

# 数字图像处理

## (Digital Image Processing)

核心知识点精炼笔记 6-7

东南大学计算机科学与工程学院  
09023419 严伟琛

授课教师：薛澄

参考教材：拉斐尔·冈萨雷斯 (Rafael C. Gonzalez) 第四版

2026 年 1 月 15 日

## 目录

<b>6 彩色图像处理 (Color Image Processing)</b>	<b>3</b>
6.1 彩色图像基础	3
6.1.1 物理基础：光的特性	3
6.1.2 三基色与三补色	3
6.1.3 描述颜色的特性：色调、饱和度与亮度	3
6.1.4 CIE 色度图 (CIE Chromaticity Diagram)	4
6.2 彩色模型	4
6.2.1 RGB 彩色模型 (RGB Color Model)	4
6.2.2 CMY 与 CMYK 彩色模型	4
6.2.3 HSI 彩色模型 (HSI Color Model)	4
6.2.4 RGB $\leftrightarrow$ HSI 双向转换公式	5
6.2.5 彩色模型横向对比	5
6.3 伪彩色图像处理	5
6.3.1 强度分层 (Intensity Slicing)	5
6.3.2 灰度到颜色的变换 (Gray-to-Color Transformations)	6
6.3.3 伪彩色处理的核心考点总结	6
6.4 全彩色图像处理	7
6.4.1 彩色变换基本原理 (Color Transformation Basis)	7
6.4.2 补色 (Color Complements)	7
6.4.3 彩色分层 (Color Slicing)	7
6.4.4 彩色图像的直方图均衡化	7
6.4.5 彩色图像平滑与锐化	8
6.4.6 彩色图像边缘检测	8
6.4.7 彩色图像分割	8
6.4.8 彩色图像中的噪声	9
6.4.9 彩色图像处理流程总结	9
6.4.10 例题 16：标准色条图像的 RGB 分量分解	9
6.5 第六章核心重点问题总结	10
<b>7 小波变换与多分辨率处理 (Wavelet and Multiresolution Processing)</b>	<b>12</b>
7.1 背景知识：图像金字塔、子带编码与哈尔变换	12
7.1.1 图像金字塔 (Image Pyramids)	12
7.1.2 子带编码 (Subband Coding)	12
7.1.3 哈尔变换 (Haar Transform)	12
7.1.4 例题 17：近似金字塔与预测残差金字塔的构建	13
7.1.5 核心考点对比总结	14
7.2 小波变换和多分辨率分析	14
7.2.1 尺度函数与小波函数 (Scaling and Wavelet Functions)	14
7.2.2 连续小波变换 (CWT)	15
7.2.3 离散小波变换 (DWT)	15
7.2.4 快速小波变换 (FWT) 与马拉特算法 (Mallat Algorithm)	15

7.2.5	多分辨率分析 (MRA) 的核心性质 . . . . .	15
7.2.6	尺度方程与小波方程 . . . . .	16
7.2.7	小波变换、多分辨率分析与快速算法对比总结 . . . . .	16
7.3	哈尔小波与二维图像分解 . . . . .	16
7.3.1	哈尔尺度函数与小波函数 (Haar Scaling and Wavelet Functions) . . . . .	17
7.3.2	二维哈尔小波分解逻辑 . . . . .	17
7.3.3	哈尔变换矩阵示例 . . . . .	17
7.3.4	基于小波的图像处理应用 . . . . .	18
7.3.5	核心知识点总结表 . . . . .	18
7.3.6	例题 18: 一维信号的二尺度快速小波变换 (全过程严谨推导) . . . . .	18
7.4	第七章核心重点问题总结 . . . . .	21

## 6 彩色图像处理 (Color Image Processing)

彩色图像处理在计算机视觉中具有重要意义：一方面颜色是强大的描述符，能简化目标识别；另一方面，人眼对颜色的分辨能力远高于灰度。

### 6.1 彩色图像基础

研究彩色图像处理主要有两个动力：首先，颜色是一个强大的描述符，能简化从场景中提取和识别目标的过程；其次，人眼能辨别数千种彩色阴影和色调，而只能分辨几十种灰度。

#### 6.1.1 物理基础：光的特性

1666 年，艾萨克·牛顿发现一束太阳光通过玻璃棱镜会分解成连续的光谱。

- **可见光范围**：电磁波谱中约 400 ~ 700nm 的窄带。
- **单色光与彩色光**：
  - **单色光 (Monochromatic Light)**：指没有任何彩色、仅有亮度的光（即灰度光）。
  - **彩色光**：由三个基本物理量描述：
    1. **辐射亮度 (Radiance)**：从光源流出的总能量（单位：瓦特 W）。
    2. **发光强度 (Luminance)**：观察者感知到的能量（单位：流明 lm）。
    3. **亮度 (Brightness)**：一个主观的描述符，实际上无法测量，体现了颜色的强弱感。

#### 6.1.2 三基色与三补色

- **三基色原则 (Primary Colors)**：人眼中有三类锥体细胞负责感色。为了标准化，CIE 规定了三基色的波长：蓝色 (435.8nm)、绿色 (546.1nm)、红色 (700.0nm)。
- **加色混合 (Additive Mixing)**：红 (R)、绿 (G)、蓝 (B) 三种光混合可产生各种彩色。 $R + G + B = \text{白色}$ 。主要用于显示器、投影仪。
- **减色混合 (Subtractive Mixing)**：青 (C)、品红 (M)、黄 (Y) 是光的红色、绿色、蓝色的补色。颜料混合遵循减色原理， $C + M + Y = \text{黑色}$ 。主要用于印刷、打印。

#### 6.1.3 描述颜色的特性：色调、饱和度与亮度

区分彩色光的三个主要特性是：

1. **色调 (Hue, H)**：描述纯色，与光的主波长有关。当我们说“红色”、“黄色”时，指的就是色调。
2. **饱和度 (Saturation, S)**：指颜色的纯度，即白光冲淡某种色调的程度。纯光谱色是完全饱和的；粉红色（红加白）则不饱和。
3. **亮度 (Intensity/Value, I/V)**：对应于单色光的亮度，体现了颜色的明暗。

注：色度和饱和度通称为**色度 (Chromaticity)**。因此，一种颜色是由其亮度和色度共同定义的。

#### 6.1.4 CIE 色度图 (CIE Chromaticity Diagram)

色度图描述了可见色彩的分布（通常以  $x$  和  $y$  为坐标，其中  $x, y, z$  为三基色受体比例，且  $x + y + z = 1$ ）。

- **边界点**：代表完全饱和的纯光谱色。
- **等能点**：图中心处代表等量的三基色混合，即白色。
- **色域 (Gamut)**：在色度图中连接任意两点或三点得到的线段或三角形，代表这些基色所能混合出的所有颜色范围。注意：没有任何三个固定基色能组合出可见光谱中的所有颜色。

