数值最优化期末作业

15336134 莫凡

2018 年 1 月 30 日

目录

1 Problem 1

1.1 问题描述

求解二次规划问题

$$\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_4 - x_5)^2$$

$$s.t. \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 5 &= 0 \\ x_3 - 2(x_4 + x_5) + 3 &= 0 \end{aligned}$$

初始点 $x^{(0)} = (3, 5, -3, 2, -2)^T$ 为可行点，最优解 $x^* = (1, 1, 1, 1, 1)^T$

1.2 变量消去法

从等式约束中可以得到

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - 3x_4 - 3x_5 + 8 \\ x_3 &= 2x_4 + 2x_5 - 3 \end{aligned}$$

然后代入展开，可以得到

$$f(x) = 58 - 8x_2 + 2x_2^2 - 54x_4 + 2x_2x_4 + 14x_4^2 - 54x_5 + 2x_2x_5 + 24x_4x_5 + 14x_5^2$$

设

$$t = (x_2, x_4, x_5)^T$$

则 $\varphi(t) = f(x)$ 的梯度为

$$g(t) = \begin{bmatrix} -8 + 4t_1 + 2t_2 + 2t_3 \\ -54 + 2t_1 + 28t_2 + 24t_3 \\ -54 + 2t_1 + 24t_2 + 28t_3 \end{bmatrix}$$

Hessian 矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 28 & 24 \\ 2 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

计算 G 的特征值为 $\{2(14 + \sqrt{146}), 4, 2(14 - \sqrt{146})\}$ 均大于 0，所以 G 正定，问题是严格凸二次规划，有唯一全局最优解。

由一阶必要条件，最优解处一定有 $g(t) = 0$, 解得 $t = (1, 1, 1)^T$，代回解得 $x = (1, 1, 1, 1, 1)^T$，是唯一全局最优解,$f(x) = 0$

这个问题太简单了，所以没有代码。

1.3 Lagrange 方法

将二次规划改写为规范形式，

$$G = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ h = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

后面采用零空间方法求解方向

```
% 原问题
G = 2*[1 0 0 0 0; 0 1 -1 0 0; 0 -1 1 0 0; 0 0 0 1 -1; 0 0 0 -1 1];
h = [-2;0;0;0;0];
A = [1 0; 1 0; 1 1; 1 -2; 1 -2];
b = [5;-3];

% 对A进行QR分解
[Q, R] = qr(A);
Q1 = Q(1:5, 1:2);
Q2 = Q(1:5, 3:5);
R1 = R(1:2, 1:2);

x0 = [3; 5; -3; 2; -2];
Z = Q2;
A_ = Q1 * inv(R1)';

d = (Z' * G * Z) \ (-Z' * (h + G * x0));

x = x0 + Z * d;
disp('x=')
disp(x);
```

2 Problem 2

2.1 问题描述

$$\min f(x) = 9 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

$$s.t. \quad \begin{aligned} 2 - x_1 - x_2 - 2x_3 &\geq 0 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

初始点 $x^{(0)} = (0.5, 0.5, 0.5)^T$ 为可行点，最优解为 $x^* = (\frac{4}{3}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9})^T$

2.2 起作用集方法

Active-Set$(G, h, x^{(0)})$

Get the initial active set A

Solve the problem $\min \frac{1}{2} d^T G d + g_k^T d, \quad s.t. \;\; a_i d = 0$

where $g_k = Gx^{(k)} + h$

get d_k and λ

if $d_k = 0$ and $\lambda \geq 0$

    Break

else Remove the constraints related the minimal λ_i from active set

if $d_k \neq 0$

    $\alpha = \min(1, \{(b_i - a_i x^{(k)}/(a_i^T d_k)\})$

    $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d_k$

    goto 2

编程得到结果为

```
 时间已过 0.053027 秒。
迭代次数: 3
解为: xin=
1.333333
0.777778
0.444444
fmin=0.111111
```

3 SVM

3.1 算法描述

假设存在一个超平面 $W^T x + b$，将数据分成两部分。显然，大多数情况下这样的超平面并不存在，所以我们引入了支持向量机这个东西。

定义函数距离

$$\hat{\gamma_i} = \frac{1}{\|w\|} \gamma_i$$

其中 $\gamma_i = y(W^T x_i + b)$，表示样本点到超平面的函数距离

显然，当 w，b 乘以一个任意常数，函数距离随之变化，但几何距离不变。所以可以通过放缩使得最小函数距离为 1，问题转化为：

$$\max \hat{\gamma}$$

$$s.t. \quad y_i(W^T x_i + b) \geq 1 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

显然最小几何距离实际等于 w 的模长的倒数，得到如下等价的凸二次规划问题

$$\min \frac{1}{2} W^T W$$

$$s.t. \quad y_i(W^T x_i + b) \geq 1 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

采用 $l1$ 正则化，处理离群点，同时防止过拟合问题：

$$\min \frac{1}{2} w^T w + \alpha \sum_{i=1}^{m} \xi_i$$

$$s.t. \quad \begin{array}{rcll} y(W^T x_i + b) & \geq & 1 - \xi_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ \xi_i & \geq & 0 & i = 1, 2, \cdots, m \end{array}$$

直接将上述问题改写为二次规划并调用之前的算法即可

3.2 Problem SVM 1

运行程序得到结果

```
 number of iterations: 24
train accuracy: 0.856884
test accuracy: 0.855072
```

3.3 Problem SVM 2

运行程序得到结果

```
 number of iterations: 9
train accuracy: 0.789157
test accuracy: 0.809524
```

具体见程序