

# 3维成像

## 摄像机成像原理

### 摄像机平面到成像平面

$$P = [x, y, z] \rightarrow P' = [x', y'] \quad P = [x, y, z] \rightarrow P' = [x', y']$$

$$x' = f \frac{x}{z}, y' = f \frac{y}{z} \quad x' = f \frac{x}{z}, y' = f \frac{y}{z}$$

$$\text{透镜折射定律} \quad f = \frac{R}{2(n-1)} \quad f = 2(n-1)R, \text{ 透镜焦距}$$

### 透镜产生畸变

枕形失真和桶形失真

### 成像平面到像素平面

1. 偏置  $(x', y') \rightarrow (x' + c_x, y' + c_y) \quad (x', y') \rightarrow (x' + c_x, y' + c_y)$
2. 单位变换  $f: m \rightarrow k, l: \text{pixel}/m, (x, y, z) \rightarrow (fk \frac{x}{z} + c_x, fl \frac{y}{z} + c_y) \quad f: m \rightarrow k, l: \text{pixel}/m, (x, y, z) \rightarrow (fk \frac{x}{z} + c_x, fl \frac{y}{z} + c_y)$
3. 线性变换 令  $\alpha = fk, \beta = fl \quad \alpha = fk, \beta = fl \quad P \rightarrow P' \rightarrow P'$  的变换不是线性变换

### 齐次坐标

普通转齐次:  $(x, y) \rightarrow (x, y, 1), (x, y, z) \rightarrow (x, y, z, 1) \quad (x, y) \rightarrow (x, y, 1), (x, y, z) \rightarrow (x, y, z, 1)$

齐次转普通:  $(x/w, y/w), (x, y, z/w) \rightarrow (x/w, y/w, z/w) \quad (x, y, w) \rightarrow (x/w, y/w, z/w) \rightarrow (x/w, y/w, z/w)$

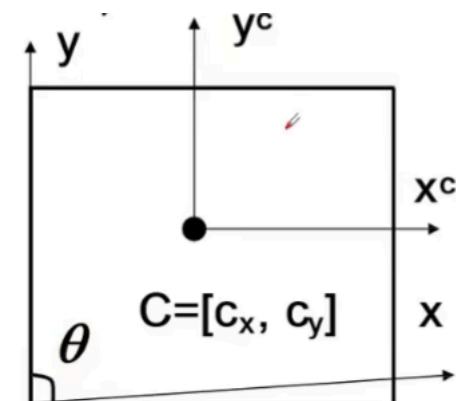
$$P_h' = \begin{bmatrix} \alpha x + c_x z \\ \beta y + c_y z \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \beta & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- } P_h$$

$$\begin{matrix} \text{齐次} & \text{欧式} \\ \underbrace{P_h'}_{\text{齐次}} \rightarrow \underbrace{P'}_{\text{欧式}} = \left( \alpha \frac{x}{z} + c_x, \beta \frac{y}{z} + c_y \right) \end{matrix}$$

线性变换, 变换矩阵  $M$  是相机固有参数

$$P_h \rightarrow P_h' \quad P_h \rightarrow P_h'$$

### 摄像机偏移



$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x & 0 \\ 0 & \beta / \sin \theta & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M = K[I \ 0]$ , 摄像机内参矩阵  $K$  为投影矩阵  $M$  去掉第四列零向量