### 6.2 彩色模型

彩色模型（也称为彩色空间）的目的是以标准的方式对颜色进行数字化说明。

#### 6.2.1 RGB 彩色模型 (RGB Color Model)

RGB 模型建立在一个归一化的单位正方体坐标系中，是工业界最常用的硬件导向模型。

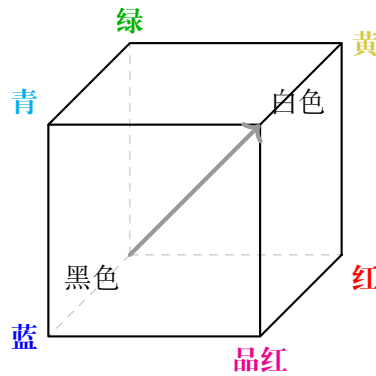


图 6.1 RGB 彩色立方体。主对角线连接黑点与白点，代表灰度级（强度）。

#### 6.2.2 CMY 与 CMYK 彩色模型

CMY 是 RGB 的补色模型，主要用于印刷。

1. **RGB 与 CMY 转换**:  $[C, M, Y]^T = [1, 1, 1]^T - [R, G, B]^T$
2. **CMY 转 CMYK (严格修正版)**: 印刷中为获得纯黑并减少成本，引入  $K$  通道。
  - **提取黑色**:  $K = \min(C, M, Y)$
  - **修正彩色通道**:  $C = \frac{C-K}{1-K}$ ,  $M = \frac{M-K}{1-K}$ ,  $Y = \frac{Y-K}{1-K}$

#### 6.2.3 HSI 彩色模型 (HSI Color Model)

HSI 模型将亮度 ( $I$ ) 与色度 ( $H, S$ ) 解耦，其几何推导源自 RGB 立方体的旋转投影。

1. **HSI 与 RGB 正方体的几何对应 (依据 PDF 第 39 页)**:

- **强度 ( $I$ )**: RGB 立方体垂直站立时，主对角线即为  $I$  轴。
- **饱和度 ( $S$ )**: 彩色点到  $I$  轴的垂直距离。

- **色调 (H)**: 在垂直于对角线的平面上, 点相对于红轴方向的角度。

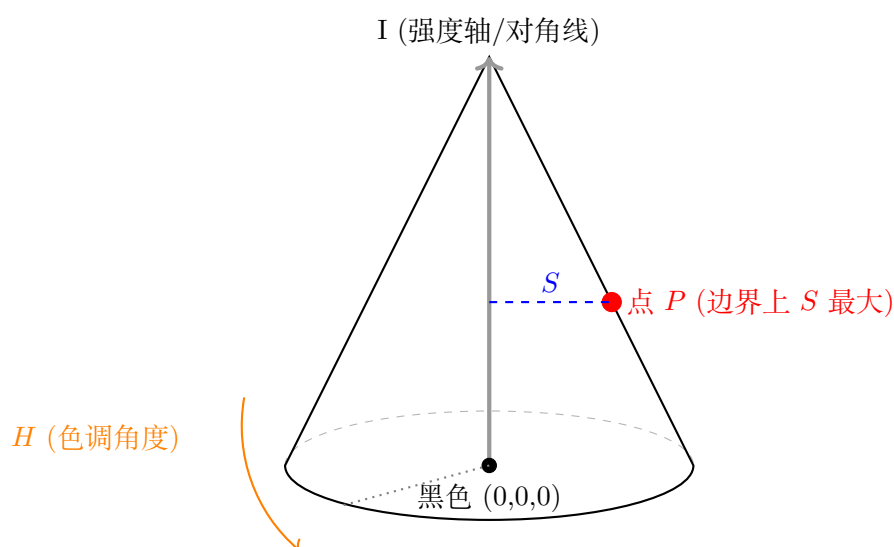


图 6.2 HSI 单圆锥模型。强度轴  $I$  为圆锥中心轴；饱和度  $S$  是点到轴的垂直距离；色调  $H$  是绕轴旋转的角度。

#### 6.2.4 RGB $\leftrightarrow$ HSI 双向转换公式

##### 1. RGB $\rightarrow$ HSI:

$$I = \frac{1}{3}(R + G + B), \quad S = 1 - \frac{3}{R + G + B}[\min(R, G, B)] \quad (1)$$

$$H = \arccos \left\{ \frac{0.5[(R - G) + (R - B)]}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}} \right\} \quad (\text{若 } B > G, \text{ 则 } H = 360^\circ - H) \quad (2)$$

2. **HSI  $\rightarrow$  RGB**: 根据  $H$  所在扇区 ( $0^\circ \leq H < 120^\circ$  为 RG,  $120^\circ \leq H < 240^\circ$  为 GB,  $240^\circ \leq H < 360^\circ$  为 BR) 进行分段计算。

#### 6.2.5 彩色模型横向对比

模型	应用场景	优势	劣势
RGB	采集、显示设备。	硬件适配度最高。	三分量高度相关，非直观。
CMYK	印刷出版。	符合减色原理。	色域受限，存在 $K$ 通道计算。
HSI	图像分析增强。	亮度与色彩完全独立。	包含非线性变换，计算开销大。

### 6.3 伪彩色图像处理

伪彩色处理是指基于一定的准则, 对黑白图像的灰度值赋予不同的彩色。它并不代表物体的真实颜色, 而是为了增强人眼对图像细节的辨识度。

#### 6.3.1 强度分层 (Intensity Slicing)

这是伪彩色处理最简单的形式。其核心思想是将灰度级范围划分为若干个区间, 每个区间赋予一种不同的颜色。

1. **数学描述**：设图像的灰度范围为  $[0, L - 1]$ 。定义  $P$  个水平切分平面，将灰度分成  $P + 1$  个区间。对于像素  $f(x, y)$ ：

$$f(x, y) = k \Rightarrow \hat{f}(x, y) = C_k \quad (\text{其中 } C_k \text{ 是赋予第 } k \text{ 个区间的颜色}) \tag{3}$$

2. **物理意义**：类似于地图中的等高线涂色。例如在 X 光片中，将特定密度的区域（如肿瘤）涂成红色，而背景保留为蓝色或绿色。

6.3.2 灰度到颜色的变换 (Gray-to-Color Transformations)

相比强度分层，这种方法更加灵活且连续。它通过三个独立的变换函数，分别将输入灰度值映射为 R、G、B 三个分量。

1. **处理流程**：对于原图像中的任一像素灰度级  $f(x, y)$ ，通过三个变换函数  $f_R(\cdot), f_G(\cdot), f_B(\cdot)$ ：

$$\begin{cases} R(x, y) = f_R[f(x, y)] \\ G(x, y) = f_G[f(x, y)] \\ B(x, y) = f_B[f(x, y)] \end{cases} \tag{4}$$

最后合成一幅全彩色图像。

2. **应用实例**：

- **多光谱图像融合**：将来自不同传感器的单色图像（如可见光、红外线、紫外线）分别送入 R、G、B 通道合成，突出特定目标。
- **热成像**：将高温区映射为红色，中温区映射为黄色，低温区映射为蓝色。

