ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2014»

Воронеж
Издательско-полиграфический центр
«Научная книга»
2014

УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4
М34

Напечатано по решению Ученого совета математического факультета Воронежского государственного университета

Издано при поддержке ОАО «Турбонасос» гранта РФФИ № 14-01-06802-моб_г

Под редакцией В. А. Костина

Оргкомитет: Ендовицкий Д. А. (председатель). *Сопредседатели:* Маслов В. П., Попов В. Н., Костин В. А. Заместители председателя: Баев А. Д., Валюхов С. Г., Овчинников В. И., Семенов Е. М. *Члены оргкомитета:* Алхутов Ю. А., Баскаков А. Г., Вирченко Ю. П., Гликлих Ю. Е., Глушко А. В., Жиков В. В., Звягин В. Г., Каменский М. И., Кожанов А. И., Костин А. В., Ляхов Л. Н., Новиков И. Я., Орлов В. П., Пятков С. Г., Сабитов К. А., Свиридюк Г. А., Солдатов А. П., Фоменко Т. Н., Чаплыгин А. А.

Программный комитет: Фоменко А. Т. (председатель), Мухамадиев Э. М., Азизов Т. Я., Арутюнов А. В., Гольдман М. Л., Забрейко П. П., Задорожний В. Г., Зайцев В. Ф., Калитвин В. А., Лобода А. В., Перов А. И., Поветко В. Н., Репников В. Д., Сапронов Ю. И., Фёдоров В. Е., Харламов М. П.

М34 **Материалы** международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна» – 2014» [Текст] / под ред. В. А. Костина. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2014. – 435 с.
ISBN 978-5-4446-0370-3

В сборнике представлены статьи участников международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2014», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4

ISBN 978-5-4446-0370-3

Уважаемые участники ВЗМШ С.Г.Крейна – 2014, мы продолжаем знакомство с выдающимися людьми, внесшими и вносящими основополагающий вклад в создание, поддержку и развитие воронежских зимних математических школ.

В этом сборнике предлагается информация об их основателе С.Г. Крейне, 95-летие которого было отмечено 15 июля 2012 года. А также мы расскажем об одном из его учеников - выпускнике математического факультета ВГУ Валюхове С.Г., достигшего крупных успехов в приложениях математических методов в конструировании и производстве высокотехнологичной продукции, соответствующей мировым стандартам. Хорошо понимая значение фундаментальной математики, Сергей Георгиевич оказывает финансовую поддержку в проведении наших школ, за что мы выражаем сердечную благодарность ему и его организации «Турбонасос».

Ученый. Учитель. Кумир

В.А. Костин
(Воронеж, Воронежский государственный университет; *vlkostin@mail.ru*)

15 июля 2012 исполнилось 95 лет со дня рождения выдающегося отечественного ученого и педагога с мировым именем, доктора технических наук, профессора, заслуженного деятеля науки РФ Селима Григорьевича Крейна.

В своих воспоминаниях его однокашник и друг по средней школе г.Киева И.П. Грагеров пишет, что в школьные годы, да и позднее, все друзья и родные именовали его Мирой, так как имя Селим является производным от Шолом, что в переводе с иврита означает Мир. При этом он восторженно отзывается о его способностях, и уже в те годы проявленном мужестве, которое ему пришлось проявлять в течении всей его непростой жизни: «Мира отличался от других учеников не только блестящими способностями и успехами по многим предметам тем, что будучи с детства пораженный анкилозом коленного сустава (из-за чего нога была согнута под прямым углом, и для перемещения требовалась палка и подскоки на здоровой ноге), он, не обращая внимание на недуг, активно участвовал во всех играх, включая спортивные.

В последней четверти 10-го класса Миру прооперировали – ногу выпрямили, но в колене она так и не сгибалась. Зато можно было отбросить палку и еще активнее участвовать во всех играх».

После окончания школы в 1935 году Крейн заканчивает физико-математический факультет Киевского университета, а затем поступает в аспирантуру под руководством академика Н.Н. Боголюбова. В годы войны он уже под руководством академика М.А. Лаврентьева работает в Уфе, куда был эвакуирован с Институтом математики Академии наук УССР. Здесь он занимается математическими проблемами в теории кумулятивных снарядов. В 1946 году он возвращается в Киев и в 1950 году защищает диссертацию на соискание доктора технических наук в Академии артиллерийских наук.

С 1954 года и до ухода из жизни (2000 год) Селим Григорьевич полностью посвятил свою деятельность нашему Воронежу, где он вместе с М.А.Красносельским и В.И.Соболевым создает, ставшую хорошо известной в нашей стане и за рубежом, научную школу функционального анализа. Один из учеников С.Г.Крейна, яркий представитель этой школы, ныне профессор в Институте математики им. Ж.Фурье в Гренобле (Франция) М.Г.Зайденберг, сравнивает ее со школой Пифагора на о.Самосе, «Афинской школой», изображенной на известной картине Рафаэля и даже с Московской математической школой. Другой же достойный представитель Воронежской математической школы В.И.Кононенко, ныне работающий в США, называет Воронеж времен С.Г. Крейна «волшебным» и одной из столиц бушующего математического мира.

В тот период лидерство С.Г. Крейна было безусловным. Он был деканом, зав. кафедрой, организатором школ, конференций и т.д. Им опубликовано 175 статей, 18 монографий. Под его руководством была написана 81 диссертация, 18 его учеников стали докторами наук, а двое из них - Ю.М. Березанский и Ю.Л. Далецкий стали действительными членами Академии наук Украины.

Позже, в 2003 году, отмечая такую научную и педагогическую активность американское математическое общество назвало С.Г. Крейна первым по количеству учеников, имеющих ученую степень за все времена до 2003 года, опережая таких выдающихся математиков как Д. Гильберт и А.Н. Колмогоров. Его друг, известный в мире математик, профессор С.Д. Эйдельман так его характеризует: «У Селима органически сочеталась огромная разносторонняя образованность, блестящий талант лектора, способность находить принципиально новые научные направления, создавать научные коллективы, осуществляющие его далеко идущие замыслы».

Именно к этим далеко идущим замыслам и относится созданная в 1966 году Воронежская зимняя математическая школа, 45-летний юбилей которой мы отметили в 2012 году, и открытие института математики в том же 1967 году (приказ от 30-го ноября).

Масштабы его интересов и планов, направленных на развитие воронежской математики, характеризуют такие его слова: «В 1966 году в Москве проходил Международный конгресс математиков. Наряду с яркими впечатлениями от многих докладов и бесед и известными зарубежными математиками (Филипс, Иосида, Кальдерон, Комацу и др.) у меня сталось чувство неудовлетворенности. Мне показалось, что у нас имеется по ряду направлений отставание от современного на тот момент уровня. Так появилась идея проведения зимних математических школ, в которых читались лекции и делались доклады по самым современным проблемам математики, как ведущими учеными, так и молодыми математиками.

Что же касается создания института математики, то и эта идея у него возникла также в 1966-1967 гг. Он говорил: «Когда меня уговаривали стать деканом, то в качестве одного из условий я поставил оказание ректором помощи в организации института. Такая помощь была оказана. Однако как нужно начинать это мероприятие было совершенно неясно. Дело в том, что организация института не значилась ни в каких планах нашего планового хозяйства».

Сейчас оглядываясь на тот период, почти полувековой давности, убеждаешься, что надо было быть Крейном и только Крейном, чтобы не только придумать, но и реализовать эти проекты, обеспечивающие популярность воронежской математике и в наши дни. Надо быть Крейном, «...доступным для постоянного творческого общения, благожелательным и остроумным, любящим жизнь во всех ее многообразиях» (С.Д. Эйдельман). Добавим от себя, Крейном, который был кумиром не только у многочисленных своих учеников, но и многих людей, далеких от науки.

В этом смысле показателен эпизод, случившийся в Московском энергетическом институте, где С.Г. Крейн работал некоторое время после войны, когда во время лекции погас свет. И.П. Грагеров вспоминает: «Мира в темноте сказал: «Известно, что коммунизм—это советская власть плюс электрификация всей страны. Если в этом уравнении перенести один член в другую сторону, получим: Советская власть - это коммунизм минус электрификация всей страны», здесь удивительно не остроумие С.Г. Крейна, оно общеизвестно, а то, что на него не донесли, несмотря на то, что в те времена, в каждой группе был информатор «органов». Так сильна была студенческая любовь к нему.

Эта любовь сохранилась и в нашем Воронеже. Аспиранты его звали «папой», что также относилось к нему и со стороны нашего математического сообщества. Об этом свидетельствует и следующий случай. В 1971 году С.Г. Крейн уходил из Университета. В его честь мы решили устроить товарищеский ужин в ресторане «Славянский базар», (теперь там какой-то банк). Собрались ученики С.Г. Крейна, человек около сорока, от аспирантов до маститых ученых. Были профессора И.С. Иохвидов, Я.Б. Рутицкий, В.П. Глушко и др. Уселись за стол, наступила тишина. И, кажется, только в этот момент все поняли, какое невеселое событие отмечаем. Тишина затягивалась. С чего начать? И кто первый должен говорить? Оказывается, что об это мы, приглашая Крейна, не подумали. Тишина становилась тягостной. И вдруг, спасая нас от дальнейшей растерянности, поднялся Селим Григорьевич и произнес: «Друзья, уходя из университета, я покидаю многие должности, но позвольте мне оставить за собой должность тамады». И все стало на свои места. Значит Крейн по-прежнему с нами, жизнь продолжается.

Любовь к своему учителю вылилась и в поэзии его учеников.

Славят нашего Селима
От Воронежа до Рима
Да и Киев к юбилею шлет привет!
Город наш на древних кручах
Математиков могучих наплодил,
Но вот такого больше нет.
(прислал И.П. Грагеров)

Всюду: в лесах Амазонки бассейна
На виноградниках Дона и Рейна
В диких пустынях Дабу и Бахрейна
Даже в гареме Саддама Хусейна—
Искренне, нежно, благоговейно
Любят Селима Григорича Крейна.
(из творчества учеников)

Грозит математике жизни прибой,
И лупят нас клюшкой хоккейной,
Но снова нас гены зовут за собой
Мы дети, мы внуки, мы правнуки

Нашего Крейна.

Так хочется нам прогулять семинар,
И манит уют нас семейный,
Но быть математиком это ведь дар
Мы дети, мы внуки, мы правнуки
Нашего Крейна.

Студент, кандидат и профессор налей
И выдохни благословенно.
За наших любимейших учителей.
Мы дети, мы внуки, мы правнуки
Нашего Крейна
(Ю.М.Самойленко. г.Киев,
исполняется на муз. Пахмутовой «Нежность»)

Крейн сам любил петь, и его любимой песней была

«Дивлюсь я на небо та й думку гадаю,
Чому я не сокіл , чому не літаю ...»
. . . .
«Далеко за хмари, подальше від світу,
Шукать собі долі, на горе - привіту,. . . »

И то, что Селим Григорьевич большую часть своей продолжительной и плодотворной жизни посвятил нашему городу Воронежу говорит о том, где он «нашукал» эту долю.

Эту публикацию я заканчиваю словами профессора С.Д. Эйдельмана, которые отражают признательность всех математиков С.Г. Крейну: «Таким был Селим Крейн: Великим и Простым, любящим жизнь, нашу бессмертную науку и всех нас, которых он учил, прощал, хвалил. Таким он и останется в нашей бесконечно благодарной ему памяти».

С.Г. Валюхов. ОАО «Турбонасос»

В.А. Костин
(Воронеж, Воронежский государственный университет;
vlkostin@mail.ru)

При моем увольнении из КБХА в 1962 году, в связи с поступлением в ВГУ, со мной по-отечески доброжелательно поговорил заместитель главного конструктора А.Д. Конопатов. Генеральным конструктором в то время был прославленный авиаконструктор С.А.Косберг, созданная им третья ступень ракеты Р-7 вывела аппарат Ю.А.Гагарина на орбиту. Поздравив с поступлением и пожелав успехов, Александр Дмитриевич сказал слова, удивившие меня, их я помню и теперь: «Молодой человек, имейте в виду, что из организации мы Вас не увольняем и ждем после окончания университета». Надо сказать, что в некотором смысле и на новом уровне возвращение состоялось.

Случилось же это через двадцать лет при следующих обстоятельствах. В 1978 году мне как заместителю декана математического факультета было поручено организовать набор в группу для лиц, имеющих высшее техническое или естественно - научное образование, желающих углубить свои знания в области математики, необходимые в их практической деятельности, а не в скоростном перескакивании в модно-престижные направления, как это теперь принято. Подчеркиваю это. Поэтому, в этой, как теперь выяснилось, судьбоносной для нас группе, были представлены выпускники самых престижных (в то время) технических вузов страны, таких как МВТУ им. Баумана, Московского, Харьковского, Казанского авиационных институтов, где, как известно, математика преподается на высшем уровне.

При этом шесть из двенадцати студентов этой группы имели инженерно-конструкторский стаж в КБ «Химавтоматика». Именно выпускник этой группы (а перед этим выпускник МВТУ им. Баумана) Сергей Георгиевич Валюхов, стал у истоков создания нашей кафедры.

Буквально сразу после выпуска в 1983 году начались наши научные контакты с КБ «Химавтоматика». Они проходили в рамках хоздоговоров по кафедре функционального анализа. Но уже в начале девяностых годов С.Г. Валюхов вместе со своим отделом выделился в самостоятельную организацию «Турбонасос». С этого момента наши связи стали постоянно расширяться и углубляться. Перед нами ставились актуальные и важные, с производственной точки зрения, задачи. В то же время они были новыми и интересными для нас, так как фундаментальные математические исследования реализовывались в конкретном производственном процессе. Сюда относятся исследования по геометрии винтовых шестеренчатых зацеплений, теории движения жидкости в гидроциклоне, задачи по теории гидроцепей и многое другое.

К этому времени у нас сформировался исследовательский коллектив единомышленников. Стал вопрос о создании учебно-научной лаборатории, которая была открыта в 1997 году при полной финансовой поддержке со стороны предприятия «Турбонасос». Оставался последний шаг к созданию кафедры. И он был сделан уже через год. Так, в 1998 году в ВГУ родилась кафедра математического моделирования (КММ), освященная делами и идеями выдающихся наших современников С.А. Косберга, М.А. Красносельского, С.Г. Крейна.

Но жизнь заставляет искать подобные примеры в современной жизни для наших детей и внуков. В связи с этой актуальнейшей проблемой приведу слова известного писателя Даниила Гранина, сказанные в «Литературной газете» №42 (2011г.) в его интервью «Не барышом единым»: «Да, прежние кумиры сброшены или забыты – стоят пустые пьедесталы. В результате мы живем в беспримерии. Что такое наши миллиардеры? Они пример? К сожалению, да. Но этот пример не приведешь своему сыну или дочери. Не скажешь: вот, смотри, они всего достигли, потому что сделали много полезных вещей - открыли, изобрели, организовали». Так вот, именно последним требованиям и соответствует Сергей Георгиевич Валюхов.

В этом меня убедили более чем 30-летние контакты с ним и его деятельностью. Он и только он, начиная, как говорится, с нуля, преодолевая интриги, кредиты, тысячи километров пути в течение тех двух десятилетий, когда уничтожался промышленный и интеллектуальный потенциал страны, создал научно-производственное предприятие, ставшее гордостью нашего города. В своем приветственном письме участникам VI научной конференции СИНТ-11 (системы, насосы, турбины), также организованной Валюховым, руководство нашего города сравнили ОАО «Турбонасос» с верфями Петра Великого, заложенными в Воронеже для строительства кораблей. При этом он подчеркнул, что, благодаря этой организации, в области ведется работа российских и зарубежных ученых и специалистов по созданию и эксплуатации насосного оборудования. А это дает серьезные предпосылки для практического внедрения инвестиционных разработок в базовых отраслях экономики не только в России, но и за рубежом.

В моей же памяти отчетливо сохранилась его защита дипломной работы. Председателем ГЭКа был сам С.Г. Крейн, который, будучи доктором технических наук, не был дилетантом в производственных задачах (а именно, к их решению С.Г. Валюхов применял математические методы), и потому с прикладными работами у Крейна не было проходных задач. Был случай, когда он поставил «тройку» на вечернем отделении одному их руководителей известной в городе организации, выступившему на своей защите с работой, созданной его рабочим коллективом.

К счастью, защита С.Г. Валюхова запомнилась в противоположном смысле. Мы, члены комиссии, видели, что доклад и сама работа С.Г. Крейну понравились, казалось, что после нескольких вопросов по ее теме, как это обычно бывает, защита успешно закончится. И вдруг С.Г. Крейна «дернуло» задать вопрос по «чистой» математике, точнее по дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными и их решению. Все присутствующие замерли. Ведь этот вопрос лежал в стороне от методов, используемых в работе. Но к общей радости всех членов комиссии и всех присутствующих, Сергей достойно с ним справился. Всех больше этому радовался сам С.Г. Крейн.

После защиты он признался, что в отличной оценке он не сомневался и поэтому рискнул задать этот дополнительный вопрос с желанием довести впечатление о выпускнике до блеска. И Валюхов не подвел.

В настоящее время С.Г. Валюхов – генеральный конструктор, генеральный директор ОАО «Турбонасос», заведующий кафедрой нефтяного оборудования и транспортировки Воронежского государственного технического университета, академик инженерной академии, доктор технических наук, профессор. Путь к этим регалиям он начал в казачьей столице Новочеркасске, где окончил школу с золотой медалью, что позволило ему стать студентом одного из самых престижных вузов СССР Высшего технического училища им. Баумана, которое он также закончил с отличием. Далее творческие поиски и желание серьезной деятельности привели его в математическое сообщество.

Конструкции в $\mathcal{J}$-пространствах: банахов подход

Т.Я. Азизов[1],
(Воронеж, Воронежский государственный
университет;*azizov@math.vsu.ru*)
В.А. Сендеров
(Москва;*senderov.valery@gmail.com*)

Обозначения и терминология сообщения — те же, что в [1].

Показано, как "банаховы" теоремы позволяют прозрачно получать некоторые конструкции в $\mathcal{J}$-пространствах.

Лемма 1. Пусть на линейном пространстве $\mathfrak{M}$ заданы неэквивалентные нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1$ сильнее $\|\cdot\|$. Тогда на пространстве $\mathfrak{M}$ существует л.ф., непрерывный в $\|\cdot\|_1$ и разрывный в $\|\cdot\|$.

Лемма 2 (ср. [2, Теорема 1.1]). Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — (замкнутые) подпространства банахова пространства, $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{M}=\{0\}$, $\mathcal{L}\dot{+}\mathcal{M}\neq\overline{\mathcal{L}\dot{+}\mathcal{M}}$, $e_0\in\mathcal{M}$. Тогда существует подпространство $\mathcal{M}'$, такое, что $\mathcal{M}=\mathrm{Lin}\{e_0\}\dot{+}\mathcal{M}'$, $\overline{\mathcal{L}\dot{+}\mathcal{M}}=\overline{\mathcal{L}\dot{+}\mathcal{M}'}$.

С помощью Леммы 2 получается

Теорема 3 (ср. [3, Пример 1]). Пусть $\dim\mathfrak{H}_+=\infty$, $\dim\mathfrak{H}_-=\infty$. Тогда в пространстве $\mathfrak{H}$ существуют $\mathcal{J}$-ортогональные положительное $\mathcal{L}_+$ и отрицательное $\mathcal{L}_-$ подпространства такие, что $\overline{\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-}$ — вырожденное подпространство.

[4] содержит утверждения, которые могут быть сформулированы следующим образом.

Назовем дуальную пару, обладающую некоторым свойством, s-парой. Существуют s-пары, допускающие более одного расширения до максимальных (т.е. таких, что $\mathcal{P}_\pm\mathcal{L}_\pm=\mathfrak{H}_\pm$) s-пар.

Наши рассмотрения позволяют в некоторых случаях решать обратную задачу. Именно, при некоторых слабых ограничениях максимальная s-пара $(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ оказывается расширением некоторой s-пары, обладающей, помимо $(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$, и другими расширениями до максимальных s-пар.

[1]Исследования Т.Я.Азизова поддержаны грантом РФФИ 12-01-00102-а

Назовем дуальную пару $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ s-парой, если она определяет аппроксимативное разложение пространства $\mathfrak{H}$:

$$\mathcal{L}_+ \dot{+} \mathcal{L}_- \neq \overline{\mathcal{L}_+ \dot{+} \mathcal{L}_-} = \mathfrak{H}.$$

С помощью Леммы 2 доказывается

Теорема 4. Пусть $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ — максимальная s-пара, $\omega_{\mathcal{L}_+} \leq 1$. Тогда существует s-пара $(\mathcal{L}'_+, \mathcal{L}_-)$: $\mathcal{L}'_+ \subset \mathcal{L}_+$, $\operatorname{def} \mathcal{L}'_+ = 1$, допускающая не менее континуума расширений до максимальных s-пар.

Эту теорему можно обобщить на случай $\omega_{\mathcal{L}_+} < \infty$.

Литература

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, М.: Наука, 1986, 352 с.

2. Khatskevich V.A., Senderov V.A., On properties of linear operators of certain classes in rigged spaces with indefinite metric, Integral Equations and Operator Theory, 15 (1992), 301–324.

3. Азизов Т.Я., Сендеров В.А. О невырожденности суммы дефинитных подпространств // Вестник ВорГУ. Сер.: Физ. Мат. 2013. №2.

4. Лангер Г.К. О максимальных дуальных парах инвариантных подпространств $\mathcal{J}$-самосопряженных операторов // Мат. заметки. 1970. 7. №4. С. 443–447.

Модель Баренблатта-Желтова-Кочиной с условием Коши в квазибанаховых пространствах

Дж.К. Аль-Делфи

(Челябинск, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»(НИУ); *rassian71@mail.ru*)

Квазинормированным пространством $(\mathfrak{U};\, {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется линеал $\mathfrak{U}$ над полем $\mathbb{R}$ с *квазинормой* ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$, которая отличается от нормы только аксиомой «неравенство треугольника»:

$$\forall u, v \in \mathfrak{U} \qquad {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| +_{\mathfrak{U}} \|v\|),$$

где константа $C \geq 1$. Если $C = 1$, то квазинорма становится нормой, а квазинормированное пространство превращается в нормированное. Вообще говоря, квазинормированное пространство не нормируемо, но метризуемо [1], лемма 3.10.1. Это значит, что для квазинормированных пространств корректны понятия фундаментальной последовательности и полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым*. Широко известным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in (0,1)$. В [2] введены в рассмотрение *квазисоболевы пространства* ℓ_q^m, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, с квазинормой

$$ {}_q^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q \right)^{1/q}, $$

где при $q \in (0,1)$ константа $C = 2^{1/q}$ (при $q \in [1,+\infty)$ пространства ℓ_q^m – банаховы), причем $\ell_q^0 = \ell_q$. Здесь $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Заметим еще, что пространства ℓ_q^m не зависят от выбора последовательности $\{\lambda_k\}$, и кроме того, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_q^n \hookrightarrow \ell_q^m$ при $n \geq m$ и $q \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ назовем *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\left(\lim\limits_{k\to\infty} u_k\right)$ для любой последовательности $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, сходящейся в $\mathfrak{U}$; и назовем ограниченным, если от отображает ограниченные множества в ограниченные. Нетрудно показать, что линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, непрерывен точно тогда, когда он ограничен.

Пространство линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ квазибанахово с квазинормой

$$ {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|. $$

Далее, пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Следуя [3], введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора

M. Назовем оператор M (L,σ)-ограниченным, если его L-спектр $\sigma^L(M)$ ограничен; и (L,p)-ограниченным, если вдобавок точка ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{1}$$

Вектор-функцию $u : (a,b) \to \mathfrak{U}$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению (1), назовем *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (1) назовем *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

для уравнения (1) (коротко, решением задачи (1),(2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Теорема. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, точка $0 \in (a,b)$. Тогда при любых $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ и любых*

$$u_0 \in \left\{ u \in \mathfrak{U} : \; u = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q) f^{(k)}(0) \right\}$$

существует единственное решение $u \in C^\infty((a,b);\mathfrak{U})$ задачи (1),(2), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q) f^{(k)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds.$$

Здесь операторы $H = M_0^{-1}L_0$, M_0^{-1} и L_1^{-1} существуют в силу теоремы о расщеплении [4], а семейство операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ – разрешающая группа однородного уравнения (1).

В [5] введен в рассмотрение квазиоператор Лапласа $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, действующий в квазисоболевых пространствах ℓ_q^m как топлинейный изоморфизм, т.е. $\Lambda \in \mathcal{L}(\ell_q^{m+2}; \ell_q^m)$ и $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(\ell_q^m; \ell_q^{m+2})$, где $\Lambda^{-1}u = \{\lambda_k^{-1} u_k\}$ – квазиоператор Грина. Построим операторы $L = \lambda - \Lambda$, $M = \alpha\Lambda$ и рассмотрим уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной (1), как наиболее известное неклассическое уравнение математической физики [6], моделирующее процессы фильтрации, теплопроводности и влагопереноса в почве. Свободный член $f = f(t)$ отвечает внешней нагрузке. Построенные операторы $L, M \in \mathcal{L}(\ell_q^{m+2}; \ell_q^m)$, причем оператор M $(L, 0)$-ограничен. Ссылка на теорему завершает доклад.

В заключении заметим, что изложенный здесь подход позволяет рассмотреть задачу (1),(2) с нестационарным оператором M [7].

Литература

1. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

2. Аль-Делфи Д.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

3. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

4. Свиридюк Г.А., Аль-Делфи Д.К. Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 180–185.

5. Аль-Делфи Д.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах // Вестник СамГТУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (13). – С. 13–16.

6. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Неклассические модели математической физики // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

7. Сагадеева М.А. Разрешимость нестационарной задачи теории фильтрации // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277). – С. 45–56.

Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах

Дж.К. Аль Исави
(Челябинск, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ); *jtahir71@gmail.ru*)

Квазибанаховы пространства – это метризуемые полные квазинормированные пространства. Хорошо известным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in (0,1)$ (при $q \in [1,+\infty)$ пространства ℓ_q – банаховы). Кроме того в [1] построены так называемые квазисоболевы пространства. Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$.

Квазисоболевым называется квазибанахово пространство

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\}$$

с квазинормой ${}_q^m\|u\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q \right)^{1/q}$, $m \in \mathbb{R}$. Очевидно, что при $q \in [1,+\infty)$ пространства ℓ_q^m – банаховы; $\ell_q^0 = \ell_q$, а также имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_q^n \hookrightarrow \ell_q^m$ при $n \geq m$ и $q \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\left(\lim\limits_{k\to\infty} u_k \right)$ для любой последовательности $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, сходящейся в $\mathfrak{U}$. Нетрудно показать, что линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Линеал $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|$, где ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ (${}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|$) – квазинорма в $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$). Последовательность $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется *сильно сходящейся* к оператору $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, если для любого

$u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - Lu\| \to 0$, $k \to \infty$; и *равномерно сходящейся*, если ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L\| \to 0$, $k \to \infty$.

Теорема 1 (аналог теоремы Банаха–Штейнгауза). *Последовательность* $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *равномерно сходится к оператору* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *на некотором линеале* $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ *плотном в* $\mathfrak{U}$ *точно тогда, когда*

(i) *последовательность* $\{L_k\}$ *ограничена*;

(ii) *последовательность* $\{L_k\}$ *сильно сходится к* L *на* $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$.

Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ называется *замкнутым*, если его график $graph L = \{(u, f) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{F} : f = Lu\}$ замкнут по квазинорме ${}_{graphL}\|u\| ={}_{\mathfrak{U}} \|u\| +_{\mathfrak{F}} \|Lu\|$.

Теорема 2. *Если оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *то* L *– замкнутый оператор.*

Теорема 3. *Пусть линейный оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *замкнут и область определения* $\mathrm{dom} L = \mathfrak{U}$. *Тогда* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Теорема 4. *Пусть оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *и существует оператор* $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$. *Тогда* L^{-1} *– замкнутый оператор.*

Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ называется *плотно определенным*, если замыкание линеала $\overline{\mathrm{dom} L} = \mathfrak{U}$. Линеал замкнутых плотно определенных операторов обозначим символом $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$; рассмотрим оператор $\Lambda^2 u = \{\lambda_k^2 u_k\}$, где $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $\Lambda^2 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathrm{dom}\Lambda^2 = \ell_q^{m+4}$, причем $\Lambda^2 : \ell_q^{m+4} \to \ell_q^m$ – топлинейный изоморфизм.

Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, следуя [2], [3], введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Как нетрудно видеть, множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр оператора M всегда замкнут.

Определение. Оператор M называется *(L, p)-секториальным*, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\theta \in (\pi/2; \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\arg(\mu - a)| < \theta, \ \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max\left\{_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|R^L(M)_{(\mu,p)}, \ _{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|L^L(M)_{(\mu,p)}\|\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k - a|},$$

при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$. Здесь $R^L(M)_{(\mu,p)} = \prod\limits_{k=0}^{p} R^L(M)_{\mu_k}$ – правая и $L^L(M)_{(\mu,p)} = \prod\limits_{k=0}^{p} L^L(M)_{\mu_k}$ – левая (L,p)-резольвенты, а в свою очередь, $R^L(M)_\mu = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L(M)_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$ – правая и левая L-резольвенты оператора M.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Положим $L = \lambda - \Lambda$, $M = \Lambda^2$, где $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, оператор Λ^2 и последовательность $\{\lambda_k\}$ такие же, как в примере 1. Нетрудно показать, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L,0)$-секториален.

Отображение $U^\bullet \in C : \infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ называется *полугруппой операторов*, если

$$U^s U^t = U^{s+t} \text{ при всех } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Следуя традиции (см. напр., [4]), отождествим полугруппу с ее графиком $\{U^t : \ t \in \mathbb{R}_+\}$. Полугруппа $\{U^t : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ называется голоморфной, если она аналитически продолжима в некоторый сектор комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащий $\mathbb{R}_+$.

Теорема 5. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существуют голоморфные полугруппы операторов, которые имеют вид*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $\gamma \subset \rho^L(M)$ *– контур такой, что* $|\mathrm{arg}\mu| \to \theta$ *при* $\mu \to \infty$, $\mu \in \gamma$.

Пример 3. Пусть пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ и операторы L, M такие же, как в примере 2. Тогда

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} u_k, & \text{если } \lambda \neq \lambda_k,\ k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \neq l} e^{\mu_k t} u_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} : \lambda = \lambda_l, \end{cases}$$

где $\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}$ — точки L-спектра оператора M.

Литература

1. Аль-Делфи Д.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

2. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

3. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.

4. Сагадеева М.А. Разрешимость нестационарной задачи теории фильтрации // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277). – С. 45–56.

Влияние микроструктуры вязкопластического материала на форму течения в круглой трубе

А. Алъ Имам

(Воронеж, Воронежский государственный университет)

Введение Известной характерной особенностью стационарного продлённого течения вязкопластического материала в круглой трубе является наличие жёсткого (твёрдого) ядра течения, радиус которого определяется из баланса продольных сил за счет перепада давления $\partial p/\partial z$ и поверхностных сил предельного напряжения $\sigma_{r\vartheta} = K_0$ [1,2] $r_0^* = 2K_\vartheta/(\partial p/\partial z)$ (здесь K_0 – предел пластичности).

На рис. 1 изображено распределение скорости $v_z(r)$ продольного течения в зависимости от радиуса r, где отмечен факт совпадения скорости v^0 движения ядра течения со скоростью $v(r^*_\vartheta)$ движения материала на границе ядра $r = r^*_\vartheta$. Характерным моментом течения является факт непрерывности поля скоростей в точке $r = r^*_\vartheta$ и безградиентность течения в этой точке $\partial v(r^*_\vartheta)/\partial r = 0$, что следует из реологии [1] вязкопластичность материала.

$$\sigma_{r_z}(r^*_\vartheta) = K_0 + \mu \partial v/\partial r = K_0, \text{т.е. } \partial v(r^*_\vartheta)/\partial z = 0$$

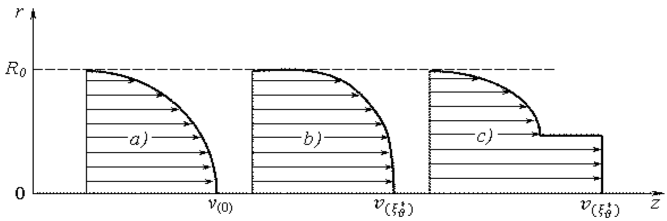


Рис. 1. График скорости $v(\xi)$ предельного течения (a) вязкой жидкости; b) вязкопластического материала с наличием твердого ядра течения; c) вязкопластического микроструктурного материала с наличием твердого ядра течения и проскальзывание материала на ядре течения и на границе трубы) под действием перепада давления $\partial p/\partial z \neq 0$

Для случая течения вязкопластического материала с учетом его микроструктуры возможно проскальзывание ядра течения относительно основного потока, так что $v^0 \neq v(r^*_\vartheta)$.

Постановка задачи Рассмотрим вязкое течение материала в области между внешним радиусом трубы R_0 и границей ядра течения r^*_ϑ. Скорость течения материала в этой зоне имеет общий вид [1, 2]:

$$\begin{gathered} v(r) = \frac{q^2}{4}(-\xi^2 + C_1 l\xi + C_2); \\ \xi = r/R_0; \\ q^2 = (1/\mu)\partial p/\partial z R_0^2/V_0, \text{где } \mu - \text{коэффициент вязкости.} \end{gathered} \tag{1}$$

Условия качения представительного элемента на неподвижной границе трубы $r = R_0(\xi = 1)$ и на подвижном ядре течения $\xi = \xi_\vartheta^*$ имеют вид [2]:

$$v(\xi_\vartheta^*) - \gamma\frac{dv(\xi_\vartheta^*)}{d\xi} = v^0;$$

$$v(1) + \gamma\frac{dv(1)}{d\xi} = 0. \tag{2}$$

Условия отсутствия вязкого трения на твердой границе ядра течения $\sigma_{r\vartheta} = 2K_0 + 2\mu\xi_{rt} = 2K_0$, так что $\xi_{rt}(\xi_\vartheta^*) = 0$ дает уравнение для определения скорости течения ядра [2]:

$$\left(\frac{dv}{d\xi} + \delta\frac{d^3v}{d\xi^3}\right)_{\xi=\xi_\vartheta^*} = 0. \tag{3}$$

Граничные условия (2, 3) позволяют составить систему 3-х уравнений для двух постоянных интегрирования C_1, C_2 и неизвестной за ранее скорости ядра $v(\xi_\vartheta^*)$:

$$-2\xi_\vartheta^* + \frac{C_1}{\xi_\vartheta^*} + \frac{2\delta C_1}{{\xi_\vartheta^*}^3} = 0;$$

$$-1 + C_2 - 2\gamma + \gamma C_1 = 0;$$

$$-{\xi_\vartheta^*}^2 + C_1 l_{\xi_\vartheta^*} + C_2 + 2\gamma\xi_\vartheta^* - \gamma\frac{C_1}{\xi_\vartheta^*} = V_{00} = \frac{4V_0}{q^2}. \tag{4}$$

Из (4) следует

$$C_1 = 2{\xi_\vartheta^*}^4 / \left({\xi_\vartheta^*}^2 + 2\delta\right);$$

$$C_2 = 1 + 2\gamma - 2\gamma{\xi_\vartheta^*}^4 / \left({\xi_\vartheta^*}^2 + 2\delta\right);$$

$$V_{00} = 4V_0/q^2 = 1 + 2\gamma + 2\gamma\xi_\vartheta^* - {\xi_\vartheta^*}^2 - 2\gamma{\xi_\vartheta^*}^2\left(l_{\xi_\vartheta^*} - 1 - 1/\xi_\vartheta^*\right) / \left({\xi_\vartheta^*}^2 + 2\delta\right). \tag{5}$$

Для случая малых γ и δ на рисунке 2 представлены графики: a) скорости ядра в зависимости от его радиуса $\xi_\vartheta^* = r_\vartheta^*/R_0$; b) линейная часть проскальзывания ядра от потока.

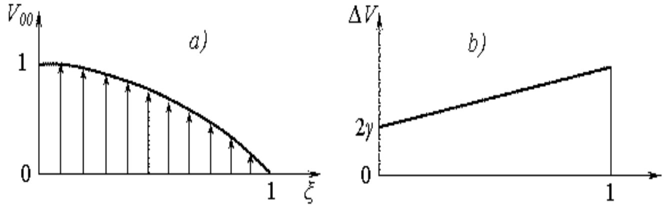


Рис. 2. Графики: a) скорости ядра течения $V_{00} \approx 1 - {\xi_\vartheta^*}^2$ для случая малых γ и δ; b) скорости проскальзывания ядра течения над потоком $\Delta V = V_{00} - v_{(\xi_\vartheta)} \cong 2\gamma(1 + \xi_\vartheta^*)$, без учета микроструктуры

Заключение Анализ графиков скорости течения микроструктурного материала в круглой трубе (рис. 1, 2) показывает, что микроструктура слабо влияет на форму течения, однако, принципиально, возможно проскальзывание твердого течения над потоком вязкой жидкости, т.е. имеет место разрыв непрерывности поля скоростей.

Литература

1. Рейнер М. Реология. – М.: Наука, 1965 – 223 с.

2. Быкова М.И. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М.И. Быкова, Н.Д. Вербейко, П.П. Сушец, С.А. Шашкина; Воронежский государственный университет. – Воронеж: Изд. ВГУ, 2010 – 192 с.

О разностных методах решения одной задачи фильтрации

С.Х.М. Аль-Казарадж
(Воронеж, ВГУ)

Процесс нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в полу бесконечной области, заполненной пористой средой с проточными и застойными зонами, при заданном изменении давления $u\,(t,0)=\ q\,(t)$ на границе описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\frac{\gamma}{a}\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+ \frac{(1-\gamma)\sigma}{a}u\,(t,x)-\ (1-\gamma)\,\sigma^2\int_0^t e^{\sigma(s-t)}u\,(s,x)\,ds; \tag{1}$$

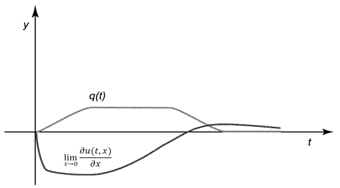
в области $0\leq x<\infty$, $0\leq t<\infty$, с начально-краевыми условиями $u\,(t,0)=\ q\,(t)\,;;\quad u\,(0,x)=\ \lim_{x\to\infty}u\,(t,x)=0.$

Параметры, участвующие в уравнении (1) имеют следующий физический смысл: $0<\gamma$ *?* 1 –доля объёма проточных зон, σ – константа, характеризующая обмен массами жидкости между проточными и застойными зонами, a – коэффициент проводимости.

Для численного решения поставленной задачи можно использовать четыре варианта разностных схем, используемых для приближенного решения параболических уравнений, а использование различных квадратурных формул для приближенного вычисления интеграла в формуле (1) увеличивает число допустимых вариантов в три раза. Рассмотренные варианты квадратурных формул: метод прямоугольников с вычислением значения подынтегральной функции при меньшем или при большем значении аргумента, принадлежащего элементарному отрезку, используемому для приближенного значения интеграла. Метод трапеций приближенного вычисления интеграла определил третью серию разностных схем.

В работах [1, 2] были получены точные формулы для вычисления значений функции $\lim_{x\to 0}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, представляющей собой значение градиента давления у границы области. Эти формулы использовались для подбора значения параметра $\triangle t$ в разностных вычислительных схемах. Точность вычислений с использованием разностной схемы оценивалась на основе сравнения вычисленных и точных значений этой функции. Значение параметра $\triangle x$ определялось из условий устойчивости использованной разностной схемы.

График на рис. 1. характеризует качественное поведение функции $\lim_{x\to 0}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, а график на рис. 2. демонстрирует качественное поведение решение уравнения (1).



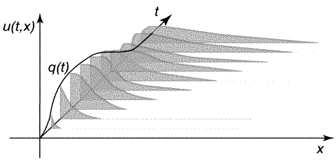


Рис. 1 *Рис. 2*

Численные эксперименты показали, что математическая модель доставляемая уравнением (1) составляет основу для выбора динамических параметров для аппаратуры управления процессом фильтрации, обеспечивающей оптимальное управление процессом фильтрации. В частности, реальное время для этой системы может составить четверть значения $\triangle t$ принятого для расчетов с требуемой точностью.

Литература

1. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия, 1986, 144с.

Топологическая степень некомпактных мультиполей в локально выпуклых пространствах

Дж.М. Аль-Обаиди
(Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет; *alobadi@mail.ru*)

Пусть $X,\ Y$ - топологические пространства $F : X \to K(Y)$ - мультиотображение.

Для $i \geq 0$ обозначим

$$M_F^i = \{x | x \in X,\ F(x) \text{ не является } i - \text{ацикличным}\}.$$

Определение 1. Полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется почти ациклическим, если:

(a) $M_F^i = \varnothing$ для всех i, начиная с некоторого $i_0 \geq 0$;

(b) $\chi = \max_{0 \leq i < i_0}(dim_X M_F^i) < \infty$.

Если для всех $i \geq 0$ $M_F^i = \varnothing$, то мультиотображение F называется ациклическим.

Определение 2. Мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется псевдоациклическим, если существует топологическое пространство Z и непрерывное отображение $\theta : Z \to Y$ такое, что F представимо в виде композиции

$$F = \theta \circ \overline{F},$$

где $\overline{F} : X \to K(Z)$ - почти ациклическое мультиотображение.

Для класса фундаментально сужаемых псевдоациклических многозначных векторных полей в локально выпуклых пространствах определяется топологическая степень, описываются ее основные свойства и даются приложения к теоремам о неподвижной точке.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений – УМН 35:1. 1980. с. 59-126.

Интегрируемые системы на $\mathfrak{sl}(3)$, системы с неполными полями

К.Р. Алёшкин

(Москва, Московский государственный университет)

Введение. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы представляют собой пример класса систем дифференциальных уравнений, для которых существует теория позволяющая много сказать о решениях этих уравнений. А именно, есть классическая теорема Лиувилля (см., например, [1]), которая утверждает, что для вполне интегрируемой системы её фазовое пространство распадается на регулярные (торы в компактном случае) и сингулярные совместные поверхности уровня первых интегралов, причём на регулярных поверхностях уровня фазовый поток системы выпрямляется, а именно, задаёт условно-периодическое движение.

В условиях теоремы необходима полнота гамильтоновых векторных полей, задающих систему, поэтому в общем случае для произвольных векторных полей эти результаты не верны. Некоторые аналоги теоремы Лиувилля для системы специального вида с неполными гамильтоновыми векторными полями были получены Т.А. Лепским (см. [2]). Также система с неполными полями исследовалась Д.В. Новиковым в [3].

Системы с неполными векторными полями могут быть получены методом сдвига аргумента, описанного в [4], [5] А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко, на некомпактных алгебрах Ли, например, на $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. Неполнота полей показана А.М. Изосимовым [6].

В данной работе исследуется система на $\mathfrak{sl}(3)$ и, также, системы с одним и более неполными гамильтоновыми полями в целом.

Основные результаты. Теоремы 1 и 2 относятся к интегрируемым системам с неполными полями в общем случае, теорема 3 есть применение предыдущих теорем к системе, полученной методом сдвига аргумента на $\mathfrak{sl}(3)$

Теорема 1. *Пусть M^{2n} симплектическое многообразие, и на нём задан инволютивный набор из n функционально независимых первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$, причём векторные поля $sgrad\ f_i$ являются полными для $1 \leq i < n$, а векторное поле $sgrad\ f_n$ неполно. Тогда связная компонента регулярной совместной поверхности уровня первых интегралов гомеоморфна $Cyl^k_{n-1} \times \mathbb{R}$, где Cyl^k_{n-1} орбита действия группы сдвигов потоков, соответствующих первым $n-1$ интегралам $\simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$*

Теорема 2. *Пусть дано связное гладкое многообразие N без края и заданы n гладких, линейно независимых в каждой его точке коммутирующих векторных полей $v_1, \ldots, v_n$ так, что $v_1, \cdots, v_k$ полностью взрывающаяся система, а $v_{k+1}, \ldots, v_n$ полны, для произвольной точки x_0 $M(x_0)$ есть подмножество, заметаемое интегральными кривыми неполных полей, а $A(x_0)$ - заметаемое интегральными кривыми полных.*

Тогда многообразие N является «испорченным прямым произведением» $A(x_0)$ и $M(x_0)$, и устроено следующим образом: для произвольной точки x_0 из многообразия N:

1) $A(x_0)$ и $M(x_0)$ являются гладкими многообразиями, и для любой $x \in N$ $A(x_0) \simeq A(x), M(x_0) \simeq M(x)$.

2) $A(x_0)$ является гладким подмногообразием в N.

3) Над каждой точкой $A(x_0)$ которого висит многообразие $M(x)$ (оно может не быть подмногообразием) , которое, быть может, пересекается с многообразием $A(x_0)$ по точкам T, причём на $M(x)$ нет точек накопления из T.

4) Если точек накопления T нет, то $N \simeq (M(x_0) \times A(x_0))/T$ является локально тривиальным расслоением с базой $A(x_0)/T$ и слоем $M(x_0)$, а также с базой $M(x_0)/T$ и слоем $A(x_0)$.

Теорема 3. *Система функций $trAX, trA^2X$ и $trAX^2$ на коалгебре Ли $\mathfrak{sl}^*(3, \mathbb{R})$ является почти интегрируемой. Тогда A приводится к одному из следующих типов:*

$$1. \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix},$$

$$3. \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}, 4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для типов 1, 3, 4 $Cyl_2^k \simeq \mathbb{R}^2$ *и совместная поверхность уровня функций гомеоморфна* $\mathbb{R}^3$, *а для типа 2* $Cyl_2^k \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ *и поверхность уровня гомеоморфна цилиндру* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы – Издательский дом "Удмуртский университет 1999

2. Лепский Т.А. Интегрируемость комплексных гамильтоновых систем с неполными потоками на комплексной плоскости, 2012

3. Новиков Д.В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(3, 1), 2013

4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли – Доклады АН СССР, 1976

5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли – Доклады АН СССР, 1978

6. Изосимов А.М. Замечание о неполноте гамильтоновых полей, получаемых методом сдвига аргумента, 2012

Существование и несуществование глобального решения задачи Коши для систем полулинейных анизотропных уравнений четвертого порядка

А.Б. Алиев, В.Ф Гулиева

(Институт Математики и Механики НАНА)

В области $[0, \infty) \times R^N$ рассмотрим задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} u_{1tt} + u_{1t} + \Delta_{I_1}^2 u_1 - \Delta_{J_1} u_1 = \textstyle\sum_{k=1}^{l_1} f_{1k}(u_1, u_2)\,, \\ u_{2tt} + u_{2t} + \Delta_{I_2}^2 u_2 - \Delta_{J_2} u_2 = \textstyle\sum_{k=1}^{l_2} f_{2k}(u_1, u_2)\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$u_i\,(0, x) = \varphi_i\,(x)\,,\;\; u_{it}\,(0, x) = \psi_i\,(x)\,,\;\; x \in R_N,\;\; i = 1, 2, \tag{2}$$

где $\Delta_{I_i} = \sum_{s\in I_i} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$, $\Delta_{J_i} = \sum_{s\in J_i} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$, $I_i \subset N_n = \{1, ..., n\}$, $J_i = N_n \backslash I_i$, $i = 1, 2$, $f_{ik} : R^2 \to R$, $k = 1, 2, ...,\ l_i$, $i = 1, 2$.

Через $m_r = \overline{\overline{J_r}}, r = 1,2$, обозначим число элементов J_r, а через $n_r = \overline{\overline{I_r}} = n - m_r$ обозначим число элементов I_r. Для определенности предположим, что

$$m_1 \geq m_2. \tag{3}$$

Система типа (1) встречается при исследовании колебаний деформированных систем при подвижных нагрузках. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. $n + m_1 \leq 4$;

2. $f_{ik}(.), k = 1,2,...,l_i, i = 1,2$ -непрерывно дифференцируемые функции на R^2;

3. при любых $(u_1, u_2) \in R^2$ выполнены оценки

$$|f_{ik}(u_1,u_2)| \leq C_{ik} |u_1|^{p_{ik}} |u_2|^{q_{ii}} \ , k = 1,2,...,l_i, i = 12\,,$$

где $p_{ik} \geq 0, \quad q_{ik} \geq 0, \quad p_{ik} + q_{ii} \geq 2, \;\; k = 1,2,...,l_i, i = 12\,,$

$$\frac{n+m_1}{4} p_{ik} + \frac{n+m_2}{4} q_{ik} > 1 + \Psi(q_{ik}),$$

$$\Psi(s) \;=\; \begin{cases} \frac{m_1 - m_2}{4}, & s \geq 2, \\ \frac{(m_1-m_2)(2-s)}{8}, & 0 \leq s < 2 \end{cases} .$$

Через $W_{2,k}^{2s,s}$, $k = 1,2$, обозначим функциональные пространства с конечной нормой: $\|u\|^2_{W_{2,k}^{2s,s}} = \left\{ \|u\|^2_{L_2(R_N)} + \sum_{i \in I_k} \left\| D^{2s}_{x_i} u \right\|^2 + \sum_{j \in J_k} \left\| D^s_{x_j} u \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Пусть U_δ^k шар радиуса $\delta > 0$ с центром в нуле в пространстве

$$\left[W_{2,k}^{2,1} \bigcap L_m(R_N) \right] \times \left[L_2(R_N) \bigcap L_m(R_N) \right],$$

т.е.

$$U_\delta^k = \left\{ (u,v) : \|\, u \,\|_{W_{2,k}^{2,1}} + \|\, u \,\|_{L_m(R_N)} + \|\, v \,\|_{L_2(R_N)} + \|\, v \,\|_{L_m(R_N)} < \delta \right\}.$$

Доказана следующая основная теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположение* (3) *и условия 1-3. Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что при любых* $((\varphi_1,\psi_1),(\varphi_2,\psi_2)) \in U_\delta^1 \times U_\delta^2$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение*

$$(u_1,u_2) \in \tilde{C} \equiv$$
$$\equiv C\left([0,\infty); W_{2,1}^{2,1} \times W_{2,2}^{2,1}\right) \bigcap C^1\left([0,\infty); L_2(R_N) \times L_2(R_N)\right)$$

и для (u_1,u_2) *справедливы следующие оценки:*

$$\|u_{\cdot}(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(R_n)} \le C(\delta)(1+t)^{-\frac{n+m_k}{8}},$$

$$\sum_{i\in I_k}\left\|D_{x_i}^2 u_k(\,\cdot\,,t)\right\|_{L_2(R_n)} + \sum_{j\in J_k}\left\|D_{x_j} u_k(\,\cdot\,,t)\right\|_{L_2(R_n)} \le C(\delta)(1+t)^{-\frac{n+m_k+4}{8}};$$

$$\|u_{k_t}(t,\,\cdot\,)\|_{L_2(R_n)} \le C(\delta)(1+t)^{-\gamma_k},$$

где $\gamma_k = \min\left\{\frac{n+m_k+8}{8}, \frac{(p_k-1)(n+m_k)}{8}\right\}$, $k=1,2.$
Теперь рассмотрим задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} u_{1tt} + u_{1t} + \Delta_{I_1}^2 u_1 - \Delta_{J_1} u_1 = f_1(u_2)\,, \\ u_{2tt} + u_{2t} + \Delta_{I_2}^2 u_2 - \Delta_{J_2} u_2 = f_2(u_1)\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$u_i\,(0,x) = \varphi_i\,(x)\,,\;\; u_{it}\,(0,x) = \psi_i\,(x)\,,\;\; x \in R_N,\;\; i = 1,2\,, \tag{5}$$

где

$$\varphi_i\,(.)\;,\;\psi_i(.) \in L_{loc}\,(R_N)\,,\quad i = 1,2 \tag{6}$$

Предположим, что

$$|f_1\,(z)| \le c\,|z|^{q_1}\,, |f_2\,(z)| \le c\,|z|^{p_2}\,,\; z \in R, \tag{7}$$

где

$$p_2 > 1 + \frac{4}{N+m_1}\quad,\quad q_1 > 1 + \frac{4}{N+m_2}. \tag{8}$$

Применяя теорему 1, получим, что для достаточно малых $(\varphi_k, \psi_k) \in W_{2,k}^{2,1} \times L_2(R_N)$ задача (4) имеет единственное решение $(u_1, u_2) \in \tilde{C}$.

Теперь будем анализировать точность условий (8).

Пусть
$$|f_1(z)| \geq c|z|^{q_1} \text{ и } |f_2(z)| \geq c|z|^{p_2}, \tag{9}$$
где
$$1 < p_2 \leq 1 + \frac{4}{N+m_1} \quad , \quad 1 < q_1 \leq 1 + \frac{4}{N+m_2}. \tag{10}$$

Слабым решением $(u_1,\, u_2)$ системы дифференциальных уравнений (4) в R_+^{n+1} с начальными данными (5) называются такие локально интегрируемые функции $u_1 \in L_{p_2,loc}([0,\infty) \times R_N)$, $u_2 \in L_{q_1,loc}([0,\infty) \times R_N)$, что $f_1(u_2)$, $f_2(u_1) \in L_{1,loc}([0,\infty) \times R_N)$ и $(u_1(t,x),\, u_2(t,x))$ удовлетворяет системе уравнений

$$-\int_{R_N} (\varphi_1(x) + \psi_1(x))\,\xi_1(x,0)\,dx + \int_{R_N} \varphi_1(x)\,\frac{\partial \xi_1(x,0)}{\partial t} dx +$$
$$+\int_0^\infty \int_{R_N} u_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t} dxdt - \int_0^\infty \int_{R_N} u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dxdt -$$
$$-\int_0^\infty \int_{R_N} u_1 \left[\Delta_{I_1}^2 \xi_1 - \Delta_{J_1}\xi_1\right] dxdt = \int_0^\infty \int_{R_N} f_1(u_2)\,\xi_1 dxdt\,,$$
$$-\int_{R_N} (\varphi_2(x) + \psi_2(x))\,\xi_1(x,0)\,dx + \int_{R_N} \varphi_2(x)\,\frac{\partial \xi_2(x,0)}{\partial t} dx +$$
$$+\int_0^\infty \int_{R_N} u_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t} dxdt - \int_0^\infty \int_{R_N} u_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} dxdt -$$
$$-\int_0^\infty \int_{R_N} u_2 \left[\Delta_{I_2}^2 \xi_1 - \Delta_{J_2}\xi_2\right] dxdt = \int_0^\infty \int_{R_N} f_2(u_1)\,\xi_2 dxdt\ ,$$

для любых неотрицательных функций $\xi_1, \xi_2 \in C_0^{2,4}\left([0,\infty) \times R^N\right)$
.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (9), (10) *и*
$$\frac{\lim}{R \to \infty} \int_{|x|<R} (\varphi_i(x) + \psi_i(x))\,dx \geq 0\ ,\ i = 1,2.$$
Тогда задача (4), (5) *не имеет нетривиальных решений.*

Полнота корневых вектор - функций для дифференциально-операторных уравнений второго порядка на всей оси

И.В. Алиев
(Баку, Азербайджанский Государственный Педагогический Университет)

В работе С.Я. Якубова ([1], теорема 2.1, стр. 57) изучен коэрцитивность дифференциально-операторных уравнений высшего порядка на всей оси $L(D)u = D^n u(x) + A_1 D^{n-1} u(x) + ... + A_n u(x) = f(x), x \in R$.

Также изучено коэрцитивность дифференциально-операторных уравнений вида Келдыша на всей оси

$$L(D)u = D^n u(x)+ \\ (a_1 A + A_1) D^{n-1} u(x) + ... + (a_n A^n + A_n) u(x) = f(x), x \in R.$$

Особо глубокие результаты получены на конечном отрезке для дифференциально-операторных уравнений Келдыша [2]

$$Lu = u^n(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j A^j u^{(n-j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j u^{(n-j)} \right)(x) = f(x)$$

$$L_\nu u = \alpha_\nu u^{(m_\nu)} + \beta_\nu u^{(m_\nu)}(1) + \sum_{j=1}^{k_\nu - 1} \sum_{q=1}^{n} \alpha_{\nu j q} u^{(j)}(x_q) = \\ = f_\nu, x \in (0,1), x_q \in [0,1],$$

где $\alpha_{\nu j q}$-комплексные числа, $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \neq 0$, A- линейный замкнутый оператор в H, $A_j, j = 1 \div n$ линейный оператор в $L_p((0,1)H)$. Доказана алгебраический и топологический изоморфизмом для главной части оператора соответствующей задачи (см. теорема 2.6, стр. 77)

$$\boldsymbol{L}_0 : u \to (L_0 u, L_{10} u, ..., L_{n0} u).$$

Рассмотрим спектральную задачу

$$-u''(x) + A(x)u(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = \mu u(x), \qquad (1)$$

где $A(x)$, B(x), C(x) при каждом $x \in R$ линейные операторы в банаховом пространстве E.

В банаховом пространстве $L_p(R_1 E)$ исследуется дискретность спектра, а в гильбертовом пространстве $L_2(R, E)$ полнота корневых вектор-функций.

I Дискретность спектра. Оператор $B(x)$ называется почти всюду по $x \in R$ равномерно подчиненным оператору $A(x)$ если почти всюду по $x \in R$, $D(B(x)) \supset D(A(x))$ и $\|B(x)u\| \leq C\|A(x)u\|, u \in D(A(x))$, где C не зависит от x.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *оператор $A(x)$ сильно позитивный равномерно по $x \in R$;*
2. *при $|x-y| \leq 1$, $\left\|[A(x) - A(y)]A^{-1}(y)\right\| \leq C|x-y|$,*
3. *при некотором $k \in R$ и $|x-y| > 1$ имеет место*
$$\left\|A(x)A^{-1}(y)\right\| \leq Ce^{k|x-y|},$$
4. $\left\|[A(x)+\lambda]^{-1}\right\| \leq \frac{M}{1+q(x)}$, $|\arg\lambda| > \delta$,
   где $q(x) \geq 1$ суммируемая функция в каждом конечном интервале вещественной оси и $\underset{|x|\to\infty}{Lim}\, q(x) = \infty$;
5. *для почти всех x оператор $A^{-1}(x)$ вполне непрерывен в E;*
6. *при некотором $\alpha > 1$ операторы $B(x)$ и $C(x)$ почти всюду по x равномерно подчинены соответственно оператором $A^{\alpha-\frac{1}{2}}(x)$ и $A^{\alpha}(x)$.*

Тогда спектр задачи (1) дискретен в $L_p(R, E)$, $1 < p < \infty$, т.е. состоит лишь из изолированных собственных чисел конечной алгебраической кратности, причем спектр не имеет предельных точек, кроме быть может бесконечности.

Заметим, что теорема 1 остается в силе, если вместо условия 4 предположить, что $q(x)$ удовлетворяет условия Молчанова, т.е. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \int_x^{x+a} q(t)dt = \infty$ для любого $a > 0$

2. Полнота корневых вектор – функций. В пространстве $L_2(R,H)$ рассмотрим спектральную задачу (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *$A(x)$ сильно позитивный оператор в H равномерно по $x \in R$, т.е. $D(A(x)) = D(A(0))$, $\exists \delta \in (0,\pi)$ при $|\arg \lambda| > \delta$*

$$\left\|[A(x)-\lambda I]^{-1}\right\| \leq C(1+|\lambda|)^{-1};$$

2. *при $|x-y| \leq 1$, $\left\|[A(x)-A(y)]\,A^{-1}(y)\right\| \leq C\,|x-y|$.*

Тогда при $f \in L_2(R,H)$ уравнение

$$(L-\lambda I)\,u(x) = -u''(x) + [A(x)-\lambda I]\,u(x) = f(x) \qquad (2)$$

для достаточно больших $|\lambda|$ из $|\arg \lambda| > \delta$ имеет единственное решение и имеется оценка

$$\|u\|_{L_2(R,H)} \leq C|\lambda|^{-1}\,\|f\|_{L_2(R,H)}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1. *$A(x)$ сильно позитивный оператор в H равномерно по $x \in R$, т.е. $D(A(x)) = D(A(0))$, $\exists \delta \in (0,\pi)$ при $|\arg \lambda| > \delta$*

$$\left\|[A(x)-\lambda I]^{-1}\right\| \leq C(1+|\lambda|)^{-1};$$

2. *при $|x-y| \leq 1$, $\left\|[A(x)-A(y)]\,A^{-1}(y)\right\| \leq C\,|x-y|$;*
3. *$A^{-1}(x) \in \sigma_p(H)\,,\ \ p > 0$*
4. *$\left\|[A(x)-\lambda I]^{-1}\right\| \leq \frac{C}{1+q(x)+|\lambda|}$, $\quad |\arg\lambda| > \delta$,*

где

$$q(x) > |x|^{\alpha}$$

Тогда при $|\arg \lambda| > \delta$, $|\lambda| \to \infty$ резольвента оператора L принадлежит некоторому классу Неймана-Шаттена, более точно $R(\lambda, L) \in \sigma_q(L_2(R,H))$ при $q > \frac{2+\alpha}{2\alpha} + p$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $A(x)$ *сильно позитивный оператор в* H *равномерно по* x

$$x \in R = (-\infty, \infty), \ A^{-1}(x) \in \sigma_p(H), \ p > 0,$$
$$\delta < \tfrac{2\pi\alpha}{2+\alpha}, \ \left\| [A(x) - \lambda I]^{-1} \right\| \le \tfrac{C}{1+|\lambda|+|x|^{\alpha}}, \ |\arg\lambda| > \delta \ ;$$

2. *при* $|x-y| \le 1$, $\left\| [A(x) - A(y)] A^{-1}(y) \right\| \le C|x-y|$;

3. $B(x)$ *оператор в* H, $D(B(x)) \supset D\left(A^{\frac{1}{2}}(x)\right)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$,

$$\|B(x)u\| \le \varepsilon \left\| A^{\frac{1}{2}}(x)u \right\| + C(\varepsilon)\|u\|, \ u \in D\left(A^{\frac{1}{2}}(x)\right),$$

$C(x)$ *оператор в* H, $D(C(x)) \supset D(A(x))$ *и для любого* $\varepsilon > 0$.

$$\|C(x)u\| \le \varepsilon \|A(x)u\| + C(\varepsilon)\|u\|, \ u \in D(A(x)).$$

Тогда спектр задачи (1) *дискретен и система корневых вектор -функций задачи* (1) *полна в пространстве* $L_2(R, H)$.

Литература

1. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения их приложения. Баку, Элм, 1985, 220 с.

2. Yakubov S., Yakubov Ya. Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations, Chopman and Hall/CRC, Boca Raton, 2000, 542p.

О некоторых признаках компактности семейства векторных функций

В.П. Аносов

(Новосибирск, Новосибирский государственный педагогический университет; *averi@ngs.ru*)

В работе будут приведены критерии компактности семейства векторных функций в пространствах суммируемых функций и в абстрактных аналогах пространств Л. Н. Слободецкого. Мы рассмотрим здесь отдельно одномерный и многомерный случаи.

1°. **Критерии компактности семейства векторных функций одного переменного.**

Пусть E – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Для гладкой функции $v(t)$ $(0 \le t \le 1)$ со значениями в E определим (см.[1], [2]) нормы

$$\|v\|_{L_p}^p = \int_0^1 \|v(t)\|^p \, dt,$$
$$\|v\|_{W_p^\alpha}^p = \int_0^1 \|v(t)\|^p \, dt + \int_0^1\int_0^1 \frac{\|v(t) - v(s)\|^p}{|t-s|^{1+\alpha p}} \, dt \, ds,$$

где $0 < \alpha < 1$, $p \ge 1$. Замыкание гладких функций v в этих нормах образуют, соответственно, банаховы пространства

$$L_p([0,1], E) = L_p, \; W_p^\alpha([0,1], E) = W_p^\alpha.$$

Пусть функция $v(t) \in L_p$. Продолжим ее за пределы отрезка $[0,1]$, полагая, что $v(t) = 0$, если t лежит вне отрезка $[0,1]$. Тогда при каждом $h > 0$ функция $v(t+h) \in L_p([0,1], E)$. Нам в дальнейшем потребуется лемма.

Лемма 1 *Каждая функция $v(t)$ из $L_p([0,1], E)$ непрерывна в среднем.*

Для доказательства леммы 1 нужно использовать плотность непрерывных функций в пространстве L_p и теорему Кантора (см. [3]) о равномерной непрерывности.
Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1 (Признак компактности в $L_p([0,1], E)$) *Для того, чтобы семейство функций $\mathcal{K} = \{v(t)\} \subset L_p([0,1], E)$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:*

1) $\int_0^1 \|v(t)\|^p \, dt \le c^p$, *2)* $\int\limits_0^1 \|v(t+h)-v(t)\|^p\,dt < \varepsilon^p$ *при всех* $0<h<\delta(\varepsilon)$ *сразу для всех функций* v *семейства* $\mathcal{K}$,

3) множество значений функций $v_h(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} v(\tau)\,d\tau$, *где* $v(\tau)$ *из* $\mathcal{K}$, *при каждом* $t\in[0,1]$ *и при каждом* $h>0$ *образует компактное множество.*

Для доказательства этой теоремы нужно использовать некоторые моменты доказательства теоремы М. Рисса (см. [4], стр. 242-245), лемму 1 и лемму 1 из [5].

Теорема 2 (Признак компактности в $W_p^\alpha([0,1],E)$) *Для того, чтобы семейство функций* $\mathcal{K}=\{v(t)\}$ *со значениями в банаховом пространстве* E *было компактным в пространстве* $W_p^\alpha([0,1],E)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 2),3) теоремы 1, и чтобы множество* $\mathcal{K}$ *в пространстве* $W_p^\mu([0,1],E)$ *при* $\mu>\alpha$ *было равномерно ограничено некоторым числом.*

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 1.

2°. Критерии компактности семейства векторных функций нескольких переменных.

Пусть Ω – гладкая ограниченная область n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x=(x_1,\dots,x_n)$, и пусть $|x-y|$ – расстояние между точками x и y этого пространства. Для гладкой функции $f\colon\Omega\to E$, где E – банахово пространство, определим нормы

$$\|f\|^p_{L_p(\Omega,E)} = \int\limits_\Omega \|f(x)\|^p\,dx,$$

$$\|f\|^p_{W_p^\alpha} = \int\limits_\Omega \|f(x)\|^p\,dx + \int\limits_{\Omega_x}\int\limits_{\Omega_y} \frac{\|f(x)-f(y)\|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\,dx\,dy,$$

где $0<\alpha<1$, $p\ge 1$. Замыкание гладких функций f в этих нормах образуют, соответственно, банаховы пространства $L_p(\Omega,E)=L_p$, $W_p^\alpha(\Omega,E)$.

Пусть $f(x) \in L_p$. Продолжим ее за пределы области Ω, полагая, что $f(x) = 0$, если x лежит вне области Ω. Тогда функция $f(x+h) \in L_p(\Omega, E)$ при каждом $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Прежде чем формулировать результаты этого случая, уточним некоторые понятия относительно области Ω и ее границы S, и докажем одно утверждение, которое пригодится нам в дальнейшем.

Декартову систему координат $(y_1, \ldots, y_n)$ с центром в произвольной точке $x^0 \in S$ и осью y_n, направленной по внутренней по отношению к Ω нормали, будем называть местной, если y и x связаны равенством $y_i = \Sigma_k a_{ik}(x_k - x_k^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем (a_{ik}) – ортогональная числовая матрица.

Область Ω принадлежит классу C_1, если (см., например, [6]) в каждой точке $x \in S$ существует касательная плоскость и имеется такое число $\rho_0 > 0$, что при всех $0 < \rho \le \rho_0$ пересечение S с шаром K_ρ радиуса ρ с центром в произвольной точке $x \in S$ есть связная поверхность, уравнение которой в местной системе координат $y = (y', y_n) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ с центром в точке x и осью y_n, направленной по внутренней к Ω нормали, имеет вид $y_n = g(y')$, где g есть функция класса C_1 в области, являющейся проекцией $K_\rho \cap S$ на плоскость $y_n = 0$. Нормы функций g ограничены в пространстве C_1 числом, не зависящим от x и ρ. Следует, однако, иметь в виду, что преобразование $z_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $z_n = y_n - g(y')$ выпрямляет часть границы $K_{\rho_0} \cap S$.

Из вышесказанного следует, что для любой точки $x^0 \in S$ существует вектор-функция $q(x) = (q_1(x), \ldots, q_n(x))$ с компонентами $q_i(x)$ из класса $C_1(K_{\rho_0})$ такая, что $z = q(x)$ есть взаимно однозначное отображение K_{ρ_0} на некоторую область в $\mathbb{R}^n_z$. Образ S' множества $S \cap K_{\rho_0}$ является частью гиперплоскости, а образ Ω'_{ρ_0} области $\Omega \cap K_{\rho_0}$ – односвязанной областью в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ $(z_n \ge 0)$.

Лемма 2 *Пусть $f\colon \Omega \to E$ – непрерывная функция и Ω – область класса C_1. Тогда существует непрерывное продолжение функции f на прямоугольник, содержащий внутри себя область Ω.*

Доказательство. Так как Ω – ограниченная замкнутая область, то ее можно покрыть конечным числом числом шаров радиуса ρ, причем покрытие начинается с границы S. Можно далее построить соответствующее этому покрытию разбиение единицы, состоящее из гладких функций $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, носители которых находятся внутри этих шаров. Отсюда следует, что $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} (f\varphi_i)(x), \; x \in \Omega.$$

Пусть покрытие границы S состоит из k шаров, и пусть K_ρ^i один из них. Тогда, как отмечено выше, существует функция $z = \theta_i(x)$, отображающая K_ρ^i на некоторую область в $\mathbb{R}_z^n$. Тогда функция $g_i = (f \cdot \varphi_i) \circ \theta_i^{-1}$ будет определена в полупространстве $\mathbb{R}_+^n$ $(z_n \geq 0)$. Продолжим ее по непрерывности на все пространство $\mathbb{R}_z^n$ следующим образом:

$$g_i(z', z_n) = \begin{cases} g_i(z', z_n), & z_n \geq 0, \\ g_i(z', -z_n), & z_n < 0. \end{cases}$$

Тогда функция

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i \circ \theta_i(x) + \sum_{i=k+1}^{m} (f \cdot \varphi_i)(x)$$

и будет искомой функцией. Лемма 2 доказана.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3 (Признак компактности в $L_p(\Omega, E)$) *Для того, чтобы семейство функций $\mathcal{K} = \{f(x)\} \subset L_p(\Omega, E)$, где Ω – область класса C_1, было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:*

1) $\int\limits_\Omega \|f(x)\|^p \, dt \leq c^p$,

2) $\int\limits_\Omega \|f(x+h) - f(x)\|^p \, dx < \varepsilon^p$ *при всех* $0 < |h| < \delta(\varepsilon)$ *сразу для всех функций* f *из* $\mathcal{K}$, *3) множество значений функций* $f_h(x) = \frac{1}{(2|h|)^n} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(y)\,dy$, *где* $f(y)$ *из* $\mathcal{K}$, *при каждом* $x \in \Omega$ *и при каждом* h $(|h| \neq 0)$ *образует компактное множество.*

Доказательство теоремы 3 имеет ту же последовательность рассуждений, что и теорема 1, с заменой леммы 1 на лемму 2 и леммы 1 из [5] ее обобщением на случай многих переменных. Теорема 3 используется при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 4 (Признак компактности в $W_p^\alpha(\Omega, E)$) *Для того, чтобы семейство функций* $\mathcal{K} = \{f(x)\}$ *со значениями в банаховом пространстве* E *было компактным в пространстве* $W_p^\alpha(\Omega, E)$, *где* Ω *– область класса* C_1, *достаточно, чтобы выполнялись условия 2), 3) теоремы 3, и чтобы множество* $\mathcal{K}$ *в пространстве* $W_p^\mu(\Omega, E)$ *при* $\mu > \alpha$ *было равномерно ограничено.*

Литература

1. Аносов В.П., О следах функций из абстрактных пространств Л.Н. Слободецкого // СМЖ 1994, Т49, №1. С.974–989.

2. Аносов В.П., Соболевский П.Е., О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений // Матем. заметки 1972, Т11, №4. С.409–419.

3. Рудин У., Основы математического анализа. М.:Мир, 1976. С. 320.

4. Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа. М.:Наука, 1965. С. 520.

5. Садовский Б.Н., Локальные теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Проблемы математического анализа сложных систем. Изд-во Воронеж. гос. ун-та, В 1, 1967. С. 70–74.

6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.:Наука, 1964. С. 540.

О методе Тонелли для абстрактных дифференциальных включений нейтрального типа.

А.А. Апанасевич

Воронеж, Воронежский государственный университет

Метод Тонелли широко применялся М.И. Каменским, А.Е. Родкиной, Б.Н. Садовским для поиска решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. Его суть заключается в искусственном введении малого запаздывания в правую часть включения. Такой метод позволяет не только показать, что решение существует, но и найти это решение последовательными приближениями.

Для $T > 0$ обозначим $Kv(L_p[0,T])$ - множество выпуклых компактных подмножеств в пространстве $L_p[0,T]$, где $p > 1$. Рассмотрим дифференциальное включение нейтрального типа вида:

$$\dot{x} \in F(x, \dot{x}), \tag{1}$$

где многозначное отображение $F\colon C[-h,T] \times L_p[-h,T] \to Kv(L_p[0,T])$ удовлетворяет следующим условиям:

i) для каждого $y \in L_p[-h,T]$ отображение $F(\cdot, y)$ полунепрерывно сверху;

ii) для каждого $x \in C[-h,T]$ отображение $F(x,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Хаусдорфа с константой $k < 1$:

$$h(F(x,y_0), F(x,y_1)) \leqslant k\|y_0 - y_1\|_{L_p};$$

iii) для любых функций $x, y \in C[-h,T]$ и произвольного $b \in (-h,T]$ из равенства $x\mid_{[-h,b]} = y\mid_{[-h,b]}$ следует равенство $F(x,\dot{x})\mid_{[0,b]} = F(y,\dot{y})\mid_{[0,b]}$.

Мы будем решать задачу Коши для включения (1) с начальным условием:

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]. \tag{2}$$

Для функций $x \in C[-h,b], y \in L_p[-h,b]$ построим продолжения $\bar{x} \in C[-h,T], \bar{y} \in L_p[-h,T]$ следующим образом:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), t \in [-h,b], \\ x(b), t \in (b,T] \end{cases} \quad \bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), t \in [-h,b], \\ 0, t \in (b,T] \end{cases}$$

Введем отображение $\tilde{F}(x,y) = F(\bar{x},\bar{y}) \mid_{[0,b]}$ и построим схему Тонелли для включения:

$$\dot{x}(t) \in \tilde{F}(S_n x, S_n \dot{x}). \tag{3}$$

Разобьем интервал $[0,T]$ на n частей. При $t \in (0, \frac{1}{n}]$ получаем $S_n x(t) = \varphi(t)$, а включение (3) примет вид:

$$\dot{x}(t) \in \tilde{F}_{\frac{1}{n}}(\varphi, \dot{\varphi})(t).$$

На этом интервале выберем селектор:

$$q_1^n \in \tilde{F}_{\frac{1}{n}}(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Тогда получаем, что $x(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t q_1^n(\tau)d\tau$ при $t \in (0, \frac{1}{n}]$. На следующем интервале разбиения $t \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ получаем $S_n x(t) = J q_1^n(t)$, и включение (3) примет вид:

$$\dot{x}(t) \in \tilde{F}_{\frac{2}{n}}(S_n J q_1^n, S_n q_1^n)(t).$$

Мы выберем селектор:

$$q_2^n \in \tilde{F}_{\frac{2}{n}}(S_n J q_1^n, S_n q_1^n).$$

Таким образом получаем $x(t) = x(\frac{1}{n}) + \int\limits_{\frac{1}{n}}^t q_2^n(\tau)d\tau = \varphi(0) + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} q_1^n(\tau)d\tau + \int\limits_{\frac{1}{n}}^t q_2^n(\tau)d\tau$. Так как $\int\limits_0^t q_1^n(\tau)d\tau = \int\limits_0^t q_2^n \mid_{[0,\frac{1}{n}]}$

$(\tau)d\tau$ при $t \in [0, \frac{1}{n}]$, то $x(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} q_1^n(\tau)d\tau + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{t} q_2^n(\tau)d\tau =$

$\varphi(0) + \int\limits_0^t q_2^n(\tau)d\tau$.

Продолжая этот процесс получим последовательность селекторов $\{q_i^n\} \in L_p[0,T]$. Можно показать, что эта последовательность относительно компактна.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть последовательность селекторов $\{q_i^n\}$ ограничена в совокупности. Тогда задача Коши для включения (1) с начальным условием (2) имеет решение, которое можно вычислить приближенным методом Тонелли.*

Литература

1. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потопатов А.С. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. - Новосибирск: Наука, 1986.

2. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. - Warszawa, 1991.

Решение интегральных уравнений с ядрами, которые удовлетворяют специальным условиям

Е.А. Аршава

(Харьков, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры; *elarshava@mail.ru*)

В работах Л.А. Сахновича, И.И. Кальмушевского, А.Б. Нерсесяна, А.Л. Сахновича и др. метод операторных тождеств использовался при изучении систем интегральных уравнений с разностным ядром, сумматорных уравнений с матрицей коэффициентов Тёплица, двумерных интегральных уравнений.

Целью представленной автором публикации является обобщение метода операторных тождеств для обращения других классов интегральных операторов.

Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

Рассматривается задача обращения интегрального оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int\limits_0^{\omega} S(x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

с ядром $S(x,t)$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha)-L_t(\alpha))S(x,t)=0, \qquad L_x(\alpha)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \alpha=\overline{\alpha}\neq 0, \tag{2}$$

Доказаны

Теорема 1 *Для любого ограниченного оператора вида (1) с ядром, которое удовлетворяет условиям (2), имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned}&(A_0S-SA_0^*)f=\\&=\int\limits_0^{\omega}\left(M_1(x)+\tfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x)+M_3(t)+\tfrac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}M_4(t)\right)f(t)dt,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\begin{array}{l} A_0=L_x^{-1}(\alpha), \quad M_1(x)=S(x,0), \quad M_2(x)=S'(x,0), \\ M_3(t)=-S(0,t), \quad M_4(t)=-S'(0,t), \quad f(t)\in L_2(0,\omega). \end{array}$

Теорема 2 *Если оператор S имеет ограниченный обратный T, тогда верно представление:*

$$(TA_0-A_0^*T)f=\int\limits_0^{\omega} R(x,t)f(t)dt,$$

где $R(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{4}P_i^*(t)Q_i(x)$, *кроме того, для* $P_i(t)Q_i(x), (i=\overline{1,4})$ *выполняются соотношения вида:*

$$\begin{array}{l} S^*P_1=1, \quad S^*P_2=M_3^*(t), \quad S^*P_3=M_4^*(t), \quad S^*P_4=\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}, \\ SQ_1=M_1(x), \quad SQ_2=1, \quad SQ_3=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, \quad SQ_4=M_2(x). \end{array} \tag{4}$$

Теорема 3 *Если оператор S ограничен вместе со своим обратным оператором T и существуют функции $P_i(t), Q_i(x), (i = \overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (4), тогда для оператора $T = S^{-1}$ имеет место интегральное представление:*

$$Tf = L_x(\alpha) \int_0^\omega f(t) L_t(-\alpha) \Phi(x,t) dt,$$

где $\Phi(x,t)$ выражается через ядро оператора $R = (TA_0 - A_0^* T)$, $f(t) \in L_2(0,\omega)$.

Полученные результаты перенесены на случай обобщенных функций вида:

$$f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega - x) + g(x), g(x) \in L_2(0,\omega),$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

В качестве примера рассмотрим интегральный оператор

$$SG = \int_0^\omega K(x,t) G(t,\tau) dt, \tag{5}$$

где $K(x,t) = g(x-t)e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + f(x+t)$ - корреляционная функция случайного входного процесса, τ - фиксированный параметр. Интегральные операторы такого вида встречаются при решении задачи фильтрации нестационарного случайного сигнала на конечном интервале. Оператор (5) можно записать в виде

$$SG = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right) \int_0^\omega S(x,t) G(t,\tau) dt,$$

где $S(x,t) = g_1(x-t)e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + f_1(x+t)$ - ядро оператора S.

Пусть $S(x,t) = \frac{sign(x-t)}{\nu} e^{-\nu|x-t|} e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)(x+t)}$. Тогда

$$M_1(x) = S(x,0) = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)x},$$

$$M_2(x) = S'(x,0) = \left(-1 - \frac{\alpha}{2\nu} - \nu - \frac{\alpha}{2}\right) e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)x},$$

$$M_3(t) = -S(0,t) = \left(\frac{1}{\nu} - 1\right) e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)t},$$

$$M_4(t) = -S'(0,t) = \left(1 + \frac{\alpha}{2\nu} - \nu - \frac{\alpha}{2}\right) e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)t}.$$

Решая уравнения (4) в классе функций $f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega - x) + g(x)$, где $g(x) \in L_2(0,\omega)$, получаем

$$P_1(t) = \tfrac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t} + \tfrac{2\nu}{\alpha(\nu-1)}\left(\tfrac{\nu}{\alpha-2\nu} - \tfrac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(t) + \\ + \tfrac{2\nu}{\alpha(2\nu-\alpha)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega - t),$$

$$P_2(t) = \frac{4}{\alpha^2 - 4\nu^2}\delta(t)$$

$$P_3(t) = \frac{4\nu}{(\nu-1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(1 + \frac{\alpha}{2\nu} - \nu - \frac{\alpha}{2}\right)\delta(t),$$

$$P_4(t) = \tfrac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \tfrac{2\nu}{\alpha^2}\left(\tfrac{1}{\alpha+2\nu} - \tfrac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu}\right)\delta(\omega - t) + \\ + \tfrac{\nu}{\alpha^2} + \tfrac{8\nu^2(\nu+1)}{\alpha^2(\alpha^2-4\nu^2)(\nu-1)}\delta(t),$$

$$Q_1(t) = \frac{4}{4\nu^2 - \alpha^2}\delta(t),$$

$$Q_2(t) = -\tfrac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t} - \tfrac{2\nu}{\alpha(\nu+1)}\left(\tfrac{1}{\alpha+2\nu} + \tfrac{1}{\alpha-2\nu}\right)\delta(t) + \\ + \tfrac{2\nu}{\alpha(\alpha-2\nu)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega - t),$$

$$Q_3(t) = -\tfrac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \tfrac{2\nu}{\alpha^2}\left(\tfrac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu} - \tfrac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(\omega - t) - \\ - \tfrac{\nu}{\alpha^2} + \tfrac{8\nu^2(\nu-1)}{\alpha^2(4\nu^2-\alpha^2)(\nu+1)}\delta(t),$$

$$Q_4(t) = \frac{4\nu}{(\nu+1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(-1 - \frac{\alpha}{2\nu} - \nu - \frac{\alpha}{2}\right)\delta(t).$$

О различных типах аффинно-однородных поверхностей в отображениях в $\mathbb{C}^3$

В. Атанов, А.В. Лобода, Е.А. Павлова
(Воронеж, ВГАСУ; *lobvgasu@yandex.ru*)

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^3$ с координатами $z_1, z_2, w (u = Rew, v = Imw)$ уравнение вида (см. [1])

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k+l+2m \geq 3} F_{klm}(z, \bar{z}) u^m. \tag{1}$$

Неупорядоченная пара вещественных неотрицательных коэффициентов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ из уравнения (1) является аффиным инвариантом гиперповерхности в выделенной точке. В аффинно-однородном случае эту пару мы называем *типом* поверхности.

В работах [2]-[3] была предложена общая схема описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства и построен полный список однородных многообразий типа (1/2, 1/2) ("трубчатый" тип). Ниже приводятся результаты, относящиеся еще к двум типам (см. также [4]).

Теорема 1. *Любая аффинно-однородная СПВ-гиперповерхность типа* $(1/2, 0)$ *в пространстве* $\mathbb{C}^3$ *аффинно эквивалентна вблизи любой своей точки одному из следующих многообразий (вблизи точек, оговариваемых в условиях перечисляемых пунктов):*

$$v = 2x_1^2 + |z_2|^2; \tag{2}$$

$$v = \exp(x_1) + |z_2|^2, \tag{3}$$

$$v = -\ln(1 + x_1) + |z_2|^2 \ (x_1 > -1), \tag{4}$$

$$v = \pm(1 + x_1)^\alpha + |z_2|^2 \ (x_1 > -1), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}, \tag{5}$$

$$v = (1 + x_1)\ln(1 + x_1) + |z_2|^2 \ (x_1 > -1), \tag{6}$$

$$v^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \ (v \neq 0), \tag{7}$$

$$v=\frac{x_1^2}{1-x_2}+|z_2|^2\ (x_2\neq 1), \tag{8}$$

$$v=|z_1|e^{B\arg z_1}+|z_2|^2\ (z_1\neq 0),\ B\in\mathbb{R}; \tag{9}$$

$$v=x_1^{1-\alpha}|z_2|^{2\alpha}\ (x_1\cdot|z_2|>0),\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}; \tag{10}$$

$$Re(\bar z_1 w)=(Re(z_1\bar z_2))^{\alpha}\ (Re(z_1\bar z_2)>0),\ \alpha\in(-\infty,0). \tag{11}$$

Замечание. Знак $\pm$ в уравнении СПВ-поверхности (5) зависит от значения параметра α и выбирается с учетом положительности коэффициента при x_1^2 в тейлоровском разложении правой части этого уравнения.

Далее обсуждаются однородные поверхности $(\varepsilon, 1/2)$-типа. Построены два примера семейств матричных алгебр Ли, отвечающих таким поверхностям.

Пример 1. Базисом являются следующие 5 матриц $(m, r, t \in \mathbb{R})$:

$$E_1=\begin{pmatrix} t & 0 & i\,(8\,r-t)\,r & 1\\ 0 & -4\,r+t & 0 & 0\\ 4\,i & 0 & 2\,t-12\,r & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_3=\begin{pmatrix} m & 2\,r\,(1+2\,\varepsilon) & -irm & 0\\ 0 & m & 0 & 1\\ 0 & 2\,i\,(1+2\,\varepsilon) & 2\,m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$E_2=\begin{pmatrix} 0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_4=\begin{pmatrix} 0 & 2\,ir\,(-1+2\,\varepsilon) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 2-4\,\varepsilon & 0 & 0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_5=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Здесь базисом любой из алгебр являются следующие 5 матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\left(1/3 + 2/3\,\varepsilon\right)\left(-3\,t_{17} + 3\,m_3\right) & 0 & 0 & 0 \\ 2\,i\left(1 + 2\,\varepsilon\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ -1/3\,i\left(-1 + 2\,\varepsilon\right)\left(-3\,t_{17} + 3\,m_3\right) & 0 & 0 & 0 \\ 2 - 4\,\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} t_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{23} & \left(-1/6\,t_{17} + 1/6\,m_3\right)\left(-3\,it_{23} + 6\,it_{17}\right) & 1 \\ 0 & 4\,i & 2\,m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 2. С точностью до аффинных преобразований интегральным многообразием любой из алгебр (13) является одна из следующих поверхностей $(\varepsilon, 1/2)$-типа:

$$v = |z_1|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + \bar{z}_1^2) \pm (1 + x_2)^{\alpha},\ \alpha \notin \{0, 1\}, \qquad (14)$$

$$v = |z_1|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + \bar{z}_1^2) - \ln(x_2), \qquad (15)$$

$$v = |z_1|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \exp(x_2). \qquad (16)$$

Замечание 2. Формулы (14)-(16), вообще говоря, не исчерпывают всего перечня однородных поверхностей $(1/2, \varepsilon)$-типа. Но для полного описания этого, как и других типов, требуется большой объем работы, в том числе, с использованием пакетов символьной математики.

Литература

1. Лобода, А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия вузов. Математика. – 2003. – N 10. – С. 38 - 50.

2. Лобода А.В., Нгуен Т.Т.З. Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа $\mathbb{C}^3$ // Труды МИАН, 2012, Т. 279, С. 93 - 110.

3. Лобода А. В. О полном описании аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей трубчатого типа пространства $\mathbb{C}^3$ // Воронежская зимняя матем. школа (ВЗМШ-2013). Воронеж, 2013. Тезисы докл. С. 144 - 145.

4. Атанов А.В., Лобода А.В. О системах квадратичных уравнений, связанных с задачей об однородности // Летняя школа-конф. по теории функций. Казань, 2013. Тезисы докл. С. 101 - 103.

О численном решении задачи оптимального управления для нестационарной модели Баренблатта–Желтова–Кочиной

А.Д. Бадоян

(Челябинск, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»(НИУ); *badoyanani@mail.ru*)

1. Модель Баренблатта–Желтова–Кочиной

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ из класса C^∞. Рассмотрим в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ задачу Дирихле для уравнения в частных производных

$$(\lambda - \Delta)x_t = a(t)\Delta x + u, \tag{1}$$

которое моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [1]. В уравнении (1) вещественный параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ и скалярная функция $a : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$, характеризуют среду, причем λ может принимать и отрицательные значения [2], а вектор-функция $u : \mathbb{R} \to L_2(\Omega)$ характеризует внешнее воздействие на систему и является функцией управления.

Уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной имеет вид $(\lambda - \Delta)x_t = a\Delta x$ и описывает такие процессы как течение жидкостей второго порядка, теплопроводность с «двумя температурами», влагоперенос в почве [1] и пр. В этой модели параметр a является составной величиной, зависящей от свойств среды и жидкости и соответствует проницаемости системы трещин, а также пористости и сжимаемости блоков. Его величина определяется формулой

$$a = \frac{\alpha}{\mu(\beta_1 + m_0\beta)},$$

где α – безразмерная характеристика трещиноватой среды, μ – вязкость жидкости, m_0 – величина пористости блоков при стандартном давлении, β_1– коэффициент сжимаемости блоков, β – коэффициент сжимаемости жидкости [2]. Для повышения адекватности модели реальным физическим процессам, коэффициенты β_1 и β целесообразнее брать зависящими от времени и рассматривать данный параметр как скалярную функцию $a : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$, зависящую от времени. Таким образом, получаем нестационарную модель (1) с параметрами, зависящими от времени.

Нашей целью является численное решение задачи оптимального управления для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с условием Шоуолтера–Сидорова $P(x(0) - x_0) = 0$ [3].

2. Оптимальное управление

Построим функционал качества

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^T \|z^{(q)} - z_d^{(q)}\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt + \sum_{q=0}^{k} \int_0^T \left\langle u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \quad z = Cx \quad (2)$$

где $0 \leq k \leq 1$, $T > 0$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U}$ — гильбертово пространство, $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, z_d — плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$. Зададим пространство $H^1(\mathfrak{U})$, которое является гильбертовым, в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$. Выделим в пространстве $H^1(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^1_\partial(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_\partial$ — *множество допустимых управлений.*

Определение 1. Вектор-функцию $v \in H^1_\partial(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением* решениями задачи Шоуолтера–Сидорова [3] для уравнения (1), если

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{3}$$

где $x \in H^1(\mathfrak{X})$, построенное по $u \in \mathfrak{U}_\partial$, является решением задачи Шоуолтера–Сидорова для уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in C^1([0,T);\mathbb{R}_+)$, *отделена от нуля, тогда при любых* $x_0 \in H^1(\mathfrak{X})$ *существует единственное оптимальное управление* $v \in \mathfrak{U}_\partial$ *задачи* (1)-(3) *с условием Шоуолтера–Сидорова .*

В более общем случае доказано в работе [4].

На рисунке (1) представлено численное решение задачи оптимального управления при следующих параметрах уравнения (1). Пусть $\Omega = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s_1 \leq 1, 0 \leq s_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область. Скалярная функция $a(t) = \frac{1}{t+1}$, параметр $\lambda = -5\pi^2$, $T = 1$, начальное условие

$$\begin{aligned} x(0, s_1, s_2) = \sin(\pi s_1)\sin(\pi s_2) + \sin(\pi s_1)\sin(2\pi s_2) + \\ + \sin(2\pi s_1)\sin(\pi s_2) + \sin(2\pi s_1)\sin(2\pi s_2) \end{aligned}$$

Плановое наблюдение представимо в виде

$$\begin{aligned} z_d(t, s_1, s_2) = (t+1)(\sin(\pi s_1)\sin(\pi s_2) + 0.004\sin(\pi s_1)\sin(2\pi s_2) + \\ + 0.004\sin(2\pi s_1)\sin(\pi s_2) + \sin(2\pi s_1)\sin(2\pi s_2)) \end{aligned}$$

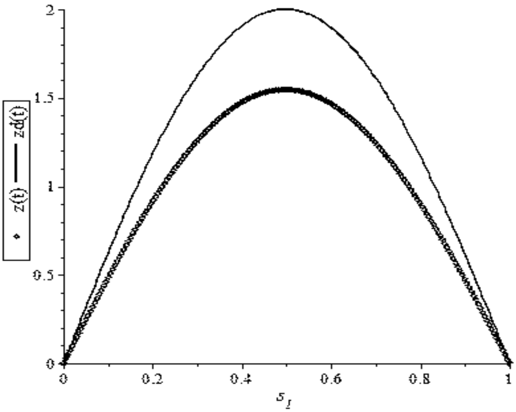


Рис.1 График решения задачи оптимального управления и планового наблюдения при $s_2 = \frac{1}{2}$ в конечный момент времени.

Литература

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикладная математика и механика. Серия: Математика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 216 p.

3. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

4. Сагадеева М.А., Бадоян А.Д. Оптимальное управление решениями нестационарных уравнений соболевского типа специального вида в относительно секториальном случае // Вестник МаГУ. Математика. – 2013. – Вып. 15. – С. 68–80.

О весовых псевдодифференциальных операторах с переменным символом

А.Д. Баев, М.Б. Давыдова, П.В. Садчиков
(Воронеж, Воронежский государственный университет)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha^{/}(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty\left(R^1_+\right)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$,что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, и рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$.

