

ВОСПОМИНАНИЯ  
О  
С.Г. КРЕЙНЕ



## От редакции

### ***Селим Григорьевич Крейн (1917-1999)***

По данным Американского Математического общества на 2003 год первое место в мире по количеству учеников, имеющих ученую степень за все времена, занимает воронежский математик С.Г. Крейн, опережая таких выдающихся математиков современности как Д. Гильберт и А.Н. Колмогоров.

Выдающийся ученый и педагог, крупнейший специалист в области функционального анализа, гидродинамики, дифференциальных уравнений и их приложений, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ Селим Григорьевич Крейн большую часть своей жизни (сорок пять лет) отдал созданию и развитию воронежской математической школы. Им опубликовано 175 статей и 18 монографий. Под его руководством было написано 81 диссертация, 18 его учеников стали докторами наук, а двое из них - Ю.М. Березанский и Ю.Л. Далецкий - стали действительными членами АН Украины.

С.Г. Крейн родился 15 июля 1917 года. В 1940 году окончил физико-математический факультет Киевского университета, а затем аспирантуру под руководством академика Н.Н. Боголюбова. Уже к этому периоду относятся полученные им результаты, ныне известные как классические.

В годы войны Селим Григорьевич под руководством академика М.А. Лаврентьева работал над математическими проблемами теории кумулятивных снарядов и в 1950 году в Академии артиллерийских наук защитил диссертацию на соискание степени доктора технических наук.

После войны он возвращается в Киев, а в 1954 году приезжает в Воронеж, где работает в качестве профессора в лесотехническом институте. Здесь он ведет чрезвычайно интенсивную научную и педагогическую работу. Круг его интересов очень широк, но основа многих его исследований - функциональный анализ. Вместе с М.А. Красносельским и В.И. Соболевым Селим Григорьевич создает, ставшую хорошо известной в нашей стране и за рубежом, школу функционального анализа. Позже он вспоминал: "Когда меня спрашивают, что это за наука - функциональный анализ, я отвечаю, что это не наука, а мировоззрение. К моменту моего приезда, в Воронеже это мировоззрение усилиями М.А. Красносельского и В.И. Соболева уже пустило глубокие корни".

С.Г. Крейн один из первых применил методы функционального анализа к задачам гидродинамики, и получил фундаментальные результаты о колебаниях вязкой несжимаемой жидкости. Эти исследования подытожены в монографии "Операторные методы в линейной

гидродинамике" и "Эволюционная теория", написанной совместно с его вьетнамским учеником Нго Зуй Каном и профессором Н.Д. Копачевским.

Вместе с тем задачи термодинамики привели С.Г. Крейна к необходимости рассматривать в качестве математических моделей дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, исследованию корректной и некорректной разрешимости этих задач. Соответствующие исследования были отражены в его классическом труде "Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве", вскоре переведенном в США и Японии. Наряду с всемирно известными французскими математиками Э. Гальярдо, Ж. Лионсом, А. Кальдероном Селим Григорьевич является создателем современной теории интерполяции линейных операторов. Предложенный им метод шкал банаховых пространств нашел широкое применение как в теории операторов так и в теории дифференциальных уравнений. По этим исследованиям совместно с его учениками Ю.И. Петуниным и Е.М. Семеновым написана монография "Интерполяция линейных операторов", переведенная в США.

Селим Григорьевич был прекрасным лектором. Многие поколения студентов помнят его блестящие лекции. Им написано несколько учебников. В частности, "Математический анализ гладких функций" (совместно с Н.М. Зобиным) - переведен на немецкий язык. "Математический анализ элементарных функций" (совместно с В.Н. Ушаковой), "Математическое программирование".

С.Г. Крейн был выдающимся организатором. В 1967 году по его инициативе и под его руководством впервые в Воронеже была проведена зимняя математическая школа, вскоре ставшая популярной и оказавшая большое влияние на развитие контактов между математиками из разных городов и стран. В связи с идеей создания школы, приведем слова Селима Григорьевича характеризующие масштабы его интересов и планов, направленных на развитие воронежской математики: "В 1966 году в Москве проходил Международный съезд математиков. Наряду с яркими впечатлениями от многих докладов и бесед с известными зарубежными математиками (Филлипс, Иосида, Кальдерон, Комацу и др.) у меня осталось чувство неудовлетворенности. Мне показалось, что у нас имеется по ряду направлений отставание от современного на тот момент уровня. В недавно вышедших "Итогах науки" в своей статье В.И. Арнольд цитирует Пуанкаре: "Часто достаточно изобрести слово, и это слово становится творцом". Вот у меня и создалось впечатление, что мы не знаем многих слов". Так появилась и захватила идея проведения зимних математических школ в которых читались лекции и делались доклады по самым современным проблемам математики как ведущими учеными, так и молодыми математиками.

Первая из этих школ была проведена в январе 1967 года в доме отдыха им. Горького. Трудно переоценить значение математических разговоров и

дискуссий между участниками школы. Иногда до поздней ночи работали небольшие внеплановые "самодеятельные" семинары. По словам С.Г. Крейна: "В школе нет выборов, нет премий, нет демократии, поэтому работа проходит в спокойной, творческой обстановке. Молодые математики очень легко воспринимают новые идеи и смело начинают их использовать. Мы тоже, по мере сил, пытались "задрать штаны, бежать за комсомолом".

В 1966-1967 гг. возникла идея создания в ВГУ научно-исследовательского института. С.Г. Крейн пишет: "Когда меня уговаривали стать деканом, то в качестве одного из условий я поставил оказание ректором помощи в организации института. Такая помощь была обещана." Но так как организация института не значилась ни в каких планах нашего планового хозяйства, то Селиму Григорьевичу пришлось пройти много испытаний прежде чем институт был открыт. Необходима была поддержка ученого совета ВГУ, Обкома партии, АН СССР, Совмина РСФСР, Минвуза СССР, Государственного комитета по науке и технике при Совмине СССР. И на каждом этапе необходимо было убеждать, доказывать, принимать быстрые неординарные решения. Так для Госкомитета по науке и технике при Совмине СССР требуется подробное обоснование необходимости института и перспективный план его развития. Причем его составителем должен быть чиновник, курирующий прохождение необходимых документов. С.Г. Крейн вспоминал: "Стало ясно, что составление такого документа для любого постороннего человека является трудной задачей, для выполнения которой нужны месяцы. В связи с этим, я предложил, что сам составлю эти документы. Предложение было принято, мне выделили стол, за которым я работал, и в течение двух дней перспективный план развития института по 16-ти научным направлениям был составлен". И вот после прохождения стольких инстанций институт математики был открыт 30-го ноября 1967 г.

Уже во время перестройки С.Г. Крейн писал: "Надо сказать, что институт был создан благодаря инициативе и настойчивости нескольких лиц. В отличие от нынешних времен, тогда инициатива поощрялась". При этом он с благодарностью выделял имена активно "пробивавших вопрос", зам.министра Министерства высшего и среднего специального образования РСФСР А.И. Попова и секретаря Обкома партии В.П. Усачева.

В это же время С.Г. Крейн выполнял и огромную научно-педагогическую работу. Являясь заведующим кафедрой, он руководил аспирантами, иногда их число доходило до двенадцати, читал лекции и участвовал в конференциях в разных городах. Говорил, что не был только на Курильских островах. Будучи деканом, он отстаивал интересы факультета в сложный момент (именно в то время уехал М.А. Красносельский). В результате - инфаркт.

Это случилось накануне открытия второй зимней математической школы. Но и в этой тяжелой ситуации Крейн остался Крейном. Из

госпиталя он прислал в школу поздравительную телеграмму "С сердечным приветом. Крейн". Будучи больным, он продолжал работать с прежней любовью к делу и своим ученикам. Вот что пишет в своих воспоминаниях Е.М. Семенов: "В 1967 году в Воронеж приехал корреспондент "Комсомольской правды" для того, чтобы написать обо мне статью (я тогда получил премию Ленинского комсомола в области науки). После моих восторженных рассказов о Селиме Григорьевиче, корреспонденту захотелось познакомиться с ним лично. Селим Григорьевич в это время болел и лежал в госпитале, куда мы и отправились с визитом. Там мы увидели обычную картину - один из аспирантов доказывал ему свою новую теорему, а еще несколько человек ждут своей очереди для того, чтобы поговорить с ним о математике. Все это и беседа с Селимом Григорьевичем произвело на корреспондента столь сильное впечатление, что он, прежде чем писать статью обо мне, подготовил передачу на радио о С.Г. Крейне".

Когда стало известно, что Селиму Григорьевичу необходима операция на сердце, это взволновало многих математиков из разных стран. Усилиями Б.И. Коренблюма (США), И.Ц. Гохберга (Израиль), Д. Эбина (США), М.Ю. Любима и других математиков была организована операция в США. Приведу перевод статьи в одной из американских газет, посвященной этой операции. Статья называется "Большая удача хирургии Лонг-Айленда (LI). Выдающийся советский математик подвергся операции на сердце".

"Всемирно известный математик С.Г. Крейн получил 3-ий инфаркт. Врачи московского центрального кардиологического центра Советского Союза посоветовали ему два года назад сделать операцию и поскорее. Однако они опасались оперировать 70-ти летнего человека, считая, что значительно лучше было бы сделать эту операцию в США, где хирургия на сердце стала уже совершенным искусством. Но как туда попасть? Только билет на самолет стоит 1500 долларов. А стоимость операции на сердце может достигать десятки тысяч долларов, что составляет годовую зарплату (американского профессора) и далеко за возможностями советского профессора. "К счастью у него были друзья" - сказал Дэвид Эбин - профессор математики в университете Стоунн Брук, который может считать себя одним из них. Крейн живет жизнью мыслителя - это человек, написавший 8 книг по теории вязкой жидкости, уравнениям в частных производных и функциональному анализу. "Как изменится жизнь в зависимости от Ваших работ?" - спросили Крейна вчера (после операции) через Эбина - который хорошо знает русский язык. "Жизнь хороша даже без моей работы" - сказал он, когда приходил в себя после операции в университетской клинике широко улыбаясь и показывая свои золотые зубы. Чтобы отправить его в Лонг-Айленд друзья математика Крейна И. Гохберг в Тель-авивском университете и Борис Коренблюм из университета Элбени начали кампанию по переписке, вовлекая

международную математическую общественность, включая Эбина. Они надеялись собрать деньги для своего старого друга, чьи работы имеют широкое применение в изучении океанских течений, предсказании погоды, авиаконструировании, движении крови и даже движении галактик. Д. Эбин сказал, что он не смог внести денежную помощь в дело Крейна, но он был хорошо осведомлен об исследовательской работе кардиологического отдела университетской клиники. Не задолго до этого врачи успешно прооперировали женщину 93-х лет. Пока И. Гохберг и Б. Коренблум собирали деньги для покрытия расходов С.Г. Крейна Д. Эбин заручился поддержкой доктора Питера Кона, возглавлявшего сердечное отделение этой клиники. Кон и другие кардиологи назначили время операции. И 21 мая профессор, с седой эйнштейновской шевелюрой вышел из самолета в Квинс, сжимая пакет соленых орешков, которые он не закончил за завтраком. Д. Эбин воскликнул, что он не как "испорченный" американец и не допускает, чтобы еда зря пропадала.

Тремя днями позже 73-летний математик подвергся операции, которая по мнению всех, была успешной. Вчера его отпустили из клиники и он проведет еще две недели в доме Эбина и попутешествует по Лонг-Айленд прежде чем вернется к своей семье в Советский Союз.

П. Кон сказал, что жизненные прогнозы математика были отличными. "Скажите ему, что он доживет до 100 лет" - обратился врач к Эйбину, который переводил. "Хорошо" - кивнул Крейн, добавив, что у него еще много работы впереди. Еще девять лет после операции С.Г. Крейн продолжал успешно работать. Получив гранд фонда Сороса, он принял участие во всемирном конгрессе математиков в Цюрихе, став заслуженным Соросовским профессором.

Все дальше и дальше уходит от нас "золотой век" Воронежской математики, одним из столпов которого был С.Г. Крейн. Однако, к словам С. Есенина : "Большое видится на расстоянии" хочется добавить, следуя уже Эйнштейну, что это виденье зависит еще и от точки зрения наблюдателя. Одну из этих точек показала мировая научная общественность, спасая жизнь воронежскому ученому. Мы также благодарны Российскому Фонду Фундаментальных Исследований, до настоящего времени поддерживающего Воронежские Зимние Математические Школы, созданные С.Г. Крейном, руководителем которых в последние годы является академик В.П. Маслов.

С другой стороны, уже более пяти лет существует Воронежский городской благотворительный общественный Фонд С.Г. Крейна с программой "Молодые математики", учредителем которой является ВГУ. Несмотря на обращения к различным фирмам и организациям города Воронежа — города, честь и достоинство которого так самозабвенно приумножал выдающийся ученый, мы получили поддержку только в форме либо устного одобрения, но чаще в форме удивления. Мы не можем даже переиздать книгу о С.Г. Крейне (первый выпуск нам как-то удалось сделать

в 2002 году) из-за финансовых трудностей.

Вместе с тем, оставаясь оптимистами по Крейну, мы верим, что его значение для нашего города будет по достоинству оценено воронежскими властями и они разделят чувства воспетые в школьном фольклоре:

Всюду: в лесах Амазонки бассейна,  
На виноградниках Дона и Рейна,  
В диких пустынях Дабу и Бахрейна,  
Даже в гареме Саддама Хусейна—  
Искренне, нежно, благоговейно  
Любят Селима Григорьевича Крейна.



## **Воспоминания учеников и коллег С.Г. Крейна**

**И.П. Грагеров, Е.Е. Крисе, Б.И. Хацет**

*(Первая часть воспоминаний написана совместно супругами И.П.Грагеровым - Е.Е.Крисе, вторая - Е.И.Хацетом.)*

### ***Чудный парень из нашей юности***

Селим Григорьевич Крейн - выдающийся учёный, замечательный педагог, неутомимый организатор науки и математического просвещения, человек, наделённый столь необычной притягательностью и столь неотразимым обаянием, что далеко не каждому в течение жизни выпадает счастье встречи с такой личностью.

Нам выпало.

Мы знаем, конечно, что Селим Григорьевич, энергичный, доброжелательный, общительный, душевно щедрый, всегда был окружён многочисленными коллегами, учениками, друзьями, почитателями и почитательницами. Его имя, его труды, его облик знакомы и дороги многим людям в разных странах. Так что воспоминания о нём, будучи собраны, могли бы образовать многотомное издание.

Нам хотелось, чтобы несколько этих страничек заняли бы своё, почти незаметное место в этом собрании. Мы - это сверстники, которые стали друзьями Селима в теперь столь далекие тридцатые годы и сохранили эту дружбу до конца. Мы знаем многих, слишком многих из нашего поколения и из следующего, кто ушёл из жизни раньше Селима. Нам выпал другой жребий, и эта несправедливость судьбы добавляет горечи к боли утрат. Добавить несколько тёплых слов о дорогом нам светлом человеке - наша потребность и наш долг.

Мы не будем писать ничего о научных трудах и о многогранной деятельности Селима Григорьевича. Есть много людей, которые сделают (и отчасти уже сделали) это лучше, чем смогли бы мы. Мы хотели бы просто рассказать тем, кто моложе и кто встретил Селима позднее, несколько впечатлений и эпизодов, связанных с этим красивым, лёгким, открытым человеком в наши очень молодые годы, из тех, что ещё сохранились в нашей уже ненадёжной памяти.

1.

Первым из нас с Селимом познакомился и подружился я, Изя Грагеров, поступив в 10-й класс средней школы города Киева (сейчас в этом помещении расположен Киевский автодорожный институт), в котором учился и Селим. Впрочем, и тогда, и позднее все друзья и родные именовали его Мирой. Насколько помню из Мириных рассказов, его имя Селим было производным от Шолом, что в переводе с иврита означает Мир.

Мира отличался от других учеников не только блестящими способностями и успехами по многим предметам, тем, что, будучи с детства поражённым анкелозом коленного сустава (из-за чего нога была согнута под

прямым углом, и для перемещения требовались палка и подскоки на здоровой ноге), он, не обращая внимания на недуг, активно участвовал во всех играх, включая спортивные. В последней четверти 10-го класса Миру прооперировали - ногу выпрямили, но в колене она так и не сгибалась. Зато можно было отбросить палку и ещё активнее участвовать во всех играх.

После окончания школы в 1935 году друзья поступили в Киевский университет: Крейн на математический факультет, Грагеров - на химический. Учёба их отличалась высокой успеваемостью и общественной активностью, что по тогдашним нормам награждалось походами в театры, поездками в студенческий дом отдыха (под Житомиром) в каникулярное время или в университеты других городов страны (например, в Тбилисский в 1940 году). Всё это способствовало возникновению новых дружеских связей. Так образовался сплочённый кружок, состоящий в основном из студенток-химичек, химика Грагера и студентов-математиков во главе с Селимом.

В учебное время почти регулярно в конце недели в течение нескольких предвоенных лет (1939-1941) в просторной и гостеприимной квартире Хацетов, расположенной неподалеку от университета, собиралось 6-10 друзей за чаем с чудесными домашними коржиками. Мама математика Бориса и химички Фриды - светлой памяти Нина Борисовна - была удивительно хлебосольной и равнодушной к друзьям своих детей хозяйкой. Время проходило быстро за обсуждением стихов, книг, событий, за различными литературными играми (буриме, викторины и др.) И, как всегда и везде, Мира - искромётно остроумный, обаятельный - был душой этого сообщества, победителем в состязаниях и - верным другом каждого из нас. Мы охотно признавали лидерство этого чарующе красивого, никогда не унывающего человека ; правда, иногда ему не удавалось "перетанцевать" другого партнера выбранной им девушки, но зато в волейболе неизменно переигрывал всех, даже классных игроков.

Нередко наша компания - в том или ином составе - отправлялась на прогулки, с которыми были связаны многие забавные эпизоды, инициатором которых обычно бывал Мира. И сейчас, по прошествии более шестидесяти лет, в памяти сохранилась такая история. Один из нас (Люсик Раппопорт) заключил с нами пари на 50 рублей, утверждая, что просидит 5 минут на тротуаре в самом людном месте Крещатика - у входа в главный довоенный киевский кинотеатр (после войны в этом месте разрушенного Крещатика было построено здание горисполкома) в разгар вечернего гуляния публики. Были назначены секунданты, но большинство из нас отправились вместе с участниками, чтобы стать свидетелями незаурядного события. На месте имеющего состояться происшествия Люсик как бы споткнулся и упал на тротуар, и тут оказалось, что он припас коробку с зубным порошком, которая якобы случайно раскрылась, а Люсик сел и стал не спеша собирать щепотками рассыпавшийся порошок в эту коробку. Собралась толпа, тут же милиционер, и Люсику стали помогать подняться. Однако он не давался, ссылаясь на исключительную ценность порошка.. Наконец, пять минут, казавшиеся нам

вечностью, истекли, секундант подал знак, Люсик вскочил и бросился наутёк, а изумлённая толпа во главе с остолбеневшим ментом ещё долго обсуждала увиденное в уверенности, что виновник события - помешанный. Естественно, Мире не давала покоя слава Люсика, и он тут же вызвался на тех же условиях повторить его подвиг, но уже не на улице, а в людном вестибюле второго этажа Публичной библиотеки (Центральная библиотека АН УССР на Владимирской). Конечно, милиционера могло тут и не оказаться, но зато какая избранная публика! Многие из нас отправились полюбоваться зрелищем. И было на что посмотреть! Усевшись на полу, Мира артистично пользовался своей - действительно больной - ногой, чтобы отклонять все попытки его поднять. В течение обусловленных пяти минут, конечно...

После окончания с отличием университета Селим был принят в аспирантуру Института математики Академии наук УССР; его научным руководителем был глава известной математической школы академик М.А.Лаврентьев.. Из-за неполноценной ноги Селим был освобождён от службы в армии и в начале войны эвакуирован вместе с Академией в город Уфу, где закончил аспирантуру и защитил кандидатскую диссертацию.

Связи Миры с друзьями, военные адреса которых удалось установить, не прерывались. Так и я, Женя Крисе, медсестра военного госпиталя, бывшая студентка-химичка, получала даже в самые мрачные военные годы добрые, жизнеутверждающие и всегда оптимистичные Мирины письма. А Изе Грагерову удалось "вживую" встретиться и пообщаться с ним в Уфе, куда Иза специально заехал в 1942 году, возвращаясь после тяжёлого ранения из госпиталя к родным.

После защиты диссертации Селим получил назначение на должность преподавателя в Московский энергетический институт. И в Москве продолжались дружеские встречи с Грагеровым, заканчивавшим аспирантуру в Московском университете.

Примерно к середине 1946 года все мы возвратились в Киев на пепелище наших прежних мест общения.

Мира был востребован Институтом математики АН УССР и даже получил комнату в помещении института, в которой прожил больше года. Женившись на химичке Евгении Кострюковой, он переехал в её семью. Переженились и другие друзья, но встречи и взаимная симпатия не иссякали. Академические успехи Миры радовали нас всех. Он был одним из самых молодых, популярных и уважаемых докторов физико-математических наук, получившим признание в кругу истинно творческих математических авторитетов.

Но, увы, грянула антисемитская кампания конца сороковых-начала пятидесятих годов, которая коснулась и Селима. Он переехал в Воронеж, где создал математическую школу - одну из лучших в стране.

Наши семьи не прекращали дружить. Мы, Грагеровы, гостили у Крейнов в Воронеже и часто встречались с Мирой в Киеве, куда он приглашался в

качестве руководителя или оппонента многочисленных диссертационных работ, участника математических семинаров, школ, конференций, и всегда - воспоминания о юности, обсуждение жизненных обстоятельств и свершений. Возможность видеть друг друга согревала наши сердца. Вспоминается одно из шутливых поздравлений, посланное нами в Воронеж к юбилею Селима:

Славят нашего Селима  
от Воронежа до Рима,  
да и Киев к юбилею шлёт привет!  
Город наш на древних кручах математиков могучих  
наплодил, но вот такого - больше нет.  
Приезжай к нам чаще, Мира,  
чтоб на киевских квартирах  
от пиров и танцев лопнул весь паркет.

И не вздумай задаваться возрастом: "чуть-чуть за двадцать." Мы-то знаем - ты в душе юнец-корнет!

Светлая память о Селиме Григорьевиче Крейне, нашем любимом Мире, замечательном человеке, учёном, близком и верном друге, навсегда запечатлена в сердцах всех нас, кому выпало счастье знать его лично, дружить, делить радость и горе.

## 2.

Я пытаюсь, но не могу вспомнить, когда именно познакомился с Мирой. Я поступил на физико-математический факультет Киевского университета (он тогда имел три отделения - математики, физики и механики) тремя годами позже Миры (в 1938 г.) и не мог не обратить внимания на старшекурсника, который выделялся из общей студенческой массы красивым вдохновенным лицом, быстрой и уверенной - несмотря на прихрамывание - походкой, общей осанкой. Мы, первокурсники, особенно девочки, бегали из наших аудиторий в нижнем этаже исторического красного корпуса на Владимирской полюбоваться (через забор) его виртуозной игрой на волейбольной площадке напротив здания президиума АН УССР. Не знаю, было ли это звание официальным, но мы все называли его чемпионом и поражались силе воли юноши с покалеченной ногой.

Видимо, я попросил познакомить меня с Мирой другого старшекурсника, вскоре аспиранта, общение с которым тогда очень поднимало меня в моих глазах, а затем превратилось в близкую и прочную дружбу на всю жизнь. Я говорю об Иосифе Ильиче Гихмане (Жозике, как мы его называли) - впоследствии крупном математике, возглавившем Киевскую школу теории вероятностей, позднее работавшем в Донецке. С Жозиком судьба свела меня ещё летом 1936 года в Коростышеве (вблизи Житомира) на берегу реки Тетерев. Я брёл на дачу, снимаемую родителями, с удочками, но без улова. Жозик сидел на большом камне с книгой в руках. Как-то возник разговор, и я спросил, что за книга; оказалось - "О философии математики" Г.Вейля. Поскольку я по-мальчишески мнил себя и математиком, и философом, я попросил книгу почитать. Вскоре я пришёл к Жозику на дачу

вернуть книгу. Глядя на мое сконфуженное лицо, Жозик рассмеялся и протянул мне книгу Теплица и Радемахера. А я укрепился в намерении поступать на математический.

Но вернёмся в 1938 год, так как именно в конце этого года или в начале следующего начала складываться вокруг Миры, как аттрактора, та тесная дружеская компания, которая затем превратилась в как бы клуб "Мамины коржики" и о которой выше писали Грагеровы. Лишь тогда я узнал, что настоящее имя Миры - Селим, а Мирой (по одной из версий) его называли с детства потому, что все остальные мальчики в этой многодетной семье (Селим был младшим ребёнком) имели имена, начинающиеся с буквы "М". Вначале (впрочем, и потом) мы устраивали совместные прогулки в центре Киева (приднепровские сады, Крещатик и прилегающие улицы и т.п.), обсуждая на ходу все те темы, вокруг которых в дальнейшем строились застольные беседы. При этом мы любили жевать ещё горячие вкуснейшие бублики, которые покупали, нанизанными на шпагат, в магазинчике-пекарне внизу Михайловской улицы.

Допускались и забавы, по современным понятиям совершенно невинные, и тут Мира был неистощимым выдумщиком. Помню, например, как однажды довольно поздним вечером, когда мы гурьбой шли по Крещатику от Владимирской горки, Мира широким жестом пригласил нас перейти на запретную для пешеходов проезжую часть (тогда почти свободную) со словами "Пошли, я угощаю!" Милиционер не замедлил появиться, отвёл нас на тротуар и потребовал уплатить штраф (что-то около 3-5 рублей). Мира попросил минутку, чтобы разменять деньги, и надолго исчез в находящемся рядом (кажется, по сей день) магазине минеральных вод. Милиционер, окружённый нами, не скупящимися на язвительные шуточки, вынужден был ждать, испытывая возрастающую неловкость. Но главное было впереди. Мира разменял деньги на копейки, и милиционеру довелось стоять с протянутой ладонью, в которую Мира отсчитывал мелкие медяки, иногда требуя пересчёта. Собрались зеваки, добавляющие свои реплики, страж порядка стоял пунцовый, пока, наконец, не сбежал, объявив, что на первый раз он нас прощает и отменяет штраф.

Мне тоже как-то пришлось стать жертвой Мириной шутки. Не помню, где и по какому поводу мы собрались "в расширенном составе" - человек пятнадцать. Мира объявил, что проведёт сеанс гипноза, а мне была отведена роль подопытного. Меня удалили из комнаты с тем, чтобы согласовать несколько слов, которые затем под гипнозом я должен был отгадывать. Всё шло гладко, Мира совершал надо мной свои пассы, я по его приказу называл первое пришедшее в голову слово, встречаемое всеобщим восторгом, так как оно "совпадало" с задуманным. Возможно, теперь все знают эту шутку, но тогда я довольно долго чувствовал себя потерянным и озадаченным, пока Мира не сжалился и не объяснил мне, что в некоторых фокусах не один дурит всех, а все дурут одного.

Осенью 1939 года я ввел в наш коржичный клуб девушку, в которую

был влюблён, и она немножко разбавила наше химико-математическое сообщество, будучи студенткой гуманитарного факультета. Признаюсь, что с замиранием сердца ожидал суждения "самого Мира". Оно оказалось благоприятным, и я ещё много лет (поженились мы с той девушкой аж в 1946 году) изливал ему свои неудачи на сердечном фронте. О своих переживаниях Мира не очень-то распространялся, но для меня, как и для других друзей, был превосходным "транквилизатором" благодаря неизменному оптимизму и жизнелюбию.

Во время войны я не поддерживал связи с Мирой, хотя краткую информацию о нём получал от его брата, знаменитого математика Марка Григорьевича Крейна. Марк Григорьевич жил тогда в Куйбышеве (Самаре) и заведовал кафедрой механики в авиационном институте. В это время я работал на военном заводе в 12 км. от города и иногда встречался с Марком Григорьевичем. Он сыграл большую роль в моей жизни, настойчиво побуждая меня окончить университет экстерном (до войны я окончил три курса), а затем немедленно начать работать ассистентом в авиаинституте на полставки, несмотря на 12-тичасовые смены на заводе и большие длины сторон треугольника завод-институт-жильё. Марк Григорьевич любил повторять, что педагогический опыт необходим каждому молодому математику, и чем в более трудных условиях он приобретает, тем он полезнее. Позднее я понял, насколько он был прав.

С Мирой я встретился вновь, когда он вернулся в Киев из Москвы в 1946 году. Вокруг него снова образовалась группа молодых людей, куда входили ставшие впоследствии известными математиками Георгий Исаакович Кац, Юрий Макарович Березанский, другие талантливые ребята (помню, например, Сергея Авраменко, Соломона Шахновского). Мы встречались, вместе прогуливались, но теперь не так часто, да и темы наших бесед стали глубже: позади была война, вокруг нас - разрушенный город, некоторые из нас уже были семейные люди. Помню рассказ Мира об одном - в общем-то незначительном - эпизоде его преподавательской деятельности в Московском энергетическом институте. Во время его лекции погас свет (в послевоенной Москве перебои в подаче электроэнергии случались часто). Мира в темноте сказал: "Известно, что коммунизм - это советская власть плюс электрификация всей страны. Если в этом уравнении перенести один член в другую сторону, получим: советская власть - это коммунизм минус электрификация всей страны". Человек, родившийся во времена "перестройки", только усмехнётся: что-то такое я уже слышал. А человек из нашего поколения содрогнётся. В те сталинские времена практически в каждом студенческом потоке был хоть один "информатор органов". Доложи он - и мир потерял бы Селима Крейна. Видимо, студенческая любовь к нему была столь сильна, что даже эти люди не могли ей не поддаться.

Более регулярно мы встречались с Мирой в Институте математики на семинаре по функциональному анализу, которым он руководил (одно время там был другой номинальный руководитель, но это продлилось недолго).

Будучи студентом, я не имел случая слышать и видеть Миру в роли преподавателя. Теперь я мог и слышать, и видеть, и восхищаться, и учиться. Он обладал даром вскрывать живую душу математического рассуждения и помогать слушателям разделять с ним наслаждение, получаемое при этом.. В связи с работой семинара Мира как-то попросил меня во время командировки в Москву зайти домой к Израилю Моисеевичу Гельфанду, который обещал Мира дать нам во временное пользование тогда труднодоступную книгу Хопфа по эргодической теории. Мне впервые предстояло повидаться с крупным учёным, об особенностях характера которого у нас ходили легенды. Мои страхи оказались напрасными: он принял меня на кухне, где чинил развороченный электроутюг, и мы мило побеседовали о нашем семинаре; я был рад, что Мира дал мне возможность познакомиться с этим человеком. Ещё в связи с семинаром вспоминается одна Мираина шутка, которая нас очень позабавила. Однажды к началу семинара, где-то к полудню Миры не было на месте. Подождав немного, направились к комнате, предоставленной ему институтом в качестве жилья. Мы постучали и услышали задорный Мирин голос: "Погодите, мы ещё не проснулись!"

Но суровые времена становились всё более суровыми, а государственный антисемитизм быстро крепчал. Многие ответственные работники Института математики за глаза называли наш семинар по функциональному анализу "семинаром по национальному анализу". Институт срочно чистил свои и без того весьма чистые ряды (в последующие годы он твёрдо держал абсолютный рекорд даже среди академических институтов Украины). Директор Ишлинский сказал Мира: здесь всё-таки не Израиль. Словом, ещё одно хорошее дело было загублено. Дальше - больше. Вскоре Мира пришлось работу в институте прекратить.

В 1948 году после окончания аспирантуры и защиты диссертации я был направлен в Житомирский пединститут заведовать кафедрой на вновь открываемом физико-математическом факультете. Естественно, что контакты с киевскими друзьями стали менее частыми, но они не прекращались. Кроме личных встреч с Мирой в дни, когда я приезжал в Киев, я обращался к нему за советом и помощью по делам кафедры и факультета. Упомяну только о двух из них. Я считал важным для студентов и преподавателей провинциального вуза время от времени видеть и слышать выдающихся математиков и деятелей науки и приглашал многих ученых выступить с лекцией или докладом на нашем факультете. Естественно, что Мира был одним из первых, кто откликнулся на мою просьбу, и в институте долго ещё находились под впечатлением от его блестящей лекции. Очень доброжелательно отнёсся Мира (к этому времени он уже был не в Киеве) к моей просьбе принять на себя научное руководство диссертационной работой молодого члена кафедры, впоследствии моего друга и соавтора В.Н. Костарчука, много лет бывшего затем ректором Черниговского пединститута.

Мракобесам удалось выдать Селима из Украины и тем нанести посильный вред своей "неньке". Но не такой был Мира человек, чтобы можно



было подавить его творческий потенциал, его энергию и его волю. Все эти замечательные качества проявились в воронежский период его плодотворной деятельности, но это принадлежит уже не моим воспоминаниям.

Впрочем, и после отъезда Миры в Воронеж наши связи не прерывались. Где-то в середине 60-х, когда я уже вернулся из Житомира в Киев, я обратился к нему с просьбой посодействовать переводу в Воронежский университет из Житомирского пединститута начинающего математика с незаурядными способностями, более склонного к научной работе, чем к учительской деятельности. Мира приложил значительные усилия, и в результате Воронежская школа приобрела теперь достаточно известного математика и хорошего человека - Томаса Яковлевича Азизова. В 1965 году мы встретились с Мирой в Новосибирском Академгородке, где я должен был выступить с докладом о работе по новой для меня проблематике в области методов решения оптимизационных задач. Узнав, что Мира будет председательствовать на соответствующем заседании конференции, я изрядно струхнул, ибо хорошо знал, что личная дружба не защитит меня от острых реплик Миры, если он сочтёт их уместными. Впрочем, всё благополучно обошлось. Несколько позднее мне удалось побывать в Воронеже и пообщаться с Мирой. Я также старался не упускать случая увидеться с Мирой в Киеве во время его кратких наездов.

Годы шли, но время было бессильно лишить его поседевшую голову обаяния красоты и неувядающей молодости. Очень горько было сознавать, что тяжёлый недуг мешает ему жить и работать, но вызвала восхищение Мирина воля сопротивляться ему и продолжать своё дело. Как-то уже после операции шунтирования он приехал в Киев в качестве оппонента по диссертации. Мы встретились, как договорились, в Институте математики, защита уже началась. Перед тем, как попрощаться, Мира наклонился ко мне и тихо сказал: "Мне сейчас выступать, но что-то прихватило..." Я тогда постоянно носил с собой нитропрепараты, и он, глотнув таблетку, направился к залу. Я не слышал его выступления, но уверен, что оно, как всегда, было впечатляющим.

"Печаль моя светла". - сказал поэт. Моя тоже. Воспоминания о Селиме Григорьевиче принадлежат к числу самых светлых и дорогих в моей долгой жизни.

## ***Ю.М. Березанский***

### ***Киев, осень 1943-1946. Возрождение математики***

В этих кратких воспоминаниях я хочу вернуться к осени 1943, когда немцы были изгнаны из Киева, и в Киеве горстка людей стала заниматься математикой. Хочу вспомнить тех математиков, которые в это страшное время сумели вовлечь в математику молодых людей, к ней имевших интерес и волею судеб оказавшихся в Киеве.

Я абсолютно не претендую на полноту картины — я буду писать о тех математиках, благодаря которым математиком стал и я. Другие математики имели других учителей, их воспоминания, наверное, будут отличаться от моих.

Прежде всего, я хотел бы сказать о Симоне Израилевиче Зуховицком. Недавно в Израиле была основана премия-стипендия им. СИ. Эта стипендия увековечит память о СИ. — известном математике, но, на мой взгляд, прежде всего выдающемся педагоге, который своими блестящими лекциями и даже образом своей жизни привлекал в математику многих молодых людей.

Среди этих людей был и я. СИ. в моей жизни сыграл, я думаю, определяющую роль. Случилось это все в Киеве, зимой-весной 1943-1944 гг.

Только что из Киева были изгнаны немцы, пришли советские войска, которых местное население, остававшееся на оккупированной территории, боялось не меньше, чем немцев. Их приходу предшествовали упорные слухи, что всех украинцев выселят в Сибирь, как татар из Крыма. Потом говорили, что не выселяют лишь потому, что не хватает поездов — слишком много людей нужно было перевозить. А соответствующий приказ Сталиным уже был чуть ли не подписан.

Разрушенный город, подавленный народ, голод и страх перед завтрашним днем. Разговоры о возможных репрессиях. В этой обстановке несколько профессоров и доцентов, остававшихся в Киеве, все же пытаются открыть Киевский университет. Объявлен набор, экзамены сдавать не нужно. Среди факультетов имеется физико-математический (физиков и математиков объединили — мало преподавателей и возможных студентов). На него поступают человек 30-40 — девочки, мальчики, искалеченные на войне, мальчики, которых не берут в армию из-за болезни (среди них был и я). Огромное центральное "красное" здание университета сожжено, естественные факультеты работают в зданиях химического факультета, которые сохранились.

Начали ходить на лекции. Война продолжается. Измученные

преподаватели читают физику, математику и что-то еще. Я был немного подготовлен — до войны окончил 8 из 10-ти классов, но немного читал сам. Математика нравилась, но больше — физика, сказывался мальчишеский интерес к радио.

И вот в первые же дни нам начинает читать лекции по математическому анализу СИ. — еще почти молодой человек, красивое южное лицо и глаза, которые пристально смотрят на студентов. Немного картавый голос — что-то неуловимо нездешнее в этих лекциях. Хотя мы и знали, что он еврей, чудом уцелевший во время оккупации благодаря смелости какого-то профессора, который его прятал (позже мы узнали, что этот профессор

— известный математик и механик Ю.Д. Соколов). Наверное, внешность СИ. играла роль. Но главное — это то, что и как он читал. Я еще раз повторяю — разрушенный город, голод и страх

— главное, страх. А СИ. излагает теорию действительных чисел по Дедекинду. Как будто бы ничего ужасного вокруг и нет. А есть красивые математические построения, абсолютно постоянные и вечные. И начинаешь верить, что все пройдет. А вот эта математика, дста\_нетедч И это давало силы тем мальчикам и девочкам, которые во всей этой неразберихе пытались учиться.

Лекции СИ. определили мои интересы — я забросил физику и решил стать математиком. И тогда, мальчишкой, понял, что есть наука, неподвластная жестокостям власти и режима. И, занимаясь ею, ты будешь свободным. Вопреки всему.

Не я один под влиянием СИ. решил стать математиком. Не всем, правда, повезло — некоторых погубило НКВД, некоторые не смогли пробиться, имея печать "был на оккупированной территории".

Не пробился в СССР и сам СИ. — скоро начались повальные гонения на евреев и "космополитов", он был вынужден перейти из университета в педагогический институт, а потом работал вообще вне Киева — в Луцке и позже — в Москве. Но он всегда очаровывал студентов математикой и помогал, насколько это было в его силах, молодым математикам выдержать натиск тоталитарной системы в СССР, которая старалась, в лучшем случае, нивелировать все живое.

Позже, ближе познакомившись с СИ., я узнал, что он — глубоко религиозный человек, что его мечта — жить и умереть там, где была родина его предков. И я рад, что эта его мечта осуществилась, и свои последние годы он жил и остался навсегда в Израиле.

Конечно, СИ. был не единственным математиком, оказавшим влияние на меня на первых двух курсах университета. Нам читал лекции по аналитической геометрии Борис Яковлевич Букреев, очень пожилой профессор (85 лет). Его слушали, удивлялись ясности ума и некоторой оригинальности в изложении — часто, забывшись, он рисовал графики на черном столе, стоящим впереди доски, и их не было видно. Некоторый академизм в изложении аналитической геометрии скрашивался

соответствующими практическими занятиями — их по геометрии и анализу вела доброжелательная и милая женщина доц. Вера Петровна Белоусова, возвратившаяся из эвакуации. Кажется, она первой заметила, что я что-то могу сообразить. На втором курсе она уже не вела практику, а читала аналитическую и дифференциальную геометрии.

Алгебру нам читал проф. Николай Петрович Соколов. Пожилой человек, которого мои родители и я знали еще во время оккупации. Он ко мне хорошо относился и почему-то считал еще до моего поступления в университет, что я должен стать математиком (я, по-моему, никаких особых поводов для такого суждения не давал).

Вот и все мои преподаватели-математики на первых двух курсах. Пожалуй, стоит отметить, что первый курс состоял всего из одного (второго) семестра — университет начал работать с нового 1944 года.

Были и другие лекции — по обязательному марксизму-ленинизму, языкам, физике и астрономии. Я ходил, сдавал на пятерки, но все это было мимо интереса. Запомнилась только астрономия — по ней я впервые в жизни получил "4". Пытался пересдавать, но проф. Всехсвятский был неумолим, и эта четверка так и осталась в зачетке.

Прошло три семестра, и кончилась война. Математику я полюбил, беспорядочно читал книжки, которые сумел достать. Но она была где-то рядом, и какие мне задачи решать и что доказывать — ни я, ни мои сокурсники не знали. Может война и еле живущие преподаватели — причина, но вся эта математика была где-то рядом и только рядом.

Итак, война закончилась, и стали возвращаться в Киев киевляне-математики, бывшие в эвакуации или на фронте. Состав математиков мехмата (уже не физмата) пополнился, и жизнь стала живее. Мы уже учились в основном "красном" корпусе университета (отстроенного пленными немцами).