$K$  有 5 个参数可变, 即自由度为 5

$$M = K[I \ 0]$$

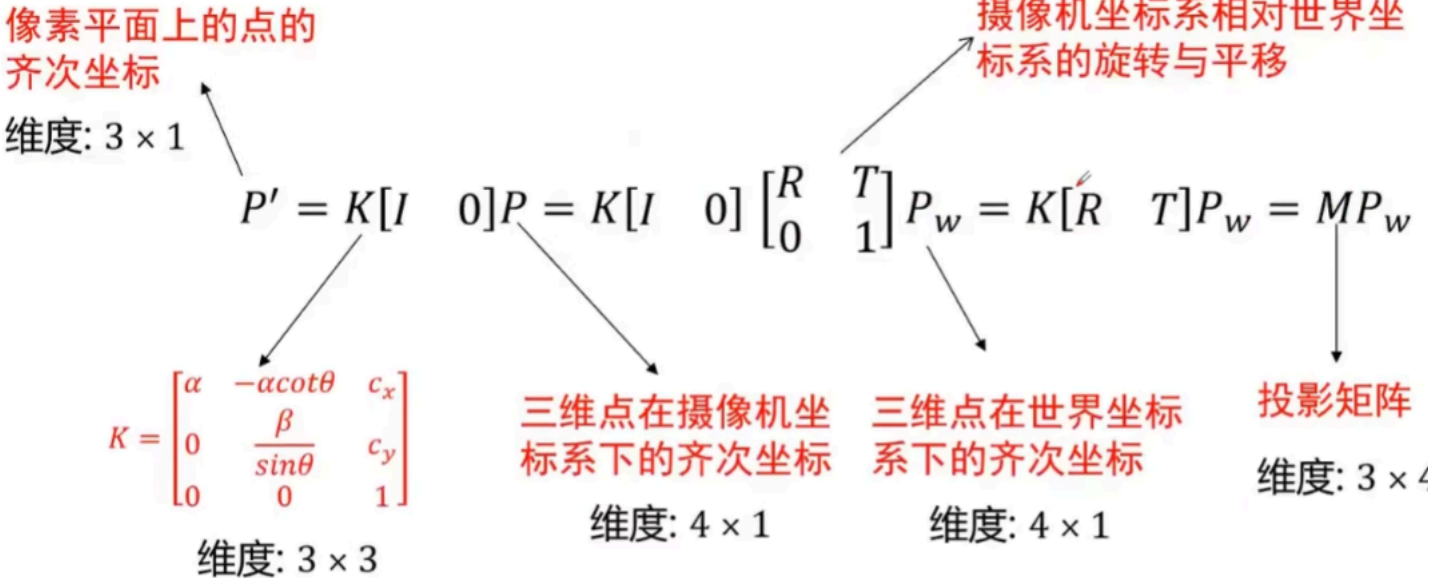
### 世界坐标系到相机坐标系

$$P = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w, P_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} P = [R \ 0 \ T \ 1] P_w, P_w = \begin{bmatrix} x_w y_w z_w 1 \end{bmatrix}$$

世界坐标系通过R, T, T 旋转、平移得到相机坐标系

$$P' = K[R \ T]P_w = MP_w P' = K[R \ T]P_w = MP_w, [R \ T]为外参数矩阵$$

### Summary



$M(dim: 3 \times 4)$  $M(dim: 3 \times 4)$ 有11个自由度，内参5个，外参6个

### Theorem

令  $M = (A \ b)$  为 $3 \times 4$ 的矩阵， $a_i^T (i = 1, 2, 3)$  表示由矩阵  $A$  的行

- $M$ 是透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$
- $M$ 是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$  且
 
$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$
- $M$ 是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$  且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

### 摄像机标定

#### 棋盘格标定

立方体构建世界坐标系，最少6对点来解方程，为了鲁棒性，会大于6对点。取的点不能位于同一平面，如果同一平面就退化了，解不出方程。

#### 参数求解

求解得到的 $M$

$$\rho[A \ b] = K[R \ T]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

内参数

$$\rho = \frac{\pm 1}{|a_3|} \quad u_0 = \rho^2(a_1 \cdot a_3)$$

$$v_0 = \rho^2(a_2 \cdot a_3)$$

$$\cos \theta = -\frac{(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3)}{|a_1 \times a_3| \cdot |a_2 \times a_3|}$$

$$\alpha = \rho^2 |a_1 \times a_3| \sin \theta$$

$$\beta = \rho^2 |a_2 \times a_3| \sin \theta$$

外参数

$$r_1 = \frac{(a_2 \times a_3)}{|a_2 \times a_3|}$$

$$r_3 = \frac{\pm a_3}{|a_3|}$$

$$r_2 = r_3 \times r_1$$

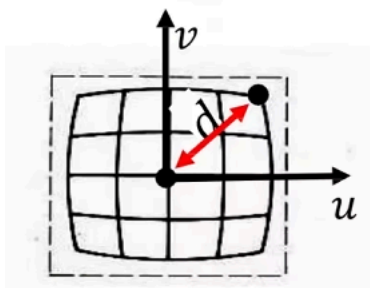
$$T = \rho K^{-1} b$$

畸变

图像放大率随距光轴距离的增加而减小

如何建模?

