Funkcja gęstości prawdopodobieństwa FGP

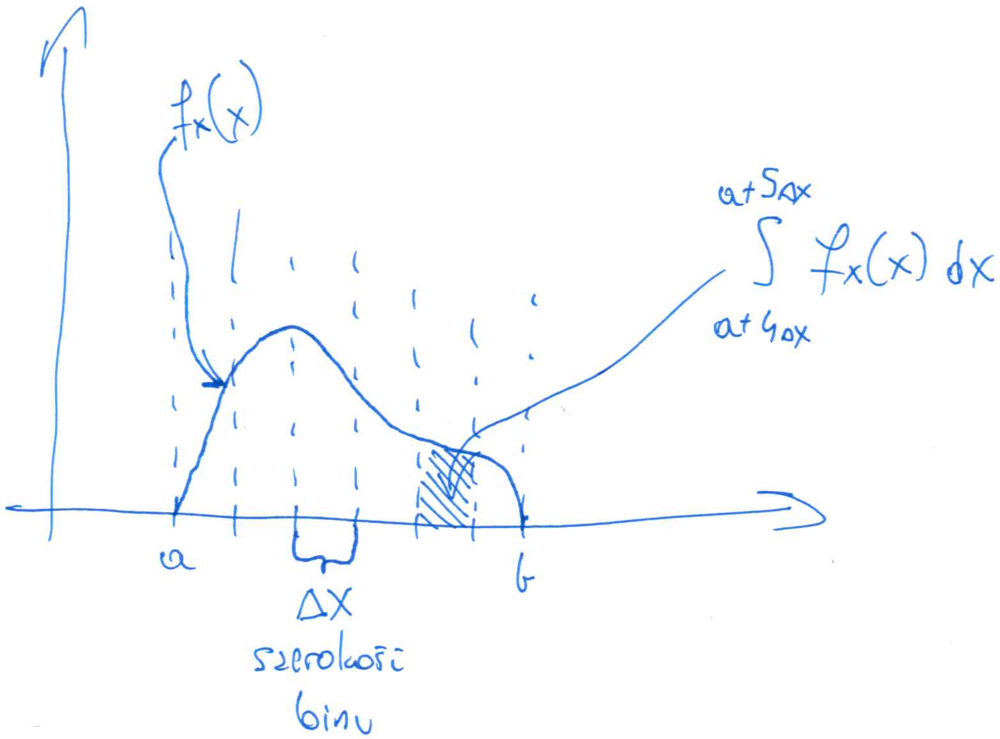
$$\underset{\uparrow \text{ FGP}}{f_x}(\underset{\uparrow \text{ zmienna losowa}}{x}) \qquad \underset{x_{min}}{a} \le x \le \underset{x_{max}}{b}$$

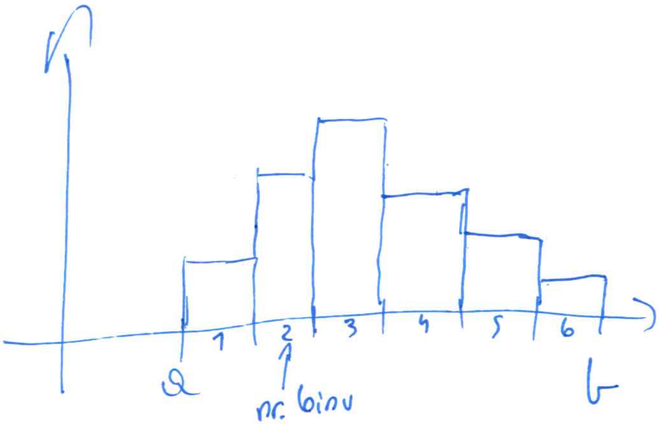
$$P_x(x_0 \le x \le x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f_x(x)\,dx$$

Normalizacja: $P(a \le x \le b) = \int_a^b f_x(x)\,dx = \underline{1}$

$P_x(x_i)$ nie ma sensu

Histogramy





h_i – wysokość binu "i"

1° $h_i = n_i$ – liczba zliczeń w binie "i"

2° $h_i = \frac{n_i}{N}$, gdzie $N = \sum_i n_i$ względna częstotliwość

3° $h_i = \frac{n_i}{N \cdot w}$, gdzie w – szerokość binu gęstość doświadczalna

Generowanie liczb losowych o rozkładzie normalnym

1) Transformacja Boxa-Mullera

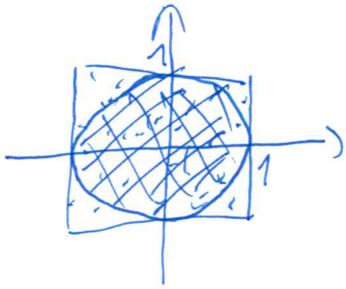
x_1, x_2 - losowane z rozkładu jednorodnego $(0,1)$

$$y_1 = \sqrt{-2\ln(x_1)}\cos(2\pi x_2) \qquad\qquad x_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)\right)$$
$$\longrightarrow$$
$$y_2 = \sqrt{-2\ln(x_1)}\sin(2\pi x_2) \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

$$f_Y(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2 = \underbrace{f_X(x_1, x_2)}_{1\ (\text{na "y"})}\underbrace{\left|\text{Jakobian}(x \to y)\right|}_{?}\,dy_1\,dy_2$$

