

数字图像处理

(Digital Image Processing)

核心知识点精炼笔记 5

东南大学计算机科学与工程学院
09023419 严伟琛

授课教师：薛澄

参考教材：拉斐尔·冈萨雷斯 (Rafael C. Gonzalez) 第四版

2026 年 1 月 15 日

目录

5 图像复原与重建 (Image Restoration and Reconstruction)	2
5.1 图像退化与复原模型	2
5.1.1 图像复原与图像增强的对比 (Restoration vs. Enhancement)	2
5.1.2 退化与复原的数学模型	2
5.1.3 复原的基本逻辑流程	2
5.2 噪声模型	3
5.2.1 噪声的空间特性与频率特性	3
5.2.2 常见的概率密度函数 (Probability Density Functions, PDF)	3
5.2.3 周期性噪声 (Periodic Noise)	4
5.2.4 噪声参数的估计 (Estimation of Parameters)	4
5.2.5 常用噪声及其处理对策总结	5
5.3 加性噪声——空间滤波	5
5.3.1 均值滤波器 (Mean Filters)	5
5.3.2 统计排序滤波器 (Order-Statistic Filters)	6
5.3.3 自适应滤波器 (Adaptive Filters)	6
5.3.4 空间滤波技术综合对比总结	7
5.4 周期噪声——频域滤波	7
5.4.1 陷波滤波器 (Notch Filter)	8
5.4.2 最优陷波滤波 (Optimum Notch Filtering)	8
5.4.3 频域滤波去噪总结表	9
5.5 复杂退化——滤波复原	9
5.5.1 估计退化函数 $H(u, v)$	9
5.5.2 逆滤波 (Inverse Filtering)	9
5.5.3 维纳滤波 (Wiener Filtering / Minimum Mean Square Error)	10
5.5.4 约束最小二乘方滤波 (Constrained Least Squares Filtering)	10
5.5.5 三种复原滤波器对比总结	10
5.5.6 例题 14: 反谐波均值滤波器的性质分析	10
5.6 图像重建	11
5.6.1 雷登变换 (Radon Transform)	11
5.6.2 中心切片定理 (Fourier-Slice Theorem)	11
5.6.3 重建算法: 从反投影到滤波反投影	12
5.6.4 CT 系统架构与技术演进	12
5.6.5 影响重建质量的退化因素	12
5.6.6 例题 15: 环形图像的雷登变换剖面分析	12
5.7 第五章核心重点问题总结	13

5 图像复原与重建 (Image Restoration and Reconstruction)

5.1 图像退化与复原模型

图像复原的主要目的是通过利用关于退化过程的先验知识，改善一幅发生了退化的图像。

5.1.1 图像复原与图像增强的对比 (Restoration vs. Enhancement)

虽然两者在改善图像视觉质量上有所重叠，但其核心思想完全不同：

表 1: 图像增强与复原的对比总结

特征	图像增强 (Image Enhancement)	图像复原 (Image Restoration)
核心目标	改善视觉效果，使图像更适合人类感知	恢复原始图像，尽可能逼近真实场景
理论基础	启发式、主观的处理技术	建模降质过程，数学化、客观的过程
退化原因	通常不考虑降质的具体原因	必须建立降质模型 并进行逆处理
性能衡量	主观评估（看起来更清晰、对比度高）	客观准则（如均方误差 MSE、信噪比）

5.1.2 退化与复原的数学模型

图像的退化过程可以建模为一个退化算子 H 和一个加性噪声项 $\eta(x, y)$ 。

- 空域表达式 (Spatial Domain):** 退化后的图像 $g(x, y)$ 可以表示为原始图像 $f(x, y)$ 与退化函数（点扩散函数） $h(x, y)$ 的卷积加上噪声：

