Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Wiktoria Zaczyk

29.04.2021

1 Wstęp teoretyczny

Interpolacja:
Metoda numeryczna przybliżania funkcji interpolowanej w zadanym przedziale funkcją interpolującą, która w punktach zwanych węzłami interpolacji przyjmuje wartości takie same jak przybliżana funkcja.

Funkcja sklejana
W metodzie tej stosowane są funkcje zdefiniowane jako wielomiany niskiego stopnia osobno dla każdego podprzedziału pomiędzy sąsiednimi węzłami interpolacyjnymi.

Interpolacja funkcjami sklejanymi W przedziale [a,b] mamy n+1 punktów, które dzielą go na n przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$. Funkcja sklejana S jest m stopnia i spełnia warunki:

1. S(x) jest wielomianem stopnia conajwyżej m na każdym przedziale (x_i, x_{i+1}), i=0,1,...,n-1
2. $S(x) \in C^m$

Funkcja jest kombinacją liniową elementów bazy $\{S_i(x)\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), x \in [a, b]$$

Aby nasza interpolacja była poprawna szukamy funkcji:
$m_j = s^2(x_j), j = 0, 1, ..., n$

Aby wyznaczyć pochodne w węzłach, należy rozwiązać układ równań liniowych: $A\overrightarrow{m} = \overrightarrow{d}$, którego generatorem jest: $\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań, przyjmuje on postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix}$$

gdzie:

- $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$,
- $\mu_i = 1 - \lambda_i$
- $d_i = \frac{6}{h_i+h_{i+1}}(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i})$
- $h_i = x_i - x_{i-1}$

Po jego rozwiązaniu jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości funkcji z poniższego wzoru: $s_{i-1}(x) = m_{i-i}\frac{(x_i-x)^3}{6_i} + m_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$

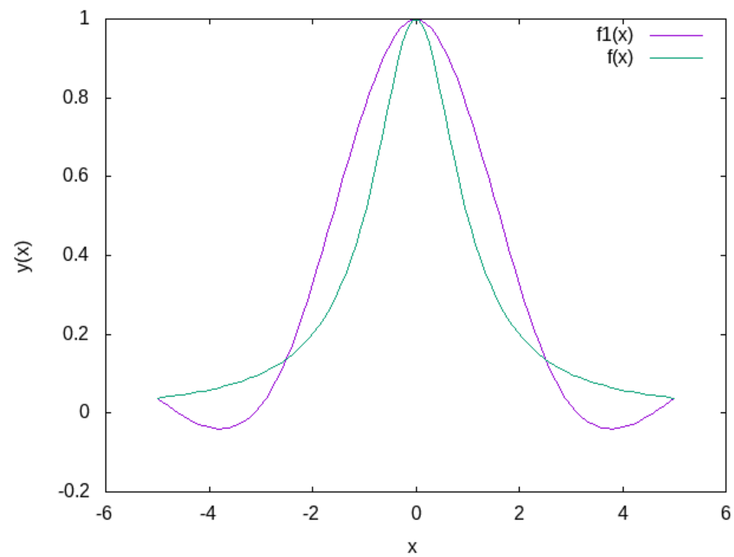
Efekt Rungego:
Mówimy o nim gdy zadanie jest źle uwarunkowane, czyli kiedy zaczynają występować niedopasowania wielomianu interpolacyjnego na krańcach przedziału w wyniku zwiększnia liczby wezłów. Wynika to z oscylacji wielomianów wyższych rzędów. W celu zapobiegnięcia tego efektu stossuje się metody optymalizujące położenia węzłów.

2 Cel zadania

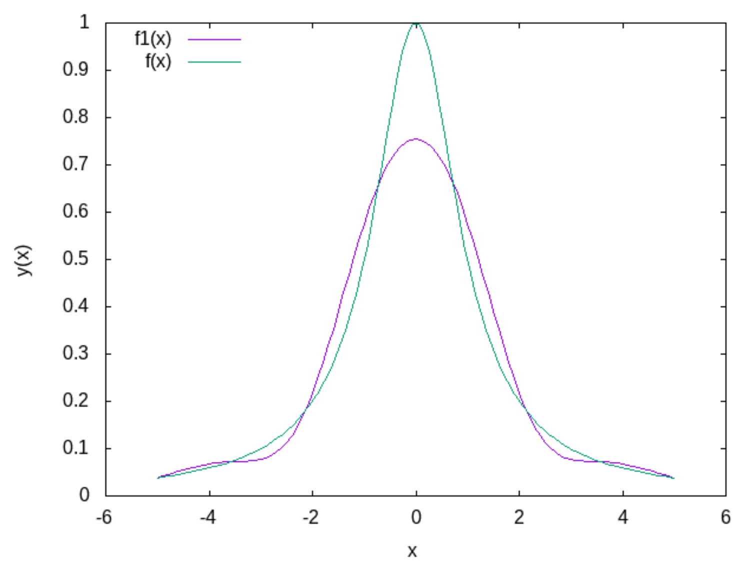
Na ósmych zajęciach zajęliśmy się interpolacją funkcjami sklejonymi poprzez wyznaczanie drugiej pochodnej w węzłach dla funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz $f_2(x) = cos(2x)$ w przedziale $x \in [-5, 5]$ dla liczby węzłów n = 5, 8, 21. Dodatkowo dla pierwszej funkcji oraz n = 10 węzłów wyznaczyliśmy wartości drugich pochodnych i porównaliśmy je z "dokładniejszymi" wartościami liczonymi zgodnie z wzorem: $\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\delta x)-2f(x)+f(x+\delta x)}{(\delta x)^2}$

