Szacowanie całek przy użyciu kwadratur Gaussa

Wiktoria Zaczyk

10.06.2020

1 Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne
Oznacza zastosowanie metod numerycznych w celu wyznaczenia przybliżonej wartości całki oznaczonej.Proste metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach. Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie dzieli się przedział całkowania na niewielkie fragmenty. Ostateczny wynik jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach.

$$C = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Kwadratury Gaussa
Rozpatrujemy kwadratury typu:

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k) \tag{2}$$

Współczynniki kwadratury z wagą p(x):

$$A_k = \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx \tag{3}$$

Numerycznie całkę policzyć można z następującego wzoru:

$$S(f) = \sum_{k=0j}^{N} A_k f(x_k), \quad x \in [a, b] \tag{4}$$

Ustalamy funkcję wagową $p(x)$ oraz liczbę węzłów $(N + 1)$. Szukamy:

1. położenia węzłów
2. współczynników A_k

tak aby rząd kwadratury był jak najwyższy. Kwadratura tego typu nosi nazwę kwadratury Gaussa. Do wyznaczenia kwadratur Gaussa używa się wielomianów ortogonalnych.

Ciąg wielomianów: $\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_0(x), ..., \varphi_N(x)\}$
Nazywamy ortogonalnymi w przedziale [a,b] jeśli zachodzi pomiędzy nimi związek:

$$(\varphi_r, \varphi_s) = \int_a^b p(x)\varphi_r(x)\varphi_s(x)dx = 0 \qquad r \neq s \tag{5}$$

Tw.1. Wielomiany ortogonalne mają tylko pierwiastki rzeczywiste, leżące w przedziale $[a, b]$.

Tw.2. Nie istnieje kwadratura Gaussa rzędu wyższego niż $2(N + 1)$. Kwadratura Gaussa jest rzędu $2(N + 1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy węzły x_k są pierwiastkami wielomianu $P_{N+1}(x)$.

Tw. 3. Wszystkie współczynniki A_k w kwadraturach Gaussa są dodatnie.

Metoda kwadratur Gaussa jest zbieżna do każdej funkcji ciągłej w $[a, b]$. Kwadratury te są dokładne dla wielomianów stopnia $2N + 1$

Kwadratury Gaussa-Legendre'a
Posiada funkcję wagową postaci $p(x) = 1$. Przybliża całkę oznaczoną z przedziału $[-1, 1]$. Współczynniki kwadratury można wyznaczyć:

$$A_k = -\frac{2}{(N + 2)P_{N+2}(x_k)P_{N+1}(x_k)} \tag{6}$$

By zastosować wzory z przedziału $[-1, 1]$ dla przedziału $[a, b]$ należy dokonać transformacji liniowej zmiennej niezależnej. Wtedy przybliżenie całki ma postać:

$$\int_a^b p(x)f(t)dt \approx S(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{k=0j}^{N} A_k f(t_k) \tag{7}$$

dla $t_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_k$ i węzłów rozłożonych w przedziale $[-1, 1]$. Węzłami są pierwiastki n-tego wielomianu Legendre'a.

Kwadratury Gaussa-Legendre'a
Posiada funkcję wagową postaci $p(x) = e^{-x}$ Przybliża całkę oznaczoną z przedziału $[0, \infty]$. Współczynniki kwadratury można wyznaczyć:

$$A_k = \frac{((N + 1)!)^2}{L_{N+2}(x_k)L_{N+1}(x_k)} \tag{8}$$

Kwadratura z węzłami , które są zerami N-tego wielomianu Laguerre'a , ma postać:

$$\int_a^b e^{-x}f(x)dx \approx S(f) = \sum_{k=0j}^{N} A_k f(x_k) \tag{9}$$

Kwadratury Gaussa-Hermite'a
Posiada funkcję wagową postaci $p(x) = e^{-x}$ Przybliża całkę oznaczoną z przedziału $[-\infty, \infty]$. Kwadratura z węzłami x_k, które są zerami N-tego wielomianu Hermite'a $H_N(x)$ ma postać:

$$\int_a^b e^{-x}f(x)dx \approx S(f) = \sum_{k=0j}^{N} A_k f(x_k) \tag{10}$$

Podczas sumowania każdej z kwadratur pomijamy wagę – ta jest uwzględniona we współczynnikach A_k

2 Cel zadania

Zadaniem w trakcie laboratoriów było wyznaczyć wartości całki typu:

1. niewłaściwej metodą kwadratury Gaussa-Legendre'a dla $a = 10$ i liczby węzłów $n = 5, 6, 7, ..., 70$

$$C_1 = \int_0^a ln(x)dx = aln(a) - a \tag{11}$$

2. przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a oraz Gaussa-Legendre'a, dla liczby węzłów $n = 5, 6, 7, ..., 70$