И вот на третьем курсе, осенью 1945, на мехмате появился молодой человек — хромящий и седой, с лучезарными глазами — Селим Григорьевич Крейн. Он нам стал читать теорию функций комплексного переменного. В его лекциях и поведении не было усталости (которая все же была у СИ. Зуховицкого). Он читал так, что каждый чувствовал и понимал — ты можешь быть причастным к придумыванию чего-то нового в этой математике. Все студентки (и не только с мехмата) были в него влюблены. Он, несмотря на хромоту, прекрасно играл в волейбол, и все девочки ходили смотреть на эти игры, т.е. на С.Г. В том числе и моя будущая жена.

Он организовал семинар для молодых математиков, приехавших в Киев, и студентов (М.А. Красносельский, Б.И. Коренбелюм, С.А. Авраменко, Н.И. Польский, Г.И. Кац, Ю.Л. Далецкий). А мы, студенты-третьекурсники, даже не знали, что такое семинар (научный). Одним из первых докладчиков на этом семинаре был я — докладчиком неудачным: я не очень разобрался в книге Хопфа, кажется, по динамическим системам. Но, тем не менее, С.Г. как-то сумел безболезненно меня поправлять. На этом семинаре я впервые

узнал о понятиях гильбертова пространства, самосопряженного оператора, спектральных разложениях и т.п.

Тогда же С.Г. предложил мне задачу — разработать теорию операторов обобщенного сдвига и соответствующей свертки таким образом, чтобы она стала естественным обобщением конструкций обычной конечномерной гиперкомплексной системы. Эту задачу он привез из Москвы, где Б.М. Левитан разрабатывал теорию операторов обобщенного сдвига. И даже исходила она от И.М.Гельфанда — С.Г. привез и отдал мне 4 страницы, исписанные лично И.М.Гельфандом мелким почерком и карандашом. Кажется, И.М. Гельфанд с кем-то поспорил, что сядет и просто сразу напишет работу, и эти страницы — результат спора (эти страницы, если порыться, где-то у меня лежат — я их не выбрасывал).

Как бы там ни было, но я с С.Г. стал активно обсуждать эти вопросы. В результате возникла теория коммутативных гиперкомплексных систем с континуальным базисом, и эти результаты были нами опубликованы в ДАН СССР в 1950 г. — первые мои публикации. Многие из наших конструкций позже, лет через 20-30, было повторено на Западе при создании теории гипергрупп.

Конечно, в 1945-1946 гг. на мехмате появилось много известных профессоров и нам лекции на 3-4 курсах читали, например, Ю.Д. Соколов, А.С. Смогоржевский, Н.Н. Боголюбов, Б.В. Гнеденко, И.З. Штокало (помимо упоминавшихся ранее). Но влияние С.Г. на меня было огромным — с ним я чувствовал, что я могу что-то придумывать и это достаточно интересно.

Если благодаря СИ. Зуховицкому я стал математиком, то благодаря Селиму Григорьевичу я стал заниматься математикой активно. И моя благодарность этим двум математикам — безмерна.

С.Г. не только вовлек меня в активную работу в математике. Он помог мне с устройством всей моей дальнейшей жизни. Если бы не он, то в никакую аспирантуру я бы не попал. Ведь кем я был к лету 1948 г. — окончившим с отличием мехмат КГУ 23-летним молодым человеком. Вроде бы успешно занимающимся математикой, но статей не имеющим. Был на оккупированной территории, не комсомолец. Единственное "достоинство" (к тому 1948 г. существенное) — не еврей.

С комсомолом у меня был даже некий конфликт: мне Лида Костяная (позже Л.М. Кисилевская), наверное, парторг факультета, предложила вступить в него — отличник и т.п. И я ей прямо сказал, что поступать не хочу, т.к. во все это дело не верю. Она абсолютно опешила, спросила, что я делал при немцах, и ушла, но оказалась порядочной — никому, по-видимому, об этом не сказала. И отношение ко мне в деканате было индифферентное, во всяком случае, рекомендацию в аспирантуру дали.

Но этого было мало. И С.Г. помог существенно — заручился поддержкой Н.Н. Боголюбова, убедил директора Института Математики АН УССР, в то время М.А. Лаврентьева, мне содействовать. В аспирантуру в этот институт

я попал, и моими руководителями стали М.Г. и С.Г. Крейны.

О влиянии М.Г. Крейна на меня — отдельный вопрос. Я здесь только скажу, что впервые я с ним познакомился, по-видимому, на том же 3-ем курсе. Он еще работал (живя в Одессе) в Киевском Институте Математики АН УССР, часто приезжал в Киев и читал лекции студентам — аспирантам (в том числе и мне). Он был живой реализацией давнего моего ощущения — занимаясь математикой, можно быть свободным. Не взирая на всю мерзость государственной системы. Он не принимал систему, и она отвергала его. Но, тем не менее, стал одним из крупнейших математиков — творцов функционального анализа.

С.Г. был в плане отношения к коммунизму и власти совершенно иным — он свято верил во все эти идеи, был даже секретарем партбюро одно время. Он продолжал верить, по-моему, даже тогда, когда его изгоняли в 1951 г. из Института Математики АН УССР и он был вынужден сперва работать в Криворожском горнорудном институте (1952-1954 гг.), а затем переехать в Воронеж, где он вместе с М.А. Красносельским создал хорошо известную школу функционального анализа и его приложений.

Я как-то сейчас пытаюсь вспомнить, как же я относился к этой политической деятельности С.Г.? Пожалуй, по молодости просто ее не замечал. Сам же С.Г., я думаю, был уверен, что для того, чтобы делать добро, можно быть и членом партии. Я к партии и режиму относился негативно, пожалуй, с детских лет. Здесь и влияние моих родителей (они в молодости были в петлюровской армии и всю жизнь это скрывали и боялись разоблачения). Но, пожалуй, больше всего на меня повлиял голод 1933 г. в Украине — я мальчишкой видел трупы крестьян на улицах Киева (я до сих пор помню эти места). И я еще в то время понял, что коммунизм — это что-то не то, это система, ведущая к гибели. Все это усилилось во время немецкой оккупации, когда, несмотря на ее ужас, о советской власти, коммунизме, Сталине писали правду.

Как бы там ни было, на эти темы мы с С.Г. не говорили, интуитивно избегая противостояния (с М.Г. об этих вещах я говорил). Сейчас я думаю — а может, С.Г. был прав — для того, чтобы делать добро, надо было в то время быть в партии. И он был в ней. К примеру, со мной — беспартийный М.Г., конечно, ни в какую аспирантуру меня не сумел бы устроить.

Моя цель в этих заметках описать лишь становление молодых математиков в Киеве в период с осени 1943 по 1946 г. Тогда еще математики-евреи в Киеве себя чувствовали достаточно уверенно. Но потом начался ужас и для С.Г., и для М.А. Красносельского, Б.И. Коренблюма, Б.А. Трахтенброта, работавших в институте математики — как и, для всех евреев, живших в то время в СССР.

Обвинения против С.Г. и М.А. Красносельского были абсурдными — они занимались помимо чистой математики прикладными оборонными задачами, контролируемые секретной частью института. Вычислительных машин не было, а считать надо было. И вот они давали подработать

студентам-математикам, поручая им абсолютно локальные расчеты, из которых никакие государственные секреты узнать было невозможно. Но формально присутствовал элемент "разглашения тайны", и его начальство взяло на вооружение. В институте в 1951 г. была организована компания против С.Г. и М.А. — комиссии, вызовы на них сотрудников (в том числе и меня — я эту беседу запомнил). Все было ясно, как божий день, — хотели избавиться от хороших и неудобных математиков.

Плюс антисемитские идеи, которые "овладели массами" в это время. Почему эти идеи в Украине того времени были очень сильны (сильнее, чем в России) — у меня свое объяснение. Это и послушность украинцев, для которых, как правило, мнение начальства — закон (поэтому в СССР среди военных было много украинцев). И, более серьезно, — это голод 1933 года, когда вымерло около 10 млн. крестьян.

Я подчеркиваю — крестьян, в городах люди не умирали. И вот родственники и потомки этих крестьян после войны попали в города, и отношение их к городским жителям и интеллигенции было активно недоброжелательным.

Сейчас на Украине антисемитизма нет — ни на бытовом, ни на государственном уровне. Я с полной ответственностью это заявляю. Далекие потомки этих крестьян 1933 года сами стали городскими жителями и часто интеллигентами, голод забыли, стали "конкурентоспособными". Но во времена 1951 года — это было иначе. Из сказки слов не выбросишь.

Конечно, не только упомянутые математики сыграли в моей жизни важную роль. Так, в Киеве работал Г.Е. Шилов в 1950-1954 гг., благодаря которому (и его ученику А.Г. Костюченко) я стал заниматься обобщенными функциями и читать лекции в Киевском университете. Появились сильные молодые вероятностники В.С. Королюк и А.В. Скороход, контакты с которыми были плодотворными. Но это все — другая история, о которой я писать не буду. Моя цель в этих заметках — математический Киев, осень 1943-1946 гг.

## **И. Брискин.**

### ***Свет, который всегда со мной***

Посвящается памяти **С.Г.Крейна**

Поздний вечер в апреле 2001-го года; уютная, хотя и немного шумная квартира в г. Бат-Ям, Израиль. Суббота, свечи зажжены, правда, без молитвы. Интересно, знал ли Селим Григорьевич молитвы? Может быть и знал... теперь это уже не так уж важно.

Чуть-чуть о себе. В 1965-м году я окончил Харьковский университет по классу В.П. Гурария, то есть писал диплом у этого замечательного математика (спустя почти 35 лет мы увиделись на конференции, посвященной памяти нашего общего кумира — Б.Я. так у нас назывался Борис Яковлевич Левин...)

При распределении мне досталось не слишком почетное место — Макеевский филиал Донецкого политехнического института. Место, явно забытое богом, а может и всеми другими тоже. Я приехал туда узнать, как и что, и был встречен с удивлением — мол, чего ему надо. Мне-то было как раз не надо, но им тоже было не надо — встретились два одиночества. Короче, не взяли меня. Графа ли, лень ли — бог их знает — и я укатил в Челябинск, ибо на дверях деканата в ХГУ прочел письмо А.Д. Кацмана: "Мол, товарищ декан, шлите нам своих неустроившихся выпускников." Меня ведь в Макеевке послали, вот я и поехал, а также полетел.

В Челябинске, в ЧПИ было хорошо — полно выпускников из других городов — ЛГУ и ХГУ и НГУ и ОГУ — все ГУ да ГУ. В аспирантском блоке как бы продолжалась моя студенческая жизнь, но я уже был как бы не студент. Тут трудно придумать описание ситуации, ибо были студенты после армии, так что тот я еще был преподаватель. После пар (90 мин) многие говорили мне "ты". Организовался семинар и я из заседания в заседание докладывал книгу "Банаховы пространства аналитических функций" К. Гофмана. Оказалось, что полугодовое общение с В.П. Гурарием, В.И. Мацаевым, Б.Я. Левиным и Кадецом даром не прошло — я был явно на высоте. Все меня хвалили и говорили, что чувствуется школа (сейчас за давностью лет не проверить). Слово за слово — поехал я Харьков.

Летом 1967 г. пошел к Ю.И. Любичу спросить, как ему плавается на лодке, которую мы с моим папой ему добыли, а у него сидит Кадец. Я возьми да и брякни: хочу в аспирантуру (возьмите дуру в аспирантуру). А Кадец и говорит: "Вот 23 июня здесь будет защищать докторскую диссертацию Ю.П. Петунии, придет С.Г. Крейн, его наставник то бишь, мы Тебя и представим". И начинается короткая сага "Селим Григорьевич, grossмейстер и наставник молодежи в моей жизни".

Все это было в парке Шевченко, кучковались математики и студенты,



светило солнце. Крейн был в розовой рубашке с отложным воротником, лучистые озорные глаза, розовое лицо — свежесть и обаяние нестерпимое.

"Господи! Как должны быть счастливы те, кто с ним может общаться", — так я подумал. Так потом и оказалось. М.И. Кадец представил меня, сказав какие-то похвалы. Я очень хотел бы вспомнить какие, но уже тогда все вылетело из головы — я был как в ватной оболочке — лишь легкий звон доносился до меня.

И в этом звоне проплыли будничные слова: копию диплома, автобиографию, в 2-х экземплярах, фотографии : по адресу Лесная улица (не уверен, что помню правильно). Полгода я был в лихорадке. В том, что я сдам математику С.Г.Крейну, я не сомневался, но насторожили слова Селима Григорьевича: "историю КПСС" вы должны сдать на 4, не меньше, лучше на 5. Как сейчас помню, что я взял (стой-не-падай!) "Справочник по истории КПСС". Это примерно 300 страниц убористого текста с курсивами и разрядкой в нужных местах. И вот на несколько месяцев бесовские формулировки из этого текста стали сопровождать меня повсюду. В "записных книжках" И. Ильфа есть такие строки: было приказано: "в книге не должно быть опечаток!" держали 10 корректур, и все-таки на обложке было напечатано "Энциклопудия".

Аналогичный случай был в Одессе, пардон, в Воронеже. Меня спросили на экзамене по истории КПСС (я отвечал уверенно, даже весело, даже творчески): "А где это прозвучало впервые (о чем-то там)?" Я возьми и скажи: "В отчетном докладе Н.С.Хрущева 22-му съезду КПСС". И те, кто уже вставали, чтобы пойти, наконец, в буфет, подальше от этой тошнотворной бодяги, внезапно вздрогнули — как охотник при виде дичи. Я не хочу утрировать, форсировать и играть, но, по-видимому, они решили как-то С.Г. подкузмить. Суровый отклик: "Это был отчет ЦК КПСС, и НЕ ВАЖНО, КТО ЕГО ДЕЛАЛ" (клянусь, что цитирую точно!) и я получил 3.

Когда я на ватных ногах вошел к С.Г., там сидел Е.М. Семенов (Женя, как все его звали и зовут по сей день). Крейн развел руками и сказал: "Попробую что-то сделать, но не ручаюсь." В аспирантуру меня взяли. Авторитет С.Г. был огромен.

1-го февраля 1968 г. я уже нанес ему 1-й визит в качестве аспиранта. И это было: в больнице. Вместо конфет у меня была "Кокарбоксилаза" — это польский препарат, и я знал, что это нужно, и не ошибся.

Селим Григорьевич решил, что скрепить харьковскую тематику с воронежской лучше всего сможет Женя Семенов, и не потому, что лауреаты премии Ленинского комсомола делают это особенно хорошо, а потому, что Женя может все. Так и возникли пространства Харди-Брискина.

Время от времени я наведывался в лесотехнический институт, но не из любви к лесу или технике, а чтобы сказать С.Г.: вот решил эту проблему, а она легкая, даже на статью не тянет. В какой-то момент С.Г. это надоело, и он приказал найти такую проблему, которая "тянет" и указал на Сашу Седаева.

Месяца 3 мы были неразлучны и обнаружили вмятины на сфере им. Лоренца.

Как искры разгорелось пламя, так эта вмятина вытолкнула меня к Хавину в Ленинград. Хавин сказал: "Это неплохой результат, и я его напечатаю в Вестнике ЛГУ, а может быть, и в научных записках Е.И.В." (не пугайтесь — речь шла о ЛОМИ). Ломи или Соми — не важно. Чуть с опозданием, но вот уже мы в коридоре ВГУ, и Кадец с Крейном и Семеновым говорят обо мне, мол, работа неплохая.

Вспоминаются такие моменты из аспирантской жизни.

Селим Григорьевич шлет гонца на ул. Энгельса в общежитие ВГУ за мной. Я в это время как раз в "Бухенвальде" (так называли студенческую столовую, имея в виду ее меню). Когда я узнал, что меня ищет С.Г., я был страшно польщен (противно быть Джо (как в известном анекдоте), который никому не нужен). Я пришел к С.Г., а там сидит декан мехмата и оба чуть ли не в унисон сказали, что нет лучше кандидатуры, чем моя для вожака группы студентов в колхозе. Так я пошел на последнее комсомольское поручение.

Спустя десятки лет на улице Тель-Авива меня встретил студент Шохат и сказал: "Ну, Вы помните меня? Это вам я помогал промывать вермишель в колхозе под Анной". "Под какой Анной?" — забеспокоился я. Да под городом Анна в Воронежской области отвечал мне Гена Шохат.

Вот уже и Воронежские матшколы пошли. Бывать на пленарных заданиях вместе с С.Г. было особое удовольствие. Кто бы ни выступал В.И. Арнольд или СП. Новиков, они поглядывали на С.Г. Его вопросы были восхитительны. Часто это было очень смешно. Был случай, какой-то докладчик сказал, что не помнит имя автора темы, только помнит, что очень простая. С.Г. сказал:

"Видимо, это Хирцебрух".

Но школа заканчивалась, и приближался банкет. С.Г. танцевал с отличными девушками и пел вместе с В.П. Хавиным "Али-луйя".

Когда пошел слух, что Гохберга выдвинули в академию наук Молдавской ССР, то с легкой руки С.Г. стало формироваться лобби "Изю в Академики".

Надо ли говорить, что лишь благодаря моим дорогим учителям я чего-то стою.

## ***В. П. Глушко***

### ***О моем учителе***

По широкому коридору четвертого этажа "красного корпуса университета" (пр. Революции, 24) шел статный молодой, но совершенно седой человек с удивительными глазами: эти глаза одновременно излучали массу благожелательности, доброту, улыбку и интеллектуальную глубину. Очень белая кожа лица и небольшая хромота лишь подчеркивали его избранность среди людей. А вокруг него шелестело: "Профессор Крейн, профессор Крейн..."

Я был в то время студентом выпускного курса физико-математического факультета университета. Незадолго на факультете появился и другой выдающийся математик — профессор М.А. Красносельский. Нужно сказать, что после войны на факультете не было ни одного профессора математика, да и любой доцент, кандидат наук был большим "дефицитом". Оба новых профессора начали интенсивно преобразовывать факультет, поставив своей основной целью сообщество математиков, владеющих современными методами исследования, и способных решать задачи на мировом уровне. Интересно отметить, что свою работу они начали со знакомства с выпускниками факультета. Это знакомство проходило не на "бумажном" уровне (по оценкам), а основывалось на личных беседах с каждым выпускником (да и со многими студентами младших курсов). Эти беседы проводились индивидуально, "с глазу на глаз": выяснялось какие вопросы студента интересуют, каковы его планы и т.д. Это для меня лично было большой неожиданностью, так как за все время обучения со мной никогда и никто из преподавателей индивидуально не беседовал и моими планами не интересовался.

Впоследствии С.Г. Крейн был рецензентом моей дипломной работы по гидродинамике (рук. доц. Н.Н. Гвоздков). Как я впоследствии понял эта работа была наивным "детским лепетом", однако С.Г. Крейн обнаружил в ней какие-то творческие задатки, дал положительный отзыв и даже пригласил к нему в аспирантуру. Инфантильность, детская самоуверенность не позволили мне сразу оценить всю значимость этого предложения, и я отказался, заявив о желании вначале попробовать себя на практической работе. Двух лет работы в Особом конструкторском бюро (г. Днепропетровск) под руководством М. Янгеля (впоследствии академика) оказалось вполне достаточным, чтобы лишиться детских иллюзий, и вернуться в 1956 году в Воронеж к С.Г. Крейну. Селим Григорьевич принял живое участие в моем (и моей жены — Н.П. Денисовой) трудоустройстве. В ту пору С.Г. Крейн работал профессором кафедры метеорологии и математики Воронежского лесотехнического института (ВЛТИ).

Завкафедрой был профессор Костин — метеоролог по специальности.

Проработав год в должности ассистента (0,5 ставки) этой кафедры, я поступил в аспирантуру к С.Г. Крейну. Вместе со мной одновременно в аспирантуру к С.Г. Крейну поступили О.М. Козлов (г. Киев) и С.С. Литвинков (г. Воронеж). Насколько мне помнится, мы были первыми аспирантами в Воронеже. Несколько особняком от нас находился П.Е. Соболевский, который подготавливал кандидатскую диссертацию под руководством одновременно проф. М.А. Красносельского и проф. С.Г. Крейна.

Несмотря на трудные условия, годы учебы под руководством С.Г. Крейна остаются в моей памяти как самые замечательные. Это было чудесное время совместной работы, не омраченной никакими деловыми соображениями.

Чаще всего работа проходила дома у С.Г. Крейна в большом его кабинете (настоящем профессорском), однако она не прекращалась и во время совместных пеших прогулок, и даже во время поездок в трамвае (трамвай в район СХИ, где в то время на ул. Ломоносова находилась квартира С.Г. Крейна, идет довольно долго). Иногда Селим Григорьевич шутливо говорил, что самые плодотворные идеи приходят к нам в трамвае.

Зачастую занятия в кабинете заканчивались водными прогулками по р. Воронеж на собственной моторной лодке Селима Григорьевича, которой он управлял весьма искусно. Вообще, должен сказать, что в то время Селим Григорьевич с удовольствием занимался спортом. Часто его можно было видеть играющим в волейбол. Очень любил он (вместе со своей женой Е.П. Кострюковой) сражаться в "пинг-понг" (так тогда назывался настольный теннис). Мои попытки выиграть у него хотя бы одну партию заканчивались плачевно для меня.

Вернемся, однако, к делам математическим. Усилия М.А. Красносельского и С.Г. Крейна, их высокий научный авторитет начинают приносить свои плоды. Воронежские математики участвуют во многих республиканских и всесоюзных научных конференциях, а некоторые из них проходят в Воронеже. Благодаря этим конференциям Воронеж посетили такие выдающиеся математики как О.А. Олейник, О.А. Ладыженская, М.И. Винник, Ю.М. Березанский, Ю.А. Далецкий, Ю.А. Дубинский, В.А. Ильин, Е.М. Ландис, В.П. Маслов, СМ. Никольский, М.З. Соломяк, М.В. Федорюк, А.Д. Мышкис, В.П. Паламо-дов, Б.П. Панеях, А.Я. Повзнер, А.И. Кошелев, С.Г. Гиндикин, Л.Р. Волевич, В.А. Солонников, Б.Ю. Стернин, В.А. Кондратьев и многие другие. Воронежские математические конференции по инициативе С.Г. Крейна плавно переросли затем в Воронежские зимние математические школы, сыгравшие значительную роль в становлении воронежской математической школы в целом.

После окончания аспирантуры у С.Г. Крейна, я защитил в 1961 году в Ученом совете физико-математического факультета Харьковского госуниверситета кандидатскую диссертацию (официальные оппоненты

проф. Винник и проф. А.Д. Мышкис) и продолжил работать в ВЛТИ. В то время С.Г. Крейн перешел на работу в Воронежский госуниверситет (ВГУ) и в 1963 году пригласил меня на должность доцента его кафедры в ВГУ. После перехода в ВГУ интенсивная научная работа под руководством Селима Григорьевича продолжается. Участие в работе семинара С.Г. Крейна в ВГУ, а также в различных научных конференциях, проходивших в различных уголках бывшего Советского Союза, во многом способствовала научным исследованиям.

Особенно запомнился Международный конгресс математиков, проходивший в Москве в 1966 году. В этом конгрессе принимал участие известный американский математик Дж.Дж. Кон, одна из работ которого была прямо связана с моими работами. Еще до начала конгресса мы договорились с Селимом Григорьевичем, что попытаемся поговорить с Дж.Дж. Коном по этой интересующей меня теме. Поскольку я не знал английского языка, а Селим Григорьевич недостаточно уверен в своих знаниях, то мы пригласили в качестве переводчика московского математика Н.Д. Введенскую. Подходим с некоторой дрожью втроем к Дж.Дж. Кону, и Н.Д. Введенская начинает переводить слова Селима Григорьевича. В это время Дж.Дж. Кон вежливо ее перебивает, и говорит на довольно сносном русском языке, что можно не переводить (к нашему общему облегчению) и, что он постарается нас понять без перевода на английский. Потом он нам рассказал, что перед поездкой в Москву, он в течение трех месяцев учил русский язык, и ему этого оказалось достаточно, чтобы понимать нас и разговаривать с нами по-русски. В заключении нашей полезной беседы Селим Григорьевич сказал ему с улыбкой: "Надеюсь, что Ваших знаний русского языка достаточно, чтобы понять мое пожелание: дай Бог Вам здоровья".

В 1963 году при ВГУ был создан Научно-исследовательский институт математики. Идея создания этого института (первого бюджетного научно-исследовательского Минвуза) и ее осуществление принадлежит С.Г. Крейну. К сожалению, в последние годы в некоторых выступлениях повторяется мысль о том, что Селим Григорьевич был не единственным математиком, обеспечившим создание института. Относясь с глубоким уважением к М.А. Красносельскому и нисколько не преуменьшая его роль в создании Воронежской математической школы, не могу не засвидетельствовать, что М.А. Красносельский с самого начала был противником создания при ВГУ института математики. В частности, в беседе со мной Марк Александрович аргументировано говорил об определенных отрицательных последствиях создания параллельной математической структуры в ВГУ (к сожалению, многие его опасения в дальнейшем оправдались). Между Марком Александровичем и Селимом Григорьевичем проходили дискуссии на эту тему. Однако Селим Григорьевич оказался непреклонен в этом вопросе и действовал фактически в одиночку, от подготовки первоначальных документов до заключительных операций в Минвузе. Нужно ли говорить,

что без присущей Селиму Григорьевичу убедительности и обаяния, его настойчивости и знания, в конце-концов, людских слабостей, удалось "пробить" столь сложный вопрос. Следует особо подчеркнуть, что все сделанное Селимом Григорьевичем было направлено только на пользу воронежской математической школе, и никаких личных выгод он не планировал и не получил.

В 1970 году я защитил докторскую диссертацию и по рекомендации Селима Григорьевича стал заведующим кафедрой, которую он создавал. Сам Селим Григорьевич возвратился на работу в ВЛТИ. Теперь мы встречались с Селимом Григорьевичем, к сожалению, значительно меньше, и об этом периоде жизни Селима Григорьевича могут рассказать более молодые его ученики.

Анализируя свою жизнь в ретроспективе, я убеждаюсь, что решающую роль в моей судьбе сыграл именно С.Г. Крейн. Он влиял на меня не только как математик, но и как выдающаяся личность. Поэтому С.Г. Крейн пользовался всеобщим уважением и любовью не только математиков, но и большинства его окружавших людей.

## *М.Г. Зайндеберг*

### *Об С. Г.*

В среде моих сверстников, - студентов и аспирантов Селима Григорьевича Крейна, - мы ласково называли его между собой просто С.Г. Позвольте мне в этом тексте сохранить ту же аббревиатуру.

### С.Г. - создатель школы

С.Г. был создателем и лидером математической школы<sup>1</sup>. "Школы" в этом смысле известны уже в древности, - достаточно вспомнить школу Пифагора на Самосе. Особенное развитие институт школ получает в конце 19-го и в 20-м веках. Выдающимися создателями школ были, например, Е. Х. Мур, Соломон Лефшец, Оскар Зариский, Норман Стинрод, С.-С. Черн, Лип-ман Берс, Энтони Зигмунд в США, Карл Вейерштрасс в Берлине, Давид Гильберт, Эмми Нётер в Гёттингене, Эмиль Артин (Гамбург-Принстон), Пафнутий Львович Чебышев в Санкт Петербурге, Дмитрий Фёдорович Егоров, Николай Николаевич Лузин, Андрей Николаевич Колмогоров, Павел Сергеевич Александров в Москве, Юрий Линник, Александр Данилович Александров в Ленинграде, Дмитрий Александрович Граве в Киеве, Марк Григорьевич Крейн в Одессе и многие другие. Мы адресуем читателя за справками в Google, The Mathematics Genealogy Project<sup>2</sup>. Из этой генеалогии читатель узнает, что С.Г. руководил написанием более чем 80 кандидатских диссертаций, что многие из его учеников защитили докторские, что более 75 математиков являются "научными внуками" С.Г., то есть учениками его учеников.

Прекрасные воспоминания Юрия Макаровича Березанского рисуют образ молодого, 30-летнего С.Г. в первые послевоенные годы, когда он руководил семинаром в Киевском Университете, участниками которого были, среди прочих, Юрий Львович Далецкий, Георгий Исаакович Кац и сам Юрий Макарович. Все они с той поры числили С.Г. среди своих учителей, - хотя, например, Г.И. Кац был в аспирантуре у Н.Н. Боголюбова, как в своё

---

<sup>1</sup> Термин "школа" употребляется на этих страницах в двух различных смыслах, - первый ясен из контекста, а о втором мы упомянем, когда речь пойдёт о Воронежской Зимней Математической Школе. В более широком смысле он употребляется в выражениях "Афинская школа", -как на картине Рафаэля, - или, скажем, "Московская математическая школа".

<sup>2</sup> Следует учесть, что списки учеников в The Mathematics Genealogy Project часто не вполне точны. В разные времена диссертация традиционно включала две темы, основную и побочную, и, соответственно, имелось два научных руководителя. Руководитель по побочной теме также попадает в "учителя". Так, например, Николай Бугаев защищал диссертацию в Берлине под руководством Вейерштрасса и Куммера

время и сам С.Г.

## С.Г. - научный руководитель

Чем объясняется притягательность С.Г. как научного руководителя? Прежде всего, широтой его научных интересов и понимания математики. С.Г. не замыкался в одной узкой области, он искал и находил возможность ознакомиться с новыми научными направлениями, учился быстро и глубоко. Конечно, С.Г. поощрял к тому же своих учеников. Вопрос, который С.Г. постоянно задавал себе и другим: что в данный момент наиболее важно и перспективно в математике, чем надобно сейчас заниматься в первую очередь? Воронежская Зимняя Математическая Школа (ВЗМШ), созданная С.Г. в 1967г., явилась одним из эффективных средств, позволявших быть в курсе происходящего в мире математики. Лучшие представители математического сообщества страны явились в разное время лекторами ВЗМШ. Школа была проникнута демократическим духом, - в ней все были одновременно учителя и ученики, не было деления на провинцию и элиту, не было каст. Общались запросто, бегали на лыжах, отдыхали душой от серости и убогости окружающей жизни, наслаждались интеллектуальной атмосферой и чудной природой, впитывали воздух высокой математики.

В начале 70-х годов С.Г. организует курсы лекций "по высшей математике" при Воронежском Педагогическом институте, для преподавателей математических кафедр Воронежских вузов. Лекторами были сам С.Г. и мы, его аспиранты<sup>3</sup>. Его семинар в Воронежском Лесотехническом Институте тоже носил название "Семинар по высшей математике".<sup>4</sup> Чего там только не было! Каждый из участников семинара мог проявить инициативу и рассказать то, что, по его мнению, представляет общий интерес. В те же годы функционировал столь же замечательный семинар С.Г. в Воронежском Университете, где часто докладывали приезжие, например, оппоненты по той или иной диссертации. Энергией С.Г. обладал поистине неистощимой, был блестящим организатором, умел привлечь людей, зажечь их своим энтузиазмом и любовью к своему делу. На одном из юбилеев<sup>5</sup> С.Г. произнес тост: "За самую прекрасную даму - Математику!" И это было сказано не ради красного словца.

---

<sup>3</sup> Одновременно с моей, С.Г. руководил ещё 7 другими диссертациями.

<sup>4</sup> Позже я узнал от Фридриха Хирцебруха, что в 50-е годы в Принстоне работал семинар "Ни о чём" под руководством Кодары и Спенсера.

<sup>5</sup> Банкет происходил в том самом ресторане на Проспекте Революции в Воронеже, с балкона которого прыгал на коня, скрываясь от белых, легендарный герой революции Олеко Дундич.



Как научный руководитель, С.Г. умел раскрепостить инициативу, разбудить творческую энергию. Вот типичный диалог:

- Ну, Миша, что у вас новенького, удалось что-нибудь придумать? -

- Есть кое-что, Селим Григорьевич, хотелось бы обсудить. -

С.Г. тут же назначает свидание, обычно у себя дома, - там спокойнее. Его реакция, как правило, такова:

- Ну, это же замечательно! Напишите заметку. -

Он тут же придумает, в какое издание её направить, кому порекомендовать. Начиная с аспирантских сборников, затем с провинциальных изданий, при посредничестве С.Г. в конце концов я стал представлять заметки в центральные издания, в Доклады АН, и к моменту защиты диссертации у меня их было издано 8.

### С.Г. - лектор

С.Г. был потрясающим лектором, одним из лучших, которых мне довелось слышать. Его стиль был спокойным, без лишнего пафоса и лишних деталей. Чёткость, выстроенность лекций С.Г. делали их доступными каждому слушателю. Идеальная адаптация к уровню аудитории, умение овладеть ее вниманием, - необыкновенное. Однажды в интервью газете ВГУ С.Г. сформулировал так: "Лектор должен быть в первую очередь хорошим актёром".

В начале 70-х годов С.Г. поручил мне прочесть спецкурс "Введение в многомерный комплексный анализ" <sup>6</sup>. Встречает меня как-то С.Г. в коридоре и задаёт такой вопрос:

- Миша, сколько времени Вы тратите на подготовку к лекции?

- Около часа Селим Григорьевич. -

Банкет происходил в том самом ресторане на Проспекте Революции в Воронеже, с балкона которого прыгал на коня, скрываясь от белых, легендарный герой революции Олеко Дундич.

С.Г. (обращаясь к кому-то третьему):

- Посмотрите, оказывается, Мише достаточно часа на подготовку, мне же нужно как минимум 3 дня, а потом накануне лекции я ночь не сплю.

- Мне стало стыдно, и я сделал соответствующие выводы.

### Личность С.Г.

Притягательная особенность личности С.Г. - его постоянно ровное, хорошее настроение, готовность к шутке и отличный вкус. С.Г. проявлял интерес к вашим проблемам и готовность прийти на помощь даже в те времена, когда, казалось бы, его самого одолевали серьёзные проблемы,

---

<sup>6</sup> Среди слушателей был, между прочим, Юра Чубурин, впоследствии аспирант С.Г., специалист по комплексному анализу.

отношения с ректоратом ВГУ <sup>7</sup> обострились до предела. В конце концов С.Г. пришлось вернуться в Лесной Институт, покинув созданную им в Университете кафедру.

Спустя два года после защиты моей диссертации ВАК прислал мне "чёрный" отзыв на неё. Я явился к С.Г. , чтобы отредактировать ответное письмо. История была вполне в духе тех мрачных лет "застоя", в подобной ситуации был не я один, а средства в борьбе были крайне ограничены. При расставании С.Г. мне сказал: "Ничего, Миша, хорошему человеку Бог помогает" . Простая фраза, но сказанная в нужный момент. Еще через год сменилась комиссия ВАК, председателем стал В. С. Владимиров (которому комплексный анализ не был чужд), меня вызвали на заседание ВАК, и с божьей помощью, через 3 года после защиты все-таки утвердили...

Вот эти человеческие качества С.Г. и создавали вокруг него силовое поле притяжения. В С.Г. чувствовалась большая сила и присутствие духа, человеческое мужество. С.Г. сохранял с вами постоянную (необходимую) дистанцию, и в то же время делал вас - в какой-то степени -участником своей жизни, и себя, деликатно, - участником вашей.

Помнится, когда вышел двухтомный "Анализ" Лорана Шварца в переводе Б. П. Пугачёва и под редакцией С.Г., С.Г. рассказал мне, что он начинал этот перевод много лет тому назад в Кривом Роге, где он преподавал в горнорудном институте<sup>8</sup>, и где ему было скучно, - чтобы не скучать. Ведь его первый иностранный язык был французский; впоследствии, уже на моей памяти, С.Г. выучил английский. Этот двухтомник я привез во Францию, а позже подарил на память своей коллеге Клодин Шварц, дочери Лорана Шварца, сообщив ей эту историю.

Как-то Воронежская Зимняя Школа проходила в доме отдыха " Берёзка", что неподалёку от Графского заповедника. В 25-градусный мороз участники школы жили в плохо отапливаемых помещениях. Когда я туда приехал из Орла, С.Г. встретил меня таким рассказом:

- Я позвонил Борису Яковлевичу Левину в Харьков. Он только что перенёс воспаление лёгких, и я его предупредил, что у нас здесь суровые условия, чтобы он не приезжал. Б.Я. ответил:

- Теперь я, конечно, должен буду приехать, иначе весь Советский Союз будет говорить, что Левин трусил.

- И он приехал. Б.Я. и С.Г. были "одной породы", породы людей надёжных, мужественных и весёлых.

## Первое знакомство и последний разговор

---

<sup>7</sup> Ректором ВГУ тогда был химик Мелешко.

<sup>8</sup> Где он оказался в результате кампании борьбы с космополитизмом в Киевском Институте Математики.

В 1964г., когда я оканчивал 11-й класс, путь в киевские вузы был решительно закрыт для еврея. Естественная альтернатива была поступать в один из российских вузов, где в те годы такой проблемы не было. Неподалёку от моего дома в Киеве обитали математики Симон Израй-левич Зуховицкий, с младшей дочерью которого Женей мы учились в одном классе, и Георгий Исаакович Кац, которого я тоже знал, - он был соседом моего хорошего приятеля. Я опасался (по-видимому, напрасно), что моя подготовка может оказаться недостаточной для поступления на мех-мат МГУ, где был в то время очень высокий конкурс, и тогда Симон Израйлевич посоветовал ехать в Воронеж. Георгий Исаакович написал коротенькую записку своему учителю С.Г.: "Рекомендую Вам Мишу Зайденберга, который очень интересуется математикой". С.Г. взял её, буркнув что-то вроде: - "А, это от Жоры, хорошо" - и скрылся в своем кабинете, - в тот год он возглавлял предметную комиссию.

Письменный по математике оказался крайне лёгким. Но когда я явился на устный, то с удивлением обнаружил, что у меня 4-ка по письменному. Получив свою 5-ку на устном, я явился в деканат к С.Г., чтобы ознакомиться с работой. Она оказалась объёмной, - чему С.Г. удивился, - так Вы, оказывается, писатель? - Красным был подчеркнут ответ в одной задаче, и ничего более, - я допустил опisku ( $1/4$  вместо  $7\pi/4$ ) при переписывании в ответ. Но оценка была снижена. Теперь я думаю, что проверяющий просто быстро просматривал ответы, не заглядывая в решения. С.Г., конечно, тут же исправил оценку и спросил, как у меня дела с сочинением. Вот его реакция на мой бодрый ответ:

- А, так вы, значит, и швец, и жнец, и на дудци грець!  
- Настроение у меня сильно улучшилось, что и потом происходило постоянно, практически при каждом общении с С.Г. И, видимо, не у меня одного, - С.Г. был адекватен, именно поэтому во всех воспоминаниях о нём так много общего.

А теперь позвольте мне перенестись на 30 с лишним лет вперёд. Как-то я приехал в Москву после долгого перерыва, и собирался заехать в Воронеж повидаться с С.Г. Однако меня прихватил сильный грипп, так что пришлось ограничиться телефонным звонком. С.Г. посетовал:

- Так значит, Миша, мы не увидимся? -

В канун очередного Нового Года я вновь позвонил С.Г.

- Миша, Вы откуда? -  
- Из Франции, Селим Григорьевич, из Гренобля. -  
- А что Вы там делаете? -  
- Работаю в местном Институте Математики имени Жозефа Фурье. -  
- А какое отношение Фурье имел к Греноблю? -  
- Наполеон назначил его здешним префектом. -

- Так значит, и Вы будете префектом? -
- радостно смеется С.Г.
- А что Вы преподаёте? Какие курсы читаете? -
- А какая у Вас нагрузка? -
- А Вы помните, Миша, как Вы поступали в Воронежский Университет и получили четвёрку по письменной математике? -
- Ну, как же не помнить, Селим Грогорьевич. -
- Так это же Юрий Иванович Петунии Вам тогда вклеил четвёрку! -
- Вот так новость. Юрий Иванович был впоследствии одним из рецензентов по моей дипломной работе, - я писал её в МГУ, а защищал в Воронежском Университете. Никогда ни до, ни после того, ни на одну из своих работ я не получал такого блестящего отзыва.

Мне очень повезло в жизни, - встреча с С.Г. явилась огромным событием. Когда я работаю со своими аспирантами, то мне часто думается, что я просто возвращаю долг...

***В.И.Кононенко***

***ДВА СЛОВА О СЕЛИМЕ ГРИГОРЬЕВИЧЕ КРЕЙНЕ,  
НАШЕМ УЧИТЕЛЕ В МАТЕМАТИКЕ И ЖИЗНИ***

10 мая 2007г.

Скоро 8 лет, как нет С.Г.Крейна. Годы мчатся быстро. Но чем дальше отодвигается то волшебное время, когда Воронеж был одной из столиц бушующего математического мира, тем ярче в памяти воспоминания о встречах с С.Г.Крейном, блестящим математиком, благородным человеком, душевным и искренним учителем, кумиром многих десятков математиков, бывших учеников. Когда в середине 60х годов я жил в общежитии Воронежского Университета на ул. Фр. Энгельса 8, все аспиранты С.Гр. звали его “папа”.

Мы расскажем о некоторых маленьких эпизодах, событиях счастливыми очевидцами которых мы оказались. В 1967 году в Хабаровске была организована впервые на Дальнем Востоке летняя математическая школа. С.Г. был одним из организаторов, поэтому он прилетел за сутки до открытия. На следующий день мы поехали в аэропорт встречать В.И. Арнольда. С.Г. не доверял серьезные дела никому, поэтому поехал в аэропорт тоже.