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0, 1]$ такое, что $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \leq c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 = s_1(\nu)$.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$, $x \in R^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}\left[\lambda(x,t,\xi,\eta)\,F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right]$.

Определение 1. *Будем говорить, что символ* $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ *принадлежит классу символов* $S^m_\alpha(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1)$, $m\in R^1$, $\Omega\subseteq(0;+\infty)$, $x\in R^1$, $t\in(0;+\infty)$, $\xi\in R^1$, $\eta\in R^1$, *если* $\lambda(x,t,\xi,\eta)\in C^\infty\left(\Omega\times R^1\times R^1\times R^1\right)$ *и справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\frac{\partial^l}{\partial\xi^l}\frac{\partial^p}{\partial\eta^p}\lambda(x,t,\xi,\eta)\right|\le c_{\tau,m,l,p}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac12(\sigma-l-p)},$$

где $\tau,m,l,p=0,1,2,...$; $c_{\tau,m,l,p}>0$ - *некоторые константы, не зависящие от* x,t,ξ,η,σ.

Определение 2. *Пусть* $\Omega\subset\bar R^1_+$ - *открытое множество. Будем говорить, что функция* $a(x,t,y,\xi,\eta)$ *принадлежит классу* $S^{m,\alpha}(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1\times R^1)$, $m\in R^1$, *если функция* $a(x,t,y,\xi,\eta)$ *является бесконечно дифференцируемой по переменным* $x\in R^1$ $t\in\Omega$, $y\in\Omega$, $\eta\in R^1$, $\xi\in R^1$ *и на компактных подмножествах множества* $\Omega\times\Omega$ *имеет место при всех* $j,\ k,\ l=0,\ 1,\ 2,...$ *оценка*

$$\left|(\alpha(t)\partial_t)^j(\alpha(y)\partial_y)^k\partial^l_\eta a(x,t,y,\xi,\eta)\right|\le c_{jkl}(1+|\xi|+|\eta|)^{m-l}$$

с константами $c_{jkl}>0$, *не зависящими от* $x,\ t,\ y,\ \eta,\ \xi$.

Рассмотрим интегральный оператор вида

$$A(u(x,t))=F^{-1}_{\alpha_{\eta\to t}}F_{\alpha_{y\to\eta}}F^{-1}_{\xi\to x}[a(x,t,y,\xi,\eta)\,F_{x\to\xi}[u(x,y)]],\qquad(1)$$

где $F_{\alpha_{y\to\eta}}$ $(F^{-1}_{\alpha_{\eta\to t}})$ - прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее y в η (η в t).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* A – *интегральный оператор вида* (1), *причём* $a(x,t,y,\xi,\eta)\in S^{m,\alpha}(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1\times R^1)$, $\Omega\subset\bar R^1_+$, $m\in R^1$. *Тогда найдётся такой символ* $p(x,t,\xi,\eta)\in S^m_\alpha(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1)$, *что* $A=P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$, *где* $P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$ - *весовой* *псевдодифференциальный оператор с символом $p(x,t,\xi,\eta)$. Причём, справедливо равенство* $p(x,t,\xi,\eta) = \sqrt{\alpha(t)}\exp(i\eta\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\cdot A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\exp(-i\eta\int_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}))$.

При этом справедливо соотношение

$$p(x,t,\xi,\eta) - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(i)^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j\partial_\eta^j\, a(x,t,y,\xi,\eta)\,|_{y=t} \in \\ \in S_\alpha^{m-N}(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1)$$

при любых $N = 1, 2, ...$

Если символ $p(x,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора не зависит от x, то утверждение, аналогичное теореме 1 доказано в [1].

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

Об оценках решений одной краевой задачи для эллиптического уравнения, вырождающегося на границе области

А.Д. Баев, В.В. Панков
(Воронеж)

Процессы с вырождением – это модели, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. Подобные уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде.

В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева, В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки общей краевой задачи для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t.

В настоящей работе получены априорные оценки решений одной краевой задачи для уравнения, частным случаем которого является уравнение, рассмотренное в [2].

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$.

Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)} u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \, \|u\|_{L_2(R^1_+)} \, ,$$

что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$.

Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, ...,$$

где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

В полосе $R^n_d = \{0 < t < d,\ x \in R^{n-1}\}$ рассматривается задача

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m,1}(D_x, D_{\alpha,t})v - L_{2,2}(D_x, \partial_t)v = F(x,t), \quad (1)$$

где

$$L_{2m,1}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{1,\tau,j} D_x^\tau D^j_{\alpha,t},$$

$$L_{2,2}(D_x, \partial_t) = \sum_{|\tau|+ml\le 2m} a_{2,\tau,l} D_x^\tau \partial_t,$$

$a_{k,\tau,j},\ k = 1; 2.$ - комплексные числа.$Im\, \bar{a}_{2,0,2}a_{1,0,2m} = 0.$

На границе $t = 0$ полосы R^n_d задается условие

$$v|_{t=0} = G(x) \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau l}$.

На границе $t = d$ полосы R^n_d заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ v|_{t=d} = 0. \quad (3)$$

Условие 1. При всех $(\xi,\eta)\in R^n$ справедливы неравенства $ReL_{1,2m}(\xi,\eta)\geq c_1(1+|\xi|+|\eta|)^{2m}$, $ReL_{2,2m}(\xi,\lambda)\geq c_1(1+|\xi|+|\lambda|^{\frac{1}{m}})^{2m}$, где постоянная $c_1>0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s\geq 2m$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$.

Определение 1. *Пространство $H_{s,\alpha,m}(R^n_d)$ ($s\geq 0$ - действительное число) состоит из тех функций $v(x,t)\in L_2(R^n_d)$, для которых конечна норма*

$$\|v\|_{s,\alpha,m}=$$

$$\{\sum_{l=0}^{[sm^{-1}]}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-ml)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[sm^{-1}]$ - целая часть числа sm^{-1}.

Если s - целое неотрицательное число, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q}=\{\sum_{|\tau|+j+ml\leq s}\left\|D_x^\tau D^j_{\alpha,t}\partial_t^l v\right\|_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $s\geq 2m$ - целое число и выполнены условия 1 - 2. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1) - (3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,m}(R^n_d)$ справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s,\alpha,m}\leq c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,m}+\|B\ v|_{t=0}\|_{s-\frac{m}{2}}),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от v.

Здесь $\|\cdot\|_{\ s}$ - норма в пространстве Соболева - Слободецкого $H_s(R^{n-1})$.

Литература

1. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений

высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048 – 79.

2. Баев А. Д. Корректная разрешимость общих краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений /А. Д. Баев, В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 60 с. – Деп. в ВИНИТИ 9.02.79, № 536-79.

Проекционно-разностный метод решения параболического уравнения с периодическим условием на решение

А.С. Бондарев

(Воронеж, Воронежский государственный университет; *obliskuratsiya@bk.ru*)

Постановка задачи. Пусть даны гильбертовы пространства
$V \subset H \equiv H' \subset V'$ – оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(t, u, v)$, измеримую по $t \in [0, T]$. Пусть для $u, v \in V$ и почти всех $t \in [0, T]$

$$|a(t,u,v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad Re\,(a(t,u,v)) \geq \alpha \|u\|_V^2,$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(t, u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$, такой, что $(A(t)u, v) = a(t, u, v)$, где выражение типа (z, v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z, v) – скалярное произведение в H [1].

Рассмотрим в V' на $[0, T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{1}$$

В [2] показано, что для заданного $f \in L_2(0, T; V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0, T; V) \bigcap C([0, T], H)$ задачи (1), называемое слабым решением, причем $u' \in L_2(0, T; V')$.

Для построения приближенной задачи далее предположим, что форма $a(t, u, v)$ и функция $f(t)$ непрерывны по $t \in [0, T]$.

Пусть V_h, где h – положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство

V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h, \|v_h\|_V = 1$. Отметим, что $\|u_h\|_{V_h'} \leq \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h. Как замечено в [3], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_h} : V' \to V_h'$, причем для $u \in V'$ справедливо $\|\overline{P_h}u\|_{V_h'} \leq \|u\|_{V'}$.

Рассмотрим в V_h приближенную задачу: для $k = \overline{1, N}$

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_k^h u_k^h = f_k^h, \quad u_0^h = u_N^h, \tag{2}$$

где $N \in \mathbb{N}, \tau N = T, t_k = k\tau, A_k^h = \overline{P_h}A(t_k), f_k^h = \overline{P_h}f(t_k)$.

Лемма 1. *Задача (2) имеет единственное решение.*

Лемма 2. *Для решения задачи (2) справедлива оценка*

$$\max_{1\leq k\leq N}\|u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N\left(\|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h\|_V^2\tau + \left\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2\tau\right) \leq$$

$$M\sum_{k=1}^N\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть для задачи (1) выполнены условия слабой разрешимости. Предположим также, что $u' \in L_2(0,T;V)\bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$. Пусть u_k^h $(k = \overline{0, N})$ – решение задачи (2). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leq k\leq N}\|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt\right\|_H^2 +$$

$$\sum_{k=1}^N\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2\tau \leq M\Bigg[\max_{0\leq t\leq T}\|(Q_h - I)u(t)\|_H^2 + \int_0^T\|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\,dt +$$

$$\tau^2\left(\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt + \int_0^T\|u''(t)\|_{V'}^2\,dt\right) + \int_0^T\|(I - Q_h)u'(t)\|_H^2\,dt\Bigg], \tag{4}$$

где Q_h – ортопроектор V на V_h

Доказательство. Обозначим $z_k^h = Q_h u(t_k) - u_k^h$. Тогда

$$(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_k^h z_k^h = \overline{P_h} A(t_k)[Q_h - I]u(t_k) +$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h[u'(t) - u'(t_k)]\,dt + \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[Q_h - P_h]u'(t)\,dt. \qquad (5)$$

Отметим, что равенство (5) имеет смысл, поскольку $u \in C([0,T],V)$, $u' \in C([0,T],H)$. К соотношению (5) применим оценку (3):

$$\max_{1\le k\le N}\|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N\left(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h\|_V^2\tau + \left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2\tau\right) \le$$

$$M\left(\sum_{k=1}^N\|(Q_h - I)u(t_k)\|_V^2\tau + \tau^2\int_0^T\|u'(t)\|_{V'}^2\,dt + \int_0^T\|(Q_h - I)u'(t)\|_{V'}^2\,dt\right).$$

Заметим теперь, что

$$u(t_k) - u_k^h = [I - Q_h]u(t_k) + z_k^h,$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k}[I - Q_h]u'(t)\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\,dt.$$

Далее, используя неравенство треугольника, последнее неравенство для z_k^h и оценивая соответствующие слагаемые, получим оценку (4). ■

Для сходимости погрешности к нулю достаточно предположить, что задана последовательность подпространств $\{V_h\}$, предельно плотная в V, то есть $\|(Q_h - I)v\| \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Тогда в условиях указанной выше теоремы при $h \to 0$ и $\tau \to 0$

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt\right\|_H^2 +$$

$$\sum_{k=1}^N\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2\tau \to 0.$$

Литература

1. Ж. П. Обэн. Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

2. Ж. Л. Лионс, Э.Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

3. Г. М. Вайникко, П. Э. Оя. О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений// Дифференц. уравнения. — 1975. — Т.11. — №7. — С.1269—1277.

Разрешимость вырожденных эволюционных уравнений с памятью

Л.В. Борель

(Челябинск, ЧелГУ; *lidiya904@yandex.ru*)

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, $C_B^k([0,+\infty);\mathfrak{U})$ — банахово пространство k раз дифференцируемых, непрерывных и ограниченных на положительной полуоси вместе с k первыми производными функций. Задан оператор $A : D_A \to \mathfrak{U}$, где $D_A \subset \mathfrak{U}$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{u}(t) = Au(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T) \tag{1}$$

с дифференцируемой оператор-функцией $\mathcal{K} : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и с функцией $f : [0,T) \to \mathfrak{U}$, $T \leq +\infty$. Решением задачи

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in (-\infty, 0], \tag{2}$$

для уравнения (1) называется функция $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой выполняются равенства (1), (2).

Теорема 1. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_B((-\infty,0];\mathfrak{U}) \cap L_1(-\infty,0;\mathfrak{U})$, $u_-(0) \in D_A$, $\mathcal{K} \in W_1^1(0,+\infty;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$,*

$f \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$ или $f \in C([0,T);D_A)$ при $T \leq +\infty$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) *на промежутке* $[0,T)$.

В качестве примера применения теоремы 1 рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x,t) = z_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (-\infty, 0], \tag{3}$$

$$z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T), \tag{4}$$

для уравнения

$$z_t(x,t) = \triangle z(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} k(s)z(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{5}$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу.

Редуцируем задачу (3)–(5) к задаче (1), (2). Положим $A = \triangle$, в качестве пространства $\mathfrak{U}$ и области определения D_A возьмем соответственно $L_2(\Omega)$ и $H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\}$.

Теорема 2. *Пусть $z_- \in C((-\infty,0];L_2(\Omega)) \cap L_1(-\infty,0;L_2(\Omega))$, $z_-(\cdot,0) \in H_0^2(\Omega)$, $k \in W_1^1(0,+\infty;\mathbb{R})$. Тогда существует единственное решение $z \in C^1([0,T);L_2(\Omega)) \cap C([0,T);H_0^2(\Omega)) \cap C((-\infty,T);L_2(\Omega))$ задачи* (3)–(5).

Для исследования вырожденных эволюционных уравнений с памятью далее понадобятся решения большей гладкости. Сформулируем простейший результат.

Теорема 3. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_B^1((-\infty,0];\mathfrak{U}) \cap L_1(-\infty,0;\mathfrak{U})$, $u_-(0) \in D_{A^2}$, $\mathcal{K} \in W_1^1(0,+\infty;\mathcal{L}(D_A;\mathfrak{U}))$, при $T \leq +\infty$ выполняется одно из условий:*

(i) $f \in C^2([0,T);\mathfrak{U})$, $f(0) \in D_A$;

(ii) $f \in C([0,T);D_{A^2}) \cap C([0,T);D_A) \cap C^1([0,T);\mathfrak{U})$.

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение $u \in C^2([0,T);\mathfrak{U}) \cap C^1([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$ на промежутке* $[0,T)$.

В случае ограниченного оператора A можно получить утверждение о решении произвольной заданной гладкости.

Теорема 4. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $u_- \in C_B^n((-\infty,0];\mathfrak{U}) \cap L_1(-\infty,0;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in W_1^1(0,+\infty;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $f \in C^{n-1}([0,T);\mathfrak{U})$ *при* $T \leq +\infty$. *Тогда существует единственное решение* $u \in C^n([0,T);\mathfrak{U}) \cap C^{n-1}([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$ *задачи* (1), (2) *на промежутке* $[0,T)$.

Обратимость линейных отношений, порожденных системой интегральных уравнений[2]

В.М. Брук

(Саратов, Саратовский государственный технический университет; vladislavbruk@mail.ru)

Линейные отношения, изучаемые в данной работе, действуют в пространстве $\mathfrak{H}$, которое определяется следующим образом. На отрезке $[a,b]$ рассматривается имеющая ограниченную вариацию мера $\mathbf{m}$ со значениями в множестве неотрицательных линейных ограниченных операторов, отображающих сепарабельное гильбертово пространство H в себя. Продолжим $\mathbf{m}$ на отрезок $[a_0,b_0] \supset (a_0,b_0) \supset [a,b]$ так, чтобы $\mathbf{m}(\Delta)=0$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a_0,b_0] \backslash [a,b]$. На множестве ступенчатых на $[a_0,b_0]$ функций введем квазискалярное произведение $(x,y)_{\mathbf{m}} = \int_{a_0}^{b_0}((d\mathbf{m})x(t),y(t))$. Отождествляя с нулем те y, для которых $(y,y)_{\mathbf{m}}=0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$y_{j-1}(t) = c_j + \sum_{k=1}^{j+1} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{j,k}) y_{k-1}(s), \ \ j=1,...,r-1,$$

$$y_{r-1}(t) = c_r + \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{r,k}) y_{k-1}(s) + \lambda i^{-r} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) y_0(s) + i^{-r} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) f(s), \tag{1}$$

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-01-00378

где $\int_{t_0}^t$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0<t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0>t$, и 0, если $t_0=t$. Здесь $\mathbf{p}_{j,k}$ – операторные меры на $[a,b]$, значения которых – линейные ограниченные операторы в H; $y = y_0$, y_1,...,y_{r-1} – неизвестные функции; $c_j \in H$ $(j=1,...,r)$; $f\in\mathfrak{H}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Меры $\mathbf{p}_{j,k}$ удовлетворяют условиям: (a) они имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$; (b) $\mathbf{p}_{j,k}=0$ при $k>j+1$; (c) $\mathbf{p}_{j,j+1}(\Delta)=\int_\Delta p_{j,j+1}(t)dt$ для любого борелевского множества Δ (т.е. меры $\mathbf{p}_{j,j+1}$ абсолютно непрерывны) и операторы $p_{j,j+1}(t)$ имеют всюду определенные ограниченные обратные для всех t. Считаем, что меры $\mathbf{p}_{j,k}$ продолжены на отрезок $[a_0,b_0]$ таким же способом, что и мера $\mathbf{m}$.

Можно доказать, что система (1) имеет единственное решение для любых фиксированных $c_j \in H$, $f \in \mathfrak{H}$. Пусть система функций $\widehat{y}=\mathrm{col}(y_0,...,y_{r-1})$ является решением (1). Тогда y_j назовем *квазипроизводной* от y, обозначим $y_j = y^{[j]}$ и говорим, что $y=y_0$ – решение (1). Квазипроизводные непрерывны слева и в (1) $c_j = y^{[j-1]}(t_0)$. Если меры $\mathbf{p}_{j,k}$ абсолютно непрерывны, то $y^{[j]}$ является квазипроизводной в смысле [1].

Введем обозначения: $W_m(t,\lambda)$ – операторное решение (1) при $f=0$, удовлетворяющее условию $W_m^{[j-1]}(a_0,\lambda)=\delta_{jm}E$ (E – тождественный оператор, $j,m = 1,...,r$); $W(t,\lambda) = (W_1(t),...,W_r(t))$ – операторная однострочная матрица, $\widehat{W}(t,\lambda)$ – матрица с элементами $W_m^{[j-1]}(t,\lambda)$. При фиксированных t, λ оператор $\widehat{W}(t,\lambda)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H^r на H^r. Пусть Q_0 – множество элементов $c\in H^r$, для которых функция $W(t,\lambda)c$ отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$, $Q=H^r\ominus Q_0$, Q_- – пополнение Q по норме $\|c\|_- = \|W(\cdot)c\|_{\mathbf{m}}$. Пространство Q_- рассматриваем как негативное относительно Q. Пространство с позитивной нормой обозначим Q_+. Тогда $Q_+ \subset H^r$. Положим $\widetilde{Q}_+ = \widehat{W}(b_0,0)i^r\Lambda$ и введем в $\widetilde{Q}_+$ норму пространства Q_+ (Λ – матрица с побочной диагональю $-E$, E,...,$(-1)^rE$, остальные элементы Λ равны нулю). Пространства Q_0, Q_-, Q_+, $\widetilde{Q}_+$ не зависят от выбора точки λ в следующем смысле: при замене λ другой точкой получатся те же множества с эквивалентными нормами.

Предположим, что меры $\mathbf{q}_{j,k}$ обладают теми же свойствами, что и $\mathbf{p}_{j,k}$. Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ – матрицы с элементами $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{q}_{j,k}$ соответственно, $\mathcal{P}=-i^r\Lambda\mathbf{P}$, $\mathcal{Q}=-i^r\Lambda\mathbf{Q}$. Если $\mathcal{Q}=\mathcal{P}^*$, то заменив в системе (1) меры $\mathbf{p}_{j,k}$ на $\mathbf{q}_{j,k}$, λ на $\bar\lambda$, получим систему, сопряженную к (1). Положим $U(t,\bar\lambda)=(U_1(t,\bar\lambda),...,U_r(t,\bar\lambda))$, где $U_m(t,\bar\lambda)$ – операторное решение при $f=0$ системы, сопряженной к (1), удовлетворяющее условию $U_m^{[j-1]}(a_0,\bar\lambda)=\delta_{jm}E$.

Определим отношение L' как отношение, состоящее из тех пар $\{\tilde y,\tilde f\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, для каждой из которых найдется такая пара $\{y,f\}$, что $\{y,f\}$ отождествлена в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde y,\tilde f\}$ и y является решением (1) при $\lambda=0$. Замыкание L отношения L' назовем *максимальным отношением*, порожденным системой (1). *Минимальное отношение* L_0 определим как сужение отношения L' на множество функций y, удовлетворяющих условию $\widehat y(a_0)=\widehat y(b_0)=0$, где $\widehat y=\mathrm{col}(y^{[0]},...,y^{[r-1]})$. Отношение L_0 замкнуто.

Теорема 1. *Пара $\{\tilde y,\tilde f\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит отношению $L-\lambda E$, когда существуют пара $\{y,f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde y,\tilde f\}$, и элемент $\tilde c_\lambda\in Q_-$ такие, что справедливо равенство*

$$y(t)=W(t,\lambda)\tilde c_\lambda+W(t,\lambda)i^r\Lambda\int_{a_0}^{t}U^*(s,\bar\lambda)(d\mathbf{m})f(s). \qquad (2)$$

Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ – банаховы пространства, $T\subset\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2$ – замкнутое линейное отношение, $\delta:T\to\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ – линейный оператор, $\delta_j=\pi_j\delta$, $j=1,2$, где π_j – естественная проекция $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ на $\mathcal{B}_j$. Четверка $(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\delta_1,\delta_2)$ называется пространством граничных значений (ПГЗ) для отношения T (см. [2] и библиографию там), если δ непрерывно отображает T на $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ и сужение δ_1 на $\mathrm{Ker}T$ является взаимно однозначным отображением $\mathrm{Ker}T$ на $\mathcal{B}_1$, где $\mathrm{Ker}T$ – множество пар вида $\{x,0\}\in T$. Определим оператор $\Phi_\delta:\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2$ и отношение T_0 равенствами $\Phi_\delta=\delta_2(\delta_1|_{\mathrm{KerT}})^{-1}$, $T_0=\ker\delta$. Тогда между отношениями $\widehat T$ со свойством $T_0\subset\widehat T\subset T$ и отношениями $\theta\subset\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\delta\widehat T=\theta$. В этом случае обозначаем $\widehat T=T_\theta$.

Пусть S – линейное отношение, $S\subset B_1{\times}B_2$, B_1, B_2 – банаховы пространства, $\mathcal{R}(S)$ – область значений S. Следующие условия взяты из [3]: 1) S замкнуто; 2) $\ker S=\{0\}$; 3) $\dim\ker S<\infty$;

4) отношение S корректно; 5) $\overline{\mathcal{R}(S)} = \mathcal{R}(S)$; 6) $\mathcal{R}(S)$ – замкнутое подпространство в B_2 конечной коразмерности; 7) $\mathcal{R}(S) = B_2$; 8) S непрерывно обратимо. Из [2] следует

Лемма. *Пусть область значений* $\mathcal{R}(T)=\mathfrak{B}_2$. *Тогда отношения* T_θ *и* $\theta-\Phi_\delta$ *одновременно удовлетворяют или нет условию* k $(1\leqslant k\leqslant 8)$.

Согласно теореме 1, пара $\{\tilde{y},\tilde{f}\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит отношению L, когда существует такая пара $\{y,f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$, что справедливо (2) при $\lambda=0$. Пусть δ – оператор, ставящий в соответствие каждой паре $\{y,f\}\in L$ пару граничных значений

$$\delta_1\{y,f\}=\tilde{c}_0 \in Q_-, \delta_2\{y,f\}=\widehat{W}(b_0,0)i^r\Lambda\int_{a_0}^{b_0}U^*(s,0)(d\mathbf{m})f(s) \in \widetilde{Q}_+.$$

Для любой пары $\{y,f-\lambda y\}\in L-\lambda E$ положим $\delta(\lambda)\{y,f-\lambda y\} = \delta\{y,f\}$. Четверка $(Q_-,\widetilde{Q}_+,\delta_1(\lambda),\delta_2(\lambda))$ является ПГЗ для отношения $L-\lambda E$ и

$$\Phi_{\delta(\lambda)}=\delta_2(\lambda)(\delta_1(\lambda)|_{\mathrm{Ker}(L-\lambda E)})^{-1} = \lambda\widehat{W}(b_0,0)i^r\Lambda\int_{a_0}^{b_0}U^*(s,0)(d\mathbf{m})W(s,\lambda).$$

Если $\tilde{c}_0 \in Q$ (т.е. $\{y,f\}\in L'$), то $\delta\{y,f\}=\{\widehat{y}(a_0),\widehat{y}(b_0)\}$, $\Phi_{\delta(\lambda)} = \widehat{W}(b_0,\lambda)-\widehat{W}(b_0,0)$. Пусть $\theta\subset Q_-\times\widetilde{Q}_+$, $L_0\subset L_\theta\subset L$ и $\delta L_\theta=\theta$. Из леммы следует

Теорема 2. *Отношение* $L_\theta-\lambda E$ *тогда и только тогда удовлетворяет условию* k $(1\leqslant k\leqslant 8)$, *когда тому же условию удовлетворяет отношение* $\theta-\Phi_{\delta(\lambda)}$.

Литература

1. Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators – Rocky Mountain J. Math. 5, № 3. 1975. Pp. 453–474.

2. Bruk V. M. On Linear Relations Generated by Nonnegative Operator Function and Degenerate Elliptic Differential-Operator Expression – J. of Math. Physics, Analysis, Geometry. 5, № 2. 2009. Pp. 123–144.

3. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений – Успехи матем. наук. 68, № 1. 2013. С. 77–128.

Об одной краевой задаче в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения

С.С. Бунеев
(Елец, Елецкий государственный университет)

В работах А. Д. Баева [1]-[2] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В данной работе получена априорная оценка решения краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$- некоторое число, рассматривается уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t). \tag{1}$$

Здесь

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - \partial_t^3 v, L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \\ = \textstyle\sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ - комплексные числа, $Im\, a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается условие вида

$$B_j(D_x)\, v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\le m^*-m(j-1)} b_\tau D_x^\tau \partial_t^j\, v|_{t=0} = G_j(x), \ \ j = 1;2 \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t \, v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1} \, v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Пусть что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $ReL_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $B_j(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, $j = 1, \ 2$..

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. *Пространство $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ ($s \geq 0$ - действительное число) состоит из тех функций $v(x,t) \in S'$, для которых конечна норма*

$$\|v\|_{s,\alpha,m} =$$
$$\{\sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]} \left\| F_{\xi \to x}^{-1} F_\alpha^{-1} [(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)} F_\alpha F_{x \to \xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{3s}{2m}]$ - целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s - целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l \leq s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. *Пространство $_s(R^{n-1})$ (s- действительное число) состоит из всех функций $u(x) \in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма*

$$\|u\|_s = \left\| F_{\xi \to x}^{-1} [(1+|\xi|)^s F_{x \to \xi}[u(x)]] \right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $s \geq \max\{2m,\ m^* + m\}$ *- целое число и выполнены условия 1 - 3. Тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи (1)-(3), принадлежащего пространству* $H_{s,\alpha,m}(R^n_d)$ *справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s,\alpha,m} \leq c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,m} + \sum_{j=1}^{2} \|B\ v|_{t=0}\|_{s-m^*-m(j-1)-\frac{m}{3}}),$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* v.

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/А. Д. Баев // Доклады Академии наук, 2008, т. 422, №6, с. 727 – 728.

Вырожденная математическая модель распространения волн в теории мелкой воды

Е.В. Бычков

(Челябинск, ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет"(НИУ); *bychkov42@gmail.com*)

В теории мелкой воды предполагается, что длина волны гораздо больше глубины невозмущенной жидкости. Наиболее распространенный пример таких волн – цунами. Волны в теории мелкой воде моделируется уравнением Буссинеска и его модификациями. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$(1 - \beta\Delta)u_{tt} = k\Delta u + \Delta f(u), \tag{1}$$

где $\beta = \dfrac{2h^2}{3g}(1/3 - 1/B_0)$, $k = \dfrac{2h}{3}$, h – глубина невозмущенной жидкости, g – гравитационная постоянная, B_0 – число Бонда, характеризующее капиллярные эффекты, f – некоторая известная функция. Если $f(u) = u^2$, то уравнение (1) называется модифицированным уравнением Буссинеска, при $n = 1$ применяется для изучения столкновения плоских уединенных волн [1]. Если $f(u) = u^3$, то уравнение (1) называется Improved Modified Boussinesq Equation (IMBq equation). Предполагается, что скорость движения жидкости не зависит от глубины, и, что дно достаточно плоское. Для уравнения (1) рассмотрим смешанную краевую задачу

$$u(x,t) + \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

При некоторых значениях параметра β уравнения (1) становится вырожденным, поэтому вместо классических условий Коши

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{3}$$

ставятся условия Шоуолтера – Сидорова

$$P(u(x,0) - u_0(x)) = 0, \quad P(u_t(x,0) - u_1(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

где P – некоторый спектральный проектор на образ оператора при старшей производной по времени. Условия Шоуолтера – Сидорова (4) являются естественным обобщением условий Коши для уравнения соболевского типа.

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, оператор $N \in C^\infty$, причем ядро оператора L может быть нетривиальным. Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\lambda(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\lambda(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются L-резольвентой, правой и левой L-резольвентами оператора M.

Определение 1. Оператор M называется $(L,0)$-*ограниченным*, если его относительный спектр ограничен и ∞ является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M.

Математическая модель (1), (2), (4) исследуется с помощью редукции к задаче Шоуолтера – Сидорова для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка в соответствующих пространствах Соболева. Рассмотрим задачу

$$Lu_{tt} = Mu + N(u), \tag{5}$$

$$P(u(0)-u_0)=0, \quad P(u_t(0)-u_1)=0. \tag{6}$$

Проектор P можно задать следующим образом $P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\lambda(M)d\lambda$ и проектор $Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L^L_\lambda(M)d\lambda$, которые расщепляют пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, где Γ – контур, ограничивающий спектр оператора $(\mu L - M)^{-1}$.

Основываясь на методе фазового пространства, разработанного Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой, вводится понятие фазового пространства полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка [3].

Определение 2. Множество $\mathfrak{P}$ называется *фазовым пространством уравнения (5)*, если
(i) для любых $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (5), (6);
(ii) любое решение $u=u(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т.е. $u(t)\in\mathfrak{P}$ при $t\in(-\tau,\tau)$.

В нашем случае фазовое пространство задается формулой

$$\mathfrak{P}=\{u\in\mathfrak{U}:(\mathbb{I}-Q)(Mu-N(u))=0\}.$$

В силу определения условий Шоуолтера – Сидорова начальные условия автоматически попадают в фазовое пространство заданного уравнения. Введем в рассмотрение условие на оператор правой части уравнения

$$(\mathbb{I}-Q)(M-N'_{u_0}):\mathfrak{U}^0\to\mathfrak{F}^0 \text{ – топлинейный изоморфизм.} \tag{7}$$

В рамках теории относительно p-ограниченных операторов доказана

Теорема 1.[2] Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, оператор $N\in C^\infty(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$. Тогда для любых $u_0,u_1\in\mathfrak{U}$ при выполнении условия (7) существует единственное локальное решение задачи (5), (6).

Для редукции математической модели (1), (2), (4) к задаче (5), (6) положим

$$\mathfrak{U}=\{u\in W_2^{m+2}(\Omega):u(x,t)+\tfrac{\partial}{\partial\vec{n}}u(x,t)=0,\\ (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}\},\quad \mathfrak{F}=W_2^m(\Omega),$$

тогда операторы

$$L = 1 - \beta\Delta, \quad M = k\Delta$$

будут принадлежать пространству $\mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ и если f – функция класса C^∞, то $N(u) = \Delta f(u)$ принадлежит классу C^∞ в силу теоремы о регулярности [4].

В силу теоремы 1 имеет место

Теорема 2. Пусть $m > n/2-2$, f – функция класса C^∞ и выполнено условие (7). Тогда для любых $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ существует единственное локальное решение решение задачи (1), (2), (4).

Замечание. Для $f(u) = \Delta(u^3)$ условия теоремы 2 выполняются.

Литература

1. Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованых волн в диспергирующих средах // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93, № 8. С. 469–472.

2. Замышляева А.А., Бычков Е.В. О численном исследовании математической модели распространения вол на мелкой воде // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 1, С. 27–35.

3. Замышляева А.А., Бычков Е.В. Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 18 (277), вып. 12, С. 13–19.

4. Хэссард Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985.

Оптимизация геометрии рабочего колеса центробежного нефтяного насоса с использованием инструментов ANSYS

С.Г. Валюхов, А.В. Кретинин

(Воронеж)

Использование возможностей математического моделирования гидродинамических процессов в проточной части центробежного насоса средствами пакета конечно-элементного анализа ANSYS в сочетании с методами нелинейного программирования позволяет получить оптимизированную геометрию рабочего колеса насоса, обеспечивающую максимальную гидродинамическую эффективность.

Методика оптимизационного расчета изложена на примере насоса МНН 7500.249. Вербальная постановка задачи оптимизации состоит в следующем: подобрать значения следующих геометрических параметров, определяющих профиль лопатки рабочего колеса: запаса прочности вала насоса Ks, отношение диаметра ступицы к диаметру вала ${}^{D_h}/_{D_{sh}}$, углы установки лопасти на входе и выходе (β1s – угол установки лопасти на входе на покрывном диске, и β2 – угол установки лопасти на выходе), отношение толщины лопасти к выходному диаметру колеса такие, что гидравлический КПД насоса стремится к максимальному значению, а радиальная сила на ротор, приводящая к вибрациям насоса, стремится к минимальному значению). При этом кавитационный запас насоса является ограничением, и будет вычисляться для наилучшего варианта лопасти.

По ряду факторов осуществлялся одномерный оптимизационный поиск. Приведем пример расчета для фактора Ks. Сформированная параметризованная модель анализа, включающая инструменты Vista CPD, BladeGen, TurboGrid и CFX, приведена на рисунке 1.

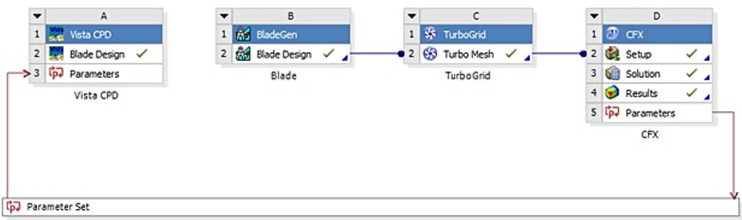


Рис. 1 Структура модели для одномерного поиска по фактору Ks

Расчетная зависимость гидравлического КПД рабочего колеса от принимаемого запаса прочности вала Ks представлена на рисунке 2. По результатам расчета можно принять значение Ks=1.2. Аналогичным образом осуществляется анализ для фактора ${}^{D_h}/_{D_{sh}}$.

Для углов установки лопасти осуществлялся оптимизационный поиск по двум факторам $\beta 1$s и $\beta 2$ с использованием ЛПτ-алгоритма. Для насоса МНН 7500.249 сгенерированы 16 точек ЛПτ-последовательности для углов установки лопасти в следующей области факторного пространства $\beta_{1s} \in [11, 21]$ и $\beta_{2s} \in [17, 27]$. Координаты этих 16 точек следующие: (16,22), (18.5,19.5), (13.5,24.5), (14.75,20.75), (19.75,25.75), (17.25,18.25),(12.25,23.25), (12.875,20.125), (17.875,25.125), (20.375,17.625),(15.375,22.625), (14.125,18.875), (19.125,23.875), (16.625,21.375), (11.625,26.375), (11.9375,21.6875).

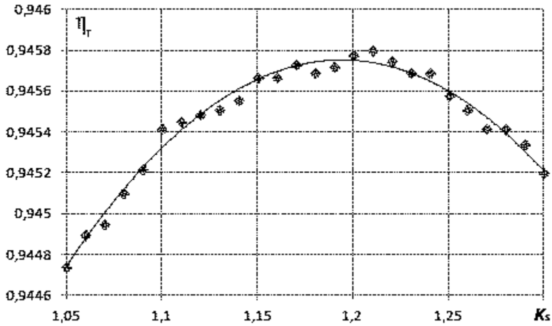


Рис. 2. Зависимость $\eta(K$s)

Угол на входе – *shroudbladeangle* – первый параметр в скобках

Угол на выходе – под заголовком *trailingedgebladeangles* параметр *bladeangle* – второй параметр в скобках.

Критерии оптимизации вычисляются в программной среде ANSYS CFX.

Далее приведем пример оптимизационного расчета для определения профиля лопасти насоса МНН 7500.249. Результаты расчета в ANSYSCFX в 16 точках плана эксперимента представлены в табл. 1.

Таблица 1 - Результаты расчета

№	β1s	β2	ηг	Fр, Н
1	16	22	0.947524	16479
2	18.5	19.5	0.942664	17722
3	13.5	24.5	0.94536	15542.3
4	14.75	20.75	0.9495	16959.7
5	19.75	25.75	0.93047	15228
6	17.25	18.25	0.946543	18562.7
7	12.25	23.25	0.9837	15925
8	12.875	20.125	0.951928	17253
9	17.875	25.125	0.937205	15366.7
10	20.375	17.625	0.938231	19162
11	15.375	22.625	0.946841	16164.7
12	14.125	18.875	0.951914	17993.56
13	11.625	26.375	0.9402	15068.4
14	16.625	21.375	0.946316	16733
15	19.125	23.875	0.936129	15748.6
16	11.9375	21.6875	0.948014	16532

Для формирования факторной модели использован алгоритм нейросетевой аппроксимации.

Структура нейросетевой базы данных

Для формирования отображений$\eta_3 = f_{NET}\left(\beta_{1s}, \beta_2\right)$и $F_@ = f_{NET}\left(\beta_{1s}, \beta_2\right)$использовалась стандартная структура многослойного персептрона (MLP) с 2 входами, одним выходом и одним скрытым слоем. При обучении MLP использовался алгоритм Левенберга-Маркардта. В результате сформированы2 персептрона с 3 нейронами в скрытом слое, параметры которых приведены в табл. 3.5.3.2.

Таблица 2 – Параметры аппроксимационного персептрона $\eta_3 = f_{NET}\left(\beta_{1s}, \beta_2\right)$

Номер нейрона j	1	2	3
Порог bj	1.729297	-1.403757	24.72034
Вес $v1j$	1.101144	5.311493	18.81839
Вес $v2j$	0.5139975	-2.289221	46.67931
Вес wj	-5.073048	0.9236118	0.1368938
Порог $b0$	-1.20721		

Таким образом, для хранения информации о гидравлическом КПД проектируемого насоса требуется всего 13 коэффициентов, способных, будучи организованными в нейросетевую вычислительную архитектуру, с высокой точностью восстановить функциональный континуум $\eta_3 = f_{NET}\left(\beta_{1s}, \beta_2\right)$.

Использование нейросетевой зависимости

Ниже рассмотрено функционирование разработанного персептрона. Выход сети рассчитывается по формуле

$$y\left(x\right) = 3\sum_{j=1}^{7} w_j \sigma_j\left(x\right) - b_0, \tag{1}$$

где x– вектор входов (в нашем случае двухмерный $\left(\beta_{1s}, \beta_2\right)$); σ(x) – функция активации; wj – веса соединений выходного нейрона с j-м нейроном скрытого слоя; b_0– порог выходного нейрона; j – номер нейрона в скрытом слое.

В качестве функции активации используется логистическая сигмоида (функция Ферми):

$$\sigma_j\left(x\right) = \frac{1}{1 + \exp\left(-t_j\left(x, b_j\right)\right)} \tag{2}$$

Здесь bj– порог j-го нейрона скрытого слоя, а функция $tj($x$,bj)$ имеет вид

$$t_j\left(x, b_j\right) = \sum_{i=1}^{3} v_{ij} x_i - b_j \tag{3}$$

где vij– вес соединения j-го нейрона скрытого слоя с i-м входом.

При использовании параметров персептрона, входные переменные приводятся в диапазон [0;1] согласно минимаксным формулам:

$$x_1 = 0.1142857 \cdot \beta_{1\mathrm{s}} - 1.328571;\ x_2 = 0.1142857 \cdot \beta_2 - 2.014286 \tag{4}$$

Выход сети, рассчитанный по формуле (1), связан с искомым относительным давлением соотношением

$$\eta_3 = {(y\,(x) + 43.36238)}/{46.60267} \qquad (5)$$

Таким образом, по результатам численного эксперимента сформирована нейросетевая поверхность отклика $\eta_3 = f_{NET}\,(\beta_{1s}, \beta_2)$, справедливая при$\beta_{1s} \in [11;\ 21]$, $\beta_2 \in [17;\ 27]$. Высокая точность приближения позволяет использовать нейросетевую аппроксимационную формулу для прогнозирования гидравлическогоКПД проектируемого центробежного насоса.

Далее представлены аналогичные результаты по формированию нейросетевой модели $F_{@} = f_{NET}\,(\beta_{1s}, \beta_2)$.

Таблица 3 – Параметры аппроксимационного персептрона $F_{@} = f_{NET}\,(\beta_{1s}, \beta_2)$

Номер нейрона j	1	2	3
Порог bj	1.170182	1.35505	-1.309049
Вес $v1j$	-0.8072	-0.783251	0.004166
Вес $v2j$	6.941549	7.337934	1.618305
Вес wj	-3.113647	2.909222	-5.389918
Порог $b0$	-5.319173		

При использовании параметров персептрона, входные переменные приводятся в диапазон [0;1] согласно минимаксным формулам:

$$x_1 = 0.1142857\beta_{1\mathrm{s}} - 1.328571;\ x_2 = 0.1142857\beta_2 - 2.014286 \qquad (6)$$

Выход сети связан с искомым относительным давлением соотношением

$$F_p = {(y\,(x) + 3.680965)}/{0.0002443} \qquad (7)$$

После формирования экспериментальных факторных моделей решается задача многокритериальной оптимизации.

Таблица 4 - Множество Парето

betta1	betta2	KPD	F
11,64384	17	0,956875	19462,85
11,15455	17,11349	0,95659	19341,09
11	17,38507	0,956044	19084,97
11,70679	17,60063	0,95593	18917,04
11,89149	17,97565	0,955328	18600,75
11,62629	18,40325	0,954557	18250,11
12,1253	18,87089	0,953823	17932,36
12,11979	19,49366	0,952713	17552,92
12,64674	20,08383	0,951633	17258,31
12,28442	20,56738	0,950705	17025,96
13,9718	21,67596	0,950597	16559,64
13,49773	22,67662	0,949345	16144,86
13,31495	23,04028	0,948623	16006,59
13,44125	23,54472	0,947513	15828,87
13,09354	24,23832	0,945889	15605,56
13,29435	24,74077	0,944743	15461,4
13,62635	25,43066	0,943127	15283,54
13,6525	25,92774	0,941903	15168,17
13,68592	26,63162	0,940129	15021,7
11	27	0,939037	14951,68

Таким образом, при выполнении технического проектирования разработана методика оптимизации гидравлических и геометрических параметров проточных частей МНН. Методика проектирования во многом автоматизирована и позволяет инженеру вмешиваться в процесс проектирования только на этапах принятия решений о направлении дальнейшего совершенствования геометрической формы.

Результаты математического моделирования позволяют сделать вывод, что у насосов с оптимизированной проточной частью отводов радиальная нагрузка на ротор меньше, чем у неоптимизированных, при обеспечении заданного энергетического совершенства.По результатам выполнения оптимизационного проектирования гарантировано обеспечиваются требуемые напорные характеристики и КПД типоразмерного ряда разрабатываемых МНН.

В итоге получены результаты профилирования лопаток рабочих колес программой ANSYS BladeGen с гидравлическим КПД не менее 94% и минимизированной радиальной силой на ротор в качестве резервного варианта в том случае, если по результатам экспериментальных исследований будут зафиксированы повышенные параметры виброактивности разрабатываемых насосов.

Литература

1. Валюхов С.Г., Булыгин Ю.А., Кретинин А.В. Численное моделирование гидродинамических процессов в проточной части магистрального нефтяного насоса // Разработка, производство и эксплуатация турбо-, электронасосных агрегатов и систем на их основе: Труды VI Международной научно-технической конференции «СИНТ'11». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. – С.61-65

2. Валюхов С.Г., Кретинин А.В. Математическое моделирование гидродинамических процессов в проточной части центробежного насоса с использованием нейросетевых алгоритмов / Насосы. Турбины. Системы. 2011, № 1. С. 53-60.

3. Sergey Valyuhov, Alexander Kretinin and Alexander Burakov. Neural Network Modeling of Hydrodynamics Processes, Hydrodynamics - Optimizing Methods and Tools, Harry Edmar Schulz (Ed.), ISBN: 978-953-307-712-3, InTech, Available from: http://www.intechopen.com/articles/show/title/neural-network-modeling-of-hydrodynamics-processes

Разработка математической модели процесса заполнения сильфонов воздуха для клапана КЗР1800

С.Г. Валюхов, С.А. Дедов, Е.М. Оболонская
(Воронеж, ОАО «Турбонасос»)

Одним из направлений деятельности ОАО «Турбонасос» является проектирование и изготовление запорно-регулирующей арматуры.

На предприятии разработан клапан КЗР1800 - запорный поворотного типа, предназначенный для монтажа в газоходном тракте и его герметизации в положении клапана «закрыто».

Клапан состоит из следующих элементов: корпус, поворотная заслонка, седло. В состав поворотной заслонки входят диск, горизонтальный вал, рессора и четыре сильфона. При закрытии клапана из положения «открыто» заслонка поворачивается в положение, перпендикулярное оси трубопровода, по окончании поворота заслонки в сильфоны подается воздух с заданным избыточным давлением и диск заслонки сильфонами перемещается на коническое седло клапана и уплотняется. Метод уплотнения – плотная посадка диска заслонки на седло клапана, поверхности уплотнения – «металл – металл».

Целью данной работы является разработка математической модели процесса заполнения воздухом сильфонов клапана КЗР1800 и расчет с помощью полученного алгоритма времени заполнения сильфонов. Исследуемая задача интересна тем, что рассматриваемый режим течения газа – нестационарный. В этом случае необходимо учитывать изменения режимных параметров системы (давление, расход воздуха), происходящие с течением времени. Все давления, приведенные в статье – абсолютные.

Расчетная схема тракта подвода воздуха в сильфоны представлена на рисунке.

Рис.1 Расчетная схема тракта подвода воздуха в сильфоны

Расчет проведен при следующих условиях и исходных данных:

1. режим работы компрессора непостоянный:
2. в начальный момент времени компрессор выключен;
3. при снижении давления в ресивере до 1 МПа компрессор включается, нагнетает давление до 1,1 МПа и снова выключается;
4. давление в ресивере в начальный момент времени, МПа
$$P_{\text{ресивера}}(t0) = 1,1;$$
5. давление воздуха в сильфонах в начальный момент времени, МПа
$$P_{\text{сильфона}}(t0) = 0,1;$$
6. давление воздуха в сильфонах номинальное, МПа
$$P_{\text{сильфона\_номинальное}} = 0,65;$$
7. задана геометрия сильфонов в начальный момент времени и максимальное удлинение сильфонов;
8. задана геометрия трубопровода и ресивера.

Расчетная модель

В качестве математической модели течения газа внутри трубопровода будем использовать следующую систему дифференциальных уравнений [1]:

Уравнение сохранения количества движения

$$\frac{\partial P^2}{\partial x} = -\frac{16 \cdot \lambda \cdot R \cdot Z \cdot T}{\pi^2 \cdot D_{\text{вн}}^5} \cdot \rho_c^2 \cdot q^2 - 2 \cdot P \cdot \rho_c \cdot \frac{\partial q}{\partial t} -$$

$$-\rho_c^2 \cdot \frac{32 \cdot R}{\pi^2 \cdot D_{\text{вн}}^4} \cdot P \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Z \cdot T \cdot q^2}{P}\right) + \frac{2 \cdot g}{Z \cdot R \cdot T} \cdot P^2 \cdot \frac{dH}{dx}. \qquad (1)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial P^2}{\partial t} = -\frac{4 \cdot \rho_c \cdot Z \cdot R \cdot T \cdot P}{\pi \cdot D_{\text{вн}}^2 \cdot q} \cdot \frac{\partial q^2}{\partial x} + P^2 \cdot R \cdot \frac{\partial (Z \cdot T)^2}{\partial t}, \qquad (2)$$

где x [м] и t [с] – линейная и временная координаты;
P [Па] – давление газа;
q [м3/с] – объемный расход, приведенный к стандартным условиям;
ρ_c [кг/м3] – плотность воздуха при стандартных условиях;
R [Дж/(кг·град)] – газовая постоянная;
T [К] – температура газа;
Z – коэффициент сжимаемости газа;
g [м/с2] – ускорение свободного падения;
Dвн [м] – внутренний диаметр трубопровода;
λ – коэффициент гидравлического сопротивления.

При моделировании процесса течения воздуха были приняты следующие допущения:

1. процесс изотермический, т.е. температура T_{cp} по всей длине трубопровода – постоянна;
2. значения величин Z_{cp} и λ_{cp} – постоянны по всей длине трубопровода;
3. трубопровод горизонтальный $\left(\frac{2 \cdot g}{Z \cdot R \cdot T} \cdot P^2 \cdot \frac{dH}{dx} = 0\right)$;
4. инерционная составляющая мала по сравнению с остальными членами уравнения (1), т.е. процесс не сопровождается появлением ударных волн $\left(2 \cdot P \cdot \rho_c \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = 0\right)$.

Для решения поставленной задачи была разработана динамическая модель с сосредоточенными параметрами. Получены уравнения, непосредственно связывающие режимные параметры (давление, расход воздуха) на концах трубопровода без квантования линейной координаты. Для этого дифференциальные уравнения (1) – (2) были проинтегрированы по линейной координате на отрезке [0, L], и подинтегральные функции заменены интерполяционным многочленом первой степени(метод механических квадратур) [2]

$$q_x^2\left(t\right) \approx q_{\text{ресивера}}^2\left(t\right) + \frac{x}{L}\cdot\left(q_{\text{сильфона}}^2\left(t\right) - q_{\text{ресивера}}^2\left(t\right)\right),$$

$$\frac{q_x^2\left(t\right)}{P_x(t)} \approx \frac{q_{\text{ресивера}}^2\left(t\right)}{P_{\text{ресивера}}(t)} + \frac{\frac{q^2_{\text{сильфона}}(t)}{P_{\text{сильфона}}(t)} - \frac{q^2_{\text{ресивера}}(t)}{P_{\text{ресивера}}(t)}}{\left(P_{\text{сильфона}}\left(t\right) - P_{\text{ресивера}}(t)\right)}\cdot\left(P_x\left(t\right) - P_{\text{ресивера}(t)}\right).$$

Заменив $G_{\text{сильфона}}\left(t\right) = q_{\text{сильфона}}\left(t\right)\cdot\rho_c$, $G_{\text{ресивера}}\left(t\right) = q_{\text{ресивера}}\left(t\right)\cdot\rho_c$, получим следующую систему уравнений сохранения количества движения и неразрывности:

Уравнение сохранения количества движения

$$P_{\text{ресивера}}^2\left(t\right) - P_{\text{сильфона}}^2\left(t\right) =$$

$$= \frac{16\cdot\lambda_{cp}\left(t\right)\cdot R\cdot Z_{cp}\cdot T_{cp}}{\pi^2\cdot D_{\text{вн}}^5}\cdot L\cdot\frac{G_{\text{ресивера}}^2\left(t\right) + G_{\text{сильфона}}^2\left(t\right)}{2} -$$

$$- \frac{32\cdot R\cdot Z_{cp}\cdot T_{cp}}{\pi^2\cdot D_{\text{вн}}^4}\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{array}{c}\frac{1}{2}\cdot\left(P_{\text{сильфона}}\left(t\right) - P_{\text{ресивера}}\left(t\right)\right)\left(\frac{G^2_{\text{сильфона}}(t)}{P_{\text{сильфона}}(t)} + \frac{G^2_{\text{ресивера}}(t)}{P_{\text{ресивера}}(t)}\right) - \\ - \left(G_{\text{сильфона}}^2\left(t\right) - G_{\text{ресивера}}^2\left(t\right)\right)\end{array}\right]. \tag{3}$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{P_{\text{ресивера}}(t) - P_{\text{ресивера}}(t-\tau)}{\tau} =$$

$$= \frac{4 \cdot Z_{cp} \cdot T_{cp} \ \cdot R}{\pi \cdot D_{\text{вн}}^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \frac{G_{\text{сильфона}}^2(t) - G_{\text{ресивера}}^2(t)}{G_{\text{ресивера}}(t)}. \qquad (4)$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (3) – (4) связывает параметры $P_{\text{сильфона}}(t)$, $P_{\text{сильфона}}(t)$, $P_{\text{ресивера}}(t-\tau)$, $G_{\text{ресивера}}(t)$, $G_{\text{сильфона}}(t)$.

Параметры $P_{\text{сильфона}}(t)$, $P_{\text{сильфона}}(t)$, $P_{\text{сильфона}}(t-\tau)$ на момент времени t_j считаются известными.

Расчет параметров

Используется следующий алгоритм решения:

1. Выполняем квантование временной координаты t на дискретные уровни t_j с шагом $\tau = 0{,}01$ с.

2. Задаем краевые и начальные условия:

   — параметры воздуха (давление, масса воздуха, плотность) в ресивере в начальный момент времени: $P_{\text{ресивера}}(t0)$, $m_{\text{ресивера}}(t0)$, $\rho_{\text{ресивера}}(t0)$;

   — параметры воздуха и геометрия в сильфонах (давление, масса воздуха, плотность, удлинение сильфона, длина, объем) в начальный момент времени: $P_{\text{сильфона}}(t0)$, $m_{\text{сильфона}}(t0)$, $\rho_{\text{сильфона}}(t0)$, $X_{\text{сильфона}}(t0)$, $L_{\text{сильфона}}(t0)$, $V_{\text{сильфона}}(t0)$;

   — массовый расход воздуха в начальный момент времени рассчитывается по формуле [3]

$$G_{\text{ресивера}}(t_0) = G_{\text{сильфона}}(t_0) =$$

$$738,4 \cdot D_{\text{вн}}^{\frac{8}{3}} \quad \cdot \rho_c \cdot \frac{T_c}{P_c} \cdot \sqrt{\frac{P_{\text{ресивера}}(t_0)^2 - P_{\text{сильфона}}(t_0)^2}{L \cdot M \cdot T_{cp} \cdot Z_{cp}}} \ ,$$

где M [кг/моль] – молекулярный вес воздуха;

T_c [К] – температура при стандартных условиях;

P_c [Па] – давление при стандартных условиях.

3. Для каждого временного слоя t_j рассчитываем следующие параметры:

— число Рейнольдса по формуле [4]

$$Re\,(t_j) = \frac{4 \cdot [G_{\text{ресивера}}\,(t_{j-1}) + G_{\text{сильфона}}\,(t_{j-1})]}{2 \cdot \mu \cdot \pi \cdot D_{\text{вн}}} \;,$$

где $G_{\text{сильфона}}(t_{j-1})$ и $G_{\text{ресивера}}(t_{j-1})$ – решение системы уравнений (3) – (4) для предыдущего временного слоя; μ [Па·с] – динамическая вязкость;

— коэффициент гидравлического сопротивления по формуле Блазиуса, если режим течения воздуха гидравлически гладкий [1]

$$\lambda_{\text{ср}}\,(t_j) = 0,11 \cdot \left(\frac{68}{Re(t_j)}\right)^{0,25},$$

по формуле Прандля, если режим течения воздуха квадратичный [1]

$$\lambda_{\text{ср}}\,(t_j) = \left(\frac{1}{2 \cdot \log\left(\frac{3,7 \cdot D_{\text{вн}}}{k_{\text{э}}}\right)}\right)^2,$$

где $k_{\text{э}}$ – коэффициент эквивалентной шероховатости трубы;

— удлинение сильфона по формуле:

$$X\,(t_j) = \begin{cases} \frac{F_{\text{эф}} \cdot \left(P_{\text{сильфона}}(t_j) - P_c\right)}{\lambda_{\text{сильфона}}}, & \text{если } X\,(t_j) < X_{max} \\ X_{max}, & \text{если } X\,(t_j) \geq X_{max} \end{cases} \;,$$

где $\lambda_{\text{сильфона}}$ [Н/м] – жесткость сильфона;
X_{max} [м] – максимальное растяжение сильфона;

— объем сильфонов по формуле

$$V_{\text{сильфона}}\left(t_j\right) = F_{\text{эф}} \cdot \left(L_{\text{сильфона}}\left(t_0\right) + X(t_j)\right) \ .$$

4. За время τ расчетная масса воздуха в сильфонах увеличилась на величину $dm_{\text{сильфона}} = G_{\text{сильфона}}(t_{j-1}) \cdot \tau$, а в ресивере – изменилась на $dm_{\text{ресивера}} = (G_{\text{компрессора}} - G_{\text{ресивера}}(t_{j-1})) \cdot \tau$, где производительность компрессора вычисляется по формуле

$$G_{\text{компрессора}} = \begin{cases} Q_{\text{компрессора}} \cdot \rho_c, & \text{если компрессор включен} \\ 0, & \text{если компрессор выключен} \end{cases}$$

5. Для каждого временного слоя рассчитываем давление в ресивере и в сильфонах по формулам

$$P_{\text{ресивера}}\left(t_j\right) = R \cdot T \cdot \frac{m_{\text{ресивера}}(t_j)}{V_{\text{ресивера}}} \ ,$$

$$P_{\text{сильфона}}\left(t_j\right) = R \cdot T \cdot \frac{m_{\text{сильфона}}(t_j)}{V_{\text{сильфона}}(t_j)} \ ,$$

где

$$m_{\text{ресивера}}\left(t_j\right) = m_{\text{ресивера}}\left(t_{j-1}\right) + dm_{\text{ресивера}} \ ,$$

$$m_{\text{сильфона}}\left(t_j\right) = m_{\text{сильфона}}\left(t_{j-1}\right) + dm_{\text{сильфона}} \ .$$

6. Время заполнения сильфоном воздухом рассчитываем по формуле

$$Time = n \cdot \tau,$$

где n – шаг итерации, при котором давление в сильфонах

$$P_{\text{сильфона}}\left(t_n\right) = P_{\text{сильфона номинальное}}.$$

Заключение. *Получена и решена начально-краевая задача для системы нелинейных алгебраических уравнений, описывающих процесс заполнения воздухом сильфонов для клапана*

КЗР1800. Рассчитанное с помощью разработанного алгоритма время заполнения сильфонов воздухом составило 16 секунд.

Литература

1. Сарданашвили С.А. Расчетные методы и алгоритмы (трубопроводный транспорт газа). – М.: ФГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. – 577 с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1959. – 784 с.

3. Силаш А.П. Добыча и транспорт нефти и газа. Часть I. Пер. с анг. – М.; Недра, 1980. – 375 с.

4. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976. – 888 с.

О фредгольмовости некоторых дискретных операторов[3]

А.В. Васильев

(Белгород, НИУ БелГУ; *alexvassel@gmail.com*)

Пусть $K(x,y)$ – переменное ядро Кальдерона-Зигмунда, определенное на $\mathbf{R}^m \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$, $K(x,ty) = t^{-m}K(x,y), \forall x \in \mathbf{R}^m, \forall t > 0$, $\int\limits_{\mathbf{S}^{m-1}} K(x,\theta)d\theta = 0, K(x,\theta)$ дифференцируемо на $\dot{\mathbf{R}}^m \times S^{m-1}$, по которому можно построить дискретный сингулярный оператор

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbf{Z}^m,\ \tilde{y} \neq \tilde{x}} K(\tilde{x}, \tilde{x} - \tilde{y}) u_d(\tilde{y}) h^m, \quad \tilde{x} \in h\mathbf{Z}^m.$$

Обозначения: $\mathbf{Z}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbf{R}^m$, $u_d(\tilde{y})$ – функция дискретного аргумента $\tilde{y} \in h\mathbf{Z}^m, h > 0$, $L_p(h\mathbf{Z}^m) \equiv l_p^h$ – банахово пространство функций дискретного аргумента со стандартной нормой, S^{m-1} – единичная сфера в $\mathbf{R}^m$.

Континуальный оператор выглядит так:

$$(Au)(x) = v.p. \int\limits_{\mathbf{R}^m} K(x, x-y) u(y) dy,$$

[3]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-31371-мол-а.

и при сделанных предположениях на ядро является линейным ограниченным оператором $L_p(\mathbf{R}^m) \mapsto L_p(\mathbf{R}^m), 1 < p < +\infty$ [1]. Кроме того, если определить символ оператора A формулой

$$\sigma(x,\xi) = v.p. \int\limits_{\mathbf{R}^m} K(x,y) e^{-iy\cdot\xi} dy,$$

то необходимым и достаточным условием фредгольмовости такого оператора в пространстве $L_p(\mathbf{R}^m)$ будет

$$\sigma(x,\xi) \neq 0, \ \forall x \in \dot{\mathbf{R}}^m, \ \forall \xi \in S^{m-1}.$$

Наша задача заключается в том, чтобы из информации об операторе A, гарантирующей его фредгольмовость, получить условия, обеспечивающие фредгольмовость оператора A_d, и, коме того, оценить, насколько приемлем оператор A_d для аппроксимации оператора A.

Теорема 1.

$$||A_d u_d||_{l_p^h} \leq c||u_d||_{l_p^h},$$

с постоянной, не зависящей от $h, 1 < p < +\infty$.

Определим символ дискретного оператора A_d формулой

$$\sigma_d(\tilde{x},\xi) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\tilde{y}\in(h\mathbf{Z}^m\cap Q_N)\setminus\{0\}} K(\tilde{x},\tilde{y}) e^{-i\tilde{y}\cdot\xi} h^m,$$

$$\xi \in [-\pi h^{-1}, \pi h^{-1}]^m,$$

$$Q_N = \left\{ \tilde{x} \in h\mathbf{Z}^m : \ |\tilde{x}| \leq N, \ |\tilde{x}| = \max_{1\leq k\leq m} |\tilde{x}_k| \right\}.$$

Теорема 2. *Для фредгольмовости оператора* A_d *в пространстве* $l_p^h, \ 1 < p < +\infty$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sigma_d(\tilde{x},\xi) \neq 0, \ \forall \tilde{x} \in h\mathbf{Z}^m, \ \xi \in [-\pi h^{-1}, \pi h^{-1}]^m.$$

Теорема 3. *Операторы A и A_d одновременно фредгольмовы или нет в пространствах $L_p(\mathbf{R}^m)$ и l_p^h соответственно,* $1 < p < +\infty$, $h > 0$.

Последний результат основан на свойствах символа простейшего дискретного сингулярного оператора [2].

Для описания близости операторов A и A_d определим оператор сужения на решетку $h\mathbf{Z}^m$

$$r_h : \mathbf{R}^m \mapsto h\mathbf{Z}^m,$$

и под мерой близости на функции $u(x)$, определенной на всем пространстве $\mathbf{R}^m$, понимается разность

$$r_h A u - A_d r_h u \equiv N_h u.$$

Конечно, оператор N_h – некомпактный, и трудно ожидать, что $||N_h|| \to 0$, однако, если дополнительно предположить, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α на $\mathbf{R}^m$, то имеет место

Теорема 4.

$$|(N_h u)(\tilde{x})| \leq c_u \cdot h^\alpha \ln(1/h).$$

Литература

1. Mikhlin S. G., Prössdorf S. Singular integral operators. Springer-Verlag. 1986.

2. Vasilyev V. B. Elliptic boundary value problems in non-smooth domains. Operator Theory: Advances and Applications. V. 213. Birkhäuser, Basel. 2011. P. 105-121.

Откуда берутся потенциалы?

В.Б. Васильев

(Липецк, ЛГТУ; Institut für Analysis und Algebra, Technische Universität Braunschweig; *vbv57@inbox.ru, vladimir.b.vasilyev@gmail.com*)

Потенциалы для краевой задачи строятся по следующей схеме [1]. Берется (если это возможно) фундаментальное решение (эллиптического) оператора, записывается "свертка"с фундаментальным решением в роли ядра (для задачи Неймана; если условие Дирихле, – нормальная производная фундаментального решения), изучаются граничные значения этой свертки, и, если повезет, получают эквивалентное уравнение Фредгольма.

Конечно, сказанное справедливо лишь с точки зрения современной математики, физические (и исторические) предпосылки здесь не затрагиваются. Что же касается интегрального представления решения краевой задачи, то, насколько известно автору, оно есть только для шара и полупространства (т.е. там, где имеется явный вид функции Грина!). Формулу же для полупространства Г.И. Эскин [2] получил методом факторизации (интеграл Пуассона для лапласиана). Здесь предлагается нечто аналогичное для конуса методом волновой факторизации [3]. Первые попытки уже сделаны [4,5,6].

Литература

1. Математическая энциклопедия. Т.4. Потенциала теория.

2. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.

3. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010. 2-е изд.

4. Васильев В.Б. О разрешимости уравнений в свертках в многомерном конусе. Итоги науки. Математический форум. Юг России. 2013. (в печати)

5.Vasilyev V.B. On the Dirichlet and Neumann problems in multidimensional cones. Mathematica Bohemica, 2014. (to appear)

6. Vasilyev V.B. Potentials for elliptic boundary value problems in cones. Mathematics, 2014 (to appear)

Решение краевой задачи о перемещениях упругой среды операторным методом

С.С. Веневитина, Т.Н. Стородубцева
(Воронеж, Воронежская государственная лесотехническая академия; *svetyen64@mail.ru*)

Абстрактная схема исследования разрешимости краевых задач для уравнений матфизики была предложена С.Г. Крейном и применена к ряду задач гидродинамики. В данной работе эта схема используется для доказательства существования и единственности решения задачи о перемещениях упругой среды под действием объёмных сил и свободной от обобщенных напряжений на границе $\partial\Omega$.

Линеаризованные уравнения движения однородной упругой среды для стационарной задачи имеют вид

$$-\mu\Delta\bar{u} + (\lambda+\mu)graddiv\bar{u} = \bar{f},$$

где $\bar{u}$ - вектор перемещения, $\bar{f}$ - поле объёмных сил, λ и μ - коэффициенты Ламе (см.напр.[1]).

Уравнения рассматриваются в ограниченной области Ω пространства R^3, обладающей липшицевой границей, состоящей из конечного числа гладких поверхностей.

В задачах теории упругости с операторами обобщённого напряжения вводится квадратичная форма относительно частных производных от функции перемещения (см. [2])

$$E(\bar{u},\bar{u}) = \beta(div\bar{u})^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\alpha\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right),$$

где $\alpha+\beta=\lambda+\mu$.

Квадратичная форма $E(\bar{u},\bar{u})$ неотрицательна при $\mu \geq \alpha > 0$. Причём, $E(\bar{u},\bar{u})$=0 только при $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$ $(i,j=1,2,3)$, то есть когда u_i является константой: $u_i = c_i$. Следовательно, на любом подпространстве V пространства Соболева $\bar{H}^1(\Omega)$, не содержащем константы, форма $\int_\Omega E(\bar{u},\bar{u})d\Omega$ является квадратом нормы.

Рассмотрим гильбертову пару $\left(\bar{H}^1_G(\Omega); \bar{L}^2_G(\Omega)\right)$, где $\bar{L}^2_G(\Omega)$ – подпространство пространства $\bar{L}^2(\Omega)$, состоящее из всех полей из $\bar{L}^2(\Omega)$, ортогональных подпространству постоянных полей G; а $\bar{H}^1_G(\Omega)$ – пересечение $\bar{L}^2_G(\Omega)$ с пространством $\bar{H}^1(\Omega)$.

В пространстве $\bar{H}^1_G(\Omega)$ введем скалярное произведение по формуле

$$(\bar{u}, \bar{v})_{\bar{H}^1_G(\Omega)} = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \beta div\bar{v}\, div\bar{u} \right\} d\Omega.$$

Этому произведению соответствует квадрат нормы

$$\|\bar{u}\|^2_{\bar{H}^1_G(\Omega)} = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \beta div^2\bar{u} \right\} d\Omega$$

Для порождающего оператора A гильбертовой пары $\left(\bar{H}^1_G(\Omega); \bar{L}^2_G(\Omega)\right)$ справедливо тождество

$$(\bar{u}, A\bar{v})_{\bar{L}^2_G(\Omega)} = (\bar{u}, \bar{v})_{\bar{H}^1_G(\Omega)}\,,$$

где $\bar{u} \in \bar{H}^1_G(\Omega)$, $\bar{v} \in D(A)$.

В силу формул для скалярного произведения в пространствах $\bar{L}^2_G(\Omega)$ и $\bar{H}^1_G(\Omega)$ это тождество примет вид

$$\int_\Omega (\bar{u}, A\bar{v})\, d\Omega = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \beta div\bar{v}\, div\bar{u} \right\} d\Omega\,.$$

Применяя формулу Бетти к правой части, получаем

$$\int_\Omega (\bar{u}, A\bar{v})\, d\Omega = -\int_\Omega (\bar{u}, \mu\Delta\bar{v} + (\lambda+\mu)\, grad\, div\bar{v})\, d\Omega +$$

$$+\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\alpha_j\right\}u_j d\sigma \qquad (1)$$

Выберем теперь поле $\bar{u}\in\bar{H}^1_G(\Omega)$ финитным, тогда (1) примет вид

$$\int_\Omega(\bar{u},A\bar{v})\,d\Omega=-\int(\bar{u},\mu\Delta\bar{v}+(\lambda+\mu)\,grad\,div\bar{v})\,d\Omega,$$

или

$$\int_\Omega(\bar{u},A\bar{v}+\mu\Delta\bar{v}+(\lambda+\mu)\,grad\,div\bar{v})\,d\Omega=0$$

Так как поля $\bar{u}$ из $\bar{H}^1_G(\Omega)$ образуют плотное в $\bar{L}^2_G(\Omega)$ множество, то из последнего равенства следует, что

$$A\bar{v}+\mu\Delta\bar{v}+(\lambda+\mu)\,grad\,div\bar{v}=\bar{w}, \qquad (2)$$

где $\bar{w}$ – постоянное поле из G.

Тогда равенство (1) можно записать в виде

$$\int_\Omega(\bar{u},\bar{w})\,d\Omega=\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i+\beta div\bar{v}\alpha_j\right\}u_j d\sigma \qquad (3)$$

Пусть $\bar{\psi}(s)$– произвольное гладкое поле $\bar{\psi}(s)=(\psi_1(s);\psi_2(s);\psi_3(s))$ заданное на границе $\partial\Omega$. По теореме о следах это поле может быть продолжено до гладкого поля $\bar{v}(x)=(v_1(x);v_2(x);v_3(x))$ в области Ω, тогда на $\partial\Omega$ $\bar{v}(s)=\bar{\psi}(s)$. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ – финитные функции с непересекающимися носителями. С помощью умножения их на константы, можно добиться того, что

$$\int_\Omega v_j(x)d\Omega=\int_\Omega\varphi_j(x)d\Omega.$$

Обозначим $\bar{u}(x)=\bar{v}(x)-\bar{\varphi}(x)$, тогда

$$\int_\Omega u_j(x)d\Omega = \int_\Omega \left(v_j(x) - \varphi_j(x)\right)\, d\Omega = 0\,.$$

Очевидно, что $\bar{u}(s) = \bar{\psi}(s)$ на $\partial\Omega$, и $\int_\Omega \sum_{j=1}^3 u_j(x)c_j d\Omega = 0$, то есть $\bar{u} \in \bar{H}^1_G(\Omega)$.

Тогда для построенного $\bar{u}$, из (3) вытекает

$$0 = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left(\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \alpha_i + \beta div\bar{v}\, \alpha_j \right\} \psi_j d\sigma.$$

В силу произвольности ψ_j из этого равенства следует, что

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \beta \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \alpha_i + \beta div\bar{v}\, \alpha_j = 0 \qquad (4)$$

на $\partial\Omega$

Умножим (2) скалярно на $\bar{w}$, тогда

$$(A\bar{v} + \mu\Delta\bar{v} + (\lambda+\mu) grad\, div\bar{v}, \bar{w}) = (\bar{w}, \bar{w}) \qquad (5)$$

или, в силу того, что порождающий оператор A действует в $\bar{L}^2_G(\Omega)$, равенство (5) принимает вид

$$(\mu\Delta\bar{v} + (\lambda+\mu) grad\, div\bar{v}, \bar{w}) = (\bar{w}, \bar{w}) \qquad (6)$$

Воспользуемся формулой Бетти:

$$\int_\Omega (\mu\Delta\bar{v} + (\lambda+\mu) grad\, div\,\bar{v}, \bar{w})\, d\Omega =$$

$$= -\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) + \beta div\,\bar{v}\, div\,\bar{w} \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left(\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \alpha_i + \beta div\,\bar{v}\, \alpha_j \right\} w_j d\sigma.$$

В силу того, что $\bar{w} \in G$ первый интеграл справа обращается в нуль, а второй интеграл равен нулю в силу граничных условий (4). То есть

$$\int_{\Omega} (\mu\Delta\bar{v} + (\lambda+\mu) grad\, div\, \bar{v}, \bar{w})\, d\Omega = 0$$

Тогда из (6) следует, что $\bar{w} = 0$. Окончательно получаем (из (2)):

$$A\bar{v} = -\mu\Delta\bar{v} - (\lambda+\mu) grad\, div\, \bar{v}.$$

Таким образом, оператор A^{-1} дает обобщенное решение второй краевой задачи:

$$-\mu\Delta\,\bar{v} - (\lambda+\mu) grad div\, \bar{v} = \bar{f} \text{ в } \Omega$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \alpha_i + \beta\, div\, \bar{v}\, \alpha_j = 0 \text{ на } \partial\Omega \qquad (7)$$

То есть, имеет место

Теорема *Для всякого поля $\bar{f} \in \bar{L}^2_G(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение задачи (7) о перемещениях упругой среды под действием объемных сил $\bar{f}$ и свободной от обобщенных напряжений на границе $\partial\Omega$.*

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. – М. : Мир, 1975.

2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М. : Физматгиз, 1963.

Краевая задача со смешанными граничными условиями для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области

А.А. Гималтдинова

(Самара, Поволжская государственная социально-гуманитарная академия; *g_alfira@mail.ru*)

К.В. Курман

(Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета; *kseniakurman@yandex.ru*)

Для уравнения

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, изучается следующая краевая **задача:** *найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in \mathrm{C}^1(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \tag{3}$$

$$u_x(x, y)\Big|_{x=1} = u_x(x, y)\Big|_{x=-1} = 0, \quad y \in [-\alpha, \beta], \tag{4}$$

$$u(x, y)\Big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad u(x, y)\Big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{5}$$

где φ *и* ψ *– заданные достаточно гладкие функции,* $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

Многие авторы занимались изучением задач Дирихле или типа Дирихле для уравнений смешанного типа ([1] – [4]). В работе [5] исследована задача Дирихле для уравнения смешанного типа с одной внутренней линией вырождения и методами спектрального анализа установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций.

В данной работе впервые для уравнения (1) с двумя внутренними перпендикулярными линиями изменения типа изучена задача со смешанными граничными условиями (первого и второго рода) в прямоугольной области.

После разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y)$ относительно $X(x)$ получена следующая спектральная задача:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + dX = 0,$$

$$X(0{+}0) = X(0{-}0), \quad X'(0{+}0) = X'(0{-}0), \quad X'(1) = X'(-1) = 0,$$

и ее собственные функции имеют вид: $\quad X_0(x) \equiv 1,$

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, \; x>0, \\ \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, \; x<0, \end{cases}$$

$$X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, \quad x>0, \\ \dfrac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, \quad x<0, \end{cases}$$

где μ_k (собственные значения) удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{th}\mu$, $\mu_0 = 0$, а для положительных корней справедлива асимптотическая формула $\mu_k = \pi/4 + \pi k + O(e^{-2\pi k}), \;\; k \in \mathbb{N}$.

Система $\{X_0(x),\; X_k^{(1)}(x),\; X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна в $L_2[-1,1]$. Построена соответствующая биортогональная система функций:

$$Z_0(x) = \operatorname{sgn} x,$$

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, \; x>0, \\ -\dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, \; x<0, \end{cases}$$

$$Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, \quad x>0, \\ -\dfrac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, \; x<0. \end{cases}$$

Полнота системы $\{Z_0(x),\; Z_k^{(1)}(x),\; Z_k^{(2)}(x)\}$ в $L_2[-1,1]$ доказана аналогично [6].

Единственность решения задачи (2) – (5) доказана на основании полноты биортогональной системы. Ранее такая идея использовалась в работе [7] при доказательстве единственности решения начально-граничной задачи для гиперболических уравнений и в работе [5] для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа.

При доказательстве существования решения задачи (2) – (5) в виде суммы ряда возникла так называемая «проблема малых знаменателей», которая создает трудности при обосновании сходимости построенного ряда в классе функций (2). При определенных ограничениях на параметры α, β доказаны леммы об отделимости малых знаменателей от нуля. Доказано, что при некоторых значениях α и β решение задачи (2) – (5) нельзя построить в виде суммы ряда.

Литература 1. Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. 1957. Т. 112. №3. С. 386–389.

2. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1958. Т. 122. №2. С. 167–170.

3. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinious coefficient // Ann. math. pure and appl. 1963. V. 62. P. 371–377.

4. Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I, II // Докл. РАН. 1993. Т. 332 №6. С. 696–698; Т. 333. №1. С. 16–18.

5. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413.№1. С. 23–26.

6. Ломов И.С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. №3. С. 358–365.

7. Ильин В.А. Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Мат. заметки. 1975. Т.17. Вып. 1. С. 91–101.

Исследование модифицированной модели сердцебиения методом сплайн-коллокации

Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев
(Воронеж, ВГУ; *glushakovatn@gmail.com*)

Данная статья посвящена исследованию модифицированной математической модели сердцебиения, предложенной Зиманом.

Она основана только на качественных характеристиках динамики биологических механизмов. Отдельно выбранные дифференциальные уравнения являются "простыми", имеющими необходимую динамику. На них не влияют никакие дополнительные условия от механизма, где возникла динамика.

Сердце находится в двух фазах: расслабление (диастола) или сокращение (систола). В ответ на электрохимический пусковой механизм каждое волокно мускула реагирует быстро и короткий период времени, затем он быстро расслабляется до первой фазы и так далее.

Эти действия вместе представляют собой качественные характеристики:
1) наличие стабильного равновесия, в которое система возвращается;
2) механизм для вызывания реакции.

Они и формируют основу модели.

Рассмотрим эту математическую модель. Она представляет собой сингулярно возмущенную нелинейную задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x - 1, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Здесь ε - малый положительный параметр, $x(t)$ - относительная длина мышечного волокна, $y(t)$ отражает наличие электрохимического управления.

Линеаризуем данную задачу на начальных условиях, получим

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -2x - y + 2, \\ \dot{y} = x - 1, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Будем искать приближенное решение линеаризованной задачи методом сплайн-коллокации.

Ввиду наличия погранслоя у решения начальной задачи для численного отыскания решения целесообразно выбирать разбиение отрезка $[0,1]$, сгущающееся вблизи начальной точки, по методике Н.С. Бахвалова.

Пусть $a = 1 - \frac{2\varepsilon|\ln\varepsilon|}{\lambda_0}$ и $A = a + \frac{2(1-\varepsilon)}{\lambda_0}$. Построим локально-равномерное разбиение Δ_τ отрезка $[-A,0]$. Положим

$$\tau_i = \frac{-(2m-i)\cdot a}{m} \quad (i = 2m, 2m-1, ..., m),$$

$$\tau_{i-1} = \tau_i - \frac{A-a}{m} \quad (i = m, ..., 1).$$

Определим вспомогательную функцию $g(t)$ соотношением:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{\lambda_0} - a - \frac{2}{\lambda_0}\exp^{\frac{-\lambda_0 t}{2\varepsilon}}, & t \in [0, 1-a], \\ t-1, & t \in (1-a, 1]. \end{cases}$$

Пусть $t_i = g^{-1}(\tau_i)$ $(i = 0,1,...,2m)$, тогда

$$t_i = \begin{cases} -\frac{2\varepsilon}{\lambda_0}\ln\left(\varepsilon - \frac{\lambda_0(\tau_i+a)}{2}\right), & \tau_i \in [-A,-a], \\ \tau_i, & \tau_i \in (-a, 0]. \end{cases}$$

Точки t_i дают интересующее нас разбиение

$$\Delta: \; 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{2m-1} < t_{2m} = 1$$

отрезка $[0,1]$, оно зависит от выбора ε и m.

Определим точки коллокации следующим образом:

$$\xi_i = t_{i+1} \quad (i = 0, ..., m), \quad \xi_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \quad (i = m+1, ..., 2m).$$

Приближенное решение исходной задачи будем искать в конечномерном пространстве непрерывных вектор-функций

$$E = \{u(t) = (u_1(t), u_2(t)) : u_i(t) \in S(\Delta, 2, 1), \; u_1(0) = u_2(0) = 1\}.$$

Коллокационная задача заключается в нахождении такой функции $u(t) \in E$, что

$$[Lu_1 - 2](\xi_i) = 0,$$

$$[Lu_2 + 1](t_i) = 0,$$

где $Lu_1 = \varepsilon \dot{x} + 2x + y$, $Lu_2 = \dot{y} - x$.

Разложим решение коллокационной задачи по базису в этом пространстве:

$$u_1(t) = \sum_{i=-2}^{2m-1} \alpha_i N_{2,j}(t), \quad u_2(t) = \sum_{i=-2}^{2m-1} \beta_i N_{2,j}.$$

Здесь α_i, β_i — коэффициенты системы, которые находятся методом Гаусса.

Абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$e_{\varepsilon,m} = \max_{1\le j\le 2} \max_{0\le i\le 2m} |u^j(t_i) - z^j(t_i)|,$$

где $z = (z^1, z^2)$ $(z^1 = x, z^2 = y)$ — точное решение, $u = (u^1, u^2)$ — приближенное решение исходной задачи.

Логарифмическая погрешность вычисляется по формуле

$$e_{log} = \log_2 \left(e_{\varepsilon,\frac{m}{2}} / e_{\varepsilon,m} \right).$$

Для $\varepsilon = 0,0005$ и $m = 16$ получим $e_{log} = 1,95746$.

Таким образом, предложенный метод имеет второй порядок точности в случае решения линеаризованной задачи на базе параболических сплайнов дефекта 1.

Литература

1. Коняев Ю.А. Асимптотический анализ регулярно и сингулярно возмущенных задач и их приложение в биологии / Ю.А. Коняев, В.И. Безяев, О.Н. Филиппова. - Современная математика. Фундаментальные направления. - 2010. - Том 37. - с. 16-27.

2. Блатов И.А. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем: учебник для вузов / И.А. Блатов, В.В. Стрыгин. - Воронеж: ВГУ, 1997. - 406 с.

Исследование модифицированной модели нервного импульса методом Эйлера

Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев
(Воронеж, ВГУ; *glushakovatn@gmail.com*)

Данная статья посвящена исследованию математической модели Зимана о прохождении нервного импульса неявным методом Эйлера.

Нервный импульс — волна возбуждения, которая распространяется по нервному волокну и служит для передачи информации от периферических рецепторных (чувствительных) окончаний к нервным центрам внутри центральной нервной системы и от нее к исполнительным аппаратам — мышцам и железам. Прохождение нервного импульса сопровождается переходными электрическими процессами, которые можно зарегистрировать как внеклеточными, так и внутриклеточными электродами. Нервные импульсы — неповторяющееся поведение в динамике. Часть нервной клетки, передающая импульс, называется аксоном. Состояние аксона определяется электрохимически управляемым потенциалом между внутренней и внешней частями аксона. В отсутствии возбуждения потенциал аксона остается на уровне покоя — некотором определенном постоянном уровне. Если передается импульс, то потенциал аксона резко меняется, а затем медленно возвращается к потенциалу покоя.

Чтобы получить это медленное возвращение, характерное для прохождения нервного импульса, требуется рассмотреть следующую модифицированную модель:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = -2x - 2y, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = -1, \end{cases}$$

где ε — малый положительный параметр.

Ввиду наличия погранслоя у решения начальной задачи для численного отыскания решения целесообразно выбирать разбиение отрезка $[0, 1]$, сгущающееся вблизи начальной точки, по методике Н.С. Бахвалова.

Пусть $a = 1 - \frac{2\varepsilon|\ln\varepsilon|}{\lambda_0}$ и $A = a + \frac{2(1-\varepsilon)}{\lambda_0}$. Построим локально-равномерное разбиение Δ_τ отрезка $[-A, 0]$. Положим

$$\tau_i = \frac{-(2m-i)\cdot a}{m} \quad (i = 2m, 2m-1, ..., m),$$

$$\tau_{i-1} = \tau_i - \frac{A-a}{m} \quad (i = m, ..., 1).$$

Определим вспомогательную функцию $g(t)$ соотношением:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{\lambda_0} - a - \frac{2}{\lambda_0}\exp^{\frac{-\lambda_0 t}{2\varepsilon}}, & t \in [0, 1-a], \\ t-1, & t \in (1-a, 1]. \end{cases}$$

Пусть $t_i = g^{-1}(\tau_i)$ $(i = 0, 1, ..., 2m)$, тогда

$$t_i = \begin{cases} -\frac{2\varepsilon}{\lambda_0}\ln\left(\varepsilon - \frac{\lambda_0(\tau_i + a)}{2}\right), & \tau_i \in [-A, -a], \\ \tau_i, & \tau_i \in (-a, 0]. \end{cases}$$

Точки t_i дают интересующее нас разбиение

$$\Delta:\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{2m-1} < t_{2m} = 1$$

отрезка $[0, 1]$, оно зависит от выбора ε и m.

Будем искать приближенное решение неявным методом Эйлера. Проинтегрируем левую и правую части уравнений системы:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t \dot{x}(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t(-2x(t) - y(t))dt, \\ \int\limits_0^t \dot{y}(t)dt = \int\limits_0^t(-2x(t) - 2y(t))dt, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} x(t)dt = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t(2x + y)dt, \\ y(t) = -1 - 2\int\limits_0^t(x + y)dt. \end{cases}$$

При $t = t_1$ имеем

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{t_1}(2x+y)dt, \\ y_1 = -1 - 2\int\limits_0^{t_1}(x+y)dt. \end{cases}$$

Применяя к интегралам в правых частях формулу правых прямоугольников, получим

$$\begin{cases} x_1 \approx 1 - \frac{1}{\varepsilon}(2x+y)\cdot(t_1 - t_0), \\ y_1 \approx -1 - 2(x+y)\cdot(t_1 - t_0). \end{cases}$$

Таким образом получаем формулы, определяющие неявный метод Эйлера

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \frac{h_i}{\varepsilon}(2x_{i+1} + y_{i+1}), \\ y_{i+1} = y_i - 2h_i(x_{i+1} + y_{i+1}). \end{cases}$$

Для решения полученных уравнений используется метод Ньютона.

Абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$e_h = \max_{1\le j\le 2}\max_{0\le i\le 2m}|u^j(t_i) - z^j(t_i)|,$$

где $z = (z^1, z^2)$ $(z^1 = x, z^2 = y)$ — точное решение, $u = (u^1, u^2)$ — приближенное решение исходной задачи.

Положим $h = \max\limits_{0\le i\le 2m-1}|t_{i+1} - t_i|$. В результате работы программы при $\varepsilon = 0,1$ и $m = 2$ получим $h = 0,34095$ и $e_h = 0,09464$, а при $m = 16$ имеем $h = 0,08926$ и $e_h = 0,02029$.

Таким образом, численный эксперимент показал, что неявный метод Эйлера имеет первый порядок точности по h.

Литература

1. Коняев Ю.А. Асимптотический анализ регулярно и сингулярно возмущенных задач и их приложение в биологии / Ю.А. Коняев, В.И. Безяев, О.Н. Филиппова. - Современная математика. Фундаментальные направления. - 2010. - Том 37. - с. 16-27.

2. Блатов И.А. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем: учебник для вузов / И.А. Блатов, В.В. Стрыгин. - Воронеж: ВГУ, 1997. - 406 с.

Один класс уравнений с вырожденным оператором при дробной производной по времени

Д.М. Гордиевских
(г. Челябинск, Челябинский государственный университет;
dmitriy_g90@mail.ru)

В работе исследуются разрешающие операторы дробного линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором под знаком производной. При условии относительной p-ограниченности пары операторов в этом уравнении найден вид разрешающих операторов, изучены их свойства. Показано, что траектории решений такого уравнения заполняют некоторое подпространство исходного банахова пространства. Получены необходимые и достаточные условия относительной p-ограниченности пары операторов в терминах семейств операторов, разрешающих вырожденное уравнение дробного порядка. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах задачи Коши для вырожденной конечномерной системы уравнений дробного порядка и начально-краевой задачи для уравнения дробного порядка по времени с многочленами от операторов Лапласа по пространственным переменным.

Классификация вещественных алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности четыре. Задача о линейных векторных полях

Б.В. Горев
(Москва, Московский Государственный Университет;
gorev-bv@mail.ru)

Введение

Задача классификации вещественных алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности два возникла применительно к теории интегрируемых систем на двойственных пространствах к конечномерным алгебрам Ли. К такого рода системам, например, относится система, описывающая движение твердого тела вокруг центра масс в отсутствии внешних полей (эта система записывается на пространстве, двойственном к $so(3)$). Задача была решена А.Ю.Коняевым в работе [1], а также в работе [2].

Так как орбиты коприсоединенного представления - симплектические многообразия - следующей по сложности задачей является вопрос классификации алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности четыре. Доклад посвящен результатам, необходимым для решения задачи в случае орбит размерности четыре.

Ключевой составляющей метода классификации вещесвенных алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности два является решение следующей задачи: на пространстве $\mathbb{R}^n$ задана пара линейных векторных полей, зависимых в каждой точке пространства. Необходимо описать нормальные формы таких векторных полей относительно следующих преобразований: замена координат в окружающем пространстве, переход от заданной пары линейных векторных полей к паре их линейных комбинаций.

Аналогично для классификации вещественных алгебр ли с четырехмерными орбитами необходимо решить следующую задачу: на пространстве $\mathbb{R}^n$ задана четверка линейных векторных полей, которые порождают распределение размерности ≤ 2. Необходимо описать нормальные формы соответствующих векторных полей относительно следующих преобразований: замена координат в окружающем пространстве, переход от исходной четверки к четверке линейных комбинаций векторных полей.

Разрешимость такой задачи, воооще говоря, не очевидна. Поэтому изначально предлагается посмотреть более простую задачу: на трехмерном пространстве задана тройка векторных нолей, которые порождают распределение размерности ≤ 2. Также предполагается, что один из операторов, задающих одно из полей, полупрост.

Основной результат

Изначально считается, что матрица оператора, соответствующего первому векторному полю, приведена к жордановой форме общего положения (оператор полупрост), т.е. матрицы операторов, задающих векторные поля, имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Известно, что векторные поля всюду зависимы, т.е.

$$det \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \end{vmatrix} = 0,$$

в данном случае

$$det \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 & b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \\ c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 & c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Считается, что $\lambda_1 \neq 0$, поэтому можно положить $\lambda_1 = 1$

С помощью элементарных преобразований над строками матрица из уравнения (1) приводится к следующему виду:

$$det \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 \\ bx_2 & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 & b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \\ cx_3 & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 & c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

где коэффициенты $b_{ij}, c_{ij}, i \geq 2$, вообще говоря, могут измениться.

Теорема 1 *Пусть в $\mathbb{R}^3$ даны три линейных векторных поля, матрица одно из которых приведена к жордановой форме общего положения, и известно, что они зависимы. Тогда в указанных обозначениях матрица из равенства* (2) *имеет один из следующих видов:*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 \\ 0 & Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 & \alpha Ax_1 + \alpha Bx_2 + \alpha Cx_3 \\ 0 & Dx_1 + Ex_2 + Fx_3 & \alpha Dx_1 + \alpha Ex_2 + \alpha Fx_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & Ax_1+Bx_2+Cx_3 & \alpha Ax_1+\alpha Bx_2+\alpha Cx_3 \\ x_3 & Dx_1+Ex_2+Fx_3 & \alpha Dx_1+\alpha Ex_2+\alpha Fx_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 \\ 0 & Ax_1+Bx_2+Cx_3 & Dx_1+Ex_2+Fx_3 \\ 0 & \alpha Ax_1+\alpha Bx_2+\alpha Cx_3 & \alpha Dx_1+\alpha Ex_2+\alpha Fx_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & Ax_1+Bx_2+Cx_3 & Dx_1+Ex_2+Fx_3 \\ x_3 & \alpha Ax_1+\alpha Bx_2+\alpha Cx_3 & \alpha Dx_1+\alpha Ex_2+\alpha Fx_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & -\alpha ABx_2 & -\beta CDx_3 \\ x_2 & \alpha x_1+\alpha(A+B)x_2 & \frac{\beta D}{A}x_1+\beta Dx_2+\frac{\beta CD}{A}x_3 \\ x_3 & \frac{\alpha A}{D}x_1+\frac{\alpha AB}{D}x_2+\alpha Ax_3 & \beta x_1+\beta(C+D)x_3 \end{pmatrix},$$

где $A, B, C, D, E, F, \alpha, \beta$ могут принимать любые значения, а λ_2 и λ_3 не равны 0.

Если к полученным матрицам применить преобразования, обратные к тем, которые использовались при переходе от матрицы из (1) к матрице из (2), в соответствующем порядке, то можно получить зависимости коэффициентов исходных векторных полей от полученных 10 параметров. Эти зависимости суть рациональные функции от параметров.