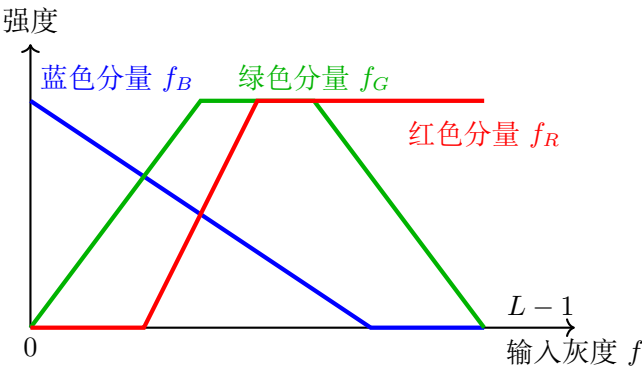


图 6.3 灰度到颜色的变换函数示例。三条映射曲线分别决定了生成的 RGB 比例。

6.3.3 伪彩色处理的核心考点总结

方法	关键特征	典型应用
强度分层	离散分段，产生阶梯状颜色变化。	医疗影像（突出肿块）、简单的密度分割。
灰度到颜色变换	连续变换，颜色过渡平滑。	遥感图像、红外热成像、降雨量分布图。

- **注意**：伪彩色处理不增加图像的任何物理信息，它仅仅是改变了信息的表现形式，以适应人类视觉系统。

## 6.4 全彩色图像处理

全彩色图像处理的基本原理是将单色图像处理技术扩展到彩色空间。

### 6.4.1 彩色变换基本原理 (Color Transformation Basis)

彩色变换主要在单一彩色模型内进行，其基本表达式为：

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (5)$$

其中  $f(x, y)$  是输入彩色图像， $g(x, y)$  是输出图像， $T$  是对空间邻域的操作。当仅考虑单像素点变换时，公式可简化为：

$$s_i = T_i(r_1, r_2, \dots, r_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

- **注意：**虽然理论上可以在任何彩色模型中进行变换，但同一目的的运算在不同彩色模型下的变换函数是不同的。
- 例如：在 RGB 空间修改亮度需要同时改变三个分量；而在 HSI 空间只需修改  $I$  分量。

### 6.4.2 补色 (Color Complements)

在彩色圆环中，直接对立的颜色称为补色。

- **作用：**补色变换类似于灰度图像的“反转”，常用于增强彩色图像中深色区域的细节。
- **计算：**在 RGB 立方体中，颜色  $(r, g, b)$  的补色即为  $(1 - r, 1 - g, 1 - b)$ 。

### 6.4.3 彩色分层 (Color Slicing)

彩色分层（彩色切片）的目的是将特定的颜色区域与其余部分分离。这在物体检测中非常有用。

1. **立方体区域法：**定义一个以参考颜色  $\mathbf{a}$  为中心、边长为  $W$  的立方体。

$$s_i = \begin{cases} 0.5 & \text{if } |r_j - a_j| > \frac{W}{2} \text{ for any } j \\ r_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

2. **球体区域法：**定义一个半径为  $R_0$  的球体。

$$s_i = \begin{cases} 0.5 & \text{if } \sum (r_j - a_j)^2 > R_0^2 \\ r_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

注：不在范围内的像素通常被赋予中性灰色（如 0.5），从而突出目标颜色。

### 6.4.4 彩色图像的直方图均衡化

- **RGB 空间：**不推荐独立对三个分量做均衡化，因为这会改变像素的颜色比例，导致色调偏移 (Color Shifting)。
- **HSI 空间：**是理想的均衡化空间。通过保持  $H$  和  $S$  不变，仅对  $I$  (**强度**) 分量进行均衡化，可以有效增强对比度而不偏色。



#### 6.4.5 彩色图像平滑与锐化

- **彩色平滑**：可以使用均值或高斯模板。对 RGB 三通道分别平滑与对 HSI 的  $I$  分量平滑，效果基本一致。
- **彩色锐化**：利用拉普拉斯算子。

$$\nabla^2[\mathbf{c}(x, y)] = \begin{bmatrix} \nabla^2 R(x, y) \\ \nabla^2 G(x, y) \\ \nabla^2 B(x, y) \end{bmatrix} \quad (9)$$

锐化后的图像细节更清晰，但在边缘处需注意颜色的匹配性。

#### 6.4.6 彩色图像边缘检测

在彩色图像中，边缘检测不能简单地通过计算单个分量的梯度再叠加来完成，因为不同分量的梯度方向可能相反，导致相互抵消。

1. **基于向量梯度的计算**：设  $\mathbf{r}, \mathbf{g}, \mathbf{b}$  为 RGB 空间的单位向量。定义向量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  为：

$$\mathbf{u} = \frac{\partial R}{\partial x} \mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial x} \mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{b}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial R}{\partial y} \mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial y} \mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{b} \quad (10)$$

定义相关的标量： $g_{xx} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ ,  $g_{yy} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ,  $g_{xy} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

2. **最大变化率方向**：在  $(x, y)$  处，最大变化率的方向角  $\theta(x, y)$  为：

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2g_{xy}}{g_{xx} - g_{yy}} \right] \quad (11)$$

在此方向上的变化率（梯度值）为：

$$F_\theta(x, y) = \left\{ \frac{1}{2} [(g_{xx} + g_{yy}) + (g_{xx} - g_{yy}) \cos 2\theta + 2g_{xy} \sin 2\theta] \right\}^{1/2} \quad (12)$$

#### 6.4.7 彩色图像分割

彩色分割利用颜色信息的丰富性，可以实现比灰度图像更精确的目标提取。

1. **HSI 空间分割**：

- **优势**：符合人类视觉，通常在  $H$ （色调）分量上进行阈值处理即可分离特定颜色的物体。
- **限制**： $S$ （饱和度）常作为掩模，因为在低饱和度（接近灰色）时， $H$  是不可靠的。

2. **RGB 空间分割（向量判别）**：直接在 RGB 空间中计算待测像素  $\mathbf{z}$  与参考颜色向量  $\mathbf{a}$  之间的距离。

- **欧氏距离**： $D(\mathbf{z}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{a}\| = [(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T (\mathbf{z} - \mathbf{a})]^{1/2}$
- **分割准则**：若  $D(\mathbf{z}, \mathbf{a}) \leq D_0$ （阈值），则认为该像素属于目标类。

6.4.8 彩色图像中的噪声

彩色图像的噪声通常在不同通道间具有不同的表现形式。

- **噪声的分布：**
  - **RGB 通道：**噪声可能仅出现在某一特定通道（如蓝敏传感器噪声较大）。
  - **HSI 通道：**如果 RGB 中一个通道含有噪声，转换到 HSI 空间后，噪声会通过非线性变换扩散到所有分量（尤其是  $H$  和  $S$  分量会受亮度  $I$  的低值影响而剧烈波动）。
- **处理策略：**如果噪声是单通道的，应在转换到其他彩色空间之前，先在 RGB 空间对该通道进行滤波处理。

