Отчёт по задаче №3.28

Орлов Даниил Ильич

December 2024

1 Постановка Задачи:

Необходимо найти решение данной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + u, \\ x = 0 : u = sin^2(3t); \\ x = 1 : \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{t}{1+t^2}; \\ t = 0 : u = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Её будем решать следующим образом:

1. Сначала возьмём равномерную сетку $\Omega = \{(x_m, t^n) = (mx, n\tau) | m \in \{0, ..., M\}, n \in \{0, ..., N\}\}$.
2. Сначала подберём нужную схему.
3. Поймём про порядок аппроксимации, желательно(даже необходимо, чтобы она была не ниже второго порядка).
4. Выясним, является ли наша схема спектрально-устойчивой(будем добиваться её устойчивости).
5. Посмотрим на решение и на график.
6. Проведём нужные тесты.

2 Схема:

Предлагаю следующую схему, подобную схему "Крест":

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{h} + u_m^n$$

Поймём про её порядок, для этого разложим в ряд Тейлора $u_{m\pm1}^{n\pm1}$:

$$u_{m\pm1}^{n\pm1} = u_m^n \pm h\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \pm \tau\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h\cdot\tau\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial xt} + \text{... третьи производные ...} + \underline{O}(\tau^4 + h^4)$$

Подставим в нашу схему и получим следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + u + \underline{O}(\tau^2 + h^2).$$

Для спектральной устойчивости сделаем замену $u_m^n = u_m^n + \delta u_m^n$ и подставим:

$$\frac{\delta u_m^{n+1} - 2\delta u_m^n + \delta u_m^{n-1}}{\tau^2} = \frac{\delta u_{m+1}^n - 2\delta u_m^n + \delta u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{\delta u_{m+1}^n - \delta u_{m-1}^n}{h} + \delta u_m^n.$$

И сделаем замену: $\delta u_m^n = \lambda^n \cdot e^{im\phi}$

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\tau^2} = \frac{\lambda(e^{-i\phi} - 2 + e^{im\phi})}{h^2}.$$

Получаем:

$$\lambda^2 - 2(1 - \frac{2\tau^2 sin^2(\frac{\phi}{2})}{h^2})\lambda + 1 = 0.$$

$\forall\phi \in [0, 2\pi]$ заметим, что произведение корней по модулю $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Тогда, если у нас корни $\in \mathbb{R}$, то тогда один корень точно > 1. Следовательно нет устойчивости. Если у нас корни $\in \mathbb{C}$, то тогда имеется спектральная устойчивость. Осталось понять условия для двух комплексных корней: нужно, чтобы дискриминант $D < 0$.

$$\frac{D}{4} = (2(1 - \frac{2\tau^2 sin^2(\frac{\phi}{2})}{h^2}))^2 - 1 = 4\frac{\tau^2 sin^2(\frac{\phi}{2})(\frac{\tau^2 sin^2(\frac{\phi}{2})}{h^2} - 1)}{h^2} < 0.$$

Тогда это верно, если $\tau \leqslant h$.

3 Решение:

Вернёмся к нашей схеме:

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{h} + u_m^n$$

Тогда из неё выразим слагаемое u_m^{n+1}:

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n+1} + \frac{\tau^2(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{h^2} - \frac{\tau^2(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{h} + \tau^2 u_m^n.$$

Это общая формула для вычисления внутренних точек последующего слоя, для неё нужно знать значения точек на двух предыдущих слоёв. Может возникнуть, как считать нулевой слой и первый, но о них чуть позже. Разберёмся с граничными условиями.
Для $x = 0:$

$$u_0^n = sin^2(3t_n);$$

Для $x = 1:$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t}{1+t_n^2}.$$

Приблизим нашу производную следующим образом: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h}$. Выведем нужную формулу:

$$u_M^n = u_{N-1}^m + \frac{ht_n}{1+t_n^2}.$$

В итоге мы получим все точки на новом слое. Разберёмся теперь с нулевым и первым слоем:
На нулевом слое все внутренние точки и граничные равны 0, значит весь нулевой слой - нулевой. На первом слое сделаем следующее: для внутренних точек разложим в ряд Тейлора до второго порядка: $u_m^1 = u_m^0 + \tau\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, все слагаемые равны нулю, следовательно все внутренние точки тоже равны нулю. Разберёмся с граничными:
Для $x = 0:$

$$u_0^1 = sin^2(3\tau).$$

Для $x = 1:$

$$u_N^1 = u_{N-1}^1 + \frac{\tau h}{1+\tau^2}.$$

Вычислительные формулы написаны.

Посмотрим на графики:

Из графиков видно, как влияет спектральная устойчивость на решение задачи.

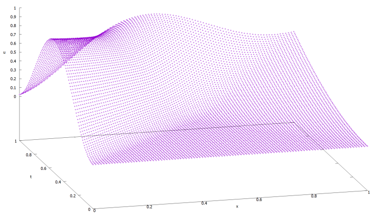

Рис. 1: 100 на 100 точек.

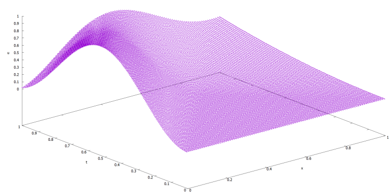

Рис. 2: 200 на 100 точек.

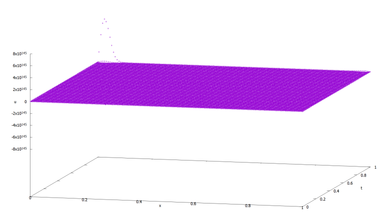

Рис. 3: 100 на 200 точек.