

Aufl Hausübung 1

Hannes Albert

April 2023

1 H1

a)

p	q	r	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Die Formel ist erfüllbar, da sich mindestens eine Eins in der letzten Spalte befindet, allerdings nicht allgemeingültig, da sich in der ersten Zeile der letzten Spalte eine Null befindet.

b) Indem wir aus der Tabelle die DNF ablesen erhalten wir folgende Formel φ für die Wahrheitstafel:

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

c) Zunächst erstellen wir eine passende Wahrheitstabelle:

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Somit lässt sich folgende DNF ablesen:

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

d) Wie in c) erstellen wir eine passende Wahrheitstabelle

p	q	r	s	φ
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Damit lässt sich folgende DNF ablesen:

$$\begin{aligned} \varphi = & (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \\ & \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \\ & \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \\ & \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \end{aligned}$$

2 H1.2

a)

Mithilfe von Beispiel 2.4 bekommen wir folgendes:

$$\begin{aligned} p \oplus q &= (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \\ &= \neg \neg ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \\ &= \neg (\neg ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))) \\ &= \neg (\neg (\neg p \wedge q) \wedge \neg (p \wedge \neg q)) \end{aligned}$$

$$p \downarrow q = \neg p \wedge \neg q$$

b)

Um dies zu zeigen, wir, dass \downarrow ein anderes vollständiges Junktorensystem $[\neg, \wedge]$ darstellen kann:

$$\neg p = p \downarrow p$$

$$p \wedge q = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

c)

p	q	p \oplus q	q \oplus p	p	q	r	(p \oplus q) \oplus r	p \oplus (q \oplus r)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
				1	0	1	0	0
				1	1	0	0	0
				1	1	1	1	1

Wie in den Tabellen zu erkennen ist sind gilt sowohl kommutativität als auch Assoziativität

d)

Ein vollständiges Junktorensystem wie z.B. in b) funktioniert mit \oplus nicht, da z.B. \neg sich nicht darstellen lässt. Dafür müsste nämlich für ein p gelten:

$$\exists n \in \mathbb{Z} | \underbrace{p \oplus p \dots \oplus p}_{n\text{-mal}} = \neg p$$

Da kein n existiert, so dass die obige Gleichung für p = 0 gilt folgt, dass es sich bei $[\oplus]$ um kein vollständiges Junktorensystem handelt.

3 H1.3