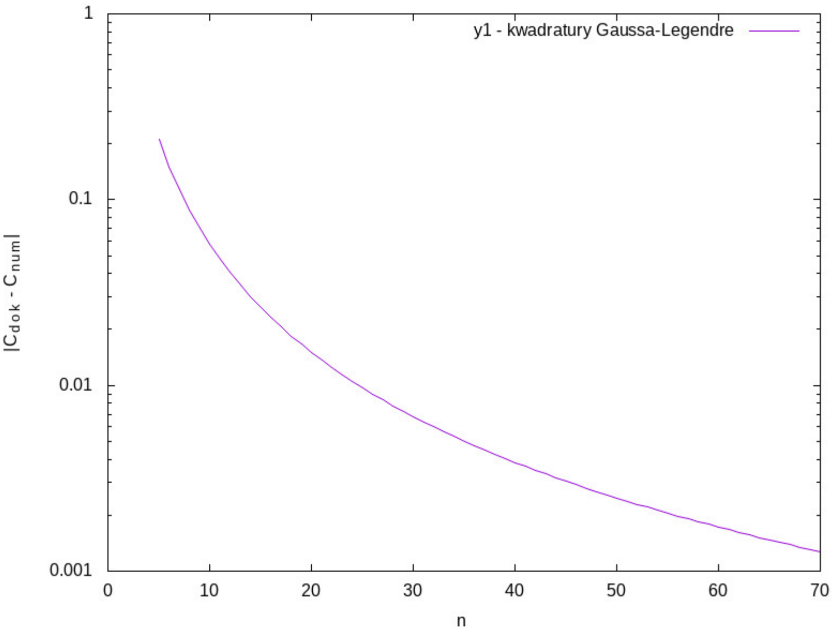
$$C_2 = \int_0^\infty (x-10)^2 sin(4)e^{-x}dx \tag{12}$$

3. przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a oraz Gaussa-Legendre'a, dla liczby węzłów $n = 5, 6, 7, ..., 70$

$$C_3 = \int_{-\infty}^\infty x^7 2^{-x^2+x+4)} e^{-x^2}dx \tag{13}$$

3 Wyniki

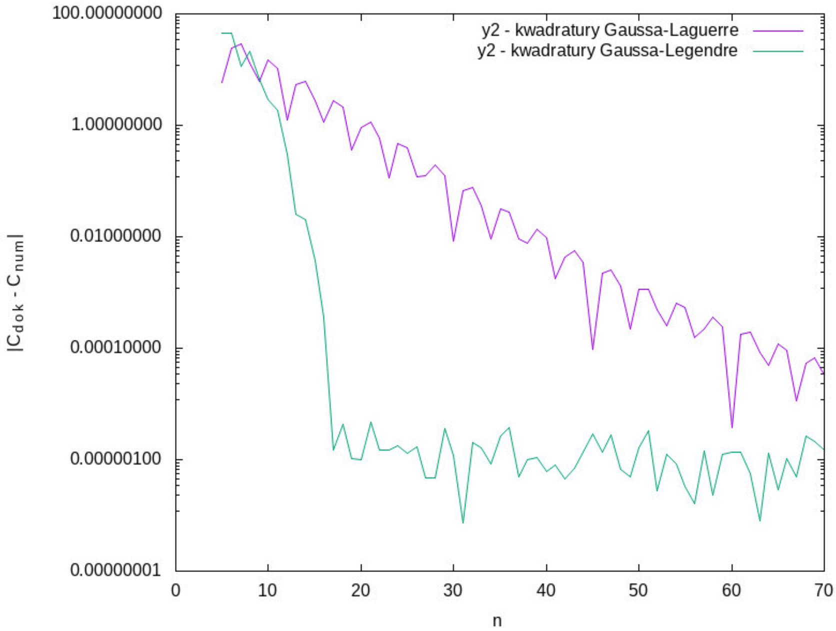
I.



Rysunek 1: Wykres zależności modułu różnicy wartości dokładnej całki, a całki obliczonej numerycznie od ilości przyjętych węzłów

Jak można zauważyć na wykresie, wraz ze zwiększeniem liczby węzłów, cały czas zwiększała się dokładność wyznaczonego przybliżenia wartości całki metodą kwadratury Gaussa-Legendre'a.

