for strong magnetic field; Gutkin type examples. / M. Bialy, A.E. Mironov, L. Shalom // Journal of Geometry and Physics. — 2020. — Т. 154, —С. 103716.

3. Bialy M., Mironov A. E. Polynomial non-integrability of magnetic billiards on the sphere and the hyperbolic plane / M. Bialy, A.E. Mironov // Russian Mathematical Surveys. — 2019. — Т. 74. — №. 2. — С. 187.

4. Robnik, M., Berry, M.V. Classical billiards in magnetic fields. / M. Robnik, M.V. Berry // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1985. — Т. 18. — №. 9. — С. 1361.

5. Berry M. V., Robnik M. Statistics of energy levels without time-reversal symmetry: Aharonov–Bohm chaotic billiards / M.V. Berry, M. Robnik // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1986. — Т. 19. — №. 5. — С. 649.

6. Bunimovich L. A. On ergodic properties of certain billiards / L.A. Bunimovich //Functional Analysis and Its Applications. — 1974. — T. 8. — №. 3. — C. 254–255.

7. Stöckmann, H.J. Quantum chaos: an introduction. / H.J. Stöckmann // Cambridge University Press — 1999.

8. Göngora-T A. et al. Quantum and classical solutions for a free particle in wedge billiards /A. Göngora–T et al. // Physics Letters A. — 2000. — T. 274. — №. 3–4. — C. 117–122.

9. Fokicheva V. V. Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas / V.V. Fokicheva // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2014. — T. 69. — №. 4. — C. 148–158.

10. Fokicheva V. V. A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics / V.V. Fokicheva // Sbornik: Mathematics. — 2015. — T. 206. — №. 10. — C. 1463.

11. Vedyushkina V. V., Fomenko A. T. Integrable geodesic flows on orientable two–dimensional surfaces and topological billiards / V.V. Vedyushkina, A.T. Fomenko // Izvestiya: Mathematics. — 2019. — T. 83. — №. 6. — C. 1137.

12. Rayleigh J. W. Theory of Sound / J.W. Rayleigh //MacMillan — 1896.

13. Nikulin M. A. Asymptotic behaviour of energy levels of a quantum free particle in an elliptic sector / M. A. Nikulin, T. Y. Popelensky, A. I. Shafarevich // Physica Scripta. — 2024. — Vol. 99, no. 1. — P. 015207.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НАГРЕВА КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НАГРЕВЕ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ[1]

В.А. Окишев (Москва, Российский университет дружбы народов)
okishev-va@rudn.ru

В докладе представлена вычислительная модель нагрева композитного материала, состоящего из вольфрама с тонким слоем карбида бора в осесимметричной постановке. Модель основана на решении уравнения для температуры. Граничные условия задают нагрев поверхности электронным пучком и испарение вещества. Плотность, теплопроводность, удельная теплоемкость и мощность испарения задаются в виде экспериментально полученных зависимостей

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00134, https://rscf.ru/project/23-21-00134/

от температуры материала. Показана роль напыления карбида бора на распределение температуры образца. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН.

О ДРОБНЫХ МОДЕЛЯХ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[1]

В.П. Орлов (Воронеж, ВГУ)
orlov_ vp@mail.ru

Уравнение движения в форме Коши несжимаемой жидкости единичной плотности, заполняющей область Ω в $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, $\partial\Omega \in C^2$, имеет вид

$$\partial v/\partial t + \sum_{i=1}^{N} v_i \, \partial v/\partial x_i + \nabla p - \operatorname{Div}\sigma = f, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T] \times \Omega, \quad (1)$$

Здесь $v(t,x) = (v_1, \ldots, v_N)$ – вектор скорости, $\rho = \text{const} > 0$ – плотность жидкости (которая в исследуемой ниже модели предполагается постоянной и равной единице), $p = p(t,x)$ – давление и в точке x в момент времени t, σ – девиатор тензора напряжений, f – плотность внешних сил. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы-функции, т.е. $\operatorname{Div}\sigma$ является вектором, координатами которого являются дивергенции векторов – строк матрицы σ.

Уравнение (1) дополняется условием несжимаемости $\operatorname{div} v = 0$ и реологическим соотношением Олдройдовского типа

$$(1 + \sum_{k=1}^{M} p_k D_t^{a_k})\sigma = \nu(1 + \nu^{-1} \sum_{k=1}^{M} q_k D_t^{b_k})\mathcal{E}(v), \quad (2)$$

где M натуральное числа, $p_k,\ q_k \geqslant 0$, $a_k,\ b_k \in [k, k+1)$, $a_L,\ b_M > 0$, $\nu > 0$, D_t^r — дробная производная Римана-Лиувилля порядка r. Тензор скоростей деформаций $\mathcal{E}(v)$ определяется как матрица $\mathcal{E}(u) = \{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^{N}$ с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$.

Обзор сред с реологическим сооотношением такого типа приводится в [1]—[2].

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №22-11-00103).

Траектории поля скоростей определяются как решение задачи Коши

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad 0\leqslant t,\tau\leqslant T,\quad x\in\overline{\Omega},\tag{4}$$

при этом решение $z(s,t,x)$ понимается в смысле теории регулярных лагранжевых потоков (см. напр. [4]).

Соотношения (1)—(4) определяют начально—граничную задачу Z:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_0\triangle v-\tag{5}$$

$$\operatorname{Div}\int\limits_0^t G(t-s)\,\mathcal{E}(v)(s,z(s,t,x))\,ds+\nabla\,p=f,(t,x)\in Q_T;$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad 0\leqslant t,\tau\leqslant T,\quad x\in\overline{\Omega}.\tag{6}$$

$$\operatorname{div}v(t,x)=0,\quad (t,x)\in Q_T;\tag{7}$$

$$v(0,x)=v^0(x),\ x\in\Omega,\quad v(t,x)=0,\quad (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega.\tag{8}$$

Здесь ядро $G(t-s)$ удовлетворяет оценке $|G(t-s)|\leqslant M(t-s)^{\gamma_1-1}$, $\gamma_1=\min(a_m-b_{m-1},a_m-a_{m-1})$, $\mu_0=p_m^{-1}q_m$, при этом $0<\gamma_1<2$.

Пусть

$$W_1(0,T)\equiv\{v:\ v\in L_2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H),\ v'\in L_1(0,T;V^{-1})\}.$$

Здесь V и H — пространства соленоидальных функций (см. [3], с. 20).

Определение. *Пусть $f\in L_1(0,T;V^{-1})$, $v^0\in H$. Слабым решением задачи Z называется функция $v\in W_1(0,T)$, удовлетворяющая тождеству*

$$d(v,\varphi)/dt-\sum_{i=1}^{N}(v_iv,\partial\varphi/\partial x_i)+\mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))+$$

$$\left(\int_0^t G(t-s)\,\mathcal{E}(v)(s,z(s,t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right)=\langle f,\varphi\rangle,$$

при любой $\varphi\in V$ и п.в. $t\in[0,T]$, и начальному условию (8).

Здесь $z(s,t,x)$ — регулярный лагранжев поток, порожденный функцией v.

Справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$. Тогда задача Z имеет слабое решение.*

Доказательство предполагает аппроксимацию задачи Z приближениями галеркинского типа с последующим предельным переходом на основе априорных оценок. Для исследования поведения траекторий негладкого поля скоростей u используется теория регулярных лагранжевых потоков.

Результаты получены совместно с В.Г. Звягиным.

Литература

1. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

2. Mainardi F. Creep, Relaxation and Viscosity Properties for Basic Fractional Models in Rheology/ F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal, Special Topics. — 2011. — T. 193. — C. 133–160.

3. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1987. — 408 с.

4. DiPerna R. J., Lions P. L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R. J. DiPerna, P. L. Lions // Invent. Math. — 1989. — T. 98, — P. 511–547.

5. Звягин В.Г. О слабой разрешимости моделей движения вязкоупругой жидкости с реологическим соотношением высокого порядка / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // УМН. — 2022. — Т. 77, № 4. — С. 197–198.

6. Звягин В.Г. О слабой разрешимости дробных моделей вязкоупругой жидкости высокого порядка / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Известия РАН. — 2004. — Т. 88, № 1.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ И РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В.В. Панков (Воронеж, ВГУ)
vladimir.v.pankov@yandex.ru

В полосе $\mathbb{R}_d^n = \left\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < t < d\right\}$ исследуется следующая краевая задача:

$$A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) v\left(x,t\right) = F\left(x,t\right) \tag{1}$$

где

$$A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) v = L_{2m}\left(D_x, D_{\alpha,t}\right) v - b(-1)^k \partial_t^{2k-1} v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}, a_{\tau j} \in \mathbb{C}, Im\, \bar{b} a_{0,2m} = 0,$$

$$D_x^{\tau} = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} ... \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}},$$

$D_{\alpha,t} u(t)$ — весовая производная функции $u(t)$:

$$D_{\alpha,t} u(t) = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t (\sqrt{\alpha(t)} u(t)), \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$D_{\alpha,t}^{j} u(t) = D_{\alpha,t}(D_{\alpha,t}^{j-1} u(t)), j = 1, 2, ...,$$

$\alpha(t)$ — специальная весовая функция, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. На границе $t = 0$ полосы $\mathbb{R}_d^n$ задаются условия:

$$B_j(D_x) v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^{\tau} \partial_t^{j} v|_{t=0} = G_j(x), \ j = 1, 2, ..., k \tag{2}$$

На границе $t = d$ полосы $\mathbb{R}_d^n$ заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0 \tag{3}$$

Определение 1. *Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\left(\mathbb{R}_d^n\right), s \geqslant 0, s \in \mathbb{Z}$ состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2\left(\mathbb{R}_d^n\right)$, для которых конечна норма*

$$||v||_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]} \left\| F_{\xi \to x}^{-1} F_{\alpha}^{-1} \left[r(\xi,\eta,l) F_{\alpha} F_{x \to \xi} \left[\partial_t^l v\right]\right] \right\|_{L_2\left(\mathbb{R}_d^n\right)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$ — весовое преобразование Фурье, $r(\xi,\eta,l) = \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s - \frac{2m}{2k-1} l\right)}$, $\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]$ — целая *часть числа* $\frac{(2k-1)s}{2m}$. *Если* $s \in \mathbb{N}$ *таково, что* $\frac{(2k-1)s}{2m} \in \mathbb{Z}$, *то эта норма эквивалентна норме*

$$||v||_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l \leqslant s} \left\| D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^l v \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

.

Обозначим через $H_s\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ пространство С.Л. Соболева.

Пусть выполнены следующие условия:

Условие 1. *При всех* $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство* $Re\left(\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta)\right) \geqslant c\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^m$, *где постоянная* $c>0$ *не зависит от* (ξ,η).

Условие 2. *Для некоторого числа* $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j)$ *функция* $\alpha(t)$ *принадлежит* $C^{s-1}[0,d]$, *причем* $\alpha(0)=\alpha'(0)=0, \alpha(t)>0$ *при* $t>0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^{\tau} \neq 0, j=1,2,...,k$ *при всех* $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Основные результаты работы — теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\left\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\left(m_j+\frac{2m(j-1)}{2k-1}\right)+\frac{m}{2k-1}\right\}$ *— целое число,* $m \geqslant 2k-1$ *— целое число и выполнены условия 1 – 3, тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи (1) – (3), принадлежащего пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}^n_d)$, *справедлива априорная оценка*

$$|v|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leqslant c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k} \|B_j v|_{t=0}\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}\right),$$

где постоянная $c>0$ *не зависит от* v. *Здесь* $\|\cdot\|_s$ *— норма в пространстве Соболева-Слободецкого* $H_s\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$.

Теорема 2. *Пусть* $s \geqslant \max\left\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\left(m_j+\frac{2m(j-1)}{2k-1}\right)+\frac{m}{2k-1}\right\}$ *— целое число,* $m \geqslant 2k-1$ *— целое число, а также выполнены условия 1 – 3. Пусть* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}^n_d)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right), j=1,2,...,k$, *тогда существует единственное решение* $v(x,t)$ *задачи (1) – (3), принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}^n_d)$.

Литература

1. Панков В.В. Об априорной оценке решений одной краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения / В.В. Панков,

А.Д. Баев // Современные методы теории краевых задач: Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXI. Посвящается памяти Юлия Витальевича Покорного (80-летию со дня рождения), Воронеж, 3–9 мая 2020 года. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2020. — С. 161–164.

2. Панков В.В. Об априорной оценке решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В.В. Панков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2021. — № 2. — С. 90–101.

3. Панков В.В. О разрешимости одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В.В. Панков, С.А. Шабров // Прикладная математика & Физика. — 2022. — Т. 54. — № 1. — С. 5–14. — DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-5-14.

ОЦЕНКИ УСРЕДНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

С.Е. Пастухова (Москва, РТУ — МИРЭА)
pas-se@yandex.ru

В $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 2$, рассмотрим операторы четного порядка $2m\geqslant 4$

$$A_\varepsilon = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a^\varepsilon_{\alpha\beta}(x)D^\beta),$$

где $a^\varepsilon_{\alpha\beta}(x)=a_{\alpha\beta}(x/\varepsilon)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ — мультииндексы с целыми компонентами $\alpha_j\geqslant 0$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_d$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_d^{\alpha_d}$, $D_i = D_{x_i}$, $i = 1,\dots,d$. Коэффициенты $a_{\alpha\beta}(y)$ измеримы, вещественны и 1-периодичны с ячейкой периодичности $Y = [-1/2, 1/2)^d$. Пусть выполнены условия:

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(Y)} \leqslant \lambda_1, \quad \forall\alpha,\,\beta,\,|\alpha| = |\beta| = m, \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)D^\beta\varphi D^\alpha\varphi\,dx \geqslant \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha\varphi|^2\,dx \tag{2}$$

для любых $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ с некоторыми константами $\lambda_0, \lambda_1 > 0$.

В [1] установлена G-сходимость семейства операторов A_ε к оператору $\hat{A}$ того же класса (1)-(2); коэффициенты предельного, или усредненного, оператора $\hat{A}$ постоянны и находятся через решения периодических задач на ячейке $Y = [-1/2, 1/2)^d$. В частности в [1] доказана сильная резольвентная сходимость операторов A_ε к $\hat{A}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$: $(A_\varepsilon{+}1)^{-1}f{\to}(\hat{A}{+}1)^{-1}f$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$ для любой $f{\in}L^2(\mathbb{R}^d)$. Иными словами, решения задач

$$u^\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}^d), \quad (A_\varepsilon + 1)u^\varepsilon = f, \tag{3}$$

$$u \in H^m(\mathbb{R}^d), \quad (\hat{A} + 1)u = f, \tag{4}$$

с правой частью $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ связаны сходимостью $u^\varepsilon \to u$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Здесь $H^m(\mathbb{R}^d){=}W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Соболева. В [2] эта сходимость усилена до равномерной резольвентной сходимости с оценкой $\|(A_\varepsilon{+}1)^{-1}{-}(\hat{A}{+}1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)}{\leqslant}C\varepsilon$, где $C{=}const(d, \lambda_0, \lambda_1)$, что эквивалентно оценке $\|u^\varepsilon{-}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}{\leqslant}C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ для решений задач (3) и (4). В [3] мажоранта в этих неравенствах уточнена: она имеет порядок ε^2. Таким образом, резольвента предельного оператора $(\hat{A}{+}1)^{-1}$ приближает резольвенту исходного оператора $(A_\varepsilon{+}1)^{-1}$ в операторной L^2-норме с погрешностью порядка ε^2.

В [4] добавлением корректоров к $(\hat{A}{+}1)^{-1}$ найдена аппроксимация порядка ε^2 в более сильной операторной норме $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^m(\mathbb{R}^d)}$:

$$(A_\varepsilon{+}1)^{-1}{=}(\hat{A}{+}1)^{-1}{+}\varepsilon^m K_m(\varepsilon){+}\varepsilon^{m+1}K_{m+1}(\varepsilon){+}O(\varepsilon^2). \tag{5}$$

В терминах решений задач (3) и (4) это означает оценку

$$\|u^\varepsilon{-}v^\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}^d)}{\leqslant}C\varepsilon^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad C{=}const(\lambda_0, \lambda_1, d),$$

$v^\varepsilon(x){=}u(x){+}\varepsilon^m \sum_\gamma N_\gamma(x/\varepsilon)\Theta^\varepsilon D^\gamma u(x){+}\varepsilon^{m+1} \sum_\delta N_\delta(x/\varepsilon)\Theta^\varepsilon D^\delta u(x)$ с суммированием во всем γ и δ, $|\gamma|{=}m$ и $|\delta|{=}m{+}1$, где $N_\gamma(y)$, $N_\delta(y)$ — решения задач на ячейке; Θ^ε — оператор сглаживания, необходимый в наших условиях на данные задачи. По корректорам в приближении v^ε воспроизводится структура корректирующих операторов $K_m(\varepsilon)$ и $K_{m+1}(\varepsilon)$ в (5). Без предположения симметрии в условии (1) асимптотика типа (5), но более сложная, найдена в [5]. В [6] используем асимптотику (5) для построения аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon{+}1)^{-1}$ в операторной L^2-норме с точностью $O(\varepsilon^3)$.

Литература

1. Жиков В. В. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Х. Т.Нгоан // Успехи мат. наук. — 1979. Т. 34, № 5. — С. 65—133.

2. Вениаминов Н.А. Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка / Н.А. Вениаминов // Алгебра и анализ. — 2010. Т. 22, № 5. — С. 69–103.

3. Pastukhova S. E. L^2-approximation of resolvents in homogenization of higher order operators / S. E. Pastukhova // J. Math. Sci. — 2020. V. 251, № 6. — P. 902–925.

4. Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvents in homogenization of higher order operators. Selfadjoint case / S. E. Pastukhova // J. Math. Sci. — 2022. V. 262, № 3. — P. 312–328.

5. Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvents in homogenization of higher order operators / S. E. Pastukhova // J. Math. Sci. — 2021. V. 259, № 2. — P. 230–243.

6. Пастухова С. Е. Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвёртого порядка / С. Е. Пастухова // Алгебра и анализ. — 2022. Т. 34, № 4. — С. 74—106.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ. АСИМПТОТИКА САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОТЕНЦИАЛА [1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора Хартри в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ с кулоновским взаимодействием:

$$(-\Delta_q - \frac{1}{\mid q \mid} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mid \psi(q') \mid^2}{\mid q - q' \mid} dq')\psi = \lambda\psi, \qquad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \qquad (1)$$

где Δ_q — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Уравнения самосогласованного поля во внешнем поле, содержащие интегральную нелинейность типа Хартри, играют фундаментальную роль в некоторых квантовомеханических моделях, а также в нелинейной оптике.

Хорошо известно, что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1) равны $\lambda_n(0) = -1/4n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Здесь n — главное квантовое число. Оно представимо в виде $n = \ell + n_r + 1$, где ℓ — орбитальное, а n_r — радиальное число.

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012)

Рассмотрим случай, когда число ℓ велико (для определенности будем считать, что ℓ имеет порядок $\varepsilon^{-2/3}$). В настоящей работе при $\ell \to \infty$ для небольших радиальных чисел $n_r = 0, 1, 2, \ldots$ найдена серия асимптотических собственных значений

$$\lambda_{\ell,n_r}(\varepsilon) = \frac{1}{(\ell+n_r+1)^2}\big(-\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{\pi^3}\int_0^1 K(\kappa)K(\sqrt{1-\kappa^2})d\kappa+O(\ell^{-2+\gamma})\big),$$

где $\gamma > 0$ — любое. Здесь $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл 1 рода.

Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи сферы в $\mathbb{R}^3$ и не являются радиально-симметричными. Они выражаются через функции Бесселя $J_{|m|}$ и полиномы Эрмита H_{n_r} [1]. Здесь магнитное число $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ также предполагается небольшим.

Кроме того, в данной работе получены асимптотические разложения самосогласованного потенциала около сферы, вблизи которой локализованы собственные функции. Положим $\hbar = 1/\ell$. Пользуясь растяжением $q = x/\hbar^2$, $\psi = \hbar^3 p(x)$, $\lambda = \hbar^2 E$, приведем задачу (1) к стандартному для теории квазиклассического приближения виду. Переходя далее в сферическую систему координат (r, θ, φ), где $0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а также делая подстановку

$$p(x) = \frac{g(r,\theta)}{\sqrt{2\pi\sin\theta}\, r}e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

имеем:

$$\big\{-\hbar^2\big[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{4}-\frac{m^2-1/4}{\sin^2\theta}\big)\big]-\frac{1}{r}+$$

$$+\varepsilon\int_0^\pi\int_0^\infty W(r,r',\theta,\theta')g^2(r',\theta')dr'd\theta'-E\big\}g(r,\theta)=0,$$

$$\int_0^\pi\int_0^\infty g^2(r,\theta)drd\theta = 1.$$

Здесь

$$W(r,r',\theta,\theta') = \frac{2}{\pi\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos(\theta+\theta')}}\times$$

$$\times K\left(\frac{2\sqrt{rr'\sin\theta\sin\theta'}}{\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos(\theta+\theta')}}\right).$$

Введем новые переменные $s=(r-2)/(2\sqrt{\hbar})$, $s'=(r'-2)/(2\sqrt{\hbar})$, и пусть $|s|=O(\hbar^{-\gamma})$ для любого $\gamma>0$. Тогда для самосогласованного потенциала

$$u(s,\theta)=\int_0^\pi\int_{-1/\sqrt{\hbar}}^\infty W(s,s',\theta,\theta')g^2(s',\theta')2\sqrt{\hbar}\,ds'd\theta'$$

вблизи сферы $r=2$ справедливы следующие асимптотики: [1]
при $0\leqslant\theta\leqslant\delta_1$ и $\pi-\delta_1\leqslant\theta\leqslant\pi$, где δ_1 имеет порядок $\hbar^{3/4}$,

$$u(s,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{8}{\sqrt{\hbar}}-\int_{-\infty}^\infty \ln|s-s'|\,y_0^2(s')\,ds'\right)+O(\hbar^{1/4-\gamma});$$

при $\delta_2\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta_2$, где δ_2 имеет порядок $\hbar^{1/4}$,

$$u(s,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{B(\theta)}{\pi}-\frac{\sqrt{\hbar}}{\sin\theta}\int_{-\infty}^\infty |s-s'|\,y_0^2(s')\,ds'\right)+O(\hbar^{1/2-\gamma});$$

при $\delta_1\leqslant\theta\leqslant\delta_2$

$$u(s,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left(-\ln\frac{\theta}{16}+V(s,\frac{\theta}{\sqrt{\hbar}})\right)+O(\hbar^{1/2-\gamma})$$

и, наконец, при $\pi-\delta_2\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta_1$

$$u(s,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left(-\ln\frac{\pi-\theta}{16}+V(s,\frac{\pi-\theta}{\sqrt{\hbar}})\right)+O(\hbar^{1/2-\gamma}).$$

Здесь $\gamma>0$ — любое, функции B и V имеют вид

$$B(\theta)=\int_0^\pi\frac{1}{\sin((\theta+\theta')/2)}K\left(\frac{2\sqrt{\tan(\theta/2)\tan(\theta'/2)}}{\tan(\theta/2)+\tan(\theta'/2)}\right)\,d\theta',$$

$$V(s,\xi)=\int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty M(s,s',\xi,\xi')\,y_0^2(s')\,ds'-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\pi(\xi+\xi')}K\left(\frac{2\sqrt{\xi\xi'}}{\xi+\xi'}\right)\right\}\,d\xi',$$

где

$$M(s,s',\xi,\xi')=\frac{2}{\pi\sqrt{(\xi+\xi')^2+(s-s')^2}}K\left(\frac{2\sqrt{\xi\xi'}}{\sqrt{(\xi+\xi')^2+(s-s')^2}}\right),$$

$$y_0(s) = \frac{e^{-s^2} H_{n_r}(s)}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{n_r!}2^{n_r/2}}.$$

Таким образом, вблизи точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, которые соответствуют полюсам сферы, асимптотика самосогласованного потенциала существенно изменяет свой вид.

Литература

1. Pereskokov A.V. Asymptotic solutions to the Hartree equation near a sphere. Asymptotics of self-consistent potentials / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2023. — V. 276, № 1. — P. 154–167.

ОБ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ, ОПИСЫВАЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ И SWEEPING ПРОЦЕССОМ[1]

Г.Г. Петросян (Воронеж, ВГПУ, ВГУИТ)
garikpetrosyan@yandex.ru

Пусть E - банахово пространство и H - гильбертово пространство. Рассматривается следующая задача управляемости для системы состоящей из дифференциального уравнения и sweeping процесса:

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t), y(t)) + Bu(t),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$-y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + g(t, x(t), y(t)) + \gamma y(t),\ t \in [0, T], \tag{3}$$

$$y(0) = y_0 \in C(0), \tag{4}$$

$$x(T) = x_1, \tag{5}$$

где $C : \mathbb{R} \multimap H$ - мультиотображение с замкнутыми выпуклыми значениями, $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор, порождающий C_0–полугруппу операторов $\{e^{At}, t \geqslant 0\}$ в пространстве E. Функция управления $u(\cdot)$ принадлежит пространству $L^2([0, T]; U)$, где U - банахово пространство управлений, $B : U \to E$ - ограниченный линейный оператор, $\gamma > 0$ константа, через $N_{C(t)}(y)$ обозначается нормальный конус определяемый по замкнутому выпуклому множеству $C(t) \subset H$, следующим образом:

$$N_{C(t)}(y) = \begin{cases} \{\xi \in H : \langle \xi, c - y\rangle \leqslant 0,\ \text{для всех}\, c \in C(t)\}, & \text{если } y \in C(t), \\ \varnothing, & \text{если } y \notin C(t), \end{cases}$$

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

отображения $f : \mathbb{R} \times E \times H \to E$, $g : \mathbb{R} \times E \times H \to H$ являются нелинейными и $x_0, x_1 \in E, y_0 \in H$.

Задача управляемости формулируется следующим образом: для заданных $x_0, x_1 \in E$ рассматривается существование решений $x \in C([0,T];E)$, $y \in C([0,T];H)$ системы (1)-(4) и функции управления $u \in L^2([0,T];U)$, таких, что выполнено условие (5).

Литература

1. Ахмеров Р.Р. Ко второй теореме Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10, № 3. — С. 537–540.

2. Каменский М.И. О принципе усреднения для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве с отклоняющимся аргументом и малым параметром / М.И. Каменский, Г.Г. Петросян // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — 2022. — Т. 204. — С. 74–84.

3. Петросян Г.Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1355–1358.

4. Петросян, Г.Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Уфимский математический журнал. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 71–82.

5. Петросян, Г.Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2022. — Т. 32, № 3. — С. 415–432.

6. Петросян Г.Г. О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования / Г.Г. Петросян // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, №. 131. — С. 284–289.

7. Afanasova M.S. On a generalized boundary value problem for a feedback control system with infinite delay / M.S. Afanasova V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan // Vestnik Udmurtskogo Universiteta: Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki. — 2021. — V. 31, Is. 2. — P. 167–185.

8. Afanasova M.S. A Controllability Problem for Causal Functional Inclusions with an Infinite Delay and Impulse Conditions / M.S. Afanasova V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan // Advances in Systems Science and Applications. — 2021. — V. 21, № 3. — P. 40-62.

9. Couchouron J.-F. Abstract topological point of view and a general averaging principle in the theory of differential inclusions / J.-F. Couchouron, M. Kamenskii M. // Nonlinear Analysis. — 2000. — V. 42, № 6. — P. 1101–1129.

10. Kamenskii, M. On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces / M. Kamenskii, G. Petrosyan, P. Raynaud de Fitte, J.-C. Yao // Mathematics. — 2022. — V. 10, Is. 2. — P. 219–231.

11. Kamenskii M.I. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, Is. 2. — P. 136–154.

12. Gurova I.N. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations / I.N. Gurova, M.I. Kamenskii // Differential Equations, — 1996, — vol. 32, no. 1, — pp. 106–112.

13. Obukhovskii V. On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, C.F. Wen, V. Bocharov // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2022. — Vol. 6, № 3. — P. 185–197

14. Petrosyan, G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order / G. Petrosyan // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics. — 2020. — V. 34. — P. 51–66.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И КОЭРЦИТИВНОСТЬ ДЛЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

С.И. Пискарев (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
piskarev@gmail.com

Неравенство коэрцитивности для уравнений в частных производных рассматривалось многими авторами. Можно перечислить следующие имена: Да Прато и Грисвар, Синестрари, Соболевский и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00005).

Аширалиев, Гуидетти, Клеман и Бажлекова, Эберхардт и Грейнер и многие другие. В случае дискретизации уравнений неравенство коэрцитивности позволяет получить двусторонние оценки скорости сходимости. О таком неравенстве для дробных уравнений мы и поговорим.

Литература

1. Li Liu, Convergence Rates of a Finite Difference Method for the Fractional Subdiffusion Equations. / Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev Sergey// Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer Cham Switzerland. —2023. — V. 423, PP. 89-113.

2. Li Liu. Discrete almost maximal regularity and stability for fractional differential equations in $L^p([0,1],\Omega)$. / Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S.// Applied Mathematics and Computation. —2021. — V. 389, Article 125574.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ СЕМЕЙСТВ УРАВНЕНИЙ КАНА-ХИЛЛАРДА

С.П. Плышевская (Симферополь, КФУ им. В.И. Вернадского)
splyshevskaya@mail.ru

Исследуется обобщенное уравнение Кана-Хилларда

$$u_t = -(\alpha u_{xx} + \lambda u_x + u + bu^2 - u^3)_{xx}, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \qquad (1)$$

Вместе с (1) будем рассматривать периодические краевые условия

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \qquad (2)$$

Такого вида краевые задачи изучались в [1]

У краевой задачи (1), (2) могут быть только однородные состояния равновесия $u(t,x) \equiv c \quad (c \in (-\infty, \infty))$.

В результате замены в (1): $u(t,x) = \upsilon(t,x) + c$ получим следующую краевую задачу

$$\upsilon_t = -(\alpha \upsilon_{xx} + \lambda \upsilon_x + \beta \upsilon + \gamma \upsilon^2 - \upsilon^3)_{xx}, \qquad (3)$$

$$\upsilon(t, x + 2\pi) \equiv \upsilon(t, x), \qquad (4)$$

где $\beta = 1 + 2bc - 3c^2,\ \gamma = b - 3c$. Важно отметить, что из условия

$$M(\upsilon(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \upsilon(t_0, x)dx = 0$$

следует выполнение при всех $t > t_0$ условия

$$M(\upsilon(t, x)) = 0. \tag{5}$$

При исследовании локальной динамики краевой задачи (3)—(5) важную роль играет расположение корней λ_k характеристического уравнения для линеаризованной в нуле краевой задачи:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3\lambda + \beta k^2, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ниже будем предполагать, что имеет место критический случай. Пусть значение $c = c_0$ такое, что

$$\alpha = \beta = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2. \tag{6}$$

Фиксируем произвольно значение c_1 и положим в (3)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \tag{7}$$

где ε — малый положительный параметр, т. е.

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{8}$$

Далее исследуется поведение всех решений краевой задачи (3)—(5) из некоторой достаточно малой и независящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия при условиях (6)—(8).

В этом случае характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$, а все остальные его корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова-Хопфа.

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$\upsilon = \varepsilon^{1/2}\left[\xi(\tau)\exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau)\exp(-ix - i\lambda t)\right] + \varepsilon\upsilon_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2}\upsilon_3(t, \tau, x) + \ldots \tag{9}$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ — медленное «время»; функции $\upsilon_j(t, \tau, x)$ — $2\pi/\lambda$-периодичны по t и 2π-периодичны по x.

Подставим (9) в (3)—(5) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. На третьем шаге для нахождения

$\upsilon_3(t,\tau,x)$ приходим к краевой задаче, условие разрешимости которой в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \tag{10}$$

в котором

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3, \quad A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}.$$

Отсюда и из общих утверждений вытекает следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\delta \neq 0$ и $Re\sigma \neq 0$. Тогда при всех достаточно малых ε динамика уравнения (10) определяет локальную динамику краевой задачи (3)—(5).*

Поясним это утверждение. Пусть $\delta > 0$ и $Re\sigma > 0$. Тогда в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (3)—(5) не может существовать аттрактора, т. е. задача о динамике становится локальной.

Пусть $\delta > 0$ и $Re\sigma < 0$. Тогда уравнение (10) имеет устойчивый цикл $\xi_0(\tau) = \xi_0 \exp(i\omega_0\tau)$, где $\xi_0 = (-\delta(Re\sigma)^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $\omega_0 = (Im\sigma)\xi_0^2$, а краевая задача (3)—(5) тоже имеет устойчивый цикл

$$\upsilon_0(t,\tau,x) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big[\xi_0 \exp\big(ix + i(\lambda+\varepsilon\omega_0+o(\varepsilon))t\big) + \\ + \bar{\xi}_0 \exp\big(-ix - i(\lambda+\varepsilon\omega_0+o(\varepsilon))t\big)\Big] + O(\varepsilon). \tag{11}$$

При условии $\delta < 0$ и $Re\sigma > 0$ уравнение (10) имеет устойчивое состояние равновесия и неустойчивый цикл. Краевая задача (3)—(5) тоже имеет при малых ε устойчивое нулевое состояние равновесия и неустойчивый цикл (11).

При условии $\delta < 0$ и $Re\sigma < 0$ в (10) все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$, и в краевой задаче (3)—(5) тоже все решения из малой (не зависящей от ε) окрестности нуля при всех достаточно малых ε стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Литература

1. Кащенко С.А. Бифуркации в уравнении Курамото-Сивашинского / С.А. Кащенко // Теоретическая и математическая физика. — 2017. — Т. 192, № 1. — С. 23–40.