Встретив Арнольда, мы вместе подошли к такси. Ехать нужно было до города, а затем еще столько же до поселка Бычиха, где проходила школа. Я понимал, что трудно будет уговорить шофера ехать до Бычихи. Пока я мучился, как объяснить шоферу, что наш гость великий математик и мы должны, не теряя ни минуты, ехать в Бычиху, С.Г. меня опередил. Он держал в руке веером несколько 10 рублевых бумажек (самая крупная купюра в то время), сумма была близка к стоимости полета Хабаровск-Москва, и сказал шоферу просто: “Нам нужно быстро добраться до Бычихи”. Шофер всё понял мгновенно. Впечатляющая пантомима показала всем, как высоко С.Г. ценит каждую минуту жизни и как ни во что ставит эти бумажки.

Второй случай, который остался в памяти от этой школы произошел во время открытия школы. Это было в актовом зале Хабаровского Пединститута. В Хабаровске грамотных математиков тогда не было. По сравнению с Воронежем это была глухая провинция, поэтому в зале понимающих слушателей было немного – только гости, приглашенные профессора.

Пленарных докладов было два – В.И.Арнольда и С.Г.Крейна. в первом докладе В.И.Арнольд рассказывал свои новые результаты о топологии

алгебраических многообразий. Доклад С.Г. был вторым и посвящен дифференциальным уравнениям в Банаховых пространствах. С.Г. был основателем этого направления в математике. С.Г. начал свой доклад словами: “То, что мы сейчас слышали – это очередное блестящее новое открытие В.И. Арнольда; то, что буду рассказывать я – это провинциальная математика”. Хотя нам и было обидно слышать эти слова, ибо мы, ученики С.Г., считали его великим математиком, но мы не могли не оценить благородство и честность в оценке значимости собственных открытий.

Мы участвовали во многих школах и конференциях, часто там были люди старше С.Гр.: В.А. Ефремович; Б.В. Шабат; Б.Я. Левин и др. но почему-то С.Г. всегда казался старше всех остальных; в любом застолье он был “тамадой”. Почему-то в С.Гр. мы всегда видели организатора и ответственного за то, что происходит, даже если это было время досуга, отдыха, экскурсий. В С.Гр. мы всегда видели человека, который несет ответственность и выполняет миссию лидера; он был деканом, зав. кафедрой, организатором школ, семинаров, конференций и т.д.

Сейчас, когда с начала организации первых школ Крейна прошло около 40 лет, мы можем оценить насколько глубоко демократичным был С.Г. и сколько внутреннего напряжения стоило ему держать абсолютный порядок в жизни школы. Однажды в одной из зимних школ молодой московский математик и поэт, Д. Гуревич, написал стихи, посвященные школе. Стихи были хорошие и за 2 дня разползлились по всей школе (ок. 200 чел.) Поскольку среди участников школы была большая доля евреев, в стихах это было тепло подчеркнуто, т.е. с точки зрения коммунистической морали, стихи звучали немножко сионистски. Через 3 дня стихи дошли до С.Г. Его реакция была абсолютно противоположной нашей реакции и нашему впечатлению. Он моментально объявил, что автор стихов никогда больше не будет приглашен в школу.

Сначала мы были неприятно удивлены такой реакции С.Г. Только позднее до моего рассудка дошло, что я всегда видел только одну сторону медали, другая сторона состояла в том, чтобы убедить начальство и Обком в том, что эти школы действительно помогают развитию математики в России, а для этого надо было предотвратить любые неприятные слухи и намеки о недостаточной коммунистической лояльности школы. По доброте своей Селим Григорьевич вскоре забыл об этом инциденте и Дима Гуревич еще много раз приезжал в зимние школы.

Весь груз создания хорошего авторитета школы и остаточной коммунистической лояльности её участников лежал на плечах С.Г. Крейна. Мы пользовались только плодами того, что создавал С.Гр.

В то время я дружил с Е.Вас. Поповым, зав. каф. Философии Воронежского Политехнического института. Как-то у него дома, во время душевной беседы, после выпитой рюмки я с гордостью рассказывал о С.Г. Крейне, о его замечательных человеческих качествах. Выслушав, Евгений Васильевич меня предупредил: “Будь осторожен. С.Г. Крейн –

руководитель сионистской организацией в Воронеже. Старайся избегать встреч у него дома”. Я оторопел от абсурдности сказанного, но быстро понял, что это мнение Обкома и понял насколько трудно С.Г. сохранять свое влияние и авторитет, чтобы продолжать быть организатором математической жизни в Воронеже.

Мне повезло. Многие годы я был “личным” шофером С.Гр. Иногда я встречал его или провожал в аэропорт, иногда отвозил в Икорец, иногда ездили вместе на кладбище, где похоронена мама Евгении Петровны. Эти поездки для меня были счастливыми часами. Машина обладает волшебным свойством - люди расслабляются, и возникает душевный разговор. Это было чудо – слушать С.Гр. Его мысли, взгляды, его манера вести себя оставляли очень яркое впечатление. Это были замечательные уроки – о том, что важно и в жизни, что красиво, что нужно ценить и т.д. Теперь я вспоминаю об этих часах общения с С.Гр., как о золотых часах моей жизни.

Многие из нас были свидетелями печального периода жизни С.Г., когда после перелома ноги он был прикован к креслу. Мы увидели, как много мужества было в этом человеке. Тяжелая болезнь не истребила в нем жажды жизни, желания видеть людей, он интересовался всем, что происходило вокруг и даже улыбался и шутил.

После смерти С.Г. мы всегда 15 июня, в день его рождения, приходили на кладбище и всегда это было странно. Невозможно было поверить в то, что это реальность и это могила Крейна. Даже сейчас это кажется абсолютным абсурдом, что человек, который был учителем, “папой”, тамадой, запевалой и центром каждой компании закончил свой жизненный путь.

Я счастлив, что был близким свидетелем математического и человеческого таланта, который так ярко сверкал десятки лет и нес разум, добро, любовь к жизни и веру, и надежду в будущее.

**Н.Д. Копачевский**  
**Операторный пучок Селима Крейна**

Мои первые воспоминания о встречах и контактах с Селимом Григорьевичем Крейном относятся к 1965 году, когда я впервые его увидел в Харьковском университете на заседании Харьковского математического общества, где С.Г. выступал с докладом. Он рассказывал тогда о знаменитой впоследствии серии работ по гидродинамике вязкой жидкости, выполненных вместе с его учениками Н.К. Аскеровым и Г.И. Лаптевым и приведших к изучению операторного пучка

$$L(\lambda) = I - \lambda^{-1} B \quad (1)$$

названного позже мною и другими авторами операторным пучком С. Крейна.

Надо сказать, что в 1963-1964 гг. в отделе прикладной математики Физикотехнического института низких температур (ФТИНТ) АН УССР в Харькове под руководством профессора А.Д. Мышкиса (кстати говоря, большого друга С.Г. Крейна и М.А. Красносельского) начали проводиться математические исследования поведения жидкости (жидкого топлива в баке космической ракеты) в условиях, близких к невесомости. Идея этих исследований принадлежала директору ФТИНТ академику Б.И. Веркину (в настоящее время институт носит его имя), который после встречи с конструктором космических кораблей СП. Королёвым решил развивать это направление. А.Д. Мышкис отобрал из числа выпускников Харьковского авиационного института нескольких человек, тяготеющих к прикладной математике, с тем чтобы проводить исследования по гидродинамике невесомости. Мне досталась задача о малых колебаниях идеальной жидкости с учётом капиллярных (поверхностных) сил. Довольно быстро мне стало ясно, что исследование этой задачи необходимо проводить не классическими методами математической физики, а с использованием теории линейных самосопряжённых операторов, действующих в гильбертовом пространстве. А.Д. Мышкис не сразу поддержал эту идею, однако позже, на защите моей кандидатской диссертации Н.И. Ахиезер, известный специалист по теории самосопряжённых операторов, поздравил меня с успешным применением этой теории в гидродинамических задачах.

Каково же было моё удивление на заседании Харьковского математического общества, когда я увидел из рассказа С.Г., как применяется теория линейных операторов в проблеме малых и нормальных колебаний вязкой тяжёлой жидкости в открытом сосуде. Я был очарован и задачей, и С.Г. Крейном, и с тех пор смотрел на него если не как на бога, то, по крайней мере, как на полубога.

Позже я узнал из литературы и из рассказов С.Г., что он всегда сочетал исследования по различным разделам математики с приложениями, главным образом, к линейным задачам гидродинамики. Более того, известно, что С.Г.



был доктором технических наук. Он рассказывал мне, что в годы Великой Отечественной войны он жил в семье знаменитого математика и гидродинамика, академика АН УССР Лаврентьева М.А., впоследствии основателя (вместе с С.Л. Соболевым) Новосибирского научного центра в Академгородке под Новосибирском. М.А. Лаврентьев (многие его ученики называют его дедом), по-видимому, и заложил в С.Г. такое стремление сочетать серьёзные теоретические математические разработки с не менее серьёзными приложениями. В истории советской науки есть много примеров такого рода: С.Л. Соболев, М.В. Келдыш и другие. В частности в военные и первые послевоенные годы С.Г. занимался задачей о движении жидкости во вращающемся сосуде (волчке); параллельно с ним (и, возможно, несколько ранее) этой задачей занимался также С.Л. Соболев. Данная задача породила впоследствии многочисленные исследования как гидродинамического, так и математического плана. В частности, когда С.Л. Соболев рассказал подробно Л.С. Понтрягину об этой проблеме, тот впоследствии построил теорию операторов, самосопряжённых в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой. Такие пространства сейчас называются пространствами Понтрягина. (Позже М.Г. Крейн, знаменитый брат С.Г., ввёл ещё более общие пространства с индефинитной метрикой, которые сейчас носят его имя.)

Дело кончилось тем, что примерно в 1948 году С.Г. защитил диссертацию на степень доктора технических наук, причём эта диссертация была закрытой, защиту принимали генералы-учёные. Позже мне С.Г. рассказывал, что у него (по соображениям секретности) не осталось ни одного экземпляра этой работы, более того, ему самому не разрешали её читать. Что касается оценки этой работы, то генералы приняли такое решение после защиты: основная теорема в диссертации, доказанная С.Г., ввиду её важности в ракетной технике должна быть изучена всеми специалистами, "вплоть до последнего майора". С.Г. очень гордился таким выводом генералов и часто шутил по этому поводу.

В пятидесятые годы С.Г. продолжил свои исследования по гидродинамике. Одной из основных задач в то время была задача динамики тела с полостью, частично заполненной идеальной тяжёлой жидкостью. Здесь наряду с работами Л.Н. Сретенского, Г.С. Нариманова, Б.И. Рабиновича и других существенную роль сыграла опубликованная в 1957 г. им совместно с Н.Н. Моисеевым работа по этой тематике, где также использовалась теорема Л.С. Понтрягина, позволившая исследовать вопрос устойчивости движения тела с полостью, заполненной жидкостью.

Что касается работ С.Г. по гидродинамике вязкой жидкости, то ещё в 1953 г. в ДАН СССР была опубликована его статья, где изучались свойства операторов векторного анализа и гидродинамики. Идея операторного подхода к линейным проблемам гидродинамики впоследствии получила своё развитие как в работах С.Г. и его учеников и последователей, так и в работах других весьма известных учёных. Здесь достаточно упомянуть имя

О.А. Ладыженской, чьи работы относятся как к линейным, так и нелинейным проблемам гидродинамики, а также такие имена, как В.И. Юдович, П.Е. Соболевский и другие.

Возвращаясь к событиям 1965 г., когда я впервые увидел С.Г. в Харькове, замечу, что сразу же во время доклада С.Г. у меня возникла идея рассмотреть задачу о колебаниях вязкой жидкости в открытом сосуде в случае, когда жидкость является не тяжёлой (как в обычных земных условиях), а капиллярной, т.е. находящейся в условиях, близких к невесомости. Надо сказать, что в операторном пучке (1) в задаче С.Г. оператор  $A$  положительный и компактный, а оператор  $B$  неотрицательный и компактный. Если же учесть влияние капиллярных (поверхностных) сил, то оператор  $A$  будет иметь прежние свойства, а оператор  $B$  становится неотрицательным (в устойчивом случае) неограниченным оператором. Это как выяснилось, существенно изменило структуру спектра задачи: если в задаче С.Г. спектр имел две предельные точки  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ , то при учёте капиллярных сил оказалось, что ветвь собственных значений, которые ранее (т.е. для тяжёлой жидкости) имела предельной точкой нуль, теперь также "убегает" на бесконечность.

Последнее обстоятельство выяснилось далеко не сразу, более того, это произошло при участии С.Г. следующим образом. Во второй половине 1965 г. у меня уже была серия предварительных результатов по проблеме малых колебаний идеальной жидкости в условиях невесомости, где, как я уже упоминал, использовался операторный подход. Когда эти материалы я показал своему научному руководителю А.Д. Мышкису, он сказал: "Пора ехать к С.Г. Крейну". В декабре 1965 г. мы с А.Д. приехали в Воронеж, на квартиру С.Г., которая находилась возле Лесотехнического института, где он тогда работал. Я с удовольствием наблюдал, как С.Г. принимает друга (т.е. А.Д.). Так же радушно он встретил меня и внимательно выслушал мои "достижения". Его вывод был таков: "Это диссертация, и я согласен быть оппонентом". Тут же был намечен план дальнейших действий, в частности, мы втроём сформулировали одномерную спектральную задачу, "имитирующую" учёт капиллярных сил в общей пространственной проблеме. Это позволило в дальнейшем понять, что можно ожидать в реальной ситуации. Пользуясь случаем, я с любезного согласия С.Г. внимательно просмотрел и законспектировал (в библиотеке ВГУ) диссертации Н.К. Аскерова и Г.И. Лаптева, где проводились подробные выкладки получения операторного пучка (1) и исследования его свойств.

Надо отметить, что в то время у С.Г., кроме Н.К. Аскерова и Лаптева, были и другие ученики, занимающиеся проблемами гидродинамики. В частности, по инициативе С.Г. его ученик П.С. Литвинков защитил кандидатскую диссертацию по гидродинамике с применением так называемых обобщённых сферических функций. (Эти функции являются обобщением обычных сферических функций; набор их зависит не от двух, а от трёх целочисленных индексов; если один из них равен нулю, то они

становятся обычными сферическими функциями.) Применение обобщённых сферических функций позволяет разделять переменные в линеаризованных уравнениях Навье-Стокса, что является большой редкостью. Используя это обстоятельство, ученица С.Г. Иевлева О.Б. исследовала задачу о колебаниях маятника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, и опубликовала свои результаты в известном журнале. Читая эту статью, я понял, что с применением обобщённых сферических функций удастся разделить переменные в задаче о нормальных колебаниях вязкого жидкого шара, находящегося в невесомости. Я проделал первые необходимые вычисления, получил характеристическое уравнение задачи и затем приехал в Воронеж перед защитой своей диссертации. Каково же было удивление О.Б. Иевлевой, а затем и С.Г., когда они увидели, что мои выкладки опираются на статью Иевлевой О.Б., которая, как они полагали, ещё не опубликована. Оказалось, что, действительно, только через несколько недель журнал со статьёй прибыл в Воронеж, а я ранее успел использовать результаты этой статьи для решения совсем другой проблемы. С.Г. и О.Б. Иевлева были весьма рады, что обобщённые сферические функции оказались полезными ещё в одной задаче.

Впоследствии мы с А.Д. Мышкисом опубликовали работу, основанную на применении обобщённых сферических функций, где была высказана гипотеза, принадлежащая трём авторам (С.Г., А.Д. и мне), о том, что при учёте капиллярных сил, т.е. в условиях, близких к невесомости, невещественных собственных значений в задаче о нормальных колебаниях вязкой жидкости может быть не более конечного числа, а при достаточно большой вязкости жидкости они отсутствуют вовсе. Это свойство методами функционального анализа было строго доказано для вязкой тяжёлой жидкости, т.е. для пучка (1) в первых работах С.Г. и его учеников. Для капиллярной вязкой жидкости в задаче о пространственной шаровой капле и соответственно в плоской проблеме гипотеза также была подтверждена. Однако в общей постановке установить справедливость этой гипотезы либо опровергнуть её до сих пор не удалось. Ошибочные попытки доказать её делал Е.А. Ларионов; большие усилия разобраться с этой проблемой предпринимались на известном спектральном семинаре в МГУ, руководимом профессором А.Г. Костюченко. Тем не менее этот вопрос вот уже более 35 лет остаётся открытым. Однажды мы с учеником А.Г. Костюченко профессором Гомилко А.М. уже думали, что разобрались с этой проблемой, но в последний момент, уже посылая статью в печать, обнаружили ошибочность некоторых выкладок и невозможность для нас их устранить.

Возвращаясь к концу 1966 года, отмечу, что оппонентами при защите моей кандидатской диссертации в Харькове были С.Г. и Г.И. Лаптев. Моя защита на заседании совета была второй по очереди, а первой была защита докторской диссертации В.И. Гурария по геометрии банаховых пространств,

при этом одним из оппонентов был С.Г. Позже, во время дружеского ужина у меня дома, присутствующие шутили, какая половина С.Г. (левая или правая, верхняя или нижняя) оппонировала мою работу. Все смеялись (в том числе и С.Г.) над этой шуткой, желали друг другу успехов, и я в очередной раз убедился, каким обаятельным, весёлым и доброжелательным был этот математический гигант — С.Г. По-видимому, об этом будут писать многие его ученики, поэтому я не буду здесь повторять те же мысли.

В это же время в Воронежском университете учился ещё один из "гидродинамических" учеников С.Г. — очень активный и старательный вьетнамский парень Нго Зуи Кан. После окончания университета он остался в аспирантуре, а в 1968 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию. Позже, в 1981 г., он стал и доктором наук. Говорил он по-русски с большим акцентом, и мне рассказывали в шутку, что во время защиты Нго Зуи Каном дипломной работы члены ГЭК поняли из выступления Кана только слова: Селим Григорьевич. Во время защиты кандидатской диссертации понятных слов было уже четыре, т.к. добавились ещё два слова: "вязкая жижкость". Надо сказать, что С.Г. очень тепло относился к Нго Зуи Кану и считал его своим вьетнамским сыном. После 1970 г. у меня появилось острое желание поступить к С.Г. в докторантуру, однако жизненные обстоятельства помешали этому. Тем не менее, я считаю С.Г. одним из своих учителей, точнее, я считаю себя его "внебрачным научным сыном". На первых этапах моего научного пути огромную роль, начиная с первого курса авиационного института и до встречи с С.Г., в моей жизни сыграл А.Д. Мышкис, перед которым я преклоняюсь. Он впервые показал мне, каким умным, интеллигентным, глубоким и одновременно простым может быть выдающийся учёный-математик. Поэтому при встрече с С.Г. я уже был готов воспринять все замечательные качества С.Г. как вполне естественные. Наконец, на третьем этапе, накануне и после защиты мною докторской диссертации, большое влияние на меня оказали работы и общение с А.С. Маркусом. Таким образом, я счастливый обладатель трёх замечательных учителей. Не каждому так везёт в жизни.

Наши исследования поведения жидкости в условиях невесомости в Харькове продолжались; итогом этой работы стала монография "Гидромеханика невесомости", написанная А.Д. Мыш-кисом и его учениками (к тому времени — кандидатами наук) В.Г. Бабским, Н.Д. Копачевским, Л.А. Слобожаниным и А.Д. Тюпцовым, теми самыми парнями, которых А.Д. взял в отдел прикладной математики ФТИНТ в 1963-1964 г.г. Здесь к задачам статистики, динамики, конвекции применялся операторный подход, т.е. использовались методы линейного и нелинейного функционального анализа. Примером для нас в это время была замечательная школа по линейному и нелинейному анализу, созданная в Воронеже С.Г. Крейном и М.А. Красносельским. Начиная с 1975 года мы регулярно выезжали в Воронежские зимние математические школы (ВЗМШ), которые проводились в конце января под Воронежем, на турбазе

"Берёзка". Здесь собрался весь цвет советской математики, в том числе и выдающиеся математики МГУ и других университетов. Селим Григорьевич, руководитель школы, время от времени просил нас прочитать лекции по вопросам гидромеханики невесомости. Мы это делали с удовольствием, однако больше учились и "контактировали" с коллегами днём и по вечерам, часто "посиделки" затягивались почти до утра. Впрочем, об этом, я думаю, будут писать многие математики — ученики С.Г. и "школьники" ВЗМШ.

Нужно сказать, что в то время в ВАКе СССР была "революция" — "резали" докторские диссертации толковых математиков по "национальному признаку". Многие мои знакомые стали жертвами этого произвола. Некоторое время я размышлял, сделать ли решающий шаг или немного подождать. Меня решительно уговорили действовать М.А. Красносельский и С.Г. Крейн (а А.Д. Мышкис поддерживал всегда), и я после двухгодичной подготовки защитился. Защита проходила на Вавилова, 40, в Москве, в Вычислительном центре АН СССР. Оппонентами были, в частности, О.А. Ладыженская и Ф.Л. Черноушко, а "болельщиками" — А.Д. Мышкис, С.Г. Крейн (он специально приехал из Воронежа) и Н.Н. Моисеев. Такое окружение, конечно же, мне было приятно, но здесь я хочу отметить следующее: С.Г. всегда горячо поддерживал коллег, учеников и делал всё, что от него зависит, чтобы они преодолевали встречающиеся на пути преграды.

К этому времени из Ханоя пришло письмо от Нго Зуи Кана с просьбой к С.Г. поступить к нему в докторантуру. Я тогда заканчивал свою диссертацию и мы с С.Г. наметили возможный план для Кана. Он снова активно взялся за научную работу и к концу 1981 года диссертация была готова, работы опубликованы, в том числе совместные с С.Г. и "со мной". Защита проходила в Институте механики АН СССР (Москва) на спецсовете у А.Ю. Ишлинского, директора института и коллеги С.Г. ещё по совместной работе в Киеве в начале пятидесятых годов. После защиты мы все, "болельщики" за Кана, поехали в один из домов, принадлежащих вьетнамскому посольству в Москве. Все желали друг другу здоровья, удачи, успехов, пели песни. Сначала вьетнамцы тонкими голосами спели ряд мелодичных вьетнамских песен. Затем произошло нечто неожиданное: наши "крупногабаритные" (в прямом смысле) математики — профессора В.И. Юдович, я, С.Г. Крейн, А.Д. Мышкис "рявкнули" песню "Из-за острова на стрежень ...". Мы увидели испуганные лица вьетнамских коллег, но потом все заулыбались.

После защиты Нго Зуи Кана естественно возникла мысль о том, что пора нам троим подумать о написании книги о применении операторных методов в линейных задачах гидродинамики. Я помню сам, а также мне говорили ученики С.Г., что на семинарах после формулировки той или иной новой задачи С.Г. всегда спрашивал: "А как эта задача может выглядеть в операторной форме?". Зачастую операторная формулировка убирает все несущественные детали, связанные с конкретной проблемой, и остаются

только главные моменты, связанные со свойствами операторов задачи. Эта идея и была заложена в книге, которую мы в конце концов и написали втроём (Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с). Правда, Кан после защиты быстро приготовил рукопись и уехал во Вьетнам, а мы с С.Г. доводили дело до конца, живя при этом в разных городах. К тому моменту я из Харькова переехал в Симферополь, свой родной город, и стал работать в Симферопольском госуниверситете имени М.В. Фрунзе, ныне Таврический Национальный университет имени В.И. Вернадского.

В книге была заложена ещё одна идея С.Г.: он считал, что книга по механике не должна содержать явные формулировки основных утверждений, лемм и теорем, а выводы должны получаться сами собой на основе проделанных выкладок. Как правило, основные результаты составляли содержание пункта как подраздела параграфа, и всё становилось на свои места. Кроме того, С.Г. считал, что весь основной математический аппарат, используемый в книге, должен быть здесь же изложен в математическом введении, чтобы механики и прикладные математики не "плавали" по многочисленным математическим монографиям и статьям. (Отмечу, что идея "безтеоремного" изложения содержания материалов монографии не принята на Западе, о чём сообщил мне И.Ц. Гохберг, когда книга потом стала переводиться для издания в его знаменитой серии "Операторная теория".)

Как известно, у С.Г. достаточно много монографий по различным направлениям математики, но он очень хотел написать книгу по приложениям в гидродинамике разрабатываемых им и его сотрудниками методов. В процессе написания нашей книги я несколько раз приезжал в Воронеж, в том числе и на длительное время (в течении месяца); мы обсуждали структуру книги, намечали дальнейшие планы. Параллельно С.Г. писал и другие большие работы, обзоры по математике. Вероятно, об этом будут писать и другие коллеги и ученики С.Г., но и я упомяну о том, что я видел в кабинете С.Г. Он весь был заполнен книгами, рукописями, по четырём углам от пола до потолка стояли "столбы" из диссертаций его учеников либо тех, кому оппонировал С.Г. При этом весь пол этой достаточно большой комнаты также был заставлен рукописями и оттисками статей. Во всём этом был какой-то порядок, который был известен только С.Г. Ничего нельзя было трогать, иначе не восстановишь первоначальное расположение всех материалов. От двери к письменному столу проходила довольно узкая дорожка, по которой разрешалось ходить. Рукописи нашей монографии было выделено на полу довольно маленькое место, примерно площадью листа формата А3; местоположение этой рукописи С.Г. определял следующим образом: он садился за стол к окну, протягивал правую руку назад и вправо, и мы с ним уточняли, где именно находится наша рукопись. Эти детали характеризуют, какую гигантскую матема-

тическую деятельность осуществлял С.Г. в течение всей своей жизни.

Итоги этой деятельности особенно были очевидны во время юбилеев С.Г.; я присутствовал на 60-летию и 70-летию. С.Г. гордился тем, что он был "ровесник Октября", и в 1987 году на его 70-летний юбилей приехало очень много учеников и коллег из разных республик СССР. С.Г. сидел в президиуме, принимал поздравления и памятные адреса и складывал их рядом с собой на столе. Постепенно эта "гора" адресов стала настолько большой, что не стало видно из-за них самого С.Г.

Кроме учеников — "научных сынов и дочерей" С.Г. — у него довольно скоро появились и "научные внуки и внучки". Одна такая "гидродинамическая" научная внучка из Вьетнама — ученица Нго Зуи Кана по имени Чан Тху Ха (Tran Thu Ha) — появилась в 1987 г. и очень активно работала с С.Г., а затем и со мной. Позже она защитила кандидатскую диссертацию, работала в Ханое и ряде стран (Германия, Америка, Голландия). До сих пор она помнит незабываемые для неё месяцы, когда она работала в Воронеже под руководством С.Г. Недавно я узнал её новый адрес; она хочет возобновить наши контакты, приглашает меня приехать во Вьетнам и продолжить исследования гидродинамических проблем на основе операторного подхода, развитого С.Г. Крейном, его учениками и последователями.

Здесь следует отметить, что гидродинамическая задача С.Г., приведшая к изучению операторного пучка (1), породила многочисленные исследования теоретического характера. Спектральная теория операторных пучков, возникшая в работах М.В. Келдыша, нашла своё продолжение в шестидесятые годы благодаря возникшим приложениям, в частности, благодаря задаче С.Г. Параллельно с ними усилиями его брата М.Г. Крейна и его ученика Г. Лангера (ГДР) была создана теория квадратичных операторных пучков, основанная на использовании теории так называемых  $\wedge$ -самосопряжённых операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой с бесконечным рангом индефинитности, т.е. в пространстве М.Г. Крейна. В своей "зелёной книге" — известной монографии по теории несамосопряжённых операторов И.Ц. Гохберг и М.Г. Крейн также уделили внимание пучку С.Г. Крейна. Позже задачи конвекции, колебаний капиллярной жидкости, стратифицированной жидкости и другие, как оказалось, привели к исследованию различных модификаций пучка С.Г., с одной стороны, а с другой, — к изучению неограниченных  $\wedge$ -самосопряжённых операторов, действующих в пространстве М.Г. Крейна.

С этой ситуацией я в своих работах столкнулся в начале семидесятых годов. Стало ясно, что следует изучить теорию  $J$ -самосопряжённых операторов и попытаться приложить её к гидродинамическим задачам. В 1975 году, во время математической школы в Загульбе, под Баку, я обратился за консультациями к известному воронежскому математику, специалисту по индефинитной метрике, ученику и коллеге М.Г. Крейна, замечательному человеку и учёному И.С. Иохвидову. Он посоветовал мне

поближе познакомиться с его учеником Т.Я. Азизовым, ныне известным профессором и специалистом по индефинитной метрике. Мы быстро подружились, и вот уже более двадцати пяти лет мы непрерывно обсуждаем возникающие в задачах гидродинамики индефинитные задачи и пишем совместные работы. Мы составили даже проспект монографии под названием Операторный пучок С. Крейна, его обобщения и приложения. Хотя мы живём в разных городах и странах, мы надеемся, что этот проект будет осуществлён в память о С.Г. Крейне, у которого Т.Я. Азизов также учился.

Что касается известной на весь мир школы С.Г. Крейна — Воронежской зимней математической школы (ВЗМШ), то она с благословения С.Г. получила "дочернее предприятие" — Крымскую осеннюю математическую школу (КРОМШ). История возникновения КРОМШ такова. Ещё в восьмидесятые годы во время воронежских школ известный математик из Донецка (сейчас он живёт в США) Э.Р. Цекановский неоднократно обращался ко мне с просьбой организовать школу в Крыму, на берегу моря, по схеме ВЗМШ. К 1990 году эта идея овладела нами, сотрудниками кафедры математического анализа Симферопольского госуниверситета. В январе этого года я обратился к С.Г. за советом по этому поводу и в первую очередь заверил его, что КРОМШ не будет "конкуренткой" школе С.Г., а будет её, как мы надеемся, дополнять во время бархатного сезона в Крыму. С.Г. горячо поддержал эту идею и сразу же произнёс знаменитую впоследствии фразу: "Воронежу — 50 мест!". С тех пор мы провели уже 12 таких школ. На второй из них был и С.Г., однако уже тогда, в 1991 г., здоровье не позволяло ему свободно передвигаться по горным тропинкам у моря. Каждый год к нам приезжают 100-130 математиков из стран СНГ; значительную часть из них составляют ученики С.Г. Крейна и М.А. Красносельского из Воронежа.

После выхода в свет нашей книги "Операторные методы ..." в издательстве "Наука", которая очень быстро разошлась, возникла идея издания её на Западе. К тому времени у меня появилось достаточно много новых задач, исследованных в русле этой книги. Кроме того, С.Г. очень хотел, чтобы книга с соответствующими дополнениями появилась на английском языке. Мы составили план двухтомника, теперь уже с двумя авторами. С.Г. принимал участие в обсуждении общего плана книги; к этому времени его здоровье уже оставляло желать лучшего, и основная нагрузка по доведению дела до конца упала на мои плечи. Позже, когда мы уже сдали в печать английский вариант книги, С.Г. признался, что он почти не верил, что дело будет успешно завершено. И.Ц. Гохберг, главный редактор серии "Operator Theory: Advances and Applications", просмотрел рукопись и посчитал, что наш "Moscow English" не очень хорош. Поэтому необходимо было дополнительное редактирование, которое проводил профессор М. Мартин из США. К сожалению, эта процедура настолько затянулась (более 6 лет), что С.Г. не дождался выхода в свет этого двухтомника. Дело



кончилось тем, что лишь в следующем тысячелетии, т.е. в 2001 году, вышел в свет первый том: Nikolay D. Kopachevsky, Selim G. Krein. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol.1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Operator Theory, Vol. 128, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001. 384 p.* Я надеюсь, что второй том (Vol. 2: Not Self-adjoint Problems for a Viscous Fluid) появится в 2002 г. Таким образом, Селима Григорьевича уже нет среди нас, а его монографии продолжают выходить в свет.

В заключение этих "гидродинамических" воспоминаний о С.Г. (а я сознательно ограничился только рамками этого направления, ибо воспоминания о С.Г. неисчерпаемы) замечу, что в последние несколько лет в Европе, а также в России и на Украине появилась новая тематика исследований, связанная с изучением так называемых операторных матриц с неограниченными операторными компонентами. Естественнонаучные задачи, породившие это направление, — это задачи магнитной и обычной гидродинамики. В теоретическом плане спектральные задачи изучались в работах Р. Менникена, Г. Лангера, В.М. Адамяна, Ф. Аткинсона, А.А. Шкаликова, а в приложениях — в работах Т.Я. Азизова, Н.Д. Копачевского и др. Оказалось, что знаменитая задача С.Г., приведшая к пучку (1), также может быть исследована методами этой теории. В настоящий момент принята к печати в журнале *Math. Nachr.* 50-страничная работа "To the problem on small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container" (авторы Т.Я. Азизов, Ф. Хардт, Н.Д. Копачевский и Р. Менникен) с посвящением С.Г. и продолжающая исследования проблемы С.Г. Крейна о малых движениях и нормальных колебаниях вязкой жидкости в открытом сосуде. В этой работе, в частности, указывается связь между естественно здесь возникающей операторной матрицей, отвечающей как за эволюционную, так и спектральную задачи, и операторным пучком С.Г. Крейна.

Этот пример ещё раз показывает, какую фундаментальную роль сыграли работы С.Г. Крейна в линейных проблемах гидродинамики. Мне выпало счастье сотрудничать с С.Г. по этому кругу проблем, учиться у него и получать радость от общения с ним. Об этом я никогда не забуду и буду вечно благодарен С.Г. за это.

## **В.А. Костин**

### ***О Крейне***

О Селиме Григорьевиче Крейне я услышал в году тысяча девятьсот пятьдесят восьмом. Мои знакомые студенты Лесотехнического института (теперь Лесотехническая академия) о нем восторженно отзывались. Лишь спустя четыре года (в 1962 г.), являясь студентом 1 курса мат-меха ВГУ, я стал посещать семинар М.А. Красносельского и Б.С. Митягина по математическим моделям в медицине. Однажды (по-моему, лишь однажды, так как семинар работал не очень долго) на семинар пришел человек, который в моем первом впечатлении реализовал образ "светлой личности": красивая седая шевелюра, розовощекость, светло-серый костюм с белым отложным воротником. Он посидел немного, задал вопрос по поводу двух дифференциальных уравнений, написанных на доске. Потом обмолвился с Марком Александровичем несколькими фразами и ушел. Так я впервые увидел С.Г. Крейна.

Настоящее знакомство произошло во втором семестре, когда я поделился первым своим научным результатом с Владимиром Ивановичем Соболевым, который читал нам в то время математический анализ. Но поскольку результат касался вопросов линейной алгебры, то он посоветовал обратиться к С.Г. Крейну, что я и сделал с большим волнением. Мои волнения были напрасны. С.Г. Крейн отнесся ко мне очень доброжелательно. Он поставил мой доклад на ближайшую студенческую конференцию. На втором курсе С.Г. Крейн читал нам курс линейной алгебры. И, начиная с этого момента, наши встречи стали регулярными. Надо признаться, что у Крейна я не пропустил ни одной лекции не только по линейной алгебре, но и по всем спецкурсам, которые он читал позже. Для меня это уникальный случай за все время моего обучения в вузах (ВГУ был третий вуз, в котором я учился).

С.Г. Крейн один из немногих людей (может быть единственный), кому я в то время не боялся задавать вопросы и делиться разного рода идеями, большей частью абсурдными. Говоря: "Безумству храбрых поем мы песню", — он освобождал нас от комплексов, так свойственных молодежи.

Первый экзамен Крейну (это была вышеупомянутая линейная алгебра) наш 2 курс сдавал в зимнюю сессию. Проводил его Селим Григорьевич следующим образом: первую партию (пять-шесть человек) впускал в аудиторию в девять часов утра. Обычно это были претенденты на пятерку. Билет состоял из двух вопросов. Если ответ был пятерочный, то давалась задача. Задача такая, что разрешалось выходить из аудитории, сидеть в читальном зале, советоваться с кем угодно, даже с докторами наук. Получив свою задачу часов в 11 дня, некоторое время подумав и поймав основную идею, я пошел в буфет. Пока подошла моя очередь, пришел Крейн, которого, как профессора, обслужили вне очереди. Так мы оказались за

одним столом. Он спросил о моих делах с задачей. Согласившись с моей идеей, добавил, что знает другой путь решения.

Пообедав, мы вместе пошли в спортивный зал, где в то время проходило первенство СССР по волейболу среди юношей. Селим Григорьевич любил спорт и, несмотря на хромоту, хорошо играл в волейбол. Как-то много позже, когда я был аспирантом, он упрекнул меня за то, что не сказал ему о нашей игре в футбол с вьетнамскими студентами и аспирантами, которую он бы с удовольствием посмотрел.

После волейбола экзамен продолжался. Реализовав свою идею часам к семи вечера, я понял, что, кажется, могу рассчитывать на то, чтобы быть учеником Крейна.

Загоревшись идеей зимней математической школы, Селим Григорьевич с энтузиазмом стал претворять ее в жизнь. Он подключил к активной работе над ее реализацией весь профессорско-преподавательский состав факультета. В оргкомитет школы вошли многие студенты и аспиранты.

Каждый отвечал за свой сектор в организации работы и досуга школы. Например, футбол курировал профессор В.С. Митягин. Мне пришлось работать в стенгазете как художнику. Здесь и пришла идея снежной бабы на эмблеме школы. Приятно вспоминать, с каким удовольствием Селим Григорьевич подписал эскиз эмблемы. Уже спустя несколько лет, когда школы стали традиционными (кажется, это было в Углынце), Крейн, глядя на эмблему школы, как-то серьезно сказал: "Все умрет, а останется только она". Конечно, он имел в виду то, что Воронежские зимние математические школы будут жить долго. Но похоже он ошибся, став свидетелем первых двух несостоявшихся школ 1992 и 1993 г.г. в связи с перестройкой. Правда, единственное утешение после этой первой "заботы о математике" нашего нового правительства явилось то, что водка, купленная к банкету школы, через два года, которые она простояла в кабинете Крейна, стала в 100 раз дороже, что для оргкомитета, наконец, состоявшейся школы было немаловажно.

Но это было позже. А в первой математической школе все были веселы и молоды, и Крейн не был исключением. Слушали лекции, делали доклады, играли в футбол, шахматы, пели, танцевали и пили водку, так как учил С.Г. Крейн — "из стаканов, но не стаканами".

В то время С.Г. Крейн выполнял огромную работу. Являясь заведующим кафедрой, он руководил двенадцатью аспирантами, читал лекции и участвовал в конференциях в разных городах. Он говорил, что не был только на Курильских островах. Кроме того, будучи деканом, он отстаивал интересы факультета в самый сложный период (именно в то время уехал М.А. Красносельский из Воронежа). В результате — инфаркт.

Это случилось накануне открытия второй зимней математической школы. Но и в этой тяжелой ситуации Крейн остался Крейном. К открытию школы он из военного госпиталя прислал поздравительную телеграмму в зимнюю школу за подписью:

"С сердечным приветом. Крейн"

Будучи больным, он продолжал работать с прежней любовью к делу и своим ученикам. Даже находясь в больнице, он принимал наши записки (а нас у него, как я уже говорил было двенадцать) и прятал их от врачей под подушку. Несмотря на болезнь, мне кажется он и позже не изменил своим привычкам.

Приехав в санаторий в Подлипках, где он продолжал лечение после больницы, я увидел его под ручку с симпатичной женщиной.

Уже после операции на сердце в Соединенных Штатах Крейн пришел в университет и оказался, как всегда, в окружении прекрасных дам. На мой вопрос: "Ну как, Селим Григорьевич, "американское сердце" относится к женщинам?" — он ответил: "Наших женщин любит любое сердце".

***П.А. Кучмент***

***Мой дорогой учитель***

Написание краткой статьи с воспоминаниями о Селиме Григорьевиче Крейне оказалось трудной задачей. Разумеется, дело не в том, что нелегко найти, о чем писать. Наоборот, воспоминаний столько, что крайне затруднительно уместить их все в даже большего объема тексте и еще труднее отобрать всего несколько примеров.

Итак, с чего начать? Я решил не обсуждать замечательные научные достижения С.Г. (мы все так его звали между собой, так что я надеюсь никого не оскорбить такой фамильярностью). Я писал о его научной деятельности в статье, вошедшей в книгу, изданную Американским Математическим обществом и посвященную его 80-летию.

Здесь мне хотелось бы просто привести несколько разрозненных воспоминаний о нем как учителе и человеке.

Я встретил С.Г. Крейна в 1966 году, когда пришел учиться в ВГУ. Этот год, хотя мы тогда этого не знали, был концом, вероятно, лучшего периода старой общественной системы и началом нового этапа "закручивания гаек".

К тому времени математический факультет ВГУ был уже широко известен благодаря блистательным успехам М. А. Красносельского, С. Г. Крейна и их учеников. Ещё школьником в западной Украине я, как и многие другие, знал об этом. Будучи "отфутболен" из МГУ вместе с большим количеством других еврейских абитуриентов, я, как и многие мои будущие друзья, коллеги и соавторы, поехал в Воронеж. Надо сказать, что я никогда впоследствии не жалел об этом и до сих пор храню тёплое чувство признательности математическому факультету ВГУ, в особенности, людям, значительно повлиявшим на мою жизнь: С.Г. Крейну, Е.М. Семёнову, М.А. Красносельскому, И.Б. Русману и многим-многим другим.

Благодаря руководству М.А. Красносельского и С.Г. Крейна, научная обстановка на матфаке была в то время уникальной, в особенности, для университета, считавшегося провинциальным. Я до сих пор с наслаждением вспоминаю как мы, студенты, постоянно пытались остановить какого-нибудь товарища или ухватить за пуговицу профессора, чтобы поделиться только что пришедшей в голову идеей, обсудить задачу, задать вопрос и т.п. Студенческие научные конференции были заполнены вполне квалифицированными докладами и были настоящим праздником для всех.

