微分方程实验一：线性有限元方法求解两点边值问题

15336134 莫凡

2018 年 4 月 4 日

1 实验假设

使用线性有限元方法求解两点边值问题

$$\begin{gathered} Lu = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu = f \quad x \in (a, b) \\ u(a) = 0, u'(b) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

将问题具体化，假设问题为书后 P47 中的

$$p = 1,\ q = \frac{\pi^2}{4},\ f = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x,\ a = 0,\ b = 0 \tag{2}$$

2 实验过程

首先按照高斯分布随机一组 $(0, 1)$ 中的向量，排序去重之后得到 x
然后预处理出两点间隔距离向量 h，$Q_i = h_i^{-1}p(x_{i-1} + yh_i\xi)$ 以及 $\xi_i = \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}$
构建单元刚度矩阵

$$K^{(i)} = \begin{pmatrix} \int_0^1 [Q_i + h_i q(x_{i-1} + h_i\xi)(1-\xi)^2]\mathrm{d}\xi & \int_0^1 [-Q_i + h_i q(x_{i-1} + h_i\xi)\xi(1-\xi)]\mathrm{d}\xi \\ \int_0^1 [-Q_i + h_i q(x_{i-1} + h_i\xi)\xi(1-\xi)]\mathrm{d}\xi & \int_0^1 [Q_i + h_i q(x_{i-1} + h_i\xi)\xi^2]\mathrm{d}\xi \end{pmatrix} \tag{3}$$

然后求和得到一个刚度矩阵

$$K = \sum_{i=1}^{n} K^{(i)} \tag{4}$$

接下来令

$$\begin{cases} f_{i-1}^{(i)} = h_i \int_0^1 f(x_{i-1} + h_i\xi)(1-\xi)\mathrm{d}\xi \\ f_i^{(i)} = h_i \int_0^1 f(x_{i-1} + h_i\xi)\xi\mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{5}$$

$$b_i = f_i^{(i)} + f_i^{(i+1)}, b_n = f_n^{(n)} \tag{6}$$

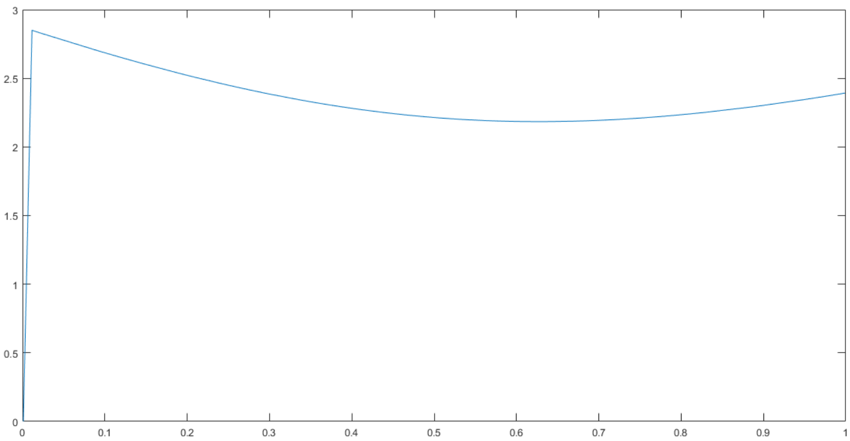
求解线性方程组

$$Ku = b \tag{7}$$

在具体实现中数值积分使用辛普森公式，线性方程组使用直接解法。由于 K 是大型对角矩阵，后期将改用高斯塞德尔迭代求解。目前 n 的规模限制在 100 以内，所以影响不大。具体见代码文件，不在此处粘贴代码

3 实验结果

得到的是一个近似的分段线性函数。采用画图的方法将其表示出来



除去左边的部分是由插值点的选取（高斯分布）、数值方法的误差导致，其余部分是一个近似光滑的函数，对比原函数解析解，基本合乎要求

4 附件

- linear_element.m 线性有限元方法程序
- script.m 运行主程序