离 散 数 学 题 解

屈婉玲　耿素云　张立昂　编著

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是《离散数学(第二版)》(耿素云,屈婉玲,张立昂编著,清华大学出版社出版)一书的配套题解.

全书含 6 个部分: 1.数理逻辑; 2.集合论; 3.代数结构; 4.图论; 5.组合分析初步; 6.形式语言和自动机初步.每部分均包含三方面内容: (1) 内容提要; (2) 与本部分配套的习题; (3) 习题解答.对每道题都作了较详细的解答与分析.对某些题还给出了不同的解法或指出容易犯的错误及犯错误的原因.

本书可作为与配套的《离散数学》的辅助教材,也可以作为其他《离散数学》教材的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学题解/屈婉玲等编著. - 北京: 清华大学出版社, 1999
ISBN 7-302-03398-6

Ⅰ.离… Ⅱ.屈… Ⅲ.离散数学-高等学校: 高校-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 25742 号

出版者: 清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者: 北京市通州区大中印刷厂
发行者: 新华书店总店北京发行所
开 本: 787×1092 1/16 印张: 11.75 字数: 275 千字
版 次: 1999 年 9 月第 1 版 1999 年 9 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 7-302-03398-6/TP·1842
印 数: 0001～8000
定 价: 13.00 元

前　言

本书是《离散数学(第二版)》, 耿素云, 屈婉玲, 张立昂编著, 清华大学出版社出版的配套参考书. 在本书中凡提到《离散数学》均指上述配套教材.

本书的出版经过较长时间的酝酿. 离散数学在我国作为计算机专业的基础课仅有 20 多年的历史. 随着高等院校计算机本科和专科教育规模的不断扩大, 特别是计算机的广泛应用以及社会上对计算机继续教育的迫切需求, 使得《离散数学》教育由浅入深, 从少到多, 越来越受到人们的重视. 近 10 年来, 各种离散数学教材相继问世, 无疑对离散数学的教学起到了很大的推动作用. 但与有着悠久历史的传统的成熟的高等数学教育相比, 离散数学毕竟是太年轻了. 仅就教材而言, 表现在适合于不同层次、不同需求的教材少, 尤其是对离散数学复习和习题指导的书就更少. 这对于学习, 特别是自学离散数学的人来说确实是一个很大的困难. 在我们的教学实践中经常听到下面的反映:

(1) 离散数学的特点是, 概念多、内容散、抓不住知识之间的内在联系, 复习时不知道哪里是重点.

(2) 对书上的例题一看就懂, 但自己拿到题以后却不知从何处下手, 没有解题思路.

(3) 知道解题的大致思路, 但不了解解题的规范和要求, 不会表达, 一写出来常常是漏洞百出.

这些问题经常困扰着初学者, 特别是自学者. 我们深切感到他们需要一本难度适当的离散数学习题指导用书, 并曾就这样一本书的指导思想和内容进行过讨论和准备.

1998 年下半年清华大学出版社决定将我们于 1992 年出版的《离散数学》一书进行修订, 并同时出版一本配套的《离散数学题解》, 这一决定推动了我们的设想成为现实. 根据《离散数学》一书的体系, 这本题解按章安排, 每章主要包含以下内容:

(1) 内容提要. 将本章的主要概念和定理按知识体系进行概括和小结, 并说明本章的复习要点和应该达到的要求.

(2) 和本章内容配套的习题.

(3) 习题解答. 配合习题解答针对一些普遍性的分析方法、解题技巧、求解步骤和规范, 以及应该避免的错误进行详尽的论述.

和配套教材《离散数学》一致, 本题解包含六个方面的内容: (1) 数理逻辑; (2) 集合论; (3) 代数结构; (4) 图论; (5) 组合分析初步; (6) 形式语言和自动机初步. 其中第 1, 2, 7, 8, 9 章由耿素云撰写; 第 3, 4, 5, 6, 10 章由屈婉玲撰写; 第 11 章由张立昂撰写.

本书是《离散数学》的配套参考书, 但并不限于只与上述《离散数学》教材配套时才能使用. 采用其他教材学习离散数学的人也可以用它作为参考书.

作　者

1999 年 4 月

目　　录

第 1 章　命题逻辑 …… 1
内容提要 …… 1
习题 …… 7
习题解答 …… 11
第 2 章　一阶逻辑 …… 28
内容提要 …… 28
习题 …… 32
习题解答 …… 37
第 3 章　集合的基本概念和运算 …… 46
内容提要 …… 46
习题 …… 48
习题解答 …… 52
第 4 章　二元关系和函数 …… 57
内容提要 …… 57
习题 …… 61
习题解答 …… 66
第 5 章　代数系统的一般性质 …… 76
内容提要 …… 76
习题 …… 78
习题解答 …… 81
第 6 章　几个典型的代数系统 …… 89
内容提要 …… 89
习题 …… 93
习题解答 …… 96
第 7 章　图的基本概念 …… 101
内容提要 …… 101
习题 …… 105
习题解答 …… 107
第 8 章　一些特殊的图 …… 116
内容提要 …… 116
习题 …… 119
习题解答 …… 121
第 9 章　树 …… 128

内容提要…………………………………………………………………… 128
习题……………………………………………………………………… 130
习题解答…………………………………………………………………… 133
第 10 章　组合分析初步 ……………………………………………………… 139
内容提要…………………………………………………………………… 139
习题……………………………………………………………………… 140
习题解答…………………………………………………………………… 142
第 11 章　形式语言和自动机初步 ………………………………………… 153
内容提要…………………………………………………………………… 153
习题……………………………………………………………………… 156
习题解答…………………………………………………………………… 160

第1章 命题逻辑

内容提要

1. 命题符号化及联结词

命题与真值

称能判断真假,但不会既能真又能假的陈述句为命题,命题的判断结果称为命题的真值,真值只取两个值:真和假,称真值为真的命题为真命题,真值为假的命题为假命题.称由简单陈述句构成的命题为简单命题或原子命题,用 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$表示命题,称为命题符号化.用数字 1 表示真,用 0 表示假,则任何命题的真值不是 1 就是 0,但决不可能既可以为 1 又可以为 0.称由简单命题用联结词联结而成的命题为复合命题.常用的联结词(逻辑联结词)及它们所联结的复合命题有以下 6 种:

否定式 设 p 为一命题,复合命题"非 p"(或"p 的否定")称为 p 的否定式,记作$\neg p$.$\neg$为否定联结词,$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

合取式 设 p, q 为两命题,复合命题"p 并且 q"(或"p 和 q")称作 p 与 q 的合取式,记作 $p \wedge q$.$\wedge$称作合取联结词,$p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

析取式 设 p, q 为两命题,复合命题"p 或 q"称作 p 与 q 的析取式,记作 $p \vee q$,$\vee$称作析取联结词,$p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

蕴含式 设 p, q 为两命题,复合命题"如果 p,则 q"称作 p 与 q 的蕴含式,记作 $p \rightarrow q$,称 p 为蕴含式的前件,q 为蕴含式的后件.$\rightarrow$称作蕴含联结词,$p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

等价式 设 p, q 为两命题,复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价式,记作 p\ q.\ 称作等价联结词,p\ q 为真当且仅当 p 与 q 的真值相同.

异或式 设 p, q 为两命题,复合命题"p, q 之中仅一个成立"称做 p 与 q 的异或式(或排斥式),记作 p∀q,∀称做异或联结词,p∀q 为真当且仅当 p 与 q 中仅一个为真.

2. 命题公式及分类

命题常项及命题变项 若用 $p, q, r, \cdots$表示确定的简单命题,则称 $p, q, r, \cdots$为命题常项,命题常项的真值是确定不变的.若用 $p, q, r, \cdots$泛指简单的陈述句,则称 $p, q, r, \cdots$为命题变项,此时 $p, q, r, \cdots$是变量,它们的取值为 1 或 0.

合式公式 (1) 单个的命题变项或常项(含 1 和 0)是合式公式;

(2) 若 A 是合式公式,则$(\neg A)$也是合式公式;

(3) 若 A, B 都是合式公式,则$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \rightarrow B)$,(A\ B),(p∀q)也是合式公式;

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式.合式公式也称命题公

式,简称合式或公式.

对以上定义的两点说明:

(1) 定义中出现的字母 A, B, …代表任意的公式,称它们为元语言符号,所谓元语言,是用来说明对象语言的语言,而对象语言是指用来描述所研究的对象(此处是指数理逻辑)的语言.

(2) 公式的最外层括号有时可以省去.

公式的层次　(1) 若 A 是单个的命题常项或变项,则称 A 为 0 层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geq 0)$ 层公式是指下列诸情况之一:

① $A=\neg B$, B 为 n 层公式;

② $A=B\wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式,且 $n=\max(i,j)$;

③ $A=B\vee C$, 其中 B, C 的层次同②;

④ $A=B\rightarrow C$, 其中 B, C 的层次同②;

⑤ A= B\ C, 其中 B, C 的层次同②;

⑥ A= B∀C, 其中 B, C 的层次同②.

(3) 若 A 的层次为 k,则称 A 为 k 层公式.

以上定义中所用“ = ”为通常意义下的等于,这里“ = ”为元语言符号.

赋值或解释　设 A 为一公式, $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是出现在 A 中的全部命题变项,给 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 各指定一个真值(0 或 1),称为对 A 的一个赋值或解释.若赋值使 A 的真值为 1,则称该赋值为 A 的成真赋值,若赋值使 A 的真值为 0,则称该赋值为 A 的成假赋值.

对以上定义的两点说明:

(1) 含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式 A 的赋值是由二进制数字组成的长为 n 的符号串,例如,101 是含命题变项 p_1, p_2, p_3 的公式 A 的一个赋值,其含义为指定 p_1, p_3 的真值为 1, p_2 的真值为 0;

(2) 若公式中命题变项由 p, q, r, …给出,则它们的顺序由英文字母顺序给出;

真值表　设公式 A 含 $n(n\geq 1)$ 个命题变项,将 A 在 2^n 个赋值下的取值情况列成表,称为 A 的真值表.

公式的分类　设 A 为一个公式.

(1) 若 A 无成假赋值,则称 A 为重言式或永真式;

(2) 若 A 无成真赋值,则称 A 为矛盾式或永假式;

(3) 若 A 至少有一个成真赋值,则称 A 为可满足式;

(4) 若 A 至少有一个成真赋值,又至少有一个成假赋值,则称 A 为非重言式的可满足式.

3. 等值演算

等值式　若等价式 A\ B 是重言式,则称 A 与 B 等值,记作 A　B.

上述定义中,“　”为元语言符号,用它来说明 A\ B 为重言式.

基本的等值式

(1) $A \quad \neg\neg A$. 双重否定律

(2) $A \quad A\vee A$.
(3) $A \quad A\wedge A$.
等幂律

(4) $A\vee B \quad B\vee A$.
(5) $A\wedge B \quad B\wedge A$.
交换律

(6) $(A\vee B)\vee C \quad A\vee(B\vee C)$.
(7) $(A\wedge B)\wedge C \quad A\wedge(B\wedge C)$.
结合律

(8) $A\vee(B\wedge C) \quad (A\vee B)\wedge(A\vee C)$.
(9) $A\wedge(B\vee C) \quad (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.
分配律

(10) $\neg(A\vee B) \quad \neg A\wedge\neg B$.
(11) $\neg(A\wedge B) \quad \neg A\vee\neg B$.
德·摩根律

(12) $A\vee(A\wedge B) \quad A$.
(13) $A\wedge(A\vee B) \quad A$.
吸收律

(14) $A\vee 1 \quad 1$.
(15) $A\wedge 0 \quad 0$.
零律

(16) $A\vee 0 \quad A$.
(17) $A\wedge 1 \quad A$.
同一律

(18) $A\vee\neg A \quad 1$. 排中律
(19) $A\wedge\neg A \quad 0$. 矛盾律
(20) $A\to B \quad \neg A\vee B$. 蕴含等值式
(21) $A\backslash\ B \quad (A\to B)\wedge(B\to A)$. 等价等值式
(22) $A\to B \quad \neg B\to\neg A$. 假言易位
(23) $A\backslash\ B \quad \neg A\backslash\ \neg B$. 等价否定等值式
(24) $(A\to B)\wedge(A\to\neg B) \quad \neg A$. 归谬论

等值演算　由已知等值式推演出新的等值式的过程称为等值演算.

置换规则　设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式, $\Phi(B)$ 是用 B 置换了 $\Phi(A)$ 中的 A 之后的公式, 若 $A \quad B$, 则 $\Phi(A) \quad \Phi(B)$.

联结词的优先顺序　在演算中, $\neg$最优先, 其次为$\wedge$与$\vee$及$\veebar$($\wedge$, $\vee$, $\veebar$同级), 再其次为$\to$与$\backslash$ ($\to$与$\backslash$ 同级). 若有括号(圆括号), 则括号最优先. 同级按从左至右的顺序演算.

4. 联结词全功能集

真值函数　记$\{0,1\}^n=\{0\cdots0,\cdots,1\cdots1\}$, 即$\{0,1\}^n$ 是由 0, 1 组成的全体长为 n 的符号串集合. 称定义域为$\{0,1\}^n$, 值域为$\{0,1\}$的函数为 n 元真值函数. $\{0,1\}^n$ 到$\{0,1\}$共有 2^{2^n} 个不同的真值函数.

联结词全功能集　设 S 为一个联结词集合, 若任意真值函数都可以仅用 S 中的联结词表示的公式所表示, 则称 S 为联结词全功能集.

与非式　设 p, q 为两命题, 复合命题" p 与 q 的否定 "称为 p 与 q 的与非式, 记作 $p \uparrow q$, $\uparrow$ 称为与非联结词. $p \uparrow q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为真.

或非式　设 p, q 为两命题, 复合命题" p 或 q 的否定 "称为 p 与 q 的或非式, 记作 $p \downarrow q$, $\downarrow$ 称为或非联结词. $p \downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假.

$\{\neg, \wedge, \vee, \forall, \rightarrow, \setminus\}$, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \setminus\}$, $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$等都是联结词全功能集.

5. 对偶与范式

对偶式　设公式 A 为仅含$\{\neg, \wedge, \vee\}$中联结词的公式, 将$\vee$换成$\wedge$, $\wedge$换成$\vee$, 若含 0, 换成 1, 若含 1, 换成 0, 所得公式记为 A^*, 称 A^* 为 A 的对偶式.

文字　称命题变项或其否定为文字.

简单析取式　由有限个文字组成的析取式称为简单析取式.

简单合取式　由有限个文字组成的合取式称为简单合取式.

极小项　在含 n 个命题变项的简单合取式中, 若每个命题变项以文字的形式在其中出现且仅出现一次, 而且第 i 个命题变项以文字的形式出现在左起的第 i 位上, 则称这样的简单合取式为极小项. n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极小项, 分别记为 $m_0, m_1, \cdots, m_{2^n-1}$, 其中 $i(0 \leq i \leq 2^n-1)$的二进制表示即为 m_i 的成真赋值.

极大项　在含 n 个命题变项的简单析取式中, 若每个命题变项以文字的形式在其中出现且仅出现一次, 而且第 i 个命题变项以文字的形式出现在左起的第 i 位上, 称这样的简单析取式为极大项, n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极大项, 分别记为 $M_0, M_1, \cdots, M_{2^n-1}$, 其中, $i(0 \leq i \leq 2^n-1)$的二进制表示即为 M_i 的成假赋值.

析取范式　仅由有限个简单合取式组成的析取式, 称为析取范式.

主析取范式　由有限个极小项组成的析取式称为主析取范式.

合取范式　仅由有限个简单析取式组成的合取式称为合取范式.

主合取范式　由有限个极大项组成的合取式, 称为主合取范式.

主要定理

定理 1.1　任一命题公式都存在着与其等值的析取范式和合取范式.

定理 1.2　任一命题公式都唯一地存在着与其等值的主析取范式与主合取范式.

6. 推理理论

推理的形式结构

设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$, B 为命题公式, 称

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B \tag{*}$$

为推理的形式结构. $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为推理的前提, B 为推理的结论. 若(*)为重言式, 则称推理正确, 此时称 B 是 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的逻辑结论或有效结论, 并可将(*)记为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \quad B.$$

这里,“　　”为元语言符号,用它来说明(*)为重言式,即推理正确的符号.

推理定律　称重言蕴含式为推理定律.主要的推理定律有:

(1) $A \quad (A \vee B)$;　　附加

(2) $(A \wedge B) \quad A$;　　化简

(3) $((A \to B) \wedge A) \quad B$;　　假言推理

(4) $((A \to B) \wedge \neg B) \quad \neg A$;　　拒取式

(5) $((A \vee B) \wedge \neg A) \quad B$;　　析取三段论

(6) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \quad (A \to C)$;　　假言三段论

(7) $((A \backslash B) \wedge (B \backslash C)) \quad (A \backslash C)$;　　等价三段论

$\vdots$

判断推理是否正确的方法

判断推理是否正确,就是判断推理的形式结构(*)是否为重言式.其主要方法有:

(1) 真值表法;

(2) 等值演算法;

(3) 主析取(主合取)范式法.

构造证明法

证明　证明是一个描述推理过程的命题公式序列,其中的每个命题公式或者为已知的前提,或者是由某些前提应用推理规则得到的结论或中间结论.

推理规则

(1) 前提引入规则.

(2) 结论引用规则.

(3) 置换规则.

以下推理规则用推理图式形式给出,每个图式横线上面为前提,横线下面为结论.

(4) 假言推理规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline \text{所以}\quad B \end{array}.$$

(5) 附加规则

$$\begin{array}{l} A \\ \hline \text{所以}\quad A \vee B \end{array}.$$

(6) 化简规则

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \text{所以}\quad A \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \text{所以}\quad B \end{array}.$$

(7) 拒取式规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg B \\ \hline \text{所以}\quad \neg A \end{array}.$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline \text{所以} \quad A \to C \end{array}.$$

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg A \\ \hline \text{所以} \quad B \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \\ \hline \text{所以} \quad A \end{array}.$$

(10) 合取引入规则

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \text{所以} \quad A \wedge B \end{array}.$$

(11) 构造性二难规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ A \vee C \\ \hline \text{所以} \quad B \vee D \end{array}.$$

推理规则(4)～(11)也可以以其他形式给出(见配套的离散数学教材).

7. 小结

学习第1章(命题逻辑)要注意以下几点.

(1) 要弄清命题与陈述句的关系. 命题都是陈述句, 但陈述句不都是命题. 只有陈述句所表达的判断结果是唯一确定的(正确的或错误的), 它才是命题.

(2) 弄清由6种基本联结词联结的复合命题的逻辑关系及其真值. 特别是要弄清蕴含式" $p \to q$ "的逻辑关系及其真值. 这里, q 是 p 的必要条件. 无论蕴含关系如何表述, 都要仔细地区分出蕴含式的前件和后件, 否则会将必要条件当成充分条件, 当然就有可能将假命题变成真命题, 或将真命题变成假命题.

(3) 记住24个基本的等值式, 这是学好命题逻辑的关键问题. 这是因为, 在等值演算过程中, 在求主析取范式和主合取范式过程中, 在将公式化成等值的某个全功能联结词集中公式的过程中都要用到基本的等值式.

(4) 要会准确地求出给定公式的主析取范式和主合取范式. 掌握主析取范式与真值表的关系, 主析取范式与成真赋值的关系, 主析取范式与主合取范式的关系. 公式的主合取范式与真值表及成假赋值的关系. 还要弄清不同类型公式的主析取范式及主合取范式的特点, 特别是要知道, 重言式的主析取范式含 2^n(n 为公式中含的命题变项数)个极小项, 重言式的主合取范式为1. 而矛盾式的主析取范式为0, 主合取范式含 2^n 个极大项.

(5) 会用多种方法(如真值表法, 等值演算法, 主析取范式法等)判断公式的类型及判断两个公式是否等值.

(6) 会用等值演算法将一个联结词集中的公式等值地化为另一个联结词全功能集中

的公式.

(7) 要弄清楚推理的形式结构,掌握判断推理是否正确的方法,以及对某些正确的推理会构造它的证明.

以上各点注意事项,在习题解答中均可找到具体说明的实例.

习　　题

1.1　判断下列语句是否为命题,若是命题请指出是简单命题还是复合命题.

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 5 能被 2 整除.

(3) 现在开会吗?

(4) $x+5>0$.

(5) 这朵花真好看呀!

(6) 2 是素数当且仅当三角形有 3 条边.

(7) 雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起.

(8) 2000 年 10 月 1 日天气晴好.

(9) 太阳系以外的星球上有生物.

(10) 小李在宿舍里.

(11) 全体起立!

(12) 4 是 2 的倍数或是 3 的倍数.

(13) 4 是偶数且是奇数.

(14) 李明与王华是同学.

(15) 蓝色和黄色可以调配成绿色.

1.2　将上题中的命题符号化,并讨论它们的真值.

1.3　判断下列各命题的真值.

(1) 若 $2+2=4$, 则 $3+3=6$;

(2) 若 $2+2=4$, 则 $3+3\neq6$;

(3) 若 $2+2\neq4$, 则 $3+3=6$;

(4) 若 $2+2\neq4$, 则 $3+3\neq6$;

(5) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$;

(6) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3\neq6$;

(7) $2+2\neq4$ 当且仅当 $3+3=6$;

(8) $2+2\neq4$ 当且仅当 $3+3\neq6$.

1.4　将下列命题符号化,并讨论其真值.

(1) 如果今天是 1 号,则明天是 2 号;

(2) 如果今天是 1 号,则明天是 3 号.

1.5　将下列命题符号化.

(1) 2 是偶数又是素数.

(2) 小王不但聪明而且用功.

(3) 虽然天气很冷, 老王还是来了.

(4) 他一边吃饭, 一边看电视.