Помню, как на одну из них буквально ворвались ученики С.Г. Крейна Зайнберг и Саша Панков, в то время студенты 3-го и 2-го курсов, и заявили, что они "ну вот только что, минуту назад" решили некую задачу и должны "кровь из носу" рассказать решение немедленно. Эта обстановка научной восторженности создавалась и поддерживалась усилиями ведущих специалистов и не в малой степени Крейна. Одним из многочисленных

трагических последствий политического режима в стране стало то, что в силу антисемитского настроения тогдашнего руководства ВГУ, М.А. Красносельский, а затем и С.Г. Крейн решили вскоре покинуть университет. Я должен отметить, что на самом факультете никаких недостойных проявлений типа антисемитизма не было (по крайней мере, мне таковые не известны). Чтобы не быть голословным в описании обстановки того времени, я упомяну лишь об одном случае, когда администрация ВГУ вычеркнула из списка выпускников, рекомендованных в аспирантуру, в институт математики, и т.п., всех кто имел хоть каплю еврейской крови (исключение было сделано в одном единственном случае).

Итак, в начале 70-х С.Г. покинул ВГУ и вернулся в ЛТИ, где администрация отличалась значительной терпимостью и предоставила ему существенные возможности для усиления кафедры математики, аспирантуру и т.д. В результате кафедра математики ЛТИ превратилась в сильный научный коллектив, многие сотрудники которого оказывали помощь и поддержку С.Г. до его последних дней (я бы хотел в связи с этим упомянуть Р. Грабовскую, Г. Курину, А. Фурменко, К. Чернышева, а также многих других).

Все, кто имел возможность слышать лекции С.Г., знают, что он был блестящим преподавателем. Его лекции были и остаются для меня эталоном тщательной подготовленности, доступности и идейной ясности. Признаюсь, что, не взирая на все мои старания, я так никогда и не сумел приблизиться к этому уровню.

Что меня больше всего привлекало в научной школе С.Г. это широта научных интересов и свобода, данная ученикам в выборе научных задач. С одной стороны, мы, студенты, были направлены на определенный круг задач в крейновских семинарах. С другой стороны, отклонения не считались "побегом", а всячески поддерживались.

Сейчас, имея некоторый (хотя и несравнимо меньший чем у С.Г.) опыт руководства учениками, я понимаю, как непросто было для него угнаться за молодежью, которая "галопировала" в разных направлениях, причем, не только угнаться, но и управлять и помогать ей. Многие из нас делали наши первые исследования практически одновременно: И. Гудович, М. Зайнберг, В. Овчинников, А. Панков, И. Шнейберг и другие. Вопросы, которыми мы занимались, помимо уже стандартных в Воронеже функционального анализа, теории операторов и уравнений в частных производных, включали коммутативную алгебру и некоммутативное интегрирование, многомерный комплексный анализ и .ИТ-теорию, и многое другое. Совершенно поразительно, что С.Г. в каждом из этих случаев умел подсказать нам наиболее продуктивные методы и направления, о которых мы не имели ни малейшего представления. Я чувствовал эту поддержку и получал научную помощь от С.Г. на протяжении многих лет, давно уже будучи "независимым ученым". В частности, многие его советы сыграли крайне важную роль в моих работах по теории Флоке вошедших в докторскую диссертацию и

книгу.

С.Г. был всегда рад учиться новой математике, либо просто услышать о новых направлениях. На его семинарах докладывали о многочисленных областях, от комбинаторной геометрии до теории особенности и алгебраической геометрии. Многие помнят, что он любил называть свой семинар в Воронежской Зимней Математической Школе семинаром "по высшей математике", тем самым подчеркивая отсутствие узких тематических рамок.

С.Г. постоянно интересовался жизнью учеников и помогал решать не только научные, но и персональные проблемы: квартирные, устройство на работу и т.д. Поскольку я не считаю себя вправе касаться персональных обстоятельств других людей, я упомяну лишь несколько моих личных историй. Помимо проблем обычных в то время для многих, в моем случае ситуация усугублялась плохой политической репутацией (выступления на комсомольской конференции с предложением об упразднении Комсомола, попытка открытого обсуждения национального вопроса в СССР и т.п.). Это юношеское "недержание содержания" закончилось для меня с гораздо меньшим ущербом, чем могло бы, в большей степени благодаря усилиям С.Г. Я бы никогда не имел своей квартиры, если бы не совет С.Г. вступить в кооператив в единственный возможный для того момент (а в то время слова типа "кооператив" и "квартира" не воспринимались моим мозгом холостяка-аспиранта, настроенным исключительно на математическую волну). Я думаю, что аспирантура и работа в вузе также "не светили" мне, если бы не поддержка С.Г.

Проявление доброты и оказание помощи людям, на мой взгляд, не требовали никакого осознанного усилия со стороны С.Г. Это было просто его нормальным состоянием. Некоторые из нас считали, что он даже шел слишком далеко в этом направлении, поддерживая людей, которые по всей видимости могли бы в дальнейшем оплатить ему злом (что иногда и случалось). Но С.Г. однажды четко сформулировал свое кредо: "Добро не должно быть избирательно!" Мне думается сейчас, что, вероятно, он и в этом был прав.

Обаяние С.Г. было широко известно. Его возможность помогать людям и вообще добиваться многих желаемых результатов зижделись на его "секретном оружии": он умел очаровывать практически любого, вне зависимости от пола, расы, возраста, интеллектуального уровня, либо служебного положения. Это же было его главным методом в управлении кафедрой, а он был удивительным заведующим! Я больше таких не встречал. Будучи мастерским администратором, он вместе с тем продолжал интенсивную интеллектуальную жизнь. Я, как и другие бывшие и настоящие неудачные заведующие, знаю, как невыносимо трудно найти такой баланс.

Говоря об умении С. Крейна находить подход к людям, я хочу также отметить, что в ситуациях, когда компромисс противоречил бы его

моральным принципам, он умел принять твердое решение, примером того может служить его возврат в ЛТИ.

Была еще одна замечательная черта, которая также предохраняла его от чрезмерного самомнения, — это чувство юмора, в том числе самоиронии. Мы все помним, как весел он был, всегда готов пошутить, разыграть (никогда не злобно, без "подъедания"), а также принять шутку в свой адрес. Многие помнят шуточные стихи и статьи, которые писали к его юбилеям. Менее самоироничный человек мог бы обидеться на некоторые шуточные высказывания, в частности, о том, что "после защиты его докторской диссертации в Академии Артиллерийских Наук Академию, конечно, закрыли".

Работоспособность С.Г. была удивительна. Каждый приходящий к нему домой аспирант встречал предыдущую персону, еще не готовую уйти, а в конце беседы был "подперт" следующим в очереди. Праздники далеко не всегда были исключением. Однажды он позвал меня к себе поработать вечером 31 декабря и никак не мог понять, по какой причине я мялся вместо того, чтобы тут же согласиться. В одно время С.Г. руководил десятком активных аспирантов, работавших в нескольких разных областях, причем руководил весьма серьезно.

Люди, не знавшие С.Г., не должны думать, что он интересовался лишь работой. Он был умелым и общепризнанным тамадой, единственным недостатком которого было то, что он мог поднимать тосты с коньяком в таком количестве и с такой скоростью, что слабые (т.е. большинство) быстро "отпадали", в то время, как он сам не демонстрировал видимых изменений в поведении. Невзирая на хромоту, С.Г. был большим любителем танцев, пинг-понга, а также, по рассказам, (я сам никогда этого не видел) волейбола.

Говоря об С.Г., невозможно не упомянуть его жену Евгению Петровну. Она была прекрасным, обаятельным и интеллигентным человеком. Все ученики С.Г. уважали и любили ее.

Мне было крайне тяжело покидать СССР, оставляя Селима Григорьевича и многих других близких людей. Я долго боялся начать разговор с ним о моем решении. Однако, когда я с трудом вынудил себя это сделать, стало ясно, что С.Г. давно такой вариант обдумывал, поскольку он немедленно сказал, что считает это правильным решением. Мне казалось в то время, что увидаться нам больше не удастся. Однако мне повезло увидеть его пару раз после этого, когда он приезжал в США для лечения, организованного Американским Математическим Обществом. Впоследствии, к сожалению, увидаться больше не удалось, хотя мы и говорили многократно по телефону. Мне грустно от мысли, что я не могу больше позвонить и услышать его голос: "О, Петя, здравствуйте. Как дела?"

Я надеюсь, что мне удалось в какой-то степени передать мои чувства глубокой любви и восхищения, которые я всегда испытывал к этому замечательному человеку.



*Л.М. Лихтарников*

### *Селим Григорьевич Крейн и дальневосточные вузы*

О существовании математика С.Г.Крейна я узнал еще в первые годы моих занятий математикой. Встречал его статьи в математических журналах и ознакомился с его докладом на третьем Всесоюзном съезде математиков в 1956 году в Москве.

Несколько позже состоялось наше личное знакомство, результатом которого явилось сотрудничество Селима Григорьевича с дальневосточными вузами, оказание им помощи в подготовке научных кадров по математике, в повышении научного уровня преподавания математических дисциплин в дальневосточных вузах.

История этой деятельности Селима Григорьевича такова. В 1963 году в Новосибирском академгородке проходил советско-американский симпозиум по уравнениям с частными производными. Профессор Новосибирского университета Борис Авраамович Трахтенброт пригласил к себе в гости своих киевских друзей. В их числе были Марк Григорьевич и Селим Григорьевич Крейны, Юрий Макарович Березанский и Самуил Давидович Эдельман. Как знакомый Бориса Авраамовича по Дальнему Востоку, был приглашен и я, работавший в то время в Хабаровском педагогическом институте.

Надо сказать, что в сибирских условиях я впервые оказался в кругу таких выдающихся математиков и у меня, естественно, возникла мысль пригласить кого-нибудь из них в Хабаровский педагогический институт на короткий срок для чтения лекций и оказания помощи преподавателям в их научной работе. Выбор пал на Селима Григорьевича.

Покорили его простота и доступность в общении. Необходимость такого приглашения математика высокой квалификации в город Хабаровск диктовалось уже тем обстоятельством, что в то время в Хабаровске был только один математик кандидат физико-математических наук.

Селим Григорьевич приехал впервые в Хабаровск в 1964 году по официальному приглашению ректората педагогического института. За время его пребывания им был прочитан важный для нас курс лекций по некоторым разделам функционального анализа. Кроме того, он ознакомился с творческой работой всех математиков кафедры математического анализа, занятых научными исследованиями.

Его талант лектора и огромное желание оказать помощь каждому, кто в ней нуждается, сразу же сделали его близким другом многих дальневосточных математиков.

Искусство лектора С.Г. Крейна было удивительным. Изложение им очень сложных вопросов современного функционального анализа оказывалось доступным всем слушателям, хотя каждый понимал их на своем уровне.

Знакомясь с результатами наших исследований, он не только оценивал сделанное, но и давал конкретные советы по дальнейшей работе. Но его помощь не ограничивалась этим. В том же году он оказал серьезную помощь в завершении диссертации нашему аспиранту А.С. Симонову.

По совету Селима Григорьевича мы начали подготовку ряда преподавателей математики дальневосточных вузов для поступления в аспирантуру при Воронежском университете.

Со временем деятельность Селима Григорьевича по оказанию помощи дальневосточным вузам возрастала.

По приглашению нашего института он приезжал в г. Хабаровск в 1964, 1965, 1966, 1967 и в 1970 годы, и с каждым приездом появлялись новые формы помощи не только математикам Хабаровского педагогического института, но и всем математикам дальневосточных вузов.

Так, в 1965 году, прочитав математикам новый курс лекций, он отобрал в аспирантуру Воронежского университета несколько молодых математиков. В этом году его аспирантом стал выпускник Хабаровского пединститута Василий Осипов (позднее декан математического факультета Дальневосточного университета).

Конечно, при большом количестве вузов в городах Хабаровске и Владивостоке один Селим Григорьевич не мог справиться с нахлынувшей работой, и он привлек к этому важному делу многих воронежских математиков. В их числе были профессор Е.М. Семенов, профессор П.Е. Соболевский и другие.

Бывая в Воронеже, мы знакомились с воронежской математической школой и, естественно, интересовались историей ее создания. К нашему удивлению значительную роль в этом сыграл антисемитизм, который особенно сильно свирепствовал в Советском Союзе в период перед смертью Сталина.

Дело в том, что в начале пятидесятых годов в пору расцвета в Советском Союзе "борьбы с космополитизмом" из института математики АН УССР были уволены два молодых доктора наук С.Г. Крейн и М.А. Красносельский.

Несмотря на все сложности того времени, в 1952 году М.А. Красносельский нашел работу в Воронежском университете. Через два года в Воронеж приехал и был принят на работу в Лесотехнический институт С.Г. Крейн. Позже он перешел работать в Воронежский университет.

Наличие в г. Воронеже двух очень активных математиков, их любовь к математике и доброе отношение к товарищам по профессии очень скоро (буквально за десяток лет) позволили им создать Воронежскую математическую школу, хорошо известную за пределами Советского Союза.

Но С.Г. Крейн и М.А. Красносельский не ограничились городом Воронежем. Каждый математик, приезжавший в г. Воронеж за помощью, получал научную консультацию. Организация же помощи математикам дальневосточных вузов явилась выдающейся заслугой Селима Григорьевича

Крейна.

В 1966 году воронежские математики оказали нам серьезную помощь в проведении межвузовской физико-математической конференции Дальнего Востока, организованной в г. Хабаровске.

Важной особенностью этой конференции было участие в ней большого числа математиков и физиков — преподавателей вузов Дальнего Востока. Кроме того, были приглашены представители различных научных центров Москвы, Ленинграда, Воронежа, Киева, Казани, Фрунзе и Саратова.

Участники конференции математики работали в трех секциях: "Дифференциальных и интегральных уравнений", "Алгебры и геометрии", "Методики преподавания математики".

Общее руководство работой математических секций осуществлял профессор С.Г. Крейн. Итоги работы этих секций описаны им в статье [1]. В ней отмечался рост уровня математических исследований, проводимых в вузах Дальнего Востока, что, очевидно было во многом результатом помощи математикам Дальнего Востока со стороны воронежских математиков во главе с С.Г. Крейном.

Аналогичная дальневосточная конференция с участием С.Г. Крейна была проведена в г. Хабаровске в 1970 году.

В январе 1967 года в Воронеже по инициативе и под руководством С.Г. Крейна состоялась Первая зимняя Воронежская математическая школа.

Селим Григорьевич пригласил в эту школу большую группу математиков дальневосточных вузов. Высокий научный уровень школы дал возможность ее участникам познакомиться с несколькими разделами современной математики.

После 1967 года зимние воронежские математические школы стали проводиться почти ежегодно, привлекая к участию в них многих ведущих математиков страны.

Но уже Первая зимняя Воронежская математическая школа показала нам необходимость проведения подобных школ на Дальнем Востоке с приглашением лекторов из числа ученых математиков центральных вузов страны.

Большую помощь в организации работы Дальневосточной математической школы оказал Селим Григорьевич. В 1967 году, когда проводилась Первая Дальневосточная математическая школа, С.Г. Крейн возглавил лекторскую группу школы, в состав которой кроме него в качестве лекторов входили Е.А. Горин (МГУ) и Ю.А. Брудный (Днепропетровский технологический институт).

В этой школе участвовало 90 слушателей, в основном, преподавателей математических кафедр вузов Дальнего Востока. Однако, мы посчитали полезным пригласить в школу 10 лучших студентов математических отделений Хабаровского педагогического института и Дальневосточного университета.

Интересно отметить, что почти все студенты Хабаровского

педагогического института — участники этой школы — в дальнейшем стали учеными математиками. В их числе ныне доктор наук, профессор М.Ш. Браверман, доценты кандидаты наук Р. Грабовская, А. Поличка, Л. Витова, С. Рицнер, В. Кузнецов.

Содержание работы Первой Дальневосточной математической школы описано в статье [2].

Следующие математические школы проводились ежегодно до 1970 года включительно. В подборе лекторов этих школ важную роль играл С.Г. Крейн. В результате среди лекторов были профессора: Александров И.Я. (Томск), Арнольд В.И. (Москва), Бирман М.Ш. (Ленинград), Брудный Ю.А. (Днепропетровск), Горин Е.А. (Москва), Кадец М.И. (Харьков), Крейн С.Г. (Воронеж), Любич Ю.И. (Харьков), Семенов Е.М. (Воронеж), Ша-бат Б.В. (Москва), Щербаков Р.Н. (Томск).

Многим математикам дальневосточных вузов участие в работе школ помогло установить научные связи с ведущими учеными страны и активизировать свою научную деятельность.

Каждое пребывание С.Г. Крейна на Дальнем Востоке, как правило, заканчивалось отбором дальневосточных математиков в аспирантуру Воронежского университета.

Так, из числа преподавателей и выпускников Хабаровского педагогического института аспирантуру в г. Воронеже до конца семидесятых годов окончили Симонов А.С. (руководители

— С.Г. Крейн и Л.М. Лихтарников), Кононенко В.И. (руководитель — И.А. Киприянов), Васильева О.Л. (руководитель — Е.М. Семенов), Осипов В.Б. (руководитель — С.Г. Крейн), Бра-верман М.Ш. (руководитель — Е.М. Семенов), Поличка А.Е. (руководитель — П.Е. Соболевский), Рицнер В. (руководитель

— И.С. Иохвидов).

К сожалению, по вине ректоров Воронежского университета и Хабаровского педагогического института (и в какой то мере по вине соответствующих партийных органов) произошли изменения в составе преподавателей математических кафедр.

В 1971 г. я был уволен с должности проректора Хабаровского педагогического института по науке, С.Г. Крейн был вынужден уйти с должности заведующего кафедрой Воронежского университета.

Кроме того, в связи с создавшейся обстановкой Хабаровский педагогический институт и город Хабаровск покинули доценты А.С. Симонов, В.И. Кононенко и В.Б. Осипов. А доцент В.Ф. Битов два года задерживался в г. Хабаровске партийными органами и уехал из Хабаровска в 1973 году.

Все это в некоторой степени нарушило связи дальневосточных и воронежских математиков. Но подготовка научных кадров математиков для дальневосточных вузов в Воронеже продолжалась. И, более того, во многом благодаря деятельности Селима Григорьевича, связь с воронежскими

математиками не теряли те бывшие и настоящие дальневосточные математики, которые окончили аспирантуру в воронежских вузах или получали ранее помощь от воронежских математиков. Важную роль в этом играла зимняя Воронежская математическая школа, ведущим руководителем которой был С.Г. Крейн.

Как и ранее Селим Григорьевич по приглашениям посещал многие вузы и оказывал математикам этих вузов помощь в научной работе.

ЛИТЕРАТУРА 1) Крейн С.Г. VI межвузовская физико-математическая конференция Дальнего Востока// Успехи математических наук. — Т. 22, вып. 1, 1967.

2) Лихтарников Л.М. Первая Дальневосточная математическая школа// Успехи мат. наук. — Т. 23, вып. 1, 1968.

**Е.М. Семенов**

### ***Мой учитель и друг***

Как математик, привыкший отмечать в каждой своей статье использованные в работе результаты других математиков, я должен указать, что

1) идея написать книгу воспоминаний о Селиме Григорьевиче возникла после опубликования прекрасной книги " Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения",

2) название этой статьи почти совпадает с названием статьи П.П. Забрейко в цитированной выше книге.

Ученики и друзья Марка Александровича сделали полезное и доброе дело. Ученики и друзья Селима Григорьевича решили его продолжить. Марк Александрович и Селим Григорьевич всю жизнь работали рядом. Результатом их совместной работы стало создание в Воронеже школы функционального анализа и дифференциальных уравнений, пользующуюся широкой известностью во всем мире. Эти две книги — дань уважения Марку Александровичу и Селиму Григорьевичу за их самоотверженный

труд-

Решившись на написание этой статьи, я вскоре понял, что дело это сложное. За несколько десятилетий общения с Селимом Григорьевичем впечатлений накопилось так много, что отбор подходящего материала превратился в трудную проблему. Продумав несколько месяцев, я пришел к выводу, что нужно придерживаться простейшей стратегии и, не претендуя на полноту изложения, изложить самые яркие впечатления.

Селима Григорьевича я впервые встретил в 1957 году, когда поступил на первый курс физико-математического факультета Воронежского университета. Он читал нам на первом курсе высшую алгебру, а на втором — линейную алгебру. Лекции он читал блестяще, все время задавал вопросы студентам, держался непринужденно и весело, к середине семестра знал фамилии студентов всего курса. На экзамене по высшей алгебре я не ответил на дополнительный вопрос и получил 4, это была моя единственная четверка на первом курсе, я сильно переживал из-за этого. На экзамене по линейной алгебре после того, как я ответил на все вопросы билета, Селим Григорьевич дал мне дополнительную задачу, над которой я думал 5 часов и решил! А когда Селим Григорьевич ставил мне пятерку в зачетку, он еще сказал: "Победителей не судят". Видимо, он считал, что я должен был решить эту задачу быстрее, хотя потом я нашел эту задачу в списке олимпиадных задач МГУ.

Вскоре после этого экзамена Селим Григорьевич дал мне задачу и стал регулярно приглашать к себе домой для занятий математикой. Селим Григорьевич рассказывал мне интересные и полезные результаты, ставил

новые задачи, а я рассказывал ему, что мне удалось придумать. Моя курсовая работа на 3 курсе вошла как часть в мою первую научную работу - совместную с Селимом Григорьевичем статью [71], которая была опубликована в журнале "Доклады Академии Наук". Дипломных работ я написал две, одна была выполнена под руководством Селима Григорьевича и была опубликована в ДАН, а другая содержала решение хоздоговорной задачи и этой работой руководил Марк Александрович.

В начале 60-х годов Селим Григорьевич, а также Е. Гальярдо, Н. Ароншайн, Ж.-Л. Лионе начали одновременно и независимо строить новый раздел анализа — теорию интерполяции линейных операторов. Первую интерполяционную теорему доказал в 1926 году М. Рисе. Доказательство этой теоремы, предложенное Г. Ториным стало основой комплексного метода интерполяции. В 1939 году Ж. Марцинкевич доказал интерполяционную теорему (об операторах слабого типа), которая стала основой вещественного метода интерполяции. Интересную интерполяционную теорему доказал В. Орлич в 1934 году. К сожалению, она не была замечена. В ней было дано полное описание интерполяционных пространств относительно пары ограниченных и суммируемых в классе пространств Орлича. Эти теоремы, а также теорема Стейне-Вейса об интерполяции пространств с различными мерами и теорема Красносельского об интерполяции вполне непрерывных операторов сейчас принято относить к предыстории теории интерполяции. Построение теории интерполяции линейных операторов связано в первую очередь с интерполяционными методами. Метод аналитических шкал, развитый в [63], тесно связан с комплексным методом Кальдерона. А метод шкал банаховых пространств, изложенный в [64], [90], позволяет получить многие результаты вещественного метода. В последнее время теория интерполяции линейных операторов разрослась вглубь и вширь и стала развиваться в значительной мере за счет решения внутренних проблем. А для классиков теории интерполяции основным стимулом развития теории были приложения. Они видели, что теория интерполяции есть эффективный и естественный способ доказательства ограниченности конкретных операторов в семействах банаховых пространств. Достаточно вспомнить, что доказательство теоремы Хаусдорфа-Юнга с помощью теоремы Рисса-Торина приведено в книге Литтльвуда "Математическая смесь" как образец красивейшего доказательства. Селим Григорьевич продолжил традиции классиков. Приложения (прежде всего к уравнениям в частных производных) были надежным ориентиром работы Селима Григорьевича в теории интерполяции.

Сразу после окончания математико-механического факультета ВГУ в 1962 году я поступил в аспирантуру к Селиму Григорьевичу. Благодаря его стараниям государственные экзамены по истории партии (была ранее такая наука, а потом успешно скончалась) и математике мне засчитали как вступительные экзамены в аспирантуру, Между ними я сдал английский и

одновременно с окончанием университета стал его аспирантом. Однако первый год аспирантуры я провел не в Воронеже, а в Днепропетровске, где в 1963 у меня родился сын. Селим Григорьевич по доброте своей разрешил мне перевестись на год в аспирантуру Днепропетровского горного института. А когда я вернулся в Воронеж, добился для меня комнаты в общежитии. Сделать это было тогда очень трудно, но Селим Григорьевич всегда принимал самое деятельное участие в решении житейских проблем всех своих учеников. Весною 64 года я защитил кандидатскую диссертацию, Селим Григорьевич выхлопотал для меня место на своей кафедре, и с тех пор я работаю на факультете. Двумя годами ранее в аспирантуру к Селиму Григорьевичу поступил выпускник Тамбовского пединститута Юрий Иванович Петунии. Темы его кандидатской, а затем и докторской диссертаций также были связаны со шкалами банаховых пространств. Мне запомнилась история написания статей [85], [94]. В течение нескольких месяцев Ю.И. Петунии и я приходили каждую неделю к Селиму Григорьевичу домой и несколько часов обсуждали полученные за неделю результаты и ставили новые проблемы. Причем Юрий Иванович и я занимались исключительно этой темой и почти каждый день встречались и работали вместе. Селим Григорьевич, наоборот, этой тематикой занимался лишь во время наших встреч, одновременно он работал сразу над несколькими проблемами. Но вклад его в выполнение и написание работ был наибольшим. Так быстро Селим Григорьевич соображал и эффективно работал. Естественно, сказывались опыт и высокая эрудиция Селима Григорьевича.

Как отмечалось выше, теория интерполяции операторов начала развиваться в начале шестидесятых годов одновременно в нескольких странах. Логика развития науки потребовала подведения первых итогов развития в конце семидесятых. Практически одновременно были написаны в Швеции и ГДР книги

1. J. Bergh, J. Lofstrom. *Interpolation Spaces. An Introduction.* — Berlin: Springer, 1976.

2. H. Triebel. *Interpolation theory. Function Spaces. Differential Operators.* — VEB Deutsche Verlag, 1978.

и книга [13]. Наша книга вскоре была переведена на английский и издана в США. Писалась она долго. Помимо объективных трудностей, связанных с большим объемом материала, согласованием различных подходов, стремлением изложить самые интересные и важные результаты, были существенные субъективные сложности, Селим Григорьевич любил писать статьи и книги. А еще больше он любил переписывать рукописи. Его стремление к совершенству было поистине безграничным. Ради этого он не жалел ни свое время, ни время своих соавторов. Потом я понял, что это было одним из проявлений любви Селима Григорьевича к математике.

Лекции Селима Григорьевича производили большое впечатление и на студентов, о чем я уже писал, и на его коллег. Приведу один пример. В 1977



году Селим Григорьевич прочитал великолепный цикл лекций по теории интерполяции операторов в Ярославской школе "Операторы в функциональных пространствах". Одним из слушателей этой школы был профессор Юрий Абрамович Брудный — известный специалист по теории аппроксимаций. Вопросы, поставленные в лекциях Селима Григорьевича, очень заинтересовали Ю.А. Брудного. Он начал работать в теории интерполяции, вместе со своим учеником Н.Я. Кругляком решил одну из центральных проблем этой теории — проблему  $A'$ -делимости и стал признанным специалистом в теории интерполяции операторов. Капитальная монография Yu.A. Brudnyi, N.Ya. Krugliak. *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*. — North-Holland, 1991.

отразила достижение теории интерполяции в очередной период. Написанию этой монографии предшествовал обзор [56], который отражал состояние теории интерполяции операторов на тот период. Список литературы содержит 786 названий.

Селим Григорьевич любил жизнь, а люди, которым посчастливилось общаться с ним, любили его. В 1967 году в Воронеж приехал корреспондент "Комсомольской правды" для того, чтобы написать обо мне статью (я тогда получил премию Ленинского комсомола в области науки). После моих восторженных рассказов о Селиме Григорьевиче корреспонденту захотелось познакомиться с ним лично. Селим Григорьевич в это время болел и лежал в госпитале, куда мы и отправились с визитом. Там мы увидели обычную картину — один из аспирантов Селима Григорьевича доказывает ему свою новую теорему, а еще несколько человек ждут своей очереди для того, чтобы поговорить с ним о математике. Все это и беседа с Селимом Григорьевичем произвела на корреспондента столь сильное впечатление, что он прежде, чем писать статью обо мне, подготовил передачу на радио о Селиме Григорьевиче. К сожалению, я не слышал ее, но по отзывам слышавших ее моих знакомых передача была интересной и эмоциональной. Велико было обаяние Селима Григорьевича!

Среди многочисленных талантов Селима Григорьевича было умение вести застолье. Он был прирожденный тамада. Если он сидел за столом, то там было весело и радостно. Его шутки, веселые тосты и истории на следующий день пересказывались и комментировались.

Селим Григорьевич любил заниматься со своими учениками. Количество его аспирантов в иные годы доходило до 12 человек, причем тематика их диссертаций была чрезвычайно широка. За полвека своей деятельности под руководством Селима Григорьевича защищено 83 кандидатских диссертаций, 19 его учеников стали докторами наук, а первые его ученики Ю.М. Березанский и Ю.Л. Далецкий были избраны действительными членами АН Украины. Юбилеи Селима Григорьевича становились праздниками для его многочисленных учеников, все вопросы, связанные с их проведением, ученики решали самостоятельно. Даже на своем последнем 80-летнем юбилее Селим Григорьевич был весел и озормен.

В конце восьмидесятых годов здоровье Селима Григорьевича ухудшилось из-за сердечной недостаточности. Он несколько раз лежал в больницах. Но состояние не улучшилось. Врачи советовали сделать шунтирование, причем рекомендовали сделать это за границей, так как у нас технология таких операций еще не была отработана. Но для заграничной операции, естественно, не было денег. Тогда профессор университета Тель-Авива И.Ц. Гохберг обратился к математикам разных стран с призывом собрать деньги для операции Селима Григорьевича и сделал первый взнос. Усилиями многих математиков все финансовые и организационные проблемы, связанные с операцией на сердце Селима Григорьевича, были решены. Большая заслуга в этом принадлежит Б.И. Коренблюму, Д. Эйбину, М.Ю. Любичу. Вскоре после успешной операции в США Селим Григорьевич вернулся в Воронеж. Это было великолепно!

Селим Григорьевич был выдающийся математик и прекрасный человек. Мне очень повезло в жизни, более сорока лет я общался с ним.

**С.А. Складнев**

### ***Мой учитель — Крейн***

Я еще не готов писать воспоминания о моем учителе. Еще не улеглась боль от потери, еще не все осознанно, еще не пришло время для обобщений. В памяти много отдельных эпизодов, случаев, разговоров, реплик и анекдотов как услышанных, так и происшедших наяву.

Не все осознанно, но всеми понято самое главное — Крейн Селим Григорьевич был великом Математиком, великом Учителем и великим Человеком.

Нужно, обязательно нужно рассказать как он читал лекции, как выступал с докладами, каким был деканом, каким был секретарем партийной организации факультета, как слушал песни Высоцкого, как вел застолье, как играл в волейбол, как любил свою семью, как занимался со своими учениками, со студентами, как шутил, как смеялся. Нужно все сохранить.

Я это обязательно сделаю, я должен это сделать.

Судьба распорядилась так, что мне довелось долгие годы быть его помощником: Крейн читал лекции, я вел за ним практические занятия; он был деканом, я был его заместителем; Крейн был секретарем парторганизации факультета, я был его заместителем; начиная с первой Воронежской зимней математической школы я под его руководством много лет подряд работал в оргкомитете школы.

Сегодня я хочу вспомнить об одной его идее — об идее создания Партии порядочных людей — ППЛ. Прямо скажем, об очень актуальной идее!

Селим Григорьевич предлагал создать партию, объединяющую порядочных людей, вступить в которую можно только по рекомендации ее членов, так как это и принято в любом порядочном обществе. Исключают из ППЛ за совершение любого постыдного поступка, например, за однажды сказанное лживое слово. К числу постыдных поступков относится и вхождение во власть. Не спешите критиковать эту идею и употреблять стандартные фразы "Это какой-то клуб, а не партия", "Да это же пропаганда идей анархизма" и т.п. Приглядитесь внимательнее к его идее и вы увидите попытку создания зародыша гражданского общества в нашей стране. Попытку создания того без чего демократия не может существовать, без чего она сводится к одним разговорам и прожекам.

## К. И. Чернышев

### *Воспоминания о неупорядоченной паре М.А. — С.Г.*

*Какие мощные умы Торили путь каким идеям. И. Иртеньев*

*Врет, как очевидец.*

*Поговорка*

Не так давно в Москве была издана прекрасная книга<sup>1</sup>, в которой, наряду с полной библиографией М.А. Красносельского, содержатся воспоминания о нем. Прочитал книгу в один присест и тут же ощутил спонтанный выплеск собственных воспоминаний о герое книги и, что неудивительно, одновременно о С.Г. Крейне.

ПОЧЕМУ ПАРА?

Жизнь распорядилась так, что при всех различиях в характерах, образе жизни, математических пристрастиях и интересах Марк Александрович Красносельский и Селим Григорьевич Крейн (М.А. — С.Г.) оказались надолго, если не навсегда, воистину alter ego друг для друга.

Для воронежских математиков эти имена попросту неразделимы. Среди учеников, коллег, знакомых, друзей, родственников этих двух титанов, словесные портреты которых весьма полезно оставить будущим поколениям, было немало неглупых людей. Было бы непростительной ошибкой не запечатлеть с их участием любые штрихи к портретам М.А. и С.Г. При этом не станем забывать: все уже случилось. Им самим ничего не надо, "это нужно не мертвым, это нужно — живым."

Штрихи — воспоминания, как осколки огромного зеркала жизни, не могут не отражать, наряду с героями воспоминаний,

Марк Александрович КРАСНОСЕЛЬСКИЙ. К 80-летию со дня рождения. Институт проблем передачи информации РАН, 2000, 215 с.

самих вспоминающих. Внимательный читатель без особого труда сумеет отделить зерна от плевел и профакторизовать эти отражения по множеству промахов названного круга авторов, включая их собственные грехи, иллюзии, излишние восторги. Лишь немногие из этого круга были одновременно сильными математиками способными адекватно, без априорного излишнего пиетета оценить вклад М.А. или С.Г. в математику. Впрочем, это в состоянии сделать математик и не из ближнего круга.

Мне такое не положено по рангу, и поэтому цель моя скромней: по возможности избегая оценочных суждений, оставаться на уровне "помню, было так" и просто повспоминать. Утверждение

"Что-то с памятью моей стало: Все, что было не со мной, помню"

разделить не могу из-за его категоричности. К тому же сознаю, что, во-первых, даже близкие по взглядам люди в описании конкретного эпизода могут прийти к пересечению меры нуль, во-вторых, несущественные, на

первый взгляд, мелочи и детали могут зажить собственной жизнью и создать неожиданный для автора контекст. Наконец, наши представления об Истине даже при условии неискажения фактов могут оказаться односторонними, грешить предвзятостью в силу *отбора*. В большинстве случаев предвзятость, односторонность — это вовсе не результат злого умысла. Просто *так* сложилась общая картина в отдельно взятой голове. Не являемся ли все мы слепцами из притчи, получившими представление о Слоне, ощупывая кто хобот, кто ногу, кто хвост? Ведь в обыденной жизни в целях облегчения ориентации и принятия скорейшего решения культивируется всяческое *упрощение*. Поиск верного решения обычно сводится к выбору из двух зол меньшего. Даже он иногда оказывается нам не по силам, и мы в суете выбираем из двух зол большее, а то и оба сразу.

ПОЧЕМУ НЕУПОРЯДОЧЕННАЯ?

При жизни М.А. — С.Г., как и все вокруг, я относился к ним обоим, как к двум ближайшим заоблачным вершинам в горном массиве "Математика". Знать точную высоту вершин было неважно и неинтересно, и, кроме того, интуитивно ощущалось:

"Не сравнивай: живущий несравним." Оттого пара М.А. — С.Г. осталась для меня вовек *несравненной, несравнимой и неупорядоченной*. Что-то мне было ближе в С.Г., что-то в М.А., но дело вовсе не в моем отношении, а именно в возможности добавить красок, штрихов, оттенков. У читателя появляется возможность подтвердить или опровергнуть утверждение поэта:

"Две лишь краски в мире не поблекли: В желтой — зависть, в красной — нетерпенье".

От математики, конечно, полностью устраниться не удастся, поскольку и С.Г., и М.А., в первую очередь, были математиками. Однако попытаюсь оставаться на самой поверхности специфических проблем. Прочитую еще одного своего учителя, профессора С.Д. Эйдельмана, частенько начинающего свои оригинальные высказывания фразами "на мой неправильный взгляд", "по моему неправильному мнению", и подчеркну, что ниже содержится набор именно таких неправильных мнений.

РАВНЕНИЕ НА ПАРУ!

Начал с упоминания о неупорядоченной (и весьма нетривиально устроенной) паре М.А. — С.Г. неспроста. Любые суждения, оценки, сравнения не только субъективны, но, что существеннее, относительно. Равнение на пару М.А. — С.Г. снимает актуальные ныне *и во все времена* проблемы фальшивых авторитетов, лжепророков и истинности масштабов, научных и общечеловеческих. Добавлю, что лично для меня пара стала неразделимой еще и потому, что С.Г. — мой учитель *de jure* и *de facto*, М.А. был отцом и тестем моих друзей и *de facto* учителем в жизни.

Знакомство моих героев друг с другом состоялось в Киевском университете, когда С.Г. учился на 4-м курсе, М.А. — на первом (1938). Отношения внутри пары С.Г. — М.А. проходили разные стадии, претерпевали резкие изменения, порой бывали непростыми, однако всегда

оставались взаимно уважительными. Главное же, на мой взгляд, то, что *был* плодотворный (и оплодотворивший их обоих) период тесного эффективного сотрудничества и влюбленности. А это и дорого ценится, и никогда не забывается.

Математические задачи, как бы трудны и интересны они ни были, несопоставимы по сложности с возникающими жизненными коллизиями. М.А. - С.Г. умели и любили решать такие этические задачи наряду с математическими. По нулевому приближению, подход к их решению был такой:

М.А. — делай, как я (... пробуй придумать лучше ..., если удастся);

С.Г. — видимо, придется поступить так. (Пауза) Что?

Была ли формула С.Г. знаком доверия к визави или найденным и испытанным способом убеждения, соблазна, так и осталось для меня непроясненным. Итак, разница налицо, но в форме, ибо содержание, если и отличалось, то только в несущественных деталях (правда, именно в них обитает "черт"). В этических вопросах М.А. — С.Г. не терпели глобальных возражений, серьезных сомнений. Сильно сомневающиеся, люди с иными убеждениями если по случаю и допускались в их круг, то не задерживались надолго.

Квиетизм (непротивление, смирение) им обоим был чужд. Жизнь приучила их всегда активно бороться как за, так и против. Приведу один пример. В 1975 году мы с С.Г. участвовали в работе конференции по малому параметру во Фрунзе, организатором которой был М.И. Имманалиев, ученик профессора МГУ А.Б. Васильевой, чл.-корр. АН СССР. А два-три года спустя "Литературная газета" — рупор тогдашней передовой мысли опубликовала статью (по-видимому, заказную), содержащую обвинения в адрес президента АН Киргизии М.И. Имманалиева в связи с какими-то злоупотреблениями. С.Г. тут же послал протестующее письмо в редакцию. Рассказывая мне об этом, вовсе не гордился, не поучал, просто информировал. М.А. — С.Г. были из породы победителей, о чем бы ни шла речь: о задачах разного рода, спорте, других эффектных победах. По меньшей мере, такое впечатление они производили на окружающих.

Обе родственные школы М.А. — С.Г. работали на будущее, во славу их создателей, гордясь своей причастностью и понимая в то же время, что славным прошлым когда-нибудь пожелает стать не только чисто плотное, но и запятнанное прошлое. Поэтому здесь старались держаться в стороне от нечистоплотных деятелей и деяний и исповедовали дух чистого, рыцарского отношения к науке. Вблизи таких авторитетных и отчасти авторитарных Учителей это получалось почти автоматически. Правда, птенцы в гнезде могут в значительной степени отличаться от тех же птенцов, уже выпорхнувших из него. Точно так же и ученики при Учителе чаще всего были покорными, толерантными, а их грехи окукленными или туго спеленытыми. В самостоятельной жизни, без пригляда Учителя эти же ученики могли (так бывало нечасто, но бывало) не признавать ничьих

авторитетов, кроме своего, или находить для себя более выгодные по ситуации авторитеты, могли стать нетерпимыми, завистливыми, самовлюбленными. Без труда справляясь поначалу с ролью "Кушать подано", те же актеры впоследствии начинали пыжиться, представляться главными героями, осуществляя то, что Л.Н. Толстой называл "принятие низшего за высшее" и считал основой человеческих трагедий. Не случайно нередким грустным присловием С.Г. было "никакое доброе дело не остается безнаказанным".

МОЕ ЗНАКОМСТВО С М.А. - С.Г.

