

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ В.А. СТЕКЛОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА  
С.Г. КРЕЙНА – 2022**

**Материалы международной конференции**

*Под редакцией В.А. Костина*

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2022

УДК 517.5+517.9(083)

ББК 22.16я4

В75

*Организационный комитет:*

Д.А. Ендовицкий, В.П. Маслов, В.А. Костин, М.Ш. Бурлуцкая,  
С.Г. Валюхов, В.Д. Горохов, Е.М. Семенов, Ю.А. Алхутов,  
А.В. Арутюнов, Ю.Е. Гликлих, А.В. Глушко, А.Н. Голубинский,  
В.Г. Звягин, М.И. Каменский, А.И. Кожанов, С.В. Корнев,  
А.В. Кретинин, Л.Н. Ляхов, И.Я. Новиков, В.П. Орлов,  
К.Б. Сабитов, Т.Н. Фоменко, М.Г. Юмагулов

*Программный комитет:*

А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина, Ю.П. Вирченко,  
М.Л. Гольдман, И.С. Ломов, Э.М. Мухамадиев,  
В.В. Обуховский, С.И. Пискарев, С.Г. Пятков, Н.Р. Раджабов,  
В.И. Ряжских, В. Семенов, М.Е. Семенов, А.П. Солдатов,  
М.Д. Сурначев, В.Е. Фёдоров, А.Г. Ягола, Д.В. Костин

**Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2022** : материалы международной конференции / под ред. В.А. Костина. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. – 300 с.

ISBN 978-5-9273-3391-2

В юбилейном сборнике, посвященном 100-летию ВГУ, представлены статьи участников международной молодежной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2022», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики, истории математики, а также другим фундаментальным разделам математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

© Воронежский государственный университет, 2022

© Оформление. Издательский дом ВГУ, 2022

ISBN 978-5-9273-3391-2

# О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

©2022 Г. Э. Абдурагимов

(Махачкала, ДГУ; gusen\_e@mail.ru)

Обозначим через  $C$  — пространство  $C[0, 1]$ , через  $\mathbb{L}_p$  ( $1 < p < \infty$ ) — пространство  $\mathbb{L}_p(0, 1)$  и через  $\tilde{K}$  — конус неотрицательных функций пространства  $C$ .

Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{\alpha}x(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha \in (1, 2]$  — действительное число,  $D_{0+}^{\alpha}$  — дробная производная Римана-Лиувилля [1, с.469],  $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$  ( $1 < p < \infty$ ) — линейный положительный непрерывный оператор, функция  $f(t, u)$  неотрицательна, не убывает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и  $f(\cdot, 0) \equiv 0$

Предположим, что функция  $f(t, u)$  удовлетворяет условию

$$f(t, u) \leq a(t) + bu^{p/q},$$

где  $b > 0$ ,  $a(t) \in \mathbb{L}_q$ ,  $1 < q < \infty$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что  $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$  — положительный на конусе  $\tilde{K}$  оператор, существуют неотрицательные функции  $v$  и  $\omega$  такие, что  $v \leq \omega$  и почти всюду на  $[0, 1]$  выполнены условия*

$$(1) \quad -D_{0+}^{\alpha}v(t) \leq f(t, (Tv)(t));$$

$$(2) \quad -D_{0+}^{\alpha}\omega(t) \geq f(t, (T\omega)(t));$$

$$(3) \quad v(0) \leq 0 \leq \omega(0);$$

$$(4) \quad v(1) \leq 0 \leq \omega(1).$$

Тогда краевая задача (10)–(11) имеет по крайней мере одно положительное решение на конусном отрезке  $\langle v, \omega \rangle$ .

**Теорема 2.** Предположим, что при  $u > 0$  и любом  $\tau \in (0, 1)$

$$f(t, \tau u) > \tau f(t, u), \quad t \in (0, 1).$$

Тогда при выполнении условий теоремы 1 краевая задача (10)–(11) имеет единственное положительное решение на конусном отрезке  $\langle v, \omega \rangle$ .

### Литература

1. Zhanbing B., Haishen L. Positive solutions for boundary value problem on nonlinear fractional differential equation // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – Т. 311. – №. 2. – С. 495-505.

## ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДЕЛА И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СВОЙСТВА НОСИТЕЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ <sup>1</sup>

©2022 Н. Н. Авдеев

(Воронеж, ВГУ; [nickkolok@mail.ru](mailto:nickkolok@mail.ru); [avdeev@math.vsu.ru](mailto:avdeev@math.vsu.ru))

Обозначим  $\ell_\infty$  пространство ограниченных последовательностей с обычными полупорядоченностью и нормой

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|,$$

где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел. Естественным обобщением предела с пространства сходящихся последовательностей  $s$  на  $\ell_\infty$  является понятие банахова предела.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена в Воронежском госуниверситете при поддержке РНФ, грант 19-11-00197.

**Определение.** Линейный функционал  $B \in \ell_\infty^*$  называется банаховым пределом (пишем:  $B \in \mathfrak{B}$ ), если

- 1)  $B \geq 0$ , т. е.  $Bx \geq 0$  для  $x \geq 0$ ,
- 2)  $B\mathbb{I} = 1$ , где  $\mathbb{I} = (1, 1, \dots)$ ,
- 3)  $B(x_1, x_2, \dots) = B(x_2, x_3, \dots)$ .

Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром в 1929 г. и доказано С. Банахом [1]. Сачестон установил [2], что для любых  $x \in \ell_\infty$  и  $B \in \mathfrak{B}$

$$q(x) \leq Bx \leq p(x), \quad \text{где} \quad (1)$$

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \quad \text{и} \quad p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k$$

суть нижний и верхний функционалы Сачестона соотв. Неравенства (1) точны: для данного  $x$  для любого  $r \in [q(x); p(x)]$  найдётся банахов предел  $B \in \mathfrak{B}$  такой, что  $Bx = r$ .

Множество таких  $x \in \ell_\infty$ , что  $p(x) = q(x)$ , образует [3] пространство почти сходящихся последовательностей  $ac$ . На каждом  $x \in ac$  все  $B \in \mathfrak{B}$  принимают одинаковые значения.

Дальнейшим ослаблением понятия сходимости является сходимость по Чезаро (сходимость в среднем). Говорят, что последовательность  $\{x_n\} \in \ell_\infty$  сходится по Чезаро к  $t$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = t.$$

Для обобщений верхнего и нижнего пределов имеем:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq q(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq p(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Каждый  $x \in \{0; 1\}^{\mathbb{N}}$  можно отождествить с подмножеством  $\text{supp } x \subset \mathbb{N}$ . Обозначим

$$\mathcal{M}A = \{ka : k \in \mathbb{N}, a \in A\},$$

через  $\chi A$  — характеристическую функцию множества  $A$ .

Возникает вопрос о взаимосвязи структуры множества  $A$  и значений, которые принимают обобщения верхнего и нижнего пределов (2) на последовательности  $\chi \mathcal{M}A$ . Известно [4], что для любого  $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$  выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\chi \mathcal{M}A)_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\chi \mathcal{M}\{a_1, a_2, \dots, a_j\})_i.$$

В [5, §7] построено такое множество  $A \subset \mathbb{N}$ , что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\chi \mathcal{M}A)_i \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\chi \mathcal{M}A)_i. \quad (3)$$

В [6] получены аналогичные результаты для функционалов Сачестона.

**Теорема 1** Пусть  $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) Для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдётся набор попарно взаимно простых чисел  $\{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,n}\} \subset A$ .
- 2) В  $A$  существует бесконечное подмножество попарно взаимно простых чисел.
- 3)  $p(\chi \mathcal{M}A) = 1$ .

## Литература

1. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires. — Sceaux : Éditions Jacques Gabay, 1993. — С. iv+128. — ISBN 2-87647-148-5. — Reprint of the 1932 original.
2. *Sucheston L.* Banach limits // Amer. Math. Monthly. — 1967. — Т. 74. — С. 308—311. — ISSN 0002-9890.
3. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. — 1948. — Т. 80, No 1. — С. 167—190.
4. *Davenport H., Erdős P.* On sequences of positive integers // J. Indian Math. Soc., New Series. — 1951. — Т. 15. — С. 19—24. — DOI: 10.18311/JIMS/1951/17063.
5. *Besicovitch A.* On the density of certain sequences of integers // Math. Annalen. — 1935. — Т. 110, No 1. — С. 336—341. — DOI: 10.1007/BF01448032.
6. *Авдеев Н. Н.* Почти сходящиеся последовательности из 0 и 1 и простые числа // Владикавказский математический журнал. — 2021. — Т. 23, No 4. — С. 5—14.

## МАЛОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НИЙЕНХЕЙСА И ИХ ОСОБЕННОСТИ

©2022 Д. Ж. Акпан

(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова;  
*dinmukhammed.akpan@math.msu.ru*)

Операторы Нийенхейса или геометрия Нийенхейса — это новое, активно развивающееся направление современной дифференциальной геометрии, связанное с интегрируемыми системами и другими областями математики. Первая крупная статья вышла в 2019 году [1], где определяются и доказываются фундаментальные свойства операторов Нийенхейса.

Мотивировка развития данной теории связана с базовыми вопросами дифференциальной геометрии об условиях интегрируемости тензорных полей на многообразиях, т.е.

возможности привести данное тензорное поле к постоянному (или какому-то другому простому) виду. Например, для римановой метрики таким условием является равенство нулю её тензора кривизны (тензора Римана)  $R^i_{jkl}$ , а для невырожденной 2-формы — её замкнутость. Для операторных полей на многообразии необходимым условием их интегрируемости (т.е. постоянства в некоторой системе координат) является равенство нулю некоторого тензора  $N^i_{jk}$  типа  $(1, 2)$ , называемого тензором Нийенхейса, который в инвариантном виде задаётся следующим образом:

$$N_L[\xi, \eta] = L^2[\xi, \eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi, \eta] - L[\xi, L\eta],$$

где  $L$  — рассматриваемое операторное поле, а  $\xi, \eta$  — произвольные векторные поля. Операторное поле  $L$  называется нийенхейсовым (или *оператором Нийенхейса*), если соответствующий ему тензор  $N_L$  тождественно равен нулю.

Различные свойства операторов Нийенхейса описаны в работах [1], [2], [3].

В работе [4] приводится список открытых вопросов и проблем по этой тематике. Результаты, обсуждаемые в данном докладе, связаны с исследованием одного из таких вопросов (номер 5.13) о классификации операторов Нийенхейса и их особенностей в двумерном случае.

Пусть у нас есть двумерный оператор Нийенхейса  $L$ , след которого (в окрестности рассматриваемой точки) можно взять в качестве одной из координат:  $\text{tr} L = x$ . Тогда, рассматривая его определитель, как некоторую функцию от координат  $f(x, y) = \det L$ , можно попытаться классифицировать такие операторы Нийенхейса. Задача разбивается на несколько подзадач:

$$1) \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0; \quad 2) \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0; \quad 3) \frac{\partial f}{\partial y} \big|_{y=0} = 0.$$



В первых двух случаях задача решается полностью и приводится ответ. Последний случай является более сложным, и здесь мы приводим решение данной задачи в некоторых классах функций. Также нами были получены семейства примеров операторов Нийенхейса в рассматриваемой ситуации.

**Теорема 1.** Пусть  $\det L = f(x, y)$  — функция, производная которой по  $y$  нигде не равна нулю. Тогда соответствующий оператор Нийенхейса имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_x - x & f_y \\ \frac{f_x(x-f_x)-f}{f_y} & -f_x \end{pmatrix}$$

**Теорема 2.** Пусть  $L$  — двумерный оператор Нийенхейса с инвариантами  $\text{tr} L = x$  и  $\det L = f(x)$ . Тогда функция  $f(x)$  и оператор  $L$  имеют следующий вид:

$$f(x) = \alpha x - \alpha^2 \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad L = \begin{pmatrix} x - f' & 0 \\ c(x, y) & f' \end{pmatrix}$$

где  $c(x, y)$  — произвольная функция, а  $\alpha$  — произвольная константа.

В третьем случае удобно сделать замену  $g(x, y) = \frac{x^2}{4} - f(x, y)$ , после которой дробь  $\frac{f_x(x-f_x)-f}{f_y}$  приводится к виду  $\frac{g_x^2 - g}{g_y}$ . Поскольку  $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ , исходную задачу можно переформулировать так: описать множество функций  $\{g(x, y) \in C^\infty : g_y(0) = 0, \frac{g_x^2 - g}{g_y} \in C^\infty\}$ .

В докладе будет рассказано об этих и некоторых других примерах особенностей двумерных операторов Нийенхейса.

### Литература

1. A. Bolsinov, V. Matveev, A. Konyaev. Nijenhuis Geometry. arXiv:1903.04603v2 [math.DG] 11 Dec 2019.

2. *A. Bolsinov, V. Matveev, A. Konyaev.* Applications of Nijenhuis Geometry II: maximal pencils of multihamiltonian structures of hydrodynamic type. arXiv:2009.07802v1 [math.DG] 16 Sep 2020.

3. *A. Bolsinov, V. Matveev, A. Konyaev.* Nijenhuis Geometry III: gl-regular Nijenhuis operators. arXiv:2007.09506v1 [math.DG] 18 Jul 2020

4. *A. Bolsinov, V. Matveev, A. Konyaev, E. Miranda.* Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems. Phil. Trans. R. Soc. A 376: 20170430.

## ОБ ОЦЕНКАХ БОЯРСКОГО-МЕЙЕРСА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ <sup>1</sup>

©2022 *Ю. А. Алхутов*

(Владимир, ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых;  
*yurij-alkhutov@yandex.ru*)

©2022 *А. Г. Чечкин*

(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова;  
*gregory.chechkin@gmail.com*)

Рассмотрим в ограниченной строго липшицевой области  $D \subset \mathbb{R}^n$ , где  $n \geq 2$ , оператор

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u)$$

с равномерно эллиптической измеримой и симметрической матрицей  $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ , то есть такой, что  $a_{ij} = a_{ji}$  и

$$\alpha^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha|\xi|^2$$

для п. в.  $x \in D$  и для всех  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>Алхутов Ю.А. поддержан грантом РНФ (проект 22-21-00292).

Заметка посвящена свойствам решений задачи Зарембы

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div} f \text{ в } D, \quad u = 0 \text{ на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial D \setminus F, \quad (1)$$

где  $f \in L_2(D)$ ,  $F \subset D$  — замкнутое множество, а  $\partial u / \partial \nu$  означает внешнюю конормальную производную.

Обозначим через  $W_2^1(D, F)$  пополнение множества бесконечно дифференцируемых в замыкании  $D$  функций, равных нулю в окрестности  $F$ , по норме

$$\|u\|_{W_2^1(D, F)} = \left( \int_D u^2 dx + \int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Под решением задачи (1) понимается функция  $u \in W_2^1(D, F)$ , для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D a \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi dx$$

для всех пробных функций  $\varphi \in W_2^1(D, F)$ .

Нас интересует повышенная суммируемость градиента решения задачи (1) в предположении, что  $f \in L_q(D)$ , где  $q > 2$ . Вопрос о повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений является классическим и восходит к работе [1], в которой рассмотрена задача Дирихле для линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами на плоскости. Позже в многомерном случае и уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2]. После этой работы оценки повышенной суммируемости градиента решений общепринято называть оценками типа Мейерса.

При рассмотрении задачи Зарембы (1) ключевую роль играет условие на структуру множества носителя данных Дирихле  $F$ . Определим для компакта  $K \subset \mathbb{R}^n$  ёмкость  $C_p(K)$ , которая при  $1 < p < n$  определяется равенством

$$C_p(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Пусть  $B_r^{x_0}$  — открытый  $n$ -мерный шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$ , а  $mes_{n-1}(E)$  —  $(n-1)$ -мерная мера множества  $E$ . Пусть также  $p = 2n/(n+2)$  при  $n > 2$  и  $p = 3/2$  при  $n = 2$ . Предполагается выполнение одного из следующих условий: для произвольной точки  $x_0 \in F$  при  $r \leq r_0$  справедливо либо неравенство

$$C_p(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-p}, \quad (2)$$

либо неравенство

$$mes_{n-1}(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-1}, \quad (3)$$

в которых положительная постоянная  $c_0$  не зависит от  $x_0$  и  $r$ .

Условие (3) более сильное, чем (2), зато является более наглядным. Отметим, что при выполнении любого из этих условий для функций  $v \in W_2^1(D, F)$  справедливо неравенство Фридрихса

$$\int_D v^2 dx \leq C \int_D |\nabla v|^2 dx,$$

которое в силу теоремы Лакса-Мильграма влечёт однозначную разрешимость задачи (1).

Основной результат состоит в следующем утверждении.

**Теорема.** Если  $f \in L_{2+\delta_0}(D)$ , где  $\delta_0 > 0$ , то существуют положительные постоянные  $\delta(n, \delta_0) < \delta_0$  и  $C$  такие, что для решения задачи Зарембы справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx,$$

где  $C$  зависит только от  $\delta_0$ , размерности пространства  $n$ , величин  $c_0, r_0$  из (2) и (3), постоянной  $\alpha$  из условия равномерной эллиптичности, а также от характеристик липшицевой области  $D$ .

### Литература

1. Б.В.Боярский Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб., Т. 43(85) (4, 1957). С. 451–503.
2. N.G.Meyers An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. T. 17, (3, 1963). P. 189–206.

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ <sup>1</sup>

©2022 С. Н. Асхабов

(Грозный, ЧГПУ, ЧГУ; askhabov@yandex.ru)

---

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи» в соответствии с Соглашением № 075-03-2021-071 от 29.12.2020 г.

В данной работе изучаются краевые задачи для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих операторы вида

$$(Bu)(x) = -\frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b(s) \cdot u(s)]' ds}{s-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Методом максимальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов [1], при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемых задач в вещественных весовых пространствах Лебега.

Пусть  $1 < p < \infty$  и  $q = p/(p-1)$ . Обозначим через  $L_p(\varrho)$  множество всех измеримых по Лебегу на отрезке

$[-1, 1]$  функций таких, что  $\int_{-1}^1 \varrho(x) \cdot |u(x)|^p dx < \infty$ , где вес

$\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ . Известно, что сопряжённым с  $L_p(\varrho)$  является пространство  $L_q(\sigma)$ , где  $\sigma(x) = (1-x^2)^{(q-1)/2}$  [2, 3]. Множество всех неотрицательных функций из  $L_p(\varrho)$  обозначим через  $L_p^+(\varrho)$ .

В работе [4] доказано, что при  $b(x) = 1$  оператор  $B$  с областью определения

$$D(B) = \{u \in L_p(\varrho) : u \in CA[-1, 1], u' \in L_q(\sigma) \text{ и } u(\pm 1) = 0\},$$

где  $CA[-1, 1]$  есть множество всех абсолютно непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$  функций, является максимальным монотонным оператором, действующим из  $D(B) \subset L_p(\varrho)$  в  $L_q(\sigma)$ .

Пусть функция  $F(x, u)$ , порождающая нелинейность в рассматриваемых уравнениях, определена при  $x \in [-1, 1]$ ,  $u \in \mathbb{R}$  и удовлетворяет известным условиям Каратеодори:

она измерима по  $x$  при каждом  $u \in \mathbb{R}$  и непрерывна по  $u$  для почти всех  $x \in [-1, 1]$ .

При доказательстве следующих теорем важную роль играет неравенство [2]:

$$\int_1^1 \left( -\frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b(s) \cdot u(s)]' ds}{s-x} \right) \cdot u(x) dx \geq \int_1^1 \frac{[b(x) \cdot u(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

обобщающее известное неравенство Шлайфа [4] и справедливое для любого  $u \in D(B)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $p \geq 2$ ,  $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ ,  $b(x) \in C^1[-1, 1]$  и  $f(x) \in L_p(\varrho)$ . Если для почти всех  $x \in [-1, 1]$  и всех  $u \in \mathbb{R}$  выполняются условия:

- 1)  $|F(x, u)| \leq a(x) + d_1 \cdot \varrho(x) |u|^{p-1}$ , где  $a(x) \in L_q^+(\sigma)$ ,  $d_1 > 0$ ;
- 2)  $F(x, u)$  не убывает по  $u$  почти при каждом  $x \in [-1, 1]$ ;
- 3)  $F(x, u) \cdot u \geq d_2 \cdot \varrho(x) |u|^p - D(x)$ , где  $D(x) \in L_1^+(-1, 1)$ ,  $d_2 > 0$ ,

то при любых значениях параметра  $\lambda > 0$  краевая задача

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) - \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b(s) \cdot u(s)]' ds}{s-x} = f(x), \quad (1)$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \quad (2)$$

имеет решение  $u(x) \in L_p(\varrho)$  с  $u'(x) \in L_q(\sigma)$ . Это решение единственно, если  $b(x) \neq 0$  почти всюду на отрезке  $[-1, 1]$  или если в условии 2) нелинейность  $F(x, u)$  строго возрастает по  $u$ .

**Теорема 2.** Пусть

$$p \geq 2, \quad \varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}, \quad b(x) \in C^1[-1, 1],$$

функция  $f(x) \in L_p(\varrho)$  определена в точках  $\pm 1$  и  $f'(x) \in L_q(\sigma)$ . Если для почти всех  $x \in [-1, 1]$  и всех  $u \in \mathbb{R}$  выполняются условия 1)–3) теоремы 1, причём в условии 1)

$a(\pm 1) = 0$ , а в условии 2) нелинейность  $F(x, u)$  строго возрастает по  $u$ , то при любых значениях параметра  $\lambda > 0$  краевая задача

$$u(x) + \lambda \cdot F \left( x, -\frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b(s) \cdot u(s)]' ds}{s - x} \right) = f(x), \quad (3)$$

$$u(-1) = f(-1), \quad u(1) = f(1), \quad (4)$$

имеет единственное решение  $u(x) \in L_p(\varrho)$  с  $u'(x) \in L_q(\sigma)$ .

Аналогичные теоремы справедливы и для других классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши [2–4], в том числе и для уравнений типа Гаммерштейна, а также для соответствующих нелинейных уравнений с ядром Гильберта в вещественных пространствах Лебега  $L_p(-\pi, \pi)$ , состоящих из  $2\pi$ - периодических функций [5].

В заключение отметим, что следуя работе [6] методом максимальных монотонных операторов приведённые результаты можно обобщить на случай краевых задач для соответствующих систем уравнений нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Коши и Гильберта.

## Литература

1. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас — М. : Мир, 1978. — 336 с.
2. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром / С.Н. Асхабов // Матем. заметки. — 2018. — Т. 103, № 1. — С. 20–26.
3. Askhabov S.N. Nonlinear singular integral equations in Lebesgue spaces / S.N. Askhabov // J. Math. Sciences. — 2011. — V. 173, № 2. — P. 155–171.



4. *Wolferdsdorf L.V.* Monotonicity methods for non-linear singular integral and integro-differential equations / L.v. Wolferdsdorf // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 1983. — V. 63, № 6. — P. 249–259.

5. *Асхабов С.Н.* Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью / С.Н. Асхабов // *Владикавказский матем. журнал* — 2017. — Т. 19, № 3. — С. 11–20.

6. *Асхабов С.Н.* Применение метода монотонных операторов к некоторым классам нелинейных сингулярных интегральных уравнений и их системам в  $L_{p,n}(\rho)$  / С.Н. Асхабов // *Деп. в ВИНТИ 12.02.1981, № 684-81*. — С. 1–28.

## ПРИМЕРЫ ОДНОРОДНЫХ ИНДЕФИНИТНО-ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

В  $\mathbb{R}^4$ <sup>1</sup>

©2022 *А. В. Атанов*

(Воронеж, ВГУ; *atanov.cs@gmail.com*)

©2022 *Т. Т. З. Нгуен*

(Дананг, Вьетнам, Университет Дананга;

*nttduong@ued.udn.vn*)

Будем рассматривать вещественно-аналитические гиперповерхности пространства  $\mathbb{R}^4$ , описываемые вблизи начала координат уравнениями вида

$$x_4 = F_2(x_1, x_2) + F_3(x_1, x_2, x_3) + F_4(x_1, x_2, x_3) + \dots \quad (1)$$

Индефинитно-вырожденный характер такой поверхности обеспечивается видом квадратичной формы  $F_2 = x_1x_2$  в уравнении (1).

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

**Предложение 1.** Если поверхность (1) с  $F_2 = x_1x_2$  аффинно однородна, то аффинным преобразованием можно привести многочлен  $F_3$  из этого уравнения к виду

$$F_3 = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + (a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2)x_3 \quad (2)$$

с некоторыми вещественными коэффициентами  $a_1, \dots, a_5$ .

Это утверждение и большое количество примеров аффинно однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{R}^4$  можно получить за счёт рассмотрения 3-мерных алгебр Ли аффинных векторных полей, касательных к изучаемым поверхностям вида (1). Каждое такое поле представляется в виде  $(5 \times 5)$ -матрицы, и для тройки базисных полей любой из обсуждаемых алгебр изучаются коммутаторы таких матриц, разлагающиеся по исходному базису алгебры.

Возникающие системы квадратичных уравнений относительно неизвестных элементов трёх базисных матриц удаётся исследовать средствами символьной математики. Таким способом в [1–3] получены примеры нескольких семейств однородных поверхностей в  $\mathbb{R}^4$ , относящихся к положительно полуопределённому и индефинитному случаям многочлена  $F_2$  и многочлена (2), содержащего несколько слагаемых.

**Теорема 1.** Существует восемь типов решений квадратичной системы уравнений, отвечающих паре многочленов  $(F_2, F_3) = (x_1x_2, x_1^2x_3)$  из приведённых уравнений орбит соответствующих алгебр Ли.

Каждое из получаемых таким образом решений квадратичной системы представляет собой базис некоторого семейства алгебр Ли аффинных векторных полей. Однако многие из таких алгебр сводятся друг к другу за счёт матричных подобий, что означает аффинную эквивалентность их орбит.

**Предложение 2.** Базис одного из 8 семейств алгебр Ли, упомянутых в теореме 1, имеет вид

$$\begin{aligned}
e_1 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & s & 0 & 0 & 54t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54t \\ 0 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2}$$

и включает 4 вещественных параметра. Орбиты алгебр из этого семейства описываются уравнением

$$x_4 = x_2^2 x_3 + x_1 x_2 + x_2^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

зависящим лишь от одного параметра.

**Замечание 1.** Уравнение (3) обобщает уравнение

$$x_4 = x_1 x_3^2 + x_2 x_3 + x_3^4$$

из классификации [4], где степень 4 заменяется произвольным вещественным параметром  $\alpha$ .

**Замечание 2.** Ещё два семейства решений квадратичной системы приводят к однородным индефинитно-вырожденным гиперповерхностям

$$x_4 = x_2 x_3 + x_1 x_3^2 \quad \text{и} \quad x_4 = x_1^2 + x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + \alpha x_3^4, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

имеющимся в списке [4] и обладающим, тем самым, более чем 3-мерными алгебрами симметрий.

Приведём пример ещё одной орбиты, имеющей в своём уравнении (1) полином  $F_3 = x_1^3 + x_1^2 x_3$ :

$$x_2 = x_3^\alpha - x_4 x_3^2 - x_1 x_3, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

### Литература

1. *Loboda A. V., Sukovykh V. I.* Using Symbolic Computation in the Description Problem for Degenerate Homogeneous Hypersurfaces in  $\mathbb{C}^4$  // 22nd Workshop on Computer Algebra : Dubna, Russia, May 24–25, 2021. – P. 21.

2. *Лобода А. В., Нгуен Т. Т. З.* О компьютерных алгоритмах описания однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{R}^4$  // Уфимская осенняя математическая школа – 2021. – Уфа: Аэтерна, 2021. – Т. 1. – С. 132–134.

3. *Атанов А. В.* Однородные гиперповерхности в  $\mathbb{R}^4$ : компьютерные алгоритмы описания // Воронежская весенняя математическая школа «Понtryгинские чтения – XXXII». – 2021. – С. 19–21.

4. *Можсей Н. П.* Однородные подмногообразия в четырёхмерной аффинной и проективной геометрии // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 7. – С. 41–52.

## РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

©2022 *С. А. Баталова*

(Воронеж, ВГУ; *s.sonya.batalova@gmail.com*)

**1. Обозначения, понятия и основные утверждения.** Используются понятия и обозначения, принятые в [1, 2] и для аппроксимаций на сетке  $\omega_t$ :

$\Gamma$  — ограниченный ориентированный геометрический граф с одинаковыми рёбрами  $\gamma$ , параметризованными отрезком  $[0, 1]$ ;

$\partial\Gamma$  и  $J(\Gamma)$  — множества граничных и внутренних узлов графа, соответственно;

$\Gamma_0$  — объединение всех рёбер  $\gamma_0$ , не содержащих концевых точек;

$\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ ,  $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$ ,  $T < \infty$  — произвольная фиксированная постоянная.

Необходимые пространства и множества:

$L_p(\Gamma)$  ( $p = 1, 2$ ) — банахово пространство измеримых на  $\Gamma_0$  функций, суммируемых с  $p$ -й степенью (аналогично определяются пространства  $L_p(\Gamma_T)$ );

$W_2^1(\Gamma)$  — пространство функций из  $L_2(\Gamma)$ , имеющих обобщённую производную первого порядка также из  $L_2(\Gamma)$ ;

Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu, \nu) = \int_{\Gamma} \left( a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x) \mu(x) \nu(x) \right) dx.$$

где  $a(x)$ ,  $b(x)$  — фиксированные измеримые и ограниченные на  $\Gamma_0$  функции, суммируемые с квадратом:

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \Gamma_0. \quad (1)$$

Имеет место следующее утверждение [2].

**Лемма.** Пусть функция  $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$  такова, что  $\ell(u, \nu) = \int_{\Gamma} f(x) \eta(x) dx = 0$  для любой  $\eta(x) \in W_2^1(\Gamma)$  ( $f(x) \in L_2(\Gamma)$  — фиксированная функция). Тогда для любого ребра  $\gamma \subset \Gamma$  сужение  $a(x)_{\gamma} \frac{du(x)_{\gamma}}{dx}$  непрерывно в концевых точках ребра  $\gamma$ .

Обозначим через  $\Omega_a(\Gamma)$  множество функций  $u(x)$ , удовлетворяющих условиям леммы и соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_{\gamma} \frac{du(1)_{\gamma}}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_{\gamma} \frac{du(0)_{\gamma}}{dx}$$

во всех узлах  $\xi \in J(\Gamma)$  (здесь  $R(\xi)$  и  $r(\xi)$  — множества рёбер  $\gamma$ , соответственно ориентированных «к узлу  $\xi$ » и «от узла  $\xi$ »). Замыкание в норме  $W_2^1(\Gamma)$  множества  $\Omega_a(\Gamma)$  обозначим через  $W^1(a, \Gamma)$ . При этом, если допустить, что функции  $u(x)$  из  $\Omega_a(\Gamma)$  удовлетворяют ещё и краевому условию  $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$ , то получим пространство  $W_0^1(a, \Gamma)$ .

В работах [1, 2] при тех же условиях, что и выше, рассматривались начально-краевые задачи, где были установлены условия, гарантирующие их однозначную слабую разрешимость в классе суммируемых функций, используя метод Фаэдо-Галеркина со специальным базисом — множеством обобщённых собственных функций класса  $W_0^1(a, \Gamma)$  одномерного эллиптического оператора, порождённого дифференциальным выражением  $\Lambda u = -\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x)$ . А именно (см. работу [3]), при условиях (1) рассматривалась спектральная задача  $\Lambda\phi = \lambda\phi$ ,  $\phi|_{\partial\Gamma} = 0$ , в классе  $W_0^1(a, \Gamma)$  — задача определения множества чисел  $\lambda$ , каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение  $\phi(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ , удовлетворяющее тождеству  $\ell(\phi, \nu) = \lambda(\phi, \nu)$  при любой функции  $\nu(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ . Для этой задачи установлены следующие свойства.

1. Собственные значения вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учётом кратностей:  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ ; соответственно нумеруются и обобщённые собственные функции:  $\{\phi_k(x)\}_{k \geq 1}$ .

2. Собственные значения  $\lambda_k$  положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых; если  $b(x) \geq 0$ , тогда собственные значения неотрицательны.

3. Система обобщённых собственных функций  $\{\phi_k(x)\}_{k \geq 1}$  образует ортогональный базис в пространстве  $W_0^1(a, \Gamma)$  и пространстве  $L_2(\Gamma)$  (везде ниже  $\|\phi_k\|_{L_2(\Gamma)} = 1$ ).

4. Для задачи  $\Lambda\phi = \lambda\phi + g$ ,  $g \in L_2(\Gamma)$ , имеет место альтернатива Фредгольма.

В представленной работе используется метод Галеркина с базисом  $\{\phi_k(x)\}_{k \geq 1}$  при доказательстве теоремы существования слабого решения дифференциально-разностной системы (см. ниже утверждение теоремы 3), а также указывается метод отыскания приближенного решения и пути анализа устойчивости решения.

**2. Дифференциально-разностная параболическая система.** В пространстве  $W_0^1(a, \Gamma)$  рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) - \frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(k)}{dx} \right) + b(x)u(k) = f(k), \quad (2)$$

где  $f(k) = f(x, k) \in L_2(\Gamma)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ .

Функции  $u(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) определим как слабые решения эллиптических уравнений (2), удовлетворяющие условиям

$$u(0) = \varphi(x) \in L_2(\Gamma), \quad u(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, для фиксированного  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , соотношения (2), (3) — краевая задача для эллиптического уравнения (2) относительно  $u(k)$ .

**Определение.** Слабым решением дифференциально-разностного уравнения (2) с условиями (3) называются функции  $u(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$ , ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma} u(k)_t \nu(x) dx + \ell(u(k), \nu(x)) = \int_{\Gamma} f(k) \nu(x) dx,$$

для любой функции  $\nu(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ; равенство  $u(0) = \varphi(x)$  понимается почти всюду,  $u(k)_t \equiv u(x, k)_t = \frac{1}{\tau}[u(k) - u(k-1)]$ .

**Теорема 1.** При выполнении условий (1) функции  $u(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) при достаточно малых  $\tau$  ( $\tau < \tau_0$ ) однозначно определяются как элементы пространства  $W_0^1(a, \Gamma)$ .

**Доказательство.** Пусть  $k = 1$ . Исходя из свойств 2 и 4 краевой задачи  $\Lambda\phi = \lambda\phi$ ,  $\phi|_{\partial\Gamma} = 0$ , и соотношения

$$\Lambda u(1) = -\frac{1}{\tau}u(1) + f_\tau(1) + \frac{1}{\tau}u(0), \quad u(0) = \varphi(x) \in L_2(\Gamma),$$

следует утверждение теоремы для функции  $u(1)$ . Это же утверждение, учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \Lambda u(k) &= -\frac{1}{\tau}u(k) + f_\tau(k) + \frac{1}{\tau}u(k-1), \\ u(0) &= \varphi(x) \in L_2(\Gamma), \end{aligned}$$

остаётся справедливым и при  $k = 2, 3, \dots, M$ . Ниже, при получении априорной оценки для  $u(k)$  будет указана граница  $\tau_0$  для изменения  $\tau$ . Лемма доказана.

Для слабого решения  $u(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$  дифференциально-разностной системы (2), (3) имеет место априорная оценка, не зависящая от  $\tau$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (1) и  $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ . При  $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{2\varrho}$  и любом  $k = 1, 2, \dots, M$  для функций  $u(k)$  справедливы оценки

$$\|u(k)\|_{2,\Gamma} \leq e^{2\varrho T} (\|\varphi\|_{2,\Gamma} + 2\|f(k)\|_{2,1,\Gamma}). \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \|u(m)\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_*\tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{du(k)}{dx} \right\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m \|u(k)_t\|_{2,\Gamma}^2 &\leq \\ &\leq C(\|\varphi\|_{2,\Gamma}^2 + \|f(m)\|_{2,1,\Gamma}^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянная зависит только от  $a_*$ ,  $\beta$  и  $T$ ; здесь через  $\|\cdot\|_{2,\Gamma}$  обозначена норма в пространстве  $L_2(\Gamma)$ ,  $\|f(m)\|_{2,1,\Gamma} = \tau \sum_{k=1}^m \|f(k)\|_{2,\Gamma}$ .

Априорные оценки (4) и (5) дают возможность установить следующее утверждение.



**Теорема 3.** В условиях теоремы 1 существует слабое решение дифференциально-разностной системы (2), (3) в пространстве  $W_0^1(a, \Gamma)$  при достаточно малом  $\tau$ .

### Литература

1. Хоанг В. Н. Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределёнными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2020. – Т. 7. – № 1. – С.127–132.

2. Провоторов В. В. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределёнными параметрами на графе / В. В. Провоторов, Е. Н. Провоторова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2017. – Т. 13. – № 2. – С. 209–224.

3. Volkova A. S., Provotorov V. V. Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph // Russian Mathematics, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 1–13.

## О СЛУЧАЙНЫХ ОБОБЩЁННЫХ НЕГЛАДКИХ МНОГОЛИСТНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЯХ <sup>1</sup>

©2022 Ю. Е. Безмельницyna

(Воронеж, ВГПУ; bezmelnicya@inbox.ru)

Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — полное вероятностное пространство,  $I = [0, T]$ . Мы будем рассматривать периодическую задачу для случайного дифференциального уравнения вида:

$$z'(\omega, t) = f(\omega, t, z(\omega, t)), \text{ п.в. } t \in I, \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Минпросвещения России в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

$$z(\omega, 0) = z(\omega, T), \quad (2)$$

где  $f: \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — случайный  $s$ -оператор, удовлетворяющий условию  $T$ -периодичности по второму аргументу (см., напр., [5, 6]).

Под *случайным решением* задачи (1), (2) понимается функция  $\varsigma: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что (i) отображение  $\omega \in \Omega \rightarrow \varsigma(\omega, \cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$  измеримо; (ii) для каждого  $\omega \in \Omega$  функция  $\varsigma(\omega, \cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$  удовлетворяет (1), (2) п.в.  $t \in I$ .

**Определение 1.** *Отображение  $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайным негладким потенциалом, если (i)  $V(\cdot, z): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  измеримо для любого  $z \in \mathbb{R}^n$ ; (ii)  $V(\omega, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — регулярная функция для любого  $\omega \in \Omega$  (см. [1]).*

**Определение 2.** *Локально липшицева функция  $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайным негладким прямым потенциалом, если*

$$\langle v, \tilde{v} \rangle > 0 \quad \text{для всех } v, \tilde{v} \in \partial V(\omega, z), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где  $\partial V(\omega, z)$  — обобщённый градиент Кларка (см. [1]).

Пусть  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ ,  $q$  и  $p$  — операторы проектирования на  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^{n-2}$  соответственно, для всех  $z \in \mathbb{R}^n$  имеем  $qz = \xi$  и  $pz = \zeta$ . Пусть  $\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}$ . На  $\Omega \times \Pi$  пусть задан случайный негладкий потенциал  $W(\omega, \varphi, \rho)$  такой, что

$$W_1^0(\omega, \varphi_0, \rho, \psi) > 0, \quad W(\omega, \varphi + 2\pi, \rho) = W(\omega, \varphi, \rho) + 2\pi, \quad (4)$$

для каждого  $\omega \in \Omega$ ,  $(\varphi, \rho) \in \Pi$ ,  $\psi \in \mathbb{R}$ , где  $W_1^0(\omega, \varphi_0, \rho, \psi)$  — обобщённая частная производная Кларка (см. [1]). На подпространстве  $\Omega \times \mathbb{R}^{n-2}$  пусть задан случайный негладкий потенциал  $V(\omega, \zeta)$  такой, что для каждого  $\omega \in \Omega$  выполнено условие коэрцитивности

$$\lim_{\|\zeta\| \rightarrow \infty} V(\omega, \zeta) = +\infty. \quad (5)$$

Для каждого  $\omega \in \Omega$  обозначим  $\vartheta_0 = \vartheta_0(\omega) := \min V(\omega, \zeta)$ , выберем  $\vartheta > \vartheta_0$  и  $\rho_2 := \rho_2(\omega)$ ,  $\rho_1 := \rho_1(\omega)$  такие, что  $\rho_2 > \rho_1 \geq 0$  и определим область  $\mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(\omega, pz) < \vartheta, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}$ . Пусть на  $\mathfrak{G} \times [0, T]$  заданы случайные негладкие потенциалы  $\alpha(\cdot)$  и  $\beta(\cdot)$  такие, что

$$\sup_{z \in \mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \langle w, qf(\omega, t, z) \rangle < \alpha(\omega, t), w \in \partial W(\omega, qz), \quad (6)$$

$$\inf_{z \in \mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \langle w, qf(\omega, t, z) \rangle > \beta(\omega, t), w \in \partial W(\omega, qz). \quad (7)$$

**Определение 3.** (ср. [2-4, 6]) Пару функций  $\{V(\omega, \zeta), W(\omega, \varphi, \rho)\}$ , обладающих свойствами (4)-(7), будем называть случайной обобщённой негладкой многолистной направляющей функцией (МНФ) для уравнения (1) на  $\mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$ , если для каждого  $\omega \in \Omega$  функция  $V(\omega, \zeta)$  является случайным негладким прямым потенциалом и выполнены условия:

$$\sup_{t \in [0, T]} \frac{|\langle qf(\omega, t, z), qz \rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2);$$

$$\langle v, pf(\omega, t, z) \rangle \leq 0, \quad v \in \partial V(\omega, pz), \quad V(\omega, pz) \geq \vartheta, \quad \|qz\| \leq \rho_2;$$

$$2\pi(N_\omega - 1) < \int_0^T \alpha(\omega, \tau) d\tau, \quad \int_0^T \beta(\omega, \tau) d\tau < 2\pi N_\omega,$$

где  $N_\omega$  — целое число;  $\alpha(\omega, t)$ ,  $\beta(\omega, t)$  — функции из (6), (7).

**Теорема 1.** Пусть  $\{V(\omega, \zeta), W(\omega, \varphi, \rho)\}$  является случайной обобщённой негладкой МНФ для уравнения (1) на  $\mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$ . Тогда уравнение (1) имеет случайное  $T$ -периодическое решение.

### Литература

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука. 1988. - 280 с.

2. Корнев С.В., Обуховский В.В. О негладких многолистных направляющих функциях // Дифференциальные уравнения. - 2003. - Т.39, №. 11. - С. 1497-1502.

3. Корнев С.В., Обуховский В.В. Негладкие направляющие потенциалы в задачах о вынужденных колебаниях // Автоматика и телемеханика. - 2007. - № 1. - С. 3-10.

4. Корнев С.В. Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях // Автоматика и телемеханика. - 2015. - № 9. - С. 31-43.

5. Andres J., Górniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions // Topol. Meth. Nonl. Anal. - 2012. - N. 40. - P. 337-358.

6. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations // Journal of Dynamics and Differential Equations. - 2019. - V. 31, N. 2. - P. 1017-1028.

## ТРЕХМЕРНЫЙ БИЛЛИАРД ВНУТРИ ЭЛЛИПСОИДА С ПОТЕНЦИАЛОМ ГУКА <sup>1</sup>

©2022 Г. В. Белозеров

(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова;

*gleb0511beloz@yandex.ru*)

Пусть  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  — трёхосный эллипсоид с различными полуосями. Рассмотрим следующую динамическую систему: материальная точка (шар) единичной массы движется внутри  $\mathcal{E}$  под действием силы упругости (закон Гука), отражаясь от  $\mathcal{E}$  абсолютно упруго. Эта система является интегрируемой по Лиувиллю системой в кусочно-гладком смысле. Один из её первых интегралов — это полная механическая энергия, то есть функция:

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №20-71-00155 в МГУ имени М. В. Ломоносова.

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ещё два первых интеграла  $F_1$  и  $F_2$ , функционально независимых с  $H$ , можно найти с помощью метода В. В. Козлова, используя дополнительные первые интегралы  $I_1, I_2$  задачи без потенциала. Оказывается, что функции  $H, F_1$  и  $F_2$  находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона.

В эллиптических координатах происходит разделение переменных этой задачи. Уравнения движения в них можно переписать так:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{4}{\sqrt{2}(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{V(\lambda_i)},$$

где  $V(z)$  — полином 6-ой степени, коэффициенты которого зависят только от констант  $k, a, b, c$  и значений интегралов  $H, F_1, F_2$ . Опираясь на свойства этого полинома, была построена бифуркационная диаграмма, найдены области возможного движения и изучены прообразы точек отображения момента.

Пусть  $h$  — небифуркационный уровень энергии. Оказывается, что тогда изонергетическая поверхность  $Q_h$  является кусочно-гладким многообразием. Более того верна следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $h$  — небуркационное значение энергии  $H$ , тогда:

- 1) если  $k > 0$ , то изонергетическая поверхность  $Q_h$  гомеоморфна сфере  $S^5$ ,
- 2) если  $k < 0$ , то изонергетическая поверхность  $Q_h$  гомеоморфна

- несвязному объединению двух пятимерных сфер  $S^5$  при  $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$ ;
- прямому произведению окружности и четырёхмерной сферы  $S^1 \times S^4$  при  $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$ ;
- прямому произведению двумерной и трёхмерной сфер  $S^2 \times S^3$  при  $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$ ;
- пятимерной сфере  $S^5$  при  $h \in (0, +\infty)$ .

### Литература

1. Якоби К. Лекции по динамике // М.: Гостехиздат, 1936.
2. Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикладная математика и механика, том 59, 1 1995.

### МЕТОД ДИСКРЕТНОГО ФУНКЦИОНАЛА И ПРОЕКЦИЙ ФУНКЦИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ОДНОРОДНОСТЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

©2022 Н. М. Близняков, В. М. Вахтель, Д. Е. Костомаха,  
В. А. Работкин

(Воронеж, ВГУ; [bliznyakov@vsu.ru](mailto:bliznyakov@vsu.ru); [rabotkin@phys.vsu.ru](mailto:rabotkin@phys.vsu.ru))

В радиометрии различных излучений применяется счётный режим измерений, то есть получение последовательностей  $M$  серий, каждая из  $n$  отсчётов  $k_j(\Delta t) \geq 0$ ,  $j = \overline{1, n}$  случайных количеств частиц в постоянном интервале времени  $\Delta t$  в течение полного времени измерения  $T = \Delta t$ . В циклических условиях получения  $M$  серий, каждая длительностью  $\theta = n\Delta t \cdot T$  при  $M = \frac{T}{\theta}q$  стационарность и однородность полученных последовательностей серий отсчётов может нарушаться.

В течение одного цикла  $\theta$  фиксируется серия из  $n$  последовательных интервалов  $\Delta t$  и соответствующих значений  $K_i(\Delta t)$ , которые образуют случайную выборку  $\{K_i(\Delta t)\}$  и соответствующий  $q$ -й случайный вектор (СВР):  $\nu(.)_q = (\nu_0, \dots, \nu_l)_q$  частот  $\nu_j$ , с которыми случайная величина  $K_j(\Delta t)$  принимает значение  $j$  и  $n = \sum_{j=0}^l \nu_{jq}$ ,  $\nu_{jq} = 0, 1, \dots, n$ . То есть СВР — это реализация флуктуаций возможных комбинаций  $\nu_{jq}$ , например с полиномиальной вероятностью  $P(\nu_{jq}(.))$ .

Вследствие стохастических механизмов, определяющих генерацию отсчётов  $K_j(\Delta t)$  и статистических флуктуаций процессов формирования СВР, параметры которых  $\theta, n, \Delta t$  и  $I$  - средняя интенсивность отсчётов заданы, анализ характеристик совокупностей СВР при  $M = 1$  и малой статистике традиционно сложен, учитывая, что количество возможных различных СВР  $Q = 1$ .

В данной работе предложен метод обработки и анализа характеристик флуктуаций больших совокупностей СВР на основе: (1) анализа характеристик распределений целочисленного идентификатора — функционала СВР в виде скалярного произведения  $ID_q = \sum_i^l a_i \nu_{j4}$  СВР -  $\nu_q(.)$  и заданного неслучайного вектора;  $a = (a_0, a_1, \dots, a_l)$ ; (2) анализа проекций фазовых траекторий функций дробного порядка  $l < S < 5$  комплексных центральных моментов  $\mu(S_l, \nu_q(.))$  СВР:

$$\mu = (S, \nu_q, a) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^l (k_{i,\bar{q},\bar{k}_q})^S = Re(\mu(S, \nu_q, a)) + iIm(\mu(S, \nu_q, a)), i^2 = -1$$

Таким образом, каждому СВР -  $\nu(.)_q$  можно поставить в соответствие функционал  $ID(\nu_q, \nu)_q$  в виде скалярного произведения СВР и определённого вектора  $a =$

$(a_0, a_1, \dots, a_l)$  с натуральными компонентами  $a_j$ . Можно доказать, что для однозначности соответствия необходимо, чтобы компоненты вектора  $a$  не имели общих делителей. Основная часть доказательства приведена ниже.

Из однозначности соответствия  $ID(\cdot)_q$  и СВР  $_q$  следует однозначность соответствия упорядоченной последовательности

$$ID_l(\nu(\cdot)_l, a) \leq ID_2(\nu(\cdot)_2, a) \leq \dots \leq ID_M(\nu(\cdot)_M, a)$$

дискретному распределению частот функционала  $0 \leq M_j(ID_j(\cdot), a) \leq M$  в виде последовательностей сгруппированных пиков. СВР, образующие каждый пик  $m$ , имеют однородные характеристики, удовлетворяющие определённым условиям. При  $a_0 < \dots < a_l$  компоненты  $\nu_{i,q}$  СВР, образующего пик  $m$ , удовлетворяют условиям

$$\nu_{0,q} = (m) + \nu_{1,\varphi}(m) = \text{const}(m),$$

$$\nu_{l,q}(m) = \text{const}(l, m), \nu_{l-1,q}(m) = \text{const}(l-1, m).$$

При  $a_0 > a_1 > \dots > a_l$  распределение  $M(ID(\nu, a))$  также имеет вид последовательности пиков, образованных СВР, удовлетворяющих условиям их однородности  $\nu_{l,q} + \nu_{l-1,q} = \text{const}(m)$ ,  $\nu_0(m) = \text{const}(m)$ ,  $\nu_1(m) = \text{const}(m)$

Исходные, то есть неупорядоченные последовательности  $ID_q(\cdot), q = l, M$ , полученные с различными векторами  $a$  позволяют выявлять тренды в последовательностях  $k_i(\Delta t), i = l, N$ , анализируя средневывборочные значения  $\bar{k}_q = \sum_l^n k_{iq}/n$ , что эквивалентно сглаживанию высокочастотных флуктуаций  $k_j(\cdot)$ .

Отметим, что  $ID_l(\cdot)$  и соответствующие СВР каждого типа  $q$  образуются независимо и случайно и поэтому они распределены равномерно в исходной последовательности



$ID_1(.), \dots, ID_M$ , а интервалы  $ID$  между идентичными СВР согласуются с геометрическим распределением, а в асимптотике — с экспоненциальным со средним значением  $\overline{ID}_q = 1/P_q$  и среднеквадратичным разбросом  $G(ID) = \overline{ID} = 1/P$ , где  $P_q(.)$  полиномиальная вероятность реализации СВР. Поэтому последовательности идентичных СВР можно анализировать по их совокупностям  $ID$  на основе модели Пуассона.

Степень однородности СВР пика неидентичных, но подобных по соотношению их компонент, например

$$\nu_0 + \nu_1 = const, \nu_l = const(l, m), \nu_{l-1} = const(l-1)$$

можно оценить по матрице метрики проекций функции дробных порядков  $l < S < 5$  центральных моментов. Проекция  $\mu(S, \nu, a)$  СВР на плоскость

$$Re(\mu(S), \nu), Im(\mu(S), \nu)$$

характеризует подобие СВР в целом, а проекции функции  $\mu(S, \nu, a)$  на поверхность  $Im(\mu(S), \nu)$ , характеризует неоднородность с учётом выборочных средних значений  $\bar{k}_q$ .

Лемма. Пусть  $n, k$  — некоторые фиксированные натуральные числа,  $n \leq k$  и  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  — некоторое решение уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — целые неотрицательные числа.

Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$km_1 < m_2, km_1 + km_2 < m_3, \dots, km_1 + \dots + km_{n-1} < m_n. \quad (2)$$

Обозначим

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = l. \quad (3)$$

Тогда система уравнений

$$X(\omega) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = l, \end{cases} \quad (4)$$

имеет единственное целочисленное неотрицательно решение  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Доказательство. Предположим противное. Пусть  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  — целочисленное неотрицательное решение уравнения (1), отличное от  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Пусть  $p$  — наибольшее из чисел  $1, 2, \dots, n$ , для которого  $a_i \neq b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , т.е.  $a_p \neq b_p$ ,  $a_{p+1} = b_{p+1}, \dots, a_n = b_n$ . Тогда

$$m_{p+1}a_{p+1} + \dots + m_na_n = m_{p+1}b_{p+1} + \dots + m_nb_n \quad (5)$$

Возможны два случая:

1)  $a_p < b_p$ .

Учитывая неравенства (2), равенство  $b_p - a_p \geq 1$  и неравенства  $a_i \leq k$ ,  $b_i \leq k$ ,  $b_i + k \geq a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

Имеем

$$\begin{aligned} & m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + m_pb_p = \\ & (m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1}) + m_p(b_p - a_p) + m_pa_p \geq \\ & \geq (m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1}) + m_p + m_pa_p > \\ & > m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + (m_1k + \dots + m_{p-1}k) + m_pa_p = \\ & = m_1(b_1 + k) + \dots + m_{p-1}(b_{p-1} + k) + m_pa_p \geq \\ & \geq m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_pa_p. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + m_pb_p > m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_pa_p. \quad (6)$$

Учитывая равенство (5) и неравенство (6) получаем

$$(m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + m_pb_p) + (m_{p+1}b_{p+1} + \dots + m_nb_n) >$$

$$(m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_p a_p) + (m_{p+1}a_{p+1} + \dots + m_n a_n) = l$$

Откуда и следует, что  $(b_1, \dots, b_n)$  не является решением системы (4).

2)  $a_p > b_p$ .

Рассмотрим два подслучая:

2.1)  $b_p = 0$ .

Учитывая неравенства (2) и неравенства  $a_p \geq b_p + 1 \geq 1$  имеем

$$\begin{aligned} (m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1}) + m_p b_p &= (m_1b_1 + \dots m_{n-1}b_{n-1}) < \\ < (m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1}) + (m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1}) < \\ < (m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1}) + m_p \leq m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_p a_p. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + m_p b_p < m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_p a_p. \quad (7)$$

Учитывая равенство (5) и неравенство (7) получаем

$$\begin{aligned} (m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + m_p b_p) + (m_{p+1}b_{p+1} + \dots + m_n b_n) < \\ < (m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_p a_p) + (m_{p+1}a_{p+1} + \dots + m_n a_n) = l \end{aligned}$$

Откуда и следует, что  $(b_1, \dots, b_n)$  не является решением системы (4).

2.2)  $b_p > 0$ .

Учитывая неравенства (2), неравенство  $a_p \geq b_p + 1$  и неравенства  $b_i \leq k, i = 1, 2, \dots, n$  имеем

$$\begin{aligned} (m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1}) + m_p b_p &\leq (m_1k + \dots + m_{p-1}k) + m_p b_p < \\ < m_p + m_p b_p = m_p(b_p + 1) &\leq m_p a_p \leq \\ &\leq (m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1}) + m_p a_p. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + m_pb_p < m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_pa_p \quad (8)$$

Учитывая равенство (5) и неравенство (8) получаем

$$(m_1b_1 + \dots + m_{p-1}b_{p-1} + m_pb_p) + (m_{p+1}b_{p+1} + \dots + m_nb_n) < \\ < (m_1a_1 + \dots + m_{p-1}a_{p-1} + m_pa_p) + (m_{p+1}a_{p+1} + \dots + m_na_n)$$

Откуда и следует, что  $(b_1, \dots, b_n)$  не является решением системы (4).

### Литература

1. А. Г. Бабенко, Н. М. Близняков, В. А. Работкин, В. М. Вахтель Method of analysis of large arrays of discrete empirical distributions of counts with a small sample number // NUCLEUS - 2020. Nuclear Physics and Elementary Particle Physics. Nuclear Physics Technologies : LXX International conference, 11-17 October, 2020, Saint Petersburg : Book of Abstracts .— Saint Petersburg, 2020 .— P. 184.

2. Анализ распределений случайных векторов дискретных распределений методом дробных моментов / Н. М. Близняков, В. М. Вахтель, Д. Е. Костомаха, В. А. Работкин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2021 г.) .— Воронеж, 2021 .— С.55-57.

# СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ

©2022 С. В. Богомолов

(Москва, МГУ; *bogomo@cs.msu.ru*)

Ясная с точки зрения физики вероятностная модель газа из твёрдых сфер рассматривается как с помощью теории случайных процессов, так и в терминах классической кинетической теории для плотностей функций распределения в фазовом пространстве: из системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) выводится сначала обобщённое, а затем — случайное и неслучайное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана с учётом корреляций и флуктуаций. Главной особенностью исходной модели является случайный характер интенсивности скачкообразной меры и её зависимость от самого процесса.

Для полноты картины отметим, что переход ко всё более грубым приближениям в соответствии с уменьшением параметра обезразмеривания, числа Кнудсена. В результате получаются стохастические и неслучайные мезоскопические (Колмогорова–Фоккера–Планка), а затем — макроскопические уравнения, отличающиеся от системы уравнений Навье–Стокса. Ключевым отличием этого вывода является более точное осреднение по скорости благодаря аналитическому решению стохастических дифференциальных уравнений по винеровской мере, в виде которых представлена промежуточная мезо-модель в фазовом пространстве. Такой подход существенно отличается от традиционного, использующего не сам случайный процесс, а его функцию распределения.

Рассмотрим систему из  $N$  взаимодействующих частиц. В качестве наглядного примера возьмём газ из неустанно перемещающихся твёрдых сфер, взаимодействие между кото-

рыми происходит благодаря упругим столкновениям. Чтобы избежать чрезмерной информации о нашей системе, выражаемой положениями и скоростями входящих в неё частиц, самым продуктивным способом её исследования является привлечение вероятностных представлений.

Положения и скорости частиц будем считать случайными величинами, что совершенно оправдано по физическим соображениям. Модель газа, молекулы которого представляются абсолютно упругими шариками, является простейшей, но не тривиальной. Людвиг Больцман выводил своё уравнение, опираясь на этот образ и начиная с детерминированной системы, вводя случайность на этапе принятия гипотезы молекулярного хаоса – Stossanzahlansatz. А.В. Скороход изначально рассматривает системы, состоящие из большого числа случайно взаимодействующих частиц, и исследует поведение таких систем при неограниченном возрастании их числа.

Начнём с формализации **столкновений** частиц, которые порождают процессы диффузии, вязкости и теплопроводности. Изменение скорости сталкивающихся частиц называется функцией скачка, которая легко получается из решения задачи о столкновении двух твёрдых сфер диаметра  $D$ , в качестве которого возьмём диаметр эффективного сечения рассеяния (Рис.1 слева):  $\mathbf{f}(v_i, v_j, \omega) = \omega(\omega, v_i - v_j)$ .

Эволюция набора из  $N$  частиц описывается следующей системой уравнений Стохастической Молекулярной Динамики:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= v_i(t)dt, \\ dv_i(t) &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} f(v_i, v_j, \omega) b_{ij}(\omega \times dt) \\ \lambda_{ij} &= N_{ij}^{collisions}/N, \quad , \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{1}$$

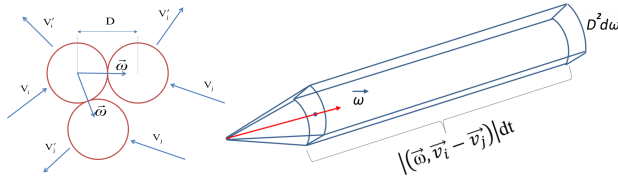


Рис. 1. Геометрия столкновений двух частиц с двумя вариантами вектора  $\omega$  (слева) и цилиндр для подсчёта  $N_{ij}^{reached}$  (справа)

где  $x_i(t)$  — положения, и  $v_i(t)$  — скорости частиц, являются 3D случайными процессами,  $f(\cdot)$  — функция скачка, или приращение скорости  $v_i$  из-за столкновения с частицей скорости  $v_j$ ;

$b_{ij}$  — считающие (с результатом розыгрыша 0 или 1) независимые бернуллиевские меры (с интенсивностями, или вероятностями выпадения “1”,  $\lambda_{ij}$ , которые очень малы — редкие столкновения, разреженный газ); они указывают на факт столкновения или его отсутствия.

