УДК 517.938.5

Ключевые слова: интегрируемая система, псевдо-риманова метрика, слоение Лиувилля, геодезический поток, функции Морса-Ботта, топологический инвариант, особенность.

§ 1. Напоминание из теории Морса.

В данной работе будут рассмотрены псевдоримановы метрики на торе, случай обычной метрики можно более подробно посмотреть в книге [3]. Пусть M^n - гладкое риманово многообразие с римановой метрикой $g_{ij}(x)$. Напомним, что геодезическими данной метрики называются гладкие параметризованные кривые $\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$, являющиеся решениями системы дифференциальных уравнений $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$, где $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$ — вектор скорости кривой γ, а ∇ — оператор ковариатного дифференцирования, отвечающий симметрической связности, согласованной с метрикой g_{ij}. В локальных координатах эти уравнения могут быть переписаны в виде:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0,$$

где $\Gamma^i_{jk}(x)$ — гладкие функции, называемые символами Кристоффеля связности ∇ и задающиеся следующими явными формулами:

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \frac{1}{2}\sum g^{is}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^s}).$$

Геодезические можно интерпретировать как траектории материальной точки, движущейся по многообразию в отсутствии внешних сил, т.е. по инерции. Действительно, уравнение геодезической в точности означает, что ускорение точки равно нулю.

1. Пусть $\gamma(t) = (x(t), p(t))$ — интегральная траектория гамильтоновой системы $v = sgradH$ на T^*M. Тогда кривая $x(t)$ является геодезической, причем ее вектор скорости $\dot x(t)$ связан с $p(t)$ следующими соотношением:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \sum g^{ij}(x)p_j(t).$$

2. Обратно, если $x(t)$ — геодезическая на M, то кривая $(x(t), p(t))$, где $p_i(t) = \sum g_{ij}(x)\dfrac{dx^j}{dt}$, является интегральной траекторией гамильтоновой системы $v = sgrad\, H$.

Пусть H — гладкая на симплектическом многообразии $(M, \omega) = v(H)$ функция, где v — произвольный касательный вектор, $v(H)$ — производная функции H вдоль v.

В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ получим следующее выражение:

$$(sgrad\,H)^j = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Здесь ω^{ij} — коэффициенты матрицы, обратной к матрице Ω. Мы пользуемся обычным соглашением, подразумевая суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам.

Определение 1. Векторные поля вида $sgradH$ называются *гамильтоновыми векторными полями.* Функция H называется *гамильтонианом векторного поля* $sgrad\,H$.

Напомним основные свойства геодезических:

1. Они являются локально кратчайшими, т.е. для двух достаточно близких точек, лежащих на геодезической, длина соединяющего их отрезка геодезической строго меньше длины другой гладкой кривой, соединяющей эти же точки.
2. Из любой точки многообразия и в направлении любого касательного вектора выходит одна и только одна геодезическая, имеющая этот верктор своим начальным вектором скорости.
3. Если многообразие компактно, то любая геодезическая продолжается неограниченно по своему параметру. Другими словами, каждое решение $\gamma(t)$ уравнения геодезичсеких определенно при любых значениях t.
4. Если многообразие компактно, то любые две его точки соединяются геодезической (их может быть много).
5. Если многообразие компактно, то для любой точки $x \in M$ и любого элемента фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$ обязательно найдется геодезическая, выходящая из данной точки, возвращающаяся в нее и реализующая выбранный элемент фундаментальной группы. Эта геодезическая не обязана, конечно, быть замкнутой. Другими словами, начальный и конечный векторы скорости могут не совпадать, т.е. x может быть точкой трансверсального самопересечения этой геодезической.

Уравнения геодезических можно проинтерпретировать как гамильтонову систему на кокасательноам расслоении T^*M, а сами геодезические — как проекции траекторий этой гамильтоновой системы на M. Для этого рассмотрим на кокасательном расслоении T^*M естественные координаты x и p, где $x = (x^1, \dots, x^n)$ — координаты точки на M, а $p = (p_1, \dots, p_n)$ — координаты ковектора в кокасательном пространстве $T^*_x M$ в базисе $dx^1, \dots, dx^n$. Возьмём стандартную симплектическую структуру $\omega = dx \wedge dp$ на T^*M и рассмотрим в качестве гамильтониана функцию:

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\sum g^{ij}(x) p_i p_j = \frac{1}{2}|p|^2.$$

Геодезический поток интегрируем, то γ' лежит на каком-то слое слоения Лиувилля (особом или неособом).

