Лабораторная работа: Логистическое отображение (Уровень Hard)

Задание 1. Исследование цикла m для Логистического отображения

Рассматривается логистическое отображение:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

где $r_\infty \approx 3.5699456$ — граница, после которой начинается хаос.

1. Как изменяется длина цикла m при $r \in (3; r_\infty)$?

При увеличении параметра r в этом интервале, длина цикла m не растет постепенно, а **строго удваивается** на определенных точках.

- При $r = 3$ устойчивый цикл $m = 1$ (неподвижная точка) распадается.
- Далее цикл последовательно переходит к большей длине:

$$m = 1 \xrightarrow{r=3} 2 \xrightarrow{r\approx3.449} 4 \xrightarrow{r\approx3.544} 8 \to 16 \to \dots$$

- Этот процесс ускоряется: интервалы r между удвоениями становятся всё меньше.

2. Какие ограничения действуют на m (закономерность)?

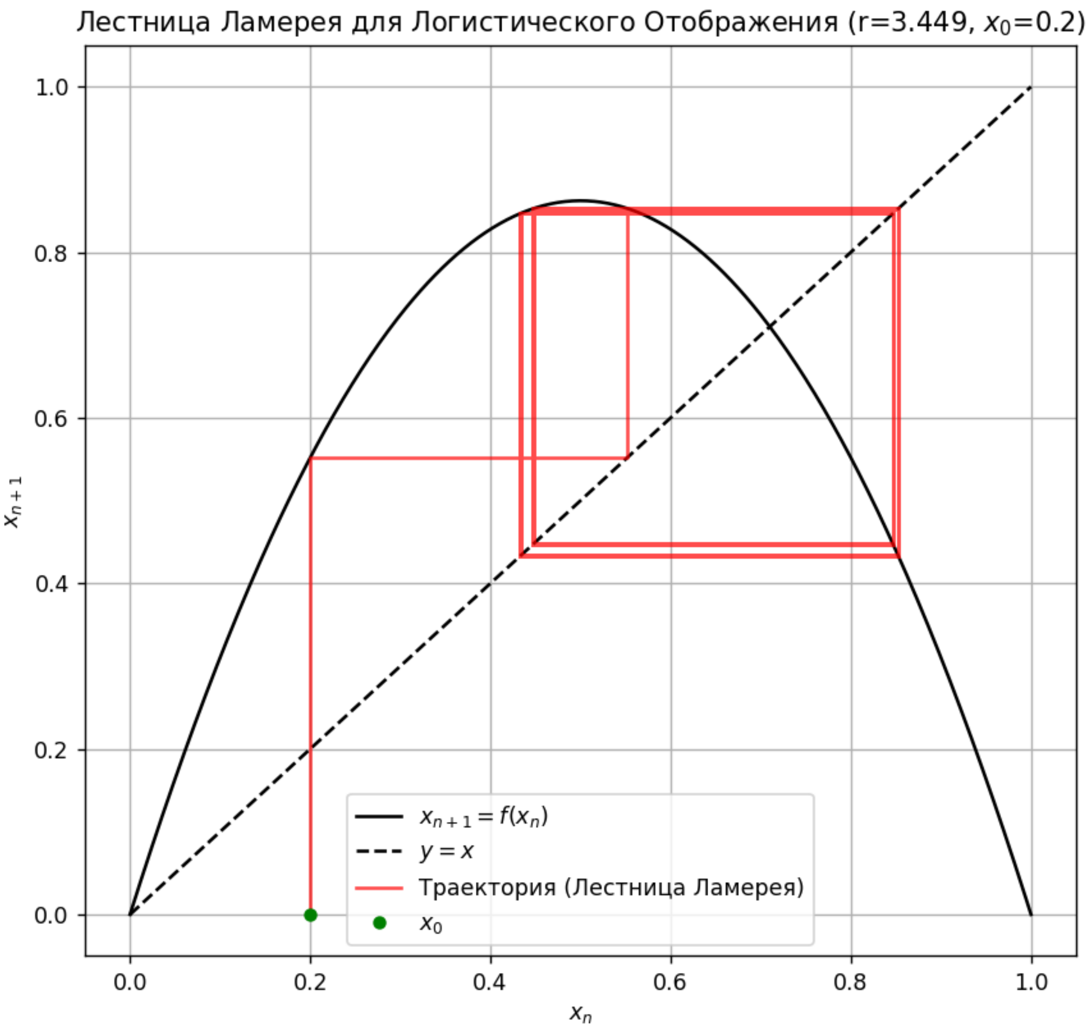
Главное ограничение, которое действует на длину цикла m в этом интервале, заключается в том, что m может быть **только степенью числа 2**.