Для подсчёта числа столкновений  $N_{ij}^{collisions}$  воспользуемся (совершенно так же, как и при выводе уравнения Больцмана) идеей о том, что число ударивших по  $i$ -частице  $j$ -частиц равно их числу  $N_{ij}^{reached}$ , успевших за время  $dt$  до неё долететь, а оно равно числу частиц, содержащихся в цилиндре, изображённом справа на Рис. 1:

$$N_{ij}^{collisions} = N_{ij}^{reached}. \quad (2)$$

## Литература

1. Богомолов С. В., Захарова Т. В. Уравнение Больцмана без гипотезы молекулярного хаоса // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33. — №. 1. — С. 3-24.

# ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА

©2022 Ю. Н. Булатов

(Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина; y.bulatov@bk.ru)

*Дано представление функции Грина классической задачи Дирихле для единичного шара произвольной евклидовой размерности. Исследуется функции Грина сингулярного оператора Киприянова. Показано, что функция Грина может быть выражена в терминах радиальных функций и выписан её явный вид.*

*Ключевые слова: функция Грина, сингулярный оператор Бесселя, оператор  $\Delta_B$ , сферическая симметрия.*

Через  $\mathbb{R}_n$  обозначим евклидово пространство точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Число  $n$  предполагается фиксированным,  $n \geq 1$ . Пусть  $\Omega$  — область симметричная относительно координатных гиперплоскостей  $x_i = 0$  с гладкой границей  $\Gamma$  в точках пересечения с указанными координатными гиперплоскостями  $x_i = 0$ . Такие области в применены в [1] для работы с сингулярными дифференциальными операторами в  $\mathbb{R}_n$ .

Рассмотрим сингулярный дифференциальный оператор Киприянова (введён в работе [2])

$$\Delta_B = \sum_{j=1}^n B_{\gamma_j}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad -1 < \gamma_i \leq 0,$$

который рассматривается на функциях, чётных по каждой из переменных  $x_i$ , для которых  $\gamma_i \neq 0$ .

Следуя [2], однородный порядка  $m$  многочлен  $P_m^\gamma$ , чётных по каждой из переменных  $x_i$ , для которых  $\gamma_i \neq 0$ , удовлетворяющий уравнению  $\Delta_B P_m^\gamma = 0$ , будем называть  $B$ -гармоническим. Весовой сферической функцией называется



сужение  $B$ -гармонического многочлена на сферу:

$$Y_m^\gamma(\Theta) = \frac{P_m^\gamma(x)}{|x|^m} = P_m^\gamma\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Фундаментальное решение оператора  $\Delta_B$  имеет вид

$$\mathcal{E}_\gamma(x) = -\frac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(n+|\gamma|-2)|S_1(n)|_\gamma},$$

$$|S_1(n)|_\gamma = \int_{S_1(n)=\{x:|x|=1\}} \prod_1^n \Theta_i^{\gamma_i} dS.$$

Фундаментальное решение оператора  $\Delta_B$  с особенностью в произвольной точке на сфере  $y \in \mathbb{R}_n$ ,  $|y| = r$  получается применением обобщённого сдвига Пуассона, который при условии, что  $\nu=n+|\gamma|-1>0$  имеет следующий вид

$$T_{|x|}^{|y|}f(|x|) = C \int_0^\pi f(|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \alpha) \sin^{\nu-1} d\alpha,$$

$$\nu > 0.$$

Основной особенностью этого сдвига является его перестановочность с оператором  $\Delta_B$ :

$$\Delta_B T_{|x|}^{|y|}f(|x|) = T_{|x|}^{|y|}\Delta_B f(|x|).$$

Функция

$$k(|x|, |y|) = -\frac{1}{(2-n-|\gamma|)|S_1(n)|_\gamma} T_{|x|}^{|y|}|x|^{2-n-|\gamma|}$$

является фундаментальным решением оператора  $\Delta_B$  с особенностью на сфере  $|x| = r$ .

Рассмотрим функцию  $G(x, y) = T_{|x|}^{|y|} k(|x|) + h(|x|, |y|)$ . Эта функция  $B$ -гармонична в области  $\Omega_0 \setminus \{y = 0\}$  и имеет на сфере  $|y| = r$  особенности типа

$$O(|x - y|^{2-n-|\gamma|}), \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow |x|$$

$$\text{если} \quad \gamma_i > -1 \quad \text{и} \quad |\gamma| \neq 0.$$

**Определение.** Функцией Грина для области  $\Omega$  с особенностью на сфере  $|x| = r$  называется функция  $G(x, y)$ , заданная и непрерывная в  $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$ , такая что

$$G(\xi, y) = 0 \quad \text{для} \quad \xi \in \Gamma,$$

$$G(x, y) \quad B - \text{гармонична} \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \{y\}.$$

**Теорема.** Пусть для области  $\Omega_0$  функция Грина существует и имеет непрерывные производные в  $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$ . Через  $H_B(\overline{\Omega})$  обозначим линейное подпространство, состоящее из всех  $B$ -гармонических функций в  $\Omega_0$ . Тогда для любой функции  $u(x) \in H_B(\overline{\Omega})$ , имеет место равенство

$$u(y) = - \int_{\Gamma} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \omega_{\xi}} G(\xi, y) \xi_n^{\gamma} d_{\xi} \Gamma,$$

где  $\frac{\partial}{\partial \omega_{\xi}}$  — производная по внешней нормали к  $\Gamma$  в точке  $\xi \in \Gamma$ .

Доказательство проводится по обычной схеме с помощью второй формулы Грина для оператора  $\Delta_B$ , применённого к радиальной функции.

### Литература

1. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи // И.А. Киприянов. – 1997.

2. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова-Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для  $B$ -гармонического

уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56. – №. 12. – С. 1610-1620.

3. *Ляхов Л. Н.* О радиальных функциях и классических стационарных уравнениях в евклидовом пространстве дробной размерности // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений AMADE-2011. Минск. Издательский центр БГУ. – 2012. – С. 115-126.

## НАПРЯЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СОПРЯЖЕНИЯ УПРУГОЙ И НЕЛИНЕЙНО- НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЫ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗКАХ

©2022 *А. П. Бырдин*  
(Воронеж, ВГТУ;)

©2022 *А. А. Сидоренко*  
(Воронеж, ВГТУ;)

Рассмотрим осесимметрическую деформацию полого кругового цилиндра, заключённого в упругую оболочку с толщиной стенки  $h \ll b - a$ , на внутренней  $r = a$  и внешней  $r = b + h$  поверхностях конструкции действуют давления  $P_a(t)$  и  $P_b(t)$  и заданы температуры  $T_a$  и  $T_b$ . Предполагаем величину осевой деформации постоянной (длинный цилиндр), механические характеристики системы независимыми от температуры, материал цилиндра несжимаемый

$$\varepsilon_r(r, t) + \varepsilon_\phi(r, t) + \varepsilon_z^0 = 3\alpha_0\theta(r), \quad Q(r) = \frac{T(r) - T_a}{T_a}, \quad (1)$$

с реологией, описываемой интегростепенным полиномом [1]

$$\frac{\sigma_r(r, t) - \sigma_\phi(r, t)}{2G_0} = G_1(\varepsilon_r - \varepsilon_\phi) + a_3(G_3\varepsilon_r - G_3\varepsilon_\phi), \quad (2)$$

где  $\varepsilon_k$ ,  $\sigma_k$  ( $k = r, \phi$ ) — радиальные и окружные деформации и напряжения,  $T(r)$  — решение уравнения теплопроводности с заданными условиями на границах,  $\alpha_0 = \alpha T_a$ ,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения цилиндра,  $a_3 \ll 1$ ,  $G_0$  — нерелаксированный модуль сдвига материала,  $G_n$  ( $n = 1; 3$ ) — нелинейный и полилинейный интегральные операторы Вольтерра с ядрами ( $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция)

$$G_1(t) = \delta(t) - g_1(t), G_3(t_1, t_2, t_3) = \Pi_{k=1}^3 \delta(t_k) - g_3(t_1, t_2, t_3), \quad (3)$$

где  $g_1(t)$ ,  $g_3(t_1, t_2, t_3)$  — регулярные части ядер наследственности. В указанных условиях нагружения конструкции возникают только радиальные перемещения  $u(r, t)$ , радиальные, осевые и кольцевые деформации и напряжения.

Уравнение движение системы с граничными условиями (начальные условия — нулевые) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \sigma_r(a, t) = -P_a(t), \\ \sigma_r(b, t) &= -P_b(t) - \frac{hE_1}{b^2(1 - v_1^2)} u(b, t) - h\rho_1 \partial^2 u(b, t) \partial t^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho$ ,  $\rho_1$  — плотности материалов цилиндра и оболочки,  $E_1$ ,  $v_1$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки. В безразмерных переменных

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r}{a}, u' = \frac{u}{a}, t' = \beta_0 t, \beta_0^2 = \frac{2G_0}{\rho a^2}, P'_a, \\ b &= \frac{P_a, b}{2G_0}, \sigma'_r, \phi = \sigma_r, \frac{\phi}{2G_0} \end{aligned}$$

(штрифы отбросим) из условия (1) получим

$$u(r, t) = \frac{Y(t)}{r^2} - \frac{\varepsilon_z^0}{2} + \frac{3\alpha}{r^2} I(r), I(r) = \int_1^r \theta(r) r dr,$$

где функция  $Y(t)$  определяется из уравнений (4) и (2). Из уравнения (4) с граничными условиями, получается нелинейное интегродифференциальное уравнение для  $Y(t)$  с нулевыми начальными условиями, которое решаем методом возмущений по параметру  $a_3$ .

$$Y(t) = Y_0(t) + a_3 Y_1(t) + \dots$$

Функции  $Y_n(t)$  удовлетворяют уравнениям вида

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + A_1 G_1\right) Y_n(t) = F_n(t), (n = 0, 1, \dots), \quad (5)$$

$$F_0(t) = \frac{P_a(t) - P_b(t)}{\ln r_0} - \frac{3\alpha_0 I(r_0)}{r_0^2 \ln r_0} G_1 0(t), G_n 0(t) = G_n \cdot 1,$$

$$F_1(t) =$$

$$= \left[ \frac{\rho_1}{\rho \ln r_0} \left( \frac{d^2}{dt^2} + B \right) + (A_3 G_3 - A_2 G_{32} + B_1 G_{31}) \right] \cdot$$

$$\cdot Y_0 + B_0 G_{30}(t),$$

$$A_n = \frac{1}{n \ln r_0} \left( 1 - \frac{1}{r^2 n_0} \right) (n = 1, 3),$$

$$B = \frac{\beta_1^2}{\beta_0^2 \ln r_0 (1 - v_1)}, \beta_1^2 = \frac{E}{\rho b^2},$$

где постоянные  $A_2$  и  $B_n$  ( $n = 0, 1$ ) зависят от температуры  $\theta(r)$ , геометрических и реологических параметров материалов конструкции  $G_3 k$  — операторы вида

$$G_{3kf}(t) =$$

$$= \iiint_0^t G_3(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \Pi_{m=1}^k Y_0(t_m) dt_m \Pi_{l=k+1}^3 f(t_l) dt_l.$$

Пусть  $K$  — резольвентный оператор для оператора в (5). Если ядро оператора  $G_1$  описывает модель Кельвина, то ядро  $K(t)$  выражается через экспоненты с отрицательными

показателями, но если ядро  $G_1(t)$  является слабосингулярной функцией, то ядро резольвенты  $K(t)$  представляет собой функциональный ряд. Из линейности  $K$  и структуры функции  $F_0(t)$  следует, что вклады в деформации материала, порождаемые  $Y_0(t)$  от действия давления и перепада температур на поверхностях разделяются. Решение уравнения для  $Y_1(t)$  получим в предположении сепарабельности ядра оператора  $G_3$ .

Из граничного условия в (4), используя построенное решение для радиального перемещения  $Y(t)$ , получим выражение для радиального напряжения на поверхности сопряжения цилиндра и оболочки. В первом приближении по параметру нелинейности имеем

$$\sigma_r(r_0, t) \approx P_0(t) - a_3 \left( \frac{\rho_1}{\rho} + B \ln r_0 - A_1 G_1 \right) K F_0(t). \quad (6)$$

При отсутствии разности температур на поверхностях конструкции второй член в выражении  $F_0(t)$  исчезает и выражение  $\sigma_r$  совпадает с контактным напряжением в работе [2].

### Литература

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твёрдых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, – 1977. – 384 с.
2. *Бырдин А.П.* Метод рядов Вольтерра в динамических задачах нелинейной наследственной упругости / А.П. Бырдин, М.И. Розовский // Изв. АН Арм. ССР – 1985. Т. 38. №5. – С. 49 – 56.

# СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ НА ГРАФЕ ФУНКЦИЙ

©2022 П. М. Василенко

(Воронеж, ВГУ; )

**1. Основные понятия и вспомогательные предложения.** Используются понятия и сохраняются обозначения, принятые в [1]:  $\partial\Gamma$  и  $J(\Gamma)$  — множества граничных и внутренних узлов графа  $\Gamma$ , соответственно;  $\Gamma_0$  — объединение всех рёбер, не содержащих концевых точек;  $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$ ,  $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0, t)$  ( $t \in [0, T]$ ). Рёбра  $\gamma$  графа  $\Gamma$  ориентированы и параметризуются отрезком  $[0, 1]$ .

Введём необходимые пространства:  $L_p(\Gamma)$  ( $p = 1, 2$ ) — банахово пространство измеримых на  $\Gamma_0$  функций, суммируемых с  $p$  степенью (аналогично определяются пространства  $L_p(\Gamma_T)$ );  $L_{2,1}(\Gamma_T)$  — пространство функций из  $L_1(\Gamma_T)$  с нормой  $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T (\int_{\Gamma} u^2(x, t) dx)^{1/2} dt$ ;  $W_2^1(\Gamma)$  — пространство функций из  $L_2(\Gamma)$ , имеющих обобщённую производную первого порядка также из  $L_2(\Gamma)$ ;  $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$  — пространство функций из  $L_2(\Gamma_T)$ , имеющих обобщённую производную первого порядка по  $x$ , принадлежащую  $L_2(\Gamma_T)$  (аналогично вводится пространство  $W^1(\Gamma_T)$ ). Обозначим через  $V_2(\Gamma_T)$  множество всех функций  $u(x, t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$  с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)} \quad (1)$$

и сильно непрерывных по  $t$  в норме  $L_2(\Gamma)$ ;  $L_{2,1}(\Gamma_T)$  — пространство функций  $u \in L_1(\Gamma_T)$  с нормой  $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T (\int_{\Gamma} u^2(x, t) dx)^{1/2} dt$ .

Рассмотрим билинейную форму  $\ell(\mu, \nu) = \int_{\Gamma} \left( a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x) \mu(x) \nu(x) \right) dx$  с фиксированными измеримыми и ограниченными на  $\Gamma_0$  функциями  $a(x)$ ,  $b(x)$ , суммируемыми с квадратом:  $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$ ,  $|b(x)| \leq \beta$ ,  $x \in \Gamma_0$ . Из работы [1] следует, что пространство  $W_2^1(\Gamma)$  содержит множество  $\Omega_a(\Gamma)$  функций  $u(x) \in C(\Gamma)$  ( $C(\Gamma)$  — пространство непрерывных на  $\Gamma$  функций), удовлетворяющих соотношениям  $\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx}$  во всех узлах  $\xi \in J(\Gamma)$  ( $R(\xi)$  и  $r(\xi)$  — множества рёбер, соответственно ориентированных «к узлу  $\xi$ » и «от узла  $\xi$ »,  $u(\cdot)_{\gamma}$  — сужение функции  $u(\cdot)$  на ребро  $\gamma$ ). Замыкание в норме  $W_2^1(\Gamma)$  множества  $\Omega_a(\Gamma)$  обозначим через  $W^1(a, \Gamma)$  (если допустить, что функции  $u(x)$  из  $\Omega_a(\Gamma)$  удовлетворяют ещё и краевому условию  $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$ , то получим пространство  $W_0^1(a, \Gamma)$ ). Пусть далее  $\Omega_a(\Gamma_T)$  — множество функций  $u(x, t) \in V_2(\Gamma_T)$ , чьи следы определены на сечениях области  $\Gamma_T$  плоскостью  $t = t_0$  ( $t_0 \in [0, T]$ ) как функции класса  $W^1(a, \Gamma)$  и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1, t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0, t)_{\gamma_j}}{\partial x} \quad (2)$$

для всех узлов  $\xi \in J(\Gamma)$ . Замыкание множества  $\Omega_a(\Gamma_T)$  по норме (1) обозначим через  $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ ; ясно, что  $V^{1,0}(a, \Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ . Другим подпространством пространства  $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$  является  $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$  — замыкание в норме  $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$  множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (2) для всех узлов  $\xi \in J(\Gamma)$  и для любого  $t \in [0, T]$  (аналогично вводится пространство  $W^1(a, \Gamma_T)$ ). Отличием элементов пространства  $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$  от элементов  $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$  является отсутствие у последних непрерывности по переменной  $t$ , соотношение (2) имеет место почти всюду на  $(0, T)$ .



**2. Начально-краевая задача, однозначная слабая разрешимость.** В пространстве  $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \quad (3)$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределёнными параметрами на каждом ребре  $\gamma$  графа  $\Gamma$ . Состояние системы (3) в области  $\bar{\Gamma}_T$  определяется слабым решением  $y(x,t)$  уравнения (3), удовлетворяющим начальному

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

и краевому

$$a(x) \frac{\partial y}{\partial x} |_{x \in \partial \Gamma_T} = \phi(x, t) \quad (5)$$

условиям;  $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ ,  $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ ,  $\phi(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$ .

**Определение 1.** *Слабым решением начально-краевой задачи (3)–(5) называется функция  $y(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y(x, t) \eta(x, t) dx - \int_{\Gamma_t} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_t(y, \eta) = \\ = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\partial \Gamma_t} \phi(x, t) \eta(x, t) dx dt + \\ + \int_{\Gamma_t} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (6)$$

при любом  $t \in [0, T]$  и для любой функции  $\eta(x, t) \in W^1(a, \Gamma_T)$ ;  $\ell_t(y, \eta)$  — билинейная форма, определённая соотношением

$$\ell_t(y, \eta) = \int_{\Gamma_t} \left( a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x)y(x, t)\eta(x, t) \right) dx dt.$$

**Теорема 1.** *Начально-краевая задача (3)–(5) имеет по крайней мере одно слабое решение в пространстве  $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ .*

Доказательство теоремы предваряется доказательством разрешимости задачи (3)–(5) в пространстве  $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ . При этом используются метод Фаздо-Галеркина и специальный базис — система обобщённых собственных функций  $\{u_n(x)\}_{n \geq 1}$  краевой задачи  $-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x) = \lambda u(x)$ ,  $\frac{du(x)}{dx} = 0$ , в пространстве  $W_2^1(a, \Gamma)$ . Эта задача обладает множеством собственных чисел  $\lambda_n$ , каждому из которых соответствует по крайней мере одна обобщённая собственная функция  $u_n(x) \in W_2^1(a, \Gamma)$ , удовлетворяющее тождеству  $\ell(u, \eta) = \lambda(u, \eta)$  при любой функции  $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$  (здесь и всюду ниже через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено скалярное произведение в  $L_2(\Gamma)$ ,  $L_2(\partial\Gamma_T)$  или  $L_2(\Gamma_T)$ ). Собственные значения  $\lambda_n$  имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учётом кратностей:  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ . Система обобщённых собственных функций  $\{u_n(x)\}_{n \geq 1}$  плотна в  $W_2^1(a, \Gamma)$  и ортонормирована в  $L_2(\Gamma)$  [2]. Не умоляя общности, считаем, что краевое условие (5) однородное:  $\phi(x, t) = 0$ .

**Определение 2.** *Слабым решением класса  $W^{1,0}(\Gamma_T)$  начально-краевой задачи (3)–(5) ( $\phi(x, t) = 0$ ) называется функция  $y(x, t) \in W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(y, \eta) = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \\ + \int_{\Gamma_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (7)$$

для любой  $\eta(x, t) \in W^1(a, \Gamma_T)$ , равной нулю при  $t = T$ .

**Теорема 2.** Начально-краевая задача (3)–(5) ( $\phi(x, t) = 0$ ) имеет по крайней мере одно слабое решение в пространстве  $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ .

При доказательстве теоремы 2 строятся приближенные решения  $y^N(x, t)$  задачи (3)–(5) ( $\phi(x, t) = 0$ ) в виде  $y^N(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t) u_i(x)$  ( $c_i^N(t)$  — абсолютно непрерывные на  $[0, T]$  функции:  $c_i'(t) \in L_2(0, T)$ ), где  $c_i^N(t)$  определяются из системы

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial y^N}{\partial t}, u_i \right) + \\ & + \int_{\Gamma} \left( a(x) \frac{\partial y^N(x, t)}{\partial x} \frac{du_i(x)}{dx} + b(x) y^N(x, t) u_i(x) \right) dx = (f, u_i), \\ & i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{8}$$

и равенств

$$c_i^N(0) = (\varphi, u_i), \quad i = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) суть задача Коши на интервале  $[0, T]$  для системы  $N$  линейных дифференциальных уравнений относительно  $c_i^N(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Так как  $N$ -матрица  $\|(u_i, u_j)\|$  неособенная, то система (8), (9) имеет единственное решение  $c_i^N(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Дальнейшее построено на получении оценок норм  $y^N(x, t)$ , не зависящих от  $N$ , и почти дословно повторяют приведённые в [1] рассуждения.

Для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$  след принадлежащего пространству  $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$  слабого решения задачи (3)–(5) ( $\phi(x, t) = 0$ ) суть элемент  $W_2^1(a, \Gamma)$  и непрерывно зависит от  $t$  в норме  $W_2^1(\Gamma)$ , а значит, и в норме  $L_2(\Gamma)$ .

### Литература

1. Провоторов В. В. Оптимальное управление параболической системой с распределёнными параметрами на графе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математи-

ка. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 3. С. 154-163.

2. *Провоторов В. В.* Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на графе-пучке // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 50-62.

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ <sup>1</sup>

©2022 *В. Б. Васильев*

(Белгород, НИУ «БелГУ»; *vvv57@inbox.ru*)

Пусть  $C_+^a$  — угол на плоскости

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}.$$

Мы рассматриваем модельное уравнение вида

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus C_+^a, \quad (1)$$

в предположении, что символ  $A(\xi)$ ,

$$|A(\xi)| \sim (1 + |\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

допускает волновую факторизацию относительно  $-C_+^a$  [1]. Напомним, что это специальное представление символа

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

множителями, обладающими специальными свойствами, связанными с аналитическим продолжением в радиальные трубчатые области комплексного пространства  $\mathbb{C}^2$ . Кратко поясним.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, проект FZWG-2020-0029

Сопряжённым конусом  $C_+^a$  к  $C_+^a$  называется конус  $\{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), ax_2 > |x_1|\}$ , радиальная трубчатая область  $T(C_+^a)$  над конусом  $C_+^a$  — это множество вида  $\mathbb{R}^2 + i C_+^a$ .

Волновая факторизация требует аналитическую продолжимость  $A_{\neq}(\xi)$  в  $T(-C_+^a)$ , и  $A_{=}(\xi)$  — в  $T(C_+^a)$  с оценками

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leq c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \alpha},$$

$$|A_{=}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leq c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \alpha)}, \quad \forall \tau \in C_+^a,$$

и число  $\alpha$  называется индексом волновой факторизации.

Введём интегральный оператор [1]

$$(G_a \tilde{u})(\xi) = \frac{a}{2\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{u}(\eta) d\eta}{(\xi_1 - \eta_1)^2 - a^2(\xi_2 - \eta_2 + i\tau)^2}$$

Мы используем интегральное представление решения, приведённое в [1].

**Теорема 1.** Пусть символ  $A(\xi)$  допускает волновую факторизацию относительно  $C_+^a$  с индексом  $\alpha$  таким, что  $|\alpha - s| < 1/2$ . Тогда уравнение (10) имеет единственное решение в пространстве  $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$ , которое в образах Фурье даётся формулой

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)(I - G_a)(A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{\ell}g(\xi)),$$

где  $\ell g$  — произвольное продолжение  $g$  на все  $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ .

С помощью свойств одномерных сингулярных интегральных операторов [2] оказывается возможным уточнить последнее представление решения уравнения (10) и осуществить предельный переход при  $a \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** В дополнение к условиям Теоремы 1 предположим, что волновая факторизация с индексом  $\alpha$  существует для всех достаточно больших  $a$  и  $g \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ . Тогда предел

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2)$$

существует и принимает следующий вид

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = A^{-1}(\xi) \tilde{g}(\xi) - \frac{1}{2} A^{-1}(\xi_1, 0) \tilde{g}(\xi_1, 0).$$

Стоит отметить, что здесь рассмотрен случай единственного решения. Некоторые другие варианты с наличием граничных условий рассмотрены в [3,4].

### Литература

1. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. // М.: УРСС, 2010. 235 с.
2. Mikhlin S.G., Prößdorf S. Singular integral operators. // Berlin: Akademie-Verlag, 1986. 528 p.
3. Kutaiba Sh., Vasilyev V. On solutions of certain limit boundary value problems // AIP Conf. Proc. - 2020. - V. 2293. - 110006.
4. Vasilyev V. B. On certain 3D limit boundary value problem // Lobachevskii J. Math. -2020. - V. 41. - № 5. - P. 913–921.

# СЛУЧАЙ ТОЧНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

©2022 М. Ю. Ватолкин

(Ижевск, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова;

*vtu6886@gmail.com*)

Пусть  $I \subseteq \mathbb{R}$  — открытый интервал,  $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^2$  — нижняя треугольная матрица,  $p_{ik} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $p_{00}(\cdot)$  и  $p_{22}(\cdot)$  измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а  $\frac{1}{p_{11}(\cdot)}$ ,  $\frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}$ ,  $\frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$ ,  $\frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$  локально суммируемы в  $I$ . Определим квазипроизводные  ${}_p^0x$ ,  ${}_p^1x$ ,  ${}_p^2x$  функции  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  равенствами:  ${}_p^0x \doteq p_{00}x$ ,  ${}_p^1x \doteq p_{11} \frac{d({}_p^0x)}{dt} + p_{10}({}_p^0x)$ ,  ${}_p^2x \doteq p_{22} \frac{d({}_p^1x)}{dt} + p_{21}({}_p^1x) + p_{20}({}_p^0x)$ .

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение [1] (в [1] изучается уравнение произвольного порядка)

$$({}_p^2x)(t) = 0, \quad t \in I. \quad (1)$$

Его решением называется всякая функция  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющая локально абсолютно непрерывные нулевую и первую квазипроизводные и удовлетворяющая (1) почти всюду в  $I$ .

Уравнение (1) называется неосцилляционным на промежутке  $J \subset I$  (здесь  $J = [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ ), если нулевая квазипроизводная любого его нетривиального решения имеет на  $J$  не более одного нуля [1].

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$({}_p^2x)(t) = -\lambda ({}_p^0x)(t) \quad (t \in J = [a, b]), \quad (2)$$

$$x(a) = x(b) = 0. \quad (3)$$

Последовательность решений  $\{x_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty$  построим так:  $x_0(\cdot)$  есть решение задачи  $(\overset{2}{p}x)(t) = 0$  ( $t \in J$ ),  $\overset{0}{p}x(a) = 0$ ,  $\overset{1}{p}x(b) = 1$ ;

$x_k(\cdot)$  находятся рекуррентно как решения задач  $(\overset{2}{p}x_k)(t) = (\overset{0}{p}x_{k-1})(t)$  ( $t \in J$ ),  $\overset{0}{p}x_k(a) = 0$ ,  $\overset{1}{p}x_k(b) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Решение  $u(t, \lambda)$  уравнения (2), удовлетворяющее первому из условий (3), представимо в виде ряда [2],

$$u(t, \lambda) = x_0(t) - \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) - \lambda^3 x_3(t) + \dots \quad (4)$$

Собственные значения задачи (2), (3) представляют собой корни уравнения  $\Phi(\lambda) = 0$ , где  $\Phi(\cdot)$  — сумма ряда (4) при  $t = b$ . Функция  $u(t, \lambda^*) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (\lambda^*)^k x_k(t)$  ( $t \in J$ ) есть собственная функция задачи (2), (3), отвечающая собственному значению  $\lambda^*$ .

**Теорема 1.** Пусть уравнение (1) неосцилляционно на  $J$  и  $C(t, s)$  есть функция Коши уравнения (1), вещественные константы  $M_1, M_2$  и функция  $\varphi(\cdot)$  таковы, что выполняются следующие неравенства:  $1 \leq \varphi(t)$  при всех значениях  $t$  ( $a \leq t \leq b$ ),

$$\overset{0}{p}C(t, s) \leq M_1 \int_s^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds$$

при всех значениях  $s$  и  $t$  таких, что  $a \leq s \leq t \leq b$ ,

$$\overset{0}{p}C(t, a) \leq M_2 \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds$$

при всех значениях  $t$  ( $a \leq t \leq b$ ). Пусть далее,  $M \doteq \max\{M_1, M_2\}$ . Тогда (при  $t \in J$ ) справедливы точные (см. примеры 1 и 2 ниже) оценки

$$0 \leq \overset{0}{p}x_k(t) \leq \frac{M^{k+1} \left( \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (5)$$



**Доказательство.** Докажем эту теорему методом математической индукции. При  $k = 0$  оценка (5) верна, т.к.  ${}^0_p x_0(t) = {}^0_p C(t, a)$ , следовательно,

$${}^0_p x_0(t) = {}^0_p C(t, a) \leq M_2 \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \leq M \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds.$$

Пусть оценка (5) имеет место для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ .

Покажем её справедливость для  $k + 1$ .

$$\begin{aligned} {}^0_p x_{k+1}(t) &= \int_a^t \frac{{}^0_p C(t, s) {}^0_p x_k(s)}{p_{22}(s)} ds \leq \\ &\leq \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!} \int_a^t \left( \frac{M_1 \cdot \varphi(s)}{p_{22}(s)} \right) \cdot \left( \int_s^t \frac{\varphi(\tau)}{p_{22}(\tau)} d\tau \right) \cdot \\ &\cdot \left( \int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+1} ds \leq \frac{M^{k+2}}{(2k+1)!} \int_a^t \left( \int_s^t \frac{\varphi(\tau)}{p_{22}(\tau)} d\tau \right) \cdot \\ &\cdot \left( \int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+1} d \left( \int_a^s \frac{\varphi(\tau_2)}{p_{22}(\tau_2)} d\tau_2 \right) = \\ &= \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!} \int_a^t \left( \int_s^t \frac{\varphi(\tau)}{p_{22}(\tau)} d\tau \right) d \left( \int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+2} = \\ &= \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!} \int_a^t \left( \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} \right) \left( \int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+2} ds = \\ &= \frac{M^{k+2}}{(2k+3)!} \int_a^t d \left( \int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+3} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M^{k+2}}{(2k+3)!} \left( \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2k+3} = \\
&= \frac{M^{(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!} \left( \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее неравенство

$$0 \leq {}^0_p x_k(t) \leq \frac{M^{(k+1)+1} \cdot \left( \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}.$$

По индукции (5) имеет место для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Теорема доказана.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу вида (2),(3):

$$\frac{1}{\cos t} \left( \frac{1}{\cos t} x' \right)' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]) \quad (6)$$

(уравнение (6) получено из уравнения:  
 $x'' + \operatorname{tg} t \cdot x' = -\lambda \cos^2 t$ ),

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (7)$$

Для задачи (6),(7) обозначения теоремы 1 примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1, \\
&p_{11}(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad p_{10}(t) = p_{21}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad p_{20}(t) = 0; \\
&{}^0_p C(t, s) = C(t, s) = \int_s^t \frac{1}{\frac{1}{\cos \tau}} d\tau = \int_s^t \cos \tau d\tau = \sin t - \sin s,
\end{aligned}$$

$$M_1 = M_2 = 1, \quad \varphi(t) \equiv 1,$$

$${}_P^0 x_k(t) = x_k(t) = \frac{(\sin t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Правые части оценок (5) функциями  ${}_P^0 x_k(t)$  достигаются. Представление (4) для задачи (6),(7) примет вид:

$$u(t, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda} \cdot \sin t)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Корнями уравнения  $\Phi(\lambda) = 0$ , где  $\Phi(\lambda) = u(1, \lambda)$ , и собственными значениями задачи (6),(7) являются  $\lambda_k = \left( \frac{\pi k}{\sin 1} \right)^2$ .

Функции

$$u(t, \lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \lambda_k^m \cdot x_m(t) = \frac{\sin 1 \cdot \sin \left( \frac{\pi k \cdot \sin t}{\sin 1} \right)}{\pi k}$$

являются собственными функциями задачи (6),(7), соответствующими собственным значениям  $\lambda_k$  задачи (6),(7).

Обобщим пример 1, а, именно, рассмотрим следующий пример.

**Пример 2.** Рассмотрим задачу вида (2),(3):

$$p(t) \left( p(t) x' \right)' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]) \quad (8)$$

(функция  $p(t)$  измерима, почти всюду конечна, неотрицательна и суммируема на  $[0, 1]$ ),

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (9)$$

Для задачи (8),(9) обозначения теоремы 1 примут следующий вид:

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1,$$

$$p_{11}(t) = p(t), \quad p_{10}(t) = p_{21}(t) = 0,$$

$$p_{22}(t) = p(t), \quad p_{20}(t) = 0;$$

$${}_p^0C(t, s) = C(t, s) = \int_s^t \frac{d\tau}{p(\tau)},$$

$$M_1 = M_2 = 1, \quad \varphi(t) \equiv 1,$$

$${}_p^0x_k(t) = x_k(t) = \frac{\left(\int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Правые части оценок (5) функциями  ${}_p^0x_k(t)$  достигаются. Представление (4) для задачи (8),(9) примет вид:

$$u(t, \lambda) = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot \left(\int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Корнями уравнения  $\Phi(\lambda) = 0$ , где  $\Phi(\lambda) = u(1, \lambda)$ , и собственными значениями задачи (8),(9) являются

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)}}\right)^2.$$

Функции

$$\begin{aligned} u(t, \lambda_k) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \lambda_k^m \cdot x_m(t) = \\ &= \frac{\left(\int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k \cdot \int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)}}\right)}{\pi k} \end{aligned}$$

являются собственными функциями задачи (8),(9), соответствующими собственным значениям  $\lambda_k$  задачи (8),(9).

## Литература

1. *Дерр В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В.Я. Дерр // Изв. института математики и информатики УдГУ. — 1999. — № 1(16). — С. 3–105.
2. *Ватолкин М.Ю.* О представлении решений квазидифференциального уравнения / М.Ю. Ватолкин, В.Я. Дерр // Изв. вузов. — 1995. — № 10(401). — С. 27–34.

## ЛОКАЛЬНАЯ ГИПОТЕЗА ФОМЕНКО: КОМБИНАЦИЯ БАЗЫ СЛОЕНИЯ И МЕТКИ $n$

<sup>1</sup> Работа поддержана РНФ, проект 20-71-00155.

©2022 В. В. Ведюшкина

(Москва, МГУ; [arinir@yandex.ru](mailto:arinir@yandex.ru))

Недавно В.В.Ведюшкиной был введен [1] класс билиардных книжек — кусочно-плоских столов-комплексов с перестановками на рёбрах (комплекс склеен из плоских *софокусных* столов, т.е. ограниченных квадриками с общими фокусами). Это существенно расширило класс интегрируемых билиардов и разнообразило топологию слоений Лиувилля на их фазовых пространствах (его разбиение на совместные уровни энергии и интеграла) при сохранении тесной связи с классом софокусных столов. Последнее следует из доказанной А.А.Глуцкоком [2] гипотезы Биркгофа о полиномиально интегрируемых плоских билиардах: опуская детали, такие билиарды должны иметь софокусный или круговой стол.

А.Т.Фоменко сформулировал в [3] фундаментальную гипотезу о билиардах: класс интегрируемых билиардов окажется “не уже” класса интегрируемых систем относительно

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.73117311.2017/БЧ).

послойной гомеоморфности слоений Лиувилля. Классифицирующим инвариантом Фоменко–Цишанга является граф-молекула с числовыми метками, вершины которого оснащены типами особенностей-атомов, подробнее см. книгу [4].

Ряд положений гипотезы уже доказан. В работах В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой алгоритмически задаваемыми биллиардами были промоделированы произвольные боттовские 3-атомы [1], т.е. невырожденные особенности ранга 1, и молекулы [5], т.е. базы слоения Лиувилля — графы с вершинами-атомами. В.В.Ведюшкиной и В.А.Кибкало доказано [6], что в биллиардах возникают и произвольные значения числовых меток  $r, \varepsilon, n$ . Они, напомним, задают диффеоморфизмы склейки граничных торов 3-атомов друг с другом.

Вопрос о реализации их комбинаций пока открыт и является частью локальной версии гипотезы А.Т.Фоменко [6]. Рассмотрим связный подграф графа-молекулы, каждой вершине которого соответствуют седловые атомы без звёздочек  $V_i$ , причём на всех внутренних рёбрах  $V_i \xrightarrow{r = \infty} V_j$ , а

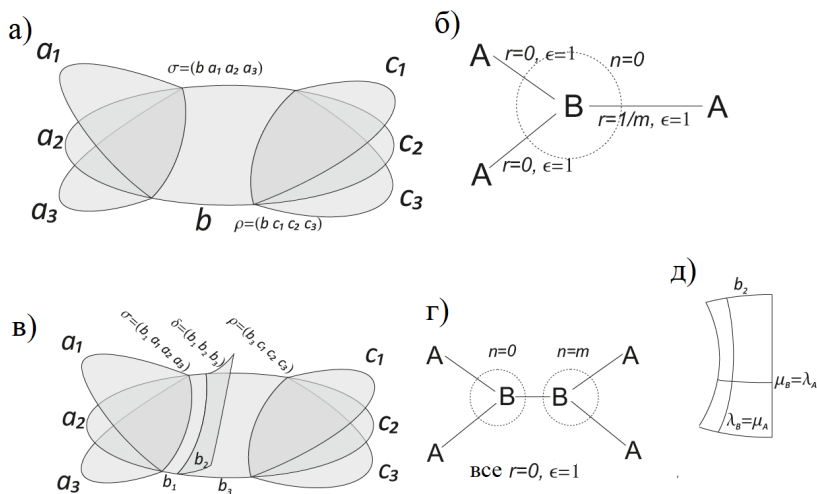
на внешних  $V_i \xrightarrow{r \neq \infty} A$ . Такое слоение есть прямое произведение окружности на слоение гамильтоновой системы с 1 ст.св. на двумерной поверхности с морсовскими сёдлами.

Такой объект в теории интегрируемых систем называется *семьёй* и оснащается целочисленной меткой  $n$ . Ранее эту метку удавалось реализовать биллиардами лишь на *некоторых* семьях-подграфах специального вида.

Покажем, что биллиардами реализуются все такие слоения и любым значением метки  $n$  (т.е. она не препятствие к реализации). Рассмотрим стол-книжку с  $\mathbb{B}_1$  с перестановками  $\sigma, \rho$  (рис. 1а) и его инвариант Фоменко–Цишанга (16). Здесь  $m = 3$  — количество областей  $a_i$  и  $c_i$ .

Теперь построим стол  $\mathbb{B}(A_0)$  (рис. 1в), вклеив плоскую область  $A_0$  (рис. 1д). Инвариант ФЦ бильярда на столе  $\mathbb{B}(A_0)$  указан на рис. 1г. Слоение имеет семью из 3-атома  $B$  с метки  $n = m$ . Объединим теперь результат с алгоритмом Ведюшкиной и Харчевой [4] реализации баз-молекул  $W$ .

**Теорема 1.** *Бильiardными книжками  $\mathbb{B}(W)$  реализуется произвольное значение  $t$  метки  $n$  на произвольной семье  $W$  из седловых атомов типа прямого произведения.*



## Литература

1. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильiardные книжки моделируют все трёхмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. – 2018. – Т. 209. – №. 23. – С. 17-56.
2. Glutsyuk A. A. On Two-Dimensional Polynomially Integrable Billiards on Surfaces of Constant Curvature // Dokl. Math. – 2018. – Т. 98. – №. 1. – С. 382-385.

3. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В. Биллиарды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. МГУ, Сер.1. – 2019. – №. 3. – С. 15-25.

4. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, Т.1,2. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.

5. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. – 2021. – Т. 212. – №. 8. – С. 89-150.

6. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А., Фоменко А. Т. Топологическое моделирование интегрируемых систем биллиардами: реализация числовых инвариантов // Докл. РАН. – 2020. – Т. 493. – С. 9-12.

## ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ

©2022 Ю. П. Вирченко

(Белгород, БелГУ; [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru))

Посредством выделения общих свойств всех математических моделей, которые называются в статистической физике перколяционными, предлагается формулировка абстрактного понятия математической структуры  $\mathfrak{P}$ , в смысле Бурбаки, которую мы называем *перколяционной*. По нашему мнению, вводимое нами понятие объединяет в единый класс все имеющиеся к настоящему времени математические модели, основанные на физическом понятии перколяции.

Перколяционная структура  $\mathfrak{P}$  представляет собой *четвёрку*  $\langle \mathfrak{S}, \mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \Gamma \rangle$  математических структур, в которой  $\mathfrak{S}$  — метрическое пространство,  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{S})$  — семейство *допустимых* подмножеств  $A$  в  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{W}$  — вероятностное пространство, в котором  $\mathfrak{M}$  является пространством элементар-



ных событий (случайных множеств),  $\Gamma$  — отношение связности на  $\mathfrak{S}$ , определённое для всех множеств из  $\mathfrak{M}$ . Отношение  $\Gamma$  является измеримым по отношению к структуре измеримости, на вероятностном пространстве  $\mathfrak{M}$ .

Отношение связности  $\Gamma$  выделяет в  $\mathfrak{M}$  подкласс  $\mathfrak{C}$  связанных подмножеств. Ввиду измеримости отношения  $\Gamma$ , в перколяционной структуре для каждого множества  $A \in \mathfrak{M}$  определена вероятность  $\text{Pr}\{A \in \mathfrak{C}; A \subset B, B \in \mathfrak{M}\}$ , то есть вероятность того, что случайное множество  $A$  связано. В частности, определены такие вероятности  $p(x_1, \dots, x_n)$  для каждого конечного набора элементов  $x_1, \dots, x_n$  из  $\mathfrak{S}$ . Их значения представляют вероятности связности всех этих элементов  $x_1, \dots, x_n$ .

Особенный интерес представляют перколяционные структуры, у которых определяющее их метрическое пространство  $\mathfrak{S}$  является некомпактным. В этом случае для каждой точки  $x \in \mathfrak{S}$  определена вероятность

$$\text{Pr}\{\exists(y \in \mathfrak{S})(y \in A, A \in \mathfrak{M}, \text{dist}(x, y) \geq r > 0)\} \equiv P(x, r) \quad (1)$$

связности точки  $x$  с некоторой точкой  $y$ , удалённой на расстояние не менее чем  $r$ . На основе же этого функционала вводится вероятность  $P(x)$  существования бесконечного пути из точки  $x$  (ухода из этой точки на бесконечность)

$$P(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} P(x, r). \quad (2)$$

В том случае, когда эта вероятность отлична от нуля, говорят о наличии *перколяции на бесконечность* из заданной точки  $x \in \mathfrak{S}$ .

С точки зрения изучения явления перколяции, наибольший интерес представляют собой перколяционные структуры, которые допускает такое погружение пространства  $\mathfrak{S}$  в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , при котором расстояние  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  на  $\mathfrak{S}$

согласовано с расстоянием в  $\mathbb{R}^m$ . Такие перколяционные структуры мы называем *конечномерными*. Это связано с тем, что в конечномерных перколяционных структурах, при всяком «разумно» заданном распределении вероятностей случайных множеств, всегда имеется перколяция на бесконечность. Кроме того, в конечномерных перколяционных структурах возможно определение перколяции через все пространство  $\mathbb{R}^m$ . А именно, для каждой пары противоположных граней  $S_1, S_2$  каждого параллелепипеда  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  можно ввести вероятность

$$P_\Lambda(S_1, S_2) = \Pr\{\exists(x_1 \in S_1, x_2 \in S_2)(\{x_1, x_2\} \subset A, A \cap \Lambda \in \mathfrak{M})\} \quad (3)$$

перколяционного перехода с одной грани на другую по внутренней части  $\Lambda$ . На основе вероятностей  $P_\Lambda(S_1, S_2)$  и расширяющейся последовательности  $\langle \Lambda_k \subset \mathbb{R}^m; k \in \mathbb{N} \rangle$  параллелепипедов такой, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \mathbb{R}^m$ , вводится вероятность

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\Lambda_k}(S_1, S_2). \quad (4)$$

Если вероятность (4) отлична от нуля говорят о наличии перколяции через  $\mathbb{R}^m$  в направлении, перпендикулярном граням  $S_1$  и  $S_2$  по случайной реализации множества из  $\mathfrak{S}$ .

Наконец, укажем, что, также как в случае гиббсовских случайных полей, которые изучаются с целью их применения в статистической механике, наибольший интерес представляет не вычисление вероятности перколяции для фиксированного распределения вероятностей в вероятностном пространстве  $\mathfrak{W}$ , а её изучение для целого класса распределений вероятностей, параметризованного некоторым набором параметров  $\langle \theta_1, \dots, \theta_s \rangle$ , которые принимают значения в некоторой замкнутой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ . Тогда область  $\Omega$  разбивается, вообще говоря, на открытые связные множества  $\Sigma_j$ , в которых имеется перколяция, а в их дополнении

$\Omega \setminus \bigcup_j \Sigma_j$  вероятность перколяции равна нулю. В этом случае говорят о наличии фазового перехода в перколяционной структуре. Поверхность, вообще говоря многосвязную, являющуюся границей областей  $\bigcup_j \Sigma_j$ , называют *фазовой диаграммой*. Такое положение имеет место как в случае перколяции из фиксированной точки  $x \in \mathfrak{S}$ , так и в отношении перколяции через все пространство  $\mathbb{R}^m$ .

Сделаем ещё два замечания в связи с построением конкретных реализаций перколяционных структур. Во-первых, как и во всяком содержательном вероятностном пространстве, структуры измеримости в вероятностных пространствах  $\mathfrak{M}$  перколяционных структур должны быть основаны на счётно-порождённых  $\sigma$ -алгебрах. Во-вторых, при определении содержательного отношения связности  $\Gamma$  приходится избегать наличие в классе  $\mathfrak{M}$  таких множеств, которые содержат канторовскую компоненту, то есть континуальное замкнутое множество, которое нигде не плотно в  $\mathfrak{S}$ .

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

©2022 *Р. Р. Галиакберов*

(Иркутск, ИГУ; *ruslan10651999@gmail.com*)

©2022 *С. С. Орлов*

(Иркутск, ИГУ; *orlov\_sergey@inbox.ru*)

©2022 *Г. К. Соколова*

(Иркутск, ИГУ; *98gal@mail.ru*)

Пусть  $E$  — банахово пространство, а  $\mathcal{B}(E)$  — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из  $E$  в  $E$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u^{(N)}(t) - \mathcal{A}u(t) = f(t) \tag{1}$$

порядка  $N \in \mathbb{N}$  с операторным коэффициентом  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(E)$ , где  $u$  — искомая, а  $f$  — заданная функции аргумента  $t \in \mathbb{R}$  и со значениями в  $E$ . Изучение существования периодических решений дифференциально-операторных уравнений обычно сводится к рассмотрению *периодической краевой задачи* с граничными условиями

$$u^{(i-1)}(0) = u^{(i-1)}(T), \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

где  $T$  — предполагаемый период решения (см., например, статью [1]). Исследование разрешимости указанной задачи естественным образом приводит к ограничениям на спектр  $\sigma(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$ . Единственность периодического решения изучают отдельно, а его основной период может оказаться меньше заданного  $T$ .

В докладе предлагается другой подход к исследованию существования периодических решений уравнения (1), при котором рассматривается не краевая, а начальная задача с начальными условиями

$$u^{(i-1)}(0) = u_{i-1}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2)$$

где элементы  $u_{i-1} \in E$  заданы, в условиях её однозначной разрешимости. Требуется описать множество операторных коэффициентов  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(E)$ , свободных функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  и начальных значений  $u_{i-1} \in E$ , при котором *классическое* решение задачи Коши (1), (2) окажется  $T$ -периодическим. Классическим решением начальной задачи (1), (2) назовём функцию  $u(t) \in C^N([0; +\infty); E)$ , обращающую в тождество уравнение (1) и удовлетворяющую начальным условиям (2). Предлагаемый подход позволяет ослабить указанные выше ограничения на спектр  $\mathcal{A}$ .

Известно, что задача Коши (1), (2) имеет единственное классическое решение

$$u(t) = \sum_{k=1}^N U_N^{(k-1)}(t) u_{N-k} + \int_0^t U_N(t-s) f(s) ds,$$

при любых  $f(t) \in C([0; +\infty); E)$  и  $u_{i-1} \in E$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , (см., например, монографию [2]), где оператор-функция  $U_N$  задаётся в виде операторно-функционального ряда

$$U_N(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!} \mathcal{A}^{k-1}.$$

равномерно сходящегося в норме банаховой алгебры  $\mathcal{B}(E)$  на любом компакте  $[0, T]$ . Также справедливо выражение

$$U_N(t) = t^{N-1} E_{N,N}(t^N \mathcal{A}),$$

через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера. Оператор-функция  $U_N$  есть равномерно непрерывная полугруппа операторов при  $N = 1$  и синус оператор-функция при  $N = 2$ , которые порождены инфинитиземальным генератором  $\mathcal{A}$  (см. обзор [3]). Также заметим, что при всех  $t, s \in \mathbb{R}$  имеет место соотношение

$$U_N(t+s) = \sum_{k=1}^N U_N^{(k-1)}(t) U_N^{(N-k)}(s).$$

Непосредственно можно убедиться, что периодичность с периодом  $T$  правой части уравнения (1) является условием, необходимым для  $T$ -периодичности его решения. Так как за необходимостью функция  $f$  сильно непрерывна, то она либо постоянная, либо  $T$ -периодическая. Для последнего случая справедлив следующий критерий.

**Теорема.** Пусть функция  $f(t) \in C([0; +\infty); E)$  является  $T$ -периодической, и линейный оператор  $A$  ограничен. Тогда для того чтобы классическое решение задачи Коши (1), (2) было  $T$ -периодическим, необходимо и достаточно, чтобы для всех  $k \in \{1, \dots, N\}$  выполнялись соотношения

$$(U_N^{(N-k)}(T) - \mathbb{I})u_{N-k} = - \int_0^T U_N^{(N-k)}(T-s)f(s)ds.$$

### Литература

1. *Eidelman Y. S., Tikhonov I. V.* On periodic solutions of abstract differential equations // Abstract and Appl. Anal. – 2001. – Vol. 6., No. 8. – P. 489–499.
2. *Sidorov N. et al* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 568 p.
3. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полу-группы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия математический анализ. – 1990. – Т. 28. – С. 87–202.

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

©2022 Ю. А. Гладышев

(Калуга, КГУ)

©2022 Е. А. Лошкарева

(Калуга, КГУ; *losh-elena@yandex.ru*)

Настоящее сообщение является непосредственным продолжением работы [1]. Большой класс линейных дифференциальных уравнений в частных производных имеет или может быть приведён к виду

$$D_1 u + D_2 u = 0, \quad (1)$$

где  $D_1, D_2$  произведение операторов

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{1\alpha} \dots D_{1i} \dots D_{11}, i = \overline{1, \alpha}, \\ D_2 &= D_{2\beta} \dots D_{2j} \dots D_{21}, j = \overline{1, \beta}, \end{aligned}$$

и операторы  $D_{1i}, D_{2j}$  определены как

$$D_{1i} = a_{1i}(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1}, D_{2j} = a_{2j}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (2)$$

Здесь  $a_{1i}(x_1), a_{2j}(x_2)$  непрерывные функции соответствующих независимых переменных  $x_1, x_2$  в заданной области.

Кроме сравнительно простого случая

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^\alpha} + \frac{\partial^\beta u}{\partial x_2^\beta} = 0, \quad (3)$$

рассмотренного ранее в [1] в изучаемый класс входят параболические, эллиптические и гиперболические уравнения при  $(\alpha = 2, \beta = 1, \alpha = \beta = 2), (\alpha = 4, 2)$  имеющие практическое применение в теории переноса, теории упругости и механике жидкости и газа.

Применение метода параметрических обобщённых степеней (ПОС) требует выполнение ряда условий. Все операторы  $D_{1i}, D_{2j}$  должны иметь не пустые ядра

$$D_{1i} C_{1i} = 0, D_{2j} C_{2j} = 0. \quad (4)$$

Из вида операторов (2) следует, что  $C_{1i}, C_{2j}$  константы.

Операторы первого набора должны коммутировать с любым оператором второго

$$D_{1i}D_{2j} = D_{2j}D_{1i}. \quad (5)$$

Кроме этого требуем, чтобы все операторы  $D_{1i}, D_{2j}$  имели правые обратные  $I_{1i}, I_{2j}$

$$D_{1i}I_{1i} = 1, D_{2j}I_{2j} = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что эти требования выполнены.

Как следствие (2) правые обратные для  $D_1, D_2$  определены как  $I_{1i}, I_{2j}$

$$I_1 = I_{11} \dots I_{1\alpha}, I_2 = I_{21} \dots I_{2\beta}. \quad (7)$$

В отличии от матричного варианта ОС, где требуется построение матричных операторов и доказательства их коммутации, в параметрическом варианте ОС структура решения значительно проще. Основным является нахождение обобщённой константы (ОК) согласно общей теории [1]  $I_{1i}, I_{2j}$

$$C = \left( \sum_{i=0}^{\alpha-1} I_{10} \dots I_{1i} C_{1i+1} \right) \left( \sum_{j=0}^{\beta-1} I_{20} \dots I_{2j} C_{2j} \right), I_{10} = I_{20} = 1. \quad (8)$$

Все  $C_{1i}, C_{2j}$  определены в (4). Для ПОС в общем виде запишем  $I_{1i}, I_{2j}$

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p!q! I_1^p I_2^q C, \quad (9)$$

где  $I_1, I_2, C$  определены в (7), (8). Эти, так называемые бинарные ОС, по построению удовлетворяют соотношениям

$$D_1 X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p X_1^{(p-1)} X_2^{(q)} C, D_2 X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = q X_1^{(p)} X_2^{(q-1)} C. \quad (10)$$



Частное решение (1) запишем

$$u_n(x_1, x_2) = (X_1 - X_2)^n C = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i X_1^{n-i} X_2^i C. \quad (11)$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой правой части (11) в (1), имея в виду, что запись  $(X_1 - X_2)^n C$  имеет чисто символическое значение.

Используя линейность уравнения (1), можно утверждать, что многочленное решение (1) можно записать

$$u(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^n \bar{Z}^i C_i, \quad (12)$$

где введено обозначение

$$\bar{Z}^n C_n = (X_1 - X_2)^n C_n. \quad (13)$$

При определённой метрике можно говорить о рядах (12).

Положительной стороной метода ПОС является возможность его обобщения на любое число независимых переменных. Если рассмотреть уравнение типа (1) в случае трёх независимых переменных, запишем

$$D_1 u + D_2 u + D_3 u = 0, \quad (14)$$

где  $D_1, D_2$  определены по (2), а

$$D_3 = D_{3\gamma} \dots D_{3k} \dots D_{31} \quad (15)$$

при

$$D_{3k} = a_{3k}(x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}, k = \overline{l, \gamma}. \quad (16)$$

Решение (14) типа ОК содержит три сомножителя

$$C = \left( \sum_{i=0}^{\alpha-1} I_{10} \dots I_{1i} C_{1(i+1)} \right) \left( \sum_{j=0}^{\beta-1} I_{20} \dots I_{2j} C_{2j} \right) \left( \sum_{k=0}^{\gamma-1} I_{30} \dots I_{3k} C_{3(k+1)} \right). \quad (17)$$

Очевидно, что ПОС в этом случае имеет вид

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} X_3^{(r)} C = p!q!r! I_1^p I_2^q I_3^r C. \quad (18)$$

В символической форме частное решение (14) запишем

$$u_n = (X_1 + X_2 - 2X_3)^n C = \sum_{i=0}^n (-2)^i C_n^i (X_1 + X_2)^{n-i} X_3^i C. \quad (19)$$

Если ввести операторы

$$\begin{aligned} D_z(3) &= \frac{1}{4} (D_1 + D_2 + D_3) = \frac{1}{4} \Delta_e(3), \\ \bar{D}_z(3) &= \frac{1}{4} (D_1 + D_2 - D_3) = \frac{1}{4} \Delta_g(3) \end{aligned} \quad (20)$$

и обозначение

$$\bar{Z}^n(3) C = (X_1 + X_2 - 2X_3)^n C, \quad (21)$$

то непосредственно можно проверить правила

$$D_z \bar{Z}^n C = 0, \quad \bar{D}_z \bar{Z}^n C = n \bar{Z}^{n-1} C. \quad (22)$$

Можно говорить о многочленах и рядах от  $x_1, x_2, x_3$ , представленных в символической форме.

В сообщении показано, что метод параметрических ОС позволяет построить решение большого класса дифференциальных уравнений высокого порядка с нелинейными коэффициентами и может быть распространён на уравнения с любым числом переменных. Приведён случай трёхмерного пространства.

## Литература

1. *Гладышев Ю.А.* Метод обобщённых степеней Берса и его приложения в математической физике / Ю.А. Гладышев. — Калуга. : КГПУ, 2011. — 201 с.

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ЧАСТИЧНО ПРОЕКТИВНЫХ КВАТЕРНИОННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ШТИФЕЛЯ

©2022 Л. В. Горденин  
(Москва; db0zmail@gmail.com)

Многообразие Штифеля  $V_{n,k}(\mathbb{F})$ , где  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  — это многообразие, состоящее из ортонормированных  $k$ -реперов в  $\mathbb{F}^n$ . Рассматривается случай  $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ; кватернионные многообразия Штифеля обозначаем  $H_{n,k} = V_{n,k}(\mathbb{H})$ . Их кольца когомологий вычислены в [1]:

$$H^*(H_{n,k}; \mathbb{Z}) = \Lambda(z_{n-k+1}, \dots, z_n),$$

где  $\deg z_j = 4j - 1$ . Многообразие Штифеля допускает действие скаляров, по модулю равных единице, состоящее в умножении всех векторов репера на скаляр; соответствующее факторпространство называется *проективным многообразием Штифеля*  $PV_{n,k}(\mathbb{F})$ ; обозначаем  $PH_{n,k} = PV_{n,k}(\mathbb{H})$ . В [2] показано, что

$$H^*(PH_{n,k}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^N) \otimes \Lambda(y_{n-k+1}, \dots, y_{N-1}, y_{N+1}, \dots, y_n),$$

где  $N = \min\{j | n - k + 1 \leq j \leq n, \binom{n}{j} \not\equiv 0 \pmod{2}\}$ ,  $\deg y_j = 4j - 1$ ,  $\deg x = 4$ .

Пусть  $G$  — конечная группа, допускающая свободное действие на  $S^3$ ; такими группами являются: конечные циклические группы  $\mathbb{Z}_m$ , обобщённые группы кватернионов  $Q_{4m}$ , двойная тетраэдральная группа  $P_{24}$ , двойная октаэдральная группа  $P_{48}$ , двойная икосаэдральная группа  $P_{120}$ , две серии подгрупп  $SO(4)$ :  $P'_{8.3s}$  и  $B_{2s(2m+1)}$ , а также все прямые произведения любой из перечисленных групп с циклической группой взаимно простого порядка. Тогда  $G$  свободно и дискретно действует левыми сдвигами на слоях расслоения  $H_{n,k} \rightarrow PH_{n,k}$ . Факторпространство  $H_{n,k}^G = H_{n,k}/G$

называем *частично проективным кватернионным многообразием Штифеля*. В [2] вычислены их кольца когомологий с коэффициентами  $\mathbb{Z}_p$  в зависимости от  $G$  и  $p$  для всех случаев  $G$ , кроме случая прямого произведения с циклической группой взаимно простого порядка. Этот случай рассматривается в докладе.

### Литература

1. *Borel A.* Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts // Ann. Math. 57 (1953), 115–207.
2. *Жубанов Г.Е., Попеленский Ф.Ю.* О кольцах когомологий частично проективных кватернионных многообразий Штифеля // Матем. сборник, 2022 (в печати).