$S_\lambda$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M P_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i$$

$$\lambda = 1 \pm \sum_{p=1}^3 \overset{\text{畸变因子}}{k_p} d^{2p}$$

多项式函数

$$d^2 = u^2 + v^2$$

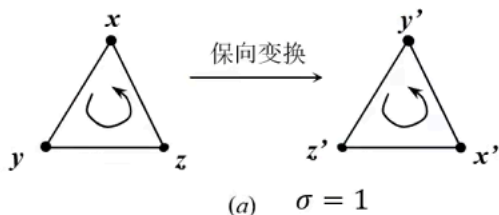
建模径向特性

Transformation

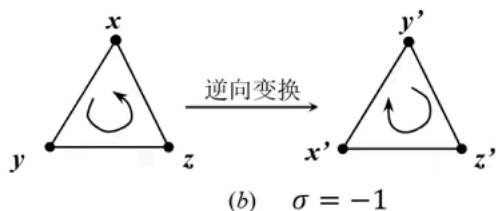
2D欧式变换

等距变换是指保持距离不变的变换：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cos \theta & -\sin \theta \\ \sigma \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sigma \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

等距变换

即  $D(a, b) = D(a', b')$ , 变换前后两点距离相等。当  $\sigma = 1$  时也叫欧式变换

均匀伸缩变化：

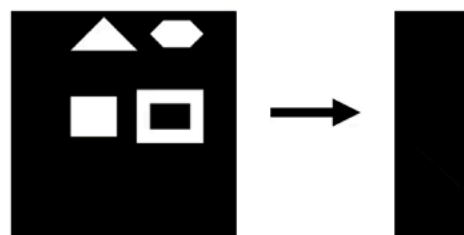
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

相似变换是指保持图形相似的变换，可由缩放变换与欧式变换的合成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & x_0 \\ s \sin \theta & s \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = H_s x$$

- 不变量：两直线的夹角，长度的比值，面积的比值。
- 四个自由度



仿射变换

仿射变换：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = H_a x$$

性质 仿射变换的核心性质决定了其适用场景，主

要包括：

1. 保持平行性：变换前的平行线，变换后仍为平行线（这是仿射变换与“投影变换”的最大区别，投影变换会让平行线相交）；
2. 保持共线性：变换前共线的点（在同一直线上），变换后仍共线；保持线段比例：若点 B 是线段 AC 的中点（AB:BC=1:1），变换后点 B' 仍是 A'C' 的中点（A'B':B'C'=1:1）；
3. 不保持度量属性：长度、角度、面积可能改变（仅特殊仿射变换如“旋转”“反射”保持这些属性）。

## 透视变换：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} A & t \\ v^T & 1 \end{pmatrix} x = Hx$$

性质 透视变换打破了仿射变换的“平行性”约束，

其关键性质如下：

1. 仅保持共线性：变换前共线的点（在同一直线上），变换后仍共线；但平行线可能变为相交线（如铁路轨道在远处“交汇”）。
2. 不保持线段比例：若点 B 是线段 AC 的中点（AB:BC=1:1），变换后 B' 可能不再是 A'C' 的中点（如远处的线段看起来更短）。
3. 模拟透视效应：能还原“远小近大”的视觉规律，例如将倾斜拍摄的矩形（如桌面、文档）矫正为矩形。
4. 可逆性：若透视变换矩阵可逆（行列式不为 0），则存在逆变换，可将矫正后的图像还原为原始透视畸变图像。

## 三维欧式变换

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \boxed{x' = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} x} \rightarrow x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 单视图几何

