MATHE HAUSÜBUNG NR. 4

Sebastian Steitz, Hannes Albert

Gruppe: 6
Tutor: Zidane Bührmann

Mai 2023

1 4.1

H4.1

a) $$k_1(x) = f(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{3 \cdot x \cdot 0^2}{x^5 + 0^5} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\frac{3 \cdot x \cdot 0^2}{x^5 + 0^5} = 0$ gilt, ist $k_1(x) = 0$.

$$k_2(y) = f(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y = 0 \\ \frac{3 \cdot 0 \cdot y^2}{0^5 + y^5} & \text{sonst} \end{cases}$$

Da $\frac{3 \cdot 0 \cdot y^2}{0^5 + y^5} = 0$ gilt, ist $k_2(y) = 0$.

Offensichtlich gilt also für $k_1(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \left(k_1(x) \right) = 0 = k_1\left(\lim_{x \to x_0} x \right), \quad \text{(Skript 5.7.13)}$$

und äquivalent für k_2, sodass k_1 und k_2 stetig sind.

b) Für $x,y \neq 0,0$ gilt gemäß der Definition der Funktion:

$f(x,y) = \frac{3xy^2}{x^5+y^5}$. Wir bemerken, dass der Nenner x^5+y^5 aufgrund der Einschränkung $x \neq -y$ für $D \setminus \{0,0\}$ stets ungleich 0 sein muss.

Mit der Stetigkeit von $3xy^2$ ergibt sich nach Satz 5.8.5 dass $f(x,y)$ in allen Punkten $(x,y) \neq 0,0$ stetig ist.

Es bleibt, die Stetigkeit in $(0,0)$ zu prüfen:

Eine Nullfolge (a_n) wäre bspw. $(a_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^5}} = \frac{\frac{3}{n^3}}{\frac{2}{n^5}} = \frac{3n^5}{2n^3} = \frac{3n^2}{2}$$

Damit ist

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2}{2}\right) = \infty$, aber

$f\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = f(0,0) = 0.$

Somit ist

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(a_n)\right) = \infty \neq 0 = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)\right)$

und f in $(0,0)$ nicht stetig.

2 H4.2

H4.2

a) Mit $(a_n) = \sqrt{n} \cdot k^n$ lässt sich Satz 5.9.3 für die Potenzreihe anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot k^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{k^n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot k = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^0} \cdot k = k$$

Mit dem Satz 5.9.4 ist der Konvergenzradius also $\frac{1}{k}$.

b)
Zunächst untersuchen wir die Potenzreihe, gemäß Satz 5.9.3, auf einen möglichen Grenzwert ϱ. Hierfür lesen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := n^2 * 3^n$ ab. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\varrho &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^2 * 3^n|} \overset{n^2\geq 0\ 3^n\geq 0}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 * 3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} * \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} * 3 = 3 * \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \\
&= 3 * \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} * \sqrt[n]{n} = 3 * \lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{n}} * n^{\frac{1}{n}}) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Da $3 \in (0, \infty)$ gilt hier Fall (c) von Satz 5.9.3 Mithilfe von Satz 5.9.3 lassen sich somit auch Aussagen über das Konvergenzverhalten der Potenzreihe treffen. So gilt für alle x $\in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \frac{1}{3}$ konvergiert und für alle x $\in \mathbb{R}$ mit $|x-1| > \frac{1}{3}$ divergiert.

Wir betrachten:

$$
\begin{aligned}
|x-1| &= \frac{1}{3} \\
\stackrel{+}{-}(x-1) &= \frac{1}{3} \\
1.Fall \\
x_1 - 1 &= \frac{1}{3} \\
x_1 &= \frac{4}{3} \\
2.Fall \\
-(x_2 - 1) &= \frac{1}{3} \\
-x_2 + 1 &= \frac{1}{3} \\
-x_2 &= -\frac{2}{3} \\
x_2 &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Dies bedeuted, dass die Potenzreihe für alle x $\in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ konvergiert. Da wir wissen, dass

$$\forall x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]: \quad |x-1| \leq \frac{1}{3}$$

Daraus lässt sich schließen, dass für alle x $\in \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ die Potenzreihe divergiert. Damit müssen wir nur noch die Randfälle, also x = $\frac{1}{3}$ und x = $\frac{2}{3}$ betrachten.
x = $\frac{1}{3}$:

$$
\begin{aligned}
n^2 * 3^n * (\frac{1}{3} - 1)^n &= n^2 * 3^n * (-\frac{2}{3})^n \\
&= n^2 * (-2)^n
\end{aligned}
$$

Da es sich hiermit um keine Nullfolge handelt folgt aus Satz 5.5.5, dass es sich für x = $\frac{1}{3}$ und eine divergente Reihe handelt.
x = $\frac{2}{3}$:

$$
\begin{aligned}
n^2 * 3^n * (\frac{2}{3} - 1)^n &= n^2 * 3^n * (-\frac{1}{3}) \\
&= n^2 * (-1)^n
\end{aligned}
$$

Hier handelt es sich auch um keien Nullfolge weswegen die Reihe für x = $\frac{2}{3}$ aus den selben Gründen divergiert, wie für x = $\frac{1}{3}$.

3 H4.3

a)

$$
\begin{aligned}
\cos(z) + i \cdot \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{n+1} \\
&\overset{-1=i^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \cdot (i^2)^n}{(2n+1)!} z^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot z)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot z)^n}{n!} = e^{iz}
\end{aligned}
$$

Wir dürfen den Hinweis hier verwenden, da in Beispiel 5.5.18 bereits die absolute Konvergenz von e gezeigt wurde.

b)
Für den Cosinus gilt folgendes:

$$
\begin{aligned}
cos(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\
&= \frac{cos(z) + i * sind(z) + cos(z) - i * sin(z)}{2} \\
&= \frac{2 * cos(z)}{2} \\
&= cos(z)
\end{aligned}
$$

Und für den Sinus folgendes:

$$
\begin{aligned}
sin(z) &= \frac{cos(z) + i * sin(z) - (cos(z) - i * sin(z))}{2 * i} \\
&= \frac{cos(z) + i * sin(z) - cos(z) + i * sin(z)}{2 * i} \\
&= \frac{i * sin(z) + i * sin(z)}{2 * i} \\
&= \frac{2 * i * sin(z)}{2 * i} \\
&= sin(z)
\end{aligned}
$$