Matematyka dyskretna I

Wojciech Wieczorek

ATH

Wykład 9: Notacja asymptotyczna i tw. o rekurencji uniwersalnej

Duże O, Θ i Ω

Dla danych funkcji $f, g\colon N \to R_+ \cup \{0\}$ przez $\Theta(g(n))$ rozumiemy

$\Theta(g(n)) = \{f(n)\colon$ istnieją dodatnie stałe rzeczywiste $c_1, c_2 > 0$ i liczba naturalna n_0 takie, że $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ dla wszystkich $n \ge n_0\}$.

Przez $O(g(n))$ rozumiemy zbiór funkcji

$O(g(n)) = \{f(n)\colon$ istnieją dodatnia stała rzeczywista c i liczba naturalna n_0 takie, że $f(n) \le c g(n)$ dla wszystkich $n \ge n_0\}$.

$f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$.

Twierdzenie 1

Oto hierarchia pewnych znanych ciągów uporządkowanych w ten sposób, że każdy z nich jest O od wszystkich ciągów na prawo od niego:

$$1, \log_2 n, \ldots, \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n \log_2 n, n\sqrt{n}, n^2, n^3, \ldots, 2^n, n!, n^n.$$

Własności do zapamiętania

1. Jeśli $f(n) = O(g(n))$ i c jest stałą, to $c \cdot f(n) = O(g(n))$.

2. Dla dowolnych ciągów $a(n)$ i $b(n)$ mamy

- $O(a(n)) + O(b(n)) = O(\max\{a(n), b(n)\})$.
- $O(a(n)) \cdot O(b(n)) = O(a(n) \cdot b(n))$.

3. Dla dowolnych dwóch funkcji $f(n)$ i $g(n)$ zachodzi zależność $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) = O(g(n))$ i $f(n) = \Omega(g(n))$.

Duże O a wielomiany

4. Jeśli

$$P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m$$

jest wielomianem stopnia m, to $P(n) = O(n^m)$.

Inne użyteczne własności

5. Jeśli $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, to $g(n) = O(f(n))$, ale nie $f(n) = O(g(n))$.
6. Jeśli $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ gdzie $c \neq 0$ oraz $c \neq \infty$, to $f(n) = \Theta(g(n))$.
7. Jeśli $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, to $f(n) = O(g(n))$, ale nie $g(n) = O(f(n))$.
8. Reguła de L'Hospitala: niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą określone i różniczkowalne oraz $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x > c$; jeżeli $\lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$ i $\lim_{x \to +\infty} g(x) \to +\infty$, ale istnieje granica $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Twierdzenie 2 (o rekurencji uniwersalnej)

Niech $a \geq 1$ i $b > 1$ będą stałymi, niech $f(n)$ będzie pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie zdefiniowane dla nieujemnych liczb całkowitych przez rekurencję $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, gdzie n/b oznacza $\lfloor n/b \rfloor$ lub $\lceil n/b \rceil$. Wtedy funkcja $T(n)$ może być ograniczona asymptotycznie w następujący sposób.

1. Jeżeli $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ dla pewnego $\epsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Jeżeli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Jeżeli $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ dla pewnego $\epsilon > 0$ i jeśli $af(n/b) \leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$ i wszystkich dostatecznie dużych n, to $T(n) = \Theta(f(n))$.

Sumowanie iterowane

Dla każdego $k = 2, 3, \ldots$ oraz każdego zespolonego z definiuje się indukcyjnie operator $\mathit{\Delta}_z^{-k}$ jako

$$\mathit{\Delta}_z^{-k} f_n = \mathit{\Delta}_z^{-1}(\mathit{\Delta}_z^{-k+1} f_n)$$

przy czym operator $\mathit{\Delta}_z^{-1}$ został zdefiniowany wzorem

$$\mathit{\Delta}_z^{-1} f_n = F_n, \quad \text{gdy} \quad \mathit{\Delta}_z F_n = f_n.$$

Jeszcze jeden typ rekurencji

Rozważmy równanie

$$f_{n+k} - a_1 f_{n+k-1} - a_2 f_{n+k-2} - \ldots - a_k f_n = h_n,$$

w którym współczynniki a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ są stałe, wyraz zaś wolny h_n jest zmienny i dowolny.

Metoda rozwiązywania

Wprowadźmy funkcję $p(z)$ w postaci $p(z) = z^k - \sum_{i=1}^{k} a_i z^{k-i}$. Niech z_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ będą pierwiastkami wielomianu $p(z)$ o krotności α_i
Rozwiązaniem ogólnym jest

$$f_n = g_n + H_n,$$

gdzie g_n jest ogólnym rozwiązaniem równania jednorodnego $f_{n+k} - a_1 f_{n+k-1} - \ldots - a_k f_n = 0$, a

$$H_n = \prod_{i=1}^{t} \Delta_{z_i}^{-\alpha_i} h_n.$$