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \quad (1)$$

其中，“*” 表示空间卷积。

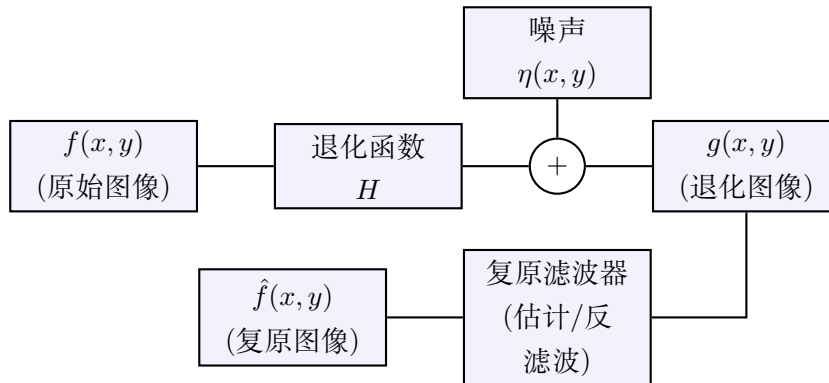
- 频域表达式 (Frequency Domain):** 由于空域卷积对应频域的点乘，上述模型可以简化为：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (2)$$

其中：

- $G(u, v)$: 退化图像的傅里叶变换。
- $H(u, v)$: **光学传递函数 (OTF)**，描述了系统对不同频率的衰减。
- $N(u, v)$: 加性噪声的傅里叶变换。

5.1.3 复原的基本逻辑流程



- **任务：**给定 $g(x, y)$ 以及关于 H 和 η 的一些知识，获得原始图像的估计值 $\hat{f}(x, y)$ 。
- **难点：**在很多实际场景中， $H(u, v)$ 和 $N(u, v)$ 是未知的，需要通过观察退化图像或特定的物理实验来估计。

5.2 噪声模型

图像中的噪声主要产生于图像的获取（数字化）和传输过程。为了有效地去除噪声，首先需要对其统计特性进行建模。

5.2.1 噪声的空间特性与频率特性

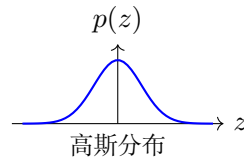
- **白噪声：**如果噪声的功率谱是常数，即在所有频率上分布均匀，则称为白噪声。
- **空间独立性：**通常假设噪声在空间上是独立的（除了周期性噪声外），且与图像本身的内容不相关。

5.2.2 常见的概率密度函数 (Probability Density Functions, PDF)

根据 PDF 的不同，常见的噪声模型包括：

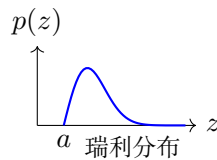
1. **高斯噪声 (Gaussian Noise)：**由于其数学上的易处理性，高斯噪声是最常用的模型，常用于模拟电路及感测器噪声。

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$$



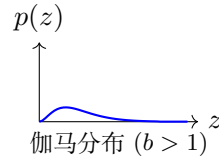
2. **瑞利噪声 (Rayleigh Noise)：**其分布不对称，且均值和方差相关。常用于距离成像 (Range Imaging) 分析。

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$



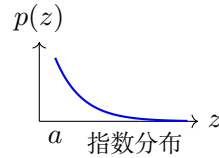
3. **伽马/爱尔兰噪声 (Erlang/Gamma Noise)：**其形态由参数 b 控制，常用于描述激光、雷达干扰噪声。

$$p(z) = \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} \quad (z \geq 0)$$



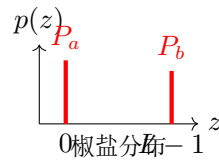
4. **指数噪声 (Exponential Noise)**: 是伽马噪声在 $b = 1$ 时的特例, 起始点处概率最大, 呈指数级衰减。

$$p(z) = ae^{-az} \quad (z \geq a)$$



5. **脉冲噪声 / 椒盐噪声 (Impulse Noise)**: 呈现为离散的尖峰。如果 P_a 或 P_b 很大, 图像会覆盖明显的黑点 (椒) 或白点 (盐)。

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



5.2.3 周期性噪声 (Periodic Noise)

与上述随机噪声不同, 周期性噪声在空间域具有几何特征, 而在频域表现为离散的尖峰。

- **来源**: 通常源于机电干扰。
- **处理方式**: 由于其在频域特征极佳, 通常在频域使用陷波滤波器 (Notch Filter) 剔除。

5.2.4 噪声参数的估计 (Estimation of Parameters)