Узнал С.Г. и М.А. почти одновременно, в 1964 году, поступив в ВГУ. В том году С.Г. был председателем предметной комиссии по математике. Любые воспоминания о М.А. не обходятся без слов "рыбалка, рыба". Отдавая дань традиции, замечу, что набор на наш курс оказался сродни богатому и редкому улову рыбы, и с этого момента позволю себе в дальнейшем слово "рыба" не упоминать. Одновременно со мной учились (или появились на курсе позже, по разным причинам) Бобылев Н., Иванов Л., Овчинников В., Седаев А., Родин В., Цветкова (Колупанова) Г., Тетиевская (Гудович) И., Тарарыкова Т., Сысоев Ю., Хацкевич В., Сильченко Ю., Соловьев А., Яновский Л., Зайденберг М., Ско-рик А., Азизов Т., Смагин В., Федорова (Смагина) Т., Орлов В., Баскаков А., Трубников Ю., Юргелас В. и многие другие. Сразу после вступительных экзаменов С.Г. проводил собеседование со свежееиспеченными студентами и был крайне дотошным. Теперь можно добавить — как всегда. Положусь на память Н. Бобылева, по словам которого М.А. выступил на первом собрании студентов курса и сказал: "Вам всем невероятно повезло — вы поступили в университет. Среди тех, кто не прошел по конкурсу, были и более сильные, и не менее талантливые. Поэтому не зазнавайтесь." Личное знакомство с М.А. состоялось позже, весной 1965 года.

На матмехе ВГУ бытовало правило, согласно которому поочередно год за годом М.А. и С.Г. становились кураторами набранных курсов (в истинном смысле латинского слова *curator* — попечитель). Куратор не проводил еженедельных собраний или политезанятий, не руководил поездками в колхоз, хозработами, дежурствами в ДНД (напомню, ДНД — добровольные народные дружины), зато он обладал правом активно участвовать в подборе и формировании профессорско-преподавательского состава, "мамок-нянек" для своих подопечных студентов. Кроме того, куратор обладал правом, чем-то отдаленно напоминающим право "первой брачной ночи". Однако действовал локально, осуществляя "поштучный" выбор и "наутро" мог решить всяко: или продлить, или расторгнуть намечавшийся союз.

ЧТО ЛУЧШЕ: НЕДООЦЕНИВАТЬ ИЛИ ПЕРЕОЦЕНИВАТЬ?

М.А. был для своих непосредственных учеников отцом, папой Мурой. Впустив в свой круг, "занеся в свой список", настежь открывал двери в свой дом, не отличал учеников от детей. Быть может, по этой причине

случавшиеся изредка разлады с учениками проходили так драматично. Учениц среди чуть ли не сотни учеников можно пересчитать на пальцах одной руки.

Среди всех учеников С.Г. ученицы составляют около трети. С учениками С.Г. держал дистанцию и, даже приняв в свою команду, был не вполне открыт для контактов. Впрочем, внешне это могло и не замечаться.

Быть может, проблема дистанции связана с тем, что если условно разделить всех родителей на два класса: недооценивающих и переоценивающих достоинства и успехи своих детей, конечно, из лучших побуждений, для пользы дела, то, по моему — напомним, неправильному — мнению, С.Г. попадал бы, по преимуществу, в первый класс, М.А. — во второй.

Две истории для иллюстрации.

В мае 1977 года мы с С.Г. ездили на конференцию в Эстонию, и его свита состояла из одного аспиранта, меня. За 10 дней общения С.Г. забросал меня множеством далеких от математики, в основном, этических вопросов. Мои жалкие попытки уклониться от ответа или дожидаться намека на ответ с благоприятной последующей его оценкой не увенчались (и не могли увенчаться) успехом. Тогда мне не осталось ничего иного, как, обходясь без предварительных "вычислений", довериться интуиции и "рубить правду-матку". Вскоре стало понятно, что такая "тактика" была единственно правильной, тестирование прошло успешно и, самое удивительное, наши мнения и оценки довольно часто совпадали. К тому моменту стаж нашего общения составлял около 13 лет, однако только после этой поездки отношения перешли на новую ступень и стали более доверительными.

В августе 1989 года на конференции EQUADIFF-7 в Праге без свиты оказался М.А., сделавший там блестящий получасовой доклад. Встретив меня, он попросил зайти минут на 10 для передачи книг и сборников воронежцам. Проговорили мы больше 4 часов. Каждый, кто общался с М.А., легко представит этот диалог, больше похожий на монолог, включающий значимые паузы, неожиданные вопросы, фразы-"ловушки" и прочие нескучные "штучки". Яркое впечатление, как всегда, произвели на меня за пределами высокие оценки, выставленные им собственным ученикам. На что я отреагировал естественным образом, сказав, что завидую им белой завистью. Минут семь М.А. уделил вопросам, связанным с моими делами. (К слову, в 1974 году М.А., узнав, что я поступил в аспирантуру, спросил: "К кому?" И, услышав ответ, сказал: "Тебе повезло, С.Г. — сильный математик.") После моей "справки" промолвил: "Жаль, что у тебя, в основном, линейные задачи. Были бы нелинейные, я бы тебе реально смог помочь." Чуть помолчал, добавил: "Думаю, что среди нелинейщиков в мире я в тройку вхожу". И утешил: "Ладно, заносу тебя в свой список." Эта история имела продолжение, не красящее автора. Отчитываясь перед С.Г. по возвращении из Праги, ничто-же сумняшеся сказал о своей белой зависти к ученикам М.А. На что мгновенно получил: "Это камень в мой огород?"



Мысленно соглашаясь и уменьшая размеры летящего камешка, пролепетал в ответ что-то.

Ты — Вы?

По-видимому, сюда же тесно примыкает лингвистически-психологическая проблема "Ты — Вы". Дело в том, что М.А. практически ко всем обращался на "ты", а С.Г. за 35 лет нашего общения лишь однажды сказал мне "ты" и тут же поправился. Лично для меня вариант "ты" был бы комфортнее, однако, очевидно, что не в одних словах дело. Не менее важны звучание, музыка обращенных к тебе слов, блеск глаз собеседника, ритм диалога и прочие близкие к названным вещи.

ИДЕАЛИСТЫ? ПРАГМАТИКИ?

По некоторым воспоминаниям, М.А. считал себя чуть ли ни с раннего возраста прозревшим по поводу пороков социализма, трезвым прагматиком, почти диссидентом, а на С.Г. якобы смотрел, как на наивного идеалиста, верящего в синтез идей общечеловеческого гуманизма и реального социализма. М.А. был беспартийным, С.Г. вступил в партию в 1945 году. Будучи все 60-е годы вплоть до 1971 года „заведующим кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей, С.Г. недолгое время был также деканом, секретарем партбюро математико-механического факультета ВГУ. Думаю, что именно этот его статус в значительной степени облегчил создание НИИ математики при ВГУ и организацию знаменитых Воронежских зимних математических школ. По строгим принятым тогда в стране правилам М.А. практически не имел возможности занять пост декана факультета. По-видимому, он никогда к этому и не стремился. В его положении беспартийного заведующего кафедрой функционального анализа и операторных уравнений были свои преимущества: большая независимость; минимальная "опека" со стороны парторганов. Небезынтересно напомнить известные факты: из почти тридцати отличников нашего курса только один был ленинским стипендиатом и... одновременно учеником М.А.; в выборах на соискание звание члена-корреспондента АН СССР М.А. участвовал не один раз (итоги выборов — это отдельная история), С.Г. — ни разу.

Был ли С.Г. идеалистом? Думаю, нет. В обоснование приведу два факта. С.Г. рассказывал мне, как до войны его близкая родственница (кажется, двоюродная сестра) по непредвиденной случайности опоздала на электричку, которой она обычно добиралась до места работы, и увидела на перроне ее хвост. Приехала на работу следующим поездом и вследствие опоздания получила вполне реальный срок заключения. Второй факт — это тоже его рассказ. Осенью 1982 года мы с С.Г. летели на самолете в Минск, на конференцию. Самолет сделал запланированную остановку в Харькове, запомнившуюся мне навсегда. За полтора часа стоянки С.Г. просветил меня насчет "дела врачей" 1952 года, о котором у меня было весьма смутное представление, ведь тогда о нем толком еще не писали. Более того, я получил из первых уст сведения о судьбоносных для воронежской

математической школы следствиях этого дела: разгоне в 1952-1953 г.г. мощной и гораздо более известной, чем воронежская, знаменитой киевской математической школы, чистке и реорганизации Института математики АН УССР, приезде М.А. в Воронеж, в ВГУ (1953), приезде С.Г. в Воронеж, в ВЛТИ (1954).

Считать, что М.А. или С.Г. предвидели траекторию развития событий начала 90-х годов, развал СССР, видимо, нет достаточных оснований. Думающие люди мыслят вариативно, ими могли просчитываться разные варианты, в частности, близкие (не ясно, в какой норме) к тем, по которым начали разворачиваться реальные события. Однако такого разворота, по моим представлениям, не предвидел ни один из героев.

И еще об одном предвидении. В мае 1986 года в Воронеже проводилась конференция под эгидой С.С. Шаталина, тогда чл.-корр. АН СССР, впоследствии акад. АН СССР, на которой присутствовали представители обкома партии, администрации и парткома ВГУ. Выступив с двухчасовым пленарным докладом, С.С. Шаталин проанализировал экономическое и социальное состояние страны и, опираясь на статистику, доказывал, что страну в самом ближайшем будущем ждет экономический крах. По его мнению, стандартная надежда на "человеческий фактор" уже начала умирать последней, и требуются коренные изменения, реальная перестройка. (Замечу, что во время доклада лицо секретаря обкома, находившегося в президиуме, многократно меняло цвет, а секретарь парткома ВГУ, оказавшийся между докладчиком и секретарем обкома, вынужден был, как часы-"ходики" бросать взгляды туда-сюда, чтобы правильно определиться). На этот доклад приболевший С.Г. решил-таки ехать в последний момент и по его окончании поделился со мной, что очень доволен, поскольку такого *честного* доклада он не слышал никогда в жизни.

Идеализм и прагматизм сочетались в М.А. — С.Г. самым причудливым образом. Их идеалы и интересы были высокими, души — поэтическими, устремления — романтическими. Они ориентировались на мировую культуру, легко и даже с радостью очаровывались. Их тянуло к идеализму в духовной жизни; у прагматизма не было шансов стать их идеологией. В то же время, наряду с тягой к идеализму в духовной сфере и неизбежным прагматизмом в профессиональной, они обладали зорким взглядом и житейской мудростью. От них не могли укрыться, ускользнуть детали "прелестей" окружающей жизни, что позволяло им твердо, на обеих ногах стоять на земле и вписываться в реалии с наименьшим уроном для себя. Прагматизм требовался им ровно в той доле, какая обеспечивала сохранение лица, ибо потерять себя — это была бы самая большая утрата. А любая эпоха всегда щедра на личный выбор житейских дорог, тропинок, развилок, закоулков и тупиков.

"Стиль - это ЧЕЛОВЕК" (БЮФОН)

В книге воспоминаний о М.А. содержится адекватное, на мой взгляд постороннего, описание В.С. Козякиным методических приемов, которые с

блеском использовал М.А. в своих лекциях. Добавлю личные впечатления, вполне коррелирующие с упомянутыми. Впервые на лекции М.А., посвященной степени отображения и рассчитанной на самый широкий круг слушателей, я оказался, учась на 4-м курсе. Помню первые 10-15 минут лекции, напоминающей шаманство, сеанс гипноза с многократными повторами, заходами с разных сторон, помню свое молчаливое "сопротивление, противостояние" такой манере и неожиданное осознание к концу первого часа, что уже полчаса думаю совсем о другом. Через несколько лет в зимней школе, как обычно, в один из вечеров в холлах 2-5 этажей "Березки" проводились семинары, на которых делались 15-20-минутные доклады. Обычно мы с В. Юргеласом мигрировали с этажа на этаж, выбирая заинтересовавшие нас темы, и однажды оказались на семинаре, который вел М.А. Слушая докладчика, мы весьма слабо понимали (похоже, вместе с ним), о чем идет речь. На предложение задавать вопросы аудитория ответила молчанием. Тогда М.А. выступил с 30-секундным резюме, и случилось чудо: пришло полное понимание проистекшего. В тот вечер мы наблюдали этот эффект многократно. Таково "послевкусие", а было это действительно пониманием или иллюзией, теперь утверждать не возьмусь. Прошли еще годы, и я оказался на получасовом докладе М.А. на EQUADIFF-7 (1989). Большинство докладов там читалось, как правило, на английском, отнюдь не блестящем. Первым выигрышным ходом М.А. стало приглашение в качестве переводчика математика из Болгарии с хорошим языком, эрудицией и реакцией. А дальше был "пир духа": паузы (на русском), повторы как заговоры, два анекдота (к месту!) на 13-й и 24-й минутах и овация по окончании доклада! Когда позже я спросил, были ли запланированы анекдоты именно в этих местах, М.А. ответил стандартно: "Конечно. Ты же знаешь, лучшая импровизация — домашняя заготовка".

Стиль С.Г. проиллюстрирую примерами.

По рассказу С.Г., в год нашего поступления правило очередности кураторов сработало не в полной мере. С.Г. не смог стать куратором всего курса, поскольку между ним и М.А. разгорелась нешуточная борьба за курс. В результате компромисса право куратора на курс было сужено и стало распространяться только на группу. С.Г. "играл белыми", скомпоновал нашу группу, стал ее куратором и сам начал читать в группе лекции по функциональному анализу прямо с 1-го курса. С.Г. активно участвовал в подборе преподавателей. В разные годы среди наших лекторов были профессора К. А. Родосский (зав. кафедрой алгебры пединститута), Б.С. Митягин, Е.М. Семенов, Ю.И. Петунии, Я.Б. Ру-тицкий (зав. кафедрой математики строительного института), С.Д. Эйдельман (зав. кафедрой математики политехнического института), И.С. Иохвидов, доценты В.П. Глушко, Ю.В. Покорный, вскоре ставшие профессорами, доценты В.В. Покорный, Е.С. Тихомирова, А.В. Кибенко, Г.А. Бессмертных, В.А. Тихонов, И.Б. Руссман. Позже, в пору выбора спецкурсов, лекторами были также профессора Ю.Г. Борисович, П.Е. Соболевский.

Учась то ли на 1-м, то ли на 2-м курсе, был вызван в кабинет к С.Г., где получил от него оттиск статьи на английском с заданием перевести и разобрать.

Справился, однако знал, что аналогичные задания получили и другие, ощущал себя в очереди и ждал нового вызова. Лет через 15 напомним эту историю и услышал от С.Г.: "Что же Вы не подошли и не показали?" Такое скромное поведение могло закончиться для меня другим исходом, ведь при первом "разборе" я к С.Г. не попал и оказался на кафедре Ю.Г. Борисовича. К ученикам С.Г. примкнул только в 1973 году, когда все мои однокурсники — ученики первого призыва — уже стали кандидатами наук.

Во время учебы в аспирантуре встречался с С.Г. только на семинарах или в поездках на конференции. Не было проблем в одном вопросе — выступить с докладом на семинаре, поэтому регулярно докладывал как чужие результаты, так и свои. (В то время С.Г. был не только моим, но одновременно руководителем еще шести аспирантов.)

Только после написания диссертации начались наши регулярные встречи и беседы *tet-a-tet*. Обычно договаривались о том, чтобы через 2-3 дня я позвонил с целью назначить еще через 2-3 дня после звонка время встречи. Зато два часа (предельно возможный срок) разговоров "стоили мессы" месяцев общений наедине с собой. Переписывать диссертацию пришлось два с половиной раза. Больше всего изумляло то, что при каждой новой встрече чтение начиналось с самого начала. (В последнее время все чаще замечаю, что исправляю, переделываю, "цензуродую" даже вопреки желаниям, нарушая при этом другую заповедь С.Г.: лучшее — враг хорошего). В конце концов наши встречи участились до двух в неделю. Введение писалось мной под диктовку С.Г. в самом конце и почти не правилось. Это стало настоящими уроками мастерства и профессионализма.

Осенью 1979 года Институт математики СО АН СССР проводил школу по теории операторов в функциональных пространствах, в трудах которой был издан наш с С.Г. препринт "Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве". По содержанию результаты препринта не сильно отличались от результатов из кандидатской диссертации, где они были получены мной по рабоче-крестьянски, топорной работой. Увидев их в контексте непосредственного обобщения стандартного операторного исчисления, С.Г. собственной рукой написал 6-7 первых, главных, страниц из 16, в итоге результаты засверкали новыми гранями и приобрели изящную классическую форму.

В 1986 году по поручению С.Г. разбирал большую статью из "Известий АН СССР" и докладывал ее на семинарах. На одном, втором, а в начале третьего С.Г. вышел к доске и за час изложил все, что я уже рассказал и еще только собирался, используя стандартный (и неизвестный мне) метод характеристик. Неожиданный поворот событий позволил мне "дорулить" ситуацию до предела и взглянуть на большой круг обсуждаемых задач с еще более естественной точки зрения. Стала понятной природа необходимых для

эффективных исследований новых методов взамен метода характеристик, пошли в дело и имевшиеся к тому времени методы и приемы, казавшиеся поначалу весьма далекими от предмета исследования. Осознание вида "заявки" на недостающие методы и ее выполнение привели к написанию докторской диссертации.

По поручению С.Г. мне неоднократно приходилось писать первые подробные варианты (обычно их называют *рыбой*; данный мной зарок не употреблять это слово по отношению к М.А. сам стал *допускать расширение* на случаи с С.Г.) отзывов на кандидатские диссертации с перечислением достоинств и недостатков. И каждый раз изумлялся преобразованному итоговому варианту того же отзыва, его рельефности и необъятному арсеналу средств, подменяющих скучные оценки. "Без протокола" С.Г. иногда добавлял: переписать это 3-4 раза, получилась бы нормальная работа.

#### ИХ ЧИСТОСЕРДЕЧНЫЕ ПРИЗНАНИЯ

М.А.:

- В студенческие годы мои занятия сильно стимулировало чтение одной математической книги, в которой я обнаружил свыше ста ошибок. (Услышав это, подумал: каждый имеет свою норму ошибок, отличия лишь количественные. Желательно стараться не повторять чужих ошибочных результатов и обходиться своими.)

- За первые несколько лет работы в ВГУ я прочитал лекции практически по всем математическим курсам и именно тогда здорово образовался. Ведь по-настоящему что-то понимаешь только тогда, когда рассказываешь это другим.

С.Г.:

- В начале 30-х годов, в киевских (только?) школах был введен такой порядок: класс разбивался на пятерки, и в этой пятерке каждый был ответственным за некоторые предметы. Я отвечал за два предмета, химию и биологию (эту ли именно пару называл С.Г., не уверен). Когда ответственного вызывали отвечать, то полученную им отметку автоматически ставили всей оставшейся четверке. За математику в нашей пятерке отвечал мальчик (С.Г. назвал его), который соображал не хуже меня; он уехал из Киева еще до войны и исчез.

- Учась в аспирантуре, долго возился с задачей, поставленной руководителем, акад. Н.Н. Боголюбовым. Оказалось, что не получалась она потому, что, вычисляя производную синуса корня квадратного из  $x$ , потерял производную корня (раньше это изучали в 1-м семестре, теперь проходят в школе).

- Однажды послал на конференцию тезисы с результатами, которые долго не удавалось доказать, и это оказалось прекрасным стимулом к быстрому успешному завершению работы.

- Хотя большую часть жизни прожил в Воронеже, но, когда еду в Киев, то всегда ощущаю — еду домой.

• Известно, что два года перед самой войной отношения между СССР и Германией были действительно дружескими, и некоторые мои киевские родственники успели съездить на отдых в Германию, где к ним относились прекрасно. Поэтому, когда в начале войны немецкие войска быстро оказались вблизи Киева, они не захотели эвакуироваться и говорили: "Что нам, старикам будет? Ведь мы только что убедились: немцы — цивилизованная нация!" И почти все остались. В Бабьем Яре.

#### РЕЖИМЫ СТРОГИЕ ИЛИ НЕСТРОГИЕ

До отъезда в Москву, живя в Воронеже, М.А. не соблюдал режим, недосыпал, работал дни и ночи напролет, вокруг него всегда бурлила жизнь. Ему нередко приходилось работать одновременно в нескольких вузах, дабы прокормить большую семью. О его образе жизни в Москве мне известно гораздо меньше. По рассказам очевидцев, его жизнь по-прежнему бушевала. Помню, как М.А. с гордостью рассказывал мне о найденном им способе борьбы с преследующими его сердечными болями с помощью гомеопатических доз сердечных лекарств, подробно объясняя, *почему и как* надо делить таблетку на 8 (или 10; за точность поручиться не могу) частей.

Приехав из Кривого Рога в Воронеж в 1954 году, С.Г. первые 6-7 лет пребывания в Воронеже работал в ВЛТИ, затем 11 лет в ВГУ. По возвращении в 1971 году из ВГУ в ВЛТИ (не по своей воле) С.Г. постепенно именно сюда перенес место проведения научных семинаров. ВЛТИ стал центром математической жизни города. После смены ректора в ВГУ заглохшая было математическая жизнь оживилась и там. В конце 70-х и первой половине 80-х годов С.Г. успевал одновременно заведовать кафедрой математики ВЛТИ, вести там же два семинара (по уравнениям в частных производных; по дифференциальным уравнениям с параметром), вести семинар в ВГУ по теории интерполяции и там же читать лекции по теории функций комплексного переменного. Позже оба семинара в ВЛТИ слились в общий, по сути, городской семинар по уравнениям с особенностями, на который, наряду с работающими на кафедре до сей поры, а также работавшими в то время П.А. Кучментом, С.Я. Львиным (оба ныне в США), Н.И. Яцкиным, И.Я. Шнейбергом (безвременно ушедшим) и аспирантами, съезжались математики из ВГУ и других вузов города. На семинаре выступали как воронежские, так и приезжие математики, в частности, аспиранты и соискатели, для которых С.Г., будучи председателем диссертационного совета, устраивал "смотрины". В начале 90-х годов было образовано Воронежское математическое общество, президентом которого единогласно был избран С.Г. Вплоть до 1996 года заседания ВМО, на которых с докладами выступили многие математики города, проводились ежемесячно.

В последние лет 15 жизни С.Г. старался соблюдать режим, с 14 до 17 в квартире отключался телефон и устраивался тихий час. В то же время помню, как на всех зимних школах, проводимых в "Березке", вечерами после семинаров начиналась ночная жизнь с танцами, разговорами,... И

наутро после таких вечеров или после банкета С.Г., всегда бодрый и свежий, любил "принимать парад" у входа в столовую несмотря на то, что накануне был активным участником танцев, других интересных мероприятий или тамадой на банкете.

Что имели?

Не найдется честного человека, не признающего в каждом представителе пары М.А. — С.Г. математика поистине мирового уровня в сочетании с Личностью, обладающей недюжинным умом, вековой мудростью и непритворным демократизмом. Оба героя обладали, наряду с массой прочих достоинств, огромным обаянием. Теперь слово это не в ходу, его заменяют другими: харизма, энергетика, сексапильность и пр. Все эти понятия имели к ним самое непосредственное отношение. М.А. — С.Г. были неприхотливы в быту и старались не сильно в него погружаться. Для своего положения оба были бессребрениками, не имели коттеджа, машины, дачи, других стандартных атрибутов преуспевающего человека. А что имели, кроме Богом данных и скрупулезным трудом обогащенных талантов? Из материальных ценностей — уникальные библиотеки. М.А. благодаря, в основном, подвижничеству Сарры Израилевны обладал редкой библиотекой художественной литературы. С.Г. долгие годы был активнейшим читателем художественного отдела библиотеки ВЛ-ТИ (обычно первой прочитывала все Евгения Петровна, проводя тщательный отбор для С.Г.). Кроме того, ему удавалось выписывать, когда это было совсем непросто, наряду с несколькими математическими журналами, кучу журналов, научно-популярных и литературно-художественных. Что М.А. — С.Г. еще имели? Кроме любви и уважения да честного имени... ничего, прямо по И. Иртеньеву:

Гуляли мы по высшей мерке, Ничто нам было нипочем, Взлетали в небо фейерверки,

Лилось шампанское ручьем.

Какое время было, блин!

Какие люди были, что ты!

О них не сложено былин,

Зато остались анекдоты.

Какие мощные умы

Торили путь каким идеям.

А что теперь имеем мы?

А ничего мы не имеем.

УСПЕЛО ЛЬ ИХ НАСТИЧЬ ПРИЗНАНЬЕ?

За границей С.Г. успел побывать лишь трижды: в Болгарии — на конференции, в США, где ему была сделана сложная дорогостоящая операция на сердце за счет благотворительных фондов, а собранные многими зарубежными учеными средства пошли на оплату дороги и проживания, и в Цюрихе, на Международном математическом конгрессе. Приглашения за рубеж пошли валом, когда здоровье уже не позволяло ими

воспользоваться. Только в последние 10-15 лет пришли давно заслуженные почести, оценившие вклад С.Г. в подготовку 19 докторов и 62 кандидатов наук.

Возвращаясь к вопросу о выборах в АН СССР, в которых безуспешно принимал участие М.А., поставлю лишь один вопрос: многие ли академики и члены-корреспонденты, выбирающие в свой круг новых небожителей, могли предъявить, как М.А., собственных учеников, среди которых более 20 докторов и не меньше кандидатов наук, два десятка книг, около четырехсот научных статей? В последние годы жизни признание М.А. приняло осязаемые материальные формы, он неоднократно бывал за границей, получал гранты для работы в зарубежных научных центрах. Такие поездки он планировал до последних дней. В то же время помню, как в августе 1989 года М.А. сокрушенно заметил: "Директор института регулярно доплачивает из своего фонда, приглашения из-за границы регулярно поступают; все это прекрасно! Лет на 15 бы раньше!"

Уроки М.А. — С.Г. продолжаются

С отъездом М.А. в Москву его уроки не завершились. Во-первых, мои друзья Венья и Алла регулярным цитированием отца создавали поле влияния, во-вторых, разные истории и цитаты от М.А. передавались бывшими воронежцами Н. Бобылевым, В. Соболевым и другими. Кроме того, случались редкие разговоры во время наездов М.А. в Воронеж, дважды я бывал в доме М.А. и Сарры Израилевны в Москве. И еще — памятный разговор в Праге.

В наши отношения с С.Г. ни география, ни другие факторы не внесли помех или возмущений, поэтому контакты, особенно в последние 10-12 лет, были регулярными и тесными. Нас связывали кафедральные дела, работа по грантам и не только.

В последнее время все чаще вспоминаются уроки стратегии и тактики "передвижения по жизненному пути", преподанные М.А. — С.Г. Тем более, что жить теперь (или всегда?) приходится в эпоху перемен, а значит, все "лучше и веселей". Не потерять дорогу в бушующем море этих перемен всегда непросто. Опорой могут служить нередко звучавшие из уст С.Г. надписи с кольца Соломона: "И это было", "Пройдет и это". Вспоминается, как после длительного обсуждения со мной какой-то непростой этической ситуации, накануне принятия окончательного решения С.Г. добавил: "Надо обсудить это еще и с Евгенией Петровной". Ловлю себя на непрекращающемся диалоге с С.Г., на постоянном цитировании. Быть может, не все те фразы были придуманы им, однако к нам они пришли как эстафета от предыдущих поколений и, сказанные всегда к месту, остались в памяти неразрывно связанными, спаянными с его образом. Всего два примера. Говоря о нуль-векторе, нередко вспоминаю, как С.Г. цитировал Гегеля: нуль - это "ничто... от некоторого нечто". Слушая чьи-то страстные речи или вслушиваясь в "пышный звук" собственных слов, вслед за ним отмечаю: "врет, как очевидец".



Уроки М.А. — С.Г. содержат не только уникальную информацию, которой они обладали и бескорыстно делились с учениками и коллегами. Поскольку информация рождалась иногда прямо на глазах (представьте, что Вы допущены на кухню в момент колдовской работы шеф-повара высочайшей квалификации), то она становилась стимулом дальнейшей работы для всех участников процесса. Кроме того, М.А. — С.Г., даря счастливые мгновения общения, учили правильно относиться к математике, к работе коллег. Это значит — заинтересованно, без предвзятости оценивать чужие результаты, поддерживать их авторов, устанавливать в научно-педагогическом коллективе отношения, способствующие результативной работе и принятию эффективных решений. М.А. — С.Г. нередко мыслили парадоксально, бывали непредсказуемыми и ценили эти качества в других. Общение с ними вселяло наивное представление, даже уверенность и возможности каждому, как и им, адекватно оценивать реалии, смотреть на происходящие вокруг события без очков (розовых, черных, легко меняющих цвет), без карманного микроскопа (многие обзаводятся им для тщательного изучения собственных достижений). М.А. — С.Г. не поддались искушению и проигнорировали распространившееся представление о признании, успехе, которое выпячивает материальный компонент. Зато они весьма преуспели в ином: оставили яркий неизгладимый след в наших душах. Это, как мне представляется, главный урок Учителей.

*С.Д. Эйдельман*

### *Воспоминания о Селиме Крейне*

Человеческая жизнь, сложная и противоречивая, полная больших забот, тревог и маленьких радостей, становится праздником, когда на своем пути, долгом и тернистом, человек встречает явление экстраординарное, удивительное, благородное и вдохновляющее, зовущее к познанию и творчеству, настоящего Человека, Творца, Ученого, Учителя, Друга. Таким человеком для меня был Селим (Мира) Крейн, при этом, конечно, огромную роль играла неизменная главная тема нашего общения - математика, которая в устах Великого Мастера Селима была очень разной, но всегда удивительно интересной.

У Селима органически сочеталась огромная разносторонняя образованность, блестящий талант лектора, способность находить принципиально новые научные направления и создавать научные коллективы, осуществляющие его далеко идущие замыслы.

Он всегда оставался доступным для постоянного творческого общения, благожелательным и остроумным, любящим жизнь во всех ее многообразных проявлениях.

1. Впервые я встретился с Селимом в 1938 году, когда поступил на физико-математический факультет Киевского госуниверситета. Селим был на три курса старше нас, и, как мне помнится, был членом комитета комсомола, ответственным за наш курс. Он много общался с нами, особенно с нашим сокурсником Марком (Мурой) Красносельским. Его ум, благожелательность, доступность и обаяние делали его всеобщим любимцем.

В 1941 году после трех курсов университета я был мобилизован в армию, участвовал в Великой Отечественной войне, войне с Японией, больше года служил в Советской Армии на Квантунском полуострове (Китай), только в октябре 1946 года я смог вернуться к занятиям математикой. В 1948 году я закончил физико-математический факультет Черновицкого университета и был оставлен при университете в должности старшего лаборанта (сменив на этом посту Б.А. Трахтенброта, известнейшего сейчас специалиста по математической логике). Мои самостоятельные попытки заниматься математикой по началу не сопровождались какими либо существенными успехами, хотя я и очень старался.

В марте 1952 года в Московском университете (он тогда размещался в центре Москвы на Моховой) проходила конференция по дифференциальным уравнениям (председателем оргкомитета был академик М.В.Келдыш, секретарем — младший научный сотрудник О.А. Олейник). Я собрал то небольшое, что сделал, и послал заявку на доклад. К моему радостному удивлению, мой доклад был принят. Конференция 1952 года — первая

послевоенная конференция по дифференциальным уравнениям — собрала много интересных математиков, на ней было сделано много важных докладов (например, доклад Я.Б. Лопатинского, в котором впервые прозвучало его условие коэрцитивности (дополнительности) граничных задач для эллиптических по Петровскому систем, доклад М.В. Келдыша о пучках несамосопряженных операторов и многое-многое другое). Для меня эта конференция была возвращением к мирной творческой жизни, далекой от ужасов войны, встречей с дорогими по студенческим годам друзьями Селимом Крейном и Марком Красносельским, которые за годы нашей разлуки стали всемирно известными учеными. При встрече я был ими немедленно узнан, обласкан и последующие почти пятьдесят лет имел счастье дружить с ними и принимать участие в многочисленных интереснейших обсуждениях великого, множества проблем нашей любимой математики.

С конференции я вернулся полный впечатлений и надежд. И эти надежды в период с 1952 по 1958 год частично оправдались.

2. Пятидесятые годы 20 столетия были периодом очень интенсивного развития математики, в областях, которые интересовали Селима Крейна и меня — это функциональный анализ и теория дифференциальных уравнений с частными производными. Были проведены Всесоюзные конференции по функциональному анализу (Москва — 1956, Одесса — 1958, Баку — 1959), математический съезд (Москва — 1956). Я приглашался на эти конференции и имея возможность на них часто общаться с Селимом. Особенно интенсивные и содержательные общения у нас начались, когда Селиму было предложено быть официальным оппонентом по моей докторской диссертации (3\04\59, МГУ). Я в 1958 году приезжал (впервые) в Воронеж, где на семинаре рассказывал содержание своей работы "Исследование по теории параболических систем". Меня поразила в отзыве Селима на мою работу глубина ее прочтения, оригинальность оценок и суждений о том, о чем я думал долгие и трудные десять лет. И это в области, которой он конкретно вроде и не занимался, где все делалось трудно и выкладочно средствами классического анализа. И в дальнейшем эта важная черта Селима меня многократно поражала и радовала: его удивительная способность переосмысливать прочтенное или услышанное, даже в вопросах, о которых он слышал впервые, потом еще додумывать, делать понимание глубоким и совершенным и, одновременно, простым и доступным. И все это делалось быстро и без видимых усилий. Это же происходило на семинарах, которыми он руководил, на докладах в Воронежских зимних математических школах, в которых он высиживал "от звонка до звонка", живо вникая в самые разные по тематике и качеству изложения лекции и доклады участников школ. Я помню только один случай отклонения от этой нормы. Мы слушали доклад очень хорошего математика на очень интересную тему. Я с трудом понимал общее направление доклада, но почти ничего не понимал конкретно. Находясь рядом с Селимом, к надеялся (как

обычно) получить его разъяснения на перерыве. Когда мы вышли из аудитории, я с надеждой посмотрел на него, он задумчиво посмотрел на меня и неторопливо сказал "Знаешь, это тот редкий случай, когда ничего не понятно, но удивительно интересно!"

3. Вернемся к рассказу о конференциях пятидесятых годов. Две из них мне особенно запомнились. Первая проходила осенью 1958 года в Одессе, ее организатором и вдохновителем был Марк Крейн, один из самых Великих математиков ушедшего столетия, родной брат Селима. Сам Селим на конференцию не приехал. В конференции участвовало много известных математиков и было сделано много судьбоносных докладов. Общение с Марком Крейном, его видение математических проблем и способность очень точно и глубоко вникать в суть дела и в изящной форме излагать свои суждения и оценки придавали конференции особый крейновский колорит.

Одесская конференция 1958 оказалась важным звеном в цепочке событий математической жизни далеких уже теперь лет, в которые формировались многие важнейшие разделы современного функционального анализа и математической физики. На этой конференции я доложил о работе, в которой предлагал изучать задачу Коши для параболических уравнений в семействах весовых банаховых пространств (при каждом значении времени свое пространство). Эта конструкция позволяла за счет специального выбора весов получать точные теоремы о корректности задачи Коши в сконструированных таким образом семействах банаховых пространств различного конкретного вида. Марка Крейна на моем докладе не было, но ему о нем рассказали, он меня нашел, и мы с ним обсудили возможность использования таких конструкций при изучении изменения во времени решений эволюционных уравнений. Через несколько месяцев на моей защите Селим тоже высказал интереснейшие соображения по этому поводу.

Прошли годы, мы начали изучать новые широкие классы вырождающихся и вырожденных параболических уравнений сложной структуры, а предложенная конструкция и результаты, с помощью ее полученные и соответствующим образом модифицированные, сохранились.

Очередная конференция по функциональному анализу состоялась осенью 1959 года в Баку. Помнится, я жил в одной комнате с М.С. Лившицем, В.Э. Лянцем, И.С. Иохвидовым. Последний сразу завоевал наши сердца и умы бесконечным обаянием и не меньшим числом высококлассных коротких прекрасно рассказанных анекдотов.

Селим на этой конференции сделал великолепный доклад о новой главе функционального анализа — теории шкал функциональных пространств. Он сравнил эту теорию с известными работами Карла Линнея по классификации животных.

Последующее бурное развитие теории шкал и ее разнообразных содержательных приложений, в котором активнейшее участие принимал Селим и его ученики, подтвердили оптимистические надежды ее создателей.

На этой конференции произошел курьезный случай, который мне запомнился. После одного из заседаний в опустевшей аудитории остались Селим и Георгий Евгеньевич Шилов (мои любимые официальные оппоненты) и я, ожидавший конца их энергичной дискуссии. Постепенно я начал вслушиваться в их спор и понимать, что причина спора (как это часто бывает) в том, что спорящие говорят о разных вещах. Еще немного послушав, я робко вмешался в разговор и сбивающимся от волнения голосом сказал об этом. Георгий Евгеньевич немедленно положил мел, спорящие расхохотались и Георгий Евгеньевич произнес классическую фразу "Устами младенца глаголет истина". Действительно, "от великого до смешного один шаг".

4. В августе 1963 года я переехал в Воронеж и период моего пребывания в Воронеже (с августа 1963 по июль 1968) были годами самого активного разностороннего и плодотворного научного общения и сотрудничества с Селимом.

В августе 1963 мы вместе полетели на Советско-Американский Симпозиум по уравнениям с частными производными в Новосибирский Академгородок. Этот городок, созданный по инициативе академика М.А. Лаврентьева, переживал в то время период первой молодости, полной радостных надежд и творческого энтузиазма. Селима (а заодно и меня) встречал сам М.А., с которым Селим работал в Уфе, куда в Великую Отечественную войну эвакуировалась Украинская Академия Наук. В высоких сапогах на "Виллисе" (машине, хорошо известной мне по дорогам войны) Михаил Алексеевич с гордостью и энтузиазмом рассказывал и показывал новый город, восторгался сибирской природой и увлеченно делился своими творческими планами. Это было по-настоящему интересно и вдохновляюще.

Состав участников тоже вдохновлял. Американскую делегацию возглавлял Курант. В ее состав входили многие выдающиеся математики. Среди них был Браудер, Мозер, Зигмунд, Кальдерой, Зингер, Шехтер и многие другие (всего 30 человек). Наша делегация возглавлялась тремя академиками М.А. Лаврентьевым, С.Л. Соболевым и И.Н. Векуа, которые по своей инициативе переехали в Новосибирск, чтобы развивать науку в Сибири.

Симпозиум был тщательно подготовлен. Участникам были розданы папки, которые содержали набор книжечек с докладами всех участников.

Одной из тем, которая активно обсуждалась на симпозиуме, была теория граничных задач для эллиптических по Петровскому систем.

Изучению эллиптических граничных задач в пространствах обобщенных функций произвольного конечного порядка был посвящен на симпозиуме доклад Ю.М. Березанского, С.Г. Крейна и Я.А. Ройтберга. Американский математик М. Шехтер на симпозиуме доложил работу на близкую тему. Было очень интересно наблюдать за развернувшейся после этих докладов дискуссией.

Работы по построению полной теории линейных эллиптических граничных задач в шкалах банаховых пространств обобщенных функций любого конечного порядка, начатая в упомянутых выше замечательных докладах, активно ведется и по сей день.

Мы жили в одной гостинице с американцами, питались вместе. . Все было очень мило. Но иногда возникали небольшие проблемы. Так Мартину Шехтеру, правоверному еврею было трудно найти пищу, которую ему разрешала употреблять его религия. Другая проблема возникала у нас. Мы, в отличие от американцев, много употребляем в еде хлеба. И иногда во время обеда мы слышали голос Селима: "Девочки, вы опять приняли меня за американца. Дайте кусочек хлеба!"

Для меня Новосибирская конференция была самой замечательной конференцией за всю мою долгую жизнь, особенно судьбоносными оказались мои встречи и беседы с Юргеном Мозером, которого я считаю одним из самых замечательных математиков ушедшего столетия.

5. Летом 1963 года по приглашению Марка Красносельского и Селима Крейна я переехал в Воронеж и с августа 1963 года по июнь 1968 года заведовал кафедрой высшей математики Воронежского политехнического института. Вместе со мной в Воронеж переехал мой аспирант по Черновицкому университету Валентин Репников, а позже еще несколько выпускников Черновицкого университета, с которыми я с их студенческих лет занимался теорией дифференциальных уравнений с частными производными.

6. С первых дней появления в Воронеже мы по предложению Селима и Марка начали регулярно участвовать в интенсивной научной деятельности математического факультета Воронежского университета. Это были годы расцвета теперь уже всемирно известной Воронежской Математической Школы. Создание этой школы было начато Владимиром Ивановичем Соболевым, удивительным человеком и математиком, пригласившего Марка вначале пятидесятых годов в Воронеж, а Марк затем пригласил Селима, и их талантом и энергией было создано в провинциальном до того Воронеже это вдохновляющее явление.

Постепенно мы органически включились в работу научных семинаров, посещали разнообразные интереснейшие циклы лекций, которые читались как воронежскими математиками, так и ведущими математиками из других городов Советского Союза. В это время появились Воронежские зимние математические школы, которые существенно расширили возможности общения между математиками и получение разнообразной важной информации "из первых рук". Все это создавало атмосферу, зовущую к познанию и творчеству.

Мне было сравнительно легко войти в эту кипучую деятельность, так как с Селимом и Марком я дружил со студенческих лет, привык их слушать и спрашивать, пытаться отвечать на их вопросы "в рамках моей компетентности", которые (эти рамки) при их огромном интересе ко всему

математическому постоянно требовали существенного расширения. Я был постоянным объектом их трогательного требовательного внимания. Это для меня было незабываемым трудным счастьем, которое сохранилось и на последующие годы нашего, к сожалению, не слишком частого общения с ними. В частности, наши частые беседы были связаны с тем, что в это время Селим писал свою монографию "Линейные дифференциальные уравнения в Банаховых пространствах", а Марк со своими сотрудниками — монографию "Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций". В этих монографиях обсуждаются проблемы, входящие в "рамки моей компетентности". Замечу, что в монографии Селима изложены и наши совместные с Селимом результаты (гл. 1, параграф 8, п. 1 и 2). Для того, чтобы проиллюстрировать, как Селим относился к своим ученикам, друзьям и сотрудникам, я решаюсь привести (для меня очень лестную) дарственную надпись в монографии, о которой шла речь:

"Дорогому Семе, соученику, другу, соавтору, соруководителю семинара: с надеждой, что наше со... будет продолжаться вечно" С.Г. Крейн, Воронеж, госпиталь, 1968 г.