Литература

1. Коняев А.Ю. *Классификация вещественных алгебр Ли с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения.* 2013. 2. D. Arnal, M. Cahen, and J. Ludwig, *Lie groups whose coadjoint orbits are dimension smaller or equal to two.*, Lett. Math. Phys. 33 (1995), no. 2, 183-186 3. Фоменко А.Т., Болсинов А.В. *Интегрируемые гамильтоновы системы.* Издательский дом "Удмуртский университет", 1999. 4. Фоменко А.Т. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.* Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.

Об устойчивости решений в модели Хоффа в пространстве гладких дифференциальных k-форм

Д.И. Горобец, Д.Е. Шафранов
(Челябинск, ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет (НИУ); *shafranovde@susu.ac.ru*)

Уравнение Хоффа

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3$$

моделирует процесс выпучивания двутавровой балки под нагрузкой и при высокой температуре [1]. Параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ характеризуют материал балки, а $\lambda \in \mathbb{R}$ – нагрузку на нее.

В работе [2] рассмотрено уравнение Хоффа как модель упругой оболочки. Решение нашли в пространствах дифференциальных k-форм $\mathbb{H}^k$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, определенных на n-мерном гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края Ω_n. Здесь $\Delta = d\delta + \delta d$ — оператор Лапласа – Бельтрами, где d – оператор дифференцирования k-форм, $\delta = \pm * d*$ сопряженный к d, а $*$ – оператор Ходжа [3].

Положим $\mathbb{H}^k_d = d\delta[\mathbb{H}^k]$, $\mathbb{H}^k_\delta = \delta d[\mathbb{H}^k]$, $\mathbb{H}^k_\Delta = \ker \Delta, k = 0, 1, ...n$. Формулой

$$(\xi, \eta)_0 = \int\limits_{\Omega_n} \xi \wedge *\eta, \quad \xi, \eta \in \mathbb{H}^k,$$

определим скалярное произведение на $\mathbb{H}^k$, $k = 0, 1, \dots, n$, а соответствующую норму обозначим через $\|\cdot\|_0$. Пополнение линеалов $\mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k_d$, $\mathbb{H}^k_\delta$, $\mathbb{H}^k_\Delta$ по норме $\|\cdot\|_0$ обозначим соответственно через $\mathfrak{H}^k_0$, $\mathfrak{H}^k_{d0}$, $\mathfrak{H}^k_{\delta 0}$, $\mathfrak{H}^k_{\Delta 0}$.

Теорема 1. (Ходжа – Кодаиры) [3] Для любого $k = 0, 1, \dots, n$ существует расщепление пространства $\mathfrak{H}^k_0$ в прямую ортогональную сумму

$$\mathfrak{H}^k_0 = \mathfrak{H}^k_{d0} \oplus \mathfrak{H}^k_{\delta 0} \oplus \mathfrak{H}^k_{\Delta 0},$$

причем пространство $\mathfrak{H}^k_{\Delta 0}$ конечномерно.

Замечание 1. Оператор Лапласа – Бельтрами взятый на 0-формах (функциях) отличается от обычного оператора Лапласа на знак.

Рассмотрим линейную модель Хоффа

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha u. \tag{1}$$

Используя теорию Ходжа-Кодаиры [3] и теорию Свиридюка об относительно ограниченных операторах [4] для уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu \tag{2}$$

установлено существование фазового пространства $\mathfrak{P}$, состоящего из всех начальных значений задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для которых существует единственное решение.

Для такой модели Хоффа мы исследовали устойчивость нулевого решения по аналогии с [5] и установили, что справедлива

Теорема 2. При любом $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и любом $\lambda \in (0, \lambda_1)$ (здесь λ_1 – первое ненулевое собственное значение оператора Лапласа – Бельтрами) нулевое решение задачи (1), (3) асимптотически устойчиво.

Литература

1. Hoff N.J. Creep buckling. – Aeron. 1956. Vol.7, №1. P. 1–20.

2. Шафранов Д.Е., Шведчикова А.И. Уравнение Хоффа как модель упругой оболочки. – Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 18(277), Вып. 12. С. 77–81.

3. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. — М.: Мир, 1987. 304 с.

4. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo, 2003. 220 p.

5. Загребина С.А., Пивоварова П.О. Устойчивость линейных уравнений Хоффа на графе . – Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2010. № 16(192), Вып. 5. С.11–16.

Сильно вырожденная система уравнений Осколкова

П.Н. Давыдов, В.Е. Фёдоров
(г. Челябинск, Челябинский государственный университет;
davydov@csu.ru, kar@csu.ru)

Рассмотрим начально-краевую задачу для моделирующей в линейном приближении динамику вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта линеаризованной в окрестности решения $(v, r) = (0, f)$ системы уравнений Осколкова [1]

$$(1 - \chi\Delta)v_t = \nu\Delta v - (v \cdot \nabla)v - r + f(t, x), \quad (x, t) \in \Omega \times J, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times J, \quad (2)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times J, \quad (3)$$

$$(1 - \chi\Delta)(v(x, 0) - v_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, $\chi, \nu \in \mathbb{R}$, J — интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны.

Редуцируем систему (1)–(4) к уравнению

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + F(t), \ t \in J, \quad (5)$$

где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линейный и ограниченный, коротко $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линейный и замкнутый с областью определения D_M, плотной в $\mathfrak{U}$, коротко $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $F : J \to \mathfrak{F}$.

Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\}$. Согласно [**?**, с. 89] оператор M будем называть (L, σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Теорема 1 [2 теорема 4.1.1]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда* (i) *операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R}(\mu L - M)^{-1}Ld\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R}L(\mu L - M)^{-1}d\mu,\ R > a,$$

являются проекторами на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно;

(ii) *имеет место действие операторов* $L_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $M_k : D_M \cap \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k, k = 0,1$, *где* $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}Q$, $L_k = L|_{\mathfrak{U}^k}$, $M_k = M|_{D_{M_k}}$, $D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(iv) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$.

Обозначим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *(L,p)-ограниченным*, если он (L,σ)-ограничен, а оператор H нильпотентен степени p.

Для уравнения (5) с (L,p)-ограниченным оператором M рассмотрим обобщенную задачу Шоуолтера

$$Pu(0) = u_0 \in \mathfrak{U}^1. \tag{6}$$

Теорема 2 [2]. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, $F \in C(J;\mathfrak{F})$, $(I - Q)F \in C^{p+1}(J;\mathfrak{F})$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ задача* (5), (6) *имеет единственное решение $u \in C^1(J;\mathfrak{U}) \cap C(J;D_M)$.*

Для того чтобы свести систему уравнений (1)-(4) к (5) обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla\cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора $A = \Sigma\Delta$, продолженного до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, которая, как известно, образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$ (см. по этому поводу [3]).

Учитывая уравнение несжимаемости (2), положим $\mathfrak{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathfrak{F} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$. Следовательно, элемент $u \in \mathfrak{U}$ имеет вид $u = (v, r)$, а $f \in \mathfrak{F}$ — вид $f = (\Sigma f, \Pi f)$. Тогда формулами

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi \Pi \Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta & -I \end{pmatrix} \tag{7}$$

определяются операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Теорема 3. *Пусть $\chi, \nu \neq 0$, $\chi^{-1} \in \sigma(A)$, операторы L и M заданы формулами (7). Тогда оператор M $(L,1)$-ограничен, проекторы имеют вид*

$$\begin{gathered} P = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\lambda_k \neq \chi^{-1}} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & \mathbb{O} \\ \Pi \Delta \sum\limits_{\lambda_k \neq \chi^{-1}} \frac{\nu \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{1 - \chi \lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \\ Q = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\lambda_k \neq \chi^{-1}} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & \mathbb{O} \\ -\chi \Pi \Delta \sum\limits_{\lambda_k \neq \chi^{-1}} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{1 - \chi \lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, ядро $\mathfrak{U}^0$ разрешающей группы операторов системы (1)–(4) при $\chi^{-1} \in \sigma(A)$ оказывается шире, чем в случае $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$. Это не позволяет получить результат, аналогичный теореме 7 из работы [4] о разрешимости начально-краевой задачи для обобщенной гидродинамической системы, включающей в себя нелинейное уравнение Осколкова, поскольку для использования теоремы 3 из [4] нужно, чтобы нелинейный оператор в полулинейном уравнении (5) ($F = F(t, u)$) не зависел не только от r, как в [4], но и от проекций вектора скорости v на собственные функции φ_k, соответствующие собственному значению χ^{-1}.

Для линейного же случая из теорем 2 и 3 сразу получим условия разрешимости задачи (1)–(4), поскольку условие (4) в данной ситуации эквивалентно условию Шоуолтера.

Теорема 4. *Пусть $\chi, \nu \neq 0$, $\chi^{-1} \in \sigma(A)$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $f \in C^2(J; \mathbb{H}_\pi)$. Тогда существует единственное решение $v \in C^1(J; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1(J; \mathbb{H}_\pi)$ задачи (1)–(4).*

Литература 1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей

Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С 126–164. 2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. 216+vii p. 3. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. 204 с. 4. Фёдоров В.Е., Давыдов П.Н. Полулинейные вырожденные эволюционные уравнения и нелинейные системы гидродинамического типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 267–278.

Об инвариантных подпространствах неквазианалитических операторов в вещественном банаховом пространстве

Е.Е. Дикарев, Д.М. Поляков
(Воронеж, Воронежский государственный университет;
heiligenkreuz@gmail.com, DmitryPolyakow@mail.ru)

Пусть X — вещественное банахово пространство и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Если $A \in \operatorname{End} X$, то спектр оператора A может быть пустым множеством. Тем самым, возникает проблема построения по спектру инвариантных подпространств для операторов, действующих в вещественных банаховых пространствах.

В статье [1] осуществлялась комплексификация банахова пространства X, т. е. рассматривалось банахово пространство $\mathbf{X}$, состоящее из векторов вида $x_1 + \mathrm{i}x_2$, где $x_1, x_2 \in X$. Оператор A распространялся на $\mathbf{X}$ до оператора $\mathbf{A} \in \operatorname{End} \mathbf{X}$ следующей формулой: $\mathbf{A}(x_1 + \mathrm{i}x_2) = Ax_1 + \mathrm{i}Ax_2$, $x_1, x_2 \in X$. Рассматривалось отображение $\mathbf{J}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ вида $\mathbf{J}(x_1 + \mathrm{i}x_2) = x_1 - \mathrm{i}x_2$, $x_1, x_2 \in X$.

Было установлено, что спектр $\sigma(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A}$, называемый *комплексным спектром* оператора A и обозначаемый через $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$, является симметричным относительно вещественной оси. Кроме того, доказано, что подпространство $\mathbf{F} \subset \mathbf{X}$, инвариантное относительно оператора $\mathbf{A}$, является комплексификацией подпространства $F \subset X$, инвариантным относительно A, тогда и только тогда, когда $\mathbf{JF} = \mathbf{F}$.

Результаты из [1] позволяют установить наличие инвариантных подпространств для оператора $T \in \operatorname{End} X$, удовлетворяющего условию (*неквазианалитичности*) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2} < \infty$. А именно, имеет место

Теорема 1. *Если комплексный спектр $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ оператора T содержит более двух точек, то оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Следствие (см. [2]). *Пусть $T \in \operatorname{End} X$, где $\dim X > 2$, — обратимый оператор, для которого $\|T^n\| \leqslant c(1+|n|)^q$, $n \in \mathbb{Z}$, для некоторых $c \geqslant 1$, $q \geqslant 0$. Тогда оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Пусть $T \in \operatorname{End} X$ — сильно непрерывная группа операторов, удовлетворяющих условию $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2}\, \mathrm{d}t < \infty$, с генератором $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$. Тогда имеет место

Теорема 2.*Если комплексный спектр $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$ содержит более двух точек, то оператор A имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Литература

1. Баскаков А. Г., Загорский А. С. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах – Матем. заметки. 81:1 (2007), С. 17-31.

2. Сторожук К. В. Симметричные инвариантные подпространства у комплексификаций линейных операторов – Матем. заметки. 91:4 (2012), С. 938-940.

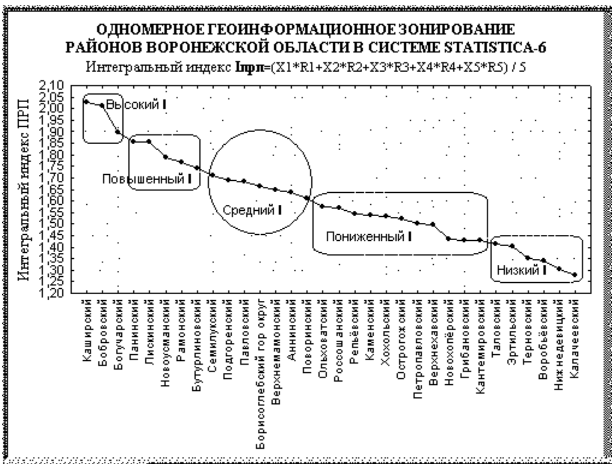
Региональные задачи об одномерном геоинформационном зонирование объектов на "Учебной практике"студентов

В.Н. Донцов, Б.М. Суворов

(Компетентностный подход)

(Воронеж, Воронежский государственный университет; *don@math.vsu.ru*)

Известен продуктивный опыт воронежских геоэкологов в компьютерном тематическом картографировании с помощью лицензионной программы MapInfo-9. Пространственно - временные факты и закономерности в структуре окружающей среды могут быть успешно выявлены аналитически с помощью лицензионного ППП STATISTICA-6 for Windows, приобретённого математическим факультетом ВГУ для педагогических целей междисциплинарного обучения студентов профессиональным компетенциям математического и компьютерного моделирования. Приведём методический пример. При дидактическом проектировании прикладных КИМ-ов по дисциплине летняя «Учебная практика» для студентов формулируется методологически типовая региональная задача об одномерном зонировании муниципальных районов и городских округов Воронежской области (n=32) по такому классифицирующему признаку, как интегральная оценка их природно – ресурсного потенциала. Реальные эмпирические данные опубликованы в работе [1, с.12-15]. Математическое решение осуществляется студентами методами дескриптивной статистики в модуле Basic Statistics/Tables компьютерной системы STATISTICA. Результаты одномерного моделирования структуры административных районов Воронежской области по интегративному индексу их природно – ресурсного потенциала ($I_{\text{ПРП}}$) практически совпали с результатами компьютерного картографирования, полученными геоэкологами в системе MapInfo-9.



1. Районы (их три) с высоким уровнем природно - ресурсного потенциала ($1,8776 \leq I_{\text{ПРП}} \leq 2,028$): Каширский (2,028), Бобровский (2,014), Богучарский (1,896).

2. Районы (их пять) с повышенным уровнем природно - ресурсного потенциала ($1,7272 \leq I_{\text{ПРП}} < 1,8776$): Панинский, Лискинский, Новоусманский, Рамонский, Бутурлиновский.

3. Районы (их семь) со средним уровнем природно - ресурсного потенциала ($1,5768 \leq I_{\text{ПРП}} < 1,7272$): Семилукский (1,712), Подгоренский (1,688), Павловский (1,684), Борисоглебский городской округ (1,664), Верхнемамонский (1,648), Поворинский (1,610).

4. Районы (их одиннадцать) с пониженным уровнем природно - ресурсного потенциала ($1,4264 \leq I_{\text{ПРП}} < 1,5768$): Ольховатский (1,574), Россошанский (1,572), Репьёвский (1,542), Каменский (1,536), Хохольский (1,532), Острогожский (1,522), Петропавловский (1,502), Верхнехавский (1,498), Новохопёрский (1,434), Грибановский (1,428), Кантемировский (1,428).

5. Районы (их шесть) с низким уровнем природно - ресурсного потенциала ($1,2760 \leq I_{\text{ПРП}} < 1,4264$): Таловский (1,416), Эртильский (1,404), Терновский (1,350), Воробьёвский (1,340), Нижнедевицкий (1, 306), Калачеевский (1,276).

Аналогичные междисциплинарные КИМ-ы с реальным региональным геоэкологическим содержанием могут быть сконструированы лектором для целей дифференцированного и индивидуального обучения в период «Учебной практики» по таким медико – экологическим параметрам, как: показатели качества атмосферы, водопроводной и питьевой воды, почвы, индекс медико –демографического риска; индекс общей заболеваемости населения; кадровые ресурсы здравоохранения (обеспеченность врачами, средним медицинским персоналом) и др.

Методологически и дидактически перспективным является межпредметное обучение студентов приложениям многомерных методов классификации и структурирования реальных объектов на базе компьютерной системы STATISTICA [2, с.176-183].

Литература

1. Медико-экологический атлас Воронежской области / С.А. Куролап, Н.П. Мамчик, О.В. Клепиков [и др.] – Воронеж : Истоки, 2010. – 167 с.

2. Некоторые вопросы приложений математической статистики к анализу медицинских данных / В.И.Гаврилов, О.А. Родцевич, В.Н. Донцов // Обеспечение и контроль качества медицинской помощи / Под ред. Е.В. Мезенцева, Б.Б. Кравец. – Воронеж, 2007. – С.176 – 183.

3. Применение методов математической статистики в онкологических исследованиях / В.И.Гаврилов, В.Н. Донцов, О.А. Родцевич // Врач – аспирант : научно - практический журнал / Гл. ред. И.Э. Есауленко.– 2008. – Вып. 1 (**??**). – С.56-62.

Разностные операторы и матрицы второго порядка

А.Ю. Дуплищева

(Воронеж, Воронежский государственный университет;
dupl_ ayu@mail.ru)

Пусть X - банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейных операторов, $A, B_k \in EndX,\ k = 1, 2$.

Рассмотрим операторы $\mathcal{A} \in EndX$ и ассоциированный с ним $\mathbb{A} \in End(X \times X)$ соответственно вида

$$\mathcal{A} = A^2 + B_1A + B_2, \tag{1}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для рассматриваемых операторов получен явный вид проекторов на ядро и образ, исследованы свойства их одновременной обратимости.

Литература 1. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж.: изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

Об одной модели фильтрации

Н.С. Ерыгина

(Белгород, Белгородский государственный национальный исследовательский университет; *erygina n@bsu.edu.ru*)

Исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема Ω^0 в твердый пористый грунт Ω. Пусть $S^0 = \partial\Omega\cap\partial\Omega^0$, $Q = \Omega^0\cup\, S\cup\Omega$. Вектор перемещения среды $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$ и давление среды $p(\boldsymbol{x},t)$ при $t > 0$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в области Q

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0, \tag{1}$$

$$\tau_0\varrho^\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\big(\zeta\mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P}\big) + \tilde{\varrho}^\varepsilon\boldsymbol{e}, \tag{2}$$

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I},$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I},$$

где система (1) — (2) понимается в смысле теории распределений. Система дополняется следующими краевыми и начальными условиями:

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}\in S^1\subset\partial Q, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x}\in S^2 = S\backslash S^1, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x}\in Q. \tag{5}$$

Здесь $\zeta = \zeta(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция области Ω^0, $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ — характеристическая функция порового пространства Ω^ε_f и $\chi(\boldsymbol{y})$ — 1–периодическая функция, определяющая структуру порового пространства.

Пусть выполнены условия, сформулированные в [1] и справедлива модель (6) — (14), рассмотренная в работе [2]

$$\boldsymbol{w}^{(f)} = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}\cdot(-\nabla\pi_f + t\varrho_f\boldsymbol{e}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega^\varepsilon_f, \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_1^{(s)} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{7}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{w}^{(f)} + (1-m)\boldsymbol{w}_s) = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{8}$$

$$\mathbb{P}_1^{(s)} = \lambda_0 \mathfrak{N}_1^s : \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) - p_f\, \mathbb{I}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_1^{(s)}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = - \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} p(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{w}_s = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in \; S^2 \tag{10}$$

$$p(\boldsymbol{x}, t) = p_0(t), \;\; \boldsymbol{x} \in S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega_0} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{w}^{(f)} \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in \; S^2 \tag{12}$$

$$\mathbb{P}_1^{(s)}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0) = -p_0(t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0), \;\; \boldsymbol{x} \in S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}, \tag{13}$$

$$\pi_f(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^t p_0(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau, \; \boldsymbol{x} \in S^0 \cup S_1^1. \tag{14}$$

Теорема. Пусть $\boldsymbol{w}_s^{(k)}$, $\boldsymbol{w}^{(f,k)}$, π_f^k — решение обобщенной модели
(6) — (14) при $\lambda_0 = k$. Тогда предельные функции $\boldsymbol{w}_s = \lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{w}_s^{(k)}$, $\pi_f = \lim\limits_{k \to \infty} \pi_f^{(k)}$, $\boldsymbol{w}^{(f)} = \lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{w}_s^{(f,k)}$ при $t > 0$ удовлетворяют следующей начально-краевой задаче

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^{(f)} = 0, \; \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{w}^{(f)} = \frac{1}{\mu_1} \mathbb{B}(-\nabla \pi_f + \varrho_f \boldsymbol{e}), \; \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{w}^{(f)}(\boldsymbol{x}^0, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in \; S^2 \tag{17}$$

$\mathbb{B}$ — симметричная положительно определенная матрица.

Литература

1. Ерыгина Н.С. «Упругий режим фильтрации жидкости из водоема в грунт» , материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» — Белгород, 26 — 31 мая, 2013г., С. 74 — 75.

2. Ерыгина Н.С. «О фильтрации жидкости из водоема в пороупругий грунт» , материалы Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» — Воронеж, 10 — 16 сентября, 2013г., С. 99 — 101.

Анализ диссипативности одного класса дифференциальных систем

А.В. Екимов
(Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет; *alex.ekimov@mail.ru*)

Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f(t, x)$ вектор-функция определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $D = \{(t, x), t \geq 0, x \in R^n\}$.

Определение. *Систему (1) будем называть диссипативной, если существует число $R > 0$ такое, что для любого $H > 0$ и любого $||x_0|| < H$ можно указать число $T = T(t_0, x_0) > 0$, для которого $||x(t, t_0, x_0)|| < R$ при $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0 + T$. В случае, когда T может быть выбрано независимо от t_0, систему называют равномерно диссипативной относительно начального момента t_0.*

В работе [1] указан следующий критерий равномерной диссипативности системы (1).

Теорема 1. (Йосидзава). *Пусть во внешности некоторого цилиндра $Z = \{(t, x), t \geq 0, ||x|| \geq \rho\}$ для системы существует функция Ляпунова $v(t, x)$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

1) Существуют непрерывные, положительные, монотонно возрастающие при $r \geq 0$ функции $a(r)$ и $b(r)$ такие, что

$$b(||x||) \leq v(t, x) \leq a(||x||), \quad (t, x) \in Z. \tag{2}$$

2) Существуyt непрерывная, положительная при $r \geq 0$ функция $c(r)$ такая, что

$$\dot{v}(t,x)\Big|_{(1)} \leq -c(||x||), \quad (t,x) \in Z.$$

Тогда система (1) равномерно диссипативна относительно начального момента t_0.

Перейдем к рассмотрению следующего класса нелинейных систем

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x), \tag{3}$$

где вектор-функция $f(t,x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области D, а также имеет в этой области непрерывные и ограниченные частные производные по x. Вектор-функция $g(t,x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области D.

Определение. *Систему (1) будем называть экспоненциально устойчивой, если для любого ее решения $x(t,t_0,x_0)$ имеет место оценка*

$$||x(t,t_0,x_0)|| \leq \alpha||x_0||e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \alpha,\beta > 0.$$

Теорема 2. *Для того, чтобы система (3) была равномерно диссипативной относительно t_0, достаточно, чтобы*

1) Система (1) была экспоненциально устойчивой;

2) $||g(t,x)|| \leq p||x||^{\sigma} + q$ где p, q-неотрицательные константы, $0 \leq \sigma \leq 1$. При $\sigma = 1$ константа p должна быть достаточно малой.

Доказательство. В работе [2] доказано, что из экспоненциальной устойчивости системы (1) и условий, наложенных на $f(t,x)$, следует существование функции Ляпунова $v(t,x)$, удовлетворяющей следующим оценкам:

$$c_1||x||^2 \leq v(t,x) \leq c_2||x||^2, \quad c_1,c_2 > 0,$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right| \leq c_3||x||, \quad c_3 > 0,$$

$$\dot{v}(t,x)\big|_{(1)} \le w(t,x) \le -c_4||x||^2, \quad c_4 > 0.$$

Функция $v(t,x)$, вообще говоря, не является квадратичной формой, хотя и удовлетворяет оценкам, характерным для квадратичных форм. Очевидно, что $v(t,x)$ удовлетворяет условию (2) теоремы 1. Продифференцируем ее в силу системы (3).

$$\dot{v}(t,x)\big|_{(3)} = w(t,x) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}, g(t,x)\right).$$

Перейдем к оценкам с учетом соответствующих оценок для $v(t,x)$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $g(t,x)$.

$$\begin{gathered}\dot{v}(t,x)\big|_{(3)} \le -c_4||x||^2 + c_3||x||\left(p||x||^\sigma + q\right) = \\ = ||x||\left(-c_4||x|| + c_3p||x||^\sigma + c_3q\right).\end{gathered}$$

Положим $\varphi(r) = -c_4r + c_2pr^\sigma + c_2q$. При $0 \le \sigma < 1$ существует такое $r* > 0$, что при $r > r*$ $\varphi(r) < 0$, причем $\phi(r) \to -\infty$ при $r \to +\infty$. Таким образом, при $||x|| > r*$ выполнены все условия теоремы Йосидзава, т.е. система (3) является равномерно диссипативной относительно t_0. При $\sigma = 1$ имеем $\varphi(r) = (c_4 + c_3p)r + c_3q$. При $p < \frac{c_4}{c_3}$ получим аналогичный результат. Теорема доказана.

Следствие. *Результат теоремы 2 остается в силе, если второе условие заменить следующим:*

$$||g(t,x)|| \le \omega(||x||)$$

где $\omega(r)$ - непрерывная, положительная при $r \ge 0$ функция, для которой

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\omega(r)}{r} = \gamma, \quad 0 \le \gamma < \frac{c_4}{c_3}$$

Предположим, что $f(t,x)$– однородная вектор-функция порядка $\mu = p/q$ по переменным x, где μ- рациональное число с нечетным знаменателем, $\mu > 1$. Считаем, что для решений $x(t,t_0,x_0)$ невозмущенной системы (1) имеет место оценка

$$||x(t,t_0,x_0)|| \le \left(\alpha||x_0||^{\mu-1} + \beta(t-t_0)\right)^{\frac{1}{\mu-1}}, \quad \alpha,\beta > 0.$$

Теорема 3. *Для равномерной относительно t_0 диссипативности системы (3) достаточно, чтобы были справедливы неравенства*

$$||g(t,x)|| \le p||x||^{\sigma} + q, \quad p, q \ge 0, 0 \le \sigma \le \mu,$$

причем при $\sigma = \mu$ константа p должна быть достаточно малой.

Доказательство. В работе [2] доказано, что для невозмущенной однородной системы существуют положительно-определенные функции $v(t,x)$ и $w(t,x)$, для которых справедливы соотношения:

$$\dot{v}(t,x)\big|_{(3)} = -w(t,x),$$

$$a_1||x||^m \le v(t,x) \le a_2||x||^m, \quad a_1, a_2 > 0,$$

$$b_1||x||^{m+\mu-1} \le w(t,x) \le b_2||x||^{m+\mu-1}, \quad b_1, b_2 > 0,$$

$$||\partial v/\partial x|| \le c||x||^{m-1} \quad c > 0, m > 0.$$

В работе [3] аналогичный результат получен для случая автономной невозмущенной системы.

Продифференцируем $v(t,x)$ в силу системы (3)

$$\dot{v}(t,x)\big|_{(3)} = -w(t,x) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}, g(t,x)\right).$$

Переходя к оценкам получим

$$\dot{v}(t,x)\big|_{(3)} \le -b_1||x||^{m+\mu-1} + c||x||^{m-1}\left(p||x||^{\sigma} + q\right) =$$

$$= ||x||^{m-1}\left(-b_1||x||^{\mu} + cp||x||^{\sigma} + cq\right). > 0,$$

Рассуждая дальше аналогично теореме 2, убедимся в справедливости теоремы 3. Теорема доказана.

Следствие. *Результат теоремы 3 остается в силе, если второе условие заменить следующим:*

$$||g(t,x)|| \le \omega(||x||),$$

где $\omega(r)$ *- непрерывная, положительная при* $r \geq 0$ *функция, для которой*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\omega(r)}{r^{\mu}}=\gamma,\quad 0\leq\gamma<\frac{b_1}{c}.$$

Литература

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М., Наука, 1967.

2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. - М.: ГИФМЛ, 1959.

3. Зубов В.И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984.

Асимптотика решения сингулярно возмущённого дифференциально-операторного уравнения в критическом случае с малой нелинейностью

А.В. Заборский, А.В. Нестеров
(Обнинск, Москва, ИАТЭ НИЯУ МИФИ, ГБОУ ВПО МГПУ;
alexander.zaborskiy@mail.ru, andrenesterov@yandex.ru)

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой было построено формальное асимптотическое разложение (далее ФАР) по малому параметру решения следующей начальной задачи:

$$\epsilon^2(U(x,t,p)_t+D(p)U(x,t,p)_x)=L_pU(x,t,p);|x|<\infty,t>0,\quad (1)$$

$$U(x,0,p)=\omega(x/\epsilon,p),\quad (2)$$

где L_p - линейный оператор, действующий по переменной p в соотвествующем пространстве, имеющий однократное нулевое собственное значение.

ФАР решения задачи (1), (2) в [1] было найдено в виде суммы функции всплеска S, пограничной функции P и остаточного члена R:

$$U(x,t,p)=S(\zeta,t,p)+P(\xi,\tau,p)+R=\sum_{i=0}^{N}\epsilon^i(s_i(\zeta,t,p)+p_i(\xi,\tau,p))+R,\quad (3)$$

где переменные ζ, ξ, τ описаны ниже и в [1]. В [1] также было отмечено, что, хотя уравнение (1) имеет гиперболическую дифференциальную часть, некоторые члены асимптотики описываются параболическими уравнениями.

В данной работе задача (1), (2) обобщена на нелинейный случай добавлением малого слагаемого к правой части уравнения:

$$\begin{gathered}\epsilon^2(U(x,t,p)_t + D(p)U(x,t,p)_x) = L_pU(x,t,p) + \epsilon^2 F(U);\\ |x| < \infty, t > 0.\end{gathered} \tag{4}$$

К уравнению (4) поставим начальные условия (2). Пусть функция $F(U)$ - бесконечно дифференцируема. На задачу (4), (2) наложен тот же набор необходимых условий, что и в [1].

Цель данной работы - найти ФАР решения задачи (4), (2), схожей с задачей (1), (2) и являющейся её обобщением на нелинейный случай, используя алгоритм построения асимптотики, используемый в [1]. ФАР решения задачи (4), (2) ищем в виде (3).

Представим функцию $F(U)$ в виде

$$F(U) = SF + PF + RF, \tag{5}$$

где $SF = F(S), PF = F(S+P) - F(S), RF = F(S+P+R) - F(S+P)$. Функция всплеска $S(\zeta, t, p)$ зависит от переменной $\zeta = (x - Vt)/\epsilon$, где $V = (D(p)h_1, h_1^*)$, а h_1 и h_1^* - собственные функции (отвечающие однократным нулевым собственным значениям $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1^* = 0$) линейных операторов L_p и сопряжённого к нему L_p^* соответственно, причём такие, что $(h_1, h_1^*) = 1$. Подставив функцию S и представление (5) в исходное уравнение (4), после чего перейдя от переменных (x, t, p) к переменным (ζ, t, p) и выполнив алгебраические преобразования, получаем уравнение

$$L_pS = \epsilon^2 S_t - \epsilon^2 SF + \epsilon\Psi S_\zeta. \tag{6}$$

Функция S ищется в виде ряда по степеням ϵ:

$$S = s_0 + \epsilon s_1 + \epsilon^2 s_2 + ... \tag{7}$$

Подставив (7) в SF, разложим SF в ряд по степеням ϵ:

$$SF = F(s_0)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{F^{(k)}(s_0)}{k!}\sum_{k_1+k_2+k_3...=k}\frac{k!}{k_1!k_2!k_3!...}(\epsilon s_1)^{k_1}(\epsilon^2 s_2)^{k_2}(\epsilon^3 s_3)^{k_3}...].$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$SF = F(s_0)+\epsilon^i[F\prime(s_0)s_i+\Phi_i(F\prime\prime(s_0),...,F^{(i)}(s_0),s_1,...,s_i-1)]; i>0, \quad (8)$$

где Φ_i - известные функции своих аргументов (обозначим $\Phi_0 = F(s_0)$). Подставив (7) и (8) в (6), выпишем уравнения для определения s_i, приравняв коэффициенты при соответствующих степенях ϵ слева и справа от знака равенства:

$$L_p s_0 = 0, \quad (9\epsilon_0)$$

$$L_p s_1 = \Psi s_{0\zeta}, \quad (9\epsilon_1)$$

$$L_p s_2 = \Psi s_{1\zeta} + s_{0t} - F(s_0), \quad (9\epsilon_2)$$

$$L_p s_i = \Psi s_{i-1\zeta} + s_{i-2t} - [F\prime(s_0)s_{i-2} + \Phi_{i-2}]; i > 2. \quad (9\epsilon_i)$$

Как и в работе [1] найдём решения $(9\epsilon_0)$ и $(9\epsilon_1)$ в следующем виде:

$$s_0 = \phi_0 h_1; s_1 = \phi_1 h_1 + G\Psi\phi_{0\zeta}h_1, \quad (10)$$

где G - псевдообратный к L_p оператор.
Выписав условие разрешимости для $(9\epsilon_2)$

$$(\Psi s_{1\zeta} + s_{0t} - F(s_0), h_1^*) = 0 \quad (11)$$

и подставив (10) в (11), получим уравнение для ϕ_0:

$$\phi_{0t} + \Psi G\Psi\phi_{0\zeta\zeta} = (F(\phi_0 h_1), h_1^*). \quad (12)$$

Действуя аналогично, запишем функцию s_i в вид

$$s_i = \phi_i h_1 + G\phi_{i-2t} + G\Psi\phi_{i-1\zeta} - G\Phi_{i-2}; i > 1, \quad (13)$$

(s_{i+1} - аналогично), после чего подставим эти выражения в уравнение разрешимости для s_{i+2} и определим уравнения для последующих ϕ_i:

$$\phi_{it} + \Psi G \Psi \phi_{i\zeta\zeta} = \Omega_i + F\prime(s_0)\phi_i; i > 0, \tag{14}$$

где Ω_i - известная комбинация $s_k, k < i$ и их производных.

Получены выражения (10), (13) для функций s_i и уравнения (12), (14) для определения функций ϕ_i, входящих в (10), (13). Начальные условия для уравнений (12), (14) и пограничные функции P строятся аналогично работе [1].

Отметим, что добавление малой нелинейности к правой части уравнения незначительно меняет алгоритм построения ФАР решения, но приводит к существенному изменению уравнения (12) для определения нулевого члена функции всплеска, которое становится нелинейным. Это говорит и о существенном изменении свойств решения задачи (4), (2) по отношению к линейному случаю [1].

Литература

1. Заборский А.В., Нестеров А.В. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущённого дифференциально-операторного уравнения в критическом случае – М.: Наука. Журнал "Математическое моделирование". Том 26. 2014 год. В печати.

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях – М.: Изд-во МГУ. 1978 год. 108 с.

Поверхности Адамара и их отношение Штейнера

Е.А. Завальнюк

(Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова; *zav_ evg@mail.ru*)

Доклад посвящен проблеме Штейнера для поверхностей Адамара. Поверхностью Адамара называется полное односвязное двумерное многообразие, являющееся пространством Александрова неположительной кривизны. В аспекте деревьев Штейнера и отношения Штейнера пространства Александрова стали изучаться относительно недавно. Известно, что для произвольного метрического пространства (X, ρ) справедлива оценка на его отношение Штейнера: $\frac{1}{2} \leq sr(X) \leq 1$.

Существует немного классов пространств, для которых удалось точно вычислить отношение Штейнера, хотя часто удается найти некоторые оценки. На докладе будет доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть* (S, d) *— неограниченная поверхность Адамара кривизны* $\leq k < 0$. *Тогда отношение Штейнера* $sr(S)$ *поверхности* S *равно* $1/2$.

Литература

1. Завальнюк Е. А. Отношение Штейнера поверхностей Адамара кривизны не больше $k < 0$. – Фундаментальная и прикладная математика. 2014. В печати.

Об одном классе управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями

А.В. Завьялова

(Воронеж, ВГПУ; *antonina.zavyalova@gmail.com*)

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $D(A)$ – область определения оператора A. Тогда для любой точки $y \in E_2$ множество

$$A^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid A(x) = y\} \neq \varnothing$$

является замкнутым и выпуклым, то есть определено многозначное отображение $A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где $Cv(E_1)$ – множество непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства E_1.

Определение 1. *Число*

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} \left(\frac{inf\{||x|| \ \mid \ x \in E_1, \ A(x) = y\}}{||y||}\right)$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}.

Известно (см., например, [1]), что при сделанных предположениях $||A^{-1}|| < \infty$.

Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x). \tag{1}$$

Обозначим $N(A, F)$ множество решений включения (1).

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующим условиям:*
1) F - вполне непрерывно;
2) существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство:

$$\min_{u \in F(x)} ||y|| \leq c||x|| + d.$$

Если $c \leq \frac{1}{||A^{-1}||}$, то $N(a, F) \neq \varnothing$.

Применим эту теорему к изучению одного класса управляемых систем.

Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $g : [0, T] \times E_1 \times E_3 \to E_2$ – нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(g_1) g является вполне непрерывным;

(g_2) существуют непрерывные функции α и β, определенные на промежутке $[0, T]$ такие, что для любой точки $(t, x, u) \in [0, T] \times E_1 \times E_3$ справедливо неравенство

$$||g(t, x, u)|| \leq \alpha(t)(||x|| + ||u||) + \beta(t). \tag{2}$$

(g_3) при любых фиксированных $t \in [0, T]$ и $x \in E_1$ отображение g аффинно по u.

Пусть многозначное отображение $U : C_{([0,T],\, E_1)} \to Kv(C_{([0,T],\, E_3)})$ - полунепрерывно сверху и существуют числа c_2 и d_2 такие, что справедливо неравенство:

$$\max_{u \in U} ||u|| \leq c_2||z|| + d_2 \tag{3}$$

для любого $z \in C_{([0,T],\, E_1)}$.

Пусть $x_0 \in D(A)$ - некоторая точка. Рассмотрим следующую задачу:

$$(Ax)'(t) = g(t, x(t), u(t)), \tag{4}$$

где

$$u(t) \in U(x)(t), \tag{5}$$

для любого $t \in [0,\ T]$,

$$A(x(0)) = Ax_0. \tag{6}$$

Решением управляемой системы (4)-(6) будем называть пару (x_*, u_*) такую, что $(Ax_*)'(t) = g(t, x_*(t), u_*(t))$, $u_* \in U(x_*)$ и $A(x_*(0)) = Ax_0$.

Теорема 2. *Пусть отображение g удовлетворяет условиям $(g_1) - (g_3)$, многозначное отображение U - полунепрерывно сверху и удовлетворяет оценке (3). Тогда если*

$$(1 + c_2) \int\limits_0^T \alpha(s) ds < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то задача (4)-(6) имеет решение.

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что задача (4)-(6) эквивалентна следующей задаче

$$A(x) = \int\limits_0^t g(s, x(s), u(s)) ds + Ax_0, \tag{7}$$

$$u \in U(x). \tag{8}$$

Нетрудно показать также, что задача (7), (8) эквивалентна включению: $A(x) \in F(x)$, где

$$F(x) = \{y \in C_{([0,T],\ E_2)} \,|\, y(t) = \int\limits_0^t g(s, x(s), u(s)) ds + Ax_0,\ u \in U(x).$$

Теперь утверждение теоремы получается из теоремы 1.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений/ Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. – М: КомКнига (URSS). – 2005.

2. Гельман Б.Д. Об операторных включениях с сюръективными операторами.// Б.Д. Гельман / Вестник ВГУ, серия: физика, математика. – 2006, №1. - С.119-127.

3. Гельман Б.Д. О локальных решениях вырожденных дифференциальных включений.// Б.Д. Гельман / Функциональный анализ и его приложения. – 2012. – №1. – С.79-83.

4. Гельман Б.Д., Завьялова А.В. Об одном классе вырожденных дифференциальных включений/Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. - 2013. - № 1- С.136-145.

Модель Девиса с условием Коши и аддитивным белым шумом

С.А. Загребина, А.С. Конкина
(Челябинск, ЮУрГУ (НИУ);
zagrebina_ sophiya@mail.ru, alexandra.konkina@yandex.ru)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим уравнение Девиса

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f, \tag{1}$$

которое моделирует некоторые процессы фильтрации жидкости (см.[1] и библиографию там). Уравнение (1) вкупе с однородными условиями Дирихле

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

удается редуцировать к эволюционному [2] уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{3}$$

где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ действуют в некоторых банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ (в случае (1), (2) $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ –

пространства Соболева). В (3) свободный член $f = f(t)$ отвечает детерминированному внешнему воздействию, между тем как в настоящее время уже получены результаты [3], [4] исследований динамических уравнений вида (3), где в качестве внешнего воздействия выступает белый шум.

Итак, пусть $\mathfrak{F}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{U}$ – банахово пространство, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим эволюционное линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW, \tag{4}$$

где $W = W(t)$ $\mathfrak{F}$-значный K-винеровский процесс, т.е

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)e_k.$$

Здесь $\{\lambda_k\}$ – спектр самосопряженного ядерного оператора $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, $\beta_k(t)$ – стандартные (одномерные) винеровские процессы, называемые так же броуновскими движениями. Пусть теперь оператор M сильно (L,p)-секториален, тогда следуя [5], получим следующие утверждения.

(i) Существуют голоморфные вырожденные полугруппы операторов $U^\bullet = \{U^t : t \in \mathbb{R}_+, U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})\}$ и $F^\bullet = \{F^t : t \in \mathbb{R}_+, F^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})\}$, а также расщепление пространств $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, где $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0)$ – ядро, $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$ – образ единицы $P = s - \lim\limits_{t\to 0+} U^t$ $(Q = s - \lim\limits_{t\to 0+} F^t)$.

(ii) Существуют расщепления действий операторов $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}^k$, $M : \mathfrak{U}^k \cap \mathrm{dom}M \to \mathfrak{F}_k$, причем существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$, где L_k – сужение оператора L на $\mathfrak{U}^k$, M_k – сужение оператора M на $(\mathfrak{U}^k \cap \mathrm{dom}M)$, $k = 0, 1$. Кроме того, оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ – нильпотентен степени не выше p, а оператор $H = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ – секториален. Наложим дополнительное условие

$$QN = N \tag{5}$$

и следуя [6] выпишем формальное $u = u(t)$ решение задачи Коши

$$u(0) = \xi \tag{6}$$

для уравнения (4)
$$u(t) = U^t\xi + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}NdW(s). \tag{7}$$

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, а $\mathfrak{U}$ – банахово пространство. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M сильно (L,p) – секториален и выполнено (5). Тогда для любой $\mathfrak{U}^1$-значной гауссовой случайной величины ξ не зависящей от W(t) существует единственное сильное решение задачи (4), (6), которое к тому же имеет вид (7).*

Из теоремы в частности, вытекает, что решение $u = u(t)$ – гауссов случайный процесс.

Вернемся к уравнению (1), представив его в виде (4). Для этого возьмем $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$ и $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Операторы L и M заданы формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2$,
$$\mathrm{dom}M = \mathfrak{U} \cap \{u \in W_2^4(\Omega) : \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$
Очевидно, при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а при всех $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Лемма. При всех $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ оператор M сильно $(L,0)$-секториален.

Простоты ради возьмем оператор $N = Q$, тогда условие (5) очевидно выполняется. Обозначим через $\{\mu_k\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа Δ в области Ω с условием (2), занумерованную по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – последовательность собственных функций. Тогда

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\nu_k t}\langle\xi, \varphi_k\rangle\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\lambda - \mu_k}\int_0^t e^{\nu_k(t-s)}d\beta_k(s)\varphi_k, \tag{8}$$

где $\nu_k = \dfrac{(\alpha\mu_k - \beta\mu_k^2)}{(\alpha - \mu_k)}$ – точки L-спектра оператора M, $\{\lambda_k\}$ – собственные значения специальными образом построенного ядерного оператора K. Штрих у знака суммы означает отсутствие членов таких, что $\lambda = \mu_k$.

Следствие. Пусть выполнены условия леммы и теоремы, тогда формула (8) дает существенное сильное решение задачи (4), (6), где операторы L и M определены из уравнения (1) и условия (2).

Литература

1. Свиридюк Г.А., Суханова М.В. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т.28, №3. – С.508-515.

2. Свиридюк Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционых и динамических уравнений // Докл. Акад. наук. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 301.

3. Замышляева А.А. Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2012. №40(299). – С.73-82.

4. Загребина С.А., Солдатова Е.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. "Математика". – 2013. – Т.6, №1. – С.20-34.

5. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 216.

6. Kov'acs M., Larsson S. Introduction to stochastic partial differential equations // Proceedings of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8-12, 2007. Publications of the ICMCS. — V. 4. — 2008. — P. 159–232.

О рассмотрении степени дискретного самосопряженного оператора оператора в прямых спектральных задачах.

Г.А. Закирова, Е.В. Кириллов
(Челябинск, ЮУрГУ (НИУ); *zakirova81@mail.ru*, *thefallk@mail.ru*)

Спектральные задачи со степенью оператора рассматривались и ранее, например, в работах В.В. Дубровского и его учеников. Целью этих работ было приближение показателя степени к единице, что позволяло рассматривать оператор резольвента которого зачастую была неядерная. В данной работе рассматривается принципиально иной подход — введение степени оператора позволяет рассматривать спектральные задачи в областях, на которых резольвента оператора неядерная. Рассмотрим N-мерный параллелепипед

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) : 0 < x_j \leq a_j, j = 1, \ldots, N\}, a_j > 0.$$

Будем предполагать, что $\frac{a_i^2}{a_j^2}$ — иррациональное число. Пусть $\mathfrak{H} = L_2(\Pi)$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g) = \int_\Pi f(x)g(x)dx$, с нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим дискретный самосопряженный оператор T с собственными числами, удовлетворяющими асимптотике

$$\lambda_t \sim \; C_1 t^{\frac{2}{N}}.$$

Поставим следующую спектральную задачу о нахождении собственных чисел возмущенного оператора T:

$$(T + P)v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0,$$

где P — оператор умножения на функцию $p(x) \in C^2(\Pi)$. Можно показать, что возмущенный оператор, определенный данной задачей, является дискретным самосопряженным оператором.

Очевидно, что при $N \geq 2$ резольвента оператора T неядерная. Это затрудняет вычисления регуляризованного следа оператора (T+P) для параллелепипеда размерности большей 2. Чтобы устранить этот недостаток, перейдем к рассмотрению новой задачи со степенью оператора:

$$(T^{\beta} + P)v = \lambda v, \quad v|_{\partial \Pi} = 0,$$

где T^{β} — степень оператора T.

Очевидно, что собственные числа оператора T^{β} удовлетворяют асимптотике $\nu_t \sim C_2 t^{\frac{2\beta}{N}}, C_2 > 0$ и $\nu_t = \lambda_t^{\beta}$. Тогда резольвента оператора при $\beta \geq N/2$ будет ядерной. То есть, для любой размерности N мы можем подобрать степень оператора β такую, что ряд $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{1}{\nu_t}$ будет сходиться.

Если выполняются условия $\beta \geq N/2, \|P\| < r_0/2$, где

$$r_0 = \inf_t \min\{\lambda_{t+1}^{\beta} - \lambda_t^{\beta};\ \lambda_t^{\beta} - \lambda_{t-1}^{\beta}\},$$

то для любого $t \in \mathbb{N}$ имеет место тождество [1]:

$$\mu_t = \lambda_t^{\beta} - (Pv_t, v_t) + \alpha_t,$$

где α_t — поправки теории возмущений.

Таким образом, при правильном выборе степени оператора с помощью новой спектральной задачи можно вычислять регуляризованные следы на областях любой размерности N.

В качестве примера можно рассмотреть оператор Лапласа, собственные числа которого как раз удовлетворяют нужной асимптотике.

Литература

1. Закирова Г.А . Асимптотика собственных чисел степени оператора Чебышева I рода со сложным вхождением параметра – Вестник МаГУ. 2004. С. 65-73.

Математическая модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле

А.А. Замышляева, А.С. Муравьев
(г. Челябинск, Южно-Уральский государственный университет (НИУ); *gg.amur@gmail.com*)

Уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{B_i}^2\right)(\Delta_3\Phi-\frac{1}{r_D^2}\Phi)+\omega_{p_i}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\Phi+\omega_{B_i}^2\omega_{p_i}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=0, \quad (1)$$

полученное впервые Ю.Д. Плетнером[2], описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле. Функция Φ представляет обобщенный потенциал электрического поля, константы $\omega_{B_i}^2$, $\omega_{p_i}^2$ и r_D^2 характеризуют ионную гирочастоту, частоту Ленгмюра и радиус Дебая соответственно. Преобразуем уравнение (1) и рассмотрим более общую задачу.

Пусть $\Omega = (0,a)\times(0,b)\times(0,c)\subset\mathbb{R}^3$. В цилиндре $\Omega\times\mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши – Дирихле

$$\begin{gathered} v(x,0)=v_0(x), \quad v_t(x,0)=v_1(x), \\ v_{tt}(x,0)=v_2(x), \quad v_{ttt}(x,0)=v_3(x), \quad x\in\Omega \end{gathered} \quad (2)$$

$$v(x,t)=0, \quad (x,t)\in\delta\Omega\times\mathbb{R} \quad (3)$$

для уравнения

$$(\Delta-\lambda)v_{tttt}+(\Delta-\lambda')v_{tt}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0, \quad (4)$$

описывающее ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу этой задачи. Начально-краевую задачу для уравнения (4) можно описать в терминах задачи

$$u(0)=u_0, \qquad u'(0)=u_1, \ \ldots\ , \ u^{n-1}(0)=u_{n-1} \quad (5)$$

для уравнения

$$Au^{(n)}=B_{n-1}u^{(n-1)}+B_{n-2}u^{(n-2)}+\ \ldots\ +B_1u'+B_0u, \quad (6)$$

где операторы $A, B_{n-1}, B_{n-2},\ \dots\ ,\ B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathfrak{U},\mathfrak{F}$ – банаховы пространства.

Определение 1.[1] Пучок операторов $\overrightarrow{B}$ называется (A,p)-ограниченным, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\overrightarrow{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})),$$

и ∞ – полюс порядка p A-резольвенты пучка $\overrightarrow{B}$.

Введем в рассмотрение дополнительное условие

$$\int\limits_\gamma \mu^k R^A_\mu(\overrightarrow{B}) d\mu \equiv \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, ..., n-2. \qquad (A)$$

Лемма 1.[1] Пусть пучок операторов $\overrightarrow{B}$ (A,p)-ограничен, выполняется условие (A). Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu^{n-1} R^A_\mu(\overrightarrow{B}) A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu^{n-1} A R^A_\mu(\overrightarrow{B}) d\mu$$

являются проекторами в пространстве $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

Теорема 1.[1] Пусть пучок операторов $\overrightarrow{B}$ (A,p)-ограничен, выполняется условие (A). Тогда при любых $v_k \in \mathfrak{U}^1 = imP$, $k = 0, 1, ..., n-1$ существует единственное решение задачи (5), (6), представимое в виде

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} K^n_q (B^0_0)^{-1} \frac{d^k}{dt^k} f^0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} V^t_k u^1_k + \int\limits_0^t V^{t-s}_{n-1} (A^1)^{-1} f^1(s) ds.$$

Редуцируя задачу (2) – (4) к задаче (5), (6), положим

$$\mathfrak{U} = \{v \in W^{l+2}_2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \delta\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W^l_2(\Omega),$$

где $W^l_2(\Omega)$ – пространства Соболева. Операторы A, B_3, B_2, B_1 и B_0 зададим формулами $A = \Delta - \lambda$, $B_2 = (\lambda' - \Delta)$, $B_0 = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$,

$B_3 = B_1 = \mathbb{O}$. При любом $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Введем в рассмотрение собственные функции оператора Лапласа Δ, определенного в области Ω, удовлетворяющие условиям (3):
$\varphi_{kmn} = \left\{\sin\frac{\pi k x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b}\sin\frac{\pi n x_3}{c}\right\}$, где k, m, $n \in \mathbb{N}$, при этом собственные значения $\lambda_{kmn} = -(k^2+m^2+n^2)$. Очевидно, что спектр $\sigma(\Delta)$ отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. Поскольку $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$, то

$$\mu^4 A - \mu^3 B_3 - \mu^2 B_2 - \mu B_1 - B_0 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} [(\lambda_{kmn} - \lambda)\mu^4 + (\lambda_{kmn} - \lambda')\mu^2 - \alpha(\tfrac{\pi n}{c})^2] < \varphi_{kmn}, \cdot > \varphi_{kmn},$$

где $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Лемма 2. (i) Пусть $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. Тогда пучок $\vec{B}$ полиномиально $(A, 0)$-ограничен.

(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$. Тогда пучок $\vec{B}$ полиномиально $(A, 1)$-ограничен.

(iii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda')$. Тогда пучок $\vec{B}$ полиномиально $(A, 3)$-ограничен.

Теорема 2. (i) Пусть $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. Тогда при любых $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (2) – (4).

(ii) Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$ и $\lambda = \lambda'$.Тогда при любых $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{U}^1$, то есть таких, что

$$\sum_{\lambda_{kmn}=\lambda} < \varphi_{kmn}, v_j >= 0, \ j = 0, ..., 3,$$

существует единственное решение задачи (2) – (4).

Литература

1. Замышляева А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка – Издательский центр ЮУрГУ. 2012.

2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа – М.:ФИЗМАТЛИТ. 2007.

Волновая задача с нелинейным условием.

М.Б. Зверева, Ж.О. Залукаева
(Воронеж, ВГУ; *margz@rambler.ru*)

В настоящей работе рассматривается задача об управлении колебаниями механической системы, состоящей из струны и пружины с разными витками, прикрепленной в центре струны. При этом предполагается, что деформация пружины не подчиняется закону Гука и задается некоторой функцией. Целью работы является предъявить в явном виде функции, определяющие граничные управления, позволяющие перевести систему из начального состояния в заданное финальное состояние. Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -l < x < l, x \neq 0, 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \\ u'_x(+0,t) - u'_x(-0,t) = \alpha(u(0,t)), \\ u(-0,t) = u(+0,t) = u(0,t) \\ u(-l,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

Найдем функции $\mu_i(t) \in C^2[0,T]$, позволяющие перевести механическую систему из заданного начального состояния в заданное финальное состояние $u(x,T) = \varphi^*(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T) = \psi^*(x)$, где $0 < T < l$. Будем предполагать, что функция $\alpha(x) \in C^1$ и удовлетворяет условию Липшица. При этом выполняются условия согласования, причем $\varphi(-l) = \varphi(l) = 0$, $\psi(-l) = \psi(l) = 0$, $\varphi''(l) = \varphi''(-l) = 0$, $\psi(-0) = \psi(+0) = 0$, $\psi'(-0) = \psi'(+0) = 0$. Тогда

$$\mu_1(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(T-t-l) - \widehat{\psi^*}(T-t-l) + \varphi(t-l) + \widehat{\psi}(t-l)),$$

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке программы стратегического развития ВГУ № ПСР-МГ/04-13, гранта РФФИ № 12-01-00392

$$\mu_2(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(t+l-T) + \widehat{\psi^*}(t+l-T) + \varphi(l-t) - \widehat{\psi}(l-t)),$$

где знаком $\widehat{\phi}$ обозначены первообразные для соответствующих функций, выбираемые специальным образом.

Управляемость начально-конечной задачи для модели Плотникова

Е.А. Золотарёва, О.А. Рузакова
(Челябинск, Южно-Уральский государственный университет (НИУ); *oleynikekaterinaa@gmail.com, oruzakova@gmail.com*)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+$, рассмотрим модель Плотникова [1,2]:

$$\theta_t(x,t) + \varphi_t(x,t) = \Delta\theta(x,t) + u_0(x,t), \tag{1}$$

$$\Delta\varphi(x,t) + \alpha\varphi(x,t) + \beta\theta(x,t) + u_1(x,t) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}(x,t) + \lambda\theta(x,t) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}(x,t) + \lambda\varphi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+, \tag{3}$$

которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Редуцируем задачу (1)-(3) к начально-конечной задаче [3]

$$P_{in}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{fin}(x(\tau) - x_\tau) = 0$$

для уравнения соболевского типа $L\,\dot{x}\,(t) = Mx(t) + Bu(t)$ [4].

Здесь $\tau \in \mathbb{R}_+$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, а P_{in}, P_{fin} относительно спектральные проекторы, которые определены в [3], часть спектра $\sigma^L_{fin}(M)$ ограничена.

Сделав замены $\theta(x,t) + \varphi(x,t) = y(x,t), \varphi(x,t) = z(x,t)$, система (1)-(3) примет вид

$$y_t(x,t) = \Delta y(x,t) - \Delta z(x,t) + u_0(x,t), \tag{4}$$

$$\Delta z(x,t) + (\alpha - \beta)z(x,t) + \beta)y(x,t) + u_1(x,t) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x,t)+\lambda y(x,t)=0, \quad \frac{\partial z}{\partial n}(x,t)+\lambda z(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times\bar{\mathbb{R}}_+. \tag{6}$$

Пусть $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=(L_2(\Omega))^2$. Операторы

$$L=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad M=\begin{pmatrix} \Delta & -\Delta\\ \beta I & (\alpha-\beta)I+\Delta\end{pmatrix},$$

$L\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, $B=I$, причем $\ker L=0\times L_2(\Omega)$, а

$$\mathrm{dom}M=\{(y,v)\in(H^2(\Omega))^2:(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda)y(x)=(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda)z(x)=0, x\in\partial\Omega\}.$$

Пусть $Aw=\Delta w$, $\mathrm{dom}A=\{w\in H^2(\Omega):\frac{\partial w}{\partial n}(x)+\lambda w(x)=0, x\in\partial\Omega\}$, $A\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ Через $\{\varphi_k:k\in\mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k:k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Основной целью данной работы является исследование ε-управляемости системы (4)-(6), т.е. возможности приведения траектории решения системы в ε-окрестность заданной точки [5].

В работе [6] показано, что если $(\beta-\alpha)\notin\sigma(A)$, то оператор M сильно $(L,0)$-радиален. Учитывая данный результат можно сформулирует теорему об ε-управляемости начально-конечной задачи для системы (4)-(6)

Теорема 1. Пусть $(\beta-\alpha),\alpha,0\notin\sigma(A)$ и существуют такие λ_k, что $Re\mu_k\in\sigma^L_{fin}(M)$. Тогда система (4)-(6) ε-управляема за свободное время.

Литература

1. Плотников, П.И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 3. – С. 461 – 471.

2. Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651 – 669.

3. Загребина С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики/ С.А. Загребина// Вестн. Юж.-Урал.гос.
ун-та.Сер.:Мат.моделирование и программирование – Челябинск. 2013. Т. 6, № 2. С. 5-24.

4. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; K$\ddot{o}$ln; Tokyo: VSP, 2003. T. 1, № 1. С. 1–10.

5. Федоров, В. Е. Об управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной, в банаховых пространствах / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Вычислит. технологии. – 2005. – Т.10, № 5. – С. 90 – 101.

6. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа: моноrг./ М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд.центр ЮУрГУ, 2012.

Решение задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором под знаком производной

С.П. Зубова
(Воронеж, ВГУ; spzubova@mail.ru)
Е.В. Раецкая
(Воронеж, ВГЛТА; raetskaya@inbox.ru)

Рассматривается задача

$$\frac{d}{dt}Ax(t) = Bx(t) + f(t), \tag{1}$$

с условием

$$x(0) = x^0 \in E_1, \tag{2}$$

где A, B: $E_1 \to E_2$; E_1, E_2 — банаховы пространства; A, B — линейные, замкнутые, dom A = dom B, $\overline{\mathrm{dom} A} = E_1$; $t \in \mathfrak{T} = [0, T]$, T — конечно или бесконечно; $f(t) \in C^0(\mathfrak{T} \to E_2)$; A — нётеров оператор, то есть

$$E_1 = CoimA \dot{+} KerA, \quad E_2 = ImA \dot{+} CokerA, \tag{3}$$

где Coker A — дефектное подпространство для A, Coim A — прямое дополнение к Ker A в E_1, dim Ker $A < \infty$, dim Coker $A < \infty$, æ(A) =dim Ker $A-$ dim Coker A может быть $\neq 0$. Сужение $\tilde{A}$ оператора A на Coim $A \bigcap$ dom A имеет обратный $A^- \in L($ Im A, Coim $A)$, называемый полуобратным.

От B требуем: A^-B и $Q(A)B$ — ограниченные операторы, где $Q(A)$ — проектор на Coker A, отвечающий разложению (3). Соответственно, $P(A)$ — проектор на Ker A.

Решением задачи (1), (2) называется функция $x(t) \in$ dom A такая, что $\exists \dfrac{d}{dt}Ax(t)$, $x(0) = x^0$ с некоторым $x^0 \in E_1$, и удовлетворяющая уравнению (1) $\forall t \in \mathfrak{T}$.

Постановка такой задачи отличается от постановки задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной отсутствием требования существования производных от $P(A)x(t)$, отсутствующих в уравнении. В связи с этим и требования на гладкость $f(t)$, необходимые для существования решения задачи (1), (2), более слабые, что установлено в работах [1], [2].

Предлагается модифицированный метод каскадной декомпозиции, более простой и эффективный по сравнению с разработанным в работах [1], [2], для исследования вопросов существования, единственности и выявления свойств решения поставленной задачи.

Литература

1. Zubova S.P. Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative / Doklady Mathematics. 2009. — Vol. 80, № 2. — P. 710–712.

2. Zubova S.P. Solution of the Cauchy Problem for Two Differential-Algebraic Equations with a Fredholm Operator / Mathematical Notes .- New York, 2005 .- Vol. 41, № 10. - P. 1486-1489.

Один класс линейных обратных задач для вырожденного эволюционного уравнения с переопределением на ядре разрешающей полугруппы

Н.Д. Иванова, В.Е. Фёдоров
(Челябинск, Южно-Уральский государственный университет;
natalia.d.ivanova@gmail.com, kar@csu.ru)

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{U}$ – банаховы пространства, заданы линейные операторы $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ с нетривиальным ядром, $\ker L \neq \{0\}$, $M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ определен ниже, $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$, $B(t) : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ при $t \in [0, T]$, функции $y : [0, T] \to \mathcal{Y}$, $\Psi : [0, T] \to \mathcal{U}$ и вектор $x_0 \in \mathcal{X}$. Через D_M обозначена область определения оператора M, снабженная нормой графика $\|x_0\|_{D_M} = \|x_0\|_{\mathcal{X}} + \|Mx_0\|_{\mathcal{Y}}$. Рассмотрим линейную эволюционную обратную задачу

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$Px(0) = x_0, \tag{2}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3}$$

Ее решением будем называть пару $x \in C^1([0, T]; \mathcal{X}) \cap C([0, T]; D_M)$, $u \in C^1([0, T]; \mathcal{U})$, для которой выполняются равенства (1)-(3).

Уравнение (1) с начальным условием (2) представляет собой абстрактную форму начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по выделенной переменной [1–3].

Теорема 1 [4]. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) *проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$ (вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$) имеет вид*

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}, \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1});$$

(iii) $QL = LP$, $QMx = MPx$ *для всех* $x \in D_M$;

(iv) $L|_{\mathcal{X}^k} \equiv L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $M|_{D_M\cap\mathcal{X}^k} \equiv M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;

(v) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$;

(vi) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;

(vii) *существует вырожденная сильно непрерывная полугруппа*
$\{X(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \geq 0\}$, *разрешающая уравнение* $L\dot{x}(t) = Mx(t)$.

Теорема 2. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-радиален,* $x_0 \in D_{M_1}$, $QB \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $Q_0B \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $Qy \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $Q_0y \in C^{2p+1}([0,T];\mathcal{Y})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{U})$, $\mathcal{X}^1 \subset \ker\Phi$, $\Psi \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{U})$, *существует обратный оператор* $(\Phi M_0^{-1}Q_0B(t))^{-1} \equiv \Lambda(t)$ *при всех* $t \in [0,T]$, $\Lambda \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U}))$, $\Phi H^k M_0^{-1}(Q_0B)^{(l)}(t) = 0$ *при всех* $t \in [0,T]$, $l = 0,1,\dots,k$, $k = 1,2,\dots,p$. *Тогда существует единственное решение* $x \in C^1([0,T];\mathcal{X}) \cap C([0,T];D_M)$, $u \in C^1([0,T];\mathcal{U})$ *задачи* (1)-(3), *при этом оно имеет вид*

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)L_1^{-1}Q(B(s)u(s)+y(s))ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}\left(Q_0B(t)u(t)+Q_0y(t)\right)^{(k)},$$

$$u(t) = -(\Phi M_0^{-1}Q_0B(t))^{-1}\Phi\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0y)^{(k)}(t) - (\Phi M_0^{-1}Q_0B(t))^{-1}\Psi(t)$$

и удовлетворяет условиям

$$\|x\|_{C^1([0,T];\mathcal{X})} \leq$$

$$c\left(\|Px_0\|_{D_M} + \|Qy\|_{C^1([0,T];\mathcal{Y})} + \|Q_0y\|_{C^{2p+1}([0,T];\mathcal{Y})} +\right.$$

$$\left.+\|\Psi\|_{C^{p+1}([0,T];\mathcal{U})}\right),$$

$$\|u\|_{C^1([0,T];\mathcal{U})} \leq c\left(\|Q_0y\|_{C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y})} + \|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathcal{U})}\right),$$

где $c > 0$ *не зависит от* x_0, y, Ψ.

Рассмотрим обратную задачу для моделирующей в линейном приближении динамику вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта системы уравнений Осколкова

$$(1-\chi\Delta)v_t(s,t)=\nu\Delta v(s,t)-r(s,t)+b(s,t)u(t),\ (s,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{4}$$

$$\nabla\cdot v(s,t)=0,\quad (s,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{5}$$

$$v(s,t)=0,\quad (s,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \tag{6}$$

$$(1-\chi\Delta)(v(s,0)-v_0(s))=0,\quad s\in\Omega, \tag{7}$$

$$\int\limits_{\Omega}\langle K(\xi),r(\xi,t)\rangle_{\mathbb{R}^n}d\xi=\Psi(t),\quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Параметр $\chi\in\mathbb{R}$ характеризует упругие свойства жидкости, а $\nu\in\mathbb{R}$ – её вязкие свойства. Вектор-функции v (вектор скорости жидкости), r (градиент давления) и функция u неизвестны.

Пусть $\mathbb{L}_2=(L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1=(W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2=(W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L}=\{v\in(C_0^\infty(\Omega))^n:\nabla\cdot v=0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ – через $\mathbb{H}_\sigma^1$, $\mathbb{H}_\sigma^2=\mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$. Положим $\mathcal{X}=\mathbb{H}_\sigma^2\times\mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y}=\mathbb{L}_2$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}$.

Оператор $A=\Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [5]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения A, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, через $\{\varphi_k\}$ – ортонормированную систему соответствующих собственных функций, образующую базис в $\mathbb{H}_\sigma$.

Теорема 3. *Пусть* $\nu,\chi\neq0$, $\chi^{-1}\in\sigma(A)$, $b\in C^2([0,T];\mathbb{H}_\pi)$, $v_0\in\mathbb{H}_\sigma^2$, $K\in\mathbb{L}_2$, $\langle K,b(\cdot,t)\rangle\neq0$ *при всех* $t\in[0,T]$, $\Psi\in C^2([0,T];\mathbb{R})$. *Тогда задача* (4)-(8) *имеет единственное решение* $v\in C^1([0,T];\mathbb{H}_\sigma^2)$, $r\in C^1([0,T];\mathbb{H}_\pi)$, $u\in C^1([0,T];\mathbb{R})$, *при этом оно удовлетворяет условиям*

$$\|v\|_{C^1([0,T];\mathbb{H}^2_\sigma)} \le c\left(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2_\sigma} + \|\Psi\|_{C^2([0,T];\mathbb{R})}\right),$$
$$\|r\|_{C^1([0,T];\mathbb{H}_\pi)} \le c\left(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2_\sigma} + \|\Psi\|_{C^2([0,T];\mathbb{R})}\right),$$
$$\|u\|_{C^1([0,T];\mathbb{R})} \le c\|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathbb{R})},$$

где $c > 0$ не зависит от v_0, Ψ.

Литература

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга. 1998.

2. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. — N.Y.: Marcel Dekker. 1999.

3. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007.

4. Fedorov V.E. Degenerate strongly continuous semigroups of operators. — St. Petersbg. Math. J. 2001. Vol.12, No.3. 471-489.

5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы. 1961. 204 с.

О сильной и равномерной непрерывности оператор-функции с многомерными частными интегралами со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(C)$

А.И. Иноземцев

(Липецк, ЛГПУ; *inozemcev.a.i@gmail.com*)

Рассматривается оператор-функция

$$K(\varphi)x(t) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)x(s_\alpha)\, dS_\alpha, \tag{1}$$

со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(C)$ операторов с многомерными частными интегралами, действующих в пространстве $C(D)$ непрерывных по совокупности переменных на D функций, где

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, причем α_j принимает значение 0 или 1 при $j = 1, \ldots, n$, $D_\alpha = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ (в случае $\alpha_j = 0$ отрезок $[a_j, b_j]$ исключается из декартова произведения D_α), $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ — измеримые по совокупности переменных $\varphi \in J$, $t_\alpha, \tau_\alpha \in D_\alpha$ функции, J — конечный или бесконечный промежуток в $(-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — вектор пространства R^n, $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_{2^n}\}$ — совокупность всех подмножеств множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ ($T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{n+1} = \{\tau_n\}$, $T_{n+2} = \{\tau_1, \tau_2\}$ и т.д.) S_α и dS_α — набор переменных τ_α из подмножества T_α множества $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ и набор дифференциалов $d\tau_\alpha$ соответственно . Вектор s_α получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами S_α.

Получены условия сильной и равномерной непрерывности оператор-функции (1) в случае многомерных частично интегральных оператор-функций.

Определение. *Оператор-функция $K(\varphi)$ со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(C)$ называется сильно непрерывной, если*

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} \|K(\varphi)x - K(\varphi_0)x\|_C = 0$$

для любого $x \in C$ и равномерно непрерывной или непрерывной по норме, если

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\|_{\mathcal{L}(C)} = 0,$$

где $\mathcal{L}(C)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих пространстве C.

При $n = 2$ свойства оператор-функций с многомерными частными интегралами изучены в работах [1, 2, 3]. В этом случае оператор-функции используются при изучении задачи Коши и краевых задач для интегро-дифференциального уравнения Барбашина с частными интегралами

$$\frac{\partial x(\varphi, t_1, t_2)}{\partial \varphi} = K(\varphi)x(\varphi, t_1, t_2) + f(\varphi, t_1, t_2).$$

При каждом фиксированном φ $K(\varphi)$ — линейный оператор с частными интегралами вида

$$(Kx)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_\alpha} k_\alpha(t, S_\alpha) x(s_\alpha)\, dS_\alpha. \tag{2}$$

Несмотря на то, что каждый оператор (1), зависящий от параметра φ определяется функциями $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$, сильная непрерывность и непрерывность по норме оператор-функции не характеризуется непрерывностью данных функций по параметру φ. В связи с этим возникает вопрос о зависимости свойств перечисленных функций от параметра φ, которая приводит к сильной непрерывности и непрерывности по норме оператор-функции (1).

Применение формулы оценки или вычисления нормы оператора (2), действующего в некотором банаховом пространстве X, приводит к условиям непрерывности по норме оператор-функции (1) в $\mathcal{L}(X)$, а условия сильной непрерывности получаются с применением теоремы Банаха-Штейнгауза.

Пусть $D_\alpha = \prod\limits_{\alpha} [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ $(j = \overline{1, n})$,

$$B(\varphi, t) = k_{(0,\ldots,0)}(\varphi, t) + \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)\, dS_\alpha, \tag{3}$$

$$B_\alpha(\varphi, t) = \int\limits_{D} x_\alpha\, dg(\varphi, t, \tau) = \sum_{\alpha} (-1)^{dim D_\alpha} \left\{ \int\limits_{D_\alpha} g(\varphi, t, \tau)\, dx_\alpha \Bigg|_{\bar{D}_\alpha} \right\}, \tag{4}$$

$$\gamma(\varphi, t) = |k_{(0,\ldots,0)}(\varphi, t)| + \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)|\, dS_\alpha, \tag{5}$$

где

$$g(\varphi, t, \tau) = k_{(0,\ldots,0)}(\varphi, t)\chi(t, \tau) + \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, \bar{S}_\alpha)\, d\bar{S}_\alpha\, \chi(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha),$$

$D_\alpha = \prod\limits_{\alpha}[a_i, \tau_i]^{\alpha_i}$, $\alpha_i = 0$ или 1; $\bar{S}_\alpha$ — набор переменных интегрирования $\bar{\tau}_\alpha$, $\chi(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha) = \begin{cases} 1, & \forall i\ \tau_i \geq t_i > a_i \text{ или } \tau_i > t = a_i, \\ 0, & \exists i\ \tau_i < t_i \text{ или } \tau_i = t_i = a_i. \end{cases}$

В силу критерия действия оператора (2) в пространстве $C(D)$ имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Оператор-функция (1) является сильно непрерывной в пространстве $\mathcal{L}(C)$ тогда и только тогда, когда функции (3), (4) непрерывны, а функция (5) ограничена на каждом ограниченном подмножестве своей области определения.*

Теорема 2. *Пусть значения оператор-функции (1) при всех $\phi \in J$ принадлежат $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда она является непрерывной по норме операторов $\mathcal{L}(C)$ в том и только в том случае, когда функция $k_{(0,\ldots,0)}(\phi, t)$ равномерно относительно t непрерывна по ϕ на J, функции k_α обладают следующими свойствами:*

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} \sup_D mes\,\{S_\alpha \colon |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| > \theta\} = 0,$$

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} \sup_D \int\limits_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)|\, dS_\alpha = 0, \quad (mes(A_\alpha) \to 0).$$

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro—Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

3. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

О спектре линейных операторов с частными интегралами в пространстве вектор-функций $C(L^2)$[4]

А.С. Калитвин
(Липецк, ЛГПУ; *kalitvinas@mail.ru*)

Введение Различные задачи механики сплошных сред [1, 2, 3], интегро - дифференциальных уравнений Барбашина [2] и др. приводятся к линейным интегральным уравнениям с частными интегралами, решения которых приходится рассматривать в пространствах вектор-функций, в пространствах дифференцируемых и частично дифференцируемых функций, в других классах функциональных пространств [1, 2]. Существование и свойства решений этих уравнений существенно зависят от спектральных свойств линейных операторов с частными интегралами (ЛОЧИ), содержащихся в уравнениях. Как показывают примеры, спектр и части спектра ЛОЧИ могут изменяться при изменении пространств, в которых они рассматриваются. Поэтому при исследовании интегральных уравнений с частными интегралами в том или ином пространстве требуются спектральные свойства соответствующих ЛОЧИ. Свойства спектра и частей спектра ЛОЧИ в различных пространствах изучались в [1–4].

В данной работе изучаются спектр и части спектра ЛОЧИ в пространстве $C(L^2)$ - непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций со значениями в $L^2([c, d])$.

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — ограниченный линейный оператор в X, λ — комплексное число, I — единичный оператор в X и $A(\lambda) = \lambda I - A$.

Через $\rho(A)$, $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$ и $\sigma_\pi(A)$ обозначим резольвентное множество, спектр, точечный и предельный спектры соответственно оператора A. Будем говорить, что $\lambda \in C$ является точкой области $n(d)$-нормальности оператора A, если множество значений $R[A(\lambda)]$ оператора $A(\lambda)$ замкнуто и размерность ядра $n(A(\lambda)) < \infty$ (коядра $d(A(\lambda)) < \infty$). Пересечение (объедине-

[4]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, проект № 1.4407.2011

ние) области n-нормальности и области d - нормальности оператора A называется его областью нетеровости (полуфредгольмовости). Множество точек нетеровости с нулевым индексом $ind(A(\lambda)) = n(A(\lambda)) - d(A(\lambda))$ называется областью фредгольмовости оператора A.

Назовем существенным спектром оператора A в смысле:

а) Густавссона-Вайдмана множества $\sigma_+(A)$, $\sigma_-(A)$, где $\sigma_+(A)$ ($\sigma_-(A)$) — дополнение до области $n(d)$-нормальности оператора A;

б) Като (Вольфа) множество $\sigma_{ek}(A) = \sigma_+(A) \cap \sigma_-(A)$ ($\sigma_{ew}(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$);

в) Шехтера множество $\sigma_{es}(A)$, которое является объединением существенного спектра в смысле Вольфа и множества $\lambda \in \sigma(A)$, для которых оператор A является нетеровым оператором с ненулевым индексом;

г) Браудера множество $\sigma_{eb}(A)$ тех $\lambda \in C$, для которых выполнено по крайней мере одно из условий: $R[A(\lambda)]$ не замкнуто; λ — предельная точка $\sigma(A)$; $\bigcup_{n\geq 0} Ker[A(\lambda)]^n$ имеет бесконечную размерность.

Теорема 1 [1,2]. *$\sigma_+(A)$, $\sigma_-(A)$, $\sigma_{ek}(A)$, $\sigma_{ew}(A)$, $\sigma_{es}(A)$, $\sigma_{eb}(A)$, $\sigma_\pi(A)$, $\sigma(A)$ — компактные множества; $\sigma_{ek}(A) \subset \sigma_+(A), \sigma_-(A) \subset \sigma_{ew}(A) \subset \sigma_{es}(A) \subset \sigma_{eb}(A) \subset \sigma(A)$; $\sigma_{ek}(A) \cup \sigma_p(A) = \sigma_\pi(A) \subset \sigma(A)$; $\partial\sigma_{eb}(A) \subset \partial\sigma_{es}(A) \subset \partial\sigma_{ew}(A) \subset \partial\sigma_+(A), \partial\sigma_-(A) \subset \partial\sigma_{ek}(A)$; $\partial\sigma(A) = (\sigma(A)) \setminus \sigma_{eb}(A)) \cup \partial\sigma_{eb}(A) \subset \partial\sigma_\pi(A)$, где $\partial\Phi$ обозначает границу множества Φ.*

Существенный спектр в смысле Вольфа, Шехтера, Густавссона - Вайдмана и Като ЛОЧИ. Пусть $\Omega \in \{[a,b],[c,d],D\}$, $C(L^2(\Omega))$ — пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в $L^2(\Omega)$, $(Lx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau$, $(Mx)(t,s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, $(Nx)(t,s) = \int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$, $(Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s)$, $K = C + L + M + N$, где $(t,s) \in D = [a,b] \times [c,d]$ и интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема 2. *Пусть $c \in C(D)$, $l \in C(L^2([a,b]))$, $m \in C(L^2([c,d]))$, $n \in C(L^2(D))$. Тогда существенные спектры опера-*

тора K в смысле Густавссона-Вайдмана, Като, Вольфа и Шехтера совпадают и справедливы утверждения:

1. Если $\lambda - c(t,s) \neq 0$ на D, то n-нормальность, d-нормальность, фредгольмовость и нетеровость оператора $\lambda I - K$ в $C(L^2)$ равносильны обратимости в $C([a,b])$ и в $L^2([c,d])$ соответственно операторов следующих семейств операторов: $L(\lambda)(s)x(t) = x(t) - \int_a^b \frac{l(t,s,\tau)}{\lambda - c(t,s)} x(\tau)d\tau$ $(s \in [c,d])$, $M(\lambda)(t)y(s) = y(s) - \int_c^d \frac{m(t,s,\sigma)}{\lambda - c(t,s)} y(\sigma)d\sigma$ $(t \in [a,b])$;

2. Если $\lambda - c(t_0,s_0) = 0$, $((t_0,s_0) \in D)$, то оператор $\lambda I - K$ не является ни фредгольмовым, ни нетеровым, ни n и ни d-нормальным в $C(L^2)$.

Спектр и части спектра других классов ЛОЧИ. Пусть $(Lx)(t,s) = \int_a^b l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau$, $(Mx)(t,s) = \int_c^d m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, $K = L + M$, интегральные операторы $(\tilde{L}x)(t) = \int_a^b l(t,\tau)x(\tau)d\tau$, $(\tilde{M}x)(s) = \int_c^d m(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma$ действуют в пространствах $C([a,b])$ и в $L^2([c,d])$ соответственно, при этом не требуются включения $l \in C(L^2([a,b]))$ и $m \in C(L^2([c,d]))$. Теорема 2 в этом случае к оператору K не применима, если $l \notin C(L^2([a,b]))$ или $m \notin C(L^2([c,d]))$, но спектр и части спектра оператора K удается описать с применением спектральной теории тензорных произведений линейных операторов в тензорных произведениях банаховых пространств [1,2,5,6].

Теорема 3. *Пусть операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ действуют в пространствах $C([a,b])$ и $L^2([c,d])$ соответственно. Тогда справедливы утверждения:*

а) $\sigma(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma(\tilde{L}) \times \sigma(\tilde{M})\}$;

б) $\sigma_+(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_+(\tilde{L}) \times \sigma_\pi(\tilde{M}) \cup \sigma_\pi(\tilde{L}) \times \sigma_+(\tilde{M})\}$;

в) $\sigma_\pi(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_\pi(\tilde{L}) \times \sigma_\pi(\tilde{M})\}$;

г) $\sigma_\delta(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_\delta(\tilde{L}) \times \sigma_\delta(\tilde{M})\}$, где через $\sigma_\delta(K)$, $\sigma_\delta(\tilde{L})$, $\sigma_\delta\tilde{M})$ обозначены множества $\sigma_\pi(K^*)$, $\sigma_\pi(\tilde{L}^*)$, $\sigma_\pi(\tilde{M}^*)$, в которых $K^*, \tilde{L}^*, \tilde{M}^*$ — операторы, сопряженные операторам $K, \tilde{L}, \tilde{M}$;

д) $\sigma_-(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_-(\tilde{L}) \times \sigma_\delta(\tilde{M}) \cup \sigma_\delta(\tilde{L}) \times \sigma_-(\tilde{M})\}$;

е) $\sigma_{ew}(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha, \beta) \in \sigma_{ew}(\tilde{L}) \times \sigma(\tilde{M}) \cup \sigma(\tilde{L}) \times \sigma_{ew}(\tilde{M})\}$*;*

ж) $\sigma_{ek}(K)$ *совпадает с пересечением множеств б) и д);*

з) $\sigma_{es}(K)$ *совпадает с объединением множества из правой части равенства е) теоремы и множества всех* $\lambda \in C$*, не принадлежащих* $\sigma_{ew}(K)$*, для которых индекс оператора* $\lambda I - K$ *не равен нулю;*

и) $\sigma_p(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha, \beta) \in \sigma_p(\tilde{L}) \times \sigma_p(\tilde{M})\}$*, если* $\sigma(\tilde{L}) = \sigma_p(\tilde{L})$, $\sigma(\tilde{M}) = \sigma_p(\tilde{M})$.

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

3. Appell J., Kalitvin A.S., Nashed M.Z. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids // Zeitschr. Ang. Math. Mech. – 1999. – B. 79. – №10. – S. 703–713.

4. Калитвин А.С. Исследование операторов с частными интегралами. Дисс. ... кандидата физико-математических наук. – Ленинград: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1986. – 143 с.

5. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators in Banach spaces. I // Trans. Amer. Math. Soc., 1978. – V. 235. – P. 75–113.

6. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators in Banach spaces. II // Trans. Amer. Math. Soc., 1978. – V. 237. – P. 223–254.

О линейных интегральных уравнениях Вольтерра первого рода с частными интегралами[5]

В.А. Калитвин
(Липецк, ЛГПУ; *kalitvin@gmail.com*)

Линейные интегральные уравнения второго рода с частными интегралами имеют различные приложения в механике сплошных сред [1, 2, 3], в теории интегро - дифференциальных уравнений Барбашина [2] и при решении других задач. Теория таких уравнений развита намного лучше, чем теория линейных интегральных уравнений первого рода с частными интегралами, к которым приводятся некоторые задачи расчета плотин методом арок-консолей [4], контактного взаимодействия тел при наличии износа [5], задач об оценке сообщений [6]. В связи с этим требуется не только разработка теории таких уравнений, но и методов их численного решения.

В данной работе рассматриваются линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода с частными интегралами, которые путем регуляризации сводятся к линейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода с частными интегралами. Каждое из получающихся при этом уравнений имеет единственное решение в рассматриваемом пространстве функций, так как спектральный радиус соответствующего регуляризованному уравнению оператора Вольтерра с частными интегралами равен нулю.

Будем рассматривать интегральные уравнения Вольтерра первого рода с частными интегралами вида

$$\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = f(t,s), \quad (1)$$

где $(t,s) \in D = [a,b] \times [c,d]$, интегралы понимаются в смысле Лебега, заданные функции $f(t,s)$, $l(t,s,\tau)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны на D, $D \times [a,t]$ и $D \times [a,t] \times [c,s]$ соответственно, причем

[5]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, проект № 1.4407.2011

функции $l(t,s,\tau)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ имеют непрерывные на $D \times [a,t]$ и $D \times [a,t] \times [c,s]$ частные производные по переменной t.

Под решением уравнения (1) понимается непрерывная на D функция $x(t,s)$, подстановка которой в уравнение (1) обращает уравнение (1) в тождество, т.е. решение уравнения (1) — это функция из пространства $C(D)$ непрерывных на D функций, удовлетворяющая этому уравнению. При $t = a$ интегралы в левой части уравнения (1) обращаются в нуль. Поэтому для разрешимости этого уравнения в $C(D)$ необходимо, чтобы функция f удовлетворяла условию $f(a,s) = 0$ при $s \in [c,d]$.

Если $x(t,s)$ — решение уравнения (1), то справедливо тождество

$$\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma \equiv f(t,s), \quad (2)$$

Дифференцируя это тождество по t, получим тождество

$$l(t,s,t)x(t,s) + \int_a^t l_t'(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s n(t,s,t,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int_a^t \int_c^s n_t'(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma \equiv f_t'(t,s), \quad (3)$$

которое означает, что $x(t,s)$ — решение уравнения

$$l(t,s,t)x(t,s) + \int_a^t l_t'(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s n(t,s,t,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int_a^t \int\limits_c^s n_t'(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = f_t'(t,s). \quad (4)$$

Обратно, если $x(t,s)$ — решение уравнения (4), то справедливо тождество (3). С применением формулы для дифференцирования по параметру интеграла, зависящего от параметра, из тождества (3) получаем тождество (2). Поэтому $x(t,s)$ — решение уравнения (1). Таким образом, уравнения (1) и (4) равносильны. Следовательно, вместо изучения интегрального уравнения

(1) первого рода с частными интегралами можно изучать уравнение (4), которое при некоторых условиях на функцию $l(t,s,t)$ может быть интегральным уравнением Вольтерра второго рода с частными интегралами.

Теорема 1. *Пусть заданные функции* $f(t,s)$, $l(t,s,\tau)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ *и их частные производные по* t *непрерывны на* D, $D\times[a,t]$ *и* $D\times[a,t]\times[c,s]$ *соответственно. Тогда справедливы утверждения:*

1. Если $l(t,s,t)\neq 0$, *то уравнение (4) записывается в виде следующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода с частными интегралами:*

$$x(t,s)+\int_a^t \tilde{l}(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_c^s \tilde{m}(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+$$

$$+\int_a^t\int_c^s \tilde{n}(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma=\tilde{f}(t,s), \tag{5}$$

где

$$\tilde{l}(t,s,\tau)=\frac{l'_t(t,s,\tau)}{l(t,s,t)},\ \tilde{m}(t,s,\sigma)=\frac{n_t(t,s,t,\tau)}{l(t,s,t)},$$

$$\tilde{n}(t,s,\tau,\sigma)=\frac{n'_t(t,s,\tau,\sigma)}{l(t,s,t)},\ \tilde{f}(t,s)=\frac{f'_t(t,s)}{l(t,s,t)}.$$

При этом уравнение (5) имеет единственное решение в $C(D)$ *и это решение можно найти методом последовательных приближений.*

2. Если $l(t,s,t)=0$ *хотя бы в одной точке* $(t_0,s_0,t_0)\in D\times[a,t]$, *то уравнение (5) не является ни фредгольмовым и ни нетеровым.*

Будем говорить, что уравнение (1) допускает *регуляризацию (регуляризуемо)*, если его можно записать в виде (5) с $l(t,s,t)\neq 0$. Таким образом, в условии теоремы 1 регуляризуемое интегральное уравнение Вольтерра первого рода (1) с частными интегралами имеет единственное решение в $C(D)$.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2000. – 252 с.

3. Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2002. – 208 с.

4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C – теория. – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.

5. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

Функции вращения для некоторых случаев интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения

Е.О. Кантонистова

(Москва, МГУ им.М.В.Ломоносова; *kysin@rambler.ru*)

Дадим определение интегрируемой гамильтоновой системы на поверхности вращения в потенциальном поле.

Пусть дано многообразие S, диффеоморфное $(a,b)\times S^1$ (числа a и b – конечны), с метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ в полярных координатах $(r, \varphi(mod 2\pi))$. Функции $V(r)$, $f(r)$ – гладкие функции на отрезке (a,b), причем $f(r) > 0$ при $r \in (a,b)$. Функция $V(r)$ называется потенциалом, $f(r)$ – функцией вращения. Система, заданная с помощью пары функций $(f(r), V(r))$ является интегрируемой гамильтоновой системой на многообразии S. Назовем ее *системой на поверхности вращения.*

Её фазовое пространство четырехмерно (координаты $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$).

Она имеет два первых интеграла: H – энергия, p_φ – проекция момента импульса на ось вращения.

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r). \qquad (1)$$

Определение. Отображение $\Phi: S \to \mathbb{R}^2$: $(r, \varphi, p_r, p_\varphi) \mapsto (H(r, \varphi, p_r, p_\varphi), p_\varphi(r, \varphi, p_r, p_\varphi))$ называется *отображением момента.*

Определение. Если $rkd\Phi(x) < 2$, то x – *особая точка отображения момента*, а $\Phi(x)$ – *особое значение отображения момента.* Множество особых значений $\Sigma = \{\xi = \Phi(x),\ x$ – особая точка$\}$ – *бифуркационная диаграмма.*

Пусть теперь построена бифуркационная диаграмма, т.е. мы имеем набор кривых на плоскости с координатами (H, p_φ). Фиксируем произвольное значение $H = H_0$, принадлежащее образу отображения момента. Тогда прообраз множества точек этого образа является трехмерным многообразием Q^3 – *изоэнергетическим многообразием*, причем любой точке (H_0, p_φ) диаграммы, не лежащей на бифуркационной кривой, отвечает один (или несколько) торов лиувилля, а точкам $(H_0, p_{\varphi 0})$ лежащим на особых кривых, отвечают некоторые перестройки торов. Перестройка определенного типа называется *атомом.*

Вывод: зная типы перестроек торов (т.е. атомы), происходящих в прообразах точек бифуркационных кривых, по бифуркационной диаграмме можно построить молекулу системы для каждого значения энергии H. *Молекула* – это граф, вершины которого отвечают перестройкам торов, а ребра отвечают регулярным значениям отображения момента.

Следующим этапом исследования системы является подсчет *меток* – некоторых инвариантов интегрируемой системы – на ребрах молекулы. Молекула с метками на ребрах называется *меченой молекулой.* Меченая молекула является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности, а именно:

Теорема [1]. *Две интегрируемые системы на изоинергетических поверхностях Q и Q', заданные гамильтоновыми векторными полями v и v' соответственно, лиувиллево эквива-*

лентны в том и только в том случае, когда их меченые молекулы W^* и $W^{*'}$ совпадают.

Рассмотрим теперь меченую молекулу W^* системы $(v = sgradH, Q)$. Согласно теореме Лиувилля, существует такая система координат $(\varphi_1 mod 2\pi,\ \varphi_2 mod 2\pi)$ на торе, в которой векторной поле выпрямляется и имеет вид $v = a\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + b\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$, причем координатные линии $\{\varphi_i = const\}$ гомологичны базисным циклам (λ, μ) на торе.

Выберем какое-нибудь ребро молекулы данной системы. В прообразе каждой внутренней точки этого ребра лежит ровно один регулярный тор лиувилля.

Определение. Числом вращения гамильтоновой системы на торе относительно базиса (λ, μ) называется отношение $\rho = \frac{a}{b}$ (если $b = 0$, то полагаем $\rho = \infty$).

Распространим базис (λ, μ) гладким образом на другие торы ребра молекулы. Параметризуем это семейство торов параметром $t \in (0, 1)$. В результате получим функцию $\rho = \rho(t)$.

Определение. Функция $\rho(t)$ на интервале $(0, 1)$ называется *функцией вращения* данной интегрируемой системы.

Функция вращения является инвариантом траекторной эквивалентности систем.

Теорема [1]. *Пусть v и v' – две интегрируемые системы на симплектических 4-многообразиях M и M'. Рассмотрим два однопараметрических регулярных семейства E и E' торов Лиувилля в M и M'. Тогда эти системы топологически (гладко) траекторно эквивалентны на E и E' в том и только в том случае, когда на каждом из семейств существуют базисы (λ, μ) и (λ', μ') такие, что функции вращения ρ и ρ', записанные в этих базисах, непрерывно (гладко) сопряжены.*

Пусть построена функция вращения на каком-либо ребре молекулы. Запишем набор чисел, состоящий из значения функции вращения в точке $t = 0$, затем из ее значений в точках локальных экстремумов, и из значения в точке $t = 1$. Полученный набор чисел называется *вектором вращения (R-вектором)* системы. Если два вектора R_1 и R_2 совпадают, то соответствующие им функции $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ непрерывно сопряжены.

