

数字图像处理

(Digital Image Processing)

核心知识点精炼笔记 3-4

东南大学计算机科学与工程学院
09023419 严伟琛

授课教师：薛澄
参考教材：拉斐尔·冈萨雷斯 (Rafael C. Gonzalez) 第四版
2026 年 1 月 15 日

目录

3 灰度变换与空间滤波 (Intensity Transformations and Spatial Filtering)	3
3.1 背景知识	3
3.1.1 处理模型	3
3.1.2 邻域 (Neighborhood) 与算子	3
3.1.3 对比度拉伸与阈值处理	3
3.2 一些基本的灰度变换函数	3
3.2.1 图像反转 (Image Negatives)	4
3.2.2 对数变换 (Log Transformations)	4
3.2.3 幂律 (伽马) 变换 (Power-Law Transformations)	4
3.2.4 例题 8: 比特平面提取方法与矩阵计算	5
3.3 直方图处理	6
3.3.1 直方图的定义	7
3.3.2 直方图均衡化 (Histogram Equalization)	7
3.3.3 例题 9: 基于灰度概率分布的直方图均衡化	7
3.3.4 例题 10: 小尺寸图像矩阵的直方图均衡化	8
3.3.5 直方图规定化 / 匹配	9
3.3.6 例题 11: 直方图规定化 (匹配) 的完整计算过程	9
3.3.7 局部直方图处理 (Local Histogram Processing)	10
3.3.8 直方图统计量用于图像增强	11
3.4 空间滤波	11
3.4.1 相关 (Correlation)	11
3.4.2 例题 12: 相关的具体矩阵计算	12
3.4.3 平滑空间滤波器	12
3.4.4 锐化空间滤波器	13
3.4.5 例题 13: 空间中值滤波计算	14
3.4.6 非锐化掩蔽与高提升滤波 (Unsharp Masking and Highboost Filtering)	15
3.4.7 空间域滤波器的分类与应用 (Classification of Spatial Filters)	15
3.4.8 混合空间增强技术 (Combined Spatial Enhancement)	16
3.5 第三章核心重点问题总结	16
4 频域滤波 (Filtering in the Frequency Domain)	18
4.1 傅里叶变换基础与抽样	18
4.1.1 基本概念	18
4.1.2 冲激及其取样特性	18
4.1.3 抽样与抽样定理	18
4.1.4 一维离散傅里叶变换 (1-D Discrete Fourier Transform)	19
4.1.5 二维离散傅里叶变换 (2-D Discrete Fourier Transform)	19
4.1.6 傅里叶变换的重要性质 (Properties of Fourier Transform)	19
4.1.7 快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT)	20
4.1.8 频域中的频率分量含义	20
4.2 频率域滤波基础	20

4.2.1	频域滤波的基本步骤 (Steps of Frequency Domain Filtering)	20
4.2.2	空间域与频域滤波的联系 (Relationship with Spatial Filtering)	21
4.2.3	滤波器设计中的注意事项 (Key Considerations)	21
4.2.4	频域滤波的一般数学模型	21
4.3	频率域滤波器	21
4.3.1	频率域低通滤波器 (Lowpass Filtering)	21
4.3.2	频率域高通滤波器 (Highpass Filtering)	22
4.3.3	选择性滤波 (Selective Filtering)	23
4.3.4	总结：空间域与频域的对应关系	23
4.4	第四章频域滤波核心重点问题总结	23

3 灰度变换与空间滤波 (Intensity Transformations and Spatial Filtering)

3.1 背景知识

空间域 (Spatial Domain) 指图像平面本身，其处理方法是直接对图像的像素进行操作。与之对应的是变换域（如频率域）处理。

3.1.1 处理模型

空间域处理通常表示为如下形式的表达式：

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (1)$$

其中：

- $f(x, y)$ 是输入图像。
- $g(x, y)$ 是处理后的输出图像。
- T 是在点 (x, y) 的邻域上定义的对 f 的一种算子。

3.1.2 邻域 (Neighborhood) 与算子

邻域是空间域处理的核心。通常，我们在点 (x, y) 处定义一个矩形区域，称之为邻域。

- **点处理 (Point Processing)**：当邻域的大小为 1×1 时， g 在点 (x, y) 处的值仅取决于 f 在该点的值。此时变换可简化为：

$$s = T(r) \quad (2)$$

其中 r 表示原始灰度， s 表示变换后的灰度。这是最简单的图像增强技术。

- **局部处理 (Local Processing)**：当邻域大于 1×1 时（例如常见的 3×3 或 5×5 模板），算子 T 会利用邻域内多个像素的信息来计算输出值。这种方法通常用于 ** 空间滤波 **。

3.1.3 对比度拉伸与阈值处理

灰度变换最直观的应用是改变图像的对比度：

- **对比度拉伸 (Contrast Stretching)**：通过特定的 T 函数，将窄范围的输入灰度级映射到宽范围的输出灰度级，使细节更易辨认。
- **阈值处理 (Thresholding)**：当 T 为阶跃函数时，可将图像简化为二值图像。

3.2 一些基本的灰度变换函数

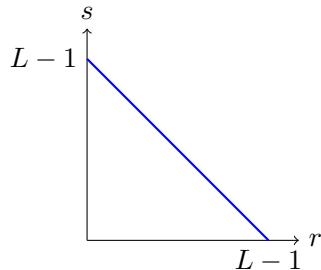
灰度变换是图像增强技术中最基础的点处理方法。设输入图像灰度为 r ，变换后灰度为 s ，灰度范围通常归一化为 $[0, 1]$ 或表示为 $[0, L - 1]$ 。

3.2.1 图像反转 (Image Negatives)

变换公式:

$$s = L - 1 - r \quad (3)$$

变换曲线:



效果与应用:

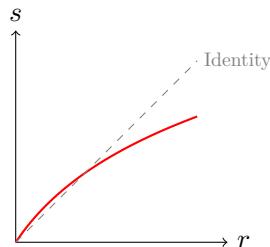
- 效果: 图像亮暗对调, 产生类似照相底片的效果。
- 典型应用: 增强嵌入在图像暗区域中的白色或灰色细节。例如在医学 X 光影像中, 反转后的骨骼组织能呈现出更清晰的内部阴影细节。

3.2.2 对数变换 (Log Transformations)

变换公式:

$$s = c \log(1 + r) \quad (4)$$

变换曲线:



效果与应用:

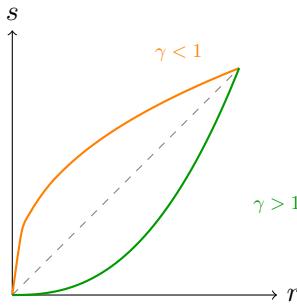
- 特性: 扩展低灰度级 (拉伸暗部), 压缩高灰度级 (压缩亮部)。
- 典型应用: 用于压缩像素值动态范围过大的图像。例如傅里叶频谱图, 其动态范围极大, 直接显示只能看到少数亮点, 经对数变换后可观察到微弱的频谱细节。