О НИЗКОЧАСТОТНОМ СПЕКТРЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЁХМЕРНОЙ РЕШЁТКИ СТРУН

А.А. Поздняков (Воронеж, ВГУ)
andruwapozd@gmail.ru

Рассматривается задача о колебаниях сетки из струн, связанных в виде графа G, достаточно плотно заполняющих трёхмерную кубическую область Ω_0. Предполагается, что струны (рёбра e_i графа G) имеют длину h, натяжение σ_h и плотность распределения масс вдоль них равна ρ_h. Если разбить граф G на части $G_0 = G \cap \Omega_0$, $\partial G_0 = G \cap \partial\Omega_0$, то задача о собственных колебаниях такой сетки приводится к следующему набору соотношений:

$$\sigma_h u_i''(X) + \lambda \rho_h u_i(X) = 0, \quad X \in e_i, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in I(v_j)} \sigma_h u_i'(v_j) + \lambda m_h u(v_j) = 0, \quad v_j \in G_0, \tag{2}$$

$$u_i(v_j) = u(v_j), \quad i \in I(v_j),\ v_j \in G_0, \tag{3}$$

$$u(v_j) = 0, \qquad v_j \in \partial G_0, \tag{4}$$

где $I(v_j)$ – множество номеров рёбер, примыкающих к вершине v_j, а m_h – сосредоточенная в вершине v_j масса.

Показывается, что низкочастотная часть спектра собственных значений этой задачи близка к аналогичной части спектра классической задачи Дирихле:

$$\sigma \Delta u(X) + \lambda \rho u(X) = 0, \quad X \in \Omega_0, \tag{5}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega_0}, \tag{6}$$

при выполнении условий $\sigma_h = \sigma h^2$, $3h\rho_h + m_h = \rho h^3$, обеспечивающих «физическое» сходство обеих краевых задач. А именно имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ – первые N собственных значений задачи (5),(6), а $\lambda_1^h, \ldots, \lambda_N^h$ – соответствующие собственные значений задачи (1)-(4). Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $h < \delta$ выполняются неравенства $|\lambda_i - \lambda_i^h| < \epsilon$.*

УСТОЙЧИВЫЕ ПУТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

О.В. Починка (Нижний Новгород, НИУ ВШЭ)
olga-pochinka@yandex.ru

[1] Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса-Смейла) на многообразиях, вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [1] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [2] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В том же году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [3] доказали существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса-Смейла. Из результата работы Ж. Флейтас [4] вытекает, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото, всегда можно заменить на устойчивую. Для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на многообразиях любой размерности, известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении инварианта, однозначно определяющего класс эквивалентности диффеоморфизма Морса-Смейла относительно отношения связанности устойчивой дугой (*компоненту устойчивой изотопической связности*).

Настоящий обзор посвящен изложению результатов по классификации систем Морса-Смейла относительно устойчивой изотопической связности, включая недавние исследования автора.

Литература

1. J. Palis. Fifty problems in dynamical systems, / J. Palis, C. Pugh // Lecture Notes in Math. — (1975), — P. 345–353.

2. S. Newhouse Stable arcs of diffeomorphisms, Bull. Amer. / S. Newhouse, J. Palis, F. Takens // Math. Soc. — (1976), — P. 499–502.

3. S. Newhouse. There is a simple arc joining any two Morse-Smale fows, / S. Newhouse, M. Peixoto // Asterisque, 31 — (1976), — P. 15–41.

4. G. Fleitas. Replacing tangencies by saddle-nodes / G. Fleitas // Bol. Soc. Brasil. Mat. — (1977), — P. 47–51.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

В. Л. Прядиев (Воронеж, ВГУ)

pryad@mail.ru

Рассмотрим начальную задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad (x \in \Gamma,\ t > 0), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma), \tag{2}$$

в которой Γ — геометрический граф из $\mathbb{R}^n$ (понимаемый в смысле [1]) без граничных вершин (все вершины Γ — внутренние). В вершинах Γ будем предполагать, во-первых, непрерывность $u(\,\cdot\,,t)$ при каждом $t > 0$, а во-вторых, выполненными условия трансмиссии:

$$\sum_{h \in D(a)} \gamma(a,h;t) u_h^+(a,t) =$$

$$= k(a)u(a,t) + \varkappa(a)u_t(a,t) + m(a)u_{tt}(a,t) \quad (a \in V,\ t > 0), \tag{3}$$

где V — множество всех вершин Γ, $D(a)$ — множество допустимых в точке a единичных векторов, $k(a)$, $\varkappa(a)$, $m(a)$, $\gamma(a,h;t)$ вещественны, $\forall(a \in V)\ \forall(h \in D(a))\ \left[\gamma(a,h;\,\cdot\,) \in C^1[0;+\infty)\right]$ и $\forall(a \in V)\ \forall(t \geqslant 0)$ $\left[\sum\limits_{h \in D(a)} \gamma(a,h;t) \neq 0\right]$. Решение (1)—(3) предполагается вещественным и понимается классически, с соответсвующими естественными условиями согласования начальных данных, во-первых, с уравнением (1), которое в вершинах Γ понимается как $\forall(a \in V)\ \forall\,(h \in D(a))$ $\left[u_{hh}^{++}(a,t) = u_{tt}(a,t)\right]$, во-вторых, с непрерывностью u, u_t и u_{tt} в точках из $V \times [0;+\infty)$, и в-третьих, с условием (3). Ниже $a \leftrightarrow b$ означает смежность вершин a и b, а $h_{a,b} = |b-a|^{-1} \cdot (b-a)$.

Трактуя, как и в [2] и [3], функции $\mu_a(t) = u(a,t)$, $a \in V$, как *граничные режимы* (см. в [4] гл. II, § 2, п. 7, стр. 76) по отношению к примыкащим рёбрам, получаем следующий факт.

Теорема. *Если для любой $a \in V$ справедлива импликация*

$$m(a) = 0 = k(a) \Rightarrow \forall(t \geqslant 0) \left[\varkappa(a) + \sum_{b | b \leftrightarrow a} \gamma(a, h_{a,b}; t) \neq 0\right],$$

то решение задачи (1)—(3) существует и единственно, причём набор функций $\{\mu_a\}_{a\in V}$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$m(a)\mu_a''(t) + \left(\varkappa(a) + \sum_{b|b\leftrightarrow a} \gamma(a, h_{a,b}; t)\right)(\mu_a)'(t) + k(a)\mu_a(t) =$$

$$= \sum_{b|b\leftrightarrow a}\left(2\cdot \sum_{p=0}^{\left[\frac{t-|b-a|}{2|b-a|}\right]} (\mu_b)'(t-(2p+1)|b-a|) - \right.$$

$$\left. - 2\cdot \sum_{p=0}^{\left[\frac{t}{2|b-a|}\right]} (\mu_b)'(t-2p|b-a|) + \xi_{a,b}(t)\right) \quad (t \geqslant 0),\ a\in V,$$

и начальным условиям $\mu_a(0) = \varphi(a)$ *и* $\mu_a'(0) = \psi(a)$, $a \in V$. *Здесь квадратные скобки в верхних индексах суммирования означают взятие целой части числа, а* $\xi_{a,b}$ *есть* $2|b-a|$*-периодическая функция, выражаемая через* $\varphi\big|_{(a;b)}$ *и* $\psi\big|_{(a;b)}$.

Литература

1. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

2. Прядиев В. Л. Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети / В. Л. Прядиев // Spectral and Evolution problems : Pr. of the Fifteenth Crimean Autumn Math. Sch.-Symp. — Vol. 15 (Sept. 17-29, 2004, Sevastopol, Laspi). — Simferopol, 2005. — P. 132–139.

3. Глотов Н. В. Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях трансмиссии типа «жидкого трения» / Н. В. Глотов, В. Л. Прядиев // Вест. Воронеж. гос. ун-та. Сер. «Физика. Математика». — 2006. — № 2. — С. 185–193.

4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Изд-во МГУ, 1999. — 799 с.

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

А.В. Псху (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
pskhu@list.ru

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}_x^{[\mu]} f(x) = \int_{\mathbb{R}} D_{0x}^t f(x)\, \mu\,(dt)\,, \tag{1}$$

где D_{0x}^t — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля порядка t по переменной x с началом в точке $x = 0$; μ — знакопеременная мера Бореля на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Операторы вида (1) относятся к классу операторов дробного интегро-дифференцирования распределенного порядка [1, 2].

В докладе обсуждаются вопросы построения формулы обращения для оператора (1).

Литература

1. Нахушев А.М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах / А.М. Нахушев // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 4. — С. 796–799.

2. Нахушев А.М. К теории дробного исчисления / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. —1988. — Т. 24, № 2. — С. 313–324.

ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ БИЛЛИАРДА БИРКГОФА С ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

С.Е. Пустовойтов (Москва, МГУ)
pustovoitovse1@mail.ru

Рассмотрим плоский математический биллиард, ограниченный эллипсом $x^2/a + y^2/b = 1$. Такая кусочно- гладкая система с двумя степенями свободы, которую рассматривал Биркгоф в [1], была изучена многими авторами с разных точек зрения. Так, было показано, что такой биллиард интегрируем в квадратурах. А именно, он является гамильтоновой системой, для которой в качестве гамиль-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 22-71-10106) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

тониана выступает кинетическая энергия $H = \frac{p_x^2+p_y^2}{2}$, при этом существует еще одна функцию вида

$$\Lambda = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab},$$

которая сохраняется на траекториях движения, т.е. является первым интегралом. Более того, эти две функции, определенные на кусочно-гладком фазовом пространстве $M^4 = \{(p_x, p_y, x, y)\}$, функционально независимы почти всюду. *Слоением Лиувилля* биллиарда называется слоение фазового пространства на общие поверхности уровня интегралов $T_{h,f} = \{\bar{x} \in M^4 : H(\bar{x}) = h, F(\bar{x}) = f\}$. Структуру слоения Лиувилля, ограниченного на изоэнергетическое многообразие $Q_1^3 = \{\bar{x} \in M^4 : H(\bar{x}) = 1\}$, а также любого локально- плоского биллиарда, ограниченного дугами софокусных эллипсов и гипербол, исследовала В. В. Ведюшкина в [2] в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга (см. [3]).

Потребуем теперь, что на биллиардный шар действует полиномиальный потенциал $W(x, y)$, степень которого не превосходит четырех. Гамильтониан такой системы имеет вид полной энергии $H = \frac{p_x^2+p_y^2}{2} + W(x, y)$. В общем случае интегрируемость такого биллиарда не сохраняется. Тем не менее, существует критерий интегрируемости, предложенный В. В. Козловым в [4], который гласит, что биллиард является интегрируемым тогда и только тогда, когда потенциал имеет вид

$$W(x, y) = -c_0(x^2 + y^2 - a - b) - c_1((x^2 + y^2 - a - b)^2 + ay^2 + bx^2 - ab).$$

Дополнительный первый интеграл примет форму $F = \Lambda + f(x, y)$. Структура слоения Лиувилля такого биллиарда, ограниченного на изоэнергетические многообразия Q_h^3, была изучена автором в [5]. Теперь же изучим ее в четырехмерных окрестностях слоев, содержащих невырожденные точки ранга 0 (в которых выполнено $dH = dF = 0$) или вырожденные критические траектории. В частности, верна следующая теорема.

Теорема. *Невырожденные точки ранга 0 эллиптического биллиарда с потенциалом четвертой степени имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля в окрестности слоев типа центр-седло имеет вид прямого произведения 2-атома A на один из 2-атомов B, B_2, C_2, C_4. В окрестности слоев типа седло-седло оно имеет вид полупрямого произведения $B \times C_2/Z_2$,*

$B_2 \times C_2/Z_2$ или $B \times C_4/Z_2$. Всего существует шесть типов окрестностей особых слоев, содержащих вырожденную орбиту, с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Литература

1. Биркгоф Дж., Динамические системы. / Дж. Биркгоф // — Ижевск; Издательский дом «Удмуртский университет» — 1999 — 408 стр.

2. Фокичева В. В., Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик / В. В. Фокичева // Матем. сб., 206:10 — (2015) — С. 127–176.

3. Болсинов А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко // — Том I, II — Ижевск: РХД — 1999.

4. Козлов В. В., Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде./ В. В. Козлов // Прикладная математика и механика, — Т. 59, вып. 1, — 1995.

5. Пустовойтов С. Е., Топологический анализ эллиптического биллиарда в потенциальном поле четвертого порядка / С. Е. Пустовойтов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Н.А. Раутиан (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики)
nrautian@mail.ru

Работа посвящена исследованию вольтерровых интегро- дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро–дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости, тео-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (Соглашение № 075-15-2022-284).

рии распространения тепла в средах с память и имеющие ряд других важных приложений.

Для широкого класса ядер интегральных операторов установлены результаты о существовании и единственности решений указанных уравнений, полученные на основе спектрального анализа оператор–функций, являющихся символами указанных уравнений, а также на основе подхода, связанного с применением теории полугрупп операторов Проводится спектральный анализ генераторов полугрупп операторов, порождаемых указанными интегро–дифференциальными уравнениями.

Устанавливается связь между спектрами оператор–функций, являющихся символами указанных интегро–дифференциальных уравнений и спектрами генераторов полугрупп операторов. На основе спектрального анализа генераторов полугрупп операторов и соответствующих оператор–функций получены представления решений рассматриваемых интегро–дифференциальных уравнений (см. [1], [2]).

Литература

1. Rautian N.A. On the Properties of Semigroups Generated by Volterra Integro-Differential Equations with Kernels Representable by Stieltjes Integrals / N.A. Rautian, V.V. Vlasov // Differential Equations. — 2021. — V. 57, № 9. — P. 1231–1248.

2. Rautian N.A. Spectral Analysis of the Generators for Semigroups Associated with Volterra Integro-Differential Equations / N.A. Rautian, V.V. Vlasov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — V. 44, № 3. — P. 926–935.

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ В КЛАССАХ ТИПА М. ДЖРБАШЯНА

Е.Г. Родикова, К.В. Кислакова

(Брянск, БГУ имени акад. И.Г. Петровского)

evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D. Обозначим через $T(r,f)$ характеристику Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$, а через $T_\alpha(r,f)$ – α-характеристику М.М. Джрбашяна:

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$\ln^+|a| = \max(0, \ln|a|)$, $a \in \mathbb{C}$,

$$T_\alpha(r,f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})|dt \right)^+ d\varphi, \alpha > -2,$$

где Γ — функция Эйлера.

Отметим, что α-характеристика была введена М.М. Джрбашяном в 1964 г. при обобщении им теории Р. Неванлинны, краеугольным камнем которой является понятие характеристичекой функции, $T_{-1}(r,f) = T(r,f)$ [1].

Обозначим Ω – множество всех измеримых положительных функций на $\Delta = (0,1]$, для которых существуют числа m_ω, q_ω из Δ, M_ω, такие что (см. [5])

$$m_\omega \leqslant \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leqslant M_\omega,\ r \in \Delta,\ \lambda \in [q_\omega, 1]. \tag{1}$$

Простейшими примерами таких функций могут служить $\omega(t) = t^\gamma \left(\ln ... \ln \frac{c}{t}\right)^\beta$, $t \in \Delta$, $\gamma > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Пусть $\omega \in \Omega$, $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Введём в рассмотерение следующие классы функций:

$$N^p_{\omega,\alpha} = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p_\alpha(r,f) dr < +\infty \right\},$$

$$S^p_{\omega,\beta} = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\beta \omega(1-r) T^p(r,f) dr < +\infty \right\}.$$

Впервые классы $S^p_{\omega,0}$ были введены и исследованы Ф.А. Шамояном в 1999 г. в работе [4] как обобщение хорошо известных в научной литературе классов Неванлинны-Джрбашяна [2]. В дальнейшем в работе [6] был решён вопрос об инвариантности этих классов относительно оператора дифференцирования:

Теорема A. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $\omega \in \Omega$. *Класс* $S^p_{\omega,0}$ *инвариантен относительно оператора дифференцирования тогда и только тогда, когда* $\int\limits_0^1 \omega(t) \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty$.

Классы $N^p_{\omega,\alpha}$ при $\omega(t) = t^\gamma$ были введены и исследованы в работе автора [3].

В данной работе мы получаем аналог теоремы А как следствие следующего результата:

Теорема 1. *Классы* $N^p_{\omega,\alpha}$ *и* $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ *совпадают при всех* $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$, $\omega \in \Omega$. *Класс* $N^p_{\omega,\alpha}$ *инвариантен относительно оператора дифференцирования тогда и только тогда, когда* $\int\limits_0^1 \omega(t)t^{(\alpha+1)p} \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty$.

Отметим, что теорема 1 при $\omega(t) = t^\gamma$ была установлена в работе [7].

Литература

1. Джрбашян М. М. О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге / М. М. Джрбашян // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157. — № 5. — С. 1024–1027.

2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна — М. Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

3. Родикова Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Сибирские электронные математические известия. — 2014. — Т. 11. — С. 52–63.

4. Шамоян Ф.А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций / Ф.А. Шамоян // Сиб. мат. журн. — 1999. —Т. 40. — № 6. —С. 1422–1440.

5. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой / Ф.А. Шамоян - Брянск: РИО БГУ, 2014. - 250 с.

6. Шамоян Ф.А. Об инвариантности весовых классов функций относительно интегро-дифференциальных операторов / Ф.А. Шамоян, И.С. Курсина // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 1998. — Т. 25. — №5. — С. 184–197.

7. Шамоян Ф.А. О классах аналитических в круге функций с характеристикой Р. Неванлинны и α-характеристикой из весовых L^p-пространств / Ф.А. Шамоян, В.А. Беднаж, О.В. Карбанович // Сибирские электронные математические известия.— 2015.— Т. 12.— С. 150–167.

ТУННЕЛЬНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ НИЖНИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРА НА $su(1,1)$[1]

С.В. Румянцева (Москва, НИУ ВШЭ)

srumyanceva@hse.ru

Данная работа посвящена построению квазиклассических туннельных асимптотик нижних уровней спектра квадратичного оператора на алгебре Ли $su(1,1)$:

$$\hat{H} = \hat{Y}_1^2 - \hat{Y}_2^2 + \alpha(\hat{A} - \beta)^2,$$

где эрмитовы операторы $\hat{Y}_1$, $\hat{Y}_2$, $\hat{A}$ являются генераторами алгебры.

В работе [1] было показано, что после применения когерентного преобразования и преобразования Лиувилля спектральная задача становится дифференциальным уравнением Шредингера в пространстве антиголоморфных функций:

$$\hbar^2 u''(z) - \left(V(z) + Ea_0(z) + O\left(\hbar^2\right)\right) u(z) = 0, \qquad (1)$$

где собственные функции $u(z)$ аналитичны в круге единичного радиуса и:

$$V(z) = \frac{z^4\alpha\left(1+2\beta\right)^2 - 2z^2 + \alpha\left(1-2\beta\right)^2}{2\left(z^4 - 2\alpha z^2 + 1\right)^2}, \quad a_0(z) = -\frac{2}{z^4 - 2\alpha z^2 + 1}.$$

Пусть ΔE_n — разность пары близких энергий оператора $\hat{H}$, отвечающих одному номеру в правиле квантования Бора-Зомерфельда. Обозначим данную разность как ΔE_n^{upper} в случае, когда $n \sim 1/\hbar$. Если $n = 0, 1, 2, \ldots$, то будем обозначать как ΔE_n^{low}.

Рассмотрим уравнение (1) вблизи нижней энергии, то есть:

$$E = E_0 + \hbar E_1, \quad E_0 = -\frac{\alpha(4\beta^2 - 1) + 1}{4(\alpha - 1)}.$$

Для решения задачи о построении асимптотики разности пары близких нижних энергий мы согласовываем асимптотики собственных функций оператора $\hat{H}$ в окрестностях двукратных точек поворота. Особенность исследования нижних уровней заключается в необходимости рассматривать не только ВКБ асимптотики решений, но

[1] Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

и асимптотики в терминах специальных функций параболического цилиндра [2, 3]. Для сокращения записи в Теореме введем обозначение $Q(z) = V(z) + E_0 a_0(z)$.

Теорема. *Пусть $\alpha > 1$, $\alpha|2\beta - 1| < 1$, и выполнено правило Бора-Зоммерфельда:*

$$E_n = E_0 + \hbar\omega(n + 1/2) + o(\hbar), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда асимптотика туннельного расщепления нижних энергетических уровней оператора $\hat{H}$ имеет вид:

$$\Delta E_n^{low} = (-1)^n \frac{4\omega\sqrt{\hbar}}{\sqrt{\pi} n!} J^{2n+1} \left(\frac{2}{\hbar}\right)^n \exp\left(-\frac{2\gamma}{\hbar}\right)$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{\hbar} \operatorname*{Res}_{z=\xi_0} \sqrt{Q(z)}\right)(1 + o(1)),$$

где частота ω и интеграл по инстантону γ определяются следующим образом:

$$\omega = \left(\frac{Q''(w_0)}{2}\right)^{1/2} \frac{2}{a_0(w_0)}, \quad \gamma = \operatorname{Re} \int_0^{w_0} \sqrt{Q(t)} dt > 0$$

$$J = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{a_0(w_0)}{2}} w_0 \exp\left(-\int_0^{w_0} \frac{\omega a_0(t)}{2\sqrt{Q(t)}} - \frac{1}{t - w_0} dt\right).$$

Здесь w_0 — двукратная точка поворота, то есть является корнем кратности 2 для $Q(z)$.

Отметим, что, как и для случая верхних энергетических уровней [1], асимптотика туннельного расщепления нижних энергетических уровней отличается от классической формулы, приведенной в [4], наличием осциллирующего множителя.

Туннельные расщепления для верхних энергетических уровней и основного состояния одномерного оператора Шрёдингера с потенциалом, имеющим вид двойной ямы, отличаются в $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$ [5]. Данное утверждение также верно для рассматриваемого квадратичного оператора на алгебре Ли $su(1,1)$.

Утверждение. *Пусть выполнены условия Теоремы. Тогда*

$$\Delta E_n^{low} = \Delta E_n^{upper} \sqrt{\frac{\pi}{e}} g(n),$$

где

$$g(n) = \frac{\sqrt{2}}{n!}(n+1/2)^{n+1/2}e^{-n}$$

Таким образом асимптотика расщепления для нижних энергетических уровней переходит в асимптотику расщепления для верхних энергетических уровней при $n \to \infty$. При этом формула для основного состояния отличается от формулы для ΔE_n^{upper} в $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$.

Литература

1. Vybornyi E.V. Semiclassical Asymptotics of Oscillating Tunneling for a Quadratic Hamiltonian on the Algebra $su(1,1)$ / E.V. Vybornyi, S.V. Rumyantseva // Math. Notes. — 2022. — Vol. 112., № 5. — P. 665–681.

2. Маслов В.П. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики / В.П. Маслов, М.В Федорюк. — М. : Наука, 1976. — 296 с.

3. Славянов С.Ю. Асимптотика сингулярных задач Штурма–Лиувилля по большому параметру в случае близких точек перехода / С.Ю. Славянов // Дифф. ур. — 1969. — Т. 5, № 2. — С. 313–325.

4. Доброхотов С.Ю. Расщепление нижних энергетических уровней уравнения Шредингера и асимптотика фундаментального решения уравнения $hu_t = h^2\Delta u/2 - V(x)u$ / С.Ю. Доброхотов, В.Н. Колокольцов, В.П. Маслов // ТМФ. — 1991. — Т. 87, № 3. — С. 323–375.

5. Albeverio S. Splitting formulas for the higher and lower energy levels of the one-dimensional Schrodinger operator / S. Albeverio, S.Y. Dobrokhotov, E.S. Semenov // Theor. Math. Phys. — 2004. — Vol. 138, № 1. — P. 98–106.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

К.Б. Сабитов (Уфа, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН; Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий)

sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим более общее уравнение параболического типа

$$\mathcal{L}u \equiv N(x)u_t - K(t)u_{xx} + a(x,t)u_x + c(x,t)u = F(x,t) = f(x)g(t) \quad (1)$$

в области $D = \{(x,t)\, 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, l, T — заданные положительные постоянные, $N(x) \geqslant 0$, $K(t) \geqslant 0$, $a(x,t)$, $c(x,t)$ — заданные функции и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D), \;\; u_x \in L_2(D); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,l) \cap L[0,l]; \tag{3}$$

$$\mathcal{L}u(x,t) \equiv F(x,t), \;\; (x,t) \in D; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{6}$$

$$\int\limits_0^T u(x,t)g(t)\,dt = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Задача 2. *Найти пару функций $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условиям (2), (4) – (6) и, кроме этого,*

$$g(t) \in C(0,T) \cap L[0,T], \tag{8}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)f(x)\,dx = h(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

где $\varphi(x)$, $h(t)$ и $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

$$\int\limits_0^l \varphi(x)f(x)\,dx = h(0). \tag{10}$$

В задачах 1 и 2 интегральные условия (7) и (9) являются дополнительными условиями для определения функций $f(x)$ и $g(t)$.

Отметим, что усилиями многих математиков создана теория обратных и некорректных задач для гиперболических, эллиптических, параболических и других уравнений. Полученные результаты изложены в монографиях [1] – [13] и других. Тем не менее остаются много задач, для решения которых еще не получены окончательные результаты.

Аналогичные обратные задачи изучены в работе [5, с. 123 – 126] для уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x)g(t),\ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{11}$$

с нулевыми граничными и начальным условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ u(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

с заданием дополнительного условия

$$u(x_0,t) = h(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x_0 \in [0,l]. \tag{12}$$

Для обратной задачи по определению функций $u(x,t)$ и $g(t)$ доказана теорема единственности и существования решения, когда $f(x_0) \neq 0$. Приведен пример функции $f(x)$, такой, что $f(x) = -f(l-x)$, и точки $x_0 = l/2$, где $f(l/2) = 0$, для которых эта обратная задача имеет не единственное решение. В случае задачи по отысканию пары функций $u(x,t)$ и $f(x)$ относительно неизвестной функции $f(x)$ получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода, тем самым показана некорректность постановки этой задачи, хотя при $g(t) \equiv 1$ и $x_0 = 0$ доказана единственность решения интегрального уравнения в классе $L_2[0,l]$.

В нашей работе [14] обратная задача по отысканию пары функций $u(x,t)$ и $g(t)$ для уравнения (11) с дополнительным условием (12) исследована при более слабых условиях относительно функции $f(x)$ и при $u(x,0) = \varphi(x) \neq 0$. Отдельно изучены случаи, когда $f(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$; $f(x_0) = f''(x_0) = 0$ и $f^{IV}(x_0) \neq 0$ и т.д. Во всех этих случаях доказаны теоремы об однозначной разрешимости этой задачи. Обратная задача по нахождению пары функций $u(x,t)$ и $f(x)$ для уравнения (11) изучена с дополнительным условием

$$u(x,t_0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t_0 \leqslant T. \tag{13}$$

Здесь установлен критерий решения задачи, которое построено в виде суммы рядов Фурье.

В работе [15] рассмотрены обратные задачи нахождения свободного члена и коэффициента перед $u(x,t)$ в общем параболическом уравнении. Доказаны фредгольмовость линейной обратной задачи нахождения правой части специального вида, а также глобальные теоремы существования, единственности и устойчивости ее решения.

А в статье [16] изучается обратная задача по отысканию решения и правой части специального вида для параболического уравнения

$$u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x,t), \ (x,t) \in (a,b) \times (0,T),$$

где $L_0 u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функции $u(x,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в воздухе или водоеме, функции $N_i(t)$ — мощности источников загрязнения, точки $x_i \in (a,b)$ — точечные источники и r — число этих источников. Изучен вопрос о разрешимости, единственности и некоторых качественных свойствах решений. Приведены примеры, показывающие, что без дополнительных условий на взаимное расположение источников и точек измерений единственность может отсутствовать.

В работе [17] для параболического уравнения

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{s} f_i(x,t)q_i(t) + f_0(x,t),$$

где $A(t,x,D)$ – эллиптический оператор второго порядка, рассматривается обратная задача об определении решения u и функции $q_i(t)$ по интегральным данным переопределения $\int_G u\varphi_i(x)dx = \psi_i(t)$, $i = 1,2,...,s$. Решение параболического уравнения является обобщенным и в качестве правой части допускаются распределения из некоторых классов. При определенных условиях на данные задачи показано, что обратная задача корректна в классах Соболева и, в частности, имеют оценки об устойчивости.

В работе [18] для общего параболического уравнения исследуется обратная задача восстановления источника — правой части $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$. Для нахождения $f(x)$ помимо начальных и граничных условий задается дополнительное условие нелокального наблюдения вида

$$\int_0^T u(x,t)d\mu(t) = \chi(x).$$

В данной работе введение дополнительных интегральных условий в виде (7) и (9) типа Самарского – Ионкина [19] вместо условий (12) и (13) позволяет установить на прямую единственность решения задач 1 и 2 для уравнения (1) методом интегральных тождеств и в случае уравнения теплопроводности построить решение в явном виде.

Литература

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. / Романов В.Г. // Новосибирск: Наука СО — 1972. — 164 с.

2. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. / Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. // М.: Наука — 1978. — 206 с.

3. Лаврентьев М.А. Одномерные обратные задачи математической физики Новосибирск / Лаврентьев М.А., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. // Наука — 1982. — 88 с.

4. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики./ Романов В.Г. // М.: Наука — 1984 — 264 с.

5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач./ Денисов А.М. // М.: Изд-во МГУ — 1994. — 208 с.

6. Тихонов А.Н. Нелинейные некорректные задачи./ Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. // М.: Наука — 1995. — 312 с.

7. Prilepko A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. / Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. // New York. Basel: Marcel Dekker Inc — 1999. — 709 p.

8. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. / Isakov V. // New-York: Springer — 2006. — 358 p.

9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. / Кабанихин С.И. // Новосибирск: Сиб. науч. изд-во — 2009. — 457 с. (изд. 2).

10. Дмитриев В.И. Обратные задачи геофизики. / Дмитриев В.И. // М.: Макс Пресс — 2012. — 340 с.

11. Ягола А.Г. Обратные задачи и методы их решения Приложения к геофизике. / Ягола А.Г., Янфей Ван, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. // М.: Бином. Лаборатория знаний — 2014 — 216 с.

12. Ягола А.Г. Обратные задачи колебательной спектроскопии. / Ягола А.Г., Коников И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А. // М.: Изд-во «Курс» — 2017. — 336 с. (изд. 2).

13. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнений математичской физики. / Сабитов К.Б. // М.: Наука — 2023. — 288 с.

14. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения теплопроводности по отысканию начального условия и правой части / Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р. // Учен. зап. Казан. ун-та. Физ.–мат. науки. — 2019. — Т. 161. — № 2. — С. 271–291.

15. Прилепко А.И. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением / Прилепко А.И., Костин А.Б. // Матем. сб. — 1992. — Т. 184. — № 4. — С. 49–68.

16. Пятков С.Г. О некоторых классах обратных задач об определении функции источников / Пятков С.Г., Сафонов Е.И. // Матем. тр. — 2016. — Т. 19. № 1. — С. 178–196.

17. Пятков С.Г. Об определении функции источника в задачах тепломассопереноса по интегральным условиям переопределения / Пятков С.Г., Уварова М.В. // Сиб. журн. индустр. матем. — 2016. — Т. 19. — № 4. — С. 93–100.

18. Костин А.Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения / Костин А.Б. // Математический сборник. 2013. — Т. 204. — № 10. — С. 3–46.

19. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнений параболо – гиперболического типа / Сабитов К.Б. // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т.46. — №10. — С. 1468–1478.

КВАНТОВАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТЕОРИЯ ИНДЕКСА[1]

А.Ю. Савин (Москва, РУДН)

antonsavin@mail.ru

Пусть задано однородное каноническое преобразование

$$\varphi : T^*M \setminus 0 \longrightarrow T^*N \setminus 0$$

кокасательных расслоений без нулевого сечения гладких замкнутых многообразий M, N. А именно, предполагается, что φ сохраняет симплектические структуры и однородно относительно действия группы растяжений в слоях кокасательных расслоений. При выполнении подходящего условия квантования преобразованию φ можно сопоставить (Фок, Маслов, Хёрмандер) оператор — квантованное каноническое преобразование

$$T(\varphi) : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(N).$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-12005).

Квантованные канонические преобразования играют важную роль в теории гиперболических уравнений, спектральной теории, математической физике, ...

Отметим, что оператор $T(\varphi)$ в общем случае является фредгольмовым в соответствующих пространствах Соболева, но может оказаться необратимым. Проблема вычисления фредгольмова индекса в этой ситуации обсуждалась Атьёй и Вейнстейном ещё в 70-х годах и была решена значительно позже в случае $M = N$ Эпштейном и Мельроузом (1998), в общем случае Лайштнамом-Нестом-Цыганом (2001). Формулы индекса были получены также для квантованных канонических преобразований на многообразиях с коническими точками (Назайкинский-Стернин-Шульце, 1999).

Трудность проблемы индекса квантованных канонических преобразований состоит в том, что рассматриваемый оператор определяется в терминах симплектической геометрии кокасательных расслоений и поэтому обычные топологические методы вычисления индекса оказываются неприменимы в этой ситуации. Для решения проблемы индекса используются либо тонкая аналитическая техника, связанная с исчислением операторов Гейзенберга и тёплицевыми операторами в строго псевдовыпуклых областях, либо техника алгебраических теорем об индексе и некоммутативной геометрии.

В этом докладе мы обсудим проблему индекса эллиптических операторов вида:

$$D = \sum_{g \in G} D(g) T(g) : H^s(M) \longrightarrow H^{s-m}(M).$$

Здесь G — дискретная группа, $g \mapsto T(g)$ — представление группы G в пространстве функций на многообразии квантованными каноническими преобразованиями, $g \mapsto D(g)$ — семейство псевдодифференциальных операторов (ПДО) порядка m, $H^s(M)$ — пространства Соболева. В качестве частных случае эта проблема индекса при $G = \{e\}$ даёт проблему индекса ПДО; при $G = \mathbb{Z}_2$ — указанную выше проблему Атьи–Вейнстейна; когда $\{T(g)\}$ это группа операторов сдвига $u(x) \mapsto u(g^{-1}x)$, отвечающих действию группы на многообразии, получаем проблему индекса операторов со сдвигами (Антоневич и Лебедев).

В докладе будет рассказано о результатах, полученных в совместных работах с Э. Шроэ. В частности, получены формулы индекса для групп изометрических канонических преобразований в $T^*\mathbb{R}^n$, а в общей ситуации дано сведение проблемы индекса к проблеме вычисления так-называемого алгебраического индекса.