通过分析图像中具有恒定亮度的平滑子区域 (如背景) 的直方图, 可以拟合噪声分布。

1. **观察直方图形状**: 对比上述 PDF 图形, 确定噪声类型。
2. **数值计算**: 利用选取的子区域 S 的均值 \bar{z} 和方差 σ^2 :

$$\bar{z} = \sum_{i \in S} z_i p(z_i), \quad \sigma^2 = \sum_{i \in S} (z_i - \bar{z})^2 p(z_i)$$

例如对于高斯噪声, 计算出的均值和方差即为 PDF 公式中的参数。

噪声类型	视觉表现	典型来源	推荐处理办法
高斯噪声	均匀分布的微小颗粒感。	电路噪声、高温、低光照。	算术均值、几何均值滤波。
瑞利噪声	分布不对称，暗区噪声更明显。	距离成像、雷达成像。	算术均值、中点滤波。
指数/伽马	剧烈且随机的信号抖动。	激光/合成孔径雷达 (SAR)。	算术均值、修正阿尔法均值。
椒盐噪声	孤立的白点（盐）或黑点（椒）。	传感器故障、传输信道干扰。	中值滤波（首选）、最大/最小值。
周期噪声	重复的条纹或网格纹理。	机电干扰、电力正弦干扰。	频域陷波滤波、带阻。
混合噪声	同时存在颗粒噪声和脉冲。	多级传输、复杂成像环境。	自适应中值、修正阿尔法。

5.2.5 常用噪声及其处理对策总结

下表精炼总结了各种噪声模型的特性及复原技术：

5.3 加性噪声——空间滤波

在图像退化模型 $g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$ 中，若退化函数 H 为恒等算子，则复原任务简化为单纯的去噪。空间滤波通过在邻域 S_{xy} 内操作来实现。

5.3.1 均值滤波器 (Mean Filters)

均值滤波器主要用于减少随机噪声，其基本逻辑是利用局部邻域的统计平均值代替中心像素。

1. 算术均值滤波器 (Arithmetic Mean Filter):

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t)$$

特点：最简单的线性滤波器，平滑效果明显，但会造成图像边缘模糊。

2. 几何均值滤波器 (Geometric Mean Filter):

$$\hat{f}(x,y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

特点：平滑性能与算术均值相当，但对图像细节（如锐利边缘）的保护效果略好。

3. 谐波均值滤波器 (Harmonic Mean Filter):

$$\hat{f}(x,y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s,t)}}$$

特点：对“盐”噪声（高灰度脉冲）效果极佳，但不适用于“椒”噪声。

4. 逆谐波均值滤波器 (Contraharmonic Mean Filter):

$$\hat{f}(x,y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t)^Q}$$

用法: Q 是滤波器的阶数。

- $Q > 0$: 消除椒噪声。
- $Q < 0$: 消除盐噪声。
- 风险: 若 Q 符号选错, 会使噪声显著增强。

5.3.2 统计排序滤波器 (Order-Statistic Filters)

这类滤波器是非线性的, 其响应基于对邻域内像素灰度值的排序结果。

1. 中值滤波器 (Median Filter):

$$\hat{f}(x, y) = \text{median}_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

核心优势: 处理椒盐噪声 (脉冲噪声) 最有效的手段。在滤除噪声的同时, 能极好地保护图像边缘不被模糊。

2. 最大值/最小值滤波器 (Max and Min Filters):

- 最大值: $\hat{f}(x, y) = \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$, 适合去除 “椒” 噪声。
- 最小值: $\hat{f}(x, y) = \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$, 适合去除 “盐” 噪声。

3. 中点滤波器 (Midpoint Filter):

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$$

特点: 结合了统计排序与求平均, 适用于处理随机分布的噪声, 如高斯噪声或均匀噪声。

4. 修正的阿尔法均值滤波器 (Alpha-trimmed Mean Filter):

在邻域内去掉 d 个最高和最低灰度值的像素, 对剩余的 $mn - d$ 个像素求平均。**特点:** 当图像包含混合噪声 (如高斯 + 椒盐) 时效果显著。

5.3.3 自适应滤波器 (Adaptive Filters)