Определение 2. Риманова метрика на двумерной поверхности называется *лиувиллевой*, если в подходящих локальных координатах x и y она записывается в виде:

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — произвольные гладкие положительные функции.

Теорема 1 (В. В. Козлов). *Пусть двумерное компактное аналитическое многообразие M^2 с отрицательной эйлеровой характеристикой снабжено аналитической римановой метрикой. Тогда геодезический поток этой метрики неинтегрируем в классе аналитических интегралов.*

Рассмотрим гладкую функцию $f(x)$ на гладком многообразии X^n и пусть $x^1, \ldots, x^n$ – гладкие регулярные координаты в окрестности точки x. Точка x называется критической для функции f, если дифференциал:

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

обращается в ноль в точке x. Это эквивалентно условию обращения в ноль всех частных производных функции в данной точке. Критическая точка называется невырожденной, если второй дифференциал:

$$d^2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

невырожден в этой точке. Это эквивалентно условию, что матрица вторых частных производных имеет определитель, отличный от нуля.

Определение 3. Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все её критические точки невырождены.

Пусть f — функция Морса на компактном гладком многообразии X^n. Рассмотрим произвольную поверхность уровня $f^{-1}(a)$ и её компоненнты связности, которые назовём слоями. В результате многообразие разбирается в объединение слоев, получается слоение с особенностями. Подчеркнём, что каждый слой связен, по определению. Объявляя каждый слой одной точкой и вводя естествененую фактор-топологию в пространство Γ слоев, получаем некоторое фактор-пространство. Его можно рассматривать как базу этого слоения. Для функции Морса пространство Γ является графом.

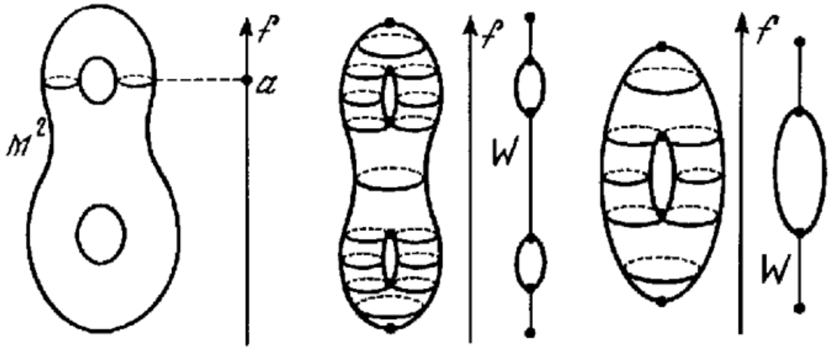
Определение 4. Граф Γ называется *графом Риба* для функции Морса f на многообразии X^n. *Вершиной графа Риба* назовём точку, отвечающую особому слою функции f, т.е. связной компоненте уровня, содержащей критическую точку функции. Вершину графа Риба назовём *концевой*, если она является концом ровно одного ребра графа. Все остальные вершины *внутренними.*

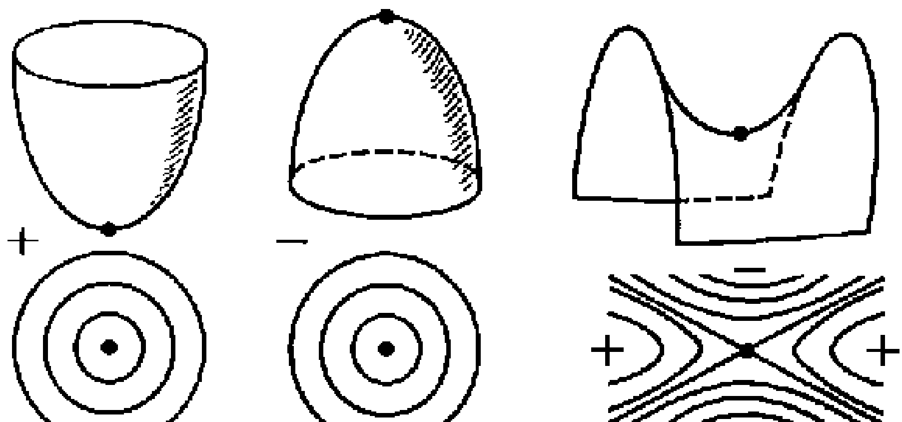
Согласно известной лемме Морса, в окрестности каждой невырожденной критической точки всегда можно выбрать такие локальные координаты, в которых функция запишется в виде квадратичной формы:

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

Для каждой невырожденной критической точки число λ определено однозначно и называется ее индексом.