Литература

1. Savin A. Analytic and algebraic indices of elliptic operators associated with discrete groups of quantized canonical transformations / A. Savin, E. Schrohe // J. Funct. Anal. — 2020. — V. 278, № 5, 108400. — 45 pp.

2. Savin A. An index formula for groups of isometric linear canonical transformations / A. Savin, E. Schrohe // Doc. Math. — 2022. — V. 27. — P. 983–1013.

3. Savin A. Local index formulae on noncommutative orbifolds and equivariant zeta functions for the affine metaplectic group / A. Savin, E. Schrohe // Adv. Math. — 2022. — V. 409, part A, Paper No. 108624. — 37 pp.

О ТОЧНЫХ НОРМАХ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТКИ В L_p-ШКАЛЕ

С.Ю. Садов (Москва)

serge.sadov@gmail.com

Хорошо известно неравенство Юнга для нормы свертки в шкале L_p-пространств на произвольных локально-компактных группах: $\|k*u\|_r \leqslant \|k\|_q\|u\|_p$ при условии $r \geqslant p \geqslant 1$, $p^{-1}+q^{-1} = 1+r^{-1}$. В $\mathbb{R}^n$ его уточнением является неравенство Бабенко-Бекнера [1]

$$\|k*u\|_r \leqslant C(n,p,q)\|k\|_q\|u\|_p, \tag{1}$$

где $C(n,p,q) = (A_pA_qA_{r'})^n$, $A_t = (t^{1/t}/(t')^{1/t'})^{1/2}$, $t' = (1-1/t)^{-1}$. Если $1 < t < \infty$, то $A_t < 1$.

Равенство в (1) достигается, если и только если $k(\cdot)$ и $u(\cdot)$ — гауссовы функции (квадратичные экспоненты) с нужным образом (зависящим от p и q) согласованными параметрами [2]. Это — качественный результат, а его количественному уточнению посвящены работы М. Крайста последнего десятилетия [3]. Результаты такого рода, доведенные до числа (т.е. с конкретными константами, что, по-видимому, еще не сделано), позволяли бы давать более точные L_p-оценки норм операторов свертки с ядрами, отличными от гауссовых. К операторам свертки, сводятся, в частности, интегральные преобразования на $\mathbb{R}$ с ядрами, зависящими от произведения (или частного) аргументов, как, например, преобразование Лапласа.

Аналитические выражения для норм сверточных операторов в L_p-шкале известны только в небольшом числе случаев (константы в неравенстве Харди-Литтлвуда-Соболева в случае отображения $L_p \to L_{p'}$; для ядер $k(x) = e^{-\alpha|x|}$ [4] и для преобразования Гильберта, в последнем случае — ядро не локально интегрируемое). Отметим еще, что известны точные $L_{p\to p'}$ нормы преобразования Фурье [1], хотя оно формально не сводится к оператору свертки с локально-интегрируемым ядром. Вычислительные результаты также крайне немногочисленны [5].

В докладе будет рассказано о работе по вычислению точных (в численном смысле) норм некоторых одномерных операторов свертки в L_p-шкале — в частности, с ядрами «кирпич» $I(|x| \leqslant 1)$ и «односторонняя экспонента» $e^{-x}I(x \geqslant 0)$. Проведены вычисления норм преобразования Фурье-Лапласа вдоль лучей $\arg z = \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ в комплексной плоскости. Случай $\theta = 0$ рассмотрен ранее [6].

Теоретическим базисом для вычислений является теорема о существовании максимизатора оператора свертки [7] без ненужных предположений, введенных в [8]. Дополнения даны в [9], [10].

Вычисления норм преобразования Фурье-Лапласа вдоль лучей — возможно, первый пример вычислений норм сверток с комплекснозначными, несимметричными ядрами. Ввиду отсутствия теоремы о единственности максимизатора (вне предположений из [8]) наши вычисления, строго говоря, дают лишь нижние оценки норм.

Литература

1. Beckner W. Inequalities in Fourier analysis / W. Beckner // Ann. of Math. — 1975. — V. 102. — P. 159–182.

2. Lieb E.H. Gaussian kernels have only Gaussian maximizers / E.H. Lieb // Invent. Math. — 1990. — V. 102. — P. 179–208.

3. Christ M. Young's Inequality Sharpened / M. Christ // Geometric Aspects of Harmonic Analysis — Springer SINDAMS series, V. 45, 2021. — P. 261–298.

4. Pearson M. Best Constants in Sobolev Inequalities for Ultraspherical Polynomials / M. Pearson // Arch. Rational Mech. Anal. — 1991. — V. 116. — P. 361–374.

5. Peachey T. C. Determination of the Best Constant in an Inequality of Hardy, Littlewood, and Pólya / T.C. Peachey, C.M. Enticott // Experimental Math. — 2006. — V. 15. — P. 43–50.

6. Sadov S.Yu. On maximizers of convolution operators in $L^p(R^n)$ / S.Yu. Sadov, G.V. Kalachev // Proceedings of the Int. Conference Days on Diffraction 2022, St. Petersburg. — IEEE, 2022. — P. 125–129

7. Калачев Г.В. О максимизаторах оператора свёртки в пространствах L_p / Г.В. Калачев, С.Ю. Садов // Матем. сб. — 2019. — Т. 210, № 8. — С. 67–86.

8. Pearson M. Extremals for a class of convolution operators / M. Pearson // Houston J. Math. — 1999. — V. 25. — P. 43–54.

9. Калачев Г.В. Критерий существования максимизатора оператора свёртки в $L^1(R^n)$ / Г.В. Калачев, С.Ю. Садов // Вестн. МГУ. Сер. 1: Математика, механика. — 2021, № 4. — С. 17–22

10. Sadov S. Existence of convolution maximizers in $L_p(R^n)$ for kernels from Lorentz spaces / S. Sadov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — V. 271. — P. 1–11.

О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ НЕУСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Т.В. Сальникова, Е.И. Кугушев (Москва, МГУ)

tatiana.salnikova@gmail.com

Если в положении равновесия потенциальная энергия натуральной системы достигает строгого локального минимума, то в силу теоремы С.В. Болотина [1], при малых положительных значениях полной энергии системы существует хотя бы одно периодическое движение. В этом случае положение равновесия устойчиво по Ляпунову. В работе рассматривается ситуация, когда положение равновесия невырождено и неустойчиво по Ляпунову, причем его степень неустойчивости не ноль и меньше числа степеней свободы системы. Показывается, что для любого достаточно малого положительного значения полной энергии системы найдется движение с данным значением энергии, которое начинается на границе области возможности движения, и не выходит из малой окрестности положения равновесия. Такие движения будем называть локализованными.

1. Натуральная система. Рассмотрим натуральную механическую систему с обобщенными координатами $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ и лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dfrac{1}{2}\,(A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$. Предполагается, что $V(\mathbf{q})$ и $A(\mathbf{q})$ дважды непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{q}$.

Теорема 1. *Пусть положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ невырождено и неустойчиво по Ляпунову, причем его степень неустойчивости η лежит в пределах $1 \leqslant \eta \leqslant n-1$. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется константа $h_0 > 0$ такая, что для любого* *значения энергии системы h, лежащего в пределах $0 \leqslant h \leqslant h_0$ существует движение системы $\mathbf{q}(t)$, с энергией h, все время лежащее в окрестности $q_1^2 + \ldots + q_n^2 < \varepsilon$.*

Доказательство. Положим $k = n - \eta$. Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ нормальные координаты системы. Уравнения Лагранжа в этих координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_s &= -\omega_i^2 x_s + O(\mathbf{x}^2 + \dot{\mathbf{x}}^2), \qquad s = 1, \ldots, k \\ \ddot{x}_j &= \ \ \alpha_j^2 x_j + O(\mathbf{x}^2 + \dot{\mathbf{x}}^2), \qquad j = k+1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_s > 0$, $\alpha_j > 0$, $s = 1, \ldots, k$, $j = k+1, \ldots, n$. Первой группе линеаризованных уравнений этой системы отвечают чисто мнимые характеристические корни $\pm i\omega_s$, второй группе — вещественные $\pm\alpha_j$. В соответствии с торемой о центральном многообразии [2], в фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ окрестности равновесия $(\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0)$ система (1) имеет три гладких инвариантных многообразия $W^{(s)}, W^{(u)}, W^{(c)}$, проходящих через точку $(\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0)$, и имеющих размерности, соответственно, $n - k, n - k$ и $2k$. При этом касательные плоскости к устойчивому и неустойчивому многообразиям $W^{(s)}, W^{(u)}$ в точке $(\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0)$ лежат в гиперплоскости, задаваемой системой уравнений $\{x_s = 0, \dot{x}_s = 0, s = 1, \ldots, k\}$. Полная энергия системы $E = T + V$ при движении сохраняется и в нормальных координатах имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k} \omega_s^2 x_s^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j^2 x_j^2 + O(|\mathbf{x}|^3 + |\dot{\mathbf{x}}|^3).$$

Касательная плоскость к центральному многообразию $W^{(c)}$ в точке $(\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0)$ задается системой уравнений $\{x_j = 0, \dot{x}_j = 0, j = k+1, \ldots, n\}$, поэтому на этом многообразии полная энергия системы в нормальных координатах имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k} \omega_s^2 x_s^2 + O(|\mathbf{x}|^3 + |\dot{\mathbf{x}}|^3), \qquad \mathbf{x} \in W^{(c)}.$$

На центральном многообразии $W^{(c)}$ эта функция достигает строгого локального минимума в точке $(\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0)$. Центральное многообразие $W^{(c)}$ инвариантно, и полная энергия E является первым интегралом для системы уравнений Лагранжа суженной на многообразие $W^{(c)}$. Следовательно, она является функцией Ляпунова для суженной системы уравнений Лагранжа. Значит, равновесие $(\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0)$

устойчиво для суженной системы, и решения исходной системы уравнений Лагранжа, начавшиеся вблизи этого равновесия на многообразии $W^{(c)}$, будут все время оставаться в окрестности этого равновесия, и, в нашей терминологии, будут локализованы в окрестности этого равновесия. Теорема 1 доказана.

Заметим, что если $k = 1$, то центральное многообразие имеет размерность 2. Для локализованных движений фазовые кривые — это линии уровня интеграла энергии. В этом случае они замкнуты, и в малой окрестности состояния равновесия все движения лежащие на центральном многообразии — периодические.

2. Система с гироскопическими и диссипативными силами. Пусть гироскопические и диссипативные обобщенные силы имеют вид $Q = C\dot{\mathbf{q}} + O(\mathbf{q}^2 + \dot{\mathbf{q}}^2)$, где C — постоянная $n \times n$ матрица. Будем говорить, что гироскопические и диссипативные силы малы, если $\|C\| \leqslant \psi$, где ψ — некая положительная малая величина, определяемая параметрами исходной натуральной системы.

Теорема 2. *Пусть положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ невырождено и неустойчиво по Ляпунову, причем его степень неустойчивости η лежит в пределах $1 \leqslant \eta \leqslant n-1$. И пусть гироскопические и диссипативные силы малы. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется константа $h_0 > 0$ такая, что для любого значения энергии системы h, лежащего в пределах $0 \leqslant h \leqslant h_0$, существует движение системы $\mathbf{q}(t)$ с начальной энергией h, все время лежащее в окрестности $q_1^2 + \ldots + q_n^2 < \varepsilon$.*

Приведем доказательство для случая системы с двумя степенями свободы при наличии гироскопических сил. В общем случае схема доказательства Теоремы 2 аналогична.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{q} = 0$ — положение равновесия системы с двумя степенями свободы, невырождено и неустойчиво по Ляпунову, причем его степень неустойчивости равна 1. И пусть гироскопические силы малы. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется константа $h_0 > 0$ такая, что для любого значения энергии системы h, лежащего в пределах $0 \leqslant h \leqslant h_0$ существует движение системы $\mathbf{q}(t)$, с начальной энергией h, все время лежащее в окрестности $q_1^2 + q_2^2 < \varepsilon$.*

Доказательство. В силу леммы Морса [3], не нарушая общности, можно считать, что $V(\mathbf{q}) = \dfrac{1}{2}\left(q_1^2 - q_2^2\right)$. Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ нормальные координаты системы. Переход к этим координатам производится линейной заменой. При этом матрица квадратичной формы потенциальной энергии останется диагональной. Сохранятся и индексы инерции этой формы. Поэтому потенциальная энергия системы в нормальных координатах будет иметь следующий вид: $V(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\left(\omega^2 x_1^2 - \alpha^2 x_2^2\right)$, где $\omega > 0$, $\alpha > 0$. При добавлении гироскопических сил уравнения Лагранжа в нормальных координатах выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{l} \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 + c\dot{x}_2 + f_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \ddot{x}_2 = \quad \alpha^2 x_2 - c\dot{x}_1 + f_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \end{array} \qquad f_i = O(\mathbf{x}^2 + \dot{\mathbf{x}}^2), \qquad i = 1, 2,$$

где $c > 0$ константа, характеризующая интенсивность гироскопических сил.

Будем рассматривать движения системы при фиксированном значении энергии $h > 0$. Область возможности движения задается неравенством $\omega^2 x_1^2 - \alpha^2 x_2^2 \leqslant 2h$. Введем в ней замкнутую подобласть W задаваемую неравенством $\alpha^2 x_2^2 \leqslant 4h$. Тогда в W имеем $\omega^2 x_1^2 \leqslant 6h$, и $\omega^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 \leqslant 10h$. Граница W состоит из четырех отрезков. Пара отрезков $\Gamma_{1,2}$ — это отрезки $\{\omega x_1 = \mp\sqrt{2h + \alpha^2 x_2^2},\ \alpha^2 x_2^2 \leqslant 4h\}$, лежащие на границе области возможности движения; и пара отрезков $\Gamma_{3,4}$ — это отрезки $\{\alpha x_2 = \pm\sqrt{4h},\ \omega^2 x_1^2 \leqslant 6h\}$.

Для потенциальной энергии в области W имеем оценку $2V(\mathbf{x}) = \omega^2 x_1^2 - \alpha^2 x_2^2 \leqslant \omega^2 x_1^2 \leqslant 6h$. Оценим скорость движения. Кинетическая энергия T системы имеет вид $T = \dfrac{1}{2}\left(A(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\right)$, где A — матрица кинетической энергии. В области W выполнено $2T = (A(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) = 2h - 2V \leqslant 2h + 2|V| \leqslant 8h$. Тогда

$$\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 \leqslant \frac{8h}{\|A(\mathbf{x})\|} \leqslant ah, \qquad a = \frac{8}{\min\limits_{\mathbf{x} \in W} \|A(\mathbf{x})\|}. \tag{2}$$

Значит, в W выполнено $|\dot{x}_1^2| \leqslant ah$. В нормальных координатах $A(0) = E$ — единичная матрица. Используя неравенство $\omega^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 \leqslant 10h$, получаем, что $\|A(\mathbf{x})\| = 1 + O(\|x\|) = 1 + O(\sqrt{h})$. Тогда $a = \sqrt{8} + O(\sqrt{h}) = 2\sqrt{2}(1 + O(\sqrt{h}))$.

Пусть движение системы попало на отрезок Γ_3. Тогда $\ddot{x}_2 = \alpha\sqrt{4h} - c\dot{x}_1 + f_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Используя (2), получаем $\ddot{x}_2 \geqslant \alpha\sqrt{4h} - c\sqrt{ah} + f_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Пусть $\alpha - c\sqrt{2} > 0$. Положим $\delta = \dfrac{\alpha - c\sqrt{2}}{4} > 0$. Выберем $h_0 > 0$ настолько малым, чтобы при $0 \leqslant h \leqslant h_0$ было $\alpha\sqrt{4} - c\sqrt{a} > 2\delta$. Тогда $\ddot{x}_2 \geqslant 2\delta\sqrt{h} + f_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Выберем $h_0 > 0$ настолько малым, чтобы при $0 \leqslant h \leqslant h_0$ в окрестности W выполнялось неравенство

$|f_2(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})| < \delta\sqrt{h}$. Тогда на отрезке Γ_3 будет $\ddot{x}_2 > \delta > 0$. Аналогично, можно выбрать h_0 настолько малым, что на отрезке Γ_4 будет $\ddot{x}_2 < -\delta < 0$. Это значит, что на $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ выполнено $\ddot{x}_2 \neq 0$, и ускорение $\ddot{\mathbf{x}}$ направлено наружу W.

Нас будут интересовать движения системы начинающиеся на отрезке Γ_1 границы области W. Такие движения будем для краткости называть пробными. Поскольку этот отрезок является частью границы области возможности движения, то начальная скорость пробного движения равна нулю: $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$. Покажем, что утверждения Теоремы 3 выполняются для выбранного значения h_0. Для этого покажем, что найдется пробное движение $\mathbf{x}(t)$, начинающееся внутри отрезка Γ_1, у которого в любой момент времени будет выполнено неравенство $\alpha^2 x_2(t) < 4h$. При таком движении точка $\mathbf{x}(t)$ все время будет находится внутри W.

В начальный момент точка находится на Γ_1, $\alpha^2 x_2(0) < 4h$. Допустим противное. Пусть любое пробное движение с начальным условием $\mathbf{x}(0) \in \Gamma_1$, в какой-то конечный момент $t^*(\mathbf{x}(0)) > 0$) попадает на множество $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Если такой момент не один, то выберем минимальный. Для $\mathbf{x}(0) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3$ и для $\mathbf{x}(0) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_4$ положим $t^*(\mathbf{x}(0)) = 0$. Это означает, $\mathbf{x}(0) \to \mathbf{x}(t^*)$ — это отображение связного множества Γ_1 на несвязное множество $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Но на этом множестве ускорение $\ddot{\mathbf{x}}$ направлено наружу W. Отсюда вытекает, что отображение $\mathbf{x}(0) \to \mathbf{x}(t^*)$ непрерывно. Что невозможно, поскольку в этом случае связное множество Γ_1 непрерывно отображается на несвязное множество $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Теорема 3 доказана.

В многомерном случае схема доказательства Теоремы 2 аналогична. Вводится многомерный аналог множества Γ_1 — замкнутый диск. В предположении об отсутствии локализованных движений строится отображение диска на границу и используется теорема о невозможности ретракции замкнутого диска на свою границу.

Заметим, что если диссипация полная, то при ненулевых скоростях энергия системы будет монотонно уменьшаться и, следовательно, все локализованные движения будут стремиться к положению равновесия.

Литература

1. Болотин С.В. Либрация в системах со многими степенями свободы / С.В. Болотин, В.В. Козлов // ПММ — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 245–250.

2. Козлов В.В. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений / В.В. Козлов В.В., С.Д. Фурта. — М. — Ижевск : РХД, 2001. — 312 с.

3. Милнор Д. Теория Морса / Д. Милнор. — М. : Мир, 1965. — 184 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

А.А. Самсонов (Казань, КФУ)

anton.samsonov.kpfu@mail.ru

В работе исследуется задача о собственных колебаниях изотропной квадратной пластины с присоединённым грузом на упругой опоре с граничными условиями защемления по контуру. Обозначим через $\Omega = (0,1)^2$ квадратную область срединной поверхности пластины, через Γ обозначим границу области Ω, $\overline{\Omega} = [0,1]^2$. Пусть ρ обозначает плотность, $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$ — цилиндрическую жёсткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала пластины, d — толщину пластины. Пусть в точке $z \in \Omega$ присоединён груз массой μ на опоре жёсткости ξ. Собственные колебания системы пластина–груз–опора определяются числами λ и функциями $u(x)$, $x \in \Omega$, из уравнений [1–3]:

$$D\Delta^2 u + \xi\delta(x-z)u = \lambda\,(\rho d + \mu\delta(x-z))u, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = \partial_n u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

$\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$, $\partial_{ij} = \partial_i\partial_j$, $i,j = 1,2$, ∂_n — производная по внешней нормали Γ, $\delta(x-z)$ — дельта–функция, сосредоточенная в точке z.

Через $V = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ обозначим пространство Соболева с нормой $|v|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega(\partial_{ij}v)^2\,dx\right)^{1/2}$. Через $W_2^\alpha(\Omega)$ обозначим пространство Соболева для $\alpha \in (0,4]$. Определим билинейные формы

$$a(u,v) = D\int_\Omega \Delta u\Delta v\,dx, b(u,v) = \rho d\int_\Omega uv\,dx, c(u,v) = u(z)v(z).$$

Сформулируем вариационную постановку задачи (1), (2): найти $\lambda = \lambda(\xi,\mu) \in \mathbb{R}$ и $u = u^{\xi,\mu} \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u,v) + \xi c(u,v) = \lambda(b(u,v) + \mu c(u,v)) \quad \forall v \in V. \tag{3}$$

Сформулируем вспомогательные задачи.

Найти $\lambda = \lambda^{(0)} \in \mathbb{R}$ и $u = u^{(0)} \in V_0 \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V_0, \tag{4}$$

где $V_0 = \{v : v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), v(z) = 0\}$.

Найти $\eta = \eta(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $u = u^{(\xi,\mu)} \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u, v) + \xi\, c(u, v) = \eta\, \mu\, c(u, v) \quad \forall v \in V. \tag{5}$$

Найти $u = u_0 \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u, v) = v(z) \quad \forall v \in V. \tag{6}$$

Существуют собственные значения и собственные функции $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $u_k = u_k^{\xi,\mu}$, $k = 0, 1, \ldots$, задачи (3), $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$, $a(u_i, u_j) + \xi\, c(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(u_i, u_j) + \mu\, c(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots$

Существуют собственные значения и собственные функции $\lambda_k^{(0)}$, $u_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \ldots$, задачи (4), $\lambda_k^{(0)} \to \infty$, $k \to \infty$, $a(u_i^{(0)}, u_j^{(0)}) = \lambda_i^{(0)} \delta_{ij}$, $b(u_i^{(0)}, u_j^{(0)}) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$

Единственное простое собственное значение $\eta(\xi, \mu)$ и единственная нормированная собственная функция $u^{(\xi,\mu)}$, $u^{(\xi,\mu)}(z) = 1/\sqrt{\mu}$, задачи (5) определяются формулами $\eta(\xi, \mu) = \xi/\mu + 1/(\mu\, u_0(z))$, $u^{(\xi,\mu)}(x) = u_0(x)/(\sqrt{\mu}\, u_0(z))$, $x \in \overline{\Omega}$, где $u_0(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, есть единственное решение краевой задачи (6).

Для $\xi \in \overline{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 < \eta(\xi, \mu) - \lambda_0(\xi, \mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$, $u^{(\xi,\mu)} - u_0^{\xi,\mu} \to 0$ в V при $\mu \to \infty$, где $u_0^{\xi,\mu}(z) > 0$.

Основная собственная частота (основной тон) системы пластина–груз–опора приближается с ростом массы груза μ к собственной частоте ω системы опора–груз–опора $\omega = \sqrt{\eta} = \sqrt{(\xi + \varkappa)/\mu}$, $\varkappa = (u_0(z))^{-1}$, где $\varkappa$ и ξ — коэффициенты упругости опор системы опора–груз–опора.

Для $\xi \in \overline{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leqslant \lambda_k(\xi, \mu) - \lambda_k^{(0)} \to 0$ при $\mu \to \infty$, любая последовательность $\mu' \to \infty$ содержит подпоследовательность $\mu'' \to \infty$ такую, что $u_k^{\xi,\mu} \to u_k^{(0)}$ в V, $u_k^{\xi,\mu}(z) = O(1/\mu)$, при $\mu = \mu'' \to \infty$, $b(u_k^{(0)}, u_k^{\xi,\mu}) > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mu \in \overline{\Lambda}$.

Для $\mu \in \overline{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leqslant \lambda_{k+1}^{(0)} - \lambda_k(\xi, \mu) \to 0$ при $\xi \to \infty$, любая последовательность $\xi' \to \infty$ содержит подпоследовательность $\xi'' \to \infty$ такую, что $u_k^{\xi,\mu} \to u_{k+1}^{(0)}$ в V, $u_k^{\xi,\mu}(z) = O(1/\xi)$, при $\xi = \xi'' \to \infty$, $b(u_{k+1}^{(0)}, u_k^{\xi,\mu}) > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, $\xi \in \overline{\Lambda}$.

На множестве $\overline{\Omega}$ определим сетку $x_{ij} = (t_i, t_j)$, $t_i = ih$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, $h = 1/n$, $e_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через V_h пространство конечных элементов Богнера-Фокса-Шмита. Предположим, что точка z совпадает с узлом сетки $z = x_{k_1 k_2}$, $0 < k_1 < n$, $0 < k_2 < n$.

Определим кубические полиномы $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$, $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $f_{2i-1}(x_j) = \delta_{ij}$, $f'_{2i-1}(x_j) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $f_{2i}(x_j) = 0$, $f'_{2i}(x_j) = \delta_{ij}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $f_{2n-1}(x_j) = 0$, $f'_{2n-1}(x_j) = \delta_{nj}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Зададим матрицы

$$A = D(G^{22} \otimes G^{00}) + 2D(G^{11} \otimes G^{11}) + D(G^{00} \otimes G^{22}),$$

$$B = \rho d(G^{00} \otimes G^{00}),\ C = (E_{2k_1-1}(E_{2k_1-1})^\top) \otimes (E_{2k_2-1}(E_{2k_2-1})^\top),$$

где G^{rr} — матрица с элементами $G^{rr}_{ji} = \int_0^1 f_i^{(r)}(x) f_j^{(r)}(x) dx$, $E_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{mi})^\top$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $r = 0, 1, 2$, $m = 2(n-1)$.

Аппроксимация в пространстве V_h задачи (3) эквивалентна матричной задаче

$$(A + \xi C)y = \lambda(B + \mu C)y.$$

Аппроксимация в пространстве V_h задачи (5) эквивалентна матричной задаче

$$(A + \xi C)y = \eta\mu C y,$$

причём для решений справедливы формулы $\eta = \xi/\mu + 1/(\mu(F, Y))$, $y = Y/(\sqrt{\mu}(F, Y))$, $AY = F$, $F = \operatorname{diag} C$.

Пусть λ_k, u_k — решения задачи (3), λ_k^h, u_k^h — аппроксимации в пространстве V_h. Пусть η, u — решения задачи (5), η^h, u^h — аппроксимации в пространстве V_h. Тогда для $\alpha \in (0, 1)$ справедливы оценки: $0 \leqslant \lambda_k^h - \lambda_k \leqslant ch^{2\alpha}$, $|u_k^h - u_k|_2 \leqslant ch^\alpha$, при $b(u_k^h, u_k) > 0$, $0 \leqslant \eta^h - \eta \leqslant ch^{2\alpha}$, $|u^h - u|_2 \leqslant ch^\alpha$. Если $u_k(z) = 0$, то справедливы оценки: $0 \leqslant \lambda_k^h - \lambda_k \leqslant ch^4$, $|u_k^h - u_k|_2 \leqslant ch^2$, при $b(u_k^h, u_k) > 0$.

Литература

1. Андреев Л.В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л.В. Андреев, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Машиностроение, 1988. — 200 с.

2. Базаров М.Б. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем / М.Б. Базаров, И.И. Сафаров, Ю.И. Шокин. — Новосибирск : Издательство СО РАН, Издательство «Студия Дизайн ИНФОЛИО», 1996. — 189 с.

3. Андреев Л.В. Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Издательство МАИ, 2012. — 214 с.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ И УСЛОВИЕ ЛОПАТИНСКОГО

С.И. Сахаров (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
ser341516@yandex.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ выделяется полуограниченная область Ω с негладкой боковой границей Σ из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$, где ω— модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини. В частности, кривая Σ допускает наличие «клювов». В этой области рассматриваются начально-краевые задачи для однородных параболических по Петровскому систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с нулевыми начальными условиями и граничными условиями общего вида.

Методом граничных интегральных уравнений (см. [1]) доказывается теорема об однозначной классической разрешимости в пространстве $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ поставленных задач при минимальных условиях на характер непрерывности правых частей граничных условий. Дается интегральное представление решения. Проверяется, что рассматриваемое условие разрешимости поставленных задач эквивалентно известному условию Лопатинского (см. [2, с. 700]).

Литература

1. Бадерко Е.А. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболических систем на плоскости / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференц. уравн. —2016. — т. 52, № 2. — С. 198–208.

2. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева // М. : Наука, 1967. — 736 с.

О НОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ БЕТА-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ В НАТУРАЛЬНЫХ ТОЧКАХ[1]

Т.А. Сафонова, Б.Д. Бармак
(Архангельск, САФУ, Москва, МГУ)
t.Safonova@narfu.ru, barmakbella@mail.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00128).

Следуя [1], символом $\beta(s)$ обозначим бета-функцию Дирихле, определяемую равенством

$$\beta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s},$$

и напомним, что число $\beta(2)$ принято называть постоянной Каталана.

Известно, что $\beta(1)=\pi/4$ (формула Лейбница), а для чисел $\beta(2n+1)$ и $\beta(2n)$ при $n=1,2,\ldots$ справедливы равенства

$$\beta(2n+1)=\frac{(-1)^n\,(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!}E_{2n},\ \ \beta(2n)=\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{4(2n-1)!}\int\limits_0^1\frac{E_{2n-1}(x)}{\sin(\pi x)}dx,$$

где E_{2n} и $E_{2n-1}(x)$ - числа и многочлены Эйлера соответственно. Из первого равенства следует, что числа $\beta(2n+1)$ являются трансцендентными, а об арифметической природе чисел $\beta(2n)$ ничего не известно.

В работах [2] - [5] нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление сумм некоторых степенных рядов и специальных функций. В частности, для дигамма-функции Эйлера $\psi(a)$ при $0<a<1$, определяемой как логарифмическая производная Г-функции Эйлера, найдены следующие равенства

$$\psi(a)=-\gamma-2\ln 2-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi)+\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(a\pi)-\cos(2a-1)x}{\cos x}dx=$$

$$=-\gamma-\ln 2-\frac{1}{2a}-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi)+\frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin(a\pi)-\sin(2ax))\operatorname{tg}x dx.$$

Из этих равенств следует, что некоторые линейные комбинации чисел $\beta(2n+1)$ и $\beta(2n)$ удовлетворяют определённым тождествам. Найденные равенства сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *При $m=1,2,\ldots$ справедливы равенства*

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2m-2n)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\beta(2n+1)=0$$

и

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n)=\frac{1}{2(2m-1)!}\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{x^{2m-1}}{\sin x}dx.$$

Пусть a является правильной рациональной дробью, т.е. $a=p/q$, где p, $q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. В работе [5] установлено, что в этом случае справедливо равенство

$$\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}\,dx=2\cos\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q},$$

из которого можно извлечь, что при любом $m\in\mathcal{N}$

$$\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{(\sin(ax))^{2m-1}}{\sin x}dx=\sum_{k=1}^{q-1}(-1)^k\sin^{2m-1}\frac{kp\pi}{q}\ln\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q}}.$$

С другой стороны, второе равенство из теоремы 1, очевидно, можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n)=$$

$$=\frac{1}{2(2m-1)!}\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^{2m-1}}\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{(\sin(ax))^{2m-1}}{\sin x}dx.$$

Положив далее $a=a_n=p_n/q_n$, где a_n - последовательность положительных рациональных чисел, стремящаяся к 0 при $n\to+\infty$, получим, что

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n)=$$

$$=\frac{1}{2(2m-1)!}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1}\sum_{k=1}^{q_n-1}(-1)^k\sin^{2m-1}\frac{kp_n\pi}{q_n}\ln\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q_n}}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{4q_n}}.$$

В частности, если положить $a_n=1/(2n)$, то получим, что

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n)=$$

$$= \frac{1}{2(2m-1)!} \lim_{n\to+\infty} (2n)^{2m-1} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \sin^{2m-1} \frac{k\pi}{2n} \ln \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{8n}}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{8n}}.$$

Это равенство при $m = 1$ совпадает с полученным нами ранее в [5] предельным соотношением для $\beta(2)$, т.е. с равенством

$$\beta(2) = \lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \sin \frac{k\pi}{2n} \ln \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{8n}}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{8n}}.$$

Литература

1. Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun .— New York. : Dover Publ., 1972.

2. Мирзоев К.А. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // ДАН. — 2018. — Т. 3, № 1. — С. 329–354.

3. Мирзоев К.А. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Труды ММО. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 157–177.

4. Мирзоев К.А. Интегральное представление сумм некоторых рядов, связанных со специальными функциями / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Математические заметки. — 2020. — Т. 108, № 4. — С. 632–637.

5. Мирзоев К.А. Вокруг теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Алгебра и анализ. — 2023. — Т. 35, № 2. — С. 86–106.

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ОТРЕЗКУ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим интеграл

$$If = I(f;x) = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{t-x}dt, \ -1 < x < 1, \qquad (1)$$
$$p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \alpha > -1, \ \beta > -1,$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, где $f(x)$ — заданная плотность интеграла.

Через $H_{2n-1}f = H_{2n-1}(f,x)$ обозначим интерполяционный полином степени не более $2n-1$ типа Эрмита [1], удовлетворяющий условиям $H_{2n-1}(f,x_k) = f(x_k)$, $H'_{2n-1}(f,x_k) = \beta_k$, $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ $(k=\overline{1,n})$:

$$H_{2n-1}f = H_{2n-1}(f,x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(A_k(x)f(x_k)+B_k(x)\beta_k),$$

$$A_k(x) = \frac{(1-xx_k)T_n^2(x)}{(x-x_k)^2},\ B_k(x) = \frac{(1-x_k^2)T_n^2(x)}{x-x_k},$$

$$T_n(x) = \cos n\arccos x.$$

При $\beta_k = 0$ получаем интерполяционный полином Эрмита-Фейера.

Аппроксимируя плотность $f(x)$ интеграла (1) полиномом $H_{2n-1}f$, получим квадратурную формулу

$$If = I(H_{2n-1}f;x)+R_nf = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{A}_k(x)f(x_k)+\widetilde{B}_k(x)\beta_k)+R_nf, \quad (2)$$

где $\widetilde{A}_k(x) = I(A_k;x)$, $\widetilde{B}_k(x) = I(B_k;x)$, а R_nf — остаточный член.