## РАСЧЁТ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В МОДЕЛИ РЕШЁТКИ ДИРАКА

©2022 *Б. М. Даринский*

(Воронеж, ВГУ; *darinskii@mail.ru*)

©2022 *Д. С. Сайко*

(Воронеж, ВГТУ; *dmsajko@mail.ru*)

©2022 *Н. Д. Ефанова*

(Воронеж, ВГУ; *efanowanatalia@gmail.com*)

В докладе изложены результаты исследований условий возникновения локализованных собственных функций оператора Гамильтона для полубесконечной решётки Дирака, а также этой решётки с изменённым периодом в одной из ячеек. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$H\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (1)$$

где оператор  $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ , функция  $V(x) = \sum_n V\delta(x - n)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  для  $x \geq 0$  и функция  $V(x) = U$ , где

$U > 0$  для  $x < 0$ ,  $\Psi(x) \in C^2$  — вещественная функция,  $\delta(x)$  — функция Дирака. Периодическая компонента  $u(k, x)$  решения  $\Psi = e^{-kx}u(k, x)$  этого уравнения для  $E = \frac{q^2}{2} > 0$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} u(k, x) &= (A \cos(qx) + B \sin(qx))e^{kx} \text{ для } x > 0, \\ \Psi(x) &= Ce^{\varkappa x} \text{ для } x < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Оно соответствует локализованной функции вблизи края периодической структуры.

Из граничных условий при  $x = 1$  получаются соотношения [1]:

$$B = \frac{e^{-k} - \cos(q)}{\sin(q)} A, \quad (3)$$

$$\text{ch}(k) = \cos(q) + V \frac{\sin(q)}{q}. \quad (4)$$

Из граничных условий при  $n = 0$  находим:

$$e^{-k} = \cos(q) + (\varkappa + 2V) \frac{\sin(q)}{q}. \quad (5)$$

После умножения (4) на -2 и последующего сложения с (5) получается

$$e^k = \cos(q) - V \frac{\sin(q)}{q}. \quad (6)$$

Далее, перемножая правые и левые части (5) и (6), получим

$$V = \frac{U}{q \text{ctg}(q) - \sqrt{2U - q^2}}. \quad (7)$$

Формула (7) представляет собой неявную зависимость собственного значения  $E$  от параметров системы  $U$  и  $V$ . Она показывает, что для малых  $q$  параметр  $V < 0$ . При больших

величинах  $q$  и  $U > \pi$  величина  $V$  может иметь положительные и отрицательные значения, при этом зависимость  $q(U, V)$  становится неоднозначной. Поэтому в этих условиях появляются дополнительные локализованные состояния.

Для отрицательных значений  $E$  решение уравнения (1) записывается в виде (4), в котором тригонометрические функции заменяются гиперболическими. В результате получаем

$$\text{ch}(k) = \text{ch}(q) + V \frac{\text{sh}(q)}{q}, \quad V = \frac{U}{q \text{cth}(q) - \sqrt{2U + q^2}}. \quad (8)$$

Формула (8) показывает, что отрицательные значения также приводят к появлению локализованных функций.

Далее предложена модель межкуристаллитной границы в твёрдых телах как малое изменение расстояния между соседними потенциальными ямами. Учитывая то обстоятельство, что полученная таким образом зависимость  $U(x)$  инвариантна относительно преобразования инверсии, уравнение (1) дополнено двумя вариантами граничных условий  $\Psi(a) = 0$ ,  $\frac{d\Psi(x)}{dx} = 0$  ( $a \neq 1$ ). Первое условие соответствует нечётной функции, второе — чётной. Неявная зависимость энергетического параметра  $q$  от параметров системы в случае нечётной функции даётся формулой

$$V = \frac{q}{2(\text{ctg}(q) + \text{ctg}(qa)) \sin^2(qa)},$$

в случае чётной функции

$$V = \frac{q}{2(\text{ctg}(q) + \text{tg}(qa)) \cos^2(qa)}.$$

### Литература

1. Девисон С., Левин Дж. Поверхностные (таммовские) состояния. // М.: Мир, 1987. 232 с.

# ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА <sup>1</sup>

©2022 М. Т. Джесеналиев

(Алматы, ИМММ; *muwasharkhan@gmail.com*)

©2022 М. И. Рамазанов

(Караганда, КарГУ им. Е.А. Букетова; *ramatur@mail.ru*)

©2022 М. Г. Ергалиев

(Алматы, ИМММ; *ergaliev.madi.g@gmail.com*)

В докладе изучаются вопросы разрешимости обратной задачи (ОЗ) для уравнений Навье-Стокса. Доказаны теоремы об однозначной слабой и сильной разрешимости ОЗ. Для оператора Стокса с однородными граничными условиями Дирихле построена система ортогональных собственных функций и соответствующих ей собственные значения, на основе которой проведено численное решение ОЗ с конкретными числовыми данными. Представлены графики, иллюстрирующие результаты вычислений.

**Постановка задачи.** Введём пространства

$$\mathbf{V} = \{v : v(y) \in (H_0^1(\Omega))^2 = \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} v = 0\},$$

$$\mathbf{H} = \{\text{замыкание } \mathbf{V} \text{ в пространстве } (L_2(\Omega))^2 = \mathbf{L}_2(\Omega)\},$$

$$\mathbf{H}^2(\Omega) = (H^2(\Omega))^2,$$

имеют место плотные вложения  $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}'$ .

Пусть  $Q_{yt} = \{y, t : |y| < 1, 0 < t < T\}$  и  $\Omega = \{|y| < 1\}$ . Рассмотрим обратную задачу по определению вектор-функции  $w(y, t) = \{w_1(y, t), w_2(y, t)\}$ , скалярной функции  $P(y, t)$

---

<sup>1</sup>This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP09258892, 2021-2023).

и вектор-функции  $f_1(y), f_2(y)$ , где  $F_j(y, t) = g_j(t)f_j(y)$ ,  $g_1(t), g_2(t)$  — заданные функции:

$$\partial_t w - \nu \Delta w = F - \nabla P, \quad \{y, t\} \in Q_{yt}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} w = \partial_{y_1} w_1 + \partial_{y_2} w_2 = 0, \quad \{y, t\} \in Q_{yt}, \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \{y, t\} \in \Sigma_{yt} - \text{боковая поверхность цилиндра}, \quad (3)$$

$$w = 0, \quad \{y\} \in \Omega - \text{нижнее основание цилиндра}, \quad (4)$$

с финальным условием переопределения:

$$w(y, T) = w_T(y) \in \mathbf{H}, \quad (5)$$

где  $w_T(y)$  — заданная функция.

Аналогичные обратные задачи рассматривались, например, в [1, 2].

**К разрешимости обратной задачи.** Запишем обратную задачу (1)–(5) в дифференциально-операторной форме [3]:

$$w'(t) + \nu A w(t) = g(t)f, \quad w(0) = 0, \quad w(T) = w_T, \quad (6)$$

где в зависимости от класса разрешимости описание оператора  $A$  будет дано ниже.

Далее, интегрируя уравнение из (6) по  $t$  от 0 до  $T$ , с учётом условия переопределения мы получаем

$$f = \frac{1}{B_T g} [w_T + \nu A B_T w], \quad (7)$$

$$w'(t) + \nu A w(t) - \nu M(t) A B_T w = M(t) w_T, \quad w(0) = 0, \quad (8)$$

где

$$B_T v = \int_0^T v(t) dt, \quad M(t) = \{M_1(t), M_2(t)\}, \quad M_j(t) = \frac{g_j(t)}{B_T g}. \quad (9)$$



**О слабой разрешимости.** Рассмотрим нагруженное [4] уравнение (8) с ограниченным самосопряжённым положительно определённым оператором  $A$ :

$$Aw = -\Delta w : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}', \quad \text{т.е. } A = A^* \in L(\mathbf{V}; \mathbf{V}'), \quad (10)$$

где  $A^*$  — оператор, сопряжённый к  $A$ .

Согласно свойствам оператора  $A$  (10) существуют положительные постоянные  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{\Lambda}$ , такие, что спектр оператора  $A$  удовлетворяет включению:  $P_\sigma\{A\} \subset [\bar{\lambda}, \bar{\Lambda}]$ .

**Теорема 1.** Пусть  $w_T \in \mathbf{H}$  и выполнены условия

$$g(t) \in C([0, T]), \quad |B_T g| \geq \varepsilon > 0, \quad \bar{M} < \frac{\nu \bar{\Lambda}}{\nu T \bar{\Lambda} - 1 + e^{-\nu T \bar{\Lambda}}}, \quad (11)$$

где  $\bar{M} = \max_{t \in [0, T]} |M(t)|$ . Тогда задача Коши (8) и вместе с ним обратная задача (1)–(5) однозначно разрешимы, причём,

$$w \in \mathbf{W}_0 \equiv \{v : v(t) \in L_2(0, T; \mathbf{V}), \quad v'(t) \in L_2(0, T; \mathbf{V}')\},$$

$$\nabla P \in L_2(0, T; \mathbf{V}'), \quad f \in \mathbf{V}',$$

и имеют место оценки

$$\|w\|_{\mathbf{W}_0} + \|\nabla P\|_{L_2(0, T; \mathbf{V}')} \leq C_1 \|w_T\|_{\mathbf{H}}, \quad (12)$$

$$\|f\|_{\mathbf{V}'} \leq C_2 \|w_T\|_{\mathbf{H}}. \quad (13)$$

**О сильной разрешимости.** Рассмотрим нагруженное уравнение (8) с неограниченным самосопряжённым положительно определённым оператором  $A$ :

$$Aw = -\Delta w : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H},$$

$$D(A) \equiv \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \quad (Aw, w) \geq \bar{\lambda} \|w\|_{\mathbf{V}}^2, \quad (14)$$

где  $\bar{\lambda}$  — положительное число,  $P_\sigma\{A\} \subset [\bar{\lambda}, \infty]$ .

**Теорема 2.** Пусть  $w_T \in \mathbf{V}$ , и дополнительно к условиям теоремы 1 выполнены условия

$$g(t) \in C^1([0, T]), \quad \begin{cases} \text{либо (a)} & M(0) = 0, \quad \bar{M}' > 0, \\ \text{либо (b)} & M(0) > 0, \quad \bar{M}' \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\bar{M}' = \min_{t \in [0, T]} M'(t)$ . Тогда обратная задача (1)–(5) однозначно сильно разрешима, причём,

$$w \in \mathbf{W} \equiv \{v : v(t) \in L_2(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), v'(t) \in L_2(0, T; \mathbf{H})\},$$

$$\nabla P \in L_2(0, T; \mathbf{H}), \quad f \in \mathbf{H},$$

и имеют место оценки

$$\|w\|_{\mathbf{W}} + \|\nabla P\|_{L_2(0, T; \mathbf{H})} \leq C_1 \|w_T\|_{\mathbf{V}}, \quad (16)$$

$$\|f\|_{\mathbf{H}} \leq C_2 \|w_T\|_{\mathbf{V}}. \quad (17)$$

В доказательствах теорем 1 и 2 используется теория спектральных разложений самосопряжённых операторов в гильбертовых пространствах [5].

### Литература

1. Прилепко А.И., Васин И.А. Некоторые обратные начально-краевые задачи для нестационарных линейаризованных уравнений Навье-Стокса // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – №. 1. – С. 106–117.
2. Kozhanov A.I. Inverse Problems of Finding the Absorption Parameter in the Diffusion Equation // Math. Notes. – 2019. – Т. 106. – №. 3. – С. 378–389.
3. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. // М.: Мир, 1981.
4. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. // М.: Наука, 2012.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. // М.: Наука, 1984. 752 с.

# О РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ СЛАБОЙ ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

©2022 А. Г. Елисеев

(Москва, НИУ «МЭИ»; *eliseevag@mpei.ru*)

Пусть дана сингулярно возмущённая задача Коши

$$\varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) = A(t)u(t, \varepsilon) + h(t), u(t, \varepsilon) = u^0. \quad (1)$$

и выполнены условия

- 1)  $h(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], R^n)$ ;
- 2)  $A(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathcal{L}(R^n, R^n))$ , собственные значения которого удовлетворяют условиям  $\lambda_i(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T])$ ,  $i = 1, 2$ ;
- 3)  $A(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t)$ ,  $P_1(t) + P_2(t) = I$ ;
- 4) условие слабой точки поворота:

$$\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = t^{k_0}(t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_m)^{k_m} a(t), \quad a(t) \neq 0,$$

$k_0 + k_1 + \dots + k_m = n$ ,  $\lambda_2(t) \neq \lambda_1(t) \quad \forall t \in (0, t_1) \cup (t_1, t_2) \cup \dots \cup (t_{m-1}, t_m) \cup (t_m, T]$ , причём геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для любых  $t \in [0, T]$ ;

- 5)  $\lambda_i(t) \neq 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ .

При изложении метода регуляризации для решения задачи (1) будут использованы интерполяционные многочлены Лагранжа–Сильвестра, которые описывают дифференцируемые функции  $f(t)$ , заданные в точках  $t_0, t_1, \dots, t_m$  вместе со своими производными. Они имеют вид:

$$K(t)f(t) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{k_j-1} K_{j,i}(t) f^{(i)}(t_j), \quad (2)$$

где  $K_{j,i}(t)$  — многочлены, обладающие свойством  $\frac{ds}{dt} K_{j,i}(t)_{t=t_k} = \delta_j^k \delta_i^s$ . Сингулярности  $J_1(t, \varepsilon)$ ,  $J_2(t, \varepsilon)$  задачи (2) находятся из решения задачи Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{J}_1(t, \varepsilon) = \lambda_1(t) J_1(t, \varepsilon) + \varepsilon K(t) J_2(t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{J}_2(t, \varepsilon) = \lambda_2(t) J_2(t, \varepsilon) + \varepsilon K(t) J_1(t, \varepsilon), \\ J_1(0, \varepsilon) = 1, \quad J_2(0, \varepsilon) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Решения системы (3) порождают серию функций, описывающих сингулярности задачи (1):

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad \sigma_{i,0}(t, \varepsilon) = e^{\varphi_i(t)}, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{1,1}^{(j_1, i_1)}(t, \varepsilon) &= e^{\varphi_1(t)} \int_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)} K_{j_1, i_1}(s_1) ds_1, \\ \sigma_{2,1}^{(j_1, i_1)}(t, \varepsilon) &= e^{\varphi_2(t)} \int_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)} K_{j_1, i_1}(s_1) ds_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_{1,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) &= e^{\varphi_1(t)} \int_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)} K_{j_p, i_p}(s_1) \cdot \\ &\cdot \int_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)} K_{j_{p-1}, i_{p-1}}(s_2) \dots \\ &\dots \int_0^{s_{p-1}} e^{(-1)^{p-1} \Delta\varphi(s_p)} K_{j_1, i_1}(s_p) ds_p \dots ds_1, \\ \sigma_{2,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) &= e^{\varphi_2(t)} \int_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)} K_{j_p, i_p}(s_1) \cdot \\ &\cdot \int_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)} K_{j_{p-1}, i_{p-1}}(s_2) \dots \\ &\dots \int_0^{s_{p-1}} e^{(-1)^p \Delta\varphi(s_p)} K_{j_1, i_1}(s_p) ds_p \dots ds_1 \end{aligned} \quad (4)$$

(здесь  $p$  — число интегралов,  $j_s = \overline{0, m}$ ,  $i_s = \overline{0, k_s - 1}$ ,  $\Delta\varphi(t) = \int_0^t (\lambda_2(s) - \lambda_1(s)) ds$ ).

Заметим, что  $\sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon)$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\sigma}_{1,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) = \lambda_1(t) \sigma_{1,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) + \\ \quad + \varepsilon K_{j_p, i_p}(t) \sigma_{2,p-1}^{(j_1, i_1, \dots, j_{p-1}-1, i_{p-1}-1)}(t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{\sigma}_{2,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) = \lambda_2(t) \sigma_{2,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) + \\ \quad + \varepsilon K_{j_p, i_p}(t) \sigma_{1,p-1}^{(j_1, i_1, \dots, j_{p-1}-1, i_{p-1}-1)}(t, \varepsilon). \end{cases} \quad (5)$$

Вместо искомого решения  $u(t, \varepsilon)$  задачи (1) будем изучать вектор-функцию  $z(t, \sigma, \varepsilon)$  такую, что её сужение совпадает с искомым решением

$$z(t, \sigma, \varepsilon) \Big|_{\sigma = \sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon)} = u(t, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \quad p = \overline{0, \infty}. \quad (6)$$

С учётом (1), (4), (5) можно написать задачу для  $z(t, \sigma, \varepsilon)$ . Используя формулу сложного дифференцирования задачу для расширенной функции  $z(t, \sigma, \varepsilon)$  можно записать в виде

$$\begin{cases} A(t)z - \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{k_1-1, \dots, k_p-1} (\lambda_s \sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)} - \\ \quad - K_{j_p, i_p}(t) \sigma_{3-s, p-1}^{(j_1, i_1, \dots, j_{p-1}, i_{p-1})}) \frac{\partial z}{\partial \sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}} = \varepsilon \dot{z} - h(t), \\ z(0, 0, \varepsilon) = u^0. \end{cases} \quad (7)$$

По соглашению примем, что если слагаемое содержит в индексе  $p-1 < 0$ , то это слагаемое равно нулю. Для решения этой задачи введём пространство безрезонансных решений  $\hat{E}$ . Элемент  $\hat{z} \in \hat{E}$  имеет вид

$$\hat{z} = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{k_1-1, \dots, k_p-1} z_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)} \otimes \{\sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}\} + w,$$

где  $z_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}, w \in E$ . Здесь  $\otimes$  — символ тензорного произведения.

Задача (7) является регулярной по  $\varepsilon$ . Поэтому решение будем определять в виде регулярного ряда по степеням  $\varepsilon$ , т.е.

$$\hat{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{z}_k$$

Запишем задачу на итерационном шаге  $\varepsilon^0$ :

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_s(t))z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t) = 0, \\ A(t)w_0(t) = -h(t), \\ z_{1,0,0}(0) + z_{2,0,0}(0) + w_0(0) = u^0, \\ z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t_{j_p}), \quad p \geq 1, \quad s = 1, 2 \end{cases} \quad (8)$$

( $p, s$  определяются в процессе решения итерационных задач). Решение задачи (8) запишется в виде

$$\hat{z}_0 = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{k_1-1, \dots, k_p-1} P_s(t) z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t) \otimes \otimes \{\sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}\} - A^{-1}(t)h(t), \quad (9)$$

здесь  $P_s(t)z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t)$  — произвольный собственный вектор оператора  $A(t)$ .

Подчиним (9) начальному условию. При этом учитываем, что  $\sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(0, \varepsilon) = 0, p \geq 1$ . Тогда имеем

$$P_1(0)z_{1,0,0}(0) + P_2(0)z_{2,0,0}(0) - A^{-1}(0)h(0) = u^0.$$

Отсюда  $P_s(0)z_{s,0,0}(0) = P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}, s = 1, 2$ . Начальные условия для  $P_s(t_{j_p})z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t_{j_p})$  определяются из условий разрешимости итерационной системы на первом итерационном шаге. Таким образом, на нулевом итерационном шаге получили

$$\begin{cases} \hat{z}_0 = \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{k_1-1, \dots, k_p-1} P_s(t) z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t) \otimes \otimes \{\sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}\} - A^{-1}(t)h(t), \\ P_s(0)z_{s,0,0}(0) = P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}, \quad s = 1, 2. \end{cases} \quad (10)$$

Задача на первом итерационном шаге  $\varepsilon$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \hat{z}_1 = \dot{\hat{z}}_0 + \mathcal{L}_1 \hat{z}_0, \\ G \hat{z}_1 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

разрешима в  $\hat{E}$ . Вычислим

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_1 \hat{z}_0 + \dot{\hat{z}}_0 = \\ &= \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{k_0-1, \dots, k_p-1} \left[ \frac{d}{dt} (P_s(t) z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t)) + \right. \\ & \quad + \sum_{j_{p+1}=0}^m \sum_{i_{p+1}=0}^{k_{p+1}-1} K_{j_{p+1}, i_{p+1}}(t) z_{3-s, p+1, 0}^{(j_1, i_1, \dots, j_{p+1}, i_{p+1})}(t) \left. \right] \otimes \\ & \quad \otimes \sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)} - \frac{d}{dt} A^{-1}(t) h(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Расписывая (11) на первом итерационном шаге по компонентам и учитывая (12), получим серию задач

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_s(t)) z_{s,p,1}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t) = \frac{d}{dt} (P_s(t) z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t)) + \\ \quad + \sum_{j_{p+1}=0}^m \sum_{i_{p+1}=0}^{k_{p+1}-1} K_{j_{p+1}, i_{p+1}}(t) P_{3-s}(t) z_{3-s, p+1, 0}^{(j_1, i_1, \dots, j_{p+1}, i_{p+1})}(t), \\ z_{1,0,1}(0) + z_{2,0,1}(0) = ((A^{-1}(t) \frac{d}{dt})^2 \int_0^t h(s) ds)(0), \\ z_{s,p,1}(0), \quad p \geq 1, \quad s = 1, 2 \end{cases} \quad (13)$$

( $p, s$  определяются в процессе решения итерационных задач). Из условий разрешимости (13) и учитывая (10), полу-

чим серию задач Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{при } p = 0 \\ \frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,0,0}(t)) = \dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,0,0}(t)), \\ P_s(0)z_{s,0,0}(0) = P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}, \quad s = 1, 2; \\ \text{при } p \geq 1 \\ \frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(t)) = \dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(t)), \\ P_s(0)z_{s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(0) = ? \text{ (на данный момент} \\ \hspace{15em} \text{не определено).} \end{array} \right. \quad (14)$$

Чтобы определить начальные условия для задач Коши (14) при  $p \geq 1$ , вычислим  $\hat{\pi}_0^{(j_0,i_0)}(t)(\mathcal{L}_1\hat{z}_0 + \hat{z}_0) = 0$ ,  $j_0 = \overline{0, m}$ ,  $i_0 = \overline{0, k_{j_0} - 1}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j_{p+1}=0}^m \sum_{i_{p+1}=0}^{k_{p+1}-1} P_s(t_{j_0}) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{d}{dt} \right)^{i_0} (K_{j_{p+1}, i_{p+1}}(t) P_s(t) z_{s,p+1,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_{p+1},i_{p+1})}(t))|_{t=t_{j_0}} = \\ & = P_s(t_{j_0}) \left( \frac{d}{dt} \right)^{i_0} (\dot{P}_s(t) P_{3-s}(t) z_{3-s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(t))|_{t=t_{j_0}} \end{aligned} \quad (15)$$

Перебирая последовательно  $i_0$  при фиксированном  $p$ , получим

$$\left\{ \begin{array}{l} j_0 = \overline{0, m}, \quad i_0 = 0, \quad s = 1, 2, \\ P_s(t_{j_0}) z_{s,p+1,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p,j_0,0)}(t_{j_0}) = \\ \hspace{15em} = \dot{P}_s(t_{j_0}) P_{3-s}(t_{j_0}) z_{3-s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(t_{j_0}); \\ j_0 = \overline{0, m}, \quad i_0 = 1, \quad s = 1, 2, \\ P_s(t_{j_0}) z_{s,p+1,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p,j_0,1)}(t_{j_0}) = \\ \hspace{10em} = -P_s(t_{j_0}) \frac{d}{dt} (P_s(t) z_{s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(t))|_{t=t_{j_0}} + \\ \hspace{10em} + P_s(t_{j_0}) \frac{d}{dt} (\dot{P}_s(t) P_{3-s}(t) z_{3-s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(t))|_{t=t_{j_0}}; \\ j_0 = \overline{0, m}, \quad i_0 = n, \quad n = \overline{0, k_0 - 1}, \quad s = 1, 2, \\ P_s(t_{j_0}) z_{s,p+1,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p,j_0,n)}(t_{j_0}) = \\ \hspace{10em} = - \sum_{j_{p+1}=0}^m \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i P_s(t_{j_0}) \left( \frac{d}{dt} \right)^{n-i} (P_s(t) z_{s,p+1,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p,j_0,i)}(t))|_{t=t_{j_0}} + \\ \hspace{15em} + P_s(t_{j_0}) \left( \frac{d}{dt} \right)^n (\dot{P}_s(t) P_{3-s}(t) z_{3-s,p,0}^{(j_1,i_1,\dots,j_p,i_p)}(t))|_{t=t_{j_0}}. \end{array} \right.$$



Так как начальные условия при  $p + 1$  выражаются через начальные условия при  $p$ , то тем самым мы по индукции доказываем, что начальные условия определены для любых  $p$ . После определения начальных условий из системы получаем решения системы (14):

$$\begin{cases} P_s(t)z_{s,0,0}(t) = U_s(t, 0)(P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}), \\ P_s(t)z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t) = U_s(t, t_{j_p})P_s(t_{j_p})z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t_{j_p}), \\ s = 1, 2, \quad p = \overline{0, \infty}, \quad j_p = \overline{0, m}, \quad i_p = \overline{0, k_{j_p} - 1}. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, главный член асимптотики решения после сужения запишется в виде

$$\begin{aligned} u_{gl}(t, \varepsilon) = & \sum_{s=1}^2 U_s(t, 0)(P_s(0)u^0 + \frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)})e^{\frac{1}{\varepsilon}\varphi_s(t)} + \\ & + \sum_{s=1}^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{k_1-1, \dots, k_p-1} U_s(t, t_{j_p})P_s(t_{j_p}) \cdot \\ & \cdot z_{s,p,0}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t_{j_p})\sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) - A^{-1}(t)h(t). \end{aligned} \quad (17)$$

**Теорема 1** (об оценке остатка (асимптотическая сходимость)). Пусть дана задача Коши (1) и выполнены условия 1)  $\div$  5). Тогда верна оценка

$$\begin{aligned} \left\| u(t, \varepsilon) - \sum_{q=0}^n \varepsilon^q \sum_{s=1}^2 \sum_{p=0}^r \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{k_1-1, \dots, k_p-1} z_{s,p,q}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t) \cdot \right. \\ \left. \cdot \sigma_{s,p}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t, \varepsilon) + \sum_{q=0}^n \varepsilon^q w_q(t) \right\|_{\mathbb{C}[0, T]} \leq C \varepsilon^{n+1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $C \geq 0$  — константа, не зависящая от  $\varepsilon$ ;  $z_{s,p,q}^{(j_1, i_1, \dots, j_p, i_p)}(t)$  и  $w_q(t)$  получены из решения итерационных задач при  $0 \leq q \leq n$ ,  $0 \leq p \leq r$ .

**Теорема 2** (о предельном переходе). Пусть дана задача (1) и выполнены условия 1)  $\div$  5). Тогда:

a) если  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\delta < 0$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = -A^{-1}(t)h(t),$$

где  $t \in [\delta_0, T]$ ,  $\delta_0 > 0$  — сколь угодно мало;

b) если  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ , то  $\forall \varphi(t) \in \mathbb{C}^\infty[0, T]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T (u(t, \varepsilon) + A^{-1}(t)h(t))\varphi(t)dt = 0.$$

### Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

2. Butuzov V.F. Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities / V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, K.R. Schneider // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — Т. 121, № 1. — С. 1973–2079.

3. Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора / А.Г. Елисеев, С.А. Ломов // Математический сборник. — 1986. — Т. 173, № 4. — С. 544–557.

4. Елисеев А.Г. Сингулярно возмущённая задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота у предельного оператора / А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2019. — № 3. — С. 63–73.

5. Елисеев А.Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущённой задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота / А.Г. Елисеев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2020. — № 2. — С. 15–32.

6. Елисеев А.Г. Решение сингулярно возмущённой задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора / А.Г. Елисеев, П.В. Кириченко // Сибирские электронные математические известия. — 2020. — № 17. — С. 51–60.

## РАЗВИТИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С «ПРОСТОЙ» РАЦИОНАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ <sup>1</sup>

©2022 А. Г. Елисеев

(Москва, НИУ «МЭИ»; *eliseevag@mpei.ru*)

©2022 Т. А. Ратникова

(Москва, НИУ «МЭИ»; *ratnikovata@mpei.ru*)

©2022 Д. А. Шапошникова

(Москва, НИУ «МЭИ»; *shaposhnikovda@mpei.ru*)

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u'}{\partial x} \right) \right) \right) + t^{m/n} a(t) u = h(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

и пусть выполнены условия:

- 1)  $h(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R \times [0, T])$ , функция  $h(x, t)$  и все её производные ограничены на  $\{R \times [0, T]\}$ ;
  - 2)  $k(x) \in \mathbb{C}^\infty(R)$ ,  $\exists k_0, M > 0$   $0 < k_0 \leq k(x) < M(x^2 + 1)$ ,  $|k'(x)| < M\sqrt{x^2 + 1}$ ;
  - 3)  $f(x) \in \mathbb{C}^\infty(R)$ , функция  $f(x)$  и все её производные ограничены на  $R$ ;
  - 4)  $a(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T])$ ,  $a(t) \neq 0$ ,  $\operatorname{Re}(a(t)) \geq 0$ ;
  - 5)  $m, n \in N$ ,  $p = m + n - 1$ ,  $m/n = r$  — дробное.
- (2)

---

<sup>1</sup>Результат Ратниковой Т.А. получен в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022)

Сингулярности задачи (1) имеют вид:

$$e^{-\varphi(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_i(t, \varepsilon) = e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\varphi(s)/\varepsilon} s^{\frac{i+1}{n}-1} ds,$$

где  $\varphi(t) = \int_0^t s^{m/n} a(s) ds$ ,  $i = \overline{0, (p-1)}$ ,  $p = m + n - 1$ .

Согласно методу регуляризации, введём расширенную функцию  $\tilde{u}(x, t, \tau, \sigma)$ , где  $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}\}$ , такую, что сужение

$$\tilde{u}(x, t, \tau, \sigma) \Big|_{\tau=\varphi(t)/\varepsilon, \quad \sigma_i=\sigma_i(t, \varepsilon)} = u(x, t)$$

даёт решение задачи (1). В результате получим задачу для расширенной функции  $\tilde{u}(x, t, \tau, \sigma, \varepsilon)$ :

$$\begin{cases} -q(t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1} -q(t) (\sigma_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma_i}) + q(t) \tilde{u} = \\ = -\varepsilon \left( \dot{\tilde{u}} + \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right) + h(x, t), \\ \tilde{u}(x, 0, 0, 0, \varepsilon) = f(x). \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем волну будем опускать. Для решения задачи (3) введём пространство безрезонансных решений  $E$ , элементы которого имеют вид

$$u = X(x, t) e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x, t) \sigma_i + W(x, t),$$

где  $X(x, t), Z^i(x, t), W(x, t) \in C^\infty(R \times (0, T]) \cap \mathbb{C}(R \times [0, T])$ .

Решение задачи (3) будем искать в виде ряда по  $\varepsilon$ :

$$u = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, t, \tau, \sigma), \quad (4)$$

где  $u_k(x, t, \tau, \sigma) = X_k(x, t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x, t)\sigma_i + W_k(x, t)$ .

Подставляя (4) в (3), получим серию итерационных задач, которые запишем покомпонентно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_k(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial X_k(x, t)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial Z_k^i(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_k^i(x, t)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n} a(t) W_k(x, t) = - \frac{\partial W_{k-1}(x, t)}{\partial t} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial W_{k-1}(x, t)}{\partial x} \right) - \\ - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} Z_{k-1}^i(x, t) + \delta_0^k h(x, t), \\ X_k(x, 0) + W_k(x, 0) = \delta_k^0 f(x), \quad k = \overline{-1, \infty}; \\ \text{если индекс } (k-1) \leq -2, \text{ то слагаемые} \\ \text{по определению равны } 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Для решения итерационных задач используется теорема о разрешимости. Рассмотрим систему (5) при  $k = -1$ :

$$\varepsilon^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_{-1}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial X_{-1}(x, t)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial Z_{-1}^i(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_{-1}^i(x, t)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n} a(t) W_{-1}(x, t) \equiv 0, \\ X_{-1}(x, 0) + W_{-1}(x, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Из начальных условий при  $k = -1$  системы (6) следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{-1}(x, t) \equiv 0, \\ Z_{-1}^i(x, t) — \text{произвольное решение уравнения,} \\ \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ W_{-1}(x, t) \equiv 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Функции  $Z_{-1}^i(x)$  найдём из условия разрешимости системы при  $\varepsilon^0$ :

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \frac{\partial X_0(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial X_0(x, t)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial Z_0^i(x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_{-1}^i(x, t)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n} a(t) W_0(x, t) = h(x, t) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} Z_{-1}^i(x, t), \\ X_0(x, 0) + W_0(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (8)$$

Разложим  $h(x, t)$  по формуле Маклорена в точке  $t = 0$  по  $t$ :

$$h(x, t) = h(x, 0) + t \frac{\partial h(x, 0)}{\partial t} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{m}{n}\right]!} t^{\left[\frac{m}{n}\right]} \frac{\partial^{\left[\frac{m}{n}\right]} h(x, 0)}{\partial t^{\left[\frac{m}{n}\right]}} + t^{\left[\frac{m}{n}\right]+1} h_0(x, t).$$

Из теоремы разрешимости уравнения для  $W_0(x, t)$  следует, что если  $i = n(j+1) - 1$ ,  $j = \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right]}$ , то положим

$$Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, 0) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j h(x, 0)}{\partial t^j},$$

здесь  $\left[\frac{m}{n}\right]$  — целая часть. Если  $i \neq n(j+1) - 1$ ,  $i = \overline{0, (p-1)}$ , то положим

$$Z_{-1}^i(x, 0) = 0.$$

Таким образом, функции  $Z_{-1}(x, t)$  являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, t)}{\partial t} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, t)}{\partial x} \right), \quad j = \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right]}, \\ Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, 0) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j h(x, 0)}{\partial t^j}. \end{cases}$$

Остальные функции  $Z_{-1}^i(x, t)$  с индексами  $i \neq n(j+1) - 1$ ,  $i = \overline{0, (p-1)}$  будут тождественно равны  $Z_{-1}^i(x, t) \equiv 0$ , так как  $Z_{-1}^i(x, 0) = 0$ .

В результате после сужения на регуляризующие функции получим решение на «-1» шаге

$$u_{-1}(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, t) \sigma_{n(j+1)-1}(t, \varepsilon). \quad (9)$$

Система (8) имеет решения:

а)  $X_0(x, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial X_0(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial X_0(x, t)}{\partial x} \right), \\ X_0(x, 0) = f(x); \end{cases}$$

б)  $Z_0^i(x, t)$  — на данном этапе произвольное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial Z_0^i(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_0^i(x, t)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{0, p-1};$$

$$\text{в) } W_0(x, t) = \frac{h(x, t) - \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} t^j Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, t)}{t^{m/n} a(t)} = t^{1-\left\{\frac{m}{n}\right\}} \tilde{h}_0(x, t),$$

где  $\tilde{h}_0(x, t)$  — гладкая функция.

Для определения начальных условий  $Z_0^i(x, 0)$  рассмотрим итерационную систему (5) на шаге «1»:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial X_1(x, t)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial Z_1^i(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_1^i(x, t)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n} a(t) W_1(x, t) = - \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial x} \right) - \\ - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} Z_0^i(x, t), \\ X_1(x, 0) + W_1(x, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Для определения  $Z_0^i(x, 0)$  подчиним уравнение относительно  $W_1(x, t)$  условию разрешимости. Для этого разложим  $-\frac{\partial W_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial x} \right)$  по формуле Маклорена в точке  $t = 0$ . Предварительно вычислим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial x} \right) = \\ & = \left( 1 - \left\{ \frac{m}{n} \right\} \right) t^{-\{\frac{m}{n}\}} \tilde{h}_0(x, t) + t^{1-\{\frac{m}{n}\}} \frac{\partial \tilde{h}_0(x, t)}{\partial t} - \\ & - t^{1-\{\frac{m}{n}\}} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial \tilde{h}_0(x, t)}{\partial x} \right) = -t^{-\{\frac{m}{n}\}} h_1(x, t). \end{aligned}$$



Тогда получим

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial W_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial W_0(x, t)}{\partial x} \right) = \\
& = t^{-\{\frac{m}{n}\}} h_1(x, 0) + t^{1-\{\frac{m}{n}\}} \frac{\partial h_1(x, 0)}{\partial t} + \dots + \\
& \quad + \frac{t^{k-\{\frac{m}{n}\}}}{k!} \frac{\partial^k h_1(x, 0)}{\partial t^k} + t^{k+1-\{\frac{m}{n}\}} \tilde{h}_1(x, t),
\end{aligned}$$

где  $k = \left[ \frac{m}{n} + \left\{ \frac{m}{n} \right\} \right]$ ,  $\left\{ \frac{m}{n} \right\} = \frac{s}{n}$ ,  $1 \leq s \leq n-1$ . Если  $\frac{m}{n} + \left\{ \frac{m}{n} \right\}$  — целое, то  $k = \frac{m}{n} + \left\{ \frac{m}{n} \right\} - 1$ .

Для удовлетворения условиям разрешимости возможны следующие случаи:

а) если  $j - \left\{ \frac{m}{n} \right\} = \frac{i+1}{n} - 1$ , т.е.  $i = n(j+1) - n\left\{ \frac{m}{n} \right\} - 1$ ,  $j = \overline{0, k}$ , положим

$$Z_0^i(x, 0) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j h_1(x, 0)}{\partial t^j},$$

отсюда  $Z_0^i(x, t)$  являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_0^i(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_0^i(x, t)}{\partial x} \right) \\ Z_0^i(x, 0) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j h_1(x, 0)}{\partial t^j}; \end{cases} \quad (11)$$

б) если  $i \neq n(j+1) - n\left\{ \frac{m}{n} \right\} - 1$ ,  $j = \overline{0, k}$ , положим  $Z_0^i(x, 0) = 0$ .

Следовательно в этом случае  $Z_0^i(x, t) \equiv 0$ .

На данном шаге мы определили слагаемое  $u_0(x, t)$ , а следовательно после сужения на регуляризующие функции

Главный член асимптотики имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= f(x)e^{-\varphi(t)/\varepsilon} + \\
 &+ \sum_{j=0}^k Z_0^{n(j+1)-n\{\frac{m}{n}\}-1}(x, t)\sigma_{n(j+1)-n\{\frac{m}{n}\}-1}(t, \varepsilon) + \\
 &+ \frac{h(x, t) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} t^j Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, t)}{t^{m/n}a(t)}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Главный член асимптотики запишется в виде суммы

$$\begin{aligned}
 u_{\text{гл}}(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x, t)\sigma_{n(j+1)-1}(t, \varepsilon) + \\
 &+ \sum_{j=0}^k Z_0^{n(j+1)-n\{\frac{m}{n}\}-1}\sigma_{n(j+1)-n\{\frac{m}{n}\}-1}(t, \varepsilon) + f(x)e^{-\varphi(t)/\varepsilon} + \\
 &+ t^{1-\{\frac{m}{n}\}}\tilde{h}_0(x, t).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Решение на «1» шаге примет вид

$$\left[ \begin{aligned}
 W_1(x, t) &= \frac{t^{-\{\frac{m}{n}\}}h_1(x, t) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1}Z_0^i(x, t)}{t^{m/n}a(t)} = \\
 &= t^{\{1-\{2\{\frac{m}{n}\}\}\}}h_1(x, t), \\
 Z_1^i(x, t) &\text{ — общее решение уравнения теплопроводности,} \\
 \frac{\partial Z_1^i(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial Z_1^i(x, t)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{0, (p-1)}.
 \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Отсюда следует, что если:

1)  $2\{\frac{m}{n}\} \neq 1$ , то  $W_1(x, 0) = 0$  и  $X_1(x, 0) = 0$ , следовательно  $X_1(x, t) \equiv 0$ ;

2)  $2\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1$ , то  $W_1(x, 0) = h_1(x, 0)$  и  $X_1(x, 0) = -h_1(x, 0)$ , следовательно  $X_1(x, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial X_1(x, t)}{\partial x} \right), \\ X_1(x, 0) = -h_1(x, 0). \end{cases}$$

Произвольные функции  $Z_1^i(x, t)$  находятся из условия разрешимости системы (5) при  $k = 2$ .

По данной схеме можно определить любой член асимптотического регуляризованного ряда.

Пусть решены  $(N + 1)$  итерационных задач. Тогда решение задачи Коши после сужения на регуляризирующие функции можно представить в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^N u_k(x, t, \varepsilon) \varepsilon^k + \varepsilon^{N+1} R_N(x, t, \varepsilon), \quad (15)$$

$$\text{где } u_k(x, t, \varepsilon) = X_k(x, t) e^{-\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}} + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x, t) \sigma_i(t, \varepsilon) + W_k(x, t).$$

Подставив (15) в (1) и учитывая, что  $u_k(x, t, \varepsilon)$  являются решениями итерационных задач, получим задачу Коши для определения остатка  $R_N(x, t, \varepsilon)$ :

$$\begin{cases} L(R_N) = \varepsilon \left( \frac{\partial R_N(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial R_N(x, t)}{\partial x} \right) \right) + \\ + t^{m/n} a(t) R_N = H(x, t, \varepsilon), \\ R_N(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} H(x, t) = & -\frac{\partial W_N(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial W_N(x, t)}{\partial x} \right) - \\ & - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} Z_N^i(x, t) = -q(t) W_{N+1}(x, t), \end{aligned}$$

**Теорема** (оценка остаточного члена). Пусть выполнены условия:

- 1) условия 1)  $\div$  5) задачи Коши (1);
  - 2)  $\exists M_1 > 0, \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T] \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$   
 $|H(x, t, \varepsilon)| \leq M_1$ ;
  - 3)  $\exists M > 0, 0 < k_0 \leq k(x) < M(x^2 + 1), |k'(x)| < M\sqrt{x^2 + 1}$ .
- Тогда  $\exists C > 0 \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T] \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$   
 $|R_N(x, t, \varepsilon)| \leq C$ .

## Литература

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А.Н. Тихонов // Математический сборник. — 1948. — Т. 22(64), № 2. — С. 193–204.
2. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы / В.П. Маслов. — М. : МГУ, 1965. — 554 с.
3. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
4. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.
5. Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора / А.Г. Елисеев, С.А. Ломов // Математический сборник. — 1986. — Т. 131, № 4. — С. 544–557.
6. Елисеев А.Г. Об аналитических решениях по параметру сингулярно возмущённого уравнения при наличии простейшей точки поворота у предельного оператора / А.Г. Елисеев // Вестник МЭИ. — 1995. — № 6. — С. 41–47.
7. Ильин А.М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А.М. Ильин, А.С. Калашников,

О.А. Олейник // УМН. — 1962. — Т. 17, вып. 3(105).— С. 3–116.

8. Ратникова Т.А. Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Parabolic Equation with a Rational «Simple» Turning Point / Т.А. Ратникова // Axioms. — 2020. — № 9, 138. — <http://doi.org/10.3390/axioms9040138>.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ КЕПЛЕРОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ

©2022 В. И. Ерохин, А. П. Кадочников, С. В. Сотников  
(Санкт-Петербург, ВКА им. А.Ф. Можайского; [vka@mil.ru](mailto:vka@mil.ru))

Движение космического объекта (КО) в поле тяготения Земли в рамках кеплеровской модели невозмущённого движения описывается следующими уравнениями [1]:

$$x = r \cdot (\cos(u) \cdot \cos(\Omega) - \sin(u) \cdot \sin(\Omega) \cdot \cos(i)), \quad (1)$$

$$y = r \cdot (\cos(u) \cdot \sin(\Omega) + \sin(u) \cdot \cos(\Omega) \cdot \cos(i)), \quad (2)$$

$$z = r \cdot \sin(u) \cdot \sin(i), \quad (3)$$

где

$$u = \omega + \vartheta, \quad (4)$$

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E)), \quad (5)$$

$$\vartheta = 2 \cdot \arctg \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tg \left( \frac{E}{2} \right) \right), \quad (6)$$

$$E \mid M = E - e \cdot \sin(E), \quad (7)$$

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot (t - \tau). \quad (8)$$

В формулах (1)–(8)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — прямоугольные координаты КО в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат (АГЭСК),  $r$  — геоцентрическое расстояние

до КО,  $u$  — аргумент широты,  $\vartheta$  — истинная аномалия,  $E$  — эксцентрическая аномалия,  $M$  — средняя аномалия,  $\mu = 398600.44 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$  — гравитационная постоянная Земли,  $t$  — некоторый момент времени. Модель (1)–(8) содержит 6 констант — так называемые *кеплеровы* элементы орбиты:  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклонение,  $\Omega$  — долгота восходящего узла,  $\omega$  — аргумент перигея,  $\tau$  — время прохождения перигея.

В докладе будет рассмотрена задача определения указанных констант по данным наблюдений (обратная задача) с помощью нелинейного метода наименьших квадратов [2], формализованного в виде задачи безусловной минимизации

$$\begin{aligned} \Phi(q) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^{Q_j} (\Delta x_{i,j}(q))^2 + (\Delta y_{i,j}(q))^2 + (\Delta z_{i,j}(q))^2 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $q = [a, e, i, \Omega, \omega, \tau]^T$ ,  $\Delta x_{i,j}(q) = x_{i,j} - x(q, t_{i,j})$ ,  $\Delta y_{i,j}(q) = y_{i,j} - y(q, t_{i,j})$ ,  $\Delta z_{i,j}(q) = z_{i,j} - z(q, t_{i,j})$ ;  $x(q, t_{i,j})$ ,  $y(q, t_{i,j})$ ,  $z(q, t_{i,j})$  — рассчитанные в соответствии с (1)–(8) прямоугольные АГЭС-координаты КО в моменты времени  $t_{i,j}$ ,  $(x, y, z)_{i,j}$  — наблюдаемые прямоугольные АГЭС-координаты контролируемого КО, полученные средством наблюдения (СН) с номером  $j$  в моменты времени  $t_{i,j}$  (единичные замеры),  $j = 1, \dots, P$ ,  $i = 1, \dots, Q_j$ ,  $Q_j$  — количество единичных замеров, выполненных СН с номером  $j$ ,  $P$  — количество СН, наблюдающих КО.

Для задачи (9) будут рассмотрены различные методы решения, использующие аналитические представления соответствующих частных производных функции  $\Phi(q)$  — метод Гаусса-Ньютона, Левенберга-Марквардта, метод Ньютона и квазиньютоновские методы, и приведены результаты вычислительных экспериментов.

## Литература

1. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1965. – 540 с.
2. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. – 440 с.

## ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ВИБРОПОГРУЖАТЕЛЯ С УЧЁТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ <sup>1</sup>

©2022 А. В. Журба

(Воронеж, ВГУ; *av.zhurba.93@gmail.com*)

©2022 Д. В. Костин

(Воронеж, ВГПУ, ВГУ; *dvk605@mail.ru*)

©2022 Т. И. Костина

(Воронеж; ВГПУ, ВГТУ *tata\_sti@rambler.ru*)

©2022 А. А. Уткин

(Воронеж, ВГУ; *artem132rus@gmail.com*)

В работе [1] представлена задача оптимизации устройства погружения свай в грунт. Характерным отличием данного агрегата было наличие нескольких пар дисбалансов, которые позволяют создать положительный импульс, действующий на свайный элемент. Благодаря этому принципу устройство получило название импульсный погружатель. Математическая модель работы импульсного погружателя описана в работе [1], там же поставлена задача оптимизации импульса по коэффициенту асимметрии, представляющего собой отношение максимального к минимальному значению вынуждающей силы на периоде. Данная задача оптимизации была решена и описана в работах [3].

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009)

Построенная математическая модель с оптимальными параметрами позволила начать исследование самого процесса погружения, где помимо погружателя в комплексную математическую модель вошли параметры характеризующие свайный элемент и грунт. Феноменологическая математическая модель бокового и лобового сопротивления была выбрана из таблицы сопротивления грунта. На основе полученной модели был разработан программный комплекс, позволяющий проводить численный эксперимент погружения свайных элементов при различных управляющих параметрах и параметрах грунта. Были получены результаты, проведено сравнение их с результатами натурных экспериментов.

Результатом данной работы также является алгоритм программного обеспечения численного эксперимента, которое позволяет проводить оптимизацию конструкции под заданные типы грунтов.

Конструктивная схема вибропогружателя изображена на рисунке 1.

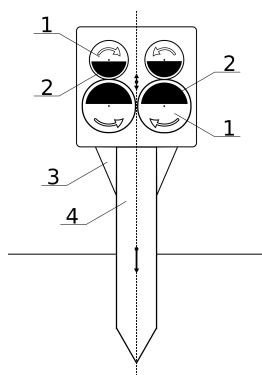


Рис. 1. Схема вибропогружателя



При вращении валов (1) с дисбалансами (2) на их ось крепления действует центробежная сила и вибрационный погружатель получает вибрирующее движение, которое сообщается через наголовник (3) свайному элементу (4). Симметрично расположенные дисбалансы синхронно вращаются в разные стороны для уравнивания радиальных нагрузок и компенсированная горизонтальных сил.

Математическая модель вынуждающей силы вибропогружателя может быть представлена в виде:

$$F_{\text{вс}} = 2mn\omega^2 R \cos(\omega t), \quad (1)$$

где  $F_{\text{вс}}$  — вынуждающая сила вибропогружателя,  $n$  — количество пар дисбалансов,  $m$  — масса дисбаланса,  $\omega$  — угловая скорость вращения дисбалансов (на рисунке из две),  $R$  — радиус смещения центра масс дисбаланса относительно оси вращения,  $t$  — время.

Модифицированная конструкция вибропогружателя, предложенная в работе [1], поставила перед математиками задачу оптимизации. Добавление в конструкцию вибропогружателя дисбалансов, вращающихся на удвоенных скоростях по отношению к основным валам, привело к отличию абсолютных значений максимума и минимума вынуждающей силы, создаваемой погружателем.

Математическая модель формирования вынуждающей силы импульсным погружателем, который был предложен Ермоленко В.Н. и Насоновым И.В. в работе [1], отличается от классического вибропогружателя разными радиусами пар дисбалансов.

$$F_{\text{вс}} = \sum_{k=0}^N m_k \omega_k^2 R_k \cos(\omega_k t), \quad (2)$$

где  $m_k$  — масса  $k$ -ой пары дисбалансов,  $\omega_k$  — угловая скорость вращения  $k$ -ой пары дисбалансов,  $R_k$  — радиус дисбалансов.

Различие радиусов делает различным и угловую скорость вращения пар дисбалансов  $\omega_k$ . При этом выполняется соотношение

$$\omega_k = k\omega_0, /k = 1...N. \quad (3)$$

В импульсном погружателе кроме эффекта снижения трения с помощью вибрации появляется ключевое свойство, заключающееся в появлении асимметрии между полезной и вредной вынуждающей силой. Полезной будем называть вынуждающую силу в тот момент времени, когда установка погружает сваю в грунт ( $F_{\text{вс}(t)} > 0$ ). Отрицательной вынуждающую силу будем называть в тот момент времени, когда она направлена в противоположную погружению сторону ( $F_{\text{вс}(t)} < 0$ ). В случае классического вибропогружателя полезная и отрицательная вынуждающие силы равны по амплитуде, что наглядно видно из графика функции (1) изображённого на рисунке 2. Для импульсного погружателя эти амплитуды различны рисунок 3. Максимум полезной си-

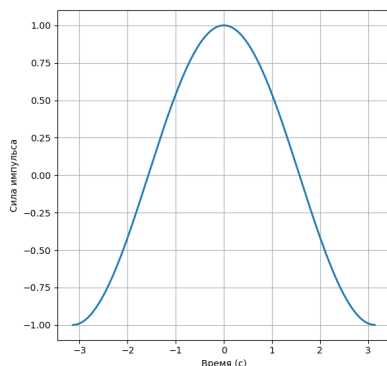


Рис. 2. График вынуждающей силы, создаваемой вибрационным погружателем

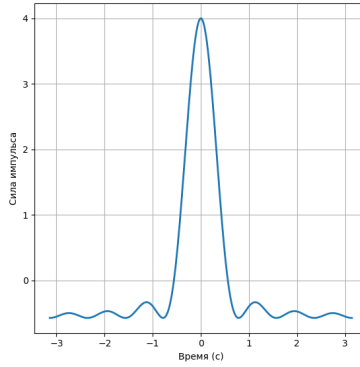


Рис. 3. График вынуждающей силы, создаваемой импульсным погружателем

лы есть максимум функции  $F_{\text{вс}}(t)$ , минимальное значение функции  $F_{\text{вс}}(t)$  есть наибольшее абсолютное значение отрицательной вынуждающей силы. Абсолютное отношение максимального значения функции к минимальному значению называется коэффициентом асимметрии  $K_n$ .

$$K_n = \left| \frac{\max_{-\pi < t < \pi} F_{\text{вс}}(t)}{\min_{-\pi < t < \pi} F_{\text{вс}}(t)} \right|, \quad (4)$$

где  $n$  — число пар дисбалансов в импульсном погружателе,  $t$  — время работы в течении одного периода функции  $F_{\text{вс}}(t)$ .

Этот эффект асимметрии позволил при меньшем весе установки, создавать больший положительный импульс. Таким образом, критерием оптимизации стал параметр — коэффициент асимметрии, который равен отношению максимального к минимальному значению функции вынуждающей силы. Проблема, как выбирать радиусы дисбалансов

для получения наилучшего коэффициента асимметрии, была решена в работах [2], [3], [5], где даётся определение оптимального импульса и доказывается теорема о выборе параметров оптимального импульсного погружателя.

При построении математической модели погружения сваи, описываемой в разделе 4 настоящей работы, использовалась модель оптимального импульсного погружателя, заданная с точностью до константы формулой:

$$f_n(t, \lambda) = \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \cos(k\omega t), \quad t \in [-\pi, \pi] \quad (5)$$

где  $\omega$  — скорость вращения первой пары дебалансов. Функция (5) называется импульсом Максвелла–Фейера. Период  $t \in [-\pi, \pi]$  соответствует полному обороту наибольшего по радиусу дебаланса. Данный отрезок выбран для удобства математического формализации задачи, на практике и в численном эксперименте длина периода зависит от скорости вращения  $\omega$ , которая изменяется при управлении работой погружателя.

Дальнейшим развитием этой темы стало применение модели импульсного погружателя к математической модели процесса погружения сваи или шпунта в грунт с учётом геологических свойств среды. Эта модель представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с начальными условиями [4]. Она учитывает лобовое и боковое сопротивление грунта движению сваи, а также включает в себя параметр управления работой импульсного погружателя — частота вращения дисбалансов.

В приложениях к строительной тематике, в частности к установкам свайного фундамента, для моделирования процессов погружения свай, используется уравнение (6):

$$R = F_{\text{вс}} + F_{\text{тяж}} - F_{\text{бс}} - F_{\text{лс}}, \quad (6)$$

где  $R$  – равнодействующая сила,  $F_{\text{вс}}$  – вдавливающая сила, создаваемая погружателем,  $F_{\text{тяж}}$  – сила тяжести,  $F_{\text{бс}}$  – сила бокового сопротивления,  $F_{\text{лс}}$  – сила лобового сопротивления.

Решение данного уравнения позволяет определить время и глубину погружения в зависимости от типа погружающей установки, габаритов сваи и типа грунта.

Этап, когда погружающая установка тянет сваю вверх, преодолевая силу тяжести и сопротивление грунта по боковой поверхности, в настоящей работе рассматриваться не будет, так как в этом случае возможно разрушение сваи, поскольку бетонная свая хорошо переносит сильное сжатие, но разрушается при попытке растяжения. На практике этого не допускают с помощью управления угловой скоростью вращения дисбалансов, не позволяя устройству работать на больших оборотах в начале погружения.

Если полезная сила погружающей установки и сила тяжести не смогут превысить сопротивление грунта, то погружение остановится. После этого этапа происходит увеличение скорости оборотов валов дисбалансов, до тех пор, пока вынуждающей силы не станет достаточно, чтобы продолжить погружение сваи.

В дальнейшем будем пользоваться уравнением (6) для численного моделирование процесса.

Через  $m$  обозначим массу всей установки, через  $x(t)$  – глубину погружения сваи, а через  $t$  – время погружения сваи. Тогда

$R = ma = m\ddot{x}$ , где  $a$  – ускорение,  $F_{\text{тяж}} = mg$ , где  $g$  – ускорение свободного падения,  $F_{\text{лс}} = S_{\text{лс}}h_i(x(t), \varepsilon)$ , где  $S_{\text{лс}}$  – площадь поперечного сечения сваи,  $h_i(x(t), \varepsilon)$  – удельное лобовое сопротивление,  $\varepsilon$  – коэффициент условий работы грунта под нижним концом сваи,  $F_{\text{бс}} = Px(t)f_i(\psi)$  – сила бокового сопротивления, представляющая собой произведение периметра сваи  $P$ , глубины погружения  $x(t)$  и удель-

ной силы бокового сопротивления  $f_i(\psi)$ , зависящей от типа грунта.

Будем считать, что в момент времени  $t = 0$  глубина погружения равна 0 и свая неподвижна. Исходя из этого получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m\ddot{x} = F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} \cdot h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t)f_i(\psi) \quad (7)$$

с начальными условиями:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (7)-(8) позволяет определить время и глубину погружения в зависимости от характеристик погружающей установки, размеров и веса сваи, а также типа грунта.

Заменим  $\ddot{x}$  в уравнении (7) разностной аппроксимацией:

$$\begin{aligned} m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h} &= F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t)f_i(\psi), \\ x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} &= \frac{h^2}{m} (F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t)f_i(\psi)), \\ x_{i+1} &= 2x_i - x_{i-1} + \frac{h^2}{m} (F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t)f_i(\psi)). \end{aligned} \quad (9)$$

Полученное рекуррентное равенство позволяет численно рассчитать текущее значение функции  $x$ , при условии  $x_0 = x_1 = 0$ . Для программной реализации и численного расчёта глубины и времени погружения сваи был выбран языке программирования Python. Программа рассчитывает глубину погружения сваи в дискретные моменты времени, используя равенства (9).

### Литература

1. В.Н.Ермоленко, В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов Оптимизация полигармонического импульса /

Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск 2012, 27 (286), вып. 13. — С. 35-44.

2. *В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов* Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / ДАН. 2012. — Т. 445, 3. — С. 271-273.

3. *Костин, Д.В.* Бифуркации резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии / Математический сборник. 2016. Т. 207, 12. — С. 90-109.

4. *Костина Т. И., Журба А. В., Мызников А. С., Бабошин С.Д.* Программная реализация математической модели работы импульсного погружателя / Современные методы теории функций и смежные проблемы. 2021 С. 168-169.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ БИЛЛИАРДАМИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ <sup>1</sup>

©2022 *В. Н. Завьялов*

(Москва, МГУ; *vnzavyalov@mail.ru*)

Согласно теореме В.В.Козлова, интегрируемые геодезические потоки на двумерных компактных римановых многообразиях без границы (многообразие и метрика  $\mathbb{R}$ -аналитические) могут существовать лишь на торе, сфере, бутылке Клейна и проективной плоскости. Топология их слоений Лиувилля в случае, если дополнительный интеграл имеет степень не выше двух, была изучена в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга в работах В.С. Матвеева, Е.Н. Селивановой, В.В. Калашникова (мл.), Нгуен Тьен Зунга, Л.С.Поляковой, обзор см. [2].

---

<sup>1</sup>Работа выполнена за счёт гранта РНФ, проект № 20-71-00155

Недавние результаты В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко показывают, что рассмотрение класса интегрируемых билиардов на столах-комплексах (билиардные книжки и топологические билиарды) позволяет промоделировать слоения Лиувилля многих интегрируемых систем динамики. В частности, им удалось реализовать билиардами слоения Лиувилля геодезических потоков на двумерных **ориентируемых** поверхностях, имеющих линейный или квадратичный интеграл. [3]

В докладе будет представлено развитие этой работы на случай **неориентируемых** многообразий (будут рассмотрены потоки на проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  или бутылке Клейна  $Kl^2$ ). Для этого понадобилось использовать новый класс билиардов, введённый А.Т. Фоменко — билиард с проскальзыванием [1]. Рассмотрим  $F$  — изометрию плоского эллипса, переводящую точку  $x$  в диаметрально противоположную ей точку  $y$ . Пусть материальная точка движется равномерно и прямолинейно внутри эллипса и попадает на границу. Продолжим её из точки  $y = F(x)$  по лучу, выходящему из неё под углом  $\alpha$ . При этом направление траектории “по” или “против” часовой стрелки сохранится. Иными словами, её продолжение выходит из новой точки под тем же углом, “проскальзывая” вдоль границы. На основании этого такой класс систем был назван “билиардами с проскальзыванием”.

Добавление проскальзывания к системам топологических билиардов позволило реализовать произвольные линейно интегрируемые геодезические потоки. Этот результат получен докладчиком совместно с В.В. Ведюшкиной.

**Теорема.** *Любой линейный по импульсам геодезический поток на двумерном неориентируемом многообразии (бутылке Клейна или проективной плоскости) лиувиллево эквивалентен подходящему билиарду с проскальзыванием.*



При этом линейные интегралы геодезических потоков сводятся к одному каноническому линейному интегралу на бильярде.

