Методы оптимизации. Задание 1 (Выпуклые множества + матричное и векторное дифференцирование)

Дедлайн: 23 сентября 01:00.

Присылать на почту в электронном виде.
Тема письма: ФИО. Задание 1.
vasiliy.novitskiy@phystech.edu

Задача 1.

Пусть V – нетривиальное вещественное нормированное пространство (таким образом, $V \neq \{0\}$). Покажите, что единичная сфера $S := \{x \in V : \|x\| = 1\}$ не является выпуклым множеством.

Задача 2. Пусть $P \in \mathbb{S}^n_{++}$ (положительно определенная симметричная матрица), $c \in \mathbb{R}^n$. Покажите, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle Px, x\rangle \leq \langle c, x\rangle^2; \langle c, x\rangle \geq 0\}$ является выпуклым.

Задача 3. Для каждой из следующих функций найти ее градиент и гессиан:

- $f(x) = \langle a, x\rangle - ln(1 - \langle b, x\rangle)$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$ – ненулевые векторы.
- $f(x) = \langle c, x\rangle \exp(-\langle Ax, x\rangle)$, где $c \in \mathbb{R}^n$ – ненулевой вектор, $A \in \mathbb{S}^n_{++}$.

Задача 4. Для каждой из следующих функций найти ее первый и второй дифференциал:

- $f(X) = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle X^{-1}a_i, a_i\rangle + \ln\det(X)$, где $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$.
- $f(X) = \langle I_n, X^{-1}\rangle - \langle A, X\rangle$, где $A \in \mathbb{S}^n$, I_n – единичная матрица размера $n \times n$.