MATHE HAUSÜBUNG NR. 3

Sebastian Steitz, Hannes Albert

Gruppe: 6
Tutor: Zidane Bührmann

Mai 2022

1 H3.1

3.1

a) von Links: Betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \nearrow 0$, so gilt

$f(x_n) = \sqrt{-x_n} \to 0$

von Rechts: Betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \searrow 0$, so gilt

$f(x_n) = \sqrt{x_n} \to 0$

Beide Grenzwerte existieren und sind äquivalent. Insofern gilt auch $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) von Links: Betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \nearrow 0$, so gilt

$g(x_n) = (x_n)^2 + 2 \to 2$

von Rechts: Betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \searrow 0$, so gilt

$g(x_n) = (x_n + 2)^2 \to 4$

Beide Grenzwerte existieren zwar, sind aber nicht äquivalent. Insofern ist $\lim_{x \to 0} g(x)$ nicht existent.

c) von Links: Es existiert kein Grenzwert, da $h(x)$ stets zwischen den Werten 1 und 0 springt, abhängig davon, ob $x \in \mathbb{Q}$ oder nicht. Da sowohl für $x \in \mathbb{Q}$ als auch für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ unendlich viele betragsmäßig kleinere Werte denkbar sind, ist $\lim_{x \to 0-} h(x)$ nicht existent.

von Rechts: Es gilt die selbige Argumentation, $\lim_{x \to 0+} h(x)$ existiert nicht.

Da keine der beiden Grenzwerte existiert, existiert auch $\lim_{x \to 0} h(x)$ nicht.

2 H3.2

H3.2 a)

Es gilt zu zeigen:

I. $f(x) \leq 2$:

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right) \leq 2$$

$$x+\frac{3}{x} \leq 4$$

$$x+\frac{3}{x}-4 \leq 0$$

$$x^2+3-4x \leq 0$$

Mit der Mitternachtsformel ergeben sich $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$ als Nullstellen des Polynoms.
Für $x \in (1,3)$ ist die Ungleichung also stets erfüllt, z.B. mit $x_0 = 2$ ergibt sich $f(x_0) = -1$.
Insbesondere gilt dies also auch für $x \in [\frac{3}{2}, 2]$

II. $f(x) \geq \frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right) \geq \frac{3}{2}$$

$$x+\frac{3}{x} \geq 3$$

$$x+\frac{3}{x}-3 \geq 0$$

$$x^2+3-3x \geq 0$$

Mit der Mitternachtsformel ergeben sich $x_1 = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ und $x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ als Nullstellen des Polynoms, es existieren also keine reelen Nullstellen. Die Ungleichung ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, z.B. mit $x_0 = 2$ ergibt sich $f(x_0) = 1$.
Insbesondere gilt dies also auch für $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.
Aus I und II ergibt sich also, dass $f([\frac{3}{2}, 2]) \in [\frac{3}{2}, 2]$ ist.

b)

$$|f(x)-f(y)| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\left|\frac{1}{2} \cdot \left(x+\frac{3}{x}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(y+\frac{3}{y}\right)\right| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|x + \frac{3}{x} - y - \frac{3}{y}\right| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|x-y + \frac{3}{x} - \frac{3}{y}\right| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|x-y + \frac{3y}{xy} - \frac{3x}{yx}\right| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|x-y + \frac{3y-3x}{xy}\right| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|(x-y) \cdot \left(1 + \frac{-3}{xy}\right)\right| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left|(x-y) \cdot \left(1 - \frac{3}{xy}\right)\right| \leq q \cdot |x-y|$$

Es gilt für alle $x, y \in [\frac{3}{2}, 2]$:

$$1 - \frac{3}{xy} \geq 1 - \frac{3}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

und

$$1 - \frac{3}{xy} \leq 1 - \frac{3}{2 \cdot 2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Durch den Betrag muss die Ungleichung für $-\frac{1}{3}$ erfüllt sein:

$$\frac{1}{2} \cdot \left|(x-y) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right| \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot |x-y| \cdot \frac{1}{3} \leq q \cdot |x-y|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \leq q$$

$$\frac{1}{6} \leq q$$

Mit $q = \frac{1}{6}$ ist hat q also die geforderte Eigenschaft.