Пусть дан комплекс, ограниченный двумя софокусными эллипсами из семейства  $(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)$  и имеющими параметры 0 и  $\tilde{a}$ , где  $0 < \tilde{a} < b < a < \infty$ . Склеив два таких кольца по внутреннему эллипсу, рассмотрим бильярд на данной области, введя на внешних эллипсах проскальзывание.

**Теорема. [1]** *Инварианты Фоменко-Цишанга бильярдов с проскальзыванием на угол  $\pi$  внутри эллипса и внутри полученного комплекса изображены на рисунке 2. Бильiardные системы в эллипсе и внутри комплекса кусочно-гладко ливиллево эквивалентны геодезическим потокам на проективной плоскости и бутылке Клейна, соответственно, имеющим квадратичный дополнительный интеграл (о них см. [2]).*

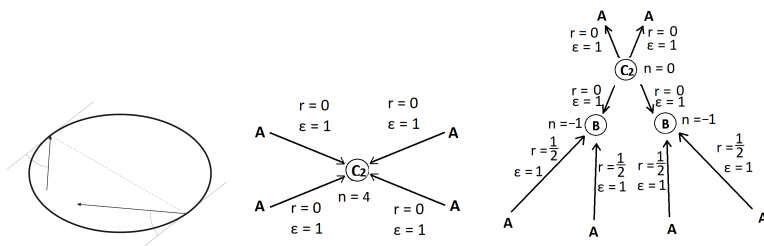


Рис.1: Звенья траектории бильярда в эллипсе с проскальзыванием на угол  $\pi$  до и после удара о границу(слева). Меченая молекула бильярда в эллипсе с проскальзыванием (посередине) и в столе-комплексе, склеенном из эллиптических колец с проскальзыванием (справа).

## Литература

1. *A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav'yalov* Liouville foliations of topological billiards with slipping. Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.
2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.
3. *Vedyushkina (Fokicheva) V.V., Fomenko A.T.* Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards. Izv. Math. 83(6), 1137–1173 (2019).

## ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ БИЛЛИАРДА В ПАРАБОЛЕ

©2022 *А. В. Зайцева*

(Москва, МГУ; *AnastasiaZay12@mail.ru*)

Математический бильярд — это динамическая система, описывающая движение материальной точки внутри замкнутой ограниченной области с некоторым законом отражения на границе.

В работе [4] был проведён топологический анализ бильярда внутри параболической области, при этом бильярдный шар движется свободно прямолинейно. Рассмотрим теперь такой бильярд, но с добавленным гравитационным потенциалом. А именно, бильярд задан в области, ограниченной параболлами из семейства софокусных парабол. На шар действует потенциал  $V = gy$ . Сила тяжести направлена перпендикулярно директрисам парабол.

Гамильтонианом этой системы является:

$$H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + gy;$$

а дополнительным первым интегралом:

$$G = \dot{x}(x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{gx^2}{2};$$

Более того, такой бильярд допускает разделение переменных Харламова [3].

Выразим значения функций через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и импульсы  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

**Теорема:** Формулы разделения переменных имеют следующий вид:

$$\mu_1 = \frac{2\dot{\lambda}_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{2\dot{\lambda}_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2}$$

В работе И.Ф.Кобцева [5] был рассмотрен бильярд внутри эллипса с потенциалом Гука. Также в этой работе сравниваются эллиптический бильярд в классическом прямолинейном случае и в случае с потенциалом. Проведём аналогичное сравнение нашей системы и такой же прямолинейной системы. А именно, используя метод Харламова, опишем слоения Лиувилля в терминах инвариантов Фоменко—Цишанга.

В докладе будут приведены инварианты Фоменко (грубые молекулы) для некоторых изоэнергетических многообразий  $Q_3$ .

### Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. I. — Ижевск: РХД, 1999
2. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995
3. Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с. 769—805.
4. Фокичева В.В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

5. Кобцев И.Ф. Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ, Матем. сб., 211:7 (2020), 93-120

## О ПОДПРОСТРАНСТВЕ ПОЧТИ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ <sup>1</sup>

©2022 Р. Е. Зволинский

(Воронеж, ВГУ; roman.zvolinskiy@gmail.com)

Через  $\ell_\infty$  обозначим пространство ограниченных последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$  с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел, и обычной полуупорядоченностью. Линейный функционал  $B \in \ell_\infty^*$  называется банаховым пределом, если

1.  $B \geq 0$ , т. е.  $Bx \geq 0$  для всех  $x \in \ell_\infty$ ,  $x \geq 0$ ,
2.  $B\mathbb{1} = 1$ , где  $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$ ,
3.  $Bx = BTx$  для всех  $x \in \ell_\infty$ , где  $T$  — оператор сдвига, т. е.  $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ .

Последовательность  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$  называется почти сходящейся к  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ , если  $Bx = \lambda$  для любого банахова предела  $B \in \mathfrak{B}$ , через  $\mathfrak{B}$  мы обозначаем множество банаховых пределов, а через  $ac$  — множество почти сходящихся последовательностей. В этом случае мы будем писать  $\text{Lim } x_n = \lambda$ . Множество последовательностей, почти сходящихся к  $\lambda$ , обозначается через  $ac_\lambda$ . В [1] Г. Лоренц доказал, что  $x \in ac_\lambda$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lambda$$

равномерно по  $m \in \mathbb{N}$ . В работе [2] доказано, что  $f(\sin nt) \in ac$  для любой непрерывной функции  $f$  и всех  $t \in \mathbb{R}^1$ . В

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 19-11-00197

частности,  $\text{Lim} \sin^m nt = 0$  для нечётных  $m$ . Для чётных  $m$  найдено соответствующее выражение. Ниже проведём аналогичные рассуждения для последовательности  $\cos^m nt$ , где  $m \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1.** 1. Если  $m$  нечётно, то

$$\text{Lim} \cos^m nt = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j \in Q_m} C_m^j. \end{cases}$$

2. Если  $m$  чётно, то

$$\text{Lim} \cos^m nt = \begin{cases} 1, & t = 0, \pm\pi, \\ \frac{C_m^{m/2}}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j \in Q_m} C_m^j. \end{cases}$$

Здесь

$$Q_m = \left\{ j : 0 \leq j < \frac{m}{2}, \frac{(m-2j)|t|}{2\pi} \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Доказательство теоремы 1.** 1. Если  $t = 0$ , то равенство  $\text{Lim} \cos^m nt = 1$ , где  $m$  нечётно, очевидно. Пусть  $r \in \mathbb{N}$ ,  $t \neq 0$  и  $m$  нечётно, тогда

$$\begin{aligned} \text{Lim} \cos^m nt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=r+1}^{r+n} \cos^m kt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=r+1}^{r+n} \left[ \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j=0}^{(m-1)/2} C_m^j \cdot \cos(m-2j)kt \right] = \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j=0}^{(m-1)/2} C_m^j \cdot \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=r+1}^{r+n} \cos(m-2j)kt \right] = \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j=0}^{(m-1)/2} C_m^j \cdot \text{Lim} \cos(m-2j)nt. \end{aligned}$$

где

$$\text{Lim} \cos(m-2j)nt = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{(m-2j)|t|}{2\pi} \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Введём в рассмотрение множество

$$Q_m = \left\{ j : 0 \leq j < \frac{m}{2}, \frac{(m-2j)|t|}{2\pi} \in \mathbb{N} \right\},$$

тогда

$$\text{Lim} \cos^m nt = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j \in Q_m} C_m^j.$$

2. Если  $t = 0, \pm\pi$ , то равенство  $\text{Lim} \cos^m nt = 1$ , где  $m$  чётно, очевидно. Пусть  $r \in \mathbb{N}$ ,  $t \neq 0, \pm\pi$  и  $m$  чётно, тогда

$$\begin{aligned} \text{Lim} \cos^m nt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=r+1}^{r+n} \cos^m kt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=r+1}^{r+n} \left[ \frac{C_m^{m/2}}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j=0}^{(m-2)/2} C_m^j \cdot \cos(m-2j)kt \right] = \\ &= \frac{C_m^{m/2}}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j=0}^{(m-2)/2} C_m^j \cdot \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=r+1}^{r+n} \cos(m-2j)kt \right] = \\ &= \frac{C_m^{m/2}}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j=0}^{(m-2)/2} C_m^j \cdot \text{Lim} \cos(m-2j)nt = \\ &= \frac{C_m^{m/2}}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{j \in Q_m} C_m^j. \end{aligned}$$

## Литература

1. Lorentz G. G. A contribution to the theory of divergent sequences //Acta mathematica. – 1948. – Т. 80. – №. 1. – С. 167-190.

2. Зволинский Р. Е., Семёнов Е. М. Подпространство почти сходящихся последовательностей // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62. – №. 4. – С. 758-763.

## ОБ ОДНОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ <sup>1</sup>

©2022 А. В. Звягин

(Воронеж, ВГПУ; *zvyagin.a@mail.ru*)

©2022 Е. И. Костенко

(Воронеж, ВГУ; *ekaterinalarshina@mail.ru*)

В  $Q_T = [0, T] \times \Omega$ , где  $T \geq 0$ , а  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega \subset C^2$  рассматривается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \\ - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \varepsilon(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \nabla p = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)), \quad t, \tau \in [0, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

$$v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0; \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (4)$$

Здесь  $v(t, x)$  и  $p(t, x)$  искомые скорость и давление рассматриваемой среды,  $z(\tau; t, x)$  — траектория движения частицы среды,  $\varepsilon(v) = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — тензор скоростей деформации, являющийся матрицей с элементами  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ ,  $\mu_0 > 0, \mu_1 \geq 0, 0 < \alpha < 1, \lambda > 0$ . Знак  $\operatorname{Div}$  обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена за счёт гранта РФФИ 19-31-60014.

**Определение 1** Пусть  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ . Слабым решением задачи (1)–(4) называется функция  $v \in W_1 = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$ , удовлетворяющая при любой  $\varphi \in V^1$  и п.в.  $t \in (0, T)$  тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ \times \int_{\Omega} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \varepsilon(v)(s, z(s; t, x)) ds \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

и начальному условию  $v(0) = v_0$ . Здесь  $z$  — РЛП, порождённый  $v$ .

**Теорема 1** Пусть  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ ,  $v(0) \in V^0$ . Тогда задача (1)–(4) имеет по крайней мере одно слабое решение  $v \in W_1$ .

Также начально-краевая задача (1)–(4) рассматривается с памятью на бесконечном временном интервале. А именно, в  $Q = (-\infty, T] \times \Omega$  рассматривается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \\ - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \text{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \varepsilon(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \nabla p = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \end{aligned} \quad (5)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)), \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (6)$$

$$\text{div } v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad v(t, x) |_{(-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

Введём следующие функциональные пространства:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V^1), v' \in L_{2,loc}(-\infty, T; V^{-1})\};$$



$$W_2 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V^1), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}.$$

Здесь  $L_{p,loc}(-\infty, T; V^{-1})$  — пространство, состоящее из функций  $v$ , определённых почти всюду на  $(-\infty, T]$  и принимающих значение в  $V^{-1}$ , сужение которых на любой отрезок  $[r, T] \in (-\infty, T]$  принадлежит  $L_p(r, T; V^{-1})$ . Пусть при  $n = 2$   $W = W_1$ , а при  $n = 3$  и  $W = W_2$ .

**Определение 1.** Пусть  $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$ . Слабым решением задачи (5)–(7) называется функция  $v \in W$ , удовлетворяющая при любой  $\varphi \in V$  и п.в.  $t \in (-\infty, T]$  тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ \times \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \varepsilon(v)(s, z(s; t, x)) ds \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

где  $z$  — РЛП, порождённый  $v$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$ . Тогда задача (5)–(7) имеет по крайней мере одно слабое решение  $v \in W$ .

### Литература

1. Zvyagin V.G., Orlov V.P. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A. — 2018. — V. 38. — . 12. — P. 6327–6350.

2. Звягин А. В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Успехи математических наук. — 2019. — Т. 74. — №. 3. — С. 189–190.

3. Звягин А. В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2021. — Т. 85. — №. 1. — С. 66–97.

# УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

©2022 С. П. Зубова

(Воронеж, ВГУ; *spzubova@mail.ru*)

©2022 Е. В. Раецкая

(Воронеж, ВГЛУ *raetskaya@inbox.ru*)

Исследуется динамическая система

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B \frac{\partial x}{\partial s} + x(t, s) + Du(t, s), \quad t \in T, \quad s \in S, \quad (1)$$

где  $x(t, s) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t, s) \in \mathbb{R}^m$ ;  $B : n \times n$ ,  $D : n \times m$ ,  $\nexists D^{-1}$ ;  
 $T = [t_0, t_k]$ ,  $S = [s_0, s_k]$ .

Систему (1) называем полностью управляемой, если существует функция управления (управление)  $u(t, s)$ , под воздействием которого состояние  $x(t, s)$  системы (1), траектория переводится из начального состояния  $x(t_0, s) = x_0(s)$  в конечное состояние  $x(t_k, s) = x_k(s)$  за время  $T$ ,  $\forall T > 0$ ,  $\forall x_0(s), x_k(s) \in \mathbb{R}^n$ .

Известно [1], что система

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B \frac{\partial x}{\partial s} + Du(t, s) \quad (2)$$

является полностью управляемой в том и только том случае, когда выполняется условие Калмана [2]  $\text{rank}(DBD \dots B^{n-1}) = n$ .

Доказывается

**Теорема 1.** Система (1) полностью управляема тогда и только тогда, когда выполняется условие Калмана.

Таким образом, системы (1), (2) и

$$\frac{dx}{dt} = Bx(t) + Du(t) \quad (3)$$

полностью управляемые или не являются таковыми одновременно.

Для полностью управляемых систем (1) и (2) находятся  $u(t, s)$ , при воздействии которых состояния систем  $x(t, s)$  удовлетворяют не только заданным начальным и конечным условиям, но и принимают в заданные моменты  $t_i$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ , любые значения  $x_i(s) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Вектор-функции  $u(t, s)$  и  $x(t, s)$  строятся в аналитическом виде. для чего применяется метод каскадной декомпозиции [1].

### Литература

1. Zubova S.P, Raetskaya E.V. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives // Mathematical Methods in the Applied Sciences, AIMS, New York. -2021. - V. 44, N 15. - P. 11998-12009.

2. Калман Р.Е. и др. Очерки по математической теории систем // М. : Едиториал. 2004. 400 с.

## ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАЛАКРИШНАНА

©2022 М. И. Илолов

(Душанбе, Таджикистан, ЦИРННТ НАНТ;  
*ilolov.mamadsho@gmail.com*)

©2022 С. М. Лашкарбеков

(Душанбе, Таджикистан, ЦИРННТ НАНТ;  
*lashkarbekov89@bk.ru*)

©2022 Дж. Ш. Рахматов

(Душанбе, Таджикистан, ЦИРННТ НАНТ;  
*jamesd007@rambler.ru*)

Теория стохастических эволюционных уравнений и её приложений получили существенное развитие за последние

десятилетия. Это связано с одной стороны с бесконечномерным анализом полугрупп и эволюционных операторов решений, а с другой с тем, что их конечномерные реализации часто возникают в качестве математических моделей в физике, технике, химии, математической биологии, финансовой математике и других областях науки. Обобщение теории Ито-Стратоновича-Скоророда на бесконечномерном случае берет свой начало в работах [1,2]. В рамках этой теории, в частности, было исследовано линейное дифференциальное уравнение Ито с мультипликативным шумом [3-6]. В работах [7-10] был предложен иной подход к анализу стохастических уравнений на основе производной Нельсона-Гликлиха. В работе [10] установлено, что производная Нельсона-Гликлиха от винеровского процесса хорошо согласуется с предсказаниями теории броуновского движения Эйнштейна-Смолуховского, поэтому соответствующих стохастический процесс был назван «белым шумом».

В настоящей работе изучается класс дифференциальных уравнений дробного порядка возмущённых абсолютным случайным процессом или белым шумом типа Балакришнана. Такой тип белого шума впервые введён в монографии [11]. Свойства белого шума Балакришнана подробным образом описаны в [12].

Пусть  $H$  — вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Через  $W = L_2((0, T), H)$  обозначим сепарабельное гильбертово пространство, а через  $\mu$  стандартную гауссову меру на  $W$ . Так определённое функциональное пространство  $W$  называется белым шумом. Каждый элемент  $\omega \in W$  называется реализацией белого шума. Отметим, что всякая функция  $\omega$  определена лишь с точностью до меры нуль на отрезке  $[0, T]$ , и поэтому значение  $\omega$  в точке  $t$  не определено. С другой стороны, каждый элемент  $h \in W$  определяет гауссову случайную величину  $[\omega, h]$  с

нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной  $[h, h]$ . В этом случае, естественно предположить, что каждый физический процесс является случайной величиной. Пусть  $\{\varphi_k\}$  — ортонормированный базис пространства  $W$ . Тогда гауссовы случайные величины

$$\zeta_k(\omega) = [\omega, \varphi_k]$$

имеют нулевые математические ожидания а их дисперсии равны единице. Кроме того, в отличие от классического случая,

$$\sum_1^{\infty} (\zeta_k(\omega))^2 = \omega^2 < \infty.$$

Далее, введём непрерывную по  $t$  при фиксированном  $\omega$  функцию

$$W(t, \omega) = \int_0^t \omega(s) ds.$$

При  $t > s$  разность  $[W(t, \omega) - W(s, \omega), h]$  является гауссовой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной  $(t - s) \|h\|^2$ .

Тем не менее, функция  $W(t, \omega, h)$  не может быть реализацией винеровского процесса, ввиду того, что она имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интеграле при фиксированном  $\omega$ .

В случае, когда  $H = L_2(D)$ , где  $D$  — открытое и ограниченное подмножество евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , элементами пространства  $W$  являются измеримые по совокупности переменных функций  $\omega(t, x)$  такие, что

$$\int_0^T \int_D |(t, x)|^2 d|x| dt = \|\omega\|^2 < \infty.$$

Пусть  $x_1, x_2$  — пара различных точек множества  $D$ , а  $U_1$  и  $U_2$  — их непересекающиеся окрестности. Тогда для любой функции  $g(t)$  величины

$$\int_0^T \int_D g(t) h_1(x) \omega(t, x) d|x| dt, \int_0^T \int_D g(t) h_2(x) 2\omega(t, x) d|x| dt$$

независимы. Это свойство сохраняется при стягивании выбранных окрестностей к соответствующим точкам, т.е. процесс пространственно не зависимые. Имеет место аналогичное свойство временно независимости. Мы имеем математическую модель пространственно-временной корреляции, определяемая дельта-функцией. Существуют другие модели предоставляемые теорией маргиналов и винеровскими процессами.

Рассматривается задача Коши вида

$${}^c D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0, \quad (1.1)$$

где  ${}^c D_t^\alpha$  — дробная производная Капуто порядка  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ ,  $A$  — почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H, f : H \rightarrow H$  — нелинейное заданное отображение,  $\omega(t)$  — абсолютный случайный процесс (белый шум в смысле Балакришнана) в другом сепарабельном гильбертовом пространстве  $H_n, B$  — линейный оператор, определённый в  $H$  со значениями в пространстве линейных операторов из  $H_n$  в  $H$ . При анализе

разрешимости задачи Коши (1.1) стандартным требованием является порождение оператором  $A$  резольвентных семейств операторов  $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$  и  $\{Z_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ . Это условие гарантирует корректность задачи Коши для детерминированного, невозмущённого однородного уравнения

$${}^c D_t^\alpha u(t) + A(t)u(t) = 0$$

Далее нужно потребовать от нелинейного отображения  $f(\cdot)$  условия типа Липшица. Условия, накладываемые на оператор  $B$ , тесно связаны со свойствами абсолютного случайного процесса (белого шума).

### Литература

1. *Ichikawa A.* Stability of semilinear stochastic evolution equations. // J. Math. Anal. Appl. – 1982.– N90.– pp. 12-44.
2. *Ichikawa A.* Semilinear stochastic evolution equations // Stochastics. – 1984.– N12.– pp. 1-39.
3. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. // Cambridge: Camb. Univ. Press. – 2014.
4. *Gawarecki L., Mandrekar V.* Stochastic Differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. // Berlin; Heidelberg: Springer - Verl. – 2011.
5. *Melnikova I.V.* Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Generalized and regularized solutions. // Boca Raton; London; New York: CRS Press – 2016.
6. *Filinkov A., Sorensen J.* Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions. // Stoch. Stoch. Rep.– 2003.– v. 72.– N3-4.– pp. 129-173.
7. *Gliklich Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Appercations to Mathematical Physics. // London; Dordrecht; Heidelberg; New York: Springer/ – 2011.
8. *Nelson E.* Dynamical Theory of Brownian motion. // Princeton: Princeton University Press/ – 1967.

9. Kovach M., Larsson S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. New Directions on the Mathematical and Computer Sciences. // National Universities Commission, Auja, Nigeria, 2007. -V.4, Publications of the ICMCS, Lagos (2007), pp. 159232.

10. Sviridynk G.A, Zamyshlyayeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive «white noise». // Vestnik YUUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programirovanie». - V.11.– N3. – (2018).– pp. 103-117.

11. Balakrishnan A.V. Applied Functional Analysis. // Springer - Verlag, Applications of Mathematics. – 1976.

12. Polov, M., Kuchakshoev, K.S., Rahmatov, J.S. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model // Communications on Stochastic Analysis. - 2020. - 14(3-4). - pp. 55-69.

## ОСОБЕННОСТИ ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ СИСТЕМ КОВАЛЕВСКОЙ НА АЛГЕБРАХ ЛИ <sup>1</sup>

©2022 B. A. Кибкало

(Москва, МГУ; [slava.kibkalo@gmail.com](mailto:slava.kibkalo@gmail.com))

Многие интегрируемые системы имеют аналоги в псевдоевклидовых пространствах, как известные волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской [1]. Семейство аналогов последнего на пучке алгебр Ли  $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ , открытое И.В.Комаровым [2], переносится на псевдоевклидов случай, порождая на  $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$  семейство систем  $H, K = K_{\varkappa}$  с параметром  $\varkappa \in \mathbb{R}$  из скобки Ли-Пуассона.

Динамические и топологические свойства этих систем сильно отличаются от своих классических аналогов. Например, волчок Эйлера имеет и компактные, и некомпактные

---

<sup>1</sup>Работа выполнена за счёт гранта РФФИ, проект 20-31-90114. Автор является стипендиатом Фонда “Базис”



слои (совместные уровни функций Казимира  $f_1 = a, f_2 = b$ , энергии  $H = h$  и интеграла  $F = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = f$ ), а поток гамильтонова векторного поля интеграла системы бывает неполным [1]. Формулы  $f_1, f_2, H$  получаются из формул [2] семейства Ковалевской заменой знака при  $x_3^2, x_3 J_3$  и  $J_3^2$ .

Автором был решён [3] вопрос о компактности слоя Лиувилля для семейства систем Ковалевской при каждом  $\varkappa$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f_2 = b \neq 0$ . Тогда совместный уровень  $T_{a,b,h,k}$  функций  $f_1, f_2, H, K$  компактен  $\Leftrightarrow$  для нас  $0 \leq k < (h - \varkappa c_1^2)^2$ . При  $k < 0$  он пуст, а если точка  $(h, k)$  лежит над параболой или на ней, то некомпактен.

Изучим критические точки отображения  $(H, K)$ : в них линейно зависимы поля  $sH^i = (\text{sgrad } H)^i = \omega^{ij} dH_j$  и  $sK^i$ .

**Утверждение 1.** При каждом  $\varkappa \in \mathbb{R}$  множество критических точек ранга 1 для системы Ковалевской на алгебре Ли из пучка  $\mathfrak{so}(3, 1) - e(3) - \mathfrak{so}(4)$  и для её псевдо-евклидова аналога совпадают. Аналогичное верно для точек ранга 0. Их образы лежат на кривых, задаваемых теми же формулами, что и в случае Ковалевской при таком  $\varkappa$ .

Невырожденные (боттовские) критические точки ранга 1 отвечают думам бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ , а их вырождения ранга 1 и точки ранга 0 — особым точкам  $\Sigma$ . В семействе Ковалевской на  $\mathfrak{so}(3, 1) - e(3) - \mathfrak{so}(4)$  они составляют три семейства: первое  $(J_1, J_2, 0, \varkappa, 0, 0)$ , второе  $(J_1, 0, 0, x_1, 0, 0)$  и третье  $(J_1, 0, J_3, -J_1^2/2 - \varkappa/2, 0, -J_1 J_3)$ .

Формулы их координат [4] не меняются при переходе к псевдо-евклидову случаю, что легко проверить. У семейств 1 и 2 (см. [4]) также не меняются значения  $f_1, f_2, H$ , т.к.  $x_3 = J_3 = 0$ . Для семейства 3 последнее неверно. Они могут попасть на “новые” 4-орбиты  $M_{a,b}^4$ , пустые ранее при этом  $\varkappa$ .

Для определения типа особенности слоения, содержащей невырожденные точки  $\text{rk } 0$ , требуется изучить вопрос вещественности или мнимости некоторых собственных значений

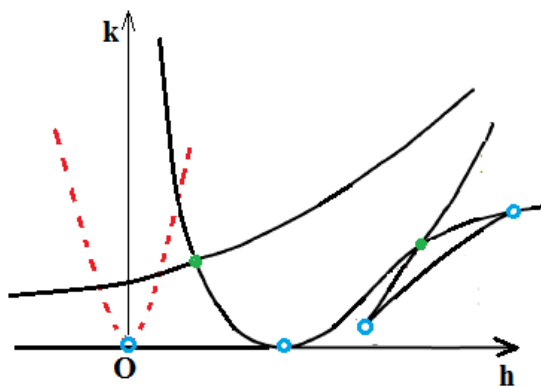
операторов линеаризации полей  $sH, sK$ . Их формулы, в отличие от координат точек, начинают зависеть от  $\sigma = -1$ .

**Утверждение 2.** Пусть при данных  $(a, b, \varkappa)$  слоение Ливуилля системы Ковалевской на орбите  $M_{a,b}^4$  имеет критическую точку ранга 0 из семейств 1 и 2, и она невырождена. Тогда она принадлежит той же орбите псевдо-евклидовой системы с этим  $\varkappa$ , и тип компонент её локальной особенности меняется: центр на седло, и наоборот.

Орбита  $M_{a,b}^4$ , куда попадают точки семейства 3, меняется, но их тип несложно определить, зная координаты.

**Утверждение 3.** Точки  $\text{rk } 0$  семейства 3 (см. [4]) невырождена, если  $J_3 \neq 0$  и  $S = \varkappa J_3^2 - J_1^2 + \varkappa \neq 0$  (для  $\sigma = 1$  в исходном или  $\sigma = -1$  в псевдо-евклидовом случаях). Её тип — центр-центр при  $S < 0$  или центр-седло при  $S > 0$ .

Эти утверждения позволяют получить немало информации о топологии псевдо-евклидовых аналогов системы Ковалевской, о чем подробнее мы расскажем. На рисунке изображены бифуркационные кривые псевдоевклидовой Ковалевской при  $\varkappa = 0, b \neq 0$ . В прообразе пунктирной параболы — некритические некомпактные бифуркации слония.



## Литература

1. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // *Rus. J. of Math. Phys.* – 2016. – Т. 23. – №. 4. – С. 431-454.
2. *Komarov I. V.* Kowalewski basis for the hydrogen atom // *Theoret. Math. Phys.* – 1981. – Т. 47. – №. 1. – С. 320-324.
3. *Кибкало В. А.* Свойство некомпактности слоёв и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли // *Вестник МГУ, Сер. 1.* – 2020. – №. 6. – С. 56-59.
4. *Козлов И. К.* Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  // *Матем. сб.* – 2014. – Т. 205. – №. 4. – С. 79-120.

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ТИХОНОВА В ПРИМЕНЕНИИ К НЕКОРРЕКТНЫМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ <sup>1</sup>

©2022 *М. М. Кокурин*

(Йошкар-Ола, МарГУ; *kokurin@nextmail.ru*)

Пусть  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  — нелинейный функционал на вещественном гильбертовом пространстве  $H$ . Требуется решить задачу оптимизации

$$J(x) \rightarrow \min_{x \in H}, \quad (1)$$

т.е. найти точку  $x^* \in H$ , доставляющую глобальный минимум функционалу  $J$ . Существование решения  $x^*$  ниже предполагается. Задача оптимизации (1) в общем случае является некорректной [1]. Потребуем, чтобы функционал  $J$  был дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и его вторая производная Фреше удовлетворяла условию Липшица

$$\|J''(x) - J''(y)\|_{L(H)} \leq \Lambda \|x - y\|_H, \quad x, y \in H \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 20-11-20085)

с некоторой константой  $\Lambda > 0$ . Пусть также выполнено условие истокпредставимости

$$\exists w \in H : x^* - \xi = J''(x^*)w \quad (3)$$

с некоторым известным элементом  $\xi \in H$ . Наконец, потребуем, чтобы

$$\Lambda \|w\|_H < 1. \quad (4)$$

Пусть вместо точного функционала  $J$  известно его приближение  $J_\delta : H \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что

$$|J_\delta(x) - J(x)| \leq \delta(1 + \|x\|_H^2), \quad x \in H \quad (5)$$

с известным уровнем погрешности  $\delta > 0$ . Рассмотрим функционал

$$T_{\alpha,\delta}(x) = J_\delta(x) + \alpha \|x - \xi\|_H^2.$$

Метод Тихонова в применении к задаче (1) заключается в нахождении точки  $x_{\alpha,\varepsilon,\delta} \in H$ , такой что

$$\inf_{x \in H} T_{\alpha,\delta}(x) \leq T_{\alpha,\delta}(x_{\alpha,\varepsilon,\delta}) \leq \inf_{x \in H} T_{\alpha,\delta}(x) + \varepsilon \quad (6)$$

с параметрами  $\alpha, \varepsilon > 0$ , выбранными подходящим образом в зависимости от  $\delta$ . Такая точка  $x_{\alpha,\varepsilon,\delta}$  всегда существует.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (2)–(5) и параметры  $\alpha, \varepsilon$  в (6) выбираются по правилу  $\alpha(\delta) = C_1 \delta^{1/3}$ ,  $\varepsilon(\delta) = C_2 \delta$  с некоторыми  $C_1, C_2 > 0$ . Тогда для точности приближений  $x_{\alpha(\delta),\varepsilon(\delta),\delta}$ , доставляемых методом Тихонова в применении к задаче (1), справедлива оценка

$$\|x_{\alpha(\delta),\varepsilon(\delta),\delta} - x^*\|_H \leq C_3 \delta^{1/3}, \quad \delta \in (0, \delta_0] \quad (7)$$

с некоторыми константами  $C_3, \delta_0 > 0$ , вообще говоря, зависящими от  $\xi$  и самого функционала  $J$ .

Данная теорема усиливает полученную в [2] оценку точности  $O(\delta^{1/4})$  для метода Тихонова в применении к некорректным задачам оптимизации. В то же время, оценка (7) хуже оценки точности  $O(\delta^{1/2})$ , справедливой для данного метода при дополнительном условии выпуклости функционала  $J$ , не используемом в теореме 1.

### Литература

1. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач // М.: Наука, 1981. 400 с.
2. *Кокурин М. Ю.* Оценки скорости сходимости в схеме Тихонова для решения некорректных невыпуклых экстремальных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57. – №. 7. – С. 1103–1112.

## АСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В НЕПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ <sup>1</sup>

©2022 М. Ю. Кокурин

(Йошкар–Ола, МарГУ; [kokurintm@yandex.ru](mailto:kokurintm@yandex.ru))

Пусть  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  — семейства гармонических функций из  $C^2(\overline{D})$ ,  $D$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ . Рассматривается вопрос о том, в каких случаях семейство  $\pi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{u_1 u_2 : u_j \in \mathcal{H}_j, j = 1, 2\}$  образует полную систему в  $L_2(D)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L$  — прямая в  $\mathbb{R}^3$ ,  $Y$  есть открытое множество, принадлежащее неограниченной компоненте  $L \setminus \overline{D}$ ,

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(D), \quad \mathcal{H}_2 = \left\{ \frac{1}{|x - y|} : y \in Y \right\}.$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 20–11–20085).

Тогда семейство  $\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2$  полно в  $L_2(D)$ .

Волновое поле  $u(x, t) = u_y(x, t)$ , возбуждаемое в момент  $t = 0$  источником в точке  $y \in Y$ , определяется решением задачи

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) - \delta(x - y)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0$$

с нулевыми начальными условиями. Пусть  $c(x) \equiv c_0$  вне априори заданной ограниченной области  $D \subset \mathbb{R}^3$  с известной  $c_0$ ,  $c(x)$  при  $x \in D$  неизвестны, функция  $c$  кусочно непрерывна. Считаем, что  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$  связно. В обратной задаче волнового зондирования по измерениям усреднённого рассеянного поля  $\int_0^\infty t^2 u_y(x; t) dt = h(x, y)$  для  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $(X \cup Y) \cap \overline{D} = \emptyset$ , требуется определить  $c(x)$ ,  $x \in D$ . Здесь  $X$  и  $Y$  — многообразия, на которых размещены детекторы рассеянного поля и его источники. С использованием Теоремы 1 доказывается

**Теорема 2.** Пусть  $\Pi$ ,  $L$  — произвольные плоскость и прямая в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Pi \cap \overline{D} = \emptyset$ ;  $X$  — область в  $\Pi$  и  $Y$  есть открытое множество, принадлежащее неограниченной компоненте  $L \setminus \overline{D}$ ,  $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$ . Тогда функция  $c(x)$ ,  $x \in D$ , однозначно определяется данными наблюдения  $\{h(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ .

Аналог Теоремы 2 установлен для обратных задач волнового зондирования в бесфазной постановке.

# ОБ ОПЕРАТОРЕ ПРИРАЩЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕМ НА ПРОСТРАНСТВАХ ГРАФОВЫХ ФУНКЦИЙ

©2022 Е. В. Колмыкова

(Воронеж, ВГУ; kolmykova\_kate@bk.ru)

Рассматриваются пространства функций, определённых на множествах графов. Вводится понятие оператора приращения (приращения функции на ребре графа). Этот оператор обладает свойствами, схожими со свойствами оператора дифференцирования, а обратное к нему многозначное отображение напоминает неопределённый интеграл. Обсуждаются возможные применения этих понятий и утверждений.

**1. Пространства графовых функций.** Пусть  $\mathcal{T}$  — множество всех деревьев. А  $\mathcal{T}_*$  — множество всех деревьев, кроме дерева, состоящего из одной вершины.

Через  $L_1$  обозначим линейное пространство, состоящее из всевозможных вещественных функций  $f(X)$ , где переменная  $X$  пробегает множество  $\mathcal{T}$ . А через  $L_2$  — линейное пространство, состоящее из всевозможных вещественных функций  $g(X, l)$ , где переменная  $X$  пробегает множество  $\mathcal{T}_*$ , а переменная  $l$  пробегает множество рёбер дерева  $X$ .

*Примеры.* 1) В [3] введены следующие функции  $\theta_n \in L_1$ , которые мы будем использовать ниже:  $\theta_n(T)$  — это сумма  $n$ -ных степеней степеней вершин дерева  $T$ .

2) Определим функции  $\gamma_n \in L_2$ . Пусть  $l$  ребро дерева  $T$ , через  $d_1(T, l)$  и  $d_2(T, l)$  обозначим число рёбер, инцидентных одной вершине ребра  $l$  и число рёбер, инцидентных другой его вершине. Положим  $\gamma_n(T, l) = d_1^n(T, l) + d_2^n(T, l)$

**2. Оператор приращения.** Введём понятие приращения функции на ребре дерева. Пусть  $s : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассмотрим какое-то дерево  $T$  и какое-то его ребро  $l$ . Удалим это ребро (все вершины дерева  $T$  останутся и все другие ребра дерева  $T$  останутся). Получится лес, состоящий из двух деревьев.

Обозначим их  $T_1$  и  $T_2$ . Приращением функции  $s$  на ребре  $l$  дерева  $T$  назовём число  $s(T) - (s(T_1) - s(T_2))$ . Обозначим его  $[s, T, l]$ .

Оператором приращения назовём оператор  $\Delta : L_1 \rightarrow L_2$ , определённый следующим образом:  $\Delta(f)(T, l) = [f, T, l]$ . Таким образом, оператор  $\Delta$  переводит вещественную функцию, определённую на множестве всех деревьев, в функцию, определённую на множестве пар  $(T, l)$ , где  $T$  пробегает  $\mathcal{T}_*$ , а  $l$  пробегает множество рёбер дерева  $T$ .

Например, легко увидеть, что  $\Delta(\theta_2) = 2\gamma_1 + 2$ .

**3. Свойства операторов приращения.** Оператор  $\Delta$  является линейным. Вместо  $\Delta(f)$  мы будем писать просто  $\Delta f$ .

Через  $C$  обозначим множество всех вещественных функций-констант, определённых на  $\mathcal{T}$ , произведение  $C\theta_0$  понимается в естественном смысле: оно состоит из всевозможных произведений  $f\theta_0$ , где  $f \in C$ .

Оператор  $\Delta : L_1 \rightarrow L_2$  не является инъективным. Обратное отображение (определённое на образе оператора  $\Delta$ ) является многозначным, обозначим его  $I$ . Его областью определения  $D(I)$  является  $\Delta(L_1)$ .

Сформулируем свойства отображений  $\Delta$  и  $I$  (они напоминают свойства операций дифференцирования и интегрирования из классического анализа).

**Теорема 1.** Общим решением уравнения  $\Delta y = 0$  является  $y = C\theta_0$ .

**Теорема 2.** Если  $\Delta F = f$ , то  $I(f) = F + C\theta_0$ .

**Теорема 3.** 1) Для любых  $f, g \in D(I)$  справедливо равенство  $I(f + g) = I(f) + I(g)$ .

2) Для любого  $f \in D(I)$  и любого ненулевого  $\alpha \in \mathbb{R}$  справедливо равенство  $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ .

*Лемма.* Справедливы равенства:



$$\Delta\theta_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \gamma_i$$

при  $n \in \mathbb{N}$ .

**4. Возможные применения.** С каждым деревом можно связать многочлен — характеристический многочлен преобразования Кокстера (см.[1]). Важнейшей задачей, связанной с преобразованиями Кокстера является нахождение их спектральных свойств(см.[2]).

Коэффициенты характеристического многочлена преобразования Кокстера, связанного с деревом, — это некоторые числовые характеристики дерева. В [3] найдены формулы, выражающие четыре коэффициента этого многочлена (при  $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ ) через более простые числовые характеристики деревьев. Доказательства этих формул являются довольно громоздкими. При помощи разработанной нами техники можно эти доказательства существенно упростить, а также получать формулы для других коэффициентов.

### Литература

1. Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Успехи мат. наук. - 1973. - Т.28, вып.2 (170). - С.19-33.
2. Stekolshchik R. Notes on Coxeter Transformations and the McKay Correspondence. - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. - 239 p
3. Колмыков В. А., Меньшик В. В., Субботин В. Ф., Сумин М. В. Четыре коэффициента характеристического многочлена преобразования Кокстера // Мат. Замет., - 2003. - Т. 73, N 5. - С. 788-791.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВИБРАЦИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ <sup>1</sup>

©2022 Д. М. Коростелева

(Казань, КГЭУ; *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*)

Пусть ось балки длиной  $l$  занимает в равновесном горизонтальном положении отрезок  $\bar{\Omega} = [0, l]$  оси  $Ox$ ,  $\Omega = (0, l)$ . Обозначим через  $\rho = \rho(x)$  и  $E = E(x)$  линейную плотность и модуль упругости материала балки в точке  $x$ , через  $S = S(x)$  и  $J = J(x)$  — площадь поперечного сечения балки и момент инерции сечения в точке  $x$  относительно своей горизонтальной оси. Пусть торцы балки  $x = 0$  и  $x = l$  заделаны жёстко. Предположим, что в точках балки с координатами  $x^{(ij)} \in (0, l)$  упруго присоединены грузы (осцилляторы) с массами  $M_{ij}$  и коэффициентами жёсткости подвески  $K_{ij}$ ,  $\sigma_{ij} = K_{ij}/M_{ij}$ ,  $\sigma_i = \sigma_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r_i$ ,  $r_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \geq 1$ ,  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m < \infty$ .

Обозначим через  $w(x, t)$  отклонение от положения равновесия точки  $x$  оси балки в момент времени  $t$ , через  $\eta_{ij}(t)$  — отклонение от положения равновесия груза массой  $M_{ij}$  в момент времени  $t$ ,  $j = 1, 2, \dots, r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Собственные вибрации системы балка-осцилляторы определяются функциями  $w(x, t)$  и  $\eta_{ij}(t)$  вида

$$w(x, t) = u(x)v(t), x \in \Omega, \quad \eta_{ij}(t) = c_{ij}u(x^{(ij)})v(t), t > 0, \quad (1)$$

где  $v(t) = a_0 \cos \sqrt{\lambda}t + b_0 \sin \sqrt{\lambda}t$ ,  $t > 0$ ;  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_{ij}$ ,  $\lambda$  — вещественные постоянные,  $j = 1, 2, \dots, r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Для функций (1) выполняются уравнение колебания балки

$$(E(x)J(x)w_{xx}(x, t))_{xx} + \rho(x)S(x)w_{tt}(x, t) = f(x, t), x \in \Omega, \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов 20-31-90086, 20-08-01154.

и уравнения колебаний осцилляторов

$$M_i(\eta_{ij}(t))_{tt} + K_{ij}(\eta_{ij}(t) - w(x^{(ij)}, t)) = 0, \quad (3)$$

$j = 1, 2, \dots, r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $t > 0$ ,  $w_x(x, t) = \partial w(x, t)/\partial x$ ,  $w_t(x, t) = \partial w(x, t)/\partial t$ ,  $(\psi(t))_t = d\psi(t)/dt$ . Действие присоединённых осцилляторов на балку задаётся функцией:

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} K_{ij}(\eta_{ij}(t) - w(x^{(ij)}, t))\delta(x - x^{(ij)}), \quad (4)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. К уравнениям (1)–(4) добавляются условия закрепления на торцах балки:

$$w(0, t) = w_x(0, t) = w(l, t) = w_x(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

Формулировки подобных задач содержатся в работах [1–5].

Учитывая вид функций (1) в уравнениях колебаний осцилляторов (3), выводим  $c_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_{ij} - \lambda)$ ,  $\sigma_{ij} = K_{ij}/M_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Применяя (1) и (4), из соотношений (2) и (5) сформулируем следующую нелинейную задачу на собственные значения: найти числа  $\lambda$  и ненулевые функции  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , для которых выполняется уравнение

$$(EJu'')'' + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda}{\lambda - \sigma_i} \sum_{j=1}^{r_i} K_{ij}\delta(x - x^{(ij)})u = \lambda \rho S u, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

и граничные условия

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0. \quad (7)$$

Задача (6), (7) имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений отвечает полная ортонормированная система, составленная из собственных функций.

Дифференциальная задача на собственные значения (6), (7) приближается сеточной схемой метода конечных элементов с эрмитовыми конечными элементами произвольного порядка на регулярной неравномерной сетке. Исследуется скорость сходимости приближённых собственных значений и собственных функций.

### Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2005. – 440 с.
3. *Андреев Л. В., Дышко А. Л., Павленко И. Д.* Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 200 с.
4. *Solov'ev S. I.* Eigenvibrations of a bar with elastically attached load //Differ. Equations. – 2017. – V. 53. – No 3. – P. 409–423.
5. *Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I.* Investigation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded string //J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042010. – P. 1–5.

## ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ БИЛЛИАРДНЫМИ КНИЖКАМИ <sup>1</sup>

©2022 *А. А. Кузнецова*

(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова;  
*anastasiakuznecova0143@gmail.com*)

Известна интегрируемость бильярда в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик семейства

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ 21-11-00355 в МГУ имени М.В. Ломоносова

$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda)$  для  $0 < b < a$ . В.В. Ведюшкина ввела новый важный класс интегрируемых билиардных книжек, получающихся из плоских билиардов их склейками вдоль граничных рёбер, с указанием перестановок, диктующих правила перехода билиардного шара с одного листа билиярда на другой [1-2]. Такие столы-комплексы можно понимать и как плоские многослойные билиарды. Слоения Лиувилля систем на них классифицируются инвариантами Фоменко-Цишанга, т.е. графами-молекулами с особенностями-атомами в вершинах и числовыми метками, задающими склейки граничных 2-торов этих особенностей друг с другом. Подробнее теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, развитая А.Т.Фоменко и его соавторами, описана в [3].

В программной работе [4] А.Т.Фоменко сформулировал гипотезу о моделировании произвольных интегрируемых систем подходящими билиардами. В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой удалось доказать, что произвольные невырожденные особенности слоения (боттовские 3-атомы) и любая база слоения (граф с вершинами-атомами без меток) реализуются алгоритмически задаваемыми билиардными книжками. Каждый боттовский 3-атом (типичная бифуркация регулярных торов Лиувилля) является произведением 2-базы на окружность, возможно, с факторизацией по  $\mathbb{Z}_2$ .

Оказывается, гипотеза Фоменко справедлива и для некоторых гамильтоновых систем, чей интеграл не является боттовским на уровне энергии  $Q^3$ , т.е. имеет вырожденные особенности. В нашей работе приведём примеры реализации билиардными книжками бифуркаций слоений Лиувилля, 2-база которых содержит неморсовские мультиседла.

Рассмотрим элементарный плоский билиард  $A'_0$ , ограниченный гиперболой, эллипсом, фокальной прямой и вертикальной осью  $O_Y$ . Рассмотрим множество билиардных

книжек, склеенных ровно из трёх копий  $A'_0$ . Левая и правая граница каждого листа свободна (т.е. перестановка тождественная), а на фокальном отрезке и на дуге эллипса рассмотрим все возможные варианты перестановок из трёх элементов. Все книжки такого вида перечислены на рис. 1:

	id	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
id						
(12)			B	B	B	B
(23)		B		B	B	B
(13)		B	B		B	B
(123)	•	•	•	•	•	•
(132)	•	•	•	•	•	•

Рис. 1.

Столбцы таблицы соответствуют перестановкам на фокальном отрезке, а строки — перестановкам на дуге эллипса. В ячейке указан седловой 3-атом, содержащийся в слоении Лиувилля полученной книжки: серые ячейки соответствуют слоениям несвязных билиардов, остальные столы-комплексы связны. Точками в таблице отмечены столы, слоения Лиувилля билиярда на которых содержат неботтовские 3-атомы, а серым цветом — отсутствие 3-атомов, отличных от эллиптических атомов  $A$ .

**Теорема 1.** *Рассмотрим билиардные книжки, склеенные из трёх листов  $A'_0$ . В прообразе малой окрестности значения интеграла  $\lambda = b$  такие столы моделируют тривиальное слоение — для двух столов, боттовский 3-атом  $B$  — для 12 столов, и неботтовские мультиседловые 3-атомы для остальных 12 столов (примеры таких пар стола и 3-атома приведены на рис. 2).*

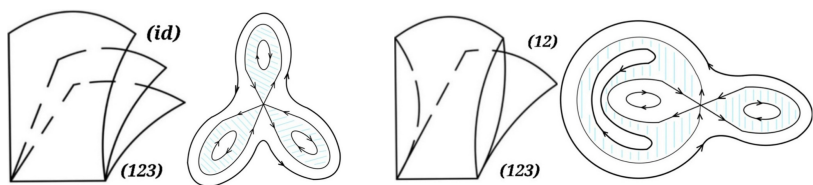


Рис.2

## Литература

1. Ведюшкина В. В. Интегрируемые билиарды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы. Докт. дисс., МГУ, Москва, 2020.
2. Фоменко А.Т., Ведюшкина В. В. Билиарды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности, Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, 2019, 3, 15–25
3. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, Т.1,2. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.
4. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Билиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 212:8 (2021), 89-150
5. Ведюшкина В. В., Фоменко А.Т., Харчева И. С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими билиардами, Докл. РАН, 479:6 (2018), 607-610
6. Ведюшкина В.В., Харчева И. С. Билиардные книжки моделируют все трёхмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56

# ПОСТРОЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ В БИНВОЛЮЦИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОАЛГЕБРЫ ЛИ

©2022 Ф. И. Лобзин

(Москва, МГУ, МЦФиПМ; *fiadat@mail.ru*)

Пусть  $\mathfrak{g}$  — алгебра Ли, соответственно  $\mathfrak{g}^*$  — сопряжённое пространство. Рассмотрим на  $\mathfrak{g}^*$  структуру:

$$\mathcal{A}_x(x) = (c_{ij}^k x_k), \quad x \in \mathfrak{g}^*.$$

Данный тензор определяет скобку Пуассона–Ли на  $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ :  $\{f, g\}(x) = \mathcal{A}_x(df(x), dg(x))$ . Функции  $f \in C^\infty$ , лежащие в ядре скобки Пуассона–Ли, называются функциями Казимира. Так же можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой с замороженным аргументом:

$$\mathcal{A}_a(x) = (c_{ij}^k a_k), \quad a, x \in \mathfrak{g}^*, \quad \{f, g\}_a(x) = \mathcal{A}_a(df(x), dg(x))$$

Алгебра Ли называется вполне интегрируемой, если на ней найдётся полный набор функций, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли. Полным считается набор, содержащий в себе  $n$  функционально независимых функций, где  $n$  определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}).$$

Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов. Во второй половине прошлого века была сформирована гипотеза, касающиеся существования полных наборов в инволюции.

**Гипотеза 1 (доказана)** *Гипотеза Мищенко — Фоменко.*

*На двойственном пространстве  $\mathfrak{g}^*$  любой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  существует полный набор полиномов в инволюции относительно  $\{\cdot, \cdot\}$ .*



Для построения таких наборов удобно пользоваться методом сдвига аргумента. Отметим, что получившиеся сдвигом наборы будут также в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом, так что интересно рассмотреть естественное обобщение гипотезы 1, предложенное в [1].

**Гипотеза 2** *Обобщённая гипотеза Мищенко — Фоменко. Для любой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , для всех регулярных  $a$  из коалгебры на  $\mathfrak{g}^*$  существует полный набор полиномов в бинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно  $\{\cdot, \cdot\}$  и  $\{\cdot, \cdot\}_a$ .*

Полученные при применении метода сдвига аргумента наборы являются полными не для всех алгебр Ли. Также эти наборы функционально независимы не для всех  $a$ .

Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см. [2]), но полученные его алгоритмом наборы не всегда оказываются в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Обобщённая гипотеза Мищенко—Фоменко доказана, например, для полупростых алгебр Ли (см. [1]). Несмотря на то, что обобщённая гипотеза была сформулирована только для регулярных сдвигов, в данной работе эта задача рассмотрена и для сингулярных сдвигов тоже.

Существует критерий, по которому можно определить полноту семейства, построенного сдвигом аргумента:

**Теорема 2 (Критерий Болсинова)** *Семейство многочленов, полученных сдвигом на элемент  $a$  полно тогда и только тогда, когда существует прямая  $x + \lambda a$ , которая не пересекает множество сингулярных элементов.*

В работе рассмотрено обобщение этой теоремы:

**Теорема 3** Набор порождающих для семейства функций, полученных сдвигом вдоль элемента  $a \in \mathfrak{g}^*$ , состоит из

$$\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim(\text{Ann}(a))}{2}$$

функций тогда и только тогда, когда

- 1) Существует  $x \in \mathfrak{g}^*$  такой, что плоскость, натянутая на  $x, a$ , без прямой  $\lambda a$  состоит только из регулярных элементов,
- 2)  $\text{ind}(\text{Ann}(a)) = \text{ind } \mathfrak{g}$ .

При помощи него был получен метод построения полных биинволютивных наборов для сингулярных элементов алгебры Ли:

**Теорема 4** Пусть для некоторого сингулярного  $a$  из коалгебры Ли верны условия теоремы 2. Тогда набор многочленов, полученных сдвигом на  $a$ , дополняется инволютивным набором для  $\text{Ann}(a)$  до полного набора в биинволюции.

Следствием этой теоремы является, например, тот факт, что на всех полупростых алгебрах Ли существуют полные наборы в биинволюции для всех сингулярных элементов.

### Литература

1. Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras //Transformation Groups. – 2016. – Т. 21. – №. 1. – С. 51-86.
2. Sadetov S. T. A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture //Doklady Mathematics. – Pleiades Publishing, Ltd., 2004. – Т. 70. – №. 1. – С. 635-638.

# О БОЛЬШИХ СЕМЕЙСТВАХ АФФИННО ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{R}^4$ .<sup>1</sup>

©2022 А. В. Лобода

(Воронеж, ВГТУ; lobvgasu@yandex.ru)

©2022 Б. М. Даринский

(Воронеж, ВГУ darinskii@mail.ru)

В связи с задачей описания аффинно однородных гиперповерхностей пространства  $\mathbb{R}^4$  (см., например, [1]) в [2] был введён класс  $\mathcal{A}_E$  3-мерных **абелевых** подалгебр Ли алгебры  $gl(4, \mathbb{R})$ , **содержащих единичную матрицу**.

Ниже мы рассматриваем любую квадратную матрицу  $\|a_{ij}\|$  4-го порядка как линейное векторное поле в  $\mathbb{R}^4$  вида  $E_k = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ , а подалгебры  $gl(4, \mathbb{R})$  — как алгебры линейных векторных полей. Семейство алгебр мы называем *нетривиальным*, если любая алгебра из этого семейства имеет 3-мерные орбиты в  $\mathbb{R}^4$ , отличные от цилиндров.

**Теорема 1.** *В множестве  $\mathcal{A}_E$  имеется пять **нетривиальных** семейств алгебр Ли, каждое из которых описывается не менее чем двумя вещественными параметрами. Базисы этих семейств имеют следующий вид:*

$$S_1 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$S_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и Московского Центра фундаментальной и прикладной математики (МГУ им. М.В. Ломоносова).

$$S_3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & \nu_2 & 1 \\ 0 & \nu_1 & 0 & \nu_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$S_4 : \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$S_5 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \mu_1 & 0 & 1 \\ \mu_2 & a & 0 & 0 \\ -a & \mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

**Предложение 1.** *3-мерные орбиты всех алгебр из теоремы 1 имеют в общих точках нулевую гауссову кривизну. Вторая квадратичная форма этих гиперповерхностей в любой из таких точек имеет сигнатуру  $(+, -, 0)$ .*

Ниже дано описание орбит алгебр (1)-(4).

**Теорема 2.** *Орбитами алгебр (1)-(4) являются следующие аффинно однородные поверхности пространства  $\mathbb{R}^4$ :*

$$x_4 = x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{1-(\lambda+\mu)} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \quad (6)$$

$$x_2 = x_1^\lambda |x_3 + ix_4|^{(1-\lambda)} e^{b \arg(x_3 + ix_4)}, \quad (7)$$

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = (x_2^2 - \nu_1 x_2 x_4 - \nu_2 x_4^2) \ln \left( \frac{x_2 - a_2 x_4}{x_2 - a_1 x_4} \right), \quad (8)$$

где  $\nu_1 = a_1 + a_2$ ,  $\nu_2 = -a_1 a_2$ ,  $a_1 > a_2$ ;

$$\ln \frac{|x_1 + ix_2|}{|x_4 + ix_3|} + b \arg(x_1 + ix_2) - \lambda \arg(x_4 + ix_3) = 0. \quad (9)$$

**Замечание 1.** Трубки в пространстве  $\mathbb{C}^4$  над такими поверхностями являются 2-невырожденными голоморфно однородными гиперповерхностями.

Отметим, что семейства поверхностей (6) и (7) являются подмножествами 3-параметрических семейств аффинно однородных гиперповерхностей

$$x_4 = x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\nu \quad \text{и} \quad x_2 = x_1^\lambda |x_3 + ix_4|^\nu e^{\mu \arg(x_3 + ix_4)}, \quad (10)$$

обобщающих известные однородные гиперповерхности в  $\mathbb{R}^3$ .

Наиболее интересными являются орбиты семейства (5).

**Предложение 2.** При  $b_{10} \neq 1$  орбиты любой алгебры из (5), проходящие через точку  $Q(0, 1, 0, 1)$ , описываются интегралами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w'(r) = \frac{(-b_9 r^2 - 2b_{10} r + b_9) w^3 + (r - b_1) w^2 - w}{(1 + r^2)(b_9 r + b_{10}) w^2 - (1 + r^2) w + r}. \quad (11)$$

При  $b_1 = b_9 = b_{10} = 0$  интегрирование уравнения (11) и алгебры (5) приводят к однородным гиперповерхностям

$$\frac{(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2}{(x_3^2 + x_4^2)^2} - \frac{2(x_2 x_4 + x_1 x_3) - (x_1 x_4 - x_2 x_3)}{x_3^2 + x_4^2} = C. \quad (12)$$

В целом же представляется естественной гипотеза о существовании у семейства (5) орбит, которые **невозможно** описать элементарными функциями.

## Литература

1. Можей Н. П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 7. – С. 41-52.

2. Лобода А. В., Даринский Б. М. Об орбитах в  $\mathbb{R}^4$  абелевой 3-мерной алгебры Ли // Уфимская осенняя математическая школа – 2021 : Материалы международной научной конференции. – Уфа: Аэтерна, 2021. – Т. 1. – С. 239-241.

# О РЕАЛИЗУЕМОСТИ 3-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ <sup>1</sup>

©2022 *А. В. Лобода*

(Воронеж, ВГУ; *lobugasu@yandex.ru*)

©2022 *В. К. Каверина*

(Москва, Финансовый университет при  
правительстве РФ; *vkaverina@fa.ru*)

В пространстве  $\mathbb{R}^4$  рассматриваются представления трёх алгебр Ли размерности 3, имеющих следующие коммутационные соотношения (см. [1]):

$$g_{3,2} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2;$$

$$g_{3,3} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2;$$

$$g_{3,4} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = he_2, \quad -1 \leq h < 1, h \neq 0.$$

При некотором условии невырожденности алгебры линейных векторных полей, отвечающие алгебрам Ли достаточно большой размерности, имеют орбитами аффинно однородные гиперповерхности в  $\mathbb{R}^4$ .

К такому классу однородных многообразий относятся, например, цилиндры над однородными поверхностями из  $\mathbb{R}^3$ . Наша работа имеет целью изучение не сводимых к цилиндрам аффинно однородных поверхностей, имеющих в точности 3-мерные алгебры симметрий.

В целом семейство таких поверхностей является весьма обширным, как показано в работе [2], связанной с орбитами в  $\mathbb{R}^4$  3-мерной абелевой алгебры. Ситуация с тремя обсуждаемыми здесь алгебрами отличается от абелева случая.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена за счёт гранта РФФИ, проект 20-01-00497, и Московского Центра фундаментальной и прикладной математики (МГУ им. М.В. Ломоносова)

**Предложение 1.** *3-мерная орбита линейного представления в  $\mathbb{R}^4$  алгебры  $g_{3,2}$  может быть только цилиндрической.*

Идея доказательства этого утверждения, как и работы [2], связана с фиксацией простейшего (жорданова) вида поля  $e_1$  — одного из базисных векторных полей реализуемой 3-мерной алгебры. Для большинства из 20 типов жордановых форм коммутирование двух базисных полей оказывается невозможным совместить с другими коммутационными соотношениями алгебры  $g_{3,2}$ . Для тройки алгебр  $g_{3,2}$ ,  $g_{3,3}$ ,  $g_{3,4}$  относительно содержательными оказываются лишь следующие виды матрицы  $e_1$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (1)$$

При этом для алгебры  $g_{3,2}$  все виды, кроме первой матрицы из (1), оказываются противоречивыми. Для этой исключительной матрицы из коммутационных соотношений алгебры  $g_{3,2}$  легко выводится условие  $\lambda = 0$ , означающее цилиндричность любой её орбиты.

Для алгебр  $g_{3,3}$  и  $g_{3,4}$  совпадение  $e_1$  с первой матрицей из (1) аналогично приводит к цилиндричности всех орбит. Однако здесь ситуация оказывается более содержательной.

**Теорема 1.** *При совпадении  $e_1$  с второй матрицей из (1) имеется 4 различных семейства алгебр Ли векторных полей в  $\mathbb{R}^4$  со структурой  $g_{3,3}$  и 5 семейств — со структурой  $g_{3,4}$ .*

**Предложение 2.** *Все реализации алгебры Ли  $g_{3,3}$  линейными векторными полями в  $\mathbb{R}^4$ , для которых одному из полей соответствует третья матрица из (1), описываются*

(с точностью до матричных подобий) базисами следующего вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

**Замечание.** Интегрирование алгебр с базисом (2) приводит к однопараметрическому семейству однородных поверхностей

$$x_3x_4 + \varepsilon_1x_1^2 + \varepsilon_2x_2^2 = x_3^A \quad (A \in \mathbb{R}),$$

имеющемуся в списке работы [3]. Каждая из этих поверхностей имеет размерность алгебры симметрий, большую чем 3.