Таким образом, функция вращения полностью определяется своим вектором вращения.

Гипотеза Фоменко. *Для системы на поверхности вращения, заданной парой функций $(f(r), V(r))$, существует такое значение энергии $\widetilde{H}$, что для любого $H > \widetilde{H}$ меченые молекулы, а также векторы вращения на их ребрах совпадают.*

Были доказаны следующие теоремы, а затем построены графики функций вращения для изучаемых систем.

Теорема 1. *Функция вращения для системы на поверхности вращения, заданной парой функций $(f(r), V(r))$, имеет вид*

$$\rho(H, p_\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{p_\varphi dr}{f(r)\sqrt{2(H - V(r))f^2(r) - p_\varphi^2}},$$

где r_1, r_2 – корни уравнения $2(H - V(r))f^2(r) - p_\varphi^2 = 0$.

Теорема 2. *Для любых гладких функций $f(r)$, $V(r)$ на $r \in [-1; 1]$ существует энергия $\widetilde{H}$ такая, что при всех $H > \widetilde{H}$ векторы R_H не зависят от H.*

Литература

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые Гамильтоновы Системы. Том 1. – Издательский дом "Удмуртский университет". 1999.

Теорема о композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов

П. Кобылинский

(Воронеж, Воронежский государственный университет)

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ определяется формулой. Свойства этого преобразования исследованы в [1]. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$ следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$$

здесь

$$u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \ \ t = \varphi^{-1}(\tau)$$

- функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье. Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $P(D_x, D_{\alpha,t})$ оператор по формуле $P(D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[p(t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]]$,где символ $p(t,\xi,\eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным $\xi, \ \eta$ не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. *Будем говорить, что символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\rho}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$ (открытое множество), если функция $p(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, ...,$ $l = 0, 1, 2, ...$ справедливы оценки $\left|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial_\eta^l\lambda(t,\xi,\eta)\right| \le c_{jl}(1+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-\rho l}$ с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ - произвольный отрезок. Здесь σ - действительное число, $\rho \in (0;1]$*

Теорема 1. *Пусть* $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *и* $Q(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *- весовые псевдодифференциальные с символами* $p(t, \xi, \eta)$ *и* $q(t, \xi, \eta)$*, принадлежащими соответственно классам* $S^{m_1}_{\alpha,\rho}(\Omega)$ *и* $S^{m_2}_{\alpha,\rho}(\Omega)$ *(*m_1 *и* m_2 *- действительные числа). Тогда для любого* $N \geq 0$ *существует такое* $N_1 > 0$ *и такой символ* $T_{N_1}(t, \xi, \eta) \in S^{-N}_{\alpha,\rho}\Omega)$*, что справедливо равенство* $P(t, D_x, D_{\alpha,t})Q(t, D_x, D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1-1} R_j(t, D_x, D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t})$*, где* $T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *- весовой псевдодифференциальный оператор с символом* $T_{N_1}(t, \xi, \eta)$*;* $R_j(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *- весовой псевдодифференциальный с символом*

$$r_j(t, \xi, \eta) = \frac{1}{j!}\partial^j_\eta p(t, \xi, \eta) \cdot (\alpha(t)\partial_t)^j q(t, \xi, \eta).$$

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теорема 1, доказана в [2].

Литература.

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

2. Баев А. Д., Садчиков П. В. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика.– 2010, №1. – С. 162-168.

О псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от параметра

Р.А. Ковалевский

(Воронеж, Воронежский государственный университет)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$при$t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$,определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Свойства этого преобразования доказаны в [1]. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Это равенство позволяет также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье.

В [1] показано, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, ...,$$

где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор с символом, зависящим от комплексного параметра p. Этот оператор определен формулой

$$K^\sigma\left(p, t, D_x, D_{\alpha,t}\right) v\left(x, t\right) = F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha \left[\lambda\left(p, t, \xi, \eta\right) F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v\left(x, t\right)\right]\right]$$

. **Определение 1.** *Будем говорить, что символ $\lambda\left(p, t, \xi, \eta\right)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ открытое множество, $p \in Q$, где Q- некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ - действительное число, если функция $\lambda\left(p, t, \xi, \eta\right)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки*

$$\left|\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \frac{\partial^l}{\partial\eta^l}\lambda\left(p, t, \xi, \eta\right)\right| \le c_{m,l}\left(|p| + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma - m - l)}$$

с константами $c_{m,l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\ \eta \in R^1$, $p \in Q$, $t \in \Omega$.

Определение 2. *Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма*

$$\|v\|^2_{s,\alpha,p} = \int_{R^n} (|p| + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$ (σ - действительное число), $\Omega \subset \bar{R}^1_+$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $K^\sigma(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.*

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

Интегрируемость инвариантных распределений невырожденных бигамильтоновых структур

И.К. Козлов
(г. Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова; *ikozlov90@gmail.com*)

В этой работе мы исследуем интегрируемость некоторых распределений, которые естественным образом возникают при рассмотрении пар согласованных симплектических структур на гладких многообразиях.

Определение. *Пару симплектических форм (ω_0, ω_1) на многообразии M мы будем называть согласованными, если тензор Нийенхейса поля эндоморфизмов $P = \omega_0^{-1}\omega_1$ равен нулю $N_P = 0$. Напомним, что тензор Нийенхейса N_P поля эндоморфизмов P задаётся формулой*

$$N_P(X,Y) = [PX,PY] - P[PX,Y] - P[X,PY] + P^2[X,Y].$$

Пара симплектических форм на многообразии M согласованы тогда и только тогда, когда соответствующие пуассоновы структуры являются согласованными (т.е. задают бигамильтонову структуру). Поэтому пару согласованных симплектических форм также иногда называют невырожденной бигамильтоновой структурой на многообразии M. Подробнее о бигамильтоновых структурах см., например, [3], а также приведённые там ссылки.

В этой работе мы будем исследовать инвариантные распределения, которые определяются следующим образом. Распределение F на многообразии M, на котором задана пара согласованных симплектических форм (ω_0, ω_1) мы будем называть *инвариантным*, если каждое подпространство $F_x \subset T_x M$ является инвариантным относительно действия группы линейных преобразований соответствующего касательного пространства, сохраняющих обе формы, $\mathrm{Aut}(T_x M, \omega_0, \omega_1)$.

Вопрос об интегрируемости инвариантных распределений был поставлен ранее в работе [3]. В этой работе мы дадим ответ на этот вопрос для точек общего положения. Для определения того, какие точки мы будем рассматривать, нам потребуется следующее утверждение из линейной алгебры, которое является простым частным случаем теоремы Жордана-Кронекера о каноническом виде произвольной пары кососимметрических билинейных форм. (Подробнее о теореме Жордана-Кронекера см., например, [1].)

Теорема. *Пусть A и B — две невырожденные кососимметрические билинейные формы на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Тогда, если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то существует существует такой базис пространства V, что матрицы обеих форм A и B одновременно приводятся к блочно-диагональному виду, состоящему из жордановых блоков с собственным значением $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. В вещественном случае пару невырожденных билинейные формы A и B также можно привести к блочно-диагональному виду, где каждый блок является либо жордановым блоком с собственным значе-*

нием $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, либо вещественным жордановым блоком с комплексным собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$.

Определение. *Пусть (ω_0, ω_1) — пара согласованных симплектических форм на многообразии M. Точку $x_0 \in M$ мы будем называть регулярной, если в некоторой её окрестности Ox_0 постоянны следующие инварианты Жордана–Кронекера: количество различных собственных значений λ_i операторов $P_x : T_xM \to T_xM$, а также количество и размеры жордановых блоков, отвечающих каждому собственному значению λ_i.*

Следующая теорема, доказанная в [2] даже в чуть более общем случае, позволяет свести задачу к случаю одного собственного значения в комплексном случае или к случаям одного вещественного или двух комплексно-сопряжённых собственных значений в вещественном случае.

Теорема. ([2]) *Пусть (ω_0, ω_1) — пара согласованных симплектических форм на многообразии M. Тогда у любой регулярной точки $x_0 \in (M, \omega_0, \omega_1)$ существует окрестность Ox изоморфная прямому произведению многообразий, с заданным на них парами согласованных симплектических форм:*

$$(Ox, \omega_0, \omega_1) = \prod (O_i x, \omega_{0,i}, \omega_{1,i}),$$

где характеристический многочлен каждой пары форм $(\omega_{0,i}, \omega_{1,i})$ неразложим.

Следующие две теоремы дают полный ответ на вопрос об интегрируемости инвариантных распределений для регулярных точек невырожденных бигамильтоновых структур.

Теорема. *Пусть многообразие M, с заданной на нём парой согласованных симплектических структур (ω_0, ω_1) распадается в прямое произведение*

$$(M, \omega_0, \omega_1) = (M', \omega_0', \omega_1') \times (M'', \omega_0'', \omega_1''),$$

где (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') — пары согласованных симплектических форм на M' и M'' соответственно. Тогда, если характеристические многочлены χ' и χ'' пар форм (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') взаимнопросты в каждой точке M, то любое инвариантное распре-

деление F на M является прямым произведением инвариантных распределений F' и F'' на M' и M'' соответственно. Инвариантное распределение F на M интегрируемо тогда и только тогда, когда интегрируемы соответствующие распределения F' на M' и F'' на M''.

Теорема. *Рассмотрим пару согласованных форм ω_0, ω_1 на M с одним собственным значением λ или с одной парой комплексно-сопряжённых собственных значений $\alpha \pm i\beta$.Пусть x_0 — регулярная точка M. Предположим, что в точке x_0 соответствующее разложение Жордана–Кронекера пространства $(T_{x_0}M, \omega_0, \omega_1)$ состоит из жордановых $k_1+1, k_2, \ldots, k_n$ блоков. Тогда существует окрестность точки x_0, в которой все инвариантные распределения, кроме, может быть, $Ker(P-\lambda E)^{k_i}$ и $Ker(P^2-2\alpha P+(\alpha^2+\beta^2)E)^{k_i}$, где $i>1$, являются интегрируемыми. В случае одного собственного значения λ, распределения $Ker(P-\lambda E)^{k_i}$, где $i>1$, являются интегрируемыми в некоторой окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда собственное значение λ постоянно в некоторой окрестности точки x_0. Аналогично в случае пары комплексно-сопряжённых собственных значений $\alpha \pm i\beta$, распределения $Ker(P^2-2\alpha P+(\alpha^2+\beta^2)E)^{k_i}$, где $i>1$, являются интегрируемыми в некоторой окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда функции α и β постоянны в некоторой окрестности точки x_0.*

Литература

1. Козлов И. К. Элементарное доказательство теоремы Жордана–Кронекера – Матем. заметки, том 94, выпуск 6. 2013. с. 854-867.

2. Turiel F. J. Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles – Manuscripta Math., vol. 82, no. 1. 1994. pp. 349–362.

3. Болсинов А. В., Изосимов А. М., Коняев А. Ю., Ошемков А. А. Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования – Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Том 28. 2012. с. 119-191.

Коэффициент несимметрии

Д.В. Костин
(Воронеж, ВГУ; *dvkostin@rambler.ru*)

В теории и практике создания некоторых технических устройств имеется необходимость отыскания решений, связанных с оптимизацией тригонометрических полиномов. Например, в задаче отыскания многомодового закритического прогиба упругой системы [1] с минимальной величиной относительного прогиба и в задаче повышения эффективности зубчатой передачи с целью увеличения коэффициента несимметрии силового импульса на выходе [2]. Аналогичные оптимизационные задачи имеются в теории антенных устройств, в теории оптимальных измерений динамически искаженных сигналов [3], в нелинейной оптике и других задачах современной физики.

Математической модель направляющего импульса [4] может быть представлена в виде тригонометрического полинома

$$f_n(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cos(kt),\ t\in[0,\pi],\ \lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n). \qquad (1)$$

Определение 1 *Функционал*

$$K_n(\lambda)=\frac{\max\limits_t f_n(t,\lambda)}{|\min\limits_t f(t,\lambda)|}\,,$$

называется коэффициентом несимметрии [5].

В ряде прикладных задач решается проблема создания эффективного импульса, путем максимизации функционала $K_n(\lambda)$ по вариациям λ

$$K_n(\lambda)\to\sup_{\lambda}$$

при условиях

$$\int\limits_0^{\pi} f_n(t,\lambda)dt=0,\quad \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=c>0. \qquad (2)$$

Определение 2. *Многочлен $f_n(t,\overline{\lambda})$, решающий задачу (1) – (2), называется оптимальным [5].*

Основным результатом настоящего сообщения является следующая теорема.

Теорема (Теорема об оптимальном многочлене)

Многочлен (1) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера [6]

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\cos(kt).$$

При этом имеет место равенство

$$\max_{\lambda} K_n(\lambda) = n.$$

Доказательство этой теоремы приводится в работе [5].

Литература

1. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царёв // Современная математика. Фундаментальные направления. – М.: МАИ, 2004. – Т. 12. – С. 3–140.

2. Ермоленко В.Н. Инновационные решения для свайного фундаментостроения/В.Н. Ермоленко // Стройпрофиль, № 6 (84), 2010. С. 20-22.

3. Ермоленко В.Н. Оптимизация полигармонического импульса / В.Н. Ермоленко, В.А. Костин, Ю.И. Сапронов, Д.В. Костин // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск 2012, №27 (286), вып. 13.

4. Постон Т. Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

5. Костин В.А. Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов /В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // ДАН. – 2012. Т. 445, № 3. – С. 271–273.

6. Левитан Б.М. Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. – М.: Гос. изд-во техн.-тор. лит. 1953. – 396 с.

Задача о нелокальных ветвях бифурцирующих решений уравнения Кармана в случаи осесимметричных конфигураций

Т.И. Костина
(Воронеж, ВГТУ; *tata_ sti@rambler.ru*)

Формы упругих равновесий круглой пластины, равномерно сжатой по краю (вдоль нормалей), в модели Кармана описывается системой двух уравнений [1]:

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w - [w, \phi] = \Delta^2 \phi + \frac{1}{2}[w, w] = 0, \tag{1}$$

в которой Δ — оператор Лапласа, $[w, \phi] = w_{xx}\phi_{yy} + w_{yy}\phi_{xx} - 2w_{xy}\phi_{xy}$, w — функция прогиба, ϕ — функция напряжения, λ — параметр нагрузки. Уравнение (1) дополняется краевыми условиями, отвечающими характеру закрепления края пластины. Рассмотрим случай жесткого закрепления:

$$\phi = \phi_x = \phi_y = w = w_x = w_y = 0|_{\partial\Omega}. \tag{2}$$

Здесь Ω — область определения функций w, ϕ, заданная в виде единичного круга и интерпретируемая как геометрическая форма ненагруженной пластины: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Уравнение (1) при краевых условиях (2) является уравнением Эйлера-Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(w, \phi, \lambda) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} \left(|\Delta w|^2 - |\Delta \phi|^2 - \lambda |\nabla w|^2 - \phi[w, w]\right) dx\, dy.$$

После перехода к полярным координатам и «спуска» в пространство осесимметричных функций, а также соответствующей замены получим

$$U(v, \psi, \lambda) = \widehat{V}(w, \phi, \lambda) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 r \left(\mathcal{A}(v)v - \mathcal{A}(\psi)\psi - \lambda v^2 + \frac{\psi v^2}{2r}\right) dr,$$

где $\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} I$ — дифференциальный оператор Бесселя.

Стандартным редуцирующим переходом к функционалу

$$\tilde{U}(v,\lambda) = \sup_{\psi} U(v,\psi,\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 r\left(\mathcal{A}(v)v - \lambda v^2 + \frac{1}{4}\,\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{v^2}{r}\right)\frac{v^2}{r}\right)dr \tag{3}$$

избавляемся от переменной ψ. Устойчивые осесимметричные конфигурации пластины соответствуют точкам локального минимума функционала (3).

Из краевых условий (2) и условия осевой симметрии следует, что v удовлетворяет граничным условиям $v(0) = v(1) = 0$. Если наложить ограничение на разность прогиба в срединной точке пластины (по сравнению с краем), то мы придем к задаче на экстремум для функционала (3) при условии $\int\limits_0^1 vdr = const$. Последняя задача сводится к задаче поиска экстремалей расширенного функционала (без ограничений) $\mathcal{U} := \tilde{U}(v,\lambda) + q\int\limits_0^1 vdr, \quad q \in \mathbb{R}^1$.

Нелокальная вычислительно-аналитическая процедура была ранее апробирована в случаях уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого [2], и в осесимметричном случаи она применяется (с необходимыми модификациями) к данной задаче, что позволяет получить изображения приближенно вычисленной ключевой функции и прогибов пластины (соответствующих критическим точкам редуцированного функционала энергии)[3]. Разработка теоретической основы для численного решения стала возможной благодаря работам Ю.И. Сапронова и А.В. Гнездилова [4], где было установлено, что ключевая функция, отвечающая за ветвление осесимметричных конфигураций круглой упругой пластины при её равномерном (по контуру) сжатии в направлении нормалей, глобально продолжима на пространство ключевых переменных. Интересно рассмотреть этот вопрос в случаи неосесимметричных конфигураций.

Литература

1. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович // – М. : Наука. 1989. – 376 с.

2.Костина Т.И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова-Шмидта// Математические модели и операторные уравнения. Том 5, часть 1. Воронеж: ВорГУ, 2008. - С. 98-103.

3.Костина Т.И., Сапронов Ю.И. Вычисление и применение ключевой функции в задаче о нелокаль-ных прогибах круглой упругой пластины// Математиче-ские модели и операторные управления. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 7. Воронеж: ВорГУ, 2011. - С. 79-88.

4.Гнездилов А.В. Осесимметрическая конечномерная редукция для круглой упругой пластины / А.В. Гнездилов, Ю.И. Сапронов // Материалы конференции по функциональному анализу и математической физике, посвященной 80-летию С.Г.Крейна – Воронеж, 1997. – С. 32-36.

Об отображениях в некоммутативные алгебры

М.Н. Крейн

(Липецк, ЛГПУ; *travkin@lipetsk.ru*)

Многие конструкции, построенные в [1] для коммутативных алгебр, можно перенести с некоторыми модификациями и на случай некоммутативных алгебр.

Пусть K - нормированная алгебра, в общем случае некоммутативная, над полем k, содержащем поле действительных чисел $\mathbb{R}$, с открытым множеством обратимых элементов (например, операторная алгебра), M - хаусдорфово топологическое пространство, $\mathcal{F} = C_K(M)$ - алгебра непрерывных функций из M в K с поточечно определенными операциями, которая также некоммутативна, если некоммутативна K, $|\mathcal{F}|$ - множество k-гомоморфизмов из $\mathcal{F}$ в K с базой топологии $\{f^{-1}(V) \mid V \subset K$

- открыто, $f \in |\mathcal{F}|\}$, $\theta :\ M \to |\mathcal{F}|$ - отображение, задаваемое формулой $[\theta(p)](f) = f(p)$.

Теорема. Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) M компактно; б) M - конечномерное многообразие. Тогда 1) θ инъективно; 2) всякий гомоморфизм из $|\mathcal{F}|$ представляется в виде суммы $\theta(p)$ для некоторого $p \in M$ и гомоморфизма β, все значения которого необратимы в K.

Доказательство. Инъективность θ следует из того, что, поскольку M хаусдорфово, для различных точек $p,\ q \in M$ найдется функция $f \in \mathcal{F}$ с различными значениями $f(p)$ и $f(q)$, откуда $[\theta(p)](f) \neq [\theta(q)](f)$.

Докажем 2). Выберем в $\mathcal{F}$ такую действительную функцию φ, что прообраз каждого ее значения компактен в M. (Условия, наложенные на алгебру K, обеспечивают включение множества действительных непрерывных функций в $\mathcal{F}$.) При выполнении условия а) прообразы любой функции компактны, при выполнении условия б) известно, что такая действительная функция существует. Пусть $\alpha \in |\mathcal{F}|$, $\alpha : \mathcal{F} \to K$ - некоторый гомоморфизм, $\alpha(\varphi) = \lambda \in \varphi(M) \subset \mathbb{R}$ и $L = \varphi^{-1}(\lambda)$. Предположим, что $\forall x \in L\ \exists f_x \in \mathcal{F}\ \ [\alpha(f_x) - f_x(x)]$ обратимо. Тогда найдется такой элемент $c_x \in K$, что $c_x[\alpha(f_x) - f_x(x)] = 1$. Так как множество обратимых элементов открыто, то для некоторого $\varepsilon > 0$ в K существует ε-окрестность единицы, состоящая из обратимых элементов. (Тогда для $n \in \mathbb{R}$ εn-окрестность состоит из обратимых элементов.) В силу непрерывности функции f_x, а значит, и функции $c_x[\alpha(f_x) - f_x]$, в M найдется открытая окрестность U_x точки x, в которой значения последней функции лежат в указанной ε-окрестности единицы. Окрестности $\{U_x\}_{x\in L}$ образуют открытое покрытие множества L, и, в силу компактности L, из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Определим функцию

$$g(x) = (\varphi(x) - \lambda)^2 + \sum_{i=1}^{n} [c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x))]$$

Первое слагаемое здесь действительно, то есть лежит в $\mathbb{R} \subset K$, и неотрицательно.

$$\forall x \in M \ \ \|g(x)\| = \|[(\varphi(x)-\lambda)^2+n]+\{\sum_{i=1}^{n}[c_{x_i}(\alpha(f_{x_i})-f_{x_i}(x)]-n\}\| \leq$$

$$\leq [(\varphi(x)-\lambda)^2+n]+\sum_{i=1}^{n}\|[c_{x_i}(\alpha(f_{x_i})-f_{x_i}(x)-1\|$$

$\sum_{i=1}^{n}\|[c_{x_i}(\alpha(f_{x_i})-f_{x_i}(x)-1\| \leq \varepsilon n \leq \varepsilon n_x$ где $n_x = (\varphi(x)-\lambda)^2+n$, следовательно, $g(x)$ лежит в (εn_x)-окрестности действительной положительной точки n_x, поэтому $g(x)$ обратимо при любом $x \in M$. Следовательно, на M определена функция $\frac{1}{g}$: $(\frac{1}{g})(x) = [g(x)]^{-1}$. $\forall x \in M \ \ (g \cdot \frac{1}{g})(x) = g(x) \cdot [g(x)]^{-1} = 1$, то есть $g \cdot \frac{1}{g}$ - единица алгебры $\mathcal{F}$, и $\alpha(g) \cdot \alpha(\frac{1}{g}) = \alpha(g \cdot \frac{1}{g}) = \alpha(1) = 1$. Значит, $\alpha(g)$ - обратимый элемент, потому не равен нулю. В то же время

$$\alpha(g) = \alpha[(\varphi-\lambda)^2+\sum_{i=1}^{n}[c_{x_i}(\alpha(f_{x_i})-f_{x_i})] =$$

$$= [\alpha(\varphi)-\lambda]^2+\sum_{i=1}^{n}\{c_{x_i}[\alpha(f_{x_i})-\alpha(fx_i])\} = 0$$

Получено противоречие. Следовательно, предположение неверно, и $\exists x_\alpha \in L \ \ \forall f \in \mathcal{F} \quad \alpha(f) - f(x_\alpha) = \alpha(f) - [\theta(x_\alpha)](f)$ необратимо. Здесь $\beta = \alpha - \theta(x_\alpha)$. Теорема доказана.

Подобно тому, как это сделано в [1] для коммутативных алгебр, можно определить касательный вектор в точке $z \in M$ как отображение $\xi : \ \mathcal{F} \to K$, удовлетворяющее условиям:
1) K-линейность, то есть $\forall \lambda_j, \ \mu_j \in K \ \forall f_j \in \mathcal{F} \quad \xi(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j \mu_j) = \sum \lambda_j \xi(f_j)\mu_j$ (Здесь учтена некоммутативность алгебры K.);
2) правило Лейбница в точке z: $\forall f, g \in \mathcal{F} \quad \xi(fg) = f(z)\xi(g) + g(z)\xi(f)$.

Сложение касательных векторов и умножение их на элементы поля k можно определить равенствами:

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad (\xi_1 + \xi_2)(f) = \xi_1(f) + \xi_2(f);$$
$$\forall a \in k \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (a\xi)(f) = a\xi(f).$$

(Из-за некоммутативности алгебры K результат умножения касательного вектора на ее элементы по такой же формуле может не быть касательным вектором.)

Введенные операции превращают множество касательных векторов в точке z в линейное пространство над полем k.

Литература. 1. Джет Неструев. Гладкие многообразия и наблюдаемые. – М.: МЦНМО. 2000. – 300 с.

Фундаментальные решения уравнений в частных производных, содержащих оператор Бесселя

А.А. Куликов

(Воронеж, Воронежский государственный университет; *kulikov_aa@mail.ru*)

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании фундаментального решения дифференциального оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, B_{x_n}\right)$, где P — многочлен от n переменных,

$$B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{k}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad k = \mathrm{const} > 0$$

— сингулярный оператор Бесселя, а также свойства фундаментальных решений B-гипоэллиптических уравнений. Указанный класс уравнений был впервые введен автором в [1] и затем рассматривался в работах [2 – 7]; он включает, в частности, все сингулярные эллиптические уравнения, изучавшиеся в научной школе профессора И. А. Киприянова. Предварительно приводятся некоторые понятия теории специальных пространств основных и обобщенных функций, используемых для изучения рассматриваемых сингулярных уравнений в частных производных.

Пусть Ω_s — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, симметричное относительно гиперплоскости $x_n = 0$. Здесь и везде в дальнейшем символ s в обозначении множества из $\mathbf{R}^n$ указывает на его симметричность относительно гиперплоскости $x_n = 0$. Символом $C_+^m \Omega_s b$ (соответственно $C_{0,+}^m \Omega_s b$), $m = 0, 1, 2, \ldots$, будем обозначать совокупность всех функций класса $C^m \Omega_s b$ (соответственно $C_0^m \Omega_s b$) [10], четных по последней переменной.

Пусть $\mathcal{D}\,(\Omega_s)$ — линейное топологическое пространство всех бесконечно дифференцируемых на множестве Ω_s функций с компактными носителями [10, 11] и $\mathcal{D}_+\,(\Omega_s)$ — множество всех четных по последней переменной функций пространства $\mathcal{D}\,(\Omega_s)$. В пространстве $\mathcal{D}_+\,(\Omega_s)$ вводится топология, индуцированная в нем топологией пространства $\mathcal{D}\,(\Omega_s)$. Сопряженное к $\mathcal{D}_+\,(\Omega_s)$ пространство, наделенное слабой топологией, будем обозначать через $\mathcal{D}'_+\,(\Omega_s)$. Как показано в [9], пространство $\mathcal{D}'_+\,(\Omega_s)$ можно отождествить с пространством всех четных по последней переменной функционалов из $\mathcal{D}'\,(\Omega_s)$.

Если обобщенные функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ из $\mathcal{D}'_+\,(\Omega_s)$ равны на открытом множестве $V_s \subset \Omega_s$, то есть

$$(f,\, \varphi) = (g,\, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_+\Big(V_s\Big),$$

то будем писать

$$f = g, \quad x \in V_s.$$

Пусть $L_1\,(\Omega_s)$ — совокупность всех интегрируемых на множестве Ω_s функций и $L_{1,k,+}\,(\Omega_s)$ — совокупность всех четных по последней переменной функций $f(x)$ из $L_1\,(\Omega_s)$, для которых $f(x)x_n^k \in Ł_1\,(\Omega_s)$. Очевидно, что если множество Ω_s ограничено, то $L_{1,k,+}\,(\Omega_s)$ совпадает с множеством всех четных по последней переменной функций из $L_1\,(\Omega_s)$.

Через $L_{1,k,+}^{\mathrm{loc}}\,(\Omega_s)$ будем обозначать множество всех функций $f(x)$, определенных почти везде в Ω_s и таких, что $\varphi f \in L_{1,k,+} \Omega_s b$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_+\,(\Omega_s)$.

Используя лемму дю Буа-Реймонда [10], мы будем отождествлять каждую функцию $f(x) \in L_{1,k,+}^{\mathrm{loc}}\,(\Omega_s)$ с функционалом

$f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$, действующим по формуле

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\Omega_s} \overline{f(x)} \varphi(x) |x_n|^k \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\Omega_s)\,. \tag{1}$$

Функционалы $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$, действующие по формуле (1), будем называть *регулярными*, а все остальные функционалы из $\mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ — *сингулярными*. Примером сингулярного функционала является δ-функция Дирака:

$$\Big(\delta, \varphi\Big) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_+\Big(\mathbf{R}^n\Big).$$

Введем обозначения: $\alpha = \Big(\alpha', \alpha_n\Big) = \Big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\Big)$, α_j, $j = 1, \ldots, n$ — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + +\alpha_n$, $D_{x_j} = i\partial/\partial x_j$ (i — мнимая единица), $D_{x'} = \Big(D_{x_1}, \ldots, D_{x_{n-1}}\Big)$, $D_x = \Big(D_{x'}, D_{x_n}\Big)$, $D_{x'}^{\alpha'} = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}$, $D_x^\alpha = D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{\alpha_n}$.

Введем в пространстве $\mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ операцию дифференцирования $D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n}$ по формуле

$$\Big(D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} f, \varphi\Big) = \Big(f, D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} \varphi\Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\Omega_s)\,.$$

Как показано в [9], каждый функционал $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ бесконечно дифференцируем, то есть функционал $D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} f$ принадлежит пространству $\mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ при всех α', α_n. С помощью интегрирования по частям легко видеть также, что если функция $f(x) \in C_+^m \Omega_s b$, то ее классические и обобщенные производные $D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} f$, $|\alpha'| + 2\alpha_n \le m$, совпадают в Ω_s.

Фундаментальным решением оператора $P(D_{x'}, B_{x_n})$ (или уравнения $P(D_{x'}, B_{x_n})\, u = 0$) будем называть обобщенную функцию $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+ \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}'_+\left(\mathbf{R}^n\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)\mathcal{E}(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Имеет место следующее утверждение [8].

Теорема 1. *Для любого сингулярного дифференциального оператора* $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \not\equiv 0$ *существует фундаментальное решение* $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$.

Оператор $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \not\equiv \mathrm{const}$ (и уравнение $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)u = f$, где $f \in \mathcal{D}'_+\left(\Omega_s\right)$) будем называть B-г и п о э л л и п т и ч е с к и м (или с и н г у л я р н ы м г и п о- э л л и п т и ч е с к и м), если гипоэллиптическим [11] является его характеристический многочлен $P_1(\xi) = \bar{P}(\xi', -\xi_n^2)$ (здесь $\bar{P}$ — многочлен, получаемый из P заменой его коэффициентов на комплексно сопряженные к ним).

Отметим, что B-гипоэллиптическими являются все B-эллиптические [13] и B-параболические операторы (оператор $P\left(i\dfrac{\partial}{\partial t}, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ называется B-параболическим, если параболическим по Петровскому [14] является его характеристический многочлен $\bar{P}(\lambda, \xi', -\xi_n^2)$). Примером неклассического B-гипоэллиптического уравнения является линеаризованное стационарное вязкое трансзвуковое уравнение с осевой симметрией [15, 16]

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2),$$

где $f(x_1, x_2)$ — заданная функция.

Пусть $n \geq 2$ и

$$d(\xi) = \inf_{s \in \mathbf{C}^n : P_1(s) = 0} |s - \xi|$$

— расстояние от некоторой точки $\xi \in \mathbf{R}^n$ до поверхности $P_1(s) = 0$ в n-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$ точек $s = \sigma + i\tau$, $\sigma, \tau \in \mathbf{R}^n$.

Так как $P_1(\xi)$ — гипоэллиптический многочлен, то найдется такое число $R>0$, что при $|\xi|\geq R$

$$d(\xi)\geq c|\xi|^{\gamma}, \tag{2}$$

где $c>0$ и $0<\gamma\leq 1$ — постоянные, не зависящие от ξ.

Точная верхняя грань тех значений γ, для которых справедливо неравенство (2), называется п о к а з а т е л е м г и п о э л л и п т и ч н о с т и многочлена $P_1(\xi)$. Известно, что показатель гипоэллиптичности многочлена $P_1(\xi)$ равен 1 тогда и только тогда, когда этот многочлен является эллиптическим.

Из результатов работ [11, 12] следует, что гипоэллиптический многочлен может быть записан в виде

$$P_1(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\rho_j\xi_j^{m_j}+P_2\Big(\xi',-\xi_n^2\Big),\quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{3}$$

где $\rho_j\neq 0$ — некоторые постоянные, $m_1\geq 1,\ldots,m_{n-1}\geq 1$, $m_n\geq 2$ (число m_n четное), а степень многочлена $P_2\Big(\xi',-\xi_n^2\Big)$ по каждой из переменных ξ_j $(1\leq j\leq n)$ при фиксированных остальных переменных меньше, чем m_j. При этом, если $P_1(\xi)$ — эллиптический многочлен степени $2m$, то $m_1=\ldots=m_n=2m$.

С помощью модификации методов работ [11, 12] можно доказать следующее утверждение [7].

Теорема 2. *Если $P\left(D_{x'},B_{x_n}\right)$ есть B-гипоэллиптический оператор, то любое его фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ можно отождествить с обычной функцией, бесконечно дифференцируемой вне начала координат и четной по последней переменной. Кроме того, для всех мультииндексов $\alpha=(\alpha',\alpha_n)$ и всех $x\in J\setminus\{0\}$, где $J=\{x\in\mathbf{R}^n:\ |x_1|\leq 1,\ldots,|x_n|\leq 1\}$, имеют место оценки*

$$\Big|D_{x'}^{\alpha'}B_{x_n}^{\alpha_n}\mathcal{E}(x)\Big|\leq c_\alpha|x|^{-2h},$$

где $h = \max\limits_{1 \le j \le n} h_j$, $h_j = h_j(\alpha) \ge 0$ *— наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$2h_j > \frac{1}{\gamma}\bigg(n + k + |\alpha'| + 2\alpha_n\bigg) - m_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

γ *— показатель гипоэллиптичности многочлена* $P_1(\xi) = \bar{P}\bigg(\xi', -\xi_n^2\bigg)$, m_j *— показатели степеней в формуле (3),* $c_\alpha > 0$ *— некоторые постоянные.*

Литература

1. Куликов А. А. О фундаментальных решениях и гипоэллиптичности некоторых сингулярных дифференциальных операторов / А. А. Куликов // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 5. – С. 1049 – 1051.

2. Куликов А. А. О существовании и гладкости обобщенных решений B-гипоэллиптических уравнений / А. А. Куликов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 2. — С. 284 — 289.

3. Куликов А. А. Фундаментальные решения и гипоэллиптичность дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя : дисс. ... канд. физ.-мат. наук / А. А. Куликов. – Воронеж, 1983. – 128 с.

4. Киприянов И. А. Фундаментальные решения B-гипоэллиптических уравнений / И. А. Киприянов, А. А. Куликов // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 1387 — 1395.

5. Куликов А. А. Некоторые свойства обобщенных решений B-гипоэллиптических уравнений / А. А. Куликов // Вестн. ф-та прикл. матем. и мех. – Вып. 6. – Воронеж: ВГУ, 2007. – С. 73 – 83.

6. Куликов А. А. Обобщенные решения B-гипоэллиптических уравнений с переменными коэффициентами / А. А. Куликов // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2008. – № 1. – С. 115 – 131.

7. Куликов А. А. Фундаментальные решения и гипоэллиптичность дифференциальных уравнений, содержащих оператор

Бесселя / А. А. Куликов. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 116 с.

8. Куликов А. А. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя / А. А. Куликов // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 299 — 305.

9. Куликов А. А. Преобразование Фурье-Бесселя в теории сингулярных дифференциальных уравнений / А. А. Куликов, И. А. Киприянов // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 340 – 350.

10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

11. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хёрмандер. – М. : Мир, 1965. – 380 с.

12. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М. : Изд-во иностр. лит., 1959. – 131 с.

13. Киприянов И. А. Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений / И. А. Киприянов, В. И. Кононенко // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 1. – С. 114 – 129.

14. Шилов Г. Е. Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициенами / Г. Е. Шилов // Успехи матем. наук. – 1959. — Т. 14, вып. 5. – С. 3 – 44.

15. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа / О. С. Рыжов // Прикл. матем. и мех. – 1965. – Т. 29, вып. 6. – С. 1004 – 1014.

16. Диесперов В. Н., Ломакин Л. А. Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ-уравнения / В. Н. Диесперов, Л. А. Ломаки // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. – 1974. – Т. 14, № 5. – С. 1244 – 1260.

Об одной краевой задаче для уравнения Бредли-Харпера

А.Н. Куликов
(Ярославль, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова; *anat_kulikov@mail.ru*)

Уравнение Бредли-Харпера (БХ) было введено для описания механизма формирования различных типов рельефа на поверхности плоских мишеней под воздействием потока ионов. Этот способ обработки, начиная с 80-х годов прошлого века широко используется в микро и наноэлектронике. В простейшем варианте это уравнение после нормировок может быть записано в следующей форме [1,2]

$$h_t = -\nu_0 - bh_{xx} - h_{xxxx} + ah_x^2, \tag{1}$$

где $h = h(t,x), b, a, \nu_0 \in R, a \neq 0$. Величина $\nu_0 > 0$ называется скоростью эрозии. Уравнение (1) обычно рассматривали вместе с периодическими краевыми условиями. Например,

$$h(t, x + 2\pi) = h(t, x),$$

которые находили достаточно убедительные объяснения с точки зрения физики [1,2]. По-видимому, еще более содержательны условия

$$h_{xx}(t,0) = h_{xx}(t,1) = h_{xxx}(t,0) = h_{xxx}(t,1), \tag{2}$$

где $x \in [0,1]$, то есть длину мишени считаем равной 1 (после перенормировок). Краевые условия (2) - классический вариант краевых условий из теории упругости, когда концы стержня свободны от внешних нагрузок [3].

Краевая задача (1), (2) допускает решение $h(t,x) = -\nu_0 t + \nu_1, \nu_1 \in R$. Поэтому положим

$$h(t,x) = -\nu_0 t + v(t,x),$$

а затем $u(t,x) = v_x(t,x)$. Для $u(t,x)$ получим краевую задачу

$$u_t = -bu_{xx} - u_{xxxx} + a(u^2)_x, \tag{3}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,1) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) = 0. \tag{4}$$

Следует отметить, что краевая задача (3), (4) представляет самостоятельный интерес, так как уравнение (3) известно в математической физике под названием уравнение Курамото-Сивашинского [4] как модельное уравнение для описания слабой турбулентности в гидродинамике.

Краевая задача (3), (4) имеет семейство однородных состояний равновесия, но с физической точки зрения в первую очередь представляет интерес одно из них: $u = 0$.

Для исследования устойчивости этого состояния равновесия рассмотрим линеаризованную краевую задачу

$$u_t = A(b)u,\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) = 0. \tag{5}$$

Лемма. *При $b \le 4\pi^2$ нулевое решение вспомогательной краевой задачи (5) устойчиво и неустойчиво при $b > 4\pi^2$.*

Отметим, что оно не может быть асимптотически устойчиво, так как спектру устойчивости всегда (при всех b) принадлежит собственное число $\lambda = 0$, которому соответствует собственная функция $e_0(x) = 1$.

Пусть теперь $b = 4\pi^2 + \varepsilon$. При таком выборе b у краевой задачи (3), (4) существует двумерное локально инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$ [5-7], решения на котором могут быть восстановлены после изучения двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Такую систему принято называть нормальной формой. Многообразие $V_2(\varepsilon)$ – локальный аттрактор.

В случае краевой задачи (3), (4) нормальная форма имеет следующий вид

$$\dot{z}_0 = \varepsilon d_1 z_0 z_1 + o(\varepsilon),\ \dot{z}_1 = \varepsilon(6\pi^2 z_1 + d_2 z_1^2) + o(\varepsilon), \tag{6}$$

где $d_1 = -4\pi a, d_2 = (-20\pi^3 a)/9$.

Система (6) имеет семейство состояний равновесия $z_1 = 0, z_0 = Const$. Последним состояниям равновесия соответствуют состояния равновесия $u(t,x) = Const$ краевой задачи (3), (4). Все эти решения неустойчивы.

Наконец, $z_0 = 0, z_1 = -9\pi^2/d_2$ также является состоянием равновесия. Второму состоянию равновесия соответствует неоднородное состояние равновесия краевой задачи (3), (4).

Теорема. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (3), (4) имеет неоднородное состояние равновесия*

$$u(t,x) = -\varepsilon \frac{27}{10\pi a}(\pi + \sin 2\pi x - 2\pi x) + o(\varepsilon). \tag{7}$$

Решение (7) устойчиво при $\varepsilon < 0$ и неустойчиво при $\varepsilon > 0$.

Литература

1. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of Ripple Topography by Ion Bombardment – J.Vac.Tech. A6. 1988. P.2390-2395.

2. Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Стриханов М.Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке – Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т. №2. С.151-158.

3. Бабоков И.М. Теория колебаний – М.: Наука. 1968. 559 с.

4. Sivashinsky G.I. Weak Turbulence in Periodic Flow – Physica 17D. 1985. P. 243-255.

5. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения предельного цикла и ее приложения – М.: Москва. 1980. 367 с.

6. Куликов А.Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы в банаховом пространстве – Исследование по устойчивости и теории колебаний. Ярославль. 1976. С. 114-129.

7. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке – ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. №5. С. 930-945.

Коротковолновые неоднородные рельефы в задаче об эрозии поверхности

Д.А. Куликов

(Ярославль, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова; *kulikov_d_a@mail.ru*)

Среди современных технологий, применяемых в нано и микроэлектронике, можно отметить ту, при которой поверхность обрабатывается потоком "тяжелых"ионов. Она предназначена для формирования на поверхности мишени рельефа заданной конфигурации. Например, волновой с достаточно малой длиной волны.

Среди математических моделей можно отметить две, которые наиболее полно отражают специфику этого технологического процесса – модель Бредли-Харпера и нелокальная модель эрозии [1,2]. Далее ограничимся изучением второй из них и рассмотрим ее в частном случае, когда угол падения ионов близок к критическому [3]. Тогда после перенормировок соответствующее уравнение можно записать в следующем виде

$$u_t = au_{xx} - hw_x + b_2hw_x^2 - b_3hw_x^3, \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$ – отклонение от плоского состояния равновесия $(u = 0), w = u(t, x-h), h > 0, b_2 \in R, b_3 = b_2^2, a > 0$. Уравнение (1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями [1,2]

$$u(t, x + 2d) = u(t, x), \tag{2}$$

где $d > h$ (обычно, $d >> h$). Изучение краевой задачи (1), (2) означает, что мы ограничиваемся случаем цилиндрических деформаций, когда u зависит от t и x, но не зависит от y.

Пусть

$$u(0, x) \in f(x) \in W_2^2[0, 2d], f(x + 2d) = f(x). \tag{3}$$

Тогда смешанная задача (1), (2), (3) локально корректно разрешима, так как может входить в класс абстрактных параболических уравнений, изученных в работе [4].

Вопрос об устойчивости состояния равновесия $u = 0$ в первом приближении приводит к рассмотрению линеаризованной краевой задачи

$$u_t = Au,\ Au = au_{xx} - hw_x,\ u(t, x + 2d) = u(t, x), \tag{4}$$

Линейный дифференциальный оператор

$$Av = av'' - hv'_h,\ v(x + 2d) = v(x),$$

где $v = v(x)$ имеет дискретный спектр

$$\lambda = \lambda_n = -a(\frac{\pi n}{d})^2 - ih\frac{\pi n}{d}\exp(-i(\frac{\pi nh}{d})),$$

отвечающий собственным функциям

$$v_n(x) = \exp(i\frac{\pi nx}{d}), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Отметим, что $\lambda_0 = 0$, а остальные $\lambda_n(a) = \tau_n(a) \pm i\sigma_n(a)$. Для устойчивости нулевого решения вспомогательной краевой задачи (4) достаточно проверить выполнение неравенства $\tau_n(a) \leq 0$ $(n \neq 0)$. При $a > h^2$ выполнено неравенство $\tau_n(a) < 0$ $(n \neq 0)$. Справедливо утверждение.

Лемма. *Существует такое*

$$a = a_{кр} = -h^2\frac{\sin\eta_m}{\eta_m}, \eta_m = \frac{\pi mh}{d}.$$

При этом $m = entier(\xi d/(\pi h))$ *или* $entier(\xi d/(\pi h)) + 1$. *Наконец,* ξ *наименьший положительный корень* $\xi = \operatorname{tg}\ \xi$.

При всех $n \neq 0, \pm m$ *справедливо неравенство* $\tau_n(a) < 0$.

Отметим, что соответствующий максимум может достигаться при одном m или таких m может быть два. Ограничимся первым вариантом. Второй может реализоваться за счет подбора второстепенных параметров.

Пусть теперь $a = a_{\text{кр}}(1 - \beta\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$. Тогда

$$\lambda_0(\varepsilon) = 0, \lambda_{\pm}(\varepsilon) = \tau_m(\varepsilon) + i\sigma_m(\varepsilon),$$
$$\tau_m(\varepsilon) = \beta\eta_m\varepsilon, \sigma_m(\varepsilon) = -\eta_m\cos\eta_m.$$

В ситуации общего положения $\sigma = \sigma_m(0) \neq 0$. Остальные собственные значения лежат в полуплоскости $Re\lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma < 0, n \neq 0, \pm m$.

Применение метода интегральных многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм позволяет свести изучение поведения решений нелинейной краевой задачи (1), (2) к аналогичному вопросу для системы дифференциальных уравнений на трехмерном инвариантном многообразии (центральном многообразии) [5-7] – нормальной форме. Ее главная часть может быть записана в следующем виде

$$\psi' = L_0\rho^2, z' = qz + (L_1 + iL_2)z^2\overline{z}, \tag{5}$$

где $\psi = \psi(s), z = z(s), s = \varepsilon t$. Второе уравнение системы (5) для комплекснозначной функций $z(s)$ имеет автомодельные решения

$$z(s) = \eta \exp(i\omega s + \psi_0), \eta = \sqrt{-\frac{q}{L_1}}, \omega = -\frac{L_2 q}{L_1},$$

если, конечно, $qL_1 < 0, \psi_0 \in R$. Эти периодические решения формируют предельный цикл второго уравнения системы (5), который устойчив, если $q > 0(L_1 < 0)$ и неустойчив, при $q < 0(L_1 > 0)$.

Этому циклу соответствует двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ заполненное решениями вида

$$u(t, x, \varepsilon) = [-L_0\eta^2\varepsilon + o(\varepsilon)]t + \varepsilon^{1/2}[(2\eta\cos(\sigma + \varepsilon\omega)t) + O(\varepsilon)] + H, \tag{6}$$

где $H \in R$. Все решения (6) устойчивы при $q > 0$ $(L_1 < 0)$ и неустойчивы при $q < 0$ $(L_1 > 0)$. Именно решения (6) описывают волновой рельеф, а так как m (см. лемму) обычно достаточно велико, то длина волны мала, т.е. в данной ситуации может реализоваться коротковолновый неоднородный рельеф.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт №МК-2298.2013.1).

Литература

1. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of Ripple Topography by Ion Bombardment – J.Vac.Tech. A6. 1988. P.2390-2395.

2. Рудый А.С., Бачурин В.И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой – Изв. РАН. Серия физическая. 2008. Т. 72. №5. С. 624-629.

3. Sigmund P. A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment – J. Mat.Sci. 1545. V. 9. P. 1545.

4. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве – Труды Мос. Мат. об-ва. 1961. Т. 10. С. 297-350.

5. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения предельного цикла и ее приложения – М.: Москва. 1980. 367 с.

6. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке – ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. №5. С. 930-945.

К теории дифференцируемых многообразий

О.В. Кунаковская

(Воронеж, Воронежский государственный университет; *ovk@math.vsu.ru*)

В работе изучаются гладкие структуры специального типа на банаховых многообразиях. Впервые они были введены автором в [1], см. также [2], [3], [4]. Выделение категории банаховых SC^r-многообразий со структурным пучком $\mathcal{SC}^r$ и ассоциированной с ней категории банаховых векторных SC^r-расслоений позволяет построить полезные в приложениях мультипликативные теории когомологий.

1. Кольцо когомологий SC^r-многообразия с коэффициентами в пучке $\widetilde{SC^r}$.

Пусть X — SC^r-многообразие ($r \geq 2$). Как отмечалось в [1], открытое подмножество U в X является SC^r-многообразием, структура которого индуцирована SC^r-структурой многообразия X. Поэтому на U можно рассматривать алгебру $SC^r(U)$, состоящую из SC^r-функций.

Теорема 1. *Для любого SC^r-многообразия X и произвольного $r \geq 2$ SC^r является предпучком с базой X и со значениями в категории алгебр над полем* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Как указано в следствии 2.4 в [1] для любого открытого множества $U \subset X$ семейство $SC^r(U)$ является ассоциативной коммутативной алгеброй над полем $\mathbf{R}$, содержащей все константы. При этом для любых двух открытых множеств U, V в X, таких что $V \subset U \subset X$, задан гомоморфизм ограничения

$$\rho_V^U : SC^r(U) \to SC^r(V) : h \mapsto h|_V, \tag{1}$$

и если $W \subset V \subset U$, то

$$\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U. \tag{2}$$

В самом деле, естественное задание гомоморфизма (1) осуществляется следующим образом: пусть U наделено SC^r-структурой, индуцированной SC^r-структурой многообразия X, а V наделено SC^r-структурой, индуцированной в свою очередь SC^r-структурой U (на V можно рассматривать и SC^r-структуру, индуцированную непосредственно из X, но обе эти структуры на V совпадают). Если $h \in SC^r(U)$, то для любой точки $x \in X$ найдется такое открытое множество V_x и карта $(\mathcal{O}_x, \chi_x)$ на U SC^r-структуры такие, что $x \in V_x \subset \mathcal{O}_x$ и $h|_{V_x} \circ \chi_x^{-1}|_{\chi_x(V_x)} \in SC^r(\chi_x(V_x))$. Положив $\rho_V^U(h) = h|_V$, покажем, что $h|_V \in SC^r(V)$. Если $x \in V$, то $x \in U$. Выберем V_x и $(\mathcal{O}_x, \chi_x)$ как указано выше. Положим $W_x = V_x \cap V$, $(\Omega_x, \tau_x) = (\mathcal{O}_x \cap V, \chi_x|_{\mathcal{O}_x \cap V})$. Тогда $x \in W_x \subset \Omega_x$, а

$$h|_{W_x} \circ \tau_x^{-1}|_{\tau_x(W_x)} = (h|_{V_x} \circ \chi_x^{-1}|_{\chi_x(V_x)})|_{\chi_x(\mathcal{O}_x \cap V)}$$

— SC^r-функция на $\tau_x(W_x)$. То, что ρ_V^U — гомоморфизм алгебр, очевидно. Очевидно также и равенство (2) при указанном задании ρ_V^U. Это означает (см. [5]), что на категории открытых множеств банахова SC^r-многообразия X задан контравариантный функтор SC^r со значениями в категории алгебр над $\mathbf{R}$, т.е., SC^r

есть предпучок с базой X и со значениями в категории алгебр над $\mathbf{R}$. Теорема 1 доказана.

Построим по предпучку SC^r пучок $\widetilde{SC^r}$ ростков SC^r-функций в точках $x \in X$ как прямой предел алгебр $SC^r(V)$ относительно направленного множества (фильтра) $\Psi(x)$ окрестностей точки x, т.е., если $x \in X$, то стебель пучка $\widetilde{SC^r}$ равен

$$\widetilde{SC^r_x} = \lim_{V \in \Psi(x)} \operatorname{ind} SC^r(V).$$

Напомним, что элемент $\hat{g}$ алгебры $\widetilde{SC^r}$ есть класс эквивалентности на $SC^r(V)$, $x \in V$, по отношению эквивалентности, задаваемому следующим образом: если $g_1 : V_1 \to \mathbf{R}$, $g_2 : V_2 \to \mathbf{R}$, где V_1 и V_2 суть окрестности точки x, то $g_1 \sim g_2$ в том и только в том случае, если существует окрестность $\mathcal{O}$ точки x такая, что $\mathcal{O} \subset V_1 \cap V_2$ и $g_1|_{\mathcal{O}} = g_2|_{\mathcal{O}}$.

Для любого открытого множества $U \subset X$ положим

$$\widetilde{SC^r}(U) = \bigcup_{x \in U} (x, \widetilde{SC^r_x})$$

— дизъюнктное объединение алгебр $\widetilde{SC^r_x}$, $x \in U$. Тогда для любой точки x открытого множества U определен естественный гомоморфизм

$$\rho_x^U : SC^r(U) \to \widetilde{SC^r_x}.$$

Пусть $g \in SC^r(U)$. Обозначим через $[g, U]$ множество всех элементов вида $\rho_x^U(g)$, где x — произвольная точка множества U. Введем в $\widetilde{SC^r}(X)$ топологию стандартным образом [5, 6], приняв множества $[g, U]$ за элементы открытой базы. Таким образом, базой окрестностей в $\widetilde{SC^r}(X)$ некоторого элемента $\alpha \in \widetilde{SC^r_x}$ является совокупность всех множеств $[g, U]$, где $x \in U$ и $\rho_x^U(g) = \alpha$. Естественная проекция $p : \widetilde{SC^r}(X) \to X$, при которой $\widetilde{SC^r_x} = p^{-1}(x)$, является локальным гомеоморфизмом.

Построив по Годеману (см. [5]) каноническую когомологическую резольвенту $C^*(X, \widetilde{SC^r})$

$$0 \to \widetilde{SC^r}(X) \to C^0(X, \widetilde{SC^r}) \to C^1(X, \widetilde{SC^r}) \to \dots \qquad (3)$$

пучка $\widetilde{SC^r}$, определим, следуя также Годеману [5], группы когомологий рассматриваемого SC^r-многообразия X со значениями в пучке $\widetilde{SC^r}$ и с носителями из некоторого фиксированного семейства носителей Φ:

$$H^n_\Phi(X;\widetilde{SC^r}) = H^n(C^*_\Phi(X,\widetilde{SC^r}).$$

Напомним, что здесь $C^0(X,\widetilde{SC^r})$ — пучок ростков не обязательно непрерывных сечений пучка $\widetilde{SC^r}$, а

$$j : \widetilde{SC^r}(X) \to C^0(X,\widetilde{SC^r})$$

— каноническое вложение. Пучки $C^n(X,\widetilde{SC^r})$ определяются следующим образом:

$$C^1(X,\widetilde{SC^r}) = C^0(X;\mathcal{Z}^1(X;\widetilde{SC^r})),$$

где $\mathcal{Z}^1(X;\widetilde{SC^r}) = C^0(X,\widetilde{SC^r})/\widetilde{SC^r}(X)$,

$$C^2(X,\widetilde{SC^r}) = C^0(X;\mathcal{Z}^2(X;\widetilde{SC^r})),$$

где $\mathcal{Z}^2(X;\widetilde{SC^r}) = C^1(X,\widetilde{SC^r})/\mathcal{Z}^1(X;\widetilde{SC^r})$ и т.д. Гомоморфизмы

$$d : C^n(X,\widetilde{SC^r}) \to C^{n+1}(X,\widetilde{SC^r})$$

получаются композицией эпиморфизма

$$C^n(X,\widetilde{SC^r}) \to \mathcal{Z}^{n+1}(X;\widetilde{SC^r}) = C^n(X,\widetilde{SC^r})/\mathcal{Z}^n(X;\widetilde{SC^r})$$

с вложением

$$\mathcal{Z}^{n+1}(X;\widetilde{SC^r}) \to C^{n+1}(X,\widetilde{SC^r}) = C^0(X;\mathcal{Z}^{n+1}(X;\widetilde{SC^r})).$$

По построению последовательность (3) точна.

Если Φ — некоторое фиксированное семейство носителей в X, то обозначив, как обычно, через $\Gamma_\Phi(C^n(X,\widetilde{SC^r}))$ множество сечений $s \in C^n(X,\widetilde{SC^r})$, носители которых принадлежат семейству Φ, получаем по определению

$$C^n_\Phi(X,\widetilde{SC^r}) = \Gamma_\Phi(C^n(X,\widetilde{SC^r})).$$

Если в качестве Φ выбрана система всех замкнутых подмножеств в X, то

$$H^n(X, SC^r) = H^n_\Phi(X, \widetilde{SC^r}).$$

Пусть $\check{H}^*(X; SC^r)$ — когомологии SC^r-многообразия X с коэффициентами в предпучке SC^r в смысле Александрова-Чеха (см. [5, 6]).

Теорема 2. *Для паракомпактного SC^r-многообразия X*

$$\check{H}^n(X; SC^r) = H^n(X; \widetilde{SC^r})$$

для всех n.

Доказательство. Достаточно заметить, что этот факт непосредственно следует из общей теоремы, описывающей связь функторов $\check{H}^n$ и H^n (см., например, [7, п. 2.8] или [5, теорема 5.9.1].

Имеет смысл подчеркнуть, что мультипликативная структура пучковых когомологий обеспечивает при необходимости возможность дать явные формулы для умножения коцепей, аналогичные обычным — см. [5, 8].

Пучку алгебр $\widetilde{SC^r}$, рассматриваемому как пучок $\mathbf{Z}$-модулей, можно сопоставить пучок $Hom_{\mathbf{Z}}(\widetilde{SC^r}, \widetilde{SC^r})$ ростков эндоморфизмов пучка $\widetilde{SC^r}$ в соответствии с общей конструкцией [5].

Напомним, что

1) пучок множеств с базой называется *мягким*, если всякое сечение пучка над произвольным замкнутым множеством продолжимо на все X,

2) пучок $\mathcal{L}$ абелевых групп над паракомпактным пространством называется *тонким*, если пучок колец $Hom_{\mathbf{Z}}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ является мягким пучком.

Теорема 3. *Пусть (X, S) — хаусдорфово финально компактное SC^r-многообразие, моделируемое SC^r-гладким банаховым пространством, $r \geq 2$. Тогда пучок $\widetilde{SC^r}$ над X является тонким.*

Доказательство. Известно, что хаусдорфово банахово многообразие есть регулярное пространство, а регулярное финально компактное пространство линделефово. Поэтому в силу теоремы Дьедонне-Морита (см. [9, 3.8.11]) многообразие X паракомпактно. Если A — замкнутое множество в X и s — сечение пучка $Hom_{\mathbf{Z}}(\widetilde{SC^r}, \widetilde{SC^r})$ над A, то в силу того, что пучок есть накрывающее пространство ("*espace étalé*"), s продолжается на некоторую окрестность V множества A (см. [5, теорема 3.7.1]), которую можно предполагать замкнутой в X. Очевидно, достаточно только показать, что продолжение сечения s на V можно выбрать так, чтобы оно было равно нулю на границе B множества V в X. Пусть функция $f \in SC^r(X)$ равна 1 на A и 0 на B — такая функция существует в силу нашей теоремы о $SC^r(X)$-гладком разбиении единицы (см. [1, теорема 2.2(c)] или [4, теорема 3.1(в)]). Заменяя продолжение сечения s на сечение $x \mapsto \widetilde{f}(x)s(x)$, мы и приходим к искомому результату.

Следствие. *Любой модуль над* $\widetilde{SC^r}$ *является тонким.*

2. Векторные SC^r-расслоения

Рассмотрим SC^r-отображение $\pi : X \to M$ SC^r-многообразий X, M, $r \geq 2$. Пусть задано банахово пространство F. Будем говорить, что на π определена структура *векторного SC^r-расслоения* со слоем $\pi^{-1}(x) = F$, $x \in M$, при выполнении следующих условий.

Имеется тривиализующее покрытие $\{(U_i, \tau_i)\}$, где $\{U_i\}$ — открытое покрытие многообразия M и отображения $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$, причем

1) τ_i является SC^r-диффеоморфизмом, для которого следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd} \quad ;$$

2) для каждого $x \in U_i$ отображение

$$\tau_{ix} = \tau_i|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times F$$

является линейным гомеоморфизмом;

3) если U_i и U_j — два элемента данного покрытия, то отображение

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to G : x \mapsto \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$$

является SC^r-отображением. Здесь G — группа линейных обратимых SC^r-отображений $F \to F$.

Пусть $\pi : X \to M$, $\pi' : X' \to M'$ — два векторных SC^r-расслоения со слоями F, F' соответственно.

Определение. SC^r-морфизмом $\pi \to \pi'$ векторных SC^r-расслоений будем называть пару SC^r-отображений

$$f_0 : M \to M', \qquad f : X \to X'$$

при выполнении следующих двух условий

1. Следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f_0} & M' \end{array}$$

и для любого $x \in M$ отображение

$$f_x = f|_{\pi^{-1}\{x\}} : \pi^{-1}\{x\} \to \pi'^{-1}(f_0(x))$$

является непрерывным линейным отображением.

2. Для любого $x_0 \in M$ существуют такие тривиализации

$$\tau : \pi^{-1}(U) \to U \times F, \qquad \tau' : \pi'^{-1}(U') \to U' \times F$$

в точках x_0 и $f_0(x_0)$ соответственно, что $f_0(U) \subset U'$ и отображение

$$U \to L(F, F') : x \mapsto \tau'_{f_0(x)} \circ f_x \circ \tau_x^{-1}$$

является SC^r-отображением.

Несложно проверить, что композиция $\pi \to \pi' \to \pi''$ SC^r-морфизмов векторных SC^r-расслоений будет SC^r-морфизмом

$\pi \to \pi''$ векторных SC^r-расслоений. Таким образом, векторные SC^r-расслоения образуют категорию.

SC^r*-сечением* векторного SC^r-расслоения $\pi : X \to M$ будем называть SC^r-отображение $s : M \to X$ с условием $\pi \circ s = id_M$.

Определение. Дифференцирование v кольца $\widetilde{SC_x^\infty}$ будем называть *фредгольмовым касательным вектором* в точке x к SC^∞-многообразию X с моделью E. По определению, $v : \widetilde{SC_x^\infty} \to \mathbf{R}$ — линейное отображение, удовлетворяющее правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$.

Линейное пространство дифференцирований кольца $\widetilde{SC_x^\infty}$ будем называть *фредгольмовым касательным пространством* в точке x к многообразию X и будем обозначать его через ${}^\Phi T_x X$.

Пусть ${}^\Phi TX = \bigcup\limits_{x \in X} {}^\Phi T_x X$ — дизъюнктная объединение фредгольмовых касательных пространств и $p : {}^\Phi TX \to X$ — очевидная проекция.

${}^\Phi TX$ является SC^∞-многообразием, а $p : {}^\Phi TX \to X$ обладает естественной структурой SC^∞-векторного расслоения со слоем E.

Если $F : X \to X'$ — SC^∞-отображение, то *касательное отображение* ${}^\Phi TF : {}^\Phi TX \to {}^\Phi TX'$, определяемое как

$${}^\Phi TF(v)(f) = v(F^* f) = v(f \circ F), \qquad v \in {}^\Phi T_x X,$$

является SC^∞-морфизмом SC^∞-векторных расслоений.

Определение. Линейное отображение ξ алгебры $SC^\infty(X)$ в себя, являющееся дифференцированием, т.е. удовлетворяющее правилу Лейбница $\xi(fg) = \xi(f)g + f\xi(g)$, будем называть *фредгольмовым касательным векторным полем* к SC^∞-многообразию X.

Отметим, что SC^∞-модуль SC^∞-сечений векторного SC^∞-расслоения $p : {}^\Phi TX \to X$ изоморфен SC^∞-модулю фредгольмовых касательных векторных полей на X.

3. Кольцо когомологий де Рама SC^∞-многообразия

Функтор L_a^k ("k-линейные непрерывные альтернированные формы" , см. [10]), примененный к расслоению ${}^\Phi TX$, оказывается SC^∞-гладким (в естественном смысле, аналогичном C^p-гладкому случаю в [10]).

SC^∞-сечения SC^∞-расслоения ${}^\Phi\Lambda^k X \overset{def}{=} L_a^k({}^\Phi TX)$ назовем *фредгольмовыми дифференциальными k-формами* на X.

Теорема 4. *Существует когомологическая резольвента $\Omega* = \{\Omega^k\}_{k\geq 0}$ пучка $\widetilde{SC^\infty}$ ростков функций на X, где Ω^k — тонкий пучок ростков фредгольмовых дифференциальных k-форм на X.*

Пусть $\{H^n(\Gamma(\Omega^*))\}_{n\geq 0}$ — когомологии де Рама многообразия X. Опираясь на теорему 4.7.1 в [5], получаем следующий результат, который может рассматриваться как бесконечномерный аналог теоремы де Рама (см. [11], [12], [13]).

Теорема 5. *Канонические гомоморфизмы*

$$H^n(\Gamma(\Omega^*)) \to H^n(X, SC^\infty)$$

являются изоморфизмами.

Литература

1. Kunakovskaya O.V. On properties of some classes of smooth functions on Banach spaces and manifolds / O.V. Kunakovskaya //Methods and Appl. of Global Analysis. — Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1993. — P.81-93.

2. Кунаковская О.В. О некоторых классах гладких функций на банаховых многообразиях / О.В. Кунаковская // Деп. в ВИНИТИ 11.04.94, N 864-В94. - 28 с.

3. Kunakovskaya O.V. The category of SC^r-manifolds / O.V. Kunakovskaya // Conference franco-russ., 2-6 decembre 1996. CIRM. — [Marseille-Luminy], 1996. — P. 6.

4. Кунаковская О.В. О гладких разбиениях единицы на банаховых многообразиях / О.В. Кунаковская // Изв. вузов. Математика. — № 10. — 1997. — С. 51-58.

5. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков / Р. Годеман. — М.: ИЛ, 1961. — 320 с.

6. Серр Ж.-П. Когерентные алгебраические пучки / Ж.-П. Серр // Расслоенные пространства. — М.: ИЛ, 1958. — С. 372-450.

7. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры / А. Гротендик. — М.: ИЛ, 1961. — 175 с.

8. Картан А. Гомологическая алгебра / А. Картан, С. Эйленберг. — М.: ИЛ, 1960. — 310 с.

9. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

10. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. — М.: Мир, 1967. — 204 с.

11. де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия / Ж. де Рам. — М.: Изд. иностр. лит., 1956. — 250 с.

12. Дубровин Б. А. Современная геометрия: методы теории гомологий / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. — М.: Наука, 1984. — 343с.

13. Ботт Р. Дифференциальные формы в алгебраической топологии / Р. Ботт, Л.В. Ту. — М.: Платон, 1997. — 336 с.

Стохастически однородные и изотропные соленоидальные гауссовские поля

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко
(Белгород, Белгородский государственный университет, *virch@bsu.edu.ru*)

1. Введение. Изучается стохастическая модель флуктуирующего магнитного поля. Модель основана на предположении о том, что случайное поле является гауссовским и обладает свойством эргодичности, а также свойствами стохастических однородности и изотропности. Находится общий вид корреляционной функции такого поля, учитывающий соленоидальность магнитного поля с вероятностью единица.

Пусть случайное псевдовекторное поле $\tilde{B}_j(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2, 3$ является гауссовским и имеет нулевое среднее $\langle \tilde{B}_j(\boldsymbol{x}) \rangle = 0$, то есть его распределение вероятностей полностью определяется парной корреляционной функцией $\langle B_i(\boldsymbol{x})B_j(\boldsymbol{y})\rangle \equiv K_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, которая является тензорным полем на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, обладающим симметрией $K_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = K_{ji}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$. (см., например, [2]). Здесь и далее знак «тильда» указывает на случайность математического объекта и $\langle\cdot\rangle$ обозначает математическое ожидание. Будем, дополнительно, считать, что поле стохастически однородно и изотропно, то есть его распределение вероятностей инвариантно относительно преобразований группы трансляций пространства $\mathbb{R}^3$ и группы O_3 его поворотов. Первое свойство эквивалентно трансляционной инвариантности корреляционной функции $K_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, а именно, значения этой функции не изменяются при преобразованиях $\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}$. Это приводит к тому, что существует положительно определенная тензор-функция $K_{ij}(\boldsymbol{r})$ такая, для которой имеет место

$$K_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = K_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

и при этом $K_{ij}(\boldsymbol{r}) = K_{ji}(-\boldsymbol{r})$ для всех $\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3$.

Свойство стохастической изотропности случайного поля $\tilde{B}_j(\boldsymbol{x})$ означает, что его распределение вероятностей инвариантно относительно любых поворотов и отражений пространства $\mathbb{R}^3$, на котором оно определено. Для гауссовского поля $\tilde{B}_j(\boldsymbol{x})$ с нулевым средним это сводится к тому, что его корреляционная функция не зависит от преобразований одновременного вращения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ посредством произвольной матрицы $\mathcal{R}\in O_3$.

Так как матрицы $\mathcal{R}\in O_3$ с матричными элементами $\mathcal{R}_{ij}$, $i,j=1,2,3$ удовлетворяют уравнениям ортогональности $\mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jk} = \delta_{ij}\,,\quad i,j=1,2,3\,$, то свойство изотропности накладывает следующее ограничение на корреляционную функцию

$$\mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{jm}K_{lm}(\mathcal{R}^{-1}\boldsymbol{r}) = K_{ij}(\boldsymbol{r})\,.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$K_{ij}(\boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{r})\delta_{ij} + B(\boldsymbol{r})r_ir_j\,, \tag{1}$$

где $r=|\boldsymbol{r}|$ и $A(\cdot),B(\cdot)$ – некоторые функции на $\mathbb{R}_+$, несмотря на то, что значения поля $\tilde{B}_j(\boldsymbol{x})$ являются пседовекторами (при преобразованиях отражения $\boldsymbol{x} \Rightarrow -\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$ они не изменяются). Это связано с тем, что корреляционная функция определяется математическим ожиданием от квадратичной комбинации случайного поля $\tilde{B}_j(\boldsymbol{x})$. Из (1) следует, что корреляционная функция обладает более жесткой симметрией относительно отражений — $K_{ij}(-\boldsymbol{r}) = K_{ij}(\boldsymbol{r})$.

Свойство (1) является необходимым условием для того, чтобы случайное гауссовское поле $B_j(\boldsymbol{r})$ обладало перечисленными выше симметриями. Однако, на функции $A(\cdot)$ $B(\cdot)$ должно быть наложены условия, чтобы, во-первых, форма (1) представляла корреляционную функцию, а, во-вторых, чтобы поле $B_j(\boldsymbol{r})$ соленоидальным. Это накладывает дополнительные ограничения на коэффициентные функции $A(r)$ и $B(r)$.

Для того, чтобы форма (1) представляла корреляционную функцию гауссовского поля необходимо и достаточно, согласно теореме Бохнера-Хинчина, чтобы имело место неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) u_i(\boldsymbol{x}) u_j^*(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \geq 0$$

для любой комплекснозначной вектор-функции $u_i(\boldsymbol{x})$, которая может быть выбрана финитной и бесконечно дифференцируемой. Однако, в случае эргодичности поля $B_j(\boldsymbol{x})$, когда матричные элементы корреляционной функции интегрируемы на $\mathbb{R}^3$, это неравенство можно заменить на более слабое условие

$$u_i u_j^* \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\boldsymbol{r}) \exp\big(i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{r})\big) d\boldsymbol{r} \geq 0 \tag{2}$$

которое должно выполняться для любых векторов $u_j \in \mathbb{C}^3$ и $\kappa_j \in \mathbb{R}^3$. Здесь $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение векторов. Вводя образы Фурье для функций $A(r)$, $B(r)$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} A(r) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{r})) d\boldsymbol{r} = \bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)\,,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} B(r) r_i r_j \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{r})) d\boldsymbol{r} = \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)\delta_{ij} + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)\kappa_i\kappa_j\,.$$

В терминах этих функций, условие (2) записывается в виде

$$\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)|u_i|^2 + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)|u_i|^2 + \bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)|\kappa_i u_i|^2 \geq 0\,. \tag{3}$$

Вследствие инвариантности функций $A(r)$, $B_1(r)$, $B_2(r)$ относительно отражения $\boldsymbol{r} \Rightarrow -\boldsymbol{r}$, образы Фурье $\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ $\bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)$, $\bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|)$ являются вещественнозначными функциями. Тогда из (3), ввиду произвольности вектора $u_i \in \mathbb{R}^3$, получается необходимое и достаточное условие представимости корреляционной функции в виде (1),

$$\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|) \geq 0\,, \qquad \bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|) + \boldsymbol{\kappa}^2\bar{B}_2(|\boldsymbol{\kappa}|) \geq 0\,. \tag{4}$$

Наконец, учтем ограничения, связанные с тем, что поле $B_j(\boldsymbol{x})$ является соленоидальным с вероятностью 1, то есть должно выполняться (хотя бы в слабом смысле) дифференциальное тождество

$$(\nabla, \tilde{\boldsymbol{B}})(\boldsymbol{x}) = \nabla_j \tilde{B}_j(\boldsymbol{x}) = 0\,, \tag{5}$$

т.е. предполагается слабая дифференцируемость поля, а это, в свою очередь, предполагает интегрируемость матричных элементов корреляционной функции с весовой функцией r. Используя трансляционную инвариантность корреляционной функции, из (5) получается следующее условие на функции $\bar{A}$, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$: $\bar{B}_2 = -(\bar{A} + \bar{B}_1)/\boldsymbol{\kappa}^2$, то есть

$$\bar{K}_{ij}(|\boldsymbol{\kappa}|) = \bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|)(\boldsymbol{\kappa}^2\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j)\,, \tag{6}$$

где $\bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|) = [\bar{A}(|\boldsymbol{\kappa}|) + \bar{B}_1(|\boldsymbol{\kappa}|)]/\boldsymbol{\kappa}^2 > 0$.

Выразим теперь найденный общий вид корреляционной функции, переводя это соотношение посредством преобразования Фурье в координатную форму. Введем функцию

$$K(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|) \exp\big(-i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{r})\big) d\boldsymbol{\kappa}\,,$$

которая, согласно теореме Бохнера-Хинчина, является корреляционной функцией некоторого скалярного гауссовского поля. Ввиду инвариантности относительно вращений в $\boldsymbol{\kappa}$-пространстве фурье-образа $\bar{K}(|\boldsymbol{\kappa}|)$, корреляционная функция $K(\boldsymbol{r})$ зависит только от r. Используя обратное преобразование Фурье, представим корреляционную функцию $K_{ij}(\boldsymbol{r})$ в виде

$$K_{ij}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{K}_{ij}(|\boldsymbol{\kappa}|) \exp\big(-i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{r})\big) d\boldsymbol{\kappa}\,.$$

Тогда формула (6) показывает, что имеет место соотношение

$$K_{ij}(\boldsymbol{r}) = (\nabla_i \nabla_j - \delta_{ij}\Delta) K(\boldsymbol{r})$$

и, ввиду зависимости $K(\boldsymbol{r})$ только от r, получаем

$$K_{ij}(\boldsymbol{r}) = K''(r)\left(\frac{r_i r_j}{r^2} - \delta_{ij}\right) - \frac{K'(r)}{r}\left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}\right)\,. \qquad (7)$$

Заметим, что при наличии стохастической изотропии поля, не проявляется свойство т.н. «топологической нетривиальности», отмеченное в работе [2].

Литература

1. Simon B. The $P(\varphi)_2$ euclidian quantum field theory / Princeton: Princeton University Press, 1974.

2. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Kinetic effects stochastic topological nontrivial fields // Physica A.– 1994. – 208. – P.501-522.

Аналог формулы Парсеваля для преобразования Радона-Киприянова

М.Г. Лапшина

Липецк, Липецкий государственный педагогический университет marina.lapsh@yandex.ru

Пусть $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\xi_i$ — скалярное произведение векторов в R_n^+. Уравнение гиперплоскости $\Gamma_n \in R_n^+$, находящейся на расстоянии $|p|$ от начала координат с единичным вектором нормали ξ имеет вид $\langle x, \xi\rangle = p$. Через $\delta(P)$ обозначим δ-функцию, сосредоточенную на поверхности $P(x) = 0$.

Преобразование Радона-Киприянова интегрируемой функции f вводится по формуле (см. [1])

$$K_\gamma[f](\Theta; s) = \int_{R_n^+} f(x)\ \Pi_{x_1}^{\nu} \delta(s - \langle x, \Theta\rangle)\ x_1^\gamma\, dx,$$

где $x = (x_1, x') \in R_n^+$, а символом $\Pi_{x_1}^{\nu}$ обозначено действие по переменной x_1 оператора Пуассона порядка $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$:

$$\Pi_{x_1}^{\nu} f(x_1, x') = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f(x_1\ \cos\alpha,\ x')\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha.$$

Как видим, преобразование Радона-Киприянова $K_\gamma[f]$ представляет собой функцию, определенную на цилиндре $\Xi = S_1(n) \times R_1$. Для функций $\varphi(\Theta; p)$, которые на Ξ обладают свойством четности $\varphi(\Theta; p) = \varphi(-\Theta; -p)$, введем дробную производную оператора $\Box = \frac{\partial^2}{\partial p^2}$ следующим образом

$$(-\Box)^k \varphi = \frac{1}{2\,\Gamma(n - \{2k\})} \left(\frac{d}{dp}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega, q) dq}{|q - t|^{n-1-\{2k\}}}\,.$$

В диссертации [2] получены формулы Планшереля для преобразования Радона-Киприянова на основе сингулярных дробных производных Рисса (B-гиперсингулярных интегралов). Это привело к следующей форме теоремы Планшереля для K_γ−преобразования следующего вида.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат пространству $S_{ev}(E_N^+)$, и $K_\gamma[f](\Theta; p)$, $K_\gamma[g](\Theta; p)$ их преобразования Киприянова-Радона. Тогда

$$\int\limits_{R_N^+} f(x)\,\overline{g(x)}\,(x')^\gamma\,dx = \frac{2^{2n-|\gamma|-N}\pi^{n+1-N}}{i^{N+|\gamma|-1}\prod_{i=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{S_N^+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\Theta;t)\times$$

$$\times \quad \left(\mathbf{D}_\gamma^{N+|\gamma|-1} \mathcal{P}_{x'}^\gamma \overline{K_\gamma[g](\Theta;t-\langle\Theta,x\rangle)}\right)\Big|_{x=0} (\Theta')^\gamma\,dt\;dS(\Theta).$$

В работе [3] получена формула обращения преобразования Радона-Киприянова на основе одномерных дробных производных Грюнвальда-Летникова-Рисса, которую можно переписать в терминах дробной степени оператора $(-\Box)^\alpha$ в виде:

$$f(x) = C(N,n,\gamma)\mathcal{P}_{x'}^\gamma \int\limits_{S_N^+} (\Box)_p^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} K_\gamma[f](\Theta;p)\Big|_{p=\langle x,\Theta\rangle} dS\,.$$

Это приводит к следующей форме теоремы Планшереля для преобразования Радона-Киприянова

$$\int\limits_{R_N^+} f(x)\,\overline{g(x)}\,(x')^\gamma\,dx = C(N,n,\gamma)\int\limits_{S_N^+} K_\gamma[f](\Theta;t)\,\times$$

$$(-\Box)_p^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}\left(\overline{K_\gamma[g](\Theta;t-p)}\right)\Big|_{p=\langle x,\Theta\rangle}\;(\Theta')^\gamma\,dt\;dS(\Theta).$$

Как оказалось, при условии, что функции f и g принадлежат основному классу функций S_{ev}, в этом равенстве можно применить формулу интегрирования по частям для дробных производных (см [4]). Тогда предыдущая формула примет вид

$$\int\limits_{R_N^+} f(x)\,\overline{g(x)}\,(x')^\gamma\,dx = C(N,n,\gamma)\mathcal{P}_{x'}^\gamma \int\limits_{S_N^+} (-\Box)_t^{\frac{N+|\gamma|-1}{4}} K_\gamma[f](\Theta;t)\,\times$$

$$(-\Box)_p^{\frac{N+|\gamma|-1}{4}}\left(\overline{K_\gamma[g](\Theta;t-p)}\right)\Big|_{p=\langle x,\Theta\rangle}\;(\Theta')^\gamma\,dt\;dS(\Theta).$$

Если интегрирование происходит по плоскости проходящей через начало координат, то в случае $f = g$ получаем формулу Парсеваля для преобразования Радона-Киприянова

$$\int\limits_{R_N^+} |f(x)|^2 \, (x')^\gamma \, dx =$$

$$= C(N, n, \gamma) \int\limits_{S_N^+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| (-\Box)_t^{\frac{N+|\gamma|-1}{4}} K_\gamma[f](\Theta; t) \right|^2 \, (\Theta')^\gamma \, dS(\Theta) \, dt \, .$$

Литература

1. Ляхов, Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона/Л.Н. Ляхов – Труды МИРАН. 2005. Т.248. С. 153-163.

2. Гоц Е.Г. Формулы обращения преобразования Радона-Киприянова и аналог теоремы типа теоремы Планшереля и теоремы о носителе. – Автореф. …кандид. диссерт. Воронеж, ВГУ. 2008. С.16.

3. Гоц Е.Г., Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Радона-Киприянова посредством дробного дифференирования Грюнвальда-Летникова-Рисса. – ДАН. 2007, Т. 412. № 1. С. 11-14.

4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

Определение параметров амплитудно-модулированного сигнала на основе всплескового преобразования

К.С. Макаров

(Курск; *runaway90@mail.ru*)

Задача определения параметров амплитудно-модулированного сигнала может быть решена с помощью всплеск-преобразования. Предлагаются методики, позволяющие определить несущую частоту сигнала и глубину модуляции.

Модуляция - процесс переноса спектра сигнала из области низких в область высоких частот. Он основан на изменении в соответствии с модулирующим сигналом как минимум одного из параметров несущего колебания, математическая модель которого имеет вид

$$u_{carrier} = f(t; a_1, a_2, ..., a_m).$$

В качестве несущего чаще всего используется гармоническое колебание:

$$u_{carrier} = U\cos(\omega t + \varphi).$$

В соответствии с изменяемыми параметрами несущего колебания выделяются простые виды модуляции: амплитудная, фазовая, частотная.

Амплитудно-модулированный сигнал представляет собой произведение информационной огибающей $U(t)$ и гармонического колебания её заполнения и имеет следующий вид:

$$u(t) = U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$U(t) = U_m(1 + ms(t)),$$

где U_m - постоянная амплитуда несущего колебания при отсутствии модулирующего сигнала $s(t)$, m - коэффициент амплитудной модуляции. Величина m характеризует глубину амплитудной модуляции. Рассмотрим простейший случай однотональной амплитудной модуляции, когда модулирующим низкочастотным сигналом является гармоническое колебание с частотой Ω:

$$u_{AM}(t) = U_m(1 + m\cos(\Omega t + \Phi_0))\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Этот сигнал можно представить как сумму простых гармонических колебаний с различными частотами:

$$u_{AM}(t) = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m m}{2}\cos((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0) + \\ + \frac{U_m m}{2}\cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0).$$

Таким образом, в спектральный состав амплитудно-модулированного сигнала входят колебание с несущей частотой, колебание с частотой $\omega_0 + \Omega$ (верхняя боковая частота) и колебание с частотой $\omega_0 - \Omega$ (нижняя боковая частота).

Для определения параметров амплитудно-модулированного сигнала предлагается использовать всплеск-преобразование.

При решении указанных выше задач всплеск-преобразование интерпретируется как многомасштабный дифференциальный оператор порядка n. Данное определение базируется на следующей теореме:

Теорема. *Вейвлет ψ с быстрым убыванием имеет n нулевых моментов тогда и только тогда, когда существует Θ с быстрым убыванием такая, что*

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n \Theta(t)}{dt^n}.$$

Как следствие

$$Wf(u,s) = s^n \frac{d^n}{du^n}(f * \overline{\Theta}_s)(u),$$

где $\overline{\Theta}_s(u)$. Более того, ψ имеет не более чем n нулевых моментов тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(t)dt \neq 0$.

Для гарантии непрерывности линии максимумов использовались всплески, являющиеся первой и второй производными функции Гаусса. Данный выбор опирается на следующую теорему (Хюммель, Поджио и Юий):

Теорема. *Пусть $\psi = (-1)^n \Theta^{(n)}$, где Θ - функция Гаусса. Для любой $f \in L_2(R)$ максимумы модуля $Wf(u,s)$ принадлежат связным кривым, которые никогда не прерываются при убывании масштаба.*

Несущая частота является одним из основных параметров сигнала. Её определение занимает центральное место на этапе технического анализа сигнала.

Для определения несущей частоты амплитудно-модулированного сигнала предлагается следующий алгоритм:

1) Вычисление непрерывного всплеск-преобразования с помощью всплеска wave;

2) Нахождение последовательности его нулей $\{x_i\}_{i=1}^n$, где n - количество нулей;

3) Подсчёт минимального расстояния d между каждыми двумя следующими через один её элементами $d = \min_{1 \le i < n-1}(x_{i+2} - x_i)$;

4) Нахождение отношения $\omega = \frac{N}{d} 2\pi$, где N - размер выборки, соответствующий периоду. Данное отношение определяет несущую частоту сигнала.

Задача определения коэффициента (глубины) амплитудной модуляции решается различными способами. Простейший из них - реализуемый при наблюдении изображения амплитудно-модулированного напряжения на экране осциллографа. Но даже при тщательном измерении он не может гарантировать высокой точности. Кроме того, выпускаются специальные измерители коэффициента модуляции (модулометры), которые позволяют измерить глубину модуляции с большей точностью.

Данная задача может быть решена с помощью последовательности нулей непрерывного всплеск-преобразования. После шага 2, соответственно, необходимо выполнить:

3$'$) Выделить в последовательности нулей точки максимума сигнала $\{x_i^{max}\}_{i=1}^k$ (для них значение весплеск-преобразования в левосторонней окрестности точки будет меньше нуля, а в правосторонней - больше);

4$'$) Найти наибольшее X_{max} и наименьшее X_{min} значения в последовательности максимумов, найденной на предыдущем шаге;

5$'$) Вычислить глубину амплитудной модуляции m по формуле $m = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$.

Описанные выше алгоритмы могут применяться для определения параметров амплитудно-модулированных сигналов.

Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы М.: Высшая школа, 2000. - 462 с.

2. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов М.: Мир, 2005. - 671 с.

Каноническая форма Шура и стохастические уравнения леонтьевского типа

Е.Ю. Машков
(Курск, Курский государственный университет;
mashkovevgen@yandex.ru)

Обсуждаемый вопрос связан с методом измерения динамически искаженных сигналов, предложенным в [3,4]. Стохастическим уравнением леонтьевского типа называется стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$\tilde{A}\xi(t) = \int_0^t \tilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ – случайный, а $f(t)$ – не случайный n-мерные векторы $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – $n \times n$ матрицы, $\tilde{A}$ вырождена, а $\tilde{B}$ – невырождена. Физический смысл: $f(t)$ – входящий сигнал в устройство, описываемое операторами $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, белый шум, т. е. "производная" $\tilde{w}(t)$, – помехи, $\xi(t)$ – сигнал на выходе из устройства (см. [3,4]). Будем считать, что $f(t)$ – гладкая функция. С помощью преобразования Кронекера-Вейерштрасса [2] для регулярного пучка матриц $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ в работе [1] для таких уравнений был изучен вопрос их приведения к каноническому виду и получены аналитические формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса. Здесь мы проводим альтернативное изучение уравнения, используя преобразование регулярного пучка матриц к канонической форме Шура.

Для дальнейшего обсуждения нам понадобится следующая теорема:

Теорема (Обобщенная вещественная форма Шура [2]) *Для регулярного пучка $B + \lambda A$ найдутся вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R, такие, что матрица $Q_L A Q_R$ – верхняя квазитреугольная(т. е. верхняя блочно-треугольная матрица с диагональными блоками размера 1×1 и 2×2; блоки размера 1×1 соответствуют вещественным собственным* *значениям, а блоки размера 2×2 – сопряженным парам комплексных собственных значений), а матрица $Q_L B Q_R$ – верхняя треугольная.*

Выполним для $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ преобразование Шура. Тогда уравнение (1) преобразуется следующим образом

$$Q_L\tilde{A}Q_R Q_R^{-1}\xi(t) = \int_0^t Q_L\tilde{B}Q_R Q_R^{-1}\xi(s)ds + \int_0^t Q_L f(s)ds + Q_L\tilde{w}(t) \tag{2}$$

или в новых обозначениях примет вид

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + g(t) + w(t), \tag{3}$$

где $\eta(t) = Q_R^{-1}\xi(t)$, $A = Q_L\tilde{A}Q_R$, $B = Q_L\tilde{B}Q_R$, $w(t) = Q_L\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс, $\int_0^t Q_L f(s)ds = g(t)$. При соответствующей нумерации векторов базиса в A сначала вдоль главной диагонали стоят блоки размера 2×2, потом невырожденные блоки размера 1×1, а затем вырожденные блоки размера 1×1.

Из вида (3) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (3) предполагается вида $\xi(0) = 0$.

В соответствии с канонической формой Шура, уравнение (3) распадается на стохастические уравнения следующих типов. Для блоков размера 2×2 получаем пары уравнений

$$a_{ii}\eta^i(t) + a_{i,i+1}\eta^{i+1}(t) = \int_0^t (b_{ii}\eta^i(s) + b_{i,i+1}\eta^{i+1}(s) + \ldots +$$

$$+b_{in}\eta^n(s))ds + g^i(t) + w^i(t)$$

$$a_{i+1,i+1}\eta^{i+1}(t) = \int_0^t (b_{i+1,i+1}\eta^{i+1}(s) + b_{i+1,i+2}\eta^{i+2}(s) + \ldots +$$

$$+b_{i+1,n}\eta^n(s))ds + g^{i+1}(t) + w^{i+1}(t).$$

Для этой пары уравнений имеют место аналитические формулы для решений

$$\eta^{i+1}(t) = \int_0^t \frac{1}{a_{i+1,i+1}} \exp[\frac{b_{i+1,i+1}}{a_{i+1,i+1}}(t-u)]dw_u^{i+1} +$$

$$+ \int_0^t [g^{i+1}(u) + \int_0^u (\frac{b_{i+1,i+2}}{a_{i+1,i+1}}\eta^{i+2}(s) + \ldots$$

$$+ \frac{b_{i+1,n}}{a_{i+1,i+1}}\eta^n(s))ds] \exp[\frac{b_{i+1,i+1}}{a_{i+1,i+1}}(t-u)]du$$

$$\eta^i(t) = \int_0^t \frac{1}{a_{ii}} \exp[\frac{b_{ii}}{a_{ii}}(t-u)]dw_u^i + \int_0^t [g^i(u) + \int_0^u (\frac{b_{i,i+1}}{a_{ii}}\eta^{i+1}(s) + \ldots$$

$$+ \frac{b_{in}}{a_{ii}}\eta^n(s))ds] \exp[\frac{b_{ii}}{a_{ii}}(t-u)]du - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}\eta^{i+1}(t)$$

Для блоков размера 1×1 получаем уравнения

$$a_{jj}\eta^j(t) = \int_0^t (b_{jj}\eta^j(s) + b_{j,j+1}\eta^{j+1}(s) + \ldots + b_{jn}\eta^n(s))ds + g^j(t) + w^j(t),$$

Для такого типа уравнений тоже есть аналитическая формула для решений

$$\eta^j(t) = \int_0^t \frac{1}{a_{jj}} \exp[\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)]dw_u^j + \int_0^t [g^j(u) + \int_0^u (\frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}}\eta^{j+1}(s) + \ldots$$

$$+ \frac{b_{jn}}{a_{jj}}\eta^n(s))ds] \exp[\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)]du.$$

Последние m компонент процесса η, соответствующие нулевым диагональным блокам, соберем в одно матричное уравнение

$$\int_0^t \begin{pmatrix} b_{mm} & b_{m,m+1} & \ldots & b_{mn} \\ 0 & b_{m+1,m+1} & \ldots & b_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^m(s) \\ \eta^{m-1}(s) \\ \vdots \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} g^m(t) \\ g^{m-1}(t) \\ \vdots \\ g^n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^m(t) \\ w^{m-1}(t) \\ \vdots \\ w^n(t) \end{pmatrix}$$

Уравнения подобного типа хорошо изучены в работе [1].

Литература

1. Гликлих Ю. Е., Машков Е. Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов / Вестник Южно-Уральского государственного университета.-2013.-Том 6, №2. С.25-39.

2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. - М.: Мир – 2001. – 435 с.

3. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / Вестник Южно-Уральского государственного университета.- 2010.- №16(192).- С. 116-120.

4. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / Вестник Южно-Уральского государственного университета.- 2011.- №17(234).- С. 70-75.

Топология слоений рационального гамильтониана

Н.Н. Мартынчук

(Москва, МГУ; *mnick45@bk.ru*)

В настоящей работе изучаются некоторые вопросы топологии лагранжевых слоений $\mathbb{C}$-*гамильтоновой системы*, заданной *гамильтонианом* вида $f = az^2 + R(w)$, где R — рациональная функция переменной w, а также $\mathbb{C}$-*выпрямляемости* соответствующего ей векторного поля $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f$.

Определения

Определение 1 *$\mathbb{C}$-гамильтоновой системой называется тройка $(M, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где M — комплексное многообразие, $\omega_{\mathbb{C}}$ — замкнутая невырожденная голоморфная 2-форма на этом многообразии, а $f\colon M \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, называемая гамильтонианом.*

Векторным полем косой градиент функции $f\colon M \to \mathbb{C}$ относительно формы $\omega_{\mathbb{C}}$ называется векторное поле $sgrad_{\mathbb{C}} f$ на M

такое, что для любого векторного поля v на M выполнено равенство $\omega_{\mathbb{C}}(v,\, sgrad_{\mathbb{C}} f) = v(f)$, где $v(f)$ — производная функции f по направлению v.