3 Wyniki

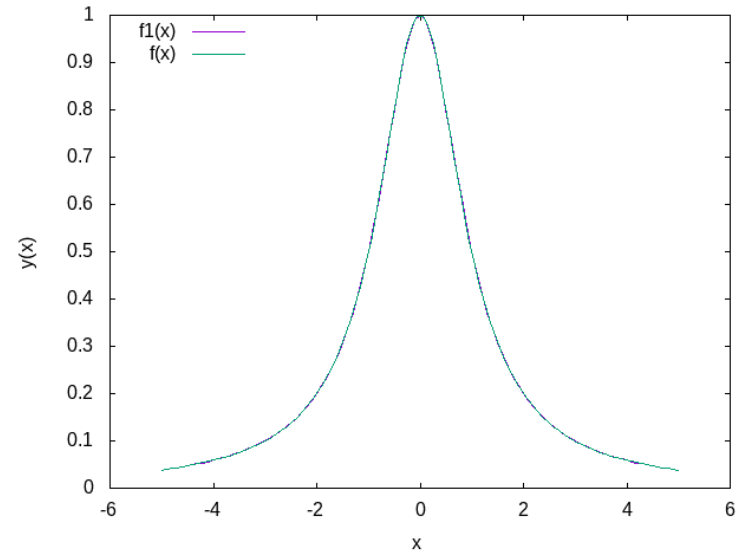
I. Wykresy funkcji $f_1 = \frac{1}{1+x^2}$



Rysunek 1: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n=5



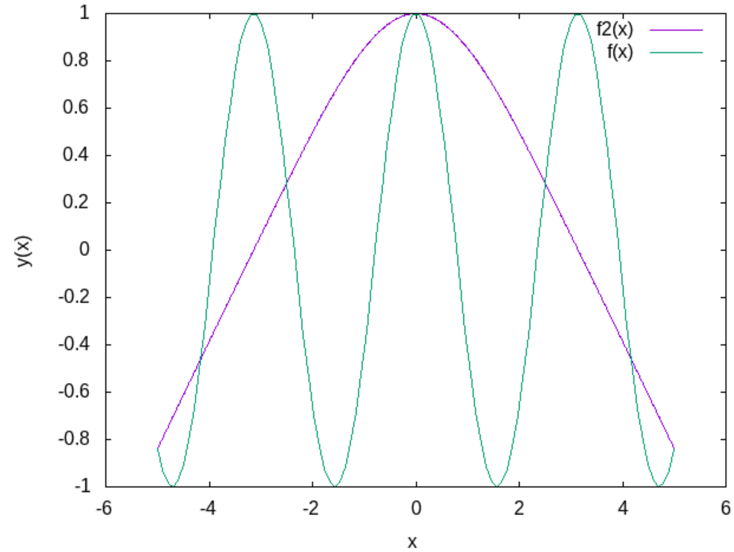
Rysunek 2: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n=8



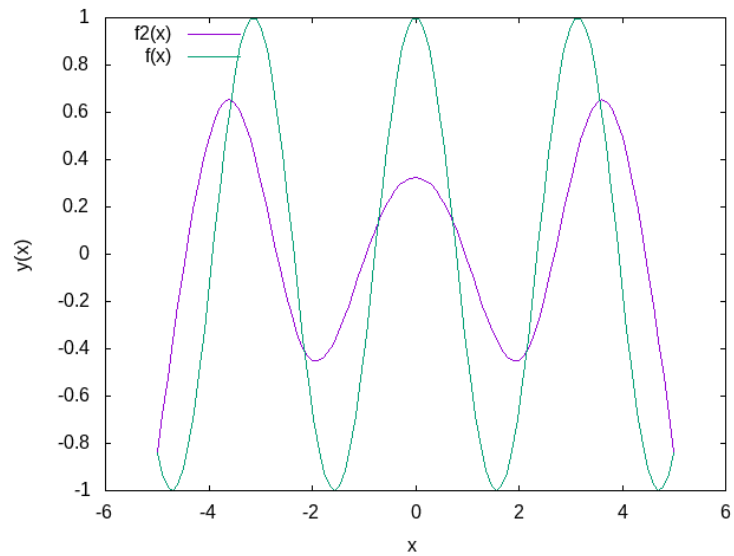
Rysunek 3: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n=21

Jak widać dla funkcji f_1, im większe jest n, tym bardziej dokładne jest dopasowanie interpolacji do funkcji.