Найдем коэффициенты квадратурной формулы (2)

$$\widetilde{A}_k(x) = \int_{-1}^{1}p(t)\frac{A_k(t)}{t-x}dt = \int_{-1}^{1}p(t)\frac{A_k(t)-A_k(x)}{t-x}dt+A_k(x)I_0(x), \quad (3)$$

где интеграл $I_0(x) = I(1;x)$ вычисляется точно [2]

$$I_0(x) = \int_{-1}^{1}\frac{p(t)}{t-x}dt = \pi\operatorname{ctg}\alpha\pi p(x) - 2^{\alpha+\beta}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}F\left(1,-\alpha-\beta,1-\alpha,\frac{1-x}{2}\right),$$

$\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ — гипергеометрическая функция. К интегралу в (3) применим квадратурную формулу Гаусса с узлами x_i и коэффициентами $D_i (i=\overline{1,n})$:

$$\int_{-1}^{1}p(t)\frac{A_k(t)-A_k(x)}{t-x}dt = \sum_{i=1}^{n}D_i\frac{A_k(x_i)-A_k(x)}{x_i-x}.$$

Аналогично вычисляются коэффициенты

$$\widetilde{B}_k(x) = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{B_k(t) - B_k(x)}{t - x}dt + B_k(x)I_0(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{A_k(x_i) - A_k(x)}{x_i - x} + B_k(x)I_0(x),$$

где F_i — коэффициенты квадратурной формулы Гаусса.

Пусть $H_\alpha(M, [-1, 1])$ — класс функций $f(x)$, определенных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$. Далее, положим $H_\alpha^{(r)}(M, [-1, 1]) = \{f : f^{(r)}(x) \in H^\alpha(M, [-1, 1])\}$, $x \in [-1, 1]$, $r = 0, 1, ...$

С помощью результатов работ [3], [4], методом работы [2], устанавливаются

Теорема 1. *Если $f(x) \in H_\alpha(M, [-1, 1])$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\beta_k = 0$, то для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива равномерная оценка*

$$\|R_n f\|_C = O\left(\frac{\ln^{1+\alpha} n}{n^\alpha}\right), \ n \geqslant 4. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если $f(x) \in H_\alpha^{(r)}(M, [-1, 1])$, $r = 1, 2, ...$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\beta_k = f'(x_k)$, то для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива равномерная оценка*

$$\|R_n f\|_C = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha-1}}\right), \ r + \alpha > 1.$$

Оценка (4) остается справедливой и для квадратурной формулы

$$If = I(H_{2n-1}f; x) + R_n f = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{L_k(x_i) - L_k(x)}{x_i - x} + L_k(x)I_0(x) + R_n f,$$

где Q_i — коэффициенты квадратурной формулы Гаусса, построенной аппроксимацией плотности интеграла (1), интерполяционным полиномом Эрмита-Фейера по узлам x_k $(k = \overline{1, n})$ — нулям полинома $P_n(x)$ Лежандра порядка n, если выполнены условия $f(\pm 1) =$

$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx$, которые являются необходимым и достаточным условием [5] равномерной сходимости интерполяционного процесса H_{2n-1} f для непрерывной на $[-1,1]$ функции $f(x)$.

Аналогично строятся и исследуются квадратурные формулы для гиперсингулярного интеграла

$$\int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{(t-x)^q}dt,\ -1 < x < 1,$$

$$p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \alpha > -1,\ \beta > -1,\ q > 1.$$

Литература

1. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах / А.Х. Турецкий. – Минск: «Вышэйшая школа» — 1968. —320 с.

2. Шешко М.А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла / М.А. Шешко // Изв. вузов. Матем. — 1976. — № 12. С. 108-118.

3. Moldovan E. Observation on certain generalized interpolation methods / E. Moldovan // Acad. Repub. Pop. Romine. Bul. Sti. Sect. Sti. Mat. Fiz. 6. — 1954. — P. 477–482.

4. Prasad J. On Hermite and Hermite-Fejer interpolation of higher order / J. Prasad // Demonstratio Math. — Vol. 26, №2. — 1993. — P. 413–425.

5. Szabados J. On the convergence Hermite-Fejer interpolation based on the roots of the Legendre polynomials / J. Szabados // Acta Sci. Math. (Szeged), 34. — 1973. — P. 367–370.

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

П.С. Соловьёв (Казань, КФУ)

pavel.solovev.kpfu@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная числовая прямая, V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v) и нормой $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$, $u, v \in V$. Зададим конус K в пространстве V, то есть множество, удовлетворяющее условиям: $K \cap (-K) = \{0\}$; если $u, v \in K$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, то $u + v \in K$, $\alpha v \in K$. Предположим, что для любого элемента $v \in V$ существуют единственные элементы $v^+, v^- \in K$, для которых справедливо равенство $v = v^+ - v^-$. Обозначим $|v| = v^+ + v^-$.

Для заданного $\tau > 0$ обозначим $\Lambda = (\tau, \infty)$, и введём при фиксированном $\eta \in \Lambda$ симметричные билинейные формы $a(\eta) : V \times V \to \mathbb{R}$ и $b(\eta) : V \times V \to \mathbb{R}$ такие, что $\alpha_1(\eta)\|v\|^2 \leqslant a(\eta, v, v) \leqslant \alpha_2(\eta)\|v\|^2$ для любого $v \in V$, $b(\eta, v, v) > 0$ для $v \in V \setminus \{0\}$, и $b(\eta, v_j, v_j) \to b(\eta, v, v)$ при $j \to \infty$, если $v_j \rightharpoonup v$ в V при $j \to \infty$. Здесь $\alpha_1(\eta)$, $\alpha_2(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, есть положительные непрерывные функции, символом $\rightharpoonup$ обозначена слабая сходимость в пространстве V. Предположим, что $\|a(\eta) - a(\mu)\| \to 0$, $\|b(\eta) - b(\mu)\| \to 0$, при $\eta \to \mu$. Для нормы симметричной билинейной формы $c : V \times V \to \mathbb{R}$ применяется определение $\|c\| = \sup\limits_{v \in V,\, \|v\|=1} |c(v, v)|$. При фиксированном $\eta \in \Lambda$ введём множество $\overset{\bullet}{K}(\eta) = \{u : u \in K, b(\eta, u, v) > 0\ \forall v \in K \setminus \{0\}\}$. Предположим, что множество $\overset{\bullet}{K} = \overset{\bullet}{K}(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, не пусто и не зависит от $\eta \in \Lambda$, $a(\eta, v^+, v^-) = b(\eta, v^+, v^-) = 0$ для любых $\eta \in \Lambda$, $v \in V$, $b(\eta, u, v) \geqslant 0$ для любых $\eta \in \Lambda$, $u, v \in K$. Предположим, кроме того, что если $\eta \in \Lambda$, $u \in K \setminus \{0\}$, $a(\eta, u, v) \geqslant 0$ для любого $v \in K$, то $u \in \overset{*}{K}$, где $\overset{*}{K}$ есть непустое подмножество множества $\overset{\bullet}{K}$.

Сформулируем нелинейную спектральную задачу

$$\lambda \in \Lambda, u \in V \setminus \{0\} :\ a(\lambda, u, v) = b(\lambda, u, v)\ \forall v \in V. \tag{1}$$

При фиксированном $\eta \in \Lambda$ введём параметрическую спектральную задачу: найти $\gamma(\eta) \in \mathbb{R}, w \in V \setminus \{0\}$, такие, что $a(\eta, w, v) = \gamma(\eta) b(\eta, w, v)$ для любого $v \in V$. Существуют конечнократные собственные значения $\gamma_k = \gamma_k(\eta)$, $k = 1, 2, \ldots$, параметрической задачи, занумерованные с учётом кратности, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_k \leqslant \ldots$, $\gamma_k \to \infty$ при $k \to \infty$, и соответствующие собственные элементы $w_k = w_k(\eta)$, $k = 1, 2, \ldots$, $w_1 \in \overset{*}{K}$, $a(\eta, w_i, w_j) = \gamma_i \delta_{ij}$, $b(\eta, w_i, w_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Обозначим через $R(\eta, v) = a(\eta, v, v)/b(\eta, v, v)$, $\eta \in \Lambda$, $v \in V \setminus \{0\}$, отношение Рэлея. Предположим $R(\eta, v) > R(\mu, v)$ при $\eta < \mu$, $\eta, \mu \in \Lambda$, $v \in V \setminus \{0\}$, $R(\eta, v) \to 0$ при $\eta \to \infty$, $\eta \in \Lambda$, $v \in V \setminus \{0\}$. Положим $\gamma_1(\tau + 0) = \lim\limits_{\eta \to \tau} \gamma_1(\eta)$.

Теорема 1. *Существует единственное положительное простое минимальное собственное значение λ_1 задачи (1), $\gamma_1(\lambda_1) = 1$, тогда и только тогда, когда $\gamma_1(\tau + 0) > 1$. Этому собственному значению λ_1 соответствует единственный нормированный положительный собственный элемент $|u_1| \in \overset{*}{K}$, $u_1 = w_1(\eta)$ при $\eta = \lambda_1$, $a(\lambda_1, u_1, u_1) = 1$, $b(\lambda_1, u_1, u_1) = 1$.*

Определим конечномерные подпространства V_h пространства V размерности $N = N_h$ такие, что для любого элемента v из V имеет место сходимость $\varepsilon_h(v) = \inf\limits_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \to 0$ при $h \to 0$. Предположим, что существуют элементы $\varphi_i \in K \cap V_h$, $i = 1, 2, \ldots, N$, образующие базис пространства V_h.

Положим $\mathbb{H} = \mathbb{R}^N$. Через $J : \mathbb{H} \to V_h$ обозначим линейное взаимно однозначное отображение, реализующее изоморфизм линейных пространств $\mathbb{H}$ и V_h, и будем писать $v^h = J(z)$ при $z \in \mathbb{H}$, $v^h \in V_h$.

Введём следующие обозначения. Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)^\top$ есть вектор из $\mathbb{H}$. Тогда будем писать $z \geqslant 0$, если $z_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$; $z > 0$, если $z_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Аналогично будем писать $C > 0$ для квадратной матрицы с вещественными положительными элементами $C_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, а также $C \geqslant 0$ при $C_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$.

Обозначим через $\mathbb{K}$ телесный конус векторов из $\mathbb{H}$ с неотрицательными координатами, то есть $\mathbb{K} = \{z : z \in \mathbb{H}, z \geqslant 0\}$. Обозначим через $\overset{\bullet}{\mathbb{K}}$ множество внутренних элементов конуса $\mathbb{K}$, то есть $\overset{\bullet}{\mathbb{K}} = \{z : z \in \mathbb{H}, z > 0\}$. Теперь введём телесный конус в пространстве V_h по правилу $K_h = \{v^h : v^h = J(z), z \in \mathbb{K}\}$ и множество его внутренних элементов $\overset{\bullet}{K}_h = \{v^h : v^h = J(z), z \in \overset{\bullet}{\mathbb{K}}\}$.

Предположим дополнительно, что выполнено следующее условие $A^{-1}(\eta) > 0$, $\eta \in \Lambda$, для симметричной положительно определённой матрицы $A(\eta)$ с элементами $a_{ij}(\eta) = a(\eta, \varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $\eta \in \Lambda$.

Введём конечномерную нелинейную спектральную задачу

$$\lambda^h \in \Lambda, u^h \in V_h \setminus \{0\} : \; a(\lambda^h, u^h, v^h) = b(\lambda^h, u^h, v^h) \; \forall v^h \in V_h. \qquad (2)$$

Для фиксированного $\eta \in \Lambda$ сформулируем параметрическую спектральную задачу: найти $\gamma^h(\eta) \in \mathbb{R}, w^h \in V_h \setminus \{0\}$, удовлетворяющие уравнению $a(\eta, w^h, v^h) = \gamma^h(\eta) b(\eta, w^h, v^h)$ для любого $v^h \in V_h$. Существуют собственные значения $\gamma_k^h = \gamma_k^h(\eta)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $0 < \gamma_1^h < \gamma_2^h \leqslant \ldots \leqslant \gamma_N^h$, и соответствующие собственные элементы $w_k^h = w_k^h(\eta)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $w_1^h \in \overset{\bullet}{K}_h$, $a(\eta, w_i^h, w_j^h) = \gamma_i^h \delta_{ij}$, $b(\eta, w_i^h, w_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Положим $\gamma_i^h(\tau + 0) = \lim\limits_{\eta \to \tau} \gamma_i^h(\eta)$.

Теорема 2. *Существует единственное положительное простое минимальное собственное значение λ_1^h задачи (2), $\gamma_1^h(\lambda_1^h) = 1$, тогда и только тогда, когда $\gamma_1^h(\tau{+}0) > 1$. Этому собственному значению λ_1^h соответствует единственный нормированный положи-*

тельный собственный элемент $|u_1^h| \in \overset{\bullet}{K}_h$, $u_1^h = w_1^h(\eta)$ *при* $\eta = \lambda_1^h$, $a(\lambda_1^h, u_1^h, u_1^h) = 1$, $b(\lambda_1^h, u_1^h, u_1^h) = 1$.

Теорема 3. *Если* $\gamma_1(\tau + 0) > 1$, *то* $\lambda_1^h \to \lambda_1$ *при* $h \to 0$, $\lambda_1^h \geqslant \lambda_1$, $\|u_1^h - u_1\| \to 0$ *при* $h \to 0$, *для* $u_1 = |u_1|$, $u_1^h = |u_1^h|$.

Предположим, что существуют функции $\alpha_3(\eta, \mu)$, $\beta_3(\eta, \mu)$, $\eta, \mu \in \Lambda$, такие, что $|a(\eta, v, v) - a(\mu, v, v)| \leqslant \alpha_3(\eta, \mu)\, |\eta - \mu|\, \|v\|^2$, $|b(\eta, v, v) - b(\mu, v, v)| \leqslant \beta_3(\eta, \mu)\, |\eta - \mu|\, \|v\|^2$ для любого $v \in V$. При $\eta, \mu \in \Lambda$ обозначим $\Delta(\eta, \mu) = (\gamma_1^h(\eta) - \gamma_1^h(\mu))/(\eta - \mu)$.

Теорема 4. *Пусть* $\gamma_1(\tau + 0) > 1$, *и существует* $\varkappa > 0$ *такое, что* $-\Delta(\lambda_1, \eta) \geqslant c_0 > 0$, $\eta \in (\lambda_1, \lambda_1 + \varkappa)$. *Тогда* $0 \leqslant \lambda_1^h - \lambda_1 \leqslant c\,\varepsilon_h^2(u_1)$, $\|u_1^h - u_1\| \leqslant c\,\varepsilon_h(u_1)$, *для* $u_1 = |u_1|$, $u_1^h = |u_1^h|$.

Полученные результаты могут быть применены для исследования и решения прикладных задач физики плазмы [1,2].

Литература

1. Абдуллин И.Ш. Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения / И.Ш. Абдуллин, В.С. Желтухин, Н.Ф. Кашапов. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2000. — 348 с.

2. Желтухин В.С. О разрешимости одной нелинейной спектральной задачи теории высокочастотных разрядов пониженного давления / В.С. Желтухин // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 5. — С. 26–31.

О ПОСТРОЕНИИ БАРЬЕРОВ ДЛЯ МЯГКОГО ЛАПЛАСИАНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

А.С. Спивак (Воронеж, ВГУ)
alexs1nger@yandex.ru

Под стратифицированным множеством понимается связное подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа гладких многообразий - страт σ_{kj} - различных размерностей k, специальным образом примыкающих друг к другу. Множество Ω представляется в виде объединения $\Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, где Ω_0 – открытое, связное подмножество Ω, составленное из страт, замыкание которого совпадает с Ω. На разбитом таким образом множестве Ω задаётся задача Дирихле.

$$\tilde{\Delta} u = 0, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega_0} = \varphi. \qquad (2)$$

Здесь $\tilde{\Delta}$ так называемый мягкий лапласиан; на стратах старшей размерности d он совпадает с классическим, на стратах σ_{d-1i} размерности $d-1$ он оказывается суммой нормальных дифференцирований $\partial u/\partial\vec{\nu}$ по всем векторам $\vec{\nu}$, направленным внутрь страт σ_{dj}, примыкающих к σ_{d-1i}. В стратах остальных размерностей он действует как нулевой оператор.

Как известно, одним из самых изящных методов доказательства разрешимости задачи Дирихле для обычного оператора Лапласа является метод Перрона. Недавно этот метод был распространён на случай задачи Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Доказано, что при условии регулярности границы, задача (1),(2) имеет классическое решение $u \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega_0)$. Решением является верхняя огибающая

$$u(X) = \sup_{v \in S_\varphi} v(X),$$

где S_φ множество всех субгармонических в смысле оператора $\tilde{\Delta}$ функций, принимающих на границе $\partial\Omega_0$ значения, не превосходящие предписанных краевым условием.

На данный момент вопрос о построении барьеров в общем случае не решён. Это не удаётся сделать даже в случае, если все страты, составляющие границу, являются плоскими. В докладе мы предложим способ их построения в случае двумерного стратифицированного множества.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОДБОРА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ СЕМЕЙСТВА TSP И ЕГО СВОЙСТВАХ

А.В. Степанов, А.Г. Чуновкина
(Санкт-Петербург, ВНИИМ им. Д.И. Менделеева)
stepanov17@yandex.ru

Рассматривается семейство TSP (two-sided power, двусторонних степенных) распределений непрерывной случайной величины [1], имеющих плотность вида

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p}{r_1+r_2}\left(1+\frac{x-x_0}{r_1}\right)^{p-1}, & x_0-r_1<x<x_0, \\ \frac{p}{r_1+r_2}\left(1-\frac{x-x_0}{r_2}\right)^{p-1}, & x_0 \leqslant x < x_0+r_2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{1}$$

здесь параметрами распределения являются $p > 0$, $x_0 \in \mathcal{R}$, $r_{1,2} \geqslant 0$ ($r_1 + r_2 > 0$). Случай $p = 1$ отвечает равномерному распределению, $p = 2$ — треугольному, а при $p = 3$ распределение достаточно близко к усеченному нормальному. Частным случаем (1) является симметричное семейство распределений, которое может быть получено при $r_1 = r_2 = r$.

Несмотря на простой вид, данное семейство распределений достаточно широко и разнообразно (авторы [1] демонстрируют это, используя диаграмму соотношения моментов для его сравнения с Бета-распределением). В то же время, оно имеет простое математическое описание, облегчающее генерацию случайных значений и применение метода Монте-Карло (например, для вывода статистических критериев [2]). Указанные свойства позволяют рекомендовать данное распределение для решения разнообразных практических задач, например, для трансформирования неопределенностей измерения методом статистического моделирования [3]. Важным шагом при этом является подбор вероятностной модели (в данном случае — параметров (1)), опираясь на экспериментальные данные.

В работе [1] предложена процедура получения оценок параметров распределения методом максимального правдоподобия. В случае, когда оценивается более одного параметра (1) (обычно — параметра степени p), получение указанных оценок требует применения численных методов.

В данной работы в качестве альтернативы рассматривается метод выбора наиболее подходящего распределения из семейства (1) на основе обратного отображения, предложенный в работе [4], а именно: для выборки экспериментальных данных x_i из конечного множества S наборов параметров распределений семейства (1) выбирается набор параметров, доставляющий на S минимум функционалу $\sum_{i=1}^{n}\left(F_s^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)-x_{(i)}\right)^2$, где $x_{(i)}$ — вариационный ряд для рассматриваемой выборки, n — ее длина, и $F = F_s$ — функция распределения (1) (отвечающая набору параметров $s \in S$); обратная к ней

F^{-1} имеет вид:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} x_0 - r_1 + \sqrt[p]{r_1^{p-1}(r_1 + r_2)y}, & 0 \leqslant y \leqslant \frac{r_1}{r_1+r_2}, \\ x_0 + r_2 - \sqrt[p]{r_2^{p-1}(r_1 + r_2)(1-y)}, & \frac{r_1}{r_1+r_2} < y \leqslant 1. \end{cases}$$

Помимо простоты реализации, указанный метод имеет то преимущество, что, наряду с семейством TSP позволяет рассматривать альтернативные законы распределения для выбора наиболее подходящего (например, усеченное нормальное).

Для предложенного метода выбора распределения оценивалась его эффективность методом Монте-Карло. Также проводилось его сравнение с методом максимального правдоподобия (ММП) для случая, когда оценивается только параметр степени p (рассматривался диапазон $p \geqslant 1$ и различные значения длины выборки n). Было установлено, что оба алгоритма дают смещенную вправо оценку $\hat{p}$, причем смещение для оценки, полученной с помощью ММП, и асимметрия соответствующего распределения выше (но дисперсия распределения оценки несколько ниже). В целом, можно утверждать, что рассматриваемые методы дают сопоставимые оценки параметра p. Проводилась количественная оценка чувствительности метода выбора параметра p для различных n, в качестве тривиальной меры которой рассматривалась вероятность выбора искомого значения p в качестве оценки, при наличии альтернативного (смещенного) значения параметра. Показано, что указанная мера чувствительности, рассматриваемая как функция смещения параметра p, асимметрична (близкие распределения разделяются с более высокой вероятностью, если альтернативное распределение отвечает меньшему значению параметра p).

В общем случае предложены критерии, позволяющие сузить множество S наборов параметров семейства (1), сократив количество альтернатив для выбора. Указанные критерии опираются на выборочные статистики для экспериментальных данных, в частности, выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Также для распределения (1) получены выражения для интервалов охвата (а в симметричном случае — и коэффициента охвата), рассмотрены различные способы их построения (в том числе, кратчайших интервалов охвата).

Литература

1. Kotz S. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications / S. Kotz, J.R. Van Dorp — World Scientific Publishing, 2004.

2. Stepanov A.V. On testing of the homogeneity of variances for two-sided power distribution family / A.V. Stepanov, A.G. Chunovkina // Accreditation and Quality Assurance. — 2023. — no. 28. — P. 129–137.

3. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement — Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM 101:2008. — 2008.

4. Тырсин А.Н. Метод подбора наилучшего закона распределения непрерывной случайной величины на основе обратного отображения / А.Н. Тырсин // Вестник ЮУрГУ, Серия Математика. Механика. Физика. — 2017. — Т. 9, вып. 1. — С. 31–38.

О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ И БАЗИСНОСТИ ЖОРДАНОВЫХ ЦЕПОЧЕК КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ

Сухочева Л.И. (Воронеж, ВГУ)

l.suhocheva@yandex.ru

Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, A, B, C — непрерывные самосопряженные операторы, действующие в H: A — вполне непрерывный оператор, $B = B_1 + B_2$, где B_1 — равномерно положительный оператор, B_2 — вполне непрерывный оператор. Рассмотрим квадратичный операторный пучок:

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C.$$

Будем предполагать, что спектр оператора $-B_1^{-1}C$ имеет не более счетного множества точек сгущения, и существует хотя бы одна точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, являющаяся регулярной для пучка L.

Пусть $\lambda (\neq \infty)$ — собственное значение пучка L ($\lambda \in \sigma_p(L)$), $(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ —- соответствующая ему жорданова цепочка.

В $\hat{H} = H \oplus H$ по элементам этой жордановой цепочки построим векторы:

$$(\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 + x_0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_p \\ \lambda x_p + x_{p-1} \end{pmatrix}) \qquad (1)$$

Будем говорить, что жордановы цепочки пучка L образуют двукратно полную в H систему, если в пространстве $\hat{H}$ будет полна система векторов вида (1), где λ пробегает все множество $\sigma_p(L)$. Если из векторов этой системы можно выбрать базис в $\hat{H}$, то будем говорить, что система жордановых цепочек пучка L дважды базисна в H. Заметим, что система жордановых цепочек пучка L двукратно полна и дважды базисна в H только одновременно.

Необходимое и достаточное условие двукратной полноты и дважды базисности системы корневых векторов операторного пучка приведем в терминах невырожденности системы собственных и присоединенных векторов линеаризатора $\Phi : \hat{H} \to \hat{H}$, «отражающего» спектральные свойства пучка L.

Введем обозначения:

$$\zeta(L) = \text{з.л.о.}\{\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 + x_0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_p \\ \lambda x_p + x_{p-1} \end{pmatrix}, \lambda \in \sigma_p(L)\},$$

$$\zeta_0(L) = \text{з.л.о.}\{\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda x_0 \end{pmatrix}, \lambda \in \sigma_p(L)\}$$

Теорема 1. *1) $\zeta_0(L) = \hat{H}$ тогда и только тогда, когда у собственных векторов пучка L, отвечающих $\overline{\lambda} \neq \lambda_0$, отсутствуют присоединенные и $Ker(\varPhi - \mu I)$ невырожденное подпространство при $\mu \in \sigma_p(\varPhi)$ $(\mu = f(\lambda))$.*

2) $\zeta(L) = \hat{H}$ тогда и только тогда, когда линейная оболочка корневых подпространств $N(\mu_1), N(\mu_2), \dots, N(\mu_n)$ оператора $\varPhi$ невырождена, где $\mu_i \in \sigma_p(\varPhi), \mu_i \in \mathbb{R}$, $Ker(\varPhi - \mu_i I)$ — вырожденное подпространство.

3) Если $\zeta_0(L) = \hat{H}$ (соответственно $\zeta(L) = \hat{H}$), то в $\hat{H}$ существует почти ортонормированный базис Рисса [1], составленный из векторов $\zeta_0(L)$ (соответственно $\zeta(L)$). Если $\zeta_0(L) = \hat{H}$, то в $\hat{H}$ существует ортонормированный базис, составленный из векторов $\zeta_0(L)$ тогда и только тогда, когда $\sigma_p(L) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы основано на хорошо известном результате Т.Я. Азизова, И.С. Иохвидова о полноте и базисности системы корневых векторов операторов в пространстве Понтрягина [2].

Невырожденность и ортогональность понимаются относительно некоторой индефинитной метрики, введенной в $\hat{H}$.

Литература

1. Азизов Т.Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. / Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. // — М. : Наука, 1986. — 352 с.

2. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Критерий полноты и базисности системы корневых векторов вполне непрерывного J-самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_к$ / Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. // Мат. Исследования — 1971, — Т. VI, вып. 1(19) — С. 158-162

ДИНАМИКИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Тао С. (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
86taosinian@gmail.com

Эволюционная система Буссинеска имеет вид [1]

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2v_x, \\ v_t = -v_{xx} + 2uu_x - 2u_y \end{cases}$$

и является одним из широко известных уравнений математической физики с двумя пространственными переменными. Исключая функцию v из этой системы, мы получим (с точностью до преобразования растяжения) не менее известное уравнению Кадомцева — Петвиашвили.

Обычно для исследования решений исходной эволюционной системы ищут его симметрии и затем пытаются использовать их для того, чтобы найти инвариантные решения. Метод конечномерных динамик полностью противоположен [2,3]. А именно, мы ищем вполне интегрируемое распределение на пространстве джетов, которое имеет исходный эволюционный поток в виде симметрии. Данный метод применяется нами для построения многопараметрических семейств решений системы Буссинеска.

Пусть J^1 — пространство 1-джетов гладких функций из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ с каноническими координатами $x_1, x_2, v^1_{00}, v^2_{00}, v^1_{10}, v^2_{10}, v^1_{01}, v^2_{01}$. На этом пространстве дифференциальными 1-формами

$$\begin{aligned} \omega^1_{00} &= dv^1_{00} - v^1_{10}dx - v^1_{01}dy, & \omega^2_{00} &= dv^2_{00} - v^2_{10}dx - v^2_{01}dy, \\ \omega^1_{10} &= dv^1_{10}, & \omega^2_{10} &= dv^2_{10} - \eta dx - \delta dy, \\ \omega^1_{01} &= dv^1_{01}, & \omega^2_{01} &= dv^2_{01} - \delta dx - g(y)dy. \end{aligned}$$

зададим вполне интегрируемое 2-мерное распределение P. Здесь δ, η — произвольные числа и $g(y)$ — произвольная функция. Этому распределению отвечает система дифференциальных уравнений конечного типа с решениями

$$v^1(x,y) = C_1 x + C_2 y + C_3, \quad v^2(x,y) = \frac{1}{2}\eta x^2 + C_4 x + \delta x y + g(y),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

Уравнение Буссинеска порождает поток на пространстве J^1, задаваемый векторным полем

$$\begin{aligned} S =& 2v^2_{10}\frac{\partial}{\partial v^1_{00}} + (2v^1_{00}v^1_{10} - 2v^1_{01} - \eta)\frac{\partial}{\partial v^2_{00}} + 2\eta\frac{\partial}{\partial v^1_{10}} \\ &+ 2\delta\frac{\partial}{\partial v^1_{01}} + 2(v^1_{10})^2\frac{\partial}{\partial v^2_{10}} + 2v^1_{10}v^1_{01}\frac{\partial}{\partial v^2_{01}}. \end{aligned}$$

Это векторное поле является тасующей симметрией [4] распределения P. Действуя потоком этого векторного поля на функции $v^1(x,y), v^2(x,y)$, мы найдём семейство точных решений уравнения Буссинеска:

$$\begin{cases} u(t,x,y) =& \frac{4}{3}\eta^2 t^4 + \frac{8}{3}\eta t^3 C_1 + 2\left(C_1^2 t^2 + (\eta x + \delta y)t + C_4 t\right) \\ & + C_1 x + C_2 y + C_3; \\ v(t,x,y) =& \frac{8}{9}\eta^3 t^6 - \eta t + \frac{1}{2}\eta x^2 + \frac{8}{3}\eta^2 t^3 x - 2\delta t^2 + \frac{8}{3}\eta\delta t^3 y + g(y) \\ & + \delta x y + 2t^2 C_1 C_4 \\ & + (4t^2\eta x + 2\delta t^2 y + \frac{8}{3}\eta^2 t^5)C_1 + (2\eta t^2 y - 2t)C_2 + 2\eta t^2 C_3 \\ & + (x + \frac{8}{3}\eta t^3)C_4 + 2C_1 C_2 t y + \frac{4}{3}t^3 C_1^3 + 2t C_1 C_3 \\ & + \left(\frac{10}{3}\eta t^4 + 2tx\right)C_1^2. \end{cases}$$

Литература

1. Encyclopedia of integrable systems. A.B. Shabat (editor-in-chief). — 2008. — `http://home.itp.ac.ru/adler/E/e.pdf`

2. Kushner A.G. Dynamics of evolutionary differential equations with several spatial variables / A.G. Kushner // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, No. 2. — P. 335–346.

3. Kushner A.G. Evolutionary systems and flows on solutions spaces of finite type equations / A.G. Kushner, T. Sinian // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, No. 9. — P. 3945–3951.

4. Kushner A. G. Contact geometry and nonlinear differential equations / A. G. Kushner, V. V. Lychagin, V. N.Rubtsov. // Cambridge: Cambridge University Press. — 2007. — xxii+496 pp.

СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА В ТРЕХМЕРНОМ РЕШЕТКЕ. ТРЕТЬЕ ТРИПЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ.

С.М. Ташпулатов, Р.Т. Парманова (Ташкент, ИЯФ)
toshpul@mail.ru, sadullatashpulatov@yandex.com

We consider the four–electron system in the impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectrum and discrete spectra of the system for third triplet state.

Hamiltonian of the considering system has the form [1]

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}+$$

$$+(A_0-A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a_{0,\gamma}a^+_{\tau,\gamma})+$$

$$+(U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \qquad (1)$$

Here $A(A_0)$ is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B > 0(B_0 > 0)$ is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites, $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, ..., \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, $U(U_0)$ is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; γ is the spin index, $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. The third triplet state corresponds four–electron bound states (or antibound states) to the basis functions: ${}^3t^1_{p,q,r,k} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^3\mathcal{H}^1_t$, corresponding to the third triplet state is the set of all vectors of the form

$$^{3}\psi_t^1 = \sum_{p,q,r,k \in Z^\nu} f(p,q,r,k)^3 t^1_{p,q,r,k}, \qquad f \in l_2^{as},$$

where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $l_2((Z^\nu)^4)$. In this case, the Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $^3\mathcal{H}_t^1$. Let φ_0 be the vacuum vector in the antisymmetrical Fock space $^3\mathcal{H}_t^1$. Let $^3H_t^1$ be the restriction H to the subspace $^3\mathcal{H}_t^1$. The third triplet state corresponds the free motions of four–electrons in the lattice and their interactions. Let $\varepsilon_1 = A_0 - A, \varepsilon_2 = B_0 - B, \varepsilon_3 = U_0 - U$.

In the quasimomentum representation, the operator $^3H_t^1$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ be the formula

$$^3\widetilde{H}_t^1\ ^3\psi_t^1 = h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta) + U\int_{T^\nu}[f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta)+$$

$$+f(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta) = f(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s)]ds + \varepsilon_1[\int_{T^\nu} f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+$$

$$+\int_{T^\nu} f(\lambda,l,\gamma,\theta)dl + \int_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\xi,\theta)d\xi + \int_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\gamma,\eta)d\eta]+ \qquad (2)$$

$$+\varepsilon_2[\sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu} 2[cos\lambda_j + coss_j]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds + \sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu} 2[cos\mu_j + cosl_j]\times$$

$$\times f(\lambda,l,\gamma,\theta)dl + \sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu} 2[cos\gamma_j + cos\xi_j]f(\lambda,\mu,\xi,\theta)d\xi + \sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu} 2[cos\theta_j+$$

$$+cos\eta_j]f(\lambda,\mu,\gamma,\eta)d\eta] + \varepsilon_3[\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,l,\gamma,\theta)dsdl+$$

$$+\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(\lambda,l,\xi,\theta)dld\xi + \int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(\lambda,l,\gamma,\eta)dld\eta],$$

where $h(\lambda,\mu,\gamma,\theta) = 4A + 2B\Sigma_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i + \cos\theta_i]$, and T^ν is the ν— dimensional torus, where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4$.

Theorem 1. *Let $\nu = 3$. Then*

A).1). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -6B$, or if $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 6B$, then the essential spectrum of the operator $^3\widetilde{H}_t^1$ is the union of eight segments: $\sigma_{ess}(^3\widetilde{H}_t^1) = [4A - 48B, 4A + 48B] \cup [3A - 18B + z, 3A + 18B + z] \cup$

$[2A-12B+2z, 2A+12B+2z] \cup [A-6B+3z, A+6B+3z] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup [A-6B+z+z_3, A+6B+z+z_3] \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4] \cup [A-6B+z+z_4, A+6B+z+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, *where* $z = A+\varepsilon_1$, z_3 *and* z_4 *are some concrete numbers.*

2). If $\varepsilon_2 = -B$ *and* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < -2B$, *or if* $\varepsilon_2 = -B$ *and* $2B < \varepsilon_1 \leqslant 6B$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is the union of three segments:* $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-48B, 4A+48B] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is empty:* $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \varnothing$.

