

Easy level

Задание 1

Условие. Докажите, что

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in (0, 1], \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

Решение

Рассмотрим логистическое отображение:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

где $r \in (0, 1]$ и начальное значение $x_0 \in (0, 1)$.

Докажем утверждение методом математической индукции.

База индукции ($n = 0$). По условию $x_0 \in (0, 1)$ — утверждение верно.

Индукционный шаг. Предположим, что для некоторого n выполнено $x_n \in (0, 1)$. Тогда $1 - x_n \in (0, 1)$ и, так как $r > 0$, получаем:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) > 0.$$

С другой стороны, поскольку $x_n \in (0, 1)$, то $x_n(1 - x_n) < 1$, а при $r \leq 1$ имеем:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) < 1.$$

Следовательно, $x_{n+1} \in (0, 1)$.

По принципу математической индукции, утверждение верно для всех $n \in \mathbb{N}$.

Easy Level — Задание 2

Условие. Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1} ? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r .

Доказательство монотонности по r

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_n = f(x_{n-1}) = r \cdot x_{n-1}(1 - x_{n-1}),$$

где $x_{n-1} \in (0, 1)$ и $r \in (0, 1]$.

Зафиксируем произвольное $x_{n-1} \in (0, 1)$. Обозначим

$$c = x_{n-1}(1 - x_{n-1}).$$

Поскольку оба сомножителя лежат в интервале $(0, 1)$, их произведение положительное:

$$c > 0.$$

Тогда значение x_n линейно зависит от r :

$$x_n = c \cdot r.$$

Пусть $r_1, r_2 \in (0, 1]$ и $r_1 > r_2$. Умножая обе части неравенства на положительное число c , получаем:

$$c \cdot r_1 > c \cdot r_2 \implies x_n^{(1)} > x_n^{(2)}.$$

Следовательно, при фиксированном $x_{n-1} \in (0, 1)$ функция $x_n(r)$ строго возрастает по параметру r . Это означает, что увеличение r приводит к увеличению значения следующей итерации x_n .

