MATHE 2 HAUSÜBUNG NR.2

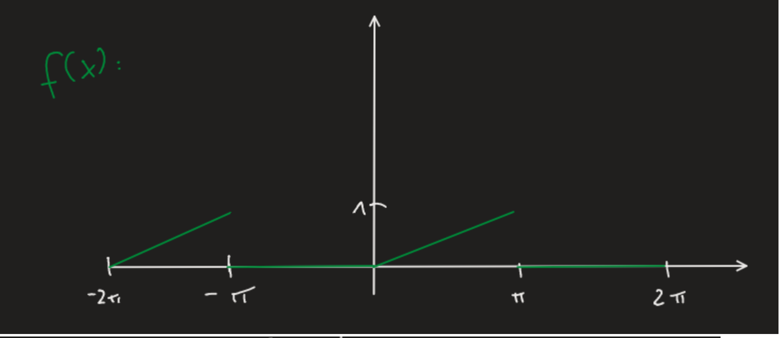
Sebastian Steitz, Hannes Albert

Gruppe: 6
Tutor: Zidane Bürmann

Juni 2023

H10.1

a)



b) Berechnen der Koeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^{0} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos(nx)\, dx + \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi} \cdot \cos(nx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi} \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{x}{n} \cdot \sin(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi}{n} \cdot \sin(n\pi) - \frac{1}{n} \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi}{n} \cdot \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi}{n} \cdot \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \sin(n\pi)}{n} + \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:}$$

$$= \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n \\ \frac{-2}{\pi^2 n^2} & \text{für ungerade } n \end{cases} \Rightarrow \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin(nx)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(-\frac{x}{n} \cdot \cos(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(-\frac{\pi}{n} \cdot \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \cdot \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(-\frac{\pi}{n} \cdot \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(-\frac{\pi}{n} \cdot \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n\pi) - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(-\frac{n \cdot \pi \cdot \cos(n\pi)}{n^2} + \frac{\sin(n\pi)}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\sin(n\pi) - n\pi \cos(n\pi)}{n^2} \right)$$

$$= \frac{\sin(n\pi) - n\pi \cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{-n\pi \cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi n} & \text{für ungerade } n \\ -\frac{1}{\pi n} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

$$= -\frac{(-1)^n}{\pi n}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(0 + \int_0^{\pi} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\,\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$\Rightarrow$ Damit ergibt sich die Fourierreihe

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}\cdot\cos(nx) - \frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin(nx)$$

c) f ist stückweise glatt mit Sprungstellen in $(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{N}$

Für alle übrigen Punkte konvergiert die Reihe nach Skript 6.9.12 also gegen $f(x)$.

In den Sprungpunkten konvergiert die Reihe gegen

$$\frac{\lim_{y\to x+} f(y) + \lim_{y\to x-} f(y)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = (2k+1)\pi \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

d) In $x = 0$ ist f stetig, sodass der Wert der Fourierreihe gleich $f(x)$ ist (siehe c)).

Die Fourierreihe kann umgeschrieben werden zu:

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1} - 1}{\pi^2 (2n-1)^2} \cdot \cos(nx) - \frac{(-1)^n}{\pi n} \cdot \sin(nx)$$

da a_n für gerade Zahlen 0 ist.

In $x = 0$ ist die Fourierreihe:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1} - 1}{(2n-1)^2} \cdot 1 = f(0) = 0$$

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

H10.2

$$\begin{aligned}
z(t) &= \frac{y(t)}{t} \\
z'(t) &= y'(t) * \frac{1}{t} + y(t) * (-\frac{1}{t^2}) \\
&= y'(t) * \frac{1}{t} - y(t) * \frac{1}{t^2} \\
&= \frac{t * y'(t) - y(t)}{t^2}
\end{aligned}$$

Nun lösen wir dies nach y'(t) auf:

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{t * y'(t) - y(t)}{t^2} \qquad && | + \frac{y(t)}{t^2} - z'(t) \\
\frac{y'(t)}{t} &= z'(t) + \frac{y(t)}{t^2} && | * t \\
y'(t) &= z'(t) * t + \frac{y(t)}{t} \\
y'(t) &= t * z'(t) + z(t)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y'(t) = z'(t) * t + z(t) &= (1 + z(t))^2 - z(t) \\
&= 1 + 2z(t) + z(t)^2 - z(t) \\
&= 1 + z(t) + z(t)^2 \qquad\qquad | - z(t) \\
z'(t) * t &= z(t)^2 + 1 \qquad\qquad |\frac{1}{t} \\
z'(t) &= \frac{z(t)^2 + 1}{t}
\end{aligned}$$

Im weitern verwenden wir eine Schmierrechnung: $\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{1}{1+z^2}\, dz = \int \frac{1}{t}\, dt = ln(t) + c \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

Somit erhalten wir für y(t) unter Verwendung des Tipps für das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
y(t) &= t * z(t) = t * tan(ln(t) + c) \\
y(1) &= 1 \\
1 &= 1 * tan(c) \\
c &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow y(t) = t * tan(ln(t) + 4) \qquad\qquad t \in (e^{-\frac{3}{4}, e^{\pi} 4})$$

Da wir eine Schmierrechnung verwendet haben müssen wir noch einem mal eine Probe anstellen:

$$\begin{aligned}
y(1) &= 1 * tan(ln(1) + \frac{\pi}{4}) = 1 \\
y'(t) &= \frac{t^2 * z'(t) + z(t)}{t} \\
&= t * \frac{z(t)^2 + 1}{t} + \frac{t * tan(ln(t) + \frac{\pi}{4})}{t} \\
&= (\frac{y(t)}{t})^2 + 1 + \frac{y(t)}{t} \\
&= (\frac{y(t)}{t} + 1)^2 - 2 * y(t) + (y(t)) \\
&= (\frac{y(t)}{t} + 1)^2 - y(t)
\end{aligned}$$

Damit sind wir fertig.