B). 1). If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is the union of eighth segments:* $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-48B, 4A+48B] \cup [3A-18B+z, 3A+18B+z] \cup [2A-12B+2z, 2A+12B+2z] \cup [A-6B+3z, A+6B+3z] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup [A-6B+z+z_3, A+6B+z+z_3] \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4] \cup [A-6B+z+z_4, A+6B+z+z_4]$ *and the discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, *where* z *is some number.*

2). If $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is the union of eighth segments:* $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-48B, 4A+48B] \cup [3A-18B+\widetilde{z}, 3A+18B+\widetilde{z}] \cup [2A-12B+2\widetilde{z}, 2A+12B+2\widetilde{z}] \cup [A-6B+3\widetilde{z}, A+6B+3\widetilde{z}] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup [A-6B+\widetilde{z}+z_3, A+6B+\widetilde{z}+z_3] \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4] \cup [A-6B+\widetilde{z}+z_4, A+6B+\widetilde{z}+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4\widetilde{z}, 2\widetilde{z}+z_3, 2\widetilde{z}+z_4\}$.

C). If $\varepsilon_2 > 0$ *and* $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *and* $E < (1-\frac{\alpha}{3})W$, *or if* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *and* $E < (1-\frac{\alpha}{3})W$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of sixteen segments:* $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-24B, 4A+24B] \cup [3A-18B+z_1, 3A+18B+z_1] \cup [3A-18B+z_2, 3A+18B+z_2] \cup [2A-12B+2z_1, 2A+12B+2z_1] \cup [2A-12B+z_1+z_2, 2A+12B+z_1+z_2] \cup [2A-12B+2z_2, 2A+12B+2z_2] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4] \cup [A-6B+3z_1, A+6B+3z_1] \cup [A-6B+2z_1+z_2, A+6B+2z_1+z_2] \cup [A-6B+z_1+2z_2, A+6B+z_1+2z_2] \cup [A-6B+3z_2, A+6B+3z_2] \cup [A-6B+z_1+z_3, A+6B+z_1+z_3] \cup [A-6B+z_1+z_4, A+6B+z_1+z_4] \cup [A-6B+z_2+z_3, A+6B+z_2+z_3] \cup [A-6B+z_2+z_4, A+6B+z_2+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of eleven eigenvalues:*

$\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z_1, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, z_1 + 3z_2, z_1 + z_2 + z_3, z_1 + z_2 + z_4, 4z_2, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4\}$, *where* z_1 *and* z_2 *are the some concrete numbers.*

Литература

1. Tashpulatov S.M. Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard model / Theoretical and Mathematical Physics — 2014. — Vol. 179, № 3. — C. 712–728.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ.

Ю.А. Тихонов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
yurytik@yandex.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \alpha A \frac{du}{dt}(t) + (A + C)u(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \ t \geqslant 0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \ \frac{du}{dt}(0) = u_1. \quad (2)$$

Оператор A — самосопряжённый, положительно-определённый, имеющий компактный обратный, оператор C — симметрический оператор, компактно подчинённый оператору A. Функция $K(t)$ задаётся следующим интегралом:

$$K(t) = \int_{d_0}^{+\infty} e^{-\tau t} d\mu(\tau),$$

где $d_0 > 0$, $\mu(\tau)$ — неубывающая, непрерывная справа функция. Будем предполагать, что выполнены условия

$$\int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1 \quad (3)$$

и

$$\left\|\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\right\| < 1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}, \tag{4}$$

где через $\overline{T}$ обозначается замыкание оператора T. Условия (3)–(4) назовём условиями устойчивости.

Обозначим через $C^n(X,H)$ пространство вектор-функций, действующих из множества $X \subseteq \mathbb{R}$ в H, имеющих непрерывные производные вплоть до n-го порядка. Разрешимость задачи (1)–(2) будем понимать в следующем смысле [1]:

Определение 1. Функция $u(t) \in C^2([0,+\infty],H)$ называется классическим решением задачи (1)–(2), если для каждого $t \geqslant 0$, $u(t),\ \dot{u}(t) \in \mathrm{Dom}(A)$, $A\dot{u}(t) \in C([0,+\infty],H)$, кроме этого, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $t \geqslant 0$, а также начальным условиям (2).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия устойчивости (3)–(4) и в дополнение к ним имеет место сходимость интеграла*

$$\int_{d_0}^{+\infty} d\mu(\tau) < +\infty. \tag{5}$$

Тогда для любых $u_0, u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$ задача (1)–(2) имеет единственное решение в смысле определения 1. Более того, существует угол $\Lambda_\theta = \{|\arg z| < \theta\}$, где $\theta \in (0,\pi/2)$, такой, что функция $u(z)$ является аналитической в угле Λ_θ. При этом для некоторых положительных постоянных M,γ справедлива следующая оценка нормы решения:

$$\|u(t)\|_H^2 \leqslant Me^{-2\gamma t}\left(\|A^{1/2}u_0\|_H^2 + \|u_1\|_H^2 + t^2\,\|Au_0\|_H^2\right).$$

Исследование свойств решения задачи (1)–(2) основывается на спектральном анализе оператор-функции $L(\lambda)$, возникающей в результате применения преобразования Лапласа к левой части уравнения (1):

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + C - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda}A, \tag{5}$$

Результат о локализации спектра этой опреатор-функции сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (3), *тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *содержится в области*

$$D_{\gamma,p,q} = \left\{ \lambda \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\ \lambda < -\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q \right\},$$

где γ, p *и* q *— положительные константы. При этом невещественная часть спектра состоит из конечного или счётного числа пар комплексно-сопряжённых собственных чисел конечной алгебраической кратности* $\{\lambda_n^{\pm}\}_{n=1}^{\nu}$. *Если* $\nu = +\infty$, *то*

$$\mathrm{Re}\lambda_n^{\pm} \to -\infty.$$

Уравнение (1) возникает в различных задачах теории вязкоупругости, в частности, при изучении малых поперечных колебаний вязкоупругого стержня [2], [3]. Отметим, что при $\alpha = 0$, это уравнение является уравнением типа Гуртина–Пипкина. Уравнения подобного типа в случае, когда оператор $C = 0$, подробно изучены на предмет корректной разрешимости в весовых пространствах Соболева в работах В.В. Власова и соавторов. Основные результаты опубликованы в монографии [4] (гл. 3) и цитированных в ней статьях автора. Исследование уравнения Гуртина–Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами методом теории полугрупп развивается в работах Н.А. Раутиан [см. 5, 6, 7].

Задача, во многом аналогичная задаче (1) — (2) с ненулевым значением параметра α для ядер, представимых в виде интегралов по мере с компактным носителем, изучается в работах Д.А. Закоры [см. 8, 9, 10].

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. / С.Г. Крейн. — М.:Наука., 1967. — 464 с.

2. Милославский А.И. О спектре неустойчивости операторного пучка. / А.И. Милославский// Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 4. — С. 88–94

3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М. : Наука, 1970. —279 с.

4. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : Макс Пресс, 2016. —488 с.

5. Раутиан Н.А. Спектральные свойства генератора полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнени-

ем / Н.А. Раутиан // Дифф. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 275–279.

6. Раутиан Н.А. Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / Н.А. Раутиан // Дифф. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 10. — С. 1414—1430.

7. Раутиан Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса / Н.А. Раутиан // Дифф. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1255–1272.

8. Закора Д.А. Спектральные свойства оператора в задаче о колебании смеси вязких сжимаемых жидкостей / Д.А. Закора // Дифф. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 467–482.

9. Закора Д.А. Асимптотическое поведение решений полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / Д.А. Закора //СМФН. — 2022. — Т. 68, №3. — С. 451–466.

10. Закора Д.А. Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла / Д.А. Закора //Дифф. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 9. — С. 1195—1208.

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С «ВЕСОВОЙ» ПРОИЗВОДНОЙ

С.А. Ткачева, Г.Б. Савченко, Д.И. Балыкин (Воронеж, ВГУ)
svtkach@mail.ru

Рассматривается задача для уравнения вида

$$D_{\alpha,t}u - A(-iD_x)u = f(t,x), 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = u(t,x)|_{t=T} \quad (2)$$

Здесь $D_{\alpha,t}$ – дифференциальный оператор с «весовыми» производными по переменной $t \in (0,T)$ следующего вида: $D_{\alpha,t} = \sqrt{\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\alpha(t)}$, где $\alpha(t)$ – достаточно гладкая на $(0,T)$ функция, обращающаяся в нуль при $t = +0$: $\alpha(+0) = 0, \alpha(t) > 0$ при $t \in (0,T)$. Функция $\frac{1}{\alpha(t)}$ имеет интегрируемую особенность в нуле, и существует конечный предел $J = \lim\limits_{t\to T}\int\limits_0^t \frac{ds}{\alpha(s)}$. $A(-iD_x)$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $f(x,t)$ – заданная функция, $u = u(t,x)$ – неизвестная функция, определенные при $0 < t < T, x \in \mathbb{R}$.

Символ $A(s)$ оператора $A(-iD_x)$ – полином с постоянными коэффициентами вида $A(s) = r(s) + iq(s)$, где $r(s)$ и $q(s)$ – вещественные функции.

На гладких функциях $u(t,x) \in L_2$ зададим оператор G_α по формулам (см. [1])

$$G_\alpha[u](y,x) = \sqrt{\alpha(t)}u(t,x)|_{t=y} = \nu(y,x),$$

здесь $t = t(y)$ – функция, обратная функции

$$y = y(t) = \int\limits_0^t \frac{ds}{\alpha(s)}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < y < \gamma,$$

где постоянная γ удовлетворяет условию $\gamma J(T) = \pi$.

Теорема. Пусть существует постоянная $\delta > 0$, что выполняется неравенство

$$|1 - exp(\gamma A(s))| \geqslant \delta, \quad \delta > 0$$

при любом $s \in \mathbb{R}$. Тогда задача (1) - (2) разрешима при любой правой части $f(t,x) \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^1)$ и справедлива оценка

$$\int\limits_0^1 \|u(t,x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)}\, dt \leqslant c \int\limits_0^T \|f(t,x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)}\, dt$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $s \in \mathbb{R}^1$.

Литература

1. Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко – Итоги науки и техники ВИНИТИ – М., 1985. – т. 23. – С. 125-218.

2. Ткачева С.А. Исследование разрешимость нелокальной граничной задачи для дифференциальных уравнений с «весовой» производной / С.А. Ткачева, Г.Б. Савченко, И.Г. Забабурина // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. ПМТУКТ-2022. – Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет, 2022. – С. 70-71.

О ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТАХ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПЛОСКУЮ УПРУГУЮ СРЕДУ В РАМКАХ ТЕОРИИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо (Майкоп, АдыгГУ)
tlyachev@adygnet.ru

В недавней работе [1] на основе теории Гинзбурга-Ландау построена математическая модель (динамические системы (34)-(37) из [1]) поведения двумерной системы — тонкого эластичного листа, описывающего процессы фазовых переходов в полимерных сетках, погруженных в бинарную смесь, коллоидных кристаллах с суперпарамагнитными частицами. Указанные динамические системы приведены к удобной форме для анализа в рамках качественной теории динамических систем на плоскости.

Таким образом, рассматривается квадратичная система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a_{10}x - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2 \equiv a_{10}x + P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = b_{01}y + b_{11}xy + b_{02}y^2 \equiv b_{01}y + Q_2(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

в предположении $|a_{10}| + |b_{01}| > 0$, $P_2(x,y) \cdot Q_2(x,y) \neq 0$.

Потребуем, чтобы изоклина бесконечности системы (1) была эллипсом L. Кривая $a_{10}x + P_2(x,y) = 0$ будет эллипсом, когда выполнены условия $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 > 0$, $a_{02}a_{10}^2(a_{20} + a_{02}) > 0$. Неравенства $a_{10}a_{02} < 0$, $a_{10}a_{11} > 0$ являются условиями расположения центра эллипса L в первом квадранте. Дополнительно к указанным неравенствам добавляем следующие условия $a_{20} > 0$, $a_{02} > 0$, $a_{10} < 0$, $0 > a_{11} > -2\sqrt{a_{20}a_{02}}$.

Система (1), с учетом равенств $b_{01} = a_{10}$, $b_{02} = a_{11}$, $b_{11} = 2a_{20}$ приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a_{10}x - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2 \equiv P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{10}y + 2a_{20}xy + a_{11}y^2 \equiv Q(x,y). \end{cases} \tag{2}$$

Лемма 1. *Система* (2) *не имеет замкнутых контуров, состоящих из траекторий этой системы, в частности предельных циклов.*

Кроме двух состояний равновесия $O(0,0)$ и $A\Big(-\dfrac{a_{10}}{a_{20}},0\Big)$, система (2) имеет еще два состояния равновесия, являющихся точками пересечения эллипса L и изоклины нуля $2a_{20}x+a_{11}y+a_{10}=0$.

Теорема 1. *Если система* (2) *удовлетворяет условиям* $a_{20}>0$, $a_{02}>0$, $a_{10}<0$, $0>a_{11}>-2\sqrt{a_{20}a_{02}}$, *то в ограниченной части фазовой плоскости она имеет четыре состояния равновесия, в том числе* $O(0,0)$, $A\Big(-\dfrac{a_{10}}{a_{20}},0\Big)$ *— простые седла,* $B\Big(\dfrac{\sqrt{a_{02}}}{\sqrt{a_{20}}}m,m\Big)$ *— простой устойчивый фокус,* $D\Big(-\dfrac{\sqrt{a_{02}}}{\sqrt{a_{20}}}\cdot n,n\Big)$ *— простой неустойчивый фокус.*

Теорема 2. *Если выполняются условия* $a_{20}>0$, $a_{02}>0$, $a_{10}<0$, *то при* $a_{11}\in\big(-2\sqrt{a_{20}a_{02}},-\sqrt{3a_{20}a_{02}}\big)$ *система* (2) *имеет на экваторе сферы Пуанкаре два узла* W_1, W_2 *и седло* W_3, *а при* $a_{11}=-3\sqrt{a_{20}a_{02}}$ *— узел* W_1 *и седлоузел* W_4.

Теоремы 1 и 2 и лемма 1 позволяют построить фазовые портреты динамической системы (2) в круге Пуанкаре.

Отметим, значение параметра $a_{11}=-3\sqrt{a_{20}a_{02}}$ является бифуркационным.

Литература

1. Mukherjee S. Statistical mechanics of phase transitions in elastic media with vanishing thermal expansion / S. Mukherjee, A. Basu // Physical Review. E. — 2022. — Vol. 106. — 054128.

ТРАЕКТОРНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ ДЛЯ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА С УЧЁТОМ ПАМЯТИ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ[1]

М.В. Турбин, А.С. Устюжанинова (Воронеж, ВГУ)
mrmike@mail.ru, nastyzhka@gmail.com

В докладе рассматривается следующая система уравнений, описывающая движение несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта с памятью в ограниченной области Ω с достаточно гладкой границей:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\Delta v+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-2\varkappa\mathrm{Div}\left(v_k\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right)-$$

[1] Работа выполнена за счёт Российского Научного Фонда (грант № 23-21-00091).

$$-2\mathrm{Div}\int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \mathcal{E}(v)(s, z(s,t,x))\, ds + \nabla p = f; \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad x \in \Omega; \qquad (2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^{\tau} v(s, z(s; t, x)) ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant +\infty, \quad x \in \Omega. \qquad (3)$$

Здесь v — скорость движения жидкости, p — давление в жидкости, ν — вязкость жидкости, $\varkappa$ — время запаздывания, константы $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, L}$ характеризуют память в жидкости, f — плотность внешних сил, воздействующих на жидкость. Исходя из физического смысла задачи $\nu > 0, \varkappa > 0, \alpha_i > 0, i = \overline{1, L}$.

Рассматриваемая модель описывает движение различных растворов и расплавов полимеров, таких как растворы полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы [1] и была подтверждена экспериментальным путём [2,3]. Она является одной из моделей линейных вязкоупругих жидкостей с конечным числом дискретно распределённых времен релаксации и ретардации. Общая теория таких жидкостей, включающая в себя и модель Кельвина-Фойгта, была построена на основе принципа суперпозиции Больцмана, согласно которому все воздействия на среду независимы и аддитивны, а реакции среды на внешние воздействия линейны [4].

Отметим, что в системе уравнений (1) интеграл берется вдоль траекторий движения частиц жидкости. Исследуемая модель представляет несомненный интерес с физической точки зрения, поскольку более точно описывают поведение жидкости по сравнению со стандартными моделями с частной производной в реологическом соотношении (в том случае интеграл берётся вдоль постоянной прямой, что не физично). Но этот интеграл как раз и является основной проблемой при доказательстве существования слабых решений соответствующей начально-краевой задачи. Дело в том, что для нахождения траекторий движения частиц жидкости необходимо решать задачу Коши (3). Поскольку слабое решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega)^n$, то этого недостаточно для классической разрешимости задачи Коши. Выходом из сложившейся ситуации является использование теории регулярных лагранжевых потоков, созданной в работе [5]. На основе этой теории в недавней работе [6] и была установлена разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для модели Кельвина-Фойгта с полной производной.

Следующим этапом исследования данной модели является исследование предельного поведения решений, а именно поведения решений при стремлении времени к бесконечности. В некоторых задачах решения могут стремиться к некоторому множеству в фазовом пространстве. Здесь под фазовым пространством понимается множество, элементы которого отождествляются с состояниями системы. То есть вне зависимости от начальных условий задачи её решения оказываются в этом множестве возможно через достаточное большое время. Подобные множества называют аттракторами, поскольку решения притягиваются к ним.

Доказательство существования траекторного и глобального аттракторов проводится на основе теории аттракторов неивариантных пространств траекторий [7]. А именно, для изучаемой модели вводится понятие слабого решения на конечном отрезке и на полуоси. После чего, на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач математической гидродинамики доказывается существование их решений и устанавливаются экспоненциальные оценки решений.

В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ рассматривается множество слабых решений системы (1)–(3), определённых на $\mathbb{R}_+$, существенно ограниченных как функции со значениями в V^1 и удовлетворяющих оценке

$$\|v(t)\|_{V^1} + \|v'(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C(1 + e^{-\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)}) \tag{4}$$

при почти всех $t > 0$. Здесь γ — некоторая положительная константа.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $\nu, \alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, L}$ *удовлетворяют условиям*

$$\nu\alpha_i > 4L|\beta_i|, \quad i = \overline{1, L}. \tag{5}$$

Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ *и глобальный аттрактор* $\mathcal{A}$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$.

Литература

1. Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В.А. Павловский // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, №. 4. — С. 809–812.

2. Амфилохиев В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева, Я.С. Ходорковский // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института. — 1975. — Т. 96. — С. 3–9.

3. Амфилохиев В.Б. Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах / В.Б. Амфилохиев, В.А. Павловский // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института. —1976. — Т. 104. — С. 3–5.

4. Виноградов Г.В. Реология полимеров / Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин. — М. : Химия, 1977. — 438 с.

5. DiPerna R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.-L. Lions. // Inventiones Mathematicae. — 1989. — V. 98. — P. 511–547.

6. Turbin M. Existence of weak solution to initial-boundary value problem for finite order Kelvin-Voigt fluid motion model / M. Turbin, A. Ustiuzhaninova // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. — 2023. — V. 29. — Article number 54.

7. Zvyagin V. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics / V. Zvyagin, D. Vorotnikov. — Berlin–New York. :Walter de Gruyter, 2008. — 248 p.

ЯВЛЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В АЛГЕБРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С КВАДРАТИЧНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ)
vum1@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши:

$$A\frac{du(t,\varepsilon)}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon), \tag{2}$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2; $\overline{\operatorname{dom} A} = \overline{\operatorname{dom} B} = \overline{\operatorname{dom} C} = \overline{\operatorname{dom} D} = E_1$; $u^0(\varepsilon)$ — голоморфная в точке $\varepsilon = 0$ функция; $t \in [t_0; t_{\max}]$; $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$.

Оператор A полагается фредгольмовским с нулевым индексом, имеющим размерность ядра произвольной (конечной) размерности.

Цель работы: исследовать наличие явления погранслоя в задаче (1), (2).

Задача решена в работе [1].

Для этого с применением свойства фредгольмовости оператора A получено уравнение ветвления. Оно решается с применением диаграммы Ньютона. Исследуется случай одного и двух отрезков ломаной.

Результат работы: выявлены условия, при которых имеет место явление погранслоя в обоих случаях — они называются условиями регулярности вырождения. Приводится иллюстрирующий пример.

Литература

1. Усков В.И. Явление погранслоя в алгебро–дифференциальном уравнении первого порядка / В.И. Усков // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т. 129, № 144. — В печати.

СТУПЕНЧАТЫЕ ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ НА ПОЛЕ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ ЛОРАНА

Ю.А. Фарков (Москва, РАНХиГС)
farkov-ya@ranepa.ru

На группах Виленкина ступенчатые функции представимы конечными линейными комбинациями обобщенных функций Уолша и применяются в теории приближений и для обработки сигналов (см. [1],[4]-[6] и цитированную в этих статьях литературу). Хорошо известно, что при каждом простом p группа Виленкина G_p изоморфна аддитивной группе поля формальных рядов Лорана $\mathbb{F}_p((\,t\,))$, т.е. рядов вида

$$\sum_{n\geqslant n_0} a_n t^n, \quad n_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \mathbb{F}_p,$$

с обычными операциями сложения и умножения. Это поле может быть получено как пополнение поля $\mathbb{F}_p(\,t\,)$ рациональных функций с коэффициентами из конечного поля $\mathbb{F}_p$ относительно абсолютного значения $|\,a\,| = p^{-\mathrm{ord}_0(a)}$.

При построении нормализованных жёстких фреймов на группе Виленкина G_p и в пространствах периодических последовательностей используется условие

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{p-1} |b_{s+kp^{n-1}}|^2 \leqslant 1 \quad \text{для} \quad s \in \{0, 1, \ldots, p^{n-1} - 1\}. \qquad (1)$$

В сочетании с доказанными недавно в [6] характеристическими свойствами ступенчатых масштабирующих функций условие (1) задает класс масок на группе G_p, для которых соответствующие нормализованные жёсткие фреймы состоят из ступенчатых функций. Переход от вектора параметров $(b_0, b_1, \ldots, b_{p^n-1})$ к соответствующей маске осуществляетмя с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона. В докладе будет показано как этот метод построения жёстких фреймов реализуется на поле $\mathbb{F}_p((\,t\,))$; в частности, будут дополнены примеры из [2, § 2.4] и [3, § 7.4]. Предполагается также продемонстирировать как на поле $\mathbb{F}_p((\,t\,))$ переносятся некоторые другие методы построения жёстких фреймов и ортогональных вейвлетов на группе G_p.

Литература

1. Фарков Ю.А. Ступенчатые масштабирующие функции и система Крестенсона / Ю. А. Фарков // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 225, ВИНИТИ РАН, М., 2023. — С. 134—149.

2. Behera B. Wavelet analysis on local fields of positive characteristic / B. Behera, Q. Jahan // Indian Statistical Institute Series. Singapore : Springer, 2021. — 332 p.

3. Farkov Yu.A. Construction of wavelets through Walsh Functions / Yu.A. Farkov, P. Manchanda, A.H. Siddiqi // Industrial and Applied Mathematics. Singapore : Springer, 2019. — 382 p.

4. Farkov Yu.A. Discrete wavelet transforms in Walsh analysis / Yu.A. Farkov // J. Math. Sci., New York. — 2021. — V. 257, № 1. — P. 127–137.

5. Farkov Yu.A. Finite Parseval frames in Walsh analysis / Yu.A. Farkov // J. Math. Sc., New York. — 2022. — V. 263, № 4. — P. 579–589.

6. Farkov Yu.A. Step wavelets on Vilenkin groups / Yu.A. Farkov, M.A. Skopina // J. Math. Sci., New York. — 2022. — V. 266, № 5. — P. 696–708.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Ш.Р. Фармонов (Фергана, ФерГУ)

farmonovsh@gmail.com

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезками $\overline{AB} = \{(x, y) : x + y = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,

$\overline{BA^*} = \{(x, y) : x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и дугой $A^*A = \{(x,y) : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1, x > 0, y < 0\}$, а $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y) : y > 0\}$, $\Omega_{1j} = \Omega \cap \{(x,y) : (-1)^j (x+y) < 0, y < 0\}$, $j = \overline{1,2}$.

Задача $A_1\,[A_2]$. Найти функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) в области Ω_0 есть регулярное решение уравнения

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y = 0, \quad 0 < \alpha = const < (1/2)\,; \qquad (1)$$

2) в областях Ω_{11} и Ω_{12} есть обобщенное решение уравнения (1) из класса $R_2[1,2]$; 3) удовлетворяет условиям

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{AB}; \qquad (2)$$

$$u(0,y) + u(0,-y) = f(y), \qquad -1 \leqslant y \leqslant 1; \qquad (3)$$

$$u\left[x, -(1-\sqrt{x})^2\right] - u\left[(1-\sqrt{x})^2, -x\right] = p(x), (1/4) \leqslant x \leqslant 1; \quad (4)$$

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,y) = g(y), \qquad 0 < y < 1; \qquad (5)$$

$$\left[\lim_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,y) - \lim_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,-y) = g(y), \quad 0 < y < 1; \quad (5')\right]$$

$$\lim_{y\to-0} (-y)^\alpha u_y(x,y) = -\lim_{y\to+0} y^\alpha u_y(x,y), \quad 0 < x < 1. \qquad (6)$$

где $\varphi(x,y)$, $f(t)$, $p(t)$, $g(t)$ – заданные непрерывные функции, причем $p(1/4) = 0$, $\varphi(1,0) + \varphi(0,1) = p(1) + f(1)$.

Отметим, что уравнение (1) в области Ω_0 принадлежит эллиптическому типу, а в Ω_{11} и Ω_{12} – гиперболическому типу, причем отрезок OA является линией изменения типа.

Очевидно, что (3) и (5′) являются условиями типа условия Франкля, а условие (4) связывает значения искомой функции в точках, лежащих на дугах A^*D и DA характеристики $\sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$ уравнения (1), где $A(1,0)$, $A^*(0,-1)$, $D(1/4;1/4)$.

Пусть $u(x,y)$ решение задачи A_1. Введём обозначения:

$$\tau_{11}(t) = u(t,0),\ \tau_{12}(-t) = u(0,-t),\ \tau_{21}(t) = u(0,t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$\nu_{11}^+(t) = \lim_{y\to+0} y^\alpha u_y(t,y),\ \nu_{11}(t) = \lim_{y\to-0} (-y)^\alpha u_y(t,y), t \in (0,1);$$

$$\nu_{21}^+(t) = \lim_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,t),\ \nu_{12}(-t) = \lim_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,-t), t \in (0,1);$$

$$u_{1j}(x,y) = u(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_{1j}, \quad j = \overline{1,2}.$$

Обобщенные решения $u_{1j}(x,y) \in R_2$, уравнения (1) в областях Ω_{11} и Ω_{12} представимы в виде[3]

$$u_{1j}(x,y) = \int\limits_0^\xi \sigma^{-\beta} T_{1j}(z)dt + \frac{1}{2cos(\beta\pi)} \int\limits_\xi^\eta (-\sigma)^{-\beta} N_{1j}(z)dt, \quad (7)$$

где $\beta = \alpha - (1/2)$, $\xi = \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^2$, $\eta = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$,

$$T_{1j}(z)=sign(z)\frac{\chi_1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\int\limits_0^z(z-s)^{2\beta}[\tau_{1j}(s)-\tau_{1j}(0)]ds,$$

$N_{1j}(z)=T_{1j}(z)+(-1)^j\chi\,|t|^{\alpha-1}\nu_{1j}^-(z),\ z=(-1)^{j+1}t,j=\overline{1,2};\ \sigma=(\xi-t)(\eta-t),\chi=2^{4\beta-1}(1-\alpha)^{-1}cos(\beta\pi)\Gamma(2-2\beta)\Gamma^{-2}(1-\beta),\ \chi_1=sin(\beta\pi)(\beta\pi)^{-1}$, $\Gamma(z)$–гамма-функция Эйлера.

Кроме того, в силу $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, справедливо равенство

$$\lim_{y\to -x+0}u_{11}(x,y)=\lim_{y\to -x-0}u_{12}(x,y),\quad 0<x<(1/4). \tag{8}$$

Подставляя функции $u_{1j}(x,y)$, определяемые формулами (7), в равенство(8), после некоторых преобразований, получим

$$T_{11}(t)-T_{12}(-t)=\chi\,t^{\alpha-1}\left[\nu_{11}(t)+\nu_{12}(-t)\right],\ \ 0<t<1. \tag{9}$$

Далее, с помощью формул (7) находим $u_{11}\left[x,-(1-\sqrt{x})^2\right]$, $u_{12}\left[(1-\sqrt{x})^2,-x\right]$ и подставляем в условие (5). Затем, используя равенство(9), условие (3) и считая $\tau_{1j}(0)=0$, имеем

$$\tau_{11}(t)+\tau_{21}(t)=f(t)+\Phi_1(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{10}$$

где $\Phi_1(t)=\chi_1\int\limits_0^t\frac{(1-\zeta)^\beta}{(t-\zeta)^{2\beta}}d\zeta\frac{d^2}{d\zeta^2}\int\limits_0^\zeta(\zeta-s)^\beta p\left[\frac{(1+\sqrt{s})^2}{4}\right]ds.$

Равенство (10) является функциональным соотношением между $\tau_{11}(t)$ и $\tau_{21}(t)$, получаемым из того условия, что реше-ние задачи A_1 должно удовлетворить условиям (3)-(5) и (8).

Этим задача A_1 эквивалентно сведена к следующей задаче $\tilde{A}_1$: найти регулярное в области Ω_0 решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_0)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2),(5) и (10).

Аналогичным методом, задача A_2 эквивалентно сведется к задаче $\tilde{A}_2$, об определении регулярного в области Ω_0 решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2),(10) и

$$\nu_{21}^+(x)-\nu_{11}^+(x)=\Phi_2(x),$$

где $\Phi_2(t)=g(x)+\frac{\chi_1}{\chi}\ \frac{(1-t)^\beta}{t^{\alpha-1}}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^t(t-s)^\beta p\left[\frac{(1+\sqrt{s})^2}{4}\right]ds.$

Единственность решения задач $A_1\left(\tilde{A}_1\right)$ и $A_2\left(\tilde{A}_2\right)$ доказывает-ся методом принципа экстремума, а существование-ме-тодом интегральных уравнений.

Теорема. Пусть заданные функции удовлетворяют следующим условиям: $\varphi(x,y) = [x(1-x)]^{\varepsilon}\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(x) \in C[0,1], \varepsilon > 1+\alpha$; $f(t) = A\left[t^{-2\beta}-1\right] + \tilde{f}(t),\ \tilde{f}(0) = A, \tilde{f}(t) \in C^{(2,\gamma)}[0,1], \gamma > 0$; $p(t) = (t-1/4)^{\gamma_1}(1-t)^{\gamma_2}\tilde{p}(t),\ \tilde{p}(t) \in C[1/4,1],\ \gamma_1 \geqslant 2-4\beta,\ \gamma_2 \geqslant 4$; $g(t) = t^{1-\alpha}\tilde{g}(t),\ \tilde{g}(t) \in C[0,1] \cap L(0,1)$, где

$$A = \frac{4^{2\beta}\beta\Gamma^2(\beta)}{2\pi\Gamma(2\beta)} \int\limits_0^1 \tilde{\varphi}(t)[t(1-t)]^{\beta+\varepsilon-(1/2)}dt.$$

Тогда задача A_1 (A_2) имеет единственное решение.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Наука, 1985. — 304 с.

2. Исамухамедов С.С., Орамов Ж. О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения / С.С. Исамухамедов, Ж. Орамов // Дифференциальные уравнения. — Минск. — 1982. — Т. 18, № 2. — С. 324–334.

3. Urinov A.K., Farmonov S.R. An analog of the Frankl problem for a second-kind mixed-type equation / A.K. Urinov, S.R. Farmonov // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — T. 194, № 5. — P. 573–583.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

В.Е. Федоров, Т.А. Захарова (Челябинск, ЧелГУ)

kar@csu.ru

Для $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$ обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ множество линейных замкнутых плотно определенных в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ операторов A, для которых выполняются следующие условия:

(i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a \geqslant a_0$ существует такое $K = K(\theta, a) > 0$, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta,a} := \{a + re^{i\varphi} : r > 0,\ |\varphi| < \theta\}\ \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K(\theta,a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda-a)|}.$$

Здесь $R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ и Челябинской области (проект № 23-21-10015).

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$. *Тогда при* $\mathrm{Re}\gamma > 0$ *оператор* $A^{-\gamma}$ *ограничен и инъективен.*

Для $\mathrm{Re}\gamma > 0$ определим оператор $A^\gamma := (A^{-\gamma})^{-1}$ с областью определения $D_{A^\gamma} = \mathrm{im}A^{-\gamma} := \{y = A^{-\gamma}x : x \in \mathcal{Z}\}$.

Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta},\ r \in [\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ при некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, тогда определены операторы

$$Z_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Для них доказано следующее обобщение полугруппового свойства.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. *Тогда при любых* $\beta < 1$, $\delta < 1$, $s, t > 0$

$$Z_\beta(s)Z_\delta(t) = -\frac{1}{\alpha} Z_{\beta+\delta}(s+t)+$$

$$+\frac{t^{-\delta}}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A) E_{\alpha,1-\delta}(\mu^\alpha t^\alpha) e^{\mu s} d\mu+$$

$$+\frac{s^{-\beta}}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\delta} R_{\mu^\alpha}(-A) E_{\alpha,1-\beta}(\mu^\alpha s^\alpha) e^{\mu t} d\mu.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = B\left(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \ldots, D^{\alpha_n} z(t)\right), \tag{2}$$

где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{Z}$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Здесь D^{α_l} — дробная производная Герасимова-Капуто при $\alpha_l > 0$ или интеграл Римана-Лиувилля для $\alpha_l \leqslant 0$

Пусть $\gamma \in (0,1)$, $\mathcal{Z}_\gamma := D_{A^\gamma}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\gamma := \|A^\gamma \cdot\|_{\mathcal{Z}}$, так как A^γ — непрерывно обратимый замкнутый оператор. Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^n$, задано отображение $B : U \to \mathcal{Z}$, для любой точки $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ найдется ее окрестность $V \subset U$ и константы $C > 0$, $\delta \in (0, 1]$, такие, что для всех $(s, y_1, y_2, \ldots, y_n), (t, v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V$

$$\|B(s, y_1, y_2, \ldots, y_n) - B(t, v_1, v_2, \ldots, v_n)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$C\left(|s-t|^{\delta}+\sum_{l=1}^{n}\|y_l-v_l\|_{\gamma}\right). \qquad (3)$$

Функция $z \in C((t_0,t_1];D_A)$, такая, что $z \in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $D^{\alpha}z \in C((t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $D^{\alpha_1}z, D^{\alpha_2}z,\dots,D^{\alpha_n}z \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, называется решением задачи (1), (2) на отрезке $[t_0,t_1]$, если выполняются условия (1), включение $(D^{\alpha_1}z(t), D^{\alpha_2}z(t),\dots,D^{\alpha_n}z(t)) \in U$ для всех $t\in[t_0,t_1]$ и при любом $t\in(t_0,t_1]$ справедливо равенство (2).

При $t_1>t_0$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$ определим пространство

$$C^{m-1,\{\alpha_l\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z}) := \{z \in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z}) :$$

$$D^{\alpha_l}z \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z}),\ l=1,2,\dots,n\}$$

с нормой

$$\|z\|_{C^{m-1,\{\alpha_l\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \sum_{l=1}^{n}\|D^{\alpha_l}z\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}.$$

Лемма 2. *Нормированное пространство $C^{m-1,\{\alpha_l\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ полно.*

Обощначим

$$\tilde{z}(t) := z_0+(t-t_0)z_1+\dots+\frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}z_{m-1},$$

$$\tilde{z}_l := D^{\alpha_l}\tilde{z}(t_0), \quad l=1,2,\dots,n.$$

Заметим, что при $\alpha_l=m_l=k\in\{0,1,\dots,m-1\}$ имеем $\tilde{z}_l=z_k$, в противном случае $\tilde{z}_l=0$, $l=1,2,\dots,n$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha\in(1,2]$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $-A\in\mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0,0)$, $0\in\rho(A)$, отображение $B:U\to\mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (3) при некотором $\gamma\in(0,1)$, $z_0,z_1\in\mathcal{Z}_{1+\gamma}$, $(t_0,\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\dots,\tilde{z}_n)\in U$. Тогда при некотором $t_1>t_0$ существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[t_0,t_1]$.*

В полном метрическом пространстве

$$S_{t_1} := \{x\in C^{1,\{\alpha_l\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z}) : D^{\alpha_l}x(t_0)=A^{\gamma}\tilde{z}_l,$$

$$\|D^{\alpha_l}x(t)-A^{\gamma}\tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\varepsilon,\ l=1,2,\dots,n\}$$

доказывается сжимаемость отображения

$$Fx(t) := \sum_{k=0}^{1}Z_{-k}(t-t_0)A^{\gamma}z_k+\int_{t_0}^{t}A^{\gamma}Z_{1-\alpha}(t-s)B^{x}(s)ds,$$

где $B^x(s) := B\left(s, A^{-\gamma}D^{\alpha_1}x(s), A^{-\gamma}D^{\alpha_2}x(s), \ldots, A^{-\gamma}D^{\alpha_n}x(s)\right)$. Через его единственную неподвижную точку y выражается решение

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int\limits_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)B^z(s)ds =$$

$$= A^{-\gamma}FA^{\gamma}z(t) = A^{-\gamma}y(t).$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in (0,1]$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, *отображение* $B : U \to \mathcal{Z}$ *удовлетворяет условию (3) при* $\gamma \in (0,1)$, $z_0 \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_n) \in U$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке* $[t_0, t_1]$.

При $\alpha \in (1,2]$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим начально–краевую задачу

$$v(\xi, t_0) = v_0(\xi), \quad D_t^1 v(\xi, t_0) = v_1(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{4}$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega,\ t > t_0, \tag{5}$$

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = \Delta v(\xi, t) + \sum_{l=1}^{n} D_t^{\alpha_l} v(\xi, t) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} D_t^{\alpha_l} v(\xi, t), \tag{6}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $D_t^{\alpha_l} v$ — частная производная Герасимова — Капуто при $\alpha_l > 0$ или интеграл Римана — Лиувилля для $\alpha_l \leqslant 0$ по переменной t. Возьмем $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $D_A = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, тогда $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$ при $\alpha \in (0,2)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$. Рассуждая, как в [3, теорема 8.3.5], можно показать, что нелинейный оператор

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{l=1}^{n} v_l \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} v_l$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 при $\gamma > 3/4$. Следовательно, при всех $v_0 \in D_{A^{1+\gamma}}$ существует единственное решение задачи (4)–(6) в цилиндре $\Omega \times [t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Электронную версию тезисов необходимо выслать по электронному адресу vvmsh@mail.ru.

Литература

1. Fedorov V.E. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators / V.E. Fedorov, M. Kostić, T.A. Zakharova // Fractal and Fractional. — 2023. — Vol. 7, no. 5. — P. 385.

2. Fedorov V.E. Complex powers of fractional sectorial operators and quasilinear equations with Riemann – Liouville derivatives / V.E. Fedorov, A.S. Avilovich, T.A. Zakharova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 2. — P. 580–593.

3. Pazy A. Semigroups and Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer, 1983. — 280 с.

О РАЗЛОЖЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $E^2_{\mathbb{R}} = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ и нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ ([1, с.103]); $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В работе [2] рассмотрена вещественная банахова алгебра

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right) = \{Z = (A, B) = A + \mathrm{J}B : A, B \in \mathcal{L}(E)\}$$

ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по закону: $Zw = (A + \mathrm{J}B)\,(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx)$ с линейными операциями $(A_1 + \mathrm{J}B_1) + (A_2 + \mathrm{J}B_2) = A_1 + A_2 + \mathrm{J}\,(B_1 + B_2)$, $\alpha\,(A + \mathrm{J}B) = \alpha A + \mathrm{J}\,(\alpha B)$, операцией умножения $(A_1 + \mathrm{J}B_1)\,(A_2 + \mathrm{J}B_2) = A_1A_2 - B_1B_2 + \mathrm{J}\,(A_1B_2 + B_1A_2)$ и нормой $\|Z\| = \|A + \mathrm{J}B\| = \|A\| + \|B\|$ (здесь $\mathrm{J} = (O, I)$ — мнимая операторная единица).

Алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$, нулевым элементом оператор $\hat{O} = (O, O)$.

В тех случаях, когда речь идёт о геометрических понятиях, например, об окрестностях, условимся называть элементы алгебры $\mathcal{A}$ комплексными операторными точками или, в более краткой форме, точками.

В дальнейшем важное значение будет иметь множество $\mathcal{A}_G$ непрерывно обратимых операторов из алгебры $\mathcal{A}$. В силу равносильности свойств непрерывности и ограниченности линейного оператора в нормированном пространстве ([3, с.89]) множество $\mathcal{A}_G$ можно записать в виде $\mathcal{A}_G = \left\{ Z \in \mathcal{A} : \exists Z^{-1} \in \mathcal{A} \right\}$ (условия существования обратного оператора Z^{-1} и его вид см. в [2]).

Тригонометрические функции из семейства комплексных операторных функций

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \left\{ f : \mathcal{A} \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

определяются равенствами

$$\sin Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \cos Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sec Z = \cos^{-1} Z, \operatorname{cosec} Z = \sin^{-1} Z, \operatorname{tg} Z = \sin Z \cos^{-1} Z,$$

$$\operatorname{ctg} Z = \cos Z \sin^{-1} Z,$$

где $\cos^{-1} Z = (\cos Z)^{-1}$, $\sin^{-1} Z = (\sin Z)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\cos Z$, $\sin Z$.

Для этих функций $D(\sin Z) = D(\cos Z) = \mathcal{A}$, $D(\sec Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \cos Z \in \mathcal{A}_G\}$, $D(\operatorname{cosec} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \sin Z \in \mathcal{A}_G\}$, $D(\operatorname{tg} Z) = D(\sec Z)$, $D(\operatorname{ctg} Z) = D(\operatorname{cosec} Z)$.

Пусть $Z_0 \in \mathcal{A}$; $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Рассмотрим открытый шар $O_R(Z_0) = \{Z \in \mathcal{A} : \|Z - Z_0\| < R\}$. Границей шара $O_R(Z_0)$ является сфера $S_R(Z_0) = \{Z \in \mathcal{A} : \|Z - Z_0\| = R\}$.

Теорема 1. *Для функций* $\sec Z$, $\operatorname{tg} Z$ *в открытом шаре* $O_{\frac{\pi}{2}}\left(\hat{O}\right)$ *справедливы разложения*

$$\sec Z = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k Z^{2k}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} Z = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+1} Z^{2k+1}, \qquad (2)$$

где

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1} \alpha_{k-i}}{(2i)!}, \quad k \in \mathbb{N}; \qquad (3)$$

$$\beta_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i \alpha_{k-i}}{(2i+1)!}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Значение радиуса сходимости $R = \frac{\pi}{2}$ обусловлено тем, что ближайшими точками для точки $Z_0 = \hat{O}$, не принадлежащими $D(\sec Z)$, $D(\operatorname{tg} Z)$, являются точки $Z_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2}\hat{I}$, принадлежащие границе открытого шара $O_{\frac{\pi}{2}}\left(\hat{O}\right)$ (близость понимается в смысле расстояния $\rho(Z_*, Z_{**}) = \|Z_* - Z_{**}\|$ в алгебре $\mathcal{A}$).

Теорема 2. *Для функций* $\sec Z$, $\operatorname{tg} Z$ *в открытом шаре* $O_{\frac{\pi}{2}}\left(\pi m\hat{I}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ *справедливы разложения*

$$\sec Z = (-1)^m \sum_{k\,=\,0}^{\infty} \alpha_k \left(Z - \pi m\hat{I}\right)^{2k}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg} Z = \sum_{k\,=\,0}^{\infty} \beta_{k+1} \left(Z - \pi m\hat{I}\right)^{2k+1}, \tag{6}$$

где коэффициенты α_k, β_{k+1}, $k \in \mathbb{N}_0$, *выражаются формулами (3), (4).*

Значение радиуса сходимости $R = \frac{\pi}{2}$ обусловлено тем, что ближайшими точками для точки $Z_0 = \pi m\hat{I}$, не принадлежащими $D(\sec Z)$, $D(\operatorname{tg} Z)$, являются точки $Z_{1,2} = \pi m\hat{I} \pm \frac{\pi}{2}\hat{I}$, принадлежащие границе открытого шара $O_{\frac{\pi}{2}}\left(\pi m\hat{I}\right)$.

Теорема 3. *Для функций* $\operatorname{cosec} Z$, $\operatorname{ctg} Z$ *в открытом шаре* $O_{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, *справедливы разложения*

$$\operatorname{cosec} Z = (-1)^m \sum_{k\,=\,0}^{\infty} \alpha_k \left(Z - \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I}\right)^{2k}, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg} Z = -\sum_{k\,=\,0}^{\infty} \beta_{k+1} \left(Z - \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I}\right)^{2k+1}, \tag{8}$$

где коэффициенты α_k, β_{k+1}, $k \in \mathbb{N}_0$, *выражаются формулами (3), (4).*

Значение радиуса сходимости $R = \frac{\pi}{2}$ обусловлено тем, что ближайшими точками для точки $Z_0 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I}$, не принадлежащими

$D\,(\mathrm{cosec} Z)$, $D\,(\mathrm{ctg}\, Z)$, являются точки $Z_{1,2} = \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I} \pm \frac{\pi}{2}\hat{I}$, принадлежащие границе открытого шара $O_{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I}\right)$.

В терминах чисел Эйлера E_{2k} и чисел Бернулли B_{2k} разложения (1), (2), (5) – (8) имеют вид

$$\mathrm{sec} Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{E_{2k}}{(2k!)} Z^{2k}, \tag{9}$$

$$\mathrm{tg}\, Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{2^{2k+2}\left(2^{2k+2}-1\right) B_{2k+2}}{(2k+2)!} \, Z^{2k+1}, \tag{10}$$

$$\mathrm{sec} Z = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{E_{2k}}{(2k)!} \left(Z - \pi m \hat{I}\right)^{2k},$$

$$\mathrm{tg}\, Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{2^{2k+2}\left(2^{2k+2}-1\right) B_{2k+2}}{(2k+2)!} \left(Z - \pi m \hat{I}\right)^{2k+1},$$

$$\mathrm{cosec} Z = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{E_{2k}}{(2k)!} \left(Z - \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I}\right)^{2k},$$

$$\mathrm{ctg}\, Z = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{2^{2k+2}\left(2^{2k+2}-1\right) B_{2k+2}}{(2k+2)!} \, \left(Z - \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)\hat{I}\right)^{2k+1}.$$

Разложения (9), (10) согласуются с известными разложениями комплексных функций $\mathrm{sec} Z$, $\mathrm{tg}\, Z$ в открытом круге $O_{\frac{\pi}{2}}(0) = \left\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < \frac{\pi}{2}\right\}$ ([4, с.86, 87]).

Литература

1. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М.: Иностранная литература, 1962. – 896 с.

2. Фомин В.И. О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т.56, №8. – С.1045 – 1054.

3. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. – М.: Дрофа, 2001. – 384 с.

4. Шабунин М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / М.И. Шабунин, Е.С. Половинкин, М.И. Карлов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 362 с.

ОБ n-КОМПОНЕНТНЫХ ВЕКТОРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

В данной работе используются следующие общепринятые обозначения ([1, с.60, 96]): $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ — нормированное пространство ограниченных линейных операторов, отображающих нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2; $C([a,b];B)$ — вещественное банахово пространство непрерывных на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве B с естественными линейными операциями $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ и нормой

$$\|x\|_{C([a,b];B)} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\|_B. \tag{1}$$

В дальнейшем без дополнительных ссылок неоднократно используется следующий общеизвестный факт ([2, с.91]): нормированное пространство $\mathcal{L}(N, B)$ ограниченных линейных операторов, отображающих нормированное пространство N в банахово пространство B, является банаховым пространством.

Пусть E, H – вещественные банаховы пространства; $\Psi = C([a,b];H)$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, n фиксировано; $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{Y_i\}_{i=1}^n$ – семейства вещественных банаховых пространств; $\Psi_i = C([a,b];Y_i)$, $W_i = C([a,b];\mathcal{L}(X_i, Y_i))$, $i = \overline{1,n}$.

Известно ([3, с.124]), что прямое произведение банаховых пространств является банаховым пространством. Следовательно,

$$\vec{X} = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \left\{\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X_i, i = \overline{1,n}\right\},$$

$$\vec{Y} = Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_n = \left\{\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) : y_i \in Y_i, i = \overline{1,n}\right\} -$$

вещественные банаховы пространства n-компонентных векторов с покомпонентными линейными операциями и нормой

$$\|\vec{x}\|_{\vec{X}} = \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2} + ... + \|x_n\|_{X_n},$$

$$\|\vec{y}\|_{\vec{Y}} = \|y_1\|_{Y_1} + \|y_2\|_{Y_2} + ... + \|y_n\|_{Y_n};$$

далее,

$$\vec{\Psi} = \Psi_1 \times \Psi_2 \times ... \times \Psi_n = \left\{\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) : v_i \in \Psi_i, i = \overline{1,n}\right\} -$$

вещественное банахово пространство n-компонентных функций с покомпонентными линейными операциями и нормой $\|\vec{v}\|_{\vec{\Psi}} = \|v_1\|_{\Psi_1} + \|v_2\|_{\Psi_2} + ... + \|v_n\|_{\Psi_n}$, т.е. в силу (1)

$$\|\vec{v}\|_{\vec{\Psi}} = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\|v_1(t)\|_{Y_1} + \max_{a\leqslant t\leqslant b}\|v_2(t)\|_{Y_2} + ... + \max_{a\leqslant t\leqslant b}\|v_n(t)\|_{Y_n}.$$

В частности, при $X_i = E$, $Y_i = H$, $i = \overline{1,n}$, получаем вещественные банаховы пространства $E^n = E \times E \times ... \times E$, $H^n = H \times H \times ... \times H$, $\Psi^n = \Psi \times \Psi \times ... \times \Psi$.

В работе [4] рассмотрены вещественное банахово пространство

$$\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{Y}\right) = \left\{\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) : F_i \in \mathcal{L}\left(X_i, Y_i\right), i = \overline{1,n}\right\}$$

ограниченных линейных n-компонентных операторов, действующих из векторного пространства $\vec{X}$ в векторное пространство $\vec{Y}$ по закону

$$\vec{F}\,\vec{x} = (F_1x_1, F_2x_2, ..., F_nx_n)\,, \tag{2}$$

и вещественное банахово пространство

$$\mathcal{L}\left(\vec{X},H\right) = \left\{\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) : F_i \in \mathcal{L}\left(X_i, H\right), i = \overline{1,n}\right\}$$

ограниченных линейных n-компонентных операторов, действующих из $\vec{X}$ в H по закону

$$\vec{F}\,\vec{x} = F_1x_1 + F_2x_2 + ... + F_nx_n. \tag{3}$$

Назовём операторы вида (2) n-компонентными векторными операторами первого типа, операторы вида (3) n-компонентными векторными операторами второго типа.

Ниже рассматриваются n-компонентные операторы, действующие из векторного пространства в функциональное пространство. Условимся называть такие операторы n-компонентными векторно-функциональными операторами.

По определению, n-компонентный векторно-функциональный оператор $\vec{\mathcal{A}} : \vec{X} \to \vec{\Psi}$ — это оператор $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), ..., A_n(t))$, где $\mathcal{A}_i(t) \in W_i$, $\mathcal{A}_i(t)$ фиксированы, $i = \overline{1,n}$, действующий по следующему закону:

$$\vec{\mathcal{A}}\vec{x} = (A_1(t)x_1, A_2(t)x_2, ..., A_n(t)x_n) \tag{4}$$

для любого элемента $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \vec{X}$.

Определение (4) корректно, так как $A_i(t)x_i \in \Psi_i$, $i = \overline{1,n}$, ибо, как известно ([5, с.21]), из непрерывности операторной функции следует её сильная непрерывность.

Обозначим множество n-компонентных операторов вида (4) символом $M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)$.

Любой оператор $\vec{\mathcal{A}} \in M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)$ является линейным.

Линейные операции в множестве $M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)$ введём естественным образом: $\left(\vec{\mathcal{A}}+\vec{\mathcal{B}}\right)\vec{x} = \vec{\mathcal{A}}\vec{x}+\vec{\mathcal{B}}\vec{x}$, $\left(\alpha\vec{\mathcal{A}}\right)\vec{x} = \alpha\vec{\mathcal{A}}\vec{x}$. Используя формулу (4), получаем

$$\vec{\mathcal{A}}+\vec{\mathcal{B}} = \left(A_1(t)+B_1(t), A_2(t)+B_2(t), ..., A_n(t)+B_n(t)\right), \qquad (5)$$

$$\alpha\vec{\mathcal{A}} = \left(\alpha A_1(t), \alpha A_2(t), ..., \alpha A_n(t)\right). \qquad (6)$$

Выполнимость аксиом линейного пространства для линейных операций (5), (6) очевидна.

Для каждого оператора $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), ..., A_n(t)) \in M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)$ справедливо неравенство $\left\|\vec{\mathcal{A}}\vec{x}\right\|_{\vec{\Psi}} \leqslant c_1\|\vec{x}\|_{\vec{X}}$, $\forall\vec{x}\in\vec{X}$, где

$$c_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|A_i(t)\|_{\mathcal{L}(X_i,Y_i)}\right).$$

Это означает, что каждый оператор $\vec{\mathcal{A}} \in M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)$ ограничен и для его естественной нормы, т.е. нормы, индуцированной векторной нормой пространства $\vec{X}$:

$$\left\|\vec{\mathcal{A}}\right\|_{M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)} = \inf\left\{c : \left\|\vec{\mathcal{A}}\vec{x}\right\|_{\vec{\Psi}} \leqslant c\|\vec{x}\|_{\vec{X}}, \forall\vec{x}\in\vec{X}\right\} \qquad (7)$$

справедлива оценка $\left\|\vec{\mathcal{A}}\right\|_{M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)} \leqslant c_1$.

Наделяя множество $M\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)$ линейными операциями (5), (6), нормой (7) и учитывая, что $\vec{\Psi}$— банахово пространство, получаем вещественное банахово пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{\Psi}\right)$ ограниченных линейных n-компонентных векторно-функциональных операторов, действующих из $\vec{X}$ в $\vec{\Psi}$ по закону (4).

Пусть $Y_i = H$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $\Psi_i = C([a,b]; H) = \Psi$, $i = \overline{1,n}$, т.е. $\vec{\Psi} = \Psi^n$; $W_i = C([a,b]; \mathcal{L}(X_i, H))$, $i = \overline{1,n}$. В этом случае пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{\Psi}\right)$ принимает вид $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \Psi^n\right)$.

Если $\vec{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}\left(\vec{X}, \Psi^n\right)$, то для компонент элемента $\vec{\mathcal{A}}\vec{x} = (A_1(t)x_1, A_2(t)x_2, ..., A_n(t)x_n)$ справедливы включения $A_i(t)x_i \in \Psi$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно, компоненты элемента $\vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ можно суммировать. Это позволяет ввести следующее понятие.

По определению, n-компонентный векторно-функциональный оператор $\vec{\mathcal{A}} : \vec{X} \to \Psi$ — это оператор $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), ..., A_n(t))$, где $A_i(t) \in C([a,b]; \mathcal{L}(X_i, H))$, $A_i(t)$ фиксированы, $i = \overline{1,n}$, действующий по следующему закону:

$$\vec{\mathcal{A}}\vec{x} = A_1(t)x_1 + A_2(t)x_2 + ... + A_n(t)x_n \tag{8}$$

для любого элемента $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \vec{X}$.

Проведя такие же рассуждения, что и в случае $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{\Psi}\right)$, получаем вещественное банахово пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \Psi\right)$ ограниченных линейных n-компонентных векторно-функциональных операторов, действующих из $\vec{X}$ в Ψ по закону (8).

Условимся называть операторы вида (4) n-компонентными векторно-функциональными операторами первого типа, операторы вида (8) n-компонентными векторно-функциональными операторами второго типа.

При $X_i = E$, $i = \overline{1,n}$, т.е. $\vec{X} = E^n$ получаем вещественные банаховы пространства $\mathcal{L}\left(E^n, \vec{\Psi}\right)$, $\mathcal{L}(E^n, \Psi^n)$, $\mathcal{L}(E^n, \Psi)$ ограниченных линейных n-компонентных векторно-функциональных операторов, действующих из векторного пространства E^n в соответствующее функциональное пространство по закону (4) для операторов из $\mathcal{L}\left(E^n, \vec{\Psi}\right)$, $\mathcal{L}(E^n, \Psi^n)$ и по закону (8) для операторов из $\mathcal{L}(E^n, \Psi)$.

Литература

1. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека, ред. С.Г. Крейн / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

2. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — 384 с.

3. Эдвардс Р. Функциональный анализ / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1072 с.

4. Фомин В.И. Об n-компонентных операторах / В.И. Фомин // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения

– XXXIV: Материалы международной Воронеж. весенней матем. шк. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 405–409.

5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

О НОРМИРОВАНИИ АЛГЕБРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $E^2_{\mathbb{R}} = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ и векторной октаэдрической нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ ([1, с.103]).

Рассмотрим множество комплексных операторов

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right) = \{Z = (A, B)\,|A, B \in \mathcal{L}(E)\},$$

действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по следующему закону

$$Zw = (A, B)\,(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx) \tag{1}$$

для любого элемента $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}$.

Каждый оператор $Z \in \mathcal{A}$ линеен и ограничен.

Линейные операции и операция умножения элементов множества $\mathcal{A}$ вводятся естественным образом. Пусть $Z_1 = (A_1, B_1)$, $Z_2 = (A_2, B_2)$, $Z = (A, B) \in \mathcal{A}$; $\alpha \in \mathbb{R}$. По определению, $(Z_1 + Z_2)\,w = Z_1 w + Z_2 w$, $(\alpha Z)\,w = \alpha Z w$, $(Z_1 Z_2)\,w = Z_1\,(Z_2 w)$ для любого $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}$. Используя формулу (1), получаем

$$Z_1 + Z_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)\,, \quad \alpha Z = (\alpha A, \alpha B)\,; \tag{2}$$

$$Z_1 Z_2 = (A_1, B_1)\,(A_2, B_2) = (A_1 A_2 - B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2)\,. \tag{3}$$

Для элемента $\hat{I} = (I, O) \in \mathcal{A}$ имеем $\hat{I} Z = Z \hat{I} = Z$ для любого $Z \in \mathcal{A}$.

Операция умножения (3) обладает следующими свойствами: для любых $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{A}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$, $Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$, $(Z_1 + Z_2) Z_3 = Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$, $\alpha (Z_1 Z_2) = (\alpha Z_1) Z_2 = Z_1 (\alpha Z_2)$.

Таким образом, множество $\mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}} \left(E_{\mathbb{R}}^2\right)$, снабжённое линейными операциями (2) и операцией умножения (3), есть вещественная алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в вещественном банаховом пространстве $E_{\mathbb{R}}^2$ по закону (1). Эта алгебра некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$, нулевым элементом оператор $\hat{O} = (O, O)$.

Алгебру $\mathcal{A}$ можно представить в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}} \left(E_{\mathbb{R}}^2\right) = \{Z = A + \mathrm{J}B | A, B \in \mathcal{L}(E)\},$$

где $\mathrm{J} = (O, I)$ – мнимая операторная единица.

Нормируем алгебру $\mathcal{A}$ с помощью естественной нормы, т.е. нормы, индуцированной векторной нормой пространства $E_{\mathbb{R}}^2$:

$$\|Z\|_O = \inf \left\{c : \|Zw\| \leqslant c\|w\|, \forall w \in E_{\mathbb{R}}^2\right\}. \tag{4}$$

Известно ([2, с.125]), что нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ ограниченных линейных операторов, определённых на нормированном пространстве X со значениями в банаховом пространстве Y, является банаховым пространством; в частности, пространство $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве X, снабжённое операцией умножения элементов, является банаховой алгеброй. Следовательно, $\mathcal{A}_O = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_O)$ является вещественной банаховой алгеброй, ибо $X = E_{\mathbb{R}}^2$ — банахово пространство.

Для нормирования алгебры $\mathcal{A}$ пригодны также следующие нормы:

операторная кубическая норма

$$\|Z\|_\infty = \|A + \mathrm{J}B\|_\infty = \max\{\|A\|, \|B\|\}; \tag{5}$$

операторные нормы Гёльдера

$$\|Z\|_p = \|A + \mathrm{J}B\|_p = [\|A\|^p + \|B\|^p]^{\frac{1}{p}}, \qquad (6) p \geqslant 1,$$

в частности,

операторная октаэдрическая норма

$$\|Z\|_1 = \|A + \mathrm{J}B\|_1 = \|A\| + \|B\|, \tag{7}$$

операторная евклидова норма

$$\|Z\|_2 = \|A + \mathrm{J}B\|_2 = \sqrt{\|A\|^2 + \|B\|^2}.$$

В дальнейшем понадобится

Замечание 1. *Если в линейном пространстве L введены две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, то*

1) фундаментальность последовательности $\{x_n\} \subset L$ по норме $\|\cdot\|_1$ равносильна её фундаментальности по норме $\|\cdot\|_2$;

2) сходимость последовательности $\{x_n\} \subset L$ к элементу $a \in L$ по норме $\|\cdot\|_1$ равносильна её сходимости к a норме $\|\cdot\|_2$;

3) полнота нормированного пространства $L_1 = (L, \|\cdot\|_1)$ равносильна полноте нормированного пространства $L_2 = (L, \|\cdot\|_2)$.

Пусть $Z \in \mathcal{A}$, Z фиксирован. Тогда функция $\varphi_Z(p) = \|Z\|_p$ не возрастает на полуоси $[1, +\infty)$, т.е. если $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$, то $\|Z\|_{p_2} \leqslant \|Z\|_{p_1}$. Кроме того, $\lim\limits_{p \to +\infty} \varphi_Z(p) = \|Z\|_\infty$. Таким образом, при любом $p \geqslant 1$

$$\|Z\|_\infty \leqslant \|Z\|_p \leqslant \|Z\|_1 \leqslant 2\|Z\|_\infty, \quad \forall Z \in \mathcal{A},$$

т.е. нормы (5), (6) эквивалентны.

Получаемые нормированные алгебры

$$\mathcal{A}_\infty = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_\infty); \quad \mathcal{A}_p = \left(\mathcal{A}, \|\cdot\|_p\right), p \geqslant 1, \tag{8}$$

являются вещественными банаховыми алгебрами ([3]); важнейшими из них являются алгебры $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$.

Используя замечание 1, приходим к выводу: для того, чтобы доказать полноту каждой алгебры из семейства (8), достаточно убедиться в полноте какой-либо одной алгебры из этого семейства, например в полноте алгебры $\mathcal{A}_1$.

В [4] показано, что $\|Z\|_O \leqslant \|Z\|_1$ для любого $Z \in \mathcal{A}$, т.е. норма (4) подчинена норме (7) (в иной терминологии норма (4) мажорируется нормой (7). Следовательно, любая фундаментальная последовательность а банаховой алгебре $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_1)$ фундаментальна в банаховой алгебре $\mathcal{A}_O = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_O)$; любая сходящаяся последовательность в $\mathcal{A}_1$ сходится в $\mathcal{A}_O$, причём к тому же пределу.

Литература

1. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: Иностранная литература, 1962. — 896 с.

2. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. – 496 с.

3. Фомин В.И. О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, №8. — С.1045–1054.

4. Фомин В.И. О резольвенте комплексного оператора / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т.27, №137. — С.183–197.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ИХ РОСТА[1]

Б.Н. Хабибуллин, Э.Б. Меньшикова (Уфа,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН)
khabib-bulat@mail.ru

Важную роль в исследованиях по теории функций комплексной переменной играют разнообразные формулы и неравенства, связывающие распределения корней, полюсов, масс Рисса, а также зарядов Рисса соответственно голоморфных, мероморфных, субгармонических функций, а также их разностей с одной стороны с интегралами от самих этих функций с другой. Широкие классы новых интегральных формул подобного типа получены недавно в статье [1]. Они порождают и новые неравенства в духе [2; § 2], существенно развивая неравенства из [2; основная теорема 2.1, леммы 2.2, 2.3] в случае одной комплексной переменной с применениями к различным проблемам теории функций. Остановимся на некоторых из этих неравенств. Сначала сформулируем общий результат в субгармоническом обрамлении после введения некоторых обозначений, определений и соглашений.

Через $D(r)$, $\overline{D}(r)$, $\partial D(r)$ обозначаем соответственно *открытый круг, замкнутый круг* и *окружность радиуса* $r > 0$ *с центром в нуле* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$. Всюду далее $D \subset \mathbb{C}$ — *область,* т.е. открытое связное подмножество в $\mathbb{C}$, *ограниченная* в $\mathbb{C}$ и *симметричная относительно окружности* $\partial D(r)$ в том смысле, что $D = \{r^2/\bar{z} \mid z \in D\}$, где $\bar{z}$ комплексно сопряжённое к z. Через $\overline{D}$ и ∂D обозначаем соответственно *замыкание* и *границу* области D. Очевидно, $0 \notin \overline{D}$. Для функции V на $\overline{D} \setminus D(r)$ со значениями в

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00002).

вещественной прямой $\mathbb{R}$ определено её симметричное относительно окружности $\partial D(r)$ продолжение на $\overline{D}$, обозначаемое далее как

$$V_r^{\odot}(z) \underset{z\in\overline{D}}{:=} \begin{cases} V(z) & \textit{при } z \in \overline{D} \setminus D(r), \\ V\left(\dfrac{r^2}{\overline{z}}\right) & \textit{при } z \in \overline{D} \cap D(r). \end{cases}$$

Для субгармонической на открытом множестве $O \subset \mathbb{C}$ функции $u \not\equiv -\infty$ её распределение масс Рисса определяется как борелевская мера $\varDelta_u := \frac{1}{2\pi}\triangle u$, где $\triangle$ – оператор Лапласа, действующий в обобщённом смысле. Функция U называется *δ-субгармонической на O,* если она представима в виде разности $U = u - v$ двух субгармонических u и v. Если в этом представлении $u \not\equiv -\infty$ и $v \not\equiv -\infty$, то пишем $U \not\equiv \pm\infty$ и для таких функций корректно определено *распределение зарядов Рисса* $\varDelta_U := \varDelta_u - \varDelta_v$.

Теорема 1 (неравенство для распределений зарядов Рисса). *Пусть $D \neq \varnothing$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей ∂D, симметричная относительно окружности $\partial D(r)$. Если функция $V\colon \overline{D} \setminus D(r) \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $\overline{D} \setminus D(r)$, обращается в нуль на $\partial D \setminus \overline{D}(r)$, положительна вместе с её оператором Лапласа, т.е. $V \geqslant 0$ на $\overline{D} \setminus D(r)$ и $\triangle V \geqslant 0$ в окрестности $\overline{D} \setminus D(r)$, то для любой δ-субгармонической в окрестности $\overline{D}$ функции $U \not\equiv \pm\infty$ при $U \leqslant 0$ на $\overline{D}$ имеем*

$$\int_D V_r^{\odot}\,\mathrm{d}\varDelta_U \leqslant \frac{r}{\pi}\int_{\arg D\cap\partial D(r)} U(re^{i\theta})V'_{\mathrm{rad}}(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta, \tag{1}$$

где V'_{rad} — производная по радиусу, а $\arg D \cap \partial D(r)$ — аргументы множества дуг $D \cap \partial D(r)$ в полярной системе координат.

