Notebook_3

March 31, 2020

1 Raumluftqualität 3.0

In realen Gebäuden gibt es immer einen Luftaustausch mit der Umgebung. In modernen Gebäuden ist dieser aufgrund der hochwertigen Abdichtung nach einem Blowerdoortest sehr gering. Dann müssen Gebäude mechanisch belüftet werden, um Schadstoffe abzutransportieren und die Räume mit frischer Außenluft zu versorgen.

Wird ein Gebäude belüftet, so lässt sich bei bekannter Schadstoffproduktion und bei bekannten Konzentrationen der Raumluft und der Außenluft berechnen, welcher Volumenstrom zur Belüftung erforderlich ist.

Dazu diente die Gleichgewichtsbetrachtung, dass aus dem Raum genauso viel Schadstoff über die Abluft abtransportiert werden muss, wie über die Außenluft und durch die Schadstoffquellen zugeführt wird.

Der erforderliche Außenluftvolumenstrom ist:

$$\dot{V}_{\mathrm{au}} = \frac{\dot{V}_{sch}}{k_{zul} - k_{\mathrm{au}}}.$$

Im nächsten Schritt wird die Frage untersucht, wie sich die Schadstoffkonzentration in einem belüfteten Raum im Laufe der Zeit verändert. Dazu gehen wir zunächst von einem gut durchlüfteten Raum aus. Die CO_2-Konzentration in einem gut durchlüfteten Raum wird mit der CO_2-Konzentration der Außenluft übereinstimmen. Zu Beginn ist also

$$k_0 = k_{\mathrm{a}u}$$

Zu einer beliebigen Zeit t lässt sich die Schadstoffkonzentration $k(t)$ der Raumluft nach der folgenden Funktion berechnen:

$$k(t) = k_\infty + (k_0 - k_\infty) \cdot \mathrm{e}^{-\beta\,(t-t_0)}$$

Dabei ist k_∞ der Endwert, der sich nach (theoretisch unendlich) langer Zeit einstellt. Das Zeichen ∞ wird mathematisch als “Unendlich” gelesen. k_0 ist der Startwert zur Zeit $t = t_0$, wobei meistens $t_0 = 0$ gesetzt wird. Manchmal ist es aber bequem, nicht bei $t_0 = 0$ beginnen zu müssen, sondern zu einer beliebigen Zeit.

In einem gut durchlüfteten Raum ist $k_0 = k_{\mathrm{au}} \approx 400\,\mathrm{ppM}$.

Der Wert k_∞ ist die Schadstoffkonzentration, die sich im Gleichgewicht zwischen Schadstoffzufuhr und -abtransport ergibt. Sie ist bekannt, wenn der Außenluftvolumenstrom $\dot{V}_{au}$ und die Schadstoffproduktion $\dot{V}_{\mathrm{sch}}$ bekannt sind. Es ist nämlich

$$\dot{V}_{\mathrm{a}u} = \frac{\dot{V}_{sch}}{k_\infty - k_{\mathrm{a}u}}$$

Nach k_∞ umgestellt, ergibt sich

$$k_\infty = k_{\mathrm{a}u} + \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}ch}}{\dot{V}_{\mathrm{au}}}$$

1.0.1 Beispiel

Ein Gebäude mit einer Grundfläche von $150\,\mathrm{m}^2$ und einer Geschosshöhe von $2.50\,\mathrm{m}$ wird mit $180\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ Außenluft belüftet. Zu Beginn ist die Schadstoffkonzentration $k_0 = 400\,\mathrm{p}pM$. Der Schadstoffvolumenstrom ist $540\,\frac{\ell}{\mathrm{h}}$ CO_2.

Berechnen Sie, welche Schadstoffkonzentration sich im Gebäude einstellt und stellen Sie den zeitlichenn Verlauf von $k(t)$ für einen 8-Stundentag dar.

Lösung Zunächst wird das Raumvolumen berechnet. Es ergibt sich zu

$$V_{\mathrm{ra}} = 150 \cdot 2.5\,\mathrm{m}^2 = 375\,\mathrm{m}^2$$

oder, mittels Jupyter:

[1]:
```
# Raumvolumen
V_ra = 150*2.5 # m**3
V_ra
```

[1]: 375.0

Im nächsten Schritt wird daraus die CO_2-Konzentration k_∞ ermittelt:

$$k_\infty = k_{\mathrm{au}} + \frac{\dot{V}_{\mathrm{sch}}}{\dot{V}_{\mathrm{ra}}} = 400\,\mathrm{ppM} + \frac{540 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{375\,\mathrm{m}^3} = 3400\,\mathrm{ppM}$$

oder, mittels Jupyter:

[2]:
```
# Schadstoffvolumenstrom (CO_2):
dV_sch = 540e-3 # 180 l/h

# CO_2-Konzentration der Außenluft
k_0 = 400e-6 # 400 ppM
```

```
# bekannter Außenluftvolumenstrom
dV_au = 180 # m**3/h

# Daraus berechneter Endwert der Konzentration
k_inf = k_0 + dV_sch/dV_au

# Kontrollausgabe in ppM
k_inf*1e6 # ppM
```