Определение 5. Функция f называется *функцией Ботта* на многообразии Q, если все её критические точки организованы в невырожденные критические подмногообрзия.





Это означает, что множество критических точек является несвязным объединением некоторых гладких подмногооборазий, причём каждое из них невырождено в следующем смысле. Второй дифференциал $d^2 f$ невырожден на подпространстве, трансверсальном к подмногообразию (в каждой его точке).

Другими словами, ограниченние функциии f на трансверсаль к подмногообразию является функцией Морса.

С этого момента будем рассматривать случай одной или двух степеней свободы, то есть фазовое пространство будет двумерным или четырёхмерным симплектическим многообразием.

Определение 6. *Изоэнергетической поверхностью* называется множество точек, задаваемое уравнением $H(x) = const = h$.

Если $H(x) = h$, то соответствующую изоэнергетическую поверхность обозначим через Q_h. Она всегда является инвариантной поверхностью относительно поля v.

Пусть M^{2n} — симплектрическое многообразие и $\vartheta = sgradH$ — гамильтонова система с гладким гамильтонианом H.

Определение 7. Гамильтонова система ϑ называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю,* если существует набор гладких функций $f_1, \ldots, f_n$ таких, что:

1. $f_1, \ldots, f_n$ —первые интегралы ϑ,
2. Они функционально независимы на M, то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,
3. $f_i, f_j = 0$ при любых i и j,
4. Векторные поля $sgrad\, f_i$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Определение 8. *Слоением Лиувилля,* отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интеграллов $f_1, \ldots, f_n$.

Поскольку $f_1, \ldots, f_n$ сохраняются потоком ϑ, то каждый слой слоения Лиувилля — инвариантная поверхность.

Слоение Лиувилля состоит из регулярных слоев (которые заполняют почти все M) и особых слоев (заполняющих множество меры нуль).

Рассмотрим совместную регулярную поверхность уровня функции $f_1, \ldots, f_n$:

$$T_\xi = \{x \in M | f_i(x) = \xi_i, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ.

Теорема 2 (Лиувилль). *Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = sgrad\, H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интеграллов $f_1, \ldots, f_n$. Тогда:*

1. *T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = sgrad\, H$ и $sgrad\, f_1, \ldots, sgrad\, f_n$.*
2. *Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n. Этот тор называется тором Лиувилля.*
3. *Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n.*

§ 2. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезичсеких потоков на торе.

Рассмотрим на двумерном торе T^2 риманову метрику ds^2 с линейно или квадратично интегрируемым геодезическим потоком. Прежде всего, мы хотим выяснить, при каких условиях особенности соответсвтующего лиувиллева слоения являются невырожденными, или, что то же самое, когда интеграл геодезического потока является функнцией Ботта на изоэнергетиченской поверхости.

Для простоты мы рассмотрим случай глобально лиувиллевой метрики, т.е. обладающей глобальными периодическими координатами (x, y) (с периодами 1 и L соответственно), в которых метрика имеет вид:

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — гладкие строго положительные периодические функции с периодами соответственно 1 и L.

Гамильтониан геодезического потока, отвечающего метрике ds^2, имеет вид:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{f(x) + g(y)}.$$

где (x, y, p_x, p_y) — стандартные координаты на кокасательном расслоении T^*T^2, а квадратичный интеграл задается формулой:

$$F(x, y, p_x, p_y) = \frac{g(y)p_x^2 - f(x)p_y^2}{f(x) + g(y)}.$$

Если одна из функций f или g является константой, то геодезический поток обладает линейным интегралом $F = p_x$ или $F = p_y$ соответсвенно.

Предложение 1. *Интеграл F является боттовским на изоэнергетической поверхности $H = const$.*

§ 3. Локальная структура псевдометрики.

Вопрос, который исследуется в данной работе, в случае обычной метрики был изучен в книге [3], а статья посвящена псевдо-риманову случаю [1].

