MATHE 2 HAUSÜBUNG NR. 5

Sebastian Steitz, Hannes Albert

Gruppe: 6
Tutor: Zidane Bührmann

Mai 2023

1 H5.1

a)

(i) * Satz 5.10.8 lässt sich umformen in cos(y) $= \sqrt{1 - sin^2(y))}$

$$f_1'(y) = arcsin'(y) = \frac{1}{sin'(arcsin(y))} = \frac{1}{cos(arcsin(y))} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

(ii)

$$f_2'(y) = arctan'(y) = \frac{1}{tan'(arctan(y))} = \frac{1}{1 + tan^2(arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}$$

(iii)

$$f_3(y) = log_2(y) = \frac{ln(y)}{ln(2)}$$
$$f_3'(y) = \frac{1}{ln(2)} * \frac{1}{y} = \frac{1}{y * ln(2)}$$

(iv)

$$f_4'(y) = arctanh'(y) = \frac{1}{1 - tanh^2(arctanh(y))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

b)

b)

i) Mit a.ii) gilt: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Mit der Kettenregel gilt:

$$\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 \cdot (-1)}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = \frac{1-1}{1+x^2} = 0$$

ii) Mit $x = 1$ ergibt sich:

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 2 \cdot \arctan(1)$$
$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Da f nach i) konstant ist, gilt auch

$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2 H5.2

a)

Es sind drei Ableitungen von f zu bilden.

$$f = \ln(x)$$

$$f' = \frac{1}{x} \quad \text{(siehe Skript)}$$

$$f'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''' = \frac{2}{x^3}$$

a)

$$T_{3,f}(x;1) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= \frac{f(1)}{1}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$= \ln(1) + \frac{\frac{1}{1}}{1}(x-1) + \frac{-\frac{1}{1^2}}{2}(x-1)^2 + \frac{\frac{2}{1^3}}{6}(x-1)^3$$

$$= \ln(1) + (x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$= \ln(1) + (x-1) - \frac{1}{2}\cdot(x^2-2x+1) + \frac{1}{3}\cdot(x-1)\cdot(x^2-2x+1)$$

$$= \ln(1) + (x-1) - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)\cdot(x^2-2x+1)$$

$$= 0 + x - 1 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$= 3x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{6}$$

b)

$$T_{3,f}(x;2) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$= \ln(2) + \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot(x-2)^1 + \frac{-\frac{1}{2^2}}{2}\cdot(x-2)^2 + \frac{\frac{2}{2^3}}{6}\cdot(x-2)^3$$

$$= \ln(2) + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{8}\cdot(x^2-4x+4) + \frac{1}{24}\cdot(x-2)\cdot(x^2-4x+4)$$

$$= \ln(2) + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{24}x - \frac{1}{12}\right)\cdot(x^2-4x+4)$$

$$= \ln(2) + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$= 1{,}5x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \ln(2) - \frac{11}{6}$$

c)

$$T_{3,f}\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 3\cdot\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{11}{6}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{27}{8} + \frac{9}{8} - \frac{11}{6}$$

$$= \frac{108}{24} - \frac{81}{24} + \frac{27}{24} - \frac{44}{24}$$

$$= \frac{10}{24}$$

$$T_{3,f}\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \ln(2) - \frac{11}{6}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{27}{32} + \frac{27}{192} + \ln(2) - \frac{11}{6}$$

$$= \frac{432}{192} - \frac{162}{192} + \frac{27}{192} - \frac{352}{192}$$

$$= -\frac{55}{192} + \ln(2)$$

$$R_{3,f}\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{f^{3+1}(\xi)}{(3+1)!}\left(\frac{3}{2}-1\right)^{3+1}$$

$$= \frac{f''''(\xi)}{24}\cdot\frac{1}{16}$$

$$= -\frac{6}{384\cdot(\xi)^4}$$

$$= -\frac{1}{64\cdot(\xi)^4}$$

$$R_{3,f}\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \frac{f^{3+1}(\xi)}{(3+1)!}\left(\frac{3}{2}-2\right)^{3+1}$$

$$= \frac{f''''(\xi)}{24}\cdot\frac{1}{16}$$

$$= -\frac{6}{384\cdot(\xi)^4}$$

$$= -\frac{1}{64\cdot(\xi)^4}$$

d)
Auf drei Nachkommastellen gerundet ist der $\ln(\frac{3}{2}) \approx 0.405$, $T_{3,f}(\frac{3}{2}, 1) \approx 0.417$ und $T_{3,f}(\frac{3}{2}, 2) \approx 0.406$. Damit wäre die Approximierung mit $x_0 = 2$ besser.