此文档介绍卷积的概念

冲激响应是系统对持续时间极短的高能量输入的响应。
若已知冲激响应，要求线性时不变（LTI）系统对任意输入信号的响应，可将输入信号分解为时移的单位冲激信号的加权叠加。
根据线性和时不变性，输出信号应等于时移的冲激响应的加权叠加。这种加权叠加对于离散时间系统而言为**卷积和**，对于连续时间系统而言为**卷积积分**。

卷积和

冲激序列定义为：

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & \text{x=0}\\ 0 & \text{x!=0}\end{cases}$$

由冲激函数的筛分性质得

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

更一般地，有

$$x[n]\delta[n-k]=x[k]\delta[n-k]$$

注意：这里$\delta[n-k]$是时移的冲激序列。
将$x[n]$拆分成多个冲击信号，那么$x[n]$可以表示为：

$$x[n]=\ldots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+\ldots$$

即：

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

输入信号$x[n]$作用于冲激响应为$h[n]$的线性时不变系统，产生输出$y[n]$

$$\begin{aligned}y[n]&=H\{x[n]\}\\&=H\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]\}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H\{x[k]\delta[n-k]\}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]H\{\delta[n-k]\}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]\end{aligned}$$

其中$h[n]=H\delta[n]$是**线性时不变**系统H的冲激响应。
线性时不变系统的输出等于时移冲击响应的加权和：

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

一言以蔽，将输入$x[n]$分解为时移冲激序列的加权和，则时移冲击响应的加权和就是输出信号$y[n]$。

卷积积分

和冲激序列类似，我们定义冲激函数（亦被成为$Dirac$函数）：

$$\begin{cases}\delta(x)=0 & \text{x != 0}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)=1\end{cases}$$

实际上

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(x) = 1$$

之前讨论的卷积和是针对**离散**时间信号的。 类似地，对于**连续**时间信号有卷积积分：

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

卷积的性质

由线性时不变系统的**并联**可以得到卷积的**分配律**：

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\}$$

由线性时不变系统的**级联**可以得到卷积的**结合律**：

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$

线性时不变级联总系统输出与各子系统级联顺序无关，可得卷积**交换律**：

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

卷积积分的计算

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

我们可以定义一个中间信号w_t

$$w_t(\tau) = x(\tau)h(t-\tau)$$

其中t被看作常量，τ是自变量。
而$h(t-\tau)$可以看作$h(\tau)$的**平移**和**反褶**。
得到

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_t(\tau)d\tau$$

这样，系统在任意时刻t的输出就等于$w_t(\tau)$信号波形下面的面积。

我们将$h(\tau)$反褶得到$h(-\tau)$，接着向右平移t得到$h(t-\tau)$。
对于不同的t，当两信号波形下的图形不重叠（$overlap$）时，卷积为零。
当两信号波形下的图形重叠时，计算相应的积，并积分。
对于简单的信号，以上计算过程往往可以划分为几个区间分别讨论。

总之，卷积的过程可以总结为：

$$Flip \rightarrow Slide \rightarrow Multiply \rightarrow Integrate$$

另外，对于复杂信号，或者是一条曲线或者一组测试数据，难以使用卷积积分。这时可将信号离散化，利用计算机进行近似计算。