这类滤波器会根据局部窗口内的统计特性 (均值 \bar{z} 和方差 σ^2) 自动调整其滤波行为。

- 自适应局部降低噪声滤波器: 利用局部方差 S_L 与噪声方差 S_η 的比值来控制:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{S_\eta}{S_L} [g(x, y) - \bar{z}_L]$$

逻辑: 在边缘区域 (S_L 大) 保留原值, 在平滑区域 (S_L 小) 进行均值滤波。

- 自适应中值滤波器 (Adaptive Median Filter): 标准中值滤波器在噪声密度较大时会失效 (窗口内可能全被噪声占据), 且在去噪的同时会损伤图像细小结构。自适应中值滤波器通过动态调整窗口尺寸 S_{xy} 来克服这些缺陷。

算法逻辑与阶段: 设 z_{min} 、 z_{max} 、 z_{med} 分别为当前窗口内的最小值、最大值和中值; z_{xy} 为坐标 (x, y) 处的灰度值; S_{max} 为允许的最大窗口尺寸。算法分为两个阶段执行:

- 层级 A (判断中值是否有效): 计算 $A_1 = z_{med} - z_{min}$ 和 $A_2 = z_{med} - z_{max}$ 。

- * 若 $A_1 > 0$ 且 $A_2 < 0$, 说明 z_{med} 不是脉冲 (即中值本身是“干净”的), 则跳转至层级 B。
- * 否则, 说明 z_{med} 极有可能是噪声。此时增加窗口尺寸 S 。
- * 若 $S \leq S_{max}$, 重复层级 A; 若已达到最大尺寸, 则直接输出 z_{med} 。
- 层级 B (判断中心像素是否有效): 计算 $B_1 = z_{xy} - z_{min}$ 和 $B_2 = z_{xy} - z_{max}$ 。
 - * 若 $B_1 > 0$ 且 $B_2 < 0$, 说明当前像素 z_{xy} 本身不是噪声。为了最大程度保留细节, 输出原值 z_{xy} 。
 - * 否则, 说明 z_{xy} 是噪声, 输出层级 A 中确定的中值 z_{med} 。

核心优势总结:

- 高噪声抗性: 能处理噪声概率高达 70% ~ 80% 的极端情况 (此时普通中值滤波已彻底失效)。
- 保护非噪声细节: 如果当前像素并非噪声点, 算法会跳过平滑处理直接保留原值, 避免了图像边缘的“侵蚀”。
- 动态调整: 通过 S_{max} 控制搜索范围, 平衡了计算复杂度与滤波质量。

与普通中值滤波的区别对比:

特性	标准中值滤波	自适应中值滤波
窗口尺寸	固定 (如 3×3)	动态增大 (直到找到非噪声中值)
边缘保持	较好	极好 (非噪声点不被替换)
处理噪声上限	约 20%	约 80%
计算代价	低 (排序速度快)	较高 (存在迭代判断逻辑)

5.3.4 空间滤波技术综合对比总结

板块	滤波器类别	最佳应用场景	主要局限性
均值类	算术/几何	处理高斯噪声、均匀噪声。	导致图像边缘显著模糊。
	逆谐波	针对性去除单一的椒或盐噪声。	不能同时处理椒盐, 需手动调参数 Q 。
统计类	中值	去除椒盐噪声的最佳方案。	窗口过大会导致细小结构消失。
	阿尔法均值	处理高斯与脉冲混合的噪声。	计算量略大于普通均值。
自适应	局部降噪	保护纹理细节的同时去噪。	需要事先已知或估计噪声方差。
	自适应中值	极高密度的脉冲噪声复原。	算法实现逻辑较为复杂。

- 总结原则: 线性滤波器 (均值类) 适合处理连续型噪声; 非线性滤波器 (统计排序类) 适合处理突发型脉冲噪声; 自适应滤波器则是两者的职能优化版, 通过牺牲计算效率换取更好的边缘保护效果。

5.4 周期噪声——频域滤波

周期性噪声在空间域表现为重复的纹理, 而在频域表现为分布在主轴之外的离散脉冲点 (尖峰)。由于其在频域具有极强的可辨识度, 通过频域滤波可以实现极其精准的去噪。

5.4.1 陷波滤波器 (Notch Filter)