Определение 2 *Пусть M — комплексное многообразие, v — векторное поле на нем. Интегральные траектории этого векторного поля назовем $\mathbb{C}$-выпрямляемыми на инвариантном d-мерном комплексном подмногообразии $U \subset M$, если существуют функция $\lambda = \lambda(w) \neq 0$ (для всех $w \in U$) и погружение $h\colon U \to \mathbb{C}^d/\Gamma$ для некоторой дискретной подгруппы $\Gamma \subset \mathbb{C}^d$, являющиеся $\mathbb{C}$-дифференцируемыми отображениями, и такие, что h переводит v в векторное поле $h_*(v) = \lambda v_0,\ v_0 = const$.*

Определение 3 *Слоем уровня ξ, $\xi \in \mathbb{C}$, функции f, заданной на комплексном многообразии M, называется множество $T_\xi = f^{-1}(\xi)$. Слой T_ξ называется неособым, если в каждой его точке градиент df отличен от нуля.*

Определение 4 *Пусть даны две непрерывные функции $f_1\colon M_1 \to \mathbb{C}$ и $f_2\colon M_2 \to \mathbb{C}$. Назовем их топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h\colon M_1 \to M_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ h$.*

Определение 5 *Пусть дана функция $f(z,w) = az^2 + R(w)$ двух комплексных переменных $(z,w) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1,\dots,d_m\})$, такая, что $a \neq 0$, $\dfrac{d}{dw}R(w) \not\equiv 0$, где $R(w)$ — рациональная функция переменной w, а d_j, $j = 1,\dots,m$, — ее полюса. Назовем функцию f рациональным гамильтонианом системы $(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1,\dots,d_m\}), dz \wedge dw, f)$.*

Теоремы

Рассмотрим двумерный замкнутый диск $\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}$ вокруг (особого) значения ξ_0 рационального гамильтониана $f = az^2 + R(w)$. Предположим, что функция $R(w)$ отделена от ξ_0 вне некоторого компакта. Пусть $P_1,\dots,P_s$ — особые точки на слое T_{ξ_0}.

Теорема 1 *Существует* $\varepsilon > 0$ *и достаточно малая окрестность* U *набора точек* $P_1, \dots P_s$*, что функция* $f|_{f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon})\setminus U}$ *топологически эквивалентна функции* $\mathrm{Pr}_1\colon \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon} \times L \to \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}$*, где* $L = \mathrm{T}_{\xi_0} \setminus U$*,* $\mathrm{Pr}_1(\xi, \eta) = \xi$.

В частности, если на T_{ξ_0} особых точек нет, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, все слои T_ξ, $\xi \in \overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}$, попарно гомеоморфны.

Пусть $l(j)$ — некоторое число, зависящее от параметра j. Пусть оно четно. Определим многообразие $N^4_{\varepsilon,j} = ([0,\varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0_-] \bigsqcup [0_+, 1])/\sim$. Здесь $\sim$ порождено следующими соотношениями:

$$\begin{cases} (r, \varphi \mod 2\pi, \frac{\varphi+t+2\pi k}{l(j)} \mod 2\pi, 0_-) \sim \\ \qquad \sim (r, \varphi \mod 2\pi, \frac{-\varphi+t-2\pi k}{l(j)} \mod 2\pi, 0_+), \\ (0,\ \varphi \mod 2\pi,\ \psi \mod 2\pi,\ h) \sim (0,\ 0,\ \psi \mod 2\pi,\ h), \end{cases}$$

где $0 \le k < l(j), r \in [0, \varepsilon]$, $h \in [-1, 0_-] \bigsqcup [0_+, 1]$. Положим $q_j(r, \varphi, \psi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0\colon N^4_{\varepsilon,j} \to \mathbb{C}$.

Пусть $l(j)$ нечетно. Определим многообразие $N^4_{\varepsilon,j} = ([0,\varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0_-])/\sim$. Здесь $\sim$ порождено следующими соотношениями:

$$\begin{cases} (r,\ \varphi \mod 2\pi,\ \frac{\varphi+t+2\pi k}{l(j)} \mod 4\pi,\ 0) \sim \\ \qquad \sim (r,\ \varphi \mod 2\pi,\ \frac{\varphi-t+2\pi k}{l(j)} \mod 4\pi,\ 0), \\ (0,\ \varphi \mod 2\pi,\ \psi \mod 2\pi,\ h) \sim (0,\ 0,\ \psi \mod 2\pi,\ h), \end{cases}$$

где $0 \le k < l(j), r \in [0, \varepsilon]$, $h \in [-1, 0_-]$. Положим $q_j(r, \varphi, \psi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0\colon N^4_{\varepsilon,j} \to \mathbb{C}$.

Индекс j нумерует точки P_j, $j = 1, \dots, s$, а $l(j)$ обозначает их кратности. Определим функцию $q\colon N^4 = \bigsqcup\limits_j N^4_{\varepsilon,j} \to \mathbb{C}$ следующим образом: $q(r, \varphi, \psi, h) = q_j(r, \varphi, \psi, h)$ на $N^4_{\varepsilon,j}$.

Теорема 2 *Существует "приклеивающее" отношение $\sim$, что функция $f\colon f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}) \to \mathbb{C}$ топологически эквивалентна функции $g\colon M^4 \to \mathbb{C}$, где $M^4 = \left(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon} \times L\right) \bigsqcup N^4/\sim$, на множестве $\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon} \times L$ отображение есть проекция: $g = \mathrm{Pr}_1$, а на множестве N^4 отображение g совпадает с q.*

Теорема 3 *Рассмотрим любое векторное поле $v = (v_1, \ldots, v_n)$, заданное на M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, голоморфными функциями $v_1, \ldots, v_n$ локальных комплексных координат. Предположим, что векторное поле v имеет особую точку (т.е. нуль) P, принадлежащую инвариантному d-мерному комплексному подмногообразию $U \subset M$.*

1) Пусть $d = 1$ и U односвязно. Рассмотрим инвариантное подмногообразие $U \setminus \{P\}$. Тогда интегральные траектории векторного поля v $\mathbb{C}$-выпрямляются на $U \setminus \{P\}$.

2) Пусть $d \geq 2$ и точка P не является внутренней точкой множества особых точек векторного поля $v|_U$. Рассмотрим инвариантное подмногообразие $U \setminus \{P\}$. Тогда интегральные траектории векторного поля v не $\mathbb{C}$-выпрямляются на $U \setminus \{P\}$.

В случае когда векторное поле задано на $M = \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\})$ косым градиентом $v = \mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ рационального гамильтониана $f\colon M \to \mathbb{C}$, любой слой $\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}$ будет инвариантным подмногообразием комплексной размерности один, а объединение слоев $f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})$ инвариантным подмногообразием размерности два.

Литература

1. Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А., Топология лагранжевых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптическим гамильтонианом // Матем. сб., 2010, т.202 (N.3), с. 69-106. Transl. Sbornik Mathematics 202 (N.3), 373-411.

2. А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, т.1, РХД, Ижевск, 1999.

О свойстве разрешимости одного класса нелинейных краевых задач

А.Н. Наимов, М.В. Быстрецкий
(Вологда, ВоГТУ; *nan67@rambler.ru*)

Рассматривается вопрос о разрешимости нелинейных краевых задач вида

$$x''(t) = Q(x'(t) - B(x(t))) + f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1, \qquad (1)$$

$$x'(0) = A_0(x(0), x(1)) + h_0(x), \quad x'(1) = A_1(x(0), x(1)) + h_1(x), \qquad (2)$$

где $x(t)$ - неизвестная вектор-функция, $x(t) \in C^1([0,1]; R^n)$, $n > 1$, $Q, B : R^n \mapsto R^n$, $A_0, A_1 : R^{2n} \mapsto R^n$, $f : [0,1] \times R^{2n} \mapsto R^n$, $h_0, h_1 : C^1([0,1]; R^n) \mapsto R^n$ - непрерывные отображения, удовлетворяющие условиям:

а) $\exists m > 1$, $Q(\lambda z) \equiv \lambda^m Q(z)$ $\forall \lambda > 0$;

б) $B(\lambda y) \equiv \lambda B(y)$ $\forall \lambda > 0$;

в) при любом векторе $y_0 \in R^n$ существует единственное решение $p_B(t, y_0)$ задачи Коши $y'(t) = B(y(t))$, $y(0) = y_0$;

г) $A_i(\lambda y, \lambda z) \equiv \lambda A_i(y, z)$ $\forall \lambda > 0$, $i = 0, 1$;

д) $(|y| + |z|)^{-m} \max_{0 \le t \le 1} |f(t, y, z)| \to 0$ при $|y| + |z| \to \infty$;

е) $||z||_{C^1}^{-1} |h_i(z)| \to 0$ при $|||z||_{C^1} \to \infty$, $i = 0, 1$;

Краевую задачу (1), (2) называем разрешимой, если при любых возмущениях f, h_0 и h_1, удовлетворяющих условиям д) и е), существует хотя бы одно решение краевой задачи.

Разрешимость краевой задачи (1), (2) сводится к разрешимости краевой задачи

$$x''(t) = Q(x'(t)) + f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1, \qquad (3)$$

$$x'(0) = \widetilde{A}_{B,0}(x(0)) + h_0(x), \quad x'(1) = \widetilde{A}_{B,1}(x(0)) + h_1(x), \qquad (4)$$

где

$$\widetilde{A}_{B,0}(y) = A_0(y, p_B(1, y)) - B(y),$$

$$\widetilde{A}_{B,1}(y) = A_1(y, p_B(1, y)) - B(p_B(1, y)).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть не существует ненулевой вектор* $y_0 \in R^n$ *для которого решение задачи* $z'(t) = Q(z(t))$, $z(0) = \widetilde{A}_{B,0}(y_0)$ *ограничено при* $t > 0$, *а решение задачи* $z'(t) = Q(z(t))$, $z(0) = \widetilde{A}_{B,1}(y_0)$ *ограничено при* $t < 0$. *Тогда краевая задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима краевая задача (3), (4).*

Асимптотическое интегрирование адиабатических осцилляторов с запаздыванием[6]

П.Н. Нестеров

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; *nesterov.pn@gmail.com*)

В докладе обсуждается задача построения асимптотических формул в окрестности бесконечности для решений уравнений с запаздыванием вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) + q(t)x(t-h) = 0, \tag{1}$$

где $h > 0$, а функция $q(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Поскольку (1) при $h = 0$ переходит в уравнение так называемого адиабатического осциллятора, уравнения вида (1) с $h \neq 0$ естественно называть адиабатическими осцилляторами с запаздыванием. Нами рассматриваются случаи, когда функция $q(t)$ имеет вид

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho}, \qquad a \neq 0, \tag{2}$$

и

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho}\sin\lambda t, \qquad a \neq 0,\ \lambda \neq 0, \tag{3}$$

где a, λ, ρ — вещественные числа и $\rho > 0$. Для решений уравнений (1), (2) и (1), (3) строятся асимптотические формулы при $t \to \infty$.

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-31004 мол_а, а также гранта Президента Российской Федерации № МК-80.2013.1.

Основу проводимого исследования составляют результаты, полученные в работе [1]. В этой статье предложен метод асимптотического интегрирования одного класса систем функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Применительно к системам с запаздыванием суть метода состоит в следующем. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = v(t)A(t)x(t-h), \qquad x \in \mathbb{C}^n. \tag{4}$$

Здесь $(n \times n)$-матрица $A(t)$ является или T-периодической или состоит из тригонометрических многочленов. Скалярная функция $v(t)$ абсолютно непрерывна на интервале $[t_0, \infty)$ и обладает следующими свойствами: $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$; $\dot{v}(t) \in L_1[t_0, \infty)$; $v^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

В [1] показано, что решения системы (4) при достаточно больших t удовлетворяют системе уравнений с запаздыванием

$$\dot{x} = \Big[v(t)A_1(t) + v^2(t)A_2(t) + \ldots + v^k(t)A_k(t)\Big]x(t) + R(t, x_t). \tag{5}$$

Здесь $(n \times n)$-матрицы $A_j(t)$ являются или T-периодическими или их элементами являются тригонометрические многочлены в зависимости от типа исходной матрицы $A(t)$. В частности,

$$A_1(t) = A(t),$$

$$A_2(t) = -A(t)\int\limits_{t-h}^{t} A(s)ds,\ A_3(t) = A(t)\int\limits_{t-h}^{t} A(s)\int\limits_{s-h}^{t} A(\tau)d\tau ds.$$

Далее, $R(t, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h} \equiv C\big([-(k+1)h, 0], \mathbb{C}^n\big)$ непрерывных на отрезке $[-(k+1)h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^n$ в пространство $\mathbb{C}^n$, а $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-(k+1)h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_{(k+1)h}$. Кроме того, существует скалярная функция $\gamma(t) \in L_1[t_0 + kh, \infty)$ такая, что $|R(t, \varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|$ для любой

$\varphi \in C_{(k+1)h}$ при $t \geq t_0 + kh$ ($\|\varphi\| = \sup_{-(k+1)h\leq\theta\leq 0}|\varphi(\theta)|$). Операторы с таким свойством будем называть операторами из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$.

Дальнейшее преобразование системы (5) состоит в использовании специальной замены переменных (см. [2]) для приведения этой системы при достаточно больших t к усредненному виду

$$\dot{y} = \Big[v(t)A_1 + v^2(t)A_2 + \ldots + v^k(t)A_k\Big]y(t) + R_1(t, y_t). \qquad (6)$$

Здесь матрицы A_j являются постоянными матрицами, а $R_1(t, y_t)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. В частности,

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big],\ A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big],$$

$$\left(\mathrm{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s)ds\right)$$

где матрица $Y_1(t)$ с нулевым средним значением определяется как решение матричного дифференциального уравнения вида: $\dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1$.

На завершающем этапе система (6) (если это оказывается возможным) приводится к так называемому $\mathcal{L}$-диагональному виду

$$\dot{z} = \Lambda(t)z(t) + R_2(t, z_t). \qquad (7)$$

Здесь z_t — элемент пространства $C_{(k+1)h}$, $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)\big)$ — диагональная матрица, элементами которой являются локально интегрируемые на $[t_0,\infty)$ функции со значениями в $\mathbb{C}$, и $R_2(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Асимптотика всех решений системы (7) при $t\to\infty$ может быть затем построена с помощью варианта теоремы Н. Левинсона, предложенного в работе [3].

Построенные нами согласно описанной выше методике асимптотические формулы для решений уравнений (1), (2) и (1), (3) при $t\to\infty$ позволяют сделать следующие выводы. Известно, что в адиабатическом осцилляторе (1), (3) с $h=0$ неограниченные колебания могут возникать лишь в случае, когда ($\lambda = \pm 2$

и $\rho \le 1$) или ($\lambda = \pm 1$ и $\rho \le 1/2$). Во всех остальных случаях решения этого уравнения совершают ограниченные колебания и не стремятся к нулю при $t \to \infty$. В уравнении (1), (3) с $h \ne 0$ неограниченный рост амплитуды колебаний возможен при любой частоте $\lambda \ne 0$ внешнего воздействия $q(t)$ при подходящем выборе величины запаздывания. Кроме того, для любого $\lambda \ne 0, \pm 2$ можно выбрать величину запаздывания h таким образом, что все решения уравнения (1), (3) будут стремиться к нулю при $t \to \infty$. Установлено также, что в отличие от уравнения (1) с $h = 0$ в уравнении адиабатического осциллятора с запаздыванием усиление (гашение) колебаний возможно даже в тех случаях, когда функция $q(t)$ имеет вид (2), т.е. стремится к нулю монотонно при $t \to \infty$.

Литература

1. Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients – Monatsh. Math. 2013. Vol. 171, No. 2. P. 217–240.

2. Нестеров П. Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами – Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742.

3. Cassel J. S., Hou Z. Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation – J. London Math. Soc. 1993. Vol. 47. P. 473–483.

Об аппроксимации целыми весовыми функциями экспоненциального типа

А.А. Никитина

(Липецк, РАНХиГС при Президенте РФ Липецкий филиал; *alek-feoktistova@yandex.ru*)

Пусть $x = (x', x'') \in R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}$, $x' = (x_1, \dots, x_n) \in R_n^+ = \{x' : \ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_N) \in R_{N-n}$. При этом число n предполагается фиксированным, $1 \le n \le N$. И пусть $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ – мультииндекс с неотрицательными целыми компонентами, $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha'' = (\alpha_{n+1}, \ \dots \ , \alpha_N)$.

Положим $(BD)^\alpha f = B_{x'}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} f$, где

$B_{x'}^{\alpha'} = B_{x_1}^{\alpha_1} B_{x_2}^{\alpha_2} \dots B_{x_n}^{\alpha_n}$, $B_{x_i} = B_{x_i,\gamma_i}$ – оператор Бесселя

$B_{x_i} u = B_{x_i,\gamma_i} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}$, отвечающий положительному индексу γ_i,

$D_{x''}^{\alpha''} f(x', x'') = \frac{\partial^{|\alpha''|} f(x',x'')}{\partial x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \dots x_N^{\alpha_N}}$, $\qquad |\alpha''| = \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_N$.

Функцию вида

$$(BD)^\alpha f(x) = B_{x'}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} f(x', x'')$$

мы будем называть смешанной B-производной от функции $f(x', x'')$ порядка $\ell = 2|\alpha'| + |\alpha''|$.

Через $L_p^\gamma(R_N^+)$, $1 \le p < \infty$ будем обозначать весовое пространство Лебега, состоящее из измеримых на R_N^+ функций $\varphi(x)$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} = \left(\int_{R_N^+} |\varphi(x)|^p (x')^\gamma dx \right)^{1/p},$$

где $(x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}$, а $\gamma = (\gamma_1; \dots; \gamma_n), \gamma_i > 0$ — фиксированные числа.

Основной класс функций, состоящий из четных по каждой из переменных $x_1, ..., x_n$ функций шварцевского пространства $S(R_N)$ будем обозначать $S_{ev}{=}S_{ev}(R_N^+)$. Пространство обобщенных функций (распределений) $S'_{ev}(R_N^+)$ определяется обычным образом на основе весовой линейной формы

$(f, \varphi)_\gamma = \int_{R_N^+} f(x)\, \varphi(x)\, (x')^\gamma\, dx.$

Смешанный обобщенный сдвиг имеет вид (см. [1] и [2])

$$f \to (T^y f)(x) = \prod_{i=1}^{n} T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''),$$

где одномерный обобщенный сдвиг $T_{x_i}^{y_i}$, действует по каждой из весовых переменных $x_1, \dots, x_n$ по формуле (положим $x = (x_i, \mathbf{x}^i)$)

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = C(\gamma_i) \int_0^\pi f(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2 x_i y_i \cos\alpha}, \mathbf{x}^i)\, \sin^{\gamma_i - 1}\alpha \; d\alpha\,.$$

Обобщенная свертка функций f, $g \in L_p^\gamma(R_N^+)$ на основе смешанного обобщенного сдвига и весовой линейной формы $(\cdot\,,\cdot)_\gamma$ определяется формулой

$$(f*g)_\gamma(x) = \int_{R_N^+} f(y) T_x^y g(x) (y')^\gamma dy.$$

Смешанное преобразование Фурье-Бесселя определяется следующим выражением

$$\widehat{\varphi}(\xi) = F_B[\varphi](\xi) = \int\limits_{R_N^+} \varphi(x)\ \mathbf{j}_\gamma(x', \xi')\ e^{-i\langle x'', \xi''\rangle} (x')^\gamma dx,$$

где по весовым переменным x' применяется преобразование Фурье-Бесселя, а по переменным x'' — преобразование Фурье. При этом мы используем обозначение $\mathbf{j}_\gamma(x', \xi') = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i\, \xi_i)$, в котором j_ν — j-функция Бесселя , связанная с функцией Бесселя первого рода равенством $j_\nu(x_i) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu / x_i^\nu$.

Как известно (см. [2]), это преобразование обратимо в классе функций $S_{ev}(R_N^+)$ и обратное преобразование определяется выражением

$$\varphi(x) = F_B^{-1}[\widehat{\varphi}](x) = 2^{n-|\gamma|} (2\pi)^{n-N} \prod_{i=1}^n \Gamma^{-2}\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right) F_B[\hat{\varphi}](-x).$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит весовому пространству Соболева-Киприянова $W_p^{r,\gamma}(R_N^+)$, если $f(x) \in L_p^\gamma(R_N^+)$ и $(BD)^j f(x) \in L_p^\gamma(R_N^+)$, $|\tilde{j}| = 1, \ldots, r$.

Следуя [3],[2] и [4], через $\mathfrak{M}_{\nu,p}^\gamma(R_N^+) = \mathfrak{M}_{\nu,p}^\gamma$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим совокупность всех целых четных (в смысле определения четности И.А.Киприянова [2]) по каждой из переменной $x_1, \ldots, x_n$ функций экспоненциального типа ν (обозначается этот класс $E_{\nu,ev}$; терминалогия книги [2]), которые, как функции действительного переменного $x \in R_N$, принадлежат весовому классу Лебега $L_p^\gamma(R_N^+)$. Положим $\mathfrak{M}_\nu^\gamma = \mathfrak{M}_{\nu,\infty}^\gamma$, т.е. $\mathfrak{M}_\nu^\gamma$ состоит из всех функций типа ν, ограниченных на $\overline{R_N^+}$.

Наилучшее приближение функций $f(x) \in L_p^\gamma(R_N^+)$ функциями $\mathfrak{M}_{\nu,p}^\gamma(R_N^+)$ определяется выражением

$$E_\nu(f)_{L_p^\gamma} = \inf_{\varphi \in \mathfrak{M}_{\nu,p}^\gamma(R_N^+)} \|f - \varphi\|_{L_p^\gamma}.$$

Будем пользоваться *нецентрированной обобщенной конечной разностью*, построенной на основе смешанного обобщенного сдвига в [5] (см. также книгу [6]), следующим образом

$$\square_h^s f(x) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \, C_s^k \, \left(T^{kh} f\right)(x),$$

где C_k^s — обычные биномиальные коэффициенты.

Следуя [7] (см. также книгу [6]) введем *модуль гладкости, порожденный смешанным обобщенным сдвигом*, (далее, сокращая запись, будем называть *γ-модулем гладкости*) $\omega_{p,\gamma}^\kappa(f,\delta)$ порядка κ в весовых классах Лебега L_p^γ

$$\omega_{p,\gamma}^\kappa(f,\delta) = \sup_{t \le \delta} \|(\square_{th}^\kappa f)(x)\|_{L_p^\gamma}, \quad h \in \overline{R_N^+}, \ |h| = 1$$

Применяя подходы к доказательствам из книги С.М.Никольского легко установить следующие свойства (в случае $N = n = 1$ эти результаты получены приведены в [4]).

1. *γ-Модуль гладкости суммы функций не превосходит суммы γ-модулей гладкости слагаемых:*

$$\omega_{p,\gamma}^\kappa(f + g, t) \le \omega_{p,\gamma}^\kappa(f, t) + \omega_{p,\gamma}^\kappa(g, t).$$

2. *γ-Модуль гладкости функции $f \in L_p^\gamma$ оценивается через норму функции следующим образом* $\omega_{p,\gamma}^\kappa(f, t) \le 2^\kappa \|f\|_{L_p^\gamma}$

3. *Если $f(x) \in W_p^{r,\gamma}(R_N^+)$, тогда при $r = 2|\alpha'| + |\alpha''|$ верно неравенство*

$$\omega_{p,\gamma}^\kappa(f, t) \le ct^{2r} \sum_{2|\alpha'| + |\alpha''| = r} \|(BD)^\alpha f\|_{L_p^\gamma(R_N^+)},$$

где $c = c(\kappa, r, \gamma)$ - постоянная.

Получены следующие результаты.

Утверждение 1. *Пусть $\square_h^s$ — смешанная о.к.разность порядка s с векторным шагом $h \in \overline{R_N^+}$ и пусть $f(x) \in W_p^{r,\gamma}(R_N^+)$, $1 \le p \le \infty$ и $|\tilde{l}| = 2|l'| + |l''|$=$r$. Тогда*

$$\|\square_h^s f\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} \le C|h|^r \|(BD)^l f\|_{L_p^\gamma(R_N^+)}.$$

Утверждение 2. *Пусть $f(x) \in L_1^\gamma(R_N^+)$, $g(x) \in L_p^\gamma(R_N^+)$, $1 \le p \le \infty$ и $\operatorname{supp} F_B[f] \subseteq \square_\nu$, тогда $(f * g)_\gamma \in \mathfrak{M}_{p,\nu}^\gamma(R_N^+)$.*

Утверждение 3. *Пусть $f(x) \in W_p^{r,\gamma}(R_N^+)$, $1 \le p \le \infty$, тогда справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{L_p^\gamma(R_N^+)} \le \frac{c}{\nu^r} \sum_{2|\alpha'|+|\alpha''|=r} \|(BD)^\alpha f\|_{L_p^\gamma(R_N^+)}$$

Литература

1. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя – УМН. 1951. Т.6, N2. С.102-143.

2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи – М.: Наука. 1997.199 с.

3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения – М.:Наука. 1977. 436 с.

4. Платонов С.С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций на полупрямой – СМЖ. 2009. Т.50, № 1. С. 154-174.

5. Ляхов Л.Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов – ДАН. 1990. Т.315, N2. С.291-296.

6. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса,порожденные обобщенным сдвигом – Воронеж: ВГТА. 1997. 144 с.

7. Ляхов Л.Н. Пространство В-потенциалов Рисса – ДАН. 1994. Т.334, N3. С. 278-280.

Траекторная эквивалентность интегрируемого случая Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости случаю Эйлера и задаче Якоби

С.С. Николаенко

(Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; *nikostas@mail.ru*)

Рассматриваются три классические интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы: случай Эйлера в динамике твёрдого тела с неподвижной точкой, задача Якоби о геодезических на эллипсоиде и случай Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости. Параметрами первой системы являются моменты инерции твёрдого тела и энергия, второй системы – квадраты полуосей эллипсоида, третьей системы – только энергия. Все три системы можно считать заданными на 4-мерных симплектических многообразиях, диффеоморфных T^*S^2, каждая из них имеет две степени свободы. Нас интересует вопрос траекторной эквивалентности этих систем, т.е. существования гомеоморфизма (диффеоморфизма) фазовых многообразий, переводящего траектории одной системы в траектории другой. Траекторная эквивалентность является более сильным типом эквивалентности, чем лиувиллева. Напомним, что две интегрируемые гамильтоновы системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм их фазовых пространств, при котором слоение на торы, являющиеся замыканиями траекторий общего положения, одной системы переходит в такое же слоение другой системы.

Далее будем говорить об эквивалентности систем, ограниченных на регулярные трёхмерные изоэнергетические многообразия. А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко была доказана траекторная эквивалентность (топологическая) случая Эйлера и задачи Якоби [1]. В работах [2], [3] было показано отсутствие гладкой траекторной эквивалентности, а также топологической сопряжённости между этими системами. Следующий результат устанавливает связь (в смысле траекторной эквивалентности) между системами Эйлера и Якоби и интегрируемым случаем Чаплыгина. Отметим, что в случае Чаплыгина, как и в случае Эйлера, естественным образом выделяются три зоны неособых значений энергии.

Теорема

1. *Для любого неособого значения энергии системы Чаплыгина последняя лиувиллево эквивалентна любой системе Эйлера с энергией из соответствующей зоны, а в случае "больших" энергий – также любой системе Якоби (см. [4]).*

2. *Для любого значения энергии системы Чаплыгина, принадлежащего зонам "малых" и "средних" энергий, существует однопараметрическое семейство систем Эйлера, топологически траекторно эквивалентных данной системе Чаплыгина. При этом в случае "малых" энергий этот траекторный изоморфизм является гладким. В случае "средних" энергий гладкая траекторная эквивалентность не имеет места.*

3. *Для достаточно большого значения энергии системы Чаплыгина (из зоны "больших" энергий) существует единственная система Эйлера и единственная система Якоби, топологически траекторно эквивалентная данной системе Чаплыгина. Гладкая траекторная эквивалентность не имеет места.*

4. *На любых уровнях энергии система Чаплыгина топологически не сопряжена с системами Эйлера или Якоби.*

Доказательство этого результата основывается на теории топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем, созданной А. Т. Фоменко и его школой (см. [5]). В частности, вычисляется полный инвариант топологической траекторной эквивалентности – t-молекула. Для доказательства отсутствия гладкой траекторной эквивалентности или сопряжённости также используются соответствующие различающие инварианты. Стоит отметить, что установление подобных фактов становится весьма непростой задачей без привлечения теории инвариантов.

Литература

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твёрдого тела. // Функциональный анализ и его приложения. 1995, т. 29, № 3, с. 1–15.

2. Болсинов А. В., Дуллин Х. О случае Эйлера в динамике твёрдого тела и задаче Якоби. // Регулярная и хаотическая динамика. 1997, т. 2, № 1, с. 13–25.

3. Орёл О. Е. О несопряжённости случая Эйлера в динамике твёрдого тела и задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Матем. заметки, 1997, т. 61, вып. 2, с. 252–258.

4. Николаенко С. С. Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости. // Матем. сборник (в печати).

5. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

Управляемость процесса дробной диффузии[7]

В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян

(Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет; valerio-ob2000@mail.ru, *garikpetrosyan@yandex.ru*)

Мы рассматриваем задачу управляемости для процесса, описываемого диффузионным уравнением дробного порядка. Уравнения такого типа возникают в задачах электроаналитической химии, моделирования диффузии в фрактальных средах и др. (см. [3] и имеющиеся там ссылки).

Для простоты мы рассмотрим одномерную модель. Пусть $z(t, x)$ - концентрация диффундирующего вещества в момент

[7]Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00468.

времени $t \in [0,T]$ в точке $x \in \mathbb{R}$. Мы будем предполагать, что выполняются следующие условия.

(H_1) Имеется l источников вещества, свойства которых зависят от концентрации и плотность которых характеризуется функциями $\varphi_i(x,z)$, $i = 1,...,l$, $\quad \varphi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Интенсивность источников в каждый момент времени характеризуется функциями $v_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,l$, диапазон регулирования которых определяется ограничениями типа обратной связи:

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_l(t)) \in V\left(z\left(t, \cdot\right)\right), \quad t \in [0,T],$$

где $V : L^2(\mathbb{R}) \to Kv(\mathbb{R}^l)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение удовлетворяющее условию глобальной ограниченности

$$\|V(z)\| \leq M,$$

для всех $z \in L^2(\mathbb{R})$, где $M > 0$;

(H_2) Обозначая $y(t) = z(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, будем полагать также, что процесс диффузии подвержен в моменты $0 < t_1 < ... < t_m < T$, $\quad m \geq 1$, импульсным воздействиям $\mathcal{I}_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяющим условиям:

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq m$, являются вполне непрерывными.

$(\mathcal{I}2)$ функции $\mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq m$, являются ограниченными, т. е. существует такое $\mathcal{N} > 0$, что $\|\mathcal{I}_k x\| \leq \mathcal{N}\,\|x\|$ для всех $x \in L^2(\mathbb{R})$.

Считая для простоты коэффициент дробной диффузии равным единице, мы получаем, что процесс описывается следующими соотношениями:

$$D^\alpha z(t,x) = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial^2 x} + \sum_{i=1}^{l} v_i(t)\varphi_i\left(x, z\left(t,x\right)\right) + Bu(t), \quad t \in [0,T],$$

$$\alpha \in (0,1),\; z(t, \pm\infty) = 0, \quad t \in [0,T],\; z(0,\cdot) = z_0 \in L^2(\mathbb{R}),$$

и подчиняется также условиям импульсных воздействий.

Задача управляемости заключается в возможности перевода любой начальной концентрации вещества $z(0,x)$ в заданную концентрацию, характеризующуюся функцией $z_1(x)$, к заданному моменту времени T.

(H_3) Предполагая соответствующий линейный процесс управляемым (т.е. управляемым в случае, когда $\sum_{i=1}^{l} v_i(t)\varphi_i\left(x, z\left(t, x\right)\right) \equiv 0$), мы будем считать, что управляющие функции выбираются по правилу $u(\cdot) \in L^p(I, U), \quad p > 1/\alpha$, где U - гильбертово пространство управлений, и реализация управляющих воздействий осуществляется с помощью ограниченного линейного оператора $B : U \to L^2(\mathbb{R})$.

Тогда мы можем свести задачу к вопросу об управляемости для дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве $E = L^2(\mathbb{R})$:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(y(t)) + Bu(t),\ t \in [0, T].$$

Здесь A обозначает оператор Лапласа $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ с областью определения $D(A) = \left\{y \in H^2(\mathbb{R}) :\ y(\pm\infty) = 0\right\}$, где $H^2(\mathbb{R})$ - пространство функций Соболева.

Из работы [1] вытекает, что при вышеуказанных и некоторых дополнительных предположениях процесс дробной диффузии управляем.

Литература

1. Петросян Г.Г. О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве, материалы четвертой международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования Москва, РУДН, 2013.

2. Kamenskii M., Obukhovskii V. and Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin — New-York, 2001.

3. Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Sci. Publishers, Yverdon, 1993.

Группы симметрий бифуркаций интегрируемых гамильтоновых систем

Е.И. Орлова
(Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова; *eiorlenok@mail.ru*)

Введение. Понятие атома было введено А. Т. Фоменко (см. [1]). Атомы кодируют типичные перестройки (бифуркации) торов Лиувилля в невырожденных интегрируемых гамильтоновых системах. В настоящее время в терминах двумерных атомов и "молекул" описаны многие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы и их классы относительно различных отношений эквивалентности. В частности, оказалось, что многомерные бифуркации торов Лиувилля представляются в виде полупрямых произведений двумерных атомов, что делает актуальным изучение групп симметрий двумерных атомов.

Напомним понятие двумерного седлового атома (далее просто — атома). Пусть M — связная замкнутая двумерная поверхность (ориентируемая или неориентируемая) и $f : M \to \mathbb{R}$ — правильная функция Морса, то есть имеющая ровно три критических значения: минимальное, максимальное и седловое. Тогда ее седловой уровень является связным графом K, все вершины которого имеют степень 4. Дополнение к этому графу состоит из двумерных клеток (дисков). Следовательно, все вершины клеточного разбиения имеют степень 4 (т.е. в вершине сходятся ровно 4 полуребра) и разбиение допускает шахматную раскраску, то есть каждое ребро граничит с черной клеткой и белой клеткой. Правильные функции Морса f и f' на поверхностях M и M' называются послойно эквивалентными в окрестностях P и P' своих критических уровней $\{f = c\}$ и $\{f' = c'\}$, если существуют такие малые $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon' > 0$ и диффеоморфизм $D : P = \{|f - c| < \varepsilon\} \to P' = \{|f' - c'| < \varepsilon'\}$, что связные компоненты линий уровня функции f переходят в связные компоненты линий уровня функции f'. Если D сохраняет направление роста функции, то функции называются послойно оснащенно эквивалентными. В дальнейшем будем считать, что $c = 0$.

Атомом (P, K) называется класс послойной оснащенной эквивалентности функции Морса f в окрестности $P = \{|f| < \varepsilon\}$ ее седлового критического уровня $K = \{f = 0\}$. Атомом часто называется какой-либо представитель класса послойной эквивалентности (то есть поверхность P с вложенным в нее графом K). Дополнение к графу K в поверхности P состоит из "положительных" и "отрицательных" колец (на которых функция f положительна и отрицательна соответственно). Гомеоморфизмы пары (P, K) на себя, сохраняющие направление роста функции, и рассматриваемые с точностью до гомеоморфизмов, переводящих каждое ребро графа K в себя с сохранением любой выбранной на нем ориентации, образуют группу симметрий атома. Эта группа дискретна. Если атом (точнее, поверхность P) ориентируем, то рассмотрение собственных (т.е. сохраняющих ориентацию) гомеоморфизмов дает группу собственных симметрий атома. Седловые критические точки функции f называются вершинами атома, а их число — сложностью атома. В этом случае рассмотренная выше поверхность M, содержащая P, с правильной функцией Морса на ней, получается из поверхности P заклеиванием каждой ее граничной окружности двумерным диском и продолжением функции внутрь диска с ровно одной критической точкой в его центре. Род поверхности M называется родом атома.

Пусть есть атом (P, K). Рассмотрим некоторую вершину этого атома с окрестностью. Локально данная окрестность представляет собой двумерный диск с вложенным в него графом в виде крестика (вершина с исходящими ребрами). Пусть на диске задана ориентация с помощью репера $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Тогда эту ориентацию можно индуцировать на крестик, занумеровав ребра таким образом, чтобы при обходе вершины в направлении от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ порядок ребер возрастал. Рассмотрим ориентацию этого крестика при гомеоморфизме, полагая, что ориентация диска сохранилась.

Утверждение 1 (сохранение циклического порядка) *При гомеоморфизме вершины атома с окрестностью (с исходящими из нее ребрами) порядок ребер при обходе образа вершины в направлении от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ либо остается прежним, либо меняется на противоположный.*

Утверждение 2 *Любой гомеоморфизм атома (симметрия) однозначно определяется (с точностью до изотопии) образом двумерной окрестности одной вершины, т.е. образом вершины и ее ребер (с указанием: какое ребро куда переходит).*

Реализация атомов с группой симметрий $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. В работе [2] Е. А. Кудрявцевой и А. Т Фоменко было доказано, что любая конечная группа G является группой симметрий некоторого атома, а также были получены оценки на минимальный род ($\mathrm{M}g(G)$) и сложность ($\mathrm{M}n(G)$) этого атома. Т.к. эти оценки носят общий характер, то в общем случае они могут быть неоптимальными. Т.е. для некоторых классов групп оценки могут быть улучшены. В частности, удалось улучшить оценку на род для атомов с группой симметрий $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ $(p, q > 1)$. В общем случае оценка на род такова: $\mathrm{M}g(G) \leqslant (k-1)|G|+1$, где k — число порождающих элементов группы, $|G|$ — порядок группы. Если применить ее к случаю группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$, то получим $\mathrm{M}g(G) \leqslant pq+1$.

Теорема 1 *Группа $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ $(p, q > 1)$ является группой симметрий некоторого ориентируемого атома рода 1. Атом строится конструктивно.*

Оценку на сложность этого атома улучшить не удалось. По вышеуказанной теореме Е. А. Кудрявцевой и А. Т. Фоменко оценка имеет такой вид: $\mathrm{M}n(G) \leqslant (2k+3)|G|$. В случае данного атома $n(G) = 7pq$.

Полные группы симметрий всех атомов сложности не более трех.

Теорема 2 *Вычислены группы симметрий неориентируемых атомов сложности не более трех. Результат приведен в таблице.*

Атом	Род	$\widehat{Sym}$	Атом	Род	$\widehat{Sym}$
$\widetilde{B}$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{F}_4$	Kl	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{C}_2$	Kl	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{F}_5$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{C}_1$	$\mathbb{R}P^2$	D_4	$\widetilde{F}_6$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{D}_1$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{F}_7$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{D}_2$	Kl	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{G}_1$	$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{E}_1$	$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{G}_2$	Kl	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{E}_2$	$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{G}_3$	Kl	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{E}_3$	Kl	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{G}_4$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{E}_4$	Kl	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{G}_5$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{E}_5$	Kl	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{G}_6$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{E}_6$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{G}_7$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{E}_7$	$\mathbb{R}P^2$	D_6	$\widetilde{H}_1$	$S^2 + 3\mu$	D_3
$\widetilde{F}_1$	$S^2 + 3\mu$	E	$\widetilde{H}_2$	Kl	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{F}_2$	$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2$	$\widetilde{H}_3$	$\mathbb{R}P^2$	E
$\widetilde{F}_3$	Kl	E	$\widetilde{H}_4$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$

Общий метод нахождения групп симметрий таков:

1) нумеруем все ребра в окрестности каждой вершины (таким образом, с каждым ребром ассоциировано два числа);

2) фиксируем любые два соседние ребра;

3) отображаем их на все возможные места в графе (с учетом того, что эти ребра должны остаться частью границы диска того же цвета);

4) далее используем Утверждение 2, а именно, восстанавливаем граф и его шахматную раскраску (при этом могут возникнуть противоречия с соседством некоторых ребер);

5) для графов, которые удалось восстановать, выписываем соответствующую перестановку;

6) элементы группы выписаны. Ищем образующие и соотношения.

Литература 1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 2. Кудрявцева Е. А., Фоменко А. Т. Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты — Вестник московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2013. №1.

Об одной задаче динамики термовязкоупругой среды типа Олдройта[8]

В.П. Орлов, М.И. Паршин

(Воронеж, Воронежский государственный университет;
parshin_maksim@mail.ru)

Пусть $\Omega \subset R^2$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В $Q_T = [0,T] \times \Omega$ рассматривается начально-граничная задача

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v - \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds + \nabla p = f; \tag{1}$$

[8]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 10-01-00143.

$$\operatorname{div} v=0, (t,x) \in Q_T; v|_{t=0} = v^0 \ x \in \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \ \ t \in [0,T]; \qquad (2)$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v) + \qquad (3)$$

$$\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds : \mathcal{E}(v) + g(t,x) \in Q_T; \qquad (4)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0, x \in \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0, \ t \in [0,T]; \qquad (5)$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$, θ и p скорость, температура и давление среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ - тензор скоростей деформаций, $\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{ij}$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**}$.

Ниже H и V являются замыканием множества соленоидальных бесконечно дифференцируемых функций на Ω с компактным носителем, $H_p^\beta(\Omega)$ - пространства Бесселевых потенциалов.

Определение. Слабым решением задачи (1)-(5) называется пара (v, θ), где

$$v \in L_2(0,T;V) \cap W_2^1(0,T;V') \cap C_w(0,T;H) \equiv U(0,T), \qquad (6)$$

$$\theta \in W_1^1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)) \cap L_p(0,T;W_p^1(\Omega)) \cap \qquad (7)$$

$$\cap C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)) \equiv \Upsilon, \ 1 < p < +\infty,$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}(v,\varphi) - (v_i v, \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \mu_1(\theta)(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \\ \mu_2(\textstyle\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f, \varphi \rangle\end{gathered} \qquad (8)$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t,

$$\frac{d}{dt}(\theta,\phi) - (v_i\theta, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) + \chi(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) = \qquad (9)$$

$$\langle g, \phi \rangle + (\tilde{\mu}_1(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi) + \mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds : \mathcal{E}(v)(t,x)), \phi),$$

где $\tilde{\mu}_1(\theta) = \mu_0 + \mu_1(\theta)$, в смысле распределений на $[0, T]$ для любых $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t, и условиям (2) и (5).

Знак $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в (8) и (9)означает двойственность между V' и V и между $W_p^{-1}(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$ соответственно. Здесь $(u, w) = \int_\Omega u(x)w(x)dx$, $C_w(0, T; E)$ обозначает пространство слабо непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве E.

Теорема. Пусть функция $\mu_1(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$, монотонно возрастает и $0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**}$, $s \in (-\infty, +\infty)$, $f \in L_2(0, T; V')$, $v^0 \in H$, $g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega))$. Тогда при $p \in (1, 4/3)$ существует слабое решение задачи (1)-(5).

Литература

1. Звягин В.Г., Орлов В.П. Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса – Известия ВУЗов, Математика, **2013**(8), с.51-56.

2. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса –Москва: Мир, 1981.

3. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ – Ann. Math. Pure Appl., **1988**(146), с.65-96.

4. Иосида К. Функциональный анализ – Москва, Мир, 1967. 624 с.

Оптимальная система подалгебр одного псевдопараболического уравнения

А.В. Панов
(Челябинск, Челябинский государственный университет;
gjd@bk.ru)

Рассматривается уравнение

$$u_t - u_{txx} = u^{-3}.$$

Базис основной алгеброй Ли [1] операторов допускаемых групп преоразований данного уравнения состоит из

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = t\partial_t + \frac{u}{4}\partial_u,$$

$$X_3 = \partial_x,\ X_4 = \frac{1}{2}(e^{2x}\partial_x + e^{2x}u\partial_u),\ X_5 = \frac{1}{2}(e^{-2x}\partial_x - e^{-2x}u\partial_u).$$

Из таблицы коммутаторов

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1	0	Y_1	0	0	0
Y_2	$-Y_1$	0	0	0	0
Y_3	0	0	0	$2Y_4$	$-2Y_5$
Y_4	0	0	$-2Y_4$	0	$-Y_3$
Y_5	0	0	$2Y_5$	Y_3	0

видно, что данная алгебра является прямой суммой алгебры аффинных преобразований прямой и алгебры дробно–линейных преобразований проективной прямой $\mathbb{RP}^1$. Для данной алгебры построена оптимальная система подалгебр, используя двухшаговый алгоритм,предложенный в работе [2]. Найдены инвариантные решения уравнения.

Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений – М.: Наука. 1978. 399 с.

2. Овсянников Л.В. Об оптимальных системах подалгебр – Докл. РАН. 1993. Т.333. С. 702-704.

Движение заряженной частицы в пространстве Максвелла $W_{4,19}$

М.А. Паринов

(Иваново, ИвГПУ; *mihailparinov@mail.ru*)

В результате классификации пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре получен ряд интересных полей, заслуживающих дальнейшего изучения. К их числу относится класс пространств Максвелла с нулевым током $W_{4,19}$, задаваемый кососимметричным тензором F_{ij} вида[9]

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{Kx^1}{u^3}, \quad F_{23} = \frac{Kx^2}{u^3}, \quad F_{34} = \frac{Kx^4}{u^3} \quad (1)$$

($u = \sqrt{-(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^4)^2}$, $K = \mathrm{const}$); он соответствует группе симметрий $G_{4,19}$ (алгебре Ли векторных полей $\mathcal{L}_{4,19} = L\{e_{12},\ e_{14},\ e_{24},\ e_3\}$) [1, с. 372]. Эти пространства имеют чистый алгебраический тип I_b[10].

Поле (1) примечательно тем, что по форме оно напоминает кулоновское поле[11] (класс ПМНТ $W_{4,18}$)

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = \frac{Kx^1}{r^3}, \quad F_{24} = \frac{Kx^2}{r^3}, \quad F_{34} = \frac{Kx^3}{r^3} \quad (2)$$

($r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, $K = \mathrm{const}$). ПМНТ класса $W_{4,18}$ имеют в отличие от $W_{4,19}$ чистый алгебраический тип I_a (электростатические поля).

Далее, ПМНТ классов $W_{4,18}$ и $W_{4,19}$ допускают 4-мерные группы симметрий. Но для $W_{4,18}$ это группа $G_{4,18}$ – произведение группы поворотов 3-мерного евклидова подпространства $Ox^1x^2x^3$ и 1-мерной группы смещений в направлении оси времени Ox^4. Для $W_{4,19}$ это группа $G_{4,19}$ – произведение группы псевдовращений 3-мерного псевдоевклидова подпространства $Ox^1x^2x^4$ и 1-мерной группы смещений в направлении пространственной оси Ox^3.

ПМНТ классов $W_{4,18}$ и $W_{4,19}$ имеют еще и существенные топологические различия: поле (2) определено в пространстве

---

[9]Все используемые в этой статье понятия и обозначения можно найти в [1]. В частности, $\{x^i\}$ — галилеевы координаты в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$, $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,\ -1,\ -1,\ 1)$ — метрический тензор, $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

[10]К типу I_b принадлежат, в частности, все магнитостатические поля. Поле (1) не является магнитостатическим ни в какой инерциальной системе отсчета.

[11]Кулоновское поле используется в качестве математической модели электромагнитного поля, образованного заряженной частицей. Автору неизвестно, какой физической реальности можно сопоставить поле (1).

Минковского без оси времени $M = \mathbb{R}^4_1 \setminus Ox^4$, а поле (1) – в $\mathbb{R}^4_1$ без 3-мерного многообразия – декартова произведения оси Ox^3 и изотропного конуса в $Ox^1x^2x^4$:

$$M = \mathbb{R}^4_1 \setminus \{(x^1,\, x^2,\, x^3,\, x^4) :\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2 = 0\}. \tag{3}$$

В частности, первое из этих многообразий связно, а второе несвязно.

Движение пробной заряженной частицы в электромагнитном поле (пространстве Максвелла) описывается системой уравнений Лоренца[12]

$$mc\ddot{x}^i = \frac{e}{c} g^{ik} F_{kj} \dot{x}^j. \tag{4}$$

В случае кулоновского поля система (4) достаточно хорошо исследована (см., напр., [2, с. **I**:217–**I**:222]). В настоящей работе ставится задача исследования уравнений (4) для поля (1), а значит и самого поля (1).

Прежде всего заметим, что ПМНТ $W_{4,19}$ является нётеровым, т. е. существует потенциал A_i,

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \tag{5}$$

с группой симметрий $G_{4,19}$. Действительно, класс $P_{4,19}$ потенциалов, допускающих группу $G_{4,19}$, состоит из ковекторных полей

$$A_i = (0,\, 0,\, C(u),\, 0), \tag{6}$$

где $u = \sqrt{-(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^4)^2}$, а $C(u)$ — произвольная функция. Подставляя (1) и (6) в (5), найдем потенциал для поля (1):

$$A_i = (0,\, 0,\, K/u,\, 0). \tag{7}$$

Нётеровы интегралы[13], соответствующие базису алгебры $\mathcal{L}_{4,19}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} &H_{12} = mc(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1), && H_{14} = mc(x^4\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^4), \\ &H_{24} = mc(x^4\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^4), && H_3 = mc\dot{x}^3 - \frac{e}{c}\frac{K}{u}. \end{aligned} \tag{8}$$

---

[12] Точка над буквой обозначает дифференцирование по s: $\dot{x} = dx/ds$.

[13] Они вычисляются по формуле $H = -\xi^i \left(mc\, g_{ij}\dot{x}^j + \dfrac{e}{c} A_i \right)$, где ξ^i – базисный вектор алгебры Ли, соответствующей группе симметрий.

Легко проверить, что три из них связаны соотношением

$$H_{12}x^4 + H_{14}x^2 - H_{24}x^1 = 0, \tag{9}$$

которое означает, что траектория частицы лежит в 3-мерном подпространстве пространства Минковского, содержащем ось Ox^3 и псевдоортогональном вектору $(-H_{24},\, H_{14},\, 0,\, H_{12})$.

Перейдем в $Ox^1x^2x^4$ к псевдосферическим координатам[14]

$$x^1 = u\cos\varphi\,\mathrm{sh}\,\psi, \quad x^2 = u\sin\varphi\,\mathrm{sh}\,\psi, \quad x^4 = u\,\mathrm{ch}\,\psi. \tag{10}$$

Первые три интеграла преобразуются к виду

$$\begin{aligned} H_{12} &= mcu^2\dot\varphi\,\mathrm{sh}^2\,\psi, && (11)\\ H_{14} &= mcu^2(-\dot\varphi\sin\varphi\,\mathrm{ch}\,\psi\,\mathrm{sh}\,\psi + \dot\psi\cos\varphi), && (12)\\ H_{24} &= mcu^2(\dot\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ch}\,\psi\,\mathrm{sh}\,\psi + \dot\psi\sin\varphi). && (13) \end{aligned}$$

Выразим $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ из (11) и системы (12)–(13) и приведем их к виду

$$\dot\varphi = \frac{H_{12}}{mcu^2\,\mathrm{sh}^2\,\psi}, \tag{14}$$

$$\dot\varphi = \frac{\sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2}\cos(\varphi+\varphi_0)}{mcu^2\,\mathrm{ch}\,\psi\,\mathrm{sh}\,\psi}, \quad \dot\psi = \frac{\sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2}\sin(\varphi+\varphi_0)}{mcu^2}, \tag{15}$$

где $\varphi_0 = \mathrm{arctg}(H_{14}/H_{24})$. Приравнивая выражения для $\dot\varphi$ в (14) и (15), придем к равенству, связывающему φ и ψ:

$$H_{12}\,\mathrm{cth}\,\psi = \sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2}\cos(\varphi+\varphi_0). \tag{16}$$

Из него следует явная зависимость φ от ψ:

$$\varphi = \arccos\frac{H_{12}\,\mathrm{cth}\,\psi}{\sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2}} - \varphi_0. \tag{17}$$

---

[14]Замена (10) приводит F к виду $F = \dfrac{K}{u^2}\,dx^3\wedge du$; координата x^3 не меняется.

Так как область определения арккосинуса — отрезок $[-1,\, 1]$ и $|\operatorname{cth}\psi| > 1$ для $\forall\ \psi \in \mathbb{R}$, то $H_{12}/\sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2} < 1$, откуда следует неравенство для постоянных компонент момента импульса:

$$H_{12}^2 - H_{14}^2 - H_{24}^2 < 0. \tag{18}$$

Таким образом, вектор $(-H_{24},\, H_{14},\, 0,\, H_{12})$ является пространственноподобным и, следовательно, подпространство, задаваемое уравнением (9), псевдоевклидово. Решая неравенство $\left| H_{12} \operatorname{cth}\psi / \sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2} \right| < 1$ относительно ψ, получим следующее утверждение.

Если заданы константы H_{12}, H_{14} и H_{24}, удовлетворяющие неравенству (18)*, то для координаты ψ движущейся заряженной частицы будет выполняться неравенство*

$$|\psi| > \ln \frac{\sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2} + |H_{12}|}{\sqrt{H_{14}^2 + H_{24}^2 - H_{12}^2}}. \tag{19}$$

В заключение отметим еще одну особенность поля (1). Выпишем компоненты векторов напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E} = \left(0,\, 0,\, -\frac{Kx^4}{u^3}\right), \quad \mathbf{B} = \left(-\frac{Kx^2}{u^3},\, -\frac{Kx^1}{u^3},\, 0\right). \tag{20}$$

Вычислим плотность энергии $W = (E^2 + H^2)/8\pi$ и вектор Умова–Пойтинга $\mathbf{S} = c\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}/4\pi$ (плотность этого потока):

$$W = \frac{K^2}{8\pi u^6}\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^4\right)^2\right) = \frac{K^2}{8\pi} \frac{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + c^2t^2}{\left(c^2t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2\right)^3}, \tag{21}$$

$$\mathbf{S} = \frac{cK^2x^4}{4\pi u^6}\left(x^1,\, x^2,\, 0)\right). \tag{22}$$

Таким образом, плотность энергии при приближении к изотропному конусу $u = 0$ устремляется в бесконечность. Поток энергии направлен в радиальном направлении от оси Ox^3, что характерно для цилиндрической волны.

Литература

1. Паринов М. А. Симметричные пространства Максвелла и уравнения Лоренца – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2013. – 420 с.

2. Тирринг В. Курс математической и теоретической физики: Пер. с нем. Ю. А. Данилова и С. С. Москалюка / Под ред. С. С. Москалюка. – Киев: TIMPANI, 2004. – 1040 с.

Слабая разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным условием

А.А. Петрова
(Воронеж, Воронежский государственный университет;
rezolwenta@mail.ru)

Предполагается, что задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' - двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u,\, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u,\, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,\ \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$, такой что для $u,\, v \in V$ выполняется $a(u, v) = (Au, v)$ и $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$. Здесь под выражением типа (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z, v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1].

В пространстве V' на $[0, T]$ рассматривается параболическая задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$, элемент $\overline{u}$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$.

Отметим, что разрешимость задачи (2) с $p(t) \equiv 1$ была получена в [2]. Для функции $p(t)$ общего вида на промежутке $[0, +\infty)$ с $f(t) \equiv 0$ и в других пространствах задача (2) рассматривалась в [3].

Определим необходимое далее множество $D(A) = \{v \in V \mid Av \in H\}$.

Теорема. *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1), функция* $f \in L_1(0,T;H) \bigcap L_2(0,T;V')$. *Пусть функция* $p(t)$ *абсолютно непрерывная, невозрастающая и принимает положительные значения на* $[0,T]$. *Пусть также* $\overline{u} \in D(A)$. *Тогда задача (2) имеет единственное решение* $u(t)$, *такое что* $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2 \Big)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C \Big\{ \|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_H \, dt \Big)^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt \Big\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Прежде доказывается, что решение задачи (2), если оно существует, единственно. Для этого рассматривается однородная задача (2) с $f(t) \equiv 0$ и $\overline{u} = 0$.

Единственное решение $u(t)$, удовлетворяющее условию $u(0) = u_o \in H$, для однородного уравнения (2) записывается [4] в виде $u(t) = \exp(-At)u_0$, где $\exp(-At)$ – полугруппа операторов, порожденная оператором $-A$. Далее из интегрального условия на решение и свойств функции $p(t)$ получается, что $u_0 = 0$. А это означает, что $u(t) \equiv 0$ является единственным решением однородной задачи (2), то есть неоднородная задача (2) имеет не более одного решения.

Затем устанавливается разрешимость задачи (2). Для этого применяется метод Галёркина.

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – полная линейно независимая система элементов в пространстве V. Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$. На V_m

можно рассматривать нормы пространств V, H, V'. Определим также на элементах $u_m \in V_m$ двойственную норму $\|u_m\|_{V'_m} = \sup |(u_m, v_m)|$, где точная верхняя граница берётся по всем $v_m \in V_m$, таким что $\|v_m\|_V = 1$. Обозначим через P_m ортогональный проектор в пространстве H на $V_m \subset H$. Оператор P_m допускает продолжение по непрерывности $\overline{P}_m$ на пространство V' [5].

В пространстве V_m рассматривается задача

$$u'_m(t) + \overline{P}_m A u_m(t) = P_m f(t), \quad \int\limits_0^T p(t) u_m(t)\, dt = \overline{u}_m, \tag{4}$$

где элемент $\overline{u}_m \in V_m$ задан так, что для любого $v_m \in V_m$ выполняется равенство $a(\overline{u}_m, v_m) = a(\overline{u}, v_m)$. Существование такого элемента $\overline{u}_m \in V_m$ следует из теоремы Лакса-Мильграмма [6].

Показывается, что задача (4) имеет решение $u_m(t) \in V_m$, для которого справедлива оценка

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_m(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big\{ \|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_H\, dt \Big)^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt \Big\}. \tag{5}$$

Из последовательности $\{u_m(t)\}$, в силу оценки (5), можно выделить подпоследовательность $\{u_\mu(t)\} \subset \{u_m(t)\}$, слабо при $\mu \to \infty$ сходящуюся в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторому элементу $u \in L_2(0,T;V)$. Затем показывается, что функция $u(t)$ является решением задачи (2), а также справедлива оценка (3).

Литература

1. Обэн Ж.-П. Приближённое решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир. – 1997. – 384 с.

2. Критская Е.А., Смагин В.В. О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. – 2008. – № 1. – С. 222 – 225.

3. Тихонов И.В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. – Т. 34, №6. – 1998. – С. 841-843.

4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир. – 1972. – 416 с.

5. Вайникко Г.М., Оя П.Э. О сходимости Метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. ур-ния. – Т.11, №7. – 1975. – С. 1269 – 1277.

6. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.:Мир. – 1980. – 512 с.

О корректной разрешимости одной нестационарной задачи в весовых пространствах Степанова

С.В. Писарева

(Воронеж, ВГЛТА; pisareva-s@mail.ru)

Рассмотрим вопрос корректной разрешимости дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + x\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0, \ x \geq 0, t \geq 0, \tag{1}$$

удовлетворяющего условиям

$$u(0,x) = \varphi(x),$$

$$u(\infty,x) = 0.$$

В соответствии с методом, изложенным в монографии С.Г. Крейна (см.[1],стр. 324), эту задачу можно свести к эллиптическому случаю, когда находится решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = Au(x), \ 0 \leq x \leq l < \infty,$$

с соответствующими граничными условиями при $x = 0$ и $x = l < \infty$, и позитивным оператором A. Из позитивности оператора A

следует существование квадратного корня $(-A)^{\frac{1}{2}}$, в терминах которого дается определения решения, формируется критерий корректной разрешимости этой задачи и указывается представление ее решения. В частности, в нашем случае, когда решение уравнения (1) удовлетворяет условиям ограниченности при $x \to \infty$ и $u(0) = g_0$ решение представимо в виде

$$u(x) = U_{\frac{1}{2}}(x) g_0, \tag{2}$$

где $U_{\frac{1}{2}}(x)$ сильно непрерывная полугруппа класса C_0, производящим оператором которой является оператор $-(-A)^{\frac{1}{2}}$.

Оператор $-Au(x) = x\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ является позитивным в том случае, если он является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0. Рассмотрим сильно непрерывную при $t \geq 0$ полугруппу $U_+(t)$, задаваемую равенством $(U_+(t)f)(s) = f(se^t)$, где $s \in R^1$. Покажем, что полугруппа $U_+(t)$ ограничена в пространствах $S^+_{p,\alpha}$, определяемых нормой

$$\|f\|_{S^+_{p,\alpha}} = \sup_{\tau \in R^1}\left[\int_\tau^{\tau+1}(s-\tau)^{\alpha-1}|f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{\tau \in R^1}\left[\int_0^1 s^{\alpha-1}|f(s+\tau)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

где $p \geq 0$, $0 < \alpha < 1$. Свойства пространств $S^+_{p,\alpha}$ подробно изучались в [2]. Оценим полугруппу

$$\|U_+(t)f\|_{S^+_{p,\alpha}} = \sup_{\tau \in R^1}\left[\int_0^1 s^{\alpha-1}|f((s+\tau)e^t)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Сделав замену переменной $se^t = z, s = ze^{-t}, ds = e^{-t}dz$, а затем переобозначив $\tau^* = \tau e^t$, получим

$$\|U_+(t)f\|_{S^+_{p,\alpha}} = \sup_{\tau \in R^1}\left[\int_0^{e^t}(ze^{-t})^{\alpha-1}|f(z+\tau e^t)|^p e^{-t}dz\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{\tau^* \in R^1}\left[\int_0^{e^t} z^{\alpha-1}e^{-t\alpha+t}e^{-t}|f(z+\tau^*)|^p dz\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$e^{-\frac{t\alpha}{p}}\sup_{\tau^* \in R^1}\left[\sum_{i=0}^{[e^t]-1}\int_i^{i+1} z^{\alpha-1}|f(z+\tau^*)|^p dz\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{t\alpha}{p}} \sum_{i=0}^{[e^t]-1} \sup_{\tau^* \in R^1} \left[\int_i^{i+1} z^{\alpha-1} |f(z+\tau^*)|^p dz \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$e^{-\frac{t\alpha}{p}}([e^t]+1)\|f\|_{S^+_{p,\alpha}}.$$

Итак, полугруппа $U_+(t)$ действует из пространств $S^+_{p,\alpha}$ в $S^+_{p,\alpha}$.

В дальнейшем нам потребуется определенный для любого $n > 0$ оператор J_n (см.[3], стр.334)

$$J_n = (I - n^{-1}(-A))^{-1} = nR(n; -A),$$

где $R(n; -A)$ резольвента оператора $-A$. Для оператора J_n выполняется условие

$$-AJ_n = n(J_n - I). \tag{3}$$

Покажем, что оператор $-A$, действующий следующим образом $(-Af)(s) = sf'(s)$, является производящим оператором полугруппы $U_+(t)$. Введем семейство функций $y_n(s)$, задаваемых равенством

$$y_n(s) = (J_n f)(s) = (nR(n; -A)f)(s) =$$

$$= n \int_0^\infty e^{-nt}(U_+(t)f)(s)dt = n \int_0^\infty e^{-nt} f(se^t)dt.$$

Сделав замену переменной $se^t = z, e^t = \frac{z}{s}, dt = \frac{1}{z}dz$, получаем, что функции $y_n(s)$ имеют вид

$$y_n(s) = n \int_s^\infty \left[\frac{z}{s}\right]^{-n} f(z)\frac{1}{z}dz = n \int_s^\infty z^{-n-1} s^n f(z)dz.$$

Найдем

$$sy_n'(s) = sn \left[\int_s^\infty z^{-n-1} s^n f(z)dz \right]_s' =$$

$$sn \left[\int_s^\infty z^{-n-1} n s^{n-1} f(z)dz - s^{-n-1} s^n f(s) \right] =$$

$$= n \left[n \int_s^\infty z^{-n-1} s^n f(z)dz - f(s) \right] = ny_n(s) - nf(s).$$

Сравнивая полученное равенство с общей формулой (3), мы находим, что $(-Ay_n)(s) = sy_n'(s)$. Поскольку $R(J_n) = R(R(n;-A)) = D(-A)$, откуда следует, что $(-Ay)(s) = sy'(s)$ при любом $y \in D(-A)$.

Обратно, пусть теперь обе функции $y(s)$ и $sy'(s)$ принадлежат пространству $S^+_{p,\alpha}$. Покажем, что $y \in D(-A)$ и $(-Ay)(s) = sy'(s)$. С этой целью определим с помощью соотношения

$$sy'(s) - ny(s) = -nf(s)$$

вспомогательную функцию $f(s)$. Полагая $y_n(s) = (J_n f)(s)$, мы согласно полученным выше результатам, получим равенство

$$sy_n'(s) - ny_n(s) = -nf(s).$$

Значит, функция $w(s) = y(s) - y_n(s)$ удовлетворяет уравнению $sw'(s) = w(s)$. Решение данного уравнения имеет вид $w(s) = Cs^n$, где $C = const$. Найдем значение константы C, при котором $w(s) \in S^+_{p,\alpha}$.

$$\|w(s)\|_{S^+_{p,\alpha}} = \sup_{\tau\in R^1}\left[\int_\tau^{\tau+1}(s-\tau)^{\alpha-1}|w(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{\tau\in R^1}\left[\int_\tau^{\tau+1}(s-\tau)^{\alpha-1}|Cs^n|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C\sup_{\tau\in R^1}\left[\int_0^1 s^{\alpha-1}|(s+\tau)^n|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \geq C\sup_{\tau\in R^1}\left[\int_0^1 s^{\alpha-1}\tau^{np} ds\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C\sup_{\tau\in R^1}\left(\tau^n\left[\int_0^1 s^{\alpha-1}ds\right]^{\frac{1}{p}}\right) = C\alpha^{-\frac{1}{p}}\sup_{\tau\in R^1}\tau^n.$$

Данное выражение может быть конечно только при $C = 0$. Следовательно, $y(s) = y_n(s) \in D(A)$ и $(Ay)(s) = sy'(s)$.

В соответствии с [3] построим полугруппу $(U_{\frac{1}{2}}\varphi)(x)$, используя формулу

$$U_{\frac{1}{2}}f = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}te^{\frac{-t^2}{4s}}U(s)f ds.$$

Используя представление решения (2), получаем

$$u(t,x) = (U_{\frac{1}{2}}\varphi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} t e^{\frac{-t^2}{4s}} \varphi(xe^s) ds.$$

Литература

1. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. –М.:«Наука», 1967.–464 с.

2. Костин, В.А. Эволюционные уравнения с особенностями в обобщенных пространствах Степанова / В.А. Костин, С.В. Писарева // Известия ВУЗов. Математика .- М., 2007 .- № 6 (541) С. 35-44 .

3. Иосида, К. Функциональный анализ / К.Иосида.–М.: «Мир», 1967.–624 с.

4. Костин, В.А. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2013, 452, №4, С. 367-370.

О некоторых естественных операторах на тензорных полях

Е.Г. Пунинский

(Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова; *puninskiy@mail.ru*)

Пусть M некоторое вещественное гладкое многообразие размерности m. Поскольку тензорные поля на многообразиях размерности 1 тривиальны, будем считать $m \geq 2$. Тензорное поле типа (p,q) на M — это сечение расслоения $T^{(p,q)}M := \otimes^p T \otimes \otimes^q T^* M \to M$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — произвольные тензорные расслоения. Пространство гладких сечений расслоения $\mathfrak{F}M$ обозначим $\Gamma(\mathfrak{F}M)$.

Естественным оператором $\mathfrak{D} : \mathfrak{F} \rightsquigarrow \mathfrak{G}$ называется семейство регулярных операторов $\mathfrak{D}_M : \Gamma(\mathfrak{F}M) \to \Gamma(\mathfrak{G}M)$, удовлетворяющих следующим свойствам

(1) (Естественность) Для любого $s \in \Gamma(\mathfrak{F}M)$ и любого диффеоморфизма $f : M \to N$ выполнено $\mathfrak{D}_N(\mathfrak{F}f \circ s \circ f^{-1}) = \mathfrak{G}f \circ \mathfrak{D}_M s \circ f^{-1}$.

(2) (Локальность) $\mathfrak{O}_U(s|_U) = (\mathfrak{O}_M s)|_U$ для любого $s \in \Gamma(\mathfrak{F}M)$ и любого открытого подмногообразия $U \in M$.

Условие (1) можно трактовать с точки зрения локальных координат на M. Пусть дана карта $u : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$. Тогда диффеоморфизмы $f : V \to W \subset \mathbb{R}^m$ отвечают заменам координат на U. Вкупе со свойством (2) получаем, что *естественные операторы совпадают с теми операторами, описания которых не зависят от замен координат.*

Если локальная запись естественного оператора $\mathfrak{O}$ зависит от производных компонент тензороного поля до k порядка включительно и не зависит от производных порядка $k+1$ и выше, то говорят, что $\mathfrak{O}$ имеет **порядок** k. Иными словами, значение $\mathfrak{O}(T)$, $T \in \Gamma(\mathfrak{F}M)$ в каждой точке $x \in M$ определяется k-струей $j^k_x T$.

Например, внешнее дифференцировние $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ является естественным оператором первого порядка, тогда как тензор Римана дает пример естественного оператора второго порядка от римановой метрики. Еще один классический пример:

В данной работе с помощью методов изложенных в [1] получен ряд результатов по классификации естественных операторов на различных классах тензорных полей, причем, *не предполагается наличия каких либо дополнительных структур или симметрий*, как это делается авторами [1].

Классификация естественных операторов $T^{(1,1)} \rightsquigarrow T^{(1,2)}$.

Предложение 1. *Всякий естественный оператор* $P : T^{(1,1)} \rightsquigarrow T^{(1,2)}$, $P : R \mapsto P(R)$ *конечного порядка имеет первый порядок и линеен по* $R^i_{j,k}$.

Скобка Фрёлихера-Нийенхейса $[\,,] : \Omega^p(M, TM) \times \Omega^q(M, TM) \to \Omega^{p+q}(M, TM)$ — это $\mathbb{Z}$-градуированная скобка Ли на вектор-значных формах такая, что

$$[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P],$$

$$[P_1, [P_2, P_3]] = [[P_1, P_2], P_3] + (-1)^{p_1 p_2}[P_2, [P_1, P_3]].$$

Эта скобка обобщает скобку Ли для векторных полей. Точную формулу для ее вычислений так же как и инвариантное определение можно найти в [1].

Будем говорить, что тензорный оператор **тривиален**, если он является композицией алгебраических тензорных операций и дифференцирования скалярной функции.

Теорема 1. *В случае $m \geq 3$ любой естественный билинейный оператор $T^{(1,1)} \times T^{(1,1)} \rightsquigarrow T^{(1,2)}$ принадлежит 15-параметрическому семейству операторов, среди которых единственным нетривиальным является скобка Фрёлихера-Нийенхейса.*

Классификация естественных операторов $T^{(q,0)} \rightsquigarrow T^{(q+1,0)}$. Следующий результат показывает, что можно ограничиться значениями $q = 1, 2, 3$.

Предложение 2. *При $q \geq 4$ единственным естественным оператором первого порядка $T^{(q,0)} \rightsquigarrow T^{(q+1,0)}$ является нулевой оператор. В случае $q = 0$ любой оператор указанного типа нулевой.*

Далее рассматривается случай $q = 2$. Известным примером оператора такового типа является тождество Якоби для скобки Пуассона.

Теорема 2. *При $m \geq 4$ естественные билинейные операторы $T^{(2,0)} \times T^{(2,0)} \rightsquigarrow T^{(3,0)}$ образуют 2-параметрическое семейство*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_1 \Big(P^{i\alpha} Q^{jk}{}_{,\alpha} - Q^{i\alpha} P^{kj}{}_{,\alpha} + P^{k\alpha} Q^{ij}{}_{,\alpha} - Q^{\alpha k} P^{ij}{}_{,\alpha} + P^{\alpha j} Q^{ik}{}_{,\alpha} - \\
&- Q^{j\alpha} P^{ik}{}_{,\alpha} + P^{j\alpha} Q^{ki}{}_{,\alpha} - Q^{k\alpha} P^{ji}{}_{,\alpha} + P^{\alpha k} Q^{ji}{}_{,\alpha} - Q^{\alpha i} P^{jk}{}_{,\alpha} + \\
&+ P^{\alpha i} Q^{kj}{}_{,\alpha} - Q^{\alpha j} P^{ki}{}_{,\alpha} \Big) + \mathfrak{a}_2 \Big(Q^{i\alpha} P^{jk}{}_{,\alpha} - P^{i\alpha} Q^{kj}{}_{,\alpha} + Q^{k\alpha} P^{ij}{}_{,\alpha} - \\
&- P^{\alpha k} Q^{ij}{}_{,\alpha} + Q^{\alpha j} P^{ik}{}_{,\alpha} - P^{j\alpha} Q^{ik}{}_{,\alpha} + Q^{j\alpha} P^{ki}{}_{,\alpha} - \\
&- P^{k\alpha} Q^{ji}{}_{,\alpha} + Q^{\alpha k} P^{ji}{}_{,\alpha} - P^{\alpha i} Q^{jk}{}_{,\alpha} + Q^{\alpha i} P^{kj}{}_{,\alpha} - P^{\alpha j} Q^{ki}{}_{,\alpha} \Big), \quad (1)
\end{aligned}$$

где $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathbb{R}$.

Данная теорема означает, что все операторы указанного типа порождаются скобоками Схоутена и Схоутена-Нийенхейса [2], примененными к симметрической и кососимметрической частям соотвествующих тензоров типа $(2,0)$.

Как и в теореме 2 ограничение $m \geq 4$ вытекает из сложности организации вычислений при $m = 2, 3$.

Теорема 3. *Единственным естественным трилинейным оператором первого порядка $\times^3 T^{(2,0)} \rightsquigarrow T^{(3,0)}$ является нулевой оператор.*

Классификация естественных операторов $T^{(0,2)} \rightsquigarrow T^{(0,4)}$.

Исследование естественных операторов $T^{(0,2)} \rightsquigarrow T^{(0,4)}$ было продиктовано следующими формулами, для тензора кривизны Римана на псевдоримановом многообразии:

$$R_{iq,kl} = g_{i\alpha} R^{\alpha}_{q,kl} = \frac{1}{2}(\partial^q \partial^k g_{il} + \partial^i \partial^l g_{qk} - \partial^q \partial^l g_{ik} - \partial^i \partial^k g_{ql}) +$$

$$+ g_{mp}(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{il} - \Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{ik}),\ \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha}(\partial^j g_{k\alpha} + \partial^k g_{j\alpha} - \partial^\alpha g_{jk})$$

Эти формулы показывают, что тензор Римана является естественным оператором второго порядка от псевдометрики, т.е. от симметричного невырожденного тензорного поля типа $(0,2)$, но не является полиномиальным. Результаты данного раздела показывают, что возможность обращать метрику в данном случае является ключевой.

Теорема 4. *Все естественные операторы $T^{(0,2)} \rightsquigarrow T^{(0,4)}$ нулевые. То же самое верно, если рассматривать симметричные тензорные поля из $\Gamma(T^{(0,2)})$.*

Классификация естественных операторов $T^{(q,0)} \rightsquigarrow T^{(q,1)}$. В заключение, приведем результат для операторов $T^{(q,0)} \rightsquigarrow T^{(q,1)}$.

Теорема 5. *В случае $q \geq 2$ единственным естественным оператором первого порядка $\otimes^q T \rightsquigarrow \otimes^q T \otimes T^*$, является нулевой оператор.*

То же самое верно и для случая $q = 1$, если оператор предполагать линейным относительно первых производных компонент исходного тензорного поля.

Литература

1. Kolář I., Michor P.W., Slovák J., Natural Operations in differential geometry – Springer-Verlag, Berlin, 1993; рус. пер.: И.Колар, П.В.Мичор, Я.Словак, Естественные операции в дифференциальной геометрии – Тимпани, Киев, 2001.

2. P.W. Michor, Remarks on the Schouten-Nijenhuis bracket – Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II **16** (1987), 207-215.

Аналитическая модель процессов обнаружения мобильных объектов системой наблюдения с учетом рельефа местности

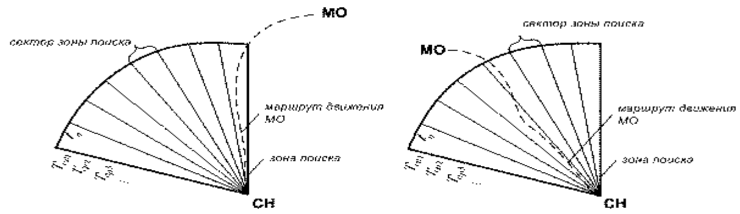
К.В. Пядухова

(Воронеж, ОАО «Концерн «Созвездие»; *p_ tina@list.ru*)

Для проектирования систем управления и связи необходимы аналитические модели процессов обнаружения мобильных объектов (МО). Доклад посвящен разработки такой модели.

Рассмотрим два участка холмистой местности. Относительные превышения первого участка не превышают 96 м, а второго – 200 м. Средства наблюдения (СН) в исследовании размещаются на высоте до 10 м от земли.

На проходимой местности с относительными превышениями до 100 м возможно почти беспрепятственное движение МО (см. рис. 1), а с относительными превышениями до 200 м – только по дорогам и по специально оборудованным путям (см. рис. 2).



а) б)

Рис.1. Зона поиска СН для первого участка местности, где маршрут движения МО может проходить в любом секторе (а) и в определенных секторах (б)

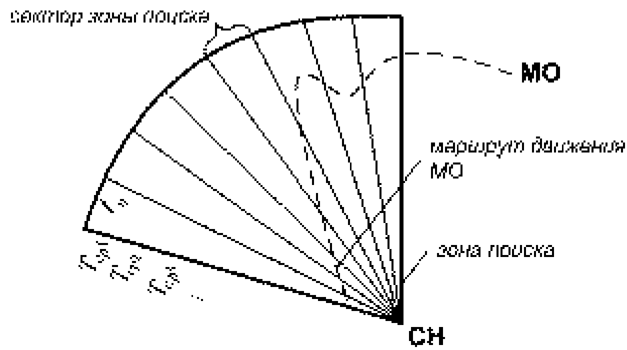
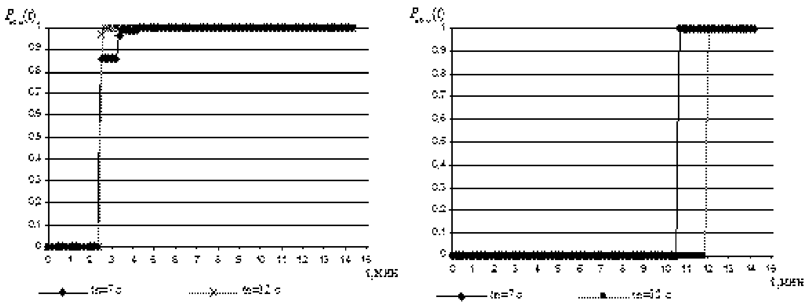


Рис.2. Зона поиска СН для второго участка местности

На холмистом участке местности с относительными превышениями (Z) не более 96 м наблюдение за МО ведет СН с зонами поиска 40°, 60°и 80°. Так как наблюдение ведется на больших зонах поиска (Z_n), то просмотреть их можно только по секторам (40°– 4 сектора, 60°– 6 секторов, 80°– 8 секторов). Наблюдение за МО в зоне поиска 80°проиллюстрировано на рис. 1.

На холмистом участке местности с относительными превышениями не более 200 м наблюдение за МО ведет СН с зонами поиска 60°и80°. Наблюдение за МО в зоне поиска 80°проиллюстрировано на рис. 2.

Результаты расчета вероятности обнаружения МО на маршруте [1], проходящем в определенных секторах зоны поиска 80° первого и второго участка местности, представлены на рис.3.



а) б)

Рис.3. Зависимости вероятности обнаружения МО на маршруте для различного времени просмотра сектора зоны поиска МО t_n первого (а) и второго (б) участков местности

На основе проведенного исследования, получено аналитическое выражение для расчета среднего времени обнаружения МО на маршруте с учетом характеристики рельефа местности Z представлено в виде:

$$\mathrm{T_{op}} = \frac{\mathrm{a_1 Z_n^{k_1} + b_1 T_{opmax}^{k_2}}}{\mathrm{c_1} \vartheta^{\mathrm{k_3}}} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z_{max}}}\right)^{\mathrm{k_4}}, \qquad (1)$$

где a_1, b_1, c_1 – нормирующие коэффициенты:$a_1 =$ 1 градус$^{-1}$, $b_1 = 1$ с$^{-1}$, $c_1 = 1$ с/km;

k_1, k_2, k_3, k_4 – параметры, которые определялись путем поиска значений, минимизирующих погрешность описания среднего времени обнаружения МО: $k_1 = 1$; $k_2 = 1.5$; $k_3 = 0.2$; $k_4 = 3.6$;

T_{cpmax}– максимальное среднее время обнаружения МО, с;

ϑ – скорость движения МО, км/с.

Z_{max} – максимальное относительное превышение (относительная высота) местности, м.

Погрешность оценки среднего времени обнаружения МО на маршруте по аналитической формуле (1) не превышает 30%.

Анализ полученных результатов показывает, что относительное превышение Z оказывает значительное влияние на среднее время обнаружения МО на маршруте, существенным образом превышающее влияние $\mathrm{T}_{\mathrm{cpmax}}$, Z_{n}, ϑ.

Таким образом, в результате проведенных исследований получено аналитическое выражение для расчета среднего времени обнаружения объекта противника, которое обеспечивает погрешность расчетов не более 30%.

Литература

1. Пядухова К.В. Аналитическая модель процессов обнаружения мобильных объектов с использованием разведывательной машины с учетом рельефа местности – Теория и техника радиосвязи №1. Воронеж, 2013.С. 34-39.

Об одном методе построения управления для наблюдаемой нестационарной динамической системы

Е.В. Раецкая

(Воронеж, ВГЛТА; raetskaya@inbox.ru)

С.П. Зубова

(Воронеж, ВГУ; spzubova@mail.ru)

Система

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x(t) + D(t)u(t) + f(t), \tag{1}$$

$$F(t) = A(t)x(t) + G(t)u(t), \tag{2}$$

описывает реализующийся динамический процесс.

Здесь $x(t) \in R^n$ — функция состояния, $u(t) \in R^k$ — управление, $f(t) \in R^n$ — входная измеряемая функция, $F(t) \in R^m$ — измеряемая функция выхода, $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$, $G(t)$ — соответствующие нестационарные матричные коэффициенты, $t \in [0, T]$.

По известным, реализуемым входной и выходной функциям состояние системы в каждый момент времени определяется однозначно, то есть система предполагается полностью наблюдаемой.

Решается задача построения управления, обеспечивающего на выходе требуемый изначально заданный результат.

Исследование ведется методом каскадной декомпозиции (см. [1] - [3]), заключающемся в поэтапном переходе к системам в подпространствах последовательно уменьшающихся размерностей.

Процесс исследования полностью завершается за конечное равное p число шагов, $p \leq n$.

Функция управления каждого шага редукции определяется как сумма "свободных" и определяемых в процессе декомпозиции вектор-функций.

Наличие "свободных", то есть не влияющих на конечный результат слагаемых позволяет в общем случае найти оптимальное управление, отвечающее дополнительным требованиям.

Вектор-функции второго вида, именуемые в данном случае как определяемые, в свою очередь представляют собой сумму вектор-функций двух видов, а именно, предъявляемые на каждом шаге расщепления и такие, свойства и формулы для которых определяются при последующем расщеплении пространств.

За конечное число шагов редукции исходной системы строится функция состояния в явном виде.

Литература

1. Раецкая Е.В. Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем: Дисс. ... канд. физ.— мат. Наук. Воронеж, 2004. 145 с.

2. Зубова С.П. О полиномиальных решениях линейной системы управления/ С.П.Зубова, Е.В. Раецкая, Ле Хай Чунг// Автоматика и телемеханика, № 11, 2008. — С. 41—47.

4. Zubova S.P. Invariance of a nonstationary observability system under certainperturbations/ Zubova S.P., Raetskaya E.V.// Journal of Mathematical Sciences.- New york. 2013. Vol. 188, № 3. — P. 218—226.

О спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией

Е.Ю. Романова
(Воронеж, Воронежский Государственный Университет;
vsu.romanova@gmail.com)

Пусть $L_2[0,\omega]-$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,\omega]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(x,y)=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau,\ \ x,y\in L_2[0,\omega]. \qquad (1)$$

Через $W_2^1[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2[0,\omega] : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y}\in L_2[0,\omega]\}$.

Рассмотрим оператор

$$L: D(L)\subset L_2[0,\omega]\to L_2[0,\omega],$$

порожденный дифференциальным выражением [1]

$$l(y)=y'(x)-q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], q\in L_2[0,\omega], \qquad (2)$$

с областью определения

$$y\in D(L)=\{y\in W_2^1[0,\omega]: y(0)=y(\omega)\}. \qquad (3)$$

Запишем оператор L в виде

$$Ly=L^0y-By, \qquad (4)$$

где $(L^0y)(x)=y'(x)$ будем называть свободным оператором, играющим роль невозмущенного оператора, а $(By)(x)=q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], y\in L_2[0,\omega]$ - возмущения.

Легко описывается спектр $\sigma(L^0)$ оператора L^0. Он состоит из собственных значений вида

$$\lambda_n=i\frac{2\pi n}{\omega}, n\in\mathbb{Z}. \qquad (5)$$

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_n, n \in \mathbb{Z}$, является одномерным. Соответствующая собственная функция имеет вид $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{R}$.

Проекторы Рисса $P_n, n \in \mathbb{Z}$, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$, для любого $x \in L_2[0,\omega]$ имеют вид $P_n x = (x, e_n)e_n, n \in \mathbb{Z}$.

Для исследования спектральных свойств оператора L используется метод подобных операторов [2] -[5]. Суть метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора L^0).Тем самым существенно упрощается изучение исследуемого оператора L.

Таким образом, получены результаты об асимптотике спектра, а также оценки равносходимости спектральных разложений.

Теорема 2 *Возмущенный оператор L является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что $\sigma(L)$ представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)}\Bigg(\bigcup_{n\geq m+1} \sigma_n\Bigg), \tag{6}$$

где $\sigma_{(m)}$ - конечное множество с числом точек меньшим или равным m, а $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda_n}\}, n \geq m+1$, является одноточечным множеством, где

$$\widetilde{\lambda_n} = i\frac{2\pi n}{\omega} - q_{2n} - \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(q_{2n+k})^2 + \beta_n, \tag{7}$$

β_n- суммируемая последовательность, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n| < \infty$.

В следующей теореме $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, n \geq m+1,-$ спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$, соответственно.

Теорема 3 *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и L^0 :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0. \qquad (8)$$

Литература

1. Хромов А. П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида – Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. 10:4. с.17-22.

2. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов – Известия РАН. Сер.матем.1994. 58:4. с.3-32.

3. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов и формулы и регуляризованных следов – Изв. ВУЗов. Сер. матем.1984 . №3 . с.3-12.

4. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом – Известия РАН, серия математическая. 2011. 75:3. с.4-28.

5. Romanova E. Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the lebesgue spaces – Spectral and evolution problems. Volume 21 Issue 2.2011 . p.185-186.

О многомерных псевдодифференциальных операторах Киприянова-Катрахова

С.А. Рощупкин

(Елец, ЕГУ им И.А. Бунина; *roshupkinsa@mail.ru*)

1. $\mathcal{F}_B$-преобразование функций. Пусть $\nu > -\frac{1}{2}$ Одномерные $\mathcal{F}_\mathcal{B}$-преобразования Фурье-Бесселя введены И.А.Киприяновым и В.В.Катраховым в [1] (см. также [2], [3]) на основе ядра $j_\nu(t\tau) - i\,\frac{t\tau}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t\tau)$, где j-функция Бесселя j_ν — одно из решений сингулярного уравнения Бесселя, удовлетворяющее условиям $j_\nu(0) = 1$, $j\,'_\nu(0) = 0$. Отметим, что j-функция Бесселя j_ν удовлетворяет рекурентному соотношению $(j_\nu(t))' = -\frac{t}{\gamma+1}\ j_{\nu+1}(t)\,, \quad \nu > -\frac{1}{2}$.

Пусть натуральные числа n и N фиксированы, $n \le N$ и пусть мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \dots \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел. Положим $x = (x', x'') \in R_N = R_n \times R_{N-n}$. В этой работе (см. [2], [4]), рассматривается многомерное $\mathcal{F}_B$-преобразование на основе следующего ядра

$$\Lambda^{\pm}_\gamma(x', \xi') = \prod_{j=1}^n \left[j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j) \mp i\,\frac{x_j\xi_j}{\gamma+1}\, j_{\frac{\gamma_j+1}{2}}(x_j\xi_j)\right]\,,$$

действующего по части переменных $x' \in R_n$, $n \le N$.

Через $S(R_N)$ будем обозначать пространство Шварца основных функций, а через $S_{ev}(R_N)$ его подпространство, состоящее из функций, четных по каждой из переменных $x'{=}(x_1, \dots x_n)$.

Обозначим $(\,u\,,\,v\,)_\gamma{=}\int_{R_N} u(x)\ v(x)\ (x')^\gamma\,dx$ — весовую линейную форму, в которой вес $(x')^\gamma{=}\prod_{j=1}^n (x_j^2)^{\gamma/2}$ — функция четная по каждому из аргументов $x_1, \dots, x_n$, $n \le N$. Замыкание класса $S_{ev}(R_N)$ по норме $\|f\|_{L_2^\gamma} = \left(\int_{R_N} |f(x)|^2\,(x')^\gamma\,dx\right)^{1/2}$ будем обозначать $L_2^\gamma(R_N)$.

Смешанным прямым и обратным полным преобразованием Фурье-Бесселя (*$\mathcal{F}_B$-преобразованиями*) функции u назовем выражения, соответственно

$$\mathcal{F}_B[u](\xi){=}\widehat{u}(\xi){=}\int\limits_{R_N} \Lambda^{+}_\gamma(x', \xi')\,e^{-i(x'', \xi'')}\,u(x)\,(x')^\gamma\,dx\,,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[u](x) = \frac{2^{|\gamma|-n}\,(2\pi)^{n-N}}{\prod_{i=1}^n \Gamma^2\!\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{R_n} \Lambda^{-}_\gamma(x', \xi')\,e^{i(x'',\,\xi'')} u(\xi)\ (\xi')^\gamma\,d\xi\,.$$

В [3] показано, что на функциях φ, принадлежащих пространству Шварца основных функций $S(R_n)$ (не обязательно четных!, как это требуется в [4]), преобразования $\mathcal{F}_B$ и $\mathcal{F}_B^{-1}$ взаимно обратны: $\mathcal{F}_B^{-1}[\mathcal{F}_B\,\varphi] = \mathcal{F}_B[\mathcal{F}_B^{-1}\,\varphi] = \varphi$. В [3] формула обращения распространена на функции из L_γ^2 (опять же, не обязательно четных), при этом сходимость соответствующих интегральных выражений понимается как сходимость в среднем с весом $(x')^\gamma$.

Ввдем обозначения

$$D_B^\alpha{=}\partial^{\alpha'}_{B_{x'}}\,\partial^{\alpha''}_{x''}{=}\partial^{\alpha_1}_{B_{\gamma_1}}, \dots, \partial^{\alpha_n}_{B_{\gamma_n}}\ \partial^{\alpha_{n+1}}_{x_n+1} \dots, \partial^{\alpha_N}_{x_N}$$

$\partial_{x_i}{=}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i{=}1,\ldots,N\,, \quad n\le N$

$$\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}} = \begin{cases} B^{\alpha_i/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i=2k, \quad\quad k=0,1,2,\ldots \\ \partial_{x_i} B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i=2k-1, \quad k=1,2,\ldots, \end{cases} \quad i{=}1,\ldots,n\,,$$

$B_{\gamma_i}{=}\partial^2_{x_i^2}{+}\frac{\gamma_i}{x_i}\,\partial x_i \;=\; x_i^{-\gamma_i}\partial_{x_i}\, x_i^{\gamma_i}\,\partial_{x_i}$, — сингулярные дифференциальные операторы Бесселя, $\alpha=(\alpha',\alpha'')$, α' и α'' — мультииндексы размерности n и $N-n$ соответственно.

2. $\mathcal{F}_B$-псевдодифференциальные операторы. Пусть m — вещественное число. Функция $a(x;\xi)\in C^\infty(R_N\times R_N)$, принадлежащая классу S по x равномерно по ξ, $|\xi|{=}1$ и удовлетворяющая неравенствам
$|(D^\alpha_B)_x(D^\beta_B)_\xi a(x;\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$ при любых α и β, с постоянными $C_{\alpha,\beta}$, не зависящими от x, ξ, называется символом канонического $\mathcal{F}_B$-п.д. оператора, если для каждой из первых n переменных выполнены условия:

либо (i) $a(x;\xi)$ четна по x_i и по ξ_i и $\partial^k_{x_i}a(x;\xi)\big|_{x_i=0}=0,\ k\ge 1$;

либо (ii) $a(x;\xi)$ нечетна по x_i и по ξ_i и $\partial^k_{x_i}a(x,\xi)\big|_{x_i=0}=0$, $k\ge 0$.

Определение. *Каноническим $\mathcal{F}_B$-п.д.о. $A{=}a(x;D_B)$ с символом $a(x;\xi)$ назовем оператор, действующий на функции класса S_{ev} по формуле*

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi)=\int\limits_{R_N}\Lambda^+_\gamma(x',\xi')\;e^{-i(x'',\,\xi'')}\,a(x;\xi)u(x)(x')^\gamma\,dx. \qquad (1)$$

В равной степени естественным является введение канонических $\mathcal{F}_B$-п.д.операторов по формуле

$$\mathcal{A}u(x){=}\frac{(2\pi)^{1-n}}{2^{2(\nu+1)}\;\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_{R_n}\Lambda^-_\gamma(x',\xi')\,e^{i(x'',\,\xi'')}\,a(x;\xi)\,\widehat{u}(\xi)(\xi')^\gamma\,d\xi. \qquad (2)$$

Множество символов, удовлетворяющих условиям (i) или (ii) будем обозначать Ξ^m_γ.