## 2D

点  $x(x_1, x_2, 1)$  在直线  $l: ax_1 + bx_2 + c = 0$  上等价于  $x^T l = 0$ ， $x = [x_1, x_2, 1]$ ， $x^T l = 0$ ， $l = [a, b, c]$ ， $x = [x_1, x_2, 1]$ ， $x^T l = 0$ 。

两条直线的交点  $x$  满足  $x^T l_1 = 0$ ， $x^T l_2 = 0$ ， $x^T l_1 = 0$ ， $x^T l_2 = 0$ ，所以  $x = l_1 \times l_2$ 。

$x: [x_1, x_2, 0]$  为无穷远点， $l_\infty: [0, 0, 1]$  为无穷远线。

## 3D

点  $x(x_1, x_2, x_3, 1)$  在面  $\pi: [a, b, c, d]$  上等价于  $x^T \pi = 0$ ， $x = [x_1, x_2, x_3, 1]$ ， $x^T \pi = 0$ 。直线只考虑方向  $d = [a, b, c]$ ， $d = [a, b, c]$ ，无穷远点  $x_\infty = [a, b, c, 0]$ ， $x_\infty^T \pi = 0$ ，平行平面在无穷远处交于一条公共线无穷远直线，无穷远直线在无穷远面  $\pi_\infty = [0, 0, 0, 1]$  上。

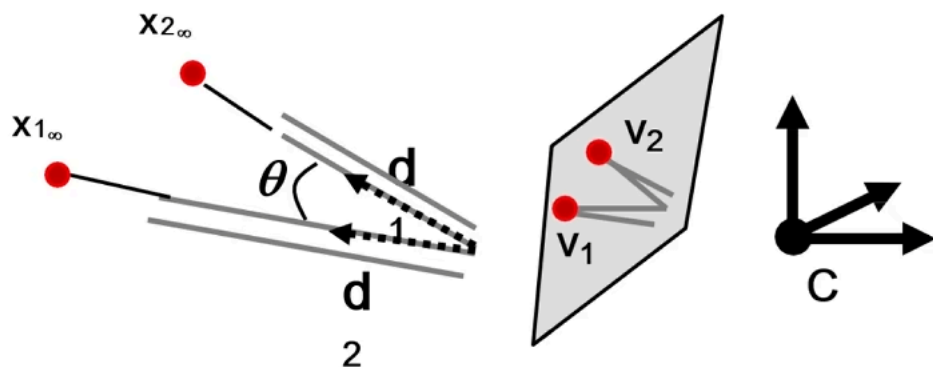
## 无穷远点变换

透视变换后不再是无穷远点，仿射变换后是无穷远点。无穷远线同理。 $l' = H^{-T} l$ ， $x' = Hx$ ， $x'^T l' = 0$ ， $x'^T l' = 0$ ， $x' = Hx$  三维空间中的无穷远点在图像平面上的投影点称为影消点。

$v = Kd$ ， $d = \frac{K^{-1}v}{\|K^{-1}v\|}$ ， $v$  为影消点， $K$  为相机内参数， $d$  为直线方向。影消线  $l_{horizon} = H_p^{-T} l_\infty$ ， $l_{horizon} = H_p^{-T} l_\infty n = K^T l_h n = K^T l_h$ ， $n$  为平面法向量， $K$  为相机内参， $l_h$  为影消线。

## Calculation

## 两组平行线的夹角与影消点



$$d = \frac{K^{-1}}{\|K^{-1}\|}$$

$$\omega = K^{-T} K^{-1} = (K^{-1})^T K^{-1}$$

$$\cos \theta = \frac{d_1 \cdot d_2}{|d_1| |d_2|} = \frac{(K^{-1} v_1)^T (K^{-1} v_2)}{\sqrt{(K^{-1} v_1)^T K^{-1} v_1} \sqrt{(K^{-1} v_2)^T K^{-1} v_2}} = \frac{v_1^T \omega v_2}{\sqrt{v_1^T \omega v_1} \sqrt{v_2^T \omega v_2}}$$

如果  $\theta = 90^\circ \rightarrow$

$$v_1^T \omega v_2 = 0$$

# 单视图标定

$$\cos\theta = \frac{v_1^T \omega v_2}{\sqrt{v_1^T \omega v_1} \sqrt{v_2^T \omega v_2}}$$

