MATHE 2 HAUSÜBUNG NR. 6

Sebastian Steitz, Hannes Albert

Gruppe: 6
Tutor: Zidane Bührmann

date

1 H6.1

Wir bestimmen zunächst mögliche Kandidaten für innere Extremstellen mit Zuhilfenahme der ersten Ableitung:

$f(x) = \frac{3}{5} x^5 - 5x^3 + 12x$

$f'(x) = 3x^4 - 15x^2 + 12$

Mit Satz 6.3.3 gilt $f'(x_0) = 0$, falls x_0 ein Extremum ist.

$$0 = 3x^4 - 15x^2 + 12 \qquad | \; z = x^2$$

$$0 = 3z^2 - 15z + 12$$

$$z_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{6} \qquad z_1 = \frac{15 + 9}{6} = 4$$

$$z_2 = \frac{15 - 9}{6} = 1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Mit Satz 6.3.5 lässt sich mithilfe $f''(x)$ prüfen, ob diese Werte tatsächlich Extremwerte sind:

$f''(x) = 12x^3 - 30x$

$f''(x_1) = 12 \cdot 2^3 - 30 \cdot 2 = 36 > 0$; d.h. $x_1 = 2$ ist ein lokales Minimum.

$f''(x_2) = 12 \cdot (-2)^3 - 30 \cdot (-2) = -36 < 0$; d.h. $x_2 = -2$ ist ein lokales Maximum.

$f''(x_3) = 12 \cdot 1^3 - 30 \cdot 1 = -18 < 0$; d.h. $x_3 = 1$ ist ein lokales Maximum.

$f''(x_4) = 12 \cdot (-1)^3 - 30 \cdot (-1) = 18 > 0$; d.h. $x_4 = -1$ ist ein lokales Minimum.

Es bleiben die Ränder $x = \pm 5$ zu prüfen.

Es gilt: $f(5) = 1310$ und $f(-5) = -1310$.

Haben die bisher gefundenen Extrempunkte betragsmäßig kleinere Funktionswerte, so sind die Ränder offensichtlich globale Extrempunkte.

Minima:

$f(x_1) = f(2) = 3{,}2 > -1310 = f(-5)$

$f(x_4) = f(-1) = -7{,}6 > -1310 = f(-5)$

Maxima:

$f(x_2) = f(-2) = -3{,}2 < 1310 = f(5)$

$f(x_3) = f(1) = 7{,}6 < 1310 = f(5)$

Damit sind $x = 5$ und $x = -5$ globale Extrempunkte der Funktion.

2 H6.2

a)
Um die Stetigkeit der Funktion zu zeigen, richten wir uns nach Bemerkung 5.7.13. Es gilt:

$$\lim_{x \to (0,0)} f(x) = 0 = f(0,0) = 0 = f(\lim_{x \to (0,0)} x)$$

Somit gilt nach der Bemerkung die Stetigkeit von f in Punkt (0, 0).

b)

Wir setzen ein:

$$
\begin{aligned}
\partial_u f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0)+h*u)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(h*u) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(h*u_1, h*u_2) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(h*u_2)^3}{(h*u_1)^2+(h*u_2)^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^3*u_2^3}{h^2*u_1^2+h^2*u_2^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^3*u_2^3}{h^3*u_1^2+h^3*u_2^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u_2^3}{h^3*u_1^2+h^3*u_2^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u_2^3}{u_1^2+u_2^2} \\
&= \frac{u_2^3}{u_1^2+u_2^2} \\
&= \frac{u_2^3}{||u||} \\
&= \frac{u_2^3}{1} \\
&= u_2^3
\end{aligned}
$$

Somit gilt $(\partial_u \mathrm{f})(0, 0) = u_2^3$. Insbesondere gibt es keinen Wert, so dass die Richtungsableitung für u nicht existiert. c)

Angenommen die Funktion ist in x_0 differenzierbar. Dann muss sie per Definition 6.1.1. für $\lim\limits_{x\to(0,0)}$ einen Grenzwert besitzen.

$$\lim_{x\to(0,0)} \frac{f(x)-f(0,0)}{x-(0,0)} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{f(x)}{x} \qquad \lightning$$

Dies bedeutet, dass der Grenzwert nicht existiert und somit ist die Funktion auch nicht differenzierbar.

3 H6.3

a)

6.3

$$\partial_1 f(x,y) = y + 2 \cdot \sin\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right) - e^{-y} \cdot \sin(x)$$

$$\partial_2 f(x,y) = x + 2x \cdot \cos\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right) - e^{-y} \cdot \cos(x)$$

∂_1 und ∂_2 sind jeweils Verkettungen stetiger Funktion und damit nach Skript 5.7.15 stetig.

Es sind also sämtliche partiellen Ableitungen stetig, sodass f stetig partiell differenzierbar und damit auch total differenzierbar ist.

Die Jacobi-Matrix, nach Skript 6.5.9 als $Df(x)$ auffassbar, lautet:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right) - e^{-y}\cdot\sin(x) + y & 2x\cos\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right) - e^{-y}\cdot\cos(x) + x \end{pmatrix}$$

$$\hat{=}\, Df(x)$$

b) Da $\sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos(y)$ schreiben wir die Funktion passend um. Wir berechnen den Gradienten wie folgt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(xy + 2x * cos(y) + e^{-y} * cos(x)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(xy + 2x * cos(y) + e^{-y} * cos(x)) \end{bmatrix} (x,y)$$

$$= \begin{bmatrix} y + 2 * cos(y) - e^{-y} * sin(x) \\ x - 2x * sin(y) - e^{-y} * cos(x) \end{bmatrix} (x,y)$$

Nun setzen wir (0, 0) ein:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 + 2 * cos(0) - e^0 * sin(0) \\ 0 - 2 * 0 * sin(0) - e^0 * cos(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 * 1 - 1 * 0 \\ 0 - 1 * 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$