К рассматриваемым классам п.д.о. относятся линейные сингулярные дифференциальные операторы вида $\sum a_\alpha(x) D_B^\alpha$.

3. Весовые классы функций Соболева-Киприянова H_γ^s. Пусть m — натуральное число и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс. Пространством Соболева-Киприянова будем называть класс функций $H_\gamma^m(R_N)=\{u \ : \ (\partial_B^\alpha)_{x'} \partial_{x''}^\beta u \in L_2^\gamma, \forall \alpha, \ |\alpha|+|\beta| \le m\}$.

Норма элементов $u \in H_\gamma^m(R_N^+)$ определяется равенством

$$\|u|\|_{H_\gamma^m}(R_N^+) = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int_{R_N} |(\partial_B^\alpha)_{x'} \partial_{x''}^\beta u(x)|^2 \ (x')^\gamma \ dx \right)^{1/2} < \infty \,. \tag{3}$$

Здесь обычные и ∂_B-производные берутся в смысле весовых обобщенных функций S'_{ev}.

Для любого вещественного числа s через $H_\gamma^s = W_{2,\gamma}^s(R_N^+)$ будем обозначать пополнение пространства $\mathbf{S_{ev}}(\mathbf{R_N})$ по норме

$$|\|f|\|_{H_\gamma^s}^2 = \int_{R_N^+} (1+|\xi|^2)^s \, |\widehat{f}(\xi)|^2 \, (\xi')^\gamma \, g\xi. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пространство $H_\gamma^m(R_n)$ можно определить как*
$H_\gamma^m(R_n) = \left\{ u \ : \ u \in S'_{ev} \,, \ (1+|\xi|^2)^{m/2} \ \widehat{u} \in L_2^\gamma(R_n)), \right\}$,
при этом его норма (3) эквивалентна (4).

4. Порядок $\mathcal{F}_B$-п.д. оператора.

Теорема 2. *Канонический $\mathcal{F}_B$-п.д.оператор A с символом $a(x;\xi) \in \Xi^m$ имеет порядок m в шкале H_ν^s.*

Аналогичное утверждение имеет место и для оператора $\mathcal{A}$ (2).

Теорема 3. *Пусть $a(x;\xi) \in \Xi_\gamma^m$ и A и $\mathcal{A}$ операторы вида (1) и (2), отвечающие этому символу. Тогда разность $A - \mathcal{A}$ является оператором порядка $m-1$ в шкале H_ν^s.*

Пусть A_1 и A_2 канонические $\mathcal{F}_B$-п.д.операторы с символами $a_1(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_1}$ и $a_2(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_2}$ и пусть функции $a_1(x;\xi)$ и $a_2(x;\xi)$ по каждой из весовых переменных удовлетворяют условию (i) или (ii). Введем канонический с.п.д.оператор P_0 с символом равным произведению символов операторов A_1 и A_2: $p_0 = a_1(x;\xi)\, a_2(x;\xi) \in \Xi^{m_1+m_2}$.

Теорема 4. *$\mathcal{F}_B$-п.д.оператор $(A_1A_2 - P_0)$ имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$. в шкале пространств H^s_ν.*

Эти результаты является обобщением частного случая асимптотического разложения произведения $\mathcal{F}_B$-п.д. операторов из работы [3]. Отметим, что для символов удовлетворяющих условию (i) теорема о произведении получена в [4].

5. $\mathcal{F}_B$-п.д.операторы в полупространстве. Пусть $R_N^+ = \{x \in R_N,\ \ x_N > 0\}$ — евклидово полупространство N-мерных точек. Обозначим через M оператор сужения функции с R_N на R_N^+ , и через L — оператор гладкого продолжения функций с R_N^+ на R_N, действующий ограниченным образом из пространстве $H^s_\gamma(E_N^+)$ в пространстве $H^s_\gamma(R_N)$. $\mathcal{F}_B$-п.д. оператор A порядка m в области E_N^+ определим по формуле $A = M\tilde{A}L$, где $\tilde{A}$ — однородный $\mathcal{F}_B$-п.д.оператор в R_N с символом $a(x;\xi) \in \Xi^m_\gamma$. Отметим,что поскольку операторы M и L являются ограниченными в соответствующих пространствах, то для любой функции $u \in H^s_\gamma(R_N^+)$ $(0 \le s - m)$ справедливо неравенство $\|Au\|_{H^{s-m}_\gamma(R_N)} \le C\|u\|_{H^s_\gamma(R_N^+)}$.

Следуя [5], мы ограничим гладкость символа по переменным ξ, предположив, что для любого фиксированного x функция $a(x;\xi)$ на сфере $S = \{\xi\ :\ \ |\xi| = 1\}$ принадлежит $H^q_\gamma(S)$, $q > \frac{N+|\gamma|}{2} + 1$. Множество таких символов обозначим $\Xi^m_\gamma(q)$.

Оператор A и его символ будем называть допустимыми, если при $x_N = 0$ этот символ является полиномом по ξ_N, т.е символ $a(x,\xi)$ представим в виде

$$a(\mathbf{x}^N, 0;\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\mathbf{x}^N;\xi^N)\xi_N^k + a_m(\mathbf{x}^N)\xi_N^m\,,\ \ \mathbf{x}_N = (x_1,\ldots,x_{N-1}).$$

Определение $\mathcal{F}_B$-п.д.операторов в полупространстве для допустимых символов является корректным в следующем смысле. Пусть $A_1 = M\tilde{A}L_1, A_2 = M\tilde{A}L_2$ два $\mathcal{F}_B$-п.д.оператора в E_N^+ с одним и тем же символом $a(x,\xi) \in \Xi^m(q)$. Если этот символ является допустимым, то разность $A_1 - A_2$ представляет собой оператор почти порядке $m-1$ в $H_\gamma^s(E_N^+)$ при $0 \le s-m$, т.е для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε, такая, что

$\|((A_1-A_2)u)\|_{H_\gamma^{s-m}(E_N^+)} \le \varepsilon\|u\|_{H_\gamma^s(E_N^+)} + C_\varepsilon\|u\|_{H_\gamma^{s-1}(E_N^+)}$.

Пусть $a_1(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_1}(q)$ и $a_2(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_2}(q)$ $(q > \frac{N+\gamma+2}{2})$. Тогда оператор $A_1 \cdot A_2$ с символом, равным произведению символов имеет порядок m_1+m_2 в $H_\gamma^s(E_N^+)$ при $0 \le s-m_1-m_2$.

Пусть A_1 и A_2 — допустимые $\mathcal{F}_B$-п.д.операторы в E_N^+ с символами $a_1(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_1}(q)$ и $a_2(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_2}(q)(q > \frac{n+2\gamma+3}{2})$ соответственно. Тогда разность

$$A_1A_2 - A_1 \cdot A_2 = M\tilde{A}_1LM\tilde{A}_2L - M\widetilde{A_1 \cdot A_2}L$$

представляет собой оператор почти порядка m_1+m_2-1 в пространстве $H_\gamma^s(E_N^+)$ для всех s, $0 \le s-m_1-m_2+1$. Отсюда вытекает, что если A_1 и A_2 — допустимые $\mathcal{F}_B$-п.д.операторы в R_N^+ с символами $a_1(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_1}(q)$ и $a_2(x;\xi) \in \Xi_\gamma^{m_2}(q)$ $(q > \frac{n+\gamma+2}{2})$, то разность $A_1A_2 - A_2A_1$ является оператором почти порядка m_1+m_2-1 в $H_\gamma^s(R_n^+)$ $(0 \le s-m_1-m_2+1)$.

Пусть A — допустимый $\mathcal{F}_B$-п.д.оператор с символом $a(x;\xi) \in \Xi_\gamma^m(q)$ и $\varphi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, четная по каждой из переменных x'. Тогда $\varphi A - A\varphi$ — представляет собой оператор почти порядка $m-1$ в $H_\gamma^s(R_N^+)$ $(0 \le s-m_1-m_2+1)$.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ бесконечно дифференцируемые функции,четные по каждой из весовых переменных $x' = x_1,\dots,x_n$ с непересекающимися носителями, то $\varphi A\psi$ представляет собой оператор почти порядка $m-1$ в $H_\gamma^s(R_N^+)$ $(0 \le s-m+1)$.

Литература

1. Киприянов И.А., Катрахов В.В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов – Математ. сборн. 1977.№ 1. С. 104.

2. Катрахов В.В., Ляхов Л.Н. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов – Дифференц. Уравнен. 2011, Т. 47. № 5. С.681-695.

3. Lyakhov L.N., Raykhelgauz L.B. Even and odd Fourier-Bessl transformations and some singular differential equations.

– Cambridge Scientific Publishers. 2012. /Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE-2009. С. 107-112.

4. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов. – ДАН СССР, 1974. т. 218, № 2. С. 276-280.

5. Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы. – УМН. Т.20, № 5(125). С. 3-120.

Кривизна Риччи на графах. Формула кривизны Риччи для взвешенных деревьев

О.В. Рублёва

(Москва, МГУ им. Ломоносова; *rubleva-olga91@mail.ru*)

Пусть $G = (V, E)$ — граф, где V — множество вершин, E - множество ребер. *Расстоянием между двумя вершинами* в графе назовем количество ребер в кратчайшем пути, соединяющем данные вершины. *Диаметром графа* G назовем максимальное расстояние между любыми двумя вершинами в G.

Lin, Lu, Yau ввели определение кривизны Риччи-Оливье для графов, изменив определение Оливье для кривизны Риччи цепей Маркова на метрических пространствах. *Распределением вероятности* назовем функцию $m : V \to [0, 1]$ такую, что $\sum_{x\in V} m(x) = 1$. Затем введем функцию $W(m_1, m_2)$, которая будет измерять расстояние между двумя распределениями вероятностей m_1 и m_2:

$$W(m_1, m_2) = \inf_{\text{f — 1-Липшицева функция}} \sum_{x\in V} f(x)(m_1(x) - m_2(x))$$

Далее, *функция случайного блуждания* $m_x^\alpha : V \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$m_x^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & \text{, если x=y,} \\ \frac{1-\alpha}{deg(x)} & \text{, если } x \sim y, \\ 0 & \text{, если } x \nsim y \text{ и } x \neq y, \end{cases}$$

где $x \sim y$ обозначает, что вершины x и y — смежны.

Определим *α-кривизну Риччи* формулой $k_\alpha(x,y) = 1 - \frac{W(m_1^\alpha, m_2^\alpha)}{d(x,y)}$. При $\alpha = 0$ величина $k_0(x,y)$ — кривизна Риччи-Оливье. *Кривизной Риччи* назовем функцию $k(x,y) := \lim_{\alpha\to 1} \frac{k_\alpha(x,y)}{1-\alpha}$.

Теорема. Пусть $G = (V, E)$ — взвешенное бинарное дерево, d — функция, измеряющая вес кратчайшего пути между вершинами графа. Тогда кривизна Риччи между любыми вершинами графа G вычисляется по следующей формуле:

$$k(x,y) = \frac{1}{d_\omega(x,y)}\Big(\frac{1}{deg(x)}\sum_{z\sim x} k_1 * d_\omega(z,x) + \frac{1}{deg(y)}\sum_{z\sim y} k_2 * d_\omega(z,y)\Big),$$

где $k_1 = 1$, если ребро zx входит в путь xy, и -1, если не входит; $k_2 = 1$ если ребро zy входит в путь xy, и -1, если не входит.

Литература

1. Y. Lin, L.Y. Lu and S.T. Yau, Ricci curvature of graphs, Tohoku Mathematical Journal. Vol. 63(605-627), 2011.

2. Y. Lin, and S.T. Yau, Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs. Mathematical Research Letters. 17(2010), 345-358.

3. Y. Ollivier, Ricci curvature of Markov chains on metric spaces. J.Funct.Anal.256(3)(2009), 810-864.

Сравнение двух классов интегрируемых систем на алгебрах Ли малой размерности.

С.В. Рыжикова

(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова; *ryzhikova.sv@gmail.com*)

Известно, что если мы можем вложить гамильтонову систему, заданную на пуассоновом многообразии, в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, то её интегрирование сводится к поиску функций на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, коммутирующих с образом гамильтониана при вложении. В связи с этим возник вопрос: на любой ли коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор, то есть набор функций, коммутирующих между собой относительно скобки Пуассона-Ли, количество которых равнялось бы полусумме размерности алгебры и её индекса? Особый интерес представляли полные коммутативные наборы полиномов. Впервые даннная проблема была сформулирована в работе [1] А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко.

Гипотеза (А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *- вещественная или комплексная конечномерная алгебра Ли. Тогда на* $\mathfrak{g}^*$ *существует полный коммутативный набор полиномов.*

Гипотеза была доказана авторами для случая редуктивной алгебры Ли.[3] Также ими был предложен метод сдвига, основывающийся на том, что семейство, полученное сдвигом коэффицентов тейлоровского разложения инвариантов коприсоединенного представления на произвольный элемент a из $\mathfrak{g}^*$, будет коммутативным и полным.

В более поздних работах другими математиками были построены полные коммутативные наборы полиномов на различных сериях алгебр Ли. В том числе, в работе Трофимова [2] были найдены такие наборы для борелевских подалгебр алгебр Ли. В своей работе В.В. Трофимов показал, что метод сдвига часто бывает недостаточным, и разработал новый метод построения функций, основанный на рассмотрении цепочек подалгебр, вложенных друг в друга, и на сдвигах функций из конечных подпредставлений $\mathbf{Ad}^*$.

Полностью гипотеза Мищенко, Фоменко была доказана С.Т. Садэтовым в 2004 году для случая произвольной конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики. [4]

Теорема Садэтова. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *- произвольная конечномерная алгебра Ли над полем нулевой характеристики, тогда на* $\mathfrak{g}^*$ *существует полный коммутативный набор полиномов.*

Доказательством теоремы служит алгоритм постреения полных коммутативных наборов. Построение сводится либо к методу сдвигов, либо к построению полного коммутативного набора полиномов на алгебре Ли меньшей размерности, но, возможно, над расширенным полем.

Для вещественных алгебр Ли размерности три, четыре, пять и нильпотентных размерности шесть, то есть алгебр малой размерности, интегрируемые гамильтоновы системы с полиномиальными первыми интегралами были найдены Короткевичем [5]. Системы были найдены с помощью построения полного коммутативного набора полиномов на коалгебре Ли методом Садэтова.

Данные алгебры Ли были разбиты на семь классов, таких что для всех алгебр из одного класса метод Садэтова устроен одинаково.

1) Первый класс состоит из простых и редуктивных алгебр. Для этих алгебр метод построения набора полиномов совпадает с методом сдвига аргумента. [3]

2) Второй класс включает в себя алгебры, содержащие большой коммутативный идеал. Часть полного коммутативного набора образуют базисные элементы этого идеала, а для нахождения оставшейся части нужно рассмотреть алгебру рациональных сечений, которая в силу большой размерности коммутативного идеала будет одномерной и, следовательно, коммутативной.

3) В третий класс входят алгебры, в которых существует коммутативный идеал, а алгебра рациональных сечений двумерна. Здесь набор полиномов строится так же, как и для второго класса, с той только разницей, что алгебра рациональных сечений рассматривается над расширенным полем, и некоторые из полученных полиномов могут оказаться рациональными функциями. Полный коммутативный набор полиномов получаем, умножая рациональные функции на соответствующие знаменатели.

4) Четвертый класс состоит из алгебр с коммутативным идеалом, алгебра рациональных сечений которых трехмерна. С этими алгебрами Короткевич действует по тому же принципу, что и в классах II и III, с той только разницей, что алгебра рациональных сечений не обязана быть коммутативной, и ее, в свою очередь, нужно разложить на коммутативный идеал и следующую алгебру рациональных сечений. И далее по индукции.

5) В пятый класс входит всего одна алгебра $A^*_{4,10}$, у которой идеал изоморфен алгебре Гейзенберга, а подалгебра $\mathfrak{b}$ двумерна.

Для нее берутся в качестве полиномов образы вложения базисных элементов $\mathfrak{b}$ в $A^*_{4,10}$ и полный коммутативны набор полиномов на идеале.

6) Шестой класс содержит алгебры, в которых существует коммутативный идеал, не совпадающий с одномерным центром, а алгебра рациональных сечений содержит идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга. Как и раньше, возьмем набор полиномов на идеале, а нахождение полного коммутативного набора на алгебре рациональных сечений сведем к пятому пункту.

7) И наконец, седьмой класс. В него входят две алгебры, у которых существует одномерный коммутативный идеал, а алгебра рациональных сечений редуктивна. Частью полного коммутативного набора будет базисный элемент идеала, а оставшиеся полиномы строятся на алгебре рациональных сечений методом сдвига аргумента, так как она редуктивна.

Целью настоящей работы является сравнение двух описанных методов, Трофимова и Садэтова, построения полных коммутативных наборов полиномов на алгебрах Ли малых размерностей. Эта задача интересна тем, что на одной и той же алгебре Ли могут существовать различные функционально независимые такие наборы. Это означает, что на некоторых алгебрах Ли могут существовать семейства неэквивалентных интегрируемых гамильтоновых систем. Исследование таких полиномиальных наборов позволит нам более глубоко понять структуру алгебр Ли.

Выяснение функциональной зависимости или независимости полиномиальных наборов сводится к сравнению распределений, порожденных градиентами этих полиномов.

Будут предъявлены некоторые примеры.

Литература

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли. – Изв. АН СССР Сер. Мат. 1978, 42, №2. стр. 396-415.

2. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли. – Изв. АН СССР Сер. Мат. 1979, 43, №3. стр. 160-174.

3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли. – Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.; изд-во МГУ, 1979, вып. 19. стр. 3-94.

4. Садэтов С.Т. Доказательство гипотезы Мищенко - Фоменко. – Доклады РАН. 2004, 397, №6. стр. 751-754.

5. Короткевич А.А. Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности. – Матем. сб. 2009, 200, №12. стр. 3-40.

Периодические на бесконечности последовательности и их применение к разностным уравнением

А.А Рыжкова, И.А. Тришина
(Воронеж, Воронежский государственный университет;
anna-ryzhkova212@rambler.ru, I.A.Trishina@gmail.com)

Введен новый класс периодических на бесконечности последовательностей. Для исследования этого класса существенно используется теория банаховых пространств и спектральная теория исследования операторов. Необходимость рассмотрения таких классов последовательностей связана с тем, что они возникают при рассмотрении разностных уравнений.

Основные результаты связаны с построением структурной теории последовательностей и применения теории для исследования некоторых классов разностных уравнений.

Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел и X - комплексное банахово пространство. Через l^∞ обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to X$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 0} \|x(n)\|$.

Через c_0 обозначим (замкнутое) подпространство последовательностей из l^∞,убывающих на бесконечности,т.е формула $\lim\limits_{|n|\to\infty} \|x(n)\| = 0$.

В пространстве l^∞ рассмотрим операторы сдвига $S(n) : l^\infty \to l^\infty$, $(Sx)(k) = x(k+n)$, $k \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^\infty$.

Определение 1 *Последовательность* $\mathrm{x} \in \mathrm{l}^{\infty}$ *называется* медленно меняющейся на бесконечности, *если* $\mathrm{S(1)x - x} \in \mathrm{c_0}$, *т. е.* $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \|\mathrm{x(n+1) - x(n)}\| = 0$.

Определение 2 *Последовательность* x *из* l^{∞} *называется* периодической на бесконечности периода $N \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$, *если* $\mathrm{S}(N)\mathrm{x} - \mathrm{x} \in \mathrm{c_0}$. *Примером медленно меняющейся на бесконечности последовательности является последовательность* $x(n) = \sin(ln(\alpha + n))$, $n \in \mathbb{Z}$, *где* $\alpha > 0$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности последовательностей образуют замкнутое подпространство из l^{∞}, которое обозначим символом $l^{\infty}_{sl,\infty}$. Множество периодическое на бесконечности периода N образуют замкнутое подпространство из l^{∞}, которое обозначается через $l^{\infty}_{N,\infty}$. Отметим ,что $c_0 \subset l^{\infty}_{sl,\infty} \subset l^{\infty}_{N,\infty}$ при любом $N \geq 1$.

Пусть $\gamma_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}}$, $0 \leq k \leq N-1$, - корни из единицы.Отметим что они образуют группу,обозначаемую далее через G_N.

Основным результатом работы является

Теорема 1 *Каждая периодическая на бесконечности последовательность* $x \in l^{\infty}$ *периода* $N \geq 1$ *допускает представление вида*

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(n)\gamma_k^n,$$

где $x_k \in l^{\infty}_{sl,\infty}, 0 \leq k \leq N-1$.

В банаховом пространстве $l^{\infty}(\mathbb{Z}, X)$, где X конечномерное банахово пространство,рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = Bx(n) + y(n), n \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

где $y \in c_0(\mathbb{Z}, X), B \in EndX$ со спектром $\sigma(B) = \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m\}$, где $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_j \overline{\in} \mathbb{T}$, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 1\}$

Теорема 2 *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{Z} \to X$ уравнения (1) является периодической на бесконечности периода N последовательностью.*

Литература

1. А. Г. Баскаков,Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений/ Н. С. Калужина, Матем. заметки, 92:5 (2012), 643–661.

2. А. Г. Баскаков, Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов, Функциональный анализ, СМФН, 9, МАИ, М., 2004, 3–151.

3. А. Г. Баскаков, Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства /И. А. Криштал, Изв. РАН. Сер. матем., 69:3 (2005), 3–54.

4. А. Г. Баскаков, Гармонический анализ линейных операторов, Воронежский гос. ун-т, Воронеж, 1987.

5. А.Ю Дуплищева,О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений,Вестник Воронежского государстевенного университета,Воронеж,2012

Начально-граничная задача для парaболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми

К.Б. Сабитов

(г. Стерлитамак, Институт прикладных исследований Республики Башкортостан; *sabitov_fmf@mail.ru*)

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + a_1(t)u(x,0) + a_2(t)u(x,d_1) = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b_1(t)u(x,0) + b_2(t)u(x,-d_2) = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $a_i(t)$, $b_i(t)$ – заданные непрерывные функции, $i = 1,\ 2,\quad \alpha,\ \beta,\ d_1$ и d_2 – заданные положительные числа, $0 < d_1 \le \beta,\ -\alpha < -d_2 < 0$.

Следуя [1, 2], для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0,\ \ (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ \ -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1) = 0$,

$$D_- = D \cap \{t < 0\},\quad D_+ = D \cap \{t > 0\}.$$

Отметим, что нагруженные уравнения находят важные приложения в различных областях математики и естествознания [3–6]. При $a_2(t) = 0$, $b_2(t) = 0$ задача (2)–(5) исследована в [7].

В данной работе установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5). Решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Доказана устойчивость решения задачи (2)–(5) по заданной функции $\psi(x)$.

Здесь для примера приведем критерий единственности решения задачи (2)–(5). Введем обозначения:

$$a_{ik}(t) = \int\limits_0^t a_i(s) e^{-\lambda_k^2 (t-s)}\, ds,$$

$$b_{ik}(t) = \int\limits_0^t b_i(s) \sin\left[\lambda_k (s-t)\right]\, ds,\quad i = 1,\ 2;$$

$$\lambda_k = k\pi,\quad k \in \mathbb{N};\quad M_k = \frac{e^{-\lambda_k^2 d_1} - a_{1k}(d_1)}{1 + a_{2k}(d_1)};$$

$$N_k = \frac{\lambda_k \cos\lambda_k d_2 + b_{1k}(-d_2) + [\lambda_k^2 + a_1(0) + a_2(0)M_k]\sin\lambda_k d_2}{\lambda_k - b_{2k}(-d_2)};$$

$$u_k(t) = \begin{cases} A_k[e^{-\lambda_k^2 t} - a_{1k}(t) - M_k a_{2k}(t)], & t > 0, \\ A_k[\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t - \omega_k(t)], & t < 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\omega_k(t) = [a_1(0) + a_2(0)M_k]\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k} - [b_{1k}(t) + N_k b_{2k}(t)]\frac{1}{\lambda_k};$$

$$\Delta(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha - \omega_k(-\alpha).$$

Однородная задача (2)–(5) (где $\psi(x) \equiv 0$) в случае $\Delta(p) = 0$ имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = u_p(t)\sin\lambda_p x,$$

где $u_p(t)$ определяется по формуле (6), в которой A_p – произвольная постоянная, не равная нулю.

Теорема. *Если существует решение задачи* (2)–(5) *и выполнены условия*

$$1 + a_{1k}(d_1) \neq 0, \quad \lambda_k - b_{2k}(-d_2) \neq 0,$$

то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы условия

$$\Delta(k) \neq 0.$$

Литература

1. Сабитов К. Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2009. Т. 44. Вып.3. С. 273–279.

2. Сабитов К. Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2011. Т. 89. Вып. 4. С. 596–602.

3. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 1. С.86 – 94.

4. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы. 1995. 270 с.

5. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Вычислительная математика и математическая физика. 2004. Т.44. № 4. С.694–716.

6. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

7. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // Докл. АМАН. Нальчик. 2009. Т.11. № 1. С.66–73.

К анализу резонансных циклов в динамических системах с квадратичными нелинейностями

М.А. Савина, Ю.И. Сапронов

(Воронеж, Воронежский государственный университет

margarita.savina@mail.ru, yusapr@mail.ru)

Один из эффективных подходов к приближенному вычислению и анализу ветвей циклов, зарождающихся вблизи вырожденных точек покоя с сильными и кратными резонансами, основан на редукции Ляпунова-Шмидта (в рамках теории фредгольмовых операторных уравнений в пространствах периодических функций) [1] – [3]. Системы с квадратичными и кубическими нелинейностями, с кратными и сильно резонансными особенностями, встречаются в гидродинамике, радиофизике, популяционной динамике, химической кинетике, в моделях экономики и других разделах современного естествознания [4], [5].

Стационарные точки динамической системы с квадратичной нелинейностью (типичной для ряда математических моделей)

$$\dot{\xi}_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_k(\lambda_j + a_{kj}\xi_j)\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,, \tag{1}$$

определяются системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_k(\lambda_j + a_{kj}\xi_j) = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Ниже предполагается, что все компоненты $\psi(\lambda)$ положительны. Особые точки, расположенные внутри положительного октанта $\mathbb{R}^n_+$, определяются формулой $\xi = \psi(\lambda) := A^{-1}\lambda$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\top$, $A = (a_{jk})$, (при условии невырожденности и положительности матрицы A, $A\left(\mathrm{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right)\right) \subset \mathrm{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, и положительности вектора λ $(\lambda_j > 0\ \forall j)$).

Нетрудно заметить, что матрица Якоби J системы уравнений (1) в точке $\bar{\xi} = \psi(\lambda)$ имеет вид $[\bar{\xi}]\cdot A$, где $[\bar{\xi}] = \mathrm{diag}(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$.

Бифуркация Хопфа

Пусть $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2)$, где $J_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\alpha(\varepsilon) \\ \alpha(\varepsilon) & \varepsilon \end{pmatrix}$, ε — малый параметр, $\alpha(0) \neq 0$. Матрица J_1 имеет своими собственными значениями пару сопряженных коплексных чсел $\mu_{1,2} = \varepsilon \pm i\alpha$. На матрицу J_2 наложим условие гиперболичности (все собственные значения J_2 имеют ненулевые действительные части при всех ε). При сделанных предположениях переход параметра ε через нулевое значение порождает бифуркацию Хопфа: из рассмотренной стационарной точки рождается цикл. Зависимость амплитуды цикла от закритических приращений параметров можно вычислять по известным методикам [6] – [8], [1] – [3].

Двойная бифуркация Хопфа. Пусть $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$, где $J_1 = \begin{pmatrix} \beta_1(\varepsilon) & -\alpha(\varepsilon) \\ \alpha_1(\varepsilon) & \beta_1(\varepsilon) \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} \beta_2(\varepsilon) & -\alpha_2(\varepsilon) \\ \alpha_2(\varepsilon) & \beta_2(\varepsilon) \end{pmatrix}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ — малый векторный параметр, $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$, $\alpha_1(0) = p\,\omega$, $\alpha_2(0) = q\,\omega$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$, НОД$(p, q) = 1$. Матрица J_3 предполагается гиперболичной.

При $\varepsilon = 0$ матрица Якоби имеет вид

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -p\omega \\ p\omega & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q\omega \\ q\omega & 0 \end{pmatrix}, B\right).$$

Рассмотренная матрица имеет две ветви собственных значений, пересекающие мнимую ось при $\varepsilon = 0$. Момент пересечения мнимой оси спектром определяется системой уравнений $\beta_1(\varepsilon) = \beta_2(\varepsilon) = 0$, $\alpha_1(\varepsilon) = \omega_1$, $\alpha_2(\varepsilon) = \omega_2$. Далее предполагается выполнение условия трансверсальности к особенности двойной бифуркации Хопфа (регулярного вырождения по двум соизмеримым модам), означающее максимальность ранга в нуле системы уравнений

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta_2(\varepsilon) = q\alpha_1(\varepsilon) - p\alpha_2(\varepsilon) = 0.$$

Переход к операторному уравнению. Метод Ляпунова-Шмидта. Следующий шаг — переход от дифференциального уравнения к операторному:

$$f(x, \varepsilon) = 0, \tag{3}$$

где $x = x(t) \in E := \Pi^1_T$ — пространству T-периодических функций класса C_1, f — фредгольмово отображение $x(t) \to y(t) := \dot{x}(t) - X(x(t), \varepsilon) = \dot{x} - A(\varepsilon)x + B(x, x)$ (из E в $F := \Pi^0_T$), $T = 2\pi/\omega$.

Применим к уравнению (3) редуцирующую схему Ляпунова-Шмидта, которая, как известно [1], начинается с изучения линейного уравнения $\dot{x} = A(\varepsilon)x$. Сделав замену $z_1 = h_1 + ih_2,$, $z_2 = h_3 + ih_4$, получим итоговую систему уравнений $\dot{z_1} = i\omega_1 z_1$, $\dot{z_2} = i\omega_2 z_2$ решениями которой являются векторные функции (в блоке первых четырех координат)) $z = (z_1(t), z_2(t))^\top$, $z_1 = \exp^{i\omega_1 t} c_1$, $z_2 = \exp^{i\omega_2 t} c_2$, $c_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, 2\}$ (щстальные координаты решения нулевые). Отсюда следует, что

$$z_1(t) = a_1 \cos\omega_1 t - b_1 \sin\omega_1 t + i(a_1 \sin\omega_1 t + b_1 \cos\omega_1 t),$$

$$z_2(t) = a_2 \cos\omega_2 t - b_2 \sin\omega_2 t + i(a_2 \sin\omega_2 t + b_2 \cos\omega_2 t).$$

Рассмотрим стандартный ортонормированный в $L_2([0, T], \mathbb{R}^n)$ базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_1 t) \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\omega_2 t) \\ \sin(\omega_2 t) \\ \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_2 t) \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{O}$ — нулевой векторный блок, соответствующий координатам с номерами, превосходящими 4. Пусть $N := Lin\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $E = \Pi^1_T, F = \Pi^0_T$. Рассмотрим ортогональные прямые суммы

$$E = N \oplus E^{\infty-4}, \qquad F = N \oplus F^{\infty-4}, \qquad dim N = 4,$$

в соответствии с которыми имеем представления

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad \xi_j = \langle x, e_j \rangle, \quad v = x - u \in E^{\infty-n}.$$

$$f(x) = f^{(4)}(x) + f^{(\infty-4)}(x), \quad f^{(4)}(x) = \sum_{j=1}^{4} f_j(x) e_j,$$

$$f_j(x) = \langle f(x), e_j \rangle, \quad f^{(\infty-4)}(x) = f(x) - f^{(4)}(x) \in F^{\infty-4}.$$

Таким образом, от исходного операторного уравнения в бесконечномерном пространстве сделан переход к системе двух операторных уравнений

$$f^{(4)}(x) = 0\,, \quad f^{(\infty-4)}(x) = 0\,.$$

Так как ядро частной производной Фреше $\frac{\partial f^{(\infty-n)}}{\partial v}(a)$ состоит лишь из одного нуля (все прообразы нуля вошли в N), то оператор $\frac{\partial f^{(\infty-n)}}{\partial v}(a) : E^{(\infty-n)} \to F^{(\infty-n)}$ является изоморфизмом (в точке $a \in E, \quad f(a) = 0$). Тогда, в силу теоремы о неявном отображении, получим существование единственной функциональной зависимости $v = \Phi(u, \varepsilon)$ (для u из достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \subset N$ точки $\bar{u}$), такой, что $\Phi(\bar{u}) = \bar{v}$ ($\bar{u}, \ \bar{v}$ — компоненты a) и $f^{(\infty-n)}(u + \Phi(u)) = 0 \ \ \forall u \in \mathcal{O}$. Отображение $\Phi : \mathcal{O} \to E^{\infty-n}$ при этом является гладким.

Таким образом, поиск решения уравнения $f(x) = 0$ (параметр ε в обозначениии отображения f опущен — для облегчения записей) в окрестности точки $x = a$ сводится к поиску решений ключевого конечномерного уравнения

$$\tau(u) := f^{(4)}(u + \Phi(u, \varepsilon)) = 0, \quad u \in N\,,$$

при этом $\xi_j = \langle x, e_j \rangle, \quad f_j(x) = \langle f(x), e_j \rangle$. После подстановки $u = \sum \xi_k e_k$ ключевое уравнение приводится к координатной форме

$$\theta(\xi, \varepsilon) = (\theta_1(\xi, \varepsilon), \theta_2(\xi, \varepsilon), \theta_3(\varepsilon), \theta_4(\xi, \varepsilon))^\top = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^4,$$

$\theta_k(\xi, \varepsilon) = \left\langle f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \Phi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_k\right)\right), \, e_k \right\rangle$. На основе последних соотношений можно определять количество бифурцирующих циклов и их асимптотические (по закритическому приращению параметра) приближения.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

2. Карпова А.П., Сапронов Ю.И. Резонансные бифуркации решений фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и нелинейная динамика// Вестник ВГУ. Том 1. Воронеж: ВГУ, 2008. С.184-194.

3. Карпова А.П., Сапронов Ю.И. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008, вып. 3. С.12-22.

4. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат. 1988. – 414 с.

5. Колесин И.Д. Принципы моделирования социальной самоорганизации. Изд-во Лань. 2013. – 288 с.

6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. 1984. 432 с.

7. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир. 1985. 280 с.

8. Бибиков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Ленинград: изд. ЛГУ. 1991. 144 с.

Исследование корректной разрешимости некоторой граничной задачи уравнений в частных производных

Г.Б Савченко, Ю.Б. Савченко, С.А. Ткачева

(Воронеж, Воронежский государственный университет)

Рассмотрим уравнение

$$Ax = f \tag{1}$$

где $x(u, v)$ - искомая, а $f(u, v)$ - заданная комплекснозначные функции, определенные в бесконечном слое $(0 \le u \le T, \quad v \in R^m)$,

$A = \frac{\partial}{\partial u} - L$, L- дифференциальный оператор по $v \in R^m$ с постоянными комплексными коэффициентами.

$$Lx\,(u, v) = \sum_{\alpha} l_\alpha D_v^\alpha x(u, v), \quad (v \in R^m)$$

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$L_1 x\,(u, v)|_{u=0} = L_2 x\,(u, v)|_{u=T}\,, \tag{2}$$

где $L_i x\,(u, v)|_{u=0} = \sum_\alpha l_\alpha^i D_v^\alpha x(u, v), \quad (i = 1, 2)$,

$L(s),\ L_1(s),\ L_2(s)$ - символы дифференциальных операторов - полиномы от $s_1,\ s_2, ..., s_m$с постоянными комплексными коэффициентами. Обозначим $a(s) = Re\ L(s)$. Выделены классы L_2 - корректных задач [2].

Теорема. *Пусть существуют такие положительные постоянные* c_i $(i = 1, 2, 3)$*, что выполняются условия:*

1. $\left|L_1(s)L_2^{-1}(s) - \exp\left(TL\left(s\right)\right)\right| \geq c_1$ *, при всех* $s \in R^m$.

2. $|L_1(s)| \left|L_2^{-1}(s)\right| a^{-1}(s) \leq c_2$ *, при* $a(s) \geq c_3$.

Тогда задача (1)-(2) L_2*- корректна.*

Рассмотрен вопрос о необходимости условия (2) теоремы. В предположении, что $a(s) \neq const$ получены необходимые условия L_2- корректности в терминах степеней символов дифференциальных операторов. Заметим, что при условиях периодичности корректность задачи (1)-(2) в случае, когда v пробегает n-мерный тор эта задача была впервые рассмотрена А.А. Дезиным [1].

Литература

1. Дезин А.А. Операторы с первой производной по «времени» и нелокальные граничные условия / А.А. Дезин – Изв. АН СССР, сер.матем., т. 31, №1, 1967.

2. Савченко Г.Б. – Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 11, с. 2079–2082.

Дробные интегралы Адамара в обобщенных пространствах Степанова

Салим Бадран Д.С.

(Воронеж, Воронежский государственный университет)

Интегралы вида

$$\mathfrak{J}_+^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{t(\ln x - \ln t)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \tag{1}$$

$$\mathfrak{J}_-^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{t(\ln t - \ln x)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0 \tag{2}$$

носят названия дробных интегралов Адамара и приспособлены к конструкции дробного дифференцирования типа $\left(\pm\frac{d}{dx}\right)^\alpha$.

При исследовании операторов, заданных выражениями (1) и (2), также как и в случае интегралов дробного порядка Римана–Лиувилля, основополагающим является вопрос о функциональных пространствах, которые инвариантны относительно этих операций, ответ на который необходим при исследовании корректной разрешимости начально–краевых задач для эволюционных уравнений. Отметим, что классические пространства $L_p (p \geq 1)$ и C— со степенными весами этими свойствами не обладают.

Оказывается, что в случае интегралов Римана-Лиувилля, свойствами инвариантности обладают обобщенные пространства Степанова со специальными весами.

Через $S^{\pm}_{p,\nu,\omega}$ будем обозначать классы локально интегрируемых на $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ функций $\varphi(x)$, определяемых нормами

$$\|\varphi\|^{+}_{p,\nu,\omega} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left[x^{-\omega} \int_0^x s^{\nu} |\varphi(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

$$\|\varphi\|^{-}_{p,\nu,\omega} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left[x^{\omega} \int_x^{\infty} s^{-\nu} |\varphi(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Теорема. Пространство $S^{\pm}_{p,\nu,\omega}$ инвариантно относительно операций $\mathfrak{I}^{\alpha}_{\pm}$ и справедлива оценка

$$\|\mathfrak{I}^{\alpha}\varphi\|_{S_{p,\nu,\omega}} \leq C(\alpha, p, \nu) \|\varphi\|_{S_{p,\nu,\omega}}.$$

Уравнение Вольтерра I рода с особенностью в банаховом пространстве

И.В. Сапронов, С.С. Веневитина, В.В. Зенина
(Воронеж, ВГЛТА; *585386@mail.ru*)

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $Q([0,\delta],E)$ ограниченных измеримых в норме E на $[0,\delta]$ функций со значениями в E, норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{Q([0,\delta],E)} = \sup_{0\le x\le\delta} \|\psi(x)\|_E.$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = 0, \quad (0 \le x \le \delta) \tag{1}$$

в $L_1([0,\delta],E)$, где $K(x,t)-$ заданная функция со значениями в $L(E)$, $u(x)-$ искомая суммируемая функция на $[0,\delta]$ со значениями в E.

Пусть $K(x,t)$ имеет вид

$$K(x,t) = \sum_{\alpha+\beta=2}^{4} K^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение операторный пучок

$$B_\nu = C_0 - \frac{C_1}{\nu} - \frac{C_2}{\nu^2}, \tag{3}$$

где $C_0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{K(x,x)}{x^4}$, $C_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{K'_x(x,x)}{x^2}$, $C_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{K''_{xt}(x,x)}{x^0}$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) пучок (3) имеет характеристическое число ν ($\nu < 0$);

2) характеристическому числу ν соответствует собственный вектор e без присоединенных к нему векторов;

3) оператор C_0 имеет ограниченный обратный;

4)

$$\|C_0^{-1}\|_{L(E)} \cdot \max_{0\le t\le x\le\delta} \left\| \frac{K'_x(x,t)}{x^2} \right\|_{L(E)} \frac{1}{|\nu|} < 1; \tag{4}$$

5) $K'_t(x,x) = -C_1x^2 - 2C_0x^3$.

Тогда для уравнения (1) существует решение вида

$$u(x) = \frac{1}{x^2} e^{\nu\frac{1}{x}} [x^{-4}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4(x)x^4)], \tag{5}$$

где a_i $(i = 0,1,2,3)$−искомые коэффициенты в E, функция $a_4(x)$ является ограниченной измеримой на $[0,\delta]$ со значениями в банаховом пространстве E.

2. Построение решения

Уравнение (1) дифференцированием сводится к интегральному уравнению Вольтерра II рода

$$K(x,x)u(x) = -\int_0^x K'_x(x,t)u(t)dt. \tag{6}$$

Подставляя (2) и (5) в (6), получаем после интегрирования по частям

$$C_0\frac{1}{x^2}e^{\nu\frac{1}{x}}[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4(x)x^4] =$$

$$= -K'_x(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{-\frac{a_0}{\nu}\frac{1}{x^4} + \frac{4a_0}{\nu^2}\frac{1}{x^3} - \frac{12a_0}{\nu^3}\frac{1}{x^2} + \frac{24a_0}{\nu^4}\frac{1}{x} - \frac{24a_0}{\nu^5}\}+$$

$$+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{\frac{a_0}{\nu^2}\frac{1}{x^2} - \frac{2a_0}{\nu^3}\frac{1}{x} + \frac{2a_0}{\nu^4}\} + K'''_{xt^2}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{\frac{a_0}{\nu^3} - \frac{2a_0}{\nu^4}x - \frac{2a_0}{\nu^5}x^2\} -$$

$$-K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{\frac{4a_0}{\nu^3}\frac{1}{x}-\frac{4a_0}{\nu^4}\}-K'''_{xt^2}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{\frac{4a_0}{\nu^4}x-\frac{4a_0}{\nu^5}x^2\}+$$

$$+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{12a_0}{\nu^4}+K'''_{xt^2}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{12a_0}{\nu^5}x^2-K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{24a_0}{\nu^5}x+$$

$$+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{24a_0}{\nu^6}x^2-K'_{x}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{-\frac{a_1}{\nu}\frac{1}{x^3}+\frac{3a_1}{\nu^2}\frac{1}{x^2}-\frac{6a_1}{\nu^3}\frac{1}{x}+\frac{6a_1}{\nu^4}\}+$$

$$+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{\frac{a_1}{\nu^2}\frac{1}{x}-\frac{a_1}{\nu^3}\}+K'''_{xt^2}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{\frac{a_1}{\nu^3}x-\frac{a_1}{\nu^4}x^2\}-$$

$$-K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{3a_1}{\nu^3}+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{6a_1}{\nu^4}x-K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{6a_1}{\nu^5}x^2-$$

$$-K'_{x}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{-\frac{a_2}{\nu}\frac{1}{x^2}+\frac{2a_2}{\nu^2}\frac{1}{x}--\frac{2a_2}{\nu^3}\}+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{a_2}{\nu^2}-$$

$$-K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{2a_2}{\nu^3}x+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{2a_2}{\nu^4}x^2-$$

$$-K'_{x}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\{-\frac{a_3}{\nu}\frac{1}{x}+\frac{a_3}{\nu^2}\}+K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{a_3}{\nu^2}x-K''_{xt}(x,x)e^{\nu\frac{1}{x}}\frac{a_3}{\nu^3}x^2+$$

$$+\Bigg[-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K'''_{xt^2}(x,t)\{\frac{a_0}{\nu^3}-\frac{2a_0}{\nu^4}t+\frac{2a_0}{\nu^5}t^2\}\right]'_t dt+$$

$$+\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K'''_{xt^2}(x,t)\{\frac{4a_0}{\nu^4}t-\frac{4a_0}{\nu^5}t^2\}\right]'_t dt-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K'''_{xt^2}(x,t)\frac{12a_0}{\nu^5}t^2\right]'_t dt+$$

$$+\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)\frac{24a_0}{\nu^5}t\right]'_t dt-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)\frac{24a_0}{\nu^6}t^2\right]'_t dt-$$

$$-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K'''_{xt^2}(x,t)\{\frac{a_1}{\nu^3}t-\frac{a_1}{\nu^4}t^2\}\right]'_t dt+\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}K'''_{xt^2}(x,t)\frac{3a_1}{\nu^3}dt-$$

$$-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)t\right]'_t\frac{6a_1}{\nu^4}dt+\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)t^2\right]'_t\frac{6a_1}{\nu^5}dt-$$

$$-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}K'''_{xt^2}(x,t)\frac{a_2}{\nu^2}dt+\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)t\right]'_t\frac{2a_2}{\nu^3}dt-$$

$$-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)t^2\right]'_t\frac{2a_2}{\nu^4}dt-\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)t\right]'_t\frac{a_3}{\nu^2}dt+$$

$$+\int_0^x e^{\nu\frac{1}{t}}\left[K''_{xt}(x,t)t^2\right]'_t\frac{a_3}{\nu^3}dt\Bigg]-\int_0^x K'_x(x,t)\frac{1}{t^2}e^{\nu\frac{1}{t}}a_4(t)dt. \qquad (7)$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{\nu\frac{1}{x}}x^p$ $(p=-2,-1,0,1)$ в левой и правой частях равенства (7), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&B_\nu a_0=0\\
&B_\nu a_1=0\\
&B_\nu a_2=B'_\nu a_1+F(a_0)\\
&B_\nu a_3=2B'_\nu a_2+\widetilde{F}(a_0,a_1),
\end{aligned} \qquad (8)$$

где $F(a_0)$ и $\widetilde{F}(a_0,a_1)$ определяются из (7).

Из первых двух уравнений получаем $a_0=e$, $a_1=ce$. Для разрешимости третьего уравнения нужно выполнение условия

$$\big(B'_\nu a_1+F(a_0),e^*\big)=0, \qquad (9)$$

где e^* – собственный вектор операторного пучка B^*_ν.

Оно выполняется если
$c=-\dfrac{(F(a_0),e^*)}{(B'e,e^*)}$ $\quad$ ($(B'e,e^*)\neq 0$ в силу условия (2) теоремы).

Тогда третье уравнение разрешимо и его решение имеет вид $a_2=\bar{a}_2+c_1e$.

Если $c_1=-\dfrac{(\tilde{F}(a_0,a_1),e^*)+(2B'_\nu\bar{a}_2,e^*)}{2(B'_\nu e,e^*)}$, то четвертое уравнение так же разрешимо и его решение имеет вид $a_3=\bar{a}_3+c_2e$.

Для того, чтобы функция (5) была решением уравнения (6), функция $a_4(x)$ со значениями в банаховом пространстве E должна удовлетворять уравнению

$$C_0x^2e^{\nu\frac{1}{x}}a_4(x)=-\int_0^x K'_x(x,t)\frac{1}{t^2}e^{\nu\frac{1}{t}}a_4(t)dt+e^{\nu\frac{1}{x}}x^2f(x), \qquad (10)$$

где $f(x)$ – ограниченная измеримая функция на $[0,\delta]$ со значениями в E, которая определяется из равенства (7). Уравнение (10) перепишем в виде

$$a_4(x) + C_0^{-1}\int\limits_0^x \frac{K_x'(x,t)}{x^2}\frac{1}{t^2}e^{\nu\left(\frac{x-t}{xt}\right)}a_4(t)dt = f(x)$$

или в операторной форме

$$a_4(x) = (Ba_4)(x) + f(x), \tag{11}$$

где оператор B действует на ограниченную измеримую функцию на $[0,\delta]$ в норме банахова пространства E. Оценим норму оператора B в пространстве $Q([0,\delta],E)$

$$\|(Ba_4)(x)\|_{Q([0,\delta],E)} = \sup_{0\le x\le\delta}\left\|C_0^{-1}\int\limits_0^x \frac{K_x'(x,t)}{x^2}\frac{1}{t^2}e^{\nu\left(\frac{x-t}{xt}\right)}a_4(t)dt\right\|_E \le$$

$$\le \sup_{0\le x\le\delta}\int\limits_0^x \left\|C_0^{-1}\frac{K_x'(x,t)}{x^2}\frac{1}{t^2}e^{\nu\left(\frac{x-t}{xt}\right)}a_4(t)\right\|_E dt \le$$

$$\le \|C_0^{-1}\|_{L(E)}\cdot\max_{0\le t\le x\le\delta}\left\|\frac{K_x'(x,t)}{x^2}\right\|_{L(E)}\cdot\frac{1}{|\nu|}\cdot\sup\|a_4(x)\|_E =$$

$$= \|C_0^{-1}\|_{L(E)}\cdot\max_{0\le t\le x\le\delta}\left\|\frac{K_x'(x,t)}{x^2}\right\|_{L(E)}\cdot\frac{1}{|\nu|}\cdot\|a_4(x)\|_{Q([0,\delta],E)}$$

Следовательно, в силу (4) теоремы

$$\|B\|_{Q([0,\delta],E)\to Q([0,\delta],E)} \le \|C_0^{-1}\|_{L(E)}\cdot\max_{0\le t\le x\le\delta}\left\|\frac{K_x'(x,t)}{x^2}\right\|_{L(E)}\cdot\frac{1}{|\nu|} < 1.$$

Это означает, что уравнение (11) однозначно разрешимо методом последовательных приближений.

Литература

1. Сапронов И. В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве – Известия ВУЗов. Математика. 2007. №11(546). С.45-55.

Об упрощенном алгоритме математического моделирования течений жидкости в диффузоре

Ю.И. Сапронов, В.В. Конев, А.С. Коротких
(Воронеж, Воронежский государственный университет
yusapr@mail.ru, victor.konev@mail.ru,
korotkikh.andrey@gmail.com)

Данное сообщение посвящено обоснованию возможности применения нелокальной вариационной версии метода Ляпунова-Шмидта в задаче о динамике течений в диффузоре. В основе предлагаемого авторами вычислительного алгоритма (для построения модели течений) находится редукция к краевой задаче для ОДУ с последующим применением нелокальной схемы Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта.

Ряд известных подходов к построению точных и приближенных аналитических решений уравнения Навье-Стокса основан на редукции к конечномерным динамическим системам и краевым задачам для ОДУ [1] – [3]. Получаемые из уравнения Навье-Стокса упрощенные системы гидродинамического типа [2] – [3] позволяют достаточно точно моделировать течения жидкости в областях достаточно произвольных геометрических форм. Упрощенные уравнения используются и при изучении течений в диффузоре, начиная с основополагающих работ Джеффри [4] и Гамеля [5] (1915 и 1917 гг.).

В настоящей работе использован подход, основанный на двухшаговой редукциии — сначала к краевой задаче для ОДУ с квадратичной нелинейностью, а затем к конечномерному уравнению — через нелинейную галеркинскую аппроксимацию.

1. Двухмерная жидкость. Уравнение Гельмгольца

Обратимся к двумерному уравнению Навье-Стокса (см., например, [1])

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x}\, v = \nu\Delta(v) + \mathrm{grad}\,(p). \tag{1}$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двумерный лапласиан, $\frac{\partial v}{\partial x}$ — матрица Якоби вектора скорости v по компонентам точки $x = (x_1, x_2)$. Искомое поле векторов скорости $v = v(x_1, x_2, t)$ считается заданным на некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и «стандартными» краевыми условиями.

В преобразованиях, упрощающих уравнение (1), используется соотношение $\mathrm{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \mathrm{grad}\,(\Delta\psi)$; $\quad \mathrm{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\, v\right) = [\psi, \Delta(\psi)]$. Здесь $\mathrm{rot}\,(v) := [\nabla, v] = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, $[\psi, \varphi]$ — якобиан функций ψ, φ.

Условие неразрывности $\mathrm{div}(v) = 0$ (для двумерной жидкости) приводит к тому, что решение принимает следующий вид:

$$v := \mathrm{sgrad}(\psi) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\top},$$

где $\psi(x_1, x_2, t)$ — так называемая вихревая функция. Для функции φ естественно требуется выполнение граничных условий

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi)\bigg|_{\partial\Omega} := (\mathrm{grad}\,, n)(\varphi)\bigg|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2}$$

Пусть $u := \mathrm{rot}(v) = \Delta(\psi)$. Тогда $\dot{u} = \mathrm{rot}(\dot{v}) = \Delta(\dot{\psi})$. После применения двумерного ротора к левой и правой частям уравнения (1) получим уравнение в форме Гельмгольца ([1], стр. 406)

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi),\, \psi] + \nu\, \Delta^2(\psi)\,. \tag{3}$$

2. Подстановка Гамеля. Применение метода Ляпунова-Шмидта

Дальнейший анализ уравнения Гельмгольца можно провести, используя переход к галеркинской аппроксимации [3] (что в итоге дает уравнение гидродинамического типа [2]), либо применением редуцирующего перехода к краевой задаче для ОДУ ([1], стр. 450-484). Наиболее известной является редукция Гамеля, которая осуществляется посредством сужения уравнения Гельмгольца на класс функций вида (см. [1], стр. 478)

$$\varphi = Q\, q(\theta)\,,$$

где $Q := \int_0^\beta r\, u\, d\theta$ — поток жидкости через диффузор. Используя соотношения $\Delta(\varphi) = Q\frac{q''}{r^2}$, $[\Delta(\varphi), \varphi] = -Q^2\,\frac{2\,q''q'}{r^4}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{q''}{r^2}\right) = \frac{6\,q''}{r^4}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q''}{r^2}\right) = -\frac{2\,q''}{r^4}$, $\frac{1}{r^2}\left(\frac{q''}{r^2}\right)'' = \frac{q''''}{r^4}$, получим вместо стационарного варианта уравнения (3) (после подстановки Гамеля) следующее ОДУ:

$$q'''' + 4\,q'' + 2\mathcal{R}\,q''q' = 0\,,$$

где $\mathcal{R} = \frac{Q}{\nu}$ — число Рейнольдса.

В случае плоского диффузора это уравнение дополняется краевыми условиями (см. (2))

$$q(0) = 0\,, \qquad q(\beta) = 1\,, \qquad q'(0) = q'(\beta) = 0.$$

Условие $q(\beta) = 1$ вытекает из-за того, что $\int_0^\beta q'\, d\theta = \frac{1}{Q}\int_0^\beta r\, u\, d\theta = 1$ — (нормированный) поток через диффузор (см. [6],[7]). После масштабирующего преобразования угловой переменной $\theta \longrightarrow \beta\theta$ приходим к краевой задаче

$$q'''' + \lambda\,q'' + 2\widetilde{\mathcal{R}}\,q''q' = 0\,, \tag{4}$$

$$q(0) = 0\,, \qquad q(1) = 1\,, \qquad q'(0) = q'(1) = 0\,, \tag{5}$$

где $\lambda = 4\beta^{-2}$, $\widetilde{\mathcal{R}} = \beta^{-1}\mathcal{R}$.

Замечание 1. *Последняя краевая задача является вариационной: левая часть уравнения (4) является градиентом функционала*

$$V = \int_0^1 L(q'', q')\, d\theta\,, \qquad L(q'', q') = \frac{(q'')^2}{2} - \lambda\frac{(q')^2}{2} + \widetilde{\mathcal{R}}\,\frac{(q')^3}{3}\,. \tag{6}$$

Таким образом, решения задачи (4) – (5) являются экстремалями функционала (6). Следовательно, построение решений этого *уравнения можно осуществлять на основе локальной и нелокальной версий вариационного метода Ляпунова-Шмидта [8] – [14].*

Более подробному изложению построения решений на основе метода Ляпунова-Шмидта будет посвящена отдельная публикация авторов.

Замечание 2. *В работах [6] – [7] представлены результаты построения приближенных решений задачи (4) – (5) на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений в противовес методу точного аналитического решения в эллиптических функциях (возможность точного аналитического решения имеется вследствие полной интегрируемости уравнения (4)). Но представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к приближениям вследствие недостаточной точности ($10^{-4} - 10^{-6}$) существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. Требуемая точность в современных прикладных задачах —* $10^{-8} - 10^{-10}$ *и выше.*

После первичного интегрирования уравнения (4) и замены $q' = w$ получим краевую задачу

$$w'' + \lambda\, w + \widetilde{\mathcal{R}}\, w^2 = c\,, \qquad c - \mathrm{const}\,, \tag{7}$$

$$w(0) = w(1) = 0\,, \tag{8}$$

при дополнительном интегральном ограничении

$$\int_0^1 w\, d\theta = 1\,. \tag{9}$$

Интегрирование (вторичное) уравнения (7) дает следующее соотношенние (с двумя константами $c\,,\ d$):

$$\frac{1}{2}\left((w')^2 + \lambda\, w^2\right) + \frac{\widetilde{\mathcal{R}}}{3} w^3 - cw = d\,.$$

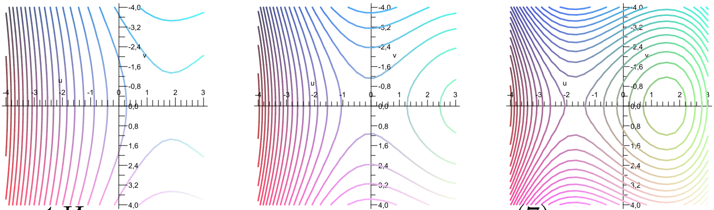


Рис. 1 Интегральные кривые уравнения (7) при некоторых значениях параметров

При изменении значений параметров форма интегральных кривых изменяется, вплоть до слияния локального минимума с седлом (при переходе параметров $\lambda, \widetilde{\mathcal{R}}, c$ через каустику функции $\frac{1}{2}\left(v^2 + \lambda\, w^2\right) + \frac{\widetilde{\mathcal{R}}}{3} w^3 - cw$) и их дальнейшее исчезновение. «Управляя» параметрами $\lambda, \widetilde{\mathcal{R}}, c, d$, можно получить изображения геометрических форм интегральных кривых и их расположений относительно системы координат w, v $(v = w')$ на фазовой плоскости. Рассматривая пересечения интегральными кривыми прямой $w = 0$, можно составить представление о тех фрагментах интегральных кривых, которые дают решение задачи (7) – (9). Приближенные аналитические формулы для этих фрагментов можно получить, используя специальные вычислительные методы (например, методы использованные в [6], [7], [8], [12], [14]).

Идею обоснования возможности нелокальной конечномерной редукции для задачи (7) – (9) можно пояснить на простейшем примере: правая часть уравнения $x = \varepsilon(x - x^2 + 1)$ является сжимающим отображением $[-2, 2] \longrightarrow [-2, 2]$ при достаточно малых значениях параметра ε. Аналогичный эффект сжимаемости проявляется и в случае общего операторного уравнения

$$x = B(g(x, x) + a), \qquad x \in F, \tag{10}$$

в банаховом пространстве F, если норма $\|B\|$ достаточно мала (здесь g(x,x) — непрерывный квадратичный оператор $F \longrightarrow F$, B — линейный непрерывный оператор $F \longrightarrow E$ (E — банахово пространство, $a \in F$). Свойство сжимаемости для оператора $K(x) := B(g(x, x) + a)$ позволяет разыскивать приближенные решения уравнения посредством стандартных итераций $x_n = K(x_{n-1})$ [8]. Это соображение позволяет осуществить нелокальную редукцию Ляпунова-Шмидта в задаче (7) – (9) на этапе перехода к ключевому уравнению, что дает в итоге возможность построения нелокальной ветви приближенного решения в аналитичнской форме с любой наперед эаданной точностью.

Литература

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика, ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. – 728 стр.

2. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат. 1988. – 414 с.

3. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО. 2007. – 392 с.

4. Jeffery G.B. The two-dimensional steady notion of a viskous fluid// Phil. Mag. 1915. Ser.6. V.29, N 172/ – P. 455-465.

5. Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten// Jahresber. Detsch. Math. Ver. 1917. Bd 25. – S. 34-60.

6. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А.. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре// Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. – С. 25-36.

7. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. – С. 431-441.

8. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

9. Карпова А.П., Сапронов Ю.И. Моделирование течений жидкости посредством редуцированных гидродинамических уравнений// Насосы. Турбины. Системы. Воронеж: ООО ИПЦ «Научная книга». 2012, №4(5). – С. 47-53.

10. Карпова А.П. Зарождение волновых движений несжимаемой вязкой жидкости на двумерном торе// Препринт НИИМ ВорГУ № 28. Декабрь 2008. Воронеж: ВорГУ. – 10 с.

11. Борзаков А.Ю., Лемешко А.А., Сапронов Ю.И. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экс-

тремалей// Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. Воронеж: ВГУ. - 2003, вып. 2. – С. 100-112.

12. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004). – С.3-140.

13. Борзаков А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга// Сборник трудов матем. ф-та ВГУ. 2005. Вып.9. С. – 9-22.

14. Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2011. – С. 181-186.

К теории бифуркаций экстремалей гладких функционалов с непрерывной симметрией

Т.Ю. Сапронова
(Воронеж, ВГУ, *tsapr@mail.ru*)

Применение принципа разрушения непрерывной симметрии и метода квазиинвариантных подмногообразий (см. [1] – [3]) в гладких вариационных задачах приводит к задаче описания критических точек полиномов от многих переменных на многомерных сферах, торах и других стандартных подмногообразиях в $\mathbb{R}^n$, служащих орбитами ортогональных действий матричных групп Ли. Анализ ветвления критических точек интерпретируется в этом случае как композиция двух анализов — симметричного анализа (анализа критических орбит) и анализа "возмущающих" полиномов на критической орбите "невозмущенного" полинома. Такой подход проливает новый свет на механизм зарождения критических точек [4].

1. Квазиинвариантные подмногообразия. Пусть $J : N \longrightarrow R^1$ — гладкий функционал, N — гладкое банахово многообразие (без края), K — гладкое подмногообразие N. Подмногообразие K называется *квазиинвариантным* (см. [1] – [3]), если существует такая гладкая ретракция $p : O(K) \longrightarrow K$, где $O(K)$ — окрестность K в N, что каждая точка $a \in K$ является критической для сужения $J|_{p^{-1}(a)}$.

Пусть Ξ и Ξ_1 — модельные линейные банаховы пространства для N и K. Если K — квзиинвариантное подмногообразие N и подпространство Ξ_1 дополняемо (существует такое подпространство $\Xi_2 \subset \Xi$, что $\Xi = \Xi_1 \bigoplus \Xi_2$), то найдутся такие окрестность $\tilde{O}(K) \subset O(K)$ подмногообразия K в N и открытое множество $W \subset \Xi_2$, что четверка $(\tilde{O}(K), K, W, p)$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K, стандартным слоем W и проекцией p.

В случае, когда существует прямое дополнение Ξ_2 к Ξ_1, определение квазиинвариантного подмногообразия можно переформулировть следующим образом: подмногообразие K называется *квазиинвариантным*, если некоторая окрестность K в N гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $J|_{p^{-1}(a)}$, p — проекция из K на N (см. [1] – [3]).

Если каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $J|_{p^{-1}(a)}$, то K называется *морсовским квазиинвариантным подмногообразием.* Для всех точек связного морсовского квазиинвариантного подмногообразия K индекс Морса $J|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным, и это постоянное значение называется *индексом Морса квазиинвариантного подмногообразия* K (обозначается $Ind(V, K)$).

2. Разрушение непрерывной симметрии функционалов. Рассмотрим $V(x, \varepsilon) = V(x) + h_\varepsilon(x)$ — гладкое семейство гладких фредгольмовых индекса ноль функционалов на банаховом пространстве E ($\varepsilon \in \mathbf{R}^q$, $h_0 = 0$, E непрерывно вложено в гильбертово пространство H).

Пусть на пространстве H задано ортогональное действие группы Ли G, причем пространство E и «невозмущенный» функционал $V(x) = V(x, 0)$ инвариантны относительно этого действия, а «возмущенный» функционал $V_\varepsilon(x) = V(x, \varepsilon) =$

$V(x)+h_\varepsilon(x)$ (при $\varepsilon \neq 0$) не является инвариантным (происходит *разрушение непрерывной симметрии*).

Компактная морсовская критическая орбита функционала V является структурно устойчивой в следующем расширенном смысле: при гладком параметрическом возмущении h_ε ($\varepsilon \in \mathbf{R}^q$, $h_0 = 0$) функционала V вблизи невозмущенной критической орбиты функционала V с индексом Морса l имеется диффеоморфное ей морсовское квазиинвариантное подмногообразие для функционала $V_\varepsilon = V + h_\varepsilon$ (при всех достаточно малых ε) с тем же индексом Морса l.

Каждое компактное морсовское квазиинвариантное подмногообразие функционала V также структурно устойчиво: при гладком параметрическом возмущении h_ε ($\varepsilon \in \mathbf{R}^q$, $h_0 = 0$) функционала V вблизи невозмущенного квазиинвариантного подмногообразия с индексом Морса l имеется диффеоморфное ему морсовское квазиинвариантное подмногообразие для $V_\varepsilon = V + h_\varepsilon$ (при всех достаточно малых ε) с тем же индексом Морса l [3].

3. Бифуркации экстремалей при разрушении непрерывной симметрии. Если L — компактная морсовская критическая орбита функционала V с индексом Морса l, то при достаточно малых ε вблизи L существует квазиинвариантное подмногообразие L_ε фредгольмова (индекса ноль) функционала $V_\varepsilon = V(\cdot, \varepsilon)$, диффеоморфное L ($L_0 = L$) с индексом Морса l. При этом существует $\Phi_\varepsilon : L \longrightarrow L_\varepsilon$ — гладкое семейство гладких диффеоморфизмов, такое, что $\Phi_0 = id : L \longrightarrow L$. Суперпозиция $W_\varepsilon(\xi) = V_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\xi))$ является *ключевой функцией* ($\xi \in L$) [5]. Если $\xi_0 \in L$ — критическая точка W_ε, то $\Phi_\varepsilon(\xi_0) \in L_\varepsilon$ — критическая точка V_ε, поэтому поиск бифурцирующих (из точек орбиты) экстремалей V_ε вблизи L сводится к исследованию функции $W_\varepsilon(\xi)$ [3], [4].

Для функции $W_\varepsilon(\xi)$ имеет место следующее представление: $W_\varepsilon(\xi) = W_0 + \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i V_i(\xi) + o(|\varepsilon|)$, где $W_0 = V(\xi) = const$, $V_i = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}(\cdot, 0)$, $\xi \in L$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^q$.

Если $a_0 \in L$ — морсовская критическая точка индекса m функции $\tilde{W}(\xi,\sigma^0) = \sum\limits_{i=1}^{q} \sigma^0{}_i V_i(\xi)$, где σ^0 — некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^q \backslash \{0\}$, $\xi \in L$, то при при всех достаточно малых $\delta \in \mathbf{R}$ функционал $V_{\delta\sigma^0}$ имеет изолированную морсовскую критическую точку $a(\delta) = a_0 + O(\delta) \in L_{\delta\sigma^0}$ индекса $m + l$.

Функция $\tilde{W}(\xi,\sigma^0)$ называется *порождающей.*

Таким образом, при несимметричных возмущениях функционала V *от морсовских критических точек порождающей функции отходят ветви изолированных экстремалей возмущенного функционала* $V_{\delta\sigma^0}$ [3], [4].

4. Функционалы Гинзбурга – Ландау. Примером вариационной задачи с непрерывной симметрией, в которой удается провести достаточно полный анализ локальных бифуркационных эффектов, является уравнение типа Гинзбурга – Ландау с симметричной матрицей. Ритцевские аппроксимации функционала действия V, отвечающего такому уравнению, наследуют топологические свойства функционала V, а их симметрийные свойства приводят к относительно простым алгебраическим формам ключевых функций, позволяющим определять все расклады ветвей бифурцирующих морсовских критических орбит и метаморфозы многообразий уровней ключевых функций.

Рассмотрим действие T_g на пространстве симметрических матриц n–го порядка $SM(n)$: $SO(n) \times SM(n) \longrightarrow SM(n)$, $(U, X) \mapsto U\, X\, U^{-1}$, $X \in SM(n)$.

Функционал Гинзбурга – Ландау рассматривается в следующем виде:

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\|\dot{X}\|^2}{2} - U_\lambda(X) \right) ds\,,$$

где $U_\lambda(X) = \mathrm{tr}\left(\lambda\, \frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{4}\right)$ — (термодинамический) потенциал Гинзбурга – Ландау, $\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}$, $X = (x_{ij}) \in SM\,(n)$, $X(0) = X(1) = 0$.

Функция U_λ $SO(n)$–инварианта : для любой матрицы $U \in SO(n)$ выполнено равенство $V_\lambda(UXU^{-1}) = V_\lambda(X)$.

Локальный анализ ветвей экстремалей функционала V_λ можно осуществить, перейдя к рассмотрению его ритцевской аппроксимации

$$W_\lambda(\xi) := V_\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathcal{E}_k\right),$$

где $\{\mathcal{E}_k\}$ — набор нескольких младших мод бифуркации, линейная оболочка которых инвариантна относительно заданного действия группы $SO(n)$. Функция W_λ является (модельным) полиномом, инвариантным относительно индуцированного действия $SO(n)$ на $\mathrm{Lin}\,(\mathcal{E}_1\,,\mathcal{E}_2\,,\,\dots\,,\mathcal{E}_n)$ [5].

5. Примеры модельных полиномов. К настоящему времени имеется весьма обширный список модельных полиномов, вычисленных для различных задач, и требующий исследования [5], [6]. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых простейших из них.

В случае двух переменных весьма часто используются полиномы

$$|\xi|^4 + \delta|\xi|^2 + \varepsilon_3\xi_1^2\xi_2^2 + \varepsilon_1\xi_1^2 + \varepsilon_2\xi_2^2$$

и

$$|\xi|^6+\delta_2\,|\xi|^4+\delta_1\,|\xi|^2+\varepsilon_4\,\xi_1^2\xi_2^2\,|\xi|^2+\varepsilon_3\,\xi_1^2\xi_2^2+\varepsilon_1\xi_1^2+\varepsilon_2\xi_2^2, \quad \xi := (\xi_1,\xi_2)^\top$$

(реализация разрушения круговой симметрии).

В случае трех переменных возникают полиномы

$$\sigma_1^2 + \varepsilon\,\sigma_2 - \delta\,\sigma_1, \qquad \sigma_1^3 + \varepsilon_1\,\sigma_1\sigma_2 + \varepsilon_2\,\sigma_1^2 + \varepsilon_3\,\sigma_2 - \delta\,\sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \qquad \sigma_2 = \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2.$$

(при разрушении сферической симметрии с сохранением симметрии куба) [4].

Если рассмотреть, например, полином двух переменных $|\xi|^4 - \delta|\xi|^2 + \varepsilon\,\xi_1^2\xi_2^2$, обладающий при $\varepsilon = 0$ круговой симметрией (инвариантен относительно стандартного действия

$SO(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$), то, как показывают вычисления, на критической окружности появляются восемь критических (порождающих) точек — четыре минимума и четыре седла. Из порождающих точек выходят ветви критических точек после разрушения круговой симметрии.

В случае полинома трех переменных $\sigma_1^2 + \varepsilon\,\sigma_2 - \delta\,\sigma_1$ возникает задача описания (условных) критических точек полинома $\sigma_2 = \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2$ на двумерной сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$. В результате несложных вычислений получается максимальный расклад (на критической сфере), состоящий из восьми минимумов, шести максимумов и двенадцати седел [4].

Литература

1. Сапронова Т.Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях // Труды математического факультета. Новая серия / Воронеж. гос. ун–т. — 1997. — № 2(18). — С. 54–58.

2. Сапронова Т.Ю. Бифуркации экстремалей из точек критической орбиты при разрушении непрерывной симметрии // Труды математического факультета. Новая серия / Воронеж. гос. ун–т. — 1999. — № 4. — С. 101–107.

3. Сапронова Т.Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж, 2000. — С. 107–124.

4. Сапронова Т.Ю., Швырева О.В. Использование разрушения сферических симметрий и краевых особенностей функций в вариационных задачах // Математические модели и операторные уравнения / Воронеж. гос. ун–т. — 2011. — Т. 7. — С. 178–192.

5. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

6. Даринский Б.М., Колесникова И.В., Костин Д.В., Сапронов Ю.И. Ветвление экстремалей в точках минимума с однород-

ными особенностями четвертого и шестого порядков // Вестник Воронежского гос. ун–та. Серия: Физика. Математика. — 2008. — № 1. — С. 249–260.

Об одном методе решения начально-краевой задачи, описывающей движение транспортного потока на прямолинейном участке

А.А. Сенкебаева
(Алматы, Казахстанско-Британский технический университет; *akbota.senkebayeva@gmail.com*)

В данной работе предлагается один метод решения начально-краевой задачи, описывающей движение транспортного потока на интервале времени $(0,\, t_0 - \tau_0)$ от начала движения до момента торможения при мигающем зеленом сигнале светофора чуть раньше установленного времени $t = t_0$ остановки движения. Динамика транспортного потока описывается уравнениями газовой динамики с одной пространственной переменной [1]:

$$\rho\,(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\, F, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad p = P(\rho). \tag{2}$$

Здесь $\rho(x,t)$ – плотность, $v(x,t)$ – скорость и $p(x,t)$ – давление сплошной среды в заданной точке x сплошной среды в момент времени $t > 0$. Плотность внешних массовых сил $F(v)$ и функция $P(s)$ считаются заданными.

$$F(v) = F_0 = const > 0 \text{ при } v < v_* - \delta,\ F(v) = 0 \text{ при } v > v_* \tag{3}$$

Далее для системы уравнений (1) и (2) рассматривается начально-краевая задача

$$v(x,0) = v_0(x), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x),\ x > 0, \tag{4}$$

$$v(0,t) = v^0(t), \quad \rho(0,t) = \rho^0(t),\ t > 0 \tag{5}$$

при условии $v_0(x) \geqslant 0$ и $v^0(t) \geqslant 0$. Кроме того, необходимо отметить, что по сравнению с газом или жидкостью транспортный поток имеет свои особенности. Так, если жидкость или газ находятся в начальный момент времени $t = 0$ в состоянии покоя ($v(x,0) = 0$), но начальная плотность распределена неравномерно ($\rho(x,0) \neq const$), то даже при отсутствии внешних массовых сил ($F = 0$) при $t > 0$ жидкость или газ начнут растекаться. Автомобили же без внешней (ускоряющей) силы F останутся неподвижными. Фактором, заставляющим жидкость или газ растекаться, является градиент давления в уравнении (1). Способом избежать такого поведения сплошной среды является постулат

$$P(s) \equiv const, \tag{6}$$

Математическая модель, управляющая этим процессом, подробно описана в работе [3]. В ней предполагается ограничение движения только на прямолинейных участках и только в одном направлении. В данной работе предлагается одно решение начально-краевой задачи (1)-(6).

В этой задаче будем считать, что

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geq 0, \ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 \ (x > 0) \tag{7}$$

$$\rho(0,t) = \rho^0(t) \geq 0, \ v(0,t) = v^0(t) \geq 0 \ (t > 0). \tag{8}$$

Рассмотрим новые независимые переменные (ξ, t), вводимые по формуле

$$\xi = \int\limits_0^x \rho(s,t)ds, \ t = t. \tag{9}$$

Пусть новые искомые функции

$$\hat{\rho}(\xi,t) = \rho(x,t), \ \hat{v}(\xi,t) = v(x,t) \tag{10}$$

удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + a(t)\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} = F, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + a(t)\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \hat{\rho}^2\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} = 0, \tag{12}$$

где $a(t) = \rho^0(t) \cdot v^0(t)$.

При выводе (11), (12) мы воспользовались формулами:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi}(\int\limits_0^x \frac{\partial \rho}{\partial t}(s,t)ds) =$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi}(\int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial s}(\rho v)(s,t)ds) = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi}\hat{\rho}\hat{v} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} \cdot a(t)$$

и

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \hat{\rho}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi};\ \frac{\partial v}{\partial x} = \hat{\rho}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi};\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}\hat{\rho}\hat{v} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}a(t).$$

Мы будем искать решения, в которых $\rho(x,t) \geq 0$. Поэтому преобразование (9) переводит полуось $\{x > 0\}$ в полуось $\{\xi > 0\}$. На границе $\{\xi = 0\}$ выполняются краевые условия

$$\hat{\rho}(0,t) = \rho^0(t), \hat{v}(0,t) = v^0(t), \tag{13}$$

которые следуют из условий (8). Поскольку $\hat{\rho}(\xi,0) = \hat{\rho}_0(\xi) = \rho(x,0) = \rho_0(x)$, $\hat{v}(\xi,0) = \hat{v}_0(\xi) = v(x,0) = v_0(x)$, то для определения начальных значений $\hat{\rho}_0(\xi)$ и $\hat{v}_0(\xi)$ мы должны найти преобразование (9) при $t = 0 : \xi = \int\limits_0^x \rho_0(s)ds$ и вычислить обратное ему преобразование $x = \gamma_0(\xi)$. Условием существования обратного преобразования является условие

$$\rho_0(x) > 0 \ (x > 0). \tag{14}$$

Таким образом, можно определить $\hat{\rho}_0(\xi) = \rho_0(\gamma_0(\xi))$ и $\hat{v}_0(\xi) = v_0(\gamma_0(\xi))$ и задать начальные условия $\hat{\rho}(\xi, 0) = \hat{\rho}_0(\xi), \hat{v}(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi)$ с известными функциями $\hat{\rho}_0$ и $\hat{v}_0$.

Литература

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – М.: Наука, Сибирское отделение, 1983. 315 с.

3. Сенкебаева А.А. Об одной математической модели движения автомобильного транспорта на городских магистралях – Материалы IV Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик: ООО «Редакция журнала «Эльбрус», 2013 г. с. 248 – 251.

Оценка числа вершин минимальной триангуляции двумерного многообразия

Г.М. Сечкин

Введение

В данной статье рассматривается вопрос о нахождении формулы для числа вершин минимальной триангуляции двумерного многообразия, также будет сформулирован ряд открытых вопросов.

Основные определения и теоремы

Определение Триангуляцией двумерного многообразия называют разбиение многообразия на симплексы.

Для наших целей подойдет следующая формулировка: триангуляция - это вложение графа в многообразие с выполнением следующих требований: 1) граф разбивает поверхность на области, ограниченные треугольниками (грани графа);
2) в графе нет петель.

Для каждого многообразия существует бесконечно много триангуляций. Например, для сферы тетраэдр и октаэдр являются триангуляциями, однако у октаэдра на одну вершину больше. Под минимальной триангуляцией многообразия мы будем понимать ту, у которой число вершин минимально.

Теорема (*Эйлер*) Для произвольной триангуляции двумерного многообразия верно следующее соотношение: $B - P + \Gamma = \chi(M)$, где В - число вершин графа, Р - ребер, Г - граней, а $\chi(M)$ - эйлерова характеристика равная $2 - 2g$ в ориентируемом случае, где g - род поверхности, т.е. число ручек у сферы, или $2 - k$ в неориентируемом, k - число пленок мебиуса (см. [1]).

Утверждение 1 Минимизируя число вершин триангуляции фиксированного многообразия, мы автоматически минимизируем число ребер и число граней.

Определение Граф называется полным, если в нем проведены всевозможные ребра. Обозначение для B вершин: K_B
Также степенью вершины условимся называть число ребер выходящих из неё. Рассмотрим несколько примеров.
Минимальной триангуляцией сферы будет K_4.
Для тора минимальной триангуляцией является K_7. Для RP^2 - K_6.

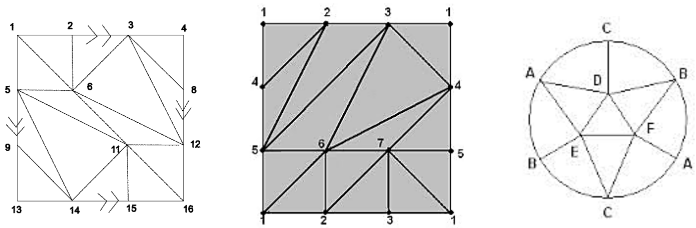


Рис.1 Представление T^2 графом K_7 и RP^2 графом K_6.

После этих примеров возникает два естественных вопроса:
1) все ли минимальные триангуляции задаются полными графами?
2) всякий ли полный граф реализуется, как минимальная триангуляция какого-нибудь многообразия?

Предвосхищая желание читателя, заметим, что на оба вопроса ответ отрицательный. Однако сам анализ небезынтересен.

Утверждение 2 Полный граф K_B не является минимальной триангуляцией двумерного многообразия с эйлеровой характеристикой χ, если B и g не удовлетворяют равенству $\chi = B(1 - \frac{B-1}{6})(*)$.

Для доказательства этого утверждения мы воспользовались следующими соображениями: $P = \frac{(B-1)B}{2}$, $\Gamma = \frac{(B-1)B}{3}$.

Утверждение 3 Имеется бесконечно много целочисленных пар (B, χ), удовлетворяющих равенству $(*)$. Более того, пар бесконечно много как и при четном B, так и при нечетном.
Отметим, что формула $(*)$ не дает ответа на вопрос, будет ли K_B при заданном B минимальной триангуляцией для многообразия M_2.

Рассмотрим бутылку Клейна $\chi(Kl) = 0$, для тора характеристика тоже равна нулю. Пара $B = 7, \chi = 0$ удовлетворяет соотношению $(*)$. Однако K_7 - триангуляция T^2, а для бутылки минимальное число вершин - 8. Подробное доказательство есть в [2].
Как известно, для любой ориентируемой поверхности (кроме S^2) существует неориентируемая поверхность с той же эйлеровой характеристикой. Согласно утверждению 3 пар многообразий с одинаковой χ и таких, что многообразие может иметь триангуляцию в виде полного графа, бесконечно много.

Утверждение 4 Если граф K_B вкладывается в многообразие M_2 и пара $(B, \chi(M_2))$ удовлетворяет $(*)$, то K_B дает минимальную триангуляцию для M_2.
Преобразуем равенство $(*)$ к виду $B^2 - 7B + 6\chi = 0$.

Приведем несколько первых пар:

B	4	6	7	9	10	...
χ	2	1	0	-3	-5	...

Т.е. K_8 не реализует как минимальная триангуляция ни какое двумерное многообразие. Также при $\chi = -2$ у сферы с двумя ручками минимальная триангуляция не является полным графом.

Заключение

В заключении приведем несколько открытых вопросов:
1) если K_B удовлетворяет равенству $(*)$ при четном B, то всегда ли K_B является триангуляцией ориентируемого многообразия, как в случае "тор - бутылка Клейна"?
2) известны правила уменьшения вершин в триангуляции, так называемые флипы и стягивания, так существует ли алгоритм, позволяющий получить минимальную триангуляцию?
3) если минимальная триангуляция не является полным графом, можно ли как-то оценить число различных таких триангуляций?

Литература

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. 2. M.Jungerman, G. Ringel Minimal triangulation on orientable surfaces.

Нелокальная задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии

С.Н. Сидоров

(г. Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета; *stsid@mail.ru*)

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t + b^2 t^n u = 0, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = 0, & t < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | \, 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $n > 0$, $m > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+), \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \;\; (x,t) \in D_- \cup D_+, \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; -\alpha \le t \le \beta, \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$,
$D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что начально-граничная задача для уравнения (1) была изучена в работе [1] в прямоугольной области D, в которой вместо условия (5) задано начальное условие $u(x,-\alpha) = \psi(x)$. В работах [2, 3] изучена задача (2)–(5) для уравнения (1) при $n = 0$ с начальным условием $u(x,-\alpha) = g(x)$. В работе [4] изучена задача (2)–(5) для уравнения (1) при $n = 0$, $m = 0$, $b = 0$. В работе [5] доказана единственность решения задачи для уравнения (1) при $n = 0$.

Здесь, следуя перечисленным выше работам, для уравнения (1) при всех $n > 0$, $m > 0$, $b > 0$ в прямоугольной области D установлен критерий единственности решения задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения, которые принадлежат разным типам изучаемого уравнения. При этом решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи на собственные значения. Установлена устойчивость решения по нелокальному граничному условию.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(5)*, то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\delta(k) = \gamma_k \sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) - e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} \neq 0, \tag{6}$$

где
$$\gamma_k = \Gamma\left(1-\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_k}{2}\right)^{1/(2q)},$$
$J_\nu(z)$ – *функция Бесселя первого рода порядка* ν, $\lambda_k^2 = (qp_k)^2 = b^2 + (\pi k)^2$, $2q = m+2$, $\Gamma(\cdot)$ – *гамма-функция Эйлера.*

Лемма 1. *При любом фиксированном* $\beta > 0$, $b > 0$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *уравнение* $\delta(k) = 0$ *имеет счетное множество положительных нулей относительно* $\alpha_q = \alpha^q/q$.

Лемма 2. *Если выполнено одно из условий:* 1) $\alpha_q = \alpha^q/q$ – *любое натуральное число;* 2) $\alpha_q = p/t$ – *любое дробное число, где* p *и* t – *взаимно-простые натуральные числа и* $1/q \neq (4td - 4r - t)/t$, *где* $d \in \mathbb{N}$, r – *остаток от деления* kp *на* t, *то существуют положительные постоянные* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* C_0 *такие, что при любых* $k > k_0$ *и фиксированных* $b > 0$, $\beta > 0$ *справедлива оценка*
$$|k^\lambda \Delta(k)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/(2q). \tag{7}$$

При выполнении оценки (7) при всех $k > k_0$ и неравенства (6) при $k = 1, 2, ..., k_0$ решение задачи (2)–(5) определяется в виде суммы ряда
$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin \pi k x, \tag{8}$$
где
$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_k}{\delta(k)} e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}, & t > 0, \\ \dfrac{\varphi_k}{\delta(k)} \gamma_k \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q), & t < 0, \end{cases}$$
$$\varphi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin \pi k x\, dx.$$

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(x) \in C^{3+\alpha}[0,1]$, $\lambda < \alpha < 1$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ *и выполнена оценка* (7) *при* $k > k_0$. *Тогда если* $\delta(k) \neq 0$ *при всех* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует* *единственное решение задачи* (2)–(5) *и это решение определяется рядом* (8); *если* $\delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, ..., k_m \leq k_0$, *то задача* (2)–(5) *разрешима тогда, когда выполняются условия ортогональности*

$$\int\limits_0^1 \varphi(x) \sin \pi l x \, dx = 0, \quad l = k_1, ..., k_m.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и* $\delta(k) \neq 0$ *при всех* $k \leq k_0$. *Тогда для решения задачи* (2)–(5) *имеют место оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2} \leq C_1 ||\varphi'(x)||_{L_2},$$
$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leq C_2 ||\varphi''(x)||_{L_2},$$

где C_1 *и* C_2 *– положительные постоянные, не зависящие от* $\varphi(x)$.

Литература

1. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. С. 1–8.

2. Сабитов К. Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.

3. Сабитов К. Б., Рахманова Л. Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1175-1181.

4. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2011. Т. 89. Вып. 4. С. 596–602.

5. Сидоров С.Н. Критерий единственности решения одной нелокальной задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Материалы X Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик: Изд. КБНЦ РАН. 2012. С. 96–99.

Численное исследование установившейся фильтрации высоко-вязких жидкостей с многозначным законом[15]

М.Т. Сингатуллин, И.Б. Бадриев
(Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт Информатики Академии Наук Республики Татарстан; *ildar.badriev1@mail.ru*)

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой высоко-вязкой жидкости в пористой среде, занимающей ограниченную область $\Omega \subset R^m$, $m \geq 2$, с липшиц-непрерывной границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, ($\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$, на Γ_1 давление считается равным нулю, Γ_2 – непроницаема). Необходимо найти стационарные поля давления u и скорости v жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности и граничным условиям

$$\operatorname{div} v(x) = \tilde{f}(x),\ x \in \Omega, \quad u(x) = 0,\ x \in \Gamma_1, \quad (v(x), \mathbf{n}) = 0,\ x \in \Gamma_2, \tag{1}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к Γ_2, $\tilde{f}$ – функция, характеризующая плотность внешних источников, в предположении, что жидкость подчиняется многозначному закону фильтрации (см. рис.1)

$$\begin{gathered} -v(x) \in \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|} \nabla u(x),\ x \in \Omega, \\ g(\xi) = g_0(\xi) + \vartheta H(\xi - \beta),\ \xi \in R^1, \end{gathered} \tag{2}$$

где β (предельный градиент) и ϑ – заданные неотрицательные константы, g_0 – однозначная функция такая, что $g_0(\xi) = 0, \xi < \beta$, $g_0(\xi) = \widehat{g}(\xi - \beta)$, $\xi \geq \beta$, H – многозначная функция Хевисайда, определяемая следующим образом: $H(\xi) = 0, \xi < 0, H(0) = [0,1]$, $H(\xi) = 1$, $\xi > 0$. Относительно функции $\widehat{g} : [0, +\infty) \to R^1$ предполагаются выполненными условия:

$$\widehat{g} \quad \text{непрерывна, возрастает,} \tag{3}$$

существуют c_1, $c_2 > 0$, $p > 1$, такие, что при $\xi \geq 0$

$$c_1\, \xi^{p-1} \leq \widehat{g}(\xi) \leq c_2\, \xi^{p-1}, \tag{4}$$

[15]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022, 14-01-00755)

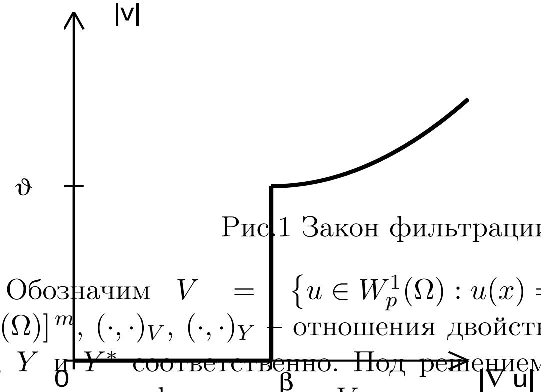


Рис.1 Закон фильтрации

Обозначим $V = \left\{u \in W_p^1(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \Gamma_1\right\}$, $Y = [L_p(\Omega)]^m$, $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_Y$ – отношения двойственности между V и V^*, Y и Y^* соответственно. Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства [1]

$$(A\eta - f, \eta - u)_V + F(\eta) - F(u) \geq 0 \quad \forall\, \eta \in V, \tag{5}$$

где

$$(Au, \eta)_V = \int\limits_{\Omega} \frac{g_0(|\nabla u|\,)}{|\nabla u|}\,(\nabla u, \nabla \eta) dx,$$

$$F(\eta) = G(\nabla \eta) = \vartheta \int\limits_{\Omega} \mu(|\nabla \eta| - \beta) dx,$$

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0, \\ \zeta, & \zeta \geq 0, \end{cases} \quad (f, \eta)_V = \int\limits_{\Omega} \tilde{f}(x)\eta(x) dx.$$

Для решения вариационного неравенства (5) будем применять следующий итерационный процесс. Пусть $u^{(0)} \in V$ – произвольный элемент, полагаем $y^{(0)} = \Lambda u^{(0)}$, $\Lambda = \nabla : V \to Y$, находим $\lambda^{(0)} \in \partial G(u^{(0)})$. Определим последовательности $\left\{u^{(k)}\right\}$, $\left\{y^{(k)}\right\}$, $\left\{\lambda^{(k)}\right\}$ следующим образом. Для $k = 0, 1, \ldots$

1) Найдем элемент u_{k+1} как решение задачи

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau \left[Au^{(k)} - f + \Lambda^* \lambda^{(k)} + r\, u^{(k)} - r\, \Lambda^* y^{(k)} \right], \quad (6)$$

где оператор $\Lambda^* : Y^* \to V^*$ определен следующим образом: $(\Lambda^* y, \eta)_V = (y, \Lambda \eta)_Y$ для всех $y^* \in Y^*$, $\eta \in V$, $\tau > 0$, $r > 0$ – итерационные параметры.

2) Затем находим элемент $y^{(k+1)}$, решая задачу минимизации

$$(r\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)})_Y \le G_r(z) - G_r(y^{(k+1)})\ \forall\, z \in Y, \quad (7)$$

где $G_r(z) = G(z) + \dfrac{r}{2}\ \|z\|_Y^2$

3) Далее, находим элемент $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\left(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right)$.

Для определения $u^{(k+1)}$ из (6) необходимо сначала решить краевую задачу

$$\begin{cases} -\Delta w = f - Au^{(k)} + \operatorname{div}(\lambda^{(k)} - r u^{(k)}) + r\,\Delta u^{(k)}, & x \in \Omega, \\ w(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (w(x), \mathbf{n}) = 0, & x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

а затем положить $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau\, w$.

Решение задачи (7) может быть найдено по формуле

$$y^{(k+1)} = \frac{g_r^*(|q|)}{|q|}\, q,\ g_r^*(\xi) = \begin{cases} \xi/r, & \xi \le r\,\beta, \\ \beta, & r\,\beta < \xi \le r\,\beta + \vartheta, \\ (\xi - \vartheta)/r, & \xi > r\,\beta + \vartheta. \end{cases}$$

где $q = r\,\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}$.

Был разработан комплекс программ в среде MatLab. Проведены численные эксперименты для модельных задач. Эмпирически определялись оптимальные (по количеству итераций) итерационные параметры $\tau > 0$, $r > 0$. Исследовано поведение границ застойных зон (множеств в области фильтрации, где модуль градиента давления меньше предельного, т.е. движение фильтрующейся жидкости отсутствует) при изменении величины показателя p, уменьшении ϑ.

Литература

1. Лапин А.В. Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 3. – С. 689–700.