6.4.9 彩色图像处理流程总结

处理环节	核心结论/方法	注意事项
边缘检测	采用向量梯度法。	不能直接叠加 R,G,B 的梯度幅值。
图像分割	距离度量（RGB）或色调阈值（HSI）。	需注意低饱和度下的色调不稳定问题。
噪声处理	优先在 RGB 空间去噪。	避免非线性变换导致的噪声扩散。

6.4.10 例题 16：标准色条图像的 RGB 分量分解

**题目：**画出如下图像显示在单色显示器上时的 RGB 分量图像。所有颜色（Black, Red, Yellow, Green, Cyan, Blue, Magenta, White）都达到最大亮度和饱和度。周围围了一圈灰色边框 Gray (50% 亮度)。请给出原图示意及三个分量图。

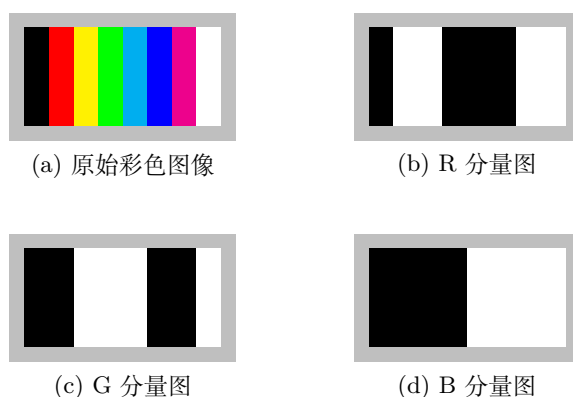
**详细解答步骤：**

1. **颜色成分映射分析：**在 RGB 颜色模型中，任意颜色都可以看作是红、绿、蓝三种基色的线性组合。题目中提到的颜色与 RGB 分量的对应关系如下表所示（1 代表最大亮度，0 代表无亮度）：

颜色	R (红)	G (绿)	B (蓝)	备注
Black (黑)	0	0	0	无色
Red (红)	1	0	0	基色
Yellow (黄)	1	1	0	R+G
Green (绿)	0	1	0	基色
Cyan (青)	0	1	1	G+B
Blue (蓝)	0	0	1	基色
Magenta (品红)	1	0	1	R+B
White (白)	1	1	1	全色
Gray (灰)	0.5	0.5	0.5	50% 亮度

2. **分量图显示逻辑：**当图像显示在单色显示器上时，图像的亮度直接对应于该颜色在该通道的数值：
  - 数值为 1 的区域显示为纯白色；

- 数值为 0 的区域显示为纯黑色；
- 数值为 0.5 的区域（灰色边框）显示为中等灰色。



**结论总结：**通过分量分解可以看出，单色灰度图本质上提取了彩色图像在特定波长通道上的能量分布。合成色（如黄色、青色）会在多个分量图中产生白色区域。

## 6.5 第六章核心重点问题总结

### 1. 研究彩色图像处理的主要动力是什么？人眼对颜色的感知有什么特点？

- **动力：**首先，颜色是强大的描述符，能简化目标的提取与识别；其次，人眼对颜色的分辨力远高于灰度。
- **特点：**人类只能分辨几十种灰度级，但可以分辨数千种不同的彩色阴影和色调。

### 2. 数字图像处理中常用的彩色模型及其应用场景有哪些？

- **RGB 模型：**基于加色原理，主要用于彩色摄像机、显示器和图形硬件。
- **CMY/CMYK 模型：**基于减色原理，主要用于彩色打印、印刷及出版。
- **HSI 模型：**将亮度与色度解耦，最符合人类感知描述，主要用于图像分析、识别与增强。

### 3. RGB 模型与 HSI 模型在几何结构和转换逻辑上有什么对应关系？

- **几何对应：**将 RGB 立方体绕主对角线旋转至垂直，该对角线即为 HSI 的强度轴 (I)。
- **参数定义：**饱和度 (S) 是彩色点到强度轴的垂直距离；色调 (H) 是在垂直于强度轴的平面上相对于红轴的角度。
- **转化提示：**RGB 转换为 HSI 时，若  $B > G$ ，色调  $H$  需用  $360^\circ$  减去计算出的  $\theta$ 。

### 4. 伪彩色图像处理中，“灰度分层”与“灰度到彩色变换”有什么区别？

- **灰度分层 (颜色编码)：**将灰度范围划分为有限的离散区间，每个区间赋予一种固定颜色。结果呈阶梯状变化，类似于地图等高线。
- **灰度到彩色的变换：**通过三个独立的连续函数  $f_R, f_G, f_B$  将灰度映射为 RGB。结果颜色过渡平滑，常用于红外热成像。

### 5. 在进行全彩色图像直方图均衡化时，为什么 HSI 空间优于 RGB 空间？

- **RGB 空间：**若对 R, G, B 三通道分别均衡化，会打破三者的比例关系，导致严重的色调偏移（偏色）。

- **HSI 空间**: 通过保持  $H$  和  $S$  不变, 仅对  $I$  (强度) 分量进行均衡化, 能均匀分布亮度而不改变图像本身的颜色, 处理效果更自然。

#### 6. 全彩色图像的平滑、锐化与边缘检测在实现逻辑上有何异同?

- **平滑与锐化**: 作为线性运算, 在 RGB 各分量上独立操作后再合并, 与在 HSI 的  $I$  分量上操作效果基本等价。
- **边缘检测**: 不能简单合并各分量的梯度, 因为不同通道梯度方向可能相反导致抵消。必须采用**向量梯度法**, 通过计算三个通道的综合偏导数 ( $g_{xx}, g_{yy}, g_{xy}$ ) 来确定最大变化率的方向。

#### 7. 彩色图像分割中, HSI 空间和 RGB 空间的分割准则是什么?

- **HSI 空间**: 通常直接在  $H$  (色调) 分量上设置阈值。但需注意, 在低饱和度 ( $S$  较小时) 区域, 色调  $H$  是不可靠的。
- **RGB 空间**: 采用向量判别法, 计算待测像素与参考颜色向量之间的**欧氏距离**或曼哈顿距离。若距离小于给定阈值, 则归为同一目标类。

#### 8. 噪声对彩色图像处理的影响及应对策略是什么? 噪声可能仅存在于某个特定分量 (如蓝敏传感器噪声)。如果直接进行彩色空间转换 (如转为 HSI), 单通道噪声会通过非线性变换扩散到所有分量。因此, 最佳策略是在 RGB 空间对含有噪声的分量先进行滤波, 然后再进行空间转换或其它处理。

