一、导数

1.导数的定义：

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处及其左右近旁有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量： $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

若当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

若 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ / $y'|_{x=x_0}$ / $\frac{dy}{\Delta x}\Big|_{x=x_0}$ / $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

2、导数的基本公式：ΔΔΔ

1. $(C)'=0$
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)'=a^x\ln a$
4. $(e^x)'=e^x$
5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
7. $(\sin x)'=\cos x$
8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $(\tan x)'=\sec^2 x$
10. $(\cot x)'=-\csc^2 x$
11. $(\sec x)'=\sec x\tan x$
12. $(\cancel{\sec}\csc x)'=-\csc x\cot x$
13. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
14. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

3.左，右导数的定义：

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

$=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

左、右导数与导数的关系：

$$f'(x_0)\text{存在}\iff f'_-(x_0)=f'_+(x_0).$$

注：①求分段函数在分段点的导数，一般应用左，右导数讨论.

②如果左，右导数任意之一不存在或左，右导数存在但不相等，则 $f(x)$ 在该点不可导.

[例] $y=|x|$在点$x=0$处是否可导？

解析：$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以函数$y=|x|$在$x=0$处不可导.

4. 可导与连续性的关系：

①若函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则函数$y=f(x)$一定在点x_0处连续，反之则不一定.

5. 切线的斜率：

①曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线方程为：

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

②过切点$(x_0, f(x_0))$且与切线垂直的直线称为曲线$y=f(x)$在点M处的法线. 若$f'(x_0)\neq 0$，则法线斜率为$-\frac{1}{f'(x_0)}$，所以曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的法线方程为：

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

[例] 求曲线$y=x^3$在点$(2,8)$处的切线方程和法线方程.

解析：$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=\left.3x^2\right|_{x=2}=12=k.$

切线方程：$y-8=12(x-2)$，$12x-y-16=0$.

法线方程：$y-8=-\frac{1}{12}(x-2)$，$x+12y-98=0$

6. 求导法则：

① $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

② $(uv)'=u'v+uv'$.

③ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

特例：$(Cu)'=Cu'$（C为常数）.

7. 反函数的导数：

若函数 $f(x)$ 在区间 A 内单调，可导，且 $f'(x)\neq 0$，则它的反函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $A'=\{x\mid f(x),\ x\in A'\}$ 内也可导：$\frac{1}{f'(x)}$.

8. 复合函数求导：△△△

链式法则：设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

[例] $\left(e^{\sin^2\frac{1}{x}}\right)'$

$$=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

9. 高阶导数：

定义：若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，则称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作：$y''\ /\ f''(x)\ /\ \frac{d^2y}{dx^2}\ /\ \frac{d^2f}{dx^2}$.

莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

特殊函数的导数：① $(e^x)^{(n)}=e^x$

② $(x^{n-1})^{(n)}=0$.

③ $(\sin x)^{(n)}=\sin x+n\frac{\pi}{2}$.

④ $(\cos x)^{(n)}=\cos x+n\frac{\pi}{2}$.

⑤ $[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)}{(1+x)^n}$.

一、隐函数的导数：△△△△△

方法：求由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 y' 时，将方程 $F(x,y)=0$ 的两边同时对自变量 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，y 的函数则是 x 的复合函数，利用导数的基本公式，函数和、差、积、商的求导法则，以及复合函数的求导法则，解出 y'，就得到隐函数的导数。

注： 隐函数 y 的导数 y' 中会含有 y。

[例1] 求椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 在点 $(\frac{3\sqrt{3}}{2},1)$ 处的切线方程和法线方程。

解析：对方程两边同时对 x 求导，有

$$\frac{2x}{9}+\frac{2yy'}{4}=0,\quad y'=-\frac{4x}{9y}.$$

椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 在点 $(\frac{3\sqrt{3}}{2},1)$ 处的切线斜率和法线斜率分别为：

$$k_{切}=y'\Big|_{\substack{x=\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ y=1}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\quad k_{法}=-\frac{1}{k_{切}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

切线方程为：$y-1=-\frac{2\sqrt{3}}{2}(x-\frac{3\sqrt{3}}{2})$，$\frac{2\sqrt{3}}{2}x+y-4=0$.

法线方程为：$y-1=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{3\sqrt{3}}{2})$，$\frac{\sqrt{3}}{2}x-y-\frac{5}{4}=0$.

[例2] 设 $y=\operatorname{arccot}(x^2+y)$，求 y'.