Топологическая монодромия в системах с двумя степенями свободы, инвариантных относительно вращения

Г.Е. Смирнов

(Москва, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; *glebevgen@yandex.ru*)

Рассмотрим задачу о движении материальной точки единичной массы по сфере $S^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ с римановой метрикой, симметричной относительно вращений вокруг оси Oz (вертикали), в поле сил с потенциальной энергией $V(z)$. Полная энергия H и момент количества движения относительно вертикали G являются первыми интегралами.

Положения равновесия системы – это критические точки потенциала. Как функция на сфере, $V(z)$ имеет ровно две изолированные критические точки $z = \pm 1$. Остальные критические точки организованы в окружности $z = \mathrm{const}$ и здесь не рассматриваются. Так как функция V инвариантна относительно вращения, то указанные изолированные критические точки являются локальными минимумами или максимумами.

Малым шевелением потенциала в классе функций, инвариантных относительно вращения, можно добиться того, что образами неустойчивых положений равновесия при отображение момента

$$\mathcal{F}\colon T^*S^2 \mapsto \mathbb{R}^2(h,g),\ \mathcal{F}(x) = (H(x), G(x))$$

будут изолированные критические значения. С точки зрения теории интегрируемых гамильтоновых систем эти неустойчивые положения равновесия представляют собой особые точки типа фокус-фокус (см. [1]). Их образы при отображении момента назовем фокусными значениями.

Рассмотрим окружность γ в плоскости $\mathbb{R}^2(h,g)$, целиком лежащую в области регулярных значений отображения $\mathcal{F}$ и обходящую одно или два фокусных значения. Связная компонента прообраза $Q^3_\gamma = \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ будет 3-многообразием, которое является $\mathbb{T}^2$-расслоением над окружностью. Такой путь γ можно построить тогда и только тогда, когда потенциальная энергия $V(z)$ не имеет критических значений в промежутке $(V(-1), V(1))$.

Из результатов Т.З. Нгуена [2] следует, что если γ охватывает только одно фокусное значение (h_0, g_0), а особый слой $\mathcal{F}^{-1}(h_0, g_0)$ связен, то матрица монодромии этого расслоения полностью определяется числом неподвижных точек на слое.

Однако уже при обходе вокруг двух критических значений, матрица монодромии зависит, вообще говоря, не только от топологии особых слоев. В докладе будут приведены соответствующие примеры.

В работах [3, 4] найдены матрицы монодромии слоения Лиувилля для различных механических систем, инвариантных относительно вращения. При этом использовались переменные действие–угол, что требовало нетривиальных вычислений.

В докладе будет рассказан простой способ восстановления монодромии, основанный на качественном анализе графика потенциальной энергии.

Сформулируем основной результат.

Теорема 3 *Пусть потенциальная энергия $V(z)$ как функция на сфере $S^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ имеет в точках $\xi_\pm = (0, 0, \pm 1)$ локальные максимумы. Пусть γ – путь, целиком лежащий в области регулярных значений $\mathcal{F}$ и обходящий вокруг двух изолированных критических значений – образов точек $\xi_\pm$ при отображении $\mathcal{F}$. Тогда*

1) *если один из локальных максимумов $\xi_\pm$ является строгим глобальным максимумом, то многообразие Q^3_γ является $\mathbb{T}^2$-расслоением над окружностью с матрицей монодромии, сопряженной матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

2) *в противном случае, если глобальный максимум достигается при $|z| < 1$, многообразие Q^3_γ состоит из $n \geq 2$ связных*

компонент, являющихся $\mathbb{T}^2$-расслоениями над окружностью с матрицами монодромии $A_1, \ldots, A_n$, причем матрицы A_1 и A_n сопряжены матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а остальные A_i сопряжены единичной матрице.

Литература

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: УдГУ, 1999.

2. T. Z. Nguyen, A note on focus-focus singularities, Differential geometry and applications, 7 (1997), pp 123-120.

3. Efstathiou K. Metamorphoses of Hamiltonian Systems with Symmetries — Springer Berlin Heidelberg, 2005.

4. Kantonistova E.O. Integer lattices of the action variables for the generalized Lagrange case — Moscow University Mathematics Bulletin, 2012, Volume 67, Issue 1, pp 36-40

Условие Свиридюка – Загребиной в линейной модели Хоффа на геометрическом графе с аддитивным белым шумом

Е.А. Солдатова

(Челябинск, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет);*soldatova.katerina@gmail.com*)

В [1] впервые было рассмотрено линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW \tag{1}$$

с начальным условием Коши. Здесь операторы L, M, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, а оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Между тем было отмечено, что для уравнений соболевского типа более "естественным" (по сравнению с условием Коши) являются другие начальные условия, например условие Шоуолтера – Сидорова [2]. В [3] впервые была рассмотрена начально-конечная задача, ошибочно названная "задачей Веригина". Впоследствие ошибка, дезориентирующая многих исследователей, была исправлена. Начально-конечное условие

$$P_{in}(u(0) - u_0) = P_{fin}(u(\tau) - u_\tau) = 0, \ \tau \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где P_{in}, $P_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – относительно спектральные проекторы, было использовано во множестве случаев, имеющих прикладное значение (см. обзор [4]), и даже было применено в теории оптимального управления [5]. Поскольку условие (2) приобретает все большую популярность [6], то предлагается впредь именовать его "условием Свиридюка – Загребиной" ради купирования возможной путаницы.

Условия на L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M, гарантирующее существование проекторов P_{in} и P_{fin} мы обозначим символом (SZ). Заметим, что $P_{in} + P_{fin} = P$ – единица разрешающей группы однородного уравнения (1). Кроме того, (SZ) гарантирует существование проекторов Q_{in}, $Q_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, которые в сумме равны единице Q группы, порожденной однородным уравнением (1) на $\mathfrak{F}$.

В последнем слагаемом правой части (1) символом $W = W(t)$ обозначен $\mathfrak{F}$-значный K-винеровский процесс

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)\varphi_k, \ t \in \overline{\mathbb{R}_+},$$

где $\{\beta_k(t)\}$ – последовательность независимых броуновских движений, $\{\lambda_k\}$ – последовательность собственных значений самосопряженного и положительно определенного ядерного оператора $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – последовательность собственных векторов.

В дальнейшем считаем оператор M $(L,0)$-ограниченным, а также выполненным условие

$$QN = N. \tag{$*$}$$

Следуя идеологии [1], [4], выпишем "мягкое решение" (mild solution) задачи (1), (2)

$$u(t) = U^t_{in}u_0 + S_{in}\int_0^t U^{t-s}_{in}L^{-1}_{in}Q_{in}NW(s)ds + L^{-1}QNW(t)+$$

$$+U^{t-\tau}_{fin} + S_{fin}\int_\tau^t U^{t-s}_{fin}L^{-1}_{fin}Q_{fin}NW(s)ds - L^{-1}_{fin}Q_{fin}NW(\tau).$$

Теорема. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен и выполнены условия (SZ) и (*). Тогда для любых независимых друг от друга и от K-винеровского процесса W $\mathfrak{U}$-значных гауссовых случайных величин u_0 и u_τ существует единственное решение $u \in \mathbf{CL_2}$ задачи (1), (2).*

Пусть теперь $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V},\mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, причем каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. В вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ зададим условия "непрерывности" и "баланса потока" соответственно

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\sum_{j:E_j\in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{k:E_k\in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{4}$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $t \in \mathbb{R}$. Если граф состоит из одного нециклического ребра (т.е. вершин у графа две), то условие (3) отсутствует, а условие (4) превращается в условие Неймана. Если же ребро циклическое (т.е. вершина у графа одна), то условия (3),

(4) превращаются в условия согласования. Заметим еще, что в контексте условий (3), (4) "отсутствовать" не значит "быть равным нулю". Например, если в вершину V_i все ребра "входят", то первые два равенства в (3) и уменьшаемое в (4) именно "отсутствуют", а не равны нулю.

Теперь на графе $\mathbf{G}$ с условиями (3), (4) рассмотрим линейную стохастическую модель Хоффа

$$\lambda_j du_j + du_{jxx} = \alpha_j u_j dt + N_j dW_j, \qquad (5)$$

описывающую динамику выпучивания двутавровых балок, находящихся под постоянной нагрузкой в конструкции со случайным внешним воздействием. Здесь случайный процесс $u_j = u_j(x,t)$, $(x,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}$, характеризует отклонение j-той балки от положения равновесия; параметры $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ характеризуют нагрузку и свойства материала этой балки, $dW_j = dW_j(t)$ отвечает случайной нагрузке на j-ую балку (аддитивный белый шум).

Заметим, что впервые систематическое изучение дифференциальных уравнений на геометрических графах было начато воронежскими математиками [7]. Первые результаты об уравнениях соболевского типа на графах были опубликованы в [8]. Следуя идеологии [9], (3) – (5) удается редуцировать к (1), где оператор M $(L,0)$-ограничен, затем проверив условия (SZ) и (*) поставить задачу (2). Ссылка на теорему завершает доклад.

Литература

1. Загребина С.А., Солдатова Е.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. "Математика". – 2013. – Т.6, № 1. – С.20–34.

2. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоуолтера - Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. "Математика". – 2010. – Т.3, № 1. – С.104–125.

3. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т.38, № 12. – С.1646–1652.

4. Загребина С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2013. – Т.6, № 2. – С.5–24.

5. Манакова Н.А., Дыльков А.Г. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа // Мат. заметки. – 2013. – Т.94, № 2. – С. 225-–236.

6. Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2012. – №5 (264), вып. 11. – С.13–24.

7. Покорный Ю.В. Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

8. Свиридюк Г.А. Уравнения соболевского типа на графах// Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. тр. / отв. ред. А.И. Кожанов; Рос. Акад. наук, Сиб. отд-ние, ин-т математики им. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2002. – С.221-225.

9. Загребина С.А., Соловьева Н.П. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск, 2008. № 15 (115), вып. 1. С. 23-26.

О решениях задачи капиллярности

Л.В. Стенюхин
(Воронеж;*stenyuhin@mail.ru*)

Задача о симметрично лежащей малой капли, эквивалентная задаче капиллярности, описывается уравнением

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u\right) = Bu, \tag{1}$$

$u = u(x,y)$ – функция высоты поверхности над уровнем основания, $B = \frac{\rho g a^2}{\sigma}$ – число Бонда, характеризующее размер капли, ρ – плотность, σ – поверхностное натяжение, a – радиус основания.

Граничное условие задачи –

$$\overline{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u\right)=\cos\gamma, \tag{2}$$

$\overline{n}$ – нормаль к поверхности, γ – угол контакта поверхности с границей; значение функции u на границе области равно нулю.

Аппроксимационно-аналитические решения задачи в различных условиях и при малых значениях числа Бонда приведены в [1]. Если число Бонда нарастает, то сходимость разложений нарушается или расходится с эксперементальными данными. Увеличение числа возможно за счёт увеличения давления или температуры, то есть некоторого потенциала φ. Для больших чисел Бонда задача остаётся открытой.

В [2] получена следующая

Теорема 1 *Если $B=\cos\gamma_0\equiv\cos\gamma+\frac{\varphi}{\sigma}$, то существует точное аналитическое решение задачи (1) – (2) вида*

$$u(r)=\frac{-\cos\gamma_0+\sqrt{1-(r-r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}, \tag{3}$$

r_0 – радиус кольца.

В настоящее время получены условия других состояний капли.

1. Если

$$\left|\frac{\cos\gamma_0}{B}-1\right|<\frac{\sqrt{r^2-1}}{Br},$$

то не существует кольцеобразного состояния.

2. Если

$$\left|\frac{\cos\gamma_0}{B}-1\right|=\frac{\sqrt{r^2-1}}{Br},$$

то существует единственное r_0 и следовательно одно кольцо.

3. Если

$$\left|\frac{\cos\gamma_0}{B}-1\right|>\frac{\sqrt{r^2-1}}{Br},$$

то существуею два $r_{01},\ r_{02}$ и следовательно два кольца.

Литература

1. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория (Мир, М., 1989) 2. Стенюхин Л.В. Об особых решениях задачи капиллярности с круговой симметрией (Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. С. 242 - 245)

Плоское напряженное состояние упругого цилиндра

Т.Н. Стородубцева, С.С. Веневитина, А.И. Томилин
(Воронеж, Воронежская государственная лесотехническая академия; *tamara-tns@yandex.ru*)

Проектирование и расчет напряженно-деформированного состояния упругих и пластических цилиндров является актуальной научно-технической задачей. Цилиндр является одним из главных элементов подшипников скольжения, используемых в машинах лесной и деревообрабатывающей промышленности. При полярно-симметричном плоском напряженном состоянии упругого цилиндра имеем систему [1]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0, \tag{2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \tag{3}$$

Закон Гука для упругого цилиндра необходимо записать в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma_0 &= 2\sigma\left(\varepsilon_r - \varepsilon_0\right), \\ \sigma_\theta - \sigma_0 &= 2\sigma\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_0\right), \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2\sigma\left(\varepsilon_z - \varepsilon_0\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Объемный закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3k}, \varepsilon_0 = \frac{(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)}{3}, \sigma_0 = \frac{(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)}{3}. \tag{5}$$

$$\sigma_r - \sigma_0 = \frac{2}{3}\sigma_r - \frac{\sigma_\theta}{3} - \frac{\sigma_z}{3},$$
$$\sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{2}{3}\sigma_\theta - \frac{\sigma_r}{3} - \frac{\sigma_z}{3}, \qquad (6)$$
$$\sigma_z - \sigma_0 = \frac{2}{3}\sigma_z - \frac{\sigma_r}{3} - \frac{\sigma_\theta}{3}.$$
$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_r - \frac{\varepsilon_\theta}{3} - \frac{\varepsilon_z}{3},$$
$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_\theta - \frac{\varepsilon_r}{3} - \frac{\varepsilon_z}{3}, \qquad (7)$$
$$\varepsilon_z - \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_z - \frac{\varepsilon_\theta}{3} - \frac{\varepsilon_r}{3}.$$

Подставим соотношения (6) и (7) в закон Гука [4]:

$$2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z = 2\sigma\left(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \varepsilon_z\right), \qquad (8)$$

$$2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z = 2\sigma\left(2\varepsilon_\theta - \varepsilon_r - \varepsilon_z\right), \qquad (9)$$

$$2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma\left(2\varepsilon_z - \varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right), \qquad (10)$$

$$\sigma_\theta = 2\sigma_r - \sigma_z - 2\sigma\left(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \varepsilon_z\right), \qquad (11)$$

$$2\left[2\sigma_r - \sigma_z - 2\sigma\left(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \varepsilon_z\right)\right] - \sigma_r - \sigma_z = 2\sigma\left(2\varepsilon_\theta - \varepsilon_r - \varepsilon_z\right), \qquad (12)$$

$$3\sigma_r - 3\sigma_z = 2\sigma\left(3\varepsilon_r - \varepsilon_z\right), \sigma_r - \sigma_z = 2\sigma\left(\varepsilon_r - \varepsilon_z\right), \qquad (13)$$

$$\sigma_\theta = 2\sigma_r - \sigma_z - 2\sigma\left(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \varepsilon_z\right) = 2\sigma\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z\right), \qquad (14)$$

$$\sigma_r = \sigma_z + 2\sigma\left(\varepsilon_r - \varepsilon_z\right), \sigma_\theta = \sigma_z + 2\sigma\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z\right). \qquad (15)$$

Подставим соотношения (15) в формулу (10):

$$2\sigma_z - \sigma_z - 2\sigma\left(\varepsilon_r - \varepsilon_z\right) - \sigma_z - 2\sigma\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z\right) = 2\sigma\left(2\varepsilon_z - \varepsilon_\theta - \varepsilon_r\right), \qquad (16)$$

$$-2\sigma\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta - 2\varepsilon_z\right) = 2\sigma\left(2\varepsilon_z - \varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right). \qquad (17)$$

Таким образом, при выполнении соотношения (15) уравнение (10) выполняется автоматически.

В случае плоского напряженного состояния:

$$\sigma_z = 0. \qquad (18)$$

Рассмотрим частный случай несжимаемого упругого материала [1]:

$$\mu = \frac{1}{2}, k = \infty. \tag{19}$$

Объемный закон Гука (5) примет следующий вид:

$$\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0, \varepsilon_z = -\varepsilon_\theta - \varepsilon_z. \tag{20}$$

Воспользуемся уравнением совместности деформаций (2)

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0, \tag{21}$$

$$2r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + r^2\frac{d^2 r}{dr^2} + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{c_1}{r_3}, \varepsilon_\theta = -\frac{2c_1}{r^2} + c_2, \tag{24}$$

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta - \varepsilon_z = \frac{2c_1}{r^2} - c_2 - \varepsilon_r. \tag{25}$$

Используем теперь соотношения Коши (3):

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = -\frac{2c_1}{r^2} + c_2, \varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{2c_1}{r^2} - c_2 - \varepsilon_z, \tag{26}$$

$$u\left(r\right) = -\frac{2c_1}{r} + c_2 r, u\left(r\right) = -\frac{2c_1}{r} - c_2 r - \varepsilon_z r. \tag{27}$$

Чтобы радиальное перемещение было однозначным, необходимо положить:

$$A_2 = -A_2 - \varepsilon_z, \varepsilon_z = -2c_2, \tag{28}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{2c_1}{r^2} + c_2, \varepsilon_z = \frac{2c_1}{r^2} + c_2. \tag{29}$$

Проверим выполнение условия несжимаемости (20):

$$-\frac{2c_1}{r^2} + c_2 + \frac{2c_1}{r^2} + c_2 + \varepsilon_z = 0, \tag{30}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_z = \frac{2c_1}{r^2} + c_2 - \varepsilon_z = \frac{2c_1}{r^2} + 3c_2, \tag{31}$$

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_z = -\frac{2c_1}{r^2} + c_2 - \varepsilon_z = -\frac{2c_1}{r^2} + 3c_2. \tag{32}$$

Напряжения определим по следующим формулам

$$\sigma_r = \sigma_z + 2\sigma\left(\frac{2c_1}{r^2} + 3c_2\right) = 2\sigma\left(\frac{2c_1}{r^2} + 3c_2\right), \tag{33}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_z + 2\sigma\left(-\frac{2c_1}{r^2} + 3c_2\right) = 2\sigma\left(-\frac{2c_1}{r^2} + 3c_2\right). \tag{34}$$

Подставим напряжения (33) и (34) в уравнение равновесия [1]:

$$r\left[-\frac{4c_1}{r^3}\right] + \frac{4c_1}{r^2} = 0. \tag{35}$$

Формулы (27), (29), (33) и (34) определяют однозначные напряжения, деформации и перемещение.

Используем граничные условия:

$$\sigma_r\left(r = r_1\right) = -p, \sigma_r\left(r = r_2\right) = -q \tag{36}$$

$$\frac{2c_1}{r_1^2} + 3c_2 = -\frac{p}{2\sigma}, \tag{37}$$

$$\frac{2c_1}{r_2^2} + 3c_2 = -\frac{q}{2\sigma}, \tag{38}$$

$$2c_1\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = \frac{(p-q)}{2\sigma}, \tag{39}$$

$$c_1 = \frac{r_1^2 r_2^2\left(p-q\right)}{4\sigma\left(r_1^2 - r_2^2\right)}, \tag{40}$$

$$3c_2 = -\frac{p}{2\sigma} - \frac{2c_1}{r_1^2}, c_2 = -\frac{p}{6\sigma} - \frac{c_1}{3r_1^2}. \tag{41}$$

Рассмотрим теперь алгоритм решения данной задачи в перемещениях, изложенный в учебнике [2].

Закон Гука в случае плоского напряженного состояния следует записать в следующем виде [2]:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z\right], \tag{42}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z\right], \tag{43}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta\right]. \tag{44}$$

Из соотношения (44) следует:

$$\varepsilon_z = -\mu\left(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right). \tag{45}$$

В случае несжимаемого материала:

$$\sigma_r = \frac{4E}{3}\left[\varepsilon_r + \frac{\varepsilon_\theta}{2} + \frac{\varepsilon_z}{2}\right], \tag{46}$$

$$\sigma_\theta = \frac{4E}{3}\left[\varepsilon_\theta + \frac{\varepsilon_r}{2} + \frac{\varepsilon_z}{2}\right], \tag{47}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right), \tag{48}$$

$$\sigma_z = \frac{4E}{3}\left[\frac{3}{4}\varepsilon_r + \frac{1}{2}\varepsilon_\theta\right] = \frac{E}{3}\left(3\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right), \tag{49}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{3}\left(3\varepsilon_\theta + \varepsilon_r\right). \tag{50}$$

Необходимо удовлетворить условию несжимаемости:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \tag{51}$$

Используем соотношение (48)

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right) = 0, \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0. \tag{52}$$

Используем теперь соотношение Коши (3):

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0, u\left(r\right) = \frac{A}{r}, \tag{53}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{A}{r^2}, \varepsilon_\theta = \frac{A}{r^2}. \quad (54)$$

Напряжения σ_r и σ_θ необходимо по формулам (49) и (50):

$$\sigma_r = \frac{E}{3}\left[-\frac{2A}{r^2}\right] = -\frac{2}{3}\frac{EA}{r^2}, \quad (55)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{3}\left[\frac{2A}{r^2}\right] = \frac{2}{3}\frac{EA}{r^2}. \quad (56)$$

Напряжения (55) и (56) удовлетворяют уравнению равновесия (1), но напряжение σ_r содержит только одну константу A, что не позволяет удовлетворить граничным условиям (36).

Таким образом, способ решения задачи расчета упругого цилиндра из несжимаемого материала в случае плоского напряженного состояния, изложенного в учебнике по сопротивлению материалов неприемлем. В случае динамической задачи, решение данной задачи в напряжениях невозможно ввиду наличия сил инерции, невозможности введения потенциала напряжений. Необходимо использовать в случае плоского напряженного состояния решение, полученное в данной работе с учетом уравнения совместности деформаций в форме (2).

Методы и общие решения задачи расчета на прочность, длительную прочность и пластичность цилиндрических валов и труб могут быть внедрены в различных научно-исследовательских институтах, а также в учебном процессе в курсах сопротивления материалов, строительной механики и теории сооружений.

Литература

1. Варданян, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М., 1995. – 568 с.

2. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко. - Киев, «Высшая школа», 1974. – 672 с.

О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций нескольких переменных

И.И. Струкова
(Воронеж, Воронежский государственный университет;
irina.k.post@yandex.ru)

Пусть X – комплексное банахово пространство, $End\ X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, и положим $|x| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |x_i|$. Множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами будем называть *целочисленной решеткой* в $\mathbb{R}^N$, элементы $\mathbb{Z}^N$ будем обозначать через $n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ и положим $|n| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |n_i|$.

Символом $C_b = C_b(\mathbb{R}^N, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^N$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ – замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{R}^N, X)$ – замкнутое подпространство убывающих на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R}^N \to End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ операторов, действующих по правилу $(S(h)f)(x) = f(x + h) = f(x_1 + h_1, ..., x_N + h_N),\ \ x, h \in \mathbb{R}^N$.

Наряду с группой сдвигов S рассмотрим группы сдвигов $S_i : \mathbb{R} \to End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, $i = \overline{1, N}$, определенные формулой $(S_i(h)f)(x) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_N)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $h \in \mathbb{R}$.

Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(h)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$ для любого $h \in \mathbb{R}^N$.

Пусть $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N) \in \mathbb{R}^N_+$. Тогда символом Ω^N обозначим N-мерный параллелепипед $\Omega^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\omega_i/2 < x_i \leq \omega_i/2,\ i = 1, 2, ..., N\}$. Символом $\omega\mathbb{Z}^N$ обозначим подгруппу $\mathbb{R}^N$, состоящую из элементов вида $(n_1\omega_1, ..., n_N\omega_N)$, где $\omega \in \mathbb{R}^N_+$, $n \in \mathbb{Z}^N$.

Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N) \in \mathbb{R}^N_+$ *($\omega-$периодической на бесконечности)*, если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ выполнено условие $(S(\alpha)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

В [1] было введено понятие почти периодической на бесконечности функции и получены критерии почти периодичности на бесконечности решений дифференциальных уравнений.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, а множество периодических на бесконечности периода ω функций – символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$.

Рассмотрим функции $e_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ вида $e_n(x) = e^{i2\pi(\frac{n_1}{\omega_1}x_1 + ... + \frac{n_N}{\omega_N}x_N)}$, $n \in \mathbb{Z}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Каноническим рядом Фурье функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ будем называть ряд вида $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} f_n(x)e_n(x),\ x \in \mathbb{R}^N$, где функции $f_n : \mathbb{R}^N \to X$, $n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулами

$$f_n(x) = \frac{1}{\omega_1...\omega_N}\int_{\Omega^N} f(x+\tau)e_{-n}(x+\tau)d\tau,\ x \in \mathbb{R}^N,\ n \in \mathbb{Z}^N, \quad (1)$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции f.

Обобщенным рядом Фурье функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} y_n(x)e_n(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

где $y_n,\ n \in \mathbb{Z}^N$, – такие функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, для которых $y_n - f_n \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$, а функции $f_n,\ n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулой (1).

Отметим, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X),\ n \in \mathbb{Z}^N$.

Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье $f(x) \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} y_n(x)e_n(x),\ x \in \mathbb{R}^N$, функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ *сходится к*

f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, если существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} y_k(x)e_k(x) + f_n^0(x)\| = 0.$$

Будем говорить, что функция $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ имеет *абсолютно сходящийся ряд Фурье,* если существует обобщенный ряд Фурье (2) этой функции, такой, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} \|y_n\| < \infty$.

Если X – банахова алгебра, то функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, имеющие абсолютно сходящийся ряд Фурье, образуют замкнутую подалгебру в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, обозначаемую символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$.

Одним из основных результатов является теорема 2, в которой следующая теорема Н. Винера распространяется на функции из $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$.

Теорема 1. *Если функция $f \in A_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ обладает свойством $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то функция $1/f$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Пусть X – банахова алгебра с единицей e. Функцию $f \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$* (или *обратимой на бесконечности*), если существует функция $g \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$, такая, что $fg - e, gf - e \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где $e(x) \equiv e,\ x \in \mathbb{R}^N$. Функцию g будем называть *обратной к f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$.*

Отметим, что если g_1, g_2 – обратные к $f \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ функции, то $g_1 - g_2 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Теорема 2. *Пусть X – банахова алгебра с единицей. Если функция $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Аналогичный результат был получен в [2] для функций из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Для каждого $i \in \{1, ..., N\}$ рассмотрим последовательность операторов $(A_n^{(i)})$ из $End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ следующего вида $A_n^{(i)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} S_i(k\omega_i),\ n \geq 1$. Отметим, что $\|A_n^{(i)}\| = 1,\ n \geq 1,\ i = \overline{1, N}$.

Далее, рассмотрим последовательность операторов (A_n) из $End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ вида $A_n = A_n^{(1)} \cdot ... \cdot A_n^{(N)},\ n \geq 1$. Отметим, что $\|A_n\| = 1,\ n \geq 1$.

Получен следующий критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей на бесконечности функций:

Теорема 3. *Для того, чтобы функция* $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ *была представима в виде* $f = f_1 + f_0$, *где* $f_1 \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, *необходимо и достаточно, чтобы в* $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ *существовал* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n f$.

Литература

1. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений – УМН, **68** (2013), № 1, стр. 77–128.

2. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций – Изв. Сарат. Унив. Нов. Сер. Матем. Мех. Инф., **12** (2012), № 4, стр. 34–41.

Обратимые динамические системы

А.В. Субботин, Ю.П. Вирченко
(Белгород, Белгородский государственный университет,
virch@bsu.edu.ru)

В работе определяются динамические системы, которые в качественном отношении ведут себя подобно гамильтоновым. Изучается возможность аналитического описания класса таких систем на основе такого свойства спектрального разложения генераторов инфинитизимального сдвига, которое характерно для гамильтоновых систем и которое является следствием обратимости их движения. Вводимые в рассмотрение системы названы *обратимыми*. Класс таких систем существенно шире чем класс гамильтоновых систем. Вместе с тем, с физической точки зрения, они являются бездисспативными. Такого рода системы могут быть использованы при построении систем неравновесной термодинамики, у которых пренебрежение диссипацией в уравнениях движения в общем случае не обязано приводить к гамильтоновым системам.

Пусть
$$\dot{\boldsymbol{P}} = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \boldsymbol{Q}}\,, \quad \dot{\boldsymbol{Q}} = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \boldsymbol{P}}\,, \tag{1}$$
— автономная гамильтонова система с n степенями свободы, $\boldsymbol{P} = \langle p_1, ..., p_n\rangle$, $\boldsymbol{Q} = \langle q_1, ..., q_n\rangle$, порождаемая гамильтонианом H.

Для системы (1) в каждой точке ее фазового пространства построим линейную *касательную* гамильтонову систему
$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{P}} \\ \dot{\boldsymbol{Q}} \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$
получаемую линеаризацией системы (1) в этой точке. Эта система также является автономной, т.е. представляет собой линейную систему из $2n$ уравнений с постоянными коэффициентами. Она определяется гамильтонианом в виде квадратичной формы от пары n-векторов $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$:
$$\mathsf{H}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) + (\boldsymbol{P}, \mathcal{B}\boldsymbol{Q}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q}, \mathcal{C}\boldsymbol{Q})\,, \tag{2}$$
где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – $n \times n$-матрицы такие, что $\mathcal{A}^{\mathrm{T}} = \mathcal{A}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}$ и $\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{B} \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{C}) = 0$ (в противном случае, система имеет меньшее число степеней свободы). Матрица матрица $\mathcal{G}$ – генератор группы сдвигов по t касательной системы, имеет вид
$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^{\mathrm{T}} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}. \tag{3}$$
Матрицы такого типа, в дальнейшем, будем называть *гамильтоновыми матрицами* с n степенями свободы.

Пусть $\mathcal{G}$ – произвольная гамильтонова $2n \times 2n$-матрица в канонической форме (3). Запишем ее *жорданово спектральное разложение* в следующем виде:

$$\mathcal{G} = \sum_{k=1}^{\nu}(\lambda_k \Theta^{(k)} + \mathcal{N}_k)\,, \tag{4}$$

где $\Theta^{(k)}$ – проекторы на *корневые пространства* матрицы $\mathcal{G}$. Эти проекторы независимы друг от друга $\Theta^{(j)}\Theta^{(k)} = \delta_{jk}\Theta^{(k)}$, $j,k = 1 \div \nu$ и составляют полный набор так, что $\sum_{k=1}^{\nu} \Theta^{(k)} = \mathbf{1}$. Обозначим посредством s_k, $k = 1 \div \nu$ их размерности. Тогда имеет место равенство $\sum_{k=1}^{\nu} s_k = 2n$.

В разложении (4) числа λ_k являются собственными числами матрицы $\mathcal{G}$, каждое из которых соответствует своему проектору $\Theta^{(k)}$. Это означает, что в пространстве $\mathfrak{D}_k = \Theta^{(k)}\mathbb{R}^{2n}$ имеется ровно один собственный вектор $\mathbf{e}_k$ и для этого вектора выполняется $\mathcal{G}\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$, $k = 1 \div \nu$. При этом, для каждого значения $k = 1 \div \nu$, $\mathcal{N}_k$ есть нильпотентная матрица, соответствующая проектору $\Theta^{(k)}$ так, что $\mathcal{N}_k\Theta^{(k)} = \Theta^{(k)}\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_k$, и ее индекс s_k равен размерности s_k пространства $\mathfrak{D}_k$. Это означает, что имеет место $\mathcal{N}_k^{s_k} = 0$, но $\mathcal{N}_k^{s_k - 1} \neq 0$. Для совокупности всех нильпотентных матриц, входящих в разложение (1), точно также как и для совокупности соответствующих проекторов, имеет место $\mathcal{N}_j\mathcal{N}_k = \mathbf{0}$ при $j \neq k$; $j,k = 1 \div \nu$. Описанные свойства проекторов и соответствующих им нильпотентных добавок устанавливаются посредством явного вычисления проекторов $\Theta^{(k)}$, их размерностей s_k и соответствующих им нильпотентных матриц $\mathcal{N}_k$ из явного вида матрицы $\mathcal{G}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{G}$ — гамильтонова матрица. Проекторы и нильпотентные матрицы, входящие в ее спектральном разложении в форме (4), можно разбить на три класса:*

1. $\Theta_k^{(+)}, \mathcal{N}_k^{(+)}$, $k = 1 \div l$;
2. $\Theta_k^{(k)}, \mathcal{N}_k^{(-)}$, $k = 1 \div l$;
3. $\Theta_k^{(0)}, \mathcal{N}_k^{(0)}$, $k = 1 \div \nu - 2l$

таким образом, что размерности $s_k^{(+)}$, $s_k^{(-)}$ *проекторов* $\Theta_k^{(+)}$ *и* $\Theta_k^{(-)}$ *совпадают и соответствующие им собственные числа* $\lambda_k^{(\pm)}$ *связаны соотношениями* $\lambda_k^{(+)} = -\lambda_k^{(-)}$, $k = 1 \div l$*; размерности* $s_k^{(0)}$ *проекторов* $\Theta_k^{(0)}$ *— четные, а собственные числа, соответствующие проекторам* $\Theta_k^{(0)}$*, равны нулю так, что*

$$\sum_{k=1}^{l} 2s_k^{(+)} + \sum_{k=1}^{\nu-2l} s_k^{(0)} = 2n\,.$$

Спектральное разложение (4), у которого матрицы Θ_k и $\mathcal{N}_k$ обладают свойствами, утверждаемыми теоремой 1, мы называем симметричным. Таким образом, генератор сдвига по времени $\mathcal{G}$ каждой линейной гамильтоновой системы и, следовательно, любой касательной системы для каждой гамильтоновой системы обладает симметричным спектральным разложением.

В связи с доказанной теоремой вводятся следующие определения.

Определение 1. *Если четномерная система дифференциальных уравнений*

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \mathsf{F}(\boldsymbol{X}) \tag{5}$$

размерности $2n$*, посредством некоторого диффеоморфизма* $\mathsf{S} : \Omega \mapsto \Omega$*, переводится в гамильтонову систему*

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \mathsf{F}_j(\mathsf{S}(\boldsymbol{Y})) \equiv (\mathcal{J}\nabla)\,\mathsf{H}(\boldsymbol{Y})\,, \quad \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \neq 0, \quad i = 1 \div 2n\,, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{X} = \mathsf{S}(\boldsymbol{Y})$*, то ее мы будем называть обратимой.*

В общем случае, для каждой обратимой системы должна существовать пара: диффеоморфизм $\mathsf{S} : \Omega \mapsto \Omega$ и гамильтониан $\mathsf{H} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ такие, что отображение $\mathsf{F} : \Omega \mapsto \Omega$ удовлетворяет уравнению

$$F_i(\mathsf{S}(\boldsymbol{Y})) = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial \mathsf{S}_i(\boldsymbol{Y})}{\partial y_j}\right) \mathcal{J}_{jk} \nabla_k \mathsf{H}(\boldsymbol{Y})\,, \quad i = 1 \div 2n\,.$$

Определение 2. *Если система (5) такова, что каждая ее касательная система в любой точке фазового пространства обладает генератором сдвига по времени, обладающим симметричным спектральным разложением, то такую систему мы будем называть спектрально-обратимой.*

Положим, что система (5) является обратимой и пусть система

$$\dot{\bar{x}}_i = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial \mathsf{F}_i(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \right) \bar{x}_j \,, \qquad i = 1 \div 2n$$

является для нее касательной. Тогда система

$$\dot{\bar{y}}_i = \sum_{j,k,l=1}^{2n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \mathsf{F}_j(\boldsymbol{X})}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_l} \right) \bar{y}_l \,, \qquad i = 1 \div 2n \,,$$

является касательной для гамильтоновой системы (6). Ее гамильтонова матрица $\mathcal{G}$ в каждой точке фазового пространства представляется формулой

$$\mathcal{G} = \mathcal{U}^{-1} \left(\frac{\partial \mathsf{F}_i(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \right) \mathcal{U} \,.$$

Следовательно, спектральное разложение матрицы $\partial \mathsf{F}_i(\boldsymbol{X})/\partial x_j$ инфинитизимального сдвига касательной системы для системы (1) симметрично, так как любое преобразование $\mathcal{U}(\cdot)\mathcal{U}^{-1}$ на основе неособенной матрицы $\mathcal{U}$ переводит симметричное спектральное разложение снова в симметричное спектральное разложение. Следовательно, каждая спектрально-обратимая система является обратимой и класс обратимых систем оказывается более широким.

Литература

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2013. – 5(148);30. – С.135-141.

Об определение опорных коэффициентов уравнения голоморфно-однородной поверхности в $\mathbb{C}^3$

В.И. Суковых
(*sukovyh@gmail.com*)

Рассмотрим локальное нормальное уравнение (см. [1])

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \sum_{k+l+2m\geq 4} N_{klm}(z,\bar{z})u^m. \tag{1}$$

голоморфно-однородной вещественной СПВ-гиперповерхности $M \in \mathbb{C}^3$. В [2] показано, что такая поверхность однозначно определяется *опорным* набором многочленов

$$N_{220}, N_{320}, N_{221}, N_{420}, N_{330}, N_{321}, N_{222}. \tag{2}$$

Набор (2) описывается более чем 80 вещественными коэффициентами, но это не означает, что таким же большим является семейство голоморфно-различных однородных поверхностей в $\mathbb{C}^3$. Эти коэффициенты, а также остальные слагаемые из уравнения (1) связываются (в случае однородной поверхности) большим количеством взаимных ограничений.

Для одного специального вида многочлена

$$N_{220} = |z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4 \tag{3}$$

мы изучаем два таких ограничивающих условия, выписанные в [2]. Это

$$(g_0h'_{22} - g'_0h_{22}) + 2Re\{\partial h_{22}(f_1)\} + 2Re\{\partial h_{32}(f_0)\}_{\mathcal{N}} \equiv 0 \tag{4}$$

и

$$\begin{gathered}(g_0h'_{32} - g'_0h_{32}) + \{\partial h_{22}(f_2^*)\}_{\mathcal{N}} + \{\partial h_{42}(f_0)\}_{\mathcal{N}} + \\ +(2i < z, f'_0 > h_{22} - 2i < z, z > \bar{\partial}h_{22}(\bar{f}'_0)) + \\ +(i < z, f_0 > h'_{22} - i < z, z > \bar{\partial}h'_{22}(\bar{f}_0)) + \\ +\{\bar{\partial}h_{33}(\bar{f}_0)\}_{\mathcal{N}} + (\partial h_{32}(f_1) + \bar{\partial}h_{32}(\bar{f}_1)) \equiv 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $< z, z >= |z_1|^2 + |z_2|^2$ - форма Леви поверхности M, $h_{kl} = h_{kl}(z, \bar{z}, u) = \sum_m N_{klm}(z, \bar{z})u^m$;

$\mathcal{N}$ - специальное подпространство пространства вещественнозначных степенных рядов от переменных $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, u \in \mathbb{R}$ (определяемое в [1] в терминах лишь переменных $z, \bar{z}$);

f, g - компоненты произвольного голоморфного векторного поля $Z = f(z, w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z, w)\frac{\partial}{\partial w}$, касательного к обсуждаемой поверхности.

Эти компоненты разлагаются в ряды по степеням переменной z, и индексы у f, g означают степени соответствующих слагаемых из таких разложений. Верхний штрих в (4) и (5) означает дифференцирование по переменной w (или, что то же самое, по u).

Мы обсуждаем тождества (4) и (5) при дополнительном ограничении $u = 0$. В связи с этим обозначим

$$f_{0|u=0} = p \in \mathbb{C}^2,\ f'_{0|u=0} = a \in \mathbb{C}^2,\ g_{0|u=0} = q \in \mathbb{R},\ g'_{0|u=0} = r \in \mathbb{R};$$

При этом (4) превращается в

$$(qN_{221} - rN_{220}) + 2Re\{\partial N_{220}(f_1(0))\} + 2Re\{\partial N_{320}(p)\}_{\mathcal{N}} \equiv 0, \quad (6)$$

(в соответствии с [3] здесь подразумевается зависимость $f_1(0)$ от 5 вещественных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_2$) и аналогично преобразуется более сложное тождество (5).

Напомним, что левые части обоих тождеств (4) и (5) принадлежат пространству $\mathcal{N}$; вещественные размерности (2,2,0)- и (3,2,0)-компонент этих пространств равны, соответственно, 5 и 20.

Теорема 1. *Из двух компонент тождества (6) определяются 4 комплексных коэффициента многочлена N_{320} и два вещественных коэффициента многочлена N_{221}:*

$$\omega_3 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_{10} = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad (7)$$

из трех оставшихся (2,2,0)-уравнений выражаются три параметра

$$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = \frac{1}{4}\, Re\, ((-w_2 + 2\, w_{12})\, p_1 + (w_{11} - 2\, w_1)\, p_2) - \frac{1}{6}\, \lambda_3 q,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4}\, Im\left((w_2 + 2\, w_{12})\, p_1 + (w_{11} + 2\, w_1)\, p_2\right) + \frac{1}{6}\, \lambda_4 q$$

любого векторного поля, касательного к однородной поверхности M.

Предложение 1. *Если в уравнении (1), (7) однородной поверхности M хотя бы два из четырех коэффициентов $\omega_1, \omega_2, \omega_{11}, \omega_{12}$ отличны от нуля, то алгебра голоморфных векторных полей на этой поверхности является в точности 5-мерной.*

При этом, например, при

$$\omega_1 \neq 0, \quad \omega_{12} \neq 0 \tag{8}$$

из 6 вещественных уравнений, отвечающих тождеству (5) при $u = 0$, выражаются два комплексных (a) и два вещественных (α_2, δ_2) параметра векторных полей. Оставшиеся 14 вещественных компонент этого тождества содержат лишь свободные параметры p_1, p_2, q. Это означает выполнение совокупности $70 = 14 \times 5$ условий на коэффициенты опорного набора (2).

Теорема 2. *Из 70 условий 12 дублируются другими уравнениями; еще 38 уравнений (из 70) позволяют удалить из опорного набора 38 вещественных коэффициентов, выразив их через другие коэффициенты; оставшаяся часть 70 вещественных условий представляется в виде системы из 10 комплексных полиномиальных уравнений 4-й степени относительно уменьшенного набора из 35 опорных коэффициентов.*

Простейшие из решений 38 упомянутых уравнений, а также одно из полиномиальных уравнений, полученных с помощью пакета Maple, приведены ниже (s_j - комплексные коэффициенты многочлена N_{420}):

$$s_3 = \frac{\omega_2^2}{16},\ s_{13} = \frac{\omega_{11}^2}{16},\ s_6 = -\frac{\omega_2\omega_9}{16},\ s_{10} = -\frac{\omega_4\omega_{11}}{16};$$

$$-24\omega_1\omega_2\omega_4\omega_9 + 120\, {\omega_2}^2{\omega_4}^2 - 36\, {\omega_2}^2\omega_4\omega_{12} + 45\, {\omega_2}^2\omega_9\omega_{11} + 20\, \omega_2\omega_4{\omega_9}^2 +$$
$$+576\, s_1\omega_2\omega_4 + 96\, s_2\omega_4\omega_9 - 216\, s_5\omega_2\omega_4 + 72\, s_8\omega_2\omega_9 - 72\, s_{12}\omega_2\omega_9 = 0.$$

Литература

1. Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math., 133, N 3 . 1974. P. 219 - 271.

2. Лобода А.В. Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения. // Матем. заметки, Т. 73, N 3, 2003. С. 419 - 423

3. Лобода А.В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с 2-мерными группапми изотропии //"Матем. сборник 2001, Т. 192, N 12, С. 3 - 24.

Определение типов особенностей отображения момента при помощи бигамильтоновой структуры на примере волчка Лагранжа

М.А. Тужилин

Введение

В статье продемонстрирован новый подход к задаче об описании особенностей отображения момента для волчка Лагранжа. Ранее полученные результаты, находятся с помощью бигамильтоновой структуры. Приводится простой и удобный способ нахождения особых точек и определения их типа.

Волчок Лагранжа - это специальный случай задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Этот случай характеризуется тем, что два из трех моментов инерции совпадают и неподвижная точка лежит на оси динамической симметрии.

Предварительные сведения и утверждения

Волчок Лагранжа - это интегрируемая система со скобкой P и гамильтонианом

$$H_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + ax_3, \qquad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

тогда имеется дополнительный интеграл $H_1 = J_3$. Векторное поле PdH_2 можно переписать в виде $(P + \lambda P')dH^\lambda$, где $H^\lambda = (1 - \frac{\lambda}{2})(H_2 - a\lambda H_1) + C_2$, а P' - скобка, согласованная с P имеющая вид

$$
P' = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)
$$

Таким образом, мы получаем пучок скобок $P_\lambda = P + \lambda P'$. Скобка P при фиксированном λ имеет две функции Казимира

$$
H_1(\lambda) = C_1, \qquad H_2(\lambda) = a\lambda^2 H_1 - \lambda H_2 + 2C_2.
$$

Утверждение 1 (о ранге скобки пучка)
Рассмотрим на $e(3)^*$ скобку P_λ, при фиксированном $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, тогда

$\operatorname{rank}(P_\lambda) < 4$ *тогда и только тогда, когда*

$$
\text{либо} \begin{cases} x_1 &= \lambda J_1 \\ x_2 &= \lambda J_2 \\ x_3 &= \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \end{cases}, \qquad \text{либо} \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases}. \qquad (2)
$$

В случае, когда вектор x равен 0, ранг скобки P меньше 4. Такие точки мы не рассматриваем, так как изучаем отображение момента на регулярном симплектическом листе.

Разделим полученные условия на случаи, когда для соответствующих точек (x, J) существует единственное значение λ, для которого ранг P_λ падает, когда существует два действительных значения λ, а когда два комплексных. Во всех этих трех случаях типы соответствующих точек будут различаться. Таким образом, получаем

Следствие 1
$\mathrm{rank}(P_\lambda)$ *падает тогда и только тогда, когда*

$$\textit{либо}\begin{cases} x_1 = \lambda J_1 \\ x_2 = \lambda J_2 \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \end{cases} \qquad \textit{\textbf{(5)} при } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\textit{либо}\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0 \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \\ J_3^2 - 2ax_3 > 0 \end{cases} \qquad \textit{\textbf{(6)} при } \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{R},$$

$$\textit{либо}\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0 \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \\ J_3^2 - 2ax_3 < 0 \end{cases} \qquad \textit{\textbf{(7)} при } \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{C},$$

$$\textit{либо}\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0 \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \\ J_3^2 - 2ax_3 = 0 \end{cases} \qquad \textit{\textbf{(8)} при } \lambda = \frac{J_3}{a} \in \mathbb{R}.$$

Это следствие дает представление о множестве особых точек нашей системы. Точки, перечисленные в *следствии 3* - это в точности множество особых точек отображения момента.

Основная теорема

Теорема 1 (Классификация особенностей отображения момента для волчка Лагранжа) *Пусть дана интегрируемая система, задаваемая функциями Казимира* (9)*, скобкой* P (1)*, гамильтонианом* H_2 *и дополнительным интегралом* H_1 (10)*. Тогда особыми точками отображения момента являются точки, перечисленные в* **(5)**, **(6)**, **(7)**, **(8)**, *причем*

(5) ***имеют эллиптический тип***

(6) ***имеют тип центр-центр***

(7) ***имеют тип фокус-фокус***

(8) ***имеют вырожденный тип***

Доказательство Докажем для случая *(5)*, остальные случаи разбираются аналогично. Зафиксируем точку x^0 из случая *(5)*. Для такой точки построим связанную с ней алгебру $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda(x^0)$ такую, что она, как линейное пространство совпадает с $\ker(P_\lambda(x^0))$ и коммутатор на ней задается по формуле $[\xi, \eta] = \mathrm{d}\{f, g\}_\lambda$, где $\xi, \eta \in \ker(P_\lambda(x^0))$, f и g – некоторые функции, такие что $\mathrm{d}f(x^0) = \xi$, $\mathrm{d}g(x^0) = \eta$. Тогда если взять в качестве f и g линейные функции, то коммутатор $[\xi, \eta]$ равен $\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^k} \xi_i \eta_j$, где по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Выберем базис в $\mathfrak{g}_\lambda$:

$$\ker(P_\lambda(x^0)) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где (x_1^0, x_2^0, x_3^0) – первые три координаты точки x^0. Обозначим эти порождающие векторы соответственно a, b, c и d. Для того, чтобы определить тип особой точки, надо понять, какой алгебре изоморфна данная. Для этого посчитаем коммутаторы. Нетрудно проверить, что

$$[a, b] = -\lambda c, \quad [a, c] = \lambda b, \quad [b, c] = -\lambda a, \quad [d, \mathfrak{g}_\lambda] = 0.$$

Сделаем замену: $x = \frac{b+c}{\lambda\sqrt{2}}$, $y = \frac{b-c}{\lambda\sqrt{2}}$, $z = \frac{a}{\lambda}$, тогда

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y.$$

Следовательно, $\mathfrak{g}_\lambda$ изоморфна $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. Как следует из работы [4], в случае, когда существует единственное λ и $\mathfrak{g}_\lambda$ изоморфна $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ получается особенность эллиптического типа.

Литература

1. L. Gavrilov, A. Zhivkov, *The complex geometry of Lagrange top*, L' Enseign. Math., 1998, v. 44, p. 133-170. 2. T. Ratiu, *Euler-Poisson equations on Lie algebras and the N-dimensinal heavy rigid body*, Am. J. Math., 1982, v. 104, p. 409-448. 3. F. Klein, A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, 1965. Reprint of the 1897-1910 edition. 4. A. Bolsinov, A. Izosimov, *Singularities of bihamilton systems*, arXiv:1203.3419 5. A. Bolsinov, *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, 38(1):69-90, 1992

О разрешимости систем уравнений Урысона с частными интегралами в пространствах непрерывно-дифференцируемых вектор-функций[16]

Н.И. Трусова

(Липецк, ЛГПУ; *trusova.nat@gmail.com*)

К системам нелинейных интегральных уравнений с частными интегралами приводятся некоторые прикладные задачи [1, 2]. Однако теория систем таких уравнений в настоящее время разработана недостаточно.

В данной заметке приводятся условия разрешимости систем нелинейных уравнений Урысона с частными интегралами и переменными пределами интегрирования в пространстве $C^{(1),n}(D)$ - непрерывно дифференцируемых вектор-функций со значениями в R^n.

В общем случае такие системы имеют следующий вид:

$$x_i(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \Big[\int_a^t l_{1,ij}(t,s,\tau,x_j(\tau,s))d\tau + \int_c^s m_{1,ij}(t,s,\sigma,x_j(t,\sigma))d\sigma +$$

$$+ \int_a^t \int_c^s n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,x_j(\tau,\sigma))d\tau d\sigma \Big], i = 1,...,n, \qquad (1)$$

[16]Работа поддержана Минобрнауки России, проект № 1.4407.2011.

где $t \in [a,b]$, $\tau \in [a,t]$, $s \in [c,d]$, $\sigma \in [c,s]$, $u \in R = (-\infty, +\infty)$, $l_{1,ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{1,ij}(t,s,\sigma,u)$ и $n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ — вещественные функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори при каждом $s \in [c,d]$, $t \in [a,b]$, $(t,s) \in D = [a,b] \times [c,d]$, соответственно, $x(t,s) = (x_1(t,s), ..., x_n(t,s))$.

Через $C^{(1)}(D)$ обозначим пространство функций со значениями в R, частные производные которых по t и s непрерывны. Норма в пространстве $C^{(1)}(D)$ определяется равенством

$$||x||_{C^{(1)}(D)} = \sup_{(t,s)\in D} |x(t,s)| + \sup_{(t,s)\in D} \left|\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}\right| + \sup_{(t,s)\in D} \left|\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right|.$$

Через $C^{(1),n}(D)$ обозначим пространство вектор-функций $x(t,s)$ $= (x_1(t,s), ..., x_n(t,s))$, принимающих значения в R^n и имеющих непрерывные частные производные по t и s. Норма в $C^{(1),n}(D)$ определяется равенством

$$||x|| = \max_{1\le i\le n} ||x_i||_{C^{(1)}(D)}.$$

Пространства $C^{(1)}(D)$ и $C^{(1),n}(D)$ являются банаховыми.

Теорема. *Пусть ядра* $l_{1,ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{1,ij}(t,s,\sigma,u)$, $n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка по* t *и* s *и удовлетворяют условию Липшица:*

$$|l_{1,ij}(t,s,\tau,u) - l_{1,ij}(t,s,\tau,v)| \le l_{ij}(t,s,\tau)|u-v|,$$

$$|m_{1,ij}(t,s,\sigma,u) - m_{1,ij}(t,s,\sigma,v)| \le m_{ij}(t,s,\sigma)|u-v|,$$

$$|n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,u) - n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,v)| \le n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)|u-v|,$$

где функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} *непрерывны вместе со своими частными производными по* t *и* s*. Тогда система (1) интегральных уравнений Урысона с частными интегралами имеет в* $C^{(1),n}(D)$ *единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.*

Теорема остается справедливой, если в двойном интеграле правой части системы один переменный предел интегрирования заменить постоянным: t заменить на b или s заменить на d. Если же в двойном интеграле системы оба переменных предела интегрирования заменить постоянными: t заменить на b и s заменить на d, то теорема не имеет места. Теорема теряет силу и при замене хотя бы у одного из одномерных интегралов системы переменного предела интегрирования постоянным.

В заключение отметим, что свойства линейных и нелинейных операторов с частными интегралами в различных функциональных пространствах исследовались в [1-5].

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2000. – 252 с.

3. Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2002. – 208 с.

4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C – теория. – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.

5. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

Решение одной задачи для уравнения в частных производных третьего порядка методом каскадной декомпозиции

В.И. Усков

(Воронеж, Воронежский государственный университет; *vum1@yandex.ru*)

В банаховом пространстве $E = \{v(x) \in C[0, X] \mid v(0) = 0\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t} + b(x,t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + c(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} +$$
$$+ d(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + k(x,t)U(x,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

с условиями

$$U(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le X, \tag{2}$$

$$U(0,t) = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$, $k(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные непрерывные функции в прямоугольнике $[0, X] \times [0, T]$.

В пространстве $E^4 = E \times E \times E \times E$ оно сводится к уравнению вида

$$A\frac{\partial u(t)}{\partial t} = B(t)u(t) + F(t), \tag{4}$$

с начальным условием

$$u(0) = u^0, \tag{5}$$

где A – фредгольмовский оператор, $B(t)$ – линейный замкнутый оператор, $F(t)$ – непрерывная вектор-функция.

Здесь операторы в уравнении (4) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k(x,t) & d(x,t) & b(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x} + c(x,t) & -\dfrac{\partial}{\partial x} + a(x,t) \end{pmatrix},
$$

$$
F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x,t) \end{pmatrix}.
$$

Оператор A является фредгольмовским, значит уравнение (4) является *неразрешенным относительно производной* или *дескрипторным.*

Задача (4), (5) решается методом каскадной декомпозиции. Пусть I – единичный оператор, P_0 и Q_0 – проекторы оператора A на подпространства $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$ соответственно. Имеют место два случая разрешимости данной задачи по количеству шагов (каскадов) данного метода, связанные с оператором

$$
A_1(t) = Q_0 B(t) P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d(x,t) & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} + a(x,t) \end{pmatrix}.
$$

Если $d(x,t) \equiv 0$, то оператор $A_1(t)$ обратим в пространстве $\operatorname{Ker} A$, и декомпозиция уравнения заканчивается уже на первом шаге. В противном случае этот оператор является необратимым в ядре A; тогда переходим к следующему шагу.

На этом шаге разрешается алгебраическое уравнение

$$
A_1(t)u(t) = -Q_0 B(t)(I - P_0)u(t) - Q_0 F(t) \tag{6}
$$

с фредгольмовским оператором $A_1(t)$.

Пусть теперь $P_1(t)$ и $Q_1(t)$ – проекторы оператора $A_1(t)$ на подпространства $\operatorname{Ker} A_1(t)$ и $\operatorname{Coker} A_1(t)$ соответственно, A^-, $A_1^-(t)$ – полуобратные операторы.

Введем обозначения: $S_1(t) = \dfrac{\partial Q_1(t)Q_0B(t)}{\partial t} + Q_1(t)Q_0B(t)A^-B(t)(I -$ $- A_1^-Q_0B(t))$, $\hat{S}(t) = I - A_1^-(t)Q_0B(t) - A_2^{-1}(t)S_1(t)$, $T_2(t) = A^-B(t)\hat{S}(t)$, $KF(t) = \dfrac{\partial Q_1(t)Q_0F(t)}{\partial t} + Q_1(t)Q_0B(t)\{A^-F(t) - A^-B(t)A_1^-Q_0F(t)\}$, $\hat{F}(t) =$ $= -A_1^-(t)Q_0F(t) - A_2^{-1}(t)KF(t)$, $F_2(t) = A^-F(t) + A^-B(t)\hat{F}(t)$.

В результате декомпозиции получим уравнение:

$$A_2(t)u(t) = -S_1(t)(I - P_0)u(t) - K_1F(t), \tag{7}$$

в котором оператор $A_2(t) = Q_1(t)Q_0B(t)A^-B(t)P_1(t)$ обратим в пространстве $\operatorname{Ker} A_1(t)$.

Имеет место теорема о решении задачи (4), (5).

Теорема. *Пусть оператор $T_2(t)$ – ограниченный и сильно непрерывный по t и вектор-функция $F_2(t)$ непрерывна по t. Задача* (4), (5) *имеет решение и притом единственное тогда и только тогда, когда выполнено условие:*

$$Q_1(t)Q_0B(t)(I - P_0)u(t) + Q_1(t)Q_0F(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Это решение находится по формуле

$$u(t) = \hat{S}(t)\left(V_{T_2}(t,0)(I - P_0)u^0 + \int\limits_0^t V_{T_2}(t,\tau)F_2(\tau)\,d\tau\right) + \hat{F}(t), \tag{7}$$

где $V_{T_2}(t,\tau)$ – эволюционный оператор, порождающим оператором которого является оператор $T_2(t) \in L(\operatorname{Coim} A_1(t))$.

Тогда решением исходной задачи (1), (2), (3) будет первая координата вектор-решения (7).

Здесь $\operatorname{Coim}(\cdot)$ – прямое дополнение к $\operatorname{Ker}(\cdot)$.

Литература

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве /С.Г. Крейн – М.: Наука. 1967. – 464 с.

2. Зубова С. П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной /С.П. Зубова // Доклады РАН. – 2009 – Т. 428, № 4. – с. 444-446.

3. Зубова С. П. Свойства возмущенного фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной / С.П. Зубова; Воронежский гос. ун-т. – Воронеж, 1991. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.06.91, № 2516–В91.

Стохастическая модель химической кинетики бинарной циклической реакции

Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко

(Белгород, Белгородский государственный университет, *virch@bsu.edu.ru*)

Изучается стохастическая математическая модель бинарной каталитической химической реакции, которая протекает по схеме

$$A + X + Y \ \underset{k_1}{\overset{k_2}{\leftrightarrows}} \ 2Y + A^* \,,$$

$$B + X + Y \ \underset{k_3}{\overset{k_4}{\leftrightarrows}} \ 2X + B^* \,,$$

где X, Y, A, B, A^*, B^* – символы химических реагентов и при этом вещества, обозначаемые символами A, B, A^*, B^*, выполняют роль катализаторов.

Модель основана на базовых уравнениях химической кинетики, которые в данном случае принимают вид

$$\dot{N}_t(X) = k_2 N_t^2(Y) N_t(A^*) - k_1 N_t(X) N_t(Y) N_t(A) + \\ + k_3 N_t(X) N_t(Y) N_t(B) - k_4 N_t^2(X) N_t(B^*) \,,$$

$$\dot{N}_t(Y) = k_1 N_t(X) N_t(Y) N_t(A) - k_2 N_t^2(Y) N_t(A^*) + \\ + k_4 N_t^2(X) N_t(B^*) - k_3 N_t(X) N_t(Y) N_t(B) \,,$$

где $N_t(A), N_t(A^*), N_t(B), N_t(B^*),\ N_t(X), N_t(Y)$ – зависящие от времени t числа частиц соответствующих реагентов.

Вводя в эту систему уравнений кинетики стохастические возмущения ее параметров получается следующее стохастическое дифференциальное уравнение [1]

$$d\tilde{x}_t = [\alpha - \tilde{x}_t + \lambda \tilde{x}_t(1-\tilde{x}_t)]\, dt + \sigma \tilde{x}_t(1-\tilde{x}_t) d\tilde{w}_t \tag{1}$$

для изменения со временем относительной концентрации $x_t = N_t(X)/N$ одного из двух реагентов, значения которой принимаются в $[0,1]$. Возмущение описывается обобщенным случайным процессом белого шума, что выражется в виде стохастического дифференциала dw_t. Этот дифференциал понимается по Стратоновичу. Здесь $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ – параметры, характеризующие химическую реакцию, и $\sigma^2 > 0$ – интенсивность белого шума. В результате, решения стохастического дифференциального уравнения составляют марковский диффузионный процесс (в пространстве концетраций $x \in [0,1]$). Этот диффузионный процесс испытывает бифуркационную перестройку при изменении параметров $\lambda, \sigma^2, \alpha$, которая отсутствует в соответствующей детерминированной динамической системе (при $\sigma^2 = 0$). Эта перестройка физически интерпретируется как фазовый переход под действием шума.

В работе исследуется плотность маргинального распределения $p(x,t)$ первого порядка случайного процесса, которая подчиняется соотвествующему уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\left[f(x)p(x,t)\right]}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\left[g^2(x)p(x,t)\right]}{\partial x^2}\,, \tag{2}$$

$$f(x) = \alpha - x + \lambda x(1-x) + \frac{\sigma^2}{2}x(1-x)(1-2x)\,, \tag{3}$$

$$g(x) = x(1-x) \tag{4}$$

и граничному условию отсутствия потока через границу

$$f(x)p(x,t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial[g^2(x)p(x,t)]}{\partial x} = 0\,.$$

Вычисляется соответствующая финальная плотность $p(x)$, т.е. в пределе $t \to \infty$,

$$p(x) = \frac{A}{x(1-x)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\beta} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{\alpha - 1}{1-x} - \frac{\alpha}{x} \right) \right\}, \tag{5}$$

где

$$\beta = \frac{2(2\alpha + \lambda - 1)}{\sigma^2} \tag{6}$$

с номировочной постоянной

$$A = \frac{1}{2} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} + \beta \ln \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right\} \left[K_{-\beta} \left(-\frac{4}{\sigma^2} \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \right) \right]^{-1}, \tag{7}$$

где $K_{-\beta}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода с показателем $(-\beta)$, определяемая интегральным представлением

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} u - \nu u} du\,, \quad x > 0\,.$$

В отличие от работы [1] эта формула получена для любых допустимых значений параметров системы (подробности см. [2]).

Бифуркационная перестройка распределения вероятностей процесса выражается в том, что плотность (5) превращается из унимодальной в бимодальную при переходе через критическую поверхность в пространстве параметров $\langle \lambda, \sigma^2, \alpha \rangle$. Уравнение этой поверхности получается из условия одновременного обращения в нуль производных $p'(x) = p''(x) = 0$, что эквивалентно существованию двойного корня уравнения

$$S(x) \equiv \alpha - x + \lambda x(1-x) - \frac{\sigma^2}{2} x(1-x)(1-2x) = 0\,, \qquad x \in [0,1]\,. \tag{8}$$

Применяя алгоритм Евклида для полиномов $S(x)$ и $S'(x)$ находится уравнение для критической поверхности

$$\lambda^4 + \lambda^2 \Big(1 - 5\sigma^2 - \sigma^4/2\Big) - \lambda(9\sigma^4 + 18\sigma^2 - 4\lambda^2)\Big(\alpha - 1/2\Big) - \\ -4\sigma^2 \Big(1 - \sigma^2/4\Big)^3 - 27\sigma^4 \Big(\alpha - 1/2\Big)^2 = 0\,. \tag{9}$$

Она определяется такими решениями этого уравнения при которых выполняется условие

$$\left|\frac{2\lambda(1+2\sigma^2)+(18\alpha-9)\sigma^2}{12\sigma^2-3\sigma^4-4\lambda^2}\right| \le \frac{1}{2}\,. \tag{10}$$

Это условие связано с требованием, чтобы двойной корень уравнения $S(x) = 0$ принадлежал интервалу $[0, 1]$.

В частности, при $\alpha = 1/2$ это приводит к следующему явному выражению для критической поверхности

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sigma^4}{2}+5\sigma^2-1\right)-\sqrt{(2\sigma^2+1)^3}\right\}. \tag{11}$$

Кривая четвертого порядка, определяемая этой формулой, симметрична относительно оси σ^2, раположена выше оси $\sigma^2 = 4$ и в точке $\langle 0, 4\rangle$ имеет «касп» (бесконечную производную). В квадрантах $\{\lambda > 0, \sigma^2 > 4\}$ и $\{\lambda < 0, \sigma^2 > 4\}$ эта кривая монотонна: в первом из них возрастает и во втором убывает. В каждом из квадрантов она является вогнутой. При этом область бимодальности плотности рапределения расположена выше этой критической кривой относительно оси $\sigma^2 = 0$.

Литература

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. /М.: Мир, 1987. – 400 с.

2. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.130-146.

Многообразия Бертрана и естественные гамильтоновы системы на них; многообразия Бертрана с экваторами

Д.А. Федосеев
(Москва, МГУ; *denfedex@yandex.ru*)

Задачей Бертрана называется следующая обратная задача динамики: найти все потенциалы, обеспечивающие замкнутость определенного класса траекторий движения точки по многообразию вращения в потенциальном поле. Конфигурационные многообразия этой задачи (иными словами, многообразия вращения, допускающие существование хотя бы одного искомого потенциала) называются *многообразиями Бертрана.*

Описанная задача восходит к работам самого Бертрана [1], Дарбу [2]. Недавно многообразия Бертрана без экваторов были полностью описаны [3], а именно, доказана следующая теорема:

Теорема 1 *Многообразие* $(a,b)\times S^1$ *с метрикой* $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ *в полярных координатах* $(r, \varphi \mod 2\pi)$*, где* $f'(r)\neq 0$ *на* (a,b)*, является многообразием Бертрана (для классов замыкающих, локально, полулокально, сильно и слабо замыкающих потенциалов), если и только если существует тройка параметров* (μ, c, t)*,* $\mu\in\mathbb{Q}_{>0}, c\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$ *и координаты* $(\theta=\theta(r), \varphi \mod 2\pi)$*, где* $\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\mu^2}\frac{1}{f^2(r)}$*, в которых метрика принимает вид* $ds^2 = (\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2 d\theta^2 + \mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})d\varphi^2$*.*

Таким образом, многообразия Бертрана без экваторов образуют двухпараметрическое семейство с параметрами $(c,t)\in\mathbb{R}^2$. В работе [3] дано полное геометрическое описание многообразий Бертрана этого семейства в зависимости от принадлежности пары параметров (c,t) областям, изображенным на рис.1:

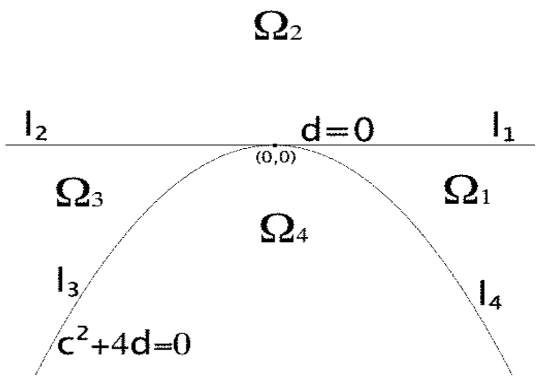


Рис.1 Плоскость параметров (c, d), разбитая на подмножества: области, кривые и точку.

В частности, многообразия, соответствующие прямой $t = 0$ являются многообразиями постоянной кривизны (сферой, плоскостью, плоскостью Лобачевского или рациональным накрытием над одним из этих многообразий). Для таких многообразий существует в точности два бертрановских потенциала, для многообразий, отввечающих параметрам $(c, t \neq 0)$, бертрановский потенциал существует ровно один.

Многообразия Бертрана являются многообразиями вращения, но далеко не все они могут быть реализованы как поверхности вращения, вложенные в $\mathbb{R}^3$. Более того, не все многообразия Бертрана могут быть даже локально реализованы указанным образом. В частности, имеет место следующая теорема [4]:

Теорема 2 *Верны следующие утверждения о реализуемости римановых многообразий Бертрана* $(I_{k,c,t} \times S^1, \mathrm{ds}^2_{\mu,\mathrm{c},\mathrm{t}})$ *целиком:*
1) *Дополнительное многообразие не реализуемо никогда;*
2) *Основное многообразие реализуемо тогда и только тогда, когда соответствующая тройка параметров* (μ, c, t) *принадлежит следующим областям:* $\{\mu \geq 2, c \geq -2\sqrt{-t}, t \leq 0\} \cup \{1 \leq \mu < 2, c \geq -2\sqrt{-t}\sqrt{h(\mu)}, t \leq 0\}$, *где* $h \in \mathrm{Homeo}^+((0, +\infty), \mathbb{R})$ *— сохраняющий ориентацию гомеоморфизм интервалов, определенный формулой* $h(\mu) := \frac{(\mu^2-1)(8+\mu^2)^2}{27\mu^4}$.

Динамическая система на многообразии Бертрана, заданная центральным бертрановским потенциалом $V(r)$, является гамильтоновой системой относительно естественного гамильтониана

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r).$$

Она является интегрируемой с дополнительным интегралом p_φ, а потому к ней может быть применен стандартный анализ интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. В частности, могут быть вычислены меченые молекулы Фоменко-Цишанга (см., например, [5]).

Следует отметить, однако, что некоторые динамические системы на многообразиях Бертрана предоставляют простой и наглядный пример интегрируемых гамильтоновых систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля, для которых классификационная теория развита пока слабо.

Многообразия Бертрана с экваторами на данный момент остаются малоизученными. Тем не менее, некоторые факты про них уже можно утверждать. В частности, доказано, что в случае гладких многообразий и потенциалов, не существует иных многообразий Бертрана для класса локально замыкающих потенциалов, кроме описанных в теореме 1. Изучены некоторые свойства бифуркационных диаграмм для естественных гамильтоновых систем на многообразиях Бертрана с экваторами. В частности, доказано, что на бифуркационной диаграмме всегда имеется парабола, отвечающая особому экватору. Установлено, что всякий экватор многообразия Бертрана особ, а особых экваторов может быть не более одного. Отсюда непосредственно следует утверждение:

Лемма 1 *Цилиндр не является вполне Бертрановским многообразием ни для какого центрального потенциала.*

Литература

1. J. Bertran. C. R. Acad. Sci. Paris, 1873, V.77.

2. G. Darboux. Sur un probléme de mécanique. // T. Despeyrous, Cours de mécanique, Vol. 2, Note XIV. // A. Herman, Paris, 1886, pp. 461–466.

3. О.А. Загрядский, Е.А. Кудрявцева, Д.А. Федосеев. Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения. // Матем. Сб. 203:8 (2012), с.39-78.

4. О.А. Загрядский, Д.А. Федосеев. О глобальной и локальной реализуемости римановых многообразий Бертрана в виде поверхностей вращения. // Вестник МГУ (в печати).

5. А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2. // Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.

Об условиях глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений

М.С. Филипковская

(Харьков, ХНУ им. В. Н. Каразина; *fmarias@mail.ru*)

Дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), исследуемые в настоящей работе, возникают в радиотехнике, электронике, математической экономике, робототехнике, теории управления и экологии.

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения в вещественном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$

$$A\frac{d}{dt}(x(t)) + Bx(t) = f(t,x), \quad t \geq 0 \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (t_0 \geq 0), \tag{2}$$

Наряду с уравнением (1) можно рассматривать уравнение

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) + Bx(t) = f(t,x), \quad t \geq 0 \tag{3}$$

Предполагается, что A, B — вещественные матрицы размерности $n \times n$, вообще говоря, необратимые, $f(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ —

непрерывная по совокупности переменных функция, $\lambda A + B$ — регулярный характеристический пучок индекса 1, т. е. $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$ и резольвента $(\lambda A + B)^{-1}$ существует и ограничена для достаточно больших $|\lambda|$.

Функция $x(t)$ называется *решением задачи Коши* (1), (2) на некотором интервале $[t_0, T]$, если $x(t) \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1) на $[t_0, T]$ и начальному условию (2).

Функция $x(t)$ называется *решением уравнения* (3) на некотором интервале $[t_0, T]$, если $x(t) \in C([t_0, T], \mathbb{R}^n)$, $Ax(t) \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ и $x(t)$ удовлетворяет (3) на $[t_0, T]$.

В дальнейшем будут применяться спектральные проекторы типа Рисса P_j, Q_j, $j = 1, 2$ [1] характеристического пучка матриц $\lambda A + B$ и специальная матрица $G = AP_1 + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B$, подробно исследованные в [2]. Проекторы P_j, Q_j задают разложение пространства $\mathbb{R}^n$ в прямые суммы подпространств: $\mathbb{R}^n = X_1 \dot{+} X_2 = Y_1 \dot{+} Y_2$, $X_j = P_j \mathbb{R}^n, Y_j = Q_j \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$. Относительно данного разложения любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы $x = x^1 + x^2$, где $x^1 = P_1 x \in X_1$, $x^2 = P_2 x \in X_2$.

Пусть $\dim X_1 = m$, тогда $\dim X_2 = d$, где $d = n - m$. В $(n \times 2n)$-матрице $P_{1,2} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix}$ выберем n линейно независимых столбцов $\{p_i\}_{i=1}^n$, где $\{p_1, ..., p_m\}$ — столбцы матрицы P_1, а $\{p_{m+1}, ..., p_n\}$ — столбцы матрицы P_2. Две системы векторов $\bar{e} = \{e_i\}_{i=1}^n$, $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^n$ образуют, соответственно, два базиса в $\mathbb{R}^n$: «старый» координатный базис $\bar{e}$ и «новый» базис $\bar{p}$. Обратимая $(n \times n)$-матрица $P = (p_1 \cdots p_n)$ задает в базисе $\bar{e}$ оператор $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ перехода от базиса $\bar{e}$ к базису $\bar{p}$. Координаты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в базисах $\bar{e}$, $\bar{p}$ преобразуются следующим образом: $x = x^e = Px^p$, $x^p = P^{-1}x$, а из разложения $x = \sum\limits_{i=1}^{m} z_i\, p_i + \sum\limits_{k=1}^{n-m} v_k\, p_{m+k}$ вытекает представление:

$x^p = \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}$, где $z \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^d$, $d = n - m$, $\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}P_1x$, $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}P_2x$. Оператор $P : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ действует так, что $P(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = X_1$, $P(\{0\} \times \mathbb{R}^d) = X_2$ [3].

Определение 1 *[3] Оператор-функция $\Phi(x) : D \to [X,Y]$, $D \subset X$ называется базисно обратимой на выпуклой оболочке $conv\{x_1, x_2\}$ векторов x_1, $x_2 \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset conv\{x_1, x_2\}$ и некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в s-мерном пространстве Y (см. определение 2 из [3]) оператор $\Lambda = \sum\limits_{k=1}^{s} \Theta_k \Phi(\tilde{x}_k) \in [X,Y]$ является обратимым так, что $\Lambda^{-1} \in [Y,X]$ ($[X,Y]$ — множество непрерывных линейных операторов из X в Y).*

В расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ введем многообразие

$$L_0 = \{(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n : BP_2x = Q_2f(t,x)\}.$$

Теорема 1 *Пусть функция $f(t,x)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)$ на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, проекция $Q_2f(t,x)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, характеристический пучок $\lambda A + B$ уравнения (1) является регулярным пучком индекса 1. Пусть*

$$\forall t \geq 0 \, \forall x^1 \in X_1 \, \exists x^2 \in X_2 : (t, x^1 + x^2) \in L_0 \tag{4}$$

и для любых $u_k \in X_2$ таких, что $(t, x^1 + u_k) \in L_0$, $k = 1, 2$, функция

$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2f(t, x^1 + u)) - B\right] P_2 \in C(X_2, [X_2, Y_2]) \tag{5}$$

является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{u_1, u_2\} \subset X_2$. *Предположим, что* $Q_1 f$ *допускает представление:*

$$Q_1 f(t,x) = \psi(t,x) + e(t), \tag{6}$$

где $\psi(t,x) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, Y_1)$ *и* $\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}$ *непрерывна на* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $e(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R}^n)$. *Пусть существует постоянная матрица* $H = H^* > 0$ *и для каждого* $T > 0$ *найдется число* $R = R_T > 0$ *такие, что*

$$(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)) \le 0, \quad \forall(t,x) \in L_0 : 0 \le t \le T, \quad \|P_1x\| \ge R_T. \tag{7}$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in L_0$ *существует единственное решение* $x(t)$ *задачи Коши* (1), (2) *на* $t_0 \le t < \infty$.

Доказательство Применяя к уравнению (1) проекционные матрицы Q_1, Q_2, а затем матрицу G^{-1}, получим эквивалентную (1) систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_1x) + G^{-1}BP_1x = G^{-1}Q_1f(t,x) \\ G^{-1}Q_2f(t,x) - P_2x = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Введем суженные операторы $P_m = P|_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to X_1$, $P_d = P|_{\mathbb{R}^d} : \mathbb{R}^d \to X_2$, для которых, очевидно, существуют обратные операторы $P_m^{-1} : X_1 \to \mathbb{R}^m$, $P_d^{-1} : X_2 \to \mathbb{R}^d$ и $z = P_m^{-1}P_1x$, $v = P_d^{-1}P_2x$, $x = P_mz + P_dv$. Умножив уравнения системы (8) на P_m^{-1}, P_d^{-1} соответственно, получим эквивалентную систему

$$\frac{d}{dt}z + P_m^{-1}G^{-1}BP_mz = P_m^{-1}G^{-1}Q_1\tilde{f}(t,z,v) \tag{9}$$

$$P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t,z,v) - v = 0, \tag{10}$$

где $\tilde{f}(t,z,v) = f(t, P_mz + P_dv)$.

Рассмотрим отображение

$$F(t,z,v) = P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t,z,v) - v = \left[P^{-1}G^{-1}Q_2f(t,x) - P^{-1}P_2x\right]\Big|_{\mathbb{R}^d}.$$

Оно непрерывно и имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные $\dfrac{\partial}{\partial t}F(t,z,v)$, $\dfrac{\partial}{\partial z}F(t,z,v)$ и

$$\frac{\partial}{\partial v}F(t,z,v) = P_d^{-1}\left[G^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - P_2\right]P_d = P_d^{-1}G^{-1}\Phi(P_d v)P_d,$$

где последнее равенство эквивалентно (5) при $u = P_d v$, а $P_d^{-1}P_2P_d = E_{\mathbb{R}^d}$.

Согласно базисной обратимости функции $\Phi(u)$ (5) для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, x^1+u_i) \in L_0$ $(i = 1,2)$, существует аддитивное разложение единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^d$ в Y_2 такое, что оператор $\Lambda_1 = \sum\limits_{k=1}^{d}\Theta_k\Phi(\tilde{u}_k) \in [X_2, Y_2]$ является обратимым для любого набора векторов $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^d \subset conv\{u_1,u_2\}$. Введем обратимый оператор $N = P_d^{-1}G^{-1} : Y_2 \to \mathbb{R}^d$. Система одномерных проекторов $\hat{\Theta}_k = N\Theta_k N^{-1}$ образует аддитивное разложение единицы $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Для произвольных $v_i \in \mathbb{R}^d$ таких, что $(t,z,v_i) \in \tilde{L}_0 = \Big\{(t,z,v) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^d : P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t,z,v) - v = 0\Big\}$, $i = 1,2$, и любых $\tilde{v}_k \in conv\{v_1,v_2\}$, $k = \overline{1,d}$, положим $u_i = P_d v_i$, $\tilde{u}_k = P_d\tilde{v}_k$. Учитывая, что $P_1x = P_m z$, $P_2 x = P_d v$, выполнено: $(t,z,v) \in \tilde{L}_0 \Leftrightarrow (t, P_1x + P_2x) \in L_0$, следовательно, для введенных векторов u_i, $\tilde{u}_k$ оператор Λ_1 обратим, поэтому обратим и действующий в $\mathbb{R}^d$ оператор $\Lambda_2 = \sum\limits_{k=1}^{d}\hat{\Theta}_k\frac{\partial}{\partial v}F(t,z,\tilde{v}_k) = \sum\limits_{k=1}^{d}\hat{\Theta}_k P_d^{-1}G^{-1}\Phi(P_d\tilde{v}_k)P_d = N\Lambda_1 P_d$. Таким образом, для $(t,z,v) \in \tilde{L}_0$ функция $\Psi(v) = \frac{\partial}{\partial v}F(t,z,v)$ является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{v_1,v_2\}$.

Из условия (4) следует, что для любых точек t, z можно выбрать v так, что $F(t,z,v) = 0$. Поскольку функция $\Psi(v)$ базисно обратима, то существует обратный оператор $\left[\frac{\partial}{\partial v}F(t,z,v)\right]^{-1}$.

Пусть (t_*, z_*) — произвольная точка из $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$. В силу теорем о неявной функции [4, с. 294, 298], существуют окрестности $U_\varepsilon(v_*) \subset \mathbb{R}^d$, $U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*) \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^m$ (для точки $t_* = 0$ окрестность $U_{\delta_1}(0) == [0,\delta_1)$) и единственная функция $v =$

$v(t,z) \in C^1(U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*), U_\varepsilon(v_*))$, такая, что $F(t,z,v(t,z)) = 0$, $(t,z) \in U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$ и $v(t_*,z_*) = v_*$. Определим глобальную функцию $v = \eta(t,z) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ в точке (t_*,z_*) как $\eta(t_*,z_*) = v(t_*,z_*)$. Докажем, что

$$\forall (t,z) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \, \exists!\, v \in \mathbb{R}^d : (t,z,v) \in \tilde{L}_0 \qquad (11)$$

Существование v уже доказано, необходимо доказать единственность.

Рассмотрим точки $(t,z,v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1,2$, т. е. $F(t,z,v_i) = 0$. Для функции $F(t,z,v)$ ее проекции $F_k(t,z,v) = \hat{\Theta}_k F(t,z,v)$, $k = \overline{1,d}$, являются функциями со значениями в одномерном пространстве $R_k = \hat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$, изоморфном $\mathbb{R}$. По теореме [4, Теорема 13A, с. 248] $F_k(t,z,v_2) - F_k(t,z,v_1) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t,z,\tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $\tilde{v}_k \in conv\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1,d}$. Суммируя по k выражения $\hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F_k(t,z,\tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $k = \overline{1,d}$, получим: $\Lambda_2(v_2 - v_1) = 0$, следовательно, $v_2 = v_1$ и (11) доказано.

Так как в некоторой окрестности каждой точки (t_*,z_*) из $[0,\infty) \times \mathbb{R}^m$ существует единственное решение $v = \nu(t,z)$ неявного уравнения (10) и оно непрерывно дифференцируемо по совокупности переменных t, z, то функция $v = \eta(t,z)$ в этой окрестности совпадает с $\nu(t,z)$ и обладает соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v = \eta(t,z)$ единственная на всем $[0,\infty) \times \mathbb{R}^m$. Действительно, если бы существовала функция $v = \mu(t,z)$, обладающая в некоторой точке (t_*,z_*) из $[0,\infty) \times \mathbb{R}^m$ теми же свойствами, что и $v = \eta(t,z)$, то, в силу (11), $\eta(t_*,z_*) = \mu(t_*,z_*) = v_*$, следовательно, $\eta(t,z) = \mu(t,z)$ на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^m$.

Подставим $v = \eta(t,z)$ в (9):

$$\frac{d}{dt} z + P_m^{-1} G^{-1} B P_m z = P_m^{-1} G^{-1} Q_1 \tilde{f}(t,z,\eta(t,z)). \qquad (12)$$

Очевидно, функция $Q_1 f(t,x)$ вида (6) и ее частная производная $\frac{\partial}{\partial x}(Q_1 f(t,x))$ непрерывны на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, а функция $Q_1 \tilde{f}(t,z,\eta(t,z)) = Q_1 f(t, P_m z + P_d \eta(t,z))$ непрерывна по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируема по

z на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$. Следовательно, для любой начальной точки $(t_0,z_0)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$ такой, что $(t_0,z_0,\eta(t_0,z_0))\in\tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (12) на некотором интервале $t_0\le t<\varepsilon$ с начальным условием $z(t_0)=z_0$. Заметим, что если начальная точка $(t_0,x^0)\in L_0$ и $x^0=P_mz_0+P_d\eta(t_0,z_0)$, то начальная точка $(t_0,z_0,\eta(t_0,z_0))\in\tilde{L}_0$.

Обозначим $\hat{\psi}(t,z)=\psi(t,P_mz+P_d\eta(t,z))$. Тогда (12) примет вид

$$\frac{d}{dt}z=P_m^{-1}G^{-1}\left[\hat{\psi}(t,z)-BP_mz+e(t)\right]. \tag{13}$$

Для произвольного фиксированного $T>0$ введем срезку функции $\hat{\psi}(t,z)$ по переменной t: $\hat{\psi}_T(t,z)=\begin{cases}\hat{\psi}(t,z), & 0\le t\le T\\ \hat{\psi}(T,z), & t>T\end{cases}$.

Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}z=P_m^{-1}G^{-1}\left[\hat{\psi}_T(t,z)-BP_mz+e(t)\right],\quad t\ge 0, \tag{14}$$

и функцию $V(x^1)=\frac{1}{2}(Hx^1,x^1)=\frac{1}{2}(HP_mz,P_mz)=\frac{1}{2}\left(P_m^*HP_mz,z\right)==\frac{1}{2}\left(\hat{H}z,z\right)=\hat{V}(z)$, где $\hat{H}=P_m^*HP_m$ и H — матрица из (7). Градиент функции $\hat{V}$ равен $grad\,\hat{V}(z)=\hat{H}z$.

Поскольку $\left(HP_mz,G^{-1}\hat{\psi}(t,z)\right)=\left(\hat{H}z,P_m^{-1}G^{-1}\hat{\psi}(t,z)\right)$, то из (7) следует, что для каждого $T>0$ найдется число $\hat{R}=\hat{R}_T>0$ такое, что

$$\left(\hat{H}z,P_m^{-1}G^{-1}\hat{\psi}(t,z)\right)\le 0,\quad 0\le t\le T,\quad \|z\|\ge\hat{R}_T. \tag{15}$$

Так как $\hat{H}=\hat{H}^*>0$ вместе с H, то существует $\hat{H}^{-1}$ и легко показать, что $\|z\|^2\le\left\|\hat{H}^{-1}\right\|\left(\hat{H}z,z\right)$. Тогда $\left|\left(\hat{H}z,-P_m^{-1}G^{-1}BP_mz\right)\right|\le\left\|\hat{H}\right\|\,\|P_m^{-1}G^{-1}\|\times\|BP_m\|\left\|\hat{H}^{-1}\right\|\left(\hat{H}z,z\right)$. Выбирая $\hat{R}\ge\sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}$ получим оценку:

$$\left|\left(\hat{H}z,P_m^{-1}G^{-1}e(t)\right)\right|\le\left\|\hat{H}\right\|^{1/2}\|P_m^{-1}G^{-1}\|\,\|e(t)\|\left(\hat{H}z,z\right),\ \|z\|\ge\hat{R}.$$

Увеличивая, если необходимо, радиус $\hat{R} = \hat{R}_T$ в условие (15) так, чтобы выполнялось неравенство $\hat{R} \geq \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}$, получаем оценку для производной функции $\hat{V}(z)$ в силу системы (14), которая выполнена при всех z таких, что $\|z\| \geq \hat{R}$ и всех $t \geq 0$:

$$\dot{\hat{V}}\Big|_{(14)} = \left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}\left[\hat{\psi}_T(t,z) - BP_m z + e(t)\right]\right) \leq$$

$$\leq \left\|P_m^{-1}G^{-1}\right\| \left(\left\|\hat{H}\right\| \|BP_m\| \left\|\hat{H}^{-1}\right\| + \left\|\hat{H}\right\|^{1/2} \|e(t)\|\right) \left(\hat{H}z, z\right) = k(t)\hat{V}(z),$$

где $k(t) = 2\left\|P_m^{-1}G^{-1}\right\| \left(\left\|\hat{H}\right\| \|BP_m\| \left\|\hat{H}^{-1}\right\| + \left\|\hat{H}\right\|^{1/2} \|e(t)\|\right)$ — непрерывная функция при $t \geq 0$. Так как неравенство $\dot{v} \leq K(t,v)$, $t \geq 0$, где $K(t,\hat{V}) = k(t)\hat{V}$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения, то по [3, лемма 1] каждое решение $z(t)$ уравнения (13) неограниченно продолжаемо [3]. Значит, каждое решение $x(t) = P\begin{pmatrix} z(t) \\ \eta(t,z(t)) \end{pmatrix}$ уравнения (1) также неограниченно продолжаемо.

Очевидно, полученное решение $x(t)$ задачи Коши (1), (2) единственно на некотором интервале $t_0 \leq t < \varepsilon$. Предположим, что решение не единственно на $t_0 \leq t < \infty$. Тогда существует $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $t_* \leq t < \varepsilon_1$ должно существовать единственное решение уравнения (1) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению.

В статьях [3, 5] доказаны теоремы существования и единственности глобального решения уравнения (3). В условиях теоремы из [3] нет требования непрерывной дифференцируемости проекции $Q_2 f(t,x)$, но проекция $Q_1 f(t,x)$ имеет более общий вид и относительно нее предполагаются дополнительные ограничения. В теореме 5.1 из [5] правая часть уравнения (3) содержит дополнительное слагаемое, зависящее от времени t, и требуется, чтобы проекция $G^{-1}Q_2 f(t,x)$ была глобально сжимающим отображением. Однако в реальных задачах нелинейные функции обычно не удовлетворяют подобному условию. Ограничения в настоящей теореме 1 и теореме 1 из [3] могут выполняться для нелинейной функции и ее проекций, не удовлетворяющих условиям, типа глобального условия Липшица. Заметим, что для ДАУ вида (3) начальное условие фактически имеет вид $Ax(t_0) = y_0$, где $y_0 \in A\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим приложение к радиотехнике.

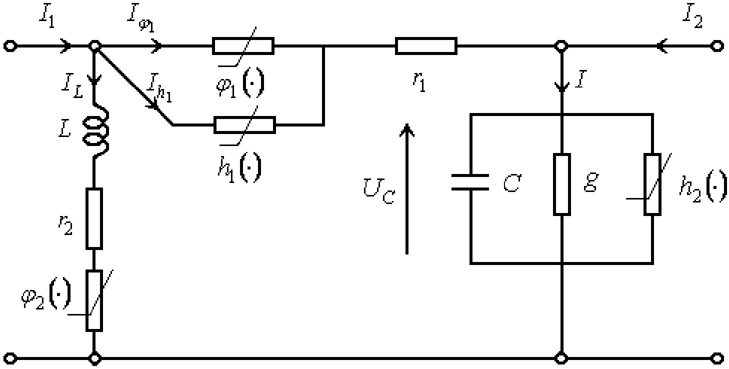


Рис. 1 Схема электрической цепи четырехполюсника

Пусть в импедансной задаче для четырехполюсника (рис. 1) параметры L, C, r_1, r_2, g положительные и вещественные, сопротивления φ_1, φ_2 и проводимости h, h_1 являются нелинейными функциями, токи $I_1(t)$, $I_2(t)$ заданы. Векторная форма системы уравнений, описывающей модель цепи четырехполюсника, может быть представлена в виде (1) или (3), где $x = \begin{pmatrix} I_{\varphi_1} \\ I_L \\ U_C \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t,x) =$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1\gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \ \gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1)).$$ Выбирая в качестве нелинейных функций $\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3$, $\varphi_2(y) = \alpha_2 y^3$, $h_2(y) = \alpha_3 y^3$, $\gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^9$, где $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,4}$, $y \in \mathbb{R}$, можно убедиться, что условие (5.6) теоремы 5.1 из [5] не выполнено, но выполнены все условия теоремы 1 из [3], если токи $I_1(t)$, $I_2(t)$ непрерывны при $t \geq 0$, и настоящей теоремы 1, если ток $I_2(t)$ непрерывен, а ток $I_1(t)$ непрерывно дифференцируем при $t \geq 0$.

При доказательстве упомянутых теорем использовался метод продолжения локальных решений с помощью дифференциальных неравенств [6]. Признаки локальной разрешимости уравнений типа ДАУ исследовались многими авторами ([2, 9] и библиографии в них). Для обыкновенного ДУ есть глобальные теоремы существования и единственности решения, использующие метод интегральных неравенств [7, 8]. Данный метод можно использовать и для ДАУ путем сведения к обыкновенному ДУ, как это сделано в доказательстве теоремы 1.

Литература

1. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения Ax'(t)+Bx(t)=f(t) // Дифференциальные уравнения, 1975, Т. 11, № 11, С. 1996–2010.

2. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006, 273 с.

3. Руткас А. Г., Филипковская М. С. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2013, № 1 (111), С. 135–145.

4. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972, 822 с.

5. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике // Вiсник ХНУ iм. В. Н. Каразiна.

Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління 2012, № 1015, Вип. 19, С. 306–319.

6. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964, 168 с.

7. Рудаков В. П. Об эффективной двусторонней оценке норм решений нелинейных возмущенных систем // Известия вузов. Математика, 1970, № 12 (103), с. 78-83.

8. Мартынюк А. А. Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. — К.: Наукова думка, 1989, 272 с.

9. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003, 320 с.