(5) 如果天下大雨, 他就乘公共汽车上班.

(6) 只有天下大雨, 他才乘公共汽车上班.

(7) 除非天下大雨, 否则他不乘公共汽车上班.

(8) 不经一事, 不长一智.

1.6　设 p, q 的真值为 0; r, s 的真值为 1, 求下列各命题公式的真值.

(1) $p \vee (q \wedge r)$;

(2) $(p \backslash\ r) \wedge (\neg q \vee s)$;

(3) $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (r \wedge s))$;

(4) $\neg(p \vee (q \rightarrow (r \wedge \neg p))) \rightarrow (r \vee \neg s)$.

1.7　判断下列命题公式的类型, 方法不限.

(1) $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$;

(2) $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$;

(3) $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$;

(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$;

(5) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$;

(6) $(p \wedge \neg p) \backslash\ q$;

(7) $(p \vee \neg p) \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge \neg r)$;

(8) $(p \backslash\ q) \rightarrow \neg(p \vee q)$;

(9) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$;

(10) $((p \vee q) \rightarrow r) \backslash\ s$.

1.8　用等值演算法证明下列等值式.

(1) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \quad p$;

(2) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \quad (p \rightarrow (q \wedge r))$;

(3) $\neg(p \backslash\ q) \quad ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$.

1.9　用等值演算法判断下列公式的类型.

(1) $\neg((p \wedge q) \rightarrow p)$;

(2) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \backslash\ (p \backslash\ q)$;

(3) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$.

1.10　已知真值函数 F, G, H, R 的真值表如表 1.1 所示. 分别给出用下列联结词集合中的联结词表示的与 F, G, H, R 等值的一个命题公式.

表　1.1

p	q	F	G	H	R
0	0	0	0	1	1

续表

p	q	F	G	H	R
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

(1) $\{\neg, \rightarrow\}$; (2) $\{\neg, \wedge\}$; (3) $\{\neg, \vee\}$; (4) $\{\uparrow\}$; (5) $\{\downarrow\}$.

1.11 设 A, B, C 为任意的命题公式.

(1) 已知 $A \vee C \quad B \vee C$, 问 $A \quad B$ 吗?

(2) 已知 $A \wedge C \quad B \wedge C$, 问 $A \quad B$ 吗?

(3) 已知 $\neg A \quad \neg B$, 问 $A \quad B$ 吗?

1.12 求下列命题公式的主析取范式, 主合取范式, 成真赋值, 成假赋值.

(1) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$;

(2) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$;

(3) $\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$.

1.13 通过求主析取范式判断下列各组命题公式是否等值.

(1) ① $p \rightarrow (q \rightarrow r)$; ② $q \rightarrow (p \rightarrow r)$.

(2) ① $p \uparrow q$; ② $p \downarrow q$.

1.14 一个排队线路, 输入为 A, B, C, 其输出分别为 F_A, F_B, F_C. 在同一时间内只能有一个信号通过. 如果同时有两个或两个以上信号通过时, 则按 A, B, C 的顺序输出. 例如, A, B, C 同时输入时, 只能 A 有输出. 写出 F_A, F_B, F_C 的逻辑表达式, 并化成全功能集 $\{\downarrow\}$ 中的表达式.

1.15 某勘探队有 3 名队员. 有一天取得一块矿样, 3 人的判断如下:

甲说: 这不是铁, 也不是铜;

乙说: 这不是铁, 是锡;

丙说: 这不是锡, 是铁.

经实验室鉴定后发现, 其中一人两个判断都正确, 一个人判对一半, 另一个人全错了. 根据以上情况判断矿样的种类.

1.16 判断下列推理是否正确. 先将命题符号化, 再写出前提和结论, 然后进行判断.

(1) 如果今天是 1 号, 则明天是 5 号. 今天是 1 号. 所以明天是 5 号.

(2) 如果今天是 1 号, 则明天是 5 号. 明天是 5 号. 所以今天是 1 号.

(3) 如果今天是 1 号, 则明天是 5 号. 明天不是 5 号. 所以今天不是 1 号.

(4) 如果今天是 1 号, 则明天是 5 号. 今天不是 1 号. 所以明天不是 5 号.

1.17 构造下面推理的证明.

(1) 前提: $\neg(p \wedge \neg q)$, $\neg q \vee r$, $\neg r$.

结论: $\neg p$.

(2) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow s)$, q, $p \vee \neg r$.

结论: $r \to s$.

(3) **前提**: $p \to q$.

结论: $p \to (p \wedge q)$.

(4) **前提**: $q \to p, q \backslash s, s \backslash t, t \wedge r$.

结论: $p \wedge q \wedge s \wedge r$.

1.18　**如果他是理科学生, 他必学好数学. 如果他不是文科学生, 他必是理科学生. 他没学好数学. 所以他是文科学生.**

判断上面推理是否正确, 并证明你的结论.

以下各题是填充题. 题目要求均为从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

1.19　**给定命题公式如下:**

$$p \vee (q \wedge \neg r).$$

上述公式的成真赋值为 $\boxed{A}$, **成假赋值为** $\boxed{B}$, **公式的类型为** $\boxed{C}$.

供选择的答案

A: ① **无**; ② **全体赋值**; ③ 010, 100, 101, 111; ④ 010, 100, 101, 110, 111.

B: ① **无**; ② **全体赋值**; ③ 000, 001, 011; ④ 000, 010, 110.

C: ① **重言式**; ② **矛盾式**; ③ **可满足式**.

1.20　**给定命题公式如下:**

$$\neg(p \wedge q) \to r.$$

上述公式的主析取范式中含极小项的个数为 $\boxed{A}$, **主合取范式中含极大项的个数为** $\boxed{B}$, **成真赋值为** $\boxed{C}$.

供选择的答案

A: ① 2; ② 3; ③ 5; ④ 0; ⑤ 8.

B: ① 0; ② 8; ③ 5; ④ 3.

C: ① 000, 001, 110; ② 001, 011, 101, 110, 111; ③ **全体赋值**; ④ **无**.

1.21　**给定下列 3 组前提.**

(1) $\neg(p \wedge \neg q), \neg q \vee r, \neg r$;

(2) $(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s$;

(3) $\neg p \vee q, \neg q \vee r, r \to s$.

上述各前提中, (1) **的逻辑结论**(**有效结论**) **为** $\boxed{A}$, (2) **的逻辑结论为** $\boxed{B}$, (3) **的逻辑结论为** $\boxed{C}$.

供选择的答案

A, B, C: ① r; ② q; ③ $\neg p$; ④ s; ⑤ $\neg p \vee \neg q$; ⑥ $p \to s$; ⑦ $p \wedge q$.

1.22　**设计一个符合如下要求的室内照明控制线路: 在房间的门外、门内及床头分别装有控制同一个电灯** F **的** 3 **个开关** A, B, C. **当且仅当一个开关的扳键向上或** 3 **个开关的扳键都向上时电灯亮. 则** F **的逻辑关系式可化简为** $\boxed{A}$.

供选择的答案

A: ① $A \vee B \vee C$; ② $A \vee B \vee C \vee (A \wedge B \wedge C)$;

③ ¬A∀(B∀C)；④ A∀(B∀C).

习 题 解 答

1.1　除(3), (4), (5), (11)外全是命题. 其中, (1), (2), (8), (9), (10), (14), (15)是简单命题, (6), (7), (12), (13)是复合命题.

分析　首先应该注意到, 命题是陈述句, 因而不是陈述句的句子都不是命题. 本题中, (3)为疑问句, (5)为感叹句, (11)为祈使句, 它们都不是陈述句, 所以它们都不是命题.

其次, (4)这个句子是陈述句, 但它表示的判断结果是不确定的, 也就是说, 它可真(如取 x 为 2), 它也可能为假(如取 $x=-10$), 于是(4)不是命题.

其余的句子都是有确定判断结果的陈述句, 因而它们都是命题. 又因为(1), (2), (8), (9), (10), (14), (15)都是简单的陈述句, 因而作为命题, 它们都是简单命题. (6)和(7)各为由联结词“当且仅当”联结起来的复合命题, (12)是由联结词“或”联结的复合命题, 而(13)是由联结词“且”联结起来的复合命题. 这里的“且”为“合取”联结词. 在日常生活中, 合取联结词有许多表述法, 例如, “虽然……, 但是……”、“不仅……, 而且……”、“一面……, 一面……”、“……和……”、“……与……”等. 但要注意, 有时“和”或“与”联结的是主语, 构成简单命题, 例如, (14), (15)中的“与”与“和”就是联结的主语, 这两个命题均为简单命题, 而不是复合命题. 希望读者在遇到“和”或“与”出现的命题时, 要根据命题所陈述的含义加以区分.

1.2　(1) p: $\sqrt{2}$ 是无理数. p 为真命题.

(2) p: 5 能被 2 整除. p 为假命题.

(6) p\ q. 其中, p: 2 是素数, q: 三角形有三条边. 由于 p 与 q 都是真命题, 所以, p\ q 为真命题.

(7) p\ q. 其中, P: 雪是黑色的, q: 太阳从东方升起. 由于 p 为假命题, q 为真命题, 因而 p\ q 为假命题.

(8) p: 2000 年 10 月 1 日天气晴好. 今日(1999 年 2 月 13 日)我们还不知道 p 的真假, 但 p 的真值是确定的(客观存在的), 只是现在不知道而已.

(9) p: 太阳系外的星球上有生物. 它的真值情况同(8)的讨论.

(10) p: 小李在宿舍里. p 的真值由具体情况而定, 是确定的.

(12) $p\vee q$. 其中, p: 4 是 2 的倍数, q: 4 是 3 的倍数. p 为真命题, q 为假命题, $p\vee q$ 为真命题.

(13) $p\wedge q$. 其中, p: 4 是偶数, q: 4 是奇数. 由于 q 是假命题, 所以, $p\wedge q$ 为假命题.

(14) p: 李明与王华是同学. 真值由具体情况而定(是确定的).

(15) p: 蓝色和黄色可以调配成绿色. 这是真命题.

分析　命题的真值是唯一确定的. 有些命题的真值我们立即可知, 有些则不能马上知道, 但它们的真值不会变化, 是客观存在的.

1.3　令 p: $2+2=4$, q: $3+3=6$, 则以下命题分别符号化为

(1) $p\rightarrow q$.

(2) $p \to \neg q$.

(3) $\neg p \to q$

(4) $\neg p \to \neg q$.

(5) $p \backslash q$.

(6) $p \backslash \neg q$.

(7) $\neg p \backslash q$.

(8) $\neg p \backslash \neg q$.

以上命题中,(1),(3),(4),(5),(8)为真命题,其余均为假命题.

分析　本题要求读者记住 $p \to q$ 及 $p \backslash q$ 的真值情况. $p \to q$ 为假当且仅当 p 为真, q 为假,而 $p \backslash q$ 为真当且仅当 p 与 q 真值相同. 由于 p 与 q 都是真命题,在 4 个蕴含式中,只有(2)中前件为真,后件为假,因而(2)为假命题,其余的情况分别为前件与后件均为真,或前件为假的情况,因而都是真命题.

在 4 个等价式中,(5)中等价式两边均为真,而(8)中等价式两边均为假,即两边的真值相同,因而都是真命题. 而(6),(7)中,等价式两边的真值均为一真一假,所以复合命题为假.

1.4　(1) $p \to q$. 其中, p: 今天是 1 号, q: 明天是 2 号.

在这里, p 的真值未知,但若 p 为真,则 q 也为真,且 p 为假时, q 也为假,因而 $p \to q$ 中不会出现前件为真,后件为假的情况,于是 $p \to q$ 为真.

(2) $p \to r$. 其中, p 同(1), r: 明天为 3 号.

在这里,当 p 为真时, r 一定为假, $p \to r$ 为假. 当 p 为假时,无论 r 为真还是为假, $p \to r$ 为真.

1.5　(1) $p \wedge q$. 其中, p: 2 是偶数, q: 2 是素数. 此命题为真命题.

(2) $p \wedge q$. 其中, p: 小王聪明, q: 小王用功.

(3) $p \wedge q$. 其中, p: 天气冷, q: 老王来了.

(4) $p \wedge q$. 其中, p: 他吃饭, q: 他看电视.

(5) $p \to q$. 其中, p: 天下大雨, q: 他乘公共汽车上班.

(6) $q \to p$. 其中, p, q 的含义同(5).

(7) $q \to p$. 其中, p, q 的含义同(5).

(8) $\neg p \to \neg q$. 其中, p: 经一事, q: 长一智.

分析　1° 在前 4 个复合命题中,都使用了合取联结词,都符号化为合取式. 这正说明合取联结词在使用时是很灵活的. 在符号化时,应该注意,不要将联结词部分放入简单命题中. 例如,在(2)中,不能这样写简单命题: p: 小王不但聪明, q: 小王而且用功. 在(4)中不能这样写: p: 他一边吃饭, q: 他一边看电视.

2° 后 4 个复合命题中,都使用了蕴含联结词,符号化为蕴含式. 在这里,关键问题是要分清蕴含式的前件和后件.

$p \to q$ 所表达的基本逻辑关系为, p 是 q 的充分条件,或者说 q 是 p 的必要条件. 这种逻辑关系在叙述上也是很灵活的. 例如,“因为 p,所以 q”“只要 p,就 q”“p 仅当 q”“只有 q 才 p”“除非 q,否则 $\neg p$”“没有 q,就没有 p”等都表达了 q 是 p 的必要条件,因而都符号化

为 $p \to q$ 或 $\neg q \to \neg p$ 的蕴含式.

在(5)中, q 为 p 的必要条件, 因而符号化为 $p \to q$. 而在(6),(7)中, p 成了 q 的必要条件, 因而符号化为 $q \to p$.

在(8)中, 虽然没有出现联结词, 但因两个命题的因果关系可知, 应该符号化为蕴含式.

1.6 (1),(2)的真值为 0,(3),(4)的真值为 1.

分析 1° (1)中公式含 3 个命题变项, 因而它应该有 $2^3 = 8$ 个赋值: 000, 001, …, 111. 题中指派 p, q 为 0, r 为 1, 于是就是考查 001 是该公式 $p \vee (q \wedge r)$ 的成真赋值, 还是成假赋值. 易知 001 是它的成假赋值.

2° 在公式(2),(3),(4)中均含 4 个命题变项, 因而共有 $2^4 = 16$ 个赋值: 0000, 0001, …, 1111. 现在考查 0011 分别是它们的成真赋值, 还是成假赋值, 易知, 它是(2)的成假赋值, 而是(3)和(4)的成真赋值.

1.7 (1),(2),(4),(9)均为重言式,(3),(7)为矛盾式,(5),(6),(8),(10)为非重言式的可满足式.

一般说来, 可用真值表法、等值演算法、主析取范式(主合取范式)法等判断公式的类型.

(1) 对(1)采用两种方法判断它是重言式.

真值表法

表 1.2 给出了(1)中公式的真值表. 由于真值表的最后一列全为 1, 所以,(1)为重言式.

表 1.2

p	q	r	$p \vee q \vee r$	$p \to (p \vee q \vee r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

等值演算法

$$
\begin{aligned}
& p \to (p \vee q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee (p \vee q \vee r) && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee p) \vee q \vee r && \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow\ & 1 \vee q \vee r && \text{(排中律)} \\
\Leftrightarrow\ & 1. && \text{(零律)}
\end{aligned}
$$

由最后一步可知,(1)为重言式.

(2) 用等值演算法判(2)为重言式.

$(p \to \neg p) \to \neg p$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg p) \to \neg p$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow \neg p \to \neg p$ （等幂律）

$\Leftrightarrow p \vee \neg p$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow 1.$ （排中律）

(3) 用等值演算法判(3)为矛盾式.

$\neg(p \to q) \wedge q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \wedge q)$ （结合律）

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0.$ （零律）

由最后一步可知,(3)为矛盾式.

(5) 用两种方法判(5)为非重言式的可满足式.

真值表法

表 1.3

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$q \to \neg p$	$(\neg p \to q) \to (q \to \neg p)$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0

由表 1.3 可知(5)为非重言式的可满足式.

主析取范式法

$(\neg p \to q) \to (q \to \neg p)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \to (\neg q \vee \neg p)$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee \neg p$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge 1) \vee (1 \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2.$

在(3)的主析取范式中不含全部(4个)极小项,所以(3)为非重言式的可满足式.请读者在以上演算每一步的后面,填上所用基本的等值式.

其余各式的类型,请读者自己验证.

分析 1° 真值表法判断公式的类型是万能的.公式 A 为重言式当且仅当 A 的真值

表的最后一列全为 1; A 为矛盾式当且仅当 A 的真值表的最后一列全为 0; A 为非重言式的可满足式当且仅当 A 的真值表最后一列至少有一个 1, 又至少有一个 0. 真值表法不易出错, 但当命题变项较多时, 真值表的行数较多.

2° 用等值演算法判断重言式与矛盾式比较方便, A 为重言式当且仅当 A 与 1 等值; A 为矛盾式当且仅当 A 与 0 等值. 当 A 为非重言式的可满足式时, 经过等值演算可将 A 化简, 然后用观察法找到一个成真赋值, 再找到一个成假赋值, 就可判断 A 为非重言式的可满足式了. 例如, 对(6)用等值演算判断它的类型.

$(p\wedge\neg p)\leftrightarrow q$	
$0\leftrightarrow q$	(矛盾律)
$(0\to q)\wedge(q\to 0)$	(等价等值式)
$(\neg 0\vee q)\wedge(\neg q\vee 0)$	(蕴含等值式)
$(1\vee q)\wedge\neg q$	(同一律)
$1\wedge\neg q$	(零律)
$\neg q.$	(同一律)

到最后一步已将公式化得很简单. 由此可知, 无论 p 取 0 或 1 值, 只要 q 取 0 值, 原公式取值为 1, 即 00 或 10 都为原公式的成真赋值, 而 01, 11 为成假赋值, 于是公式为非重言式的可满足式.

3° 用主析取范式判断公式的类型也是万能的. A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含 2^n(n 为 A 中所含命题变项的个数) 个极小项; A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式中不含任何极小项, 记它的主析取范式为 0; A 为非重言式的可满足式当且仅当 A 的主析取范式中含极小项, 但不是全部的.

当命题变项较多时, 用主析取范式法判公式的类型, 运算量是很大的.

4° 用主合取范式判断公式的类型也是万能的. A 为重言式当且仅当 A 的主合取范式中不含任何极大项, 此时记 A 的主合取范式为 1; A 为矛盾式当且仅当 A 的主合取范式含 2^n 个极大项(n 为 A 中含的命题变项的个数); A 为非重言式的可满足式当且仅当 A 的主析取范式中含极大项, 但不是全部的.

1.8 (1) 从左边开始演算

$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$	
$p\wedge(q\vee\neg q)$	(分配律)
$p\wedge 1$	(排中律)
$p.$	(同一律)

(2) 从右边开始演算

$p\to(q\wedge r)$	
$\neg p\vee(q\wedge r)$	(蕴含等值式)
$(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$	(分配律)
$(p\to q)\wedge(p\to r).$	(蕴含等值式)

(3) 从左边开始演算

$\neg(p\leftrightarrow q)$

$\neg((p \to q) \wedge (q \to p))$

$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$

$\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (p \wedge q))$

$\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q))$

$(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$.

请读者填上每步所用的基本等值式.

本题也可以从右边开始演算

$(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

$\neg\neg((p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q))$

$\neg(\neg(p \vee q) \vee \neg\neg(p \wedge q))$

$\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q))$

$\neg((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q))$

$\neg(1 \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge 1)$

$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$

$\neg((p \to q) \wedge (q \to p))$

$\neg(p \backslash q)$.

读者填上每步所用的基本的等值式.

1.9　(1)

$\neg((p \wedge q) \to p)$

$\neg(\neg(p \wedge q) \vee p)$　　(蕴含等值式)

$p \wedge q \wedge \neg p$　　(德·摩根律)

$(p \wedge \neg p) \wedge q$　　(结合律、交换律)

$0 \wedge q$　　(矛盾式)

0.　　(零律)

由最后一步可知该公式为矛盾式.

(2) $((p \to q) \wedge (q \to p)) \backslash (p \backslash q)$

$(p \backslash q) \backslash (p \backslash q)$.　　(蕴含等值式)

由于较高层次等价号两边的公式相同, 因而此公式无成假赋值, 所以, 它为重言式.

(3) $(\neg p \to q) \to (q \to \neg p)$

$(p \vee q) \to (\neg q \vee \neg p)$　　(蕴含等值式)

$\neg (p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p)$　　(蕴含等值式)

$(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee \neg p$　　(德·摩根律)

$\neg q \vee \neg p$　　(吸收律)

$\neg p \vee \neg q$.　　(交换律)

由最后一步容易观察到, 11 为该公式成假赋值, 因而它不是重言式, 又 00, 01, 10 为成真赋值, 因而它不是矛盾式, 它是非重言式的可满足式.

1.10　题中给出的 F, G, H, R 都是 2 元真值函数. 给出的 5 个联结词集都是全功能集. 可以用观察法或等值演算法寻找与真值函数等值的公式.

首先寻找在各联结词集中与 F 等值的公式.

(1) 设 $A=\neg(p\to q)$, 易知 A 是$\{\neg,\to\}$中公式且与 F 等值, 即 F　A.

(2) 设 $B=p\wedge\neg q$, 易知 B 是$\{\neg,\wedge\}$中公式且与 F 等值, 即 F　B.

(3) 设 $C=\neg(\neg p\vee q)$, 易知 C 是$\{\neg,\vee\}$中公式, 且 F　C.

(4) 设 $D=(p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q))$, 易知 D 为$\{\uparrow\}$中公式, 且 F　D.