Если F — мероморфная функция в окрестности $\overline{D}$ с не более чем счётными распределениями всех её нулей и полюсов соответственно $Z = (z_j)_{j=1,2,\dots}$ и $P = (p_j)_{j=1,2,\dots}$, перенумерованными с учётом кратности, то $U := \ln|F| \not\equiv \pm\infty$ — функция δ-субгармоническая в той же окрестности и неравенство (1) запишется в виде

$$\sum_{z_j\in D} V_r^{\odot}(z_j) - \sum_{p_j\in D} V_r^{\odot}(p_j) \leqslant \frac{r}{\pi}\int_{\arg D\cap\partial D(r)} \ln\bigl|F(re^{i\theta})\bigr|V'_{\mathrm{rad}}(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Из теоремы 1 можно получить много различных неравенств для голоморфных, мероморфных, субгармонических и δ-субгармонических функций в самых разных областях при разнообразных выборах функции V. Здесь для простоты остановимся лишь на функциях U, определённых на всей комплексной плоскости. Для борелевской меры $\varDelta \geqslant 0$ и распределения точек $Z = (z_j)_{j=1,2,\dots}$ на $\mathbb{C}$ используем их *считающие радиальные функции*

$$\varDelta^{\mathsf{rad}}(t) := \varDelta\bigl(\overline{D}(r)\bigr), \quad Z^{\mathsf{rad}}(t) := \sum_{|z_j|\leqslant t} 1 \quad \text{при всех } t \geqslant 0.$$

Через $\mathbb{R}^+ := \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| x \geqslant 0\bigr\}$ обозначаем *положительную полуось*.

Говори, что целая функция *обращается в нуль на распределении точек Z с учётом кратности* и пишем $f(Z) = 0$, если для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ кратность корня функции f в этой точке z не меньше числа вхождений этой точки z в распределение точек Z.

Теорема 2. *Пусть f — целая функция, $f(Z) = 0$ и $f(0) = 1$, M — субгармоническая функция на $\mathbb{C}$ и $\ln|f| \leqslant M$ на $\mathbb{C}$. Тогда при любых $0 < r < R < +\infty$ и $p \in \mathbb{R}^+$ имеет место неравенство*

$$\int_r^R \frac{Z^{\mathsf{rad}}(t)}{t^{p+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_r^R \frac{\varDelta_M^{\mathsf{rad}}(t)}{t^{p+1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi r^p}\int_0^{2\pi} M(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Следующая теорема существенно дополняет результаты из [3].

Теорема 3 (единственности). *Пусть M – субгармоническая функция конечного типа при порядке $\rho \in \mathbb{R}^+$, т.е.*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{M(z)}{|z|^\rho} < +\infty,$$

ограниченная снизу в некотором круге $\overline{D}(r_0)$ радиуса $r_0 > 0$, а распределение точек $Z = (z_j)_{j=1,2,\dots}$ на $\mathbb{C}$ не содержит ноль. Если

$$\sup_{p\in\mathbb{R}^+}\ \sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty} \frac{1}{r^{\rho-p}} \int_r^R \frac{Z^{\mathsf{rad}}(t) - \varDelta_M^{\mathsf{rad}}(t)}{t^{p+1}}\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

то любая целая функция f, обращающаяся в нуль на Z с учётом кратности и удовлетворяющая неравенству $\ln|f| \leqslant M$ на $\mathbb{C}$, тождественно равна нулю.

Литература

1. Меньшикова Э.Б. Интегральные формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций / Э.Б. Меньшикова // Изв. вузов. Матем. — 2022. — № 6. — С. 37–53.

2. Хабибуллин Б.Н. Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка / Б.Н. Хабибуллин // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 6. — С. 811–827.

3. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б.Н. Хабибуллин. — 4-е изд., дополненное. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — xvi+176 с. — ISBN: 978-5-7477-2992-6.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ю.Х. Хасанов (Душанбе, РТСУ)
yukhas60@mail.ru

Рассматривается векторное пространство над полем вещественных чисел. Под топологическом векторным пространством понимается хаусдорфово топологическое векторное пространство. Топология в этой пространстве определяется базисом окрестностей нуля, который удовлетворяет аксиомам Фон Неймана. Исследуются критерии абсолютно p – сходимости числовых рядов в топологическом векторном пространстве. Доказывается, что множество всех абсолютно p – сходящихся $(0 < p < \infty)$ рядов является векторным пространством. Также устанавливается, что если линейное пространство E метризуемо, то множество всех абсолютно p – сходящихся рядов в E также является метризуемой.

Пусть E – линейное пространство. Система τ – подмножеств множества E определяет в E топологию, если в этой системе τ содержится пустое множество $\emptyset$, множество E, объединение множеств любой своей подсистемы и пересечение множеств любой своей конечной подсистемы. Множество E с заданной в нем топологией τ будем называть топологическим пространством. Под топологическом векторном пространстве E будем понимать хаусдорфово топологическое векторное пространство, т.е. для каждой пары различных точек $x_1, x_2 \in E$ существуют открытые множества $G_1, G_2 (x_1 \in G_1, x_2 \in G_2)$, такие,что $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Топология в пространстве E определяется базисом окрестностей нуля $E_{[0]}$,такая,что

1. Для любого $V \in E_{[0]}$, существует $U \in E_{[0]}$, такое, что $U+V \subset V$;
2. Все $V \in E_{[0]}$ поглощающие и уравновешенные;
3. Если $\alpha \in E$ $(\alpha \neq 0)$, то существует $U \in E_{[0]}$ с $\alpha \in U$.

Определение. *В топогическом векторном пространстве E ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ называется абсолютно p – сходящимся $(0 < p < \infty)$, если для любого $A \in E_{[0]}$ ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (P_A(\alpha_k))^p < \infty,$$

где $P_A(\alpha_k)$ – функционал Минковского. Под выпуклым телом будем понимать множество A, ядро которое не пусто, т.е. если $x, y \in A$, то соединяющий их отрезок также содержится в A.

В этой работе рассмотрим критерии абсолютной p – сходимости рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tag{1}$$

в топологическом векторном пространстве E. Заметим, что ранее, аналогичные вопросы в пространстве L_p рассмотрены в работах С. Б. Стечкина [1], М.Ф.Тимана [2].

Теорема 1. *Для того, чтобы ряд (1) был абсолютно p – сходящимся в E, необходимо и достаточно, чтобы для каждой $A \in E_{[0]}$ существовала числовая последовательность $\gamma_k \in \ell_p$ такая, что $\alpha_k \in A$ для каждой $k = 0, 1, 2, 3, ...$*

Теорема 2. *Множество всех абсолютно p – сходящихся рядов $(0 < p < \infty)$ является векторным пространством.*

Теорема 3. *Пространство $\ell_p(E)$ является топологическим векторным пространством с базисом окрестностей нуля*

$$\ell_p(E_{[0]}) = \{U^p_{au} : u \in E_{[0]}\},$$

где a – положительное рациональное число.

Теорема 4. *Если E метризуемое топологиское векторное пространство, то множество всех абсолютно p – сходящихся рядов в E $\ell_p(E)$ $(0 < p < \infty)$, также является метризуемой.*

Литература

1. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С.Б. Стечкин // Мат.сб. — 1951. — Т. 29, № 1. — С. 225–232.

2. Тиман М.Ф.Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье / М.Ф. Тиман // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1961. — Т. 26, № 6. — С. 641–646.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕЧЕТКОЗНАЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В.Л. Хацкевич (Воронеж,
ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина)
vlkhats@mail.ru

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций. В настоящей работе применяется «классическое» определение производной по Хукухаре [1] и связанной с ним производной по Сеиккала [2] (коротко S-производной).

Обычно [3] при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают уравнение (или систему уравнений) для соответствующих α-индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных α-индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры [3, 4], это не всегда так.

В последние годы широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка получил метод нечеткого преобразования Лапласа [5, 6]. Однако он не представляет возможности предварительно определить, будут ли полученные функции гладкими и, соответственно, решениями.

В отличие от известных подходов, предлагаемый в данной работе опирается на развитие метода функции Грина, широко распространенного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [7, гл. 1, 2], на случай дифференциальных уравнений с нечеткозначной правой частью. Метод функций Грина полезен тем, что он дает формулы для α-индексов нечетких решений. А это позволяет привести условия, при которых производные α-индексов определяют S-производную нечеткозначного решения. В данной работе – это условие на положительность соответствующих коэффициентов динамической системы, неотрицательность соответствующей функции Грина, а также S — дифференцируемость неоднородности. Эти условия естественны для ряда прикладных задач.

Ниже используется интервальное представление нечетких чисел [8, гл. 5]. А именно, нечеткому числу $\tilde{z}$ ставятся в соответствие его α-индексы, то есть функции $z^{\pm}(\alpha) = z^{\pm}_{\alpha}$ $(\alpha \in [0, 1])$, удовлетворяющее условиям: 1) $z^-(\alpha) \leqslant z^+(\alpha)\ \ \forall \alpha \in [0,1]$; 2) функция $z^-(\alpha)$ ограничена, неубывает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0; 3) функция $z^+(\alpha)$ ограничена, невозрастает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Непрерывность и ограниченность нечеткозначных функций $\tilde{z}(t)$ ниже понимается по метрике Хаусдорфа на множестве нечетких чисел [8, гл. 5].

Рассмотрим задачу об ограниченных решениях для линейного дифференциального уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначной правой частью при $t \in (-\infty, \infty)$

$$a_n \tilde{z}^{(n)}(t) + a_{n-1}\tilde{z}^{(n-1)}(t) + ... + a_1 \tilde{z}^{'}(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{f}(t). \qquad (1)$$

Здесь $\tilde{f}(t)$ — нечеткозначная функция, коэффициенты a_i $(i = 0, ..., n)$ — вещественные числа, производные от нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ понимаются как S-производные.

Наряду с (1) рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами при $t \in (-\infty, \infty)$

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_1 x^{'}(t) + a_0 x(t) = f(t). \qquad (2)$$

где $f(t)$ — вещественнозначная функция.

Функцию $G(t)$ называют функцией Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2), если она удовлетворяет следующим условиям (см., напр., [7, гл. 1, §4]): 1) $G(t)$ непрерывно дифференцируема $(n-2)$ раза при $\forall t$, а n-ая и $(n-1)$-ая производные непрерывно дифференцируемы при $\forall t$, кроме $t = 0$, причем $G^{(n-1)}(+0) + G^{(n-1)}(-0) = 1$; 2) во всех точках, кроме $t = 0$, функция $G(t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (2) (при $f(t) \equiv 0$); 3) функция Грина и ее производные подчинены оценке $\left|G^{(i)}(t)\right| \leqslant Me^{-\gamma|t|}$ $(i = 0, 1, ..., n,\ -\infty < t < +\infty)$ где M и γ — некоторые положительные постоянные.

Лемма 1. *Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ в правой части дифференциального уравнения (1) непрерывна и ограничена на всей числовой оси, а корни характеристического уравнения $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Пусть дополнительно все коэффициенты дифференциального уравнения (1) положительны $(a_i > 0, i = 0, ..., n)$. Тогда α-индексы $z^{\pm}_{\alpha}$ нечеткого решения $\tilde{z}(t)$ дифференциального уравнения (1) при $\forall \alpha \in [0,1],\ \ \forall t \in (-\infty, \infty)$ определены единственным образом и име-*

ют вид

$$z_\alpha^-(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^-(s) ds, \quad z_\alpha^+(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^+(s) ds, \qquad (3)$$

где $f_\alpha^\pm(s)$ — индексы нечеткозначной функции $\tilde{f}(s)$, а $G(t)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного дифференциального уравнения (2).

Выражения (3) являются непрерывными и ограниченными на всей числовой оси функциями, дифференцируемыми n раз.

Отметим что, α-индексы $z_\alpha^\pm(t)$ нечеткого решения $\tilde{z}(t)$ дифференциального уравнения (1) в условиях леммы 1 удовлетворяют соотношениям ($\forall\alpha \in [0,1], \ \forall t \in (-\infty, \infty)$)

$$a_n (z_\alpha^\pm)^{(n)}(t) + a_{n-1}(z_\alpha^\pm)^{(n-1)}(t) + ... + a_1 (z_\alpha^\pm)'(t) + a_0 z_\alpha^\pm(t) = f_\alpha^\pm(t), \quad (4)$$

где $f_\alpha^\pm(t)$ – α — индексы нечеткозначной функции $\tilde{f}(t)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и дополнительно функция Грина G задачи (2) неотрицательна. Тогда выражения (3) при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ представляют собой α-индексы некоторого нечеткого числа $\tilde{z}(t)$.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и дополнительно функция Грина G задачи (2) неотрицательна. Тогда нечеткозначная функция, порождаемая при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ α-индексами (3), характеризуется представлением*

$$\tilde{z}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}(s) ds. \qquad (5)$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$, определенная формулой (5), непрерывна и ограничена по t на всей числовой оси.*

Непрерывную нечеткозначную функцию $\tilde{z}(t)$ назовем ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (1), если ее α-индексы $z_\alpha^\pm$ при $\forall\alpha \in [0,1]$ n раз дифференцируемы и удовлетворяют уравнениям (4). Таким образом, в условиях теоремы 1 нечеткозначная функция (5) есть ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение уравнения (1).

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 ультраслабое решение нечеткого дифференциального уравнения (1), ограниченное на всей числовой оси единственно.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ непрерывно S-дифференцируема при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ порядка $j \geqslant 1$, причем соответствующие S-производные ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда нечеткозначная функция (5) S-дифференцируема порядка j раз при $t \in (-\infty, \infty)$.*

Литература

1. Puri M.L., Ralescu D.A. Differential of fuzzy functions / M. L. Puri, D. A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. — 1983. — V.91. — P. 552–558.

2. Seikkala S. On the fuzzy initial value problem / S. Seikkala // Fuzzy Sets and Systems — 1987. — V.24 — № 3. — P. 319–330.

3. Khastan A., Bahrami F., Ivaz K. New Results on Multiple Solutions for Nth–Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability / A. Khastan, F. Bahrami, K. Ivaz // Boundary Value Problems — 2009. — № 7. — P. 1–13.

4. Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A. A new method for solving fuzzy linear differential equations / T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, S. Salahshour, A.Hakimzadeh // Soft Computing — 2011. — V. 92. — P. 181–197.

5. Ahmad L., Farooq M., Abdullah S. Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform / L. Ahmad , M.Farooq, S. Abdullah // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics — 2014. — P. 1–20.

6. ElJaoui E., Melliani S., Saadia Chadli L. Solving second–order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method / E. ElJaoui, S. Melliani, L. Saadia Chadli // Advances in Difference Equations —2015. — P. 1–14.

7. Красносельский М.А., Бурд, В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. / М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 351 с.

8. Аверкин А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. / А.Н.Аверкин. — М. : Наука, 1986.

ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ В РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

И.Г. Царьков (Москва, МГУ, механико-математический факультет, Центр фундаментальной и прикладной математики)
tsar@mech.math.msu.su

Для прикладных задач, в которых ищется наилучшее или почти наилучшее приближение, часто бывает необходимо использовать характеризационные свойства элементов наилучшего приближения. Геометрическая теория приближения с этой целью рассматривает понятие солнца, в определении которого лежит геометрическая переформулировка известного критерия Колмогорова для элемента наилучшего приближения. Часто это приводит к изучению различных соотношений между различными видами этих солнц, которые оказываются полезными для получения утверждений о строгих солнцах или даже о чебышевских солнцах. Такой подход оказывается плодотворным, если мы, к примеру, хотим из устойчивости приближения вывести сначала свойство δ-солнечности, а затем за счет ограничений на пространство и множество получить свойство строгой солнечности. В этой работе мы исследуем вопрос: при каких условиях на пространство и множество мы получим, что это множество является множеством существования, т.е. когда для всех точек пространства существуют ближайшие элементы в этом множестве. В настоящей работе мы в основном будем рассматривать взаимоотношения между классами δ-солнц и γ-солнц в пространствах, являющихся обобщениями линейно нормированных пространств, а именно, в линейных пространствах с некоторой несимметричной нормой $\|\cdot|$ на нем. От несимметричной нормы на линейном пространстве X будем требовать свойства: 1). $\|\alpha x| = \alpha\|x|$ для всех $\alpha \geqslant 0$, $x \in X$; 2). $\|x + y| \leqslant \|x| + \|y|$ для всех $x, y \in X$ и 3). $\|x| \geqslant 0$ для всех $x \in X$, и 3a). $\|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Несимметричная норма задается функционалом Минковского некоторого, вообще говоря, несимметричного тела, содержащего ноль в своем ядре. В общем случае пространство с несимметричной нормой удовлетворяет только аксиоме отделимости T_1 (т.е. для любых $a, b \in X$ найдутся их окрестности $O(a)$, $O(b)$ такие, что $a \notin O(b)$, $b \notin O(a)$) и может быть нехаусдорфовым.

---

[1] Исследование выполнено в МГУ им. М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00204).

Несимметричные нормы возникли, по-видимому, впервые у Г. Минковского (“функционал Минковского”;), в бесконечномерный анализ они были привнесены работами М. Г. Крейна. Термин *несимметричная норма* был предложен Крейном в 1938 г. М. Г. Крейн, в одиночку и в соавторстве, использовал несимметричные нормы при исследовании экстремальных вопросов, связанных с проблемой моментов Маркова. Важность сублинейных функционалов в ряде задач выпуклого анализа и математического анализа была отмечена Х. Кёнигом.

Обозначим также через $B^-(x,r)$ и $\mathring{B}^-(x,r)$ левые шары, т.е. соответственно множества

$$\{y \in X \mid \|x-y| \leqslant r\} \text{ и } \{y \in X \mid \|x-y| < r\}.$$

Для произвольного множества M некоторого несимметричного пространства X через $\varrho(y,M)$ ($y \in X$, $M \subset X$) обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|z-y|$. Через $\varrho^-(y,M)$ обозначим левое расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|y-z|$.

Через $P_M x$ ($P_M^- x$) обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x| = \varrho(x,M)\}$ ($\{y \in M \mid \|x-y| = \varrho^-(x,M)\}$).

Определение 1. *Точка $x \in X$ называется точкой существования (левого существования) для множества $M \subset X$, если $P_M x \neq \varnothing$ ($P_M^- x \neq \varnothing$). Множество M называется множеством существования (левого существования), если все точки $x \in X$ являются точками существования (левого существования).*

Определение 2. *Несимметричное пространство $X = (X, \|\cdot|)$ называется равномерно выпуклым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $a \in (0,1]$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $f, g \in X$: $\|f| = \|g| = 1$ из условия $\Delta(a) < \delta$ вытекает, что $f \in B(\mu g, \varepsilon)$ для некоторого $\mu \in [1-\varepsilon, 1]$.*

Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется фундаментальной (обратно фундаментальной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\|x_m - x_n| < \varepsilon$ ($\|x_n - x_m| < \varepsilon$) для всех $m \geqslant n \geqslant N$.

Несимметричное пространство $X = (X, \|\cdot|)$ называется (обратно) лево-полным, если для любой (обратной) фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset X$ существует точка $x \in X$ такая, что $\|x_n - x| \to 0$ при $n \to \infty$.

Несимметричное пространство $(X, \|\cdot|)$ лево- (право-) хаусдорфово, если для любых различных точек $a, b \in X$ найдется число $\varepsilon > 0$, для которого $B^-(a,\varepsilon)\cap B^-(b,\varepsilon)=\varnothing$ ($B(a,\varepsilon)\cap B(b,\varepsilon)=\varnothing$). Однако, если пространство лево- (право-) хаусдорфово, то оно право- (лево-) хаусдорфово. Для доказательства этого факта достаточно использовать преобразование $x\mapsto -x$. Поэтому в описанном случае мы будем говорить просто о хаусдофовости пространства.

Пусть $X=(X,\|\cdot|)$ — несимметричное полунормированное пространство, множество $M\subset X$ называется лево аппроксимативно замкнутым, если для всех точек $x\in X$ для M и для любой минимизирующей последовательности $\{y_n\}\subset M$: $\|y_n-x|\to\varrho(x,M)$ $(n\to\infty)$, сходящейся к некоторой точке $y\in X$ (т.е. $\|y_n-y|\to 0$ при $n\to\infty$), выполнены условия $y\in M$ и $\|y-x|=\varrho(x,M)$.

Множество M в несимметричном полунормированном пространстве $X=(X,\|\cdot|)$ называется γ-солнцем, если для любого $\delta>0$ всякий шар $B(x_0,r_0-\delta)$, где $r_0=\varrho(x_0,M)$ можно поместить в некоторый шар $B(x,R)$ сколь угодно большого радиуса R, не пересекающийся с M.

Пусть M – непустое подмножество несимметричного пространства $X=(X,\|\cdot|)$. Точка $x_0\in X$: $\varrho(x_0,M)>0$ называется точкой правой обратной δ-солнечности для M, если существует последовательность точек $\{x_n\}$: $\|x_0-x_n|\to 0$ $(n\to\infty)$, для которой $\frac{\varrho(x_n,M)-\varrho(x_0,M)}{\|x_0-x_n|}\to 1$ $(n\to\infty)$. Множество M называется правым обратным δ-солнцем, если любая точка $x\in X$: $\varrho(x,M)>0$ является точкой правой обратной δ-солнечности для M.

Теорема А. *Пусть $X=(X,\|\cdot|)$ — лево-полное равномерно выпуклое несимметричное пространство, $M\subset X$ – лево-аппроксимативно замкнутое γ-солнце. Тогда M – множество существования.*

Теорема 1. *Пусть $X=(X,\|\cdot|)$ — хаусдорфово лево-полное и обратно лево-полное равномерно выпуклое несимметричное пространство, $M\subset X$ – непустое лево-аппроксимативно замкнутое право обратное δ-солнце. Тогда M – множество существования.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

О.Б.Цехан (Гродно, ГрГУ)
tsekhan@grsu.by

[1] Работа поддержана БРФФИ, Ф22-050.

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с постоянным запаздыванием по состоянию вида

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = \mathbf{A}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})y(t),\ x \in \mathbb{R}^{n_1},\\
&\mu\dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t),\ y \in \mathbb{R}^{n_2},\ t \in T \triangleq [t_0, t_1],\\
&\{x_0(\cdot), y_0(\cdot)\} = \{\varphi(\theta), \psi(\theta), \theta \in T_h \triangleq [t_0 - h, t_0]\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x — медленная переменная, y — быстрая переменная, μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$, $h = const > 0$, e^{-ph} — оператор чистого запаздывания: $e^{-ph}f(t) = f(t-h)$, $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}\,(t) + A_{i1}\,(t)\,e^{-ph}$, $i = 1, 2,$ — матричные операторы, $A_{ij}\,(t)\,,\ i = 1, 2, j = 0, 1$, $A_k\,(t)\,, k = 3, 4,$ — непрерывно дифференцируемые на T матричные функции подходящих размеров, $\varphi(\theta), \psi(\theta)$, $\theta \in T_h$ — заданные n_1– и n_2– вектор-функции, соответственно.

Для системы (1) аналогично [1,2] вводятся вырожденная система (ВС) и система погранслоя (СП). ВС представляет собой линейную нестационарную систему с n_1-мерным вектором переменных $x_s\,(t)$ с запаздыванием в состоянии. СП в «растянутой» шкале времени $\tau = \frac{t - t_0}{\mu}$ является стационарной системой без запаздывания относительно n_2-вектора переменных $y_f\,(\tau)$.

Предположение. $Re\ \lambda\,(A_4\,(t)) < -2\gamma < 0 \quad \forall t \in T,\ \gamma = const > 0$ [2].

Продолжим с T на T_h матричные функции системы (1) так, что они непрерывно дифференцируемы на $T_h \cup T$ и матрица $A_4(t)$ удовлетворяет предположению для любого $t \in T_h \cup T$.

По матричным параметрам системы (1) определим функции:

$$\begin{aligned}
&L_0^0(t) = A_4^{-1}(t)A_3(t),\ H_0^0(t) = A_{20}(t)A_4^{-1}(t),\\
&L_0^1(t) = A_4^{-1}(t)\left(L_0^0(t)A_{10}(t) - L_0^0(t)A_{20}(t)L_0^0(t) + \dot{L}_0^0(t)\right),\\
&L_1^1(t) = A_4^{-1}(t)\left(L_0^0(t)A_{11}(t) - L_0^0(t)A_{21}(t)L_0^0(t-h)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&H_0^1(t) = \Big(\left(A_{10}(t) - A_{20}(t)L_0^0(t)\right)H_0^0(t) - H_0^0(t)L_0^0(t)A_{20}(t) -\\
&-\dot{H}_0^0(t)\Big)\,A_4^{-1}(t),\\
&H_1^1(t) = \big(A_{11}(t)H_0^0(t-h) + A_{10}(t)H_1^0(t) - A_{20}(t)L_0^0(t)H_1^0(t) -\\
&-A_{21}(t)L_0^0(t-h)H_0^0(t-h) - H_1^0(t)L_0^0(t-h)A_{20}(t-h) -\\
&-H_0^0(t)L_0^0(t)A_{21}(t) - \dot{H}_1^0(t)\Big)\,A_4^{-1}(t-h),\\
&H_2^1(t) = \big(A_{11}(t)H_1^0(t-h) - A_{21}(t)L_0^0(t-h)H_1^0(t-h) -\\
&-H_1^0(t)L_0^0(t-h)A_{21}(t-h)\big)\,A_4^{-1}(t-2h).
\end{aligned} \tag{2}$$

Теорема (об аппроксимации 1-го порядка). *Пусть выполнено предположение, $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$, $\theta \in T_h$, — интегрируемые с квадратом функции и функция $H_1^0\left(t\right)\left(L_0^0(t-h)\varphi(t-h)+\psi(t-h)\right)$ имеет на $[t_0+h, t_1]$ ограниченные производные. Тогда существует $\mu^*>0$ такое, что для всех $\mu \in (0,\mu^*]$ функции*

$$x^1\left(t\right)=x_s\left(t\right), y^1\left(t\right)=y_f\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)-L_0^0\left(t\right)x_s\left(t\right),\ t\in T,$$

являются равномерными на $t\in T$ асимптотическими аппроксимациями 1-го порядка решения задачи (1):

$$x\left(t\right)=x^1\left(t\right)+O\left(\mu\right), y\left(t\right)=y^1\left(t\right)+O\left(\mu\right),\ t\in T. \tag{3}$$

Схема доказательства. Используя свойства фундаментальной матрицы [1, стр. 92] доказываем, что для достаточно малых $\mu>0$ решение системы (1) равномерно ограничено на T. Определим преобразование системы (1), порождаемое нелокальной заменой переменных $(\xi\left(t\right)\in \mathbf{R}^{n_1}$, $\eta\left(t\right)\in\mathbf{R}^{n_2}$, $t\in T)$ из класса $\mathcal{R}_4$ [3]:

$$\begin{gathered}
x\left(t\right)=\xi\left(t\right)+\mu H_0^0\left(t\right)\eta\left(t\right)+\mu H_1^0\left(t\right)\eta(t-h),\\
y\left(t\right)=-\left(L_0^0\left(t\right)+\mu L_0^1\left(t\right)\right)\xi\left(t\right)-\mu L_1^1\left(t\right)\xi\left(t-h\right)+\\
+\eta\left(t\right)-\mu L_0^0\left(t\right)H_0^0\left(t\right)\eta\left(t\right)-\mu L H_1^0(t)\eta(t-h),\\
\eta(\theta)=L(\theta)\varphi(\theta)+\psi(\theta),\, \theta\in T_h.
\end{gathered}$$

Доказана обратимость введенной замены переменных, получены уравнения динамики системы в новых переменных состояния. Далее в уравнении для $\eta\left(t\right)$ выполняется замена независимой переменной $\tau=\frac{t-t_0}{\mu}$. Используя линейную аппроксимацию функции $A_4\left(t_0+\mu\tau\right)$ в окрестности точки $\mu=0$, отбрасывая в матричных коэффициентах уравнений для $\xi\left(t\right),\eta\left(t\right)$ слагаемые порядка $O(\mu)$, получаем системы, совпадающие с ВС и СП, учитывая непрерывную зависимость решений которых от начальных условий и параметров [3, стр. 51], убеждаемся в справедливости аппроксимации $\xi\left(t\right)=x_s\left(t\right)+O\left(\mu\right)$, $\eta\left(\tau\right)=y_f\left(\tau\right)+O\left(\mu\right),\ t\in T$. Применяя теперь обратное преобразование, получаем равенство (3).

Теорема (об аппроксимации 2-го порядка). *Пусть выполнено предположение, $A_{ij}(t)$, $A_{i+2}(t)$, $i=1,2$, $j=0,1$, имеют первые производные, ограниченные на $T_h\cup T$, $\varphi(\theta),\psi(\theta)$, $\theta\in T_h$, — дифференцируемые функции с ограниченными производными. Тогда суще-*

ствует $\mu^* > 0$ *такое, что для всех* $\mu \in (0, \mu^*]$ *функции*

$$x^2(t) = \xi(t) + \mu H_0^0(t)\eta(\tfrac{t-t_0}{\mu}) + \mu H_1^0(t)\eta(\tfrac{t-h-t_0}{\mu}),\ t \in T,$$
$$y^2(t) = (E_{n_2} - \mu L_0^0(t)H_0^0(t))\eta(\tfrac{t-t_0}{\mu}) - \left(L_0^0(t) + \mu L_0^1(t)\right)\xi(t) -$$
$$-\mu L_0^0(t)H_1^0(t)\eta(\tfrac{t-t_0-h}{\mu}) - \mu L_1^1(t)\xi(t-h),\ t \in T,$$

являются равномерными асимптотическими аппроксимациями 2-го порядка решения задачи (1). Здесь $\xi(t), \eta(t)$ *– решения задачи*

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})\xi(t) + \mathbf{F}_{\xi 0}(t, \mu, e^{-ph}),\ \xi \in \mathbf{R}^{n_1},$$
$$\mu\dot{\eta}(t) = \mathbf{A}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph})\eta(t) + \mathbf{F}_{\eta 0}(t, \mu, e^{-ph}),\ \eta \in \mathbf{R}^{n_2},\ t \in T,$$
$$\xi(\theta, \mu) = \varphi(\theta) - \mu H_0^0(\theta)(\psi(\theta) + L_0^0(\theta)\varphi(\theta)),\ \theta \leqslant t_0,$$
$$\eta(\theta, \mu) = \psi(\theta) + (L_0^0(\theta) + \mu L_0^1(\theta))\varphi(\theta),\ \theta \leqslant t_0,$$
$$\varphi(\theta) \equiv 0, \psi(\theta) \equiv 0,\ \theta < t_0 - h,$$

где $\mathbf{F}_{s0}(t, \mu, e^{-ph})$, $s \in \{\xi, \eta\}$, *— функции, выраженные через (2) и* $\varphi(\theta), \psi(\theta), \theta \in T_h$, $\mathbf{A}_{\xi 0}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2} A_{\xi j}(t, \mu)e^{-jph}$, $\mathbf{A}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{1} A_{\eta j}(t_0, \mu)e^{-jph}$, $A_{\xi j}(t, \mu)$, $j = 0, 1, 2$, $A_{\eta i}(t_0, \mu)$, $i = 0, 1$, *– матричные функции, выраженные через матричные функции (2).*

Литература

1. Glizer V. Singularly perturbed linear time delay systems / V. Glizer. — Birkhauser, Cham, 2021.

2. Tsekhan O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay / O. Tsekhan // Tchemisova T.V., Torres D.F.M., Plakhov A.Y. (eds). Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceed. in Math. & Stats. Springer, Cham. — 2022. — Vol. 407 — P. 77—97.

3. Марченко, В. М. Реализация динамических систем в шкалах систем с последействием: I. Реализуемость / В.М. Марченко, Ж.-Ж. Луазо // Диф. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 11. — С. 1515–1523.

4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / Дж. Хейл. — М.: Мир, 1984.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗОВОЙ СМЕСИ С ГРАФЕНОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ[1]

А.С. Челнокова, А.М. Бубенчиков (Томск, ТГУ)

smolina-nyuta@mail.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-10049 П).

В этом исследовании мы предлагаем простую и эффективную математическую модель взаимодействия компонент газовой смеси с одиночными включениями макромолекул и графеновой стенкой.

Пусть в некотором представительном объеме газовой среды, взятом в абсолютной системе координат $Ox^1x^2x^3$, находятся N частиц газа одной компоненты, M—N частиц второй компоненты, одна грань представительного объема выполнена из графена, имеющего K—M атомов углерода, и крупная макромолекула, например фуллерен, состоящий из L—K атомов углерода. Тогда уравнения движения частиц 1-ой компоненты будут иметь вид:

$$m_1 \frac{dv_i^l}{dt} = -\sum_{k=1,k\neq i}^{N} \frac{\partial U_{11}(\rho_i k)}{\partial x_k^l} - \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\partial U_{12}(\rho_i k)}{\partial x_k^l} - \\ - \sum_{k=M+1}^{L} \frac{\partial U_{13}(\rho_{ik})}{\partial x_k^l}, i = 1, ..., N, l = 1, 2, 3.$$

Здесь v_i^l — проекции скорости i-ой частицы 1-ой компоненты газа на l-ую ось координат; m_1 —масса частицы газа 1-ой компоненты; U_{11} — потенциал парных взаимодействий для частиц 1-ой компоненты газа; U_{12} — потенциал взаимодействия частиц 1-ой и 2-ой компонент; U_{13} — потенциал взаимодействия частиц 1-ой компоненты с атомами углерода в имеющихся структурах; x_k^l — декартовы координаты k-ой частицы на l-ую ось координат; $\rho = \sqrt{\sum_{l=1}^{3}(x_i^l - x_k^l)^2}$ — расстояние между двумя силовыми центрами.

Аналогично можно записать уравнения движения частиц второй компоненты газа для $i = N + 1, ..., M$.

