Aproksymacja wielomianowa

Wiktoria Zaczyk

06.05.2021

1 Wstęp teoretyczny

Aproksymacja:
Proces określania rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych, które są bliskie rozwiązaniom dokładnym w ściśle sprecyzowanym sensie.

Aproksymacja liniowa funkcji
Wyznaczenie współczynników $(a_0, a_1, a_2, ..., a_m)$ funkcji aproksymującej $F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x)$, gdzie: $\varphi_i(x)$ - są funkcjami bazowymi $(m+1)$ wymiarowej podprzestrzeni liniowej. Aby uzyskać bardzo dobre przybliżenie funkcji aproksymowanej, żądamy by norma różnicy wartości funkcji $f(x)$ i $F(x)$ była jak najmniejsza w każdym punkcie: $||f(x)-F(x)|| = minimum$. Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu.

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów Jako bazę przyjmuje się ciąg jednomianów: $1, x, x^2, ..., x^m$. Warunek na minimum przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^{n}[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i]x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, ..., m \tag{1}$$

Po zmianie kolejności sumowania otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(\sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)x_j^k \tag{2}$$

Następnie wprowadzamy oznaczenia:

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k} \tag{3}$$

$$\rho_k = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)x_j^k, \tag{4}$$

dzięki czemu otrzymujemy układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_{ik} = \rho_k \tag{5}$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{a} = \rho \tag{6}$$

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych
Aproksymacja, której celem jest minimalizacja błędu na przedziale [a,b], polegająca na przybliżeniu funkcji za pomocą wielomianu. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) = 0$$

jeśli funkcje f i g spełniają warunki:

$$\sum_{i=0}^{n}[g(x_i)]^2 > 0$$

$$\sum_{i=0}^{n}[f(x_i)]^2 > 0$$

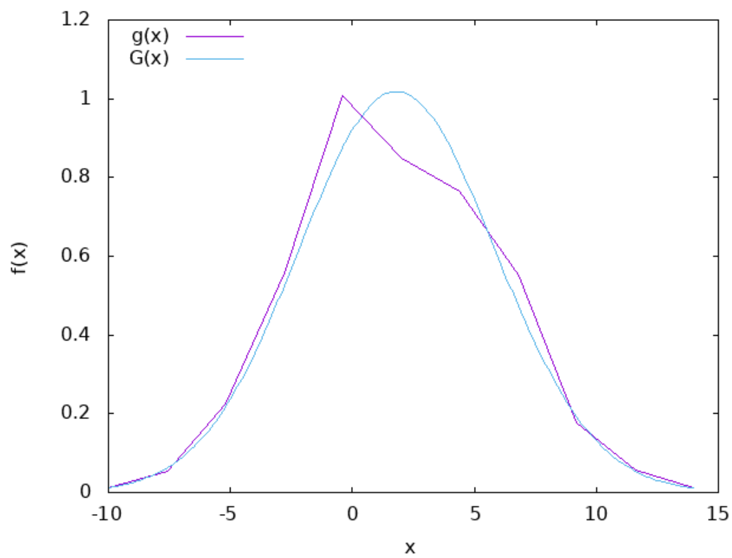
Aby znaleźć takie wilomiany, zakładamy, że węzły są równoległe $x_i = x_o + i \cdot h$, gdzie $i = 0, 1, 2, ..., n$. Wykonujemy przekształecenie $q = \frac{x-x_0}{h}$. Spełniając warunki ortogonalności oraz po przekształeceniu otrzymujemy postać:

$$\widehat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \binom{k}{s}\binom{k+s}{s}\frac{q^{[s]}}{n^{[n]}}$$

