Normal level

Задание 3

Условие задачи

Пусть $r \in (2; 3)$. Известно, что для членов последовательности выполняется: $x_{2n} > x^*$ и $x_{2n+1} < x^*$, где x^* — неподвижная точка отображения.

Что вы можете сказать о монотонности подпоследовательностей $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$? Докажите. Проверьте графически.

Аналитическое решение

1. Анализ неподвижной точки

Логистическое отображение задается уравнением:

$$f(x) = rx(1 - x)$$

Найдем неподвижную точку $x^* \neq 0$:

$$x = rx(1 - x) \implies 1 = r(1 - x) \implies x^* = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r - 1}{r}$$

2. Производная и характер устойчивости

Найдем производную функции отображения:

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

Вычислим значение производной в неподвижной точке x^*:

$$f'(x^*) = r\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) = r\left(1 - 2 + \frac{2}{r}\right) = r\left(\frac{2}{r} - 1\right) = 2 - r$$

Так как по условию $r \in (2; 3)$, оценим $f'(x^*)$:

$$2 < r < 3 \implies -1 < 2 - r < 0$$

Таким образом, $f'(x^*) \in (-1; 0)$.

- Так как $|f'(x^*)| < 1$, точка устойчива (притягивающая).
- Так как $f'(x^*) < 0$, сходимость носит колебательный характер.

3. Монотонность подпоследовательностей

Рассмотрим отображение через два шага: $g(x) = f(f(x))$. Неподвижная точка x^* для $f(x)$ также является неподвижной точкой для $g(x)$. Найдем производную $g(x)$ в точке x^*:

$$g'(x^*) = f'(f(x^*)) \cdot f'(x^*) = f'(x^*) \cdot f'(x^*) = (2-r)^2$$

Учитывая, что $f'(x^*) \in (-1; 0)$, его квадрат будет лежать в интервале:

$$0 < (2-r)^2 < 1$$

Положительная производная $0 < g'(x^*) < 1$ означает, что в окрестности x^* итерации функции $g(x)$ (то есть переход $x_n \to x_{n+2}$) сходятся к x^* **монотонно**, не меняя знака отклонения.

Вывод для x_{2n}: поскольку $g'(x^*) > 0$ (наклон графика $f(f(x))$ положителен), функция сохраняет порядок: большее значение переходит в большее (относительно окрестности). Из устойчивости следует приближение к x^*.

$$x^* < x_{2n+2} < x_{2n}$$

Следовательно, подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ **монотонно убывает**.

Вывод для x_{2n+1} аналогично:

$$x_{2n+1} < x_{2n+3} < x^*$$

Следовательно, подпоследовательность $\{x_{2n+1}\}$ **монотонно возрастает**.

Графическая проверка (Python)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def logistic_map(r, x):
    return r * x * (1 - x)

r = 2.8
steps = 20
x0 = 0.1

x_star = 1 - 1/r

x = [x0]
for _ in range(steps):
    x.append(logistic_map(r, x[-1]))

iterations = np.arange(len(x))
x = np.array(x)

evens_idx = iterations % 2 == 0
odds_idx = iterations % 2 != 0

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(iterations, x, 'k-', alpha=0.3, label='                    ')
plt.scatter(iterations[evens_idx], x[evens_idx], color='blue', label='$x_{2n+1}$ (                )')
plt.scatter(iterations[odds_idx], x[odds_idx], color='red', label='$x_{2n}$ (            )')
plt.axhline(y=x_star, color='green', linestyle='--', label=f'                                  $x^*={x_star:.3f}$')

plt.title(f'                                                                 r={r}')
plt.xlabel('n (                   )')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Интерпретация графика

При запуске этого кода мы увидим, что красные точки (четные итерации) находятся выше зеленой линии (x^*) и с каждым шагом опускаются ниже, а синие точки (нечетные итерации) находятся ниже зеленой линии и с каждым шагом поднимаются выше. Это подтверждает аналитический вывод о монотонном убывании $\{x_{2n}\}$ и монотонном возрастании $\{x_{2n+1}\}$.