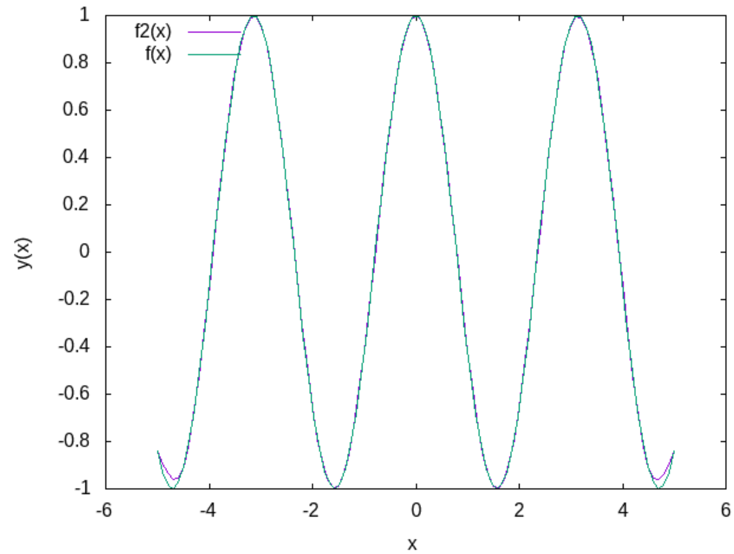
II. Wykresy funkcji $f_2 = cos(2 \cdot x)$



Rysunek 4: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n=5

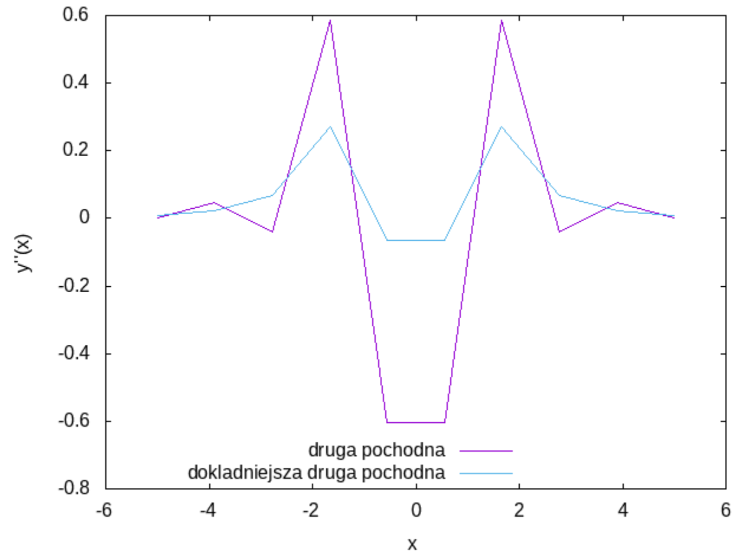


Rysunek 5: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n=8



Rysunek 6: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n=21

Jak widać dla funkcji f_2, dla n = 5 interpolacja jest bardzo niedokładna, natomiast przy zwiększeniu liczby węzłów sytuacja się polepsza, i dla n = 21 dopasowanie pokrywa się z funkcją



Rysunek 7: Wykres wartości drugich pochodnych funkcji f_1 w zależności od położenia węzłów, pokazujący porównanie obu sposobów obliczania drugich pochodnych

Jak widać, wykres wyznaczonych pochodnych zachowuje kształt wykresu ich dokładnych wartości, jednak im bliżej środka wykresu - tym większa jest różnica między wykresami.

4 Wnioski

Wyniki dla odpowiednio dużej liczby węzłów pokrywają się niemal idealnie z interpolowaną funkcją. Nie było efektu Rungego na granicach przedziałów interpolacji, jednak można zauważyć, że właśnie na granicach przedziałów funkcja interpolująca najbardziej odstaje od funkcji interpolowanej. Porównanie wykresów funkcji bardzo dokładnie obrazuje jaką ilość węzłów należy zastosować dla danej funkcji, oraz to, czy metoda jest akceptowalna.