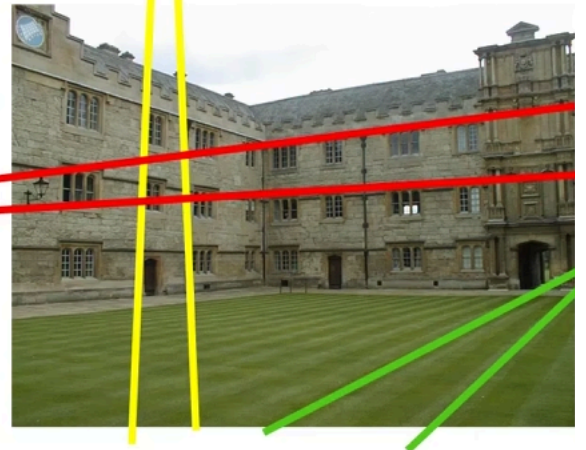
$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_5 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \quad \omega = (KK^T)^{-1}$$

$v_2$

$$\begin{cases} v_1^T \omega v_2 = 0 \\ v_1^T \omega v_3 = 0 \\ v_2^T \omega v_3 = 0 \end{cases}$$

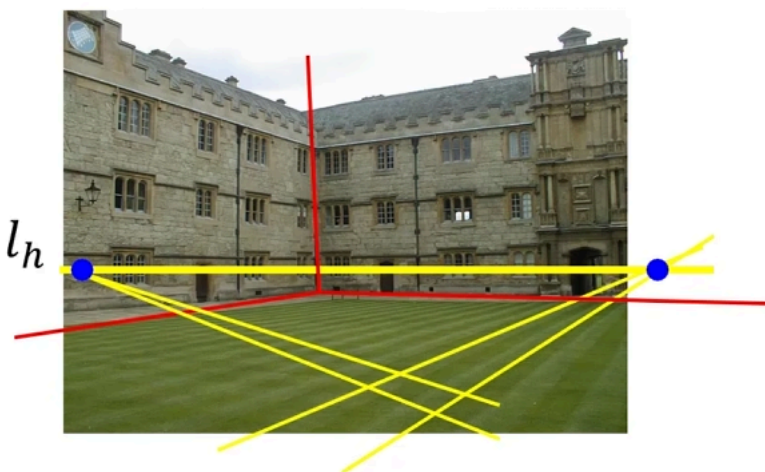
给定两个假设：

- 零倾斜
- 正方形像素



计算  $\omega$  , 可以得到  $K$  :

$$\omega = (KK^T)^{-1}$$



$K$  已知  $\rightarrow n = K^T l_h$  = 相机参考系中的场景平面方向

缺点：只是真实场景

的等比例重建，而且需要先验信息。

## 双视图

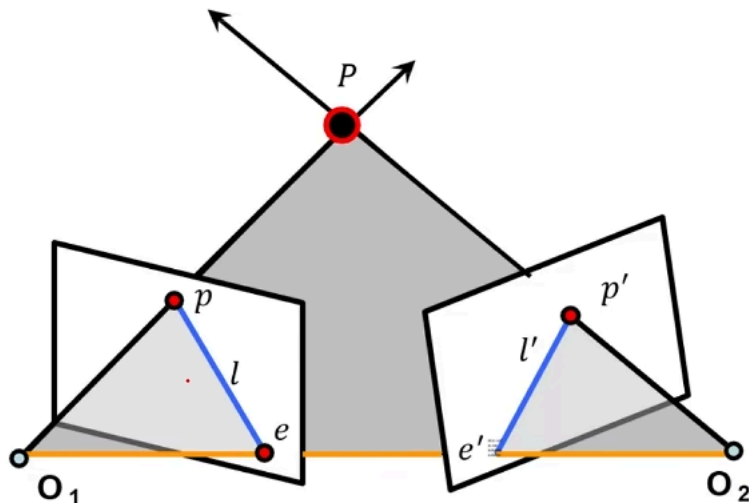
### 三角化

线性解，最小二乘 非线性解，最小化  $d(p, MP) + d(p', M'P)d(p, MP) + d(p', M'P)$

### 极几何



已知一个图像中的pp点，如何在另一张图中找到p'p'