陷波滤波器通过在特定的频率点（或其邻域）设置极低增益，从而消除对应的正弦干扰。由于 Fourier 变换具有关于原点的共轭对称性，陷波器必须成对出现。

1. **理想陷波滤波器 (Ideal Notch Reject Filter, INRF)**: 对于中心位于 (u_0, v_0) 且关于原点对称于 $(-u_0, -v_0)$ 的噪声:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{若 } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ 或 } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $D_1 = \sqrt{(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2}$ 。特点: 具有断崖式截止, 容易产生振铃效应。

2. **巴特沃斯陷波滤波器 (Butterworth Notch Reject Filter)**:

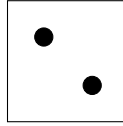
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n}$$

特点: 边缘较平滑, 可以通过阶数 n 控制过渡带宽度。

3. **高斯陷波滤波器 (Gaussian Notch Reject Filter)**:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v)D_2(u, v)}{D_0^2} \right]}$$

特点: 完全没有振铃效应, 是处理周期性干扰最常用的方案。



陷波器: 成对出现以消除对称的干扰脉冲

5.4.2 最优陷波滤波 (Optimum Notch Filtering)

当图像受到多种周期性干扰, 且干扰频率与图像本身的频率相互交织时, 简单的陷波器可能会损失过多的图像细节。最优陷波滤波通过最小化局部方差来动态提取并减去噪声。

1. **核心理念**: 首先通过一个带通滤波器（只允许噪声通过）提取出“纯噪声”的估计值 $\eta(x, y)$, 然后根据局部统计特性, 从降质图像 $g(x, y)$ 中减去经过加权的噪声分量:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

2. **权值 $w(x, y)$ 的确定**: 通过在邻域内最小化 $\hat{f}(x, y)$ 的局部方差来求得 $w(x, y)$ 。

$$w(x, y) = \frac{\overline{g\eta} - \bar{g}\bar{\eta}}{\eta^2 - \bar{\eta}^2}$$

意义: 在噪声强的地方增加权值, 在噪声弱或图像细节丰富的地方减小权值。

3. **应用场景**: 适用于 Moire（莫尔）波纹处理及复杂的机电干扰消除。

滤波器类型	设计原理	适用场景
带阻滤波器	阻断以原点为中心的环形区域。	处理各向同性的水平或垂直条纹。
带通滤波器	仅允许环形区域通过，与带阻相反。	用于提取特定频率的纹理或噪声模式。
陷波滤波器	阻断频谱中特定的离散点对。	消除精确频率的正弦干扰（最常用）。
最优陷波滤波	基于局部统计最小化方差。	解决噪声与图像细节混叠导致的过度平滑问题。

5.4.3 频域滤波去噪总结表

- **核心笔记：**使用频域滤波的前提是观察频谱图（中心化后的幅度谱）。如果频谱中出现了异常的“亮点”，则通常代表周期性干扰。

5.5 复杂退化——滤波复原

当图像不仅受噪声干扰，还受到系统性因素（如镜头聚焦不准、设备抖动、大气湍流等）导致的模糊影响时，必须对退化函数 $H(u, v)$ 进行建模或估计。

5.5.1 估计退化函数 $H(u, v)$

在实际应用中，获取 H 的方式主要有三种：

1. **图像观察估计法 (Estimation by Image Observation)：**在图像中找寻一个包含简单结构（如孤立的点或清晰的边缘）且信噪比较高的子区域 $g_s(x, y)$ ，手动复原出一个理想的 $\hat{f}_s(x, y)$ ，从而推导出：

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

2. **试验估计法 (Estimation by Experimentation)：**使用与获取降质图像相同的系统，对一个冲激信号（如一个小亮点）成像，得到系统的冲激响应。

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

其中 A 是冲激信号的幅度。

3. **建模估计法 (Estimation by Modeling)：**根据物理现象直接推导数学模型。

- **大气湍流模型：** $H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$ 。
- **匀速直线运动模糊模型：**由于在曝光时间内物体与相机间存在相对运动 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 产生的退化：