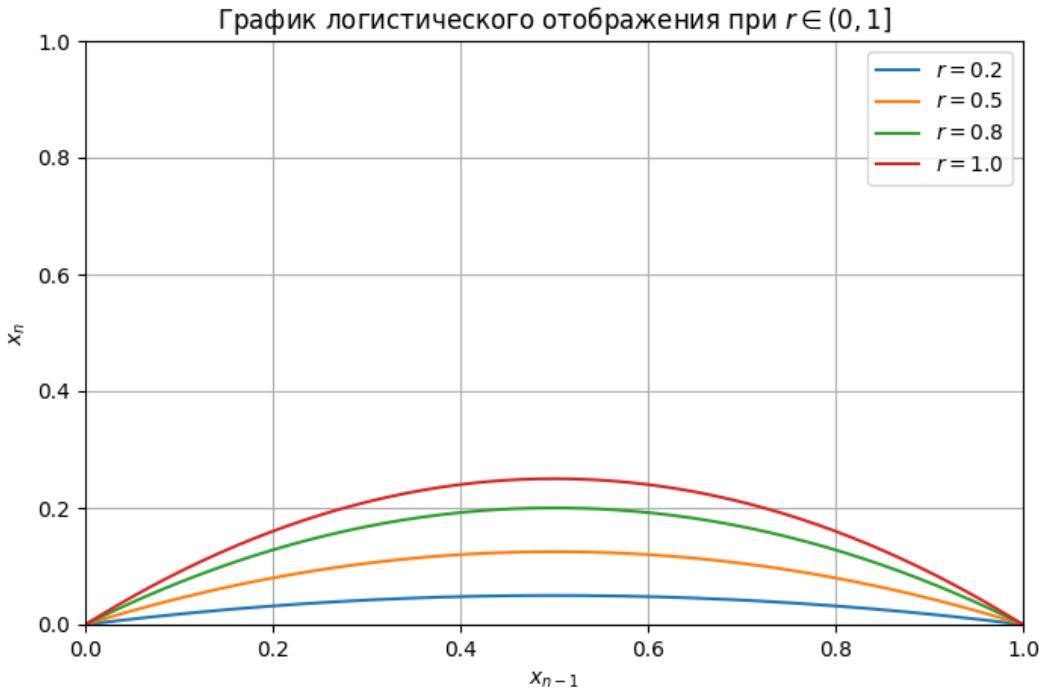
Код построения графиков

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5 x = np.linspace(0, 1, 500)
6 r_vals = [0.2, 0.5, 0.8, 1.0]
7 plt.figure(figsize=(8, 5))
8
9 for r in r_vals:
10     plt.plot(x, r * x * (1 - x))
11
12 plt.plot(x, x, 'k--')
13 plt.xlabel('x_{n-1}')
14 plt.ylabel('x_n')
15 plt.xlim(0, 1)
16 plt.ylim(0, 1)
17 plt.grid(True)
18 plt.legend()
19 plt.savefig('easy2_map.png')
```

График

Функции $x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$ при $r = 0.2, 0.5, 0.8, 1.0$.

figure



Вывод

Графики подтверждают доказанное: при увеличении r кривая $f(x)$ поднимается, и для любого фиксированного $x_{n-1} \in (0, 1)$ значение x_n растёт.

Easy Level — Задание 3

Условие. Для заданной вариантом функции $g(x_n)$: 1. Постройте графики зависимости x_n от x_{n-1} для нескольких различных значений r . 2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта.

Аналитический вид функции

Для $N = 0$ задано отображение:

$$g(x) = rx(1-x)(2+x), \quad x \in [0, 1], \quad r \in \left[0, \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}\right] \approx [0, 1.584].$$

Эта функция:

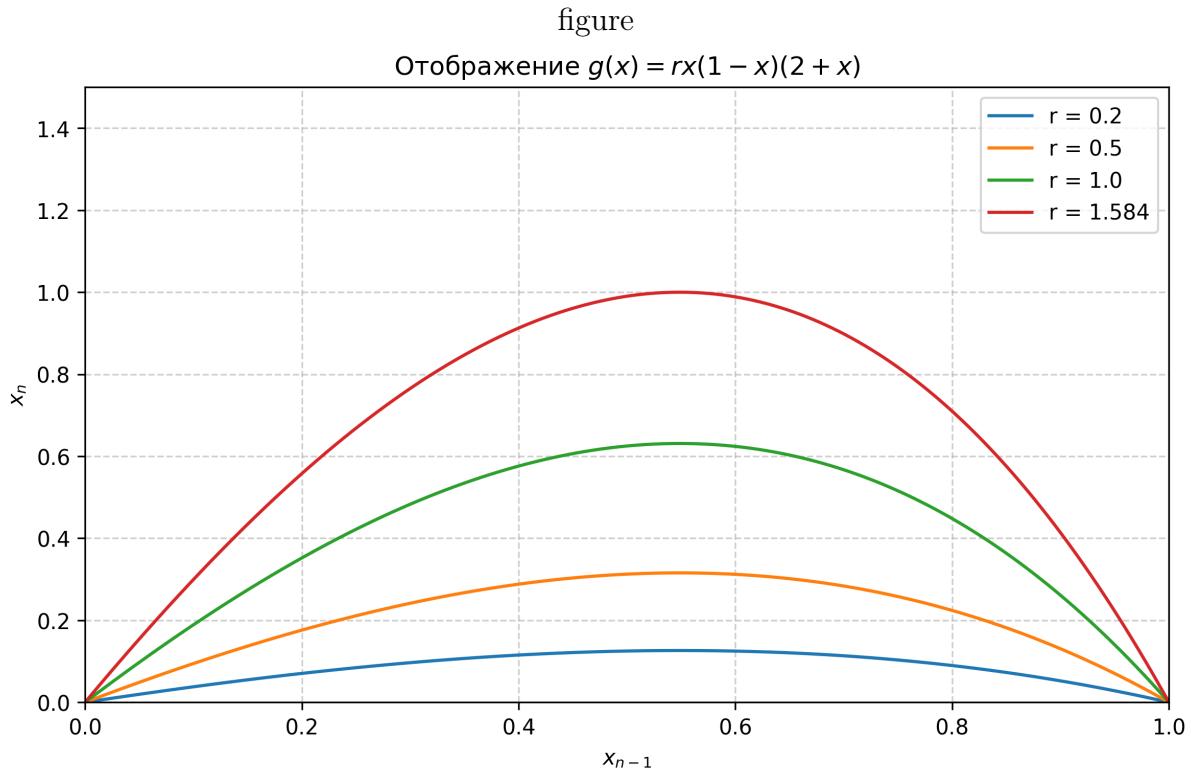
- Обращается в ноль при $x = 0$ и $x = 1$ (как и логистическое отображение),
- Имеет положительный множитель $(2+x) \in [2, 3]$ на $[0, 1]$,
- Следовательно, при фиксированном r , её значения выше, чем у $f(x) = rx(1-x)$,

Код построения графиков

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5 r_max = float(27 / (2 * (7 * 7 ** 0.5 - 10)))
6
7 x = np.linspace(0, 1, 500)
8 r_vals = [0.2, 0.5, 1.0, r_max]
9 plt.figure(figsize=(8, 5))
10 for r in r_vals:
11     y = r * x * (1 - x) * (2 + x)
12     label = "r={r}"
13     plt.plot(x, y, label=label)
14
15
16 plt.xlabel('x_{n-1}')
17 plt.ylabel('x_n')
18 plt.grid(True)
19 plt.legend()
20 plt.savefig('easy3_map.png')
```

График

Функции $g(x) = rx(1 - x)(2 + x)$ при $r = 0.2, 0.5, 1.0, 1.584$.



Вывод

Сравнение функций $f(x) = rx(1 - x)$ и $g(x) = rx(1 - x)(2 + x)$ позволяет сделать следующие выводы:

- Обе функции обращаются в ноль при $x = 0$ и $x = 1$, что соответствует биологической интерпретации: при отсутствии особей или перенаселении рост невозможен.
- На всём интервале $x \in (0, 1)$ множитель $(2 + x) \in (2, 3)$, поэтому при фиксированном r всегда $g(x) > f(x)$.
- Максимум функции $h(x) = x(1 - x)(2 + x)$ на $[0, 1]$ равен

$$h_{\max} = \frac{2(7\sqrt{7} - 10)}{27} \approx 0.6311,$$

и достигается при $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0.5486$.

- Чтобы $g(x) = rh(x) \leq 1$ для всех $x \in [0, 1]$, необходимо

$$r \leq r_{\max} = \frac{1}{h_{\max}} = \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)} \approx 1.584.$$

- При $r = 1$ значение $g(0.5) = 1 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 2.5 = 0.625 > 0.5$, то есть $g(x) > x$, и последовательность **возрастает** — в отличие от логистического отображения, где при $r \leq 1$ она всегда убывает.
- Таким образом, даже при $r < r_{\max} \approx 1.584$ система может демонстрировать рост, и переход от затухания к устойчивой ненулевой неподвижной точке происходит при $r < 1$, а не при $r = 1$, как в классическом случае.

Следовательно, добавление множителя $(2 + x)$ не только увеличивает значения отображения, но и качественно меняет его динамику: сдвигает пороговое значение r , при котором появляется устойчивая неподвижная точка, в сторону меньших r , и расширяет диапазон параметров, при которых возможен рост популяции.