(5) 设 $E=(p\downarrow p)\downarrow q$, 易知 E 为$\{\downarrow\}$中公式, 且 F　E.

分析　1° 只要找到一个联结词集中与 F 等值的公式, 经过等值演算就可以找出其他联结词集中与 F 等值的公式. 例如, 已知 $A=\neg(p\to q)$ 是$\{\neg,\to)$ 公式, 且 F　A. 进行以下演算, 就可以找到与 F 等值的其他联结词集中的公式. 对 A 进行等值演算, 消去联结词→, 用¬, ∧取代, 得

$$\begin{aligned} A &= \neg(p\to q)\\ &\quad \neg(\neg p\vee q)\\ &\quad p\wedge\neg q \overset{\text{记为}}{\quad} B. \end{aligned}$$

则 B 为$\{\neg,\wedge\}$中公式, 且 F　B. 再对 A 进行等值演算, 消去→, 用¬, ∨取代, 得

$$\begin{aligned} A &= \neg(p\to q)\\ &\quad \neg(\neg p\vee q) \overset{\text{记为}}{\quad} C. \end{aligned}$$

则 C 为$\{\neg,\vee\}$中公式, 且 F　C. 再对 B 进行演算, 消去¬, →, 用↑取代, 在演算中, 注意, 对于任意的公式 A, 有

$$\neg A \quad \neg(A\wedge A) \quad A\uparrow A.$$

$$\begin{aligned} B &= p\wedge\neg q\\ &\quad p\wedge(q\uparrow q)\\ &\quad \neg\neg(p\wedge(q\uparrow q))\\ &\quad \neg(p\uparrow(q\uparrow q))\\ &\quad (p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q)) \overset{\text{记为}}{\quad} D. \end{aligned}$$

则 D 为$\{\uparrow\}$中公式, 且 F　D. 再对 C 进行演算, 消去¬, ∨, 用↓取代, 在演算中注意, 对于任意的公式 A

$$\neg A \quad \neg(A\vee A) \quad A\downarrow A.$$

$$\begin{aligned} C &= \neg(\neg p\vee q)\\ &\quad \neg p\downarrow q\\ &\quad (p\downarrow p)\downarrow q \overset{\text{记为}}{\quad} E. \end{aligned}$$

则 E 为$\{\downarrow\}$中公式, 且 F　E.

2° 开始找一个与某真值函数等值的公式的方法, 除观察法外, 就是根据该真值函数的真值表, 求它的主析取范式, 而后进行等值演算即可. 例如, 由 G 的真值表可知 G 的主析取范式为 $m_1\vee m_3$, 于是

$$\begin{aligned} G &\quad m_1\vee m_3\\ &\quad (\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q) \end{aligned}$$

$$(\neg p \vee p) \wedge q$$

$$q.$$

由于公式 q 不带联结词，所以，它应该为任何联结词集中的合式公式.

3° 在各联结词集中找到的与某真值函数等值的公式并不唯一. 例如，取

$A = \neg q \to q.$	$(\{\neg, \to\}$ 中公式)
$B = q \wedge q.$	$(\{\neg, \wedge\}$ 中公式)
$C = q \vee q.$	$(\{\neg, \vee\}$ 中公式)
$D = (q \uparrow q) \uparrow (q \uparrow q).$	$(\{\uparrow\}$ 中公式)
$E = (q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q).$	$(\{\downarrow\}$ 中公式)

则 G A B C D E，对于同一个真值函数 G，找到与它等值的形式各异的公式.

对于 H 和 R，请读者自己去完成.

1.11 (1) 对 C 是否为矛盾式进行讨论.

当 C 为矛盾式时，若 $A \vee C$ $B \vee C$，则一定有 A B. 这是因为，此时，$A \vee C$ A，$B \vee C$ B，所以，有

$$A \quad A \vee C \quad B \vee C \quad B.$$

必有

$$A \quad B.$$

而当 C 不是矛盾式时，$A \vee C$ $B \vee C$，不一定有 A B. 举反例如下：

设 A，B，C 均为含命题变项 p, q 的公式. A，B，C 及 $A \vee C$，$B \vee C$ 的真值表如表 1.4 所示，从表 1.4 可看出，$A \vee C$ $B \vee C$，但 A \ B.

表 1.4

p	q	A	B	C	$A \vee C$	$B \vee C$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

(2) 对 C 是否为重言式进行讨论.

若 C 为重言式，则 $A \wedge C$ A，$B \wedge C$ B，于是

$$A \quad A \wedge C \quad B \wedge C \quad B.$$

因而有

$$A \quad B.$$

当 C 不是重言式时，请读者举反例说明，$A \wedge C$ $B \wedge C$ 时，不一定有 A B.

(3) 若 $\neg A$ $\neg B$，则 A B. 证明如下：

A	$\neg\neg A$	(双重否定律)
	$\neg\neg B$	($\neg A$ $\neg B$)
	B.	(双重否定律)

所以

$A \quad B$.

1.12 (1) **设**(1)**中公式为** A.

$$
\begin{aligned}
A \quad & (p \lor (q \land r)) \to (p \land q \land r) \\
& \neg (p \lor (q \land r)) \lor (p \land q \land r) \\
& \neg p \land (\neg q \lor \neg r) \lor (p \land q \land r) \\
& (\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg r) \lor (p \land q \land r) \\
& (\neg p \land \neg q \land (\neg r \lor r)) \lor (\neg p \land (\neg q \lor q) \land \neg r) \lor (p \land q \land r) \\
& (\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r) \\
& \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (p \land q \land r) \\
& (\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \\
& \lor (p \land q \land r) \\
& m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_7 .
\end{aligned}
$$

于是, **公式** A **的主析取范式为**

$$m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_7 .$$

易知, A **的主合取范式为**

$$M_3 \land M_4 \land M_5 \land M_6 .$$

A **的成真赋值为**

$$000, 001, 010, 111.$$

A **的成假赋值为**

$$011, 100, 101, 110.$$

(2) **设**(2)**中公式为** B.

$$
\begin{aligned}
B \quad & (\neg p \to q) \to (\neg q \lor p) \\
& (\neg \neg p \lor q) \to (\neg q \lor p) \\
& (p \lor q) \to (\neg q \lor p) \\
& \neg (p \lor q) \lor (\neg q \lor p) \\
& (\neg p \land \neg q) \lor \neg q \lor p \\
& \neg q \lor p \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{吸收律}) \\
& ((\neg p \lor p) \land \neg q) \lor p \land (\neg q \lor q) \\
& (\neg p \land \neg q) \lor (p \land \neg q) \lor (p \land \neg q) \lor (p \land q) \\
& (\neg p \land \neg q) \lor (p \land \neg q) \lor (p \land q) \\
& m_0 \lor m_2 \lor m_3 .
\end{aligned}
$$

所以, B **的主析取范式为** $m_0 \lor m_2 \lor m_3$.

B **的主合取范式为** M_1.

B **的成真赋值为** 00, 10, 11.

B **的成假赋值为** 01.

(3) **设**(3)**中公式为** C.

$$
\begin{aligned}
C \quad & \neg (p \to q) \land q \land r \\
& \neg (\neg p \lor q) \land q \land r
\end{aligned}
$$

$$(p \wedge \neg q) \wedge q \wedge r$$
$$p \wedge (\neg q \wedge q) \wedge r$$
$$p \wedge 0 \wedge r$$
$$0.$$

所以, C **的主析取范式为** 0.

C **的主合取范式为** $M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$.

C **的成假赋值为** 00, 01, 10, 11.

C **无成真赋值**, C **为矛盾式**.

分析 1° **设公式** A **中含** $n(n \geq 1)$ **个命题变项**, **且** A **的主析取范式中含** $l(0 \leq l \leq 2^n)$ **个极小项**, **则** A **的主合取范式中含** $2^n - l$ **个极大项**. **而且极大项的角标分别为** 0 **到** $2^n - 1$ **这** 2^n **个十进制数中未在** A **的主析取范式的极小项角标中出现过的十进制数**.

在(1)**中**, $n = 3$, A **的主析取范式中含** 4 **个极小项**, **所以**, A **的主合取范式中必含** $2^3 - 4 = 4$ **个极大项**, **它们的角标为** 0 **到** 7 **中未在主析取范式的极小项角标中出现过的** 3, 4, 5, 6. **这样**, **只要知道** A **的主析取范式**, **它的主合取范式自然也就知道了**. **在**(2), (3) **中情况类似**.

2° A **的主析取范式中极小项角标的二进制表示即为** A **的成真赋值**. **在**(1)**中**, **由于主析取范式中的极小项角标分别为** 0, 1, 2, 7, **它们的二进制表示分别为** 000, 001, 010, 111, **所以**, A **的成真赋值为以上各值**. **类似地**, A **的主合取范式中所含极大项角标的二进制表示**, **即为** A **的成假赋值**.

1.13 (1) **首先求** $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ **的主析取范式**.

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$
$$\neg p \vee (\neg q \vee r)$$
$$\neg p \vee \neg q \vee r.$$

由于演算过程较长, **可以分别先求出由** $\neg p$, $\neg q$, r **派生的极小项**. **注意**, **本公式中含** 3 **个命题变项**, **所以**, **极小项长度为** 3.

$$\neg p \quad \neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r)$$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$
$$\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$
$$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$
$$\neg q \quad (\neg p \vee p) \wedge \neg q \wedge (\neg r \vee r)$$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$
$$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$
$$m_0 \vee m_1 \vee m_4 \vee m_5$$
$$r \quad (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$
$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$
$$m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7.$$

利用等幂律可知,

$$p \to (q \to r) \quad m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

类似地, **可求出** $q \to (p \to r)$ **的主析取范式也为上式**, **由于公式的主析取范式的唯一性**, **可知**,

$$(p \to (q \to r)) \quad (q \to (p \to r)).$$

(2) ①

$$\begin{aligned}
& p \uparrow q \\
& \neg (p \wedge q) \\
& \neg p \vee \neg q \\
& (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge \neg q) \\
& (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \\
& (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \\
& m_0 \vee m_1 \vee m_2.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
& p \downarrow q \\
& \neg (p \vee q) \\
& \neg p \wedge \neg q \\
& m_0.
\end{aligned}$$

由于 $p \uparrow q$ **与** $p \downarrow q$ **的主析取范式不同**, **因而它们不等值**, **即** $p \uparrow q \backslash\ p \downarrow q$.

1.14 **设** p: A **输入**;

q: B **输入**;

r: C **输入**.

由题给的条件, **容易写出** F_A, F_B, F_C **的真值表**, **见表** 1.5 **所示**. **由真值表分别写出它们的主析取范式**, **而后**, **将它们都化成与之等值的**$\{\downarrow\}$**中的公式即可**.

表 1.5

p	q	r	F_A	F_B	F_C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

$$\begin{aligned}
F_A \quad & (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
& (p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee r) \vee (p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r) \\
& (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\
& p \wedge (\neg q \vee q) \\
& p
\end{aligned}$$

或

$$\neg\neg(p \vee p)$$
$$\neg(p \downarrow p)$$
$$(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p).$$
$$F_B \quad (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$
$$(\neg p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r)$$
$$(\neg p \wedge q)$$
$$\neg\neg(\neg p \wedge q)$$
$$\neg(p \vee \neg q)$$
$$p \downarrow \neg q$$
$$p \downarrow (q \downarrow q).$$
$$F_C \quad (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$
$$\neg(p \vee q) \wedge r$$
$$(p \downarrow q) \wedge r$$
$$\neg\neg((p \downarrow q) \wedge r)$$
$$\neg(\neg(p \downarrow q) \vee \neg r)$$
$$\neg(p \downarrow q) \downarrow \neg r$$
$$((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (r \downarrow r).$$

分析　在将公式化成$\{\uparrow\}$或$\{\downarrow\}$中公式时,应分以下几步:

(1) 先将公式化成全功能集$\{\neg, \wedge, \vee\}$中的公式.

(2) 使用

$$\neg A \quad \neg(A \wedge A) \quad A \uparrow A,$$

或

$$\neg A \quad \neg(A \vee A) \quad A \downarrow A.$$

使用双重否定律

$$A \wedge B \quad \neg\neg(A \wedge B) \quad \neg(A \uparrow B)$$
$$(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B),$$

或

$$A \vee B \quad \neg\neg(A \vee B) \quad \neg(A \downarrow B)$$
$$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B).$$

使用德·摩根律

$$A \wedge B \quad \neg\neg(A \wedge B) \quad \neg(\neg A \vee \neg B)$$
$$\neg A \downarrow \neg B \quad (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B),$$

或

$$A \vee B \quad \neg\neg(A \vee B) \quad \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg A \uparrow \neg B \quad (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B).$$

1.15　设p:矿样为铁;

q:矿样为铜;

r:矿样为锡.

设

F_1 (**甲全对**) $\wedge$ (**乙对一半**) $\wedge$ (**丙全错**),

$(\neg p \wedge \neg q) \wedge ((\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge r)) \wedge (\neg p \wedge r)$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg p \wedge \neg r \wedge \neg p \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge p \wedge r \wedge \neg p \wedge r)$

$0 \vee 0 \quad 0.$

F_2 (**甲全对**) $\wedge$ (**乙全错**) $\wedge$ (**丙对一半**)

$(\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r) \wedge ((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r))$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg r \wedge p \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge p \wedge r \wedge \neg p \wedge \neg r)$

$0 \vee 0 \quad 0.$

F_3 (**甲对一半**) $\wedge$ (**乙全对**) $\wedge$ (**丙全错**)

$((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg p \wedge r) \wedge (\neg p \wedge r)$

$(\neg p \wedge q \wedge \neg p \wedge r \wedge \neg p \wedge r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg p \wedge r \wedge \neg p \wedge r)$

$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee 0$

$\neg p \wedge q \wedge r.$

F_4 (**甲对一半**) $\wedge$ (**乙全错**) $\wedge$ (**丙全对**)

$((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (p \wedge \neg r) \wedge (p \wedge \neg r)$

$(\neg p \wedge q \wedge \neg \wedge \neg r \wedge p \wedge \neg r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg r \wedge p \wedge \neg r)$

$0 \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r).$

$p \wedge \neg q \wedge \neg r$

F_5 (**甲全错**) $\wedge$ (**乙对一半**) $\wedge$ (**丙全对**)

$(p \wedge q) \wedge ((\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge r)) \wedge (p \wedge \neg r)$

$(p \wedge q \wedge \neg p \wedge \neg r \wedge p \wedge \neg r)$

$\vee (p \wedge q \wedge p \wedge r \wedge p \wedge \neg r)$

$0 \vee 0$

$0.$

F_6 (**甲全错**) $\wedge$ (**乙全对**) $\wedge$ (**丙对一半**)

$(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge r) \wedge ((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$

$(p \wedge q \wedge \neg p \wedge r \wedge p \wedge r)$

$\vee (p \wedge q \wedge \neg p \wedge r \wedge \neg p \wedge \neg r)$

$0 \vee 0$

$0.$

设

F (**一人全对**) $\wedge$ (**一人对一半**) $\wedge$ (**一人全错**)

则 F 为真命题, 并且

$$F \quad F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4 \vee F_5 \vee F_6$$

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad 1.$$

但, 矿样不可能既是铜又是锡, 于是 q, r 中必有假命题, 所以 $\neg p \wedge q \wedge r \quad 0$, 因而必有

$$p \wedge \neg q \wedge \neg r \quad 1.$$

于是, 必有 p 为真, q 与 r 为假, 即矿样为铁.

1.16 令 p: 今天是 1 号;

q: 明天是 5 号.

由于本题给出的推理都比较简单, 因而可以直接判断推理的形式结构是否为重言式.

(1) 推理的形式结构为

$$(p \to q) \wedge p \to q.$$

可以用多种方法判断上公式为重言式, 其实, 本推理满足假言推理定律, 即

$$(p \to q) \wedge p \quad q.$$

所以, 推理正确.

(2) 推理的形式结构为

$$(p \to q) \wedge q \to p.$$

可以用多种方法证明上公式不是重言式. 其实, 当 p 为假(即今天不是 1 号), q 为真(明天真是 5 号), 也即 01 是上面公式的成假赋值, 所以, 推理的形式结构不是重言式, 故, 推理不正确.

(3) 推理的形式结构为

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p.$$

可以用多种方法证明上面公式为重言式, 其实, 它满足拒取式推理定律, 即

$$(p \to q) \wedge \neg q \quad \neg p.$$

所以, 推理正确.

(4) 推理的形式结构为

$$(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q.$$

可以用多种方法证明上公式不是重言式. 01 为上公式的成假赋值, 所以, 推理不正确.

分析 对于前提与结论都比较简单的推理, 最好直接判推理的形式结构是否为重言式, 来判断推理是否正确. 若能观察出一个成假赋值, 立刻可知, 推理不正确.

1.17 (1)

证明	① $\neg q \vee r$	前提引入
	② $\neg r$	前提引入
	③ $\neg q$	①②析取三段论
	④ $\neg(p \wedge \neg q)$	前提引入
	⑤ $\neg p \vee q$	④置换
	⑥ $\neg p$	③⑤析取三段论

(2)

证明	① $p \to (q \to s)$	前提引入

② $q \to (p \to s)$ ①置换
③ q 前提引入
④ $p \to s$ ②③假言推理
⑤ $p \lor \neg r$ 前提引入
⑥ $r \to p$ ⑤置换
⑦ $r \to s$ ④⑥假言三段论

(3)

证明 ① p 附加前提引入
② $p \to q$ 前提引入
③ q ①②假言推理
④ $p \land q$ ①③合取

或者

证明 ① $p \to q$ 前提引入
② $\neg p \lor q$ ① 置换
③ $(\neg p \lor p) \land (\neg p \lor q)$ ②置换
④ $\neg p \lor (p \land q)$ ③置换
⑤ $p \to (p \land q)$ ④置换

(4)

证明 ① s\ t 前提引入
② $(s \to t) \land (t \to s)$ ①置换
③ $t \to s$ ②化简
④ $t \land r$ 前提引入
⑤ t ④化简
⑥ s ③⑤假言推理
⑦ q\ s 前提引入
⑧ $(q \to s) \land (s \to q)$ ⑦置换
⑨ $s \to q$ ⑧化简
0 q ⑥⑨假言推理
,? $q \to p$ 前提引入
,? p 0 ,? 假言推理
,? r ④化简
,? $p \land q \land s \land r$ ⑥0 ,? ,? 合取

分析 由于

$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \to (C \to B)$$
$$\neg (A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \lor (\neg C \lor B)$$
$$\neg (A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land C) \lor B$$
$$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land C \to B,$$

所以,当推理的结论也为蕴含式时,可以将结论的前件作为推理的前提,称为附加前提,并

称使用附加前提的证明方法为附加前提证明法. (3) 中第一个证明, 即为附加前提证明法.

1.18　设 p: 他是理科生;

q: 他是文科生;

r: 他学好数学.

前提　$p \to r$, $\neg q \to p$, $\neg r$.

结论　q.

通过对前提和结论的观察, 知道推理是正确的, 下面用构造证明法给以证明.

证明	① $p \to r$	前提引入
	② $\neg r$	前提引入
	③ $\neg p$	①②拒取式
	④ $\neg q \to p$	前提引入
	⑤ $\neg\neg q$	③④拒取式
	⑥ q	⑤置换

1.19　本题可用多种方法求解. 根据要求回答问题, 解本题最好的方法是真值表法或主析取范式法. 这里采用主析取范式法. 下面给出该公式的主析取范式(过程略)

$$p \vee (q \wedge \neg r)$$
$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7.$$

所以, 成真赋值为 010, 100, 101, 110, 111, 由④给出. 成假赋值为 000, 001, 011, 由③给出. 公式是非重言式的可满足式, 由③给出.

1.20　答案　A: ③; B: ④; C: ②.

分析　解本题的方法不限于求主析取范式或主合取范式, 也可以利用真值表法.

方法 1: 求主析取范式.

$$\neg(p \wedge q) \to r$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r) \vee (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge r$$
$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7. \qquad \text{(过程略)}$$

从上式可知, $\neg(p \wedge q) \to r$ 的主析取范式中含 5 个极小项. 极小项角码的二进制表示为成真赋值, 因而成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111. 由成真赋值立即可知成假赋值为 000, 010, 100, 成假赋值的十进制表示为极大项的角码, 因而极大项为 M_0, M_2, M_4, 故有 3 个极大项.

方法 2: 求主合取范式, 分析类似主析取范式法.

方法 3: 真值表法

由真值表, 求出成真赋值, 将成真赋值转化成十进制数做为极小项的角码, 这样就求出了全部极小项, 也容易求出极大项.

1.21　答案 A: ③; B: ⑤; C: ⑥.

分析　可用构造证明法解此题.

(1)	① $\neg q \vee r$	前提引入
	② $\neg r$	前提引入

③ $\neg q$　　①②析取三段论

④ $\neg(p \wedge \neg q)$　　前提引入

⑤ $\neg p \vee q$　　④置换

⑥ $\neg p$　　③⑤析取三段论

至此可知$\neg p$ **是**(1)**的逻辑结论.**

(2) ① $\neg r \vee s$　　前提引入

② $\neg s$　　前提引入

③ $\neg r$　　①②析取三段论

④ $(p \wedge q) \to r$　　前提引入

⑤ $\neg(p \wedge q)$　　③④拒取式

⑥ $\neg p \vee \neg q$　　⑤置换

至此可知$\neg p \vee \neg q$ **是**(2)**的逻辑结论.**

(3) ① $\neg p \vee q$　　前提引入

② $p \to q$　　①置换

③ $\neg q \vee r$　　前提引入

④ $q \to r$　　③置换

⑤ $p \to r$　　②④假言三段论

⑥ $r \to s$　　前提引入

⑦ $p \to s$　　⑤⑥假言三段论

至此可知 $p \to s$ **是**(3)**的逻辑结论.**

1.22　**答案** A: ④.