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)}$$

5.5.2 逆滤波 (Inverse Filtering)

最直接的复原方法。将降质图像的 Fourier 变换除以退化函数：

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

局限性（病态问题）：若 $H(u, v)$ 为零或非常小，即使只有极小的噪声 $N(u, v)$ ，第二项也会变得无穷大，导致噪声被无限放大，彻底淹没复原信号。通常只在原点附近的一个小频率范围内进行。

5.5.3 维纳滤波 (Wiener Filtering / Minimum Mean Square Error)

维纳滤波在最小均方误差 (MSE) 意义下寻找最优复原结果。它综合考虑了退化函数和噪声的功率谱。

复原公式：

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$

其中 S_η 和 S_f 分别是噪声和原始图像的功率谱。

简化形式：当功率谱未知时，常假设比值为常数 K ：

$$\hat{F}(u, v) \approx \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$

特点：在 H 较小时 (信噪比低)，项 K 起到抑制作用，防止了噪声放大。它是逆滤波的改进版。

5.5.4 约束最小二乘方滤波 (Constrained Least Squares Filtering)

当噪声的功率谱完全未知，只知道噪声的均值和方差时，使用此方法。

目标：在满足 $\|g - H\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$ 的约束下，最小化某种平滑度准则 (如拉普拉斯算子 $P(u, v)$)。

复原公式：

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

其中 γ 是为了满足约束条件而动态调整的参数。

5.5.5 三种复原滤波器对比总结

滤波器类型	核心优势	主要缺点
逆滤波	计算极其简单。	对噪声极其敏感，容易崩溃。
维纳滤波	最小化均方误差，抑制噪声效果好。	需要知道信号和噪声的功率谱。
约束最小二乘	仅需知道噪声方差，复原图像平滑。	涉及迭代寻找参数 γ ，计算量大。

- 结论：实际应用中最常用的折中方案是**维纳滤波**。

5.5.6 例题 14：反谐波均值滤波器的性质分析

题目：根据式 (5.26) 中的反谐波均值滤波器公式：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q} \quad (3)$$

回答以下问题：

- 说明 Q 为正值时，去除“胡椒”噪声更有效的原因。
- 说明 Q 为负值时，去除“盐粒”噪声更有效的原因。
- 说明选择 Q 值不当时，产生较差结果 (如黑斑或白斑扩散) 的原因。
- 讨论 $Q = -1$ 时该滤波器的特性。
- 讨论 Q 为正或负时，该滤波器对恒定灰度区域的处理性能。

详细解答步骤：

1. **(a) Q 为正值的情况**: 当 $Q > 0$ 时, 分子分母中像素值的幂次较高。在求和过程中, 权值向大像素值偏移。对于“胡椒”噪声 (灰度接近 0), 其对总和的影响微乎其微, 因此滤波器会用邻域内较大的正常像素值进行填充, 从而有效抹除黑点。
2. **(b) Q 为负值的情况**: 当 $Q < 0$ 时, 公式可以看作是倒数的加权。此时, 灰度值较小的像素在求和中占主导地位。对于“盐粒”噪声 (灰度极大), 其倒数接近 0, 对最终结果几乎没有贡献, 因此滤波器会倾向于保留较小的正常灰度值, 从而抹除白点。
3. **(c) Q 值不当的影响**: 如果针对“盐粒”噪声错误地选择了正 Q , 或者针对“胡椒”噪声选择了负 Q , 滤波器会进一步增强噪声的影响。例如, 在有盐粒噪声的情况下使用正 Q , 极大的噪声值会因为高幂次而彻底统治邻域, 导致白点扩散成大白块。
4. **(d) $Q = -1$ 时的特性**: 当 $Q = -1$ 时, 公式简化为:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum 1}{\sum \frac{1}{g(s, t)}} = \frac{mn}{\sum \frac{1}{g(s, t)}} \quad (4)$$

这正是谐波均值滤波器。它在处理盐粒噪声和高斯噪声方面表现良好, 但不能处理胡椒噪声。

5. **(e) 恒定灰度区域的处理**: 对于恒定灰度区域 (设灰度值为 C), $\hat{f} = \frac{mn \cdot C^{Q+1}}{mn \cdot C^Q} = C$ 。因此, 无论 Q 是正还是负, 该滤波器都能完美保持恒定灰度区域的值, 不会产生偏差。