- Закономерность:

$$\mathbf{m = 2^k}$$

  где k — целое число ($k \geq 1$).

3. Экспериментальное подтверждение и выводы



Для подтверждения этой закономерности мы использовали функцию (как показано ниже), которая позволяет увидеть поведение отображения при различных значениях r.

Выводы по эксперименту:

Экспериментальное наблюдение полностью подтвердило теоретическую закономерность.

1. При $r = 3$ отображение зацикливается на 2-ух точках. Потом на 4, и так далее. Сверху приведен график для 4 циклов

Таким образом, визуальный анализ показывает, что длина цикла вплоть до границы хаоса r_∞ строго подчиняется закону $\mathbf{m} = \mathbf{2^k}$.

Задание 2. Выводы о виде циклов на графике Лестницы Ламерея

Общая характеристика цикла

- **Форма цикла:** Цикл порядка m всегда имеет вид **замкнутой ломаной линии**, состоящей из $2m$ сегментов (вертикальных и горизонтальных).

- **Построение:** Ломаная линия формируется за счет чередования вертикальных шагов (от x_n до x_{n+1} на кривой $f(x)$) и горизонтальных шагов (от x_{n+1} до x_{n+1} на $y = x$).

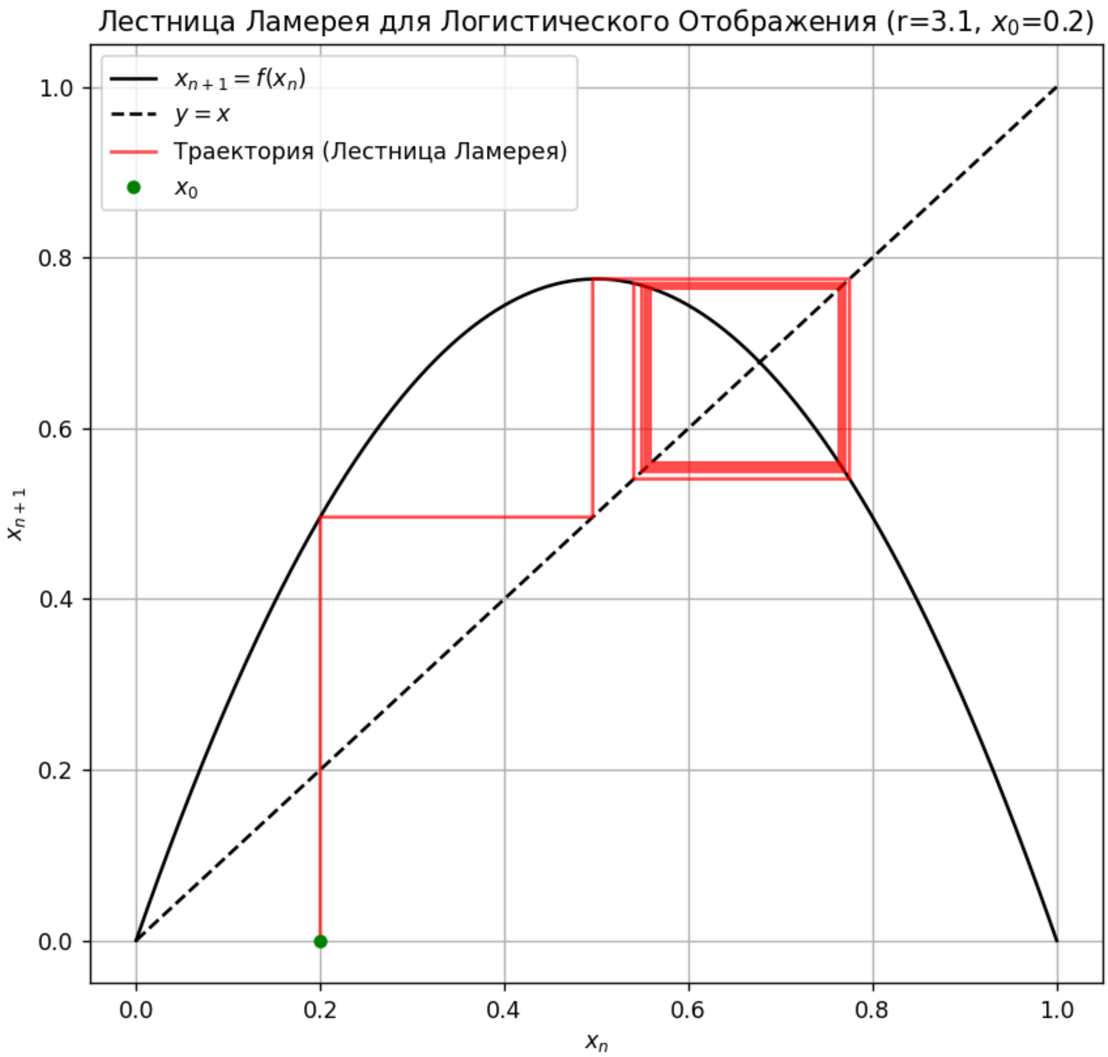
Функция построения Лестницы Ламерея

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def logistic_map(r, x):
      return r * x * (1 - x)


def lamerey_plot_simplified(r, x0, num_iterations):
      x_sequence = [x0]
      for _ in range(num_iterations):
            x_new = logistic_map(r, x_sequence[-1])
            x_sequence.append(x_new)

      x_coords = [x_sequence[0]]
      y_coords = [0]

      current_x = x_sequence[:-1]
      next_x = x_sequence[1:]

      for x_n, x_n_plus_1 in zip(current_x, next_x):

            x_coords.append(x_n)
            y_coords.append(x_n_plus_1)

            x_coords.append(x_n_plus_1)
            y_coords.append(x_n_plus_1)


      x_min = 0
      x_max = 1
      x_range = np.linspace(x_min, x_max, 500)

      plt.figure(figsize=(8, 8))

      plt.plot(x_range, logistic_map(r, x_range), 'k', label='$x_{n+1} = f(x_n)
   $')
      plt.plot(x_range, x_range, 'k--', label='$y=x$')
      plt.plot(x_coords, y_coords, 'r-', linewidth=1.5)
      plt.plot(x_sequence[0], 0, 'go', markersize=5, label='$x_0$')