分析　**在本题中, 设** A, B, C **分别表示** 3 **个开关状态的命题变项. 开关的扳键向上时, 对应命题变项的真值为** 1, **否则为** 0, **由真值表易知**

$$
\begin{aligned}
F\quad & (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \\
& \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \\
& \neg A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C)) \\
& \vee A \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge C)) \\
& (\neg A \wedge (B \bar{\vee} C)) \vee (A \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \\
& (\neg A \wedge (B \bar{\vee} C)) \vee (A \wedge \neg((B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C))) \\
& (\neg A \wedge (B \bar{\vee} C)) \vee (A \wedge \neg(B \bar{\vee} C)) \\
& A \bar{\vee} (B \bar{\vee} C).
\end{aligned}
$$

第 2 章　一 阶 逻 辑

内 容 提 要

1. 一阶逻辑基本概念

个体词、谓词与量词

在一阶逻辑中,简单命题被分解成主语和谓语两部分,表示主语的词(一般由名词或代词充当)称为个体词.具体或特定的个体词称为个体常项,抽象的或泛指的个体词称为个体变项,个体变项的取值范围称为个体域.由宇宙间一切事物组成的个体域称为全总个体域.

表示谓语的用来刻画个体词性质或个体词之间关系的词称为谓词.谓词分为谓词常项和谓词变项.一般地,用 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示任意的含 $n(n \geq 1)$ 个命题变项的 n 元谓词,它是以个体变项的个体域为定义域,以$\{0, 1\}$为值域的 n 元函数. $n=1$ 时, $P(x)$ 表示 x 具有性质 P; $n \geq 2$ 时, $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间有关系 P. 为了讨论个体域中具有共同性质的个体的其他性质,首先要引进表示其共同性质的谓词,称这样的谓词为特性谓词.

表示数量的词称为量词.表示存在性的量词称为存在量词,用“ v ”表示.表示全局性的量词称为全称量词,用“ " ”表示.

2. 一阶逻辑公式及其解释

字母表　(1) **个体常项**: $a, b, c, \cdots, a_i, b_i, c_i, \cdots, i \geq 1$;

(2) **个体变项**: $x, y, z, \cdots, x_i, y_i, z_i, \cdots, i \geq 1$;

(3) **函数符号**: $f, g, h, \cdots, f_i, g_i, h_i, \cdots, i \geq 1$;

(4) **谓词符号**: $F, G, H, \cdots, F_i, G_i, H_i, \cdots, i \geq 1$;

(5) **量词符号**: v ," ;

(6) **联结词**: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, \ ;

(7) **括号与逗号**: (,), ’.

项　(1) 个体常项和个体变项是项;

(2) 若 $\varphi x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为任意的 n 元函数, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项,则 $\varphi t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是项;

(3) 只有有限次地应用(1),(2)生成的符号串才是项.

原子公式　设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是任意的 n 元谓词, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项,则称 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 为原子公式.

合式公式　(1) 原子公式是合式公式;

(2) 若 A 为合式公式,则($\neg$A)也是;

(3) 若 A, B 是合式公式,则$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, (A \ B)也是合式公式;

(4) 若 A 是合式公式, 则" xA, v xA 也是合式公式;

(5) 只有有限次地应用(1)～(4)生成的符号串才是合式公式, 简称公式.

指导变元、辖域 在公式" xA 和v xA 中, 称 x 为指导变元, 称 A 为相应量词的辖域. 当 x 为指导变元时, A 中 x 的所有出现都称为是约束出现, A 中不是约束出现的个体变项称为自由出现. 若在" xA 和v xA 中, 无自由出现的个体变项, 则称它们均为闭式.

解释 一个解释由 4 个部分组成:

(1) 非空个体域 D;

(2) D 中一部分特定元素;

(3) D 上一些特定的函数;

(4) D 上一些特定的谓词.

公式的分类 若 A 在任何解释下均为真, 则称 A 为逻辑有效式或永真式; 若 A 在任何解释下均为假, 则称 A 为矛盾式; 若 A 至少存在一个成真的解释, 则称 A 为可满足式(逻辑有效式一定是可满足式).

代换实例 设 A_0 是含 n 个命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式, 用一阶逻辑公式 $A_i(1 \leq i \leq n)$ 处处取代 A_0 中的 p_i, 所得公式 A 称为 A_0 的代换实例. 特别地, 若 A_0 为命题逻辑中的重言式, 则称它的代换实例 A 为一阶逻辑中的重言式.

主要定理

定理 2.1 一阶逻辑重言式都是逻辑有效式.

定理 2.2 闭式在任何解释下不是真就是假.

3. 一阶逻辑等值式

等值式 设 A, B 为一阶逻辑公式, 若 A\ B 为逻辑有效式, 则称 A 与 B 等值, 记作 A B.

前束范式 设 A 为一个一阶逻辑公式, 若 A 具有如下形式:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k B,$$

则称 A 为前束范式, 其中 $Q_i(1 \leq i \leq k)$ 为" 或v , 且 B 中不含量词.

主要定理

定理 2.3 任何一阶逻辑公式都存在着与其等值的前束范式(但形式不唯一).

约束变项换名规则 设 x 是 A(x) 中仅自由出现的个体变项, y 是不出现在 A(x) 中的个体变项, 则

$$QxA(x) \quad QyA(y),$$

其中 Q 为" 或v .

注意, x, y 分别在 QxA(x) 和 QyA(y) 中约束出现.

自由变项换名规则 设 x 是 A(x, z) 中仅自由出现的个体变项, y 是不出现在 A(x, z) 中的个体变项, 则

$$A(x, z) \quad A(y, z)$$

且

$$QzA(x, z) \quad QzA(y, z),$$

其中 Q 为 $\forall$ 或 $\exists$.

注意, x, y 分别在 $QzA(x,z)$ 和 $QzA(y,z)$ 中自由出现.

量词否定等值式

(1) $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$;

(2) $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$.

量词辖域收缩与扩张等值式

设公式 B 中不含 x 的出现.

(1) $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$;

(2) $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$;

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$;

(4) $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$;

(5) $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$;

(6) $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$;

(7) $\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$;

(8) $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$.

量词分配等值式

(1) $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$;

(2) $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$.

消去量词等值式

设个体域为有穷集合 $D=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 则

(1) $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$;

(2) $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n)$.

4. 一阶逻辑推理理论

一阶逻辑中推理的形式结构与推理定律的定义同命题逻辑, 只是出现的公式均为一阶逻辑公式. 推理规则中, 除了用到命题逻辑中给出的 11 条外, 还有下面 4 条推理规则, 仍以推理图式给出.

全称量词消去规则(UI 规则)

$$\frac{\forall xA(x)}{\text{所以}\quad A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall xA(x)}{\text{所以}\quad A(c)},$$

成立的条件为

(1) x 为 $A(x)$ 中自由出现的个体变项;

(2) 第一式中的 y 是任意的不在 $A(x)$ 中约束出现的个体变项;

(3) 第二式中的 C 是任意的个体常项;

(4) 在构造证明时是用第一式还是第二式要根据具体情况而定.

全称量词引入规则(UG 规则)

$$\frac{A(y)}{\text{所以}\quad \forall xA(x)}$$

上式成立的条件为

(1) y 在 $A(y)$ 中自由出现，且 y 取个体域中任何值时，A 均为真；

(2) 取代 y 的 x 不能在 $A(y)$ 中约束出现.

存在量词引入规则(EG 规则)

$$\begin{array}{ll} & A(c) \\ \hline \text{所以} & \exists x A(x) \end{array}$$

上式成立的条件为

(1) c 为特别的使 A 为真的个体常项；

(2) 取代 c 的 x 不能已在 $A(c)$ 中出现过.

存在量词消去规则(EI 规则)

$$\begin{array}{ll} & \exists x A(x) \\ \hline \text{所以} & A(c) \end{array}$$

上式成立的条件为

(1) c 是使 A 为真的特定的个体常项；

(2) c 不在 $A(x)$ 中出现过；

(3) $A(x)$ 中除 x 外，不能有另外的自由出现的个体变项.

5. 小结

学习第 2 章(一阶逻辑)要注意以下几点.

(1) 同一个命题在不同个体域内可能有不同的符号化形式，同时也可能有不同的真值，因而在将一个命题符号化之前，必须弄清个体域，若没有指定的个体域，就采用全总个体域，即宇宙间一切事物组成的个体域.

(2) 在将命题符号化时，要特别注意量词与联结词的搭配. 经常的情况是全称量词 $\forall$ 与蕴含联结词 $\rightarrow$ 的搭配，存在量词 $\exists$ 与合取联结词 $\wedge$ 的搭配. 据此，经常使用的公式，我们不妨称它们为基本公式，有下面两种形式：

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \qquad ①$$

$$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \qquad ②$$

其中 $F(x)$，$G(x)$ 为任意两个 1 元谓词. $F(x)$ 是特性谓词，它表示个体域中有性质 F 的个体.

将①翻译成自然语言应该是

“对于任意的个体 x 而言，如果 x 具有性质 F，则 x 也有性质 G.”

将②翻译成自然语言应该是

“存在个体 x，x 具有性质 F 并且 x 具有性质 G.”

初学数理逻辑的人，往往用如下的③，④

$$\forall x(F(x) \wedge G(x)), \qquad ③$$

$$\exists x(F(x) \rightarrow G(x)) \qquad ④$$

分别代替①与②，这是不可以的. 其实③与①的含义，②与④的含义是完全不同的. ③与④

翻译成自然语言应该分别是

“所有的个体 x,都有性质 F 并且有性质 G.”

与

“存在个体 x,若 x 有性质 F,则 x 有性质 G.”

显然①与③,②与④是有区别的,用错的结果将使真命题变成假命题,或假命题变成真命题.在习题解中给出实例.

(3) 要知道一阶逻辑公式共分三种类型,即逻辑有效式(永真式),矛盾式和可满式.要记住闭式的主要特征,即闭式在任何解释下都不是真就是假,不会出现真值不确定的情况,因而闭式在任何解释下都应该是命题.

(4) 要记住主要的等值式,即量词否定等值式,量词辖域收缩与扩张等值式,量词分配等值式,在有限个体域内消去量词等值式.会用约束变项和自由变项换名规则进行等值演算,以便求出给定公式的前束范式.

(5) 在一阶逻辑构造推理的证明中,要特别注意 UI,UG,EI,EG 规则成立的条件,否则会产生错误.

习　　题

2.1　在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 鸟都会飞翔.

(2) 并不是所有的人都爱吃糖.

(3) 有人爱看小说.

(4) 没有不爱看电影的人.

2.2　在一阶逻辑中将下列命题符号化,并指出各命题的真值.个体域分别为

(a) 自然数集合 N(N 中含 0).

(b) 整数集合 Z.

(c) 实数集合 R.

(1) 对于任意的 x,均有 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

(2) 存在 x,使得 $x + 2 = 0$.

(3) 存在 x,使得 $5x = 1$.

2.3　在一阶逻辑中,将下面命题符号化.

(1) 每个大学生不是文科生就是理科生.

(2) 有些人喜欢所有的花.

(3) 没有不犯错误的人.

(4) 在北京工作的人未必都是北京人.

(5) 任何金属都可以溶解在某种液体中.

(6) 凡对顶角都相等.

2.4　将下列各式翻译成自然语言,然后在不同个体域中确定它们的真值.

(1) $\forall x \exists y (x \cdot y = 0)$;

(2) $\exists x \forall y(x \cdot y = 0)$;

(3) $\forall x \exists y(x \cdot y = 1)$;

(4) $\exists x \forall y(x \cdot y = 1)$;

(5) $\forall x \exists y(x \cdot y = x)$;

(6) $\exists x \forall y(x \cdot y = x)$;

(7) $\forall x \forall y \exists z(x - y = z)$.

个体域分别为

(a) 实数集合 R.

(b) 整数集合 Z.

(c) 正整数集合 Z^+.

(d) $R - \{0\}$(非零实数集合).

2.5 (1) 试给出解释 I_1, 使得

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \quad 与 \quad \forall x(F(x) \wedge G(x))$$

在 I_1 下具有不同的真值.

(2) 试给出解释 I_2, 使得

$$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \quad 与 \quad \exists x(F(x) \rightarrow G(x))$$

在 I_2 下具有不同的真值.

2.6 设解释 R 如下: D_R 是实数集, D_R 中特定元素 $a = 0$, D_R 中特定函数 $f(x, y) = x - y$, 特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x < y$. 在解释 R 下, 下列哪些公式为真? 哪些为假?

(1) $\forall x F(f(a, x), a)$;

(2) $\forall x \forall y(\neg F(f(x, y), x))$;

(3) $\forall x \forall y \forall z(F(x, y) \rightarrow F(f(x, z), f(y, z)))$;

(4) $\forall x \exists y F(x, f(f(x, y), y))$.

2.7 给出解释 I, 使下面两个公式在解释 I 下均为假, 从而说明这两个公式都不是逻辑有效式(永真式).

(1) $\forall x(F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$;

(2) $(\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))$.

2.8 试寻找一个闭式 A, 使 A 在某些解释下为真, 而在另外一些解释下 A 为假.

2.9 试给出一个非封闭的公式 A, 使 A 存在解释 I, 在 I 下 A 的真值是不确定的, 即 A 仍不是命题.

2.10 设个体域 $D = \{a, b, c\}$, 在 D 下验证量词否定等值式.

(1) $\neg \forall x A(x) \quad \exists x \neg A(x)$;

(2) $\neg \exists x A(x) \quad \forall x \neg A(x)$.

2.11 在一阶逻辑中将下面命题符号化, 并且要求只能使用全称量词.

(1) 没有人长着绿色头发.

(2) 有的北京人没去过香山.

2.12 设个体域 $D = \{a, b, c\}$, 消去下列各公式中的量词.

(1) $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$;

(2) $\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$;

(3) $\exists x\forall yH(x,y)$.

2.13　**设解释 I 为：个体域** $D=\{-2,3,6\}$，**一元谓词** $F(x): x\leq 3$, $G(x): x>5$, $R(x): x\leq 7$. **在 I 下求下列各式的真值.**

(1) $\forall x(F(x)\wedge G(x))$;

(2) $\forall x(R(x)\rightarrow F(x))\vee G(5)$;

(3) $\exists x(F(x)\vee G(x))$.

2.14　**求下列各式的前束范式，要求使用约束变项换名规则.**

(1) $\neg\exists xF(x)\rightarrow\forall yG(x,y)$;

(2) $\neg(\forall xF(x,y)\vee\exists yG(x,y))$.

2.15　**求下列各式的前束范式，要求使用自由变项换名规则.**

(1) $\forall xF(x)\vee\exists yG(x,y)$;

(2) $\exists x(F(x)\wedge\forall yG(x,y,z))\rightarrow\exists zH(x,y,z)$.

2.16　**指出下面推理中的错误.**

(1) ① $\forall xF(x)\rightarrow G(x)$　　**前提引入**

② $F(y)\rightarrow G(y)$　　①UI

(2) ① $\forall x(F(x)\vee G(x))$　　**前提引入**

② $F(a)\vee G(b)$　　①UI

(3) ① $F(x)\rightarrow G(x)$　　**前提引入**

② $\exists y(F(y)\rightarrow G(y))$　　①EG

(4) ① $F(x)\rightarrow G(c)$　　**前提引入**

② $\exists x(F(x)\rightarrow G(x))$　　①EG

(5) ① $F(a)\rightarrow G(b)$　　**前提引入**

② $\exists x(F(x)\rightarrow G(x))$　　①EG

(6) ① $\exists x(F(x)\wedge G(x))$　　**前提引入**

② $\exists y(H(y)\wedge R(y))$　　**前提引入**

③ $F(c)\wedge G(c)$　　①EI

④ $F(c)$　　③**化简**

⑤ $H(c)\wedge R(c)$　　②EI

⑥ $H(c)$　　⑤**化简**

⑦ $F(c)\wedge H(c)$　　④⑥**合取**

⑧ $\exists x(F(x)\wedge H(x))$　　⑦EG

2.17　**构造下面推理的证明.**

(1) **前提**：$\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$,

$\exists xF(x)$.

结论：$\exists xR(x)$.

(2) **前提**：$\forall x(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge R(x)))$, $\exists xF(x)$.

结论：$\exists x(F(x)\wedge R(x))$.

2.18　在一阶逻辑中构造下面推理的证明.

大熊猫都产在中国，欢欢是大熊猫，所以，欢欢产在中国.

2.19　在一阶逻辑中构造下面推理的证明.

有理数都是实数，有的有理数是整数. 因此，有的实数是整数.

题 2.20～2.23 为填充题. 题目要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

2.20　取个体域为整数集，给定下列各公式.

(1) $\forall x \exists y(x \cdot y = 0)$;

(2) $\forall x \exists y(x \cdot y = 1)$;

(3) $\exists y \exists x(x \cdot y = 2)$;

(4) $\forall x \forall y \exists z(x - y = z)$;

(5) $x - y = -y + x$;

(6) $\forall x \forall y(x \cdot y = y)$;

(7) $\forall x(x \cdot y = x)$;

(8) $\exists x \forall y(x + y = 2y)$.

在上面公式中，真命题的为$\boxed{A}$，假命题的为$\boxed{B}$.

供选择的答案

A：① (1)，(3)，(4)，(6)；

② (3)，(4)，(5)；

③ (1)，(3)，(4)，(5)；

④ (3)，(4)，(6)，(7).

B：① (2)，(3)，(6)；

② (2)，(6)，(8)；

③ (1)，(2)，(6)，(7)；

④ (2)，(6)，(8)，(7).

2.21　给定下列各公式.

(1) $(\neg \exists x F(x) \vee \forall y G(y)) \wedge (F(u) \rightarrow \forall z H(z))$;

(2) $\exists x F(y, x) \rightarrow \forall y G(y)$;

(3) $\forall x(F(x, y) \rightarrow \forall y G(x, y))$.

$\boxed{A}$是(1)的前束范式，$\boxed{B}$是(2)的前束范式，$\boxed{C}$是(3)的前束范式.

答案不止一个的，请全部给出来.

供选择的答案

A，B，C，D：

① $\exists x \forall y \forall z((\neg F(x) \vee G(y)) \wedge (F(u) \rightarrow H(z))$;

② $\forall x \forall y \forall z((\neg F(x) \vee G(y)) \wedge (F(u) \rightarrow H(z))$;

③ $\exists x \forall y(F(y, x) \rightarrow G(y))$;

④ $\forall x \forall y(F(z, x) \rightarrow G(y))$;

⑤ $\forall x \forall y(\neg F(z, x) \vee G(y))$;

⑥ $\forall x \exists y(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$;

⑦ $\forall x \forall y(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$;

⑧ $\forall y \forall x(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$;

⑨ $\forall y \forall x(\neg F(z,x)\vee G(y))$.

2.22 **在一阶逻辑中给出下面 4 个推理.**

(1) **前提**: $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \exists yF(y)$.

结论: $\exists yG(y)$.

(2) **前提**: $\exists x(F(x)\wedge G(x))$.

结论: $\forall yF(y)$.

(3) **前提**: $\exists xF(x), \exists xG(x)$.

结论: $\exists y(F(y)\wedge G(y))$.

(4) **前提**: $\forall x(F(x)\rightarrow H(x)), \neg H(y)$.

结论: $\forall x(\neg F(x))$.

在以上 4 个推理中, $\boxed{A}$ **是正确的.**

供选择的答案

A: ① (1), (2), (3);

② (1), (2), (3), (4);

③ (2), (3);

④ (1), (2);

⑤ (1), (4).

2.23 **在一阶逻辑中构造下面推理的证明.**

每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车. 每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车. 有的人不喜欢骑自行车. 因而有的人不喜欢步行.

命题符号化: $F(x)$: x **喜欢步行**. $G(x)$: x **喜欢坐汽车**. $H(x)$: x **喜欢骑自行车**.

前提: $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x)), \forall x(G(x)\vee H(x))$,

$\exists x(\neg H(x))$.

结论: $\exists x(\neg F(x))$.

证明

ⓐ $\exists x(\neg H(x))$ **前提引入**

ⓑ $\neg H(c)$

ⓒ $\forall x(G(x)\vee H(x))$ **前提引入**

ⓓ $G(c)\vee H(c)$

ⓔ $G(c)$

ⓕ $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$ **前提引入**

ⓖ $F(c)\rightarrow\neg G(c)$ ⓕUI

ⓗ $\neg F(c)$

ⓘ $\exists x(\neg F(x))$ ⓗEG

在上述推理中, ⓑ **后用的推理规则为** $\boxed{A}$, ⓓ **后用的推理规则为** $\boxed{B}$, ⓔ **后用的是由**ⓑ

ⓓ得到的推理规则$\boxed{C}$，ⓗ后用的是由ⓔⓖ得到的推理规则$\boxed{D}$.

供选择的答案

A, B, C, D: ① UI; ② EI; ③ UG; ④ EG; ⑤ 拒取式; ⑥ 假言推理; ⑦ 析取三段论.

习 题 解 答

2.1　本题没有给出个体域，因而使用全总个体域.

(1) 令 $F(x)$: x 是鸟.

$G(x)$: x 会飞翔.

命题符号化为

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)).$$

(2) 令 $F(x)$: x 为人.

$G(x)$: x 爱吃糖.

命题符号化为

$$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

或者

$$\exists x(F(x) \land \neg G(x)).$$

(3) 令 $F(x)$: x 为人.

$G(x)$: x 爱看小说.

命题符号化为

$$\exists x(F(x) \land G(x)).$$

(4) 令 $F(x)$: x 为人.

$G(x)$: x 爱看电视.