Интегрирование остальных полученных семейств алгебр Ли и проверка размерностей реальных алгебр симметрий их орбит требует значительных затрат времени и усилий.

### Литература

1. Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. – 1963. – № 1. – С. 114-123.
2. Лобода А. В., Даринский Б. М. Об орбитах в  $\mathbb{R}^4$  абелевой 3-мерной алгебры Ли // Уфимская осенняя математическая школа – 2021. – Уфа: Аэтерна, 2021. – Т. 1. – С. 239-241.
3. Можей Н. П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 7. – С. 41-52.



# О ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ РАССТОЯНИЯМИ С РЕБРОМ 1, 2 ИЛИ 3

©2022 *Е. А. Лушина*

(Воронеж, ВГУ; *ekaterinalushina18@gmail.com*)

Рассматривается множество точек  $M$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  такое, что расстояние между любыми двумя точками из  $M$  есть целое число. Всякое бесконечное множество  $M$  содержится в некоторой прямой  $L \subset \mathbb{R}^2$  [1, 2].

**Определение 1.** Мощностью множества  $M$  (обозначается  $\#M$ ), состоящего из конечного числа элементов, называется количество элементов этого множества.

Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\mathfrak{M}_n$  множество таких множеств  $M$ , что  $\#M = n$  и  $M \not\subset L$  для любой прямой  $L \subset \mathbb{R}^2$ .

**Определение 2.** Ребром множества  $M$  называют любой отрезок  $AB$ , где  $A, B \in M$ .

**Определение 3.** Характеристикой множества  $M \in \mathfrak{M}_n$  называется свободное от квадратов число  $p$  такое, что для любых  $A, B, C \in M$  площадь треугольника  $ABC$  соизмерима с  $\sqrt{p}$ . Пишут:  $\text{char } M = p$ .

Про множества  $M \in \mathfrak{M}_n$  известно следующее:

- Для любого  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  верно  $\mathfrak{M}_n \neq \emptyset$  [3, теорема 2].
- Для любой мощности  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  и любого свободного от квадратов числа  $p$  существует множество  $M \in \mathfrak{M}_n$  такое, что  $\text{char } M = p$  [3, теорема 5].
- Для любой мощности  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  и любого  $k \in \mathbb{N}$  существует несжимаемое (prime) множество  $M \in \mathfrak{M}_n$ , содержащее ребро  $k$  [4].

- Не существует множества  $M \in \mathfrak{M}_n$  характеристики 1 с ребром 1 [3, утверждение 6].

Возникает вопрос о существовании множества  $M \in \mathfrak{M}_n$  с заданными характеристикой и минимальным ребром. При рассмотрении множеств  $M \in \mathfrak{M}_3$  удобно ввести систему координат (см., напр., [3]):  $A(-m/2; 0)$ ,  $B(m/2; 0)$ ,  $C(a_i/2m; b_i\sqrt{p}/2m)$ , где  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ ,  $m$  — длина любого ребра  $M$ . Сформулируем основные результаты работ [5-7].

**Утверждение 1.** [5, утверждение 3] Всякое множество  $M \in \mathfrak{M}_3$  с минимальным ребром 1 имеет характеристику вида  $p = 4k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , где  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ .

В частности, ранее было доказано [5, 6], что не существует множества  $M \in \mathfrak{M}_3$  характеристики 2, 5 или 6 с ребром 1.

**Утверждение 2.** [5, утверждение 4] Для всякой характеристики  $p > 1$  существует бесконечное семейство множеств  $\{M_j\} \subset \mathfrak{M}_3$  с ребром 2 таких, что  $\text{char } M_j = p$ .

Для рёбер  $|AB| \geq 2$  третья точка может лежать не только на серединном перпендикуляре к ребру  $AB$ , но и на гиперболлах специального вида [2].

**Утверждение 3.** [7, утверждение 1] Всякое множество  $M = \{A, B, C\} \in \mathfrak{M}_3$  с минимальным ребром  $|AB| = 2$ , где  $|AC| - |BC| = 1$ , имеет характеристику  $p = 8k + 7$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Следствие 1.** Не существует множества  $M \in \mathfrak{M}_3$ ,  $\text{char } M = 1$  с ребром 2.

**Утверждение 4.** [7, утверждение 2] Всякое множество  $M = \{A, B, C\} \in \mathfrak{M}_3$  с минимальным ребром  $|AB| = 3$ , где  $|AC| - |BC| = 0$ , или  $|AC| - |BC| = 2$ , имеет характеристику  $p = 4k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Замечание 1.** В случае множества  $M = \{A, B, C\} \in \mathfrak{M}_3$  с ребром  $|AB| = 3$  и  $|AC| - |BC| = 1$ , характеристика может принимать значения, отличные от  $4k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Полученные результаты планируется применить к улучшению оценок, построенных в [7].

### Литература

1. *Erdős P.* Integral distances // Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. — Vol. 51 — No 12 . — P. 996.
2. *Anning N. H., Erdős P.* Integral distances // Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. — Vol. 51. — No. 8. — pp. 598-600.
3. *Авдеев Н. Н., Семенов Е. М.* Множества точек с целочисленными расстояниями на плоскости и в евклидовом пространстве // Математический форум (Итоги науки. Юг России). — 2018. — Т. 12. — С. 217-236.
4. *Zvolinsky R. E.* Facher integral point sets with particular distances of arbitrary cardinality // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. — 2021. — С. 668-674.
5. *Лушина Е. А., Авдеев Н. Н.* О характеристике плоских множеств с целочисленными расстояниями с рёбрами 1 и 2 // Вестник факультета ПММ. — 2021. — Вып. 15. — С. 117–123.
6. *Лушина Е. А.* О существовании специальных множеств с целочисленными расстояниями с ребром 1 // 71-я Международная студенческая научно-техническая конференция. — 2021. — С. 595-598.
7. *Лушина Е. А.* О характеристике плоских множеств с целочисленными расстояниями с малым ребром. — в печати.

# НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С $(s, k)$ - УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

©2022 А. Н. Малютина

(Томск, Национальный исследовательский Томский  
государственный университет; *nmd@math.tsu.ru*)

По известной теореме вложения С. Л. Соболева [1], если  $G$  ограниченная область евклидова пространства  $R^n$  и функция  $f : G \rightarrow R^1$ ,  $f \in W_{p,loc}^1(G)$ ,  $p > n$ , то она непрерывна в  $G$ . Если  $1 < p \leq n$  этого свойства, вообще говоря, может и не быть. В настоящей работе мы обобщаем результаты, полученные в [2] и находим необходимые условия, при которых подкласс отображений с  $s(s, k)$  - усреднённой характеристикой [3]  $1 < s \leq n$  и функция  $k(t)$  определена при  $t > 0$ , положительна, не возрастает и  $\lim_{t \rightarrow 0+} k(t) = +\infty$  функция будет непрерывными. Примеры подклассов таких отображений, с указанными выше свойствами приведены в [3,4].

**Определение.** Пусть область  $G \subset R^n$ ,  $f : G \rightarrow R^n$ ,  $f \in W_n^1(G)$ ,  $1 < s \leq n$ , пусть для любого  $y \in G$  выполняется неравенства

$$\int_G (\lambda(x, f))^s k(|x - y|) d\sigma_x < M, \quad (1)$$

и

$$\int_G (\lambda^*(x, f))^{s^*} k(|x - y|) d\sigma_x < M^*, \quad (2)$$

В случае 1 будем говорить, что отображение с  $(s, k)$  - усреднённой характеристикой, а в случае 2 – отображение с  $(s^*, k)$  - усреднённой характеристикой, где функция  $f \in W_n^1(G, k, M)$ ,  $1 < s < n$  [3].

**Теорема.** Пусть  $f$  — отображение с  $(s^*, k)$ -усреднённой характеристикой и выполнено неравенство

$$\int_0^0 k^{\frac{1}{s^*}}(t) t^{\frac{n}{s^*}} dt < +\infty, \quad a > n - p. \quad (3)$$

Если  $f \in W_{n,loc}^1(G)$ ,  $f^{-1} \in W_{n,loc}^1(G)$  и для  $1 < s \leq n$  и любой точки  $y \in G$  выполняется неравенство

$$I \left( \int_G \left( \frac{|\Delta f|^n}{J(x, f)} \right)^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) < M, \quad (4)$$

если  $\alpha > n - s$ , то на любом компакте  $A$  из области  $G$  функция  $f$  эквивалентна некоторой непрерывной функции.

*Доказательство.* Доказательство теоремы следует из теоремы Арцела. Для этого построим равностепенно непрерывную и равномерно ограниченную на  $K$  последовательность функций, сходящуюся к функции  $f$  почти везде в  $G$ . Рассмотрим последовательность  $\varepsilon$  — усреднений функции  $f$  по С.Л. Соболеву при достаточно малых  $\varepsilon$  [1] называется функция

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &= \varepsilon^{-n} \int_{R^n} \varphi \left( \frac{x - u}{\varepsilon} \right) f(u) du = \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi \left( \frac{u}{\varepsilon} \right) f(x - u) du. \end{aligned}$$

Из [1] следует, что вне области  $G$  функция  $f_\varepsilon = 0$  и функция  $f_\varepsilon$  бесконечно дифференцируема в  $\mathcal{R}^n$  и  $\|f_\varepsilon - f\|_p, \mathcal{R}^n \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и что  $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_\varepsilon$ . Существуют открытые множества  $G_1$  и  $G_2$  такие, что компакт  $K \subset G_1 \subset G_2$ ,  $\overline{G_1} \subset G_2$ ,  $\overline{G_2} \subset G$ , где  $\overline{G_i}$  замыкание множества  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ . Покажем, что для достаточно малых  $\varepsilon$

$$I \left( \int_G \frac{|\Delta f|^n}{J(x, f)} \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) < M, \quad y \in G_2.$$

Используя обобщённое неравенство Минковского [1] и условие 1 получим

$$\begin{aligned}
& I \left( \int_{G_2} \frac{|\Delta f|^n}{J(x, f)} \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) \\
&= \left[ \int_{G_2} \varepsilon^{-n} \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi \left( \frac{u}{\varepsilon} \right) \frac{|\Delta f(x - u)|^n}{J(x, f)} du \|x - y\|^\alpha d\sigma_x \right]^{\frac{1}{s}} \leq \\
&\leq \varepsilon^{-n} \int_{B(0, \varepsilon)} \left[ \int_{G_2} \varphi \left( \frac{u}{\varepsilon} \right) \left( \frac{|\Delta f(x - u)|^n}{J(x, f)} \right)^s \|x - y\|^\alpha d\sigma_x \right]^{\frac{1}{s}} du \leq \\
&\leq \varepsilon^{-n} M \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi \left( \frac{u}{\varepsilon} \right) = M,
\end{aligned} \tag{5}$$

если  $(y - u) \in G$ , т.е. при  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  меньше расстояния от границы множества  $G_2$  до границы  $G$ . Из неравенства 5 следует, что  $\forall y \in G_2$  выполнено неравенство:

$$\left( \int_G \frac{|\Delta f|^n}{J(x, f)} \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right)^s < n^{\frac{n}{2}} M,$$

если  $\mathcal{B}(y, r) \subset G_2$ .

Из 3 следует, что непрерывные функции  $f_\varepsilon$  при  $\varepsilon < \varepsilon_0$  удовлетворяет условию леммы Ч. Морри [3], поэтому для любых точек  $x, y$  таких, что шар  $B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{3}{2}|x-y|\right) \subset G_2$ ;  $|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| < N|x-y|^\beta$ , где  $\beta = \frac{\alpha-n+s}{s}$ ,  $N$  зависит от  $M, n, s, \alpha$ .

Таким образом, семейство функций  $f_\varepsilon$  при  $\varepsilon < \varepsilon_0$  на  $K$  равномерно непрерывно. Покажем, что функции  $f_\varepsilon$  при  $\varepsilon < \varepsilon_0$  на  $K$  ограничены одним числом. Существует функция  $\eta \in D$  такая, что её носитель лежит в  $G_2$  и  $\eta(x) = 1$  для  $x \in G_1$  [3].

Функция  $f\eta \in W_p^1(\mathcal{R}^n)$ . Доопределим  $f \equiv 0$  вне области  $G$ . Для  $\varphi \in D$  имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{R^n} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx &= \int_G \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx = \\
 &= \int_G \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx + \int_G \eta \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} dx \right) = \\
 &= \int_G \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx - \int_G f \eta \varphi \frac{\partial (\eta \varphi)}{\partial x_i} dx \right) = - \int_G f \eta \varphi \frac{\partial (\varphi)}{\partial x_i} dx.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Из 6 следует, что обобщённая производная

$$\frac{\partial (\eta, f)}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{7}$$

Покажем, что для функции  $\eta f$  следует

$$I \left( \int_G \left| \frac{|\Delta \eta f|^n}{J(x, f)} \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) < M \quad \forall y \in K.$$

Из 7 следует, что

$$\begin{aligned}
 &I \left( \int_G \left| \frac{|\Delta \eta f|^n}{J(x, \eta f)} \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) \leq \\
 &\leq I \left( \int_G \left| \frac{|\Delta \eta|^n}{J(x, \eta f)} f \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) + \\
 &+ I \left( \int_G \left| \eta \frac{|\Delta f|^n}{J(x, \eta f)} \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) \leq \\
 &\leq I \left( \int_G \left| \frac{|\Delta \eta|^n}{J(x, \eta f)} f \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right)_{y \in G_2} + \\
 &+ I \left( \int_G \left| \eta \frac{|\Delta f|^n}{J(x, f)} \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right)_{y \in G_2} \leq \\
 &\leq Ad_s^{-\alpha} B + CM = M_1,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $A = \max \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad x \in G_2$ ,  $C = \max \eta(x) \quad x \in G_2$ ,  $d$  — расстояние между границами  $G_1$  и  $G_2$ ;  $= \|f\|_{p,G}$ . Известно [6], что функция  $\varphi \in D$  удовлетворяет условиям теоремы и, применяя условие Гёльдера и оценки 6 получаем.

$$\begin{aligned} |\eta(x) f_\varepsilon(x)| &= \left| \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_{R^n} \frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial x_i}(x-y) \frac{y_i}{|y|^n} dy \sigma_y \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_{G_2} \frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \sigma_y}{|y-x|^{n-1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{i=1}^n \left( \int_{R^n} \left| \frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y) \right|^p |y-x|^{-\alpha} d\sigma_y \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ &\quad \times \left( \int_{G_2} |y-x|^m d\sigma_y \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M_2, \end{aligned}$$

где  $m = \frac{np-p-a}{p-1}$ ,  $m+n > 0$ ,  $M_2$  зависит от  $M_1$ ,  $n$  и диаметра области  $G_2$ .

Для  $x \in K$   $\eta(x) \nabla f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$  и  $|f_\varepsilon| \leq M_2$ , следовательно равномерно ограничена. Таким образом, на  $K$  семейство функций  $f_\varepsilon, < \varepsilon_0$  равностепенно непрерывно, равномерно ограничено, поэтому по теореме Арцеля из семейства можно выделить подпоследовательность функций  $|f_n(x)|$  равномерно сходящуюся на  $K$  к некоторой непрерывной функций  $\Psi$ . Таким образом, получившиеся функции  $f$  и  $\Psi$  эквивалентны.

**Замечание.** Построенные примеры показывают, что в рассматриваемых подмножествах функций класса  $W_p^1(G)$  с  $p = n$  существуют функции не принадлежащие ни одному из классов  $W_l^1(G)$  при  $l > n$ .

### Литература

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твёрдых тел / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, — 1977. — 384 с.



2. *Бырдин А.П.* Метод рядов Вольтерра в динамических задачах нелинейной наследственной упругости / А.П. Бырдин, М.И. Розовский // Изв. АН Арм. ССР – 1985. Т. 38. №5. – С. 49 – 56.

## ЗАДАЧА ТИПА ДАРБУ ДЛЯ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

©2022 *А. Н. Миронов*

(Елабуга, КФУ; Самара, СамГТУ; *miro73@mail.ru*)

©2022 *А. П. Волков*

(Самара, СамГТУ; *alex.volkov85@gmail.com*)

Рассматривается система уравнений с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x, y)v_x + b_1(x, y)u + c_1(x, y)v + f_1(x, y), \\ v_{yy} = a_2(x, y)u_y + b_2(x, y)u + c_2(x, y)v + f_2(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области  $G$  плоскости  $(x, y)$  выполняются включения  $a_i \in C^2$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $f_i \in C^1$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Решение системы (1) класса  $u, v \in C^1(G)$ ,  $u_{xx}, v_{yy} \in C(G)$  назовём регулярным в  $G$ .

Различные задачи с условиями на характеристиках для системы (1) исследовались в работах [1], [2] с использованием метода Римана [3]. Рассмотрим следующую задачу.

**Задача D:** найти в области  $D_0 : 0 < y < x < T$ , регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u(y, y) &= \varphi_1(y), & (u_x - a_1 v)(y, y) &= \varphi_2(y), \\ v(x, 0) &= \psi_1(x), & (v_y - a_2 u)(x, 0) &= \psi_2(x), \end{aligned}$$

где  $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1([0, T])$ ,  $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1([0, T])$ .

Доказаны существование и единственность решения, предложен способ определения матрицы Римана–Адамара задачи  $D$ , опирающийся на определение матрицы Римана [1]–[3]. Построено решение задачи  $D$  в терминах матрицы Римана–Адамара.

### Литература

1. *Миронова Л. Б.* О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.–мат. науки. – 2006. – Вып. 43. – С. 31–37.
2. *Жегалов В. И., Миронова Л. Б.* Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 3. – С. 12–21.
3. *Миронова Л. Б.* О методе Римана в  $R^n$  для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 1. – С. 34–39.

## РАЗРАБОТКА ПО ДЛЯ СЖАТИЯ С ПОТЕРЯМИ ФОТОГРАФИЙ ПЕЧАТНОГО И РУКОПИСНОГО ТЕКСТА

©2022 *Е. А. Момот*

(Воронеж, ВГУ; *y-kate@ukr.net*)

Проект «koTspect» — это программа для неравномерного сжатия с потерями фотографий учебников и конспектов [1].

Программа обрабатывает данные о цвете изображения и с их помощью определяет, какие области изображения не содержат важной информации. Математическая модель основана на сравнении среднеквадратичных отклонений [2] цветовых параметров RGB в небольших областях (плитках) с аналогичными данными всего изображения (или его части, если выбрана раздельная обработка) и некоторыми заданными порогами.

Если среднеквадратичное отклонение по цветовым параметрам в рассматриваемой области ниже заданного порога, это значит, что область почти однородная. Такая область считается не содержащей важной информации и закрашивается её средним цветом.

Отдельно обрабатываются области на фото, не лежащие на листе бумаги. Как правило, они находятся с краю и имеют не «бумажный» цвет, который мы определяем по средним цветовым данным изображения. Таким образом, если какой-нибудь цветовой параметр области отклоняется от среднего параметра изображения более чем на произведение среднеквадратичного отклонения по этому параметру на заданный порог и при этом есть непрерывный путь по другим не «бумажным» плиткам к краю изображения, область считается чужеродной и, следовательно, также не содержащей важной информации. Закрашиваются эти плитки средним цветом ближайших бумажных плиток.

Условие на наличие непрерывного пути по не «бумажным» плиткам до края картинки позволяет сохранить возможные цветные рисунки на самом листе. Закрашивание цветных плиток начинается от края листа по спирали, что позволят получить двовольно плавные и даже почти красивые цветовые переходы.

Совместимость обработки «koTspect» с кодированием в JPEG и другими методами сжатия [3 – 5] позволяет получить выигрыш в размере до двух раз. Подробнее о том, как пользоваться программой и о возможных результатах, см. [6].

Основные функции программы написаны на языке JavaScript (NodeJS). В работе с файлами и настройках сервера также используются пакеты и утилиты на других языках (напр. `bash` для перезагрузки сервера). В разработке веб-интерфейса применяется стандартный набор инстру-

ментов: HTML+CSS+JS. Имеется и консольный интерфейс: программу можно скачать на компьютер и запускать обработку файлов через командную строку.

Программа бесплатна и доступна для использования по адресу: <http://391701-cn25543.tmweb.ru/webui/index.html>, а также для скачивания: <https://github.com/Aisse-258/koTspect/archive/refs/heads/master.zip>.

Исходный код опубликован под открытой лицензией GPL-3.0 [7] и доступен по адресу [8].

### Литература

1. *Момот Е. А.* О некоторых алгоритмах сжатия с потерями фотографий печатного и рукописного текста (проект «koTspect») // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2021. – В. 15. – С. 124–132.
2. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Введение в математическую статистику. — М. : Издательство ЛКИ, 2010.
3. *Самбулов Д.* Сравнительный анализ форматов файлов электронных книг // International Journal of Open Information Technologies. – 2013. – V. 1. – No. 3.
4. *Al-Ani M. S., Awad F. H.* The JPEG image compression algorithm // International Journal of Advances in Engineering & Technology. – 2013. – Т. 6. – №. 3. – С. 1055.
5. *Raid A. M. et al.* Jpeg Image Compression Using Discrete Cosine Transform – A Survey // International Journal of Computer Science and Engineering Survey. – 2014. – Т. 5. – №. 2. – С. 39.
6. *Момот Е. А.* О практической применимости некоторых алгоритмов сжатия с потерями фотографий печатного и рукописного текста (проект «kotspect») // XX Всероссийская молодёжная школа-конференция «Лобачевские чтения — 2021». Сборник трудов. – 2021. – С. 67–70.

7. GNU general public license. Version 3, 29 June 2007 (Стандартная общественная лицензия GNU. Версия 3, от 29 июня 2007 г.)

8. Aisse-258/koTspect, URL: <https://github.com/Aisse-258/>  
koTspect (дата обращения: 10.01.2021)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

©2022 Э. Мухамадиев

(Вологда, ВоГУ; [emuhamadiev@rambler.ru](mailto:emuhamadiev@rambler.ru))

©2022 А. Н. Наимов

(Вологда, ВоГУ; [naimovan@vogu35.ru](mailto:naimovan@vogu35.ru))

Рассмотрим разрешимость периодической задачи для нелинейного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k_0^2 + l_0^2)u = \mu F(x, y, u, \mu), \quad (x, y) \in \Pi, \quad (1)$$

$$u(0, y) = u(2\pi, y), \quad u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad x, y \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

где  $\Pi = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ ,  $k_0, l_0$  — фиксированные натуральные числа,  $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ ,  $F : \bar{\Pi} \times \mathbb{C} \times [-\mu_0, \mu_0] \mapsto \mathbb{C}$  — непрерывное отображение,  $\mathbb{C}$  — комплексная плоскость. Решением задачи (1), (2) назовём комплекснозначную функцию  $u \in C(\bar{\Pi})$ , которая вместе с частными производными второго порядка из  $L_2(\Pi)$  удовлетворяют уравнению (1) и условиям (2).

Исследование задачи (1), (2) затруднено тем, что главная линейная часть уравнения необратима. Для исследования разрешимости данной задачи применён новый метод, в котором сочетаются идея метода Понтрягина из теории автономных систем на плоскости [1, 2] и методы вычисления вращения векторных полей [3, с. 135-157]. Идея метода

Понтрягина заключается в том, что с помощью нелинейного возмущения выделяется определённое периодическое решение соответствующей линейной системы и посредством этого решения доказывается существование цикла у нелинейной автономной системы при малых значениях параметра. Данная идея в настоящей работе реализована применительно к периодической задаче (1), (2). В отличие от метода Понтрягина не предполагается дифференцируемость нелинейного отображения  $F$  и применяются методы вычисления вращения векторных полей. Разработанный метод ранее применён авторами в работах [4, 5] при исследовании других классов нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений.

Введём следующие обозначения:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi, \eta) \overline{v(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad \|v\|^2 = \langle v, v \rangle,$$

$$\psi_{kl}(x, y) = e^{i(kx+ly)}, \quad c_{kl}(v) = \langle v, \psi_{kl} \rangle, \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$J = \{(k, l) : k, l - \text{целые}, k^2 + l^2 = k_0^2 + l_0^2\},$$

$$\tilde{E}_1 = \{v \in L_2(\Pi) : c_{kl}(v) = 0, (k, l) \notin J\},$$

$$\tilde{\Phi}(v) = \sum_{(k,l) \in J} \langle F(\cdot, \cdot, v, 0), \psi_{kl} \rangle \psi_{kl}.$$

Предположим, что существуют  $v_1^* \in \tilde{E}_1$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что

- 1)  $\tilde{\Phi}(v_1^*) = 0$  и  $\tilde{\Phi}(v_1) \neq 0$  при  $0 < \|v_1 - v_1^*\| \leq \varepsilon$ ;
- 2)  $\gamma(\tilde{\Phi}, \tilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*)) \neq 0$ , где  $\gamma(\tilde{\Phi}, \tilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*))$  — вращение конечно-мерного векторного поля  $\tilde{\Phi} : \tilde{E}_1 \mapsto \tilde{E}_1$  на сфере

$$\tilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*) = \{v \in \tilde{E}_1 : \|v_1 - v_1^*\| = \varepsilon\}.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда периодическая задача (1), (2) разрешима при всех  $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$ , где  $\mu_1$  — фиксированное положительное число.

В качестве функции  $F$ , удовлетворяющей условиям 1) и 2), можно взять, например, следующую

$$F(x, y, v, \mu) = (v - e^{i(k_0x + l_0y)}) + F_1(x, y, v, \mu) + \sum_{\nu=2}^m d_\nu (v - e^{i(k_0x + l_0y)})^\nu,$$

где  $d_\nu$ ,  $\nu = \overline{2, m}$  — комплексные числа, функция  $F_1(x, y, v, \mu)$  непрерывна по совокупности переменных и  $F_1(x, y, v, 0) \equiv 0$ . В этом случае, полагая  $v_1^*(x, y) = \exp(i(k_0x + l_0y))$  и учитывая конечномерность  $\tilde{E}_1$ , легко проверить, что при малом фиксированном  $\varepsilon > 0$  и при всех  $v_1^* \in \tilde{E}_1$ ,  $0 < \|v_1 - v_1^*\| \leq \varepsilon$ , имеет место неравенство  $\langle \tilde{\Phi}(v_1), v_1 - v_1^* \rangle \geq \alpha \|v_1 - v_1^*\|^2$ , где  $\alpha > 0$  и не зависит от  $v_1$ . Из этого неравенства следует, что выполнено условие 1) и  $\gamma(\tilde{\Phi}, \tilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*)) = 1$ , так как векторное поле  $\tilde{\Phi}$  на сфере  $\tilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*)$  линейно гомотопно векторному полю  $v_1 - v_1^*$  и  $\gamma(v_1 - v_1^*, \tilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*)) = 1$ .

### Литература

1. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым / Л. С. Понтрягин // ЖЭТФ. — 1934. — Т. 4, № 8. — С. 234–238.
2. Баутин Н. Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович — М.: Наука, 1990. — 486 с.
3. Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко — М.: Наука, 1975. — 512 с.
4. Мухамадиев Э. Исследование разрешимости одного класса нелинейных уравнений с малым параметром / Э. Мухамадиев, А. Б. Назимов, А. Н. Наимов // Вестник Вологод-

ского государственного университета. Серия: Технические науки. — 2019. — Т. 3, № 1. — С. 50–53.

5. Мухамадиев Э. О разрешимости одной нелинейной краевой задачи с малым параметром / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, А. Х. Сатторов // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 8. — С. 1127–1137.

## СЧЁТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- РАЗНОСТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАФЕ

©2022 В. Н. Хоанг

(Воронеж, ВГУ; *fadded9x@mail.com*)

Используются обозначения, принятые в работах [1].

Ребра  $\gamma$  графа  $\Gamma$  имеют одинаковую длину и параметризованы отрезком  $[0, 1]$ ;  $\partial\Gamma$  — множества граничных узлов графа;  $\Gamma_0$  — объединение всех рёбер, не содержащих концевых точек;  $L_2(\Gamma)$  — банахово пространство измеримых на  $\Gamma_0$  функций, суммируемых с  $p$ -й степенью;  $W_2^1(\Gamma)$  — пространство функций из  $L_2(\Gamma)$ , имеющих обобщённую производную первого порядка также из  $L_2(\Gamma)$ ;  $0 < T < \infty$  — произвольная фиксированная константа.

На протяжении всей работы используется интеграл Лебега по  $\Gamma$ :  $\int_{\Gamma} f(x) dx = \sum_{\gamma} \int_{\gamma} f(x)_{\gamma} dx$ ,  $f(\cdot)_{\gamma}$  — сужение функции  $f(\cdot)$  на ребро  $\gamma$ .

Обозначим через  $\Omega_a(\Gamma)$  множество непрерывных во всех внутренних узлах функций  $u(x)$  из класса  $W_2^1(\Gamma)$ , удовлетворяющих краевому условию  $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$  и соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_{\gamma} \frac{du(1)_{\gamma}}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_{\gamma} \frac{du(0)_{\gamma}}{dx},$$



здесь  $R(\xi)$  и  $r(\xi)$  — множества рёбер  $\gamma$ , соответственно ориентированных к узлу  $\xi$  и от узла  $\xi$ . Замыкание в норме  $W_2^1(\Gamma)$  множества  $\Omega_a(\Gamma)$  обозначим через  $W_0^1(a, \Gamma)$ .

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + \Lambda u(k) = f(k), \quad k = 1, \dots, M, \quad (1)$$

с начальным и краевым условиями

$$u(0) = \varphi(x), \quad u(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2)$$

где  $u(k) = u(x; k)$ ,  $f(k) = f(x; k)$ ,  $\tau > 0$  — действительное число,  $\Lambda u(k) = -\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(k)}{dx} \right) + b(x)u(k)$ ,  $f(k) \in L_2(\Gamma)$ ,  $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ . Коэффициенты  $a(x), b(x)$  — фиксированные, измеримые и ограниченные на  $\Gamma_0$  функции, суммируемые с квадратом

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \Gamma_0.$$

**Определение 1.** Слабым решением уравнения (1) с условиями (2) называются функции  $u(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ,  $k = \overline{1, M}$  удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma} u(k)_{\tau} \eta(x) dx + \ell(u(k), \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx, \quad u(0) = \varphi(x),$$

где

$$u(k)_{\tau} = u(x; k)_{\tau} = \frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)),$$

$$\ell(u(k), \eta) = \int_{\Gamma} \left( a(x) \frac{du(k)}{dx} \frac{d\eta(x)}{dx} + b(x)u(k)\eta(x) \right) dx,$$

для любой функции  $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ .

**Теорема.** [2] Для любых  $k_0 \geq 0$  и любых  $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$  слабое решение  $u(k)$  однозначным образом определено при  $k_0 \leq k \leq M$ ,  $k_0 < M < \infty$ .

Множество ортонормированных собственных функций  $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$  краевой задачи

$$\Lambda \phi(x) = \lambda \phi(x), \quad \phi(x)|_{x \in \partial \Gamma} = 0,$$

образует базис в  $W_0^1(a, \Gamma)$  и  $L_2(\Gamma)$  [3]. Обозначим через  $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$  — множество собственных значений. Введём следующие ряды Фурье по ортонормированной системе  $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$ :

$$u(k) = \sum_i \phi^i(k) \phi_i(x), f(k) = \sum_i f^i(k) \phi_i(x), \quad (3)$$

$$\varphi = \sum_i \varphi^i \phi_i(x), \quad (4)$$

где  $\phi^i(k) = (u(k), \phi_i)$ ,  $f^i(k) = (f(k), \phi_i)$ ,  $\varphi^i = (\varphi, \phi_i)$ .

**Определение 2.** Дифференциально-разностная система (1), (2) называется счётной устойчивостью, если для каждого коэффициента  $\phi^i(k)$  рядов Фурье (3),(4) выполняется неравенство

$$|\phi^i(k)| \leq C_{1i} |\varphi^i| + C_{2i} |f^i|,$$

где константы  $C_{1i}, C_{2i}$  равномерно ограничены в  $0 \leq k\tau \leq \leq T$ ,  $|f^i| = \max_{k=1, M} |f^i(k)|$ . Для  $\eta(x) = \phi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , получаем

$$\begin{aligned} \phi^i(k) - \phi^i(k-1) + \tau \lambda_i \phi^i(k) &= \tau f^i(k), \phi^i(0) = \varphi^i \\ (k = 1, 2, \dots, M). \end{aligned}$$

Последовательное исключение неизвестного  $\phi^i(j), j = 1, 2, \dots, k$ , уменьшить до соотношения

$$\begin{aligned}\phi^i(k) &= r_i^k \varphi^i + \tau r_i \sum_j r_i^{k-j} f^i(j) \\ (k &= 1, 2, \dots, M),\end{aligned}$$

где  $r_i = (1 + \tau \lambda_i)^{-1}$ . Отсюда происходит оценка

$$\begin{aligned}|\phi^i(k)| &\leq |r_i|^k |\varphi^i| + \tau |r_i| \sum_j |r_i^{k-j}| |f^i(j)| \leq \\ &\leq |r_i|^k |\varphi^i| + \tau |r_i| \frac{1 - |r_i|^k}{1 - |r_i|} |f^i|, \quad |f^i| = \max_{k=1, M} |f^i(k)| \\ (k &= 1, 2, \dots, M).\end{aligned}$$

так как  $0 < r_i < 1 (i = 1, 2, \dots)$  затем  $|r_i|^k < 1$  и  $\tau |r_i| \frac{1 - |r_i|^k}{1 - |r_i|} < \tau |r_i| \frac{1}{1 - |r_i|} < T + \frac{1}{\lambda_1}$ , это означает, что коэффициенты двух коэффициентов  $|\varphi^i|$  и  $|f^i|$  равномерно ограничены при любом значении  $\tau > 0$  и не зависят от  $\tau, \varphi$  и  $f$ . Это означает, что выполняется спектральный критерий считающей устойчивости определения 2: дифференциально-разностная система (1), (2) абсолютно счётно устойчива.

### Литература

1. Хоанг В. Н. Дифференциально-разностное уравнение с распределёнными параметрами на графе // Процессы управления и устойчивость. – 2021. – Т. 8. – №. 1. – С. 155-160.

2. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2020. – Vol. 16. – No 4. – P. 402-414.

3. *Volkova A. S., Provotorov V. V.* Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph // Russian Mathematics. – 2014. – Vol. 58. – No 3. – P. 1-13.

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АНАЛИЗА СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЗАПАСОВ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ОСНОВЕ НЕЧЁТКОЙ ИНФОРМАЦИИ О ЗАТРАТАХ

©2022 *С. А. Никитина*

(Челябинск, ЧелГУ; *nikitina@csu.ru*)

Построена система анализа, которая позволяет сделать вывод об уровне материальных запасов на предприятии на основе нечёткой информации о затратах.

Рассмотрим лингвистическую переменную  $H$  — «уровень материальных запасов». Значения (термы) этой лингвистической переменной следующие:  $H_1$  — «Очень высокий уровень материальных запасов»;  $H_2$  — «Высокий уровень материальных запасов»;  $H_3$  — «Средний уровень материальных запасов»;  $H_4$  — «Низкий уровень материальных запасов»;  $H_5$  — «Очень низкий уровень материальных запасов».

Каждый терм  $H_j, j = 1, \dots, 5$  является нечётким числом, заданным на отрезке  $[0; 1]$ . Будем рассматривать в качестве значений лингвистической переменной  $H$  трапецевидные нечёткие числа.

Изложим метод по шагам.

Шаг 1. Отобрать показатели  $D_1, D_2, \dots, D_n$  деятельности складской системы предприятия, которые имеют наибольшее отношение к оценке уровня запаса. При выборе показателей нужно учитывать следующее условие [1]: рост показателя должен приводить к снижению уровня запасов.

Согласно [2] на уровень запаса на складе значительное влияние оказывают затраты на хранение, на выполнение заказа (организацию) и на потери от дефицита товара. При

увеличении доли указанных затрат в суммарных затратах, происходит снижение финансовых вложений в приобретение продукции. Следствием этого является уменьшение величины пополнения товаров, то есть происходит снижение уровня материальных запасов.

В качестве показателей будем рассматривать следующие:  $D_1$  — доля затрат на хранение;  $D_2$  — доля затрат на выполнение заказа;  $D_3$  — доля затрат на потери от дефицита.

Пусть  $d_i, i = 1, \dots, 3$  — значения уровня показателя  $i$  в текущий период времени.

Шаг 2. Определить, какие из отобранных показателей являются наиболее, а какие наименее значимыми при влиянии на уровень запаса материальных ресурсов. Расположить показатели по убыванию их значимости. Присвоить показателям весовые коэффициенты  $\omega_i, i = 1, \dots, n$  в зависимости от их значимости. Весовые коэффициенты можно определить по правилу Фишберна [3]. Если выбранные показатели не могут быть расположены в порядке убывания их значимости, то весовые коэффициенты для них выбирают одинаковыми.

Шаг 3. Фаззифицировать выбранные показатели, то есть ввести лингвистические переменные. Предположим, что терм-множество этих лингвистических переменных содержит следующие значения: «Очень низкий показатель, Низкий показатель, Средний показатель, Высокий показатель, Очень высокий показатель». Каждому значению лингвистической переменной необходимо сопоставить функцию принадлежности. Для этого удобно применить систему нечётких чисел трапециевидного типа, удовлетворяющую условию серой шкалы Поспелова [4].

Шаг 4. Установить уровень принадлежности  $i$ -го показателя к  $j$ -ой лингвистической классификации по результатам значений имеющихся входных параметров  $d_i$ . Обозна-

чим этот уровень принадлежности через  $\mu_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, 5$ .

Шаг 5. Найти интегральный показатель уровня материальных запасов

$$h = \sum_{j=1}^5 h_j \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \mu_{ij},$$

где  $h_j = 0,9 - 0,2(j - 1)$  — середина промежутка носителя терма  $H_j, j = 1, \dots, 5$ .

Из приведённой формулы следует, что интегральный показатель уровня материальных запасов есть результат двумерной свёртки показателей принадлежности, с двумя системами весов — весов для показателей и весов характерных точек для заданной лингвистической классификации. Чем больше значение этого показателя, тем ниже уровень запасов.

### Литература

1. Батыршин И. З., Недосекин А. О., Стецко А. А. и др. Нечёткие гибридные системы. Теория и практика. // М: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 208 с.
2. Шрайбфедер Дж. Эффективное управление запасами. // М: Альпина Бизнес Букс, 2008. — 304 с.
3. Абдулаева З. И., Недосекин А. О. Стратегический анализ инновационных рисков. // СПб: Изд. СПбГГУ, 2013. — 146 с.
4. Поспелов Д. А. «Серые» и/или «черно-белые» // Прикладная эргономика. Специальный выпуск «Рефлексивные процессы». — 1994. — Т.1. — С. 29–33.

# БИФУРКАЦИИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ГЛАДКИХ ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ: КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИЛОЖЕНИЕ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ СИСТЕМАМ <sup>1</sup>

©2022 М. В. Онуфриенко

(Москва, МГУ; Москва, МЦФиПМ;  
mary.onufrienko@gmail.com)

Фиксируем  $s \in \mathbb{N}$  и рассмотрим действие группы  $G = \mathbb{Z}_s$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  вида  $z \longrightarrow e^{2\pi i/s} z$ , где  $z = x + iy \in \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим морсовские функции  $F_{s,0} = F_{s,0}^{\pm,\pm}(z) = \pm|z|^2 = \pm(x^2 + y^2)$  при  $s \geq 1$ , и  $F_{s,0} = F_{s,0}^{+,-}(z) = x^2 - y^2$  при  $s = 1, 2$ . Рассмотрим два семейства  $G$ -инвариантных ростков  $F_{s,k} = F_{s,k}(z, a, \lambda)$ ,  $k = 1, 2$ , от переменных  $z = (x, y)$  в нуле:

$$F_{s,1} = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^{s+2} + \lambda y^s, & s = 1, 2, \\ \operatorname{Re}(z^3) + \lambda|z|^2, & s = 3, \\ \operatorname{Re}(z^s) \pm a|z|^4 + \lambda|z|^2, & s \geq 4, \end{cases}$$

$$F_{s,2} = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^{2s+2} + \lambda_2 y^{2s} + \lambda_1 y^s, & s = 1, 2, \\ \operatorname{Re}(z^4) \pm (1 + \lambda_2)|z|^4 \pm a|z|^6 + \lambda_1|z|^2, & s = 4, \\ \operatorname{Re}(z^5) \pm a|z|^6 + \lambda_2|z|^4 + \lambda_1|z|^2, & s = 5, \\ \operatorname{Re}(z^s) \pm a_1|z|^6 + a_2|z|^8 + \lambda_2|z|^4 + \lambda_1|z|^2, & s \geq 6. \end{cases}$$

Здесь  $\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{R}^k$  — параметры,  $a = (a_i) \in \mathbb{R}^m$  — модули,  $m \in \{0, 1, 2\}$  — модальность;  $a^2 \neq 1$  при  $(s, k) = (4, 1)$ ;  $a > 0$  при  $s \neq k + 3$ ;  $a_1^2 \neq 1$  при  $(s, k) = (6, 2)$ ;  $a_1 > 0$  иначе.

**Теорема 1.** *Рассмотрим классы правой  $G$ -эквивалентности  $G$ -инвариантных ростков функций  $F_{s,k}(z, \hat{a}, 0)$  двух переменных в нуле,  $k = 0, 1, 2$ . Эти особенности имеют  $G$ -корузмерность  $k$ ,  $G$ -кратность Милнора  $k + m + 1$ ,  $G$ -версальную деформацию  $F_{s,k}(z, a, \lambda) + \lambda_0$ . Дополнение к их*

---

<sup>1</sup>Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

объединению в множестве  $\mathfrak{n}_G^2$   $G$ -инвариантных ростков в нуле, имеющих критическую точку 0 с критическим значением 0, имеет коразмерность  $> 2$  в  $\mathfrak{n}_G^2$ .

Теорема 1 не следует из классификации [1]. Доказательство теоремы 1 основано на следующих леммах.

**Лемма 1.** Алгебра  $G$ -инвариантных многочленов от  $x, y$  с вещественными коэффициентами мультипликативно порождена однородными многочленами  $|z|^2, \operatorname{Re}(z^s), \operatorname{Im}(z^s)$ . Она является линейной оболочкой многочленов  $\operatorname{Re}(z^k \bar{z}^l), \operatorname{Im}(z^k \bar{z}^l)$ , где  $s \mid (k - l)$ . В частности, любой  $G$ -инвариантный росток  $f(z)$  в нуле имеет ряд Тейлора вида

$$f(z) = \operatorname{Re} \sum_{p,q \geq 0} c_{pq} |z|^{2p} z^{qs} = c_0 + c_1 |z|^2 + \operatorname{Re}(c_2 z^s + c_3 |z|^2 z^s) + \\ + c_4 |z|^4 + c_5 |z|^6 + c_6 |z|^8 + \dots \quad (1)$$

**Лемма 2.** Пусть  $f(z)$  —  $G$ -инвариантный росток в нуле с рядом Тейлора вида (1), где  $s \geq 3, c_0 = 0$ . Росток  $f(z)$  право- $G$ -эквивалентен ростку  $F_{s,k}(z, a, 0)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , тогда и только тогда, когда либо

- (a)  $k = 0, c_1 \neq 0$ , либо
- (b)  $k = 1, c_1 = 0, c_2 \neq 0$  и  $a = |c_4|/|c_2|^{4/s}$ , либо
- (c)  $k = 2, c_1 = |c_2|^2 - c_4^2 = 0, c_4 \neq 0, a = |c_5 - c_4 \operatorname{Re}(\frac{c_3}{c_2})|/|c_2|^{3/2}$  при  $s = 4$ ;  $c_1 = c_4 = 0, c_2 \neq 0, a = |c_5|/|c_2|^{6/5}$  при  $s = 5$ ;  $c_1 = c_4 = 0, c_2 \neq 0, a_1 = \frac{|c_5|}{|c_2|^{6/s}}, a_2 = (c_6 - c_5 \operatorname{Re}(\frac{6c_3}{sc_2}))/|c_2|^{8/s}$  при  $s \geq 6$ .

Опишем приложение теоремы 1 к классификации структурно устойчивых особенностей интегрируемых систем с 2 и 3 степенями свободы. Напомним, что интегрируемая система  $(M, \omega, \mathcal{F})$  с  $n$  степенями свободы задаётся гладким отображением  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $\{f_i, f_j\} = 0$ ,  $\dim M = 2n$ . Рассмотрим действие группы  $G$  на полнотории  $V = D^2 \times S^1$  вида  $(z, \varphi_1) \mapsto (e^{2\pi i \frac{\ell}{s}} z, \varphi_1 + \frac{2\pi}{s})$ , где  $0 \leq \ell < s$ ,



$(\ell, s) = 1$ . Рассмотрим цилиндр  $W = D^{n-1} \times (S^1)^{n-2}$  с координатами  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{n-1}$ ,  $\varphi' = (\varphi_j)_{j=2}^{n-1}$ .

Из теоремы 1 можно вывести, что *локальные особенности* (т.е.  $\mathbb{R}^n$ -орбиты) ранга  $n - 1$  типичных интегрируемых систем с  $n \leq 3$  степенями свободы имеют окрестности, гладко эквивалентные *стандартной модели*  $(M_{\frac{\ell}{s}}, \omega_{\frac{\ell}{s}}, \mathcal{F}_{\frac{\ell}{s}, k, a})$  вида

$$M_{\frac{\ell}{s}} = (V/G) \times W, \quad \omega_{\frac{\ell}{s}} = dx \wedge dy + \sum_{j=1}^{n-1} d\lambda_j \wedge d\varphi_j,$$

$$\mathcal{F}_{\frac{\ell}{s}, k, a} : M_{\frac{\ell}{s}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{F}_{\frac{\ell}{s}, k, a}(z, \varphi_1, \lambda, \varphi') = (\lambda, F_{s, k}(z, a(\lambda), \lambda')),$$

где  $0 \leq k < n$ ,  $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,  $a(\lambda)$  и  $a_1(\lambda)$  — гладкие функции при  $(s, k) \in \{(4, 1), (6, 2)\}$ ,  $a(\lambda) \equiv 1$  для остальных пар  $(s, k)$ ;  $a(\lambda) = (a_1(\lambda), 1)$  при  $(s, k) = (6, 2)$ .

При  $n = 2$ ,  $k = 1$  описанные выше особенности — это параболические орбиты с резонансом  $\ell/s$  [2]. В вещественно-аналитическом случае они типичны и структурно устойчивы [2], а также гладко структурно устойчивы, если порядок резонанса  $s \neq 4$  [3]. При  $n = 3$ ,  $k = 2$  получаем типичные бифуркации параболических особенностей с резонансами.

### Литература

1. *Wassermann G.* Classification of singularities with compact Abelian symmetry // Banach Center Publications. – 1988. – Т. 20. – №. 1. – С. 475-498.
2. *Калашников В. В.* Типичные интегрируемые гамильтоновы системы на четырёхмерном симплектическом многообразии // Изв. РАН. Сер. матем. - 1998. - Т. 62. - №. 2. - С. 49-74.
3. *Kudryavtseva E. A.* Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // European J. Math. - 2021. - doi.org/10.1007/s40879-021-00501-9, 63 pp.

# ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ С ЭКРАНИРОВАННЫМ КУЛОНОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ САМОДЕЙСТВИЯ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ <sup>1</sup>

©2022 *А. В. Перескоков*

( Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ; *pereskocov62@mail.ru* )

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(-\Delta_q - \frac{1}{|q|} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varkappa|q-q'|} \frac{|\psi(q')|^2}{|q-q'|} dq')\psi = \lambda\psi, \quad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \quad (2)$$

где  $\Delta_q$  — оператор Лапласа,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Здесь потенциал самодействия является экранированным кулоновским потенциалом (или потенциалом Юкавы)

$$V(q) = \frac{e^{-\varkappa|q|}}{|q|},$$

где  $\varkappa > 0$  — константа.

Уравнения самосогласованного поля Хартри во внешнем поле, а также уравнения типа Хартри, в которых потенциал самодействия отличен от кулоновского, возникают в ряде моделей квантовой теории и нелинейной оптики. Изучению асимптотических решений таких уравнений, локализованных вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве, посвящено большое число работ начиная с работ В. П. Маслова [1] и И. В. Сименога [2]. Отметим также работу [3], где были найдены асимптотические

---

<sup>1</sup>Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022)

собственные значения оператора Хартри с кулоновским взаимодействием в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^3)$  вблизи верхних границ спектральных кластеров. Эти кластеры образуются около уровней энергии невозмущённого оператора. Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности  $\Gamma$  в  $\mathbb{R}^3$ , на которой кулоновский потенциал самодействия имеет логарифмическую особенность. В данной работе будут построены асимптотические собственные функции задачи (1), (2) при  $\varkappa > 0$ , которые также локализованы вблизи окружности  $\Gamma$ .

При  $\varepsilon = 0$  собственные значения  $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$  задачи (1), (2) имеют вид

$$\lambda_n(0) = -\frac{1}{4n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $n$  — главное квантовое число. Пусть теперь  $\varepsilon$  не равно нулю. Рассмотрим случай, когда число  $n$  велико. Для определённости будем считать, что  $\lambda$  имеет порядок  $\varepsilon$ . Тогда  $n$  имеет порядок  $\varepsilon^{-1/2}$ .

Пусть  $p = n - |m| - 1$ , где  $m$  — магнитное квантовое число. В данной работе для каждого фиксированного  $p = 0, 1, 2, \dots$  найдены асимптотические собственные значения

$$\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon) = -\frac{1}{4n^2} + \frac{\varepsilon \alpha_i^{(p)}}{32\pi \varkappa^2 n^5} + O\left(\frac{\varepsilon}{n^6}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

вблизи верхних границ спектральных кластеров. Здесь  $i$  принимает конечное число значений  $i = 0, \dots, I_p$ . В частности, при  $p = 0$  существует одно число  $\alpha_0^{(0)} = 4$ , при  $p = 1$  — два числа  $\alpha_0^{(1)} = 3$ ,  $\alpha_1^{(1)} = 2$ , при  $p = 2$  — шесть чисел  $\alpha_0^{(2)} = 2 + 4/7$ ,  $\alpha_1^{(2)} = 2 + 1/4$ ,  $\alpha_2^{(2)} = 2$ ,  $\alpha_3^{(2)} = 2 - 4/13$ ,  $\alpha_4^{(2)} = 2 - 7/20$ ,  $\alpha_5^{(2)} = 2 - 4/9$ .

Наконец, вблизи окружности  $\Gamma$ , где локализовано решение (1), (2), главный член его асимптотического разложения

$\gamma = \gamma_i^{(p)}$  является решением задачи о двумерном осцилляторе: [4]

$$\mathbf{L}\gamma(\tau, s) = 0, \quad \|\gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1.$$

Здесь оператор  $\mathbf{L}$  имеет вид

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + \frac{s^2 + \tau^2}{2} - (p + 1).$$

Отметим, что ранее в работе [5] для уравнения Хартри в случае ньютоновского взаимодействия с экранировкой была построена квазиклассическая серия собственных значений и сферически-симметричных собственных функций.

### Литература

1. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. //М.: Наука, 1977. 384 с.
2. Симоног И. В. Об асимптотике решения стационарного нелинейного уравнения Хартри //Теоретическая и математическая физика. – 1977. – Т. 30. – №. 3. – С. 408-414.
3. Перескоков А. В. Асимптотика спектра оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров. Асимптотические решения, локализованные вблизи окружности //Теоретическая и математическая физика. – 2015. – Т. 183. – №. 1. – С. 78-89.
4. Перескоков А. В. Асимптотика спектра оператора типа Хартри с экранированным кулоновским потенциалом взаимодействия вблизи верхних границ спектральных кластеров //Теоретическая и математическая физика. – 2021. – Т. 209. – №. 3. – С. 543-560.
5. Карасев М. В., Маслов В. П. Квазиклассические солитонные решения уравнения Хартри. Ньютоновское взаимодействие с экранировкой //Теоретическая и математическая физика. – 1979. – Т. 40. – №. 2. – С. 235-244.

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $1 < q < 2$ С ПОЧТИ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫМ СНИЗУ МУЛЬТИОПЕРАТОРОМ <sup>1</sup>

©2022 Г. Г. Петросян

(Воронеж, ВГУИТ, ВГПУ; *garikpetrosyan@yandex.ru*)

Рассматривается задача типа Коши для полулинейных дифференциальных включений в банаховом пространстве  $E$ , следующего вида

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, a],$$

$$x(0) = x_0,$$

где символом  ${}^C D^q$  обозначена дробная производная Капуто порядка  $1 < q < 2$ ;  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  — замкнутый линейный оператор,  $F : [0, a] \times E \rightrightarrows E$  — почти полунепрерывное снизу мультиотображение.

## Литература

1. Афанасова М.С., Обуховский В.В., Петросян Г.Г. Об обобщённой краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. - 2021. - Т. 31, № 2. - С. 167 - 185.

2. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И. Ко второй теореме Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. - 1974. - Т. 10, № 3. - С. 537 - 540.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011 и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских учёных – кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

3. Каменский М.И., Макаренков О.Ю., Нистри П. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Доклады Академии наук. - 2003. - Т. 388, № 4. - С. 439 - 442.
4. Каменский М.И., Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети // Доклады Академии наук. - 1999. - Т. 368, № 2. - С. 157 - 159.
5. Петросян Г.Г. О сопряжённых операторах для операторов дробного дифференцирования // Вестник российских университетов. Математика. - 2020. - Т. 25, №. 131. - С. 284 - 289.
6. Петросян Г.Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2015. - Т. 20, № 5. - С. 1355 - 1358.
7. Afanasova M., Obukhovskii V., Petrosyan G. A Controllability Problem for Causal Functional Inclusions with an Infinite Delay and Impulse Conditions, Advances in Systems Science and Applications, 2021, vol. 21, no. 3, pp. 40 – 62.
8. Gurova I.N., Kamenskii M.I. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations, Differential Equations, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 106 – 112.
9. Johnson R., Nistri P., Kamenski M. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods, Journal of Differential Equations, 1997, vol. 140, no. 1, pp. 186 – 208.
10. Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems, Journal of Dynamics and Differential Equations, 2011, vol. 23, no. 3, pp. 425 – 435.
11. Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V. Condensing multi-operators and periodic solutions of parabolic functional-difference

ntial inclusions in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, 1993, vol. 20, no. 7, pp. 781 – 792.

12. *Kamenskii M.I., Nistri P., Zecca P., Obukhovskii V.V.* Optimal feedback control for a semilinear evolution equation, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1994, vol. 82, no. 3, pp. 503 – 517.

13. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C.* On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space, *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 12, pp. 5 – 19.

14. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C.* On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space, *Mathematics*, 2021, vol. 9, is. 2, pp. 136 – 154.

15. *Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen C.-F.* An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space, *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, 2021, vol. 5, no. 1, pp. 155 – 177.

16. *Obukhovskii V.V., Gelman B.D.* Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications, World Scientific, Hackensack, NJ, 2020, 220 p.

17. *Petrosyan G.* On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space, *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 69 – 80.

18. *Petrosyan G.* Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order, *The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics*, 2020, vol. 34, pp. 51 – 66.

# СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЛЬЦОМ $Ad^*$ -ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛИНОМОВ И ИНВАРИАНТАМИ ЖОРДАНА-КРОНЕКЕРА НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ РАЗМЕРНОСТИ МЕНЬШЕЙ ИЛИ РАВНОЙ СЕМИ <sup>1</sup>

©2022 В. В. Пономарёв

(Москва, МГУ; *boba1997@yandex.ru*)

Пусть  $\mathfrak{g}$  — алгебра Ли. На двойственном пространстве к ней  $\mathfrak{g}^*$  естественным образом определяются скобка Ли-Пуассона  $\mathcal{A}_x$  и скобка Пуассона с постоянными коэффициентами  $\mathcal{A}_a$ . При помощи теоремы Жордана-Кroneкера мы можем классифицировать пары кососимметричных билинейных форм, приводя их одновременно к каноническому блочно-диагональному виду. Для любой пары точек  $x, a \in \mathfrak{g}^*$  мы можем определить пучок билинейных форм  $\mathcal{A}_x - \lambda \mathcal{A}_a$  в точке  $x$ . Размеры блоков в разложении Жордана-Кroneкера форм  $\mathcal{A}_x$  и  $\mathcal{A}_a$  называются алгебраическим типом пучка. Алгебраический тип почти всех пучков одной алгебры Ли одинаков и называется инвариантом Жордана-Кroneкера этой алгебры Ли [3]. А.Ю. Грознова в своей дипломной работе [1] вычислила инварианты Жордана-Кroneкера нильпотентных алгебр Ли размерностей не больше семи.

С другой стороны, статья А. Оомса [2] посвящена изучению свойств колец инвариантов коприсоединённого представления тех же самых алгебр Ли. Вычисления Грозновой привели к предположению о том, что существование пучков кронекерова типа одинакового ранга, но с разными инвариантами Жордана-Кroneкера для кронекеровых нильпотентных алгебр Ли может быть эквивалентно несвободной порождённости колец инвариантов коприсоединённого представления. Так возникла задача по поиску таких пучков для

---

<sup>1</sup>Работа выполнена за счёт гранта РНФ, проект 17-11-01303



всех кронекеровых алгебр Ли размерностей не больше семи с несвободно порождённым кольцом  $Ad^*$ -инвариантных полиномов.

На докладе будет представлен алгоритм поиска таких пучков, а также продемонстрированы результаты его работы для всех подходящих под условия задачи алгебр Ли.

### Литература

1. *Groznova A. Yu.* Calculation of Jordan-Kronecker invariants for Lie algebras of small dimension // diploma work. - 2018. - Lomonosov Moscow State University.
2. *Ooms A.* The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven // Journal of Algebra. - 2012. - No. 365. - pp. 83–113.
3. *A.V.Bolsinov, P.Zhang.* Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups. - 2016. - Vol.21. - No. 1. - pp. 51 - 86.

## ИНТЕГРИРУЕМЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ БИЛЛИАРД В МАГНИТНОМ ПОЛЕ <sup>1</sup>

©2022 *С. Е. Пустовойтов*  
(Москва, МГУ; *pustovoitovse1@mail.ru*)

Рассмотрим бильярд внутри плоской компактной области с абсолютно упругим отражением от границы. Потребуем, что на бильярдный шар действует постоянное магнитное поле, ортогональное к плоскости бильярдного стола. Такая система является гамильтоновой с гамильтонианом  $H$  – кинетической энергией. Известно, что в общем случае такой бильярд не является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Более того, А. Е. Мироновым и М. Бялым в [1]

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 20-71-00155 в Московском университете имени М.В.Ломоносова

было доказано, что для выпуклого бильярдного стола интегрируемость будет иметь место только в случае бильярда в круге (за исключением конечного числа значений сигнатуры магнитного поля). При этом дополнительный первый интеграл имеет следующий вид

$$F = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + k(xy - y\dot{x})$$

Оказывается, что магнитный бильярд, ограниченный двумя концентрическими окружностями, тоже интегрируем, причём первые интегралы те же самые. Нами было изучено слоение Лиувилля таких бильярдных. А именно, были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга (см. [2]) всевозможных невырожденных многообразий  $Q^3$ . В частности, грубый инвариант Фоменко таких бильярдных имеет вид  $A-A$ .

Теперь рассмотрим несколько копий описанных круговых и кольцевых бильярдных и склеим их по границам таким образом, что полученное конфигурационное пространство являлось ориентируемым многообразием. В частности, по одной границе не могут быть склеены более двух листов. При отражении от границы склейки бильярдный шар переходит на соседний лист. Впервые подобные бильярдные системы были рассмотрены Ведюшкиной в [3] и называются топологическими бильярдами. Конфигурационное пространство магнитного топологического бильярда может быть гомеоморфно одному из четырёх многообразий: цилиндру (бильярд  $bC$ ), диску (бильярд  $bD$ ), сфере ( $bS$ ) или тору ( $bT$ ). Для каждого из четырёх таких типов были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга, а также построены бифуркационные диаграммы. В частности, имеет место следующая теорема

**Теорема:** В магнитных топологических бильярдах типа  $bC$ ,  $bD$  и  $bS$  реализуются любые 3-атомы без звёздочек, имеющие критический слой, гомеоморфный критическому

слою 3-атома  $B_n$  для произвольного  $n$ . В магнитном билиарде  $bT$  также реализованы 3-атомы без звёздочек, имеющие критический слой 3-атома  $C_n$ .

### Литература

1. *M. Bialy, A. E. Mironov*, “Algebraic non-integrability of magnetic billiards”, J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.
2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.*, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.
3. *Фокичева В. В.*, Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

©2022 *К. А. Раецкий*

(Воронеж, ВГУ; *kraetsky@mail.ru*)

Рассматривается полностью управляемая динамическая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  и  $B$  — матрицы соответствующих размеров,  $\nexists B^{-1}$ ;  $t \in [t_0, t_k]$ .

