Normal level
Задание 1

Задание

1. Найдите все неподвижные точки логистического отображения.
2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?
3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

Решение

Рассмотрим логистическое отображение:

$$f(x) = rx(1-x), \quad x \in [0,1],\ r \in (0,4].$$

Неподвижная точка x^* удовлетворяет уравнению:

$$x^* = f(x^*) = rx^*(1-x^*).$$

Перенесём всё в одну сторону:

$$x^* - rx^*(1-x^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^*\big(1 - r(1-x^*)\big) = 0.$$

Отсюда получаем два решения:

- $x_1^* = 0$ — всегда является неподвижной точкой;
- $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$, при условии $r \neq 0$.

Заметим, что $x_2^* \in [0,1]$ тогда и только тогда, когда $r \geq 1$, поскольку:

$$x_2^* \geq 0 \iff 1 - \frac{1}{r} \geq 0 \iff r \geq 1,$$

и при $r \leq 4$ (максимально допустимом значении) всегда $x_2^* \leq 1$.

Таким образом:

1. **Все неподвижные точки:**

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = 1 - \frac{1}{r} \quad (r \geq 1).$$

2. **Количество неподвижных точек в зависимости от r:**
   - При $0 \leq r < 1$: только одна неподвижная точка — $x^* = 0$;

- При $r = 1$: две неподвижные точки совпадают: $x_1^* = x_2^* = 0$;
- При $1 < r \leq 4$: две различные неподвижные точки: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - \frac{1}{r} \in (0, 1)$.

3. **Максимальное количество неподвижных точек:**
Уравнение $x = rx(1 - x)$ является квадратным относительно x и может иметь не более двух действительных корней. Следовательно, логистическое отображение может иметь **не более двух** неподвижных точек. При $r > 1$ оба корня лежат в интервале $[0, 1]$, и обе точки являются допустимыми в рамках модели. Таким образом, **максимальное количество неподвижных точек — 2**.

Ответ

1. Неподвижные точки: $x^* = 0$ и $x^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ (при $r \geq 1$).
2. Одна неподвижная точка при $0 \leq r \leq 1$; две — при $1 < r \leq 4$.
3. Максимальное количество неподвижных точек — **2**, так как уравнение неподвижности квадратное.