Я и мои ученики и сотрудники регулярно посещали еженедельный семинар Селима. По его приглашению я сделал на семинаре цикл докладов по теории линейных эллиптических и параболических задач. В то время эта теория была или недавно создана или только только создавалась. Для меня была очень важна и интересна реакция Селима на мои рассказы. Он их всегда сразу после доклада (в автобусе от университета до дома) тщательно продумывал и перед следующим моим докладом комментировал услышанное, добиваясь максимальной четкости, простоты и доступности изложения.

В обсуждаемой нами теории есть следующий принципиальный момент. Если рассматривать произвольную эллиптическую или параболическую систему, то даже самая простая и популярная задача для нее — задача Дирихле — не обладает хорошими свойствами (нетеровости, нормальной разрешимости, корректности). Для этого необходимо (и достаточно), чтобы граничные условия и система уравнений были связаны специальным алгебраическим условием (Лопатинского, дополненности). Это очень красивое условие. Но Селим обратил внимание на то, что в конкретных важных случаях оно трудно проверяемо. Селим и его ученики сделали эту проверку в некоторых конкретных случаях, но задача и сейчас далека от своего удовлетворительного решения.

По приглашению Селима я начал педагогическую работу на созданной им в 1964 г. кафедре "Уравнений в частных производных и теории вероятности". Последние три года пребывания в Воронеже я работал на ней на полставки по совместительству. В этот период он мне сделал "царский" подарок. Селим задумал для выдающейся по математическим способностям группе студентов ВГУ прочесть курс теории уравнений с частными производными по своей программе (или почти без программы), рассказывая самое

новое и самое интересное. Но Селима назначили деканом факультета, и он подарил эту группу мне. За 53 года моей педагогической работы это была самая-самая хорошая, самая-самая способная, самая-самая интересная группа высокоодаренных студентов.

Вообще Селим умел делать " царские" подарки. Так в одной из Воронежских зимних математических школ он посадил меня за один стол с Владимиром Александровичем Кондратьевым, В.А, мне задал один вопрос, конечно в "рамках моей компетентности", и вот уже 33 года мы активно обсуждаем задачи, впервые возникшие в той столовой. А к моему пятидесятилетию он прислал мне теплое поздравление, в котором утверждал, что я был полуторалюбимым полуставочником на его кафедре в ВГУ.

Таким был Селим Крейн: Великим и Простым, любящем жизнь, нашу бессмертную науку и всех нас, которых он учил, прощал, хвалил. Таким он и останется в нашей бесконечно благодарной ему памяти!



## С. Якубов

Я впервые познакомился с проф. Селимом Григорьевичем Крейном в 1959 году в Баку на 2-й всесоюзной конференции по функциональному анализу.

Меня, почти студентом (окончил университет в 1968 г.), удивляло полное понимание всех докладов конференции проф. Селимом Григорьевичем.

Впоследствии узнал, что проф. С.Г. Крейн является одним из двух ученых (совместно с проф. М.А. Красносельским) создавшим знаменитую Воронежскую математическую школу.

Начиная с 1964 года почти каждый год я участвовал во всесоюзных конференциях и математических школах. Проф. С.Г. Крейн был не только участником, докладчиком, лектором этих математических мероприятий, но и их организатором. Он организовал и долгое время был руководителем знаменитой зимней математической школы. В то же время он был и самым достойным организованным «учеником» всех этих школ.

Сидя на первом ряду и записывая лекцию, он задавал свои глубокие вопросы лектору и тем самым помогал сидящим в зале ученым освоить лекцию глубоко.

Много раз я бывал дома у проф. С.Г. Крейна. Мы обсуждали некоторые параграфы его книги «Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве», особенно параграфы которые были связаны с моими опубликованными статьями.

Каждый раз я получал отзывы проф. Селима Григорьевича на свои новые статьи. Академики И.Г. Петровский, С.Л. Соболев очень уважали мнение проф. С.Г. Крейна и представляли статьи для публикации в ДАН СССР.

Впервые написать мне докторскую диссертацию так же посоветовал Селим Григорьевич.

В 1969 году на ученом совете Воронежского госуниверситета когда я защитил докторскую диссертацию он мне лично объяснил, что защитить успешно докторскую диссертацию и получить утверждение ВАК-а это две абсолютно разные вещи.

Поэтому надо быть мужественным и терпеливым. Следует выезжать в математические центры страны, выступать с докладами на знаменитых семинарах в Москве, Ленинграде, Новосибирске и в других городах.

Полушутя он добавил, что участники этих знаменитых семинаров должны видеть, что и «лица кавказской национальности» могут быть специалистами высокой категории.

Несмотря на то, что были некоторые технические трудности я осуществил мудрый совет проф. Селима Григорьевича и выступил с докладами на некоторых семинарах Москвы, Ленинграда и Новосибирска.

Помню на семинаре академика С.Л. Соболева в Новосибирске присутствовало много ученых, среди которых были и академики и члены-корреспонденты.

Думаю, что благодаря этому мудрому совету в то трудное время я в течении года получил утверждение ВАК-а.

Здесь в Израиле я написал две книги. Первую книгу «Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators», Pitman, New York, 1994, 245 pages (in English) я посвятил моей матери Хане-Сапе ( в 1941 году когда отец погиб на фронте мать в 27 лет с тремя малолетними детьми осталась одна и без всякой помощи).

В дарственной надписи книги для проф. С.Г. Крейна я написал: «Дорогой Селим Григорьевич! Не только Ваши математические исследования и книги, но и Ваша дружба со мной и любовь к математике помогли мне начать и закончить эту книгу».

Вторую книгу «Differential— Operator Equation. Ordinary and Partial differential Equations», Chapman and Hall/ CRC, Boca Raton, 2000, 568 pages (in English) я написал совместно с сыном Яковом Якубовым. Мы посвятили эту книгу трем людям, в том числе великому математику Селиму Григорьевичу.

Он был не только выдающимся ученым, но и прекрасным человеком, душой общества.

Долгая и светлая память ему!

**ATSUSHI YAGI (OSAKA)**

***ABSTRACT PARABOLIC EVOLUTION  
EQUATIONS***

Professor S. G. Krein was the first mathematician who pointed out in his paper [1] importance and availability of the notion of fractional powers of linear operators for studying a famous problem posed by K. Yosida on abstract parabolic evolution equations. In 1954, K. Yosida [2] posed the question of removing the requirement of independence of the definition domains of linear operators  $A(t)$  in constructing an evolution operator  $U(t, s)$  for an abstract parabolic evolution equation

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t), \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

in a Banach space  $X$ .

P. E. Sobolevskii [3] first succeeded in construction of evolution operator for (1) under the assumptions that the definition domains of the fractional powers  $A(t)^\nu$  are independent of  $t$  for some exponent  $0 < \nu \leq 1$ , i.e.,  $D(A(t)^\nu) \equiv D_\nu$ , and that  $A(\cdot)^\nu$  satisfies the Lipschitz condition

$$\|A(t)^\nu[A(t)^{-\nu} - A(s)^{-\nu}]\| \leq C|t - s|^\mu, \quad 0 \leq s, t \leq T \quad (2)$$

with some exponent  $M$  such that  $1 - \nu < M \leq 1$ . But he had to make an unnatural requirement that  $A(t)$  are self-adjoint operators of a Hilbert space  $X$ . Afterward T. Kato [4] eliminated this requirement, instead he needed a different restriction that the exponent  $\nu$  must be the inverse of a positive integer. Anyway, these two papers showed that one can utilize fractional powers of  $A(t)$  in constructing the evolution operator for (1).

Professor S. G. Krein [1] then presented a systematic treatment and general properties of the fractional powers of linear operators in the context of interpolation of operators. These results were assembled in his celebrated monograph [5, Chapter I] which played an enormous role in acquainting usefulness of the functional analytic approach to all types of partial differential equations.

Now it is known that one can construct an evolution operator for (1) under more general condition

$$\|A(t)^\nu[A(t)^{-1} - A(s)^{-1}]\| \leq C|t - s|^\mu, \quad 0 \leq s, t \leq T \quad (3)$$

than (2) in a Banach space with  $1 < \mu + \nu$  (but  $\nu$  no longer needs to be the inverse of an integer), see [6, 7]. It is easy to see that (2) implies (3).

Under (3) one can prove not only the basic properties of  $U(t, s)$  such as

- (1) For  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,  $U(t, s)$  is a bounded linear operator of  $X$  with  $U(s, s) = I$ ,
- (2)  $U(t, r) = U(t, s)U(s, r)$ ,  $0 \leq r \leq s \leq t \leq T$ ,
- (3)  $\mathcal{R}(U(t, s)) \subset \mathcal{D}(A(t))$ ,  $0 \leq s < t \leq T$ ,

but also can establish various refin

- (1) For  $0 \leq \theta < \mu + \nu$ , it holds that  $\mathcal{R}(U(t, s)) \subset \mathcal{D}(A(t)^\theta)$  with
$$\|A(t)^\theta U(t, s)\| \leq C(t - s)^{-\theta}, \quad 0 \leq s < t \leq T,$$
- (2) For  $0 \leq \theta < \mu$ ,
$$\|U(t, s)A(s)^\theta\| \leq C(t - s)^{-\theta}, \quad 0 \leq s < t \leq T,$$
- (3) For  $0 \leq \varphi \leq 1$  and  $0 \leq \varphi \leq \theta < \mu + \nu$ ,
$$\|A(t)U(t, s)A(s)^{\varphi-\theta}\| \leq C(t - s)^{-\varphi}, \quad 0 \leq s < t \leq T,$$
- (4) For  $0 \leq \theta < \mu + \nu$  and  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,
$$\|A(t)^\theta[U(t, s) - e^{-(t-s)A(t)}]A(s)^{-\varphi}\| \leq C(t - s)^{\varphi-\theta+\mu+\nu-1}, \quad 0 \leq s < t \leq T,$$
- (5) For  $k = 0, 1$ ,
$$\|A(t)^k U(t, s)A(s)^{-k} - e^{-(t-s)A(s)}\| \leq C(t - s)^{\mu+\nu-1}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$
- (6) For  $0 \leq \theta \leq \nu$  and  $0 \leq \varphi \leq 1$ .
$$\|A(t)^\theta[U(t, s) - e^{-(t-s)A(s)}]A(s)^{-\varphi}\| \leq C(t - s)^{\varphi-\theta+\mu+\nu-1}, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

ed properties

Such properties of  $U(t, s)$  are very useful in studying further developed problems on (1) such as the maximal regularity of solutions, the optimal control problem, numerical analysis, quasilinear abstract parabolic evolution equations etc.

In order to verify (3) in concrete examples it is sufficient to estimate the domains of fractional powers  $D(A(t)^\nu)$  from interior. The domains of fractional powers of elliptic differential operators equipped with boundary conditions have been characterized by the results due to D. Fujiwara [8], R. Seeley [9] and A. Yagi [10, 11].

## REFERENCES

- [1] S. G. Krein, *On an interpolation theory in operator theory*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 130(1960), 491-494. Soviet Math. Dokl. 1(1960), 61-64. [2] K. Yosida, *Semi-group theory and*

*the integration problem of differential equations*, Proc. Internat. Congr. Math. (Amsterdam, 1954) 1, Noordhoff, Groningen and North-Holland, 1957, 405-420. [3] P. E. Sobolevskii, *First-order differential equations in Hilbert space with a variable positive definite self-adjoint operator, a fractional power of which has a constant domain of definition*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 123(1958), 984-987. [4] T. Kato, *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces*, Nagoya Math. J. 19(1961), 93-125. [5] S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscow, 1978. English translation: Transl. Math. Monogr., AMS, Providence, 1982. [6] A. Yagi, *Fractional powers of operators and evolution equations of parabolic type*, Proc. Japan Acad. Ser. A 64(1988), 227-230. [7] A. Favini and A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, Marcel Dekker, 1999. [8] D. Fujiwara, *On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and the pure imaginary powers of some second order operators*, J. Math. Soc. Japan 21(1969), 481-522. [9] R. Seeley, *Norms and domains of the complex powers  $A_{B^2}$* , Amer. J. Math. 93(1971), 299-309. [10] A. Yagi, *Coïncidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs*, C. R. Acad. Sc. Paris 299 (1984), 173-176. [11] A. Yagi, *Functional calculus and characterization of domains of fractional powers*, Proc. 17th Conference on "Operator Theory and Applications", Birkhäuser, accepted for publication.

**Angelo Favini (Bologna), Atsushi Yagi (Osaka)**

***On some basic aspects of the scientific research of  
S.G. Krein***

In these few pages we would like to point out some research topics where the ideas, methods and techniques of Professor S.G. Krein yielded very important contributions to research and proved to be enlightening in successive development.

The first topic concerns interpolation theory. His paper [8], in collaboration with Yu.I. Petunin and E.M. Semenov, describes in a precise and rigorous way the basic properties of the interpolation spaces between two given Banach spaces by means of the scales of Banach spaces.

In particular, the definitions of the minimal  $E_{\theta}^{\min}$  and the maximal scale  $E_{\theta}^{\max}$  connecting the two Banach spaces  $E_0, E_1$  are introduced together with a description of the relevant spaces of real interpolation  $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , by J.L. Lions and J. Peetre (also called  $K, J$ , mean spaces) and the complex interpolation spaces  $(E_0, E_1)_{\theta}$ ,  $0 < \theta < 1$ , according to A.P. Calderon and J.L. Lions.

In this context a detailed study of rearrangement of invariant spaces and Hoelder spaces as minimal interpolation spaces is made in the monograph [9] by the same authors.

It shall be seen later on in [11] that there is a precise relation between the spaces  $E_{\theta}^{\max}, E_{\theta}^{\min}$  and the mean spaces  $(E_0, E_1)_{\theta, \infty}$  and  $(E_0, E_1)_{\theta, 1}$ , respectively.

We would also like to mention the article [1] for its basic importance in mathematical research, giving a complete description of the state of the art and references on interpolation theory.

In addition, we also point out that Angelo Favini extended the theory of scales to some important topological vector spaces in his thesis and published his first paper on this subject.

The second pioneering item described in detail by S.G. Krein in his monograph [9] and which we would like to highlight is the weakened Cauchy problem for the linear equation in a space of Banach  $X$

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0,$$

where  $A$  is a densely defined closed linear operator acting in  $X$  whose resolvent  $R(z) = (zI - A)^{-1}$  satisfies in a region *ffie*  $z \geq a$  the weak

$$\|R(z)\| \leq M(1 + |z|)^{-\beta},$$

with  $0 < \beta \leq 1$ .

Though the original result is due to E. Hille and R.S. Phillips, the extreme clearness of Krein's version was encouraging in extending the theory to not necessarily densely defined multivalued linear operators, so as to embrace the initial-value problem

$$\frac{du}{dt} - Au \ni f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad u(0) = y \in X$$

and degenerate differential equations of parabolic type.

We refer to the paper [6] and the monograph [7], where, in particular, use of the real interpolation spaces between  $X$  and the domain  $D(A)$ , with indexes  $\theta$  and infinity, allows to obtain maximal  $C^\theta$  regularity in time of the solution, even if it decays with respect to the one of the given function  $f(\cdot)$ .

The third topic of interest treated with great technical mastery by professor Krein concerns boundary value problems for the second order equation in Banach space  $X$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au + f(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$A$  being a positive operator in  $X$ .

On the ground of preceding papers in collaboration with G.I. Laptev, in the monograph [9] professor Krein describes the weakened solutions and the generalized solutions to such equations and then he considers a related system of general boundary conditions. He also characterizes the uniform correctness of these boundary-value problems. The nonhomogeneous problem is treated by means of the Green's function, and the existence results assume that function  $f(\cdot)$  is Hölder continuous.

Inspired by this technique, in [3] the authors treat the solvability and also the maximal regularity of the complete abstract differential equation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2B \frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

with Dirichlet boundary conditions.

In a more recent paper [4], the famous Dore-Venni theorem on the sum of two closed linear operators [2] is used in order to solve the same problem in the sense of  $L^p(0,1; X)$ ,  $1 < p < \infty$ , provided that  $X$  is a UMD Banach space.

Extending exactly the same strategy described in Krein's monograph [9], very recently in [5] the authors provide a simplified approach to elliptic differential equations in UMD spaces.

We hope that this short list will suffice to point out the great influence that the work of professor S.G. Krein has had on our research.

## References

- [1] Yu.A. Brudnyi, S.G. Krein and E.M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Hogi Nauki i Tekniki, Math. Anal., 24 (1986), 3-163.

- [2] G. Dore and A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Mathematische Zeitschrift, **196** (1987), 270-286.
- [3] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and Y. Yagi, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Funkc. Ekv., 47 (2004), 423-452.
- [4] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and Y. Yagi, *Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD spaces*, Funkc. Ekv., 49 (2006), 193-214.
- [5] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and Y. Yagi, *A simplified approach in the study of elliptic differential equations in UMD spaces and new application*, submitted.
- [6] A. Favini and Y. Yagi, *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), **163** (1993), 353-384.
- [7] A. Favini and Y. Yagi, "Degenerate differential equations in Banach spaces," 1999, M. Dekker, New York.
- [8] S.G. Krein, Yu.I. Petunin and E.M. Semenov, *Scales of Banach spaces*, Uspekhi Mat. Nank., 21, N.2 (1966), 89-168.
- [9] S.G. Krein, "Linear differential equations in Banach space," Moscow, 1967; English translation: AMS, Providence, 1971.
- [10] S.G. Krein, Yu.I. Petunin, E.M. Semenov, "Interpolation of linear operators," Nanka, Moscow, 1978; English translation: Transl. Math. Monogr., AMS, Providence, 1982.
- [11] V.V. Vodop'yanov, *On the connection between the minimal scale and K method of interpolation*, Mat. Zametki, 30, No. 5 (1981), 679-684.



## Jerome A. Goldstein

### *SOME THOUGHTS OF SELIM GRIGORIEVICH KREIN*

I had the good fortune of spending the last week of January, 1990 at the 25<sup>th</sup> Voronezh Winter School of Mathematics. There I had the great pleasure of meeting Selim G. Krein and seeing him in action. This conference was extraordinary in many ways. But first allow me to discuss my understanding of the background.

In the late 1980s Pavel Sobolevskii gave an invited address at a meeting in Oberwolfach, the great mathematics conference center in Germany's Black Forest. This was his first trip to the West. As he was one of the organizers of the Voronezh Winter

Schools, he decided to invite a few of the Oberwolfach participants to attend one of these meetings. As military weapons were manufactured in Voronezh, Westerners were not normally invited there. Four of us accepted the invitation: Philippe Clement (Delft, The Netherlands), Giuseppe DaPrato (Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy), Peter Hess (Zurich, Switzerland), and I (then at Tulane, New Orleans, USA). The conference had around 300 participants, (almost) all in mathematical analysis, and the meeting had impressive breadth and scope. Among the participants were many "big shots", international stars, as well as many young people who have now attained international stature for their research.

Selim Krein ran the conference as if it were his private seminar. Now I had known his reputation as a great researcher, and I had previously bought and read his wonderful book on differential equations in Banach spaces, which the American Mathematical Society had translated into English. And I knew of important research results published by him alone and jointly with his brother Mark and also his PhD students, such as Sobolevskii. But I had no idea how charming and charismatic he was. He asked wonderful questions, made many insightful suggestions, and helped inspire everyone constantly. In the evenings he joked, organized dancing, and made everyone have a good time as well as aspire to become better mathematicians.

Krein certainly made the meeting very successful, but perhaps this was not such an easy thing to do. As Westerners did not normally go to this part of Russia, there were plenty of KGB people around, especially close to the Westerners. At the beginning of 1990, life was very difficult and strange in the Soviet Union. While the Soviet Union was disintegrating, this was not completely obvious at the time. What was clear was that the political situation was unstable and in flux. The food at the conference was not very good. Alcoholic beverages were officially banned, although they did appear in the guest rooms of some participants, where small offshoots of the conference continued until the early morning hours.

One could not help but notice the huge impact Selim Krein had on the young people at the conference (and on the older people as well). That his influence was

present in the conference was evidenced by the strong work ethic and the mathematical taste shown in the lectures and in the private discussions.

After Voronezh I had a pleasant visit in Moscow, hosted by my old friend, Slava Sazonov of the Steklov Institute.

In the years since 1990, I have hosted in America some of the many friends I made in Voronezh, including Yuri Daletskii and Pavel Sobolevskii. Some of these friends have settled in the USA and have had very productive careers in their adopted country, including Archil Gulisashvili, Victoria Steblovskaya, Eduard Tsekanovskii, and others.

Unfortunately (for me), that was my only chance to meet Selim Krein. He is a great scholar, researcher, teacher, mentor, and is a remarkable human being. It seems to me that there would likely be no wars or cold wars if all of our political leaders were as sensible and as persuasive as Professor Krein. His influence continues through his students, and not just the ones he taught in an official sense. To have had the chance to talk mathematics and to interact with Selim Krein was to become his student in a certain sense.

**С.Г. Крейн**

**Из истории Воронежской математики**

## Теория уравнений в частных, производных в Воронеже

Настоящая статья не претендует на обзор результатов, полученных в Воронеже в 50-60-е гг. по теории уравнений в частных производных. Ее также нельзя рассматривать как работу по истории математики.

Статья скорее носит характер мемуаров — автор пытается рассказать, как возникала та или иная тематика, кто и как включался в ее выполнение, какой характер носила творческая обстановка. В журнале «Успехи математических наук» в 1964 г. была опубликована статья «О математической жизни в Воронеже» четырех авторов: М.А.Красносельского, С.Г.Крейна, Я.Б.Рутицкого, В.И.Соболева [1]. Автор предполагает рассказать обо всех работах по теории уравнений в частных производных, выполненных за период 1954-1964 гг. После этого коснемся, в основном, тех результатов, в получении которых автор участвовал как исполнитель или как руководитель. В связи с этим статья носит несколько субъективный характер. Другой автор, вероятно, делал бы акценты в других местах и излагал бы многое с иной точки зрения.

К статье прилагается список литературы, в который включены лишь обзорные доклады на съездах и конференциях, обзорные статьи в журналах и монографии. Ознакомление с этой литературой может позволить читателю избавиться от чувства субъективизма, о котором говорилось выше.

## Предыстория

Когда меня спрашивают, что это за наука - функциональный анализ, я отвечаю, что это не наука, а мировоззрение. К моменту моего приезда, в 1954 году, в Воронеже это мировоззрение усилиями М.А.Красносельского и В.И.Соболева уже пустило глубокие корни. Поэтому мне было легко включиться в работу математического коллектива. Обсуждая с Марком Александровичем Красносельским перспективы, мы пришли к решению начать совместную работу, по теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Два раза в неделю я приезжал к нему домой. Мы разбирали книгу Сансоне и пытались

перенести изложенные в ней факты на случай дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с ограниченными операторами. Нам удалось получить теоремы существования, единственности, неограниченной продолжимости решений,

обоснование принципа усреднения.



Некоторые теоремы были новыми даже для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. К разработке этой теории вскоре была привлечена большая группа учеников Марка Александровича Взаимодействие функционального анализа с теорией уравнений в частных производных, как, впрочем, и с другой, более конкретной систематической дисциплиной, может идти по таким путям:

результаты, полученные в процессе внутреннего развития функционального анализа, получают приложения в

конкретной дисциплине;

- задачу, возникшую, например, в математической физике, удастся

сформулировать в терминах функционального анализа и применить к ее решению известные, или близкие к известным результаты;

- переформулированная задача упирается в еще не разработанные разделы функционального анализа и становится стимулом для их разработки. При этом разработка новых вопросов иногда уходит так далеко, что, подобно Ивану, не помнящему родства, не возвращается к искомой задаче.

Конечно, эти различные пути часто переплетаются.

## *Гидродинамический стимул*

В 1953 г. мною была опубликована в ДАН статья, в которой, по-видимому, впервые, был проанализирован с точки зрения функционального анализа ряд основных операторов векторного анализа и гидродинамики вязкой жидкости, предложен метод проектирования исследования уравнений Навье-Стокса. применена тогда только недавно возникшая теорема М.Келдыша о полноте нормальных колебаний. При выполнении этой работы я пошел по второму пути. Когда эти же соображения мы попытались применить к нестационарной задаче о движении вязкой жидкости, которая существенно нелинейна, то известных нам средств функционального анализа явно не хватало. А именно, требовалось развить теорию дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторами. Для меня было неожиданным открытием то, что в теории полугрупп неограниченных линейных

операторов фактически изучается теория простейших дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (линейные с постоянными коэффициентами). Таким образом, задача гидродинамики как стимул плюс наш с Марком Александровичем опыт по дифференциальным уравнениям с ограниченными операторами, плюс освоение теории полугрупп — все это дало возможность нам с М.А.Красносельским и П.Е.Соболевским, начиная с 1956 года, выполнить ряд работ по теории дифференциальных уравнений с неограниченными операторами. Эта тематика на многие годы стала одной из ведущих для воронежских математиков.

## Семинар в ВЛТИ

В те годы я работал в Воронежском лесотехническом институте (ВЛТИ). Всех наиболее сильных математиков - выпускников ВГУ брал к себе в аспирантуру Марк Александрович. Поэтому мне пришлось привлекать молодежь, являющуюся необходимой «живительной средой» для ученого, со стороны. Так, в организованном мной при ВЛТИ семинаре участвовали: два бывших студента Киевского госуниверситета, не имевших возможности поступить там в аспирантуру (О. М. Козлов и П.Е.Соболевский): приехавший в 1956 г. из Челябинска кандидат наук И.А.Киприянов; выпускник ВГУ, механик, отработавший по назначению В.П.Глушко, поступивший в 1956г. на полставки ассистента ко мне на кафедру, хотя имел более выгодные предложения из других вузов: выпускник ВГУ. механик-экспериментатор С.С.Литвинов. Этот семинар по отношению к ВГУ носил характер «Запорожской Сечи». Правда, на многих заседаниях присутствовал и активно в них участвовал Марк Александрович.

Сохранился интересный документ того времени - «Тезисы докладов на научной конференции ВЛТИ по итогам исследовательских работ за 1957г.» Сборник печатался в типографии, но имевшей математических символов, поэтому их приходилось описывать словами. А вот список докладов: «Дробная производная и теорема вложения» (И.А. Киприянов). «О дробных степенях дифференциальных операторов» (С.Г.Крейн. В.П.Глушко), «О некоторых граничных задачах для линеаризованных уравнений гидродинамики» (С.С.Литвинов). «О связи между нормами решений задач Неймана и Дирихле» (О.М.Козлов). «О некоторых свойствах операторов типа потенциала» (В.П.Глушко). Замечу, что первый доклад П.Е.Соболевского о суммируемых полугруппах операторов, сделанный им на семинаре, был опубликован в аналогичном сборнике в СХИ. Все эти доклады уже относились к теории уравнений

в частных производных, позднее они были опубликованы в центральной печати и получили развитие, о котором будет сказано ниже.

## Расширенное заседание семинара по функциональному анализу

Без преувеличения можно сказать, что оно стало выдающимся событием в математической жизни Воронежа в марте 1957 г [2]. На заседание были приглашены десять иногородних математиков: Ю.М.Березанский (Киев), М.И.Вишик (Москва), И.И.Ворович (Ростов-на-Дону), А.Г.Костюченко (Москва), А.И.Кошелев, О.А. Ладыженская (Ленинград), А.Д.Мышкис (Харьков) . О.А.Олеиник и А.Я.Повзнер (Москва), Л.Д.Фаддеев (Ленинград) Самым опытным участником был А.Я.Повзнер, самым молодым - Л.Д.Фаддеев ученик О.А.Ладыженской.

Заседания проходили в течение шести дней по программе, выработанной после того, как все съехались. Регламентом докладчики не были стеснены. Практически вечерние доклады длились по полтора часа, продолжительность утренних колебалась от 5-10 минут до двух часов. Все заседания проходили оживленно и в весьма непринужденной обстановке. Особенно это относится к утренним заседаниям, которые, в основном, носили дискуссионный характер и на которых многие участники выступали по нескольку раз.

В вечерних заседаниях участвовали почти все математики и многие механики Воронежа. Утренние заседания проходили при небольшом числе слушателей. От Воронежа с вечерними докладами выступали: М.А.Красносельский, С.Г.Крейн. В.И.Соболев -с обзорами работ молодых воронежских математиков по функциональному анализу и его приложениям (18 марта): они же рассказали о своих работах по применению теории полугрупп к решению линейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве.

В широком плане обсуждались проблемы, связанные с уравнением Навье-Стокса. по которым основной доклад был сделан О.А.Ладыженской. Вопросы о существовании и свойствах разрывных решений нелинейных модельных уравнений газовой динамики, решенные О.А.Олеиник с учениками, освещались в ее содержательном докладе. Сильное впечатление произвел на нас доклад М.И.Вишика о его совместных с Л.А.Люстерником работах по теории пограничного слоя для уравнений в частных производных. Об этих проблемах в Воронеже раньше ничего не знали.

Ряд докладов и выступлений был посвящен спектральной теории дифференциальных операторов в частных производных и, в частности, получению аналогов различных свойств преобразования

Фурье для разложений по собственным функциям, возможно обобщенным, таких операторов (Ю.М.Березанский, А.Г.Костюченко, Л.Д.Фаддеев). Слушатели с большим интересом восприняли доклад И.И.Воровича по нелинейной теории оболочек, в котором было продемонстрировано глубокое взаимное переплетение методов функционального анализа и интуитивных механических соображений. Казалось, нет такого факта функционального анализа, которому И.И.Ворович не мог бы придать механический смысл.

А.И.Кошелев рассказал свою известную теорему о коэрцитивной разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических систем произвольного порядка в  $L$ -нормах.

П.Е.Соболевский ввел понятие операторов, образующих острый угол, которое весьма полезно для сравнения сложных операторов с более простыми: А.Я.Повзнер сделал доклад о методе получения решений различных нестационарных линейных уравнений предельным переходом с помощью "ступенчатой" аппроксимации входящих в уравнение операторов.

Новаторское впечатление произвел доклад А.Д.Мышкиса по теории особых точек так называемых «бушующих» динамических систем.



Следует еще рассказать, что иногородние участники семинара жили в общежитии Воронежского лесотехнического института, которое только что было введено в строй, и студентам его еще нельзя было заселять. Последние дни марта выдались очень холодными, поэтому только неограниченные возможности

П.Е.Соболевский, С.Г.Крейн использования матрацев и научный энтузиазм спасали жильцов от холода и сырости. Но несмотря на трудности у всех участников этого семинара остались самые светлые воспоминания о той атмосфере дружелюбия, взаимной доброжелательности и раскованности, которая установилась на заседаниях. Достаточно сказать, что с большинством участников семинара воронежцы до сих пор поддерживают дружеские отношения.

А для математиков Воронежа семинар был чрезвычайно полезен тем, что показал большую широту и разнообразие проблем теории уравнений в частных производных и ее приложений, а также недостаточное еще развитие методов функционального анализа для решения этих проблем.

Отметим, что участники семинара решили встретиться снова в Харькове. И встреча состоялась, однако в ней приняли участие уже 35



человек, доклады были жестко регламентированы, все участники размещались в гостиницах. То есть это была уже обычная конференция. Романтика исчезла.

## Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах

Итак, в первой работе М.А.Красносельского, С.Г.Крейна и П.Е.Соболевского (ДАН, 1956г.) рассматривалась задача Коши для уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad (1)$$

где  $x(t)$  - искомая функция со значением в банаховом пространстве  $E$ ,  $A(t)$  и  $f(t, x)$  - операторы, действующие в  $E$ . причем  $A(t)$  при каждом  $t$  - неограниченный замкнутый линейный оператор.

Используя теорию полугрупп, результаты Филлипса. Като относительно линейной части уравнений, уточняя и обобщая их, мы получили некоторые теоремы существования решений задачи Коши, локальные во времени. В этих теоремах предполагалось, что нелинейный член  $f(t, x)$  обладает определенной гладкостью и заведомо непрерывен. Однако, уже простейший нелинейный оператор возведения функции в квадрат не является непрерывным в пространстве  $L_p$ , хотя он непрерывен в  $C$ . Для ослабления требований на нелинейность мы перешли к рассмотрению уравнения (1) в гильбертовом пространстве с положительно определенным самосопряженным оператором  $A(t)$ . Для таких операторов определены функции от них и, в частности, дробные степени  $A^\alpha(t)$ . Тогда в уравнении (1) делается формальная замена

$x = A^{-\alpha} y$ , которая приводит к уравнению:

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \frac{dA^{-\alpha}(t)}{dt} y + f(t, A^\alpha y) \quad (2)$$

Может, например, случиться, что оператор  $A^{-\alpha}$ , который, как правило, улучшающий, переводит  $L_p$  в  $C$ . Оператор  $f(t, x)$  непрерывен в  $C$ , а оператор  $A^{-\alpha}$  возвращает  $f(t, A^{-\alpha} y)$  снова в  $L_2$ , (эта идея, в основном, принадлежала Марку Александровичу).

Это соображение позволило рассмотреть уже большой класс нелинейностей, не являющихся непрерывными в исходном

пространстве. При исследовании второго члена справа использовались наши с Ю.Л.Далецким (Киев) результаты о дифференцировании по параметру  $t$  функций от самосопряженных операторов. Рассмотренный метод мы называли методом дробных степеней операторов и рассказывали о нем в совместном докладе на совещании в Харькове.

Примерно в этом же плане была построена часть нашего с М.А.Красносельским доклада на III Всесоюзном математическом съезде, который назывался «О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве» [3]. Основным примером применения общих теорем являлось уравнение теплопроводности с нелинейностью, где оператором  $A(t)$  был оператор Лапласа при нулевых граничных условиях. Как раз в это время В.А. Ильин (Москва) нашел в явном виде ядра интегральных операторов, являющихся отрицательными дробными степенями оператора Лапласа.

Мы с П.Е.Соболевским обобщили то, что делалось для уравнения с положительно определенным оператором  $A$ , на случай оператора  $A+B(t)$ , где  $B(t)$  подчинен дробной степени оператора  $A$ . Такой оператор мы называли абстрактным эллиптическим. В дифференциальных уравнениях это означало, что к главной линейной части можно добавлять члены с младшими производными, не изменяя существенных свойств уравнения. Здесь же было показано, что определение того, что оператор  $B$  подчинен дробной степени  $A$  эквивалентно некоторому неравенству, в котором участвуют только нормы  $A$  и  $B$ .

Мы с В.П.Глушко заметили, что в методе дробных степеней не нужно знать вид отрицательных дробных степеней оператора, а достаточно знать, в каких пространствах действуют эти операторы. Для широкого класса самосопряженных эллиптических краевых задач произвольного четного порядка (для которых в то время были получены неравенства коэрцитивности) мы указали, в какое пространство из пространства  $L_2$ , действуют дробные отрицательные степени соответствующих операторов, их композиции с операторами дифференцирования и операторами умножения на сингулярные коэффициенты. Доказательства основывались на уточнении роли неравенств, о которых говорилось выше, и на получении этих неравенств. Для этого пришлось обобщить неравенства, которые назывались неравенствами Эрлинга-Ниренберга, с помощью новых теорем об операторах типа потенциала, полученных В.П.Глушко. При этом нам пришлось исследовать геометрические свойства областей, звездных относительно шара. Упомянутые неравенства в  $L_2$ , с весом и свойства звездных областей с полными доказательствами были позднее опубликованы в сибирском математическом журнале (в 1960 г., а через несколько лет статья была переведена в США)

Попутно замечу, что В.П. Глушко дал положительный ответ на вопрос С.Л.Соболева о том, является ли область со свойством конуса объединением конечного числа областей, звездных относительно шара.

К сожалению, все наши ухищрения не удовлетворяли нас, так как «...и локальные (*not*) теоремы существования решений в гильбертовом пространстве в применении к нелинейным параболическим уравнениям давали теоремы существования решений граничных задач с жесткими условиями на рост нелинейности по  $x$ , что с точки зрения классической теории казалось неестественным. Сейчас стала ясна связь этих ограничений с тем, что начальные данные и, соответственно, все решения рассматривались в  $L_2$ . Возможность рассмотрения нелинейных параболических уравнений путем сведения их к операторным уравнениям в пространствах  $L_p$  со сколь угодно большим  $p$  позволила получить ряд локальных теорем без всяких ограничений на рост нелинейности». Здесь приведена цитата из нашего с М.А.Красносельским доклада на Всесоюзном математическом съезде [4].

Получение последних результатов потребовало преодоления целого ряда трудностей. Во-первых, требовалось построение и изучение свойств дробных степеней операторов в банаховом пространстве. Подходящим для этого оказался класс производящих операторов аналитических полугрупп, на который обратил наше внимание М.З.Соломяк, и более широкий класс позитивных (по терминологии М.А.Красносельского и П.Е.Соболевского) операторов. Почти одновременно, хотя и независимо друг от друга, дробные степени таких операторов были рассмотрены индийским математиком Балакришнаном и М.А.Красносельским с П.Е.Соболевским. В дальнейшем глубокие результаты были получены Като.

Во-вторых, требовалось изучить линейные уравнения с переменным оператором указанного типа. Это было сделано П.Е.Соболевским и, независимо от него, японским математиком Танабе. Для доказательств был применен аналог метода Лови (метод «замороженных коэффициентов»). Полученная теорема в литературе называется теоремой Соболевского-Танабе и под таким названием включена в учебник Иосиды по функциональному анализу [5]. Таким образом, все основные результаты, полученные ранее для дифференциального уравнения с положительно определенным оператором (или с оппиптическим оператором) в гильбертовом пространстве, удалось перенести на уравнения в банаховом пространстве с производящим оператором аналитической полугруппы. Описанные результаты легли в основу докторской диссертации П.Е.Соболевского, которую он защитил в 1962 г. (Это

был первый доктор наук из «нашего леса»).

Еще более общий класс уравнений был рассмотрен бакинским математиком Я.Д.Мамедовым, одно время проживавшим в Воронеже, и П.Е.Соболевским. Дальнейшее исследование дробных степеней позитивных операторов (в частности, позитивных эллиптических операторов) проводилось в работах М.А.Красносельского с П.П.Забрейко, Е.И.Пустыльником, а также П.Е.Соболевским. Полученные результаты изложены в книге [6].

## Ну, а что же с гидродинамикой?

Это было летом, летом, это было знойным летом», когда мы с П.Е.Соболевским, покрытые минимумом одежд, «долбили» локальную теорему существования решения задачи Коши для нестационарного уравнения гидродинамики вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса). После длительных усилий мы ее доказали и на последнем листе рукописи написали: «Ура! Принцип Шаудера». Этот результат был анонсирован в моем докладе на конференции по функциональному анализу «Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложения в гидродинамике» [7], а также на съезде механиков. Однако эта работа не была опубликована. Дело в том, что в ней мы использовали классические результаты Одквиста об оценках функции Грина для оператора Навье-Стокса. Когда я дал О.А.Ладыженской прочитать весь текст работы (включая «Ура!»), она сказала, что у них на семинаре изучались работы Одквиста. и была обнаружена их ошибочность. Узнав об этом, мы не решились на публикацию. Хотя через некоторое время работы Одквиста были реабилитированы, но уже появились другие локальные теоремы существования. Отмечу, что нелокальная теорема существования сильных решений задачи Коши для трехмерных уравнений Навье-Стокса при любых числах Рейнольдса до сих пор еще не доказана.

## Еще раз о семинаре в ВЛТИ

Проследим результаты деятельности участников семинара до 1964г., когда была опубликована статья М.А.Красносельского, С.Г.Крейна,

Я.Б.Рутицкого и В.И.Соболева [1], в которой был параграф №3 - «Уравнения математической физики». О П.Е.Соболевском уже было сказано, что он вырос в крупного

специалиста по теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и их приложений, в частности, к гидродинамике.

С.С.Литвинов изучил сходимость рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям (введенным И.М.Гепьфандом и З.Я.Шапиро) и применил их к решению некоторых задач гидродинамики. Защитив диссертацию в 1962г. он перешел к другой тематике. О.М.Козлов изучил простейший случай уравнений, в которых оператор  $A(t)$  при каждом  $t$  является самосопряженным расширением одного и того же симметрического оператора. В дифференциальных уравнениях это соответствует тому, что коэффициенты уравнения постоянные, а коэффициенты граничных условий зависят от  $t$ . Им было обнаружено, что при некоторых условиях удастся установить гладкость оператора

$A^\alpha(t)$  при  $A^\alpha < \frac{1}{2}$  и постоянство его области определения.

Далее О.М.Козлов методом теории расширения симметрических операторов в гильбертовом пространстве исследовал краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами граничных условий, а также с некоторыми нелинейными граничными условиями. Диссертацию он защитил в 1961 г. после чего возвратился в Киев, где и работает над проблемами прикладной математики.

