Aproksymacja sygnału okresowego przy użyciu FFT

Wiktoria Zaczyk

20.05.2020

1 Wstęp teoretyczny

Dyskretna transformata Fouriera (DFT)
transformata Fouriera wyznaczona dla sygnału próbkowanego, a więc dyskretnego. Obliczanie sum ma złożoność obliczeniową $O(N^2)$ dla liczb zespolonych $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ i $k = 0, 1, .., N-1$ określonych wzorem:

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk}) \tag{1}$$

Szybka transformata Fouriera (FFT)
Szybką transformacją Fouriera nazywamy algorytm wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera oraz transformaty do niej odwrotnej. Pozwala on zmniejszyć liczbę wykonywanych operacji do $O(N log_2 N)$

Algorytm radix-2
Jest to najprostszy algorytm FFT. W algorytmie tym zakładamy, że całkowita liczba węzłów to potęga 2: $N = 2^r, r \in \mathbb{N}$ oraz że oznaczmy węzły, a więc : $x_j = \frac{2\pi}{N} j,\ j = 0, 1, 2, ..., N-1$. Kolejne współczynniki wyznaczamy następująco:

$$c_k = \langle E_k, f \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) E_k(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j exp(-I \frac{2\pi}{N} jk). \tag{2}$$

Osobno grupujemy składniki parzyste ($j = 2m$) i nieparzyste ($j = 2m + 1$) i otrzymujemy:

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} exp(-I \frac{2\pi}{N} (2m)k) + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} exp(-I \frac{2\pi}{N} (2m+1)k), \tag{3}$$

a po przekształceniach:

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk) + exp(-I \frac{2\pi}{N} k) \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk). \tag{4}$$

Wyrażenie to możemy zapisać jako:

$$c_k = p_k + \varphi_k q_k \tag{5}$$

gdzie:

$$p_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk)$$

$$q_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk) \tag{6}$$

$$\varphi_k = exp(-I \tfrac{2\pi}{N} k)$$

Korzystając z okresowości wyrazów p_k i q_k nie musimy wyznaczać wszystkich współczynników (tylko połowę) ponieważ:

$$p_{k+n/2} = p_k \quad q_{k+n/2} = q_k \tag{7}$$

Dodatkowo czynnik fazowy ma następującą własność:

$$\begin{aligned} \varphi_{k+n/2} = exp(-I\tfrac{2\pi}{N}(k+\tfrac{N/2}{)}) = exp(-I\tfrac{2\pi}{N}k)exp(-I\tfrac{2\pi}{N}\tfrac{N}{2}) = \\ = -exp(-I\tfrac{2\pi}{N}k) = \varphi_k. \end{aligned} \tag{8}$$

Finalnie współczynniki p_k i q_k możemy wyznaczyć dzięki Dyskretnej Transformacie Fouriera nakładem $O(N/2)^2 = O(N^2/4)$, a dodatkowo oszczędzimy czas wyznaczając współczynniki tylko dla $k < \frac{N}{2}$, ponieważ:

$$\begin{cases} p_k + \varphi_k q_k & k < \frac{N}{2} \\ p_{k-\frac{N}{2}} - \varphi_k q_{k-\frac{N}{2}} & k \geqslant \frac{N}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Następnym krokiem FFT jest podział sum w p_k oraz w q_k na sumy zawierające elementy parzyste i nieparzyste. Po podziale liczba elementów w każdej z dwóch powstałych sum jest dwukrotnie mniejsza niż w elemencie macierzystym. Proces rekurencyjnego podziału zostaje zakończony gdy liczba elementów jest równa 1.

2 Cel zadania

Zadaniem w trakcie laboratoriów było zastosowanie algorytmu FFT do odszumiania sygnału periodycznego. Sygnał okresowy nie zaszumiony ma postać:

$$y_0(i) = \sin(\omega \cdot i) + \sin(2\omega \cdot i) + \sin(3\omega \cdot i), \tag{10}$$

gdzie $i = 0, 1, ..., N-1$, $N = 2^k$
Zmienna losowa imitująca szum była określona wzorem:

$$\Delta = 2 \cdot (\frac{rand()}{RAND_MAX + 1.0}) - 1, \tag{11}$$

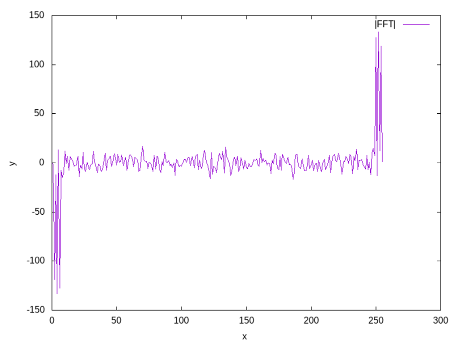
gdzie funkcja `rand()` i zmienna `RAND_MAX` to elementy z biblioteki stdlib.h służące do generowania liczb pseudolosowych. Wygenerowana liczba jest liczbą pseudolosową o rozkładzie równomiernym w przedziale (-1, 1]. Finalnie, sygnał zaszumiony konstruujemy następująco:

$$y(i) = y_0(i) + \Delta, \tag{12}$$

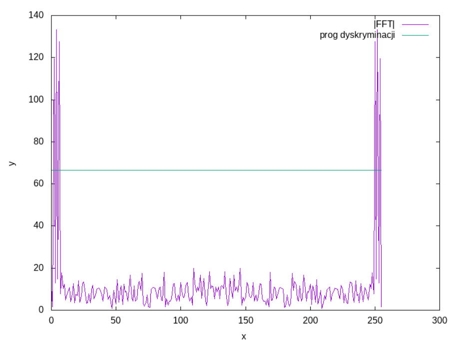
gdzie wartość Δ jest wyznaczana dla każdego indeksu i z osobna.
Mieliśmy wygenerować zaszumiony sygnał dla długosci wektora równej $N = 2^k$, dla $k = 8, 10, 12$