3.2.3 幂律 (伽马) 变换 (Power-Law Transformations)

变换公式:

$$s = cr^\gamma \quad (5)$$

分类讨论与曲线展示:



1. 当 $\gamma < 1$ 时:

- 曲线在恒等线上方，类似于对数变换。
- 效果：拉伸暗部，图像整体变亮。
- 应用：修正欠曝光图像或增加暗部细节。

2. 当 $\gamma > 1$ 时:

- 曲线在恒等线下方。
- 效果：拉伸亮部，压缩暗部，图像整体变暗。
- 应用：修正过曝光图像，增加亮部区域的对比度。

3. 伽马校正 (Gamma Correction): 用于补偿显示设备（如早期的 CRT）产生的非线性强度响应。若显示器 $\gamma = 2.5$ ，则需通过 $\gamma = 0.4$ 的变换进行预校正。

3.2.4 例题 8：比特平面提取方法与矩阵计算

题目：完成如下工作：

(a) 给出一种方法来提取图像的比特平面，这种方法基于将图像像素的值转换为二进制。

(b) 求如下 4 比特图像的所有比特平面：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 15 & 14 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

详细解答步骤：

1. 第一步：给出提取方法。要从像素值为 $f(x, y)$ 的 n 比特图像中提取第 k 个比特平面（其中 $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ），其核心逻辑是将十进制灰度值展开为二进制序列：

$$f(x, y) = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \dots + a_k2^k + \dots + a_02^0 \quad (6)$$

具体的提取方法可以描述为：

- 二进制分解法：将每个像素值转换为 n 位二进制字符串，直接提取该字符串从右向左计数的第 $k + 1$ 位。

- 数学公式法：利用整除和取模运算提取第 k 位的值 a_k ：

$$a_k = \lfloor f(x, y)/2^k \rfloor \mod 2 \quad (7)$$

- 位逻辑运算法：将像素值与掩码 2^k 进行“按位与”(AND) 操作，若结果大于 0 则 $a_k = 1$ ，否则 $a_k = 0$ 。

2. 第二步：执行二进制转换。将 4 比特原矩阵中的每个十进制数值转换为 4 位二进制数 $(a_3a_2a_1a_0)_2$ ：

第一行：0 → **0000**, 1 → **0001**, 8 → **1000**, 6 → **0110**
 第二行：2 → **0010**, 2 → **0010**, 1 → **0001**, 1 → **0001**
 第三行：1 → **0001**, 15 → **1111**, 14 → **1110**, 12 → **1100**
 第四行：3 → **0011**, 6 → **0110**, 9 → **1001**, 10 → **1010**

3. 第三步：构建各比特平面矩阵。根据二进制数的对应位提取出四个二值矩阵：

- 第 3 比特平面 (MSB, 对应 2^3 位)：

$$\text{Bit-plane 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 第 2 比特平面 (对应 2^2 位)：

$$\text{Bit-plane 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 第 1 比特平面 (对应 2^1 位)：

$$\text{Bit-plane 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 第 0 比特平面 (LSB, 对应 2^0 位)：

$$\text{Bit-plane 0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 直方图处理

直方图是多种空间域处理技术的基础，不仅可用于图像增强，还能提供图像的统计属性（如亮度分布、对比度等）。

3.3.1 直方图的定义

对于灰度级范围为 $[0, L - 1]$ 的数字图像，其直方图是一个离散函数：

$$h(r_k) = n_k \quad (8)$$

其中：

- r_k 是第 k 级灰度值。
- n_k 是图像中灰度级为 r_k 的像素个数。
- 归一化直方图： $p(r_k) = \frac{n_k}{MN}$ ，其中 MN 是图像像素总数。 $p(r_k)$ 给出了灰度级 r_k 发生的概率估计，且所有分量之和等于 1。

3.3.2 直方图均衡化 (Histogram Equalization)

1. 核心思想：通过寻找一个变换函数 $s = T(r)$ ，将原始图像分布不均的灰度级映射为具有均匀概率密度的灰度级，从而自动增强图像的对比度。

2. 离散变换公式与参数带入指南：在具体题目中，均衡化后的灰度值 s_k 计算公式如下：

$$s_k = \text{round} \left[(L - 1) \cdot \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \right] = \text{round} \left[\frac{L - 1}{MN} \sum_{j=0}^k n_j \right] \quad (9)$$

公式中各项参数的提取方法：

- $L - 1$ ：图像能表现的最大灰度值。
 - 若题目说是 n 比特图像，则 $L - 1 = 2^n - 1$ （如 3 比特图像， $L - 1 = 7$ ）。
 - 这是计算结果映射到的目标范围。
- MN ：图像的总像素个数。
 - M 为行数， N 为列数（如 64×64 图像， $MN = 4096$ ）。
- n_j ：原始图像中灰度级为 j 的像素个数（频数）。
- $\sum_{j=0}^k n_j$ ：累积像素个数。即从灰度级 0 一直加到当前灰度级 k 的像素总和。
- $p_r(r_j)$ ：原始图像中灰度级 j 出现的概率，即 n_j/MN 。
- $\text{round}[\cdot]$ ：四舍五入取整。因为计算结果通常是小数，必须取整才能对应到离散的灰度级。

计算流程小结：计算第 k 级的新灰度时，先算从 0 到 k 的概率总和（或像素总和），乘以最大灰度值 $L - 1$ ，最后四舍五入。

3.3.3 例题 9：基于灰度概率分布的直方图均衡化

题目：假设一幅 64×64 像素的 3 比特图像 ($L = 8$)，其灰度级分布如下表所示。请计算直方图均衡化后的灰度级映射，并给出映射后的概率分布。

r_k	$r_0 = 0$	$r_1 = 1$	$r_2 = 2$	$r_3 = 3$	$r_4 = 4$	$r_5 = 5$	$r_6 = 6$	$r_7 = 7$
n_k	790	1023	850	656	329	245	122	81
$p_r(r_k)$	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02

详细解答步骤:

1. 第一步: 计算累积分布函数 (CDF)。根据公式 $s_k = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$, 计算各级映射值:

- $s_0 = 7 \times (0.19) = 1.33 \rightarrow 1$
- $s_1 = 7 \times (0.19 + 0.25) = 3.08 \rightarrow 3$
- $s_2 = 7 \times (0.19 + 0.25 + 0.21) = 4.55 \rightarrow 5$
- $s_3 = 7 \times (0.65 + 0.16) = 5.67 \rightarrow 6$
- $s_4 = 7 \times (0.81 + 0.08) = 6.23 \rightarrow 6$
- $s_5 = 7 \times (0.89 + 0.06) = 6.65 \rightarrow 7$
- $s_6 = 7 \times (0.95 + 0.03) = 6.86 \rightarrow 7$
- $s_7 = 7 \times (0.98 + 0.02) = 7.00 \rightarrow 7$