命题符号化为

$$\neg\exists x(F(x) \land \neg G(x)).$$

分析　1°　如果没指出要求什么样的个体域，就使用全总个体域，使用全总个体域时，往往要使用特性谓词. (1)～(4)中的 $F(x)$ 都是特性谓词.

2°　初学者经常犯的错误是，将类似于(1)中的命题符号化为

$$\forall x(F(x) \land G(x)).$$

即用合取联结词取代蕴含联结词，这是万万不可的. 将(1)中命题叙述得更透彻些，是说"对于宇宙间的一切事物而言，如果它是鸟，则它会飞翔."因而符号化应该使用联结词→，而不能使用∧. 若使用∧，使(1)中命题变成了"宇宙间的一切事物都是鸟并且都会飞翔."这显然改变了原命题的意义.

3°　(2)与(4)中两种符号化公式是等值的，请读者正确的使用量词否定等值式，证明(2)，(4)中两公式各为等值的.

2.2　(1) 在(a)，(b)，(c)中均符号化为

$$\forall x F(x),$$

其中 $F(x)$: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. 此命题在(a)，(b)，(c)中均为真命题.

(2) 在(a), (b), (c)中均符号化为

$$\exists xG(x),$$

其中 $G(x): x+2=0$. 此命题在(a)中为假命题, 在(b), (c)中均为真命题.

(3) 在(a), (b), (c)中均符号化为

$$\exists xH(x),$$

其中 $H(x): 5x=1$. 此命题在(a), (b)中均为假命题, 在(c)中为真命题.

分析　1° 命题的真值与个体域有关.

2° 有的命题在不同个体域中, 符号化的形式不同. 考虑命题

"人都呼吸."

在个体域为人类集合时, 应符号化为

$$\forall xF(x).$$

这里, $F(x)$: x 呼吸, 没有引入特性谓词.

在个体域为全总个体域时, 应符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)),$$

这里, $F(x)$: x 为人, 且 $F(x)$ 为特性谓词. $G(x)$: x 呼吸.

2.3　因题目中未给出个体域, 因而应采用全总个体域.

(1) 令: $F(x)$: x 是大学生. $G(x)$: x 是文科生. $H(x)$: x 是理科生. 命题符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow(G(x)\vee H(x))).$$

(2) 令 $F(x)$: x 是人. $G(y)$: y 是花. $H(x,y)$: x 喜欢 y. 命题符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y))).$$

(3) 令 $F(x)$: x 是人. $G(x)$: x 犯错误. 命题符号化为

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)),$$

或另一种等值的形式为

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)).$$

(4) 令 $F(x)$: x 在北京工作. $G(x)$: x 是北京人. 命题符号化为

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)),$$

或

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)).$$

(5) 令 $F(x)$: x 是金属. $G(y)$: y 是液体. $H(x,y)$: x 溶解在 y 中. 命题符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y))).$$

(6) 令 $F(x,y)$: x 与 y 是对顶角. $H(x,y)$: x 与 y 相等. 命题符号化为

$$\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow H(x,y)).$$

分析　(2), (5), (6)中要使用 2 元谓词, 用它们来描述事物之间的关系.

2.4　(1) 对所有的 x, 存在着 y, 使得 $x\cdot y=0$. 在(a), (b)中为真命题, 在(c), (d)中为假命题.

(2) 存在着 x, 对所有的 y, 都有 $x\cdot y=0$. 在(a), (b)中为真命题, 在(c), (d)中为假命题.

(3) 对所有 x, 存在着 y, 使得 $x\cdot y=1$. 在(a), (b), (c)中均为假命题, 而在(d)中为

真命题.

(4) 存在着 x，对所有的 y，都有 $x \cdot y = 1$. 在(a)，(b)，(c)，(d)中都是假命题.

(5) 对所有的 x，存在着 y，使得 $x \cdot y = x$. 在(a)，(b)，(c)，(d)中都是真命题.

(6) 存在 x，对所有的 y，都有 $x \cdot y = x$. 在(a)，(b)中为真命题，在(c)，(d)中为假命题.

(7) 对于所有的 x 和 y，存在着 z，使得 $x - y = z$. 在(a)，(b)中为真命题，在(c)，(d)中为假命题.

2.5 (1) 取解释 I_1 为：个体域 $D = R$(实数集合)，$F(x)$：x 为有理数，$G(x)$：x 能表示成分数. 在 I_1 下，$\forall x(F(x) \to G(x))$ 的含义为

"对于任何实数 x 而言，若 x 为有理数，则 x 能表示成分数."简言之为"有理数都能表示成分数."在此蕴含式中，当前件 $F(x)$ 为真时，后件 $G(x)$ 也为真，不会出现前件为真，后件为假的情况，所以在 I_1 下，$\forall x(F(x) \to G(x))$ 为真命题.

在 I_1 下，$\forall x(F(x) \wedge G(x))$ 的含义为

"对于任何实数 x，x 既为有理数，又能表示成分数."

取 $x = \sqrt{2}$，则 $F(\sqrt{2}) \wedge G(\sqrt{2})$ 显然为假，所以，在 I_1 下 $\forall x(F(x) \wedge G(x))$ 为假命题.

(2) 取解释 I_2 为：个体域 $D = N$(自然数集合)，$F(x)$：x 为奇数，$G(x)$：x 为偶数. 在 I_2 下，$\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 的含义为

"存在自然数 x，x 既为奇数，又为偶数."

显然它为假命题. 在 I_2 下 $\exists x(F(x) \to G(x))$ 的含义为

"存在着自然数 x，如果 x 为奇数，则 x 必为偶数."

取 $x = 2$，则 $F(2)$ 为假，于是 $F(2) \to G(2)$ 为真，这表明 $\exists x(F(x) \to G(x))$ 为真命题.

分析　本题说明

$$\forall x(F(x) \to G(x)) \not\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G(x)),$$
$$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \not\Leftrightarrow \exists x(F(x) \to G(x)).$$

这里，$A \not\Leftrightarrow B$ 表示 A 与 B 不等值，以后遇到 $\not\Leftrightarrow$，含义相同.

在一阶逻辑中，将命题符号化时，当引入特性谓词(如题中的 $F(x)$)之后，全称量词 $\forall$ 后往往使用联结词 $\to$，而不使用 $\wedge$. 而存在量词 $\exists$ 后往往使用 $\wedge$，而不使用 $\to$. 如果用错了，会将真命题变成假命题，或者将假命题变成真命题.

2.6 在解释 R 下各式分别化为

(1) $\forall x(-x < 0)$；

(2) $\forall x \forall y(x - y \geq x)$；

(3) $\forall x \forall y \forall z((x < y) \to (x - z < y - z))$；

(4) $\forall x \exists y(x < x - 2y)$.

易知，在解释 R 下，(1)，(2)为假；(3)，(4)为真.

2.7 给定解释 I 为：个体域 $D = N$(自然数集合)，$F(x)$：x 为奇数，$G(x)$：x 为偶数.

(1) 在解释 I 下，公式被解释为

"如果所有的自然数不是奇数就是偶数，则所有自然数全为奇数，或所有自然数全为

偶数.’因为蕴含式的前件为真,后件为假,所以真值为假.

(2) 在 I 下,公式被解释为

“如果存在着自然数为奇数,并且存在着自然数为偶数,则存在着自然数既是奇数,又是偶数.”

由于蕴含式的前件为真,后件为假,所以真值为假.

分析 本题说明全称量词对析取不满足分配律,存在量词对合取不满足分配律.

2.8 令 $A=\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$,在 A 中,无自由出现的个体变项,所以 A 为闭式.

给定解释 I_1: 个体域 $D=Z$(整数集合),$F(x)$: x 为正数,$G(x)$: x 为负数,$L(x,y)$: $x>y$.在 I_1 下,A 的含义为

“对于任意的整数 x 和 y,如果 x 为正整数,y 为负整数,则 $x>y$.”

这是真命题.

设解释 I_2 为: 个体域 $D=R$(R 为实数集合),$F(x)$: x 为有理数,$G(y)$: y 为无理数,$L(x,y)$: $x\leq y$.在 I_2 下,A 的含义为

“对于任意的实数 x 和 y,如果 x 为有理数,y 为无理数,则 $x\geq y$.”

这是假命题.

分析 闭式在任何解释下不是真就是假,不可能给出解释 I,使得闭式在 I 下真值不确定,这一点是闭式的一个重要特征.而非封闭的公式就没有这个特征.

2.9 取 $A_1=L(f(x,y),g(x,y))$ 和 $A_2=\forall x(f(x,y),x)$,则 A_1 和 A_2 都是非封闭的公式,在 A_1 中,x,y 都是自由出现的,在 A_2 中,y 是自由出现的.

取解释 I 为,个体域 $D=N$(N 为自然数集合),$f(x,y)=x+y$, $g(x,y)=x\cdot y$, $L(x,y)$ 为 $x=y$.在 I 下,A_1 为 $x+y=x\cdot y$,它的真值不确定.例如,$x=y=2$ 时,$x+y=x\cdot y$ 为真;$x=2,y=3$ 时,$x+y=x\cdot y$ 为假,所以在 I 下,A_1 真值不确定,即在 I 下,A_1 不是命题.

在 I 下,A_2 为 $\forall x(x+y=x)$,当 $y=0$ 时,它为真;$y\neq 0$ 时为假,在 I 下 A_2 的真值也不确定.

分析 非闭式与闭式的显著区别是,前者可能在某些解释下,真值不确定,而后者对于任何解释真值都确定,即不是真就是假.

当然非闭式也可能是逻辑有效式(如 $F(x)\rightarrow F(x)$),也可能为矛盾式(如 $F(x)\wedge\neg F(x)$),也可能不存在真值不确定的解释.

2.10 (1)

$\neg\forall xA(x)$ $\neg(A(a)\wedge A(b)\wedge A(c))$ (消去量词等值式)

$\neg A(a)\vee\neg A(b)\vee\neg A(c)$ (德·摩根律)

$\exists x\neg A(x)$. (消去量词等值式)

(2)

$\neg\exists xA(x)$ $\neg(A(a)\vee A(b)\vee A(c))$ (消去量词等值式)

$\neg A(a)\wedge\neg A(b)\wedge\neg A(c)$ (德·摩根律)

$\forall x\neg A(x)$. (消去量词等值式)

2.11 (1) 令$F(x)$: x 为人.

$G(x)$: x 长着绿色头发.

本命题直接符号化为

$$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)).$$

而

$$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

$$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)) \qquad \text{(量词否定等值式)}$$

$$\forall x(\neg F(x)\vee\neg G(x)) \qquad \text{(德 ¡¤摩根律)}$$

$$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x)). \qquad \text{(蕴含等值式)}$$

最后一步得到的公式满足要求(使用全称量词),将它翻译成自然语言,即为

“所有的人都不长绿色头发.”

可见得“没有人长着绿色头发.”与“所有人都不长绿色头发.”是同一命题的两种不同的叙述方法.

(2) 令$F(x)$: x 是北京人.

$G(x)$: x 去过香山.

命题直接符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)).$$

而

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\neg\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)) \qquad \text{(双重否定律)}$$

$$\neg\forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x)) \qquad \text{(量词否定等值式)}$$

$$\neg\forall x(\neg F(x)\vee G(x)) \qquad \text{(德 ¡¤摩根律)}$$

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)). \qquad \text{(蕴含等值式)}$$

最后得到的公式满足要求(只含全称量词),将它翻译成自然语言,即为

“并不是北京人都去过香山.”

可见,“有的北京人没去过香山.”与“并不是北京人都去过香山.”是同一命题的不同的叙述方法.

2.12 (1)

$$\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$$

$$(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\rightarrow(G(a)\vee G(b)\vee G(c)).$$

(2) $\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$

$$\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \qquad \text{(量词辖域收缩扩张等值式)}$$

$$(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)).$$

(3) $\exists x\forall yH(x,y)$

$$\exists x(H(x,a)\wedge H(x,b)\wedge H(x,c))$$

$$(H(a,a)\wedge H(a,b)\wedge H(a,c))$$

$$\vee(H(b,a)\wedge H(b,b)\wedge H(b,c))$$

$$\vee(H(c,a)\wedge H(c,b)\wedge H(c,c)).$$

分析 在有穷个体域内消去量词时，应将量词的辖域尽量缩小. 例如，在(2)中，首先将量词辖域缩小了(因为$\exists yG(y)$中不含x，所以，可以缩小). 否则，演算是相当麻烦的. 见下面的演算:

$$\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$$
$$(F(a)\wedge\exists yG(y))\wedge(F(b)\wedge\exists yG(y))\wedge F(c)\wedge\exists yG(y))$$
$$(F(a)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$
$$\wedge(F(b)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$
$$\wedge(F(c)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$
$$(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)).$$

显然这个演算比原来的演算麻烦多了.

2.13 在I下

(1) $\forall x(F(x)\wedge G(x))$

$$(F(-2)\wedge G(-2))\wedge(F(3)\wedge G(3))\wedge(F(6)\wedge G(6))$$
$$(1\wedge 0)\wedge(1\wedge 0)\wedge(0\wedge 1)\quad 0,$$

所以，$\forall x(F(x)\wedge G(x))$在$I$下为假.

(2) $\forall x(R(x)\to F(x))\vee G(5)$

$$((R(-2)\to F(-2))\wedge(R(3)\to F(3))\wedge(R(6)\to F(6)))\vee 0$$
$$((1\to 1)\wedge(1\to 1)\wedge(1\to 0)\quad 0,$$

所以，此公式在I下也是假命题.

(3) $\exists x(F(x)\vee G(x))$

$$\exists xF(x)\vee\exists xG(x)\qquad\text{(量词分配等值式)}$$
$$(F(-2)\vee F(3)\vee F(6))\vee(G(-2)\vee G(3)\vee G(6))$$
$$(1\vee 1\vee 0)\vee(0\vee 0\vee 1)\quad 1,$$

所以，此公式在I下为真.

2.14 (1)

$$\neg\exists xF(x)\to\forall yG(x,y)$$
$$\forall x\neg F(x)\to\forall yG(x,y)\qquad\text{(量词否定等值式)}$$
$$\forall z\neg F(z)\to\forall yG(x,y)\qquad\text{(约束变项换名规则)}$$
$$\exists z\forall y(\neg F(z)\to G(x,y))\qquad\text{(量词辖域收缩扩张等值式)}$$
$$\exists z\forall y(F(z)\vee G(x,y)).$$

(2)

$$\neg(\forall xF(x,y)\vee\exists yG(x,y))$$
$$\exists x\neg F(x,y)\wedge\forall y\neg G(x,y)$$
$$\exists z_1\neg F(z_1,y)\wedge\forall z_2\neg G(x,z_2)$$
$$\exists z_1\forall z_2(\neg F(z_1,y)\wedge\neg G(x,z_2)).$$

在以上演算中分别使用了德·摩根律、量词否定等值式、约束变项换名规则等.

分析 公式的前束范式是不唯一的. (1)中最后两步都是前束范式，其实$\forall y\exists z(F(z)\vee G(x,y))$也是(1)中公式的前束范式.

2.15 (1)

$\forall xF(x) \vee \exists yG(x,y)$

$\forall xF(x) \vee \exists yG(z,y)$

$\forall x\exists y(F(x) \vee G(z,y))$.

(2)

$\exists x(F(x) \wedge \forall yG(x,y,z)) \to \exists zH(x,y,z)$

$\exists x(F(x) \wedge \forall yG(x,y,u)) \to \exists zH(v,w,z)$

$\exists x\forall y(F(x) \wedge G(x,y,u)) \to \exists zH(v,w,z)$

$\forall x\exists y\exists z((F(x) \wedge G(x,y,u)) \to H(v,w,z))$.

在以上演算中分别使用了自由变项换名规则和量词辖域收缩扩张等值式.

2.16 (1) ②错. 使用 UI, UG, EI, EG 规则应对前束范式, 而①中公式不是前束范式, 所以, 不能使用 UI 规则.

(2) ②错. ①中公式为 $\forall xA(x)$, 这时, $A(x) = F(x) \vee G(x)$, 因而使用 UI 规则时, 应得 $A(a)$(或 $A(y)$), 故应有 $F(a) \vee G(a)$, 而不可能为 $F(a) \vee G(b)$.

(3) ②错. 应对 $A(c) = F(c) \to G(c)$ 使用 EG 规则, 其中 c 为特定的使 A 为真的个体常项, 而不能为个体变项.

(4) ②错. ①中公式含个体变项 x, 不能使用 EG 规则.

(5) ②错. ①中公式含两个个体常项, 不能使用 EG 规则.

(6) ⑤错. 对①使用 EI 规则得 $F(c) \wedge G(c)$, 此 c 应使 $F(c) \wedge G(c)$ 为真. 此 c 不一定使 $H(c) \wedge R(c)$ 为真.

分析　由于⑤的错误, 可能由真前提, 推出假结论. 反例如下:

设个体域为自然数集合 N. $F(x)$: x 为偶数, $G(x)$: x 为素数, $H(x)$: x 能被 3 整除, $R(x)$: x 能被 4 整除. 显然此时,

$$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \quad 与 \quad \exists x(H(x) \wedge R(x))$$

均为真, 但 $\exists x(F(x) \wedge H(x))$ 为假. 其实在(6)中, ③应为 $F(2) \wedge G(2)$, 它是真命题. 而 $H(2) \wedge R(2)$ 为假命题. 对 $\exists x(H(x) \wedge R(x))$ 使用 EI 规则, 得 $H(12) \wedge R(12)$ 才为真. 所以, 对两个公式使用 EI 规则使用同一个个体常项是会犯错误的.

2.17

(1) 证明

① $\exists xF(x) \to \forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$	前提引入
② $\exists xF(x)$	前提引入
③ $\forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$	①②假言推理
④ $F(c)$	②EI
⑤ $F(c) \vee G(c)$	④附加
⑥ $(F(c) \vee G(c)) \to R(c)$	③UI
⑦ $R(c)$	⑤⑥假言推理
⑧ $\exists xR(x)$	⑦EG

(2) 证明:

① $\exists xF(x)$　　前提引入

② $F(c)$　　①EI

③ $\forall x(F(x)\to(G(y)\land R(x)))$　　前提引入

④ $F(c)\to(G(y)\land R(c))$　　③UI

⑤ $G(y)\land R(c)$　　②④假言推理

⑥ $R(c)$　　⑤化简

⑦ $F(c)\land R(c)$　　②⑥合取

⑧ $\exists x(F(x)\land R(x))$　　⑦EG

2.18　令$F(x)$: x 是大熊猫.

$G(x)$: x 产在中国.

a: 欢欢.

前提: $\forall x(F(x)\to G(x))$, $F(a)$.

结论: $G(a)$.

证明: ① $\forall x(F(x)\to G(x))$　　前提引入

② $F(a)$　　前提引入

③ $F(a)\to G(a)$　　①UI

④ $G(a)$　　②③假言推理

2.19　令$F(x)$: x 为有理数.

$G(x)$: x 为实数.

$H(x)$: x 为整数.

前提: $\forall x(F(x)\to G(x))$, $\exists x(F(x)\land H(x))$.

结论: $\exists x(G(x)\land H(x))$.

证明: ① $\exists x(F(x)\land H(x))$　　前提引入

② $F(c)\land H(c)$　　①EI

③ $\forall x(F(x)\to G(x))$　　前提引入

④ $F(c)\to G(c)$　　③UI

⑤ $F(c)$　　②化简

⑥ $G(c)$　　④⑤假言推理

⑦ $H(c)$　　②化简

⑧ $G(c)\land H(c)$　　⑥与⑦合取

⑨ $\exists x(G(x)\land H(x))$　　⑧EG

分析　在以上证明中,不能如下进行.

① $\exists x(F(x)\land H(x))$　　前提引入

② $\forall x(F(x)\to G(x))$　　前提引入

③ $F(c)\to G(c)$　　②UI

④ $F(c)\land H(c)$　　①EI

至此,可能犯了错误.在③中取 $c=\sqrt{2}$,则 $F(\sqrt{2})\to G(\sqrt{2})$为真,但 $F(\sqrt{2})\land H(\sqrt{2})$为假.就是说,由UI规则得到的$c$不一定满足EI规则,但反之为真,这一点务必

注意.

2.20　答案　A: ③; B: ②.

分析　(7)式为非闭式, 在个体域为整数集 Z 时, $\forall x(x\cdot y=x)$的真值不能确定, 当 $y=1$ 时为真, 当 $y\neq 1$ 时为假, 所以, 它不是命题. 其余各式都是命题. (5) 虽然不是闭式, 但它为真.

2.21　答案　A: ②; B: ④, ⑤, ⑨; C: ⑦, ⑧.

分析　注意约束变项和自由变项改名规则的使用. 供选答案中, (1)的前束范式只有一个, 就是②. 而②的前束范式有 3 个, 当然它们都是等值的. (3)的前束范式有 2 个, 就是⑦和⑧. 注意, 在(3)式中, $\forall x$ 的辖域为$(F(x,y)\rightarrow\forall yG(x,y))$, 这就决定了它的前束范式为

$$\forall x\forall y(F(x,z)\rightarrow G(x,y)),\quad (\text{将自由出现的 } y \text{ 改名为 } z)$$

但由于

$$\forall y\forall x(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$$
$$\forall x\forall y(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$$

所以, ⑧也是(3) 的前束范式.

2.22　答案　A: ⑤.

分析　(1), (4)正确; 可以构造证明.

(1) 证明:

① $\exists yF(y)$	前提引入
② $F(c)$	①EI
③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
④ $F(c)\rightarrow G(c)$	③UI
⑤ $G(c)$	②④假言推理
⑥ $\exists yG(y)$	⑤EG

注意应先使用 EI 规则.