[2]: 3400.0000000000005

Die Luftwechselzahl ergibt sich durch

$$\beta = \frac{\dot{V}_{\text{au}}}{V_{\text{ra}}} = 0.48\,\frac{1}{\text{h}}$$

oder, mittels Jupyter:

[3]:
```
# Luftwechselzahl beta:
beta = dV_au/V_ra # 1/h
beta
```

[3]: 0.48

Für das Plotten wird hier nur das Jupyter Notebook verwendet:

[4]:
```
# Plotten vorbereiten
from matplotlib import pyplot as plt
%config InlineBackend.figure_format='retina'

import pandas as pd
import numpy as np
```

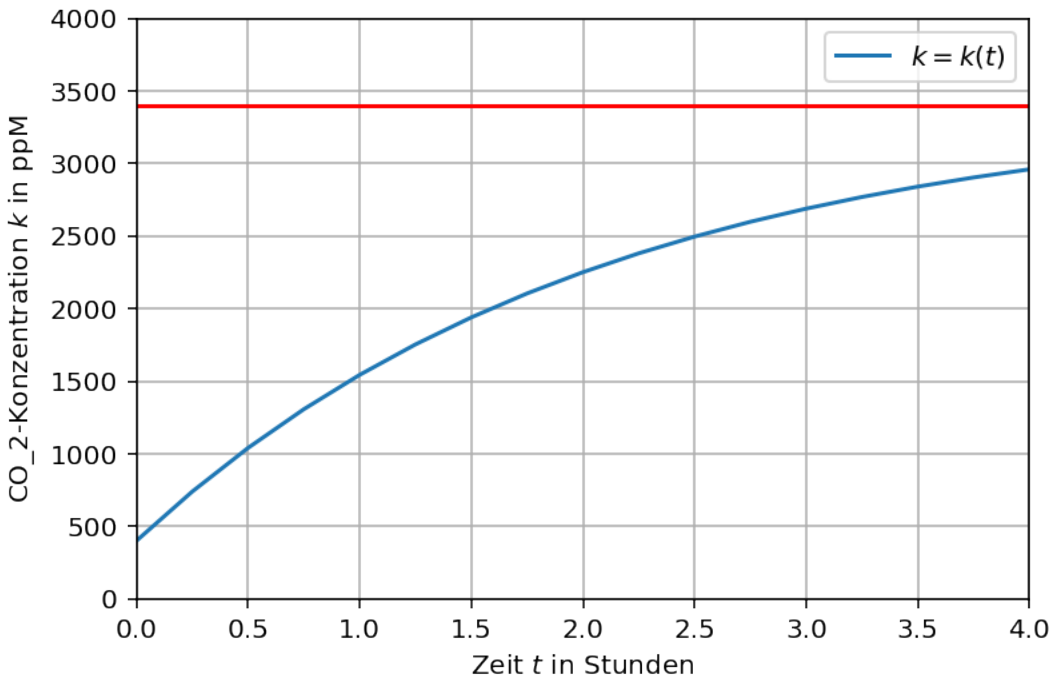
[11]:
```
# Das Zeitintervall auf der x-Achse:
lt = np.linspace(0,4,17) # 0..4h

# Der Dataframe
df = pd.DataFrame(
    {
        't': lt,
        'k': 1e6*(k_inf + (k_0-k_inf)*np.exp(-beta*lt)) # k in ppM
    }
)

# Kontrollausdruck
df.head().T
```

[11]:

	0	1	2	3	4
t	0.0	0.25000	0.500000	0.750000	1.000000
k	400.0	739.23869	1040.116417	1306.971022	1543.649825

[17]:

```python
# Zeitliche Entwicklung der CO_2-Konzentragion im Diagramm
ax = df.plot(x='t',y='k',label="$k = k(t)$")
ax.axhline(1e6*k_inf,c='r')
ax.grid()
ax.set(
    ylim=(0,4000), ylabel=r'CO_2-Konzentration $k$ in $\mathrm ppM$',
    xlim=(0,4), xlabel=r'Zeit $t$ in Stunden'
);
```



Man erkennt, dass bereits nach etwa 30 Minuten die Grenze von 1000 ppM erreicht wird. Nach etwas über 90 Minuten ist die Raumluftqualität nicht mehr akzeptabel.

1.1 Die Schadstoffbilanz des Raumes nach einem Zeitschritt

Herleitung der Lösung.

Im nächsten Schritt wird untersucht, wie sich k verändert, nachdem der Raum eine bestimmte Zeit Δt belüftet worden ist.