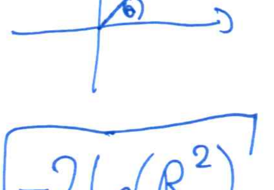
$$? \left|\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y_1^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y_2^2}{2}\right)$$

2) Metoda polarna



x_1, x_2 - losowane z rozkładu jednorodnego $(-1, 1)$

! Warunek: $\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{R^2} \leq 1$



R - rozkład jednorodny $(0,1)$

$$y_1 = \sqrt{-2\ln(R^2)}\,\frac{x_1}{R}$$

$$y_2 = \sqrt{-2\ln(R^2)}\,\frac{x_2}{R}$$

Problem ruiny gracza

Gracz A — kapitał początkowy $a \in \mathbb{Z}$

Gracz B — kapitał początkowy $b \in \mathbb{Z}$

$$M = a + b$$

A wygrywa 1 — prawdopodobieństwo p

B wygrywa 1 — $q = 1 - p$

Q_i — zdarzenie ruiny A przy $a = i$

$$P(Q_i) = P(Q_i \mid \text{wygranie 1 kolejki}) P(\text{wygranie 1 kolejki}) + P(Q_i \mid \text{przegranie 1 kolejki}) P(\text{przegranie 1 kolejki})$$

$$P(\text{wygrania 1 kolejki}) = p$$

$$P(\text{przegrania 1 kolejki}) = q$$

$$P(Q_i) = r_i$$

$$P(Q_i \mid \text{wygranie 1 kolejki}) = r_{i+1}$$

$$P(Q_i \mid \text{przegrania 1 kolejki}) = r_{i-1}$$

$$r_i = r_{i+1} \cdot p + r_{i-1} \cdot q$$

$$r_i(p+q) = r_{i+1} \cdot p + r_{i-1} \cdot q$$

$$\frac{r_{i+1} - r_i}{r_i - r_{i-1}} = \frac{q}{p} = \text{const.}$$

$$r_{i+1} - r_i = \left(\frac{q}{p}\right)(r_i - r_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^i (r_1 - r_0)$$

$$\underset{0}{\overset{}{r_M}} - \underset{1}{r_0} = \sum_{i=0}^{M-1} (r_{i+1} - r_i)$$

$$-1 = \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i (r_1 - r_0) \quad \text{ciąg geometryczny}$$

$$-1 = (r_1 - r_0) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \quad \text{dla } p \neq q \,!$$

$$r_i - r_0 = (r_1 - r_0) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}$$

$$\frac{r_i - \overset{=1}{r_0}}{\underset{0}{r_n} - \underset{=1}{r_0}} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} = \frac{r_i - 1}{-1}$$

$$r_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} + 1 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M}$$

dla $p \neq q$!

dla $p = q = \frac{1}{2}$

$$-1 = \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i (r_1 - r_0) = (r_1 - r_0) M$$

$$r_i - r_0 = i(r_1 - r_0)$$

$$\frac{r_i - r_0}{r_n - r_0} = \frac{i}{M} = \frac{r_i - 1}{-1}$$

$$r_i = 1 - \frac{i}{M}$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że gra się zakończy?

$M = a + b$

dla $p = q = \frac{1}{2}$

$$r_a^A + r_b^B = \left(1 - \frac{a}{M}\right) + \left(1 - \frac{b}{M}\right) =$$

$$= 1 - \frac{a}{a+b} + 1 - \frac{b}{a+b} = 2 - \frac{a+b}{a+b} = 1$$

dla $p \neq q$

$$r_a^A + r_b^B = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n} + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^M}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^M} =$$

$$= \frac{p^n\left[\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^n\right]}{p^n - q^n} + \frac{q^n\left[\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right]}{q^n - p^n} =$$

$$= \frac{p^n\left(\frac{q}{p}\right)^a - q^M - q^n\left(\frac{p}{q}\right)^b + p^M}{p^n - q^n} = \frac{p^n - q^n + p^b p^a \frac{q^a}{p^a} - q^a q^b \frac{p^b}{q^b}}{p^n - q^n} =$$

$$= 1$$

Problem nieskończenie bogatego przeciwnika

Gracz A – kapitał a

Gracz B – kapitał $b \to \infty$

A wygrywa 1 – p

A przegrywa 1 – q

dla $p = q = \frac{1}{2}$

$$P(\text{wygrana } B) = r_a^A = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{b}{a+b} = 1$$

dla $p \neq q$

$$r_a^A = \lim_{b\to\infty}\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \begin{cases} \text{dla } q>p \quad \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a \Big/ \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}{\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - 1} = \frac{0-1}{0-1} = 1 \\ \text{dla } q<p \\ \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 0}{1-0} = \left(\frac{q}{p}\right)^a \end{cases}$$