(4) 证明:

① $\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
② $F(y)\rightarrow H(y)$	①UI
③ $\neg H(y)$	前提引入
④ $\neg F(y)$	②③拒取式
⑤ $\forall x(\neg F(x))$	④UG

(2), (3)推理不正确, 只要举出反例即可.

在自然数集合中, 令 $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是素数, 则$\exists x(F(x)\wedge G(x))$为真命题,而$\forall yF(y)$为假命题, 所以, $\exists x(F(x)\wedge G(x))\rightarrow\forall yF(y)$不是逻辑有效蕴含式, 这说明(2)中推理不正确. 读者可举反例说明(3)中推理也不正确.

2.23　答案　A: ②; B: ①; C: ⑦; D: ⑤.

第 3 章　集合的基本概念和运算

内 容 提 要

1. 集合与元素

集合与元素是集合论的基本概念,联系元素和集合的是隶属关系.如果元素 x 属于集合 A,则记作 $x \in A$,否则记作 $x \notin A$.

2. 集合与集合

集合与集合之间的关系有包含 $\subseteq$,相等 $=$,不包含 $\nsubseteq$,不相等 $\neq$,真包含 $\subset$,不真包含 $\not\subset$ 等,具体定义如下:

$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$.　(也称 B 是 A 的子集)

$B = A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq B$.

$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$.

$B \neq A \Leftrightarrow B \nsubseteq A \vee A \nsubseteq B$.

$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$.　(也称 B 是 A 的真子集)

$B \not\subset A \Leftrightarrow B \nsubseteq A \vee B = A$.

3. 空集 $\varnothing$,全集 E 与幂集

不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.空集是唯一存在的,且是任何集合的子集.

在一个具体问题中,如果所涉及的集合都是某个集合的子集,则称这个集合为全集,记作 E.

设 A 为集合,A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集,记作 $P(A)$,即

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

令 $|S|$ 表示集合 S 中的元素个数,那么若 $|A| = n$,则 $|P(A)| = 2^n$.

4. 集合的基本运算和算律

集合的基本运算是并 $\cup$,交 $\cap$,相对补 $-$,绝对补 $\sim$ 和对称差 $\oplus$,分别定义如下:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\};$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\};$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\};$$

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

集合的基本运算遵从下述算律:

(1) **幂等律** $A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

(2) **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) **交换律** $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

(4) **分配律** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(5) **同一律** $A\cup\varnothing=A$, $A\cap E=A$.

(6) **零　律** $A\cup E=E$, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(7) **排中律** $A\cup\sim A=E$.

(8) **矛盾律** $A\cap\sim A=\varnothing$.

(9) **吸收律** $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$.

(10) D·M **律** $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(德·摩根律) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$;

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$;

$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$.

(11) **双重否定律** $\sim(\sim A)=A$.

5. 有穷集合的计数

解决有穷集合的计数问题有两种方法: 文氏图和包含排斥原理.

设 S **为有穷集,** $p_1,p_2,\cdots,p_m$ **是** m **条性质.** S **中的任何元素** x **对于性质** $p_i(i=1,2,\cdots,m)$ **具有或者不具有, 两种情况必居其一. 令** A_i **表示** S **中不具有性质** p_i **的元素构成的集合, 那么包含排斥原理可表述为下面两个公式:**

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|\\
&=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|\\
&\quad-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|\\
&=\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|\\
&\quad-\cdots+(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.
\end{aligned}
$$

6. 小结

通过本章的学习应该达到下面的基本要求:

能够正确地表示一个集合, 会画文氏图.

能判定元素是否属于给定的集合.

能判定两个集合之间是否存在包含、相等或真包含的关系.

能熟悉进行集合的并 $\cup$, **交** $\cap$, **相对补** $-$, **绝对补** $\sim$, **对称差　运算; 会计算幂集**

P(A).

求解与有穷集合计数相关的实际问题.

习　题

题 3.1～3.7 **是填充题,题目要求均为从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.**

3.1　**设** F **表示一年级大学生的集合,** S **表示二年级大学生的集合,** M **表示数学专业学生的集合,** R **表示计算机专业学生的集合,** T **表示听离散数学课学生的集合,** G **表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合,** H **表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合. 则下列各句子所对应的集合表达式分别是**

(1) **所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课.** $\boxed{A}$

(2) **这些且只有这些学离散数学课的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很迟才睡觉.** $\boxed{B}$

(3) **听离散数学课的学生都没参加星期一晚上的音乐会.** $\boxed{C}$

(4) **这个音乐会只是大学一、二年级的学生参加.** $\boxed{D}$

(5) **除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加音乐会.** $\boxed{E}$

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① T　G∪H;　② G∪H　T;　③ S∩R　T;

④ H = G∪T;　⑤ T∩G= ě ;　⑥ F∪S　G;

⑦ G　F∪S;　⑧ S-(R∪M)　G;　⑨ G　S-(R∩M).

3.2　**设** S **表示某人拥有的所有的树的集合,** M, N, T, P　S, **且** M **是珍贵的树的集合,** N **是果树的集合,** T **是去年刚栽的树的集合,** P **是在果园中的树的集合. 下面是三个前提条件和两条结论.**

前提　(1) **所有的珍贵的树都是去年栽的.**

(2) **所有的果树都在果园里.**

(3) **果园里没有去年栽的树.**

结论　(1) **所有的果树都是去年栽的.**

(2) **没有一棵珍贵的树是果树.**

则前提(1),(2),(3)**和结论**(1)**的集合表达式分别为** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$, **根据前提条件, 两个结论中正确的是** $\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① N　P;　② T　N;　③ M　T;　④ M∩P = ě ;

⑤ P∩T = ě ;　⑥ N　T;　⑦ N∩M= ě .

3.3　**设** S= {ě , {1}, {1, 2}}, **则有**

(1) $\boxed{A}$ ∈S.

(2) $\boxed{B}$ S.

(3) P(S)**有** $\boxed{C}$ **个元素**.

(4) ©$©ǂ $\boxed{D}$.

(5) $\boxed{E}$ **既是** S **的元素**, **又是** S **的子集**.

供选择的答案

A: ① {1, 2}; ② 1;

B: ③ {{1, 2}}; ④ {1};

C, D: ⑤ 3; ⑥ 6; ⑦ 7; ⑧ 8;

E: ⑨ {1}; 0̦ ě .

3.4 **设** S, T, M **为任意的集合**, **且** S∩M= ě . **下面是一些集合表达式**, **每一个表达式与图** 3.1 **的某一个文氏图的阴影区域相对应**. **请指明这种对应关系**.

图 3.1

供选择的答案

(1) S∩T∩M **对应于** $\boxed{A}$.

(2) ∼S∪T∪M **对应于** $\boxed{B}$.

(3) S∪(T∩M) **对应于** $\boxed{C}$.

(4) (∼S∩T)- M **对应于** $\boxed{D}$.

(5) ∼S∩∼T∩M **对应于** $\boxed{E}$.

3.5 **对** 60 **个人的调查表明有** 25 **人阅读《每周新闻》杂志**, 26 **人阅读《时代》杂志**, 26 **人阅读《幸运》杂志**, 9 **人阅读《每周新闻》和《幸运》杂志**, 11 **人阅读《每周新闻》和《时代》杂**

志, 8 人阅读《时代》和《幸运》杂志, 还有 8 人什么杂志也不阅读. 那么阅读全部三种杂志的有$\boxed{A}$人, 只阅读《每周新闻》的有$\boxed{B}$人, 只阅读《时代》杂志的有$\boxed{C}$人, 只阅读《幸运》杂志的有$\boxed{D}$人, 只阅读一种杂志的有$\boxed{E}$人.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 2; ② 3; ③ 6; ④ 8; ⑤ 10;

⑥ 12; ⑦ 15; ⑧ 28; ⑨ 30; ⑩ 31.

3.6 从 1 到 300 的整数中

(1) 同时能被 3, 5 和 7 三个数整除的数有$\boxed{A}$个.

(2) 不能被 3, 5, 也不能被 7 整除的数有$\boxed{B}$个.

(3) 可以被 3 整除, 但不能被 5 和 7 整除的数有$\boxed{C}$个.

(4) 可被 3 或 5 整除, 但不能被 7 整除的数有$\boxed{D}$个.

(5) 只能被 3, 5 和 7 之中的一个数整除的数有$\boxed{E}$个.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 2; ② 6; ③ 56; ④ 68; ⑤ 80;

⑥ 102; ⑦ 120; ⑧ 124; ⑨ 138; ⑩ 162.

3.7 75 个学生去书店买语文, 数学, 英语课外书, 每种书每个学生至多买 1 本. 已知有 20 个学生每人买 3 本书, 55 个学生每人至少买 2 本书. 设每本书的价格都是 1 元, 所有的学生总共花费 140 元. 那么恰好买 2 本书的有$\boxed{A}$个学生. 至少买 2 本书的学生花费$\boxed{B}$元. 买 1 本书的有$\boxed{C}$个学生, 至少买 1 本书的有$\boxed{D}$个学生, 没买书的有$\boxed{E}$个学生.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 10; ② 15; ③ 30; ④ 35; ⑤ 40;

⑥ 55; ⑦ 60; ⑧ 65; ⑨ 130; ⑩ 140.

3.8 设 S, T, M 为任意集合, 判断下列命题的真假.

(1) ě 是ě 的子集.

(2) 如果 $S \cup T = S \cup M$, 则 $T = M$.

(3) 如果 $S - T =$ ě, 则 $S = T$.

(4) 如果$\sim S \cup T = E$, 则 S T.

(5) S $S = S$.

3.9 $S_1 =$ ě, $S_2 = \{$ě$\}$, $S_3 = P(\{$ě$\})$, $S_4 = P($ě$)$, 判断以下命题的真假.

(1) $S_2 \in S_4$.

(2) S_1 S_3.

(3) S_4 S_2.

(4) $S_4 \in S_3$.

(5) $S_2 = S_1$.

3.10 **用列元素法表示以下集合.**

(1) $A=\{x \mid x\in N \wedge x^2\leq 7\}$.

(2) $A=\{x \mid x\in N \wedge |3-x|<3\}$.

(3) $A=\{x \mid x\in R \wedge (x+1)^2\leq 0\}$.

(4) $A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N \wedge x+y\leq 4\}$.

3.11 **求使得以下集合等式成立时** a,b,c,d **应该满足的条件.**

(1) $\{a,b\}=\{a,b,c\}$.

(2) $\{a,b,a\}=\{a,b\}$.

(3) $\{a,\{b,c\}\}=\{a,\{d\}\}$.

(4) $\{\{a,b\},\{c\}\}=\{\{b\}\}$.

(5) $\{\{a,\varnothing\},b,\{c\}\}=\{\{\varnothing\}\}$.

3.12 **设** a,b,c,d **代表不同的元素. 说明以下集合** A **和** B **之间成立哪一种关系(指** $A\subseteq B, B\subseteq A, A=B, A\nsubseteq B$ **且** $B\nsubseteq A$).

(1) $A=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}, B=\{\{a,b\},\{c\}\}$.

(2) $A=\{\{a,b\},\{b\},\varnothing\}, B=\{\{b\}\}$.

(3) $A=\{x \mid x\in N \wedge x^2>4\}, B=\{x \mid x\in N \wedge x>2\}$.

(4) $A=\{ax+b \mid x\in R \wedge a,b\in Z\}, B=\{x+y \mid x,y\in R\}$.

(5) $A=\{x \mid x\in R \wedge x^2+x-2=0\}, B=\{y \mid y\in Q \wedge y^2+y-2=0\}$.

(6) $A=\{x \mid x\in R \wedge x^2\leq 2\}, B=\{x \mid x\in R \wedge 2x^3-5x^2+4x=1\}$.

3.13 **计算** $A\cup B, A\cap B, A-B, A\oplus B$.

(1) $A=\{\{a,b\},c\}, B=\{c,d\}$.

(2) $A=\{\{a,\{b\}\},c,\{c\},\{a,b\}\}, B=\{\{a,b\},c,\{b\}\}$.

(3) $A=\{x \mid x\in N \wedge x<3\}, B=\{x \mid x\in N \wedge x\geq 2\}$.

(4) $A=\{x \mid x\in R \wedge x<1\}, B=\{x \mid x\in Z \wedge x<1\}$.

(5) $A=\{x \mid x\in Z \wedge x<0\}, B=\{x \mid x\in Z \wedge x\geq 2\}$.

3.14 **计算幂集** $P(A)$.

(1) $A=\{\varnothing\}$.

(2) $A=\{\{1\},1\}$.

(3) $A=P(\{1,2\})$.

(4) $A=\{\{1,1\},\{2,1\},\{1,2,1\}\}$.

(5) $A=\{x \mid x\in R \wedge x^3-2x^2-x+2=0\}$.

3.15 **请用文氏图表示以下集合.**

(1) $\sim A\cup(B\cap C)$.

(2) $(A\oplus B)-C$.

(3) $(A\cap\sim B)\cup(C-B)$.

(4) $A\cup(C\cap\sim B)$.

3.16 **设** A,B,C **代表任意集合, 判断以下等式是否恒真, 如果不是, 请举一反例.**

(1) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

(3) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$.

(4) $(A\cup B\cup C)-(A\cup B)=C$.

(5) $(A\cup B)-(B\cup C)=A-C$.

(6) $A\cap(B\quad C)=(A\cap B)\quad(A\cap C)$.

3.17 **设** A, B, C, D **代表任意集合,判断以下命题是否恒真,如果不是,请举一反例.**

(1) $A\quad B\wedge C\quad D\quad A\cap C\quad B\cap D$.

(2) $A\quad B\wedge C\quad D\quad A-D\quad B-C$.

(3) $A\quad B\quad B=A\cup(B-A)$.

(4) $A-B=B-A\quad A=B$.

3.18 **设** $|A|=3$, $|P(B)|=64$, $|P(A\cup B)|=256$. **求** $|B|$, $|A\cap B|$, $|A-B|$, $|A\quad B|$

3.19 **求在** 1 **到** 1 000 000 **之间(包括** 1 **和** 1 000 000 **在内)有多少个整数既不是完全平方数,也不是完全立方数?**

习 题 解 答

3.1 A: ③; B: ④; C: ⑤; D: ⑦; E: ⑧.

3.2 A: ③; B: ①; C: ⑤; D: ⑥; E: ⑦.

3.3 A: ①; B: ③; C: ⑧; D: ⑤; E: 0 .

分析 对于给定的集合或集合公式,比如说是 A 和 B,判别 B 是否被 A 包含,可以有下述方法:

1° 若 A 和 B 是通过列元素的方式给出的,那么依次检查 B 中的每个元素是否在 A 中出现. 如果都在 A 中出现,则 $B\quad A$,否则不是. 例如,3.3 题给的答案中有{{1, 2}}和{1},谁是 $S=\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$的子集呢?前一个集合的元素是{1, 2},在 S 中出现;但后一个集合的元素是 1,不在 S 中出现. 因此,{{1, 2}} S.

2° 若 A 和 B 是通过用谓词概括元素性质的方式给出的,B 中元素的性质为 P,A 中元素的性质为 Q,那么,

"如果 P 则 Q"意味着 $B\quad A$.

"只有 P 才 Q"意味着 $A\quad B$.

"除去 P 都不 Q"意味着 $A\quad B$.

"P 且仅 P 则 Q"意味着 $A=B$.

例如,3.1 题(1)是"如果 P 则 Q"的形式,其中"计算机专业二年级学生"是性质 P,"学《离散数学》课"是性质 Q;题(2)是"P 且仅 P 则 Q"的形式. 此外

"如果 P 就非 Q"则意味着 $A\cap B=\emptyset$.

例如,3.1 题(3)和 3.2 题(3)都是这种形式.

3° 通过集合运算判别 $B\quad A$. 如果 $B\cup A=A$, $B\cap A=B$, $B-A=\emptyset$ 三个等式中有

任何一个成立,则有 $B \subseteq A$.

4° 通过文氏图观察,如果代表 B 的区域落在代表 A 的区域内部,则 $B \subseteq A$.

这后两种方法将在后面的解答中给出实例.

3.4　A: ②; B: ④; C: ⑦; D: ⑥; E: ⑧.

3.5　A: ②; B: ④; C: ⑤; D: ⑥; E: ⑨.

3.6　A: ①; B: ⑨; C: ④; D: ⑦; E: ⑧.

3.7　A: ④; B: ⑨; C: ①; D: ⑧; E: ①.

分析　设只买 1 本、2 本及 3 本书的学生集合分别为 S_1, S_2 和 S_3. 它们之间两两不交. 由题意可知,

$$|S_3| = 20, \quad |S_2 \cup S_3| = 55.$$

又知 $S_2 \cap S_3 = \varnothing$,所以,

$$|S_2| = |S_2 \cup S_3| - |S_3| = 55 - 20 = 35.$$

然后列出下面的方程:

$$|S_1| + 2|S_2| + 3|S_3| = 140,$$

求得 $|S_1| = 10$. 因此,没有买书的人数是

$$75 - (10 + 35 + 20) = 10.$$

3.8　(1) 和(4) 为真,其余为假.

分析　这里可以应用集合运算的方法来判别集合之间的包含或相等关系. 如题(3) 中的条件 $S - T = \varnothing$ 意味着 $S \subseteq T$, 这时不一定有 $S = T$ 成立. 而对于题(4), 由条件 $\sim S \cup T = E$ 可推出

$$S \cap (\sim S \cup T) = S \cap E \Leftrightarrow (S \cap \sim S) \cup (S \cap T) = S$$
$$\Leftrightarrow \varnothing \cup (S \cap T) = S \Leftrightarrow S \cap T = S.$$

这是 $S \subseteq T$ 的充分必要条件, 从而结论为真.

对于假命题都可以找到反例, 如题(2) 中令 $S = \{1, 2\}$, $T = \{1\}$, $M = \{2\}$ 即可; 而对于题(5), 只要 $S \neq \varnothing$ 即可.

3.9　(2), (3) 和(4) 为真, 其余为假.

3.10　(1) $A = \{0, 1, 2\}$.

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(3) $A = \{-1\}$.

(4) $A = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 0\rangle, \langle 0, 4\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 0\rangle\}$.

3.11　(1) $a = c$ 或 $c = b$.

(2) 任何 a, b.

(3) $b = c = d$.

(4) $a = b = c$.

(5) $a = c = \varnothing$ 且 $b = \{\varnothing\}$.

3.12 (1),(2)和(6)都是 $B \subseteq A$,而(3),(4),(5)是 $A = B$.

分析 对于用谓词给定的集合先尽量用列元素的方法表示,然后进行集合之间包含关系的判别.如果有的集合不能列元素,也要先对谓词表示尽可能化简.如题(3)中的 A 可化简为

$$\{x \mid x \in N \land x > 2\};$$

题(5)中的 A 和 B 都可以化简为 $\{1, -2\}$;题(6)中的

$$A = \{x \mid x \in R \land -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}, \quad B = \{1, \frac{1}{2}\}.$$

而对于题(4),不难看出 $A = B = R$,是实数集合.

3.13 (1) $A \cup B = \{\{a, b\}, c, d\}$, $A \cap B = \{c\}$,

$A - B = \{\{a, b\}\}$, $A \oplus B = \{\{a, b\}, d\}$.

(2) $A \cup B = \{\{a, \{b\}\}, c, \{c\}, \{a, b\}, \{b\}\}$,

$A \cap B = \{\{a, b\}, c\}$, $A - B = \{\{a, \{b\}\}, \{c\}\}$,

$A \oplus B = \{\{a, \{b\}\}, \{c\}, \{b\}\}$.

(3) $A \cup B = N$, $A \cap B = \{2\}$, $A - B = \{0, 1\}$,

$A \oplus B = N - \{2\}$.

(4) 观察到 $B \subseteq A$,故

$A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \oplus B = A - B = \{x \mid x \in R - Z \land x < 1\}$.

(5) 观察到 $A \cap B = \varnothing$,故

$A \cup B = Z - \{0, 1\}$, $A \cap B = \varnothing$,

$A - B = A$, $A \oplus B = Z - \{0, 1\}$.

3.14 (1) $P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

(2) $P(A) = \{\varnothing, \{\{1\}\}, \{1\}, \{\{1\}, 1\}\}$.

(3) $P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{2\}\}, \{\varnothing, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{2\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}\}$.

(4) $P(A) = \{\varnothing, \{\{1\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}\}$.

(5) $P(A) = \{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{2\}, \{-1, 1\}, \{-1, 2\}, \{1, 2\}, \{-1, 1, 2\}\}$.

分析 在做集合运算前先要化简集合,然后再根据题目要求进行计算.这里的化简指的是元素、谓词表示和集合公式三种化简.

元素的化简——相同的元素只保留一个,去掉所有冗余的元素.

谓词表示的化简——去掉冗余的谓词,这在前边的题解中已经用到.

集合公式的化简——利用简单的集合公式代替相等的复杂公式.这种化简常涉及到集合间包含或相等关系的判别.

例如,题(4)中的 $A = \{\{1, 1\}, \{2, 1\}, \{1, 2, 1\}\}$ 化简后得 $A = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$,而题(5)中的 $A = \{x \mid x \in R \land x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$ 化简为 $A = \{-1, 1, 2\}$.

3. 15

图 3.2

3.16 (1), (2), (3) 和(6) 为真. (4) 和(5) 不为真.