Если в газе присутствуют включения крупных макромолекул, то для них необходимо также записать уравнения для движения их центров масс:

$$m_f \frac{dv_c^l}{dt} = -\sum_{i=K+1}^{L} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U_{13}(\rho_i k)}{\partial x_k^l} + \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\partial U_{23}(\rho_i k)}{\partial x_k^l} + \sum_{k=M+1}^{K} \frac{\partial U_{33}(\rho_i k)}{\partial x_k^l} \right).$$

Здесь m_f — масса фуллерена; v_c^l — проекция скорости центра масс фуллерена на l-ую ось координат, $l = 1, 2, 3$.

Представленные дифференциальные уравнения должны замыкаться кинематическими соотношениями при наличии начальных данных.

Следует отметить, что фуллерен достаточно крупная молекула и кинетическая энергия его вращений может превосходить кинетическую энергию его же трансляционных движений. Поэтому следует записать уравнения вращательного движения фуллерена:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{3} A_k^l \omega_{x^l}\right) = L_{x^l}, l = 1, 2, 3.$$

Здесь A_k^l — компоненты тензора инерции, которые в процессе численных расчетов вычисляются для каждого k-ого силового центра в абсолютной системе координат; ω_{x^l} — компоненты вектора мгновенной угловой скорости ω; L_{x^l} — проекции моментов сил, действующих на фуллерен, на l-ую ось координат.

Следуя теореме сложения скоростей для каждого атома фуллерена можем записать: $v_k = v_c + \omega \times r_k$

Тогда координаты атомов фуллерена найдутся из кинематического соотношения $\frac{dr_k}{dt} = v_k$, где r_k — радиус вектор положения k-ого атома углерода в фуллерене, а v_k — его вектор скорости.

Расчеты по описанной модели показали, что в термодинамически равновесных условиях как трансляционная, так и энергия вращений фуллерена испытывают длительные и непериодические изменения. Если энергетическое состояние крупной углеродной молекулы определять в температурных единицах, то амплитуда этих изменений составляет величину порядка 20 К. При этом средне арифметическая величина этих энергий близка к термодинамически равновесной температуре системы.

Также результаты численного моделирования позволяют определить диффузионный перенос фуллереновых частиц в двухкомпонентной смеси газов, например He/N_2 и дать оценки по сорбционным свойствам неподвижной моноатомной поверхности графена.

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В.Ф. Чистяков (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
chist@icc.ru

Рассматриваются системы уравнений первого порядка в частных производных

$$\Lambda_1(D_t, D_x)\mathrm{u} = A(x,t)D_t\mathrm{u} + B(x,t)D_x\mathrm{u} + C(x,t)\mathrm{u} = \mathrm{f}(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in \mathcal{U} = X \times T,$$

где $X = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}^1$, $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^1$, $\mathrm{f}(x,t)$ — заданные, $\mathrm{u} \equiv \mathrm{u}(x,t)$ — искомая вектор-функции, $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы, $D_t \equiv \partial/\partial t$, $D_x \equiv \partial/\partial x$. Начальные и краевые условия заданы в виде

$$\mathrm{u}(x_0, t) = \varphi(t),\ \mathrm{u}(x, t_0) = \psi(x). \tag{2}$$

Допускаются следующие виды вырождения:

$$\Theta(\lambda, \mu) = \det[\lambda A(x,t) + \mu B(x,t) + C(x,t)] = 0\ \forall (x,t) \in \mathcal{U},$$

где λ, μ–произвольные параметры (в общем случае комплексные). Обычно вводят условия

$$\det A(x,t) = 0,\ \det B(x,t) = 0\ \forall (x,t) \in \mathcal{U}, \tag{3}$$

Системы (1), удовлетворяющие условиям (3), принято называть дифференциально- алгебраическими уравнениями (ДАУ) в частных производных или вырожденными системами в частных производных.

Под решениями систем (1) мы понимаем любые дифференцируемые вектор–функции u, со свойством $\Lambda_1(D_t, D_x)\mathrm{u} \equiv \mathrm{f}(x,t)$, $(x,t) \in \mathcal{U}$.

Определение 1. *Пусть определены операторы*

$$\Omega_l(D_x) = \sum_{j=0}^{l} L_j(x,t)D_x^j,\ \Lambda_k(D_x) = \sum_{j=0}^{k} A_j(x,t)D_x^j$$

где $L_j(x,t)$, $A_j(x,t)$ – $(n \times n)$*-матрицы по крайней мере из* $\mathbf{C}(\mathcal{U})$, *обладающие свойствами*

$$\Omega_l(D_x) \circ \Lambda_k(D_x)\upsilon = \hat{\Lambda}_k(D_x)\upsilon,\ \forall \upsilon \equiv \upsilon(x,t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{U}),$$

где $\hat{\Lambda}_k(D_x)\upsilon = \sum_{j=0}^{k} \hat{A}_j(x,t)D_x^j\upsilon$, $\hat{A}_j(x,t)$ – $(n \times n)$*–некоторые матрицы из* $\mathbf{C}(\mathcal{U})$,

$$\det \hat{A}_k(x,t) \neq 0\ \forall (x,t) \in \mathcal{U}.$$

Тогда оператор $\Omega_l(D_x)$ *называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО) для оператора* $\Lambda_k(D_x)$, *а наименьшие возможные* l *называется его индексом (левым). Индекс оператора* $\Lambda_k(D_x)$, *где* $\det A_k(x,t) \neq 0\ \forall (x,t) \in \mathcal{U}$, *полагается равными нулю.*

Если для оператора $\Lambda_k(D_x)$ определен ЛРО, то при достаточно гладких входных данных система уравнений

$$\Lambda_k(D_x)u = f(x,t),\ (x,t)\in\mathcal{U}, \tag{4}$$

разрешима при любом свободном члене $f(x,t)$ и все решения системы представимы в виде соотношений

$$u\equiv u(x,t) = X_d(x,t)c(t)+\psi(x,t),\ (x,t)\in\mathcal{U},$$

где $X_d(x,t)$ – $(n\times d)$–матрица, $0\leqslant d\leqslant nk$, $\Lambda_k(D_x)X_d(x,t)=0$, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} X_d(x,t)\\ D_xX_d(x,t)\\ \vdots \\ D_x^{k-1}X_d(x,t)\end{pmatrix} = d$, $c(t)$–произвольная вектор–функция,

$$\psi(x,t) = \int\limits_{\alpha}^{x} K(t,x,s)f(s,t)ds,\ l<k,\ d\neq 0, \tag{5}$$

$$\psi(x,t) = \int\limits_{\alpha}^{x} K(t,x,s)f(s,t)ds +$$

$$\sum_{j=0}^{l-k} C_j(x,t)D_x^j f(x,t),\ l\geqslant k,\ \ d\neq 0,$$

$$\psi(x,t) = u = \sum_{j=0}^{l-1} C_j(x,t)D_x^j f(x,t),\ d=0,$$

где $K(t,x,s),\ C_j(x,t)$ – $(n\times n)$–некоторые матрицы.

Определение 2. *Пусть определен оператор*

$$\tilde\Omega_l(D_t,D_x) = \sum_{j=0}^{\tilde l}\Lambda_{k_j}(D_x)D_t^j,$$

где $\Lambda_{k_j}(D_x)$-операторы со структурой описанной в определении 1, обладающий свойством

$$\tilde\Omega_l(D_t,D_x)\circ\Lambda_1(D_t,D_x)\upsilon = \hat\Lambda_{\hat k}(D_x)D_t\upsilon + \tilde\Lambda_{\tilde k}(D_x)\upsilon\ \forall\upsilon\in\mathbf{C}^\infty(\mathcal{U}),$$

где для оператора $\hat{\Lambda}_{\hat{k}}(D_x)$ определен ЛРО (в частности, возможно, что $\hat{\Lambda}_{\hat{k}}(D_x) = \hat{A}_{\hat{k}}(x,t)$, $\det \hat{A}_{\hat{k}}(x,t)) \neq 0 \; \forall (x,t) \in \mathcal{U}$. Тогда оператор $\tilde{\Omega}_l(D_t, D_x)$ называется ЛРО для оператора системы (1), а наименьшие возможные l называется его индексом (левым) по t.

Если для оператора $\Lambda_1(D_t, D_x)$ определен ЛРО, то, используя формулы (5), мы сможем свести ДАУ (1) к системе, разрешенной относительно производной по t. Так как производные D_t, D_x входят в систему (1) равноправным образом, то можно аналогично определить индекс и по переменной x.

Пример 1. Пусть задана система

$$\Lambda_1(D_t, D_x)\mathrm{u} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_t\mathrm{u} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{xt} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_x\mathrm{u} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \gamma(x,t) & 0 \\ 0 & e^{xt} & \alpha_5 \end{pmatrix} \mathrm{u} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $(x,t) \in \mathcal{U} = [1,2] \times [1,2]$, $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3 \end{pmatrix}^\top$, $\top$ — символ транспонирования, α_i, $i = \overline{1,5}$ — числовые параметры, $\gamma(x,t)$ — некоторая функция. Характеристический многочлен имеет вид

$$\Theta(\lambda, \mu) = (\lambda + \mu\alpha_1 + \alpha_2)[\mu e^{xt}(\alpha_5 - 1) + \alpha_5\gamma(x,t)].$$

В классической теории, когда матрицы $A(x,t)$, $B(x,t)$ невырожденные, корни уравнения $\Theta(\lambda, \mu) = 0$ несут информацию о типе системы и структуре множества решений (см. например, книгу [1]). Для нашего примера это не так. Пусть $\gamma(x,t) \equiv 0$, $\alpha_5 = 1$. Тогда имеем вырождение вида $\Theta(\lambda, \mu) \equiv 0 \; \forall (x,t) \in \mathcal{U} \; \forall \lambda, \mu$.

Проведем анализ ДАУ (6). Методом исключения неизвестных из второго и третьего уравнения находим:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{pmatrix} = \Lambda_2(D_x)g = \frac{1}{w(x,t)} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{xt} & w(x,t) \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e^{xt} \end{pmatrix} D_x g \right],$$

где $g = \begin{pmatrix} f_2 & f_3 \end{pmatrix}^\top$, $w(x,t) = [\gamma(x,t) - te^{xt}] \neq 0 \; \forall (x,t) \in \mathcal{U}$. Подставим эти компоненты в первое уравнение ДАУ (6). Получим уравнение

$$D_t\mathrm{u}_1 + \alpha_1 D_x\mathrm{u}_1 + \alpha_2\mathrm{u}_1 = \Psi(x,t), \tag{7}$$

где $\Psi(x,t) = f_1 - \alpha_3 \mathrm{u}_2 - \alpha_4 \mathrm{u}_3$. Уравнение (7) является гиперболическим. Таким образом ДАУ (6) разрешима при любых достаточно гладких входных данных и допускает корректную постановку начально-краевой задачи вида (1),(2). В качестве ЛРО можно принять оператор $\tilde{\Omega}_1(D_t, D_x) = \mathrm{diag}\{1, D_t\Lambda_2(D_x)\}$.

На примере 1 рассмотрим трудности применения численных методов. Введем в области $\mathcal{U}$ сетку $\mathbf{U}_{h,\tau} = \{(x_i, t_j) : \; x_i = x_0 + ih, \; t_j = t_0 + j\tau, \; i = 0, 1, 2, ..., N_1, \; j = 0, 1, 2, ..., N_2\}$ и рассмотрим неявную популярную трехточечную схему

$$A_{i,j}\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} + B_{i,j}\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + C_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j}, \qquad (8)$$

где $A_{i,j} = A(x_i, t_j)$, $B_{i,j} = B(x_i, t_j)$, $C_{i,j} = C(x_i, t_j)$, $f_{i,j} = f(x_i, t_j)$, $u_{i,0} = \varphi(x_i)$, $u_{0,j} = \psi(t_j)$. Обратим внимание, что при условиях $A(x,t) \equiv 0$ или $B(x,t) \equiv 0$ схема (7) является схемой неявного метода Эйлера. Вычисления производятся по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{i,j}u_{i,j} = (A_{i,j} + \kappa B_{i,j} + \tau C_{i,j})u_{i,j} = \\ = A_{i,j}u_{i,j-1} + \kappa B_{i,j}u_{i-1,j} + \tau f_{i,j}, \end{aligned} \qquad (9)$$

где $\kappa = \tau/h$.

В нашем случае методом исключения неизвестных после простых, но громоздких выкладок получается оценка

$$\|u_{i,j}\|_E = O(1/|\tilde{\gamma}|^i),$$

где $\tilde{\gamma} = \min|\gamma(x,t)|, \; (x,t) \in \mathcal{U}, \; \|.\|_E-$ евклидова норма вектора. Таким образом, если существует точка $(x_*, t_*) : \; |\gamma(x_*, t_*)| < 1$, то метод является расходящимся. Примеры с аналогичными свойствами можно построить и для разностных схем более высокого порядка.

Преодолеть указанные препятствия можно с помощью вариационные методов, в частности, можно использовать метод наименьших квадратов (МНК). Тогда исходная задача сводится к поиску минимума функционала

$$\Phi(\mathrm{u}) = \|\Lambda_1(D_t, D_x)\mathrm{u} - f(x,t)\|_{\mathbf{W}_2^{\kappa}(\mathcal{U})} +$$

$$\|\mathrm{u}(x, t_0) - \varphi(x)\|_{\mathbf{W}_2^{\kappa}(X)} + \|\mathrm{u}(x_0, t) = \psi(t)\|_{\mathbf{W}_2^{\kappa}(T)},$$

где параметр κ определяется индексами системы. В докладе обсуждаются методики выбора координатных функций и оценки погрешности. Применение МНК для решения обыкновенных ДАУ рассматривалось ранее в ряде статей (см., например, [2, 3] и приводимую там библиографию).

Литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. — М. : Наука, 1979.

2. Chistyakov V. F., On the concept of index for partial differential algebraic equations arising in modelling of processes in power plants / V.F. Chistyakov, E.V. Chistyakova // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. — 2017. — Т. 10, № 2. —С. 5–23.

3. Чистяков В. Ф. Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений /В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2013. — Т. 16, № 1. — С. 81–95.

ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАЛОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)

shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Получены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем третьего и пятого порядка, в которых может быть соответственно выделена система на касательном расслоении к одномерному или двумерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [1, 2], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [3, 4, 5]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m-1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах автора [5, 6]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система с двумя степенями свободы на своем четырехмерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Литература

1. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.

2. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

3. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.

4. Шамолин М.В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 512, № 1. — С. 10–17.

5. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 509, № 1. — С. 69–76.

6. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией / М.В. Шамолин //

Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления — 2022. — Т. 507, № 1. — С. 86–92.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЧЕТНОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

Из теоремы 4 статьи [1] об однозначной определенности решений дифференциальных уравнений

$$P(x, D)u = f,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

следует, что свойство локальной четности решений этих уравнений при определенных условиях, наложенных на область Ω, на оператор

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\ i^2 = -1, \qquad (1)$$

порядка $m \geqslant 1$ с вещественно аналитическими, комплекснозначными коэффициентами, определенный в Ω, и на правую часть уравнения $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (см. [2]) продолжается на всю область Ω.

Обозначим через $\mathcal{K}_x(P) \subset T_x^*\Omega$ ядро симметрической m-линейной формы, индуцируемой в точке $x \in \Omega$ и старшим символом оператора $P(x, D)$. Предположим, что:

1. $\bigcup\limits_{x \in \Omega} (x, K_x(P) \setminus \{0\}) = \mathrm{Char}(P)$;
2. коразмерность ядра $K_x(P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$ и равна k.

В этом случае множество $\cup_{x\in\Omega}(x, K_x(P))$ образует подрасслоение $K(P)$ кокасательного расслоения $T^*\Omega$ коразмерности k, которое в касательном расслоении $T\Omega$ индуцирует гладкое k-мерное подрасслоение:

$$L(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \,|\, x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0\ \forall \xi \in K_x(P)\}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(P)$ дифференциальную систему, порожденную $L(P)$, то есть подмодуль C^∞-сечений подрасслоения $L(P) \subset T\Omega$ модуля C^∞-сечений $\mathcal{T}\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождает в C^∞-модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞-подмодулей $\mathcal{H}^j$, в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули $\mathcal{H}^{j+1}$ порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Дифференциальную систему $\mathcal{L}$ называют вполне неголономной, если найдется такое число r, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \underset{\neq}{\subseteq} \mathcal{H}^2 \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \underset{\neq}{\subseteq} \mathcal{H}^r = \mathcal{T}\Omega.$$

Дополнительно к условиям (1) и (2) предположим, что

3. дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ вполне неголономна

Пусть $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — проектор (см. [3]) и $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$R_{x^0,\kappa}(x) = x - 2\kappa(x - x^0).$$

Тогда отображение $R_{x^0,\kappa} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является диффеоморфизмом, причем $(R_{x^0,\kappa})^2(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, и $R_{x^0,\kappa}x = x$, $\forall x \in x^0 + \ker\kappa$, где $\ker\kappa = \{y \mid \kappa y = 0\}$, то есть точки плоскости $x^0 + \ker\kappa$ являются неподвижными для $R_{x^0,\kappa}$.

Предположим, что

4. $R_{x^0,\kappa}\Omega = \Omega$

В этом случае индуцированное отображение пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$ на себя $R^*_{x^0,\kappa} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ является линейным и взаимно однозначным отображением, причем

$$(R^*_{x^0,\kappa})^2 f = f, \forall f \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Теорема 1. *Если оператор $P(x,D)$ и правая часть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ уравнения $P(x,D)u = f$ удовлетворяют условиям: $R^*_{x^0,\kappa}P(x,D) = (-1)^{k_P}P(x,D)R^*_{x^0,\kappa}$ и $R^*_{x^0,\kappa}f = (-1)^{k_f}f$, в которых k_P и $k_f \in \mathbb{N}$, то из равенства ростков $v_{x^1} \cong (-1)^{k_P+k_f}(R^*_{x^0,\kappa}v)_{x^1}$ в точке $x^1 \in \Omega$ решения $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ этого уравнения следует равенство обобщенных функций $v = (-1)^{k_P+k_f}R^*_{x^0,\kappa}v$.*

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$(P(x,D)u =)\big(D_1^2 + (D_2 + x_1D_3)^2\big)u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \qquad (2)$$

Легко проверить, что оператор $P(x,D)$ удовлетворяет условиям (1), (2) и (3). Пусть $x^0 = 0$ и $\kappa(x) = (x_1, 0, x_3)$. Тогда отображение $R_{0,\kappa}(x_1,x_2,x_3) = x - 2\kappa(x) = (-x_1, x_2, -x_3)$ является оператором отражения точки x относительно координатной оси $\{x \mid x_1 =$

$x_3 = 0\}$. Оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условию $R^*_{0,\kappa} P(x, D) = P(x, D) R^*_{0,\kappa}$. Из теоремы вытекает, что решение $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию четности $v(-x_1, x_2, -x_3) = (-1)^k v(x_1, x_2, x_3)$ в некоторой симметричной относительно отображения $R_{0,\kappa}$ окрестности начала координат, удовлетворяет этому условию во всех точках пространства $\mathbb{R}^3$.

Литература

1. Шананин Н.А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н.А. Шананин // Матем. заметки 111:6 (2022), С. 921–928; Math. Notes, 111:6 (2022), P. 954–960.

2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1) / Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.

3. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. / П. Халмош. — М. : Государственное издательство физико–математической литературы, 1963. — 264 с.

NEW NONLINEAR STOCHASTIC EQUATIONS OF SCHRODINGER-BELAVKIN TYPE DESCRIBING CONTINUOUSLY OBSERVED QUANTUM SYSTEMS OF A LARGE NUMBER OF PARTICLES

V.N. Kolokoltsov (Moscow, MSU)
v.n.kolokoltsov@gmail.com

The derivation of an equation describing the limiting individual behavior of particles inside a large ensemble of identical interacting particles is a well developed topic in quantum mechanics literature. The resulting equations are generally referred to as nonlinear Scródinger equations or Hartree equations, or Gross-Pitaevski equations. We extend these theories to a stochastic framework. Concretely we work with the Belavkin stochastic filtering of continuously observed multi-particle quantum systems. In this way we derive limiting nonlinear quantum equations of a new type, which can be looked at as complex-valued infinite dimensional nonlinear diffusion of McKean-Vlasov type. These equations play the key role for the theory of quantum mean-field games developed recently by the author. The results of the talk can be considered as a development of the ideas from the well known works of Belavkin and Maslov on the scaling limit of quantum and classical systems of interacting particles. The talk aims to further develop the ideas from author's papers [1] and [2].

Литература

1. Kolokoltsov V.N. The law of large numbers for quantum stochastic filtering and control of many particle systems. / Kolokoltsov V.N. // Theoretical and Mathe- matical Physics 208:1. — 2021. — P. 97–121.

2. Kolokoltsov V.N. Quantum mean field games. / Kolokoltsov V.N. // Annals Applied Probability 32:3 — 2022. — P. 2254–2288.

CLASSICAL SOLUTION OF THE FIRST MIXED PROBLEM FOR A MILDLY QUASILINEAR WAVE EQUATION[1]

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko

(Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus)

janycz@yahoo.com

In the domain $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ of two independent variables $(t,x)\in Q\subset\mathbb{R}^2$, consider the one-dimensional nonlinear equation

$$\Box u(t,x) + f(t,x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)) = F(t,x), \qquad (1)$$

where $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ is the d'Alembert operator ($a>0$ for definiteness), F is a function given on the set $\overline{Q}$, and f is a function given on the set $[0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$. Eq. (1) is equipped with the initial condition

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x\in[0,\infty), \qquad (2)$$

and the boundary condition

$$u(t,0) = \mu(t), \quad t\in[0,\infty), \qquad (3)$$

where φ, ψ and μ are functions given on the half-line $[0,\infty)$.

Theorem 1. *Let the conditions $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}^3)$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, and $\mu\in C^2([0,\infty))$ be satisfied, and let the*

[1] The work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics by Agreement № 075-15-2022-284.

function f satisfy the Lipschitz condition with respect to the three last variables, i.e., there exists a function $k \in C(\overline{Q})$ such that

$$|f(t,x,u_1,u_2,u_3) - f(t,x,w_1,w_2,w_3)| \leqslant \\ \leqslant k(t,x)(|u_1 - w_1| + |u_2 - w_2| + |u_3 - w_3|).$$

The first mixed problem (1) — (3) has a unique solution u in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions

$$\begin{gathered} \mu(0) = \varphi(0), \\ \mu'(0) = \psi(0), \\ \mu''(0) = F(0,0) - f(0,0,\varphi(0),\psi(0),\varphi'(0)) + a^2\varphi''(0) \end{gathered} \tag{4}$$

are satisfied.

If the given functions of problem (1) — (3) do not satisfy the homogeneous matching conditions (4), then the solution of problem (1) — (3) is reduced to solving the corresponding matching problem in which the matching conditions are given on the characteristic $x - at = 0$.

The following conditions can be taken for the matching conditions:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \gamma(t; \varphi(0) - \mu(0)), \tag{5}$$

where $\gamma\colon [0,\infty) \ni t \mapsto \gamma(t;\varphi(0) - \mu(0)) \in \mathbb{R}$ is a function with parameter $\varphi(0) - \mu(0)$ satisfying conditions

$$\gamma(t;0) = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \gamma(0;s) = s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Here by $()^{\pm}$ we have denoted the limit values of the function and its partial derivatives calculated on different sides of the characteristic $x - at = 0$; i.e., $(\partial_t^p u)^{\pm}(t, x = at) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta)$.

Now problem (1) — (3) can be stated using the matching conditions (5) as follows.

Problem (1) — (3) with matching conditions on characteristics. Find a classical solution of Eq. (1) with the Cauchy conditions (2), the boundary conditions (3), and the matching conditions (5).

Remark 1. *The function γ in (5) should be defined from physical considerations [1–3].*

References

1. Roždestvenskiĭ B.L. Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics / B.L. Roždestvenskiĭ, N.N. Janenko. — Providence : Am. Math. Soc., 1983. — 676 p.

2. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves / G.B. Whitham. — New York : Wiley, 1999. — 660 p.

3. Jordan P.M. Growth and Decay of Shock and Acceleration Waves in a Traffic Flow Model with Relaxation / P.M. Jordan // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2005. — Vol. 207, № 3–4. — P. 220–229.

4. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. — 2022. — V. 58, № 2. — P. 175–186.

5. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Differential Equations. — 2017. — V. 53, № 1. — P. 74–85.

6. Korzyuk V.I. Classical Solution of the Second Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. — 2022. — V. 59, № 9. — P. 1216–1234.

7. Korzyuk V.I. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2023. — V. 43. — P. 48–63.

DELTA-SUBHARMONIC FUNCTIONS OF FINITE ORDER WITH RESPECT TO THE MODEL FUNCTION OF GROWTH[1]

K.G. Malyutin, M.V. Kabanko (Kursk, KSU)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@gmail.com

In this article we study delta-subharmonic functions whose growth is determined by the model function introduced by B.N. Khabibullin [1].

Let $\mathbb{C}$ be the complex plane and let $C(0,R) = \{z : |z| < R\}$ be the disc of radius R centred at the origin. A function $v(z)$ in the region $G \subset \mathbb{C}$ is called delta-subharmonic in G if the following three conditions:

1) There exists a set F of capacity zero such that on $G \setminus F$ the representation $v = v_1 - v_2$, where v_1 and v_2 are subharmonic functions in G.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00012).

2) For $z \in H$ equality holds: $v(z) = \lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{1}{2\pi\delta} \int\limits_0^{2\pi} v(z+\delta e^{i\theta})\, d\theta\,.$

3) $v(z) = 0$ for $z \in G \setminus H$.

Let μ be a measure (generally speaking, alternating sign, that is, charge) on the complex plane $\mathbb{C}$; $\mu(r)$ is the measure of the disc $C(0,r)$. Unless otherwise stated, we assume throughout that $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, since this restriction is always easily removed within the framework of the issues under consideration. Let's put

$$N_\mu(r) = \int\limits_0^r \frac{\mu(t)}{t}\, dt$$

(integrated, or averaged, measure of the μ).

Let $v(z)$ be delta-subharmonic function on $\mathbb{C}$. Let

$$|N|(r,v) = N_{|\mu_v|}(r),\ N(r,v) = N_{\mu_v^-}(r),\ N^+(r,v) = N_{\mu_v^+}(r),$$

$$m(r,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v^+(re^{i\varphi})\, d\varphi,\ T(r,v) = m(r,v) + N(r,v),$$

$$\widehat{T}(r,v) = T(r,v) + |\mu_v|(r)\,.$$

Definition 1. *A function $\rho_M(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, is called a proximate order with respect to model function of growth M if ρ_M is absolutely continues and there exist two limits*

$$\lim_{r\to+\infty} \rho_M(r) = \varrho \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r) = 0\,. \qquad (1)$$

Definition 2. *The function $V(r) = M^{\rho(r)}(r)$ is called the growth function with respect to the model function $M(r)$.*

Let V be the growth function with respect to the model function M. Let

$$\varrho_v = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \widehat{T}(r,v)}{\log M(r)}\,.$$

The number ϱ_v is called the order of the delta-subharmonic function v. If $\varrho_v < \infty$ then v is said to be the function of finite order.

If v is a subharmonic function on $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_v(r) = \sup\limits_{|z|=r} v(z)$, then

$$\rho_v = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log(\log \mathcal{M}_v(r) + |\mu_v|(r))}{\log M(r)}\,.$$

Let v be of finite order. The quantity

$$\sigma := \sigma_v = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\widehat{T}(r,v)}{V(r)}$$

is called the type of the function v. If v is a subharmonic function on $\mathbb{C}$ then

$$\sigma_v = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \mathcal{M}_v(r) + |\mu|_v(r)}{V(r)}\,.$$

If $\sigma = 0$, the function v is said to be of minimal type, if $0 < \sigma < \infty$ of normal type, and if $\sigma = \infty$ of maximal type.

We denote by $\delta S(V)$ (by $S(V)$) the space of delta-subharmonic (subharmonic) functions of finite type with respect to the grows function V.

We associate a Fourier series with a delta-subharmonic function and use it to study properties of the function. The Fourier coefficients of the delta-subharmonic function v in the disc $C(0,R)$ are defined as

$$c_k(r,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} v(re^{i\theta})\,d\theta, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad r < R\,.$$

An inequality that holds for all sufficiently large values of r we will call an asymptotic inequality. By the upper V-density of the positive measure μ with respect to the proximate order ρ we mean the number

$$\Delta := \Delta_\mu = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{N_\mu(r)}{V(r)}\,,$$

The positive measure μ has finite V-type if

$$\sigma_\mu := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\mu(r)}{V(r)} < \infty\,.$$

The main theorem in our paper partially generalize the Theorem 13.4.5 obtained in [2].

Theorem 1. *Let v be a delta-subharmonic function of finite V-type $\sigma_v < \infty$. The following two statements are equivalent:*

1) $v \in \delta S(v)$;

2) *the measure μ_v^+ (or μ_v^-) has finite upper V-density, such that $\Delta_{\mu_v^+} \leqslant \sigma_v$ ($\Delta_{\mu_v^-} \leqslant \sigma_v$,) the measure $\mu^+_{|\mu|_v}$ has finite V-type and for any $\varepsilon > 0$ asymptotically*

$$|c_k(r,v)| \leqslant 2(\sigma_v + \sigma_{\mu_v} + \varepsilon)V(r) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\,;$$

Theorem 2. *Let $v(z)$ be a subharmonic function of finite V-type $\sigma_v < \infty$. The following two statements are equivalent:*

1) $v \in \delta S(v)$;

2) *the measure $\mu^{+}_{|\mu|_v}$ has finite V-type and for any $\varepsilon > 0$ asymptotically*

$$|c_k(r,v)| \leqslant 2(\sigma_v + \sigma_{\mu_v} + \varepsilon)V(r) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\,;$$

References

1. Khabibullin B.N. A generalization of the proximate order / B.N. Khabibullin // Reports of Bashkir University. — 2020. — V. 5, № 1 — P. 1–6 (in Russian). https://doi.org/10.33184/dokbsu-2020.1.1

2. Rubel Lee A. Entire and Meromorphic Functions /Lee A. Rubel. — New York Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1995. — 196 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0735-1

ABOUT ONE EMBEDDING THEOREM

V.R. Misiuk (Grodno, Yanka Kupala State University)

misiuk@grsu.by

Let D be the circle $|z| < 1$ in the complex plane. For $0 < p \leqslant \infty$ we denote by $L_p(D)$ the Lebesgue space of complex functions on D with respect to the flat Lebesgue measure with the usual quasi-norm $\|f\|_{L_p(D)}$. Spaces Sobolev $W^s_p(D)$ are well known and quite deeply studied. The following Sobolev embedding theorem is well-known [1]:

$$W^1_q(D) \subset L_p(D),$$

where $2 \leqslant p < \infty$ and

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

It turns out that the following analogue of the inversion of this theorem holds for rational functions of a given degree.

Theorem 1. *Let $p > 2$ and*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

Then for any rational function r of degree at most n with poles outside the circle D

$$\|r\|_{W^1_q(D)} \leqslant c\sqrt{n}\|r\|_{L_p(D)}\,,$$

where $c > 0$ and depends only on p.

Note that this relation is exact in the sense of the parameters p and n included in it. Note that the accuracy with respect to the growth of the factor $\sqrt{n}$ is easily confirmed by the example of the functions $r(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$. The quasi-norm $\|r\|_{W_q^1}$ cannot be replaced respectively by the quasi-norm $\|r\|_{W_u^1}$ and for no $u > q$. This can be verified by the example of the simplest rational function $r(z) = (z_0 - z)^{-1}$, for $|z_0| > 1$.

It should be noted that various aspects of these relations and their applications were previously studied by the author in [2], [3].

References

1. Stein E.M. Singular integrals and differentiability propeties of functions / E.M. Stein. — Princeton Univ. Press, 1970. — 371 p.

2. Misiuk V.R. Refinement of inequalities and theorems of Bernstein type theory of rational approximations with respect to the plane Lebesgue measure / V.R. Misiuk // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. — 2008. № 2 (68). — P. 22—31.

3. Misiuk V.R. On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces / V.R. Misiuk // Problems of physics, mathematics and technics. — 2010. — №.1(2). — C. 34–37.

APPLICATION OF A MAP APPROXIMATING THE PHASE FLOW TO STUDY THE ATTITUDE MOTION OF A SATELLITE IN A GRAVITATIONAL FIELD

V.V. Sidorenko (Moscow, KIAM)
vvsidorenko@list.ru

The attitude motion of an axisymmetric satellite under the influence of a gravitational torque is studied. The satellite's center of mass moves in a circular orbit in a central gravitational field. The symmetry of the satellite allows us to reduce the investigation of its dynamics to the consideration of a Hamiltonian system with two degrees of freedom. If the projection of the satellite's angular momentum vector onto its axis of symmetry is zero, then so-called «planar» motions are possible. In planar motions the axis of symmetry moves in the orbital plane and, therefore, the angular velocity vector of the satellite is perpendicular to this plane. Planar motions are divided into rotations and oscillations relative to the local vertical. The limiting case of these motions are aperiodic motions, in which the axis of symmetry of the satellite asymptotically approaches an unstable position of relative equilibrium.

To analyze the properties of the motions of the satellite, which are close to planar asymptotic ones, perturbation theory is applied. A mapping is constructed that approximates the mapping generated by the phase flow of the system. The idea to construct such a mapping for studying Hamiltonian systems with a separatrix contour on an invariant manifold was proposed by L.M. Lerman and C. Grotto-Rogazzo. But the system under consideration is somewhat different from the systems discussed by these specialists. Therefore, a significant modification of their approach was required.

Using this mapping, we were able to establish some previously unknown properties of the satelliteпїЅs attitude motion in a gravitational field. In particular, conditions were found for the phase trajectories of the problem to remain for a long time in the vicinity of the separatrix contour.

Именной указатель

Н а у ч н о е и з д а н и е

ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2024

Материалы международной Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В. П. Маслова
(26–30 января 2024 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал–макета
Д.Э. Кондаурова

Подписано в печать 00.00.2024. Формат 60×84/16,
Усл. п. л. 28,0. Уч. изд. л. 25,3. Тираж 200 экз. Заказ 151

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал–макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3