2 Cel zadania

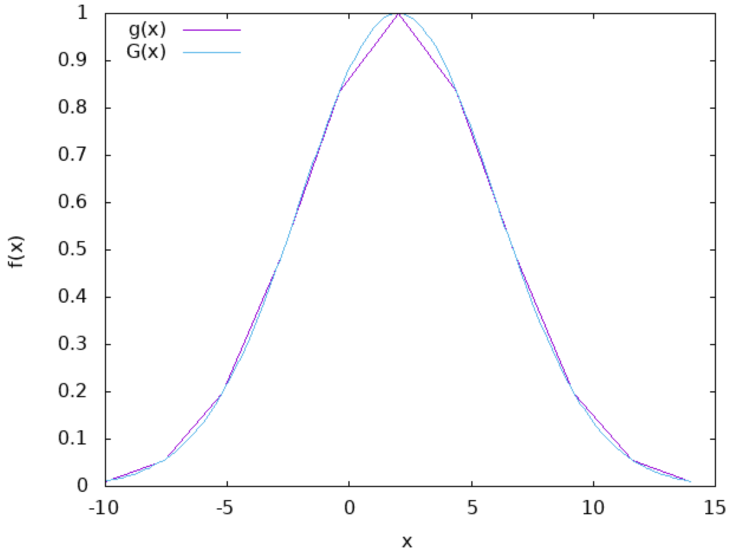
Na dziewiątych zajęciach zajęliśmy się aproksymacją funkcji $g(x) = exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}) = exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$, gdzie $a_0 = -x_0^2/2/\sigma^2, a_1 = x_0/\sigma^2, a_2 = -1/2/\sigma^2$. Nasza baza była 4 elementowa $\varphi_i = 1, x, x^2, x^3$. Szukaliśmy kombinacji liniowej: $F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ oraz wyznaczylismy funkcję G(x), która była przybliżeniem funkcji g(x) ($G(x) = exp(F(x))$). Dla funkcji przyjeliśmy $x_0 = 2, \sigma = 4$, oraz aproksymację przeprowadzaliśmy w zakresie $x \in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$

3 Wyniki

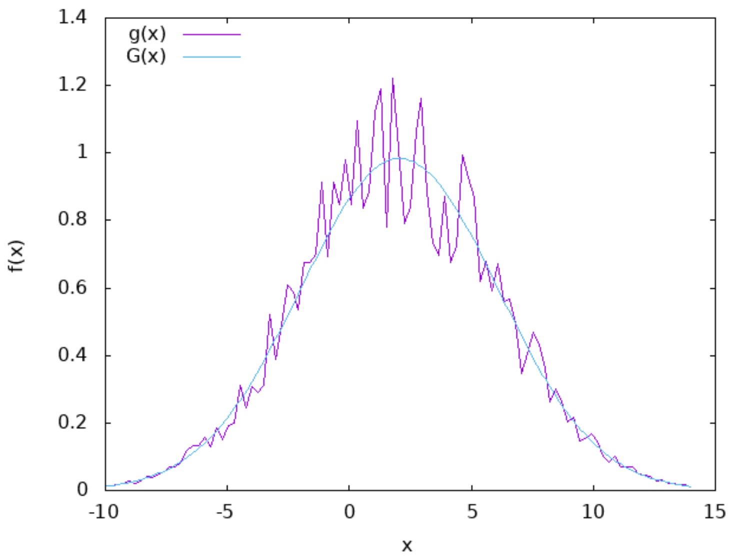


Rysunek 1: Aproksymacja funkcji $g(x)$, parametr $\alpha = 0, N = 11$ węzłów aproksymacji

Węzły znajdują się na linii funkcji, co jest zgodne ze sposobem w jaki sposób obliczane były wartości węzłów, jednak możemy zauważyć wystąpienie losowych szumów.



Rysunek 2: Aproksymacja funkcji g(x), parametr = 0.5, N=11 węzłów aproksymacji



Rysunek 3: Aproksymacja funkcji g(x), parametr = 0.5, N=101 węzłów aproksymacji

4 Wnioski

Jak widać z powyższych wyników, aproksymacja funkcji bez szumu przy małej liczbie węzłów (N = 11) idealnie pokrywa funkcję g(x). Aproksymacja wielomianowa pozwala na szybkie i dokładne wyznaczenie funkcji, gdy znamy jej wartości w danym zbiorze. Jej dużą zaletą jest fakt, że do przybliżenia wartości funkcji nie potrzebny jest wielomian wysokiego stopnia oraz fakt, że węzły mogą być równoodległe, a mimo to oszacowanie funkcji nie straci na dokładności.