数值最优化期末作业

15336134 莫凡

2018 年 1 月 29 日

目录

1 Problem 1

1.1 问题描述

求解二次规划问题

$$\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_4 - x_5)^2$$

$$s.t. \quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 5 & = & 0 \\ x_3 - 2(x_4 + x_5) + 3 & = & 0 \end{array}$$

初始点 $x^{(0)} = (3, 5, -3, 2, -2)^T$ 为可行点，最优解 $x^* = (1, 1, 1, 1, 1)^T$

1.2 变量消去法

从等式约束中可以得到

$$x_1 = -x_2 - 3x_4 - 3x_5 + 8$$
$$x_3 = 2x_4 + 2x_5 - 3$$

然后代入展开，可以得到

$$f(x) = 58 - 8x_2 + 2x_2^2 - 54x_4 + 2x_2x_4 + 14x_4^2 - 54x_5 + 2x_2x_5 + 24x_4x_5 + 14x_5^2$$

设

$$t = (x_2, x_4, x_5)^T$$

则 $\varphi(t) = f(x)$ 的梯度为

$$g(t) = \begin{bmatrix} -8 + 4t_1 + 2t_2 + 2t_3 \\ -54 + 2t_1 + 28t_2 + 24t_3 \\ -54 + 2t_1 + 24t_2 + 28t_3 \end{bmatrix}$$

Hessian 矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 28 & 24 \\ 2 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

计算 G 的特征值为 $\{2(14 + \sqrt{146}), 4, 2(14 - \sqrt{146})\}$ 均大于 0，所以 G 正定，问题是严格凸二次规划，有唯一全局最优解。

由一阶必要条件，最优解处一定有 $g(t) = 0$, 解得 $t = (1, 1, 1)^T$，代回解得 $x = (1, 1, 1, 1, 1)^T$，是唯一全局最优解,$f(x) = 0$

1.3 Lagrange 方法

将二次规划改写为规范形式，

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&-1&-1\end{bmatrix},\ h=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&1\\1&-2\\1&-2\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$$