3 Wyniki

Transformacja FFT dla $k = 8$, $N = 2^8$ próbek wejściowych:



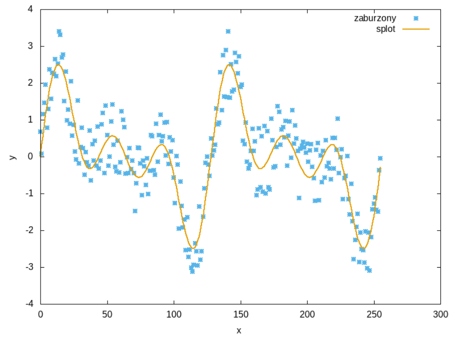
(a) Część rzeczywista i urojona transformaty dla k=8



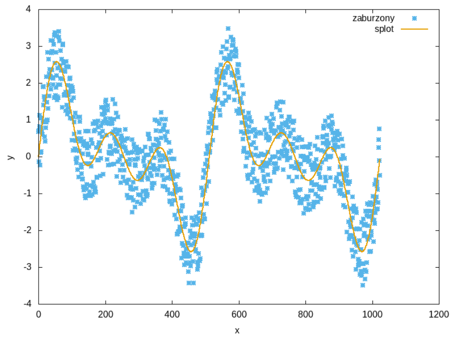
(b) Moduł współczynników transformaty i próg dyskryminacji sygnału na poziomie $max|c_k|/2$

Wartości, które nie zostały podane dyskryminacji znajdują się na obu krańcach przedziału.

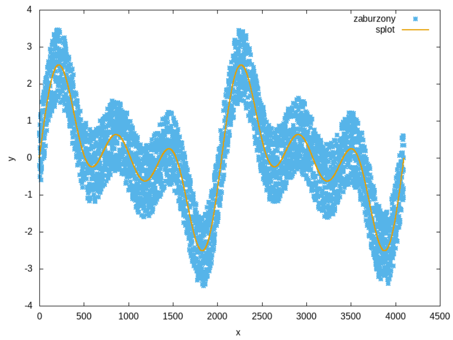
Wyniki sygnału zaburzonego:



(c) $k = 8,\ N_k = 2^8$

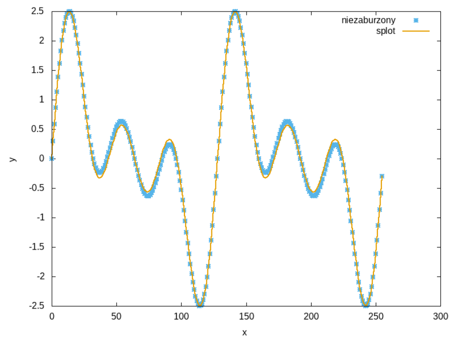


(d) $k = 10,\ N_k = 2^{10}$

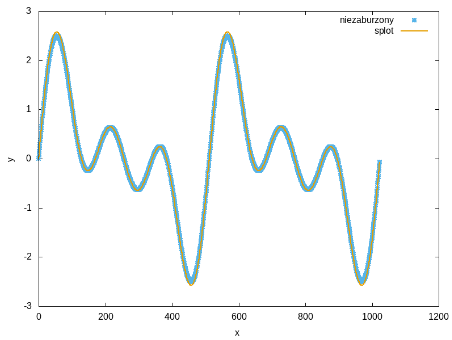


(e) $k = 12,\ N_k = 2^{12}$

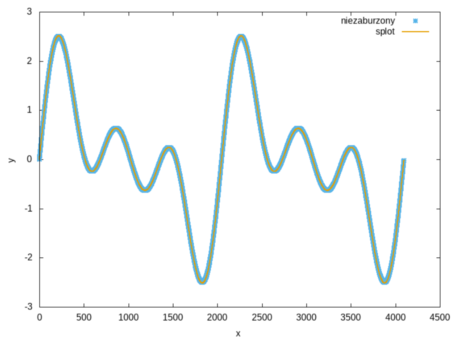
Wyniki sygnału niezaburzonego:



(f) $k = 8,\ N_k = 2^8$



(g) $k = 10,\ N_k = 2^{10}$



(h) $k = 12,\ N_k = 2^{12}$

Wykresy po odszumieniu praktycznie pokrywają się z wykresami bez szumów i są bardziej dokładne im większe jest k.

4 Wnioski

Jak można zauważyć wybór progu dyskryminacji na połowę modułu maksymalnego współczynnika transformaty daje bardzo zadowalające rezultaty. Dla mniejszych liczb prób w punktach ekstremów lokalnych występowały niedopasowania, a odszumiony wykres nie był idealnie gładki. Dla większej liczby węzłów przybliżenie było bardziej dokładne. Można także podkreślić zaletę jaką jest krótki czas obliczeniowy metody. Szybka Transformacja Fouriera pozwoliła na bardzo dokładne i szybkie przybliżenie funkcji zaszumionej.

Literatura

[1] Tomasz Chwiej, *Szybka transformacja Fouriera*
`http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/fft_1819.pdf`

[2] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Dyskretna_transformata_Fouriera`