c)

Wir setzen $\sqrt{3}$ in unsere Funktion ein:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} * (\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2} * 2 * \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Damit gilt nach 5.6.22 (Banach'scher Fixpunktssatz), dass es sich bei $\sqrt{3}$ um den einigsten Fixpunkt der Funktion handelt.

d)
Zunächst berechnen wir unser x_1:

$$\begin{aligned} |x_1 - \sqrt{3}| < 0,001 \qquad & | + \sqrt{3} \\ x_1 < 0,001 + \sqrt{3} & \\ x_1 < 0,001 + 1,73 & \\ x_1 < 1,733 \approx \frac{7}{4} & \end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Appriori-Abweichung inklusive des Wertes für q aus b) ein:

$$\begin{aligned} |x_n - \sqrt{3}| &\leq \frac{(\frac{1}{6})^n}{1-\frac{1}{6}} * |x_1 - x_0| \\ &= \frac{1}{6^n} * \frac{1}{\frac{5}{6}} * |x_1 - x_0| \\ &= \frac{6}{5 * 6^n} * |x_1 - x_0| \\ &= \frac{1}{5 * 6^{n-1}} * |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Wir wählen unser x_0 als $\frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5 * 6^{n-1}} * |\frac{7}{4} - \frac{3}{4}| &= \frac{1}{5 * 6^{n-1}} * 1 \\ &= \frac{1}{5 * 6^{n-1}} \end{aligned}$$

Für x_4 erhalten wir durch einsetzen in die Formel:

$$|x_4 - \sqrt{3}| = \frac{1}{5 * 6^{4-1}} = \frac{1}{5 * 6^3} = 0,000\overline{925} \approx 0,001$$

x_4 hat somit den Wert $x_4 = \sqrt{3} + 0{,}001 = 1{,}743$, während $\sqrt{3} = 1{,}732$. Somit sind die beiden Werte sich ziemlich ähnlich.

3 H3.3

a)
Betreachten wir exp(x) zunächst für x > 0:

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1$$

Da für alle x < 0 gilt: exp(-x) = $\frac{1}{exp(x)}$ > 0, lässt sich schließen, dass für alle x $\in \mathbb{R}$ exp(x) > 0. Seien nun x, y $\in \mathbb{R}$ mit x > y:

$$1 < exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$$

Da exp strikt positiv ist können wir hier Umformen ohne die Ungleichung verändern zu müssen. Smit erhalten wir exp(x) < exp(y) und es ist gezeigt, dass exp streng monoton wächst. Für die Stetigkeit von exp gilt folgendes: $\lim\limits_{x \to 0+}$ exp(x) = 1
Dann gilt für $\lim\limits_{x \to 0-}$ exp = $\lim\limits_{x \to 0+}$ exp(-x) = 1

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} exp(x) = \lim_{x \to 0} exp(x_0 + x)$$
$$= exp(x_0) * \lim_{x \to 0} exp(x) = exp(x_0) * 1 = exp(x_0)$$

Somit wurde die Stetigkeit für exp gezeigt.
b)
Wir wissen aus Beispiel 5.7.8, dass $\lim\limits_{x \to \infty}$ exp(x) = ∞ und $\lim\limits_{x \to -\infty}$ exp(x) = 0. Mithhilfe des Zwischenwertsatzes erhalten wir somit für jedes y $\in \mathbb{R}$ folgendes:
Wir wählen a, b $\in$ (0, ∞) und y $\in$ [exp(a), exp(b)]. Laut dem Zwischenwertsatz haben wir somit eine Garantie für die existenz eines Elements x_0 mit exp(x_0) = y. Dies gibt uns die Surjektivität. Aus dem strengen Wachstum der Funktion folgt schon, dass für f(x) = f(y), x = y gelten muss. Somit ist die Injektivität gezeigt und die Funktion ist somit bijektiv.