Весьма целеустремленно работал И.А.Киприянов. В течение ряда лет он развивает теорию пространств функций, имеющих производные дробного порядка в том или ином смысле. Для этих пространств им были получены теоремы вложения, мультипликативные неравенства и др. Затем, по моему совету, он применил теорию преобразования Фурье Бесселя к построению новых классов пространств, для которых получил теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах, построил операторы дробного дифференцирования связанные с оператором Бесселя. Полученные теоремы вложения он применил для исследования вариационным методом краевых задач для некоторых выходящих эллиптических уравнений, установил априорные оценки решений уравнений, содержащих операторы Бесселя. Этот материал вошел в докторскую диссертацию, которую он защитил в 1964 г.

Большую самостоятельность, я бы даже сказал, смелость, проявил В.П.Глушко. Он вторгся в область, которой в Воронеже до него никто не занимался. Тематика эта началась с работы М.В.Келдыша, развивалась С.Г.Михлиным и М.И.Вишиком. В.П.Глушко получил новые теоремы об интегральных операторах, действующих в

пространствах  $L_p$  с весом, и, в частности об операторах типа потенциала. На базе этих теорем устанавливаются новые теоремы вложения и мультипликативные неравенства. Далее рассматриваются вырождающиеся эллиптические уравнения и схема, разработанная М.И.Вишиком для уравнений второго порядка, обобщается на специальный вид эллиптических уравнений произвольного четного порядка, вырождающихся или имеющих особенности на многообразии любой размерности, меньшей, чем размерность области (до этого вырождение допускалось лишь по границе области или в конечном числе точек двумерной области). Детально был исследован вопрос о снятии или сохранении граничных условий. Перечисленные здесь и выше результаты В.П.Глушко легли в основу его кандидатской диссертации, которую он защитил в 1961 г.

В дальнейшем В.П.Глушко построил теорию общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка, изучив предварительно поведение решений вырождающегося обыкновенного уравнения второго порядка в банаховом пространстве, и в 1970г. защитил докторскую диссертацию

В 1960 г. на кафедру ВЛТИ прицеп И.И.Шмулев. Он исследовал методом Лере Шаудера вопрос о разрешимости нелинейной системы эллиптических уравнений второго порядка, возникающей в связи с задачей о периодических решениях нелинейных параболических уравнений. По этим вопросам он защитил диссертацию в 1962 г. Аналогичными задачами, но с применением более совершенной техники он продолжает заниматься и сейчас.

В настоящее время в университете работают В.П.Глушко (с 1963г.), И.А.Киприянов (с 1967г.) и возглавляют кафедры, на которых ведутся интенсивные исследования по теории уравнений в частных производных.

## Некорректные задачи

Задача Коши для дифференциальных Уравнений называется корректной, если решение ее существует и непрерывно зависит от начальных данных. Некорректные задачи встречаются в математической физике. Однако такие задачи могут стать корректными в некотором, априори заданном классе решений (ограниченных, положительных др.).

И.М.Гельфанд в докладе на Всесоюзном совещании по функциональному анализу в 1966г. обратил внимание на этот класс условий корректных задач для уравнений в частных производных. Меня этот вопрос, как говорится, «зацепил», и мне захотелось что-

нибудь сделать для абстрактных дифференциальных уравнений. Я рассмотрел уравнение  $u + A(t)u = 0$ . Если  $A(t)$  -положительно определенный, то задача Коши  $u(0) = u_0$  при определенных условиях на гладкость оператора корректна в гильбертовом пространстве. Я рассмотрел случай просто самосопряженного оператора  $A(t)$ , у которого производная по  $t$  ограниченный сверху оператор. Оказалось, что для всякого решения на  $[0, T]$  справедливо неравенство вида:

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|^{1-\alpha(t)} \|u(t)\|^{\alpha(t)}$$

где  $0 < \alpha(t) < 1$ . Отсюда сразу видно, что в классе решений, априори ограниченных фиксированной константой, задача Коши корректна (при малой норме  $u_0$  решение также мало по норме). В качестве приложений получались теоремы о корректности в норме  $L_p$ . ограниченных решений для различных типов уравнений в частных производных. К дальнейшей разработке этих вопросов я привлек О.И.Прозоровскую. Мы рассмотрели уравнение  $U = Au$  с производящим оператором аналитической полугруппы в банаховом пространстве. Задача Коши для него корректна. Пользуясь принципом Неванлинна для аналитической функции, мы смогли получить, неравенство типа (3), где  $\alpha(t)$

является гармонической мерой отрезка  $[u, \infty)$  относительно угла аналитичности полугруппы. Из этого неравенства вытекает, что в классе решений, априори ограниченных константой ( $\|u\| \leq M$ ) корректно решение обратной задачи Коши  $u(t) = u$ , (см. 10)

## **Интерполяция линейных операторов**

Просматривая как-то книги М.А.Красносельского. я наткнулся на том журнала «Am.J.Math», в котором прочел статью Кальдерона И Зигмунда доказательстве теоремы М.Рисса. В простейшей формулировке она говорит ( том. что. если линейный оператор ограничено действует в пространствах  $L_{p_0}$  и  $L_{p_1}$  ( $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ ), то он ограничено действует и во всех промежуточных пространствах  $L_p$  с  $p \in [p_0, p_1]$

На меня эта теорема и ее доказательство с помощью теоремы о трех прямых из теории аналитических функций произвели большое впечатление. Возникло желание найти другие семейства пространств, обладающих аналогичными свойствами. На этом пути было введено понятие аналитической шкалы пространств, для которой был справедлив аналог теоремы М.Рисса. Выпи получены интерполяционные теоремы для новых семейств пространств: уточнения теорем вложения, полученных ранее М.А.Красносельским и Е.И.Пустыльником. В.П.Глушко и мною; теоремы о

дробных степенях положительно определенного самосопряженного оператора и, в частности, известное неравенство Гайнца с уточнением Като и др.

Интересно, что близкая конструкция независимо и почти одновременно была предложена Кальдероном и Лионсом, что является еще одним подтверждением существования объективных закономерностей развития науки. С этого момента интерполяция линейных операторов и теория шкал стали полем деятельности большой группы молодых (в то время) и сильных воронежских математиков. Но об этой деятельности следует писать отдельную статью. Укажу только, что соответствующие результаты излагались мною на IV Всесоюзном математическом съезде [8], а также в совместном с Ю.И.Петуниным (аспирантом из Тамбова) докладе на международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г.

Рассмотрение интерполяционных теорем привело нас к пересмотру наших позиций в Функциональном анализе. Прочитую отрывок из введения к нашей с Ю.И. Петуниным обзорной статье по теории шкал в журнале «Успехи математических наук»: «Непрерывно расширяющийся круг приложений функционального анализа приводит к систематическому пересмотру его методологических положений. Одно из них утверждает, что первичным и основным понятием функционального анализа является понятие пространства (нормированного, метрического, топологического и др.). Для исследования задачи нужно выбрать пространство и в нем изучать соответствующие функционалы, операторы и т.п.

Однако при рассмотрении сложных задач обычно приходится вводить множество различных пространств.

Многочисленные примеры таких задач дает теория уравнений в частных производных. Для изучения гладкости решений вводят одни серии пространств, для изучения поведения вблизи границы области или вблизи каких-либо особых точек - другие: изучение значений решений на многообразиях меньшей размерности проводится в новых пространствах.

Мы уж не говорим о том, что имеются еще пространства коэффициентов, пространства граничных значений, начальных значений и т.п. Таким образом, введение пространства, в котором исследуется задача, зачастую связано с теми субъективными цепями, которые ставит перед собой исследователь. Объективными данными являются, по-видимому, лишь те операторы, которые входят в уравнение задачи.

В силу изложенного, нам кажется, что понятие оператора является первичным и основным в функциональном анализе. Операторы обычно имеют конкретное аналитическое задание с помощью дифференциального выражения, интегрального оператора, суммы ряда и т.п. Аналогично тому, как функция имеет свою полную область определения, так и оператор имеет полный набор пространств, в которых его можно рассматривать. Весь этот набор является мало обозримым. Чаще всего выделяют семейства пар пространств, зависящих от одного или нескольких параметров, в которых



действует данный оператор. Одним из важных методов выделения однопараметрических пар пространств являются интерполяционные теоремы» [9]

## Теоремы о гомеоморфизмах

Во время одной из конференций меня поселили в номере вместе с Ю.М.Березанским, ученым из Киева. Он поделился со мной тем, что они с Я.А.Ройтбергом из Чернигова исследуют, как ведут себя решения эллиптических уравнений при негладких правых частях, например, в правой части  $\delta$  - функция. Первые результаты здесь были получены Гордингом. В беседе мы выяснили, что этот вопрос может быть решен с помощью интерполяции линейных операторов. В простейшем случае в условиях единственности самосопряженный эллиптический оператор порядка  $2m$  устанавливает гомеоморфизм между пространством Соболева  $W_2^{2m}$  и  $L_2$ , Тогда сопряженный к нему оператор, который совпадает с ним, осуществляет гомеоморфизм между сопряженными пространствами  $L_2$ , и  $W_2^{-2m}$ . Так как гильбертовы шкалы пространств обладают интерполяционным свойством, то из предыдущего следует гомеоморфизм между  $W_2^{2m}$  и  $W_2^{-(1-\alpha)2m}$ . Замечу, что пространства с отрицательными индексами уже состоят из обобщенных функций. Это отправное соображение позволило Ю.М.Березанскому и Я.А.Ройтбергу получить большую серию теорем о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами в различных условиях (большая часть которых получилась уже без интерполяции).

## Советско-американский симпозиум

В 1963 г. в Новосибирске проходил симпозиум, на который приехали наиболее крупные специалисты по теории уравнений в частных производных из США и СССР. Воронежская математика была представлена двумя докладами «О некоторых нелинейных задачах для уравнений в частных производных (М.А.Красносельский и П.Е.Соболевский)» и «Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границ решений эллиптических уравнений» (Ю.М.Березанский, С.Г.Крейн, Я.А.Ройтберг).

## Еще раз о гидродинамике

В течение ряда лет я все не решался подступиться к задаче гидродинамики вязкой жидкости при наличии свободной поверхности (жидкость в сосуде). В 1961 г. ко мне в аспирантуру поступил Н.К.Аскеров, приехавший из Баку. Он хотел заниматься прикладными задачами, и я предложил исследовать указанную выше задачу. Трудность ее решения состояла в том, что на

свободное поверхности жидкости должно выполняться достаточно сложное граничное условие. Н.К.Аскеров рассмотрел модельную задачу, где оператор Навье-Стокса был заменен на оператор Лапласа, а граничное условие значительно упрощено; На этой модельной задаче проявились некоторые особенности: ее несамосопряженность, сведение ее к граничной задаче со спектральным параметром как в уравнении, так и в граничном условии. Однако гидродинамическую задачу до отъезда Н.К.Аскерова в Баку нам исследовать не удалось.

Приближался Всесоюзный съезд механиков. В связи с этим я снова занялся описанной выше задачей. Появились некоторые соображения, и за два дня до окончания срока подачи докладов на съезд я послал телеграмму с просьбой включить мой доклад «О колебаниях вязкой жидкости в сосуде» в программу съезда. Благодаря близкому знакомству с Н.Н.Моисеевым, который был членом оргкомитета, доклад был включен в программу без представления тезисов. После этого я уже был вынужден вплотную заняться задачей и на съезде докладывал ее достаточно полное решение- Задача о колебаниях сводилась к исследованию квадратичного операторного пучка. В то время многие авторы усиленно занимались операторными пучками, но тот который появился в задаче гидродинамики, не был исследован. Важным качественным результатом было то, что возможно лишь конечное число колебательных движений, а остальные затухающие (подсчитать бы конечное число движений в озере Байкал!) Развернутое изложение полученных результатов было опубликовано в наших» Н.К.Аскеровым и Г.И.Лаптевым статьях.

## О других работах М.А.Красносельского

Новый метод исследования сходимости рядов Фурье функциям дифференциальных эллиптических операторов основанный на использовании дробных степеней операторов и применимый к операторам любого порядка, М.А.Красносельский предложил и разработал совместно с Е.И.Пустыпником. Тот же метод применим для обоснования метода Фурье решения эллиптических, гиперболических и параболических уравнений.

Ряд теорем существования решения нелинейных уравнений производных установлен М.А.Красносельским и М.П.Семеновым. Совместно с П.Е. Собалевским была доказана положительность функции Грина первой краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка.

М.А.Красносельский, А. И. Перов и П.Е.Соболевский показали что известная для систем обыкновенных уравнений теорема Кнезера-Хукухары о связности множества решений при естественных предположениях переносится на решения задачи Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

М.А.Красносельский и И.Я.Бакельман (Ленинград) исследовали уравнения с дифференциальными операторами Монжа-Ампера и

дополнительными сильными нелинейностями. Пользуясь методами нелинейного функционального анализа, они нашли новые условия разрешимости краевых задач для таких уравнений и указали число решений таких задач.

## Приезд С.Д.Эйдельмана

В 1963 г. в Воронеж из Черновиц переехал С.Д.Эйдельман, известный специалист по теории параболических уравнений, и стал заведовать кафедрой в политехническом институте. В 1964г. вышла в свет его монография «Параболические системы» [11], подводившая итог многолетним исследованиям. Вместе с Эйдельманом на кафедру ВПИ приехал ряд его учеников из Черновицкого университета. С другими учениками он продолжал работать на расстоянии. Вместе с С.Д.Ивасишен (Черновцы) он исследовал матрицы Грина параболических граничных задач, как с гладкими, так и с разрывными коэффициентами. Полученные результаты докладывались на международном конгрессе в Москве в 1966г. С тем же соавтором было проведено исследование класса параболических систем, названных Эйдельманом «2В»-параболическими. Совместно с М.И.Матийчуком (Черновцы) изучались фундаментальные решения задачи Коши для параболических по Петровскому систему коэффициентами, обладающими минимальной падкостью. С.Д.Эйдельман и

В.Д.Репников (ВПИ) установили необходимые и достаточные условия поточечной стабилизации решений задачи Коши в классах ограниченных функции для модельный параболических уравнений. В 1965г. Репников защитил диссертацию. Эта тематика успешно рассматривается им и до сегодняшнего дня.

Вместе с Н.Д.Житарашу (ВПИ) Эйдельман получил ряд глубоких результатов о нормальной разрешимости ряда задач сопряжений. Житарашу защитил диссертацию в 1967 г. Ф.У.Порпер (ВПИ) изучал вопросы качественной теории параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Защитил диссертацию в 1965 г. Исследования по этой тематике продолжаются. Ф.Г.Селезнева (ВПИ) изучала начальную задачу нелинейных систем с частными производными и постоянными коэффициентами, а также граничные задачи для корректных по Петровскому систем. Защитила диссертацию в 1968 г. С.Д.Шмулевич (ВПИ) получил ряд результатов по спектральной теории эллиптических уравнений с растущими коэффициентами.

Следует отметить, что С.Д.Эйдельман активно участвовал в работе семи пара по уравнениям в частных производных. Он прочитал интересный

спейскурс по современной теории эллиптических задач. Главная его заслуга перед коллективом воронежских математиков была в том, что он неоднократно нам показывал силу классических методов в теории уравнений в частных производных. Его отъезд в 1968 г. из Воронежа по семейным обстоятельствам прервал эту весьма полезную деятельность.

### *Литература*

- 1 Красносельский М.А., Крейн С.Г., Рутцкий Я.Б., Соболев В.И. О математической Жизни в Воронеже //Успехи математических наук. -1964. - Т. XIX - Вып.3. - С 225-245
- 2 Красносельский М.А., Крейн С.Г., Мышкис А.Д. Расширенное Заседание Воронежского семинара по функциональному анализу в марте 1957г.// Успехи математических наук. - 1957.-Т XII -Вып.4. -С.241-250.
3. Красносельский М. А., Крейн С.Г. О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Труды III Всесоюзного математического съезда. - Т III – М. Издание АН СССР 1958.-С.73-80.
- 4 Красносельский М.А., Крейн С.Г. Об операторных уравнениях в функциональных пространствах // Труды IV Всесоюзного математического съезда. - М. 1964. - Т II - С 292-299.
- 5.Иосида К. Функциональный анализ. М. Мир, 1967.
- 6.Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Г. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций - М. Наука, 1966 -С.499.
7. Крейн С.Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложения в гидродинамике // Успехи математических наук. -1957 - Т XII - Вып.1 С.208-211
- 8.Крейн С.Г. Интерполяционные теоремы в теории операторов и теоремы вложения // Труды IV Всесоюзного математического съезда. - М.1964. - Т.П. - С.504-510
- 9.Крейн С.Г., Петунин Ю.И. Шкалы банаховых пространств // Успехи математических наук,- 1966. -Т.XXI –Вып. 1.-С.89-168.
- 10.Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве М. Наука, 1967.
- 11.Эйдельман С.Д. Параболические системы - М: Наука, 1964,-443с.
12. Воспоминания о Крейна—Воронеж: ВорГУ, 2002.—104 с.
13. Материалы к истории математического факультета ВГУ. Сборник Воронеж: Воронежский университет, 1998. 118 с.: ил.

### ***Воронежская зимняя математическая школа***

#### ***Доклад на открытии 20-й школы***

## Предыстория

В 1966 г. в Москве проходил Международный конгресс математиков. Наряду с яркими впечатлениями от многих докладов, бесед с известными зарубежными математиками (Филлипс. Иосида. Комацу, Маженес, Кальдерон и др.) у меня осталось чувство неудовлетворения. Мне показалось, что у нас имеется по ряду направлений отставание от современного на тот момент уровня. В недавно вышедшей в «Итогах науки» статье В.И. Арнольд цитирует Пуанкаре: «Часто достаточно изобрести слово, и это слово становится творцом». Конечно, под словом Пуанкаре понимал определение. Вот у меня и создалось впечатление, что мы не знали многих новых слов.

Осенью 1966 г. мне рассказал Б.С. Митягин, что в Горьком летом проходила школа по топологии, в которой участвовало 15 сильных молодых математиков. В школе читались лекции и проводились практические занятия. Меня очень захватила идея проведения в Воронеже математической школы.

Нам показалось естественным проводить ее во время зимних каникул в вузах. Мы надеялись еще на то, что зимой легче доставать путевки в дома отдыха и турбазы.

В ноябре проходила университетская партийная конференция. Выступая на ней, как секретарь партийной организации факультета, я просил помочь нам в организации зимней школы. Присутствовавший на конференции секретарь горкома партии поддержал наше предложение и обещал содействие горкома.

На следующее утро мы с моим заместителем С.А. Складневым были в кабинете секретаря горкома. Он позвонил в Облпрофсовет и просил выделить нам путевки в дом отдыха им. Горького. Однако, ему ответили, что все путевки на январь уже розданы в организации. Когда мы пошли в Облпрофсовет, то два молодых человека, имевших отношение к распределению путевок, подтвердили невозможность нашего мероприятия. Несмотря на это, мы Сергеем Анатольевичем решили поговорить с тогдашним председателем Облпрофсовета Василием Аносовичем Фетисовым. Нас отговаривали, говоря, что он человек жесткий и своевольный. В разговоре Фетисов сначала не понял цели, не понял цель нашего мероприятия, считая, что оно связано со средней школой, но когда он

узнал, что там будут учить друг друга ученые-математики, то пришел в неописуемый восторг. Немедленно были вызваны два молодых человека, о которых речь шла выше, им было предложено отобрать путевки в до. им. Горького от других организаций и передать в университет. Таким образом, с благословения Фетисова, в 1967 г. школа родилась.

## **Первая школа**

Дом отдыха стоял па берегу реки Воронеж, а лекции проходили в лесотехническом институте, который расположен на горе. Возвращаясь с лекции, участники спускались с горы на различных точках. Приехало в школу 109 чел из 22 городов Союза, в том числе 53 воронежца. Неожиданным был мороз в 35-36 градусов в первые дни работы школы. От него в первую очередь полегли с простудами южане. Через три дня после открытия школы, в субботу, заболело 14 человек. Я думал, что школу придется закрыть, но с воскресенья все начали поправляться и к концу работы вся школа была в полном здравии.

Следовало решить вопрос о методике проведения школы. Мы считали и считаем сейчас, что в школе, в отличие от конференций, должны читаться циклы лекций, освещающие состояние различных областей математики. Как правило, выбирались области, с которыми были мало знакомы воронежские математики.

В первой школе работал лишь один учебный семинар по топологии. В связи с ним в стенгазете школы была помещена детская песенка:

«Топ-топ ножками, топ-топ ручками -  
Учат топологию дедушки и внучки.  
Топ-топ ножками, топ-топ ручками —  
Знают в топологии только сферу с ручками».

В дальнейших школах уже работало от пяти до восьми семинаров. При чтении лекций в специфической аудитории, где сидят слушатели с различной подготовкой, некоторые из которых являются специалистами по освещаемым вопросам, имелась возможность возникновения дискуссий между лектором и этими специалистами. При этом большая часть аудитории ничего не понимает и отключается от слушания. В связи с этим было принято решение, что вопросы разрешается задавать только одному участнику школы — Е.А.Горину.

В первой школе были прочитаны следующие циклы лекций: топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом - С.И.Апъбер; кольца операторов - Г.И.Кац; многомерные дифференциальные уравнения - А.И.Перов.

## **Вторая школа**

Эту школу я открывал в предынфарктном состоянии и в тот же день у меня случился микроинфаркт. В связи с этим, я могу лишь сказать, что она проходила в том же месте. Среди лекторов были Б.Я.Левин, Ю.И.Любич, В.И.Мацаев, С.В.Фомин.



Возвращение  
школы  
Зимняя  
каньонирование  
2-7/1-1967

### **Третья школа**

В школе приняло участие 170 чел. из 26 городов Союза, в том числе воронежцев 47. Мне кажется, что третья школа была в определенном смысле переломной. Если в первых двух школах лекторами были математики, близко связанные с воронежцами личной дружбой или тематикой работ, то большинство лекторов третьей школы были нам совсем незнакомы.

Здесь хотелось бы в первую очередь отметить две лекции С.П.Новикова на тему «Гладкие многообразия, К-теория. эллиптические операторы», которые для нас были ценными не столько по фактическому материалу, сколько по новому для нас мировоззрению, которое Новиков со страстью пропагандировал. (Эффект второй лекции был несколько снижен предшествующим ей банкетом).

Большой интерес вызвали циклы лекций, прочитанные Б.В.Шабатом С.Г.Гиндикиным, Г.М.Хенкиным и Е.М.Чиркой по теории функций многих комплексных переменных. В этой области у нас никто ничего не знал. Г.И.Эскин прочел лекции по псевдодифференциальным операторам. Был заслушан часовой доклад Г.А.Маргулиса (лауреат Филдсовской премии).

Четвертая школа проходила так же, как и третья, в д.о. им. Дзержинского. В ней участвовало 195 чел. из 22 городов, в том числе 60 воронежцев. Были прочитаны циклы лекций: «Метод орбит в теории групп Ли» - А.А.Кириллов «Аксиоматическая теория поля» Ю.М.Березанский: «Адиабатическая и физическая матрица рассеяния квантовой теории поля» А.С.Шварц; «Бесконечномерные многообразия» - Ю.Л.Далецкий; «Топология банаховых пространств» - Б.С.Митягин. А.С.Дынин.

Была проведена дискуссия по проблеме образования на математических факультетах университетов. В ней участвовали Ю.М.Березанский, Ю.Н.Далецкий, Е.А.Горин, В.А.Ефремович, Б.В.Шабат, В.П. Хавин, Ю.И.Любич, С.Г.Крейн.

### **Совещание в Минвузе РСФСР**

Как-то Минвуз РСФСР собрал 27 профессоров для обсуждения проблемы развития науки в вузах. Я посвятил часть своего выступления работе Воронежской зимней математической школы. В заключение министр Столетов горячо одобрил нашу деятельность. На следующий день я передал ему проект организации 1-й Всероссийской математической школы на базе Воронежского университета. Одним из пунктов было выделение 0,5 ставки старшего лаборанта для работы в школе. Референт мне несколько раз говорил, что проект лежит на столе министра. Но, по-видимому, он потом попал в корзину. Вскоре я понял, что мое импульсивное действие, направленное на поднятие авторитета Воронежского университета, могло



принести вред школе. Действительно, если бы школа была официальным учреждением при Минвузе, то в нее посылали бы, как на ФПК, в обязательном порядке, математиков, не интересующихся тематикой школы. Сила нашей школы в том, что она нигде не числится (правда, сейчас отчет о работе школы передается в Региональный совет). Всякий покупающий путевку уже на правах туриста может участвовать в работе школы. Ниже это будет проиллюстрировано на примере

## **Шестая школа**

Снова угроза нависла над школой. Дом отдыха им. Горького стал санаторием. дом отдыха им. Дзержинского - пансионатом. Кто-то из начальства мне сказал сакраментальную фразу: «Наши путевки предназначены для трудящихся». Мы уже были в отчаянии. Неожиданно две наши девушки Таня Гареева и Надя Лаптева прочитали объявление о том, что турбаза «Коммунальник» приглашает туристов для краткого зимнего отдыха. Ю.Г.Борисович сразу отправился по указанному адресу и довольно быстро договорился о том, что нас принимают на турбазу. Турбаза находилась в живописном месте, но состояла она из двухкомнатных деревянных домиков без фундаментов и без удобств. Как назло, в каждом домике висел термометр. Занятия можно было проводить лишь на веранде и в столовой. Приглашая в школу Б.Я.Левина, я описал ему состояние базы. Он приехал и сказал, что приехал только потому, что я всем стал бы говорить, что Левин испугался.

Одним из лекторов был Ю.И.Манин. Он подошел ко мне и сказал: «Я все понимаю, но - 8 градусов!». Немедленно он был переселен в другой домик, где было 13, и остался доволен.

Оргкомитет закупил электроплитки, которые спасали от холода. Кроме того, Ю.Г.Борисович каждую ночь будил истопника и заставлял его топить (естественно, за дополнительное поощрение).

В школе было 115 участников из 19 городов, включая 43 воронежца. Были прочитаны циклы лекций: «Внутренние гомологии и формальные группы» - В.М.Бухштабер, А.С.Мищенко; «Теория аналитических J-растягивающих матриц» - И.В.Ковалишина и В.П.Потапов; «Алгебраическая геометрия» Ю.И.Манин; «Функции от некоммутирующих операторов и их применение» - В.П.Маслов; «Дифференциальные уравнения и группы Ли» - А.Л.Онищик. Лекцию на тему «Топология алгебраических многообразий» прочитал В.И.Арнольд.

Состоялась дискуссия в связи с сообщением В.П.Маслова и В.В.Грушина о создании в институте электронного машиностроения группы с углубленной математической подготовкой. В частности, В.В.Грушин читает теорию дифференцируемых функций как предельную для теории многочленов. С критикой этого метода выступили В.И.Арнольд,

Ю.И.Любич и другие. Я занял примирительную позицию, считая, что никакой метод преподавания (квалифицированным лектором) не может испортить группу сильных студентов.

Несмотря на бытовые трудности, а, может быть, и благодаря им, у всех участников остались самые теплые воспоминания о шестой школе как о самой «романтической».

### **Седьмая школа**

Здесь я хочу рассказать лишь об одном эпизоде. Председателем оргкомитета был С.А.Скляднев. Встречаясь со мной до начала работы школы, он говорил, что ректор Н.А.Плаксенко разрешил пригласить воронежских профессоров, доцентов, ассистентов. Я делал вид, что не понимаю, почему в этом перечне нет старших преподавателей. А дело было в том, что ректор плохо относился к одному выпускнику ВГУ, который работал старшим преподавателем. Когда раздавали путевки в дом отдыха «Углынец», этому математику отказали. Воронежская молодежь очень этим возмущалась и готовилась к бунту во время открытия школы, что могло привести к ее ликвидации. Выход был найден простой. Я пошел к директору дома отдыха и попросил продать еще одну путевку, что он охотно сделал (план нужно выполнять). Опальный старший преподаватель стал просто отдыхающим и таким образом смог слушать лекции, активно участвовать в работе семинаров.

Надо сказать и об оргкомитете школы. Пока я работал в ВГУ, оргкомитет входили: Галина Григорьевна Трофимова и я. Ректорат ВГУ писал лишь одну бумажку с просьбой выделить определенное количество путевок. После моего ухода между зав. кафедрами начались трения из-за желания руководить школой. Тогда ввели очередность. Состав оргкомитета назначался ректоратом. Каж-

дый из руководителей вносил свой вклад в систему проведения школы. Так В.П.Гпушко и П.Е.Соболевский «открыли» турбазу «Березка», которая стала постоянным местом работы школы. Это позволило увеличить число участников до 260-280 человек. Б.Н.Садовский ввел очень четкую систему подготовки работы школы. По программе мне ближе школы, руководителем которых был Ю.Г.Борисович.

### **О значении школы**

Молодые математики очень легко воспринимают новые идеи и смело начинают их использовать. Мы тоже, по мере сил пытались «задрать штаны бежать за комсомолом». Расскажу только о влиянии школы на моих учеников. Лекции Г.И.Каца повлияли на творчество В.И.Овчинникова и его диссертацию. Прослушав лекции А.И.Перова, мы поняли, что он занимается теорией дифференциальных уравнений на коммутативной группе Ли, и развили эту теорию для некоммутативной группы. По этой тематике

защитили диссертации А.М.Шихватов, Ю.С.Сысоев, А.И.Фурменко, И.З.Песенсон (с ним я познакомился в школе). Лекции по теории функций многих комплексных переменных оказали влияние на М.Г.Зайденберга, П.А.Кучмента, А.А.Панкова (об этом говорит наш совместный обзор в журнале «Успехи математических наук»). В диссертации П.А.Кучмента широко использовались знания, полученные на лекциях Б.С.Митягина и А.С.Дынина. Диссертация Н.И.Яцкина была связана с лекциями А.Л.Онищика. Позднее мы опубликовали небольшую монографию «Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях».

В школе возникали творческие содружества. М.Г.Зайденберг и В.Я.Лин вместе работали над проблемами алгебраической геометрии, В.А.Кондратьев и С.Д.Эйдельман - над положительными решениями эллиптических задач. Под влиянием лекций Р.Л.Волевича были выполнены последние работы Я.А.Ройтберга по теории гиперболических уравнений.

Трудно переоценить значение математических разговоров и дискуссий между участниками школы. Иногда до поздней ночи работали небольшие внеплановые «самодеятельные» семинары.

Характерной чертой воронежской школы является доброжелательность, взаимопомощь, отсутствие споров за приоритеты. В школе нет выборов, нет премий, нет демократии, поэтому работа проходит в спокойной, творческой обстановке.

Не забыли и об отдыхе участников. Одной из его главных форм были, конечно, лыжные прогулки. Хотя находились и другие занятия. Так, В.И.Арнольд «заразил» школьников игрой в нарды, в которую они играли с большим воодушевлением. Традиционно 28 января проводился праздник, посвященный дню рождения неизменного участника всех школ Евгения Алексеевича Горина.

Замечательным явлением в жизни школы были вечерние лекции А.Я.Хелемского по истории различных стран и народов мира. Нас поражали его обширные знания дат, имен исторических деятелей, их произведений и взглядов, взаимоотношений, войн и т.п. Запомнился также доклад А.Т.Фоменко о методике датирования исторических событий, вызвавший бурную дискуссию. Во время одной из школ была организована выставка картин А.Т.Фоменко, а Лаптев рассказывал о своей поездке в Англию. Впрочем, культурных мероприятий было так много, что трудно все перечислить.

Открывая 20-ю школу, хочу выразить уверенность, что Воронежская зимняя математическая школа будет существовать еще многие годы.

1987 г.

.

### ***Организация института математики***

В 1966-67 годах на факультете создалась неустойчивая обстановка. Дело в том, что М.А. Красносельский с группой своих активно работающих учеников перешел на работу в Институт автоматики и телемеханики АН СССР, оставляя жить в Воронеже. Возникла идея о создании при ВГУ научно-исследовательского института с тем, чтобы вернуть эту группу математиков в ВГУ.

Когда меня уговаривали стать деканом, то в качестве одного из условий я поставил оказание ректоратом помощи в организации института. Такая помощь была обещана. Однако, как нужно было начинать это мероприятие, было совершенно неясно. Дело в том, что организация института не значилась ни в каких планах нашего планового хозяйства. Кого-то надо было убедить в необходимости создания института. Здесь нам повезло. В университет приехал заместитель министра Высшего и Среднего специального образования РСФСР Алексей Иванович Полов. Ректор ВГУ проф. В.П.Мелешко вместе с ним зашли ко мне на кафедру. Я показал ему статью академика Колмогорова в газете «Известия», в которой тот очень лестно отозвался о воронежских математиках. На Попова эта статья произвела впечатление. Когда я ему изложил идею о создании института, он ее поддержал. «Приезжай ко мне в понедельник в 9 ч. 30 мин. и мы начнем действовать». В понедельник я был у него, и мы узнали, с какого конца начинать действовать.

Первым делом было решение Ученого совета ВГУ. Я его написал, и ректорат, идя навстречу, провел это решение без заседания, путем опроса членов совета. Затем требовалось ходатайство Обкома партии. Здесь большую помощь оказал секретарь по пропаганде Вячеслав Павлович Усачев (впоследствии - зам. министра), который всегда хорошо относился к воронежским математикам. Ходатайство было быстро подписано первым секретарем.

Следующим этапом было получение поддержки различных отделов Минвуза. С активной помощью А.И.Попова это было быстро сделано.

Неожиданно потребовалась поддержка Академии Наук СССР. Председателем бюро Отделения физ. мат. наук АН СССР был академик Н.Н.Боголюбов, у которого я обучался в аспирантуре. Соответствующее письмо я подготовил и нашел Боголюбова на защите диссертации на физфаке МГУ. Он тут же подписал письмо и просил меня - только для соблюдения коллегиальности - согласовать его с заместителем С.Н.Мергеляном.

В министерстве были поражены тем, что Академия Наук за один день решила вопрос о поддержке коллектива воронежских математиков. Через Совмин РСФСР и Минвуз СССР наш вопрос прошел без моего участия. Здесь действовал А.И.Попов самостоятельно.

Наиболее трудной инстанцией был Государственный Комитет по науке

и технике при Совмине СССР. Нашим куратором стал Иван Сергеевич Герасимов, кандидат физмат, наук, механик. Мы с ним нашли ряд общих знакомых механиков и разговор шел в доброжелательной форме. Оказалось, что для дальнейшего необходимо подробное обоснование необходимости института и перспективный план его развития. Стало ясно, что составление такого документа является для Ивана Сергеевича, впрочем как и для любого постороннего человека, трудной задачей, для выполнения которой нужны месяцы.

Ввязи с этим я предложил, что сам составлю этот документ. Предложение было принято, мне выделили стол, за которым я работал, и в течение двух

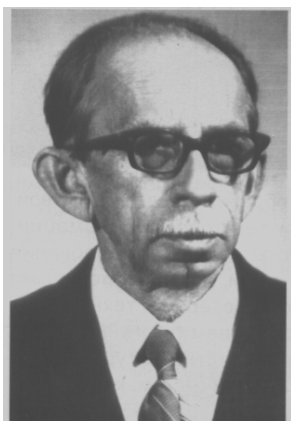
дней перспективный план развития института по 16-ти научным направлениям был составлен. Этот документ был подписан, и я с ним направился к зав. отделом Е.И.Склярову. Этого властного человека с аристократическими манерами сотрудники, как мне показалось, сильно побаивались. Несмотря на это, удалось уговорить его послать в Воронеж комиссию для ознакомления с ситуацией на месте.

Комиссию возглавила зам. начальника Управления университетов Инесса Сергеевна Дубинина, членами комиссии были И.С.Герасимов и еще один сотрудник Комитета по науке и технике. Главным вопросом, который они выясняли, было наличие площадей для размещения института. Им был вручен документ за подписью ректора, в котором указывался ряд комнат и аудиторий, где будет размещен институт. Естественно, что в дальнейшем этот план не был выполнен.

Во время работы комиссии произошло событие, которое могло поставить под удар открытие института. Руководство механиков, поддержанное ректором В.П.Мелешко, у которого к тому времени резко ухудшились отношения с математиками, выдвинуло предложение о включении слова «механика» в название института. Я выступил резко против такого изменения. Решила вопрос И.С.Дубинина, которая сказала, что, если ВГУ будет настаивать на создании института с другим названием, то все ходатайство и документацию нужно начинать сначала.

Атака механиков (двоих из которых затем изгнали из ВГУ) была отбита. Следует заметить, что отдел механики сплошной среды планировался в проекте перспективного плана. Комиссия встретилась с секретарем обкома В.П.Усачевым и после его энергичной поддержки приняла положительное решение.

Замечу, что А.И.Попов встретился в президиуме какого-то торжественного собрания с председателем Комитета по науке академиком В.А.Кириллиным и попросил его помочь в организации института.



Профессор В.И. Соболев

...Ноябрь 1967 года. Заседание Комитета по науке. В течение двух с лишним часов обсуждается важнейший вопрос о применении ингибиторов для борьбы с коррозией металла. После перерыва – наш

вопрос. Ректор В.П.Мелешко просит меня представить его. После моей краткой информации В.А.Кириллин сказал, что ему известны достижения коллектива воронежских математиков. Институт, по его мнению, нужен для того, чтобы разгрузить их от учебной работы. Академик Гвишиани высказал пожелание - чтобы институт доводил свои разработки до постановки решений задач на ЭВМ. Я сказал, что у нас есть вычислительный центр, с помощью которого это будет делаться. Без каких-либо замечаний было принято положительное решение. И.С.Герасимов поздравил меня с открытием института. Приведу документ, давший основание для рождения института:

### *ВЫПИСКА*

^

*из протокола заседания коллегии  
Государственного комитета СССР по науке и технике  
от 30 ноября 1967 г. N. 74*

IV. Об организации научно-исследовательского института математики при Воронежском государственном университете.

Принять предложение Министерства высшего и среднего специального образования РСФСР и Воронежского обкома КПСС, согласованное с Министерством высшего и среднего специального образования СССР и Академией наук СССР, об организации научно-исследовательского института математики при Воронежском государственном университете и об установлении следующих основных направлений деятельности этого института:

- создание качественной теории дифференциальных уравнений в функциональных пространствах;
- разработка асимптотических методов решения нелинейных задач с применением к теории колебаний и теории автоматического регулирования;
- развитие теории функциональных пространств и операторов, действующих в них;
- исследование нетрадиционных задач для уравнений в частных производных;
- разработка конечно-разностных методов решения дифференциальных уравнений, наиболее пригодных для применения электронных вычислительных машин;
- развитие вероятностно-статистических методов решения задач кибернетики с применением их к задачам экономики и проблемам физиологии.

Организацию указанного института провести в пределах фонда заработной платы и ассигнований, установленных для научно-исследовательских учреждений Министерства высшего и среднего специального образования РСФСР на 1968 г.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ КОЛЛЕГИИ

*/В.КИРИЛЛИН/*

Как видно из последнего пункта, вопрос о финансировании института оставался пока открытым. Некоторые чиновники из Минвуза РСФСР хотели "а" чать финансирование с 1969 г.. однако снова пришел на помощь А.И.Попов, и с 1968 г институт получил бюджет, составивший 60 тыс. рублей в год.

Задача на будущее

Последним этапом явилось присвоение институту категории. Этот вопрос решала зам. министра финансов РСФСР М.Л.Рябова. Я к этому времени заболел и хлопоты принял на себя Е.М.Семенов. Несмотря на неоднократные визиты к М.Л.Рябовой, ему не удалось сломить ее сопротивление. Институт получил лишь третью категорию, а это противоречило тому, что НИС университета имел первую категорию. (Замечу, что категорию до сих пор так и не удалось повысить).

Надо сказать, что институт был создан благодаря инициативе и настойчивости нескольких лиц. В отличие от нынешних времен, тогда инициатива поощрялась. На меня произвело большое впечатление, как Алексей Иванович Попов, бывший тогда партийным работником с большим стажем, настойчиво «пробивал» наш вопрос, преодолевая все трудности на пути к цели. Безусловно, его надо считать одним из основных создателей института

Первым директором института математики при ВГУ стал профессор В.И.Соболев. Впоследствии институтом математики руководили С.А.Скяднев, В.П.Трофимов, Ю.В.Покорный, В.Г. Звягин.

