Hausübung Nr. 2

Sebastian Steitz, Hannes Albert

April 2023

1 H2.1

Bemerkung I:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x}{n^\alpha} = 0$, mit x als Konstante ohne n und $\alpha \geq 1$:

Sei $\varepsilon > 0$, $n_0 > \frac{x}{\varepsilon^\alpha}$. Es ist also $\frac{x}{n_0^\alpha} < \varepsilon$. Für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| = |a_n - 0| = |a_n| = \frac{x}{n^\alpha} \leq \frac{x}{n_0^\alpha} < \varepsilon.$$

Dies gilt insbesondere für $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ bzw. $\frac{x}{n}$, $\frac{x}{n^2}$, $\frac{x}{n^3}$. Vgl. Skript 5.3.9

H 2.1

1. Für $(a_n) := \frac{1}{(n+1)^2}$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \cdot \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 1\right)}{n^2 \cdot \left(\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + 1\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 1}{\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + 1} \overset{I}{=} \frac{0+0+1}{0+0+1} = 1$$

Nach Skript 5.5.14 ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ absolut konvergent!

Es gilt aber: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (Indexshift), somit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n)$ absolut konvergent.

2. Für $(a_n) := \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right|}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{2}{n})}$$

$$\overset{I}{=} \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Es gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, die alternierende harmonische Reihe genannt wird. Diese ist nach Skript 5.5.8 bzw. 5.5.11 zwar normal, aber nicht absolut konvergent.

3. Sei: $(a_n) = 1$. So gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{1} = 1$.

Trivialerweise divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n)$, da (a_n) keine Nullfolge ist.

2 H2.2

1)
$O_1 \cup O_2$:
Nach Definition 5.6.8 müssen wir zeigen, dass es für ein beliebiges
a $\in O_1 \cup O_2$ ein r $\in \mathbb{R}$ mit $B_r \subseteq O_1 \cup O_2$
Fall 1: a $a \in O_1$
Da O_1 offen existiert per Definition ein r mit $B_r(a) \subseteq O_1$. Da O_1 Teilmenge von $O_1 \cup O_2$ gilt:

$$B_r(a) \subseteq O_1 \subseteq O_1 \cup O_2$$

Fall 2: $a \in O_2$
Da O_2 offen ist existiert per Definition ein r $\in \mathbb{R}$ mit $B_r(a) \subseteq O_2$. Da O_2 Teilmenge von $O_1 \cup O_2$ gilt:

$$B_r(a) \subseteq O_2 \subseteq O_1 \cup O_2$$

Somit ist die Vorraussetzung erfüllt und wir sind fertig.
$O_1 \cap O_2$:
Sei a $\in O_1 \cap O_2$. Damit gilt folgendes:

$$a \in O_1 \cup O_2 \leftrightarrow a \in O_1 \wedge a \in O_2$$

Daraus folgt, dass wir zwei offene Kugeln erzeugen können: Sei $B_d(a) \subseteq O_1$ und $B_e(a) \subseteq O_2$. Wir wählen r:= min{d, e}. Wir wählen unser r wie folgt:

$$r := \begin{cases} d & falls\ d < e \\ e & sonst \end{cases}$$

Da somit $B_r(a) \subseteq B_d(a)$ bzw. $B_r(a) \subseteq B_e(a)$ gilt $B_r \subseteq O_1 \cap O_2$. Damit ist $O_1 \cap O_2$ offen.

2.
$A_1 \cap A_2$
Aus der Abschlusseigenschaften von A_1 und A_2 erhalten wir $\mathbb{R}\backslash A_1$ ist offen und $\mathbb{R}^n\backslash A_2$ ist offen. Nach 1. gilt somit auch $\mathbb{R}^n\backslash A_1 \cup \mathbb{R}^n\backslash A_2$ offen. Zusätzlich gilt:

$$\mathbb{R}^n\backslash A_1 \cup A_2\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n\backslash A_1 \cap A_2$$

offen. Insbesondere ist $A_1 \cap A_2$ abgeschlossen.
$A_1 \cup A_2$
Aus der Abgeschlossenheit von A_1, A_2 und a) folgt:
$\mathbb{R}^n\backslash A_1 \cap \mathbb{R}^n\backslash A_2$ offen. Somit gilt
$\mathbb{R}^n\backslash A_1 \cap A_2$ offen und $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

3.
Induktionsanfang: Sei k $\in \mathbb{N}^*$ mit k = 1: $\bigcap\limits_{i=1}^{1} O_i = O_1$. O_1 ist schon per Definiton offen. Für ein k $\in \mathbb{N}^*$ ist $\bigcap\limits_{i=1}^{k} O_i$ offen. Induktionsschritt: Wir betrachten den Fall k + 1:

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} O_i = \bigcap_{i=1}^{k} O_i \cap O_{k+1}$$

Dass $\bigcap\limits_{i=1}^{k} O_i$ offen ist folgt aus der IV und dass O_{k+1} offen ist folgt per Definition. Somit sind wir fertig.

4.
Betrachten wir die offene Mengen $O_i = (0, \frac{1}{i})$. So gilt $\bigcap\limits_{i=1}^{k} O_i = \{0\}$, da die harmonische Reihe $(\frac{1}{n})$ gegen 0 geht. $\{0\}$ ist allerdings nicht offen, weshalb es sich hier um ein passendes Gegenbeispiel handelt.

3 H2.3

H2.3. mit obiger Bemerkung I

1. $\|(a_n)\|_1 = \left|\frac{n}{n^2+1}\right| + \left|\frac{8n}{2n^2+2}\right| + \left|\frac{5}{n^3+n}\right|$

$$= \frac{n}{n\cdot(n+\frac{1}{n})} + \frac{n\cdot 8}{n(2n+\frac{2}{n})} + \frac{5}{n^3+n} = \frac{1}{n+\frac{1}{n}} + \frac{8}{2n+\frac{2}{n}} + \frac{5}{n^3+n}$$

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{n}} + \frac{4}{n+\frac{1}{n}} + \frac{5}{n^3+n} = \frac{5}{n+\frac{1}{n}} + \frac{5}{n^3+n} = \frac{5n^2}{n^3+n} + \frac{5}{n^3+n}$$

$$= \frac{n^2(5+\frac{5}{n^2})}{n^2(n+\frac{1}{n})} = \frac{5+\frac{5}{n^2}}{n+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{5}{n^2}}{n+\frac{1}{n}} \overset{I}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{5+0}{n+0} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \overset{I}{=} 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

2. Mit der 2-Norm gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|(a_n)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^2 + \left(\frac{8n}{2n^2+2}\right)^2 + \left(\frac{5}{n^3+n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(\frac{8}{2n+\frac{2}{n}}\right)^2 + \left(\frac{5}{n^3(1+\frac{1}{n^2})}\right)^2}$$

$$\overset{I}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n+0}\right)^2 + \left(\frac{4}{n+0}\right)^2 + \left(\frac{5}{n^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2} \overset{I}{=} \sqrt{0^2 + 0^2 + (0\cdot 1)^2} = \sqrt{0} = 0$$

Somit ist (a_n) auch mit der 2-Norm eine Nullfolge.