2. 第二步: 归并相同灰度级并计算新分布。由于映射后出现了重复灰度 (如 $s_3, s_4 \rightarrow 6$), 需合并概率:

- $p_s(s = 1) = p_r(r_0) = 0.19$
- $p_s(s = 3) = p_r(r_1) = 0.25$
- $p_s(s = 5) = p_r(r_2) = 0.21$
- $p_s(s = 6) = p_r(r_3) + p_r(r_4) = 0.16 + 0.08 = 0.24$
- $p_s(s = 7) = p_r(r_5) + p_r(r_6) + p_r(r_7) = 0.06 + 0.03 + 0.02 = 0.11$

3.3.4 例题 10: 小尺寸图像矩阵的直方图均衡化

题目: 对如下 4×4 的 3 比特图像 ($L = 8$) 进行直方图均衡化, 求处理后的图像矩阵。

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

详细解答步骤:

1. 第一步: 统计频数并计算概率。总像素 $MN = 16$ 。

- $r = 0 : n_0 = 2, p_0 = 2/16$
- $r = 1 : n_1 = 4, p_1 = 4/16$
- $r = 2 : n_2 = 4, p_2 = 4/16$
- $r = 4 : n_4 = 2, p_4 = 2/16$
- $r = 5 : n_5 = 2, p_5 = 2/16$
- $r = 6 : n_6 = 1, p_6 = 1/16$
- $r = 7 : n_7 = 1, p_7 = 1/16$

2. 第二步: 计算映射值 $s_k = \text{round}[7 \times \sum p_i]$ 。

- $s(0) = \text{round}[7 \times (2/16)] = \text{round}(0.875) = 1$
- $s(1) = \text{round}[7 \times (6/16)] = \text{round}(2.625) = 3$
- $s(2) = \text{round}[7 \times (10/16)] = \text{round}(4.375) = 4$
- $s(4) = \text{round}[7 \times (12/16)] = \text{round}(5.25) = 5$
- $s(5) = \text{round}[7 \times (14/16)] = \text{round}(6.125) = 6$
- $s(6) = \text{round}[7 \times (15/16)] = \text{round}(6.56) = 7$
- $s(7) = \text{round}[7 \times (16/16)] = \text{round}(7.0) = 7$

3. 第三步：写出变换后的矩阵。将原矩阵中的 r 替换为对应的 s ：

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

3.3.5 直方图规范化 / 匹配

1. 定义：直方图均衡化是自动增强，结果无法控制。直方图规范化允许我们指定输出图像具有特定形状的直方图。

2. 实现步骤：

1. 对原始图像进行直方图均衡化，得到映射 s_k 。
2. 对期望的目标直方图进行均衡化，得到映射 $v_q = G(z_q)$ 。
3. 利用 $s_k = v_q$ 的原理，计算逆映射 $z_q = G^{-1}(s_k)$ 。即对于每一个 s_k ，在 v 中寻找最接近的值，并记下对应的 z 。

3.3.6 例题 11：直方图规范化（匹配）的完整计算过程

题目：已知一幅 3 比特 64×64 数字图像 ($L = 8, MN = 4096$) 的灰度分布 $p_r(r_k)$ ，现要求将其匹配到指定的分布 $p_z(z_q)$ 。

1. 原直方图数据：

r_k	0	1	2	3	4	5	6	7
n_k	790	1023	850	656	329	245	122	81
$p_r(r_k)$	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02

2. 规定直方图数据：

z_q	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_z(z_q)$	0.00	0.00	0.00	0.15	0.20	0.30	0.20	0.15

详细解答步骤：

1. 第一步：对原直方图做均衡化，计算 s_k 利用公式 $s_k = \text{round}[7 \cdot \sum p_r(r_j)]$ ：

- $s_0 = \text{round}(7 \times 0.19) = 1.33 \rightarrow 1$

- $s_1 = \text{round}(7 \times 0.44) = 3.08 \rightarrow \mathbf{3}$
- $s_2 = \text{round}(7 \times 0.65) = 4.55 \rightarrow \mathbf{5}$
- $s_3 = \text{round}(7 \times 0.81) = 5.67 \rightarrow \mathbf{6}$
- $s_4 = \text{round}(7 \times 0.89) = 6.23 \rightarrow \mathbf{6}$
- $s_5 = \text{round}(7 \times 0.95) = 6.65 \rightarrow \mathbf{7}$
- $s_6 = \text{round}(7 \times 0.98) = 6.86 \rightarrow \mathbf{7}$
- $s_7 = \text{round}(7 \times 1.00) = 7.00 \rightarrow \mathbf{7}$

2. 第二步：对规定直方图做均衡化，计算 $G(z_q)$ 利用公式 $G(z_q) = \text{round}[7 \cdot \sum p_z(z_i)]$:

- $G(z_0) = G(z_1) = G(z_2) = \text{round}(7 \times 0) = \mathbf{0}$
- $G(z_3) = \text{round}(7 \times 0.15) = 1.05 \rightarrow \mathbf{1}$
- $G(z_4) = \text{round}(7 \times 0.35) = 2.45 \rightarrow \mathbf{2}$
- $G(z_5) = \text{round}(7 \times 0.65) = 4.55 \rightarrow \mathbf{5}$
- $G(z_6) = \text{round}(7 \times 0.85) = 5.95 \rightarrow \mathbf{6}$
- $G(z_7) = \text{round}(7 \times 1.00) = 7.00 \rightarrow \mathbf{7}$

3. 第三步：建立 s_k 与 z_q 的映射（寻找最接近的值）我们要为每个 s_k 找到一个 z_q ，使得 $G(z_q)$ 的数值最接近 s_k :

- $s_k = 1$: 在 $G(z_q)$ 序列 $\{0, 0, 0, 1, 2, 5, 6, 7\}$ 中，最接近 1 的是 $G(z_3) = 1$ ，故 $\mathbf{1} \rightarrow z_3$
- $s_k = 3$: 最接近 3 的是 $G(z_4) = 2$ (距离 1) 和 $G(z_5) = 5$ (距离 2)，取最近值 $G(z_4)$ ，故 $\mathbf{3} \rightarrow z_4$
- $s_k = 5$: 最接近 5 的是 $G(z_5) = 5$ ，故 $\mathbf{5} \rightarrow z_5$
- $s_k = 6$: 最接近 6 的是 $G(z_6) = 6$ ，故 $\mathbf{6} \rightarrow z_6$
- $s_k = 7$: 最接近 7 的是 $G(z_7) = 7$ ，故 $\mathbf{7} \rightarrow z_7$