## 7 小波变换与多分辨率处理 (Wavelet and Multiresolution Processing)

在前几章中，我们主要在单一尺度下处理图像。然而，图像中的目标往往具有不同的尺度特征。小波变换提供了一种多分辨率的处理框架，能够将图像分解为不同空间分辨率和频率特性的分量。

### 7.1 背景知识：图像金字塔、子带编码与哈尔变换

#### 7.1.1 图像金字塔 (Image Pyramids)

图像金字塔是实现多分辨率处理最直观的方式。根据 PDF 第 3-5 页，金字塔的构建涉及“近似”和“残差”两个核心概念。

1. **近似金字塔 (Approximation Pyramid)**: 用于存储原始图像在不同分辨率下的近似表示。

- **构建步骤**:

- (a) **滤波**: 使用低通滤波器（如高斯核）对第  $j$  层图像进行平滑。
- (b) **下采样**: 去除偶数行和偶数列，得到第  $j - 1$  层图像（大小为上一层的  $1/4$ ）。

- **物理意义**: 随着层级上升，图像细节逐渐丢失，仅保留宏观轮廓。

2. **残差金字塔 (Residual/Prediction Residual Pyramid)**: 用于存储近似金字塔相邻层级之间的“差异信息”。

- **构建步骤**:

- (a) **上采样**: 将第  $j - 1$  层图像通过插值（补零再滤波）放大到第  $j$  层的大小，得到预测图像  $\hat{f}_j$ 。
- (b) **求差**: 用原始第  $j$  层图像减去预测图像:  $e_j = f_j - \hat{f}_j$ 。

- **物理意义**: 残差图像包含了被低通滤波滤掉的细节（高频信息）。拉普拉斯金字塔即是一种典型的残差金字塔。

#### 7.1.2 子带编码 (Subband Coding)

子带编码是小波变换在数字信号处理领域的体现。

- **滤波器组**: 输入信号通过低通滤波器  $h_0(n)$  和高通滤波器  $h_1(n)$  分解为两个子带。
- **下采样**: 分解后的信号进行  $2 \downarrow$  下采样以维持数据量平衡。
- **重建**: 通过内插上采样和合成滤波器组  $g_0(n), g_1(n)$  恢复原始信号。

#### 7.1.3 哈尔变换 (Haar Transform)

哈尔变换是多分辨率分析的数学基石。它不仅是简单的求平均，更是一种 \*\* 正交基的变换 \*\*。

1. **哈尔基函数与矩阵形式**: 对于  $N = 2$  的情况，哈尔矩阵  $\mathbf{H}_2$  为:

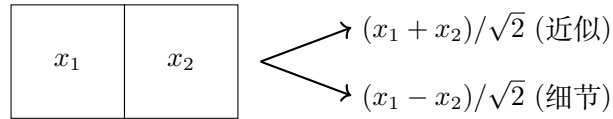
$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中:

- **第一行**  $[1, 1]$ : 对应低通滤波, 计算像素间的平均值 (近似系数)。
- **第二行**  $[1, -1]$ : 对应高通滤波, 计算像素间的差值 (细节系数)。

2. **二维哈尔变换分解**: 在图像处理中, 对行和列分别进行一维哈尔变换。一次分解产生四个子图像:

- **LL (近似)**: 水平和垂直方向均为低频。
- **LH (垂直细节)**: 水平低频, 垂直高频。
- **HL (水平细节)**: 水平高频, 垂直低频。
- **HH (对角细节)**: 水平和垂直方向均为高频。



#### 7.1.4 例题 17: 近似金字塔与预测残差金字塔的构建

**题目**: 已知  $4 \times 4$  输入图像  $\mathbf{f}_{level,j}$  如右图所示, 构建一个全填充的近似金字塔和相应的预测金字塔。

$$\mathbf{f}_{level,j} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \end{bmatrix}$$

1. **构建第  $j-1$  层近似图像 (Level  $j-1$  Approximation)** 采用  $2 \times 2$  块区域平均进行下采样 (Downsampling)。

- **计算各块平均值**:
  - 左上块:  $(11 + 12 + 15 + 16) \div 4 = 13.5$
  - 右上块:  $(13 + 14 + 17 + 18) \div 4 = 15.5$
  - 左下块:  $(19 + 20 + 23 + 24) \div 4 = 21.5$
  - 右下块:  $(21 + 22 + 25 + 26) \div 4 = 23.5$

- **下采样结果 ( $2 \times 2$  矩阵)**:

$$\mathbf{f}_{level,j-1} = \begin{bmatrix} 13.5 & 15.5 \\ 21.5 & 23.5 \end{bmatrix}$$

2. **构建预测图像 (Prediction)** 通过对  $\mathbf{f}_{level,j-1}$  进行上采样 (Upsampling) 和内插 (Interpolation) 得到  $4 \times 4$  的预测图  $\hat{\mathbf{f}}_{level,j}$ 。本例采用最近邻插值 (全填充)。

- **填充逻辑**: 将  $2 \times 2$  的每个元素扩展为  $2 \times 2$  的块。
- **预测图像结果**:

$$\hat{\mathbf{f}}_{level,j} = \begin{bmatrix} 13.5 & 13.5 & 15.5 & 15.5 \\ 13.5 & 13.5 & 15.5 & 15.5 \\ 21.5 & 21.5 & 23.5 & 23.5 \\ 21.5 & 21.5 & 23.5 & 23.5 \end{bmatrix}$$

**3. 计算预测残差金字塔 (Level  $j$  Prediction Residual)** 计算公式:  $\mathbf{e}_{level,j} = \mathbf{f}_{level,j} - \hat{\mathbf{f}}_{level,j}$  (原图减去预测图)。

• 逐位计算过程:

- 第一行:  $11 - 13.5 = -2.5$ ;  $12 - 13.5 = -1.5$ ;  $13 - 15.5 = -2.5$ ;  $14 - 15.5 = -1.5$
- 第二行:  $15 - 13.5 = 1.5$ ;  $16 - 13.5 = 2.5$ ;  $17 - 15.5 = 1.5$ ;  $18 - 15.5 = 2.5$
- 第三行:  $19 - 21.5 = -2.5$ ;  $20 - 21.5 = -1.5$ ;  $21 - 23.5 = -2.5$ ;  $22 - 23.5 = -1.5$
- 第四行:  $23 - 21.5 = 1.5$ ;  $24 - 21.5 = 2.5$ ;  $25 - 23.5 = 1.5$ ;  $26 - 23.5 = 2.5$

• 最终残差矩阵  $\mathbf{e}_j$ :

$$\mathbf{e}_{level,j} = \begin{bmatrix} -2.5 & -1.5 & -2.5 & -1.5 \\ 1.5 & 2.5 & 1.5 & 2.5 \\ -2.5 & -1.5 & -2.5 & -1.5 \\ 1.5 & 2.5 & 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