Решается задача моделирования траектории движения, или состояния системы  $x(t)$ , удовлетворяющего условиям

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (2)$$

$t_i \in [t_0, t_k]$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ ,  $\forall x_i \in \mathbb{R}^n$ .

То есть строится множество  $X = \{x(t)\}$  различных траекторий, удовлетворяющих условиям (2), для каждой из которых существует соответствующее  $u(t)$ , такое, что  $x(t) \in X$  является решением уравнения (1) с этим  $u(t)$ .

Цель такого моделирования: предложить заказчику различные варианты траектории, затем для выбранного заказчиком «подходящего» варианта  $x(t)$  вычислить соответствующее управление  $u(t)$ . При практическом решении задачи для реальной динамической системы следует реализовать начальное положение  $x(t_0) = x_0$  и полученное управление  $u(t)$ . В силу единственности решения начальной задачи для системы (1) с фиксированным  $u(t)$  траектория (состояние) динамической системы будет именно выбранной «подходящей».

Если же «подходящего» варианта заказчик не выбрал, то управление  $u(t)$  строить нецелесообразно, и следует искать траектории (состояния) в другом классе вектор-функций, или другим методом. В этом состоит отличие задачи моделирования траектории от задачи управления.

Предлагается построение  $x(t)$  и  $u(t)$  методом неопределённых коэффициентов [1,2], состоящем в формировании  $x(t)$  и  $u(t)$  в виде линейных комбинаций линейно независимых скалярных функций с векторными коэффициентами; подстановке этих комбинаций в (1) и (2); нахождении векторных коэффициентов из полученных алгебраических уравнений.

В данной работе предлагается

$$x(t) = \sum_{j=1}^r a_j \cos jt + b_j \sin jt, \quad u(t) = \sum_{j=1}^r c_j \cos jt + d_j \sin jt, \quad (3)$$

количество  $r$  определяется позже. После подстановки (3) в (1) и приравнивания коэффициентов при  $\cos jt$ ,  $\sin jt$  получаются уравнения

$$\begin{aligned} j \cdot b_j &= Aa_j + Bc_j, \\ -j \cdot a_j &= Ab_j + Bd_j, \quad j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее используется свойство отображения  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\mathbb{R}^m = \text{Coim} B \dot{+} \text{Ker } B, \quad \mathbb{R}^n = \text{Im} B \dot{+} \text{Coker } B, \quad (5)$$

где  $\text{Coker } B$  — дефектное подпространство,  $\text{Coim } B$  — прямое дополнение к подпространству  $\text{Ker } B$  в  $\mathbb{R}^m$ . Сужение  $\tilde{B}$  на  $\text{Coim } B$  имеет обратное отображение  $\tilde{B}^{-1}$ . Через  $P$  обозначен проектор на  $\text{Ker } B$ , через  $Q$  — проектор на  $\text{Coker } B$ , отвечающие разложениям (5); через  $B^-$  — полуобратный оператор к  $B$ , то есть  $B^- = \tilde{B}^{-1}(I - Q)$ .

Расщепление соотношений (4) на уравнения в подпространствах  $\text{Im } B$  и  $\text{Coker } B$  и переход от  $\text{Im } B$  в  $\text{Coim } B$  приводит к равенствам

$$c_j = B^-(j \cdot b_j - Aa_j) + \alpha_j, \quad d_j = B^-(-j \cdot a_j - Ab_j) + \beta_j, \quad (6)$$

$\forall \alpha_j, \beta_j \in \text{Ker } B$ , и уравнениям для нахождения  $a_j$  и  $b_j$ :

$$\begin{aligned} jQb_j &= (QAQ)Qa_j + (QA(I - Q))(I - Q)a_j, \\ -jQa_j &= (QAQ)Qb_j + (QA(I - Q))(I - Q)b_j. \end{aligned} \quad (7)$$

Вводятся обозначения

$$\begin{aligned} QAQ &= A_1, \quad QA(I - Q) = B_1, \quad Qa_j = a_j^1, \quad (I - Q)a_j = a_j^2, \\ Qb_j &= b_j^1, \quad (I - Q)b_j = b_j^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7), (8) следует:

$$a_j = a_j^1 + a_j^2, \quad b_j = b_j^1 + b_j^2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} jb_j^1 &= A_1a_j^1 + B_1a_j^2, \\ -ja_j^1 &= A_1b_j^1 + B_1b_j^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) по виду аналогична системе (4), но содержит меньшее количество скалярных уравнений за счёт отщепления от (4) равенств (6). Далее следует воспользоваться свойством отображения  $B_1 : \text{Im} B \rightarrow \text{Coker } B$ :

$$\text{Im} B = \text{Coim} B_1 \dot{+} \text{Ker } B_1, \quad \text{Coker } B = \text{Im} B_1 \dot{+} \text{Coker } B_1$$

и отщепить от (10) формулы для выражения  $a_j^2$  и  $b_j^2$  через  $a_j^1$  и  $b_j^1$ , и оставшиеся соотношения привести к виду, аналогичному (4) или (10), и так далее... .

Ограничимся случаем  $\text{Coker } B_1 = \{0\}$ . Из (10) получаем:

$$a_j^2 = B_1^-(j \cdot b_j^1 - A_1 a_j^1) + \gamma_j, \quad b_j^2 = B_1^-(-j \cdot a_j^1 - A_1 b_j^1) + \delta_j, \quad (11)$$

$\forall \gamma_j, \delta_j \in \text{Ker } B_1$ . Коэффициенты  $a_j^1$  и  $b_j^1$  находятся из (2), для чего в (2) подставляются выражения (3) и полученные соотношения расщепляются на соотношения в подпространствах  $\text{Coker } B$  и  $\text{Im } B$ :

$$\sum_{j=1}^r a_j^1 \cos jt_i + b_j^1 \sin jt_i = Qx_i, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^r a_j^2 \cos jt_i + b_j^2 \sin jt_i = (I - Q)x_i. \quad (13)$$

Умножив (13) слева на  $B_1$  (здесь  $B_1$  полуобратимый), и воспользовавшись равенствами (10) и (12). получаем вместе с (12) систему

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r a_j^1 \cos jt_i + b_j^1 \sin jt_i &= Qx_i, \\ - \sum_{j=1}^r ja_j^1 \sin jt_i + jb_j^1 \cos jt_i &= A_1 Qx_i + B_1(I - Q)x_i \end{aligned} \quad (14)$$

для нахождения  $a_j^1, b_j^1$ . Здесь  $2(k+1)$  уравнений с  $2r$  неизвестными, следовательно,  $r = k+1$ . Значения  $t_i$  следует взять такими, чтобы определитель  $\Delta$  системы (14) был отличен от нуля. Тогда из (14) определяются  $a_j^1$  и  $b_j^1$ , из (11) -  $a_j^2$  и  $b_j^2$ , из (9) -  $a_j$  и  $b_j$ , из (3) -  $x(t)$ . Для построения «подходящей» траектории варьируются векторы  $\gamma_j, \delta_j \in \text{Ker } B_1$ , и если таковые находятся, то рассчитывается  $u(t)$  по формулам (4), (6). Коэффициенты  $\alpha_j, \beta_j$  в (7) следует фиксировать, исходя из дополнительных условий (субоптимальное управление, ...).

Заметим [3], что  $\text{Coker } B_1 = \{0\} \Leftrightarrow \text{rank}(B AB) = n$ .

**Теорема 1.** Если  $\text{rank}(B AB) = n$  и  $t_i$  таковы, что  $\Delta \neq 0$ , то существуют  $x(t)$  и  $u(t)$ , удовлетворяющие (1) и (2) в виде (3).

Примером динамической системы со свойством  $\text{rank}(B AB) = n$  является модель движения материальной точки в вертикальной плоскости под действием реактивной силы.

### Литература

1. Zubova S.P., Raetskiy K.A. Modeling the trajectory of motion of a linear dynamic system with multi-point conditions // Mathematical Biosciences and Engineering. - 2021. - Т. 18. - V. 6. - P. 7861-7876.
2. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями // Таврический вестник информатики и математики. - 2021. - № 1. - С. 65-80.
3. Zubova S.P., Raetskaya E.V. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives // Mathematical Methods in the Applied Sciences, AIMS, New York. - 2021. - V. 44. - N.15. - P. 11998-12009.

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОТЫСКАНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

©2022 К. Б. Сабитов

(Самара, СГТУ; Стерлитамак, СФ БГУ;  
sabitov\_fmfm@mail.ru)

©2022 А. Р. Зайнуллов

(Стерлитамак, СФ БГУ; arturzaun@mail.ru)

Рассмотрим неоднородное телеграфное уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + bu = F(x, t) \quad (1)$$

в области  $Q = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$ , где  $b, l, T$  — заданные действительные числа, при этом  $l > 0, T > 0, b \neq 0$ , и поставим следующие задачи.

**Задача 1 (Первая начально-граничная задача).** Найти в области  $Q$  функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, t) \in C^2(D) \cap C^1(D \cup \{t = 0\}) \cap C(\bar{D}), \quad u_{tt}, u_{xx} \in L[0, l]; \quad (2)$$

$$Lu \equiv F(x, t), \quad (x, t) \in Q; \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где  $F(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — заданные достаточно гладкие функции.

**Задача 2.** Пусть  $F(x, t) = f(x)g(t)$ . Найти функции  $u(x, t)$  и  $g(t)$ , удовлетворяющие условиям (2) — (6), и, кроме того, дополнительному условию

$$g(t) \in C[0, T], \quad (7)$$

$$u(x_0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

где  $x_0$  — заданная фиксированная точка отрезка  $[0, l]$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $h(t)$  и  $f(x)$  — заданные достаточно гладкие функции, при этом  $\varphi(x_0) = h(0)$ .

**Задача 3.** Пусть  $F(x, t) = f(x)g(t)$ . Найти функции  $u(x, t)$  и  $f(x)$ , удовлетворяющие условиям (2) — (6), и, кроме того, дополнительному условию

$$f(x) \in C(0, l) \cap L[0, l], \quad (9)$$

$$u(x, t_0) = \tilde{\varphi}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10)$$



где  $t_0$  — заданная фиксированная точка отрезка  $(0, T]$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\tilde{\varphi}(x)$  и  $g(t)$  — заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что данная статья является продолжением исследований работ [1, 2], где были изучены обратные задачи по нахождению начальных условий  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  в начально-граничной задаче (2) – (6) с дополнительным условием (10). Здесь ставятся обратные задачи по отысканию правой части  $F(x, t)$  телеграфного уравнения (1).

Аналогичные обратные задачи для уравнения теплопроводности изучались в работах [3, с. 118 – 120], [4, с. 248 – 252], [5]. В работе [3, с. 123 – 126] для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x)g(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t \leq T,$$

с граничными и начальным условиями

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

изучены обратные задачи по отысканию множителей  $g(t)$  и  $f(x)$  правой части с заданием дополнительного условия

$$u(x_0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0 \in [0, l]. \quad (11)$$

Для обратной задачи по определению функций  $u(x, t)$  и  $g(t)$  доказана теорема единственности и существования решения, когда  $f(x_0) \neq 0$ .

Отметим также работы [6, 7], где изучены обратные задачи по определению коэффициента при неизвестной функции телеграфного уравнения.

В данной работе для уравнения (1) изучены задачи 1 – 3. На основании формулы решения прямой задачи 1 обратная

задача 2 по нахождению сомножителя правой части, зависящей от времени, эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Из которого получена теорема об однозначной разрешимости этой обратной задачи. Решение обратной задачи 3 по определению сомножителя правой части, зависящей от пространственной координаты, построено в виде ряда Фурье по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи; установлен критерий единственности и доказана теорема существования решения поставленной задачи.

### Литература

1. *Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р.* Обратные задачи по определению начальных условий в смешанной задаче для телеграфного уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и её прил. Темат. обз. - 2017. - Т. 141. - С. 111 – 133.
2. *Sabitov K.B., Zaynullov A.R.* Inverse problems for initial conditions of the mixed problem for the telegraph equation // Journal of Mathematical Sciences. - 2019. - V. 241. - No. 5. - P. 622 – 645.
3. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. - 208 с.
4. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.
5. *Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности по отысканию начального условия и правой части // Учён. зап. Казан. ун-та. Физ.-мат. науки. - 2019. - Т. 161. - №2. - С. 271 – 291.
6. *Романов В.Г.* Одномерная обратная задача для телеграфного уравнения // Диффер. уравнения. 1968. - Т. 4. - №1. - С. 87 – 101.

7. Кожанов А.И., Сафиуллова Р.Р. Определение параметров в телеграфном уравнении // Уфимский матем. журнал. 2017. - Т. 9. - №1. - С. 63 – 74.

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ГРУЗОМ <sup>1</sup>

©2022 А. А. Самсонов

(Казань, КФУ; [anton.samsonov.kpfu@mail.ru](mailto:anton.samsonov.kpfu@mail.ru))

Пусть  $\Omega$  — прямоугольная область, занимаемая срединной поверхностью изотропной пластины,  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ,  $\rho = \rho(x)$  — плотность материала,  $D = D(x) = Ed^3/12(1 - \nu^2)$  — цилиндрическая жёсткость пластины,  $E = E(x)$  — модуль Юнга,  $\nu = \nu(x)$  — коэффициент Пуассона,  $d = d(x)$  — толщина пластины в точке  $x \in \Omega$ . Предположим, что точка пластины  $\xi \in \Omega$  закреплена упруго с коэффициентом упругости  $K$ , в точке пластины  $\xi \in \Omega$  жёстко присоединён груз массой  $M$ .

Обозначим через  $w(x, t)$  нормальные перемещения точки  $x \in \Omega$  срединной поверхности пластины в момент времени  $t$ . Тогда собственные колебания системы пластина-груз-пружина характеризуются гармонической во времени функцией  $w(x, t)$  вида

$$w(x, t) = u(x)v(t), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где  $v(t) = a_0 \cos \sqrt{\lambda}t + b_0 \sin \sqrt{\lambda}t$ ,  $t > 0$ ;  $a_0, b_0, c_i, \lambda$  — постоянные величины. Число  $\sqrt{\lambda}$  определяет частоту собственного колебания системы пластина-груз-пружина, функция  $u(x)$  задаёт форму собственного колебания частотой  $\sqrt{\lambda}$ .

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 20-08-01154.

Функция (1) удовлетворяет уравнению колебания пластины

$$Lw(x, t) + \rho(x)d(x)w_{tt}(x, t) + f(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$w(x, t) = \partial_n w(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

где  $t > 0$ ,  $f(x, t) = Mw_{tt}(x, t)\delta(x - \xi)$ ,  $Lw = \partial_{11}D(\partial_{11}w + \nu\partial_{22}w) + \partial_{22}D(\partial_{22}w + \nu\partial_{11}w) + 2\partial_{12}D(1 - \nu)\partial_{12}w$ ,  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,  $\partial_{ij} = \partial_i\partial_j$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $(\psi(t))_t = d\psi(t)/dt$ ,  $\partial_n$  — производная по внешней нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Подставляя разложение (1) в уравнения (2) и (3), получим задачу на собственные значения: найти числа  $\lambda$  и ненулевые функции  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , удовлетворяющие уравнению

$$Lu = \lambda(\rho d u + M\delta(x - \xi)u), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

и граничным условиям

$$u(x) = \partial_n u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (5)$$

Формулировки задач вида (4), (5) содержатся, например, в [1–8]. Задача (4), (5) имеет неубывающую последовательность положительных конечнократных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В работе исследуются предельные свойства при  $M \rightarrow \infty$  и  $M \rightarrow 0$  собственных значений и собственных функций параметрической задачи (4), (5) с параметром  $M$ . Дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной

схемой метода конечных элементов с эрмитовыми бикубическими конечными элементами на регулярной неравномерной сетке. Доказываются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от размера сетки и гладкости собственных функций.

### Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2005. – 440 с.
3. *Андреев Л. В., Дышко А. Л., Павленко И. Д.* Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 200 с.
4. *Solov'ev S. I.* Eigenvibrations of a bar with elastically attached load //Differ. Equations. – 2017. – V. 53. – No 3. – P. 409–423.
5. *Samsonov A. A., Solov'ev S. I.* Eigenvibrations of a beam with load //Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 849–855.
6. *Samsonov A. A., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S.* Eigenvibrations of a bar with load //MATEC Web Conf. – 2017. – V. 129. – Art. 06013. – P. 1–4.
7. *Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I.* Approximation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded bar //J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042009. – P. 1–5.
8. *Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I.* Investigation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded string //J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042010. – P. 1–5.

# НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ <sup>1</sup>

©2022 В. В. Семёнов

(Киев, КНУТШ; *semenov.volodya@gmail.com*)

Множество актуальных прикладных проблем можно записать в форме вариационных неравенств. Особенно популярны эти постановки в оптимизации, теории игр и теории управления. Отметим, что часто негладкие задачи оптимизации могут эффективно решаться, если их переформулировать в виде седловых задач, а к последним применить алгоритмы решения вариационных неравенств. С появлением генерирующих состязательных нейронных сетей (generative adversarial networks, GANs) устойчивый интерес к алгоритмам решения вариационных неравенств возник и в среде специалистов в области машинного обучения.

В докладе будет сделан обзор результатов работ [1–6], в которых предложены новые методы решения вариационных неравенств

$$\text{найти } x \in C : \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где  $C$  — замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства  $E$ ,  $A : E \rightarrow E^*$  — нелинейный монотонный или псевдомонотонный оператор.

Основное внимание будет уделено доказательству сходимости и формулировке новых вопросов. В частности, будут представлены новые результаты о характере сходимости для следующих алгоритмов.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке МОН Украины (проект 0119U100337) и НАН Украины (проект 0119U101608).

**Алгоритм 1 (Экстраполяция из прошлого).** Начиная с элементов  $y_0, x_1 \in E$  строим последовательность  $(x_n)$  при помощи итерационной схемы

$$\begin{aligned} y_n &= \Pi_C J^{-1} (Jx_n - \lambda_n A y_{n-1}), \\ x_{n+1} &= \Pi_C J^{-1} (Jx_n - \lambda_n A y_n), \end{aligned}$$

где  $\lambda_n > 0$ .

**Алгоритм 2 (Операторная экстраполяция).** Начиная с элементов  $x_0, x_1 \in E$  строим последовательность  $(x_n)$  при помощи итерационной схемы

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1} (Jx_n - \lambda_n A x_n - \lambda_{n-1} (A x_n - A x_{n-1})),$$

где  $\lambda_n > 0$ .

Здесь  $\Pi_C x$  — оператор обобщённого проектирования Альбера

$$\Pi_C x = \operatorname{argmin}_{y \in C} (\|y\|^2 - 2 \langle Jx, y \rangle + \|x\|^2),$$

$J : E \rightarrow E^*$  — нормализованное дуальное отображение.

Алгоритм 1 является модификацией известного алгоритма Попова для задач в банаховых пространствах с использованием обобщённой проекции Альбера вместо метрической. Алгоритм 2 — модификация нового «forward-reflected-backward algorithm» [2] для вариационных неравенств в банаховых пространствах.

Привлекательными свойствами второго алгоритма является вычисление на итерационном шаге одного значения оператора  $A$  и одной проекции на допустимое множество

Для вариационных неравенств с монотонными и липшицевыми операторами, действующими в 2-равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве, доказаны теоремы слабой сходимости и  $O(\frac{1}{\varepsilon})$ -оценки сложности в терминах функции зазора.

## Литература

1. *Vedel Y., Semenov V.* Adaptive extraproximal algorithm for the equilibrium problem in Hadamard spaces // Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol 12422. Cham: Springer, 2020. – P. 287-300.
2. *Malitsky Y., Tam M.K.* A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity // SIAM Journal on Optimization. – 2020. – Vol. 30. – No. 2. – P. 1451-1472.
3. *Семенов В.В., Денисов С.В., Сирык Д.С., Харьков О.С.* Сходимость метода экстраполяции из прошлого и метода операторной экстраполяции // Проблемы управления и информатики. – 2021. – № 3. – С. 57-71.
4. *Семенов В.В., Денисов С.В.* Адаптивный метод операторной экстраполяции для вариационных неравенств в банаховых пространствах // Проблемы управления и информатики. – 2021. – № 5. – С. 82-92.
5. *Vedel Y.I., Denisov S.V., Semenov V.V.* An Adaptive Algorithm for the Variational Inequality Over the Set of Solutions of the Equilibrium Problem // Cybernetics and Systems Analysis. – 2021. – Vol. 57. – Issue 1. – P. 91-100.
6. *Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I.* Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment // Cybernetics and Systems Analysis. – 2019. – Vol. 55. – Issue 3. – P. 377-383.



# ПОЛУГРУППЫ КЛАССА $C_0$ С ГЕНЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ИНТЕРВАЛЕ

©2022 М. Н. Силаева

(Воронеж, ВГУ; [marinanebolsina@yandex.ru](mailto:marinanebolsina@yandex.ru))

Для  $t \in (0, l)$  введём классы  $C_{i,j}$  непрерывных функций  $u(t)$  с нормой  $\|u\|_{0,0} = \sup_{t \in (0,l)} |\frac{u(t)}{t(l-t)}|$ ,  $\|u\|_{0,1} = \sup_{t \in (0,l)} |\frac{u(t)}{t}|$ ,  $\|u\|_{1,0} = \sup_{t \in (0,l)} |\frac{u(t)}{l-t}|$ ,  $\|u\|_{1,1} = \sup_{t \in (0,l)} |u(t)|$ .

Соответственно зададим операторы  $A_{i,j}$  ( $i = 0, 1; j = 0, 1$ ) выражением  $\frac{d^2}{dt^2}$  с областями определения

$$D(A_{i,j}) = \{u \in C_{i,j}, \frac{d^2 u}{dt^2} \in C_{i,j}\}.$$

**Теорема.** *Каждый из операторов  $A_{i,j}$  является генератором сжимающей полугруппы  $U(x, A_{i,j})$  в пространстве  $C_{i,j}$  соответственно. Для них справедливо представление*

$$\begin{aligned} U(x, A_{0,0})g(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^l [e^{-\frac{(2nl-t-\xi)^2}{4x}} - \\ &- e^{-\frac{(2nl-t+\xi)^2}{4x}}] g(\xi) d\xi = \int_0^l G(t, x, \xi, A_{0,0}) g(\xi) d\xi. \\ U(x, A_{0,1})g(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^l [e^{-\frac{(2nl+t+\xi)^2}{4x}} + \\ &+ e^{-\frac{(2nl+t-\xi)^2}{4x}}] g(\xi) d\xi = \int_0^l G(t, x, \xi, A_{0,1}) g(\xi) d\xi, \\ U(x, A_{1,0})g(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^l [e^{-\frac{(2nl+t-\xi)^2}{4x}} - \\ &- e^{-\frac{(2nl+t+\xi)^2}{4x}}] g(\xi) d\xi = \int_0^l G(t, x, \xi, A_{1,0}) g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

$$U(x, A_{1,1})g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^l [e^{-\frac{(2nl+t-\xi)^2}{4x}} + e^{-\frac{(2nl+t+\xi)^2}{4x}}] g(\xi) d\xi = \int_0^l G(t, x, \xi, A_{1,1}) g(\xi) d\xi.$$

и выполняются оценки

$$\|U(x, A_{0,0})\| \leq e^{-(\frac{\pi}{l})^2 x}; \|U(x, A_{0,1})\| \leq e^{-(\frac{\pi}{2l})^2 x}$$

$$\|U(x, A_{1,0})\| \leq e^{-(\frac{\pi}{2l})^2 x}; \|U(x, A_{1,1})\| \leq 1.$$

## ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

©2022 Ю. С. Солиев

(Москва; su1951@mail.ru)

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл (преобразование Гильберта)

$$Kf = K(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad (1)$$

где  $f(x)$  — плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси  $R$  функция.

Пусть  $L_p(R)$  — пространство всех измеримых на  $R$  функций  $f$  с обычной нормой,  $\omega_k(f, t)_p = \omega_k(f, t)_{L_p}$  — модуль гладкости  $k$ -го порядка  $f$  в  $L_p(R)$ ,  $L_p^r(R)$  — подпространство функций  $f \in L_p(R)$ , для которых производная  $f^{(r-1)}$  абсолютно непрерывна на  $R$  и  $\|f^{(r)}\|_p = \|f^{(r)}\|_{L_p} < \infty$ ,  $B_{p,\sigma}$  — множество целых функций экспоненциального типа  $\leq \sigma$ , принадлежащих  $L_p(R)$ .

Для  $f \in B_{p,\sigma}$  введём [1], [2] интерполяционный оператор

$$L_\sigma f = L_\sigma(f; x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sin c\sigma\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right),$$

$$\sin cx = \frac{\sin x}{x}, \sigma > 0. \quad (2)$$

Аппроксимируя плотность интеграла выражением (2), получим квадратурную формулу (ср. с [3],[4])

$$Kf = K(L_\sigma f; x) + R_\sigma f = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) (k\pi - \sigma x) \sin c^2 \frac{\sigma x - k\pi}{2} + R_\sigma f, \quad (3)$$

где  $R_\sigma f = R_\sigma(f; x)$  — остаточный член.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_p^r(R)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\sigma > 1$ . Если  $f(x) = O(|x| + 1)^{-d}$ ,  $dp > 1$ ,  $x \in R$ , то

$$\|R_\sigma f\|_p \leq C_{r,p} \sigma^{-r} \omega_1\left(f^{(r)}, \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

где  $C_{r,p}$  — постоянная, зависящая только от  $r$  и  $p$ .

**Следствие.** Пусть в условиях теоремы 1  $\omega_1(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Тогда для  $R_\sigma f$  справедлива равномерная оценка

$$\|R_\sigma f\|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+\frac{1}{p}}\right), p(r+\alpha) > 1.$$

Заметим, что если  $f \in B_{p,\sigma}$  и  $2\pi$  — периодична, то квадратурная формула (3) точна для любого тригонометрического полинома вида  $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ,  $n \leq [\sigma]$  ( $[\sigma]$  — целая часть  $\sigma$ ) (см. [5]).

Рассмотрим квадратурную формулу с кратными узлами для интеграла (1).

По аналогии с [6] для  $f \in B_{p,\sigma}$  введём интерполяционный оператор  $H_\sigma f = H_\sigma(f; x)$ , удовлетворяющий условиям  $H_\sigma^{(v)}\left(f; \frac{k\pi}{\sigma}\right) = f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)$  ( $v = \overline{0, m-1}$ ):

$$H_\sigma f = H_\sigma(f; x) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin c^m \sigma \left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right) \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{v!} \left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^v f^{(v)} \left( \frac{k\pi}{\sigma} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Kf &= K(H_\sigma f; x) + R_{\sigma m} f = \\ &= \frac{1}{2^{2n-1} \sigma^{2n}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=0}^{2n-1} \frac{1}{v!} f^{(v)} \left( \frac{k\pi}{\sigma} \right) \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n}^s \\ &\left( \frac{\sin 2\sigma(n-s) \left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)}{\left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v}} - \sum_{\mu=1}^{2n-v} \frac{(2\sigma(n-s))^{\mu-1} \cos \frac{\mu\pi}{2}}{(\mu-1)! \left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v-\mu+1}} \right) + \\ &+ R_{\sigma m} f, m = 2n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Kf &= K(H_\sigma f; x) + R_{\sigma m} f = \\ &= \frac{1}{2^{2n-2} \sigma^{2n-1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=0}^{2n-2} \frac{1}{v!} f^{(v)} \left( \frac{k\pi}{\sigma} \right) \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n-1}^s \\ &\left( \frac{\cos \sigma(2n-2s-1) \left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)}{\left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v-1}} - \right. \\ &\left. - \sum_{\mu=1}^{2n-v-1} \frac{(\sigma(2n-2s-1))^{\mu-1} \sin \frac{\mu\pi}{2}}{(\mu-1)! \left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v-\mu}} \right) \\ &+ R_{\sigma m} f, m = 2n-1; \end{aligned}$$

где  $C_n^k$  — биномиальные коэффициенты, а  $R_{\sigma m} f = R_{\sigma m}(f; x)$  — остаточный член.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in L_p^r(R)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\sigma > 1$ ,  $\omega_k(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$  и  $f^{(v)}(x) = O(|x| + 1)^{-d_v}$ ,  $d_v p > 1$ ,  $v = \overline{0, m-1}$ ,  $x \in R$ . Тогда

$$\|R_{\sigma m} f\|_p = O(\sigma^{-r-\alpha+m-1}), r + \alpha > m-1.$$

Ниже будем предполагать, что  $f(x)$  — непрерывная  $2\pi$  — периодическая функция. Положим  $\frac{p}{q} = N > 1$  и рассмотрим интерполяционную формулу [7]

$$P_n f = P_n(f; x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin cp(x - x_k) \sin cq(x - x_k) f(x_k),$$

$$x_k = \frac{k\pi}{p}, n = p + q.$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением  $P_n f$ , получим квадратурную формулу

$$Kf = K(P_n f; x) + R_{n1} f = \\ = \frac{1}{pq} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin q(x - x_k) \cos p(x - x_k) - q(x - x_k)}{(x - x_k)^2} f(x_k) + R_{n1} f,$$

где  $R_{n1} f = R_{n1}(f; x)$  — остаточный член.

Пусть  $H_\alpha^{(r)}$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, 0 < \alpha < 1$ ) — класс  $2\pi$  — периодических функций  $f(x)$ ,  $r$ -е производные которые удовлетворяют условию Гёльдера  $H_\alpha$ .

**Теорема 3.** Пусть  $p = mq$ ,  $m > 1$  ( $m$  — целое) и  $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$  ( $r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$ ). Тогда

$$\|R_{n1}(f; x)\|_C = O\left(\frac{\ln m}{(q(m-1))^{r+\alpha}}\right).$$

Пусть [8]  $Q_n f = Q_n(f; x)$  — тригонометрический полином порядка  $n = m + p$ ,  $p \leq m$ , интерполирующий  $f(x)$  по узлам  $x_k = \frac{2k\pi}{2m+1}$  ( $k = 0, 2m$ ):

$$Q_n f = Q_n(f; x) = \\ \frac{1}{(2m+1)(2p+1)} \sum_{k=0}^{2m} \frac{\sin \frac{2m+1}{2}(x - x_k) \sin \frac{2p+1}{2}(x - x_k)}{\sin^2 \frac{x-x_k}{2}} f(x_k).$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом  $Q_n f$ , получим квадратурную формулу

$$Kf = K(Q_n f; x) + R_{n2}f = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} (a_{m,p}(x - x_k) + \\ + \frac{n+1}{2p+1} b_{m,p,n}(x - x_k) - \frac{1}{2p+1} c_{m,p,n}(x - x_k)) f(x_k) + R_{n2}f,$$

где

$$a_{m,p}(x) = \sin \frac{m-p+1}{2} x \sin \frac{m-p}{2} x \csc \frac{x}{2}, \\ b_{m,p,n}(x) = \sin \frac{n-m+p-1}{2} x \sin \frac{n+m-p+1}{2} x \csc \frac{x}{2}, \\ c_{m,p,n}(x) = ((m-p) \sin \frac{n-m+p}{2} x \sin \frac{n+m-p+1}{2} x - \\ - \frac{n-m+p-3}{2} \cos \frac{2n-1}{2} x + \frac{1}{2} \sin \frac{n-m+p-1}{2} x \\ \cos \frac{n+m-p+1}{2} x \csc \frac{x}{2}) \csc \frac{x}{2},$$

а  $R_{n2}f$  — остаточный член.

**Теорема 4.** Пусть  $\frac{2m+1}{2p+1} = q$ ,  $q > 1$  ( $q$  — целое) и  $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$  ( $r \geq 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ). Тогда

$$\|R_{n2}(f; x)\|_C = O\left(\frac{\ln q}{(p(q-1))^{r+\alpha}}\right)$$

### Литература

1. *Rahman Q.I., Vertesi P.* On the  $L^p$  convergence of Lagrange interpolating entire functions of exponential type // J. Approx. Theory. 1992. Vol. 69. P. 302-317.
2. *Gensun F.* Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem and aliasing error // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 85. P. 115-131.

3. *Stenger F.* Approximation via Whittakers cardinal function // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 17. P. 222-240.

4. *Солнев Ю.С.* О синк-аппроксимации особых интегралов по действительной оси // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского, том 57. Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Казань. Изд-во Казанского математического общества. 2019. С. 312-315.

5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука. 1965. 408 с.

6. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М.: ГИФМЛ. 1962. 220 с.

7. *Бернштейн С.Н.* Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени // Собрание сочинений, том 2.М., Изд-во АН СССР. 1954. С. 446-467.

8. *Бернштейн С.Н.* Об одном классе интерполяционных полиномов // Собрание сочинений, том 2.М., Изд-во АН СССР. 1954. С. 146-454.

## СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЗИТИВНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА <sup>1</sup>

©2022 *П. С. Соловьёв*

(Казань, КФУ; *pavel.solovev.kpfu@mail.ru*)

Пусть  $\Omega$  — плоская область с липшицевой границей  $\Gamma$ ,  $\overline{\Omega}$  — замыкание области  $\Omega$ . Изучается задача нахождения наименьшего собственного значения  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\Lambda = [0, \infty)$ , и соответствующей положительной собственной функции  $u(x)$ ,

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов 20-31-90087, 20-08-01154.

$x \in \Omega$ , удовлетворяющих в обобщённом смысле однородному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка и однородному граничному условию Дирихле

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p(\lambda s(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = r(\lambda s(x))u, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Предположим, что функции  $p(\mu)$ ,  $r(\mu)$ ,  $\mu \in \Lambda$ ,  $s(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  являются непрерывными положительными. Задачи такого вида возникают при моделировании баланса заряженных частиц высокочастотного индукционного разряда пониженного давления [1–9].

При фиксированном  $\mu \in \Lambda$  через  $\gamma(\mu)$  обозначим минимальное собственное значение параметрической линейной задачи на собственные значения

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p(\mu s(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \gamma(\mu) r(\mu s(x))u, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда собственное значение исходной нелинейной задачи на собственные значения является корнем характеристического уравнения  $\gamma(\lambda) = 1$ . С помощью характеристического уравнения исследовано существование и единственность ведущего собственного значения и соответствующей положительной собственной функции обобщённой постановки дифференциальной задачи на собственные значения в частных производных второго порядка с нелинейной зависимостью от спектрального параметра.

Исходная нелинейная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется с помощью сеточной



схемы метода конечных элементов с линейными Лагранжевыми конечными элементами на регулярной треугольной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от размера треугольной сетки.

### Литература

1. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm–Liouville problem // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35. – No 4. – P. 416–426.
2. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. Existence of solutions for electron balance problem in the stationary radio-frequency induction discharges // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012103. – P. 1–6.
3. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu., Sidorov A. M. Third type boundary conditions for steady state ambipolar diffusion equation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012102. – P. 1–4.
4. Solov'ev S. I., Solov'ev P. S. Finite element approximation of the minimal eigenvalue of a nonlinear eigenvalue problem // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39. – No 7. – P. 949–956.
5. Samsonov A. A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042011. – P. 1–5.
6. Samsonov A. A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042012. – P. 1–5.
7. Solov'ev S. I. The error of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-

linearly occurring parameter //Comput. Math. Math. Phys. – 1992. – V. 32. – No 5. – P. 579–593.

8. *Solov'ev S. I.* Approximation of operator eigenvalue problems in a Hilbert space //IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012087. – P. 1–6.

9. *Solov'ev S. I.* Quadrature finite element method for elliptic eigenvalue problems //Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 856–863.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА <sup>1</sup>

©2022 Л. И. Сухочева

(Воронеж, ВГУ; *l.suchocheva@yandex.ru*)

Пусть  $\mathfrak{H}$  — пространство Крейна с индефинитной метрикой  $[x, y]$  [1],  $U$  — унитарный оператор в  $\mathfrak{H}$  ( $U : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ ,  $[Ux, Ux] = [x, x]$ ,  $x \in \mathfrak{H}$ ), обладающий свойством:

$$\operatorname{Re}[\xi(I - U)x, x] \geq 0, \text{ для некоторого } \xi \in \mathbb{C}, \xi \neq \bar{\xi} \quad (1)$$

Рассматриваются спектральные свойства такого оператора. Оказывается, что спектр  $U$  лежит на единичной окружности. Только собственные векторы, отвечающие собственным значениям  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = \xi/\bar{\xi}$ , могут иметь присоединённые и длина соответствующих жордановых цепочек не больше 2. При  $\lambda \neq 1$ ,  $\lambda \neq \xi/\bar{\xi}$

$$\mathfrak{L}_\lambda(U) = \operatorname{Ker}(U - \lambda I),$$

где  $\mathfrak{L}_\lambda(U)$  — корневое подпространство оператора  $U$ .

Получено необходимое и достаточное условие полноты системы корневых векторов оператора  $U$ : при условии, что

спектр  $U$  имеет не более счётного множества точек сгущения, система корневых векторов оператора  $U$  полна в  $\mathfrak{H}$  тогда и только тогда, когда ядра операторов  $(U - I)^2$ ,  $(U - \xi/\bar{\xi})^2$  невырождены. При этом невырожденность указанных ядер является следствием условия:

$$Ker(U - \lambda I) \cap \bar{R}(U - \lambda I) \in R(U - \lambda I) \quad \lambda = 1, \lambda = \xi/\bar{\xi}$$

Известно, что обратное преобразование Кэли-Неймана

$$K_{\lambda}^{-1}(U) = (\lambda U - \bar{\lambda} I)(U - I)^{-1} = A \quad \text{при } \lambda \neq \bar{\lambda}, 1 \notin \sigma_p(U)$$

$[\cdot, \cdot]$ -унитарному оператору  $U$  однозначным образом ставит в соответствие самосопряжённый оператор  $A$ , действующий в пространстве Крейна. Оказывается, что самосопряжённый оператор  $A = K_{\lambda}^{-1}(U)$  в пространстве Крейна  $\mathfrak{H}$  будет  $[\cdot, \cdot]$ -неотрицательным тогда и только тогда, когда унитарный оператор  $U$  удовлетворяет условию (1). В этом случае, как следствие, можно получить критерий полноты системы корневых векторов  $[\cdot, \cdot]$ -неотрицательного  $[\cdot, \cdot]$ -самосопряжённого оператора в терминах невырожденности  $Ker A^2$  в пространстве Крейна.

### Литература

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986. – 352 с.

УДК 517.977.56

## АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДА

©2022 З. Тран

(Воронеж, ВГУ; *tranduysp94@gmail.com*)

**Постановка задачи.** Пусть задан граф-звезда  $\Gamma$  с узлом  $\xi$  и рёбрами  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ):  $\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \gamma_k$ . Ориентация ребра  $\gamma_1$  определяется направлением “к узлу  $\xi$ ”, рёбер  $\gamma_k$  ( $k = \overline{2, m}$ ) – “от узла”; ребро  $\gamma_1$  параметризовано отрезком  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , а каждое ребро  $\gamma_k$  ( $k = \overline{2, m}$ ) – отрезком  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ; узлу  $\xi$  ставится в соответствие параметр  $\frac{\pi}{2}$ .

Процесс распределения тепла описывается уравнением:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right), \quad x, t \in \times(0, T), \quad (1)$$

во внутренней части каждого ребра и соотношениями в узле  $\xi$  (условия согласования):

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_1} = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} \quad (k = \overline{2, m}), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\frac{\pi}{2} \in \gamma_1} = \sum_{k=2}^m \alpha_k \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\frac{\pi}{2} \in \gamma_k} \quad (3)$$

Присоединяя к соотношениям (1) – (3) начальное

$$u(x, 0)_{\gamma_k} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = \overline{1, m}, \quad (4)$$

и граничные условия:

$$u(0, t)_{\gamma_1} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$u(\pi, t)_{\gamma_k} = 0, \quad (k = \overline{2, m}), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

получаем начально-краевую задачу (1) – (6), определяющую математическую модель процесса переноса тепла по сетевому носителю[1].

**Алгоритм определения приближенного решения задачи (1) – (6).** Алгоритм решения сформулированной начально-краевой задачи можно представить следующим образом.

1. Разобьём ребро  $\gamma_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$  точками деления  $x_i^1 \in \gamma_1$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , с шагом  $h = \frac{\pi}{2n}$ ; каждое ребро  $\gamma_k = [\frac{\pi}{2}, \pi]$  ( $k = \overline{2, m}$ ) разбивается точками деления  $x_i^k \in \gamma_k$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , с шагом  $h = \frac{\pi}{2n}$ ; отрезок  $[0, T]$  получает точки деления  $t_j = j\tau$ ,  $j = \overline{0, M}$  с шагом  $\tau = \frac{T}{M}$ . Область  $\Gamma \times [0, T] = \{(x, t) \in \gamma_k \times [0, T]\}$ ,  $k = \overline{1, m}$  изменения переменных  $x, t$  заменим дискретным множеством точек, которое назовём сеточным множеством (или сеткой), соответствующей области  $\Gamma \times [0, T]$ :

$$\Gamma_T^h = \{(x_i^k, t_j), x_i^k \in \gamma_k, i = \overline{0, N}; j = \overline{0, M}; k = \overline{1, m}\},$$

где  $x_i^1 = ih$ ,  $x_i^k = \frac{\pi}{2} + ih$ ,  $h = \frac{\pi}{2N}$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $k = \overline{2, m}$ ;  $t_j = j\tau$ ,  $\tau = \frac{T}{M}$ ;  $j = \overline{0, M}$ .

2. Все функции в исходной граничной задаче (1) – (6) заменим сеточными функциями, определёнными в узлах сетки  $\Gamma_T^h$ . Сеточную функцию, соответствующую функции  $u(x, t)$ , обозначим через  $(u_i^j)_k = u_k(ih, j\tau)$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $j = \overline{0, M}$ ;  $k = \overline{1, m}$ . Аналогично строится сеточная функция, соответствующие функциям  $\varphi(x)$ ,  $a(x)$ , которую обозначим следующим образом:  $(\varphi_i^j)_k = \varphi_k(ih, j\tau)$ ,  $(a_i)_k = a^k(ih)$ .

3. Заменим дифференциальные операторы в уравнении (1) на их конечно-разностные аналоги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)_{\gamma_k}}{\partial t} &= \frac{(u_i^{j+1})_k - (u_i^j)_k}{\tau} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u(x, t)_{\gamma_k}}{\partial x} \right) &= \\ &= \frac{(a_{i+1})_k \frac{(u_{i+1}^{j+1})_k - (u_i^{j+1})_k}{h} - (a_i)_k \frac{(u_i^{j+1})_k - (u_{i-1}^{j+1})_k}{h}}{h} \end{aligned}$$

В результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{(u_i^{j+1})_k - (u_i^j)_k}{\tau} = \frac{(a_{i+1})_k \frac{(u_{i+1}^{j+1})_k - (u_i^{j+1})_k}{h} - (a_i)_k \frac{(u_i^{j+1})_k - (u_{i-1}^{j+1})_k}{h}}{h} \quad (7)$$

$$(u_N^{j+1})_1 = (u_0^{j+1})_k, (j = \overline{0, M-1}; k = \overline{2, m}) \quad (8)$$

$$\frac{(u_N^{j+1})_1 - (u_{N-1}^{j+1})_1}{h} = \sum_{k=2}^m \alpha_k \frac{(u_1^{j+1})_k - (u_0^{j+1})_k}{h}, \quad (9)$$

$$(u_i^0)_k = (\varphi_i^0)_k, (i = \overline{0, N}; k = \overline{1, m}) \quad (10)$$

$$(u_0^{j+1})_1 = 0, (j = \overline{0, M-1}), \quad (11)$$

$$(u_N^{j+1})_k = 0, (j = \overline{0, M-1}; k = \overline{2, m}), \quad (12)$$

где соотношение (7) определяет неявную разностную схему для уравнения (1).

4. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений (7)-(12), используется классический метод прогонки [2]. Заметим, что для анализа более общих систем вида (1) можно использовать другой подход. Систему (7)-(12) можно привести к каноническому виду (см.[2]):

$$Au_{i+1}^{j+1} - Bu_i^{j+1} + Cu_{i-1}^{j+1} = F, \quad (13)$$

где  $A = \frac{\tau}{h^2}$ ,  $B = \frac{2\tau}{h^2} + 1$ ,  $C = \frac{\tau}{h^2}$ ,  $F = -u_i^j$ . Соотношение (13) образует трехточечную разностную схему. Предположим, что существуют такие наборы чисел  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  ( $i = \overline{0, N-1}$ ), при которых

$$u_i^{j+1} = \alpha_i u_{i+1}^{j+1} + \beta_i, \quad (14)$$

т.е. трехточечное уравнение второго порядка (13) редуцируется к двухточечному уравнению первого порядка (14).

Уменьшим в соотношении (14) индекс на единицу и полученное выражение  $u_{i-1}^{j+1} = \alpha_{i-1}u_i^{j+1} + \beta_{i-1}$ , подставим в уравнение (13):

$$Au_{i+1}^{j+1} - Bu_i^{j+1} + C\alpha_{i-1}u_i^{j+1} + C\beta_{i-1} = F,$$

откуда получаем

$$u_i^{j+1} = \frac{A}{B - C\alpha_{i-1}}u_{i+1}^{j+1} + \frac{C\beta_{i-1} - F}{B - C\alpha_{i-1}}.$$

Тогда последнее равенство примет вид (14), если при всех  $i = \overline{1, N}$  выполняются соотношения:

$$\alpha_i = \frac{A}{B - C\alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{C\beta_{i-1} - F}{B - C\alpha_{i-1}},$$

Для определения параметров  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  необходимо знать  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , которые находятся из граничных условий. Последовательное применение формул (14) дают искомые  $u_{N-1}^{j+1}, u_{N-2}^{j+1}, \dots, u_1^{j+1}$ , при этом  $u_N^{j+1}$  определяются из граничных условий.

### Литература

1. *Тран З. Провоторов В.В.* Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределёнными параметрами на сети // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021;9(3).
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Изд. 5-е. – М. Наука. 1977. – 736 с.

# УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННЫМИ НОРМАМИ

©2022 *Н. И. Трусова*

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского;  
*trusova.nat@gmail.com*)

Пусть  $D = \{x : 0 < x_i < b_i\}$  — конечный параллелепипед в  $\mathbb{R}_n$ ,  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса  $(1, 2, \dots, n)$  и  $D = D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar{\alpha}}}$ . Через  $m$  обозначим размерность параллелепипеда  $D_{x_\alpha}$ ,  $0 \leq m \leq n$ . Выражение

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{D_{t_\alpha}^{(m)}} k_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha, x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha, \quad (1)$$

$x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}})$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  будем называть частно-интегральным оператором (сокращение ЧИ-оператор), отвечающим ядру  $k_\alpha = k_\alpha(x; t_\alpha)$ .

При  $\alpha = 0$  ( $\Rightarrow m = 0$ ) в (10) оператор  $K_0$  — оператор умножения на функцию, а при  $\alpha = (1, 2, \dots, n)$  ( $m = n$ ) — оператор  $K_{1, \dots, n}^{(n)}$  — интегральный оператор. Оператор (10) будем называть полным, если в него включены «крайние» операторы  $K_0$  и  $K_{1, \dots, n}^{(n)}$ .

Частно-интегральным уравнением Фредгольма второго рода с полным ЧИ-оператором (10) называется уравнение

$$\varphi(x) - \lambda K_\alpha \varphi(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n. \quad (2)$$

Уравнение (11) в  $\mathbb{R}_2$  с непрерывными ядрами и в пространстве непрерывных функций изучались в [1, 2], в пространствах функций со смешанными  $\sup$ - $L$  нормами и в анизотропном пространстве Лебега  $L_{\mathbf{p}}$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  в [3].

Решение (11) ищем методом последовательных приближений в пространстве непрерывных функций  $C(D_{x_{\bar{\alpha}}})$  со зна-



чением в пространстве Лебега  $L_p(D_{x_\alpha})$ , которое обозначим через  $CL_p$ .

Мы будем использовать анизотропное пространство Лебега  $L_{\mathbf{p}}(D)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $p_i \geq 1$  следующего вида (см. [4]). Пусть  $x = (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3})$ , тогда

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{x_{\alpha_1}}, D_{x_{\alpha_2}}, D_{x_{\alpha_3}})} = \\ & = \left( \int_{D_{\alpha_3}} \left( \int_{D_{\alpha_2}} \left[ \int_{D_{\alpha_1}} |u(x_{\alpha_1})|^{p_1} dx_{\alpha_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_{\alpha_2} \right)^{\frac{p_3}{p_2}} dx_{\alpha_3} \right)^{\frac{1}{p_3}}. \end{aligned}$$

**Критерий ограниченности ЧИ-оператора в  $CL_p$ .** В (10) все переменные разбиваем на три группы: первая  $t_\alpha$  — переменные интегрирования ЧИ-оператора, вторая  $x_\beta$  — переменные, порождённые  $L_p$ -нормами (где из них  $x_{\beta^*}$  — переменные, номера которых не совпадают с номерами мультииндекса  $\alpha$ ) и третья группа  $x_\tau$  — переменные, по которым применяется суп-норма (где из них  $x_{\tau^*}$  — переменные, номера которых не совпадают с номерами мультииндекса  $\alpha$ ).

**Теорема 1.** Пусть  $p \geq 1$  и  $1/p + 1/p' = 1$ .

Для ограниченности полного оператора  $K_\alpha^{(m)}$  в пространстве  $C(D_{x_\tau}; L_p(D_{x_{\beta^*}} \times D_{x_\beta})) = CL_p$  достаточно, чтобы

$$u(t_\alpha, x_{\tau^*}, x_{\beta^*}) \in C(D_{x_{\tau^*}}; L_{(p, p^2)}(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\beta^*}})),$$

$$k_\alpha = k_\alpha(x; t_\alpha) \in C(D_{x_\tau}; L_{(p', p'p', p)}(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\beta^*}} \times D_{x_\beta})).$$

При этом справедливо неравенство

$$\|K_\alpha^{(m)} u\|_{CL_p} \leq C_\alpha \|u\|_{C(D_{x_{\tau^*}}; L_{(p, p^2)}(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\beta^*}}))},$$

где

$$C_\alpha = \|k_\alpha\|_{C(D_{x_\tau}; L_{(p', p'p', p)}(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\beta^*}} \times D_{x_\beta}))}.$$

Пусть

$$A_\alpha = \sup_{1 \leq i \leq \ell} \left\{ [\mu(D_{x_{\beta^*}})]^{\frac{1}{p(p')^\ell}}, [\mu(D_{x_{\beta^*}})]^{\frac{1}{p^2(p')^i}}, [\mu(D_{x_{\beta^*}})]^{\frac{1}{p^i p'}}, \right\}.$$

$$B_\alpha = \max \left\{ \|k_\alpha\|_{C(D_{x_\tau}; L_{(p', \infty, p)}(D_{t_\alpha, x_{\beta^*}, x_\beta)))}, \right. \\ \left. \|k_\alpha\|_{C(D_{x_{\tau^*}}; L_{(p, p', \infty)}(D_{x_\alpha, t_\alpha, x_{\beta^*}}))} \right\}.$$

**Теорема 2.** Пусть ядро  $k_\alpha$  оператора (10) и правая часть уравнения (11) удовлетворяют условиям

$$F_\alpha = \sup \left\{ \|k_\alpha\|_{C(D_{x_\tau}; L_{(p', p^\ell p', p)}(D_{t_\alpha, x_{\beta^*}, x_\beta)))} \right\}_{\ell=1}^\infty < \infty,$$

$$\|f\|_{\Lambda_{CL_p}^\ell} = \sup \left\{ \|f\|_{C(D_{x_{\tau^*}}; L_{(p, p^{\ell+1})}(D_{t_\alpha, x_{\beta^*}}))} \right\}_{\ell=1}^\infty < \infty,$$

и пусть  $|\lambda| A_\alpha B_\alpha < 1$ . Тогда в  $CL_p$  существует предел  $\Phi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu$  функциональной последовательности  $\Phi_\nu f = \varphi^{(\nu)}(x) = \sum_{\ell=0}^\nu \lambda^\ell K_\alpha^\ell f(x)$ . Оператор  $\Phi$  действует ограниченно из  $C(D_{x_{\tau^*}}; L_{(p, \infty)}(D_{t_\alpha, x_{\beta^*}}))$  в  $CL_p$  и удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi\|_{CL_p} \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\Phi_\nu\|_{CL_p}.$$

Решение уравнения Фредгольма с ЧИ-оператором (10) единственно и существует в виде операторного ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{\ell=0}^\infty \lambda^\ell K_\alpha^\ell f, \text{ причём } \|\varphi\|_{CL_p} \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_{CL_p}^\ell}}{1 - |\lambda| A_\alpha B_\alpha}.$$

Схема доказательства аналогична схеме приведённой в [3] и мы её не приводим.

## Литература

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000. - 560 p.

2. *Калитвин А. С., Фролова Е. В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк: ЛГПУ, 2004. - 195 с.

3. *Lyakhov L. N., Inozemcev A. I., Trusova N. I.* About Fredgholm equations for partial integral in  $\mathbb{R}_2$ . Jornal Of Mathematical Sciences. - 2020. - Vol. 251. - № 6. - P. 839-849.

4. *Бессов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М: Наука, 1975. - 478 с.

## ЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КЛАССЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

©2022 *Н. И. Трусова*

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского;  
*trusova.nat@gmail.com*)

Частным интегралом называется выражение

$$A = \int_{\Omega} k(x', x''; t) f(t, x'') dt, \quad (1)$$

где  $\Omega \in \mathbb{R}_m$ ,  $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}$ .

Положим  $f(x) = u\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) = u\left(\sqrt{|x'|^2 + |x''|^2}\right)$ .

Частный интеграл (1) в сферических координатах  $x = r\Theta$ ,  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$ ,  $|\Theta| = 1$  примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{|t|=\rho < \sqrt{R^2 - |x''|^2}} k(x', x''; t) f(t, x'') dt = \\ & \int_{|t|=1} dS \int_{\rho=0}^{\sqrt{R^2 - r^2 \Theta'^2}} k(x', \rho\Theta''; |\rho\Theta'|) f(|\rho\Theta'|, \rho\Theta'') \rho^{m-1} d\rho. \end{aligned}$$

Как видим, получили ЧИ по  $\rho$  с переменным верхним пределом, который более напоминает интеграл Вольтерра.

Рассмотрим частный случай такой конструкции частного интеграла. Пусть интеграл берётся по шару в  $\mathbb{R}_m$  от сферически симметричных функций по соответствующей части переменных. Тогда

$$A = \int_{|t| < R} k(x', x''; |t|) u(|t|, x'') dt,$$

$x = (x', x'') \in \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}$ . Применим к (1) сферическое преобразование  $t = r\Theta$ ,  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$ ,  $|\Theta| = 1$ . В результате получим одномерный частный интеграл со степенным весом от радиальной функции

$$\begin{aligned} & \int_{|t| < R} k(x', x''; |t|) u(|t|, x'') dt = \\ & = |S_1(m)| \int_0^R k(x; r) u(r, x'') r^{m-1} dr, \quad (r, x'') \in \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_{n-1}. \end{aligned}$$

Здесь уже видим частный интеграл с весом  $r^{m-1}$ .

Рассмотрим многоосевую сферическую симметрию

$$f(t, x'') = f\left(\sqrt{t_{1,1}^2 + \dots + t_{1,\ell_1}^2}, \dots, \sqrt{t_{m,1}^2 + \dots + t_{m,\ell_m}^2}, x''\right).$$

Тогда (1) примет вид

$$\prod_{i=1}^m |S_1(\ell_i)| \int_{r_1=0}^{\rho_1} \dots \int_{r_m=0}^{\rho_m} k(r, x''; r) u(r_1, \dots, r_m, x'') \prod_{i=1}^m r_i^{\ell_i-1} dr,$$

где  $m = \ell_1 + \dots + \ell_m$ ,  $r_i = |x_i^{(\ell_i)}|$ ,  $r = (r_1, \dots, r_m)$ . Таким образом, ЧИ с целыми параметрами  $\gamma_i = \ell_i - 1$ , могут интерпретироваться, как ЧИ функций от многоосевой сферической симметрии. В общем случае для  $\gamma_i > -1$  имеем

$$\int_0^{a_1} \dots \int_0^{a_m} k(x, x''; t) u(t, x'') \prod_{i=1}^m t_i^{\gamma_i} dt.$$

Здесь интегрирование происходит по параллелепипеду с рёбрами параллельными координатным осям.

Справедливо следующее утверждение о сложении коэффициентов сферической симметрии частного интегрирования радиальных функций при условии, что все параметры  $\gamma_i > -1$  (см. [1]).

**Теорема 1.** Пусть

$$\widehat{f}(t, x'') = f\left(\sqrt{t_1^2 + \dots + t_m^2}, x''\right)$$

и

$$I = \int_{t \in \mathbb{R}_m, |t| < R} k(x', x''; |t|) \widehat{f}(t, x'') \prod_{i=1}^m t_i^{\gamma_i} dt.$$

Тогда для любых параметров  $\gamma_i > -1$  имеет место равенство

$$I = \int_0^R k(x', x''; r) f(r, x'') r^{m+|\gamma|-1} dr.$$

Доказательство следует из возможности применения сферического преобразования координат с параметрами  $\gamma_i > -1$ . Действительно, полагая  $t = r\Theta$ ,  $|\Theta| = 1$ , получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{S_1(m)} \prod_{i=1}^m \Theta_i^{\gamma_i} dS \int_0^R k(x', x''; r) f(r, x'') r^{m+|\gamma|-1} dr = \\ &= |S_1(m)|_\gamma \int_0^R k(x', x''; r) f(r, x'') r^{m+|\gamma|-1} dr. \end{aligned}$$

Площадь единичной сферы определяется через «площадь нагруженной сферы»

$$|S_1(m)|_\gamma = 2^n |S_1^+(m)|_\gamma = 2^n \int_{S_1^+(m) = \{|\Theta|=1, \Theta_i > 0\}} \prod_{i=1}^m \Theta_i^{\gamma_i} dS,$$

$$\gamma_i > -1.$$

Таким образом, многомерный весовой частно-интегральный оператор по шару от радиальной функции является весовым одномерным частно-интегральным оператором с новым степенным весом  $r^{m+|\gamma|-1}$  при условии  $m + |\gamma| > 0$ .

### Литература

1. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательными параметрами операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения. Дифференциальные уравнения. - 2020. - Т. 56. № 12. С. 1-11.

## РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

©2022 *В. И. Усков, В. А. Анохина, В. С. Московская, П. В. Трофименко*  
(Воронеж, ВГЛТУ; *vum1@yandex.ru*)

Дифференциальными уравнениями и их системами второго порядка описываются физические, экономические процессы [1] и т.д. С помощью метода конечных разностей их можно свести к рекуррентным соотношениям второго порядка. Такой метод применялся к исследованию нелинейной математической модели шнекового рабочего органа лесопожарной грунтометательной машины [2].

Рассмотрим скалярное рекуррентное соотношение второго порядка:

$$y_{i+2} + ay_{i+1} + by_i = f_i, \quad (1)$$

где  $a, b, c$  — заданные постоянные,  $y_i$  — искомая последовательность,  $f_i$  — заданная последовательность,  $i \geq 0$ , и векторное рекуррентное соотношение второго порядка:

$$Ay_{i+2} = By_{i+1} + F_i, \quad (2)$$

где  $A, B$  — заданные квадратные матрицы, причём  $\det A = 0$ ,  $y_i$  — искомая последовательность,  $F_i$  — заданная последовательность,  $i \geq 0$ .

Цель настоящей работы: проиллюстрировать полученные в [2], [3] результаты на примерах.

**Решение скалярного соотношения (1).** Введём характеристическое уравнение  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ . Обозначим  $D = a^2 - 4b$  — дискриминант,  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни этого уравнения.

Получена общая формула  $y_i$  в зависимости от знака  $D$ .

**Теорема 1.** При  $D > 0$  общее решение соотношения (1) равно

$$y_i = c_1 \lambda_1^i + c_2 \lambda_2^i + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_2^{i-1-k} - \lambda_1^{i-1-k}}{\lambda_2 - \lambda_1} f_k.$$

При  $D = 0$ , в обозначении  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , общее решение соотношения (1) равно

$$y_i = c_1 \lambda^i + c_2 i \lambda^{i-1} + \sum_{k=0}^{i-2} (i-1-k) \lambda^{i-2-k} f_k,$$

где  $c_1, c_2$  обозначены произвольные постоянные.