4. 第四步：联立得出最终结果 $r \rightarrow z$ 通过 s_k 作为桥梁，将原灰度级 r_k 直接映射到规定灰度级 z_q :

原灰度 r_k	\rightarrow	均衡化 s_k	\rightarrow	规定灰度 z_q
0	\rightarrow	1	\rightarrow	3
1	\rightarrow	3	\rightarrow	4
2	\rightarrow	5	\rightarrow	5
3, 4	\rightarrow	6	\rightarrow	6
5, 6, 7	\rightarrow	7	\rightarrow	7

3.3.7 局部直方图处理 (Local Histogram Processing)

当图像的某些区域包含细微特征，而全局均衡化无法有效突出这些细节时使用。

- 方法：在图像上移动一个邻域（如 3×3 窗口），计算邻域内像素的直方图并进行均衡化，仅更新中心像素的值。

3.3.8 直方图统计量用于图像增强

利用均值和方差来识别和增强局部区域：

- **均值 m** : 代表图像的平均亮度。
- **方差 σ^2 / 标准差 σ** : 代表图像的对比度。
- **应用逻辑**: 如果某个局部区域的均值和方差显著低于全局值，则认为该区域偏暗或对比度过低，需要进行增益增强。

3.4 空间滤波

空间滤波是在图像邻域上直接进行运算的技术。它通过一个掩模（核）与图像邻域像素的乘累加操作来实现图像的增强或处理。

3.4.1 相关 (Correlation)

1. 掩模中心 (Center) 的确定: 在计算之前，必须明确掩模的中心位置，因为它决定了输出结果对应原图的那个坐标。

- **常规情况**: 掩模的大小通常为奇数（如 $3 \times 3, 5 \times 5$ ），中心即为几何中心。
- **数学定义**: 对于大小为 $m \times n$ 的掩模，其中心坐标通常定义为：

$$a = (m - 1)/2, \quad b = (n - 1)/2 \quad (10)$$

例如： 1×3 的掩模 $[w_1, w_2, w_3]$ ，中心在 w_2 ； 3×3 的掩模，中心在第 2 行第 2 列。

2. 补零 (Padding) 数量的判定: 为了让掩模能够处理原图的边缘像素，必须在原图四周填充 0。补零的数量取决于掩模的大小：

- **补零规则**: 若掩模在某一方向的大小为 k ，则在该方向的两端各需要补 $(k - 1)/2$ 层零。
- **常见情况**:
 - 3×3 掩模：四周各补 1 圈零。
 - 5×5 掩模：四周各补 2 圈零。
 - 1×3 一维掩模：左右各补 1 个零。
- **结果尺寸**: 补零后，若要保持输出图像与原图尺寸一致（即 Full Padding），则输出结果的大小与原图相同。

3. 计算步骤相关操作 $g = w \star f$ 的过程如下：

1. **补零**: 根据掩模大小对原图 f 进行补零得到 f' 。
2. **对齐与求和**: 将掩模中心对准 f' 的某个像素，将掩模系数与覆盖的像素值逐个相乘并求和。
3. **遍历**: 滑动掩模，使其中心遍历原图中每一个像素位置。

3.4.2 例题 12：相关的具体矩阵计算

题目：已知 1×3 的一维掩模 $w = [1, 2, 3]$, 原信号 $f = [0, 0, 1, 0, 0]$ 。求 w 与 f 的相关结果。

解答过程：

1. 确定参数：

- 掩模大小 $k = 3$, 中心在第 2 位 (数值为 2)。
- 补零数: $(3 - 1)/2 = 1$ 。即左右各补一个 0。

2. 补零后的信号: $f' = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$ 。

3. 滑动计算 (掩模中心对准原序列中的 5 个位置):

- 对准 f 的第 1 个 0: $[1, 2, 3] \cdot [0, 0, 0] = 0$
- 对准 f 的第 2 个 0: $[1, 2, 3] \cdot [0, 0, 1] = 3$
- 对准 f 的第 3 个 1: $[1, 2, 3] \cdot [0, 1, 0] = 2$
- 对准 f 的第 4 个 0: $[1, 2, 3] \cdot [1, 0, 0] = 1$
- 对准 f 的第 5 个 0: $[1, 2, 3] \cdot [0, 0, 0] = 0$

4. 最终结果：相关序列为 $[0, 3, 2, 1, 0]$ 。

考试陷阱提示：

如果本题要求的是卷积，则需要先将 w 翻转为 $[3, 2, 1]$ 再进行同样的计算。你会发现相关和卷积的结果在顺序上是完全相反的。

3.4.3 平滑空间滤波器

平滑滤波器旨在模糊图像并降低噪声。根据运算性质，可分为线性滤波器和非线性滤波器。

1. 线性平滑滤波器

- **盒式滤波器 (Box Filter)**: 掩模中所有系数都相等 (通常全为 1)，结果需除以系数之和。
 - **振铃效应 (Ringing Effect)**: 盒式滤波器在频域上是一个 sinc 函数，其强烈的旁瓣会导致图像在边缘处产生类似“水波纹”的虚假边缘。当滤波核尺寸增大时，这种模糊且带波纹的现象会更加明显。
 - **缺点**: 对物体的边缘处理过于生硬，会产生明显的负面视觉伪影。
- **低通高斯滤波器 (Gaussian Lowpass Filter)**: 掩模系数根据高斯函数采样，中心权重最高，随距离中心增加而呈指数级减小。
 - **核心优势**: 高斯滤波器的傅里叶变换仍然是高斯函数，没有旁瓣。因此，它在平滑图像时不会产生振铃效应，边缘过渡非常自然。
 - **应用**: 是目前最常用的线性平滑工具，用于模拟自然的光学模糊。

2. 非线性平滑滤波器 (统计排序滤波器): 其响应基于邻域像素的灰度排序，而非简单的加权求和。

- **中值滤波器 (Median Filter)**: 用邻域内灰度的中值代替中心像素。

- **核心能力:** 是去除椒盐噪声 (Salt-and-Pepper Noise) 最有效的手段, 因为它能直接剔除异常的极值点。
- **最大值滤波器 (Max Filter):** 取邻域内的最大灰度级, 用于寻找图像中的亮点或减少暗色斑块。
- **最小值滤波器 (Min Filter):** 取邻域内的最小灰度级, 用于寻找图像中的暗点或减少亮色斑块。

3. 平滑空间滤波器异同点总结表

类别	滤波器名称	计算特点	典型应用与评价
线性	盒式滤波器	系数全相等	计算简单, 但有振铃效应
	低通高斯	系数加权	效果平滑自然, 无振铃效应
非线性	中值滤波器	排序取中值	去除椒盐噪声效果最佳
	最大值	排序取极大	寻找亮点, 增强亮区
	最小值	排序取极小	寻找暗点, 增强暗区