Теорема 3 (Локальное устройство метрики и псевдометрики). *Предположим, что риманова или псевдориманова метрика g на связной поверхности M^2 допускает квадратичный интеграл по импульсам F такой, что $F \neq const \cdot Ht$ для всех $const \in \mathbb{R}$. Тогда в окрестности почти каждой точки существуют координаты x, y такие, что метрика и интеграл такие же, как показано на таблице:*

	Liouville case	*Complex-Liouville case*	*Jordan-block case*
g	$(X(x) - Y(y))(dx^2 + \varepsilon dy^2)$	$\Im(h)dxdy$	$\left(\widehat{Y}(y) + \frac{x}{2}Y'(y)\right)dxdy$
F	$\dfrac{X(x)p_y^2 + \varepsilon Y(y)p_x^2}{X(x) - Y(y)}$	$p_x^2 - p_y^2 + 2\dfrac{\Re(h)}{\Im(h)}p_x p_y$	$\varepsilon\left(p_x^2 - \dfrac{Y(y)}{\widehat{Y}(y) + \frac{x}{2}Y'(y)}p_x p_y\right)$

Рис. 1. Где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$, и $\Re$ и $\Im$ мнимые и вещественные части голоморфной функции f. Случай $\varepsilon = -1$ понимаем, что у нас псевдометрика.

Пример: Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x, y), два линейно независимых вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, и две функции X и Y, не являющимися константами, от одной переменной (удобно считать, что переменная функции X - это x, а Y - y) такие, что

1. Для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ имеем $X(x) \neq Y(y)$, и
2. Для каждой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $X(x + \xi_1) = X(x + \eta_1) = X(x)$ и $Y(y + \xi_2) = Y(y + \eta_2) = Y(y)$

Далее рассмотрим метрику $(X(x) - Y(y))(dx^2 + \varepsilon dy^2)$ в $\mathbb{R}^2$, где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$ и действие решётки $G := \{k\xi + m\eta | k, m \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathbb{R}^2$. Действие дискретное и сохраняет метрику и квадратичный интеграл $\dfrac{X(x)p_y^2 + \varepsilon Y(y)p_x^2}{X(x) - Y(y)}$. Тогда геодезический поток индуцированной метрики на факторпространство $\mathbb{R}^2/G$ (гомеоморфное тору) допускает квадратичный интеграл по импульсу. Такие метрики мы будем называть Глобально-Лиувиллевы.

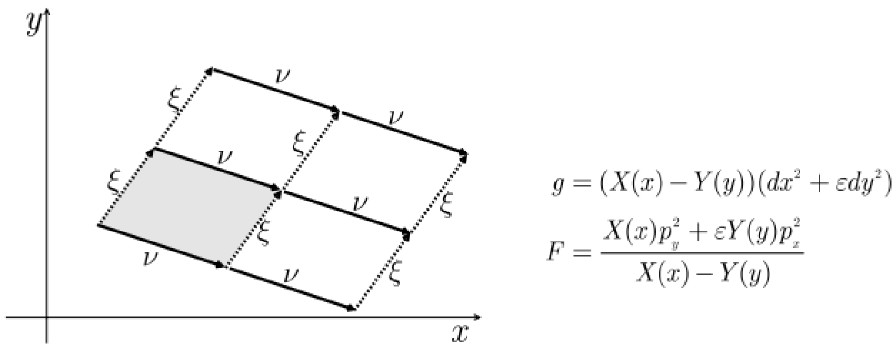


Рис. 2. Векторы ξ и η и фундаментальная область (серый параллелограмм), полученные с помощью действия группы G. Тор $\mathbb{R}^2/G$ можно отождествить с этим параллелограммом со склеенными противоположными сторонами. Поскольку действие группы G сохраняет $X(x)$ и $Y(y)$, метрика g индуцирует метрику на $\mathbb{R}^2/G$,а интеграл F индуцирует интеграл, квадратичный по импульсам.

Теорема 4. *Пусть метрика g на торе T^2 допускает квадратичный по импульсам интеграл F. Предположим, что интеграл не является линейной комбинацией линейного интеграла по импульсам и Гамиольтониана. Тогда (T^2, g) является глобально-Лиувиллевой, то есть существуют X, Y, ξ, η, удовлетворяющая условиям в примере выше и диффеоморфизм $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}^2/G$, переводящее g в глобально-Лиувиллеву метрику $(X(x) - Y(y))(dx^2 + \varepsilon dy^2)$ на $\mathbb{R}^2/G$ и F в $(X(x)p_y^2 + \varepsilon Y(y)p_x^2)/(X(x) - Y(y))$.*

Теперь подробнее рассмотрим множество критических точек гамильтониана $H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{f(x) - g(y)}$ и квадратичного интеграла $F(x, y, p_x, p_y) = \frac{g(y)p_x^2 - f(x)p_y^2}{f(x) - g(y)}$ для псевдометрики.