**结论:** 通过近似图像 (低分辨率趋势) 和预测残差 (高分辨率细节), 我们可以完整重构原图像。

### 7.1.5 核心考点对比总结

特性	图像金字塔	小波变换/子带编码
冗余度	过采样 (像素总数增加 1/3)。	临界采样 (变换后数据量不变)。
重构性	通过残差重构。	通过正交/双正交滤波器组完美重构。
空间定位	具有良好的空间定位特性。	同时具有空间和频率 (尺度) 定位特性。

## 7.2 小波变换和多分辨率分析

多分辨率分析 (MRA) 的核心是将函数 (信号或图像) 分解为一系列具有不同分辨率的近似分量和细节分量。

### 7.2.1 尺度函数与小波函数 (Scaling and Wavelet Functions)

为了实现多分辨率分析, 我们需要定义两个核心函数:

1. **尺度函数  $\phi(x)$  (Scaling Function):** 又称为 “父小波”, 用于构建信号的**近似** (低频) 表示。

• 多分辨率展开方程:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (14)$$

通过平移 ( $k$ ) 和伸缩 ( $j$ ) 生成一组基函数, 跨越子空间  $V_j$ 。

2. **小波函数  $\psi(x)$  (Wavelet Function):** 又称为 “母小波”, 用于构建信号的**细节** (高频) 表示。

- **细节空间  $W_j$ :** 小波函数跨越的空间  $W_j$  是相邻两个尺度空间  $V_j$  和  $V_{j+1}$  之间的正交补空间。
- **关系式:**  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ 。这意味着高分辨率空间由低分辨率空间加上细节空间组成。

### 7.2.2 连续小波变换 (CWT)

连续小波变换通过一个连续可变的尺度参数  $s$  和平移参数  $\tau$  来分析信号：

$$W_\psi(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s,\tau}(x) dx \quad (15)$$

其中  $\psi_{s,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-\tau}{s}\right)$ 。

- **物理意义：**变换系数的大小反映了信号  $f(x)$  与特定尺度、特定位置的小波函数之间的相似程度。

### 7.2.3 离散小波变换 (DWT)

为了方便计算机处理，将尺度  $s$  和平移  $\tau$  进行离散化（通常取 2 的幂次，即二进制分解）：

1. **尺度向量定义：**取  $s = 2^j, \tau = k2^j$ 。

2. **离散小波变换公式：**

$$W_\phi(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) \phi_{j_0,k}(x) \quad (\text{近似系数}) \quad (16)$$

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) \psi_{j,k}(x) \quad (\text{细节系数}, j \geq j_0) \quad (17)$$

### 7.2.4 快速小波变换 (FWT) 与马拉特算法 (Mallat Algorithm)

快速小波变换通过迭代滤波器组来实现，其计算效率极高。

- **分解逻辑 (Analysis)：**信号经过低通滤波器  $h_\phi(-n)$  得到近似系数 ( $A$ )，经过高通滤波器  $h_\psi(-n)$  得到细节系数 ( $D$ )。每次分解后进行  $2 \downarrow$  下采样。
- **重建逻辑 (Synthesis)：**对系数进行  $2 \uparrow$  上采样，分别通过合成滤波器  $g_\phi(n)$  和  $g_\psi(n)$  后求和。

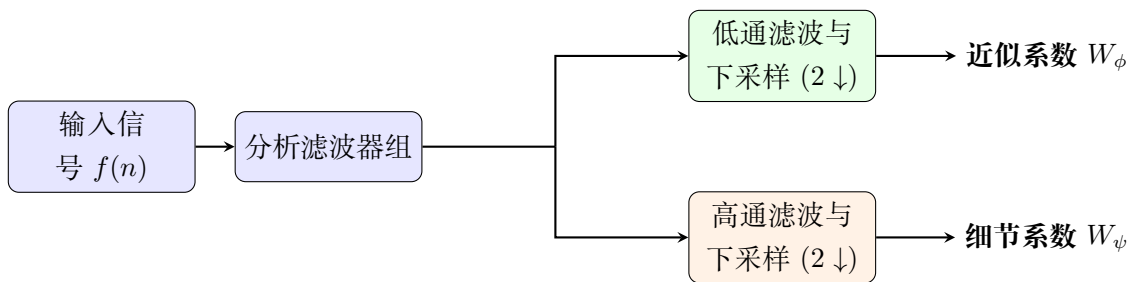


图 7.2 快速小波变换 (FWT) 分解结构图

### 7.2.5 多分辨率分析 (MRA) 的核心性质

MRA 必须满足以下四个核心性质：

1. **单调性 (Scaling property)：** $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$ 。空间层级越高，表示的信号越精细。
2. **近似性 (Approximation property)：**当尺度趋于无穷大时， $V$  空间的交集为空；当尺度趋于无穷小时， $V$  空间的并集是整个平方可积空间  $L^2(R)$ 。



3. 伸缩不变性: 若  $f(x) \in V_j$ , 则  $f(2x) \in V_{j+1}$ 。
4. 平移不变性: 若  $f(x) \in V_0$ , 则  $f(x - k) \in V_0$ 。

### 7.2.6 尺度方程与小波方程

这是多分辨率分析的数学基础, 描述了高分辨率基函数如何由低分辨率基函数组合而成。

- 尺度方程 (Refinement Equation):

$$\phi(x) = \sum_n h_\phi(n) \sqrt{2} \phi(2x - n) \quad (18)$$

其中  $h_\phi(n)$  是尺度向量 (低通滤波器系数)。

- 小波方程:

$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n) \sqrt{2} \phi(2x - n) \quad (19)$$

其中  $h_\psi(n)$  是小波向量 (高通滤波器系数)。

### 7.2.7 小波变换、多分辨率分析与快速算法对比总结

为了理清小波变换及其相关概念之间的关系, 我们将连续、离散、理论框架与工程实现总结如下表:

概念名称	核心特征	地位与作用
连续小波变换 (CWT)	尺度 $s$ 与平移 $\tau$ 均连续。	理论研究工具, 计算冗余度极高。
小波系列展开	尺度与平移离散, 函数连续。	理论桥梁, 将连续函数表示为离散小波基的级数。
离散小波变换 (DWT)	离散输入序列, 通常按 2 的幂次采样。	图像处理的核心变换, 消除了 CWT 的冗余。
多分辨率分析 (MRA)	引入尺度函数 $\phi(x)$ 和嵌套空间 $V_j$ 。	<b>数学理论框架:</b> 为 DWT 提供了严谨的基函数构造方法。
快速小波变换 (FWT)	采用迭代滤波器组 (卷积 + 下采样)。	<b>算法实现:</b> 即 Mallat 算法, 使小波变换在工程上可实时运行。

- 逻辑关系: MRA 是“灵魂” (理论), DWT 是“肉体” (数学形式), 而 FWT 是“技能” (高效计算手段)。
- 效率对比: FWT 的计算复杂度为  $O(n)$ , 甚至比快速傅里叶变换 (FFT) 的  $O(n \log n)$  还要快。