3.4.4 锐化空间滤波器

锐化的目的是突出图像中的细节 (如边缘、轮廓), 补偿模糊。其数学基础是微分运算: 一阶微分产生较宽的边缘, 而二阶微分对细节 (如细线、孤立点) 响应更强, 且具有零交叉特性。

1. 二阶微分: 拉普拉斯算子 (Laplacian)

拉普拉斯算子是一种各向同性 (旋转不变) 的算子。

- 离散公式:

$$\nabla^2 f = [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)] - 4f(x, y) \quad (11)$$

- 常用的 3×3 掩模:

- 标准核 (W_1): 仅考虑上下左右相邻像素。
- 全向核 (W_2): 引入对角线方向的像素, 增强效果更均匀。

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{注: 中心为负, 四周为正})$$

- 符号反转版本: 若掩模中心为正 (如 4 或 8), 四周为负, 其本质相同, 但在合成锐化图像时符号需相应调整。

2. 锐化合成公式

为了增强图像细节同时保留背景亮度, 需将拉普拉斯图像加回原图:

$$g(x, y) = f(x, y) + c[\nabla^2 f(x, y)] \quad (12)$$

- 符号判定:

- 若拉普拉斯掩模中心为负 (如 -4 或 -8), 则 $c = -1$, 公式为 $g = f - \nabla^2 f$ 。
- 若拉普拉斯掩模中心为正 (如 4 或 8), 则 $c = 1$, 公式为 $g = f + \nabla^2 f$ 。

3. 一阶微分：梯度算子 (Gradient)

梯度算子通过计算灰度变化的幅度来提取边缘。对于函数 $f(x, y)$, 其梯度向量的幅度为:

$$\nabla f = \text{mag}(\nabla \mathbf{f}) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \approx |g_x| + |g_y| \quad (13)$$

常用的梯度算子是 **Sobel** 算子, 它在检测边缘的同时具有一定的平滑作用:

$$g_x = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 反锐化掩蔽 (Unsharp Masking) 与高提升滤波 (High-boost Filtering)

这是一种不直接使用微分算子也能实现锐化的通用技术。

1. 第一步: 模糊原图, 得到 $f_{blur}(x, y)$ 。
2. 第二步: 从原图中减去模糊图, 得到掩模 $g_{mask} = f - f_{blur}$ 。
3. 第三步: 将掩模加回原图: $g = f + k \cdot g_{mask}$ 。
 - $k = 1$: 称为反锐化掩蔽。
 - $k > 1$: 称为高提升滤波 (弥补了反锐化后图像亮度下降的问题)。

5. 锐化滤波器对比总结表

算子名称	微分阶次	主要特性
拉普拉斯	二阶	对细节响应快, 各向同性, 易产生双响应边缘。
Sobel	一阶	边缘较宽, 对噪声有抑制作用, 突出主要轮廓。
高提升滤波	混合	在保留原图亮度的基础上灵活调整锐化强度。

3.4.5 例题 13: 空间中值滤波计算

题目: 给定一个 3×3 图像块如下, 使用中值滤波器进行处理。

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 25 & 100 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

解答步骤:

1. 提取邻域数值: $\{10, 20, 30, 25, 100, 35, 40, 50, 60\}$ 。
2. 从小到大排序: $\{10, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 60, 100\}$ 。
3. 取中值: 序列共有 9 个数, 第 5 位是 35。
4. 结果: 中心点的值从 100 变为 35。

3.4.6 非锐化掩蔽与高提升滤波 (Unsharp Masking and Highboost Filtering)

在图像增强中，除了直接使用微分算子外，还可以通过从原图中减去其平滑（模糊）版本来提取细节信息，这种技术被称为非锐化掩蔽。

- **非锐化掩蔽 (Unsharp Masking):** 该过程由以下三个步骤组成：

1. 模糊原图像 $f(x, y)$ ，得到模糊后的图像 $\bar{f}(x, y)$ 。
2. 从原图中减去模糊图，得到模板 (Mask): $g_{mask}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$ 。
3. 将模板加回原图: $g(x, y) = f(x, y) + k \cdot g_{mask}(x, y)$ 。

当 $k = 1$ 时，上述过程即为标准的非锐化掩蔽。

- **高提升滤波 (Highboost Filtering):** 当 $k > 1$ 时，该过程被称为高提升滤波。它在增强边缘的同时，保留了更多原图的灰度分量，使图像整体更亮且对比度更高。

3.4.7 空间域滤波器的分类与应用 (Classification of Spatial Filters)

根据滤波器对图像频率成分（灰度变化快慢）的处理方式，空间滤波器可归纳为以下几类：

1. **低通滤波器 (Lowpass Filters / Smoothing):**

- **核心功能:** 消除噪声、平滑图像。
- **物理意义:** 抑制图像中灰度变化剧烈的高频部分（如噪声、边缘），允许变化缓慢的低频部分通过。
- **典型实现:** 均值滤波 (Box Filter)、加权均值滤波、高斯平滑滤波。

2. **高通滤波器 (Highpass Filters / Sharpening):**

- **核心功能:** 锐化图像、突出边缘。
- **物理意义:** 消除了图像中灰度变化缓慢的背景（低频），增强了灰度突变的细节（高频）。
- **典型实现:** 拉普拉斯算子、Sobel 算子。

3. **带阻与带通滤波器 (Bandreject and Bandpass Filters):**

- **带阻滤波器:** 专门用于消除特定频率范围的干扰（例如特定尺寸的周期性条纹噪声）。
- **带通滤波器:** 仅保留特定频率段的特征，常用于检测特定尺度的纹理或目标，通常可以通过两个不同参数的低通滤波器相减得到（如高斯差分 DoG）。

滤波器类型	数学基础	主要作用	典型算子/掩模
低通滤波器	积分/加权平均	降噪、平滑、模糊细节	均值掩模、高斯掩模
中值滤波器	统计排序	去除椒盐噪声、保护边缘	中值、最大值、最小值
高通滤波器	一阶或二阶微分	提取边缘、锐化、增强细节	拉普拉斯、Sobel、Prewitt
带阻滤波器	复合频率阻断	消除特定尺度的周期噪声	空间复合卷积核

3.4.8 混合空间增强技术 (Combined Spatial Enhancement)

在实际工程中，通常需要结合多种空间增强技术。例如，针对一幅暗淡且模糊的图像，典型的处理流程为：

1. 利用拉普拉斯算子进行初步锐化。
2. 利用 Sobel 梯度算子提取强边缘掩模。
3. 使用均值或中值滤波对掩模进行平滑处理以减少噪声干扰。
4. 将处理后的掩模与锐化结果相乘，并叠加回原图。
5. 最后通过幂律变换（伽马校正）调整整体动态范围，使视觉效果达到最优。