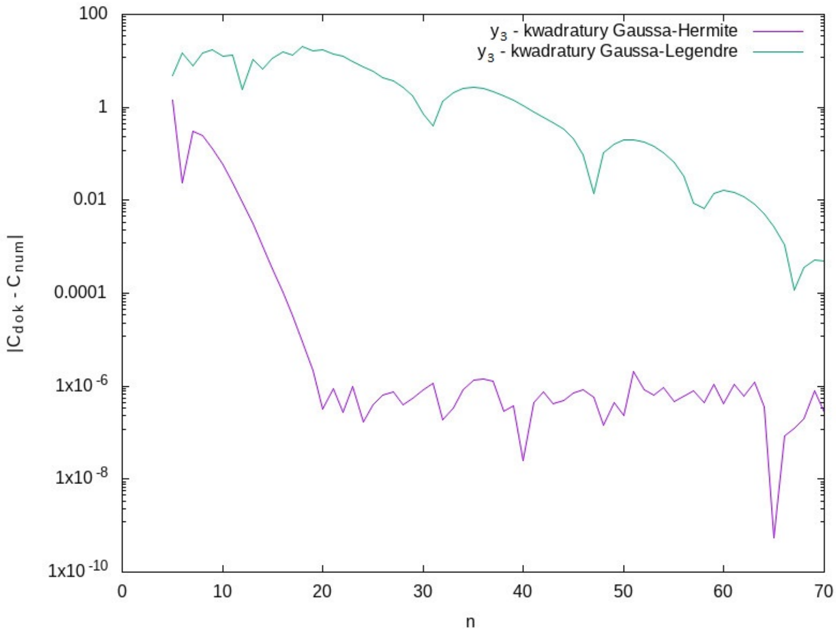
II.



Rysunek 2: Wykres zależności modułu różnicy wartości dokładnej całki, a całki obliczonej numerycznie od ilości przyjętych węzłów

Dla metody kwadratur Gaussa-Legendre'a dokładność stale się zwiększała podczas zwiększania liczby węzłów. Dla ich większej liczby następowały oscylacje różnicy rozwiązania dokładnego z numerycznym i jakość wyznaczonego przybliżenia nie zwiększała się znacznie. Dla metody kwadratur Gaussa-Laguerre'a mimo niewielkich oscylacji, jakość przybliżenia zwiększała się przy zwiększaniu liczby węzłów do 70.

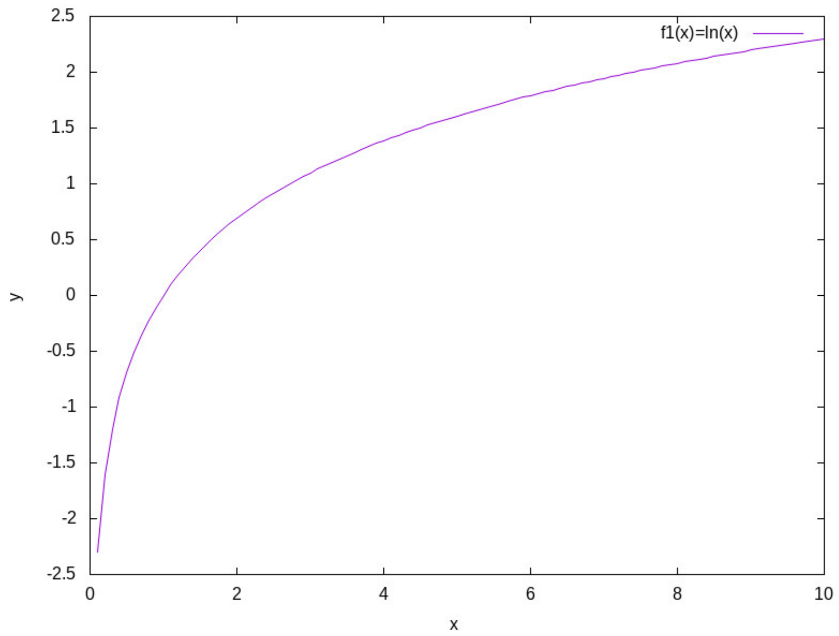
III.



Rysunek 3: Wykres zależności modułu różnicy wartości dokładnej całki, a całki obliczonej numerycznie od ilości przyjętych węzłów