## 7.3 哈尔小波与二维图像分解

哈尔小波是目前已知最简单的正交小波基。在二维图像处理中, 它通过可分离的行-列滤波, 将图像分解为不同方向的细节信息。

### 7.3.1 哈尔尺度函数与小波函数 (Haar Scaling and Wavelet Functions)

哈尔小波的基函数定义如下：

1. 尺度函数 (Scaling Function)，对应低通滤波：

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (20)$$

2. 小波函数 (Wavelet Function)，对应高通滤波：

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

### 7.3.2 二维哈尔小波分解逻辑

对于一幅二维图像，哈尔变换通过以下步骤实现：

1. **行变换**：对图像的每一行进行一维哈尔变换。
  - 计算相邻像素的和（均值）得到低频分量  $L$ 。
  - 计算相邻像素的差（细节）得到高频分量  $H$ 。
2. **列变换**：对第一步得到的  $L$  和  $H$  的每一列再次进行一维哈尔变换。

分解后形成的四个子图像及其含义：

- **LL (Low-Low)**：近似子图，是原图的缩小版（低频信息）。
- **LH (Low-High)**：垂直细节，通过“行低通 + 列高通”得到，突出图像的**水平边缘**。
- **HL (High-Low)**：水平细节，通过“行高通 + 列低通”得到，突出图像的**垂直边缘**。
- **HH (High-High)**：对角细节，通过“行高通 + 列高通”得到，突出图像的**对角边缘**。

LL	HL
LH	HH

图 7.3 二维单级小波分解子带结构

### 7.3.3 哈尔变换矩阵示例

对于  $2 \times 2$  的图像块  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$ ，其哈尔变换可以通过矩阵乘法表示：

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^T \quad (22)$$

其中哈尔矩阵  $\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。变换后的系数矩阵:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22} & f_{11} - f_{12} + f_{21} - f_{22} \\ f_{11} + f_{12} - f_{21} - f_{22} & f_{11} - f_{12} - f_{21} + f_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

注: 左上角元素即为  $LL$  分量, 其余为细节分量。

### 7.3.4 基于小波的图像处理应用

#### 1. 图像去噪过程:

- **步骤:** 1. 选择小波基和尺度; 2. 计算 FWT; 3. **门限化 (Thresholding)** 细节系数; 4. 逆变换重建。
- **硬门限 (Hard Thresholding):** 低于阈值的系数置 0, 其余保持不变。易产生不连续性。
- **软门限 (Soft Thresholding):** 低于阈值的置 0, 高于阈值的向 0 收缩。去噪效果更平滑。

2. **边缘提取改进:** 相比于传统的 Sobel 算子, 小波变换可以通过消除  $LL$  分量并保留特定细节子带 (如 LH 和 HL) 来孤立出不同方向的边缘, 且对噪声具有更好的鲁棒性。

### 7.3.5 核心知识点总结表

特征	哈尔小波描述
计算复杂度	极低, 仅涉及加减法, 无需乘法运算。
正交性	完美的正交性, 保证了变换过程能量守恒。
紧支撑性	基函数在有限区间外为 0, 空间定位能力极强。
主要缺点	基函数不连续 (阶跃函数), 在图像压缩中可能产生伪影。

### 7.3.6 例题 18: 一维信号的二尺度快速小波变换 (全过程严谨推导)

**题目:** 已知输入信号  $\mathbf{f} = [1, 4, -3, 0]$ , 执行二尺度哈尔小波变换 (FWT) 与重构 (IFWT)。

1. **二尺度快速小波分解 (FWT)**    **滤波器定义:**  $h_0 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  (低通),  $h_1 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  (高通)。

#### 1. 第一尺度 (Level 1) 分解

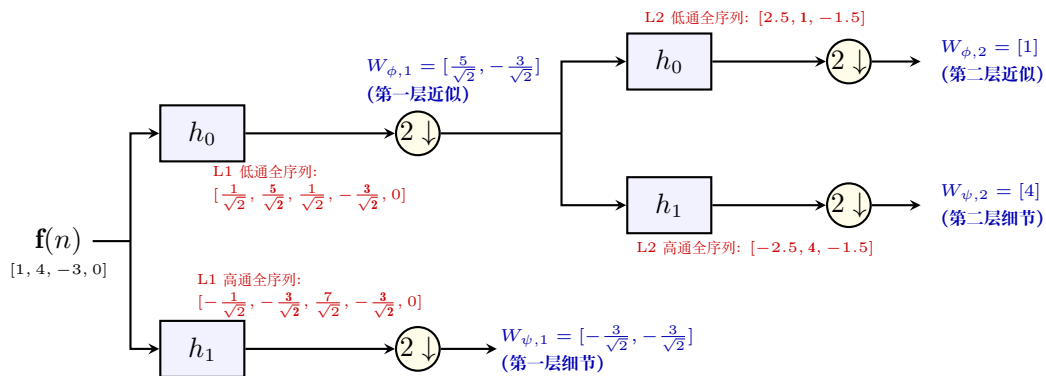
- **L1 低通滤波过程 (计算  $y_{L1,low}$ ):**

- 第 1 位:  $1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 第 2 位:  $4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$  (← 采样选中)
- 第 3 位:  $-3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 第 4 位:  $0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-3) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$  (← 采样选中)
- 第 5 位:  $0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

- L1 低通全序列:  $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0]$
- 采样结果:  $W_{\phi,1} = [\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}]$  (第一层近似系数: 反映信号的整体趋势)
- L1 高通滤波过程 (计算  $y_{L1,high}$ ):
  - 第 1 位:  $1 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
  - 第 2 位:  $4 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$  ( $\leftarrow$  采样选中)
  - 第 3 位:  $-3 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$
  - 第 4 位:  $0 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + (-3) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$  ( $\leftarrow$  采样选中)
  - 第 5 位:  $0 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$
  - L1 高通全序列:  $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0]$
  - 采样结果:  $W_{\psi,1} = [-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}]$  (第一层细节系数: 反映信号的局部突变)

## 2. 第二尺度 (Level 2) 分解 (对 $W_{\phi,1}$ 进一步分解)

- L2 低通滤波过程 (计算  $y_{L2,low}$ ):
  - 第 1 位:  $\frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2.5$
  - 第 2 位:  $-\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$  ( $\leftarrow$  采样选中)
  - 第 3 位:  $0 + (-\frac{3}{\sqrt{2}}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -1.5$
  - L2 低通全序列:  $[2.5, 1, -1.5]$
  - 采样结果:  $W_{\phi,2} = [1]$  (第二层近似系数: 更粗尺度下的低频概括)
- L2 高通滤波过程 (计算  $y_{L2,high}$ ):
  - 第 1 位:  $\frac{5}{\sqrt{2}} \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0 = -2.5$
  - 第 2 位:  $-\frac{3}{\sqrt{2}} \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$  ( $\leftarrow$  采样选中)
  - 第 3 位:  $0 + (-\frac{3}{\sqrt{2}}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -1.5$
  - L2 高通全序列:  $[-2.5, 4, -1.5]$
  - 采样结果:  $W_{\psi,2} = [4]$  (第二层细节系数: 更粗尺度下的高频特征)