3.5 第三章核心重点问题总结

1. 什么是空间域处理？其基本表达式是什么？空间域处理是指直接对图像的像素进行操作的过程。其基本表达式为 $g(x, y) = T[f(x, y)]$ ，其中 $f(x, y)$ 是输入图像， $g(x, y)$ 是处理后的图像， T 是在点 (x, y) 的邻域上定义的算子。
2. 常用的基本灰度变换有哪些？各自的应用场景是什么？主要包括：
 - 图像反转：用于增强图像暗区域中的白色或灰色细节。
 - 对数变换：扩展低灰度值，压缩高灰度值，常用于频谱图的显示。
 - 幂律（伽马）变换：通过 γ 值修正显示设备的非线性响应（伽马校正）或增强对比度。
3. 直方图均衡化 (HE) 的基本原理是什么？通过一个变换函数 $s = T(r)$ ，将原图像的灰度分布转换为近似均匀分布的直方图。其数学核心是利用累积分布函数 (CDF) 作为变换函数，从而扩大像素灰度值的动态范围，达到自动增强图像对比度的效果。
4. 直方图均衡化与直方图匹配（规定化）有何区别？直方图均衡化是自动增强，结果不受人工控制，旨在得到均匀分布；而直方图匹配是人为指定某种特定的直方图形状，让结果图像符合特定的分布，常用于修正特定曝光问题或统一多幅图的色调。
5. 什么是空间相关 (Correlation) 与卷积 (Convolution)？相关是滤波器模板移过图像并计算乘积之和的过程；卷积与相关类似，但在操作前需要将滤波器模板旋转 180 度。在离散单元响应计算中，卷积是线性系统理论的基础。
6. 平滑空间滤波器 (Smoothing Filters) 有哪些？各自特点是什么？
 - 均值滤波器：取邻域平均值，能降低噪声但会导致图像边缘模糊。
 - 统计排序滤波器（如中值滤波）：属于非线性滤波器，在去除椒盐噪声方面效果极佳，且比均值滤波更能保护边缘。
7. 锐化空间滤波器 (Sharpening Filters) 的原理是什么？常用算子有哪些？锐化的目的是突出灰度的过渡部分。原理是利用微分算子：
 - 二阶微分（拉普拉斯算子）：对细节响应更强，常用于增强图像轮廓。
 - 一阶微分（梯度算子，如 Sobel 算子）：常用于提取边缘，计算简单，对噪声有一定的抑制作用。

8. 什么是非锐化掩蔽 (Unsharp Masking) ? 其步骤为: (1) 平滑原图得到模糊图; (2) 从原图中减去模糊图得到模板; (3) 将模板加回原图。这种方法可以在不使用高阶导数的情况下有效地增强图像的边缘和细节。

4 频域滤波 (Filtering in the Frequency Domain)

4.1 傅里叶变换基础与抽样

频域处理的基础是傅里叶级数 (Fourier Series) 和傅里叶变换 (Fourier Transform)。它将图像从空间域 (Spatial Domain) 转换到频率域，使得我们可以分析图像的灰度变化率。

4.1.1 基本概念

- **傅里叶级数:** 任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和/或余弦项之和乘以适当的系数。
- **傅里叶变换:** 非周期函数 (但曲线下的面积有限) 也可以表示为正弦和/或余弦乘以加权函数的积分。
- **频率特性的直观理解:**
 - **低频:** 对应图像中灰度变化缓慢的分量 (如大面积的背景、平滑的区域)。
 - **高频:** 对应图像中灰度变化剧烈的分量 (如物体的边缘、噪声、细节细节)。

4.1.2 冲激及其取样特性

- **连续单位冲激 $\delta(t)$ 定义为:**

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- **取样特性 (Sifting Property):** 冲激函数与函数 $f(t)$ 的乘积在积分下会“筛选”出函数在冲激点处的值:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

4.1.3 抽样与抽样定理

为了在计算机中处理连续图像，必须对其进行抽样。

1. **抽样过程:** 用一个冲激串 ΔT 与连续函数 $f(t)$ 相乘。
2. **抽样定理 (Nyquist Sampling Theorem):** 如果一个连续函数 $f(t)$ 是带限的 (其傅里叶变换在 $[-W, W]$ 范围外为零)，那么只要抽样频率 f_s 大于最高频率 W 的两倍，即:

$$f_s > 2W$$

就可以通过抽样后的样本完全恢复出原始的连续函数。

3. **混叠 (Aliasing):** 如果抽样频率低于奈奎斯特频率，高频分量会“混淆”成低频分量，导致恢复出的信号出现失真。在图像中，混叠常表现为锯齿状边缘或莫尔条纹 (Moiré patterns)。

4.1.4 一维离散傅里叶变换 (1-D Discrete Fourier Transform)

离散傅里叶变换 (DFT) 是将离散样本序列转换到频域的数学工具：

- 正变换 (DFT)：

$$U(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}, \quad u = 0, 1, \dots, M-1$$

- 反变换 (IDFT)：

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} U(u) e^{j2\pi ux/M}, \quad x = 0, 1, \dots, M-1$$

这两个公式构成了频域滤波的基础，通过变换核 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ (欧拉公式) 建立起空间域与频域的桥梁。

4.1.5 二维离散傅里叶变换 (2-D Discrete Fourier Transform)

对于大小为 $M \times N$ 的图像 $f(x, y)$ ，其二维离散傅里叶变换对定义如下：

- 正变换 (DFT)：

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

其中 $u = 0, 1, \dots, M-1$ 且 $v = 0, 1, \dots, N-1$ 。

- 反变换 (IDFT)：

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

4.1.6 傅里叶变换的重要性质 (Properties of Fourier Transform)

在频域滤波中，以下性质至关重要：

1. 频谱与相角 (Spectrum and Phase)：

- 幅度谱 (频谱)： $|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ ，反映了图像中各频率分量的强弱。
- 相角： $\phi(u, v) = \arctan[I(u, v)/R(u, v)]$ ，包含图像结构 (轮廓) 的关键信息。
- 功率谱： $P(u, v) = |F(u, v)|^2$ 。

2. 周期性与共轭对称性 (Periodicity and Symmetry)：DFT 及其逆变换在空间域和频域都是周期的。为了方便分析，通常需要进行中心化处理，即在计算 DFT 前将 $f(x, y)$ 乘以 $(-1)^{x+y}$ ，使频谱的直流分量 $F(0, 0)$ 移动到中心。