5.6 图像重建

图像重建 (Image Reconstruction) 是计算机断层扫描 (CT) 的理论基础, 其目标是利用从物体外部获取的一系列投影数据 (Projections) 来恢复物体的内部切面图像。

5.6.1 雷登变换 (Radon Transform)

雷登变换是将二维图像 $f(x, y)$ 投影到一系列直线上的线积分过程。

1. **数学定义**: 设直线方程为 $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$, 则在角度 θ 下的投影 $g(\rho, \theta)$ 为:

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \quad (5)$$

2. **正弦图 (Sinogram)**: 将所有角度 $\theta \in [0, \pi]$ 的投影 $g(\rho, \theta)$ 平铺在一幅二维图像上, 称为正弦图。图像中的一个孤立点在正弦图中表现为一条正弦曲线。

3. **主要性质**:

- **线性**: $\mathcal{R}\{af + bg\} = a\mathcal{R}\{f\} + b\mathcal{R}\{g\}$ 。
- **位移**: 图像平移会导致投影在 ρ 轴上的线性偏移。
- **周期性**: $g(\rho, \theta) = g(-\rho, \theta + \pi)$ 。

5.6.2 中心切片定理 (Fourier-Slice Theorem)

这是投影重建的理论基石。**定理内容**: 函数 $f(x, y)$ 在角度 θ 下的投影 $g(\rho, \theta)$ 的一维傅里叶变换 $G(\omega, \theta)$, 等于原函数 $f(x, y)$ 的二维傅里叶变换 $F(u, v)$ 沿角度 θ 穿过原点的切片。

$$G(\omega, \theta) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \quad (6)$$

意义: 通过在各个角度采集投影, 我们可以填满二维频域, 再通过逆傅里叶变换即可重构图像。

5.6.3 重建算法：从反投影到滤波反投影

1. 简单反投影 (Backprojection): 将每个方向的投影值沿投影线“涂抹”回空间。

$$f_{bp}(x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (7)$$

缺点：会在图像边缘产生 $1/r$ 形式的模糊，形成“星状”伪影。

2. 滤波反投影 (Filtered Backprojection, FBP): 为了消除模糊，在反投影前先对投影数据进行高通滤波。

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega\rho} d\omega \right] d\theta \quad (8)$$

其中 $|\omega|$ 称为 **Ram-Lak 滤波器** (坡度滤波器)。为了抑制高频噪声，实际常用 **Shepp-Logan 滤波器**。

5.6.4 CT 系统架构与技术演进

PDF 提到了 CT 系统的多代发展，这部分是理解现代医疗影像的关键：

阶段/架构	关键特征
第一/二代	单射线/窄扇形束，平移-旋转采集，速度极慢。
第三/四代	宽扇形束，全旋转采集。目前临床应用最广泛的架构。
螺旋 CT	扫描床连续移动，实现容积 (3D) 数据采集，避免切片遗漏。
新一代静态 CT	基于冷阴极纳米阵列光源。无需笨重的滑环高速旋转，具有高分辨、低剂量、成像快、低成本等优势（如复眼高分辨静态 CT）。

5.6.5 影响重建质量的退化因素

在实际 CT 成像中，以下因素会导致图像质量下降：

- **有限角度/角度缺失**：投影不完整导致强烈的条纹伪影 (Artifacts)。
- **稀疏角度**：扫描间隔过大，导致图像细节丢失。
- **低管电流 (Low Dose)**：为了减少辐射导致投影信噪比低，产生严重的噪声。

5.6.6 例题 15：环形图像的雷登变换剖面分析

题目：背景为黑色，中心为一个白色大圆盘（灰度为 1），白色圆盘内部中心包含一个黑色小圆盘（灰度为 0）。请描述并画出该图像在 $\theta = 0^\circ$ 时雷登变换的剖面图 $g(\rho, 0)$ 。