## 2. 快速小波逆变换 (IFWT) 重构 滤波器定义: $g_0 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ , $g_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ 。

### 1. L2 级重构 (由 $W_{\phi,2}, W_{\psi,2}$ 恢复 $W_{\phi,1}$ )

- 近似路 ( $W_{\phi,2}$  上采样后滤波):
  - 输入:  $[1] \xrightarrow{\uparrow 2} [1, 0]$

- 位 1:  $1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 位 2:  $0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 序列  $A_2 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

• 细节路 ( $W_{\psi,2}$  上采样后滤波):

- 输入:  $[4] \xrightarrow{\uparrow 2} [4, 0]$
- 位 1:  $4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{4}{\sqrt{2}}$
- 位 2:  $0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}$
- 序列  $D_2 = [\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{2}}]$

• 汇总恢复  $W_{\phi,1}$ :  $A_2 + D_2 = [\frac{1+4}{\sqrt{2}}, \frac{1-4}{\sqrt{2}}] = [\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}]$

2. L1 级重构 (由  $W_{\phi,1}, W_{\psi,1}$  恢复 f)

• 近似路 ( $W_{\phi,1}$  上采样后滤波):

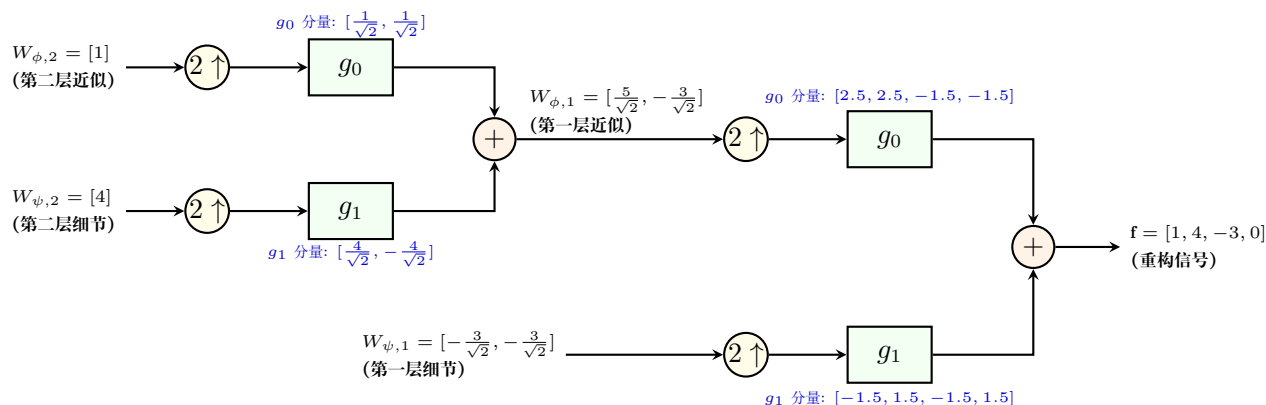
- 输入:  $[\frac{5}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0]$
- 位 1:  $\frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = 2.5$
- 位 2:  $0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2.5$
- 位 3:  $-\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = -1.5$
- 位 4:  $0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{3}{\sqrt{2}}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -1.5$
- 序列  $A_1 = [2.5, 2.5, -1.5, -1.5]$

• 细节路 ( $W_{\psi,1}$  上采样后滤波):

- 输入:  $[-\frac{3}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0]$
- 位 1:  $-\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = -1.5$
- 位 2:  $0 - (-\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1.5$
- 位 3:  $-\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = -1.5$
- 位 4:  $0 - (-\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1.5$
- 序列  $D_1 = [-1.5, 1.5, -1.5, 1.5]$

• 最终序列相加:

- $2.5 + (-1.5) = 1$
- $2.5 + 1.5 = 4$
- $-1.5 + (-1.5) = -3$
- $-1.5 + 1.5 = 0$
- 重构结果:  $\mathbf{f} = [1, 4, -3, 0]$



## 7.4 第七章核心重点问题总结

### 1. 图像金字塔与快速小波变换 (FWT) 在冗余度上有何根本不同？

- **图像金字塔**: 属于过采样 (Over-sampled)。由于层级间存在重叠信息，像素总数通常是原图的  $4/3$  倍，存在数据冗余，常用于多尺度搜索。
- **FWT**: 属于临界采样 (Critically-sampled)。通过下采样保证了分解后的子带 (Subband) 像素总数与原图完全相等，消除了空间冗余，更适合高效压缩。

### 2. 简述子带编码 (Subband Coding) 的核心思想。

- 将信号通过滤波器组分解为一系列频率互不重叠的分量 (子带)。
- **优势**: 可以根据不同子带的重要程度 (如人类视觉对低频更敏感) 分配不同的比特数进行量化，从而实现压缩。

### 3. 哈尔变换 (Haar Transform) 的本质是什么？

- 哈尔变换是最简单的正交变换，其基函数是阶跃函数。
- 它通过简单的加法 (求平均/近似) 和减法 (求差值/细节) 来实现能量集中。在图像处理中，它是小波分析的基石。

### 4. 小波变换的分类及其应用特点是什么？

- **连续小波变换 (CWT)**: 尺度和位移连续变化，主要用于数学分析和时频特性提取，冗余度极高。
- **离散小波变换 (DWT)**: 尺度和位移按  $2^j$  幂次离散化，解决了冗余问题。
- **快速小波变换 (FWT)**: 由 Mallat 提出，利用滤波器组 (Filter Bank) 递归实现，是实际工程应用的标准。
- **常用基本小波**: 包括 Haar (非连续但计算快)、Daubechies (Db)、Symlets、Biorthogonal 等。

### 5. 如何利用二维小波分解进行改进的边缘检测？

- 传统方法 (如 Sobel) 易受噪声影响。在 DWT 框架下:
- **水平边缘提取**: 将 LL, HL, HH 置为 0，仅保留 **LH** (垂直细节) 分量并重建。

- **垂直边缘提取**：将 LL, LH, HH 置为 0，仅保留 **HL (水平细节)** 分量并重建。
- **多尺度优势**：通过忽略噪声密集的低层级细节系数，可以实现对噪声鲁棒的边缘提取。

6. 图像去噪中，硬门限 (Hard Thresholding) 与软门限 (Soft Thresholding) 的具体区别是什么？

- **硬门限**：设置阈值  $T$ ，绝对值小于  $T$  的系数置 0，其余保持不变。缺点是会在图像中产生不连续性（伪影/飞虱现象）。
- **软门限**：绝对值小于  $T$  的系数置 0，其余系数向 0 收缩（减去  $T$ ）。优点是去噪效果更平滑，去除了门限处的不连续性。