**Решение векторного соотношения (2).** Рассматривается случай  $\dim \text{Ker } A = 1$ . Вводятся проектор  $Q$  на  $\text{Coker } A$ , сужение  $\tilde{A}$  оператора  $A$  на  $\text{Coim } A$ , полуобратный оператор  $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q) : \text{Im } A \rightarrow \text{Coim } A$ ; фиксируются элементы  $e \in \text{Ker } A$ ,  $e \neq 0$ ,  $\varphi \in \text{Coker } A$ . В  $\text{Coim } A$  вводится скалярное произведение  $\langle, \rangle$  так, что  $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$ .

Получен следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $d = \langle QBe, \varphi \rangle \neq 0$ . Тогда соотношение (2) равносильно системе

$$y_{i+2} = Ky_{i+1} + \Phi_i, \quad (3)$$

$$< QB y_{i+1}, \varphi > + < QF_i, \varphi > = 0, \quad (4)$$

где

$$K(\cdot) = A^{-1}B(\cdot) - d^{-1} < QBA^{-1}B(\cdot), \varphi > e,$$

$$\Phi_i = A^{-1}F_i - d^{-1}(< QBA^{-1}F_i, \varphi > + < QF_{i+1}, \varphi >)e.$$

Для решения следующих двух примеров применим теорему 1.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу:

$$y_{i+2} - 15y_{i+1} + 56y_i = (i+2)^i, \quad i \geq 0,$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 4.$$

Имеем для всех  $i \geq 2$ :

$$y_i = 4 \cdot 8^i - 4 \cdot 7^i + \sum_{k=0}^{i-1} (8^{i-1-k} - 7^{i-1-k})(k+2)^k.$$

Выпишем первые члены этой последовательности:  
0, 4, 61, 7010, 66411.

**Пример 2.** Рассмотрим задачу:

$$y_{i+2} - 12y_{i+1} + 36y_i = i!, \quad i \geq 0,$$

$$y_0 = -5, \quad y_1 = 0.$$

Имеем для всех  $i \geq 2$ :

$$y_i = -5 \cdot 6^i + 30 \cdot i \cdot 6^{i-1} + \sum_{k=0}^{i-2} (i-1-k) 6^{i-2-k} k!.$$

Выпишем первые члены этой последовательности:  
-5, 0, 181, 2173, 19562, 156522.

К следующему примеру применим теорему 2.



**Пример 3.** Рассмотрим однородное соотношение для (2) с искомой вектор-последовательностью  $y_i = (v_i, w_i, x_i)$  и матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Имеем:  $d = 3 \neq 0$ . Тогда данное соотношение равносильно (3) с оператором

$$K = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1.5 \\ -0.5 & -2 & -0.5 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

и (4)

$$w_{i+1} + x_{i+1} = 0.$$

### Литература

1. Кукленкова А.А. Применение дифференциальных уравнений в моделировании экономических процессов // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2019. – № 4-3. – С. 60–63.
2. Попиков П.И., Поздняков А.К., Усков В.И., Лысыч М.Н., Гнусов М.А. Теоретическое исследование кинематических и динамических характеристик шнекового рабочего органа лесопожарной грунтометательной машины // Лесотехнический журнал. – 2021. – Т. 11. – №. 3 (43). – С. 140–151.
3. Усков В.И., Анжасурова Т.М. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка // Молодой учёный. – 2019. – №. 42 (280). – С. 1–6.

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБОГО  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО  
УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ  
МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ  
КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА <sup>1</sup>**

©2022 *А. С. Устюжанинова*

(Воронеж, Воронежский государственный университет;  
*nastyzhka@gmail.com*)

©2022 *М. В. Турбин*

(Воронеж, Воронежский государственный университет;  
*mrmike@mail.ru*)

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$  с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^3$  на промежутке времени  $[0; T], 0 < T < \infty$  рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \kappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \kappa \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \Delta v}{\partial x_i} + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0; \quad (2)$$

$$v(x, 0) = a(x), \quad x \in \Omega; \quad (3)$$

$$v|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0. \quad (4)$$

Система (1)-(2) впервые была введена в рассмотрение В. А. Павловским [1] и подтверждается экспериментальными исследованиями растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы [2,3]. Существование слабого решения (1)-(4) на произвольном конечном отрезке  $[0, T]$  доказано в работе [4].

Рассматривается вопрос о существовании слабого решения задачи оптимального управления с обратной связью для

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00051).

задачи (1)-(4). Введём пространство

$$W = \{u : u \in L_\infty(0, T; V^2), u' \in L_2(0, T; V^1)\}$$

с нормой  $\|u\|_W = \|u\|_{L_\infty(0, T; V^2)} + \|u'\|_{L_2(0, T; V^1)}$ .

Предполагается, что внешняя сила (которая и является управлением) принадлежит образу некоторого многозначного отображения  $\Psi : W \rightharpoonup L_2(0, T; V^0)$ , которое зависит от скорости движения жидкости:

$$f \in \Psi(v). \quad (5)$$

Отображение  $\Psi$  определено на  $W$ , имеет непустые, компактные, выпуклые значения, полунепрерывно сверху, компактно, глобально ограничено и слабо замкнуто.

Для доказательства существования решения рассматриваемой задачи оптимального управления с обратной связью на основе аппроксимационно-топологического подхода сначала показывается, что существует решение задачи управления с обратной связью. После чего устанавливается, что среди слабых решений задачи управления существует решение дающее минимум заданному функционалу качества.

**Определение 1.** Пусть  $a \in V^2$ . Пара функций  $(v, f) \in W \times L_2(0, T; V^0)$  называется слабым решением задачи (1)-(5), если она удовлетворяет начальному условию  $v(0) = a$ , условию обратной связи  $f \in \Psi(v)$  и равенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v' \varphi dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \\ & + \kappa \int_{\Omega} \nabla(v') : \nabla \varphi dx + \kappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned}$$

для любого  $\varphi \in V^1$  и почти всех  $t \in (0, T)$ .

Обозначим через  $\Sigma \subset W \times L_2(0, T; V^0)$  множество всех слабых решений задачи (1)-(5). Рассмотрим произвольный ограниченный снизу, слабо замкнутый функционал качества  $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основным результатом является следующая теорема о существовании оптимального решения задачи управления с обратной связью:

**Теорема 1.** *Для любых определённых выше  $\Psi$  и  $\Phi$  задача (1)-(5) имеет хотя бы одно слабое решение  $(v_*, f_*)$  такое, что*

$$\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

### Литература

1. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. - 1971. - Т. 200. - №. 4. - С. 809-812.
2. Амфилохийев В. Б. и др. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленинградск. ордена Ленина кораблестроительного института. - 1975. - Т. 96. - С. 3-9.
3. Амфилохийев В. Б., Павловский В. А. Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах // Тр. Ленинградск. ордена Ленина кораблестроительного института. - 1976. - Т. 104. - С. 3-5.
4. Турбин М. В., Устюжанинова А. С. Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров // Изв. вузов. Математика. - 2019. - №. 8. - С. 62-78.

# НУЛИ ФУНКЦИОНАЛОВ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ МАЙКЛА О СЕЧЕНИЯХ

©2022 Т. Н. Фоменко  
(Москва, МГУ; *tn-fomenko@yandex.ru*)

Доклад посвящён некоторым результатам о существовании нулей поисковых функционалов и их применению к проблеме существования непрерывных сечений многозначных отображений.

В 2009–2013 автором было введено понятие  $(\alpha, \beta)$ -поискового функционала и представлено несколько версий каскадного поиска нулей таких функционалов в метрическом пространстве [1,2]. В дальнейшем эти результаты были развиты и распространены на квазиметрические пространства [3]. Для метрических пространств была получена теорема о сохранении существования нулей у семейства многозначных функционалов при изменении числового параметра [4]. Перечисленные результаты дали ряд следствий о существовании и аппроксимации неподвижных точек и совпадений однозначных и многозначных отображений метрических и квазиметрических пространств, а также о сохранении существования неподвижных точек и совпадений параметрических семейств отображений при изменении числового параметра, обобщающих некоторые известные теоремы.

При обсуждении этих результатов возник вопрос о применении их к задаче о существовании непрерывных сечений многозначных отображений и о связи с известной теоремой Майкла о сечениях. Как известно, в 1956 году Эрнест Майкл (Ernest Michael) доказал знаменитую теорему о существовании непрерывного однозначного сечения у многозначного отображения метрических пространств (см. [5]).

Эта задача является важной и востребованной для приложений. Имеется много работ разных авторов по этой те-

матике. В частности, многозначные отображения возникают как обратные к однозначным. Например, пусть  $X$  и  $Y$  — топологические пространства,  $f : X \rightarrow Y$  — сюръективное отображение, и многозначное отображение  $F : Y \rightrightarrows X$  обратно к  $f$ . Если исходное отображение  $f$  непрерывно, и многозначное отображение  $F$  имеет непрерывное однозначное сечение  $\varphi : Y \rightarrow X$  (то есть для любого  $y \in Y$  верно, что  $\varphi(y) \in F(y)$ ), то очевидно, что  $Y$  гомеоморфно подпространству  $\varphi(Y) \subseteq X$ , а в случае сюръективности сечения  $\varphi$  отображение  $f$  задаёт гомеоморфизм между  $X$  и  $Y$ . Как известно, задача о существовании гомеоморфизма является важнейшей задачей топологии.

Напомним следующее определение.

**Определение.** [6] Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Многозначное отображение  $F : X \rightrightarrows Y$  (с непустыми образами) называется *полунепрерывным снизу*, если для любого открытого подмножества  $U \subseteq Y$  его полный (расширенный) прообраз  $F^{-1}(U) := \{x \in X | F(x) \cap U \neq \emptyset\}$  открыт в  $X$ .

Достаточные условия и полезный критерий полунепрерывности снизу многозначного отображения имеются в [7].

В докладе представлена теорема, обобщающая теорему Майкла. Кроме того, получена следующая параметрическая версия теоремы Майкла.

**Теорема.** Пусть  $X$  паракомпактно,  $(Y, \|\cdot\|)$  — банахово пространство,  $F_t : X \rightrightarrows Y, t \in [0; 1]$ , семейство многозначных полунепрерывных снизу отображений с непустыми замкнутыми выпуклыми образами. Пусть  $W$  открыто в полном метрическом пространстве  $(C(X, Y), \mu)$  непрерывных отображений ( $\mu(f, g) := \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|$ ,  $f, g \in C(X, Y)$ ),  $M_W := \{(f, t) \in W \times [0; 1] | f \text{ непрерывное сечение } F_t\} \neq \emptyset$ , и на границе  $\partial W$  нет

непрерывных сечений у любого отображения  $F_t, t \in [0; 1]$ . Пусть также для некоторой возрастающей непрерывной функции  $\theta : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  верно, что

$$H(F_t(x), F_{t'}(x)) \leq |\theta(t) - \theta(t')|,$$

для всех  $t$  таких, что существует  $(f, t) \in M_W$ , и для любых  $t' \in [0; 1]$ . Здесь  $H(A, B)$  — метрика Хаусдорфа. Тогда, если есть непрерывное сечение  $f_0 \in W$  у отображения  $F_0$ , то есть и непрерывное сечение  $f_1 \in W$  у отображения  $F_1$ .

### Литература

1. *Fomenko T.N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of  $n$  one-valued or multi-valued mappings. // *Topology and its Applications*, 157, 760–773 (2010)
2. *Фоменко Т.Н.* Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии. // *Математические заметки*, 93:1, 127–143 (2013).
3. *Фоменко Т.Н.* Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в  $f$ -квазиметрическом пространстве. // *Математические заметки*, 110:4, 598–609 (2021).
4. *Захарян Ю.Н., Фоменко Т.Н.* Сохранение существования нулей у семейства многозначных функционалов и некоторые следствия. // *Математические заметки*, МИАН (Москва), 108:6, 837–850 (2020).
5. *Michael E.* Continuous selections I. // *Ann. of Math.* 63, 361–381 (1956).
6. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. // *КомКнига*, Москва, 2005.

7. Гельман Б.Д. Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки. //Математические заметки, 78:2, 212–222 (2005).

## ОБ ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРНОГО ПЕРЕМЕННОГО

©2022 В. И. Фомин

(Тамбов, ТГУ им. Г.Р.Державина; *vasiliyfomin@bk.ru*)

Пусть  $E$  — вещественное банахово пространство;  $L(E)$  — полная нормированная алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве  $E$ ;  $A, B \in L(E)$ ;  $A \neq B$ . Рассмотрим операторный отрезок  $[A, B] = \{\Lambda = (1 - t)A + tB : 0 \leq t \leq 1\}$ . Элементы отрезка  $[A, B]$  условимся называть операторными точками. Оператор из  $[A, B]$ , получаемый при  $t = t_*$ , будем обозначать через  $\Lambda_*$ . Введём на  $[A, B]$  отношение порядка:  $\Lambda_* \preceq \Lambda_{**}$ , если  $t_* \leq t_{**}$  (выполнимость свойств рефлексивности, транзитивности и антисимметричности очевидна). Заметим, что  $A \preceq \Lambda \preceq B$  для любого  $\Lambda \in [A, B]$ . Если  $AB = BA$ , то  $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1$  для любых  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in [A, B]$ . Если  $\Lambda_*, \Lambda_{**} \in [A, B]$ ,  $\Lambda_* \prec \Lambda_{**}$ , то  $[\Lambda_*, \Lambda_{**}] \subseteq [A, B]$ . Пусть задана функция  $Y = \Phi(\Lambda)$ ,  $\Lambda \in D(\Phi)$ ,  $D(\Phi) \subseteq L(E)$ ;  $R(\Phi) \subseteq L(E)$  и существуют такие  $A, B \in D(\Phi)$ , что  $[A, B] \subseteq D(\Phi)$ . Рассмотрим произвольное разбиение отрезка  $[0, 1]$  на  $n$  частей:  $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i]$ , где  $t_0 = 0$ ,  $t_n = 1$ ,  $t_{i-1} < t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Это разбиение порождает разбиение отрезка  $[A, B]$  на  $n$  частей:  $[A, B] = \bigcup_{i=1}^n [\Lambda_{i-1}, \Lambda_i]$ , где  $\Lambda_0 = A$ ,  $\Lambda_n = B$ ,  $\Lambda_{i-1} \prec \Lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Рассмотрим диаметры полученных разбиений  $\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \delta t_i$ ,  $\nu = \max_{1 \leq i \leq n} \|\Delta \Lambda_i\|$ , где  $\delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $\Delta \Lambda_i = \Lambda_i - \Lambda_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Заметим, что  $\nu = \|B - A\|\mu$ , следовательно,  $\nu \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mu \rightarrow 0$ . Выберем на каждой части разбиения отрезка  $[0, 1]$  произволь-



ным образом по одной точке:  $\psi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Это индуцирует выбор на каждой части разбиения отрезка  $[A, B]$  по одной операторной точке:  $\Psi_i \in [\Lambda_{i-1}, \Lambda_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $\Psi_i = (1 - \psi_i)A + \psi_i B$ . Соответствующая интегральная сумма функции  $Y = \Phi(\Lambda)$  имеет вид

$$S_n(\Lambda_i, \Psi_i) = \sum_{i=1}^n \Phi(\Psi_i) \Delta \Lambda_i. \quad (1)$$

**Определение 1.** Оператор  $H \in L(E)$  называется пределом интегральных сумм (1) при  $\nu \rightarrow 0$ , если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \nu < \delta$  и любом выборе операторных точек  $\Psi_i$  выполняется неравенство  $\|S_n(\Lambda_i, \Psi_i) - H\| < \varepsilon$ . Обозначение:

$$H = \lim_{\nu \rightarrow 0} S_n(\Lambda_i, \Psi_i). \quad (2)$$

**Определение 2.** Операторная функция  $Y = \Phi(\Lambda)$  называется интегрируемой по Риману на отрезке  $[A, B]$ , если существует предел вида (2), при этом оператор  $H$  называется интегралом Римана от функции  $Y = \Phi(\Lambda)$  на отрезке  $[A, B]$  и обозначается символом  $\int_A^B \Phi(\Lambda) d\Lambda$ . Таким образом, по определению,

$$\int_A^B \Phi(\Lambda) d\Lambda = \lim_{\nu \rightarrow 0} S_n(\Lambda_i, \Psi_i). \quad (3)$$

Некоторые свойства интеграла Римана вещественной функции переносятся на интеграл вида (3). В частности,  $\int_A^B \text{Id} \Lambda = B - A$ ;  $\int_A^B \Phi(\Lambda) d\Lambda = - \int_B^A \Phi(\Lambda) d\Lambda$ ; если  $\Phi_1(\Lambda)$ ,  $\Phi_2(\Lambda)$  интегрируемы на  $[A, B]$ , то  $\Phi_1(\Lambda) + \Phi_2(\Lambda)$  интегрируема на

$[A, B]$  и  $\int_A^B [\Phi_1(\Lambda) + \Phi_2(\Lambda)] d\Lambda = \int_A^B \Phi_1(\Lambda) d\Lambda + \int_A^B \Phi_2(\Lambda) d\Lambda$ ;  
 если  $\Phi(\Lambda)$  интегрируема на  $[A, B]$ , то для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$   
 функция  $\alpha\Phi(\Lambda)$  интегрируема на  $[A, B]$  и  $\int_A^B \alpha\Phi(\Lambda) d\Lambda =$   
 $\alpha \int_A^B \Phi(\Lambda) d\Lambda$ .

Построение интегральных сумм (1) оказалось возможным в силу наличия операции умножения элементов алгебры  $L(E)$ . Следовательно, предложенная выше конструкция интеграла Римана пригодна для векторных функций векторного переменного, действующих в вещественном нормированном пространстве, снабжённом дополнительной операцией умножения элементов.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ И РОСТ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА<sup>1</sup>

©2022 Б. Н. Хабибуллин

(Уфа, БашГУ; *khabib-bulat@mail.ru*)

©2022 А. Е. Салимова

(Уфа, БашГУ; *anegorova94@bk.ru*)

Всюду далее  $Z = \{z_j\}_{j=1,2,\dots}$  и  $W = \{w_j\}_{j=1,2,\dots}$  — распределения точек на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  *конечной верхней плотности*  $\sum_{|z_j| \leq r} 1 + \sum_{|w_j| \leq r} 1 \underset{r \rightarrow +\infty}{=} O(r)$ . Излагаются некоторые усиления результатов наших работ [1], [2], [3], в которых развивалась классическая теорема Мальявена – Рубела о малости роста целых функций экспоненциального типа с заданными нулями вдоль мнимой оси  $i\mathbb{R}$  в терминах

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00026, <https://rscf.ru/project/22-21-00026/>.

логарифмической субмеры подынтервалов  $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$

$$l_Z(r, R) := \max \left\{ \sum_{r < |z_j| \leq R} \operatorname{Re}^+ \frac{1}{z_j}, \sum_{r < |z_j| \leq R} \operatorname{Re}^+ \frac{-1}{z_j} \right\}$$

для  $Z$ , где верхний индекс  $+$  означает положительную часть числа, функции или множества, а также в терминах  $l_W(r, R)$ .

Для целой, т.е. голоморфной на  $\mathbb{C}$ , функции  $f$  через  $\operatorname{Zero}_f$  обозначаем распределение её корней, где число повторений каждого корня равно его кратности, а  $f$  обращается в нуль на  $Z$ , если для каждой точки  $z \in \mathbb{C}$  число повторений  $z$  в  $Z$  не больше кратности корня  $f$  в  $z$  (пишем  $f(Z) = 0$ ).

Целая функция  $f$  называется *целой функцией экспоненциального типа* (пишем ц.ф.э.т), если  $\ln |f(z)| \underset{z \rightarrow \infty}{\leq} O(|z|)$ .

Через  $\operatorname{mes}$  обозначаем линейную меру Лебега на  $\mathbb{R}$ .

**Основная теорема.** Пусть  $\varepsilon \in (0, 1) \subset \mathbb{R}^+$  и для части  $Z_\varepsilon$  всех точек из  $Z$ , попавших в пару вертикальных углов

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < \varepsilon |z|\}, \quad (1)$$

найдутся нумерация для  $Z_\varepsilon = (z_j^\varepsilon)_{j=1,2,\dots}$ , число  $c \in \mathbb{R}^+$ , а также последовательность  $(m_j)_{j=1,2,\dots}$  попарно различных целых чисел с такой же нумерацией, для которых

$$\sum_j \left| \frac{1}{z_j^\varepsilon} - i \frac{c}{m_j} \right| < +\infty.$$

Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

- I. Для любой ц.ф.э.т  $g \neq 0$  с  $g(W) = 0$  и для любого числа  $p \geq 0$  найдутся ц.ф.э.т.  $f \neq 0$  с  $f(Z) = 0$  и открытое подмножество  $E \subset \mathbb{R}$ , для которых

$$|f(iy)| \leq |g(iy)| \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R} \setminus E, \quad (2)$$

где  $\operatorname{mes}(E \setminus [-R, R]) = o(1/R^p)$  при  $R \rightarrow +\infty$ .

II. Найдутся ц.ф.э.м  $g \neq 0$  с  $g(W) = 0$  со свойством

$$\sup_{1 \leq r < R < +\infty} \left( l_{\text{Zero}_g}(r, R) - l_Z(r, R) \right) < +\infty,$$

а также ц.ф.э.м.  $f \neq 0$  с  $f(Z) = 0$ , удовлетворяющие (2), но при более слабом требовании  $\text{mes}(E) < +\infty$ .

III. Существует число  $C \in \mathbb{R}$ , для которого

$$l_Z(r, R) \leq l_W(r, R) + C \quad \text{при всех } 0 < r < R < +\infty.$$

IV. Существует строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n+1}/r_n < +\infty$  и

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \leq N} \left( l_Z(r_n, r_N) - l_W(r_n, r_N) \right) < +\infty.$$

Если дополнительно предположить, что часть  $W_\varepsilon$  всех точек из  $W$ , попавших при некотором  $\varepsilon \in (0, 1)$  в пару вертикальных углов вида (1), удовлетворяет двустороннему условию типа Бляшке

$$\sum_{w \in W_\varepsilon} \left| \text{Re} \frac{1}{w} \right| < +\infty,$$

то в соотношении (2) утверждения I исключительное множество  $E$  можно выбрать пустым.

Часть результатов, не вошедшая в цикл работ [1]–[3], оформлена в виде статьи [4]. Ещё одно развитие результатов из [1]–[3], имеющееся в [4], касается случая замены жёсткого неравенства (2) на более слабое требование

$$\ln |f(iy)| \leq \ln |g(iy)| + o(|y|) \quad \text{при } |y| \rightarrow +\infty.$$

## Литература

1. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса // Уфимск. матем. журн. – 2020. – Т. 12. – № 2. – С. 35–48.
2. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108. – № 4. – С. 588–600.
3. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости // Уфимск. матем. журн. – 2021. – Т. 13. – № 3. – С. 116–128.
4. Салимова А. Е. Версия теоремы Мальявена – Рубела для целых функций экспоненциального типа с корнями около мнимой оси // Изв. вузов. Математика. – 2021. – С. 1–10 (статья направлена в печать).

## О СИГНАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ДРОБНОЙ ВОЛНОЙ

©2022 Хамса Алкади

(Воронеж, ВГУ; [hamsaphd.hassan44@gmail.com](mailto:hamsaphd.hassan44@gmail.com))

©2022 В. А. Костин

(Воронеж, ВГУ; [vlkostin@mail.ru](mailto:vlkostin@mail.ru))

В заметки приводится результат развивающий подход А. Н. Тихонова и А. А. Самарского изложенные в [?] для описания тепловых волн на случай уравнения с дробными производными теория которых активно применяется при изучении распространения сигнала во фрактальных средах

Рассматривается задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha}, \quad x > 0, t \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

Где  $\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha}$  — дробная производная Римана-Лиувилля порядка  $\alpha \in (0, 2)$  для  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $u(t, x)$  удовлетворяет

УСЛОВИЯМ

$$u(t, 0) = \varphi(t) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |u(t, x)| = 0 \quad (3)$$

Где  $\varphi(t)$  периодическая функция с рядом Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos [w_n t - \theta_n^0] \quad (4)$$

где  $w_n = \frac{2\pi n}{T}$

**Теорема.** Если в условии (3)  $\varphi(t)$  — периодическая функция вида (4), то задача (1)-(2)-(3) имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$u(t, x) = + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x), \quad (5)$$

Где

$$u_n(t) = A_n e^{-\cos \frac{\alpha\pi}{4} w_n^{\alpha/2} x} \cos \left[ \left( \sin \frac{\alpha\pi}{4} \right) w_n^{\alpha/2} x - w_n t + \frac{2\pi n}{T} \delta_n^0 \right]$$

В случае  $\alpha = 1$ , решение (5) совпадает с решением, приведённым в [?]

Если  $\alpha = 1$ , то задача (1)-(3) не корректна так как функции (5) не удовлетворяют условию (3).

### Литература

1. Тихонов, А.Н., Самарский А.А Уравнения математической физики. Т.1,2, М: Наука, 1966.
2. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика. Успехи физических наук 146.7, 1985: 493-506.
3. Майнанди Ф. Временное уравнение дробной диффузионно-волновой функции. Т.1,2, Радиофизика и квантовая электроника. Выпуск 38, №1-2, 1995: 20-36.

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КРУГОВЫЕ БИЛЛИАРДНЫЕ КНИЖКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ <sup>1</sup>

©2022 И. С. Харчева

(Москва, МГУ; *irina.harcheva01@gmail.com*)

Одним из важных обобщений классического математического бильярда является *бильiardная книжка*, представляющая собой бильiard на двумерном клеточном комплексе. Более точно, рассмотрим несколько занумерованных плоских областей (листов) с общими дугами границы (корешками), и каждой такой дуге припишем некоторую перестановку. Бильiardный шар, двигаясь по одному листу и отражаясь от корешка, переходит на другой лист согласно соответствующей перестановке. Если классический бильiard интегрируем на каждом из листов, их первые интегралы порождают первые интегралы на всей книжке глобально (при определённых условиях согласованности). При этом динамика полученной интегрируемой системы устроена более сложно (а значит, более богата). Понятие бильiardной книжки впервые было введено В. В. Ведюшкиной в [1], а многие их важные свойства изложены в [2].

В нашей работе мы рассматриваем бильiardную книжку, листами которой являются области, ограниченные единичной окружностью  $x^2 + y^2 = 1$ , при этом на общей границе задана циклическая перестановка. Потребуем, что на каждом из листов книжки действует свой потенциал  $P_i(x^2 + y^2)$ , инвариантный относительно поворотов. При этом эти потенциалы согласованы на общей границе — корешке, то есть  $P_i(1) = P_j(1)$ . Такая система является интегрируемой га-

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No 19-01-00775-а).

Автор является стипендиатом фонда развития теоретической физики и математики “Базис” (договор №20-8-10-3-1).

мильтоновой системой. Её гамильтониан равен полной энергии — функции  $\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + P_i(x^2 + y^2)$  на каждом из листов, а дополнительный первый интеграл имеет стандартный циклический вид  $x\dot{y} - y\dot{x}$  на всех листах (что и обеспечивает интегрируемость). Для этой динамической системы был проведён анализ слоения Лиувилля всевозможных невырожденных изоэнергетических многообразий. А именно, были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга (меченые молекулы) и построены бифуркационные диаграммы (более подробно см. [3]). Один из основных результатов приведён в следующей теореме.

**Теорема:** *Для круговой бильярдной книжки с произвольными потенциалами грубый инвариант Фоменко имеет вид симметричного дерева с седловыми атомами серии  $B_n$  и, возможно, одной неморсовской бифуркацией.*

### Литература

1. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трёхмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. — 2018. — Т. 209, № 12.
2. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. — 2021. — Т. 212, № 8. — С. 89–150.
3. Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.



# НЕЧЁТКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ <sup>1</sup>

©2022 В. Л. Хацкевич

(Воронеж, ВУНЦ ВВА им. Н.Е. Жуковского и Ю.А.  
Гагарина; *vlkhats@mail.ru*)

Для параметрических систем нечётких чисел на основе интервального подхода введён и изучен класс интегральных операторов нечёткого осреднения для реализации задачи агрегирования нечёткой информации. Отметим отличие нашего подхода от широко распространённого (нечёткого) интеграла Шоке (см., напр., [1], [2]), где агрегируются функции принадлежности.

Как известно ([3], гл. 2), нечёткое число  $\tilde{z}$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{z}}(x)$  порождает  $\alpha$ -уровни  $Z_\alpha$ , определяемые для любого  $\alpha \in [0, 1]$  равенством

$$Z_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad Z_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где символ  $cl$  означает замыкание множества.

Будем считать, что множества  $\alpha$ -уровня — замкнутые интервалы, так что  $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ . Функции  $z^-(\alpha)$  и  $z^+(\alpha)$  называют, соответственно, левым и правым индексами нечёткого числа. Ниже предполагается, что они измеримы и ограничены на  $[0, 1]$ . Совокупность таких нечётких чисел будем обозначать  $J$ .

Рассмотрим на множестве нечётких чисел метрику, задаваемую для  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$  равенством [4]

$$d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \max\{|z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha)|, |z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha)|\}. \quad (1)$$

Будем использовать следующее определение сравнения (ранжирования) нечётких чисел, заданных в интервальной

форме. Будем писать  $\tilde{z} \prec \tilde{w}$  для нечётких чисел  $\tilde{z}$  и  $\tilde{w}$ , если одновременно ([5], гл. 5)

$$z^-(\alpha) \leq w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) \leq w^+(\alpha) \quad (\forall \alpha \in (0, 1]). \quad (2)$$

Отметим, что (2) задаёт соотношение частичного порядка на множестве  $J$ .

Пусть  $\Omega$  — измеримое по Лебегу числовое множество. Пусть  $\tilde{z}(\omega)$  — измеримая (относительно метрики (1)) нечёткая функция. А именно,  $\tilde{z} : \Omega \rightarrow J$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{z}(\omega)}(x)$ . Рассмотрим  $\alpha$ -уровни  $Z_\alpha(\omega) = \{x \in R : \mu_{\tilde{z}(\omega)}(x) \geq \alpha\}$ . Интервал  $Z_\alpha(\omega)$  представим в виде  $[z^-(\omega, \alpha), z^+(\omega, \alpha)]$ . Будем считать индексы  $z^-(\omega, \alpha), z^+(\omega, \alpha)$  измеримыми и ограниченными на  $\Omega \times [0, 1]$  функциями. Класс таких нечётких функций обозначим  $J_\omega$ . На множестве  $J_\omega$  зададим метрику равенством

$$\rho(\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)) = \sup_{\alpha \in [0, 1], \omega \in \Omega} \max\{|z_1^+(\omega, \alpha) - z_2^+(\omega, \alpha)|, |z_1^-(\omega, \alpha) - z_2^-(\omega, \alpha)|\}.$$

Для нечёткой функции  $\tilde{z}(\omega)$  обозначим через  $p(\omega)$  функцию весов (частот). Будем считать её квадратично суммируемой на  $\Omega$  и  $p(\omega) > 0$  при п.в.  $\omega \in \Omega$ .

Определим с помощью интеграла Лебега функции

$$z_p^-(\alpha) = \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} z^-(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega, \quad z_p^+(\alpha) = \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} z^+(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega, \quad (3)$$

где  $p_0 = \int_{\Omega} p(\omega) d\omega$ .

Введём в рассмотрение нечёткое число, индексы которого задаются формулами (3). Назовём его нечётким интегральным взвешенным средним (нечётким осредняющим оператором) нечёткой функции  $\tilde{z}(\omega)$  и обозначим  $M_p(\tilde{z}(\omega))$ .

Это нечёткий аналог непрерывного среднего арифметического [6, гл. I].

**Теорема 1.** *Нечёткое интегральное среднее, определяемое посредством (3), удовлетворяет следующим условиям:*

- 1). Если  $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$  (н.в.  $\omega \in \Omega$ ), то  $M_p(\tilde{z}(\omega)) = \tilde{z}$ .
- 2). Оператор осреднения  $M_p : J_\omega \rightarrow J$  является аддитивным и однородным.
- 3). Оператор осреднения  $M_p : J_\omega \rightarrow J$  непрерывен.

Для заданной нечёткой функции  $\tilde{z}(\omega)$  с индексами  $z^-(\omega, \alpha)$  и  $z^+(\omega, \alpha)$  (которые будем считать ограниченными функциями) определим

$$z_{inf}^\pm(\alpha) = \inf_{\omega \in \Omega} z^\pm(\omega, \alpha), \quad z_{sup}^\pm(\alpha) = \sup_{\omega \in \Omega} z^\pm(\omega, \alpha).$$

**Утверждение 1.** *Для нечёткого интегрального среднего  $M_p(\tilde{z}(\omega))$  имеет место соотношение*

$$z_{inf}^\pm(\alpha) \leq M_p^\pm(\tilde{z}(\omega))(\alpha) \leq z_{sup}^\pm(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

где  $M_p^\pm(\tilde{z}(\omega))$  — индексы нечёткого среднего  $M_p(\tilde{z}(\omega))$ .

Это характеризует нечёткое интегральное среднее  $M_p$  как промежуточное значение между наименьшим и наибольшим.

**Утверждение 2.** *Оператор осреднения  $M_p$  является монотонным. А именно, если для двух нечётких функций  $\tilde{z}_1(\omega)$  и  $\tilde{z}_2(\omega)$  выполнено условие  $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$  (н.в.  $\omega \in \Omega$ ), то  $M_p(\tilde{z}_1(\omega)) \prec M_p(\tilde{z}_2(\omega))$ .*

Для фиксированной нечёткой функции  $\tilde{z}(\omega) \in J_\omega$  рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^1 \int_\Omega ((z^-(\omega, \alpha) - v^-(\alpha))^2 + (z^+(\omega, \alpha) - v^+(\alpha))^2) p(\omega) d\omega d\alpha \rightarrow \min \quad \forall \tilde{v} \in J. \quad (4)$$

Здесь  $z^{\pm}(\omega, \alpha)$  и  $v^{\pm}(\alpha)$  — индексы нечётких чисел  $\tilde{z}(\omega)$  и  $\tilde{v}$ .

**Теорема 2.** *Решение задачи (4) даёт нечёткое число  $M_p(\tilde{z}(\omega))$ .*

Теорема 2 характеризует определённую равномерность приближения параметрического семейства нечётких чисел  $\tilde{z}(\omega)$  посредством нечёткого интегрального среднего  $M_p(\tilde{z}(\omega))$ .

Ближкие утверждения получены автором и в нелинейном случае.

### Литература

1. *Kwak K., Pedrycz W.* Face recognition: A study in information fusion using fuzzy integral // *Patt. Recog. Lett.* - 2005. - Vol.26. - pp.719-733
2. *M. Svistula* A note on the Choquet integral as a set function on a locally compact space // *Fuzzy Sets and Systems.* - 2021, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.07.004>.
3. *Пегат А.* Нечёткое моделирование и управление. М.: Бином. 2015. - 786 с.
4. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces // *Fuzzy Sets and Systems.* - 1984. - V.12. - pp. 215-229.
5. *Смоляк С.А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределённости. — М.: Наука. - 2002. - 182 с.
6. *Джини К.* Средние величины. — Москва. Статистика. - 1970. - 447 с.

# СЧЁТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- РАЗНОСТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАФЕ

©2022 В. Н. Хоанг

(Воронеж, ВГУ; *fadded9x@mail.com*)

Используются обозначения, принятые в работах [1].

Ребра  $\gamma$  графа  $\Gamma$  имеют одинаковую длину и параметризованы отрезком  $[0, 1]$ ;  $\partial\Gamma$  — множества граничных узлов графа;  $\Gamma_0$  — объединение всех рёбер, не содержащих концевых точек;  $L_2(\Gamma)$  — банахово пространство измеримых на  $\Gamma_0$  функций, суммируемых с  $p$ -й степенью;  $W_2^1(\Gamma)$  — пространство функций из  $L_2(\Gamma)$ , имеющих обобщённую производную первого порядка также из  $L_2(\Gamma)$ ;  $0 < T < \infty$  — произвольная фиксированная константа.

На протяжении всей работы используется интеграл Лебега по  $\Gamma$ :  $\int_{\Gamma} f(x)dx = \sum_{\gamma} \int_{\gamma} f(x)_{\gamma}dx$ ,  $f(\cdot)_{\gamma}$  — сужение функции  $f(\cdot)$  на ребро  $\gamma$ .

Обозначим через  $\Omega_a(\Gamma)$  множество непрерывных во всех внутренних узлах функций  $u(x)$  из класса  $W_2^1(\Gamma)$ , удовлетворяющих краевому условию  $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$  и соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_{\gamma} \frac{du(1)_{\gamma}}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_{\gamma} \frac{du(0)_{\gamma}}{dx},$$

здесь  $R(\xi)$  и  $r(\xi)$  — множества рёбер  $\gamma$ , соответственно ориентированных к узлу  $\xi$  и от узла  $\xi$ . Замыкание в норме  $W_2^1(\Gamma)$  множества  $\Omega_a(\Gamma)$  обозначим через  $W_0^1(a, \Gamma)$ .

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + \Lambda u(k) = f(k), \quad k = 1, \dots, M, \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u(0) = \varphi(x), \quad u(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2)$$

где  $u(k) = u(x; k)$ ,  $f(k) = f(x; k)$ ,  $\tau > 0$  — действительное число,  $\Lambda u(k) = -\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(k)}{dx} \right) + b(x)u(k)$ ,  $f(k) \in L_2(\Gamma)$ ,  $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ . Коэффициенты  $a(x), b(x)$  — фиксированные, измеримые и ограниченные на  $\Gamma_0$  функции, суммируемые с квадратом

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \Gamma_0.$$

**Определение 1.** Слабым решением уравнения (1) с условиями (2) называются функции  $u(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ,  $k = \overline{1, M}$  удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma} u(k)_{\tau} \eta(x) dx + \ell(u(k), \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx, \quad u(0) = \varphi(x),$$

где

$$u(k)_{\tau} = u(x; k)_{\tau} = \frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)),$$

$$\ell(u(k), \eta) = \int_{\Gamma} \left( a(x) \frac{du(k)}{dx} \frac{d\eta(x)}{dx} + b(x)u(k)\eta(x) \right) dx,$$

для любой функции  $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ .

**Теорема.** [2] Для любых  $k_0 \geq 0$  и любых  $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$  слабое решение  $u(k)$  однозначным образом определено при  $k_0 \leq k \leq M$ ,  $k_0 < M < \infty$ .

Множество ортонормированных собственных функций  $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$  краевой задачи

$$\Lambda \phi(x) = \lambda \phi(x), \quad \phi(x)|_{x \in \partial\Gamma} = 0,$$

образует базис в  $W_0^1(a, \Gamma)$  и  $L_2(\Gamma)$  [3]. Обозначим через  $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$  множество собственных значений. Введём следующие ряды Фурье по ортонормированной системе  $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$ :

$$u(k) = \sum_i \phi^i(k) \phi_i(x), f(k) = \sum_i f^i(k) \phi_i(x), \quad (3)$$

$$\varphi = \sum_i \varphi^i \phi_i(x), \quad (4)$$

где  $\phi^i(k) = (u(k), \phi_i)$ ,  $f^i(k) = (f(k), \phi_i)$ ,  $\varphi^i = (\varphi, \phi_i)$ .

**Определение 2.** Дифференциально-разностная система (1), (2) называется счётной устойчивостью, если для каждого коэффициента  $\phi^i(k)$  рядов Фурье (3), (4) выполняется неравенство

$$|\phi^i(k)| \leq C_{1i} |\varphi^i| + C_{2i} |f^i|,$$

где константы  $C_{1i}, C_{2i}$  равномерно ограничены в  $0 \leq k\tau \leq \leq T$ ,  $|f^i| = \max_{k=1, M} |f^i(k)|$ . Для  $\eta(x) = \phi_i(x), i = 1, 2, \dots$ , получаем

$$\begin{aligned} \phi^i(k) - \phi^i(k-1) + \tau \lambda_i \phi^i(k) &= \tau f^i(k), \phi^i(0) = \varphi^i \\ (k &= 1, 2, \dots, M). \end{aligned}$$

Последовательное исключение неизвестного  $\phi^i(j), j = 1, 2, \dots, k$ , уменьшить до соотношения

$$\begin{aligned} \phi^i(k) &= r_i^k \varphi^i + \tau r_i \sum_j r_i^{k-j} f^i(j) \\ (k &= 1, 2, \dots, M), \end{aligned}$$

где  $r_i = (1 + \tau \lambda_i)^{-1}$ . Отсюда происходит оценка

$$\begin{aligned} |\phi^i(k)| &\leq |r_i|^k |\varphi^i| + \tau |r_i| \sum_j \left| r_i^{k-j} \right| |f^i(j)| \leq \\ &\leq |r_i|^k |\varphi^i| + \tau |r_i| \frac{1 - |r_i|^k}{1 - |r_i|} |f^i|, \quad |f^i| = \max_{k=\overline{1,M}} |f^i(k)| \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, M). \end{aligned}$$

так как  $0 < r_i < 1 (i = 1, 2, \dots)$  затем  $|r_i|^k < 1$  и  $\tau |r_i| \frac{1 - |r_i|^k}{1 - |r_i|} < \tau |r_i| \frac{1}{1 - |r_i|} < T + \frac{1}{\lambda_1}$ , это означает, что коэффициенты двух коэффициентов  $|\varphi^i|$  и  $|f^i|$  равномерно ограничены при любом значении  $\tau > 0$  и не зависят от  $\tau, \varphi$  и  $f$ . Это означает, что выполняется спектральный критерий считающей устойчивости определения 2: дифференциально-разностная система (1), (2) абсолютно счётно устойчива.

### Литература

1. Хоанг В. Н. Дифференциально-разностное уравнение с распределёнными параметрами на графе // Процессы управления и устойчивость. – 2021. – Т. 8. – №. 1. – С. 155-160.
2. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2020. – Vol. 16. – No 4. – P. 402–414.
3. Volkova A. S., Provotorov V. V. Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph // Russian Mathematics. – 2014. – Vol. 58. – No 3. – P. 1-13.



# ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАЙКЛА <sup>1</sup>

©2022 И. Г. Царьков

(Москва, МГУ, механико-математический факультет,  
Центр фундаментальной и прикладной математики;  
tsar@mech.math.msu.su)

**Определение 1.** Функция  $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется несимметричной полуметрикой на множестве  $X$ , если выполняются следующие свойства:

1.  $\varrho(x, x) = 0$  для всех  $x \in X$ ;
2.  $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$  для всех  $x, y, z \in X$ .

Пару  $\mathcal{X} = (X, \varrho)$  в этом случае будем называть несимметричным полуметрическим пространством. Функцию

$$\sigma(x, y) := \max\{\varrho(x, y), \varrho(y, x)\}$$

будем называть полуметрикой симметризации (мы будем рассматривать случай конечной полуметрики симметризации). Пространство  $\mathcal{X}$  называется полным, если оно полно относительно полуметрики  $\sigma$ .

**Определение 2.** Множество  $A$  в полуметрическом (симметричном или несимметричном) пространстве  $(X, \nu)$  называется бесконечно связным, если для всех  $n \in \mathbb{N}$  и единичного шара  $B \subset \mathbb{R}^n$  и произвольного непрерывного отображения  $\varphi : \partial B \rightarrow A$  существует непрерывное продолжение  $\tilde{\varphi} : B \rightarrow A$ . Множество  $M \subset X$  называется  $\mathring{B}$ -бесконечно связным ( $B$ -бесконечно связным), если пересечение множества  $M$  с любым открытым (замкнутым) шаром либо пусто, либо бесконечно связно. Множество  $M \subset X$  называется  $\mathring{B}$ -стягиваемым ( $B$ -стягиваемым), если пересечение множества  $M$  с любым открытым (замкнутым) шаром либо пусто, либо стягиваемо.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-01-00332-а

Для произвольного множества  $M$  некоторого несимметричного полуметрического пространства  $(X, \nu)$  через  $\varrho(y, M) := \inf_{z \in M} \nu(y, z)$  ( $y \in X, M \subset X$ ) обозначим правую метрическую функцию, аналогично определяется  $\varrho^-(y, M) = \inf_{z \in M} \nu(z, y)$ , т.е. левая метрическая функция. Через  $P_M x$  и  $P_M^- x$  обозначим множество всех ближайших точек из  $M$  для  $x \in X$ , т.е. соответственно множество

$$\{y \in M \mid \varrho(x, y) = \varrho(x, M)\} \text{ и } \{y \in M \mid \varrho(y, x) = \varrho^-(x, M)\}.$$

Эти отображения будем называть соответственно правая и левая метрическая проекция.

**Определение 3.**  $(X, q), (Y, \nu)$  — полуметрические пространства,  $M \subset Y$ . Отображение  $F : X \rightarrow 2^M$  назовём устойчивым снизу, если  $F(x) \neq \emptyset$  для всех  $x \in X$ , и для любых  $x_0 \in X$  и  $\varepsilon > 0$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что  $\varrho(y, F(x)) - \varrho(y, F(x_0)) \leq \varepsilon$  для всех  $y \in Y$  и  $x \in X : q(x, x_0) \leq \delta$ .

**Определение 4.** Множество  $X$  будем называть полулинейным пространством (или конусом) над полем  $\mathbb{R}$ , если на этом множестве определены операции сложения элементов (векторов) и умножения их на неотрицательные числа, и выполняются следующие свойства для произвольных  $x, y, z \in X$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ : 1.  $x + y = y + x$ ; 2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ; 3. существует и единственен нулевой элемент  $\theta \in X$ , для которого  $x + \theta = x$ ; 4.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ; 5.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ; 6.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ; 7.  $0 \cdot x = \theta$ ;  $1 \cdot x = x$ .

**Определение 5.** Пару  $\mathcal{X} = (X, \varrho)$  будем называть полулинейным несимметричным полуметрическим пространством, если несимметричная полуметрика  $\varrho$  определена на полулинейном пространстве  $X$  и операции сложения элементов (векторов) и умножения их на неотрицательные числа непрерывны, т.е. для любых последовательностей  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset \mathbb{R}_+$  и  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$ , сходящихся соот-

ответственно к  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  и  $x, y \in X$ , последовательность  $\sigma(\alpha_n x_n + \beta_n y_n, \alpha x + \beta y)$  сходится к 0, где  $\sigma$  — полуметрика симметризации. Множество  $M \subset X$  называется выпуклым, если  $[a, b] \subset M$  для всех  $a, b \in M$ .

Несимметричная метрика  $\rho$  называется обобщённо выпуклой (выпуклой) на выпуклом множестве  $M \subset X$ , если  $\rho(z, \alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{\rho(z, x), \rho(z, y)\}$  ( $\rho(z, \alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \rho(z, x) + (1 - \alpha)\rho(z, y)$ ) для всех  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $z \in X$  и  $x, y \in M$ . В частности, из выпуклости  $\rho$  вытекает её обобщённая выпуклость.

**Теорема 1.** Пусть  $(X, v)$  — метрическое пространство,  $(Y, \rho)$  — полное полулинейное полуметрическое пространство, в котором метрика  $\rho$  обобщённо выпукла и для полуметрики выполняются равенства:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  и  $\rho(x, (1 - \alpha)x + \alpha y) = \alpha \rho(x, y)$  для всех  $x, y \in X$  и  $\alpha \in [0, 1]$ ; а многозначное отображение  $\Phi : X \rightarrow 2^Y$  устойчиво снизу и имеет замкнутые  $\dot{B}$ -бесконечно связные в  $(Y, \|\cdot\|)$  образы. Тогда существует отображение  $\varphi \in C(X, Y)$ :  $\varphi(x) \in \Phi(x)$  для всех  $x \in X$ .

**Следствие 1.** Пусть  $(Y, \rho)$  — полное полулинейное полуметрическое пространство, в котором метрика  $\rho$  обобщённо выпукла и для полуметрики выполняются равенства:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  и  $\rho(x, (1 - \alpha)x + \alpha y) = \alpha \rho(x, y)$  для всех  $x, y \in X$  и  $\alpha \in [0, 1]$ . Пусть  $M \subset Y$  обладает многозначной выборкой  $\Psi : X \rightarrow 2^M$  из метрической проекцией  $P_M$  ( $P_M^-$ ), устойчивой снизу, образы которой замкнуты и  $\dot{B}$ -бесконечно связные в  $Y$ . Тогда существует отображение  $\varphi \in C(X, M)$ :  $\varphi(x) \in \Psi(x) \subset P_M(x)$  ( $P_M^-(x)$ ) для всех  $x \in X$ .

# ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ <sup>1</sup>

©2022 М. В. Шамолин

(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова;  
*shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru*)

Как известно [1, 2, 3], наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объёма позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естественен. А вот для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [4, 5, 6].

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно

---

<sup>1</sup>Работа выполнена за счёт гранта РФФИ, проект 19-01-00016.

важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [5].

В работе предьявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

### Литература

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912, 340 pp.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 93. – № 5. – С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 2019. – Т. 74. – № 1(445). – С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 494. № 1. С. 105–111.
6. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечётного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.

7. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.

## О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

©2022 Н. А. Шананин

(Москва, ГУУ; *nashaninin@inbox.ru*)

Пусть

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

- линейный дифференциальный оператор порядка  $m \geq 1$  с вещественно аналитическими, комплекснозначными коэффициентами, определённый в открытом множестве  $\Omega$ . Согласно теореме единственности Хольмгрена (теорема 8.6.5 [1]) обобщённая функция, удовлетворяющая уравнению  $Pu = 0$  и обращающаяся в ноль по одну сторону нехарактеристической  $C^1$ -поверхности, равна нулю в некоторой этой окрестности поверхности. Если главный символ оператора  $P$  удовлетворяет приведённым ниже условиям, то ростки обобщённых решений уравнения  $Pu = f$  однозначно продолжаются вдоль интегральных кривых индуцированной главным символом дифференциальной системы.

Пусть  $x \in \Omega$  и  $\mathcal{K}_x(P)$  – ядро симметрической  $m$ -линейной формы

$$\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^n \frac{\partial^m p_m}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_m}}(x, \xi) \eta_{j_1}^1 \dots \eta_{j_m}^m,$$

порождённой старшим символом  $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$  оператора  $P$ . Если размерность ядра  $\mathcal{K}_x(P)$  не зависит от

выбора  $x \in \Omega$ , то отображение  $x \rightarrow \mathcal{K}_x(P)$  порождает в касательном расслоении  $T\Omega$  дифференциальную систему

$$\mathcal{L}(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \mid x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0 \ \forall \xi \in \mathcal{K}_x(P)\}$$

Предположим, что старший символ  $p_m(x, \xi)$  удовлетворяет следующим условиям:

- (1)  $\bigcup_{x \in \Omega} (x, \mathcal{K}_x(P) \setminus \{0\}) = \text{Char}(P)$ ;
- (2) коразмерность ядра  $\mathcal{K}_x(P)$  не зависит от выбора точки  $x \in \Omega$  и равна  $k$ .

Гладкую кривую  $\Gamma \subset \Omega$  называют интегральной для дифференциальной системы  $\mathcal{L}(P)$ , если  $T_x\Gamma \in \mathcal{L}_x(P)$  для всех  $x \in \Gamma$ .

Говорят, что ростки обобщённых функций  $u^1(x)$  и  $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$  равны в точке  $x^0 \in \Omega$  и пишут  $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ , если существует открытая окрестность  $V \subset \Omega$  этой точки, в которой  $u^1(x) = u^2(x)$ , то есть для любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$  с носителем  $\text{supp } \varphi(x) \subset V$  выполняется равенство  $\langle u^1, \varphi \rangle = \langle u^2, \varphi \rangle$ . По определению из равенства ростков функций  $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$  следует равенство ростков образов  $(Pu^1)_{x^0} \cong (Pu^2)_{x^0}$  при отображении  $P : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что оператор  $P$  вида (1) имеет аналитические коэффициенты и удовлетворяет условиям (1) и (2) и пусть кривая  $\Gamma$  является интегральной кривой индуцированной дифференциальной системы  $\mathcal{L}(P)$ . Тогда из равенства ростков  $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$  обобщённых функций  $u^1(x)$  и  $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$  в точке  $x^0 \in \Gamma$  и равенства ростков  $Pu^1_x \cong Pu^2_x, \forall x \in \Gamma$ , следует равенство ростков  $u^1_x \cong u^2_x, \forall x \in \Gamma$ .*

Если дифференциальная система  $\mathcal{L}(P)$  является инволютивной, то теореме Фробениуса через каждую точку  $x^0 \in \Omega$  проходит максимальное интегральное многообразие  $\mathcal{M}_{x^0}$ . При таком предположении и из теоремы 1 вытекает, что

росток решения уравнения  $Pu = f$  в точке  $x^0$  однозначно определяет ростки решения этого уравнения во всех точках слоя  $\mathcal{M}_{x^0}$ .

### Литература

1. 1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1)/Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.

## К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ ВИЧ С УЧЁТОМ МИГРАЦИЙ <sup>1</sup>

©2022 А. И. Шашкин

(Воронеж, ВГУ; dean@amv.vsu.ru)

©2022 М. В. Половинкина

(Воронеж, ВГУИТ; polovinkina-marina@yandex.ru)

©2022 И. П. Половинкин

(Воронеж, ВГУ, БелГУ; polovinkin@yandex.ru)

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с кусочно гладкой границей. Рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu\rho - \left( \beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m + I} \right) SI - c\beta bJS - \mu S + \vartheta_1 \Delta S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \left( \beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m + I} \right) SI + c\beta bJS - (\mu + k_1)I + \delta J + \vartheta_2 \Delta I, \quad (2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = k_1 I - (\mu + k_2 + \delta)J + \vartheta_3 \Delta J, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\left( \mu_1 S + \eta_1 \frac{\partial S}{\partial \bar{\nu}} \right) \Big|_{\partial\Omega} = B_1, \quad \left( \mu_2 I + \eta_2 \frac{\partial I}{\partial \bar{\nu}} \right) \Big|_{\partial\Omega} = B_2,$$



$$\left( \mu_3 J + \eta_3 \frac{\partial J}{\partial \vec{\nu}} \right) \Big|_{\partial \Omega} = B_3, \quad t \geq 0; \quad (4)$$

$$S|_{t=0} = S_0, \quad I|_{t=0} = I_0, \quad J|_{t=0} = J_0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (5)$$

Здесь искомыми функциями являются  $S = S(x_1, x_2, t)$  — численность группы индивидуумов, восприимчивых к инфекции,  $I = I(x_1, x_2, t)$  — численность группы бессимптомных носителей инфекции,  $J = J(x_1, x_2, t)$  — численность симптоматической группы. Параметры, входящие в систему (1)–(5), имеют следующий смысл:  $k$  — общая численность населения;  $\mu$  — уровень смертности населения;  $c$  — уровень контактности;  $\beta$  — вероятность передачи заболевания при каждом контакте с инфицированным в бессимптомной стадии;  $b$  — вероятность передачи заболевания при каждом контакте с инфицированным в симптоматической стадии;  $k_1$  — скорость перехода от бессимптомной стадии к симптоматической;  $k_2$  — скорость перехода от симптоматической стадии к полномасштабному СПИДу;  $\delta$  — скорость лечения от симптоматической до бессимптомной стадии;  $d$  — уровень смертности от СПИДа;  $m > 0$  — константа полунасыщения, которая отражает влияние освещения в средствах массовой информации на передачу контактов;  $\beta$  — частота контактов до оповещения в средствах массовой информации;  $\beta_1 \geq \beta_2 > 0$ ; отношение  $\beta_2 I / (m + I)$  отражает эффект снижения частоты контактов, когда инфицированные предупреждаются через средства массовой информации. Функция  $I / (m + I)$  представляет собой непрерывную ограниченную функцию, которая учитывает насыщенность болезнями или психологические эффекты [1]. Мы включаем эффект СМИ только на этапе  $I$ , потому что он относится к инфицированным людям без симптомов: роль средств массовой информации здесь заключается в том, чтобы предупредить этих людей о возможности заражения и повысить их осведомлённость. Модель (1)–(3) является результатом нескольких

этапов модификации классической модели Кермака — Маккендрика [2] распространения эпидемии [3–6]. Наш вклад в эту модификацию состоит в добавлении последних «диффузионных» слагаемых, получаемых действием оператора  $\vartheta_\kappa \Delta$  на искомые функции  $S, I, J$ ,  $\kappa = 1, 2, 3$ , учитывающих миграционные процессы, которые мы полагаем подчиняющимися закону Фурье. Здесь  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$  — оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^2$ . В краевых условиях (4) полагается, что  $\mu_\kappa^2 + \eta_\kappa^2 > 0$ ,  $\mu_\kappa \eta_\kappa \geq 0$ ,  $\kappa = 1, 2, 3$ .

Пусть  $w(x) = (w_1(x_1, x_2), w_2(x_1, x_2), w_3(x_1, x_2))$  — регулярное стационарное решение системы (1)–(3), удовлетворяющее краевым условиям (4). Пусть  $H$  — диаметр области  $\Omega$ . Далее положим

$$\begin{aligned} A_{11} &= -c\beta \left( \beta_1 - \frac{\beta_2}{m+I} \right) I - c\beta bJ - \mu - \frac{\vartheta_1}{H^2}, \\ A_{22} &= c\beta\beta_1 S - \frac{c\beta\beta_2 mS}{(m+I)^2} - \mu - k_1 - \frac{\vartheta_2}{H^2}, \\ A_{33} &= -\mu - k_2 - \delta - \frac{\vartheta_3}{H^2}, \\ A_{12} &= A_{21} = \\ &= \frac{1}{2} \left( -c\beta\beta_1 S + \frac{c\beta\beta_2 mS}{(m+I)^2} + c\beta\beta_1 I - \frac{c\beta\beta_2 I}{m+I} + c\beta bJ \right), \\ A_{13} &= A_{31} = -\frac{1}{2}c\beta bS, \quad A_{23} = A_{32} = \frac{1}{2}(c\beta bS + \delta + k_1). \end{aligned}$$

Доказано, что если при  $S = w_1$ ,  $I = w_2$ ,  $J = w_3$  квадратичная форма

$$Q(w_1, w_2, w_3; z_1, z_2, z_3) = \sum_{\kappa=1}^3 \sum_{\iota=1}^3 A_{\kappa\iota} z_\kappa z_\iota \quad (7)$$

отрицательно определена, то стационарное решение  $w = (w_1(x_1, x_2), w_2(x_1, x_2), w_3(x_1, x_2))$  системы

(1)–(3), удовлетворяющее краевым условиям (4), устойчиво по отношению к малым отклонениям  $w = (w_1(x_1, x_2, t), w_2(x_1, x_2, t), w_3(x_1, x_2, t))$ . Заметим, что если диаметр области достаточно мал, а  $w_\kappa = \text{const}$ , то квадратичная форма (7) будет отрицательно определённой, так что постоянное стационарное решение в малой области заведомо будет устойчивым в малой области. Следует также отметить, что всякое постоянное (стационарное) решение системы (1)–(3) без учёта миграций, то есть при  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$ , когда она является системой ОДУ, будет и стационарным решением этой системы (УЧП) при условии учёта миграции, то есть при  $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 > 0$ , конечно, при соответствующих краевых условиях. При этом может оказаться, что это постоянное решение является неустойчивым в модели без учёта миграций, но устойчивым в малой области, если миграционные процессы будут учтены. Это можно продемонстрировать на простом примере. Постоянная точка (стационарное состояние)  $(k, 0, 0)$  является решением системы (1)–(3) при любом наборе коэффициентов диффузии. В случае  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$  это решение устойчиво при

$$\mu < k_1 - \frac{(k_1 + \delta)^2}{4(k_2 + \mu)}$$

и только при этом условии. Если же  $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 > 0$ , решение  $(k, 0, 0)$  при достаточно малом значении  $H$  будет устойчиво и без этого требования. Методы исследования, применённые для доказательства основного результата этой работы, применялись ранее в работах [7–11]. В работе [12] техника исследования скорректирована в связи с тем, что уравнение содержит оператор Бесселя (см. в связи с этим [13–17]).

### Литература

1. Capasso V. A generalization of the Kermack - McKendrick deterministic epidemic model / V. Capasso,

G. Serio // Math. Biosci. - 42 (1978). - P. 43-62.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0025-5564\(78\)90006-8](http://dx.doi.org/10.1016/0025-5564(78)90006-8).

2. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* A Contribution to the Mathematical Theory of // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1927. — Vol. 115, No. 772 (Aug. 1). — pp. 700–721.

3. *Cai L.* Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment / L. Cai, X. Li, M. Ghoshc, B. Guod // J. Comput. Appl. Math. — 229 (2009), 1. — P. 313–323. DOI: 10.1016/j.cam.2008.10.067.

4. *Tchuenche J.M.* The impact of media coverage on the transmission dynamics of human influenza / J.M. Tchuenche, N. Dube, C.P. Bhunu, R.J. Smith, C.T. Bauch // BMC Public Health. — 2011. — Feb 25;11 Suppl 1(Suppl 1):S5. DOI: 10.1186/1471-2458-11-S1-S5.