## **Список учеников С.Г. Крейна**

### **Доктора физ.-мат. наук**

1. акад. Березанский Юрий Макарович г. Киев
2. акад. Далецкий Юрий Львович г. Киев
3. Петунин Юрий Иванович г. Киев
4. Копачевский Николай Дмитриевич г. Симферополь
5. Панков Александр Андреевич г. Винница
6. Павлов Евгений Александрович г. Луганск
7. Соболевский Павел Евсеевич Израиль
8. Кучмент Петр Абрамович США
9. Нго Зуи Канн Вьетнам
10. Фам Ки Ань Вьетнам
11. Зайденберг Михаил Григорьевич Франция
12. Глушко Владимир Павлович г. Воронеж
13. Семенов Евгений Михайлович г. Воронеж
14. Овчинников Владимир Иванович г. Воронеж
15. Курина Галина Алексеевна г. Воронеж
16. Чернышов Корнелий Исидорович г. Воронеж
17. Костин Владимир Алексеевич г. Воронеж
18. Зарубин Анатолий Георгиевич г. Хабаровск
19. Фролов Николай Николаевич г. Владивосток
20. Лаптев Геннадий Иванович г. Тула
21. д. техн. н. Сысоев Юрий Семенович г. Волгодонск
22. д. тех. н. Поличка Нина Петровна г. Хабаровск

### **Кандидаты физ.-мат. наук**

1. Костарчук Виктор Николай г. Чернигов
2. Артемов Георгий Абрамович г. Севастополь
3. Духовный Михаил Сергеевич г. Кривой Рог
4. Шихватов Александр Александрович г. Николаев
5. Козлов Овсей Маркович г. Киев
6. Якут Лидия Ивановна г. Киев
7. Ярошенко Николай Степанович г. Киев
8. Кведерас Брюнюс Винцевич г. Вильнюс
9. Аскеров Назим Кафарович г. Баку
10. Ливчак Алексей Яковлевич г. Рига
11. Нгуен Ши Хонг Вьетнам
12. Чан Тху Ха Вьетнам
13. Зобин Наум Михайлович США
14. Львин Сергей Яковлевич США
15. Грабовская Маргарита Яковлевна США
16. Товбис Александр Исаакович Австралия
17. Рутицкая Алла Яковлевна Австралия
18. Николова Людмила Болгария
19. Николов Красемир Болгария
20. Беляева Елена Владимировна Н. Зеландия
21. Литвинков Степан Сергеевич г. Воронеж



22. Прорзоровская Ольга Ивановна г. Воронеж
23. Иевлева Оксана Борисовна г. Воронеж
24. Шаблицкая Лилия Николаевна г. Воронеж
25. Складнев Сергей Анатольевич г. Воронеж
26. Гудович Николай Николаевич г. Воронеж
27. Руссман Исаак Борисович г. Воронеж
28. Савченко Юлия Борисовна г. Воронеж
29. Трофимов Валерий Павлович г. Воронеж
30. Зубова Светлана Петровна г. Воронеж
31. Колупанова (Цветкова) Галина Андреевна г. Воронеж
32. Гудович (Титиевская) Ирина Семеновна г. Воронеж
33. Седаев Александр Андреевич г. Воронеж
34. Иванов Леонид Александрович г. Воронеж
35. Штейберг Иосиф Яковлевич г. Воронеж
36. Салехов Дмитрий Васильевич г. Воронеж
37. Котко Людмила Антоновна г. Воронеж
38. Фурменко Александр Иванович г. Воронеж
39. Савченко Галина Борисовна г. Воронеж
40. Дементьева Ольга Владимировна г. Воронеж
41. Зюкин Павел Николаевич г. Воронеж
42. Горохов Евгений Владимирович г. Воронеж
43. Сапронов Иван Васильевич г. Воронеж
44. Копанево Вера Ивановна г. Воронеж
45. Гохман Алексей Оскарович Канада
46. Атласов Игорь Викторович г. Воронеж
47. Веневитина Светлана Семеновна г. Воронеж
48. Куликов Иван Михайлович г. Борисоглебск
49. Денисов Игорь Васильевич г. Тула
50. Симонов Александр Сергеевич г. Тула
51. Осипов Валерий Борисович г. Владивосток
52. Кседзенко Людмила Степановна г. Владивосток
53. Гасанов Насир Меликович г. Махачкала
54. Дмитриев Вячевлав Иванович г. Курск
55. Яцкин Николай Иванович г. Иваново
56. Брыскин Илья Борисович Израиль
57. Плющев Юрий Васильевич г. Сергиев Посад
58. Чубурин Юрий Павлович г. Ижевск
59. Пененсон Исаак Залманович США
60. Фомин Василий Иванович г. Тамбов
61. Соломатина Любовь Евгеньевна г. Москва

## Список трудов С.Г. Крейна

1. Krein S. G. and Ushakova V. N., Mathematical Analysis of Elementary Functions, Fizmatgiz, Moscow 1963. (Translated to German in 1966)
2. Vilenkin N. Ya., Gorin E. A., Kostyuchenko A. G., Kras-nosel'skii M. A., Krein S. G., Maslov, V. P., Mityagin B. S., Petunin Yn. I., Rutitskii Ya. B., Sobolev V. L, Stetsenko V. Ya., Faddeev L. D. and Tsitlanadze E. S., Functional Analysis (Edited by S. G. Krein), "Nauka", Moscow 1964 424 pp. MR 32#1532
3. Krein S. G., Linear Differential Equations in a Banach Space, "Nauka", Moscow 1967 464 pp. (In Russian) MR 40#508
4. Krein S. G. (Editor and co-author), Analiza Funkcjonalna. (Polish) [Functional Analysis]. Translated from the Russian, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw 1967 419 pp. MR 36#3101
5. Krein S. G. (Editor and co-author), Functional Analysis. Edited machine translation from the Russian. Foreign Technology Division MT-65-573. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C. 1968 ix+352 pp. microfiche. (Distributed by Clearinghouse for Federal Scientific and Technical Information, Springfield, Va.) MR 0038#2560
6. Krein S. G. Linear Differential Equations in Banach Space. Translated from the Russian, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. v+390 pp. MR 49#7548
7. Krein S. G., Linear Equations in a Banach Space, "Nauka". Moscow, 1971. 104 pp. (In Russian) MR 51#11145 (translated into Japanese in 1972)
8. Vilenkin N. Ya, Gorin E. A., Kostyuchenko A. G., Kras-nosel'skii M. A., Krein S. G., Maslov, V. P., Mityagin B. S., Petunin Yu. I., Rutitskii Ya. B., Sobolev V. I., Stetsenko V. Ya., Faddeev L. D. and Tsitlanadze E. S., Functional Analysis, 2nd edition, revised and augmented (Edited by S. G. Krein), "Nauka", Moscow, 1972. MR 50#5406
9. Vilenkin N. Ya., Gorin E. A., Kostyuchenko A. G., Kras-nosel'skii M. A., Krein S. G., Maslov, V. P., Mityagin B. S., Petunin Yn. I., Rutitskii Ya. B., Sobolev V. L, Stetsenko V. Ya., Faddeev L. D. and Tsitlanadze E. S., Functional Analysis (Edited by S. G. Krein). Translated from the Russian, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen 1972. xv+380 pp. MR 52#1151
10. Gudovich I. S. and Krein S. G., Boundary Value Problems for Overdetermined Systems of Partial Differential Equations, in Diff. Uravnenija i Primenen., Trudy Sem. Processy Optimal Upravlenija, Vyp. 9, Inst Math, and Phys. Lytvenian Acad. Sci., Vilnius 1974, 145pp. (In Russian) MR 58#1720
11. Ivanov Leonid, Kotko Ljudmila, and Krein Selim, Boundary Value Problems in Variable Domains, in Diff. Uravnenija i Primenen., Trudy Sem. Processy Optimal Upravlenija, Vyp. 19, Inst Math, and Phys. Lytvenian Acad. Sci, Vilnius 1977, 161 pp. (In Russian) MR 58#17507#17507
12. Krein S. G. and Zobin N. M., Mathematical Analysis of Smooth Functions, Voronezh State University, Voronezh 1978

13. Krein S. G., Petunin Yu. I., and Semenov E. M., Interpolation of Linear Operators, "Nauka", Moscow, 1978. 400 pp. (In Russian) MR 81f:46086
14. Krein S. G. and Yatskin N. I., Linear Differential Equations on Manifolds, Voronezh State Univ., Voronezh, 1980. 132 pp. (In Russian) MR 83i:58012
15. Krein S. G., Linear Equations in Banach Spaces. Translated from the Russian, Birkhauser, Boston, Mass., 1982. xii+102 pp. ISBN: 0-7643-3101-1 MR 83m:47012
16. Krein S. G., Petunin Yu. I., and Semenov E. M., Interpolation of Linear Operators, Translations of Mathematical Monographs, v. 54. American Mathematical Society, Providence, R.L, 1982. xii+375 pp. ISBN: 0-8218-4505-7 MR 84j:46103
17. Krein S. G., Mathematical Programming, Voronezh State Univ., Voronezh, 1983. 160 pp. (In Russian) MR 86e:90068
18. Kopachevskii N. D., Krein S. G., and Ngo Zui Kan, Operator Methods in Linear ffydrodynamics, "Nauka", Moscow, 1989. 416 pp. ISBN: 5-02-014203-4 (In Russian, with an English summary.) MR 91h:76001
19. Krein S. G. and Pesenson I. Z., Spaces of Smooth Elements Generated by the Representation of a Lie Group, Voronezh State Univ., Voronezh, 1990. 100 pp. ISBN: 5-7455-0300-9 (In Russian, with an Engbsh summary.) MR 92g:22023
20. Kopachevskii N.D., Krein S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Operator Theory, Vol. 128, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001. — 384 p.

#### **Articles**

21. (with Krein M. G.), An internal characterization of the space of all continuous functions defined on Hausdorff bicomact set, Dokl. Akad. Nauk SSSR 27(1940), no.5, 427-431. (In Russian) 1941
22. (with Vershikov I. Kb. and Tovbin A. V.), on semi-ordered rings, Dokl. Akad. Nauk SSSR 30(1941), 778-780. (In Russian) 1943
23. (with Krein M. G.), Sur l'espace des fonctions continues definies sur un bicomact de Hausdorff et ses sousespaces semi-ordonnes, Matem. Sb. 13(1943), 1-28. 1946
24. (with Bogolyubov N. N.), On positive absolutely continuous operators, Trans. Inst. Matem. Ukarin. Akad. Nauk. 9(1946), 130-139. (In Ukrainian) 1947
25. (with Krasnosel'skii M. A.), On the center of a general dynamical system, Dokl. Akad. Nauk SSSR 58(1947), 9-11. (In Russian) 1848
26. (with Levin B. Ya.), On the convergence of singular integrals, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 60(1948). 13-16. MR 10,34e.
27. (with Levin B. Ya.), On the strong representation of functions by singular integrals, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 60(1948). 195-198. MR 10,341
28. (with Levin B. Ya.), On one problem by I. P. Natanson, Uspehi Mat. Nauk 3(1948), no.3, 183-186. (In Russian)
29. (with Korenblum B. I. and Levin B. Ya.), On certain nonlinear questions of the theory of singular integrals, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 62(1948). 17-20. MR 10,306f.

30. (with Kac G. I.), On the limit center of a dynamical system, "Trans. Inst. Matem. Ukarin. Akad. Nank. 1948,121-134. (In Russian) 1949
31. (with Krasnoselskii M. A.), On a proof of the theorem on category of a projective space, Ukrain. Mat. Journal 1(1949). no. 2, 99-102. MR 14,72b. 1950
32. (with Daleckii Yu. L.), On differential equations in Hubert space, Ukrain. Mat. Journal 2(1950). no. 4, 71-91. (In Russian) MR 13,954c.
33. (with Daleckii Yu. L.), Some properties of operators depending upon a parameter, Dokl. Akad. Nauk. Ukrain. SSR 6(1950), 433-436. (In Ukrainian)
34. (with Berezanskii Yu. M.), Some classes of continuous algebras, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 72(1950). 237-240. MR 12,189a.
35. (with Berezanskii Yu. M.), Continuous algebras, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 72(1950). 5-8. MR 12,188f. 1951
36. (with Berezanskii Yu. M.), Hypercomplex systems with a compact basis, Ukrain. Mat. Journal 3(1951). 184-204. (In Russian) MR 14,944d.
37. (with Daleckii Yu. L.), Formulas of differentiation with respect to a parameter of functions of Hermitian operators, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 76(1951). 13-16. MR 12,617f 1952
38. (with Krasnoselskii M. A.), An iteration process with minimal residuals, Mat. Sbornik N.S. 31(73)(1952). 315-334. MR 14,692d.
39. (with Krasnoselskii M. A.), Remark on the distribution of errors in the solution of a system of linear equations by means of an iterative process, Uspehi Matem. Nank (N.S.) 7(1952). no. 4(50), 157-161. MR 14.501f. 1953
40. On functional properties of operators of vector analysis and hydrodynamics, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 93(1953). 969-972. MR 15,906c.
41. Uniform topology in the space of transformations, Mat. Sbornik N.S. 33(75)(1953). 627-638. MR 15,547b.
42. On fixed points of a conformal mapping, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 8(1953). no. 1(53), 155-159. MR 14,742f. 1954
43. On an indeterminate equation in Hilbert space and its application in potential theory, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 9(1954). no. 3(61), 149-153. MR 16,262g. 1955
44. (with Krasnoselskii M. A.), On the principle of averaging in nonlinear mechanics, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 10(1955), no. 3(65), 147-152. MR 17,152d.
45. (with Krasnoselskii M. A.), Nonlocal existence theorems and uniqueness theorems for systems of ordinary differential equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 102(1955), 13-16. MR 17,151b. 1956
46. Mathematical problems of the theory motion of a vessel filled with a fluid, Trans, of III All-union Math. Congress, v.1, p. 305, Akad. Nauk SSSR, Moscow 1956.
47. (with Krasnoselskii M. A.), On differential equations in Banach spaces, Trans, of III All-union Math. Congress, v.2, p. 11, Akad. Nauk SSSR, Moscow 1956.
48. (with Krasnoselskii M. A. and Sobolevikii P. E.), On differential

equations with unbounded operators in Banach spaces, Dokl Akad. Nauk SSSR (N.S.) 111(1956), 19-22. MR 19,550a.

49. (with Krasnoselskii M. A.), On the theory of ordinary differential equations in Banach spaces, Voronezh State Univ. Trudy Sem. Funkcional. Anal, no. 2 (1956), 3-23. (In Russian) MR 19,140c

50. (with Daletskii Yu. L.), Integration and differentiation of functions of Hermitian operators and applications to the theory of perturbations, Voronezh State Univ. Trudy Sen. Funkcional Anal, no. 1(1956), 81-105. (In Russian) MR 18,914d.

51. (with Krasnoselskii M. A.), On a class of uniqueness theorems for the equation  $y' = f(x, y)$  Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 11(1956), no. 1(67), 209-213. MR 18,38a. 1957

52. On correctness classes for certain boundary problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 114(1957), 1162-1165. MR 19,747e.

53. Differential equations in a Banach space and their application in hydromechanics, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 12(1957), no. 1(73), 208-211. MR 19,36f.

54. (with Krasnoselskii M. A.), Continuity conditions for a linear operator in terms of properties of its square, Voronezh State Univ. Trudy Sem. Funkcional Anal no. 5 1957, 98-101. (In Russian) MR 20#4784.

55. (with Prozorovskaya O. I.), An analogue of Seidel's method for operator equations, Voronezh State Univ. Trudy Sem. Funkcional Anal no. 5 1957, 35-38. (In Russian) MR 20#2081.

56. (with Krasnoselskii M. A. and Sobolevsky P. E.). On differential equations with unbounded operators in Hilbert space, Dokl Akad. Nauk SSSR (N.S.) 112(1957), 990-993. MR 19,747b.

57. (with Moiseev N. N.), On oscillations of a vessel containing a liquid with a free surface, Prikl Mat. Mech. 21(1957), 169-174. (In Russian) MR 19,695g.

58. (with Beresanskii Yn. M.), Hypercomplex systems with continuous basis, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 12(1957), no. 1(73), 147-152. MR 19,154d.

59. (with Krasnosel'skii M. A. and Myshkis A. D.), An extended session in march 1957 of the Voronezh Seminar on Functional Analysis, Uspehi Mat. nauk 12(1957), no.4,241-250. 1958

60. (with Glushko V. P.), Fractional powers of differential operators and imbedding theorems, Dokl. Akad. Nauk SSSR 122(1958), 963-966. MR 20#6578.

61. (with Sobolevskii P. E.), A differential equation with an abstract elliptical operator in Hilbert space, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 118(1958), 233-236. MR 20#6043.

62. (with Krasnosel'skii M. A.), On differential equations in a Banach space, Trans. of III All-union Math. Congress, v.3, Moscow (1956), p. 73-80, Akad. Nauk SSSR, Moscow 1958. 1960

63. On an interpolation theorem in operator theory, Soviet Math. Dokl. 1(1960), 61-64. MR 22#9860.

64. On the concept of a normal scale of spaces, Soviet Math. Dokl. 1(1960)

586-589. MR 22#12361.

65. Differential equations in Banach space and their application in hydrodynamics. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 16(1960) 423-426. MR 22#8231.

66. (with Berezanskii Ju. M.), Hypercomplex systems with continuous basis, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 16(1960), 358-364. MR 22#8368.

67. (with Prozorovskaja O. I.), Analytic semi-groups and incorrect problems for evolutionary equations, Soviet Math. Dokl. 1(1960) 841-844. MR 27#1845.

68. (with Glushko V. P.), Inequalities for norms of derivatives in weighted  $L_p$ -spaces, Sibirsk. Mat. Zh. 1(1960), 343-382. MR 24#A3507.1961

69. III-posed problems and estimates of solutions of parabolic equations, in "III-posed problems of mathematics and mechanics", 84-86, Siberian Branch of Acad. of Sci., Novosibirsk 1961

70. (with Petunin Ju. I.), A relationship criterion for two Banach spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 139(1961), 1295-1298. MR 25#5370.

71. (with Semenov E. M.), A scale of spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 138(1961), 763-766. MR 25#4352. 1962

72. (with Laptev G. I.), Boundary-value problems for an equation in Hilbert space, Dokl. Akad. Nauk SSSR 146(1962) 535-538. MR 27#6000.1963

73. (with Berezanskii Ju. M. and Roitberg Ja. A.), A theorem on homeomorphisms and local increase of smoothness up to the boundary for solutions of elliptic equations, 1963 Outlines Joint Sympos. Partial Differential Equations (Novosibirsk, 1963) pp. 33-38, Acad. Sci. USSR, Siberian Branch, Moscow. MR 35#562.

74. (with Prozorovskaja O. I.), Approximate methods of solving ill-posed problems, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. fiz. 3(1963), 120-130. (In Russian) MR 27#3094.

75. (with Berezanskii Ju. M. and Roitberg Ja. A.), A theorem on homeomorphisms and local increase of smoothness up to the boundary for solutions of elliptic equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 148(1963), 745-748. MR 26#4030.1964

76. Oscillations of a viscous fluid in a container, Dokl. Akad. Nauk SSSR 159(1964), 262-265.. MR 31#6461.

77. Interpolation theorems in operator theory, and embedding theorems, in Proc. Fourth AH-Union Math. Congr. (Leningrad, 1961), Vol. II, pp. 504-510, "Nauka", Leningrad 1964. (In Russian) MR 36#3144.

78. (with Krasnosel'skii M. A.), Operator equations in function spaces, in Proc. Fourth AH-Union Math. Congr. (Leningrad, 1961), Vol. II, 292-299, "Nauka", Leningrad 1964. (In Russian) MR 36#2926.

79. (with Petunin Ju. I.), On the concept of minimal scale of spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154(1964), 30-33. MR 28#4334.

80. (with Askerov N. G. and Laptev G. I.), On a class of non-selfadjoint boundary-value problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR 155(1964), 499-502. MR 28#3347.

81. (with Laptev G. I.), Boundary value problems with parameter in the

boundary condition, Proc. 3rd All-union Symposium on Diffraction and Waves, 39-41, Tbilisi 1964

82. (with Krasnosel'skii M. A., Rutitskii Ya. B., and Sobolev V. I.), On mathematical life in Voronezh. Uspehi Mat. nauk 19(1964). no.3, 225-245. (In Russian) 1965

83. (with Simonov A. S.), Theorem on homomorphisms and quai-linear equations, in "Abstracts of All-union Conf. on Appli. of Funct. Anal, and Non-linear problems", 62-63, Akad. Nauk Azerb. SSR, Baku 1965. 1966

84. Correctness of the Cauchy problem and the analyticity of solutions of the evolution equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR 171(1966), 1033-1036. MR 34#7925

85. (with Petunin Jn. I. and Semenov E. M.), Hyperscales of Banach lattices, Dokl Akad. Nauk SSSR 170(1966), 265-267. MR 34#3299

86. (with Laptev G. I.), Boundary value problems for second order differential equations in a Banach space. I, Differencialnye Uravnenija 2(1966), 382-390. MR 33#7662

87. (with Laptev G. I.), Correctness of boundary value problems for a differential equation of the second order in a Banach space. II, Differencialnye Uravnenija 2(1966), 919-926. MR 34#3049.

88. (with Shablickaja L. N.), Stability of difference schemes for the Cauchy problem, Zh. Vychisl Mat. i Mat. Fiz. 6(1966), 648-664. MR 33 #8118

89. (with Simonov A. S.), A theorem of homeomorphisms and quasilinear equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 167(1966), 1226-1229. MR 33#6138.

90. (with Petunin Jn. I.), Scales of Banach spaces, Uspehi Mat. Nank 21(1966) no. 2 (128) 89-168. MR 33#1719.

91. (with Glushko V. P. and Mnkhin V. E.), On global and local optimal plans in problems of linear programming with two-sided bounds, in "Optimal programming in industrial problems", no.2, 89-90, Voronezh State Univ. 1966. (In Russian).

92. (withlevlevaO. B.), On oscillations of a viscous fluid in a vessel, Abstracts of the Internat. Math. Congr., Sect. 12, p.37, Moscow 1966.

93. (with Petunin Yu. I.), New results in the theory of scales of Banach spaces, Abstracts of the Internat. Math. Congr., Sect. 5, p.56, Moscow 1966. 1967

94. (with Petunin Ju. I. and Semenov E. M.), Scales of Banach lattices of measurable functions, Trudy Moskov. Mat. Obshch. (Trans. Mosc. Math. Soc.) 17(1967) 293-322. MR 36#6925

95. Sixth joint conference in physics and mathematics of the Far East, Uspehi Mat. Nauk 22(1967), no.1, 197-198. (In Russian).

96. First Voronezh Winter Math. School. Uspehi Mat. Nauk 22(1967), no.4.189-190. (In Russian). 1968

97. On oscillations of a viscous fluid and related operator equations, Funcional. Anal, i Prilozhen. 2(1968) no. 2 40-50. translation in Funct. Anal. Appl.

98. The behavior of solutions of elliptic problems under variation of the domain, Studia Math. 31(1968) 411-424.(In Russian) MR 38#3586

99. The behavior of solutions of elliptic problems under variation of the domain, Proc. of 7th Math. and Phys. Conf of Far east, p. 18, Khabarovsk 1968. (In Russian)  
the occasion of his sixtieth birthday), Uspekhi Mat. Nauk 46 (1991), no. 4(280), 183-184; translation in Russian Math. Surveys 46 (1991), no. 4, 217-219. MR 92k:01025
100. Linear equations in Banach space, Lecture Notes, Voronezh State Univ., Voronezh, 1968. 69 pp. (In Russian) MR51#11146
101. (with Laptev G. L.), On the problem of the motion of a viscous fluid in an open vessel, Funkcional. Anal i Prilozhen. 2(1968) no. 1 40-50. translation in Funct. Anal. Appl. MR 40#1714
102. (with Askerov N. K. and Laptev G. I.), The problem of the oscillations of a viscous liquid and the operator equations, connected with it, Funkcional. Anal, i Prilozhen. 2(1968) no. 2 21-31. translation in Funct. Anal. Appl. MR 38#559
103. (with Glushko V. P.), Degenerate linear differential equations in a Banach space, Dokl. Akad. Nauk SSSR 181(1968) 784-787. MR 38#393 1969
104. (with Kulikov L M.), The Maxwell-Leontovich operator, Differencialnye Urvnenija 5(1969), 1275-1282. MR42#900
105. (with Trofimov V. P.), Holomorphic operator-valued functions of several complex variables, Funkcional Anal, i Prilozhen. 3(1969), no. 4 85-86. translation in Funct. Anal. Appl. MR 41#7466
106. (with Ngo Zui Kan), The problem of small motions of a body with a cavity partially filled with a viscous fluid, J. Appl. Math. Mech. 33(1969), 110-117. MR41 #4897
107. (with Ngo Zui Kan), Asymptotic method in the problem of oscillations of a strongly viscous fluid, J. Appl. Math. Mech. 33(1969), 442-450. MR 41#3899
108. (with Laptev G. I.), An abstract scheme for the examination of parabolic problems in noncylindrical regions, Differencialnye Uravnenija 5(1969), 1458-1469. MR 41#649
109. III Voronezh Winter Math. School, January 26 - February 6 1969, Uspehi Mat. Nauk 24(1969), no.4,230-231. (In Russian) 1970
110. (with Shikhvatov A. M.), Linear differential equations on a lie group, Funkcional. Anal, i Prilozhen. 4(1970), no. 1, 52-61. translation in Funct. Anal. Appl. MR 55# 12868
111. (with Trofimov V. P.), Noetherian operators that depend holomorphically on parameters, A collection of articles on function spaces and operator equations (Proc. Sem. Functional Anal., Math. Dept., Voronezh State Univ., Voronezh, 1970), pp. 63-85. Voronezh State Univ., Voronezh, 1970. (In Russian) MR 55#3839
112. (with Trofimov V. P.), The multiplicity of a characteristic point of the holomorphic operatorfunction, Mat. issled. 5(1970), no. 4(18), 105-114. (In Russian) MR 47#867
113. (with Savchenko Ju. B.), Exponential dichotomy for partial differential



equations, *Differencialnye Uravneniya* 8(1972), K3II 844. MR 46#3941

114. (with Osipov V. B.), Ljapunov functions and Cauchy problem for certain systems of partial differential equations, *Differencialnye Uravneniya* 6(1970), 2053-2061. MR 45#8978

115. (with Petunin Ju. I. and Semenov E. M.), Imbedding theorems and interpolation of linear operators, in "Imbedding theorems and their applications (Proc. Sympos., Baku, 1966)", pp. 131-245. "Nauka", Moscow, 1970. (In Russian) MR 47#2342

116. (with Laptev G. I. and Cvetkova G. A.), The Hadamard correctness of the Cauchy problem for an evolution equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 192(1970), 980-983. MR 42#637

117. Voronezh Winter Math. School, January 26 - February 7 1970, *Uspehi Mat. Nauk* 25(1970), no.5, 265-266. (In Russian) 1971

118. (with Kuchment P. A.), A certain approach to the interpolation problem for linear operators Voronezh State Univ. *Trudy Nauchn.-Issled. Inst. Mat. VGU* No. 3 (1971), 54-60. (Reviewer: J. Bergh) 46M35. (In Russian) MR 50#8106

119. Interpolation of linear operators, and properties of the solutions of elliptic equations *Elliptische Differentialgleichungen, Band II*, pp. 155-166. *Schriftenreihe Inst. Math. Deutsch. Akad. Wissensch. Berlin, Reihe A, Heft 8*, Akademie-Verlag, Berlin, 1971. (In Russian) MR 49#9385120. (with Gudovich I. S.), Certain boundary value problems that are elliptic in a subspace, *Mat. Sb. (N.S.)* 84 (126), 1971, 595-606. (In Russian) MR 43#7764

121. Fifth Voronezh Winter Math. School, *Uspehi Mat. Nauk* 26(1971), no.5, 270-272. (In Russian) 1972

122. (with Jackin N. I.), Differential form equations, Voronezh State Univ. *Trudy Nauchn.-Issled. Inst. Mat. VGU, V. 5, Sb. Statei Teor. Operator, i Differencial. Uravnenii* (1972), 75-79. (In Russian) MR 56#6691

123. (with Gudovich I. S.), Boundary value problems for operators of exterior differentiation, Voronezh State Univ. *Trudy Nauchn.-Issled. Inst. Mat. VGU, V. 5, Sb. Statei Teor. Operator, i Differencial. Uravnenii* (1972), 35-45. (In Russian) MR 56#6690

124. (with Semenov E. M.), A certain property of equimeasurable functions, Voronezh State Univ. *Trudy Nauchn.-Issled. Inst. Mat. VGU, V. 5, Sb. Statei Teor. Operator, i Differencial Uravnenii* (1972), 70-74. (In Russian) MR 56#5823

125. (with Gudovich I. S.), Elliptic boundary value problems for the system  $(\operatorname{div} u = f)$ , *Funkcional. Anal. i Prilozhen.* 6(1972), no. 4, 75-76. translation in *Funct Anal. Appl.* MR 47#7213

126. (with Gudovich I. S. and Kulikov I. M.), Boundary value problems for the Maxwell equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 207(1972), 321-324. translation in *Soviet Math. Dokl.* MR 47#5440

127. (with Borisovich Yu. G.), VI Voronezh Winter Math. School, *Uspehi Mat. Nauk* 27(1972), no.5, 273-275. (In Russian)

128. (with Savchenko Yu. B.), On the exponential dichotomy for partial differential equations, *Differencialnye Uravneniya* 8(1972), no.5, 835-844. (In

Russian) 1973

129. (with L'vin S. Ja.), A general initial problem for a differential equation in a Banach space, Dokl. Akad. Nauk SSSR 211(1973), 530-533. (Reviewer A. Szep) 34G05. translation in Soviet, math. Dokl. 49#7549

130. (with Grabovskaja R. Ja.), A certain representation of the algebra of differential operators, and the differential equations connected with it, Dokl. Akad. Nauk SSSR 212(1973), 280-283. translation in Soviet, math. Dokl. MR 49#7633

131. (with Grabovskaja R. Ja.), The formula for the permutation of functions of operators that represent a Lie algebra, Funkcional. Anal, i Prilozhen. 7(1973), no. 3, 81. translation in Funct. Anal. Appl. MR49#1180

132. (with Sablickaja L. N.), Necessary conditions for the stability of difference schemes, and the eigenvalues of difference operators, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 13 (1973), 647-657, 812. (In-Russian) MR 48#10137

133. (with Semenov E. M.), Interpolation of operators of weakened type, Funkcional. Anal, i Prilozhen. 7(1973), no. 2, 89-90. translation in Funct. Anal. Appl. MR 47#3978 1974

134. (with Efimov N. V., Kantorovich L. V., Iohvidov I. S., Kras-nosel'skii M. A., and Ljusternik L. A.) Vladimir Ivanovich Sobolev (on the occasion of his sixtieth birthday), Uspehi Mat. Nauk 29 (1974), no. 1(175), 247-250. (In Russian) MR 52#7798 1975

135. (with Zaidenberg M. G., Kuchment P. A., and Pankov A. A.), Banach bundles and linear operators, Uspehi Mat. Nauk 30(1975), no. 5(185), 101-157. translation in Russian Math. Surveys MR 54#3741

136. (with Kotko L. A.), The completeness of a system of eigenand associated functions of boundary value problems with a parameter in the boundary conditions, in "Collection of articles on applications of functional analysis", pp. 71-89. Voronezh Tehnolog. Inst., Voronezh 1975. (In Russian) MR58#1730 1976

137. (with Semenov E. M.), Some interpolation theorems of the theory of linear operators and their applications, in Imbedding theorems and their applications (Proc. Ail-Union Sympos., Alma-Ata, 1973)", pp. 64-68, 188. Izdat. "Nauka" Kazah. SSR, Alma-Ata, 1976. (In Russian) MR 58#2213

138. (with Grabovskaya R. Ya.), Second order differential equations with operators generating a Lie algebra representation, Math. Nachr. 75(1976), 9-29. MR 58#1773

139. (with Kotko L. A.), The completeness of the system of eigenand associated functions of boundary value problems with a parameter in the boundary conditions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 227(1976), no. 2, 288-290. MR 53#6117 1977

140. Interpolation of operators in spaces of smooth functions, in "Operator theory in functional spaces", 188-205, Nauka, Novosibirsk 1977.

141. (with Dmitriev and Ovchinnikov V. I.), Fundamentals of the theory of interpolation of linear operators, in "Geometry of linear spaces and operator theory", pp. 31-74. Jaroslav State Univ., Yaroslavl, 1977. (In Russian) MR

58#30336 1978

142. (with Furmenko A. L.), Dynamic equivalence of linear differential operators with nilpotent operators, in "Approximate methods for investigating differential equations and their applications" No. 4, pp. 47-56, 134, Kuybyshev State Univ., Kuyby-shev, 1978. (In Russian) MR 83g:34043

143. (with Dmitriev V. I.), Interpolation of operators of weak type, Anal. Math. 4 (1978), no. 2, 83-99. MR 80h:46036 1980

144. (with Polichka N. P.), Behavior of the solutions of boundary value problems for the Lavrent'ev-Bicadze equation under variation of the domain. Partial differential equations (Proc. Conf., Novosibirsk; 1978), pp. 39-41, 247, "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk 1980. (In Russian) MR 82h:35671

145. (with Nikolova L. I.), Holomorphic functions in a family of Banach spaces, interpolation, Dokl. Akad. Nauk SSSR 250 (1980), no. 3, 547-550. MR 81j:46112 1981

146. (with Chernyshov K. I.), Analogue of Tikhonov's theorem for the equation  $(A+eB)x = C(t)x$ , in "Approximate methods for investigating differential equations and their applications", 103-115, Kuybyshev, Kuibyshev State Univ. 1981. (In Russian) MR 84m:34086.

147. (with Chernyshov K. I.), Behavior of solutions of general linear systems depending meromorphically on a small parameter, Dokl. Akad. Nauk SSSR 260(1981), no. 3, 530-535. translation in Soviet Math. Dokl. MR 84c:34084

148. (with Kurina G. A.), Singular perturbations in problems of optimal control, in "Stability of motion. Analytical mechanics. Control of motion," pp. 170-178, 303, "Nauka", Moscow, 1981. (In Russian) MR 83j:49020. 1982

149. (with Nikolova L. I.), A complex interpolation method for a family of Banach spaces, Ukrain. Mat. Zh. 34 (1982), no. 1, 31-42, 132. MR 84a:46162 1983

150. (with Khazan M. I.), Differential equations in a Banach space. Mathematical analysis, Vol. 21, 130-264, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1983. (In Russian) MR 85f:34116 1984

151. (with Nikolova L. Y.), On the method of complex interpolation, in "Complex analysis and applications '81 (Varna, 1981)", 298-300, Bulgar. Acad. Sci, Sofia, 1984. MR 88a:46088

152. (with Polichka N. P.). A priori estimates for solutions of a problem with displacement for the Lavrent'ev-Bitsadze equation, Differential'nye Uravneniya 20(1984), no. 12, 2112-2120. (In Russian) MR 86f:35128

153. (with Levin V. I. and Simonov A. S.), L. M. Likhtarnikov (on the occasion of his sixtieth birthday), Mat. v Shkole 1984, no. 3, 77. (In Russian) MR 85m:01073

154. (with Chernyshov K. I.), Singularly perturbed differential equations in a Banach space, in "Ninth international conference on nonlinear oscillations", Vol. 1 (Kiev, 1981), 193-197, 443, "Naukova Dumka", Kiev 1984. (In Russian) 1985

155. Singularly perturbed linear differential equations in a Banach space,

Differentsial'nye Uravneniya 21(1985), no. 10, 1814-1817,1839. (In Russian) MR 87a:34001 1986

156. (with Brudny Yu. A. and Seraenov E. M.), Interpolation of linear operators, in "Mathematical analysis", Vol. 24, 3-163, 272, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986. (In Russian) MR 88e:46056

157. Asymptotic decomposition of operator equations, in "Lya-punov functions and their applications", 206-214, 248, "Nauka" Sibirsk. Otdel, Novosibirsk, 1986. (In Russian) MR 88e:34104 1987

158. (with L'vin S. Ya.), Overdetermined and underdetermined equations in Hilbert spaces, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1987, no. 9, 59-66, 83.; translation in Soviet Math. (Iz. VUZ). MR 89d:47019

159. (with Berezanskii Yu. M., Gel'fand I. M., Krein M. G., Mitro-pol'skii Yu. A., and Skorokhod A. V., Yurii L'vovich Daletskii (on the occasion of his sixtieth birthday), Uspekhi Mat. Nauk 42 (1987), no. 4(256), (In Russian) MR 89h:01038

160. (with L'vin S. Ya.), Overdetermined and underdetermined elliptic problems, in "Functional analysis and mathematical physics", 106-116, 135, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., Novosibirsk, 1985 (In Russian) MR 88h:35037 1988

161. (with Polichka N. P.), Stability of solutions of a problem with shift for the Lavrent'ev-Bitsadze equation with variation of the domain. (Russian) Applied problems in statistical analysis (Russian), 16-29,162, Akad. Nauk SSSR, Sibirsk. Otdel, Dal.nevostochn. Filial, Vladivostok, 1988. MR 91k:35176

162. (with L'vin S. Ya.), .Partially overdetermined and underdetermined elliptic problems, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1988, no. 10, 15-23; translation in Soviet Math. (Iz. VUZ) 32 (1988), no. 10,19-30. MR 90d:35213

163. (with L'vin S. Ya.), Underdetermined boundary value problems, in "Function spaces and equations of mathematical physics", 17-24,85, Voronezh Slate Univ., Voronezh, 1988. (In Russian) MR 90a:35171

164. (with L'vin S. Ya.), An approximation approach to overde-termined and underdetermined boundary value problems, in "Functional and numerical methods in mathematical physics", 113-117, 268, "NaukovaDumka", Kiev 1988. (In Russian) 1989

165. (with Kopachevskii N. D.), A problem of the flow of a viscous fluid. (Russian), Z. Anal. Anwendungen 8(1989), no. 6, 557-561. MR 91f: 76018

166. An abstract scheme for the consideration of boundary value problems. (Russian), Application of new methods of analysis to differential equations, 46-51,108, Kach. Metody Kraev. Zadach, Voronezh State Univ., Voronezh 1989. MR 91c:47021

167. (with L'vin S. Ya.), Solution of overdetermined and under-determined elliptic problems in the case of nonsmooth data, Ukrain. Mat. Zh. 41(1989), no. 9, 1222-1225, 1294; translation in Ukrainian Math. J. 41 (1989), no. 9, 1053-1056 MR 91b:35080

168. (with Chan Tkhu Kha), The problem of the flow of a nonuni-formly heated viscous fluid, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* 29 (1989), no. 8, 1153-1158 (In Russian) MR 90m:35154 1990
169. (with Fomin V. I.), Small perturbations of singular differential equations with unbounded operator coefficients, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 314 (1990), no. 1, 77-79; translation in *Soviet Math. Dokl.* 42 (1991), no. 2, 313-315. MR 92e:34076
170. (with Tovbis A. I.), Linear singular differential equations in finite-dimensional and Banach spaces, *Algebra i Analiz* 2 (1990), no. 5, 1-62; translation in *Leningrad Math. J.* 2 (1991), no. 5, 931-985. MR 92e:34003
171. (with Utochkina E. O.), An implicit canonical equation in a Hilbert space, *Ukrain. Mat. Zh.* 42(1990), no. 3, 388-390; translation in *Ukrainian Math. J.* 42 (1990), no. 3, 345-347. MR 91d:34062 1991
172. (with Birman M. Sh., Ladyzhenskaya O. A., Rozenblyum G. V., and Safarov Yu. G.), Mikhail Zakharovich Solomyak (on the occasion of his sixtieth birthday), *Uspekhi Mat. Nauk* 46 (1991), no. 4(280), 183-184; translation in *Russian Math. Surveys* 46 (19 91), no. 4, 217-219. MR 92k:01025
173. (with Vasil'ev V. V. and Piskarev S. I.), Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations. *Ito-gi Nauki i Tekhniki, Mathematical analysis, Vol. 28*, 87-202, 204, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz.Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990. Translated in *J. Soviet Math.* 54(1991), no. 4, 1042-1129. MR 91k:47094 1994
174. (with Belyaeva, Elena V.), Homogeneous Volterra operator equations with a regular singularity, *russian J. Math. Phys.* 2 (1994), no. 1, 3-12. MR 95h:45001 1995
175. (with Venevitina), Small motions of an elastic medium in an open immobile container, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* 35 (1995), no. 7, 1095-1107-translation in *Comput Math. Math. Phys.* 35 (1995), no. 7, 875-884.

## **Литература**

1. Е.Ю. Дробченко, Е.С. Романенко, Б.Н. Садовский Материалы к истории математического факультета ВГУ—Сб. трудов, Воронеж: Воронежский университет, 1998, 118 с.
2. Воспоминания о Крейне Сборник (Ответственный редактор Е.М. Семенов) Воронеж: ВорГУ, 2002—104 с.

## Содержание

От редакции .....	3
Воспоминания учеников и коллег С.Г. Крейна .....	9
Ю.М. Березанский.....	18
И. Брискин. ....	24
Свет, который всегда со мной .....	24
В. П. Глушко .....	27
О моем учителе .....	27
М.Г. Зайндеберг .....	31
Об С. Г. ....	31
В.И.Кононенко .....	37
ДВА СЛОВА О СЕЛИМЕ ГРИГОРЬЕВИЧЕ КРЕЙНЕ, НАШЕМ УЧИТЕЛЕ В МАТЕМАТИКЕ И ЖИЗНИ .....	37
Н.Д. Копачевский .....	40
В.А. Костин .....	50
П.А. Кучмент.....	53
Л.М. Лихтарников.....	57
Е.М. Семенов .....	62
С.А. Складнев .....	67
К. И. Чернышев .....	68
С.Д. Эйдельман .....	82
С. Якубов.....	89
С.Г. Крейн.....	99
Из истории Воронежской математики .....	99
Предыстория.....	100
Гидродинамический стимул.....	101
Семинар в ВЛТИ .....	102
Расширенное заседание семинара по функциональному анализу .....	103
Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах .....	105
Ну, а что же с гидродинамикой?.....	108
Еще раз о семинаре в ВЛТИ.....	108
Некорректные задачи .....	110
Интерполяция линейных операторов.....	111
Теоремы о гомеоморфизмах .....	113
Советско-американский симпозиум .....	113
Еще раз о гидродинамике .....	113
О других работах М.А.Красносельского .....	114
Приезд С.Д.Эйдельмана .....	115
Воронежская зимняя математическая школа .....	116
Предыстория.....	117
Первая школа.....	118
Вторая школа .....	118
Третья школа .....	120
Совещание в Минвузе РСФСР .....	120
Шестая школа .....	121
Седьмая школа .....	122
О значении школы .....	122
Организация института математики .....	124
Список трудов С.Г. Крейна .....	130

