Normal Level

Задание 2

Условие. Докажите, что при $x_0 \in (0,1)$ и $r \in (0,1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n),$$

монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0,1]$? Докажите. Покажите графически.

1. Доказательство монотонного убывания

Рассмотрим разность:

$$x_n - x_{n+1} = x_n - rx_n(1 - x_n) = x_n(1 - r(1 - x_n)).$$

По условию $x_0 \in (0,1)$ и $r \in (0,1]$. Из задания Easy 1 известно, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n \in (0,1)$. Следовательно:

$$x_n > 0 \Rightarrow 1 - x_n \in (0,1) \Rightarrow 1 - r(1 - x_n) > 0.$$

Таким образом, оба множителя положительны, и, следовательно, исходная разность также положительна:

$$x_n - x_{n+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} < x_n.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ **строго монотонно убывает**.

2. Существование предела

Поскольку:

- $\{x_n\}$ монотонно убывает,
- $x_n > 0 \ \forall n$ (т.е. ограничена снизу),

то по теореме Вейерштрасс о монотонной ограниченной последовательности, существует предел:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L \geq 0.$$

Функция $f(x) = rx(1-x)$ непрерывна на $[0, 1]$, поэтому, переходя к пределу в рекуррентном соотношении, получаем:

$$L = rL(1 - L).$$

Решим уравнение:

$$L = rL(1 - L) \quad \iff \quad L(1 - r(1 - L)) = 0.$$

Возможны два случая:

1. $L = 0$.
2. $1 - r(1 - L) = 0 \iff L = 1 - \frac{1}{r}$.

Но при $r \in (0, 1]$ имеем $\frac{1}{r} \geq 1$, откуда $L = 1 - \frac{1}{r} \leq 0$. Поскольку $L \geq 0$, единственно допустимое решение —

$$L = 0.$$

Вывод: при $r \in (0, 1]$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и сходится к нулю.

3. Графическое подтверждение

Покаже мграфик зависимости x_n от номера итерации n:

Python:

```python
import matplotlib.pyplot as plt

params = [
    (0.3, 0.2, 'r=0.3, x =0.2'),
    (0.6, 0.5, 'r=0.6, x =0.5'),
    (0.9, 0.8, 'r=0.9, x =0.8')
]

N = 25

plt.figure(figsize=(10, 6))

for r, x0, label in params:
    x = [x0]
    for _ in range(N):
        x_next = r * x[-1] * (1 - x[-1])
        x.append(x_next)
    plt.plot(range(len(x)), x, marker='o', markersize=3, linewidth=1.5,
    label=label)

```

```
plt.title('
                                $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$         $r, x_0 \\
    in (0,1)$')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.ylim(0, 1)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Заключение

При $r \in (0, 1]$:

- Последовательность $\{x_n\}$ строго убывает;
- Ограничена снизу нулём;
- Сходится к нулю.

Это означает, что в биологической модели популяция, описываемая логистическим отображением с $r \leq 1$, неизбежно вымирает, независимо от начального размера $x_0 \in (0, 1)$.