分析 如果给出的是集合恒等式, 可以用两种方法验证. 一是分别对等式两边的集合画出文氏图, 然后检查两个图中的阴影区域是否一致. 二是利用集合恒等式的代入不断对等式两边的集合公式进行化简或者变形, 直到两边相等或者一边是另一边的子集为止. 例如, 题(1) 中的等式左边经恒等变形后可得到等式右边, 即

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap \sim C \\
&= (A \cap \sim C) \cup (B \cap \sim C) = (A - C) \cup (B - C).
\end{aligned}
$$

类似地, 对题(2) 和(3) 中的等式分别有

$$
\begin{aligned}
&A - (B - C) = A \cap \sim (B \cap \sim C) \\
&= A \cap (\sim B \cup C) = (A \cap \sim B) \cup (A \cap C) \\
&= (A - B) \cup (A \cap C), \\
&A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \\
&= (A - B) \cap (A \cap \sim C) = ((A - B) \cap A) \cap \sim C \\
&= (A - B) \cap \sim C = (A - B) - C.
\end{aligned}
$$

但对于等式(4). 左边经变形后得

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = ((A \cup B) - (A \cup B)) \cup (C - (A \cup B)) \\
&= ě \cup (C - (A \cup B)) = C - (A \cup B).
\end{aligned}
$$

易见, $C - (A \cup B)$ C, 但不一定有 $C - (A \cup B) = C$. 如令 $A = B = C = \{1\}$时, 等式(4) 不为真. 类似地, 等式(5) 的左边经化简后得$(A - C) - B$, 而$(A - C) - B$ 不一定恒等于 $A - C$.

3.17 (1) 不为真. (2), (3) 和(4) 都为真. 对于题(1) 举反例如下: 令 $A = \{1\}, B = \{1, 4\}, C = \{2\}, D = \{2, 3\}$, 则 A B 且 C B, 但 $A \cap C = B \cap D$, 与结论矛盾.

分析 (2) 由于 C D $\sim D$ $\sim C$, 又由 A B 可得 $A \cap \sim D$ $B \cap \sim C$, 即 $A - D$ $B - C$ 成立.

(3) 由于 $A \cup (B - A) = A \cup B$, 故有

$$B = A \cup (B - A) \quad B = A \cup B \quad A \quad B.$$

这里用到 A B 的充要条件为 $B = A \cup B$ 或 $A = A \cap B$ 或 $A - B = ě$.

(4) **易见**, **当** $A=B$ **成立时**, **必有** $A-B=B-A$. **反之**, **由** $A-B=B-A$ **得**

$$(A-B)\cap B=(B-A)\cap B,$$

化简后得 $B-A=\varnothing$, **即** $B\subseteq A$. **同理**, **可证出** $A\subseteq B$, **从而得到** $A=B$.

3.18 **由** $|P(B)|=64$ **可知** $|B|=6$. **又由** $|P(A\cup B)|=256$ **知** $|A\cup B|=8$. **代入包含排斥原理得**

$$8=3+6-|A\cap B|,$$

从而有 $|A\cap B|=1$, $|A-B|=2$, $|A\oplus B|=2+5=7$.

3.19 **令** $S=\{x\mid x\in N\wedge 1\leq x\leq 1000000\}$.

$A=\{x\mid x\in S\wedge x$ **是完全平方数**$\}$,

$B=\{x\mid x\in S\wedge x$ **是完全立方数**$\}$,

从而有 $|S|=1000000$, $|A|=1000$, $|B|=100$, $|A\cap B|=10$. **代入包含排斥原理得**

$$\begin{aligned}|\bar{A}\cap\bar{B}|&=|S|-(|A|+|B|)+|A\cap B|\\&=1000000-(1000+100)+10\\&=998910.\end{aligned}$$

第4章　二元关系和函数

内容提要

1. 有序对与笛卡儿积

由两个元素 x 和 y(允许 $x=y$)按一定的顺序排列成的二元组叫做一个有序对(也称序偶),记作 $\langle x,y\rangle$. 其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素. 两个有序对 $\langle x,y\rangle$ 与 $\langle u,v\rangle$ 相等的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$.

设 A,B 为集合,A 与 B 的笛卡儿积记作 $A\times B$,其中

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

笛卡儿积运算具有下述性质:

$$\varnothing\times B=A\times\varnothing=\varnothing.$$

$$A\times B\neq B\times A\qquad(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B).$$

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\qquad(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing).$$

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A).$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A).$$

2. 关系,从A到B的关系和A上的关系

如果一个集合为空集或者它的元素都是有序对,则称这个集合是一个二元关系,记作 R. 对于二元关系 R,如果 $\langle x,y\rangle\in R$,则记作 xRy;如果 $\langle x,y\rangle\notin R$,则记作 $x\not R y$.

设 A,B 为集合,$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作从 A 到 B 的二元关系,特别当 $A=B$ 时,则叫做 A 上的二元关系. 当 A 含有 n 个元素,即 $|A|=n$ 时,A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系,其中最常用的 A 上的二元关系有下述五种:

恒等关系　$I_A=\{\langle x,x\rangle\mid x\in A\}$.

全域关系　$E_A=A\times A$.

小于等于关系　$L_A=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge x\leq y\}$,这里的 A 是实数集 R 的某个子集.

整除关系 $D_A=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge x\mid y\}$,这里的 A 是正整数集 Z^+ 的某个子集,$x\mid y$ 表示 x 是 y 的因子,或者说 x 整除 y.

包含关系　$R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in P(B)\wedge x\subseteq y\}$,这里 $A=P(B)$.

3. 关系表示法

表示关系的方法有三种——集合表达式、关系矩阵和关系图,其中关系矩阵和关系图只能表示有穷集 A 上的关系.

4. 关系的性质

对于集合 A 上的关系 R 可以定义五种性质——自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性.

R 在 A 上自反 $\forall x(x\in A\to xRx)$.

R 在 A 上反自反 $\forall x(x\in A\to x\not R x)$.

R 在 A 上对称 $\forall x\forall y(x,y\in A\land xRy\to yRx)$.

R 在 A 上反对称 $\forall x\forall y(x,y\in A\land xRy\land yRx\to x=y)$.

R 在 A 上传递 $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\land xRy\land yRz\to xRz)$.

判别关系性质的方法见表 4.1, 其中的 M^2 表示矩阵 M 和 M 相乘. 注意在做乘法时的相加为逻辑加, 即 $0+0=0$, $0+1=1+0=1+1=1$. $M-M^2$ 表示将 M 中的每个元素减去 M^2 中的相对应元素后得到的结果矩阵.

表 4.1

充要条件	自 反	反自反	对 称	反对称	传 递
集合表示 R	$I_A\subseteq R$	$I_A\cap R=\varnothing$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R\circ R\subseteq R$
关系矩阵 M	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i\neq j$, 则 $r_{ji}=0$.	$M-M^2$ 中不含负数
关系图 G	每个结点都有环	每个结点都没有环	如果两个结点之间有边, 必是一对方向相反的边	如果两个结点之间有边, 必是一条单方向的边	若结点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则从 x_i 到 x_k 有边

5. 等价关系和划分

设 R 为非空集合 A 上的关系, 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 对任何 $x,y\in A$, 如果 $\langle x,y\rangle\in$ 等价关系 R, 则记作 $x\sim y$. 对于 A 的任何元素 x, A 中与 x 等价的元素构成了 x 的等价类, 记作 $[x]_R$, 简记作 $[x]$, 即

$$[x]_R=\{y\mid y\in A\land xRy\}.$$

A 上等价关系 R 的所有不交的等价类的集合称为 A 在 R 下的商集, 记作 A/R, 即

$$A/R=\{[x]_R\mid x\in A\}.$$

设 A 是非空集合, 如果存在一个 A 的子集族 $\pi(\pi\subseteq P(A))$, 满足以下条件:

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) π 中任意两个元素不交.

(3) π 中所有元素的并集等于 A.

则称 π 为 A 的一个划分, 且称 π 中元素为划分块.

可以证明 A 关于等价关系 R 的商集 A/R 就是 A 的划分; 反之, 给定 A 的划分 π, 将 π 中划分块作为等价类也可以导出 A 上的等价关系. A 上的等价关系与 A 的划分是一一

对应的.

6. 偏序关系与偏序集

设 R 为非空集合 A 上的关系,如果 R 是自反的、反对称的和传递的,则称 R 为 A 上的偏序关系,简称偏序,记作 $\preccurlyeq$. 集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起叫做偏序集,记作 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$. $\forall x, y \in A$, x 与 y 之间只能保持下面四种关系之一: $x = y$, $x \prec y$, $y \prec x$, x 与 y 不可比. 这里的 $x \prec y$, $y \prec x$ 以及 x 与 y 不可比的含义是

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y,$$
$$y \prec x \Leftrightarrow y \preccurlyeq x \wedge y \neq x,$$
$$x\text{ 与 }y\text{ 不可比} \Leftrightarrow x \not\preccurlyeq y \wedge y \not\preccurlyeq x.$$

当 $x \prec y$ 且不存在其他的元素 z 使得 $x \prec z \prec y$ 成立时,称 y 盖住 x. $x \prec y$ 意味着在序关系上 y 排在 x 的后边;而 y 盖住 x 则意味着在序关系上 y 紧跟在 x 的后边.

有穷集上的偏序可以用哈斯图来表示. 在哈斯图中的元素是分层排列的. 最底层是所有的极小元,相邻两层之间较高一层的元素至少盖住较低一层的一个元素. 每条路径的最高层元素都是极大元. 如果偏序集只有唯一的极小元,它就是该偏序集的最小元. 类似地,如果偏序集只有唯一的极大元,它就是该偏序集的最大元. 给定偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子集 B,如果存在元素 $x \in A$ 大于等于 B 中所有的元素,那么 x 就是 B 的上界. 所有上界中的最小元就是 B 的最小上界. 类似地,可以定义 B 的最大下界. B 的最大下界或最小上界如果存在,一定是唯一的.

7. 关系运算

和关系有关的运算有以下几种:

定义域　$\mathrm{dom}\, R = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$.

值域　$\mathrm{ran}\, R = \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$.

域　$\mathrm{fld}\, R = \mathrm{dom}\, R \cup \mathrm{ran}\, R$.

逆　$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid yRx\}$.

合成　$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(xGz \wedge zFy)\}$.

限制　$F \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle \mid xFy \wedge x \in A\}$.

象　$F[A] = \mathrm{ran}\,(F \upharpoonright A)$.

以下运算仅适合 A 上的关系 R:

幂　$R^0 = I_A$,

　$R^{n+1} = R^n \circ R$　n 为自然数.

自反闭包　$r(R) = R \cup R^0$.

对称闭包　$s(R) = R \cup R^{-1}$.

传递闭包　$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots$

8. 函数

函数也称作映射,是一种特殊的二元关系. 函数的定义是: 设 F 为二元关系,若对任

意的 $x\in \mathrm{dom}\,F$ 都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}\,F$ 使得 xFy 成立，则称 F 为函数. 若 $\langle x, y\rangle\in$ 函数 F，则记作 $y=F(x)$，称 y 是 F 在 x 的函数值.

给定集合 A,B 和函数 f，若 f 满足下述条件:

(1) $\mathrm{dom}\,f = A$,

(2) $\mathrm{ran}\,f \subseteq B$.

则称 f 是从 A 到 B 的函数，记作 $f: A\to B$. 所有从 A 到 B 的函数的集合 $\{f \mid f: A\to B\}$ 记作 B^A，读作"B 上 A". 如果 $|A| = m$, $|B| = n$，且 m, n 不全为 0，则 $|B^A| = n^m$.

9. 函数的性质

某些函数 $f: A\to B$ 具有单射、满射或双射的性质. 这些性质分别定义如下:

设 $f: A\to B$,

(1) 若 $\mathrm{ran}\,f = B$，则称 $f: A\to B$ 是满射的.

(2) 若对任意 $x, y\in A$, $x\neq y$，都有 $f(x)\neq f(y)$，则称 $f: A\to B$ 是单射的.

(3) 若 $f: A\to B$ 既是满射的，又是单射的，则称 $f: A\to B$ 是双射的.

10. 函数的复合和反函数

给定函数 f 和 g，f 与 g 的合成也是函数，称作 f 与 g 的复合函数，并且满足

(1) $\mathrm{dom}\,(f\circ g) = \{x \mid x\in \mathrm{dom}\,g \wedge g(x)\in \mathrm{dom}\,f\}$,

(2) $f\circ g(x) = f(g(x))$, $\forall x\in \mathrm{dom}\,(f\circ g)$.

特别地，若 $f: B\to C$, $g: A\to B$，那么 $f\circ g: A\to C$.

函数的逆不一定构成函数. 但对于双射函数 $f: A\to B$，它的逆 $f^{-1}: B\to A$ 也是双射函数，称为 f 的反函数.

11. 小结

通过本章的学习应达到下面的基本要求:

能正确地使用集合表达式、关系矩阵和关系图表示给定的二元关系.

给定 A 上的关系 R（可能是集合表达式，也可能是关系矩阵或关系图），能判别 R 的性质.

给定 A 上的等价关系 R，求所有的等价类和商集 A/R，或者求与 R 相对应的划分；给定 A 的划分 π，求对应于 π 的等价关系 R.

给定 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$，画出偏序集的哈斯图；给定偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图，求 A 和 $\preccurlyeq$ 的集合表达式.

确定偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元、最大下界和最小上界.

给定集合 A,B 和 f，判别 f 是否为从 A 到 B 的函数 $f: A\to B$. 如果是，说明 $f: A\to B$ 是否为单射、满射、双射的.

应熟练掌握的计算包括:

给定关系 R，求 $\mathrm{dom}\,R$, $\mathrm{ran}\,R$, $\mathrm{fld}\,R$, R^{-1}；给定关系 R 和集合 A，求 $R\upharpoonright A$, $R[A]$；给定关系 F 和 G，求 $F\circ G$；给定 A 上的关系 R，求 R^n, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

给定函数 $f: A \to B$, $x \in A$, $A' \subseteq A$, 求 $f(x)$, $f(A')$; 求 $f: A \to B$ 的反函数; 给定函数 $f: A \to B$, $g: C \to D$, 求复合函数 $f \circ g$.

给定集合 A 和 B, 求 $A \times B$, B^A, 构造从 A 到 B 的双射函数.

在做以上计算时, 如果没有特殊说明, 所得结果应该与已知的关系或函数的表示方法一致. 例如, 已知关系 R 是用集合表达式给出的, 那么, 在计算 R^{-1}, $R \upharpoonright A$, R^n, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$时所得的结果关系也要用集合表达式表示. 若 R 用关系图给出, 那么结果关系也应该用关系图给出.

习　　题

题 4.1～4.10 为填充题. 题目要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

4.1　(1) 设 $S = \{1, 2\}$, R 是 S 上的二元关系, 且 xRy. 如果 $R = I_S$, 则 $\boxed{A}$, 如果 R 是数的小于等于关系, 则 $\boxed{B}$, 如果 $R = E_S$, 则 $\boxed{C}$.

(2) 设有序对 $\langle x+2, 4\rangle$ 与有序对 $\langle 5, 2x+y\rangle$ 相等, 则 $x = \boxed{D}$, $y = \boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, C:

① x, y 可任意选择 1 或 2; ② $x = 1, y = 1$; ③ $x = 1, y = 1$ 或 2; $x = y = 2$;

④ $x = 2, y = 2$; ⑤ $x = y = 1$ 或 $x = y = 2$; ⑥ $x = 1, y = 2$; ⑦ $x = 2, y = 1$.

D, E:

⑧ 3; ⑨ 2; ⑩ -2.

4.2　设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, R 为 S 上的关系, 其关系矩阵是:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

则 (1) R 的关系表达式是 $\boxed{A}$.

(2) $\operatorname{dom} R = \boxed{B}$, $\operatorname{ran} R = \boxed{C}$.

(3) $R \circ R$ 中有 $\boxed{D}$ 个有序对.

(4) R^{-1} 的关系图中有 $\boxed{E}$ 个环.

供选择的答案

A:

① $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$;

② $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$.

B, C:

③ $\{1, 2, 3, 4\}$; ④ $\{1, 2, 4\}$; ⑤ $\{1, 4\}$; ⑥ $\{1, 3, 4\}$.

D, E:

⑦ 1; ⑧ 3; ⑨ 6; ⑩ 7.

4.3 设 R 是由方程 $x+3y=12$ 定义的正整数集 Z^+ 上的关系,即

$$\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in Z^+ \wedge x + 3y = 12\},$$

则 (1) R 中有 $\boxed{A}$ 个有序对.

(2) $\mathrm{dom}\,R = \boxed{B}$.

(3) $R \upharpoonright \{2, 3, 4, 6\} = \boxed{C}$.

(4) $\{3\}$在 R 下的像是 $\boxed{D}$.

(5) $R \circ R$ 的集合表达式是 $\boxed{E}$.

供选择的答案

A:

① 2; ② 3; ③ 4.

B, C, D, E:

④ $\{\langle 3, 3\rangle\}$; ⑤ $\{\langle 3, 3\rangle, \langle 6, 2\rangle\}$; ⑥ $\{0, 3, 6, 9, 12\}$;

⑦ $\{3, 6, 9\}$; ⑧ $\{3\}$; ⑨ $\varnothing$; ⑩ 3.

4.4 设 $S=\{1, 2, 3\}$, 图 4.1 给出了 S 上的 5 个关系, 则它们只具有以下性质: R_1 是 $\boxed{A}$, R_2 是 $\boxed{B}$, R_3 是 $\boxed{C}$, R_4 是 $\boxed{D}$, R_5 是 $\boxed{E}$.

图 4.1

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 自反的, 对称的, 传递的;

② 反自反的, 反对称的;

③ 反自反的, 反对称的, 传递的;

④ 自反的; ⑤ 反对称的, 传递的;

⑥ 什么性质也没有; ⑦ 对称的;

⑧ 反对称的; ⑨ 反自反的, 对称的;

⑩ 自反的, 对称的, 反对称的, 传递的.

4.5 设 $Z^+ = \{x | x \in Z \land x > 0\}$, π, π, π 是 Z^+ 的 3 个划分.

$\pi = \{\{x\} | x \in Z^+\}$,

$\pi = \{S_1, S_2\}$, S_1 为素数集, $S_2 = Z^+ - S_1$,

$\pi = \{Z^+\}$,

则 (1) 3 个划分中划分块最多的是 $\boxed{A}$, 最少的是 $\boxed{B}$.

(2) 划分 π 对应的是 Z^+ 上的 $\boxed{C}$, π 对应的是 Z^+ 上的 $\boxed{D}$, π 对应的是 Z^+ 上的 $\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B:

① π; ② π; ③ π.

C, D, E:

④ 整除关系; ⑤ 全域关系; ⑥ 包含关系;

⑦ 小于等于关系; ⑧ 恒等关系;

⑨ 含有两个等价类的等价关系;

⑩ 以上关系都不是.

4.6 设 $S = \{1, 2, \cdots, 10\}$, t 是 S 上的整除关系, 则 $\langle S, t \rangle$ 的哈斯图是 $\boxed{A}$, 其中最大元是 $\boxed{B}$, 最小元是 $\boxed{C}$, 最小上界是 $\boxed{D}$, 最大下界是 $\boxed{E}$.

供选择的答案

A:

① 一棵树; ② 一条链; ③ 以上都不对.

B, C, D, E:

④ ě ; ⑤ 1; ⑥ 10; ⑦ 6, 7, 8, 9, 10; ⑧ 6; ⑨ 0; ⑩ 不存在.

4.7 设 $f: N \to N$, N 为自然数集, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x\ 为奇数 \\ \dfrac{x}{2} & 若\ x\ 为偶数, \end{cases}$$

则 $f(0) = \boxed{A}$, $f(\{0\}) = \boxed{B}$, $f(\{1, 2\}) = \boxed{C}$, $f(1, 2) = \boxed{D}$, $f(\{0, 2, 4, 6, \cdots\}) = \boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 无意义; ② 1; ③ $\{1\}$; ④ 0;

⑤ $\{0\}$; ⑥ $\frac{1}{2}$; ⑦ N; ⑧ $\{1, 3, 5, \cdots\}$;

⑨ $\frac{1}{2}, 1$; ⑩ $\{2, 4, 6, \cdots\}$.

4.8 设 R, Z, N 分别表示实数、整数和自然数集, 下面定义函数 f_1, f_2, f_3, f_4. 试确定它们的性质.

$f_1: R \to R$, $f(x) = 2^x$,

$f_2: Z \to N$, $f(x) = |x|$,

$f_3: N\to N, f(x)=(x) \bmod 3$, x 除以 3 的余数,

$f_4: N\to N\times N, f(n)=\langle n, n+1\rangle$.

则 f_1 是 $\boxed{A}$, f_2 是 $\boxed{B}$, f_3 是 $\boxed{C}$, f_4 是 $\boxed{D}$, $f_4(\{5\})=\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, C, D:

① 满射不单射; ② 单射不满射; ③ 双射; ④ 不单射也不满射;

⑤ 以上性质都不对.

E:

⑥ 6; ⑦ 5; ⑧ $\langle 5,6\rangle$; ⑨ $\{\langle 5,6\rangle\}$;

⑩ 以上答案都不对.

4.9 设 $f: R\to R, f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ -2 & x<3. \end{cases}$

$g: R\to R, g(x)=x+2$,

则 $f\circ g(x)=\boxed{A}$, $g\circ f(x)=\boxed{B}$, $g\circ f: R\to R$ 是 $\boxed{C}$, $f^{-1}\boxed{D}$, $g^{-1}\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B:

① $\begin{cases} (x+2)^2 & x\geq 3 \\ -2 & x<3; \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+2 & x\geq 3 \\ -2 & x<3; \end{cases}$

③ $\begin{cases} (x+2)^2 & x\geq 1 \\ -2 & x<1; \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x^2+2 & x\geq 3 \\ 0 & x<3. \end{cases}$

C:

⑤ 单射不满射; ⑥ 满射不单射; ⑦ 不单射也不满射; ⑧ 双射.

D, E:

⑨ 不是反函数; ⑩ 是反函数.