3. 平移性 (Translation)：空间域的位移对应频域的相移；而频域的位移对应空间域的乘幂操作。

4. 旋转性 (Rotation)：若 $f(x, y)$ 旋转 θ_0 角度，则其频谱 $F(u, v)$ 在频域也旋转相同的角度。

5. 卷积定理 (Convolution Theorem)：空间域的卷积对应频域的乘法，反之亦然。这是频域滤波的理论基石：

$$f(x, y) * h(x, y) \iff F(u, v) \cdot H(u, v)$$

4.1.7 快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT)

直接计算 $M \times N$ 图像的 DFT 需要 $(MN)^2$ 次复数乘法，计算量巨大。

- **核心思想**: 利用 $e^{j\theta}$ 的周期性和对称性，采用分治法 (Divide and Conquer)。最常见的算法是将原始序列递归地分解为偶数序列和奇数序列计算。
- **效率提升**: 对于长度为 n 的序列，计算复杂度由 $O(n^2)$ 降低到 $O(n \log_2 n)$ 。
- **应用意义**: FFT 的出现使得实时处理大尺寸图像的频域操作（如滤波、压缩等）成为可能。

4.1.8 频域中的频率分量含义

- **直流分量** $F(0,0)$: 代表图像的平均灰度。
- **低频部分**: 靠近频谱中心，决定了图像的整体轮廓和缓慢变化的区域。
- **高频部分**: 远离频谱中心，决定了图像的边缘、噪声及突变的细节。

4.2 频率域滤波基础

频率域滤波的主要思想是通过修改图像的傅里叶变换来达到某种处理目的（如平滑或锐化），然后再通过逆变换回到空间域。

4.2.1 频域滤波的基本步骤 (Steps of Frequency Domain Filtering)

频域滤波的标准化步骤每一步都有其特定的数学或物理原因：

1. **零填充 (Padding)**: 给定一幅大小为 $M \times N$ 的输入图像 $f(x,y)$ ，首先选择适当的填充尺寸 P 和 Q （通常取 $P \geq 2M - 1, Q \geq 2N - 1$ ），在图像边缘填充 0。
 - **原因**: 由于离散傅里叶变换隐含了周期性，直接卷积会导致“交叠错误”（Wrap-around Error）。如果不进行填充，周期性的相邻部分会相互干扰。
2. **中心化处理 (Centering)**: 将图像乘以 $(-1)^{x+y}$ 。
 - **原因**: 这会将傅里叶变换的直流分量 $F(0,0)$ 移动到频率矩形的中心。如果不进行此操作，频谱的四个角将分别是低频，不便于设计对称的滤波器。
3. **计算 DFT**: 对预处理后的图像计算二维离散傅里叶变换 $F(u,v)$ 。
4. **应用滤波器函数 (Filtering)**: 选择一个实对称的滤波器函数 $H(u,v)$ ，并与 $F(u,v)$ 进行点乘 (Element-wise product) :

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

这里 $H(u,v)$ 称为传递函数，它决定了哪些频率成分被滤除，哪些被保留。

5. **计算 IDFT**: 计算 $G(u,v)$ 的逆离散傅里叶变换，得到 $g(x,y)$ 。
6. **后处理**: 取 $g(x,y)$ 的实部，并再次乘以 $(-1)^{x+y}$ 以抵消之前的中心化影响，最后截取左上角的 $M \times N$ 区域得到最终图像。

4.2.2 空间域与频域滤波的联系 (Relationship with Spatial Filtering)

- **卷积定理**: 在空间域中使用掩模 $h(x, y)$ 进行卷积操作, 等价于在频域中将图像的变换 $F(u, v)$ 与滤波器的变换 $H(u, v)$ 相乘。
- **频率域滤波的优势**: 对于大尺寸的滤波模板 (如大型模糊核), 在频域进行乘法运算的计算效率远高于在空间域进行卷积运算。

4.2.3 滤波器设计中的注意事项 (Key Considerations)

- **零填充的重要性**: PDF 中强调, 如果忽略零填充, 得到的处理结果会在图像边缘出现错误的像素溢出。即使是低通滤波, 不填充也会导致边缘出现“振铃效应”的变形。
- **传递函数 $H(u, v)$ 的性质**: 在大多数增强应用中, $H(u, v)$ 通常是实数且关于原点对称。这意味着它只改变图像分量的幅度 (幅度谱), 而不改变相位分量 (相角)。相角包含了图像的结构信息, 保留相位对维持图像物体的形状至关重要。

4.2.4 频域滤波的一般数学模型

总结起来, 频域滤波可以概括为以下数学流程:

$$g(x, y) = \text{Real}\{\text{IDFT}[H(u, v) \cdot \text{DFT}(f(x, y) \cdot (-1)^{x+y})]\} \cdot (-1)^{x+y}$$

在该模型中, 通过变换 $H(u, v)$ 的形状, 我们可以实现从简单的平滑 (低通) 到复杂的同态滤波等多种效果。

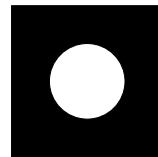
4.3 频率域滤波器

在频域滤波中, 传递函数 $H(u, v)$ 通常被设计为一个关于频谱中心对称的平面。我们可以用灰度图来直观表示: 白色区域允许频率通过, 黑色区域抑制频率。

4.3.1 频率域低通滤波器 (Lowpass Filtering)

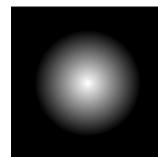
低通滤波器保留中心附近的低频成分, 通过平滑图像来去除噪声。

1. **理想低通滤波器 (ILPF)**: 具有截断式的频率响应。



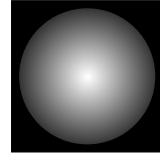
ILPF: 阶跃圆孔, 产生严重振铃

2. **巴特沃斯低通滤波器 (BLPF)**: 具有平滑的过渡带, 阶数 n 决定边缘陡峭程度。



BLPF: 渐变圆孔, 振铃较轻

- 3. 高斯低通滤波器 (GLPF): 从中心向外呈指数级衰减, 物理性质最稳定。



GLPF: 钟形衰减, 完全无振铃

4.3.2 频率域高通滤波器 (Highpass Filtering)

高通滤波器通过减弱 Fourier 变换中的低频分量而保留高频分量, 从而实现图像锐化和边缘增强。

- **基本特性:** 高通传递函数 $H_{hp}(u, v)$ 与低通传递函数 $H_{lp}(u, v)$ 的关系为:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

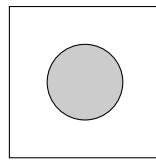
这意味着理想、巴特沃斯及高斯高通滤波器的构造逻辑与低通完全相反, 即在频率矩形中心(低频)处近乎为 0, 向外(高频)逐渐趋近于 1。