- Von den Personen (oder sonstigen Schadstoffquellen) im Raum wird eine bestimmte Schadstoffmenge abgegeben, nämlich

$$\dot{V}sch \cdot \Delta t$$

- Mit der Außenluft wird eine bestimmte Schadstoffmenge in den Raum hineingetragen, nämlich

$$k_{au} \cdot \dot{V}_{au} \cdot \Delta t$$

- Mit der Abluft wird eine bestimmte Schadstoffmenge aus dem Raum herausgetragen, nämlich

$$k_0 \cdot \dot{V}_{ab} \cdot \Delta t$$

Damit ergibt sich:

$$k_1 \cdot V_{ra} = k_0 \cdot V_{ra} + \dot{V}sch \cdot \Delta t + k_{au} \cdot \dot{V}_{au} \cdot \Delta t - k_0 \cdot \dot{V}_{ab} \cdot \Delta t$$

Oder, wenn durch das Raumvolumen dividiert wird:

$$k_1 = k_0 + \frac{\dot{V}sch}{V_{ra}} \cdot \Delta t + k_{au} \cdot \frac{\dot{V}_{au}}{V_{ra}} \cdot \Delta t - k_0 \cdot \frac{\dot{V}_{ab}}{V_{ra}} \cdot \Delta t$$

Nun ist $\frac{\dot{V}_{au}}{V_{ra}} = \frac{\dot{V}_{ab}}{V_{ra}} = \beta$ gerade die Luftwechselzahl des Raumes. Deshalb ist

$$k_1 = k_0 + \frac{\dot{V}sch}{V_{ra}} \cdot \Delta t + k_{au} \cdot \beta \cdot \Delta t - k_0 \cdot \beta \cdot \Delta t$$

oder, zusammengefasst:

$$k_1 = k_0 \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + \left(\frac{\dot{V}sch}{V_{ra}} + k_{au} \cdot \beta \right) \cdot \Delta t$$

Genau so, wie k_1 aus k_0 berechnet wurde, lässt sich k_2 aus k_1 berechnen, u.s.w. Das führt der Reihe nach auf

$$k_1 = k_0 \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + \left(\frac{\dot{V}\mathrm{s}ch}{V_{\mathrm{r}a}} + k_{\mathrm{a}u} \cdot \beta \right) \cdot \Delta t \tag{1}$$

$$k_2 = k_1 \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + \left(\frac{\dot{V}\mathrm{s}ch}{V_{\mathrm{r}a}} + k_{\mathrm{a}u} \cdot \beta \right) \cdot \Delta t \tag{2}$$

$$k_3 = k_2 \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + \left(\frac{\dot{V}\mathrm{s}ch}{V_{\mathrm{r}a}} + k_{\mathrm{a}u} \cdot \beta \right) \cdot \Delta t \tag{3}$$

$$k_4 = k_3 \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + \left(\frac{\dot{V}\mathrm{s}ch}{V_{\mathrm{r}a}} + k_{\mathrm{a}u} \cdot \beta \right) \cdot \Delta t \tag{4}$$

$$\vdots \tag{5}$$

$$= \tag{6}$$

$$\vdots \tag{7}$$

$$k_n = k_{n-1} \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + \left(\frac{\dot{V}\mathrm{s}ch}{V_{\mathrm{r}a}} + k_{\mathrm{a}u} \cdot \beta \right) \cdot \Delta t \tag{8}$$

Da der Unterschied zwischen k_n und k_{n-1} immer kleiner wird, gilt schließlich

$$k_\infty = k_\infty \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + \left(\frac{\dot{V}\mathrm{s}ch}{V_{\mathrm{r}a}} + k_{\mathrm{a}u} \cdot \beta \right) \cdot \Delta t \tag{9}$$

wobei der Wert k_∞ nach (theoretisch) unendlich langer Zeit erreicht wird.

Bildet man nun die Differenzen $k_1 - k_\infty$, $k_2 - k_\infty$, $\ldots$ $k_{n+1} - k_\infty$, so ergeben sich die einfacheren Formeln

$$\begin{aligned}
k_1 - k_\infty &= (k_0 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) && (10)\\
k_2 - k_\infty &= (k_1 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) = (k_0 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t)^2 && (11)\\
k_3 - k_\infty &= (k_2 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) = (k_0 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t)^3 && (12)\\
k_4 - k_\infty &= (k_3 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) = (k_0 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t)^4 && (13)\\
&\vdots && (14)\\
&= && (15)\\
&\vdots && (16)\\
k_n - k_\infty &= (k_{n-1} - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) = (k_0 - k_\infty) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t)^n && (17)\\
& && (18)
\end{aligned}$$

Lässt man nun das Zeitintervall Δt immer kleiner werden, so werden immer mehr Zeitschritte benötigt, um den Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t$ zu erreichen. Es ergibt sich

$$t = n \cdot \Delta t \implies \Delta t = \frac{t}{n}$$

und, mit der Eulerschen Formel für die Funktion e^x, nach der

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$$

ist:

$$(1 - \beta \cdot \Delta t)^n = \left(1 - \frac{\beta\, t}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-\beta\, t} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Wegen $n \cdot \Delta t = t$ kann man k_n durch $k(t)$ ersetzen. Damit ergibt sich schließlich die Formel

$$k(t) - k_\infty = (k_0 - k_\infty) \cdot \mathrm{e}^{-\beta\, t}$$

Dies Ergebnis schreibt man auch in der Form

$$k(t) = k_\infty + (k_0 - k_\infty) \cdot \mathrm{e}^{-\beta\, t}$$