MATHE 2 HAUSÜBUNG NR.12

Sebastian Steitz, Hannes Albert

Gruppe: 6
Tutor: Zidane Bührmann

Juli 2023

H12.1

a) Mit der Definition von $v : I \to \mathbb{R}^n$ (Skript 7.4) gilt:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

Dann ist $v'(t)$ nach 7.4.1 gleich

$A \cdot v(t) + b(t)$, hier also $A \cdot v(t)$.

Es ist also:

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot v(t) = G(t, v(t))$$

b) Charakteristisches Polynom bestimmen:
Formel von Sarrus liefert:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot -\lambda \cdot (3-\lambda) + 1 \cdot 1 \cdot (-3) + (-\lambda) \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \lambda^2 \cdot (3-\lambda) - \lambda - 3$$

Die Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte von A:

$$\lambda^2 \cdot (3-\lambda) - \lambda - 3 = 0$$

$$\lambda^2 \cdot (3-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$

$$(\lambda^2 - 1) \cdot (3-\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad 3 - \lambda = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 \qquad \lambda_3 = 3$$

Die Matrix ist also diagonalisierbar und die Lösung einfach nach 7.3.14 bestimmbar.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot(-3) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot(-2) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 \quad \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \cdot 3 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \cdot(-4) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 = x_3 \quad \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = 3x_1;\ x_3 = 3x_2 \quad \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ 3a_3 \\ 9a_3 \end{pmatrix} = a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist also

$$\left\{ e^t \cdot a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{-2t} \cdot a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{3t} \cdot a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

Und damit sind alle Lösungen beschrieben durch:

$$v(t) = c_1 \cdot a_1 \cdot e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot a_2 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot a_3 \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Da $c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ und beliebig, äquivalent zu

$$v(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt:

$v(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, also ist $y(t)$ gleich der ersten Zeile der Lösung.

$y(t) = c_1 e^{t}\ a + c_2 e^{-2t}\ a + c_3 e^{3t}\ a$

H12.2

a)
Das charakteristische Polynom ergibt sich nach Definition 7.5.4:

$$\begin{aligned}
P &= \lambda^3 - 5 * \lambda^2 + 8\lambda - 4 \\
&= \lambda^3 - 4 * \lambda^2 - \lambda^2 + 8\lambda - 4 \\
&= \lambda^3 - 4 * \lambda^2 - \lambda^2 + 4\lambda + 4\lambda - 4 \\
&= -1 * (\lambda^2 - 4\lambda + 4) + \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda \\
&= -1 * (\lambda^2 - 4\lambda + 4) + \lambda * (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\
&= (\lambda - 1) * (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\
&= (\lambda - 1) * (\lambda - 2)^2
\end{aligned}$$

$\rightarrow \lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ (doppelte Nullstelle)
Damit erhalten wir für das Fundamentalsystem: F = $\{e^t,\ e^{2t},\ te^{2t}\ \}$

$$y(t) = C_1 * e^t + C_2 * e^{2t} + C_3 * t * e^{2t} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{aligned}
P &= \lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 \\
&= \lambda^3 * (\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\
&SvNP: \\
&\lambda^3 = 0 \\
&\rightarrow \lambda_1 = 0 (dreifacheNullstelle) \\
&\lambda_{2/3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 * 1 * 1}}{2} \\
&= -\frac{2}{2} \\
&= -1 \qquad\qquad \rightarrow \text{doppelte Nullstelle}
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das Fundamentalsystem:
F $= \{e^{0t}, te^{0t}, t^2e^{0t}, e^{-t}, te^{-t}\} = \{1, t, t^2, e^{-t}, te^{-t}\}$

$y(t) = C_1 + C_2 * t + C_3 * t^2 + C_4 * e^{-t} + C_5 * te^{-t}$ $\qquad C_i \in \mathbb{R}$ mit i $\in \{1, 2, ..., 5\}$

c)

$$P = \lambda^3 - \lambda^2 + 2 * \lambda - 2$$
$$= (\lambda^2 + 2) * (\lambda - 1)$$

$\rightarrow \lambda_1 = \sqrt{2}$i, $\lambda_2 =$ -$\sqrt{2}$i, $\lambda_3 = 1$
Somit ergibt sich für das Fundamentalsystem:
F $= \{e^{0t} * cos(\sqrt{2}t), e^{0t} * sin(\sqrt{2}t), e^t\} = \{cos(\sqrt{2}t), sin(\sqrt{2}t), e^t\}$

$$y(t) = cos(\sqrt{2}t) * C_1 + sin(\sqrt{2}t) * C_2 + e^t * C_3 \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$