5. *Zhao H.* Global Hopf bifurcation analysis of an susceptible-infective-removed epidemic model incorporating media coverage with time delay / H. Zhao, M. Zhao // J. Bio. Dyn. 11(1) (2017). — P. 8–24. DOI: 10.1080/17513758.2016.1229050.

6. *Sanaa Moussa Salman* Memory and media coverage effect on an HIV/AIDS epidemic model with treatment/ Sanaa Moussa Salman // Journal of Computational and Applied Mathematics. — Volume 385. — 2021. 113203, ISSN 0377-0427, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113203>. (<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042720304945>).

7. *Мешков В.З.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга / В.З. Мешков, И.П. Половинкин, М.Е. Семёнов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2002. — Т. 9, вып. 1. — С. 226–227.

8. *Gogoleva T.N.* On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation / T.N. Gogoleva, I.N. Shchepina, M.V. Polovinkina, S.A. Rabeeakh // J. Phys.: Conf. Ser. "— 2019. "— 1203 012041. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012041.

9. *Половинкин И.П.* К вопросу об устойчивости стационарного решения в миграционной модели / И.П. Половинкин, М. В. Половинкина, С. А. Рабееах // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. — 2019. — С. 889–892.

10. *Половинкина М.В.* Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределёнными параметрами / М.В. Половинкина, И.П. Половинкин // Прикладная математика & Физика. - 2020. - Т. 52, № 4. - С. 255-261. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261 <http://pmph.bsu.edu.ru/index.php/journal/article/view/40> к письму.

11. *Debbouche A.* On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes / A. Debbouche, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, C. A. Valentim, S. A. David, // The European Physical Journal Plus. (2021). "— 136(1). "— P. 1–18. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-01070-8>.

12. *Polovinkina M. V.* Stability of stationary solutions for the glioma growth equations with radial or axial symmetries / M.V. Polovinkina, A. Debbouche, I.P. Polovinkin, S.A. David // Mathematical Methods in the Applied Sciences 44(15):12021-12034. DOI: 10.1002/mma.7194.

13. *Каптрахов В. В.* Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В.В. Каптрахов, С.М. Ситник // Совр. мат. Фундам. напр. - 2018. - 64, № 2. — С. 211–426. <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426>.

14. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье — Бесселя и теоремы вложения для весовых классов / И.А. Киприянов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1967. — 89. — С. 130–213.

15. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов — М.: Наука, 1997. — 208 с/. — ISBN 5-02-014799-0.

16.0 *Ляхов Л. Н.* Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порождённые обобщённым сдвигом / Л. Н. Ляхов — Воронеж: ВГТА, 1997. — 143 с. — ISBN 5-89448-037-X.

17. *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — Москва: Физматлит, 2019. — 221 с. — ISBN 978-5-9221-1819-4.

## СТЕПЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА КЁТЕ. ИЗОМОРФИЗМЫ «БОЛЬШИХ» СЕМЕЙСТВ <sup>1</sup>

©2022 *М. А. Шубарин*

(ЮФУ, институт Математики, Механики И Компьютерных  
Наука им. И. И. Воровича; *mas102@mail.ru*)

1. В докладе рассматриваются разные подходы к определению отношения эквивалентности на различных семействах степенных пространств Кёте. В частности, строится слабая изоморфная классификация семейств обобщённых степенных пространств Кёте, определяемых парой пространств Кёте и общим абсолютным базисом в этой паре.

Пусть дана пара пространств Кёте  $\bar{X} = [K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$  такая, что  $K(A^{(0)}) \supset K(A^{(1)})$  и общий абсолютный базис  $f = (f_n)$  в этой паре (в частности, можно рассматривать базис ортов  $e = (e_n)$ ). В [1] введено

---

<sup>1</sup>Степенные пространства Кёте. Изоморфизмы «больших» семейств

семейство  $(p_{\overline{X},f})$ , состоящее из всех  $(\overline{X},f)$ -степенных пространств, которые по определению одновременно  $\Delta_{f,f^-}$  и  $\Delta_{\beta_{f,f}}$  – интерполяционно между  $K(A^{(0)})$  и  $K(A^{(1)})$  (пространства, удовлетворяющие этому условию в дальнейшем называются обобщёнными степенными пространствами Кёте). В свою очередь, определения  $\Delta_{f,f^-}$  и  $\Delta_{\beta_{f,f}}$  – интерполяционного свойства формулируются в терминах непрерывных и ограниченных операторов, диагональных относительно базиса  $f$ .

Там же доказывается ([1], теорема 2), критерий принадлежности пространства Фреше семейству  $(p_{\overline{X},f})$ . В частности, для пространств Кёте этот критерий равносильен следующему утверждению:

**Теорема 1.** Пусть пространство Кёте  $K(A)$  такое, что

$$K(A^{(1)}) \subset K(A) \subset K(A^{(0)}).$$

Это пространство тогда и только тогда будет  $(\overline{X},e)$ -степенным пространством, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall p \in \mathbb{N} \exists C \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{a_{p,n}}{a_{\psi(p),n}} \leq C \max_{j=0,1,r \leq \varphi(p)} \frac{a_{r,n}^{(j)}}{a_{\varphi(r),n}^{(j)}}, \\ \exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists \psi \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall p, q \in \mathbb{N} \exists C > 0 : \forall n \\ \frac{a_{q,n}}{a_{\varphi(p),n}} \leq C \max_{j=0,1} \frac{a_{\psi(p,q),n}^{(j)}}{a_{p,n}}. \end{aligned}$$

**Определение 1.** Говорят, что семейства пространств  $(p_{\overline{X},f})$  и  $(p_{\overline{Y},h})$  слабо изоморфны (и писать  $(p_{\overline{X},f}) \overset{\text{сл}}{\cong} (p_{\overline{Y},h})$ ), если любое пространство из  $(p_{\overline{X},f})$  (соответственно из  $(p_{\overline{Y},h})$ ) изоморфно подходящему пространству из  $(p_{\overline{Y},h})$  (соответственно из  $(p_{\overline{X},f})$ ).

Изучение слабо изоморфных семейств обобщённых степенных пространств связано с проблемой однозначной определяемости: определяет ли однозначно совокупность всех интерполяционных пространств порождающую их пару.

**2.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — нечётная, непрерывная, возрастающая и логарифмически выпуклая на  $[0, +\infty)$  функция. Логарифмическая выпуклость функции  $f$  по определению означает, что функция  $x \mapsto \ln(f(\exp(x)))$  — выпуклая функция. Пусть, кроме того, даны числовая последовательность  $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ ,  $a_n \nearrow +\infty$  при  $n \uparrow +\infty$ , и число  $\delta \in (-\infty, +\infty]$ . Пространство  $L_f(a, \delta) := K(A)$ , определяемое матрицей  $A = (a_{p,n})$ ,  $a_{p,n} := \exp(f(\delta_p a_n))$ , называют обобщённым пространством степенных рядов. Здесь  $(\delta_p)$  — произвольная числовая последовательность такая, что  $\delta_p \uparrow \delta$  при  $p \uparrow +\infty$  (известно, что пространство  $L_f(a, \delta)$  не зависит от выбора этой последовательности). Пространства  $L_f(a, \delta)$  были введены Драгилевым М. М. (обзоры свойств этих пространств можно найти в [2]. Предполагается, что функция  $f$  является функцией быстрого роста, т.е.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\alpha t)/f(t) = +\infty$  для произвольного  $\alpha > 1$ .

**Теорема 2.** Пусть

$$\overline{X} = [L_f(a, 0), L_f(a, \infty)], \overline{Y} = [L_f(b, 0), L_f(b, \infty)].$$

Тогда следующие условия попарно эквивалентны:

$$1^\circ \ (p_{\overline{X}, e}) \stackrel{\text{сл}}{\cong} (p_{\overline{Y}, e}),$$

$$2^\circ \ (p_{\overline{X}, e}) \cong (p_{\overline{Y}, e}),$$

$$3^\circ \ (p_{\overline{X}, e}) \stackrel{\text{кд}}{\cong} (p_{\overline{Y}, e}),$$

$$4^\circ \ \exists C > 0 : \forall n \frac{1}{C} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C.$$



**3.** Пространство Кёте  $F(\lambda, a) := K(A)$  называют степенным пространством второго рода, если  $a_{p,n} = \exp(\min\{\lambda_n, p\} - 1/p)a_n$ , где  $a = (a_n)$ ,  $\lambda = (\lambda_n)$  числовые последовательности такие, что  $a_n \uparrow +\infty$ ,  $n \uparrow +\infty$  и  $\lambda_n \geq 1$  для произвольного  $n \geq 1$ . Впервые степенные пространства второго рода были введены Захарютой В. П. [4]. Пусть  $\overline{X} = [F(\lambda', a), F(\lambda'', a)]$ ,  $\overline{X} = [F(\mu', b), F(\mu'', b)]$ .

**Теорема 3.** Если  $(p_{\overline{X},e}) \stackrel{\text{сл}}{\cong} (p_{\overline{Y},e})$ , то

$$\begin{aligned} & \forall A > 1 \exists B > 1 \exists C > 1 \forall \Delta', \Delta'' > 1 \forall t > 0 \\ & \left| \left\{ n : \Delta' \leq \lambda_n \leq \Delta'', \frac{t}{A} \leq a_n \leq At \right\} \right| \leq \\ & \leq \left| \left\{ n : \frac{\Delta'}{C} \leq \max\{\mu'_n, \mu''_n\}, \frac{t}{B} \leq b_n \leq Bt \right\} \right| \end{aligned} \quad (1)$$

для произвольного  $f(\lambda, a) \in (p_{\overline{X},e})$ .

Для фиксированных последовательностей  $a = (a_n)$  и  $\tau = (\tau_n) \subset (0, 1]^{\mathbb{N}}$  через  $(\mathcal{F}_{\tau,a})$ , в свою очередь, обозначим множество всех пар вида  $\overline{X} = [E_1(a), F_g(\tau, a)]$ .

**Теорема 4.** Если  $[E_1(a), F_g(\tau, a)] \in (\mathcal{F}_{\tau,a})$ ,  $[E_1(b), F_h(\tau, b)] \in (\mathcal{F}_{\tau,b})$  и семейства  $(p_{\overline{X},e})$ ,  $(p_{\overline{Y},e})$  слабо изоморфны, то

$$\begin{aligned} & \forall A \exists B \exists C \forall \Delta', \Delta'' > 1 \forall t \\ & \left| \left\{ n : g^{-1}(\Delta'') \leq \tau_n \leq g^{-1}(\Delta'), \frac{t}{A} \leq a_n \leq At \right\} \right| \leq \\ & \leq \left| \left\{ n : h^{-1}\left(\frac{\Delta'}{C}\right) \geq \tau_n, \frac{t}{B} \leq b_n \leq Bt \right\} \right|. \end{aligned}$$

Последовательность  $\tau = (\tau_n)$  будем называть  $a$ -равномерно распределённой, если

$$\begin{aligned} & \forall \Delta', \Delta'', 0 < \Delta' < \Delta'' < 1 \forall A > 1 \\ & \left| \left\{ n : \Delta' \leq \lambda_n \leq \Delta'', \frac{t}{A} \leq a_n \leq At \right\} \right| \sim \\ & \sim (\Delta'' - \Delta') m_a(t, A), t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Пусть последовательности  $a = (a_n)$ ,  $\tau = (\tau_n)$  такие, что

$$\text{I. } \forall A > 1, B > 1 \exists C > 1 : \forall t > 0 \ m_a(t, A) \leq C m_a(t, B),$$

II. последовательность  $\tau = (\tau_n)$  —  $a$ -равномерно распределённая.

Тогда в семействе пар  $(\mathcal{F}_{\lambda,a})$  существует континуум парно не слабо изоморфных элементов.

**5.** Для доказательства теорем 2, 3 используются характеристики, инвариантные на множестве семейств пар обобщённых степенных пространств Кёте.

**Теорема 5.** Если  $K(A) \cong K(B)$ , то существуют возрастающие функции  $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такие, что

$$\left| \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left\{ n : \frac{a_{\varphi(p),n}}{a_{r_0,n}} \leq t_p, \frac{a_{p,n}}{a_{\varphi(r_0),n}} \geq \tau_p \right\} \right| \leq \\ \leq \left| \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left\{ n : \frac{b_{p,n}}{b_{\varphi(r)_0,n}} \leq R(p)t_p, \frac{b_{\varphi(p),n}}{b_{r_0,n}} \geq \frac{\tau_p}{R(p)} \right\} \right|$$

для произвольных  $r_0, r_1 < r_2$ , и  $(t_p), (\tau_p), t_p > 0, \tau_p > 0$ .

### Литература

1. Шубарин М. А. Классы пространств, порождаемые интерполяцией диагональных операторов // Изв. ВУЗов Сев. Кавк. региона, сер. естеств. наук.- 2006.-№1.- с. 24–26;

2. Meise R., Vogt D. Introduction in Functional Analysis // Oxford Text in Math., 2, Calderon Press, Oxford univ. Press, N.-Y.- 1997;

3. Zahariuta V. Linear topologic invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces // Tr. J. Math.- 1996.-**20**.- p. 237–289.

# О НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>1</sup>

©2022 А. Д. Годова

(Челябинск, ЧелГУ; *sashka\_1997\_godova55@mail.ru*)

©2022 В. Е. Федоров

(Челябинск, ЧелГУ; *kar@csu.ru*)

Рассмотрим начальные задачи для простейших интегро-дифференциальных уравнений типа Римана — Лиувилля и типа Герасимова.

**Интегро-дифференциальное уравнение типа Римана — Лиувилля.** Пусть  $\mathcal{X}$  — банахово пространство,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,  $K \in C([0, \infty); \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ . Определим свёртку

$$(J^K x)(t) := \int_0^t K(t-s)x(s)ds$$

и интегро-дифференциальный оператор

$$(D^{m,K} x)(t) := D^m(J^K x)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)x(s)ds,$$

где  $D^m$  — производная порядка  $m$ . Рассмотрим задачу типа Коши

$$(J^K x)^{(k)}(0) = x_k \in \mathcal{X}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для уравнения

$$(D^{m,K} x)(t) = Ax(t), \quad t > 0. \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и ВАНТ, проект 21-51-54003, а также гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

Поддействуем преобразованием Лапласа на обе части уравнения (2) и получим

$$\begin{aligned}\widehat{D^{m,K}x}(\lambda) &= \widehat{D^m J^K x}(\lambda) = \lambda^m \widehat{J^K x}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} (J^K x)^{(k)}(0) \lambda^k = \\ &= \lambda^m \widehat{K}(\lambda) \widehat{x}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} (D^{k,K} x)(0) \lambda^k = A \widehat{x}.\end{aligned}\quad (3)$$

Пусть  $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,  $x_k = 0$  при  $k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{l\}$ . Тогда уравнение (3) примет вид  $\lambda^m \widehat{K}(\lambda) \widehat{x}(\lambda) - A \widehat{x}(\lambda) = x_l \lambda^l$ , отсюда  $\widehat{x}(\lambda) = (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) I - A)^{-1} \lambda^l x_l$  при условии

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda^m \widehat{K}(\lambda) > \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}. \quad (4)$$

Действительно, раскладывая обратный оператор в ряд Неймана, получим

$$(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{m(k+1)} \widehat{K}(\lambda)^{k+1}},$$

поскольку для достаточно большого  $R$  при  $|\lambda| > R$  имеем  $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < |\lambda|^m \widehat{K}(\lambda)$ .

Поддействуем обратным преобразованием Лапласа и получим решение  $x_l(t) := X_l(t) x_l$  задачи (1), (2) при выбранных  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , где

$$X_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) I - A)^{-1} \lambda^l e^{\lambda t} d\lambda, \quad l = 0, 1, \dots, m-1,$$

где  $\gamma := \gamma_R \cup \gamma_{R,+} \cup \gamma_{R,-}$  — положительно ориентированный контур,  $\gamma_R := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$ ,  $\gamma_{R,+} := \{re^{i\pi} : r \in [R, \infty)\}$ ,  $\gamma_{R,-} := \{re^{-i\pi} : r \in [R, \infty)\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  и выполняется условие (4), тогда при любых  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}$  существует единственное решение задачи (1), (2), при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} X_k(t)x_k.$$

**Интегро-дифференциальное уравнение типа Герасимова** Введём в рассмотрение интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова

$$(D^{K,m}x)(t) := J^K(D^m x)(t) := \int_0^t K(t-s)x^{(m)}(s)ds.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$x^{(k)}(0) = x_k \in \mathcal{X}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5)$$

для уравнения

$$(D^{K,m}x)(t) = Ax(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Рассуждая, как в предыдущем параграфе, получим равенство

$$\widehat{x}(\lambda) = (\lambda^m \widehat{K}(\lambda)I - A)^{-1} \widehat{K}(\lambda) \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k x^{(k)}(0)$$

при условии (4).

**Теорема 2.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  и выполняется условие (4), тогда при любых  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}$  существует единственное решение задачи (5), (6), при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(t)x_k,$$

$$Y_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda^m \widehat{K}(\lambda)I - A)^{-1} \lambda^k \widehat{K}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1.$$

**Пример.** Возьмём  $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $K_\alpha(s) := \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I$ , тогда  $J^{K_\alpha} := J^\alpha$  — оператор дробного интегрирования Римана — Лиувилля порядка  $\alpha$  (см., например, [1]),  $D^{m,K_\alpha} := {}^{RL}D^\alpha$  — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля порядка  $\alpha$  [1],  $D^{K_\alpha,m} := {}^{GC}D^\alpha$  — оператор дробного дифференцирования Герасимова — Капуто порядка  $\alpha$  [2].

### Литература

1. Федоров В. Е., Туров М. М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. - 2021. - Т.62. - №. 5. - С. 1143-1162.
2. Волкова А. Р., Ижбердеева Е. М., Федоров В. Е. Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных // Челяб. физ.-мат. журн. - 2021. - Т.6. - Вып. 3. - С. 269-277.

## STABILIZATION FOR MARKOV JUMP SYSTEMS WITH TIME DELAYS

©2022 S. Hussin

((Izhevsk, Kalashnikov ISTU; [sulimanh17@gmail.com](mailto:sulimanh17@gmail.com))

©2022 V. G. Sufyanov

((Izhevsk, Kalashnikov ISTU; [vsufiy@istu.ru](mailto:vsufiy@istu.ru))

Random sudden changes are happen for many dynamical systems, which caused by random fails, changes in the connections of subsystems, abrupt environment changes, etc. Usually most dynamic systems are unable to cope with these sudden, random changes. Markov jump linear systems (MJLSs) combine a part of the state which takes values continuously and the other part of the state which takes values discretely. They represent a special class of hybrid systems with many operation modes and each mode corresponds to a deterministic dynamic system. The switching the system modes is given by

a Markov process which takes values in a finite set. Markov jump time-delay systems (MJTDSs) are used to model dynamic systems whose structures are subject to abrupt changes and their extensive applications have been applied to many physical systems with time delay, such as communication systems, manufacturing systems, such as unmanned air vehicles [1], solar power stations [2], communication systems [3], power systems [4], economics [5], and so on.

Let the following MJTDS, defined on a complete probability space  $(\Omega, F, P)$ , are described as:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + A_1(\theta(t))x(t - \tau(t)) + B(\theta(t))u(t), t \geq 0, \quad (1)$$

where  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  is standing for the state variable of the system,  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  is the control variable,  $A, A_1$  and  $B$  are matrices of appropriate dimensions.  $\tau(t)$  is time delay. We define the set  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\{\theta(t), t \geq 0\}$  is a Markov chain on the probability space, takes values on set  $S$  with transition probability matrix  $\Pi = (\pi_{ij})_{N \times N}$  given by [6]

$$P(\theta(t+h) = j \mid \theta(t) = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ij}h + o(h), & i = j. \end{cases}$$

And the notation  $o(h)$  satisfies  $h > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$  and  $\pi_{ij} \geq 0 (i, j \in S, i \neq j)$ , represents the transition rate from  $i$  to  $j$ , which satisfies  $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}$  for all  $i \in S$ .

**Definition 1. (Stochastic Stability):** [6] MJTDS with input  $u(t) = 0$  is said to be stochastically stable if for the finite  $\phi(t) \in R^n$  defined on  $[-\bar{\tau}, 0]$  the following is satisfied

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^t x^T(s, \phi, \theta_0) x(s, \phi, \theta_0) ds \right\} < \infty \quad (2)$$

where  $x(s, \phi, \theta_0)$  is solution to the system at timet under the initial conditions  $\phi(t)$  and  $\theta_0$ .

Now, we introduce the following theorem [7].

Theorem 1. The MJTDS is stochastically stable if one of the following two equivalent conditions hold: if there exists symmetric, positive-definite matrices

$$P = (P(1), P(2), \dots, P(N)) > 0, H > 0; H_\tau = (1 - \tau^+)H \quad (3)$$

1. satisfying the algebraic Riccati inequality

$$A^T P + P A + H + P A H_\tau^{-1} A^T + \sum_{j=1}^N \lambda_j P(j) < 0, \quad (4)$$

2. satisfying LMI

$$\begin{bmatrix} J(i) & P A \\ A^T & -H_\tau \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

where:  $J(i) = A(i)^T P(i) + P(i) A(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P(j)$  for  $i \in S$ .

$A > 0$  (resp.,  $A < 0$ ):that is positive definite (resp., negative definite) matrix.

The following theorem gives a stochastically stabilizes condition for MJTDS.

Theorem 2. If there exists symmetric positive definite matrices

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_N) > 0, U = H^{-1} > 0; H_\tau = (1 - \tau^+)H$$

satisfying:

$$\begin{bmatrix} J(i) & X(i) & S_i(X) \\ X(i) & -U & 0 \\ S_i^T(X) & 0 & -\ell_i(X) \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$



where:

$$J(i) = X_i A^T(i) + A(i)X_i + B(i)Y_i + Y_i^T B^T + \\ + \lambda_{ij}X_i + A(i)(1 - \tau^+)^{-1}U A^T(i)$$

$$S_i(X) = [\sqrt{\lambda_{i1}}X_i, \dots, \sqrt{\lambda_{iN}}X_i] \\ \ell_i(X) = \text{diag}[X_1, X_2, \dots, X_N]$$

Then the controller:

$$u(t) = K(\theta(t))x(t) \quad (7)$$

with  $K(i) = Y_i X_i^{-1}$  is stochastically stabilizes the MJTDS (1).

Proof: : From (1) and (7) we have the closed-loop system given by Then the controller:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(\theta(t))x(t) + A_1(\theta(t))x(t - \tau(t)), \quad (8)$$

where  $\bar{A}(\theta(t)) = A(\theta(t)) + B(\theta(t))K(\theta(t))$ , and from the theorem, there are symmetric, positive definite matrix  $P = (P(1), P(2), \dots, P(N)) > 0, H > 0; H_\tau = (1 - \tau^+)H$  such that:

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + H + P A H_\tau^{-1} A^T P + \sum_{j=1}^N \lambda_j P(j) < 0, \quad (9)$$

Putting  $X_i = P^{-1}(i), U + H^{-1}, Y_i = K(i)X_i$ , and multiply (9) by  $X_i$  we find:

$$X_i A^T + A X_i + X_i H X_i + A H_\tau^{-1} A^T + \\ + Y_i^T B^T + S Y_i + \lambda_{ij} X_i + S_i \ell_i^{-1} S_i < 0. \quad (10)$$

Using Schur complement for  $\ell_i, S_i, Y_i$  we obtain the inequality (6).

Conclusion: Sufficient conditions for stability, stabilizability of the of MJTDS have been studied. Conditions for stochastic

stable have been given. All conditions are delay-independent and depend on the mode of the MJLS. For MJTDS a set of LMI conditions has been given to find a state feedback controller for stability.

### Литература

1. *Stoica, A.; Yaesh, I.* Invariant Banach limits and applicationsump-Markovian based control of wing deployment for an uncrewed air vehicle //Guid. Control Dyn. – 2002. – Т. 25. – С. 407-411.
2. *Sworder, D.D.; Rogers, R.O.* An LQG solution to a control problem with solar thermal receiver //IEEE Trans. Autom. Control . – 1983. – Т. 28. – С. 971-978.
3. *Ploplys, N.J.; Kawka, P.A.; Alleyne, A.G.* Closed-loop control over wireless networks //IEEE Control Syst. Mag. – 2004. – Т. 24. – С. 58–71.
4. *Ugrinovskii, V.A.; Pota, H* Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems //. Int. J. Control. – 2005. – Т. 78. – С. 662–677.
5. *Svensson, L.E.O.; Williams, N.* Optimal monetary policy under uncertainty: A Markov jump-linear-quadratic approach //GFed. Reserve St. Louis Rev. – 2008. – Т. 90. – С. 275–293.
6. *Kang Y., Zhao Y.-B., Zhao P.* Stability Analysis of Markovian Jump Systems //JScience Press, Beijing, China. – 2018.
7. *Do Val, J.B.R.; Geromel, J.C.; Goncalves, A.P.C.* The  $H_2$ -control for jump linear systems: Cluster observations of the Markov state //Automatica. – 2002. – Т. 83. – С. 343–349.

# SOLVABILITY OF A HEAT BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A DEGENERATING DOMAIN IN SOBOLEV SPACES <sup>1</sup>

©2022 *M. T. Kosmakova*

(Buketov Karaganda University, Karaganda, Kazakhstan;  
*svetlanamir578@gmail.com*)

©2022 *Zh. M. Tuleutaeva*

(Karaganda Technical University, Karaganda, Kazakhstan;  
*erasl-79@mail.ru*)

In a noncylindrical domain degenerating at the initial moment of time:

$$Q_{xt_1} = \left\{ (x, t_1) \mid x = (x_1, x_2) \in R^2, |x| \leq t_1; 0 < t_1 < T_1 < \infty \right\}$$

the following boundary value problem of heat conduction is investigated for solvability

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = a^2 \Delta_x u + f(x, t_1), \quad (1)$$

$$u|_{\Sigma_{xt_1}} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t_1=0} = 0; x \in \Omega_{t_1}. \quad (3)$$

Here  $\Sigma_{xt_1}$  is the lateral surface of the cone  $Q_{xt_1}$ ,  $\Omega_{t_1}$  is the section of the cone  $Q_{xt_1}$  by the plane  $t_1$ .

To study it, first, in the cylinder the following boundary value problem is posed for the heat equation:

in the domain  $Q_{yt} = \{(y_1, y_2; t) \mid |y| < 1, 0 < t < T\}$ , find a solution to BVP

$$\tilde{u}_t = a^2 \Delta_y \tilde{u} + \sum_{i=1}^2 \gamma_i(y_i, t) \tilde{u}_{y_i} + \beta(t) \tilde{f}(y, t), \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>This research was funded by the Science Committee of the MES of RK (Grant No. AP09259780, 2021-2023).

$$\tilde{u}(y, t)|_{|y|=1} = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{u}(y, t)|_{t=0} = \tilde{u}_0(y), \quad (6)$$

and the functions  $\beta(t)$ ;  $\gamma_i(y_i, t)$ ,  $i = 1, 2$ ; satisfy the estimates

$$|\beta(t)| \leq \beta; |\beta'(t)| \leq \beta, \forall t \in [0, T], \quad (7)$$

$$|\gamma_i(y_i, t)| \leq \gamma; \left| \frac{\partial \gamma_i(y, t)}{\partial t} \right| \leq \gamma, i = 1, 2, \forall (y, t) \in Q_{yt}, \quad (8)$$

where  $\beta, \gamma$  are the given positive constants.

The space

$$\begin{aligned} \tilde{W}(0, T) = \{ \tilde{\psi}(y, t) \mid \tilde{\psi}(y, t) \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)); \\ \tilde{\psi}_t(y, t) \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \}. \end{aligned}$$

with norm

$$\|\psi\|_{\tilde{W}(0, T)} = \left( \int_0^T \|\tilde{\psi}(y, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|\tilde{\psi}_t(y, t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

is Hilbert [1].

The spaces for the input data of BVP (4) – (5) – (6) are:

$$\begin{cases} \tilde{f}(y, t) \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)); \\ \tilde{u}_0(y) \in L_2(\Omega) \end{cases} \quad (9)$$

**Theorem 1.** *For all  $\tilde{f}(y, t)$  and  $\tilde{u}_0(y)$  belonging to classes (9) there is a unique solution  $\tilde{u}(y, t) \in \tilde{W}(0, T)$  BVP (4)-(5)-(6), and the solution  $\tilde{u}(y, t)$  depends continuously on  $\{\tilde{f}(y, t); \tilde{u}_0(y)\}$ .*

The proof of Theorem 1 follows from the results of works, for example, [2, p.364].

Let us introduce the notation:

$$Q_{xt_1} = \{(x; t_1) \mid |x| < t_0 + t_1, t_1 \in (0, T_1)\}, \text{ where } x =$$

$(x_1; x_2); t_0 > 0; T_1 > 0 - const,$   
 $\sum_{xt_1} = \{(x, t_1), ||x| = t_0 + t_1; t \in (0, T_1)\},$   
 $\Omega_{t_1} = \{x \in R^2 \mid |x| < t_0 + t_1, t_1 \in (0; T_1)\}$  is an open bounded domain in  $R^n$ , a section of the cone  $Q_{xt_1}$  for a given  $t_1 \in [0, T_1]$ ,  $\Gamma_{t_1}$  is the boundary of the domain  $\Omega_{t_1}$ .

In the cone  $Q_{xt_1}$  we consider a BVP for the heat equation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t_1} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} \right) + f(x, t_1) \quad (10)$$

$$u|_{\sum_{xt_1}} = 0, \quad (11)$$

$$u|_{t_1=0} = u_0(x). \quad (12)$$

We also require the matching condition:  $u_0(0) = 0$ .

By bijective change of variables [3]

$$x_i = \frac{t_0}{1 - t_0 t} \cdot y_i; i = 1, 2; t_1 = \frac{t_0^2 t}{1 - t_0 t},$$

BVP (10)–(12) is transformed into a particular case of the problem investigated above in the theorem 1. There is a correspondence of function spaces in terms of independent variables  $(y, t) \in Q_{yt}$  and  $(x, t_1) \in Q_{xt_1}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}(y, t) \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x, t_1) \in L_2(0, T_1; H^{-1}(\Omega_{t_1})), \\ \tilde{u}_0(y) \in L_2(\Omega) \Leftrightarrow u_0(x) \in L_2(\Omega_{t_1}), \\ \tilde{W}(0, T) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow W(0, T_1) = \{\psi(x, t_1) \mid \psi(x, t_1) \in L_2(0, T_1; H_0^1(\Omega_{t_1})), \\ \varphi_{t_1}(x, t_1) \in L_2(0, T_1; H^{-1}(\Omega_{t_1}))\}. \end{array} \right. \quad (13)$$

**Theorem 2.** For all  $f(x, t_1)$  and  $u_0(x)$  belonging to classes (13) there exist the solution  $u(x, t_1) \in W(0, T_1)$  to BVP (10)–(12).

Let

$$n \in N^* = \left\{ n \in N \mid n \geq n_1; \frac{1}{n_1} < T_1 \right\}; \quad x = (x_1, x_2) \in R^2.$$

Consider the family of truncated cones

$$Q_{xt_1}^n = \left\{ (x, t_1) \mid |x| \leq t_1; t_1 \in \left( \frac{1}{n}; T_1 \right), T_1 < \infty \right\}.$$

We use the notation:

$$\Omega_{t_1}^n = \left\{ x \in R^2 \mid |x| \leq t_1 \right\}$$

is the section of the cone for a given  $t_1 \in \left( \frac{1}{n}; T_1 \right)$ ;

$\sum_{xt_1}^n$  is the lateral surface of  $Q_{xt_1}^n$ .

The following inclusions take place

$$Q_{xt_1}^n \subset Q_{xt_1}^{n+1} \subset \dots \subset Q_{xt_1},$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{xt_1}^n = Q_{xt_1}.$$

In a non-degenerating domain  $Q_{xt_1}^n$  (for every final value  $n \in N^*$ ) we consider the BVP:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t_1} = a^2 \Delta_x u_n + f_n(x, t_1), \quad f_n \in L_2 \left( \frac{1}{n}, T_1; H^{-1}(\Omega_{t_1}^n) \right) \quad (14)$$

$$u_n|_{\sum_{xt_1}^n} = 0, \quad (15)$$

$$u_n|_{t_1=\frac{1}{n}} = 0; \quad x \in \Omega_{t_1}^n. \quad (16)$$

Let us introduce the class of functions  $v(x, t_1)$ :

$$W_n = \left\{ v \in L_2\left(\frac{1}{n}, T_1; H_0^1(\Omega_{t_1}^n)\right); \frac{\partial v}{\partial t_1} \in L_2\left(\frac{1}{n}, T_1; H^{-1}(\Omega_{t_1}^n)\right) \right\}. \quad (17)$$

The solution to problem (14) – (16) is sought in the class of functions (17). By virtue of the statement of the theorem 2 each problem (14) – (16) has a solution  $u_n(x, t_1)$ .

For these solutions, a priori estimates are established that are uniform with respect to  $n$ . Based on these a priori estimates, the following theorem is proved.

**Theorem 3.** *BVP (14) – (16) has the only solution  $u_n(x, t_1)$  from (17) for all  $f_n(x, t_1) \in L_2\left(\frac{1}{n}, T_1; H^{-1}(\Omega_{t_1}^n)\right)$ , and the solution  $u_n(x, t_1)$  continuously depends on  $f_n(x, t_1)$ .*

**Theorem 4.** *In the cone  $Q_{xt_1}$  BVP (1) – (3) is uniquely solvable in the space*

$$W = \left\{ v \mid v \in L_2(0, T_1; H_0^1(\Omega_{t_1})) ; \frac{\partial v}{\partial t_1} \in L_2(0, T_1; H^{-1}(\Omega_{t_1})) \right\}.$$

for all  $f(x, t_1) \in L_2(0, T_1; H^{-1}(\Omega_{t_1}))$

For the proof, consider a sequence of functions on  $Q_{xt_1}, n \in N^*$ :

$$\tilde{u}_n(x, t_1) = \begin{cases} u_n(x, t_1), & \text{if } (x, t_1) \in Q_{xt_1}^n, \\ 0, & \text{if } (x, t_1) \in Q_{xt_1} \setminus Q_{xt_1}^n, \end{cases} \quad (18)$$

where  $u_n(x, t_1)$  are respectively the only solutions to problems (14) – (16). Similarly, we introduce the sequence  $\tilde{f}_n(x, t_1)$ .

The sequence (18)  $\tilde{u}_n(x, t_1)$  satisfies the proved a priori estimates.

It is shown that the sequence  $\{\tilde{u}_n(x, t_1)\}_{n=1}^\infty$  is bounded. Then we can extract from it the sequence  $\{\tilde{u}_m\}_{m \in N^*}$ :

$$\tilde{u}_m \rightarrow z \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega_{t_1}).$$

$z(x, t_1)$  is a unique solution to BVP (1) – (3) in  $W$ .

### Литература

1. *Y. Benia, and B.K. Sadallah* Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles // Electron. J. Diff. Equ. – 2016. – Vol. 157. – P. 1-13.
2. *O.A. Ladyzhenskaya; V.A. Solonnikov; N.N. Ural'tseva* Linear and quasilinear equations of parabolic type. New York: AMS, 1968.
3. *J.L. Lions, E. Magenes* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Berlin: Springer, 1972.

## MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR VIBRATIONS OF A ROPE WITH A MOVING BOUNDARY<sup>1 2</sup>

©2022 *V. L. Litvinov*

(Moscow; *vladlitvinov@rambler.ru*)

©2022 *K. V. Litvinova*

(Moscow; *kristinalitvinova900@rambler.ru*)

**Abstract:** Until now, the problems of longitudinal - transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account. The paper

---

<sup>1</sup>Vladislav L. Litvinov, Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran' Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation); doctoral student, Moscow State University (GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation), Ph.D. (Technical), Associate Professor., ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>

<sup>2</sup>Kristina V. Litvinova, student, Moscow State University (GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation)



presents a new nonlinear mathematical model of transverse vibrations of an unbounded rope with a moving boundary, in which geometric nonlinearity is taken into account. The obtained mathematical model allows one to describe high-intensity vibrations of a rope with a moving boundary. The solution was made in the Matlab environment of dimensionless variables, which allows one to use the obtained results to calculate oscillations of a wide range of technical objects

**Keywords:** nonlinear mathematical model, vibrations of a rope, moving boundaries

Until now, the problems of longitudinal - transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account [1–5, 7–10]. In rare cases, the action of the forces of resistance of the external environment was taken into account [6]. Real technical objects are much more complicated, for example, with an increase in the intensity of oscillations, the geometric nonlinearities of the object have a great influence on the oscillatory process.

In connection with the intensive development of numerical methods, it became possible to more accurately describe complex mathematical models of longitudinal-transverse oscillations of objects with moving boundaries, taking into account a large number of factors influencing the oscillatory process.

The paper presents a new nonlinear mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of a rope with a moving boundary, which takes into account geometric nonlinearity, energy exchange across the boundary. The boundary conditions are obtained in the case of interaction between the parts of the object to the left and to the right of the moving boundary.

The system of differential equations is obtained

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho S u_{1,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E (\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) = 0; \\ & \rho S u_{2,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E (\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) + \\ & + I (E u_{2,xxxx} + \mu u_{2,xxxxt}) + \lambda u_{2,t} + k_0 u_2 - f(x, t) = 0. \end{aligned} \right.$$

Border conditions

$$u_2(0, t) = 0; \quad u_{2,xx}(0, t) = 0; \quad u_2(L_0, t) = 0; \quad u_{2,x}(L_0, t) = 0;$$

$$\begin{aligned} & m_1 \frac{d^2}{dt^2} u_1(L(t), t) + \rho S \left( u_{1,t}(L(t) - 0, t) - \right. \\ & \quad \left. - u_{1,t}(L(t) + 0, t) \right) L'(t) + \\ & + \left( ES \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)} - 1 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \mu S \frac{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,xt}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} \right) \cdot \\ & \quad \cdot \frac{u_{1,x}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} - \\ & - \left( ES \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)} - 1 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \mu S \frac{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,xt}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} \right) \cdot \\ & \quad \cdot \frac{u_{1,x}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} - F_1(t) = 0; \\ & m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) + EI u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) + \\ & + \mu I u_{2,xxxxt}(L(t) + 0, t) - EI u_{2,xxx}(L(t) - 0, t) - \end{aligned}$$

$$-\mu I u_{2,xxxt} (L(t) - 0, t) + k_2 u_2 (L(t), t) - F_2(t) = 0;$$

$$u_2 (L(t) - 0, t) = u_2 (L(t) + 0, t);$$

$$u_{2,x} (L(t) - 0, t) = 0; \quad u_{2,x} (L(t) + 0, t) = 0.$$

Initial conditions

$$u_2(x, 0) = \varphi_3(x); \quad u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x).$$

Let us linearize the system of differential equations.

$$\begin{aligned} \rho S u_{2,tt} - E S \varepsilon_0 u_{2,xx} + E I u_{2,xxxx} + \mu I u_{2,xxxxt} + \\ + \lambda u_{2,t} + k_0 u_2 - f(x, t) = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_2(0, t) = 0; \quad u_{2,xx}(0, t) = 0; \\ u_2(L_0, t) = 0; \quad u_{2,x}(L_0, t) = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2 (L(t), t) + E I (u_{2,xxx} (L(t) + 0, t) - \\ - u_{2,xxx} (L(t) - 0, t)) + \mu I (u_{2,xxxxt} (L(t) + 0, t) - \\ - u_{2,xxxxt} (L(t) - 0, t)) + k_2 u_2 (L(t), t) - F_2(t) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_2 (L(t) + 0, t) = u_2 (L(t) - 0, t); \\ u_{2,x} (L(t) + 0, t) = 0; \quad u_{2,x} (L(t) - 0, t) = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_3(x); \quad u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x). \quad (5)$$

In problem (1) - (5) we take

$$I = 0, \lambda = 0, \mu = 0, k_0 = 0, f(x, t) = 0, F_2(t) = 0.$$

In this case, the vibrations of the rope will be described by the wave equation:

$$\rho u_{2,tt} - E \varepsilon_0 u_{2,xx} = 0; \quad x \in (-\infty; \infty). \quad (6)$$

The initial conditions are

$$u_2(x, 0) = \varphi_3(x); \quad u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x). \quad (7)$$

From [3] we obtain the boundary conditions:

$$\begin{aligned}
 & m \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) - \rho S(u_{2,t}(L(t) + 0, t) - \\
 & - u_{2,t}(L(t) - 0, t)) L'(t) - ES\varepsilon_0(u_{2,x}(L(t) + 0, t) - \\
 & - u_{2,x}(L(t) - 0, t)) + k_2 u_2(L(t), t) = 0; \\
 & u_2(L(t) + 0, t) = u_2(L(t) - 0, t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Thus, a new nonlinear mathematical model of transverse vibrations of an unrestricted rope with a moving boundary has been put forward, which is solved numerically in the Matlab environment. The boundary conditions are obtained in the case of occurrence between the parts of the object to the left and to the right of the boundary. The obtained model is linearized, while the principle of homogeneity is observed: in the particular case of small fluctuations, the obtained model coincides with the classical one, which indicates the correctness of the results obtained. The obtained mathematical models make it possible to describe high-power oscillations with moving boundaries.

### Литература

1. *Savin G.N., Goroshko O.A.* Dynamics of a variable length thread // Nauk. dumka, Kiev, 1962, 332 p.
2. *Samarin Yu.P.* On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // Applied Mathematics and Mechanics. - 1964. - T. 26, V. 3. - P. 77–80.
3. *Vesnitsky A.I.* Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, 2001, 320 p.
4. *Lezhneva A.A.* Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. - 1970. - No. 1. - P. 159-161.
5. *Litvinov V.L.* Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute

of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26, No. 2. P. 188-199.

6. *Anisimov V.N., Litvinov V.L.* Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // Vestn. Himsel. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science, 2015. Vol. 19, No. 2. P. 382-397.

7. *Anisimov V.N., Litvinov V.L.* Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un – t, 2020. - 100 p.

8. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77.

9. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. T. 19. No. 4. – P.161–165.

10. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Mathematical modeling and research of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. state tech. un–t, 2017. – 149 p.

# ON THE WEAK SOLVABILITY OF HIGH-ORDER VISCOELASTIC FLUID DYNAMICS MODELS <sup>1</sup>

©2022 V. P. Orlov

(Voronezh, VSU; orlov\_vp@mail.ru)

We consider the motion of an high-order Oldroyd incompressible fluid with memory along the trajectories of the velocity field of constant density (it is supposed to be equal to 1) which occupies a bounded domain  $\Omega$  in  $R^N$ ,  $N = 2, 3$ ,  $\partial\Omega \in C^2$ .

The constitutive law has the following form

$$\left(1 + \sum_{i=1}^L \lambda_i \frac{d^i}{dt^i}\right) \sigma = 2 \left(\nu + \sum_{i=1}^L \varkappa_i \frac{d^i}{dt^i}\right) \mathcal{E}(v), \quad \lambda_L > 0, \varkappa_M > 0,$$

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Here  $\sigma$  and  $\mathcal{E}(v)$  are the deviator of the stress tensor and the strain rate tensor, respectively.

We assume that the roots  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L$  of the polynomial  $Q(p) = 1 + \sum_{i=1}^L \lambda_i p^i$  are real, negative and distinct.

Let

$$\mu_0 = \frac{\varkappa_L}{\lambda_L} > 0, \quad C(p) = \sum_{i=1}^{L-1} (\varkappa_i - \mu_0 \lambda_i) p^i + \nu - \mu_0,$$

$$\beta_k = \frac{C(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}, \quad G(t-s) = \sum_{k=1}^L \beta_k \exp(\alpha_k(t-s)).$$

---

<sup>1</sup>The study was supported by the Russian Foundation of Basic Researches (project No. 20-01-00051)

The corresponding initial-boundary value problem  $Z$  has the form

$$\begin{aligned} & \partial v / \partial t + \sum_{i=1}^N v_i \partial v / \partial x_i - \mu_0 \Delta(v)(t) - \\ & \operatorname{Div} \int_0^t G(t-s) \mathcal{E}(v)(s, z(\tau, t, x)) ds + \nabla p = f, \quad (t, x) \in Q_T; \\ & z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad 0 \leq t, \tau \leq T, \quad x \in \overline{\Omega}; \\ & \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T = [0, T] \times \partial\Omega; \\ & v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T. \end{aligned}$$

Here  $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_N(t, x))$  is the velocity field,  $p$  is the pressure,  $f(t, x)$  is the density of external forces.

Let  $V = \{v \in W_2^1(\Omega)^N : v|_\Gamma = 0, \operatorname{div} v = 0\}$  is a Hilbert space with a scalar product  $(v, u)_V = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \mathcal{E}_{ij}(u) \cdot \mathcal{E}_{ij}(v) dx$ . The space  $H$  is defined as the closure of  $V$  in the norm of the space  $L_2(\Omega)^N$ , while  $V^{-1}$  is conjugate to  $V$  space. The sign  $\langle g, u \rangle$  denotes the action of the functional  $g \in V^{-1}$  on the element  $u \in V$ .

Next,  $(\cdot, \cdot)$  denotes the scalar product in suitable Hilbert spaces,  $W_1(0, T) \equiv \{v : v \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H), v' \in L_1(0, T; V^{-1})\}$ .

**Definition 1.** *The weak solution to problem  $Z$  is the function  $v \in W_1(0, T)$  that satisfies the identity*

$$\begin{aligned} & d(v, \varphi) / dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \varphi / \partial x_i) + \mu_0 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \\ & \left( \int_0^t G(t-s) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

for any  $\varphi \in V$  and a.e.  $t \in [0, T]$  and initial condition from problem  $Z$ . Here  $z$  is the RLF generated by  $v$ .

**Theorem 1.** *Let  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ ,  $v^0 \in H$ . Then problem  $Z$  has a weak solution  $v$ .*

To prove Theorem 1 we construct the sequence of approximative problems  $Z_n$  with regularized convective term in the momentum equation and velocity field in the Cauchy problem in  $Z$ . Appropriate apriori estimates admit to obtain result of Theorem 1 via the passage to the limit.

This is a joint result with V.G. Zvyagin.

### References

1. *Oskolkov A. P.* Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids // Proc. Steklov Inst. Math. - 1989. -V. 179. - P. 137—182.
2. *Zvyagin V. G., Orlov V. P.* Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with Memory //Nonlinear Analysis: TMA. - 2018. V. 172. P. 73–98.
3. *Zvyagin V. G., Orlov V. P.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity //Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. - 2018. - V. 38. – №. 12. - P. 6327–6350.
4. *Zvyagin V. G., Orlov V. P.* On one problem of viscoelastic fluid dynamics with memory on an infinite time interval // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B. - 2018. - V. 23. – №. 9. - P. 3855–3877.
5. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces //Invent. Math. - 1989. V. 98. - P. - 511–547.



# AUGMENTED BIFURCATION DIAGRAM IN ONE PROBLEM OF VORTEX DYNAMICS <sup>1</sup>

©2022 G. P. Palshin

(Dolgoprudny, MIPT; *gleb.palshin@yandex.ru*)

Since the time of Helmholtz [1], the model of  $N$  point vortices in an ideal fluid with constant intensities  $\Gamma_\alpha$  ( $\alpha = 1 \dots N$ ) is well known. The model of  $N$  interacting *magnetic vortices* in ferromagnets [2] is a more general case than the hydrodynamic model: in addition to vorticities  $\Gamma_\alpha$ , there are polarities  $\lambda_\alpha$  which take values  $+1$  or  $-1$  depending on magnetization directed up or down respectively.

In this talk, we consider a *restricted problem* of three magnetic vortices, where in the system of three magnetic vortices at positions  $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , the vortex with vorticity  $\Gamma_0$  is fixed at point  $\mathcal{O}(0, 0)$ . Equations of motion in our generalized model have the following complex form:

$$i\lambda_\alpha \dot{z}_\alpha = \frac{1}{\bar{z}_\alpha} + \frac{\Gamma_\beta}{\lambda_\beta} \frac{1}{\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta}, \quad \alpha \neq \beta,$$

where  $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$  is a complex coordinate specifying the position of vortex with vorticity  $\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . The system can be written in Hamiltonian form:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, & \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, & \alpha &= 1, 2, \\ H &= \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} \ln \ell_1 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln \ell_2 + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln \ell_{12}, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $\ell_\alpha = |r_\alpha|$  and  $\ell_{\alpha\beta} = |r_\alpha - r_\beta|$ . In addition, this system has an integral of the *angular momentum of vorticity*  $F = \Gamma_1 \ell_1^2 + \Gamma_2 \ell_2^2$ , so it is completely Liouville integrable system with two degrees of freedom.

---

<sup>1</sup>The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 20-01-00399

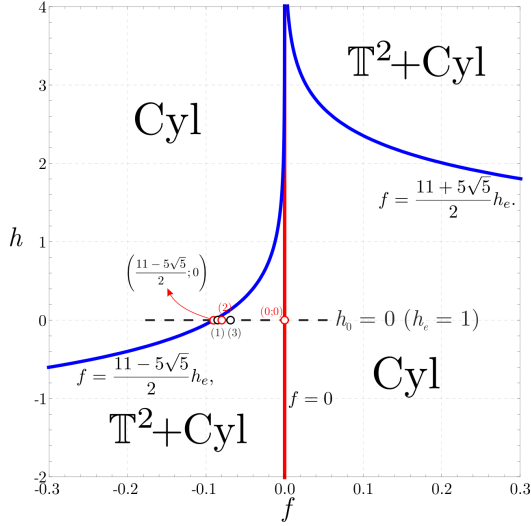


Figure 1. Augmented bifurcation diagram for parameters  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = -1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

We consider the *augmented bifurcation diagram*  $\Sigma$  as the set of points over which the momentum map  $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = (F(\mathbf{z}), H(\mathbf{z}))$  is not locally trivial in the differentiable sense. The set of critical values is always included in the augmented bifurcation diagram  $\Sigma$ , but does not always coincide with it. In other words, the augmented bifurcation diagram  $\Sigma$  consists of *critical* and *non-critical bifurcation curves*. In the restricted system of three magnetic vortices in the case of a “vortex pair” (encountered in hydrodynamics), an augmented bifurcation diagram contains non-critical bifurcation line  $f = 0$  (Fig. 1). Moreover, it contains *non-compact bifurcations* of the  $(\mathbb{T}^2 + \text{Cyl}) \rightarrow \text{Cyl}$  type. Here « $\mathbb{T}^2$ » denotes the presence of a two-dimensional Liouville torus, and «Cyl» denotes a two-dimensional cylinder.

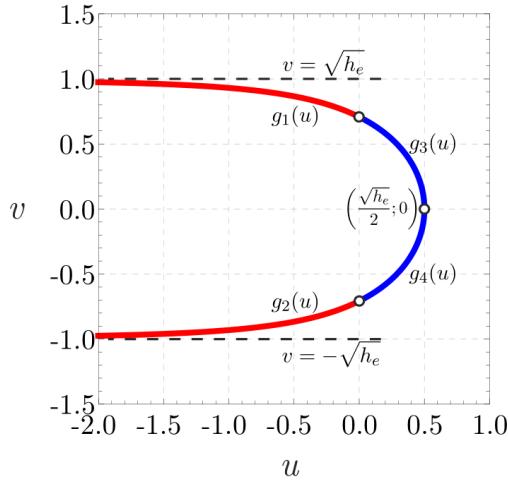


Figure 2. Reduced Hamiltonian level lines for  $f = 0$ ,  $h = 0$  and parameters  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = -1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

For the system (1) an explicit reduction to a Hamiltonian system with one degree of freedom was performed (Fig. 2). By parametrizing the level lines of the reduced Hamiltonian, an augmented bifurcation diagram in Fig. 1 was found explicitly:

$$\Sigma(f, h) : \begin{cases} f = 0, \\ f = \frac{11 - 5\sqrt{5}}{2} h_e, \\ f = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} h_e. \end{cases} \quad h_e = e^{-2h},$$

The author expresses his gratitude to Professor P.E. Ryabov for posing the problem and attention to this work.

## References

1. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen //J. Reine Angew Math. – 1858. – V. 55. – Pp. 22-55.
2. *Komineas S., Papanicolaou N.* Gröbli solution for three magnetic vortices //Journal of Mathematical Physics. – 2010. – V. 51. – No. 4. – P. 042705.

## CONVERGENCE RATE WHEN APPROXIMATING FRACTIONAL EQUATIONS <sup>1</sup>

©2022 *S. Piskarev*

(Moscow, MSU; *piskarev@gmail.com*)

This talk is devoted to the well-posedness and approximation for nonhomogeneous fractional differential equations in Banach spaces  $E$  :

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), u(0) = u^0,$$

where  $0 < \alpha < 1$  and operator  $A$  generates analytic  $\alpha$ -resolution family. First of all, the same way as for integer derivative, we get the necessary and sufficient condition for the well-posedness of nonhomogeneous fractional Cauchy problems in the Holder spaces  $C_0^\beta([0, T]; E)$ . Secondly, by using implicit difference scheme and explicit difference scheme, we deal with the full discretization of the solutions of nonhomogeneous fractional differential equations in time variables, get the stability of the implicit difference scheme and explicit difference scheme. Finally, the order of convergence when approximating homogeneous fractional differential equations by implicit difference scheme and explicit difference scheme in the space  $C([0, T]; E)$  were obtained.

---

<sup>1</sup>Research was partially supported by the grant from Russian Science Foundation (RSF) N20-11-20085

## Литература

1. *Li Liu, Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S.* Discrete almost maximal regularity and stability for fractional differential equations in  $L^p([0, 1], \Omega)$ . // Applied Mathematics and Computation. - 2021, - Т. 386.
2. *Ru Liu, Piskarev Sergey.* Well-Posedness and Approximation for Nonhomogeneous Fractional Differential Equations // Numerical Functional Analysis and Optimization. — Marcel Dekker Inc. - 2021, - V. 42. - No 6, - Pp. 619-643.

## ON SOME MODELS OF HEAT AND MASS TRANSFER <sup>1</sup>

©2022 *M. A. Stepovich, V. V. Kalmanovich*

(Kaluga, Tsiolkovsky KSU; *m.stepovich@rambler.ru*;  
*v572264@yandex.ru*)

©2022 *D. V. Turtin*

(Ivanovo, Plekhanov RUE, Ivanovo Branch; *turtin@mail.ru*)

Some possibilities of quantitative description of heat and mass transfer processes caused by kilovolt (1–50 keV) electrons in semiconductor targets are considered by means of mathematical modeling. The processes of heat and mass transfer caused by the interaction of wide electron beams with homogeneous and multilayer planar semiconductor structures are considered. The use of wide electron beams makes it possible to reduce these problems to one-dimensional ones and to describe the considered mathematical models [1, 2] by ordinary differential equations. The objects of study are mathematical models describing the diffusion processes of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of kilovolt electrons in

---

<sup>1</sup>The research was carried out with the partial financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-03-00271), as well as the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Kaluga Region (project No. 18-41-400001)

the following semiconductor targets: 1) in homogeneous semi-infinite targets, 2) in homogeneous targets of finite thickness, 3) in multilayer planar structures of finite thickness, including number and with an arbitrary number of layers. As a result, estimates were obtained that confirm the insignificant effect of uncertainties in the initial data on the results of the experiment. It is shown that for the considered problems of heat and mass transfer in homogeneous and multilayer targets, the existence and uniqueness of the solution of the corresponding differential equations takes place, i.e. the considered mathematical models are correct.

When simulating the processes of interaction of charged particles with matter, the form of the function in the right-hand side of the differential equations was not specified. Because of this, the results obtained are valid for any external source: a wide flux of charged particles or a wide flux of quanta of electromagnetic radiation.

### References

1. *Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A.* Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Phenomena Caused by Interaction between Electron Beams and Planar Semiconductor Multilayers // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. — 2020. — V. 84. — No. 7. — P. 844–850.
2. *Stepovich M. A., Seregina E. V., Kalmanovich V. V., Filippov M. N.* On some problems of mathematical modeling of diffusion of non-equilibrium minority charge carriers generated by kilovolt electrons in semiconductors // Journal of Physics: Conf. Series. — 2021. — V. 1740. — Art. No. 012035.

# Содержание

Абдурагимов Г. Э. ....	3
Авдеев Н. Н. ....	4
Акпан Д. Ж. ....	7
Алхутов Ю. А., Чечкин А. Г. ....	10
Асхабов С. Н. ....	13
Атанов А. В., Нгуен Т. Т. З. ....	17
Баталова С. А. ....	20
Безмельницына Ю. Е. ....	25
Белозеров Г. В. ....	28
Близняков Н. М., Вахтель В. М., Костомаха Д. Е., Работкин В. А. ....	30
Богомолов С. В. ....	37
Булатов Ю. Н. ....	40
Бырдин А. П., Сидоренко А. А. ....	43
Василенко П. М. ....	47
Васильев В. Б. ....	52
Ватолкин М. Ю. ....	55
Ведюшкина В. В. ....	61

Вирченко Ю. П. ....	64
Галиакберов Р. Р., Орлов С. С., Соколова Г. К. ....	67
Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. ....	70
Горденин Л. В. ....	75
Даринский Б. М., Сайко Д. С., Ефанова Н. Д. ....	76
Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Ергалиев М. Г. ....	79
Елисеев А. Г. ....	83
Елисеев А. Г., Ратникова Т. А., Шапошникова Д. А. ....	91
Ерохин В. И., Кадочников А. П., Сотников С. В. ....	101
Журба А. В., Костин Д. В., Костина Т. И., Уткин А. А. ....	103
Завьялов В. Н. ....	111
Зайцева А. В. ....	114
Зволинский Р. Е. ....	116
Звягин А. В., Костенко Е. И. ....	119
Зубова С. П., Раецкая Е. В. ....	122
Илолов М. И., Лашкарбеков С. М., Рахматов Дж. Ш. ....	123



Кибкало В. А.....	128
Кокурин М. М. ....	131
Кокурин М. Ю.....	133
Колмыкова Е. В.....	135
Коростелева Д. М.....	138
Кузнецова А. А. ....	140
Лобзин Ф. И. ....	144
Лобода А. В., Даринский Б. М.....	147
Лобода А. В., Каверина В. К.....	150
Лушина Е. А.....	153
Малютина А. Н. ....	156
Миронов А. Н., Волков А. П. ....	161
Момот Е. А. ....	162
Мухамадиев Э., Наимов А. Н.....	165
Хоанг В. Н.....	168
Никитина С. А.....	172
Онуфриенко М. В.....	175
Перескоков А. В. ....	178
Петросян Г. Г.....	181

Пономарёв В. В. ....	184
Пустовойтов С. Е. ....	185
Раецкий К. А. ....	187
Сабитов К. Б., Зайнуллов А. Р. ....	191
Самсонов А. А. ....	195
Семёнов В. В. ....	198
Силаева М. Н. ....	201
Солиев Ю. С. ....	202
Соловьёв П. С. ....	207
Сухочева Л. И. ....	210
Тран З. ....	211
Трусова Н. И. ....	216
Трусова Н. И. ....	219
Усков В. И., Анохина В. А., Московская В. С., Трофименко П. В. ....	222
Устюжанинова А. С., Турбин М. В. ....	226
Фоменко Т. Н. ....	229
Фомин В. И. ....	232
Хабибуллин Б. Н., Салимова А. Е. ....	234

Алкади Хамса, Костин В. А.....	237
Харчева И. С.....	239
Хацкевич В. Л. ....	241
Хоанг В. Н. ....	245
Царьков И. Г.....	249
Шамолин М. В.....	252
Шананин Н. А. ....	254
Шашкин А. И., Половинкина М. В., Половинкин И. П. ....	256
Шубарин М. А.....	262
Годова А. Д., Федоров В. Е.....	267
Hussin S., Sufiyanov V. G.....	270
Kosmakova M. T., Tuleutaeva Zh. M.....	275
Litvinov V. L., Litvinova K. V.....	280
Orlov V. P.....	286
Palshin G. P. ....	289
Piskarev S.....	292
Stepovich M. A., Kalmanovich V. V., Turtin D. V.....	293

Научное издание

ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ШКОЛА С.Г. КРЕЙНА – 2022

Материалы международной конференции

*Оригинал-макет подготовили:*

*Д.В. Костин, Н.Н. Авдеев,*

*С.Д. Бабошин, А.А. Уткин, А.В. Журба*

*Издание публикуется в авторской редакции  
и авторском наборе*

Подписано в печать 01.03.2022. Формат 60×84/16

Усл. печ. л. 17,4. Тираж 50 экз. Заказ 87

Издательский дом ВГУ

394018 Воронеж, пл. Ленина, 10

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательского дома ВГУ

394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3