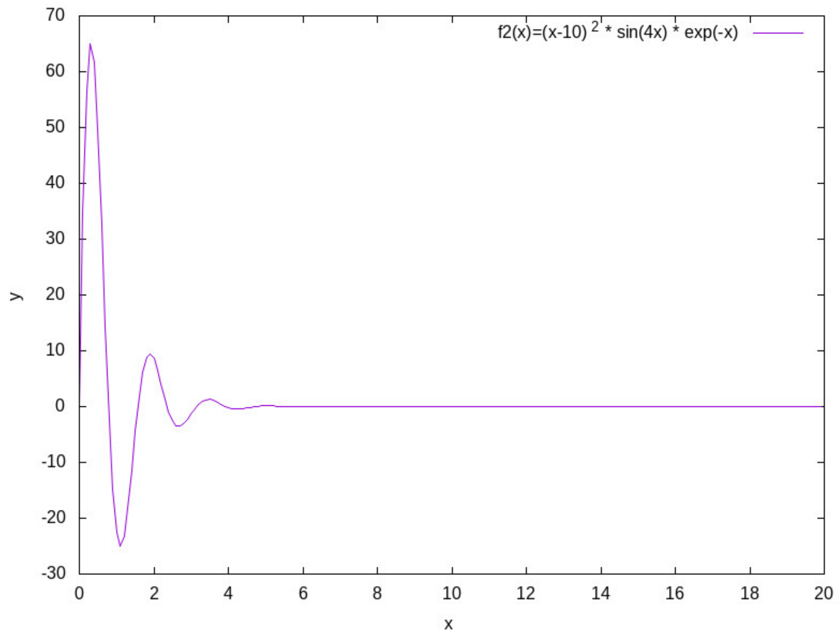
Dla metody kwadratur Gaussa-Hermite'a dokładność wyznaczonej wartości całki oznaczonej III. zwiększała się podobnie jak dokładność przybliżenia całki II. metodą kwadratur Gaussa-Legendre'a. Dla większej liczby przyjętych węzłów, występowały oscylacje i dokładność nie zwiększała sie znacząco. Można zauważyć powtarzające się 'uskoki' wykresu, gdzie błąd przybliżenia najpierw rośnie, a następnie zaczyna maleć. Dla całej dziedziny rozpatrywanej liczby węzłów, metoda kwadratur GaussaHermite'a pozwoliła mi uzyskać lepsze przybliżenie niż metoda kwadratur GaussaLegendre'a.

I.



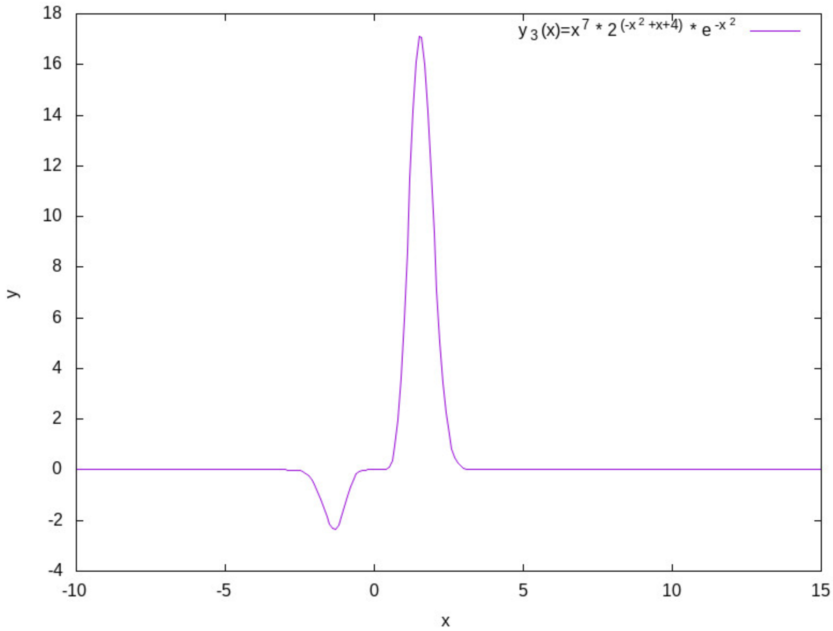
Rysunek 4: Wykres iloczynu funkcji podcałkowej i funkcji wagowej $f(x) \cdot p(x)$

II.



Rysunek 5: Wykres iloczynu funkcji podcałkowej i funkcji wagowej $f(x) \cdot p(x)$

III.



Rysunek 6: Wykres iloczynu funkcji podcałkowej i funkcji wagowej $f(x) \cdot p(x)$

W niektórych przypadkach możliwe jest zastąpienie kwadratur Laguerre'a i Hermite'a kwadraturą Legendre'a; II. i III. Funkcja przyjmuje wartości bliskie zeru dla argumentów większych. Zatem zamiast liczyć całkę niewłaściwą, można ją obliczyć metodą kwadratur Legendre'a.

4 Wnioski

Dokładność zależy od liczby węzłów. Na wykresach iloczynu funkcji podcałkowej i funkcji wagowej widać, że wydajniej jest obliczyć przybliżoną wartość całki niż funkcji metodą Laguerre'a. Jeżeli pominąć funkcję wagową p(x), funkcja będzie oscylować i tłumić się dłużej. Uzyskane błędy przybliżenia są minimalnie większe od tych, uzyskanych metodą Simpsona, jednak sama implementacja algorytmu, z wykorzystaniem biblioteki numerical recipes, jest dużo prostsza i pozwala na obliczenie niektórych całek niewłaściwychv metodą; prostą, wydajnaą i skuteczną.

Literatura

[1] Tomasz Chwiej, *Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur* `http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/calkowanie_1819.pdf`

[2] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Całkowanie_numeryczne`