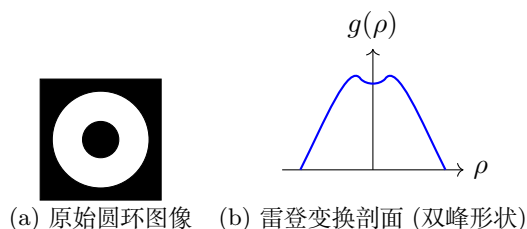
详细解答步骤：

1. 图像结构分析：

- **白色大圆盘的贡献**：单独的白色圆盘在投影时，由于射线穿过的弦长随距离中心 ρ 的减小而增加，会形成一个平滑的、向中心隆起的“拱形”积分分布。
- **中心黑色小圆盘的贡献**：黑色小圆盘灰度为 0。当射线穿过图像中心区域时，原本属于白色圆盘的路径有一部分被黑色填充，这部分积分贡献消失。

2. 剖面形状描述:

- **整体特征:** 剖面图是一个关于 $\rho = 0$ 对称的平滑拱形曲线。
- **局部特征:** 在中心 $\rho = 0$ 附近会出现一个明显的“凹陷”。
- **总结:** 整体看起来像是一个“双峰”中间下凹的曲线。边缘是连续平滑的, 而不是尖锐的突变, 因为射弦长是随位置连续变化的。



5.7 第五章核心重点问题总结

1. 图像复原 (Restoration) 与图像增强 (Enhancement) 的本质区别是什么?

- **图像复原:** 是一个“去卷积”的过程, 其目标是尽可能地逼近原始图像。它依赖于对降质过程 (退化函数和噪声统计特性) 的先验知识, 必须建立降质模型。
- **图像增强:** 是一个“主观”的过程, 其目标是改善图像的视觉质量, 使其更适合人类视觉或机器识别。它不需要建立物理模型, 通常通过对比度拉伸、伪彩色等手段实现。

2. 加性噪声 (Additive Noise) 在空间域和频域分别具有什么特征?

- **空间域:** 通常表现为随机的像素灰度起伏。如果噪声分布均匀, 称为白噪声; 如果只有极亮或极暗的点, 则称为脉冲噪声 (椒盐噪声)。
- **频域:** 周期性噪声表现为频谱中离散的尖峰 (共轭对称点)。随机噪声通常分布在整个频谱中, 但在高频部分往往占据主导地位, 导致信噪比下降。

3. 如何根据噪声的类型选择合适的空间滤波器?

- 对于**高斯噪声**: 算术均值滤波或几何均值滤波效果较好。
- 对于**椒盐噪声**: **中值滤波**是首选, 它能在去除脉冲噪声的同时有效保护边缘。
- 对于**高密度脉冲噪声**: 应选择**自适应中值滤波**。
- 对于**混合噪声** (高斯 + 椒盐): 使用**修正的阿尔法均值滤波器**。

4. 维纳滤波 (Wiener Filtering) 为什么优于逆滤波 (Inverse Filtering)? 逆滤波是简单的除法操作 $\hat{F} = G/H$ 。当退化函数 H 的值较小时 (即信噪比低), 逆滤波会使噪声分量 N/H 无限放大, 导致复原失败。维纳滤波通过引入噪声/信号功率谱比项, 在信噪比较低处自动衰减增益, 从而在噪声抑制与图像细节保留之间达到了最小均方误差 (MSE) 意义下的最优平衡。5. 在 CT 图像重建中, 滤波反投影 (FBP) 相比简单反投影解决了什么问题? 简单反投影由于忽略了频域采样的密度差异, 会导致图像产生 $1/r$ 的模糊感, 即原本的亮点会变成带星状伪影的“光晕”。滤波反投影在反投影之前, 通过在频域应用一个坡度滤波器 (Ram-Lak 滤波器), 强化了高频分量并抑制了低频重叠, 从而实现了清晰的边缘重建。

6. **中心切片定理 (Fourier-Slice Theorem) 的物理意义是什么？**该定理指出：一个二维物体在某个角度 θ 下的一维投影的傅里叶变换，等于该物体二维傅里叶变换在对应角度穿过原点的切片。它是 CT 技术能够通过一维探测器信号恢复出二维内部结构的理论基石。