微分方程实验二：二次有限元方法求解两点边值问题

15336134 莫凡

2018 年 4 月 12 日　Ver. 2

0　更新说明

更正了刚度矩阵子矩阵的计算，删去原来计算重复的部分, 得到了更为准确的结果
使用 Mathematica 计算出了正确的答案，并与程序答案进行对比
放弃了具有数值问题的雅可比迭代

1　实验假设

这次实验是实验一：使用线性有限元求解两点边值问题的改进。使用二次有限元方法求解两点边值问题

$$Lu = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu = f \quad x \in (a, b)$$
$$u(a) = 0, u'(b) = 0 \tag{1}$$

仍然假设具体问题为书后 P47 中的

$$p = 1,\ q = \frac{\pi^2}{4},\ f = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x,\ a = 0,\ b = 0 \tag{2}$$

（只是为了测试方便，程序可以在任意问题上运行）

2　理论分析与实验过程

通过 Galerkin 方法推导出二次函数插值的方程组。首先通过拉格朗日插值得到函数 $\varphi_i(x)$ 和 $\varphi_{i.5}(x)$，有

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \left(2\dfrac{x_i - x}{h_i} - 1\right)\left(\dfrac{x_i - x}{h_i} - 1\right) & x_{i-1} \le x < x_i \\ \left(2\dfrac{x - x_i}{h_{i+1}} - 1\right)\left(\dfrac{x - x_i}{h_{i+1}} - 1\right) & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

$$\varphi_{i.5}(x) = \begin{cases} 4\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\left(1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\right) & x_i \le x \le x_{i+1} \\ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

接下来对他们求导数

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{3h_i+4x-4x_i}{h_i^2} & x_{i-1} \le x < x_i \\ \\ \dfrac{-3h_{i+1}+4x-4x_i}{h_{i+1}^2} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

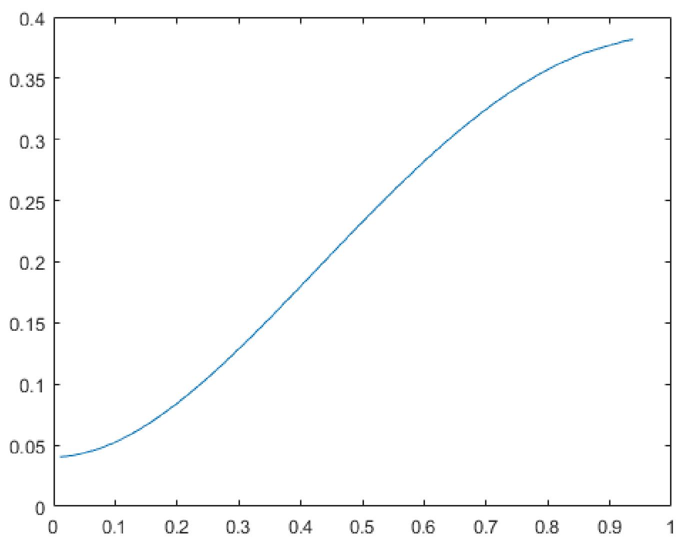
$$\varphi_{i.5}'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3h_{i+1}+4x-4x_i}{h_{i+1}^2} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

通过 Galerkin 方程可以发现，刚度矩阵是若干个 3×3 的对称矩阵摆在对角线上相加。每个元素可以表示成双线性积分。公式实在是太长了就不打上来了。

最后得到刚度矩阵，由于它显然是一个严格对角占优的大型稀疏矩阵，所以最后使用 Jacobi 方法求出方程的解。具体流程请参见代码及其中简明注释。

3 实验结果

通过运行程序，得到了如下结果

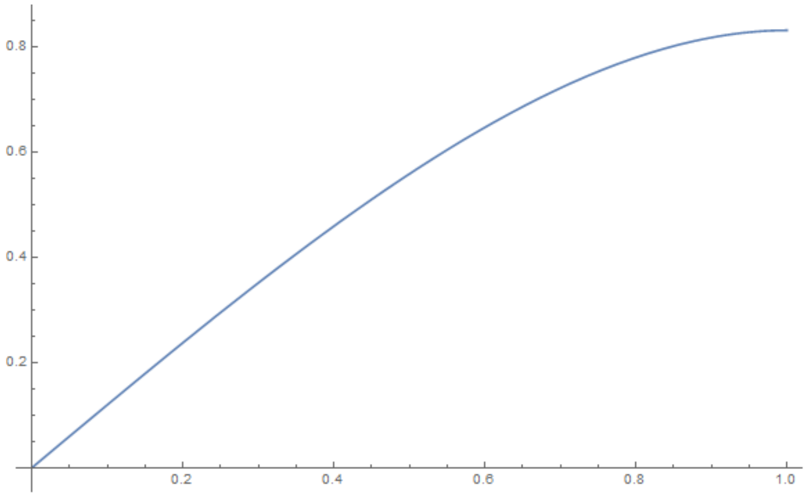


使用 Mathematica 得到此问题的解析解

$$u(x) = 2x + ae^{\frac{\pi x}{2}} - ae^{\frac{\pi x}{2}} \tag{7}$$

其中 $a = -0.253716$

图像如下



发现结果的主要问题在于函数值偏小。有可能是边值条件不满足造成的解析解中常数的偏差较大。

4 实验心得

要时刻注意数组下标加一减一的问题。MATLAB 的函数句柄在判断返回值类型的时候会出现一些问题。要善于利用多种多样的计算工具。讨论有助于交流经验及发现问题。

今后会对此实验以及之前的实验一进行进一步的更新

5 附件

- script.m 运行主脚本
- solve.m 二次元方法程序
- phi_i.m φ_i 函数的实现
- phi_i_5.m $\varphi_{i.5}$ 函数的实现
- dphi_i.m φ_i 函数的导数
- dphi_i_5.m $\varphi_{i.5}$ 函数的导数
- plotans.m 用于展现最终插值结果