Топология и особенности биллиардов

В.В. Фокичева, А.Т. Фоменко

(Москва, МГУ им. Ломоносова, кафедра дифференциальной геометрии и приложений; *arinir@yandex.ru*)

1. История вопроса. Широко известна так называемая задача о биллиарде. С точки зрения геометрии это вопрос о движении материальной точки по области с кусочно-гладкой границей, с естественным отражением на границе (угол падения равен углу отражения). В простейшем случае область предполагают плоской. В настоящей работе изучается топология и особенности локально-плоских двумерных кусочно-гладких биллиардов, которые интегрируемы, т.е. обладают скрытыми симметриями, вследствие чего замыкания траекторий биллиарда описываются простым образом и поэтому допускают классификацию.

2. Биллиард как динамическая система. Напомним несколько понятий о геодезическом потоке двумерной метрики. Геодезические — это линии на поверхности, имеющие наименьшую длину. Локально между двумя точками можно провести единственную геодезическую ("натянуть резинку на поверхность"). Геодезическим потоком на многообразии M называется поток (или, иными словами, однопараметрическая группа диффеоморфизмов) на касательном расслоении TM, траектории которого определяются следующим образом: каждый вектор v за время t сдвигается вперёд вдоль касающейся его геодезической на время t, оставаясь касательным к этой геодезической. На этом пучке $\gamma(t) = \{x(t), v(x(t))\}$ (где t – параметр, $x(t)$ – точка на поверхности, $v(x(t))$ – вектор скорости в ней) мы получаем дифференциальную систему первого порядка. Она называется геодезическим потоком данной метрики.

Интегралом системы называется функция, постоянная вдоль решений системы. Из свойств геодезической следует, что геодезический поток имеет естественный интеграл H – длину вектора (т.е. скорость). Этот интеграл по сути описывает кинетическую энергию данной системы. Уровень этого интеграла $H = const$ называется изоэнергетической поверхностью $Q^3_{H=const}$ данной системы. Именно на этой поверхности мы будем рассматривать траектории. Таким образом, траектория движения биллиарда – это геодезическая с постоянной скоростью. Задача состоит в том, чтобы изучить топологию траекторий на этих поверхностях, которые при $H \neq 0$ гомеоморфны касательной расслоению на окружности к данному многообразию M. Например, если $M \cong S^3$, то $Q^3_H \cong RP^3$

3. Гамильтонов подход. Интегрируемость по Лиувиллю. Рассмотрим симплектическое многообразие (M^4, ω), где ω - симплектическая форма, т.е. невырожденная, замкнутая кососимметрическая форма на касательных векторах к M^4: $\omega(a, b) := \omega_{ij}a^i b^j$. Если нам дана функция H на данном многообразии, то можно определить векторное поле $sgradH$, ей соответствующее, по следующему правилу $(sgradH)^i = w^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j}$. Если динамическая система допускает подобное описание, то она называется гамильтоновой, а функция H в этом случае называется гамильтонианом.

Предположим, что на M^4 существует функционально независимая с H функция f такая, что скобка пуассона $\{f, H\} := \omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j} = 0$. В этом случае говорят, что функции f и H находятся в инволюции. Легко понять, что функция f также является интегралом системы, а динамическую систему называют интегрируемой по Лиувиллю.

Так как f и H функционально независимы, то за исключением некоторого количества особых значений интеграла f градиенты f и H независимы. Если при этом гамильтонов поток полный, то к совместной поверхности уровня функций f и H можно применить теорему Лиувилля,согласно которой эта совместная поверхность уровня гомеоморфна тору вблизи которого можно найти координаты, называемые действие-угол, такие что в этих координатах гамильтоново векторное поле выпрямляется.

Полученное расслоение Q^3 (а значит и M^4) называется слоением Лиувилля. Почти все торы при этом являются замыканием решений системы.Таким образом мы изучаем топологию решений данной интегрируемой гамильтоновой системы. Остальные поверхности уровня функций f и H (то есть те, где $gradf$ и $gradH$ зависимы) называются особыми. Для них также существует эффективный метод описания. Ограничим нашу систему с многообразия M^4 на изоэнергетическую поверхность Q^3_H. Далее покажем, как можно описать расслоение Q^3_H на торы и особые слои.

4. Описание особых слоёв гамильтоновой системы. Пусть функция f является функцией Ботта, то есть такой, что критические точки организованы в подмногообразия, такие что на нормальных плоскостях к этому подмногообразию функция f является функцией Морса. Напомним, что функция Морса это функция, критические точки которой невырождены (то есть если в точке $df = 0$, то d^2f – невырожденная матрица).

Функция f задаёт отображение $f : Q^3_H \to R$. Пусть $f = c$ – особое значение интеграла f. Тогда прообраз окрестности $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ в Q^3_H – это трёхмерное многообразие с краем, называемое 3-атомом.

Теорема (Фоменко). *Любой 3-атом является расслоением Зейферта над двумерной поверхностью, называемой базой, со слоем окружность, таким, что слои расслоения имеют тип* $(2, 1)$.

Из теоремы следует, что имеется соответствие между 3-атомами и двумерными 2-атомами, то есть, любой 3-атом можно закодировать двумерным 2-атомом. Приведём примеры.

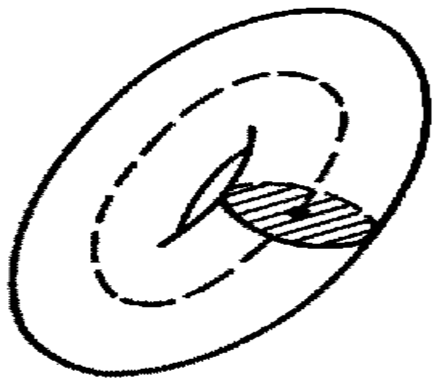


Рис.1 Атом A – минимаксный атом. Расслоение Зейферта – прямое произведение

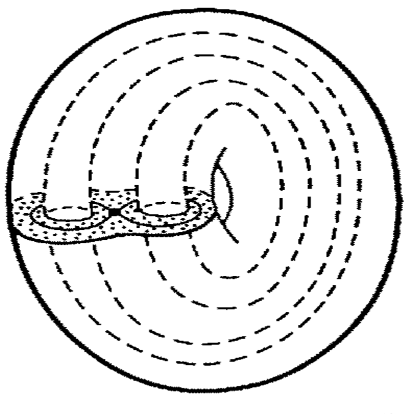


Рис.2 Атом B – седловой атом. Расслоение Зейферта – прямое произведение

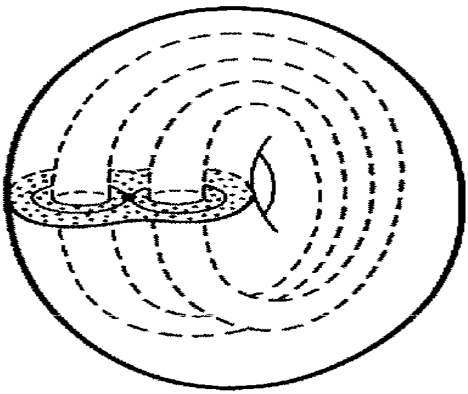


Рис.3 Атом A^* – седловой атом. В расслоении Зейферта особый слой имеет тип $(2,1)$

Атомы A, B, A^*

5. Лиувиллева эквивалентность. Инвариант Лиувиллевой эквивалентности

Определение. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_1^4, обладающих соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2. Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Они называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \to Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

Напомним, что в силу теоремы Лиувилля многообразие Q^3 расслоено на торы и особые слои (фактически оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам). Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на Q^3. Эта база является одномерным графом W, называемым молекулой Фоменко. В вершинах W расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля (например, описанные выше). Однако этот граф W не описывает полностью топологию слоения Лиувилля, так как он не содержит всей информации о склейках регулярных окрестностей особых слоев. Оказывается, для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах (по некоторым правилам) и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из полученных матриц перехода — матриц склейки — вычисляются числовые метки r, ϵ и n, которые, будучи расставленными на грубой молекуле W, полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до послойной эквивалентности и уже не зависят от выбора допустимых базисов на граничных торах. Получающийся граф с метками называется меченой молекулой W^*, т.е. инвариантом Фоменко-Цишанга.

Теорема Фоменко-Цишанга. *Две изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

6. Классическая задача о биллиарде в плоской области, ограниченной софокусными квадриками

Определение. Фиксируем систему координат (x, y). Софокусные квадрики – квадрики семейства

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1 \quad \infty \geq a \geq b > 0. \tag{1}$$

Нетрудно показать, что софокусные квадрики ортогональны друг другу.

Определение. Пусть дан набор квадрик на плоскости. Дуга одной квадрики, заключённая между двумя другими квадриками из этого набора (начало и конец – это точки пересечения квадрик) называется **сегментом** этой квадрики (отметим, что фиксирована не только кривая, но и её начало и конец, т.е. мы не можем переносить дугу квадрики параллельным переносом).

Пусть плоская область Ω ограничена сегментами софокусных квадрик.

Теорема. (Якоби, Шаль).

Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n-мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках *геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

Замечание. Софокусные квадрики в многомерном случае иногда называются конфокальными.

В плоском двумерном случае из теоремы Якоби-Шаля следует, что касательные в любой точке биллиардной траектории внутри области Ω касаются эллипса или гиперболы, софокусных с семейством квадрик, образующих границу P области Ω. Таким образом, данная "биллиардная" система обладает двумя независимыми интегралами:

1. $|v|$ — модуль вектора скорости,

2. Λ — параметр софокусной квадрики.

7. Классификация биллиардных областей

Определение. *Элементарной областью* Ω назовём двумерное связное, компактное, локально плоское многообразие с границей, имеющее изометричное погружение в плоскость, при котором его граница состоит из сегментов софокусных квадрик (локально) и содержит лишь углы $\pi/2$ (но не $3\pi/2$).

Определение. Область Ω, ограниченная квадриками из софокусного семейства (1), называется **эквивалентной** другой области Ω', ограниченной квадриками из того же семейства (1), если Ω' можно получить из Ω или последовательным изменением частей границы путём непрерывной деформации в классе квадрик (1), так, чтобы значение параметра λ изменяемой границы не принимало значения b, или путём симметрии относительно главных осей семейства (1).

Замечание. Определение запрещает изменяемой границе становиться отрезком фокальной прямой. Далее мы увидим, что бильярдная система, определённая в элементарной области, имеет столько критических окружностей на седловом уровне дополнительного интеграла, сколько данная элементарная область содержит внутри себя отрезков фокальной прямой с концами на границе области.

Определение. *Ребром* склейки элементарных областей будем называть общий сегмент границы, по которому могут быть изометрично (с сохранением натурального параметра) склеены.

Определение. Обобщённой областью Δ назовём ориентируемое двумерное многообразие без ветвления, получающееся склейкой из элементарных областей склейками первого типа вдоль некоторых рёбер – общих сегментов границы так, чтобы на границе каждого ребра склейки склеивалось либо 2 области либо 4. Рёбра склейки будем называть рёбрами излома. Для каждой такой области Δ фиксирован набор элементарных областей Ω_i с набором склеек между ними, который и даёт область Δ.

Определение. Обобщённая область Δ, склеенная из областей Ω_i по правилам f_{ij} (f_{ij} описывает склейку между Ω_i и Ω_j) называется **эквивалентной** другой обобщённой области Δ', склеенной из Ω'_i по правилам f'_{ij}, если каждую областей Ω_i можно заменить на эквивалентную ей область так чтобы наборы Ω_i и Ω'_i совпали и совпали соответствующие f_{ij} и f'_{ij}.

Утверждение 1. Классификация элементарных областей. *Любая элементарная область Ω эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих трёх серий (все они представлены на рисунке ниже):*

1. Односвязные элементарные области, вложимые в плоскость, содержащие отрезок фокальной прямой между фокусами (внутри области или на границе). Существует ровно шесть типов, задаваемых формулой $a + |2f - f'| = 4$, где a – число углов границы, f – количество фокусов, принадлежащих области, f' – число фокусов принадлежащих границе области. Такие области будем обозначать A_f если их граница не содержит отрезок фокальной прямой и A'_f иначе.

2. Односвязные элементарные области, не содержащие отрезок фокальной прямой между фокусасами. Каждая такая область ограничивает четырёхугольник, образованный дугами двух эллипсов и двух гипербол (быть может совпадающих). Такие области будем обозначать либо B_n либо B'_n

либо B''_n в зависимости от того ноль, один или два отрезка границы лежат на фокальной прямой, где n это количество отрезков фокальной прямой с концами на границе области. Будем называть их областями типа B.

3. Неодносвязные элементарные области. Такие области ограничены дугами двух эллипсов. Будем обозначать их C_k. При $k = 1$ это область вложимая в плоскость, в общем случае это k-листное накрытие над C_1. Будем называть их областями типа C.

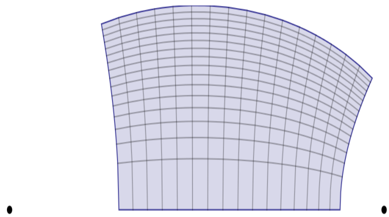


Рис.4 A'_0

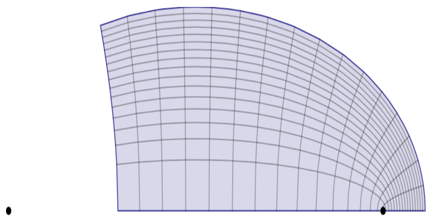


Рис.5 A'_1

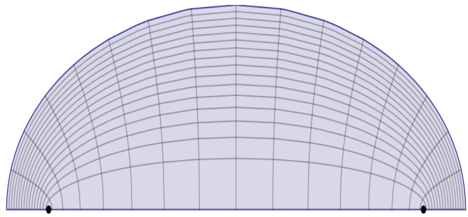


Рис.6 A_2'

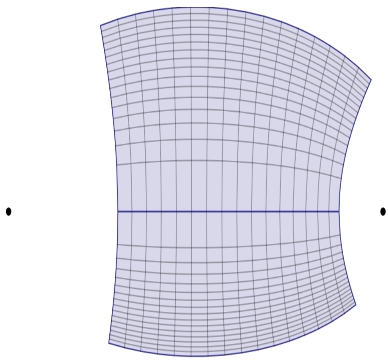


Рис.7 A_0

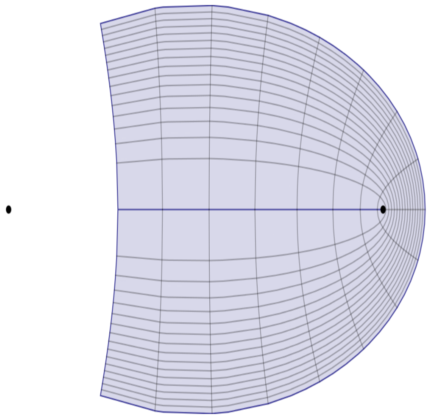


Рис.8 A_1

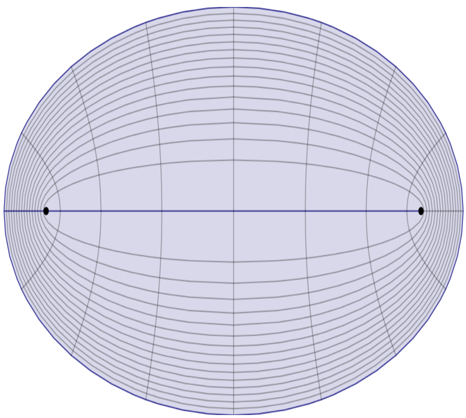


Рис.9 A_2

Области, принадлежащие конечной серии

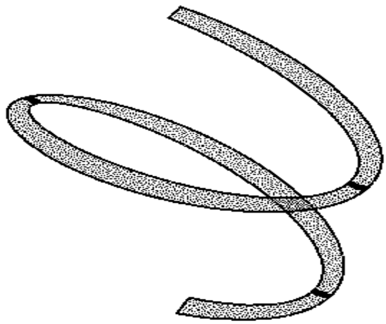


Рис.10 Жирным выделены отрезки фокальной прямой с концами на границе области.

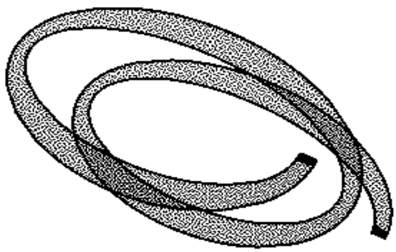


Рис.11 Область C_2 получается отождествлением чёрных отрезков

Области, принадлежащие бесконечным сериям

8. Лиувиллева классификация биллиардных систем

Теорема. *Меченые молекулы для биллиардных систем в областях* A_0,A'_1,A'_2, B_0,B'_0,B''_0 *имеют вид* $A - A$, *метки* $r = 0, \varepsilon = 1$. *Меченые молекулы для биллиардных систем в областях* A_0, B'_1 *и* B_1 *являются молекулой с седловым атомом* B, *метками* $r = 0, \varepsilon = 1$ *на одной паре рёбер и* $r = \infty, \varepsilon = 1$ *на другом* *ребре (атом B описывает перестройку одного тора в два или двух торов в один; парой рёбер в данном случае названы рёбра отвечающие торам Лиувилля, лежащих на одном уровне дополнительного интеграла). Меченая молекула для биллиардной системы в области A_1' является молекулой с седловым атомом A^*, метки $r = 0, \varepsilon = 1, n = 1$. Меченые молекулы для биллиардных систем в областях $B_n, n > 0$ и C_n являются молекулами с седловыми атомами аналогичными D_1 и C_2 соответственно причём метки на рёбрах, отвечающих значению интеграла $\Lambda < b$ равны $r = \infty, \varepsilon = 1$, а на других рёбрах равны $r = 0, \varepsilon = 1$.*

9. Классификация локально-плоских обобщённых биллиардов

Классификация областей локально-плоских ориентируемых без ветвелений также выполнена и молекулы, соответствующие таким биллиардным системам вычислены. Более подробно это будет описано в другой публикации.

Пример. Меченая молекула для биллиардной системы в обобщённой области, полученной склейкой двух экземпляров области A_1 вдоль все границ является молекулой с седловым атомом A^{**}, метки $r = 0, \varepsilon = 1$.

Литература.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.*, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. **1,2**, Ижевск:РХД, 1999.

3. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.:Наука, 1989.

8. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем.// Изв. АН СССР. 1988, **52**, N.2. 378-407.

9. *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем.// Успехи матем. наук. 1989. **44**, вып.1 (265).145-173.

10. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.// Изв. АН СССР. 1990, **54**, N.3. 546-575.

12. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела.// Функц. анализ и его прил. 1995. **29** , вып. 3. 1-15.

Характеристики, связанные с инвариантностью управляемой системы на отрезке заданной длины

А.Х. Хаммади
(Ижевск, Удмуртской государственной университет; *aliiraqmath@gmail.com*)

Изучаются статистические характеристики множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

которая параметризована с помощью метрической динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. Предположим, что $u \in U(h^t\sigma, x)$ и существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и имеют место следующие свойства:

1) для каждой точки $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma_0$ функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки $(\sigma, x, u) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ функция $(t, x) \to U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Пусть задано подмножество $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ пространства $\Omega \doteq \Sigma \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $A(t, \omega) = A(t, \sigma, X)$ множество достижимости системы (1) в момент времени t при заданном $\sigma \in \Sigma$ из начального множества X. Для заданных значений $\vartheta \geqslant 0$, $\tau > 0$ и $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$ введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\vartheta, \tau, \omega) \doteq \big\{t \in [\vartheta, \vartheta + \tau] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}.$$

Определение (см. [1]). *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t, \omega)$ системы (1) множеством M на отрезке $[\vartheta, \vartheta + \tau]$ назовем характеристику

$$\mathrm{freq}(\vartheta, \tau, \omega) \doteq \frac{\mathrm{mes}\, \alpha(\vartheta, \tau, \omega)}{\tau} = \frac{\mathrm{mes}\,\big\{t \in [\vartheta, \vartheta + \tau] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\tau},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой.

Важно рассматривать относительную частоту $\mathrm{freq}(\vartheta, \tau, \omega)$ для любого момента времени $\vartheta \geqslant 0$, поэтому естественно для заданных $\tau > 0$ и $\omega \in \Omega$ определить характеристику

$$\mathrm{freq}(\tau, \omega) \doteq \inf_{\vartheta \geqslant 0} \mathrm{freq}(\vartheta, \tau, \omega) = \inf_{\vartheta \geqslant 0} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [\vartheta, \vartheta + \tau] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}.$$

Эта характеристика отличается от рассмотренных в работах [2, 3] тем, что она отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости $A(t, \omega)$ в множестве M на отрезке заданной длины.

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0, \sigma) = z_0(\sigma) \tag{2}$$

в предположении, что верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ данной задачи существует для всех $t \geqslant 0$ (верхним решением задачи Коши (2) называется такое решение, что для любого другого решения $z(t, \sigma)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t, \sigma) \geqslant z(t, \sigma)$).

Введем характеристику

$$\varkappa(\vartheta, \tau, \sigma) \doteq \frac{\mathrm{mes}\{t \in [\vartheta, \vartheta + \tau] :\ z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\tau},$$

которую назовем *относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t, \sigma)$ задачи Коши (2) в множестве $(-\infty, 0]$ на отрезке $[\vartheta, \vartheta + \tau]$. Будем также рассматривать характеристику

$$\varkappa(\tau, \sigma) \doteq \inf_{\vartheta \geqslant 0} \varkappa(\vartheta, \tau, \sigma) = \inf_{\vartheta \geqslant 0} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [\vartheta, \vartheta + \tau] :\ z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\tau},$$

которая отображает свойство равномерности нахождения верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ в множестве $(-\infty, 0]$.

Пусть задано $r > 0$. Обозначим через $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ замкнутую окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ — внешнюю r-окрестность границы $M(\sigma)$, также рассмотрим множество $N_+^r = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in N_+^r(\sigma)\}$.

Скалярную функцию $V(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ будем называть *функцией Ляпунова* (относительно множества $M \subseteq \Omega$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и следующим свойствам: 1) $V(\sigma, x) \leqslant 0$ при всех $(\sigma, x) \in M$; 2) $V(\sigma, x) > 0$ для всех $(\sigma, x) \in N_+^r$. Обозначим через $V^o_{\max}(\sigma, x)$ верхнюю производную функции V в силу дифференциального включения, отвечающего системе (1).

Теорема. *Пусть для всех $\sigma \in \Sigma$ для каждого $x \in M(\sigma)$ все решения системы* (1), *удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ такие, что функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big)$. Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ для любого множества $X \subseteq M(\sigma)$ имеют место неравенства*

$$\operatorname{freq}(\tau, \vartheta, \omega) \geqslant \varkappa(\tau, \vartheta, \sigma), \quad \operatorname{freq}(\vartheta, \omega) \geqslant \varkappa(\vartheta, \sigma).$$

Рассмотрим также следующую задачу. Пусть заданы числа $\lambda_0 \in (0, 1]$ и $\vartheta > 0$. Во многих приложениях важно найти условия, которым должна удовлетворять управляемая система (1) и множество X, чтобы для заданного $\sigma \in \Sigma$ выполнялось неравенство $\operatorname{freq}(\vartheta, \omega) \geqslant \lambda_0$. Это означает, что относительная частота поглощения множества достижимости $A(t, \sigma, X)$ системы (1) множеством M на любом отрезке времени длины ϑ должна быть не менее λ_0. Отметим, что характеристика ϑ предполагается заданной в зависимости от прикладной задачи. В частности, если управляемый процесс имеет периодический характер, то ϑ является периодом данного процесса.

Литература

1. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 35–48.

2. Родина Л.И. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ с метрикой Хаусдорфа – Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 217–226.

3. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.

Оценка Гельфанда–Шилова нормы операторной экспоненты для оператора, представимого в виде суммы скалярного и оператора с конечным рангом

В.Д. Харитонов

(Воронеж, Воронежский государственный университет; *kharvd@gmail.com*)

В монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [1] приводится оценка нормы $\|e^{t\mathbf{A}}\|$ экспоненты квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размерности $n \times n$. Б. Ф. Былов с соавторами приводят (см. [2]) уточнение этой оценки.

В данной работе получено обобщение этой оценки на случай оператора вида $\alpha I + F$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, и F — оператор с конечным рангом.

Пусть X — банахово пространство над полем комплексных чисел, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра ограниченных операторов, действующих в X.

При получении основного результата используется следующее утверждение, сформулированное в [3].

Теорема 1.*Для любого оператора* $F \in \operatorname{End} X$ *с конечным рангом существует разложение* X *в прямую сумму*

$$X = M_F \oplus N_F,$$

причем $\dim M_F = m < \infty$, $F(M_F) \subset M_F$, $N_F \subset \ker F$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Для оператора* $A = \alpha I + F$, *где* $\alpha \in \mathbb{C}$, *и* F *удовлетворяет условиям теоремы 1, справедлива следующая оценка:*

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leqslant \mathrm{e}^{t(\mathrm{Re}(\alpha)+\Lambda)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2t\|F\|)^k}{k!}, \quad t \geqslant 0,$$

где $\Lambda = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(F)\}$, $m = \dim M_F$.

Литература

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений – Физматгиз. 1958. 274 с.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости – Наука. 1966. 576 с.

3. I. Gohberg, S. Goldberg, N. Krupnik. Traces and determinants of linear operators – Birkhäuser. 2000. 442 p.

Построение топологических атласов интегрируемых задач динамики[17]

И.И. Харламова, М.П. Харламов, П.Е. Рябов, А.Ю. Савушкин
(Волгоград, Российская академия народного хозяйства и государственной службы; *irinah@vags.ru*
Москва, Финуниверситет; orelryabov@mail.ru)

Интегрируемая аналитическая гамильтонова система с тремя степенями свободы механического происхождения с компактным конфигурационным пространством называется неприводимой, если не существует непрерывной группы симметрий. Представим общий алгоритм топологического исследования такой системы.

[17]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-01-97025

— Находим множество критических точек интегрального отображения $\mathcal{F} : P^6 \to \mathbf{R}^3$ как объединение фазовых пространств критических подсистем – интегрируемых почти гамильтоновых систем с $n_i < 3$ степенями свободы, индуцированных на инвариантных подмногообразиях M_i. Точки $x \in M_i$ порождают 4-атомы $U(x)$ с особым слоем $L(x)$ – связной компонентой $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))$, содержащей x. Исследуем ключевые множества C_i систем M_i, т.е. множества точек $x \in M_i$, над которыми расслоение $U(x) \mapsto x$ не локально тривиально.

— Строим бифуркационную диаграмму Σ как подмножество в объединении поверхностей Π_i – формальных $\mathcal{F}$-образов критических многообразий M_i. Определяем стратификацию Π_i минимальным рангом $\mathcal{F}$ в прообразе и описываем Σ как допустимую область в $\cup\Pi_i$, ограниченную стратами размерностей 0 и 1.

— Классифицируем сечения $\Sigma_\phi(c)$ в $\mathbf{R}^3$ поверхностями $\Phi = \phi$ уровней выбранного интеграла Φ, особого для системы (например, гамильтониана). Здесь c – вектор параметров системы. Доказано, что разделяющее множество для сечений $\Sigma_\phi(c)$ в (c, ϕ)-пространстве состоит из критических значений функции Φ как координаты на стратифицированных образах ключевых множеств критических подсистем под действием индуцированных интегральных отображений.

— Строим двумерный клеточный комплекс $D_\phi(c) = \mathcal{F}(\{\Phi = \phi\})$ – оболочку множества $\Sigma_\phi(c)$. Оснастим 1-клетки обозначением соответствующего 4-атома, а 2-клетки (камеры) снабдим числом – количеством торов Лиувилля в прообразе точки. Получим одну из возможных форм грубого топологического инварианта системы на $J_\phi = \{\Phi = \phi\} \subset P^6$. Переход к сопряженному комплексу $\mathcal{K}_\phi(c)$ делает этот инвариант более наглядным. В нем 0-клетки снабжены натуральными числами (количество 3-торов), 1-клетки – обозначением атомов, 2-клетки – это критические замкнутые орбиты ранга 1. Добавляя 0-клетку с числом 0, представляющую нуль-камеру $\mathbf{R}^2 \backslash D_\phi(c)$, превратим $\mathcal{K}_\phi(c)$ в клеточное разбиение двумерной сферы.

— Для инвариантов $\mathcal{K}_\phi(c)$ анализ атомов на границе 2-клеток дает полную информацию об устойчивости соответствующих замкнутых орбит и определяет соответствующую круговую молекулу (в грубом смысле). Для невырожденных орбит низкой сложности устанавливается и тонкая топология круговой молекулы.
— В приводимом случае (при наличии S^1-симметрии) на основе полученной информации метод круговых молекул А.Т.Фоменко – А.В.Болсинова дает описание тонких топологических инвариантов (меченые круговые молекулы для точек 0-остова $D_\phi(c)$ и изоэнергетические графы Фоменко с матрицами склейки).

На практике для систем с представлением Лакса можно первыми определить поверхности Π_i. Отсюда получим инвариантные соотношения, задающие критические подсистемы, а также специальные интегралы, применяемые при вычислении показателей типов критических точек. Это, в свою очередь, определяет ключевые множества и т.д. Результат перечисленных исследований можно назвать *полным топологическим атласом* интегрируемой системы.

Первый пример реализации описанной программы – топологический атлас неприводимого интегрируемого волчка Ковалевской в двойном поле. Классическая задача Ковалевской в динамике твердого тела – одна из немногих интегрируемых систем с двумя степенями свободы, которая допускает обобщение на неприводимое семейство с тремя степенями свободы — случай интегрируемости А.Г.Реймана – М.А.Семенова-Тян-Шанского [1]. В работах М.П.Харламова (2004–2005) построена стратификация шестимерного фазового пространства обобщенного волчка Ковалевской рангом отображения момента на основе нахождения всех критических подсистем и сформулирована задача описания аналога инварианта Фоменко на изоэнергетических уровнях для волчка Ковалевской в двойном поле. Общее определение топологического инварианта для интегрируемых гамильтоновых систем со многими степенями свободы приводится в работах А.Т.Фоменко (1988-1991). Последовательно реализованы все перечисленные выше шаги метода критических подсистем, позволившие решить задачу классификации бифуркационных диаграмм ограничений интегральных отображений на уровни энергии, дать параметрическую классификацию бифуркаций, атомов и молекул, определяющих фазовую топологию системы. Представлен полный список значений топологического инварианта в виде девятнадцати типов сетевых диаграмм на пятимерных изоэнергетических уровнях.

Качественно иной пример – интегрируемая гамильтонова система с тремя степенями свободы, описывающая вращение гиростата около неподвижной точки в поле силы тяжести при условиях типа Ковалевской (случай Х.М.Яхья [2]). В силу наличия группы симметрий S^1 система допускает редукцию на пространство $P^5 = \mathbf{R}^3 \times S^2$ с вырожденной скобкой Пуассона, в свою очередь расслоенное интегралом площадей на однопараметрическое семейство четырехмерных инвариантных симплектических листов, динамика на которых описывается гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы. Критические точки отображения момента $P^5 \to \mathbf{R}^3$ организованы в три критические подсистемы – трехмерные многообразия, состоящие из особых периодических движений (орбит пуассонова действия, ассоциированного с отображением момента) и их бифуркаций. Приводится полная классификация диаграмм критических подсистем – образов ключевых множеств на плоскости констант двух функционально независимых первых интегралов. Аналитически классифицированы диаграммы Смейла–Фоменко в плоскости (h, ℓ) констант интегралов энергии и площадей – образы объединения ключевых множеств критических подсистем. Они определяют 29 камер, внутри которых изоэнергетические молекулы неизменны. Явно вычислены показатели Морса–Ботта интеграла Ковалевской–Яхья в специальных базисах. Доказано, что в расширенном интегральном пространстве имеется семь камер, а регулярные торы Лиувилля в целом формируют семь семейств. Для каждого из них определены соотношения на λ-циклы бифуркаций. В результате доказательно построены 29 изоэнергетических инвариантов задачи.

Литература

1. A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky. Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations. – Lett. Math. Phys. **14** (1). – 1987. – 55-61.

2. H.M. Yehia. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies. – Mech. Res. Commun. **13** (3). – 1986. – 169-172.

Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах

Ф.Л. Хасан

(Челябинск, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»(НИУ); *fahas90@yahoo.co.uk*)

В докладе обсуждается возможность распространения относительно спектральной теоремы с банаховых пространств [1] на квазибанаховы. Необходимость такого распространения диктуется возможностью в будущем исследования дихотомий уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах. Заметим, что первая публикация о дихотомиях уравнений соболевского типа в банаховых пространствах появилась в 1997 г. [2], а первая монография на эту тему вышла в 2012 г. [3]

Пусть $\mathfrak{U}$ — линеал над полем $\mathbb{R}$. Упорядоченная пара $(\mathfrak{U}; {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \ {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq 0$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 0$ точно тогда, когда $u =\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нуль пространства $\mathfrak{U}$;

(ii) $\forall(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\| = |\alpha|{}_{\mathfrak{U}}\|u\|$;

(iii) $\forall u, v \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| +_{\mathfrak{U}} \|v\|)$, где константа $C \geq 1$.

Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ со свойствами (i) – (iii) называется *квазинормой*, а если константа $C = 1$, то – нормой.

Квазинормируемые пространства нормируемы только в случае $C = 1$, но в любом случае они метризуемы [4], гл. 3. Значит, в них мы располагаем понятиями фундаментальной последовательности и полноты. Полное квазинормированное пространство называется квазибанаховым. Широко известным примером квазибанахова пространства служит пространство последовательностей ℓ_q при $q \in (0,1)$, константа $C = 2^{\frac{1}{q}}$ (при $q \in [1,+\infty)$ пространство ℓ_q – банахово). Кроме того, в [5] построены так называемые квазисоболевы пространства ℓ_q^m, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, причем $\ell_q^0 = \ell_q$.

Далее, пусть $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $(\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ – квазибанаховы пространства. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ назовем *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\left(\lim\limits_{k\to\infty} u_k\right)$ для любой последовательности $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, сходящейся в $\mathfrak{U}$. Нетрудно показать, что линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ с областью определения $\mathrm{dom} L = \mathfrak{U}$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные).

Линеал $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|.$$

Теперь пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Нетрудно показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M всегда замкнут.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Пусть } \sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \bigcup \sigma_1^L(M),\ \sigma_1^L(M) \neq \oslash, \\ \text{причем существует ограниченная область } \Omega_1 \subset \mathbb{C} \\ \text{с границей } \partial\Omega \text{ класса } C^1;\ \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \text{ и } \overline{\Omega}_1 \cap \sigma_0^L(M) = \oslash.\end{array}\right\} \tag{RS}$$

Построим операторы

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} L_\mu^L(M)d\mu,$$

где $\gamma_1 = \partial\Omega_1$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – правая, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L-резольвенты оператора M, причем интегралы понимаются в смысле Римана. По построению операторы $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма. *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем выполнено условие* (RS). *Тогда операторы* P_1 *и* Q_1 *– проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^{11}$ ($\mathfrak{F}^{11}$) $= \mathrm{im}P_1$ ($\mathrm{im}Q_1$) и через L_{11} (M_{11}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{11}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда*

(i) *операторы* $L_{11}, M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{11};\mathfrak{F}^{11})$;

(ii) *существует оператор* $L_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{11};\mathfrak{U}^{11})$.

В заключение рассмотрим случай, когда существует ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащая весь L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. По аналогии с [6] в этом случае оператор M называется (L,σ)-ограниченным. По лемме (в которой $\sigma^L_0(M) = \oslash$) существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)d\mu,$$

где $\gamma = \partial\Omega$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы и оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда* $P_1 = PP_1 = P_1P$ *и* $Q_1 = QQ_1 = Q_1Q$.

Построим операторы $P_0 = P - P_1$ и $Q_0 = Q - Q_1$. В силу следствия 1 эти операторы являются проекторами. Положим $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) $= \mathrm{im}P$ ($\mathrm{im}Q$), $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) $= \ker P$ ($\ker Q$), $\mathfrak{U}^{01}$ ($\mathfrak{F}^{01}$) $=$ $\mathrm{im}P_0$ ($\mathrm{im}Q_0$) и через L_{01} (M_{01}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{01}$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{01} \oplus \mathfrak{U}^{11}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{01} \oplus \mathfrak{F}^{11}$;

(ii) *операторы* $L_{01}, M_{01} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{01};\mathfrak{F}^{01})$;

(iii) *существует оператор* $L_{01}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{01};\mathfrak{U}^{01})$.

Литература

1. Келлер А. В. Относительно спектральная теорема // Вестник Челяб. гос. университета. Сер. Матем. Мех. – 1996. – № 1(3). – С. 62–66.

2. Свиридюк Г. А., Келлер А. В. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

3. Сагадеева М. А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.

4. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

5. Аль-Делфи Д. К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

6. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

О сходимости приближенных решений задачи оптимальных измерений с учетом резонансов

Ю.В. Худяков

(Челябинск, «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ); *Hudyakov74@gmail.com*)

Введем в рассмотрение пространства состояний $\aleph$, измерений $\mathfrak{U}$ при некотором фиксированном $\tau \in \mathbb{R}^+$:

$$\aleph = \{x \in L_2((0,\tau), \mathbb{R}^r : \ \dot{x} \in L_2((0,\tau), \mathbb{R}^r)\},$$

$$\mathfrak{U} = \left\{u \in L_2((0,\tau), \mathbb{R}^{r+n}) : \ u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau), \mathbb{R}^{r+n})\right\},$$

Кроме того, необходимыми являются пространства
$\mathfrak{Z} = \{x \in L_2((0,\tau), \mathbb{R}^{r+m} : \ \dot{x} \in L_2((0,\tau), \mathbb{R}^n)\}$ и $\mathfrak{Y} = C[\mathfrak{Z}]$. Выделим в $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ – множество допустимых измерений. Требуется найти *оптимальное измерение* $v \in \mathfrak{U}_\partial$ почти всюду на $(0,\tau)$, удовлетворяющую системе леонтьевского типа

$$L\dot{z} = Mz + Bu, \tag{1}$$

$$y = Cz + Du, \tag{2}$$

при начальных условиях Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\mu L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (z(0) - z_0) = 0, \tag{3}$$

минимизирующую значение функционала

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} \left(\sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| y^{(q)}(u,t) - (y_0^{(q)}(t) \overline{y}_0^{(q)}(t)) \right\|^2 dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt \right). \tag{4}$$

Здесь $z = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, причем $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ и $\dot{x} = \operatorname{col}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_r)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $u = \operatorname{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – вектор-функции измерений; $\operatorname{col}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – наблюдения, по которым не восстанавливается измерение и $y = \operatorname{col}(y_m + 1, y_m + 2, \ldots, y_n)$ – наблюдение, по которым восстанавливается измерение; $_0(t)$ – наблюдаемые выходящие сигналы, получаемые в ходе натурного эксперимента, по которым проводится восстановление входящего сигнала; $\overline{z}_0(t)$ – наблюдаемые выходящие сигналы, получаемые в ходе натурного эксперимента при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов; $y(u,t)$ – моделируемые состояние системы и выходящий сигнал, получаемые в ходе натурного эксперимента, $r+n$ – число параметров системы; L и M – квадратные матрицы порядка n, представляющие собой взаимовлияние скоростей состояния и состояния ИУ соответственно, причем $detL = 0$, $\theta = 0, 1, \ldots, p+1$, $\| \cdot \|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ соответственно.

В [1] представлен алгоритм нахождения приближенных решений задачи (1)-(4), основной идеей котрого является представление $u(t)$ в виде

$$u^l = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{\ell} a_{1j} \sin jt + a_{\omega_1} \sin \omega_1 t \\ \sum\limits_{j=0}^{\ell} a_{2j} \sin jt + a_{\omega_2} \sin \omega_2 t \\ \dots \\ \sum\limits_{j=0}^{\ell} a_{rj} \sin jt + a_{\omega_r} \sin \omega_k t \\ a_{\omega_{k+1}} \sin \omega_{r+1} t \\ a_{\omega_{k+2}} \sin \omega_{r+2} t \\ \dots \\ a_{\omega_{k+m}} \sin \omega_{r+m} t \end{pmatrix} \tag{5}$$

где $\ell \in \mathbb{N}$.

В докладе представляется и доказывается сходимость приближенных решений задачи (1)-(4). Основным результатом является

Теорема. Пусть матрица M — (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$. Пусть v — точное, а $v_k^\ell)$ — приближенное решение задачи оптимального измерения (1)–(4) на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$. Тогда для любых $z_0 \in \mathbb{Z}$ последовательность $\{v_k^\ell\}$ сходится к v по норме в $\mathfrak{U}$ при $k \to \infty$, $\ell \to \infty$ так, что $J_k(v_k^\ell) \to J(v)$, причем существует $T > 0$, для которого выполняется неравенство

$$T\|v_k^\ell - v\|^2 \leq J_k(v_k^\ell) - J(v).$$

Здесь k–номер итерации.

Литература

1. Худяков Ю.В. Алгоритм численного исследования модели Шестакова–Свиридюка измерительного устройства с инерционностью и резонансами – Математические заметки ЯГУ. 2013 №4. 225-236.

Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи в модели Буссинеска – Лява с весовыми коэффициентами в функционале

О.Н. Цыпленкова

(Челябинск, Южно-Уральский государственный университет (НИУ); *Tsyplenkova_ Olga@mail.ru*)

Работа выполнена в рамках направления, развиваемого Г.А. Свиридюком и его учениками. Она посвящена исследованию оптимального управления решениями линейных уравнений соболевского типа второго порядка, и базируется на результатах А.А. Замышляевой по исследованию разрешимости таких уравнений [1].

В работе рассматривается математическая модель Буссинеска – Лява в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$

$$(\lambda - \Delta)x_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')x_t + \beta(\Delta - \lambda'')x + u \tag{1}$$

с граничным условием

$$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

Если Ω – отрезок, то модель (1), (2) описывает колебания в упругом стержне с учетом инерции. Параметры α, β, λ, λ', λ'' характеризуют свойства материала, из которого изготовлен стержень, и связывают между собой плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент упругости. Функция $x(t,s)$ характеризует продольное смещение, а функция $u(t,s)$ – управление, определяющее внешнее воздействие.

Если Ω – область в $\mathbb{R}^2$, то модель (1), (2) описывает распространение волн на мелкой воде. Параметры α, β, λ, λ', λ'' связывают глубину, гравитационную постоянную и число Бонда. Функция $x(t,s)$ определяет высоту волны в момент времени t в точке s, $u(t,s)$ – управление, задающее внешние силы.

Нас будут интересовать решения задачи (1), (2), удовлетворяющие начально-конечным условиям

$$\begin{gathered} P_{in}(\dot{x}(0) - x_1^0) = 0, \; P_{in}(x(0) - x_0^0) = 0; \\ P_{fin}(\dot{x}(\tau) - x_1^\tau) = 0, \; P_{fin}(x(\tau) - x_0^\tau) = 0; \end{gathered} \tag{3}$$

где $P_{in(fin)}$ – некоторые спектральные проекторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$.

Математическую модель (1) – (3) удается свести к начально-конечной задаче для абстрактного уравнения соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0 x + y + Cu, \tag{4}$$

где операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Y}$ $(\tau < \infty)$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства.

Задача (3), (4) называется начально-конечной, и является естественным обобщением задачи Шоуолтера – Сидорова [2] и задачи Коши.

Вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$ назовем *состоянием системы* (3), (4), если она является решением задачи (3), (4) . Зафиксировав $x_0^0, x_1^0, x_0^\tau, x_1^\tau$, y, воздействие на систему (3), (4) осуществляется изменением функции u, называемой *управлением.* В конкретных моделях, встречающихся на практике, на функцию управления, как правило, накладываются некоторые естественные ограничения, что приводит к необходимости рассмотрения некоторого замкнутого и выпуклого множества $\mathfrak{U}_{ad}$ – *множества допустимых управлений.*

В работе доказана теорема существования единственного управления $\hat{u} \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ решениями задач (3), (4), минимизирующего функционал качества

$$J(x,u) = \mu \sum_{q=0}^{2} \int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||_{\mathfrak{X}}^2 dt + \nu \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{5}$$

где $\mu, \nu > 0$, $\mu + \nu = 1$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+2$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы.

Впервые функционал такого типа для исследования оптимального управления для моделей леонтьевского типа был рассмотрен в [3], а для уравнений соболевского типа первого порядка – в работах [4]. Автором ранее был рассмотрен функционал

(5) без весовых коэффициентов, например, в [5]. Значения весовых коэффициентов определяется исходя из значимости целей управления: достижение требуемых показателей или минимизация управляющего воздействия.

Получены достаточные условия существования и единственности оптимального управления решениями задачи (3) для уравнения (4).

Абстрактные результаты применены для исследования модели (1) – (3), а именно

Теорема 1. *При любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mu, \nu > 0$, *причем* $\mu + \nu = 1$, *и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *таких, что выполнено выполнено одно из следующих условий*

(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$,

(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$,

и любых $\tau \in \mathbb{R}_+, x_k^0, \ x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0, 1$, *существует единственное решение задачи оптимального управления* $(\hat{x}, \hat{u})$ *для уравнения Буссинеска – Лява (1) с условиями (2), (3), минимизирующее функционал (5).*

Литература

1. Загребина С.А. Начально-конечная задача для линейной системы Навье – Стокса // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 4 (221), вып. 7. С. 35 – 39.

2. Замышляева А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 37 (254), вып. 10. С. 22 – 29.

3. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.В. Келлер. — Челябинск, 2011. — 249 с.

4. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия «Физ.-мат. науки». — 2011. — № 4 (25). — С. 18–24.

5. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1390 – 1398.

Численное исследование высокочастотной низкотемпературной плазмы пониженного давления[18]

В.Ю. Чебакова, В.С. Желтухин

(Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казанский национальный исследовательский технологический университет;
vchebakova@mail.ru)

Высокочастотный емкостный (ВЧЕ) разряд пониженного давления ($p = 13.3 \div 133$ Па) при межэлектродных расстояниях 20-30 см широко применяется для обработки кожевенно-мехового полуфабриката [1]. В работе [2] показано, что существенными факторами, оказывающим влияние на происходящие процессы, являются потери энергии на нагрев газа и наличие метастабильных атомов, так как энергия метастабильного состояния достаточна для того, чтобы через процессы возбуждения и девозбуждения метастабильных атомов и ступенчатой ионизации влиять на нагрев газа и электронную температуру. Поэтому для определения диапазона устойчивого горения ВЧЕ-разряда пониженного давления в плазмотроне с большим межэлектродным расстоянием разработана математическая модель, включающая в себя уравнения непрерывности для электронного и ионного газа, уравнение Пуассона для распределения потенциала электрического поля, уравнение баланса метастабильных атомов, уравнение электронной теплопроводности, уравнение теплопроводности атомно-ионного газа с соответствующими краевыми и начальными условиями.

Указанная система краевых и начально краевых задач характеризуется несколькими особенностями, осложняющими раз-

[18] Работа выполнена при финансовой поддержки РФФИ (проекты 14-01-31347, 14-01-00755, 13-01-00908)

работку алгоритма и численного метода ее решения. Во-первых, она состоит из задач разного типа: начально-краевых задач для уравнений с частными производными параболического типа и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которые время входит как параметр. Во-вторых, наличие разных временных масштабов изменения основных характеристик установившегося состояния ВЧЕ-разряда пониженного давления. В-третьих, характерной особенностью задачи является большие градиенты плотности заряженных частиц и напряженности электрического поля в приэлектродных слоях на границах расчетной области. Поэтому, если в квазинейтральной области происходит процесс с доминированием диффузии (регулярно возмущенная задача), то в приэлектродных областях наблюдается случай сильного доминирования конвекции (сингулярно возмущенные задачи). Это приводит к появлению областей сильного изменения решения, в частности, пограничными и внутренними переходными слоями. В-четвертых, представленная система задач является нелинейной, как по отдельным входящим в нее уравнениям, так и в целом.

Для численной реализации модели использовалась неявная конечно-разностная схема с равномерным разбиением сетки. Оператор конвективного переноса аппроксимировался с помощью направленных разностей. Применение интегро-интерполяционного метода обеспечило консервативность конечно-разностной схемы [3].

Расчеты проводились до выхода процесса на стационарный режим, когда достигался полный баланс заряда в межэлектродном промежутке: заряд, который уносится за период на электрод электронам, и в точности компенсируется выносом положительного заряда ионами.

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными [4] и результатами численного расчета по модели, предложенной в [5], и показали хорошее качественное совпадение.

Литература

1. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф. Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2000. – 348 с.

2. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, Кн. 2. – С. 127–134.

3. Самарский А.А., Вабищевич П.Р. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – Москва: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.

4. Лисовский В.А. Особенности $\alpha-\gamma$-перехода в ВЧ-разряде низкого давления в аргоне // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, вып. 5. – С. 52–60.

5. Lymberopoulos Dimitris P. and Economou Demetre J. Fluid simulations of glow discharge & Effect of metastable atoms in argon // J. Appl. Phys. – 15 April 1993. – Vol. 73, No. 8. – C. 3668–3679.

Обзор случаев интегрируемости уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле[19]

М.В. Шамолин

(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова; *shamolin@rambler.ru*, *shamolin@imec.msu.ru*)

Изучение динамики многомерного твердого тела зависит от структуры силового поля. Опорными результатами являются уравнения движения маломерных твердых тел в поле силы сопротивления среды, и тогда становится возможным обобщение динамической части уравнений на случай движения тела многомерного в аналогично построенном поле сил и получение полного списка трансцендентных первых интегралов. Полученные

[19]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00020-а)

результаты важны в том смысле, что в системе присутствует неконсервативный момент, а ранее в основном использовалось поле сил потенциальное [1].

Ранее была показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде при некоторых условиях, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (прежде всего, в смысле комплексного анализа, и уже потом в смысле теории элементарных функций) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений также был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Далее, была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску [1].

Для начала в работе излагаются общие аспекты динамики свободного многомерного твердого тела: понятие тензора угловой скорости тела, совместные динамические уравнения движения на прямом произведении $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$, формулы Эйлера и Ривальса в многомерном случае.

Рассмотрен вопрос о тензоре инерции четырехмерного ($4D-$) твердого тела. В данной работе предлагается изучать два логически возможных случая на главные моменты инерции (когда имеются *два* соотношения на главные моменты инерции):

(i) когда имеется *тройка* равных главных моментов инерции ($I_2 = I_3 = I_4$);

(ii) когда имеется *две пары* равных момента инерции ($I_1 = I_2, I_3 = I_4$).

При этом систематизируются полученные результаты по исследованию уравнений движения четырехмерного ($4D-$) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил для случая (i). Его вид также заимствован из динамики реальных твердых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, или заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, или заставляющая во все время движения центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил.

Более того, к четырем имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (неинтегрируемой связи и трем интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости) найдены четыре дополнительных трансцендентных первых интеграла, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, а в случае наличия в системе неконсервативной пары сил — сделано то же самое, только к четырем имеющимся аналитическим первым интегралам (квадрату скорости центра масс и трем интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости).

Результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

В дальнейшем систематизируются полученные результаты по исследованию уравнений движения четырехмерного ($4D-$) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил для случая (ii). Его вид также заимствован из динамики реальных твердых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения оставаться постоянными во времени как величину скорости некоторой характерной точки твердого тела, так и некоторую другую фазовую переменную. Последний факт означает наличие в системе неинтегрируемых сервосвязей.

Более того, к четырем имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (двум неинтегрируемым связям и двум интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости) найдены два аналитических и три дополнительных трансцендентных первых интеграла, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, которая перпендикулярна данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности [2–5].

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: "Экзамен 2007. 352 с.

2. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН, 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.

3. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.

4. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН, 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.

5. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН, 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.

Об аффинной однородности поверхностей $(0, \varepsilon)$-типов в $\mathbb{C}^3$

А.В. Шиповская

Целью нашей работы является изучение задачи описания однородных вложенных многообразий с использованием компьютерных алгоритмов и, в частности, пакета символьных вычислений MAPLE.

Рассматривается класс вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, задаваемых локальными уравнениями вида [1]

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + [\varepsilon_1(z_1^2 + \overline{z_1^2}) + \varepsilon_2(z_2^2 + \overline{z_2^2})] + \sum_{k+l+2m \geq 3} F_{klm}(z, \overline{z}, u). \tag{1}$$

При $\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \varepsilon_2 = \varepsilon \neq 1/2$ будем называть поверхности вида (1) поверхностями $(0, \varepsilon)$-типа. Ниже рассматривается именно этот случай.

В соответствии с [2] задача связывается с описанием 5-мерных вещественных матричных алгебр Ли с базисами специального вида:

$$E_1 = \begin{bmatrix} t_1 + it_2 & t_3 + it_4 & A3_1 & 1 \\ t_5 + it_6 & t_7 + it_8 & B3_1 & 0 \\ 2\,i\,(1 + 2\,\varepsilon) & 0 & 2\,m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} t_9 + it_{10} & t_{11} + it_{12} & A3_2 & i \\ t_{13} + it_{14} & t_{15} + it_{16} & B3_2 & 0 \\ 2 - 4\,\varepsilon & 0 & 2\,m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} t_{17} + it_{18} & t_{19} + it_{20} & A3_3 & 0 \\ t_{21} + it_{22} & t_{23} + it_{24} & B3_3 & 1 \\ 0 & 2\,i & 2\,m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} t_{25} + it_{26} & t_{27} + it_{28} & A3_4 & 0 \\ t_{29} + it_{30} & t_{31} + it_{32} & B3_4 & i \\ 0 & 2 & 2\,m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} A1_5 & A2_5 & A3_5 & 0 \\ B1_5 & B2_5 & B3_5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,m_5 + 2\,i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Основную роль в изучении алгебр играют *ключевые* (1,1)-, (1,2)-, (2,1)-, (2,2)- и (3,3)-элементы базисных матриц $E_1 - E_4$. Они выписаны в развернутой форме с выделением их вещественных и мнимых частей. Для матрицы E_5 из алгебры, отвечающей однородной поверхности $(0, \varepsilon)$-типа, справедливо равенство

$$E_5 = \frac{1}{4}\left(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 - [E_1, E_2]\right).$$

Оно вытекает из рассмотрения коммутатора $[E_1, E_2] = E_1 \cdot E_2 - E_2 \cdot E_1$. Здесь α_j - коэффициенты разложения этого коммутатора $[E_1, E_2]$ по базису исходной алгебры.

Рассмотрение всех попарных коммутаторов $[E_k, E_l]$ базисных матриц изучаемой алгебры приводит к большой системе уравнений, квадратичных относительно элементов этих матриц. На первом этапе из этой системы выделяется подсистема из 12 комплексных (или 24 вещественных) уравнений, связанная с (3,1)- и (3,2)-элементами шести коммутаторов

$$[E_1, E_2], [E_1, E_3], [E_1, E_4], [E_2, E_3], [E_2, E_4], [E_3, E_4],$$

и являющаяся (при фиксированном значении параметра ε) линейной.

Предложение 1. *После решения линейной системы, отвечающей аффинно-однородным поверхностям $(0, \varepsilon)$-типов, из набора 36 ключевых параметров (t_k, m_j) свободными остаются лишь 16:*

$$t_1, t_3, t_4, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{16}, t_{24}, t_{27}, t_{28}, t_{32}; m_1, m_2, m_3, m_4. \qquad (3)$$

Замечание. Предложение 1 означает, что ранг обсуждаемой системы из 24 вещественных уравнений является неполным и равен 20.

Часть выражений для остальных *ключевых* параметров, связанных с решением линейной системы, приведена ниже.

$$t_{31} = m_4,\ t_2 = \frac{1}{2\varepsilon}(-t_9 - 2\varepsilon t_9 + m_2 + 2\varepsilon m_2),$$

$$t_{17}=\frac{m_3+2\varepsilon m_3-2\varepsilon t_{26}+2\varepsilon t_3}{1+2\varepsilon}.$$

После уменьшения числа параметров в базисе (2) можно перейти к основному этапу решаемой задачи об однородности.

Он связан с левыми верхними (2)-блоками 4-х коммутаторов $[E_1,E_3]$, $[E_1,E_4]$, $[E_2,E_3]$, $[E_2,E_4]$ и состоит в изучении системы из 8 комплексных (или 16 вещественных) квадратичных уравнений относительно набора параметров (2). Одно из самых простых полученных здесь уравнений приведено ниже.

$$-1/2t_{11}^2-it_{11}t_{12}-it_3m_4+t_3t_3-t_3t_{12}+1/2t_{12}^2+3/2t_4^2-3/2t_3^2+t_4m_4+t_{12}^2\varepsilon-$$

$$-3it_4t_3+it_3t_{24}+it_{11}t_3+it_4m_3+it_4t_{32}-2t_4\varepsilon t_{11}-2\varepsilon t_3t_{12}-it_4t_{12}+$$

$$2\varepsilon it_3t_{11}+2\varepsilon it_4t_3-t_{11}^2\varepsilon-t_4t_{24}-t_4^2\varepsilon+$$

$$+\varepsilon t_3^2+t_3m_3-t_4t_{11}-2\varepsilon it_{12}t_{11}-2\varepsilon it_{12}t_4=0.$$

В отличие от поверхностей $(0,1/2)$-типа, для которых часть квадратичных уравнений разлагается на линейные множители (см. [3]), наш случай оказывается более сложным. Один из вариантов изучения такой системы состоит в изучении случаев, сводящихся к описанию [1] или, наоборот, отличающихся от него.

Напомним, что в упомянутой работе полностью изучены алгебры, отвечающие аффинно-однородным поверхностям $(0,\varepsilon)$-типов и имеющие базисы вида (2) с двумя дополнительными ограничениями:

1) матрица E_5 из базиса (2) имеет тривиальный вид

$$E_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

2) элементы $A3_k, B3_k$ $(k=1,...,4)$ базисных матриц (17.2) – нулевые.

За счет компьютерных вычислений получено следующее утверждение.

Теорема. *При условии обращения в нуль восьми параметров*

$$t_3, t_4, t_{11}, t_{12}, t_{24}, t_{27}, t_{28}, t_{32},$$

для алгебр, отвечающих аффинно-однородным поверхностям $(0, \varepsilon)$*-типов, справедливы выписанные выше ограничения 1) и 2).*

Это означает сужение "зоны поиска"(возможно, существующих) новых примеров алгебр, не удовлетворяющих ограничениям 1) и 2), с 36 возможных параметров лишь до 8.

Литература

1. Лобода А. В., Ходарев А.С. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства // Известия вузов. Математика. – 2003. – N 10. – С. 38 - 50.

2. Лобода А.В., Нгуен Т.Т.З. Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа $\mathbb{C}^3$ // Труды МИАН, 2012, Т. 279, С. 93 - 110.

3. Павлова Е.А., Лобода А.В. Компьютерные алгоритмы решения некоторых систем квадратичных уравнений // Сборник студ. научн. работ ФКН ВГУ, вып. 7. 2013 г. С.105-113

О точном решении одного полигармонического уравнения в пространствах Степанова

А. Шихаб, М. Гим

(Воронеж, Воронежский государственный университет)

Через $S_p[\mathbb{R}]$ обозначим замыкание пространства равномерно непрерывных и ограниченных функций $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$ по норме Степанова

$$\|u\|_{S_p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+1} |u(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1. \tag{1}$$

Определим оператор дифференциальным выражением Δ $\delta u = u''(x)$ и областью определения $D(\Delta) = \{u \in S_p[\mathbb{R}],\, u''(x) \in S_p[\mathbb{R}]\}$ и для $f \in S_p[\mathbb{R}]$ рассматриваются операторные уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} a_n \cdot \Delta^m u = f(x), \tag{2}$$

где с действительными коэффициентами a_m справедлива следующая

Теорема. Если корни скалярного полинома $P_n(\lambda) = \sum_{m=1}^{n} a_m \lambda^m$ отрицательны, то уравнение (2) имеет единственное решение $u \in S_p[\mathbb{R}]$ и оно представимо в виде

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\tau^2}\int_0^\infty G(t)C(2\sqrt{t\tau})f(x)dtd\tau,$$

где $G(x)$ решение задачи Коши для дифференциального уравнения $P_n\left(\frac{d}{dx}\right)G(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$— дельта–функция Дирака, $G(0) = \frac{d}{dx}G(x)|_{x=0} = \cdots = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}G(x)|_{x=0}$, $C(\xi)f(x) = \frac{1}{2}[f(x+\xi) + f(x-\xi)]$.

Литература

1. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова / А.В.Костин, В.А. Костин. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2007, – 259 с.

Об оптимальном управлении решениями нестационарных уравнений соболевского типа в относительно радиальном случае

А.Н. Шулепов

(Челябинск, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»(НИУ); *andrewn92@mail.ru*)

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$.

Рассмотрим задачу Шоуолтера–Сидорова [1]

$$P(x(0)-x_0)=0 \tag{1}$$

для уравнения соболевского типа [2]

$$L\dot{x}(t)=a(t)Mx(t)+f(t)+Bu(t),\ (\ker L\neq\{0\}) \qquad t\in[0,\tau], \tag{2}$$

где вектор-функция $u:[0,\tau]\to\mathfrak{U}$, $f:[0,\tau]\to\mathfrak{Y}$ и скалярная функция $a:[0,\tau]\to\mathbb{R}_+$ будут в дальнейшем определены.

Введем в рассмотрение функционал качества

$$\begin{gathered}J(u)=\alpha\textstyle\sum_{q=0}^{1}\int\limits_0^\tau\|z^{(q)}(t)-z_d^{(q)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}^2dt+\\+(1-\alpha)\textstyle\sum_{q=0}^{k}\int\limits_0^\tau\left\langle N_qu^{(q)}(t),u^{(q)}(t)\right\rangle_{\mathfrak{U}}dt,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\alpha\in(0,1)$, $k=0,1,...,p+1$, $N_q\in\mathcal{L}(\mathfrak{U})$, — самосопряженные и положительно определенные операторы, $z=Cx$, оператор $C\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$, а $z_d=z_d(t,s)$ — плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$. Отметим, что $\alpha\in(0,1)$ и $(1-\alpha)$ — весовые коэффициенты целей оптимального управления, заключающиеся в достижении плановых показателей наблюдаемой величины без скачкообразных изменений (первое слагаемое в (3)) и минимизации расходуемых для этого ресурсов управления (второе слагаемое в (3)). Оптимальное управление для стационарных уравнений соболевского типа рассмотрено в [2].

1. Относительно радиальные операторы

Обозначим

$$\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\},\qquad \sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M),$$

$$R_\mu^L(M)=(\mu L-M)^{-1}L,\quad L_\mu^L(M)=L(\mu L-M)^{-1},\quad \mu\in\rho^L(M),$$

$$R_{(\lambda,p)}^L(M)=\prod_{k=0}^{p}R_{\lambda_k}^L(M),\ L_{(\lambda,p)}^L(M)=\prod_{k=0}^{p}L_{\lambda_k}^L(M),\ \ \lambda_k\in\rho^L(M)\,(k=\overline{0,p}).$$

Обозначим также

$$\mathfrak{X}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M),\ \mathfrak{Y}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),\ L_0 = L\Big|_{\mathfrak{X}^0},\ M_0 = M\Big|_{\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{X}^0}.$$

Через $\mathfrak{X}^1$ ($\mathfrak{Y}^1$) обозначим подпространство в $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{Y}$), являющееся замыканием линеала $\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$). $R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{Y}^0 \dot{+} \mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{Y}$).

Определение 1. Оператор M назовем *сильно* (L,p)-*радиальным*, если при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p > \omega$ выполняются условия

(i) существует плотный в $\mathfrak{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$ такой, что для всех $y \in \overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) y\|_{\mathfrak{Y}} \le \frac{\mathrm{const}(y)}{(\lambda - \omega) \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - \omega)};$$

(ii) $$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})} \le \frac{K}{(\lambda - \omega) \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - \omega)}.$$

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$;

(ii) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{X}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $\quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom} M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$,

$\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$.

Через P (Q) обозначим проектор на подпространство $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{Y}$).

2. Оптимальное управление

Определение 2. Вектор-функция $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ называется *сильным решением уравнения* (2), если она почти всюду на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (2) называется *сильным решением задачи Шоуолтера-Сидорова* (1), (2), если оно удовлетворяет (1).

С помощью методов, примененных в [3] для изучения устойчивости решений однородного уравнения (2), доказана следующая

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$ $(\equiv \{0\} \cup \mathbb{N})$, а функция $a \in C^{p+1}([0,\tau);\mathbb{R}_+)$. Тогда для любых $x_0 \in \mathfrak{X}$ и $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи Шоуолтера-Сидорова* (1) *для уравнения* (2), *причем*

$$x(t) = X^{\int\limits_0^t a(\zeta)d\zeta} P x_0 + \int\limits_0^t X^{\int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta} L_1^{-1} Q(f(s) + Bu(s))ds -$$

$$-\sum_{k=0}^{p} (M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1}(I-Q)(AD)^k A\left(f(t) + Bu(t)\right),$$

где $(Ah)(t) = a^{-1}(t)h(t)$, $(Dh)(t) = \dfrac{dh}{dt}(t)$, а $\{X^t : t > 0\}$ вырожденная C_0-полугруппа, разрешающая однородное уравнение (2).

Определение 3. Вектор-функцию $v \in H^1_\partial(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением* решениями задачи (1), (2), если

$$J(v) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times H^1_\partial(\mathfrak{U})} J(u), \qquad \alpha \in (0,1), \tag{4}$$

где пары $(x,u) \in \mathfrak{X} \times H^1_\partial(\mathfrak{U})$ удовлетворяют (1), (2) и $H^1_\partial(\mathfrak{U})$ — замкнутое, выпуклое подмножество в $H^1(\mathfrak{U})$.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, функция $a \in C^{p+1}([0,\tau);\mathbb{R}_+)$. Тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{X}$, $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление $v \in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ задачи* (1)–(4).

Литература

1. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 216 p.

3. Федоров В.Е., Сагадеева М.А. Существование экспоненциальных дихотомий некоторых классов вырожденных линейных уравнений // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 82–92.

Об алгоритме нахождения приближенных решений задач смешанного жесткого управления для систем леонтьевского типа

А.А. Эбель

(г. Челябинск, ЮУрГУ (НИУ); *ebel-aa@yandex.ru*)

Пусть L и M – матриц $n \times n$, $\det L = 0$, $M - (L,p)$ – регулярна ($\exists \lambda \in C : \det(\lambda L - M) = 0$ $\exists p \in 0 \cup \mathbb{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L – резольвента $(\lambda L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую особую точку и равна порядку полюса в противном случае). Введем в рассмотрение пространства состояний

$$X = H^1(\mathbb{R}^n) = \{x \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n)\},$$

и уравнений

$$U = H^{p+1}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n)\},$$

$$U^0 = \mathbb{R}^n.$$

Выделим в U и U^0 компактные и выпуклые подмножества U_{ad} и U_{ad}^0 соответственно, будем называть их множествами допустимых управлений. Решение задачи смешанного управления заключается в нахождении тройки $(v_0, v(t), x(t)) \in X \times U_{ad}^0 \times U_{ad}$ почти всюду на $(0;\tau)$ удовлетворяющую системе леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t) + Bu(t) \tag{1}$$

с начальными условиями Шоуолтера-Сидорова

$$[R_\mu^L(M)]^{p+1}(x(0) - u_0) = 0, \tag{2}$$

при этом

$$J(v_0, v(t)) = \min_{(u_0,u)\in U^0_{ad}\times U_{ad}} J(u_0, u), \tag{3}$$

$$J(u_0, u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(t, u_0, u) - Cx_0^q(t) \right\|^2 dt, \tag{4}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$, C – квадратная матрица порядка n, $f : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Справедлива теорема. Пусть матрица $M(L, p)$ – регулярна, $p \in 0 \cup \mathbb{N}$, причем $\det M \neq 0$. Тогда существует единственное решение $(v_0, v(t),\, x(v_0, v)) \in U^0_{ad} \times U_{ad}$ – точка минимума функционала (4), а $x(v_0, v)$ – сильное решение задачи (1), (2) и определяется формулой

$$\lim_{k\to+\infty}\Bigg[-\sum_{q=0}^{p}(M^{-1}(I-Q_k)L)^q M^{-1}(I-Q_k)(f+Bu)^q(t)+$$

$$+X_k^t v_0 + \int_0^\tau R_k^{t-s} Q_k(f(s)+Bu(s))ds\Bigg]. \tag{5}$$

Здесь

$$Q_k = (kL_k^L(M))^{p+1},$$

$$X_k^t = ((L - \frac{t}{k}M)^{-1}L)^{k(p+1)},$$

$$R_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k}M\right)^{-1} L\right)^{k(p+1)-1} \cdot \left(L - \frac{t}{k}M\right)^{-1}.$$

Будем следовать идеям численного решения задачи оптимального управления для систем леонтьевского типа [1] и приближенные решения искать в виде:

$$u_0 = col(a_{01}, ..., a_{0n}),\ u = col\left(\sum_{j=0}^{l} a_{1l}t^l, ..., \sum_{j=0}^{l} a_{nl}t^l\right).$$

В результате задача нахождения приближенных решений (1)-(4) сведется к решению задачи выпуклого программирования относительно массива $A_{n\times l+2} = (a_{ij})$.

В докладе помимо представления алгоритма численного решения приводится модельный пример приближенного решения задачи смешанного жесткого управления.

Список литературы

1. Келлер А.В.Об алгоритме решения задач оптимального и жестокого управления // Программные продукты и системы. – Тверь, 2011, №3. – С. 170 – 174.

“Rigid” sliding of polynomials on the continuous coefficients belonging to the family of Fibonacci function. The results of numerical modeling

Yu.Ya. Agranovich, N.V. Kontsevaya**, A.N. Sheludiakov**

(*Voronezh, Voronezh State Technical University;

**Moscow, Financial University under the Government of the Russian Federation;

agyrya@yandex.ru, kontsevaya07@list.ru, tander2006@rambler.ru)

In the notice the results of numerical modeling of the behavior of polynomials’ roots with variable coefficients from a family of Fibonacci functions are obtained.

Keywords: Fibonacci functions, sliding lacunar polynomials

Let remind, that previously in [1, 2] we considered the sliding of polynomials of fixed degree through double-sided sequence of Fibonacci numbers. Now we naturally go over to continuous functions of independent variable x in the formula of Jacques Binet. It is clear that in this case the situation will be more complicated, because the coefficients of polynomials become multivalued complex functions of real argument, dependent on two integer parameter k and m. In fact, from the correlations

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x \cdot 1^x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x \cdot e^{2\pi ikx} =$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x \cdot (cos(2\pi kx) + isin(2\pi kx))$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x \cdot (-1)^x = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x \cdot e^{(\pi+2\pi m)ix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x (cos((\pi + 2\pi m)x) + isin((\pi + 2\pi m)x)) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x (cos(\pi x(1+2m)) + isin(\pi x(1+2m)))$$

we have the following form :

$$\sqrt{5} \cdot F_{k,m}(x) = \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x cos(2\pi kx) - \left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x cos(\pi x(1+2m)) +$$
$$+ i\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x sin(2\pi kx) - \left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x sin(\pi x(1+2m))\right],$$
$$x \in \mathbb{R}; k, m \in \mathbb{Z}$$

Thus, we take the following two-parameter family of functions:

$$F_{k,m}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x cos(2\pi kx) - \left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x cos(\pi x(1+2m)) +\right.$$
$$\left.+ i\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x sin(2\pi kx) - \left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x sin(\pi x(1+2m))\right]\right\},$$
$$x \in \mathbb{R}; k, m \in \mathbb{Z}$$

as a family of Fibonacci functions. Now we consider the behavior of function $F_{k,m}(x)$ when the argument changes from x=6 to x=8 with the step equal to 0.001. Let accept k=0, m=0, and then k=1, m=1.

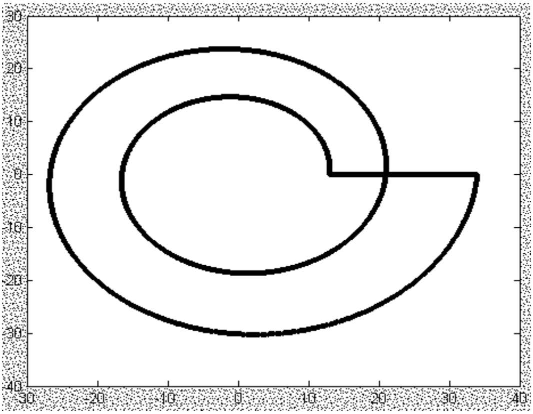


Fig.1 - Graph of Fibonacci function with k=0 and 1, m=0 and 1

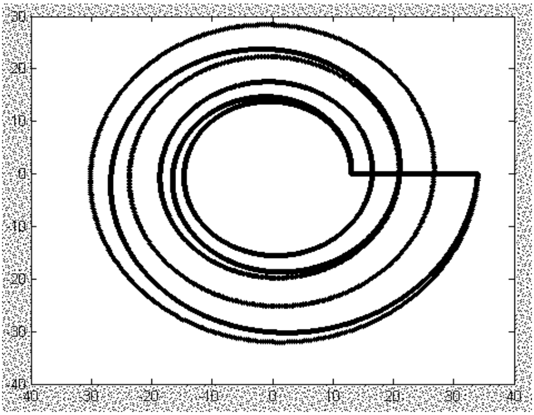


Fig.2 - Graph of Fibonacci function with k=0..2, m=0..2

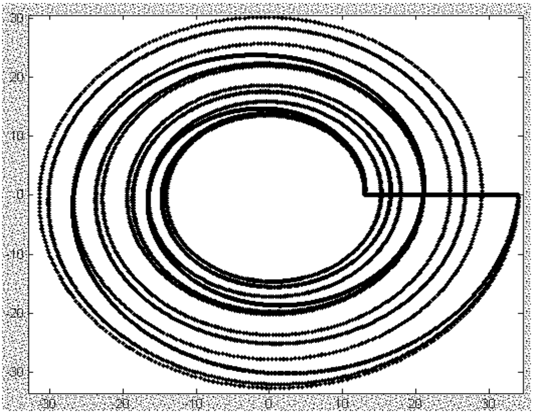


Fig.3 - Graph of Fibonacci function with k=0..3, m=0..3

For fixed value of x quantities k and m can take different, independent on x values, because different branches of complex function are equal. That's why further we will distinguish "rigid" sliding from others. Let take the fact, that "rigid" sliding in different coefficients from Fibonacci functions correspond to the same values of integer parameters k and m. In this article we study results of numerical modeling just for the case of "rigid" sliding. Now we consider the behavior of the roots of polynomials, for example of the fifth degree, in the "rigid" sliding in the interval between x=3 and x=4 at the highest degree, where k is equal to 0 and 1, and m, respectively, is also equal to 0 and 1.

$$F_{k,m}(x)\lambda^5 + F_{k,m}(x+1)\lambda^4 + F_{k,m}(x+2)\lambda^3 +$$
$$+F_{k,m}(x+3)\lambda^2 + F_{k,m}(x+4)\lambda + F_{k,m}(x+5) = 0$$

$$F_{k,m}(x+0.001)\lambda^5 + F_{k,m}(x+1.001)\lambda^4 + F_{k,m}(x+2.001)\lambda^3 +$$
$$+F_{k,m}(x+3.001)\lambda^2 + F_{k,m}(x+4.001)\lambda + F_{k,m}(x+5.001) = 0$$

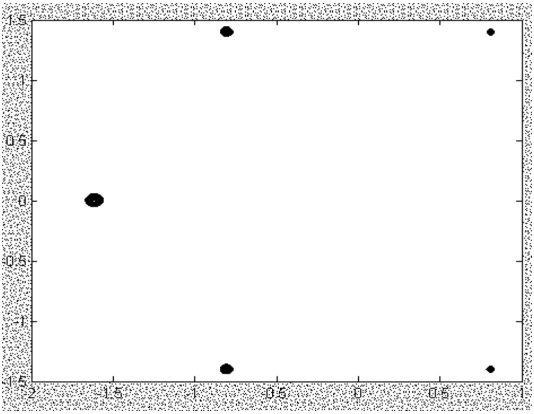


Fig.4 - Distribution of the roots of polynomials of the fifth degree

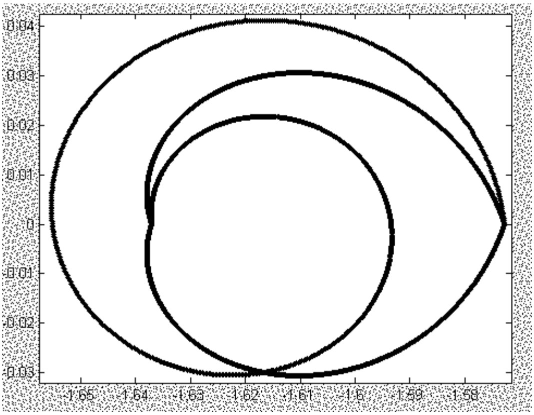


Fig.5 - Behavior of the roots of polynomials in the neighborhood of point -1,6 with k=0 and 1, m=0 and 1

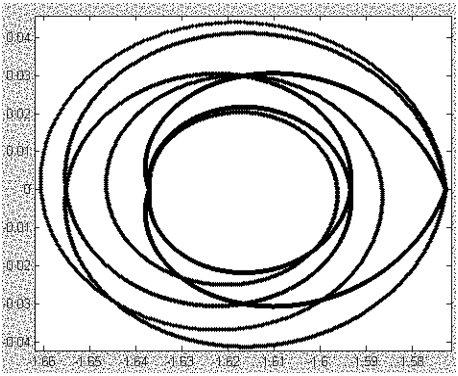


Fig.6 - Behavior of the roots of polynomials in the neighborhood of point -1,6 with k=0..2, m=0..2

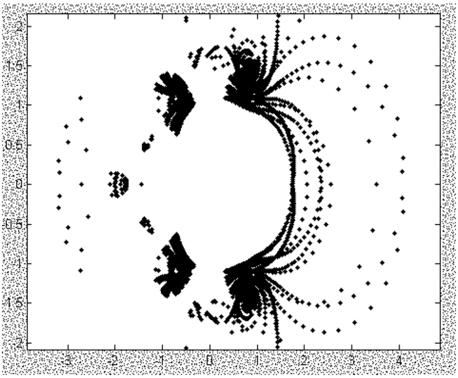


Fig.7 - Behavior of the roots of polynomials with x changes from -2 to 2 with the step 0,01 with k=0..2, m=0..2

References 1. Агранович Ю.Я., Шелудяков А.Н. Предельное поведение корней скользящих лакунарных многочленов для двусторонней последовательности чисел Фибоначчи// Вестник воронежского государственного технического университета, т.9, №2, 2013, с.21-23.

2. Агранович Ю.Я., Шелудяков А.Н. Предельное поведение корней скользящих лакунарных многочленов для рекуррентных последовательностей на примере чисел Фибоначчи. В кн.: Современные методы теории краевых задач: материалы воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XXIV». Воронеж: ВГУ, 2013, с.8-11.

Discretization of evolution equations

S. Piskarev
(Moscow, Lomonosov Moscow State University;
piskarev@gmail.com)

It is well known that the abstract Cauchy problem in a Banach space E
$$\zeta'(t) = A\zeta(t),\, t \geq 0,\, \zeta(0) = \zeta^0,$$
is well-posed if and only if the operator A generates a C_0-semigroup $\exp(\cdot A)$ and the second order Cauchy problem
$$\xi''(t) = A\xi(t),\, t \geq 0,\, \xi(0) = \xi^0, \xi'(0) = \xi^1,$$
is well-posed if and only if the operator A generates a C_0-cosine operator function $C(\cdot, A)$. The mild solutions of these problems can be written in the form
$$\zeta(t) = \exp(tA)\zeta^0, \quad \xi(t) = C(t, A)\xi^0 + S(t, A)\xi^1,$$
where $S(t, A) = \int_0^t C(s, A)ds$. Moreover, the following relations hold
$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(tA)dt, \tag{1}$$
$$\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t, A)dt, \quad (\lambda^2 I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t, A)dt. \tag{2}$$

A k-times integrated semigroup is a family of bounded linear operators $e_k^{tA} \in B(E), t \in \overline{R}_+$, that is strongly continuous in $t \in [0, \infty)$ and satisfies equation
$$e_k^{tA} = A\int_0^t e_k^{sA} ds + \frac{t^k}{k!}, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

If the k-times integrated semigroup is exponentially bounded, i.e. $\|e_k^{tA}\| \leq Me^{\omega t}, t \in \overline{R}_+$, then the resolvent satisfies
$$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^k \int_0^\infty e^{-\lambda t} e_k^{tA} dt \quad \text{for} \quad \lambda > \omega. \tag{4}$$

The integrated semigroups are considered when conditions on operator A are less restrictive than to be a generator of C_0-semigroup or C_0-cosine operator function. For example, Schrödinger operator $i\Delta$ generates a C_0-semigroup on $L^p(R^n)$ iff $p = 2$, however, if $\alpha > n|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|$, then $i\Delta$ generates α-times integrated semigroup. Integrated semigroups are powerful tools in the study of differential operators on function spaces such as $L^p(R^n)$ or $C_0(R^n)$.

Let us consider an abstract Caushy problem in a Banach space E

$$D^\alpha w(t) = Aw(t),\, t \geq 0,\, w(0) = w^0, \text{if } 0 < \alpha < 1, \tag{5}$$

or with an additional condition $w'(0) = w^1$, if $1 < \alpha < 2$, and the fractional derivative D^α is understood in Caputo sense. Then, denoting resolution family of a problem (5) as $\Psi_\alpha(\cdot)$, one has

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Psi_\alpha(t)dt \tag{6}$$

with $0 < \alpha < 2$. When $\alpha = 1$, the resolution family of problem (5) is a C_0-semigroup, and when $\alpha = 2$ the resolution family of problem (5) is a C_0-cosine operator-function.

We consider in our talk the theory of discretization of the families which are given in (1),(2), (4) and (6).

Bibliography

1. Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их аппроксимация. Из-во МГУ, 2005.

2. D. Guidetti, B. Karasozen and S. Piskarev. Approximation of abstract differential equations. Journal of Mathematical Sciences, **122** (2004), 3013–3054.

Solvability of boundary value problems for kinetic operator-differential equations and related questions

S.G. Pyatkov
(Khanty-Mansiisk, Yugra State University; *pyatkov@math.nsc.ru*)

We study boundary value problems for the operator-differential equations

$$Mu \equiv B(t)u_t - L(t)u = f(t), \quad t \in (0,T), \quad T \leq \infty \qquad (1)$$

where $L(t) : E \to E$ and $B(t) : E \to E$ are families of linear operators defined in a complex Hilbert space E. We do not assume that B is invertible and it is possible that the spectrum of the pencil $L - \lambda B$ includes infinite subsets of the left and right half-planes simultaneously. Equations of this type arise in physics (in particular, in problems of neutron transport, radiative transfer, and rarefied gas dynamics) [1-9], geometry, population dynamics, and hydrodynamics (see [11-13]) and in some other fields. The equations (1) are sometimes called kinetic equations and the operator L the collision operator (see [4]). It is often the case when the operators L, B are assumed to be selfadjoint (see for instance, [7,14-15]). The case of a nonsymmetric operator L is considered in [4,16-19].

Proceed with the exact statement of the problem. We assume below that the operators $B(0) : E \to E$ and $B(T) : E \to E$ (if $T < \infty$) are selfadjoint. In this case we can define the spectral projection $E^{\pm}(0)$, $E^{\pm}(T)$ of these operators corresponding to the positive and negative parts of the spectrum of $B(0)$ and $B(T)$, respectively. Thus, we have $E_0^{\pm}B(0) = B(0)E_0^{\pm}$, $(E^+ - E^-)B(0) = |B(0)|$. We supplement the equation (1) with the boundary conditions

$$E^+(0)u(0) = u_0^+, \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \;\; (T = \infty). \qquad (2)$$

$$E^+(0)u(0) = h_{11}E^-(0)u(0) + h_{12}E^+(T)u(T) + u_0^+,$$

$$E^-(T)u(T) = h_{21}E^-(0)u(0) + h_{22}E^+(T)u(T) + u_T^- \;\; (T < \infty), \qquad (3)$$

where h_{ij} are linear operators. Different approaches were used to prove the solvability of the problems (1), (2) and (1), (3). In [19], the authors use some interpolation equalities (see (4)). It is required in [14] that the operator $B^{-1}L$ (both operators are independent of t) is similar to a selfadjoint operator in the Krein space F_0 with the indefinite inner product $[u,v]_0 = (Bu,v)$, where the symbol $(\cdot,\cdot)$ designates the inner product in E. A similar condition was used in [18]. Some other equivalent conditions are presented, for example, in [14]. In this article we do not require the fulfillment of the conditions (4) and other conditions of this type.

The definitions of the function spaces below are conventional. The symbol $D(A)$ stands for the domain of an operator A. Given a pair H_1, H of Hilbert spaces and H_1 is densely embedded into H, denote by H_1' the negative space constructed on this pair. We fix an integer $m \geq 0$ and assume that

(I) There exist a complex Hilbert space H_1 densely embedded into E such that $L(t) \in W_\infty^m(0,T;L(H_1;H_1'))$, $B(t) \in W_\infty^{\max(1,m)}(0,T;L(H_1;H_1'))$.

(II) The operators $B(t)$ ($t \in [0,T]$) are symmetric in the sense that $(B(t)u,v) = (u,B(t)v)$ for all $u,v \in H_1$; $H_1 \subset D(|B(0)|^{1/2})$ and $H_1 \subset D(|B(T)|^{1/2})$ and both embeddings are dense. There exists a constant $\delta_0 > 0$ such that $\operatorname{Re}((-L(t) + (i - \frac{1}{2})B_t(t))u,u) \geq \delta_0 \|u\|_{H_1}^2$ for $i = 0,1,\ldots,m$, $u \in H_1$, and almost all $t \in (0,T)$.

Let $F_0 = D(|B(0)|^{1/2})/\ker B(0)$, $G_0 = D(|B(T)|^{1/2})/\ker B(T)$, $F_0^\pm = \{u \in F_0 : \ E^\pm(0)u = u\}$, $G_0^\pm = \{u \in G_0 : \ E^\pm(T)u = u\}$. Put $F_1 = H_1/(\ker B(0) \cap H_1)$, $G_1 = H_1/(\ker B(T) \cap H_1)$. Construct the spaces F_{-1} and G_{-1} as completions of F_0, G_0 with respect to the norms $\|u\|_{F_{-1}} = \|B(0)u\|_{H_1'}$, $\|u\|_{G_{-1}} = \|B(T)u\|_{H_1'}$. We assume that $h_{11} \in L(F_0^-, F_0^+)$, $h_{12} \in L(G_0^+, F_0^+)$, $h_{21} \in L(F_0^-, G_0^-)$, $h_{22} \in L(G_0^+, G_0^-)$, and the norm ρ_H of the operator $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{1,2} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$: $F_0^- \times G_0^+ \to F_0^+ \times G_0^-$ satisfies the inequality $\rho_H < 1$. The following conditions ensure uniqueness of solutions to the boundary value problems (1), (2) and (1), (3) [19].

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = F_0, \quad (G_1, G_{-1})_{1/2,2} = G_0. \tag{4}$$

For $i \geq 1$ and $T < \infty$, put $\varphi_i(t) = t^{2i}(T-t)^{2i}$. For $T = \infty$, $\varphi_i \in C^\infty\big([0,\infty)\big)$, $\varphi_i(t) = t^{2i}$ for $t \leq 1$, $\varphi_i(t) = 1$ for $t \geq 2$, and $1/2 \leq \varphi_i(t) < 2$ for $t \in [1,2]$. Let $\varphi_0(t) \equiv 1$. Denote by $W^l(E)$ (E is a Hilbert space, $l = 0, 1, \ldots$) the completion of $C_0^\infty(0,T;E)$ in the norm $\|v\|^2_{W^l(E)} = \sum_{i=0}^{l} \big\|\sqrt{\varphi_i} v^{(i)}\big\|^2_{L_2(0,T;E)}$.

Theorem 1. *Let $T = \infty$. Assume that $f \in W^m(H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$, $u_T^- \in G_0^-$ and conditions* (I),(II) *hold. Then there exists a solution $u(t) \in W^m(H_1)$ to the problem* (1), (2) *such that $\sqrt{\varphi_i}\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}B(t)u \in L_2(0,T;H_1')$, $i = 0, 1, \ldots, m$, and $u(0) \in F_0$. If in addition $\sqrt{\varphi_1} f \in L_2(0,T;E)$, $B(t) \in L_\infty(0,T;L(H_1,E))$ then $u(t) \in L_2(0,T;D(L)) = \{v(t) \in L_2(0,T;H_1) : \ Lv \in L_2(0,T;E)\}$. If the operator L is independent of t, $\sqrt{\varphi_{i+1}}\frac{d^i}{dt^i} f \in L_2(0,T;E)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ and $B(t) \in W_\infty^{m-1}(0,T;L(H_1,E))$ then $\sqrt{\varphi_{i+1}}\frac{d^i}{dt^i}u(t) \in L_2(0,T;D(L)) = \{v(t) \in L_2(0,T;H_1) : \ Lv \in L_2(0,T;E)\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$.*

Theorem 2. *Assume that $T < \infty$, $f \in W^{m,0}(H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$, $u_T^- \in G_0^-$ and the conditions* (I)-(II) *hold. Then there exists a solution $u(t) \in W^{m,0}(H_1)$ to problem* (1), (3), *such that $\sqrt{\varphi_i}\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}B(t)u \in L_2(0,T;H_1')$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $u(0) \in F_0$, $u(T) \in G_0$. If in addition $\sqrt{\varphi_1} f \in L_2(0,T;E)$, $B(t) \in L_\infty(0,T;L(H_1,E))$ then $u(t) \in L_2(0,T;D(L)) = \{v(t) \in L_2(0,T;H_1) : \ Lv \in L_2(0,T;E)\}$. If the operator L is independent of t, $\sqrt{\varphi_{i+1}}\frac{d^i}{dt^i} f \in L_2(0,T;E)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ and $B(t) \in W_\infty^{m-1}(0,T;L(H_1,E))$ then $\sqrt{\varphi_{i+1}}\frac{d^i}{dt^i}u(t) \in L_2(0,T;D(L)) = \{v(t) \in L_2(0,T;H_1) : \ Lv \in L_2(0,T;E)\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$.*

References.

1. Case K. M., Zweifel P. F. Linear transport theory. Mass.: Addison-Wesley. 1969.

2. Cercignani C. Theory and Applications of the Boltzmann Equation. New York: Elsevier. 1975.

3. Greenberg W., Van der Mee C. V. M. and Zweifel P. F. Generalized kinetic equations // Integral Equat. Operator Theory. 1984. v. 7, no. 1. p. 60–95.

4 Greenberg W., Van der Mee C.V.M., and Protopopescu V., Boundary value problems in abstract kinetic theory. Operator theory, Vol. 23, Birkhäuser Verlag. 1987.

5. Kaper H. G., Lekkerkerker C. G., Heitmanek J. Spectral methods in linear transport theory. Basel, Boston, Stuttgart. Birkhauser Verlag. 1982.

6. Latrach K., Mokhtar-Kharroubi M. Spectral analysis and generation results for streaming operator with multiplying boundary conditions // Positivity 1999. v. 3. no. 2. p. 273–296.

7. Van der Mee C. V. M. Semigroups and factorization methods in transport theory. 1981. Math. Centre Tract. Amsterdam. v.146.

8. Van der Mee C. V. M. Exponentially Dichotomous Operators and Applications. Oper. Theory: Adv. and Appl. v.182. Basel. Boston. Berlin. Birkhauser Verlag AG. 2008.

9. M. Mokhtar-Kharroubi. Mathematical Topics in Neutron Transport Theory. New approach. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. Vol. 46. 1997. Singapore: World Scientific Publishing Co.

10. Latrach K. Compactness properties for linear transport operator with abstract boundary conditions in slab geometry // Transp. Theory Stat. Phys. 1993. v. 22. p. 39–65.

11. Latrach K., Mokhtar-Kharroubi M. On an unbounded linear operator arizing in the theory of growing cell population // J. Math. Anal. Appl. 1993. v. 211. p. 273–294.

12. Webb G. A model of proliferating cell population with inherited cycle length // J. Math. Biol. 1986. v. 23. p. 269–282.

13. Lar'kin I. A., Novikov V. A., Yanenko N. N. , Nonlinear equations of mixed type. Novosibirsk: Nauka 1983.

14. Karabash I.M. Abstract Kinetic Equations with Positive Collision Operators. Operator Theory: Advances and Applications. 2008. v. 188, p. 175-195.

15. Kislov N.V. Nonhomogeneous boundary value problems for differential-operator equations of mixed type, and their application // Math. Sb. 1986. v. 53, p. 17-35.

16. Van der Mee C. V. M., Ran A. C. M., Rodman L., Stability of stationary transport equation with accretive collision operators // J. Funct. Anal. 2000. v. 174. 478-512.

17. Ganchev A., Greenberg W., Van der Mee C.V.M. A class of linear kinetic equations in a Krein space setting // Integral Equations. Operator Theory. 1988. v. 11, no. 4, 518-535.

18. Curgus B., Boundary value problems in Krein spaces // Glas. Mat. Ser. III. 2000. v. 35(55), no. 1, p. 45-58.

19. Pyatkov, S. G., Abasheeva, N. L. Solvability of boundary value problems for operator-differential equations of mixed type // Siberian Math. 2000. v. 41, no.6, p. 1174-1187.

Оглавление

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2014»

Оригинал-макет подготовили
Костин Д. В., Данилов М. С.

Подписано в печать 21.01.2014. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 25,28. Тираж 250 экз. Заказ № 55.

ООО Издательско-полиграфический центр
«Научная книга»
394030, г. Воронеж, ул. Среднемосковская, 32б, оф. 3
Тел. +7 (473) 200-81-02, 200-81-04
http://www.n-kniga.ru. E-mail: zakaz@n-kniga.ru

Отпечатано в типографии ООО ИПЦ «Научная книга».
394026, г. Воронеж, Московский пр-т, 11б
Тел. +7 (473) 220-57-15, 238-02-38
http://www.n-kniga.ru. E-mail: typ@n-kniga.ru