作用：  
将搜索范围缩小到对应的极线上。

极平面：过点P， $O_1$ 与 $O_2$ 的平面

基线： $O_1$ 与 $O_2$ 的连线

极线：极平面与成像平面的交线

极点：基线与成像平面的交点

➤ 极平面相交与基线

➤ 极线相交于极点

➤  $p$  的对应点在极线  $l'$  上

➤  $p'$  的对应点在极线  $l$  上

本质矩阵

本质矩阵对规范化摄像机拍摄的两个视图图像间的极几何关系进行描述

## 极几何约束——本质矩阵

空间点  $p$  在  $O_1$  坐标系下的非齐次坐标为  $(u, v, 1)$

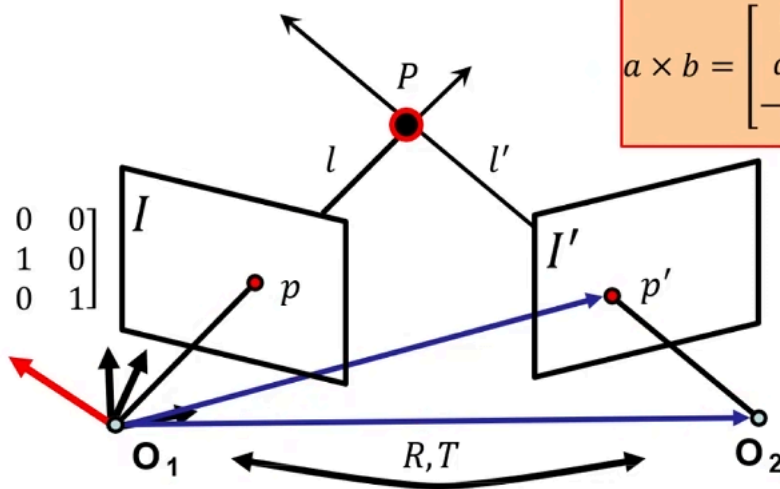
空间点  $p'$  在  $O_2$  坐标系下的非齐次坐标为  $(u', v', 1)$

叉乘的矩阵

$$a \times b = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$p' \text{ 在 } O_1 \text{ 的坐标} = R^T p' - R^T T$$

$$O_2 \text{ 在 } O_1 \text{ 的坐标} = -R^T T$$

$$R^T T \times (R^T p' - R^T T) = 0$$

垂直于极平面

$$p'^T [T \times R] p = 0$$

$$[R^T T \times R^T p']^T \cdot p = 0$$

本质矩阵  $E = T \times R E = T \times R$ ，则有  $p'^T E p = 0$

基础矩阵

变换到规范化相机， $p_c = K^{-1} p$ ， $p'_c = K'^{-1} p'$ ，带入本质矩阵可得：基础矩阵  $F = K'^{-T} [T \times R] K^{-1} F = K'^{-T} [T \times R] K^{-1}$ ， $p'^T F p = 0$

基础矩阵估计

通过点对关系估计基础矩阵，从基础矩阵得到相机内外参数。八点算法（精度低），最小二乘估计出  $F'$ ，将  $F'$  进行奇异值分解，将第三个奇异值变为0。归一化八点法，计算  $T' T, q_i = T p_i, q'_i = T' p'_i, F = T'^T F_q T T', q_i = T p_i, q'_i = T' p'_i, F = T'^T F_q T$



单应矩阵

所有点在同一个平面上，有结论： $p = Hp'p = Hp' H = K'(R + tn_d^T)K^{-1}, n_d = \frac{n}{d}H = K'(R + tndT)K^{-1}, nd = dn, dd$ 为第一个相机坐标远点到平面 $\pi$ 的距离， $KK$ 为第一个相机的内参， $R, TR, T$ 为第二个相机相对第一个相机的位置，平面 $\pi: n^T P = d \pi : nT P = d$ .