解析：方程两边同时对 x 求导，有

$$y'=-\frac{1}{1+(x^2+y)^2}(2x+y')$$

$$y'=-\frac{2x}{2+(x^2+y)^2}.$$

[例3] 求由方程 $xe^x-y=0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 y''.

解析：方程两边同时对 x 求导，有

$$e^y+xe^yy'-y'=0,\quad y'=\frac{e^y}{1-xe^y}.$$

上式两边同时对 x 求导，有

$$e^yy'+e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''-y''=0,\quad y''=\frac{e^yy'(2+xy')}{1-xe^y}.$$

将 y' 代入上式，整理得：$y''=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$.

二、参数方程求导：▲▲▲▲▲

方法：在式$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$中，如果函数$x=\varphi(t)$具有单调连续反函数$t=\varphi^{-1}(x)$，且此反函数与函数$y=\psi(t)$构成复合函数，那么由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$所确定的函数可以看成由函数$y=\psi(t)$，$t=\varphi^{-1}(x)$复合成的函数$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$. 因此根据复合函数的求导法则与反函数的求导法则，有：

$$\boxed{\frac{dy}{dx}}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

[例1] 求由参数方程$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$所确定的函数$y$的导数$\frac{dy}{dx}$.

解析：$\because y'(t)=b\cos t$，$x'(t)=-a\sin t$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t.$$

$(\cot x=\frac{1}{\tan x})$.

[例2] 求摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$在$t=\frac{\pi}{2}$时相应点处的切线方程.

解析：当$t=\frac{\pi}{2}$时，摆线上相应点的坐标为$P\left((\frac{\pi}{2}-1)a, a\right)$，

$\because y'(t)=a\sin t$，$x'(t)=a(1-\cos t)$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

所以，摆线在点P的导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1.$$

因此，摆线在点P处的切线方程为

$$y-a=x-(\frac{\pi}{2}-1)a.$$

即$y=x+(2-\frac{\pi}{2})a$.

三、对数求导法

1. $a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b$

2. $\log_a(M\cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

3. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

4. $\ln a^b = \cancel{b\ln} b\ln a$. $(a^b = b\ln a)$.

[例1] 求 $y = x^x \ (x>0)$ 的导数.

解析：等号两边同时取自然对数，得

$$\ln y = x\ln x.$$

上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1.$$

所以 $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

[例2] 求函数 $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$ 的导数.

解析：等号两边同时取自然对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x+3) - \ln(x+4)]$$

上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right).$$

$$y' = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right).$$

四、微分

1.定义：若函数$y=f(x)$在点x_0处具有导数$f'(x_0)$，则称$f'(x_0)\Delta x$为$y=f(x)$在点x_0处的微分，记作dy，即$dy=f'(x_0)\Delta x$。

①函数的微分与自变量的微分之商等于该函数的导数，因此导数也称微商。

② $f(x)$在x_0处可微 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$在x_0处可导

$dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$，$\Delta x=dx$，$\Delta y\approx dy$。

2.微分的基本公式：

1. $d(C)=0$
2. $d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx$
3. $d(a^x)=a^x\ln a\,dx$
4. $d(e^x)=e^x dx$
5. $d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$
6. $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$
7. $d(\sin x)=\cos x\,dx$
8. $d(\cos x)=-\sin x\,dx$
9. $d(\tan x)=\sec^2 x\,dx$
10. $d(\cot x)=-\csc^2 x\,dx$
11. $d(\sec x)=\sec x\tan x\,dx$
12. $d(\csc x)=-\csc x\cot x\,dx$
13. $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
14. $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
15. $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$
16. $d(\text{arccot}\,x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$。

3.四则运算：

①$d(u\pm v)=du\pm dv$。 ②$d(uv)=udv+vdu$。 ③$d(Cu)=Cdu$。 ④$d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}\ (v\neq0)$。

4.一阶微分形式不变性：

不论x是自变量还是中间变量，函数$y=f(x)$的微分总是同一个形式：$dy=f'(x)dx$。

5.求微分：

[例1] 求函数$y=\frac{1-x}{1+x}$的微分dy。

解析：$dy=y'dx=(\frac{1-x}{1+x})'dx=-\frac{2}{(1+x)^2}dx$。

[例2] 求$x^2+2xy-y^2=2x$的微分dy。

解析：$2x+2y+2xy'-2yy'=2$

$y'=\frac{1-x-y}{x-y}$，$dy=y'dx=(\frac{1-x-y}{x-y})dx$。