- **视觉表现:** 标准的滤波结果通常会丢失背景亮度(因为平均灰度被滤除), 图像整体偏暗, 仅突出物体的轮廓和噪声细节。

1. 高频强调滤波 (High-frequency Emphasis Filtering) 由于普通高通滤波器会消除直流分量, 导致图像变得昏暗。高频强调滤波通过给高通滤波器引入一个常数偏移量 k_1 (通常 ≥ 0) 和增益 k_2 (通常 > 1) 来解决此问题:

$$H_{hfe}(u, v) = k_1 + k_2 \cdot H_{hp}(u, v)$$

- **作用:** k_1 保留了图像的背景亮度(低频), 而 k_2 进一步放大了高频细节。



高频强调: 中心非纯黑, 保留部分低频分量

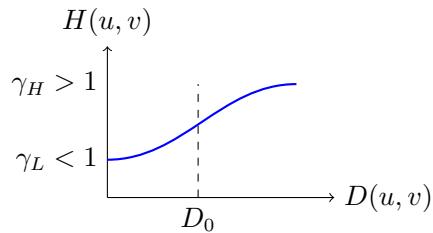
2. 同态滤波 (Homomorphic Filtering) 同态滤波是一种特殊的高通增强技术, 专门用于解决光照不均导致的动态范围过大及细节模糊问题。

- **数学模型:** 基于图像模型 $f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$ 。通过取对数将乘法转换为加法:

$$\ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

- **物理逻辑:** 照射分量 i (环境光) 变化缓慢, 属于低频; 反射分量 r (物体细节) 变化剧烈, 属于高频。

- **滤波器构造:** 其剖面函数通常由高斯高通滤波器修改而来, 参数 $\gamma_L < 1$ 控制低频压缩, $\gamma_H > 1$ 控制高频增强。

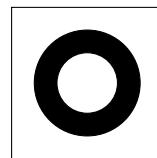


- **最终效果:** 同时实现动态范围压缩（消除光照不均的影响）和对比度增强（锐化物体边缘）。

4.3.3 选择性滤波 (Selective Filtering)

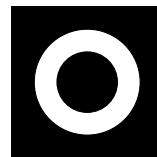
选择性滤波用于处理具有周期性干扰或特定方向噪声的图像。

1. **带阻滤波器 (Bandreject Filter):** 用于消除特定频率范围内的噪声（如由于扫描设备引起的周期性纹理）。其传递函数 $H(u,v)$ 在以原点为中心的环形带内取值为 0。



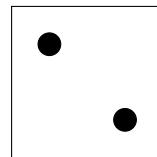
带阻：阻断中间环形频段

2. **带通滤波器 (Bandpass Filter):** 与带阻相反，仅允许特定环形频段通过，通常用于提取特定尺度的纹理。



带通：仅允许中间环形通过

3. **陷波滤波器 (Notch Filter):** 这是最细致的选择性滤波器，用于消除频谱中特定的“亮点”（纯正弦干扰）。由于傅里叶变换的对称性，陷波器必须成对出现。



陷波：精准剔除特定频点噪声

4.3.4 总结：空间域与频域的对应关系

4.4 第四章频域滤波核心重点问题总结

1. **在进行频域滤波前，为什么要进行零填充 (Zero Padding)？** 这是为了防止由于 DFT 的周期性而产生的交叠错误 (Wrap-around Error)。在频域中的点乘等价于空间域的周期卷积。如果不进行零填充，图像的一端会受到另一端像素的干扰，导致边缘出现伪影。通常需要将图像填充至 $P \geq 2M - 1$ 和 $Q \geq 2N - 1$ 的尺寸（常用 $2M, 2N$ ）。

处理目标	空间域操作	频域操作
平滑 / 去噪	均值、高斯卷积	低通滤波 (ILPF, GLPF 等)
锐化 / 边缘提取	拉普拉斯、Sobel 微分	高通滤波、拉普拉斯算子
光照补偿	直方图规定化	同态滤波
周期噪声消除	较难实现	陷波滤波 / 带阻滤波

2. 二维离散傅里叶变换 (DFT) 中的“中心化”操作其物理意义是什么？通过在变换前将 $f(x, y)$ 乘以 $(-1)^{x+y}$ ，可以将频谱的直流分量 $F(0, 0)$ （代表图像平均灰度）移动到频率矩形的中心。意义：这样做使得频谱能量集中在中心，便于我们设计和观察以中心为基准的对称滤波器（如圆孔滤波器），同时也符合人类对频谱分布的直观认知。
3. 如何构造频域滤波函数 $H(u, v)$ ？其基本逻辑是什么？构造逻辑基于距离函数 $D(u, v)$ ，即频率平面上点 (u, v) 到中心 (u_0, v_0) 的欧氏距离。
 - 低通滤波器：构造为在 $D(u, v) \leq D_0$ 时具有高增益（趋近 1），在 $D(u, v) > D_0$ 时具有低增益（趋近 0）。
 - 高通滤波器：构造逻辑与低通相反，通常定义为 $H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$ 。
4. 理想低通滤波器 (ILPF) 产生的“振铃效应”本质原因是什么？振铃效应的本质是由于 ILPF 在频域具有剧烈的阶跃性（断崖式截止）。根据卷积定理，频域的阶跃函数对应空间域的 Sinc 函数（具有波浪起伏的旁瓣）。当图像边缘与这些波浪状的旁瓣卷积时，就会在边缘周围产生同心环状的伪影。高斯滤波器 (GLPF) 因为其频域和空间域都是平滑的高斯函数，因此完全没有振铃。
5. 什么是高频强调滤波 (High-frequency Emphasis)？它比普通高通滤波好在哪里？普通高通滤波会消除所有低频成分，导致图像平均灰度降为 0，图像变得异常昏暗。高频强调滤波通过公式 $H_{hfe} = k_1 + k_2 H_{hp}$ 实现：
 - $k_1 \geq 0$ ：保留了一定比例的低频分量，使图像背景亮度得以维持。
 - $k_2 > 1$ ：放大了高频细节，使图像边缘更加锐利。
6. 同态滤波 (Homomorphic Filtering) 为何能同时实现动态范围压缩和对比度增强？基于 $f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$ 模型，同态滤波利用对数变换将乘法转为加法。
 - 动态范围压缩：通过衰减低频分量（照射分量 i ），消除光照不均的影响，缩小过大或过小的光照差异。
 - 对比度增强：通过增加高频分量（反射分量 r ），突出了物体表面的细节和边缘。
7. 陷波滤波器 (Notch Filter) 与带阻滤波器有何区别？带阻滤波器是阻断一个以中心为原点的“环形”频段，用于消除特定频率范围的干扰。而陷波滤波器则是针对特定的“频率点对”进行阻断。由于正弦噪声在频谱中表现为一对关于原点对称的亮点，陷波滤波器能精准打击这些亮点而不影响其他频率，是去除周期性干扰最有效的手段。