Утверждение 1. *Пусть $H = \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{X(x) - Y(y)}$ и $F(x, y, p_x, p_y) = \dfrac{Y(y)p_x^2 - X(x)p_y^2}{X(x) - Y(y)}$ функции от p_x, p_y, x, y. Функции X, Y являются 2π периодичны, а также график функции X выше графика функции Y. Тогда множество критических точек (точек, где градиенты F и H линейно зависимы) делятся на два не пересекающихся семейства, причем в этих семействах точки локального экстремума задают нам гиперболическую особенность, либо эллиптическую особенность.*

Доказательство. Рассмотрим градиенты этих функций:

$$dF = \left(\frac{(p_x^2 - p_y^2)YX'}{(X-Y)^2}, -\frac{(p_x^2 - p_y^2)Y'X}{(f-g)^2}, -\frac{2p_xY}{X-Y}, \frac{2p_yf}{X-Y} \right)$$

и

$$dH = \left(-\frac{(p_x^2 - p_y^2)X'}{(X-Y)^2}, \frac{(p_x^2 - p_y^2)Y'}{(X-Y)^2}, \frac{2p_x}{X-Y}, -\frac{2p_y}{X-Y} \right).$$

Найдем множество точек, в которых эти вектора линейно зависимы, для этого рассмотрим линейную комбинацию этих векторов с ненулевыми коэффициентами a и b:

$$a \cdot dH + b \cdot dF = \left(\frac{(p_x^2 - p_y^2)(-a + bX')}{(X-Y)^2}, \frac{(p_x^2 - p_y^2)(a - bX)Y'}{(X-Y)^2}, \frac{2p_x(a - bY)}{X-Y}, -\frac{2p_y(a - bX)}{X-Y} \right).$$

Тогда мы получаем два семейства точек, удовлетворяющих условиям:

Первое семейство:

$$a - bX = 0, p_x = 0, X' = 0.$$

Второе семейство:

$$a - bY, p_y = 0, Y' = 0.$$

Подробнее рассмотрим каждое из них. Для первого семейства рассмотрим когда у нас у этой линейной комбинации критическая точка будет вырожденной, то есть второй дифференциал вырожден(найдём второй дифференциал этой линейной комбинации и подставим критические точки первого семейства):

$$\begin{pmatrix} \frac{p_y^2(a-bY)f''}{(X-Y)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(a-bY)}{X-Y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица вырождена и имеет ранг 2, теперь посмотрим на собственные значения этой матрицы, для этого применим линеаризацию, то есть умножим нашу матриу на кососимметрическую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{p_y^2(a-bY)X''}{(X-Y)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(a-bY)}{X-Y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2(a-bY)}{X-Y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_y^2(a-bY)X''}{(X-Y)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристический многочлен этой матрицы:

$$\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{2p_y^2(a-bY)^2X''}{(X-Y)^2}\right).$$

Отсюда видно, что у нас при выполнении условий теоремы, будут два различных значения , если $X''>0$, в этом случае у нас будут точки локального минимума функции X (в семействе у нас X' $=0$), что даёт нам эллиптическую особенность, или $X''<0$, в этом случае будут точки локального максимума функции X, тогда у нас будет гиперболическая особенность.

Теперь осталось по аналогии посмотреть второе семейство: Имеем второй дифференциал:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{bp_x^2Y''}{X-Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица вырождена ранга 2, тогда рассмотрим характеристический многочлен матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{bp_x^2Y''}{X-Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его характеристический многочлен:

$$\lambda^2(\lambda^2-\frac{2b^2p_x^2Y''}{X-Y}).$$

Отсюда аналогично видно, что у нас при выполнении условий теоремы, будут два различных значений λ, если $Y''>0$, то это точки минимума, и видно, что точки гиперболической особенности, если $Y''<0$, то это точки максимума, значит эллиптической особенности.

Список литературы

[1] V. S. Matveev, “Pseudo-Riemannian metrics on closed surfaces whose geodesic flows admit nontrivial integrals quadratic in momenta, and proof of the projective Obata conjecture for two-dimensional pseudo-Riemannian metrics”, (Received Feb. 21, 2010) (Revised June 24, 2010).

[2] В. С. Матвеев, “Геодезические потоки на бутылке Клейна, интегрируемые полиномом по импульсам четвертой степени.”. 1996.

[3] А.В. Болсинов, А.Т.Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.

Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: daniil.orlov.2002@mail.ru

Поступила в редакцию
1.09.2023