Normal Level

Задание 4

Условие. Для отображения $g(x_n)$, заданного вариантом:

$$g(x) = rx(1-x)(2+x),$$

выполните следующие пункты:

1. Аналитически найдите неподвижную точку.
2. Найдите или оцените диапазон параметра r, при котором последовательность монотонно сходится к нулю.
3. Постройте графики зависимости x_n от n для нескольких различных значений параметра r.

1. Неподвижная точка

Неподвижная точка x^* удовлетворяет уравнению $x^* = g(x^*)$, то есть:

$$x^* = rx^*(1-x^*)(2+x^*).$$

Рассмотрим два случая:

Случай 1: $x^* = 0$. Подставляя в уравнение, получаем $0 = r \cdot 0 \cdot (1-0) \cdot (2+0) = 0$. Следовательно, $x^* = 0$ — всегда неподвижная точка.

Случай 2: $x^* \neq 0$. Делим обе части на x^*:

$$1 = r(1-x^*)(2+x^*).$$

Раскрываем скобки:

$$1 = r(2 + x^* - 2x^* - (x^*)^2) = r(2 - x^* - (x^*)^2).$$

Переносим всё в одну сторону:

$$r(2 - x^* - (x^*)^2) - 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно x^*:

$$r(x^*)^2 + rx^* - 2r + 1 = 0.$$

Его решения:

$$x^* = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4r(-2r+1)}}{2r} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2 - 4r}}{2r} = \frac{-r \pm \sqrt{9r^2 - 4r}}{2r}.$$

Таким образом, неподвижные точки:

$$x_1^* = 0, \quad x_{2,3}^* = \frac{-r \pm \sqrt{9r^2 - 4r}}{2r}.$$

При $r > 0$ и $9r^2 - 4r \geq 0$ (т.е. $r \geq \frac{4}{9}$) существуют две дополнительные неподвижные точки.

2. Диапазон параметра r, при котором последовательность монотонно сходится к нулю

Чтобы последовательность $\{x_n\}$ монотонно сходилась к нулю, необходимо, чтобы:

- $x_{n+1} < x_n$ для всех n,
- $x_n \to 0$.

Рассмотрим разность:

$$x_n - x_{n+1} = x_n - r x_n (1 - x_n)(2 + x_n) = x_n \big(1 - r(1 - x_n)(2 + x_n)\big).$$

Так как $x_n > 0$ (по Easy 1), знак разности определяется выражением в скобках:

$$1 - r(1 - x_n)(2 + x_n).$$

Обозначим $h(x) = (1-x)(2+x) = 2+x-2x-x^2 = 2-x-x^2$. Эта функция на интервале $[0, 1]$ убывает от $h(0) = 2$ до $h(1) = 0$.

Максимальное значение $h(x)$ равно 2 при $x = 0$. Чтобы $x_{n+1} < x_n$ при любом $x_n \in (0, 1)$, достаточно потребовать:

$$r \cdot h(x_n) < 1 \quad \text{для всех } x_n \in (0, 1).$$

Поскольку $h(x_n) \leq 2$, то достаточным условием является:

$$r \cdot 2 < 1 \quad \Rightarrow \quad r < \frac{1}{2}.$$

Проверим граничный случай $r = \frac{1}{2}$. Тогда:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n (1 - x_n)(2 + x_n).$$

При малых x_n имеем $(1 - x_n)(2 + x_n) \approx 2$, поэтому $x_{n+1} \approx x_n$, что не гарантирует строгого убывания.

Следовательно, для монотонного убывания к нулю достаточно выбрать $r \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$.

Вывод: при $r \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и сходится к нулю.

3. Графическая проверка

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def g(x, r):
    return r * x * (1 - x) * (2 + x)

#                                  r                          (0, 0.5)
r_vals = [0.2, 0.3, 0.4]
x0 = 0.5
N = 25

plt.figure(figsize=(10, 6))

for r in r_vals:
    x = [x0]
```

```
    for _ in range(N):
        x.append(g(x[-1], r))
    plt.plot(x, marker='o', markersize=3, label=f'r = {r}')

plt.title('                                        $r
    \\in (0, 0.5)$')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.ylim(0, 1)
plt.grid(True, alpha=0.7)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Вывод по графику. При $r = 0.2, 0.3, 0.4$ все три траектории строго монотонно убывают и стремятся к нулю, что подтверждает аналитический вывод.