      plt.xlabel('$x_n$')
      plt.ylabel('$x_{n+1}$')
      plt.legend()
      plt.grid(True)
      plt.show()
```

Примеры визуализации

Пример: Сходимость к циклу порядка 2

Для демонстрации сходимости к циклу порядка 2 $(r = 3.1)$:



Итог: Ключевые параметры и выводы

В качестве заключения по заданию, ниже представлена сводная информация, отражающая связь между r и порядком установившегося цикла m:

- **Параметр** $r \in (1; 3]$. Порядок цикла: 1 (**Неподвижная точка**). Внешний вид: Траектория сходится к одной точке пересечения $f(x) = x$.
- **Параметр** $r \in (3; \approx 3.449)$. Порядок цикла: 2. Внешний вид: **Замкнутый квадрат** или прямоугольник.
- **Параметр** $r \in (\approx 3.449; \approx 3.5699)$. Порядок цикла: $4, 8, 16, \ldots$. Внешний вид: Последовательность соединенных прямоугольников.
- **Параметр** $r \in (3.57; 4]$. Порядок цикла: ∞ (**Хаос**). Внешний вид: **Плотная, незамкнутая траектория**, заполняющая область.

—

Задание 3.Исследование кубического отображения $g(x_n)$

Для заданного варианта ($N = 0$) используется кубическое отображение:

$$x_{n+1} = g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n)$$

Исследование проводится в заданном диапазоне параметра $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}; \mathbf{r}_{\max}]$, где $\mathbf{r}_{\max} = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{2(7\sqrt{7}-10)}} \approx \mathbf{1.5844}$.

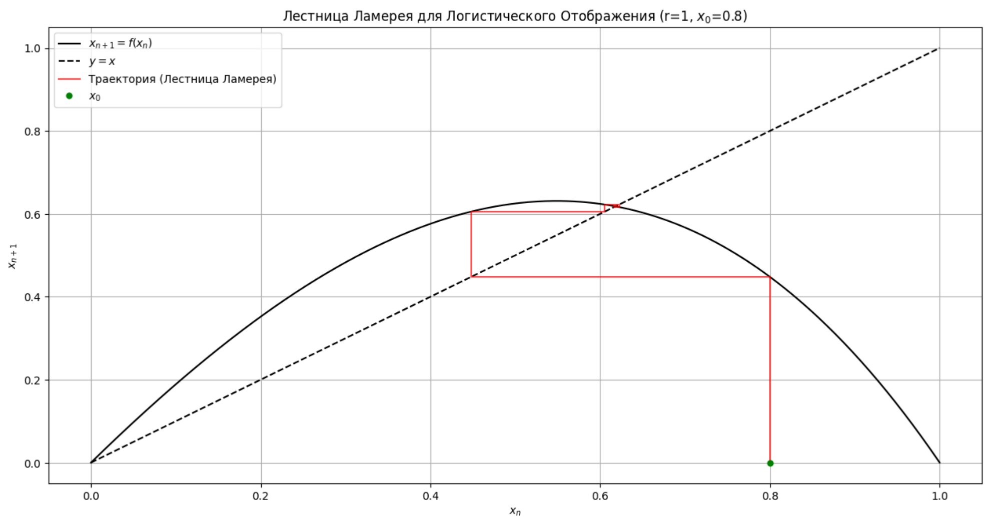
1. Как изменяется длина цикла m с изменением параметра r?

При увеличении параметра r система последовательно проходит через следующие режимы:

- **Устойчивость $(m = 1)$:** В диапазоне $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}; \mathbf{0.5})$ система сходится к единственной устойчивой неподвижной точке $x^* = 0$.
- **Каскад удвоения периода:** При $\mathbf{r} = \mathbf{0.5}$ происходит первая бифуркация удвоения. В диапазоне $\mathbf{r} \in (\mathbf{0.5}; \approx \mathbf{0.95})$ длина цикла удваивается $(\mathbf{m} = \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, \ldots)$, что является основным путем системы к хаосу.
- **Хаос:** Начиная с $\mathbf{r} \approx \mathbf{0.95}$ и до $\mathbf{r}_{\max} \approx \mathbf{1.5844}$, система находится в режиме **хаоса** $(\mathbf{m} = \infty)$.

2. Функция для визуализации количства циклов

Для численной демонстрации изменения циклов используется модифицированная лестница Ламерея, в которой поменялось только отображение f(x) на g(x).



3. Выводы: Сходства и различия с Логистическим отображением

Сходства:

- **Путь к хаосу:** Обе системы достигают хаоса после того, как период цикла многократно удваивается $(\mathbf{m} \to \mathbf{2m} \to \mathbf{4m} \ldots)$. Это их главный общий путь к хаосу..

Различия:

- **Начало изменений:** Удвоение периода в $g(x)$ начинается уже при $\mathbf{r} = \mathbf{0.5}$, тогда как в логистическом отображении это происходит гораздо позже, при $\mathbf{r} = \mathbf{3}$.