4.10 (1) 设 $S=\{a,b,c\}$, 则集合 $T=\{a,b\}$ 的特征函数是 $\boxed{A}$, 属于 S^S 的函数是 $\boxed{B}$.

(2) 在 S 上定义等价关系 $R=I_S\cup\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$, 那么该等价关系对应的划分中有 $\boxed{C}$ 个划分块. 作自然映射 $g: S\to S/R$, 那么 g 的表达式是 $\boxed{D}$, $g(b)=\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, D:

① $\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$; ② $\{\langle a,b\rangle\}$;

③ $\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$; ④ $\{\langle a,\{a\}\rangle, \langle b,\{b\}\rangle, \langle c,\{c\}\rangle\}$;

⑤ $\{\langle a,\{a,b\}\rangle, \langle b,\{a,b\}\rangle, \langle c,\{c\}\rangle\}$.

C:

⑥ 1; ⑦ 2; ⑧ 3.

E:

⑨ $\{a,b\}$; ⑩ $\{b\}$.

4.11 设 $S=\{1,2,\cdots,6\}$, 下面各式定义的 R 都是 S 上的关系, 分别列出 R 的元素.

(1) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S\wedge x\mid y\}$.

(2) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S \wedge x$ 是 y 的倍数$\}$.

(3) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S \wedge (x-y)^2\in S\}$.

(4) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S \wedge x/y$ 是素数$\}$.

4.12 设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$, 定义 S 上的关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S \wedge x+y=10\},$$

R 具有哪些性质?

4.13 $S=\{a,b,c,d\}$, R_1,R_2 为 S 上的关系,

$$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

求 $R_1\circ R_2$, $R_2\circ R_1$, R_1^2, R_2^3.

4.14 设 R 的关系图如图 4.2 所示, 试给出 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图.

图 4.2

4.15 对任意非空集合 S, $P(S)-\{\varnothing\}$是 S 的非空子集族, 那么 $P(S)-\{\varnothing\}$能否构成 S 的划分?

4.16 画出下列集合关于整除关系的哈斯图.

(1) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

(2) $\{1,2,\cdots,9\}$.

并指出它的极小元, 最小元, 极大元, 最大元.

4.17 在下列的关系中哪些能构成函数?

(1) $\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in N, x_1+x_2<10\}$.

(2) $\{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2\in R, y_2=y_1^2\}$.

(3) $\{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2\in R, y_2^2=y_1\}$.

4.18 设 R 是 S 上的等价关系, 在什么条件下自然映射 $g: S\rightarrow S/R$ 是双射的?

4.19 设 $f,g,h\in N^N$, 且有

$$f(n)=n+1,\quad g(n)=2n,\quad h(n)=\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数}\\ 1 & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

求 $f\circ f$, $g\circ f$, $f\circ g$, $h\circ g$, $g\circ h$ 和 $f\circ g\circ h$.

4.20 设 $f: R\times R\rightarrow R\times R$, $f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y, x-y\rangle$, 求 f 的反函数.

4.21 设 $f,g\in N^N$, N 为自然数集, 且

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x=0,1,2,3\\ 0 & x=4\\ x & x\geq 5\end{cases},\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & x\text{ 为偶数}\\ 3 & x\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

(1) 求 $g\circ f$ 并讨论它的性质(是否为单射或满射).

(2) 设 $A=\{0,1,2\}$, 求 $g\circ f(A)$.

4.22 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{0,1\}$.

(1) 求 $P(A)$和 B^A.

(2) 构造一个从 $P(A)$到 B^A 的双射函数.

4.23 对下面给定的集合 A 和 B, 构造从 A 到 B 的双射函数.

(1) $A=N, B=\{x \mid x=2^{y} \wedge y \in N\}$.

(2) $A=\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], B=[-1,1]$ 都是实数区间.

4.24 设 $f: A \rightarrow A$, 由 f 导出的 A 上的等价关系定义如下:

$$R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge f(x)=f(y)\}.$$

已知 $f_1, f_2, f_3 \in N^{N}$, 且

$$f_1(n)=n, \quad f_2(n)=\begin{cases}1 & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数}\end{cases}, \quad f_3(n)=(n) \bmod 3$$

令 R_i 为 f_i 导出的等价关系, 求商集 N/R_i, 其中 $i=1,2,3$.

4.25 对下述函数 f, g 及集合 A, B 计算 $f \circ g, f \circ g(A)$ 和 $f \circ g(B)$, 并说明 $f \circ g$ 是否为单射或满射.

(1) $f: R \rightarrow R,\ f(x)=x^{4}-x^{2}$,

$g: N \rightarrow R,\ g(x)=\sqrt{x}$,

$A=\{2,4,6,8,10\}, B=\{0,1\}$.

(2) $f: Z \rightarrow R,\ f(x)=e^{x}$,

$g: Z \rightarrow Z,\ g(x)=x^{2}$,

$A=N, B=\{2k \mid k \in N\}$.

习 题 解 答

4.1 A: ⑤; B: ③; C: ①; D: ⑧; E: ⑩.

4.2 A: ②; B: ③; C: ⑤; D: ⑩; E: ⑦.

4.3 A: ②; B: ⑦; C: ⑤; D: ⑧; E: ④.

分析 题 4.1～4.3 都涉及到关系的表示. 先根据题意将关系表示成集合表达式, 然后再进行相应的计算或解答. 例如, 题 4.1 中的

$$I_S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}, \quad E_S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$L_S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\};$$

而题 4.2 中的

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}.$$

为得到题 4.3 中的 R 须求解方程 $x+3y=12$, 最终得到

$$R=\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle\}.$$

求 $R \circ R$ 有三种方法, 即集合表达式、关系矩阵和关系图的方法. 下面由题 4.2 的关系分别加以说明.

1° 集合表达式法

将 dom R, dom $R \cup$ ran R, ran R 的元素列出来, 如图 4.3 所示. 然后检查 R 的每个有序对. 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 则从 dom R 中的 x 到 ran R 中的 y 画一个箭头. 若 dom R 中的 x 经过 2 步有向路径到达 ran R 中的 y, 则 $\langle x, y\rangle \in R \circ R$. 由图 4.3 可知

$$R \circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle\}.$$

如果求 F G, 则将对应于 G 中有序对的箭头画在左边, 而将对应于 F 中有序对的箭头画在右边. 对应的三个集合分别为 dom G, ran G∪dom F, ran F, 然后, 同样地寻找 dom G 到 ran F 的 2 步长的有向路径即可.

2° 矩阵方法

若 M 是 R 的关系矩阵, 则 R R 的关系矩阵就是 M · M, 也可记作 M^2. 在计算乘积时的相加不是普通加法, 而是逻辑加, 即 0+ 0= 0, 0+ 1= 1+ 0= 1+ 1= 1. 根据已知条件得

$$M^2 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} .$$

M^2 中含有 7 个 1, 说明 R R 中含有 7 个有序对.

图 4.3　　　　　　　　图 4.4

3° 关系图方法

设 G 是 R 的关系图. 为求 R^n 的关系图 G′, 先将 G 的结点复制到 G 中, 然后依次检查 G 的每个结点. 如果结点 x 到 y 有一条 n 步长的路径, 就在 G 中从 x 到 y 加一条有向边. 当所有的结点检查完毕, 就得到图 G′. 以题 4.2 为例. 图 4.4(1)表示 R 的关系图 G. 依次检查结点 1, 2, 3, 4. 从 1 出发, 沿环走 2 步仍回到 1, 所以, G 中有过 1 的环. 从 1 出发, 经〈1, 1〉和〈1, 4〉, 2 步可达 4, 所以, G 中有从 1 到 4 的边. 结点 1 检查完毕. 类似地检查其他 3 个结点, 2 步长的路径还有 2→1→1, 2→1→4, 3→4→1, 4→1→1, 4→1→4. 将这些路径对应的边也加到 G 中, 最终得到 R^2 的关系图. 这个图给在图 4.4(2).

4.4　A: ④; B: ⑧; C: ⑨; D: ⑤; E: ∅ .

分析　根据表 4.1 中关系图的特征来判定 R_1, R_2, …, R_5 的性质, 如表 4.2 所示.

表 4.2

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1					
R_2					
R_3					
R_4					
R_5					

从表中可知 R_1, R_2 和 R_3 不是传递的, 理由如下: 在 R_1 中有边⟨3, 1⟩和⟨1, 2⟩, 但缺少边⟨3, 2⟩. 在 R_2 中有边⟨1, 3⟩和⟨3, 2⟩, 但缺少边⟨1, 2⟩. 在 R_3 中有边⟨1, 2⟩和⟨2, 1⟩, 但缺少过 1 的环.

4.5　A: ①; B: ③; C: ⑧; D: ⑨; E: ⑤.

分析　等价关系和划分是两个不同的概念, 有着不同的表示方法. 等价关系是有序对的集合, 而划分是子集的集合, 切不可混淆起来. 但是对于给定的集合 A, A 上的等价关系 R 和 A 的划分 π 是一一对应的. 这种对应的含义是

⟨x, y⟩∈R　x 和 y 在 π 的同一划分块里.

换句话说, 等价关系 R 的等价类就是划分 π 的划分块, 它们都表示了对 A 中元素的同一种分类方式.

给定划分 π 求对应的等价关系 R 的方法和步骤说明如下:

1° 设 π 中含有两个以上元素的划分块有 l 块, 记作 $B_1, B_2, \cdots. B_l$. 若 $B_i = \{x_1, x_2, \cdots, x_j\}$, $j \geq 2$, 则 $\langle x_s, x_t\rangle \in R_i$, $s, t = 1, 2, \cdots, j$, $s \neq t$. 求出 $R_1, R_2, \cdots, R_l$.

2° $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_l \cup I_A$.

本题中的 π 的划分块都是单元集, 没有含有两个以上元素的划分块, 所以, $R = I_A$. π 含有两个划分块, 故对应的等价关系含有两个等价类. π 中只有一个划分块 Z^+, Z^+ 包含了集合中的全体元素. 这说明⟨x, y⟩∈R_1　x, y∈Z^+, 因此, 这个划分块对应的关系 R_1 就是 Z^+ 上的全域关系, 从而得到 $R = R_1 \cup I_A$ 也是 Z^+ 上的全域关系.

4.6　A: ③; B: ⑩; C: ⑤; D: ⑩; E: ⑤.

分析　画哈斯图的关键在于确定结点的层次和元素间的盖住关系. 下面讨论一下画图的基本步骤和应该注意的问题.

画图的基本步骤是:

1° 确定偏序集⟨A, t ⟩中的极小元, 并将这些极小元放在哈斯图的最底层, 记为第 0 层.

2° 若第 n 层的元素已确定完毕, 从 A 中剩余的元素中选取至少能盖住第 n 层中一个元素的元素, 将这些元素放在哈斯图的第 n+1 层. 在排列第 n+1 层结点的位置时, 注意把盖住较多元素的结点放在中间, 将只盖住一个元素的结点放在两边, 以减少连线的交叉.

3° 将相邻两层的结点根据盖住关系进行连线.

以本题的偏序集为例. 1 可以整除 S 中的全体整数, 故 1 是最小元, 也是唯一的极小元, 应该放在第 0 层. 是 1 的倍数, 但又不是其他的数倍数的数只能是素数, 所以, 第 1 层中应该是 S 中的全体素数, 即 2, 3, 5, 7. S 中剩下的元素是 4, 6, 8, 9, 10. 哪些应该放在第 2 层呢? 根据盖住关系, 应该是 4, 6, 9 和 10. 因为 4 盖住 2, 6 盖住 2 和 3, 9 盖住 3, 10 盖住 2 和 5. 8 不盖住 2, 3, 5, 7 中的任何一个元素, 最后只剩下一个 8 放在第 3 层. 图 4.5 给出了最终得到的哈斯图. 在整除关系的哈斯图中, 盖住关系体现为最小的倍数或最小的公倍数关系.

如果偏序集是⟨P(A), ⟩, 那么哈斯图的结构将呈现出十分规则的形式. 第 0 层是空集ě, 第 1 层是所有的单元集, 第 2 层是所有的 2 元子集, …, 直到最高层的集合 A. 这里

的盖住关系就体现为包含关系.

图 4.5

图 4.6

在画哈斯图时应该注意下面几个问题.

1° 哈斯图中不应该出现三角形, 如果出现三角形, 一定是盖住关系没有找对. 纠正的方法是重新考察这 3 个元素在偏序中的顺序, 然后将不满足盖住关系的那条边去掉. 请看图 4.6(1) 中的哈斯图. 图中有两个三角形, 即三角形 abc 和 abd. 根据结点位置可以看出满足如下的偏序关系:

$$a < b, a < c, b < c, a < d, b < d,$$

从而得到 a< b< c 和 a< b< d. 这就说明 c 和 d 不盖住 a, 应该把 ac 边和 ad 边从图中去掉, 从而得到正确的哈斯图, 如图 4.6(2) 所示.

2° 哈斯图中不应该出现水平线段. 根据哈斯图的层次结构, 处在同一水平位置的结点是同一层的, 它们没有顺序上的“大小”关系, 是不可比的. 出现这种错误的原因在于没有将“较大”的元素放在“较小”元素的上方. 纠正时只要根据“大小”顺序将“较大”的元素放到更高的一层, 将水平线改为斜线就可以了.

3° 哈斯图中应尽量减少线的交叉, 以使得图形清晰、易读, 也便于检查错误. 图形中线的交叉多少主要取决于同一层结点的排列顺序. 如果出现交叉过多, 可以适当调正结点的排列顺序, 注意变动结点时要同时移动连线.

最后谈谈怎样确定哈斯图中的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界和最大下界, 具体的方法是:

1° 如果图中有孤立结点, 那么这个结点既是极小元, 也是极大元, 并且图中既无最小元, 也无最大元(除了图中只有唯一孤立结点的特殊情况).

2° 除了孤立结点以外, 其他的极小元是图中所有向下通路的终点, 其他的极大元是图中所有向上通路的终点.

3° 图中唯一的极小元是最小元, 唯一的极大元是最大元; 否则最小元和最大元不存在.

4° 设 B 为偏序集〈A, t 〉的子集, 若 B 中存在最大元, 它就是 B 的最小上界; 否则从 A- B 中选择那些向下可达 B 中每一个元素的结点, 它们都是 B 的上界, 其中的最小元是 B 的最小上界. 类似地可以确定 B 的最大下界.

观察图 4.5, 1 是所有向下通路的终点, 是极小元, 也是最小元. 向上通路的终点有 9, 6, 8, 10 和 7, 这些是极大元. 由于极大元不是唯一的, 所以, 没有最大元. 对于整个偏序集

的最小上界和最大下界，就是它的最大元和最小元，因此，该偏序集没有最小上界，最大下界是 1.

4.7　A: ④; B: ⑤; C: ③; D: ①; E: ⑦.

4.8　A: ②; B: ①; C: ④; D: ②; E: ⑨.

分析　给定函数 $f: A\to B$，怎样判别它是否满足单射性呢？通常是根据函数的种类采取不同的方法.

1° 若 $f: A\to B$ 是实数区间上的连续函数，那么，可以通过函数的图像来判别它的单射性. 如果 f 的图像是严格单调上升(或下降)的，则 f 是单射的. 如果在 f 的图像中间有极大或极小值，则 f 不是单射的.

2° 若 f 不是通常的初等函数. 那么，就须检查在 f 的对应关系中是否存在着多对一的形式. 如果存在 $x_1, x_2\in A$, $x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)$，这就是二对一，即两个自变量对应于一个函数值，从而判定 f 不是单射的.

下面考虑满射性的判别. 满射性的判别可以归结为 f 的值域 $\mathrm{ran}f$ 的计算. 如果 $\mathrm{ran}f=B$，则 $f: A\to B$ 是满射的，否则不是满射的. 求 $\mathrm{ran}f$ 的方法说明如下:

1° 若 $f: A\to B$ 是实数区间上的初等函数，为了求 $\mathrm{ran}f$ 首先要找到 f 的单调区间. 针对 f 的每个单调区间求出 f 在该区间的最小和最大值，从而确定 f 在这个区间的局部值域. $\mathrm{ran}f$ 就是所有局部值域的并集. 对于分段的初等函数也可以采用这种方法处理.

2° 若 f 是用列元素的方法给出的，那么 $\mathrm{ran}f$ 就是所有有序对的第二元素构成的集合.

本题中只有 f_1 是定义于实数区间上的初等函数. 易见，指数函数的图像是严格单调上升的，并且所有的函数值都大于 0. 从而知道 f_1 是单射的，但不是满射的. 对于 f_2，由 $f_2(1)=f_2(-1)=1$ 可知，它不是单射的. 但 $\mathrm{ran}f_2=N$，所以，它是满射的. f_3 既不是单射的，也不是满射的，因为 $f_3(3)=f_3(0)=0$，且 $\mathrm{ran}f_3=\{0,1,2\}$. f_4 是单射的，但不是满射的. 因为 $m\neq n$ 时，必有 $\langle m, m+1\rangle\neq\langle n, n+1\rangle$，但 $\langle 1,1\rangle |\ \mathrm{ran}f_4$.

4.9　A: ③; B: ④; C: ⑦; D: ⑨; E: ⑩.

分析　如果 f, g 为分段函数，那么计算 $f\quad g$ 或 $g\quad f$ 时要注意分段的位置可能会发生改变. 如 f 原来在 $x=3$ 点分成两段，但 $f\quad g$ 却在 $x=1$ 点分成两段. 这是因为当 $x=1$ 时，$g(x)=3$ 恰好处在 f 的分段点上.

此外，在求一个函数的反函数时，首先要判别这个函数是否为双射函数. 如果是，则存在反函数；如果不是，则不存在反函数.

4.10　A: ③; B: ①; C: ⑦; D: ⑤; E: ⑨.

分析　(1) 先求出 T 的特征函数 $\chi_T=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$，它是从 S 到 $\{0,1\}$ 的函数. 而 S^S 中的函数是从 $\{a,b,c\}$ 到 $\{a,b,c\}$ 的函数，这就是说该函数应包含 3 个有序对，有序对的第一元素是 a, b, c，而第二元素应该从 a, b, c 中选取(可以重复选取). 不难看出只有①满足要求.

(2) 等价关系 R 对应的划分就是商集 S/R. 检查 R 的表达式，如果 $\langle x, y\rangle\in R$，那么 x, y 就在同一个等价类. 不难看出 S 中的元素被划分成两个等价类: $\{a,b\}$, $\{c\}$，因而对应的划分有 2 个划分块.

考虑自然映射 $g: S \to S/R$, 它将 S 中的元素映到该元素所在的等价类, 即将 a 映到 $[a] = \{a, b\}$, 将 b 映到 $[b] = \{a, b\}$, 将 c 映到 $[c] = \{c\}$. 将 g 写成集合表达式就是

$$g = \{\langle a, \{a, b\}\rangle, \langle b, \{a, b\}\rangle, \langle c, \{c\}\rangle\}.$$

通常的自然映射是满射的, 但不一定是单射的. 除非等价关系为恒等关系, 这时每个等价类只含一个元素, 不同元素的等价类也不同, g 就成为双射函数了.

4.11 (1) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 6, 6\rangle\}$.

(2) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 6, 1\rangle, \langle 6, 2\rangle, \langle 6, 3\rangle, \langle 6, 6\rangle\}$.

(3) $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 5, 6\rangle, \langle 6, 4\rangle, \langle 6, 5\rangle\}$.

(4) $R = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 6, 2\rangle, \langle 6, 3\rangle\}$.

4.12 对称性.

4.13 $R_1 \quad R_2 = \{\langle c, d\rangle\}$,

$R_2 \quad R_1 = \{\langle a, d\rangle, \langle a, c\rangle\}$,

$R_1^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle\}$,

$R_2^3 = \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$,

4.14

图 4.7

分析 根据闭包的计算公式

$$r(R) = R \cup R^0, \ s(R) = R \cup R^{-1}, \ t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots$$

可以得到由关系图求闭包的方法.

设 G 是 R 的关系图, G 的结点记为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记作 G_r, G_s 和 G_t.

为求 G_r, 先将图 G 的结点和边拷贝到 G_r, 然后将 G_r 中缺少环的结点都加上环就得到了 $r(R)$ 的关系图.

为求 G_s, 也须将图 G 拷贝到 G_s, 然后检查 G_s 的每一对结点 x_i 和 $x_j(i \neq j)$. 如果在 x_i 和 x_j 之间只存在一条单方向的边, 就在这两个结点间加上一条方向相反的边. 当 G_s 中所有的单向边都变成双向边以后就得到了 $s(R)$ 的关系图.

最后考虑 G_t. 首先将图 G 拷贝到 G_t, 然后从 x_1 开始依次检查 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 在检查结

点 x_i(i= 1, 2, …, n)时, 要找出从 x_i 出发经过有限步(至少 1 步, 至多 n 步) 可达的所有结点(包括 x_i 自己在内). 如果从 x_i 到这种结点之间缺少边, 就把这条边加到 G_t 中. 当 n 个结点全部处理完毕, 就得到 t(R) 的关系图.

以本题为例, 依次检查结点 a, b, c, d. 从 a 出发可达 b, c, d, e 四个结点, 所以图 G_t 中应该加上 a→c, a→d 和 a→e 的边. 从 b 出发可达 c, d, e 三个结点, 所以, 图 G_t 中应该加上 b→d 的边. 从 c 出发可达 c 和 d, 在 G_t 中应该加上边 c→c, 即通过 c 的环. 类似地分析可以知道, 在 G_t 中还应该加上过 d 的环.

4.15　若 S 不是单元集, 则 P(S) -　{ě }不构成 S 的划分.

4.16　在图 4.8(1) 中极小元、最小元是 1, 极大元、最大元是 24. 在图 4.8(2) 中极小元、最小元是 1, 极大元是 5, 6, 7, 8, 9, 没有最大元.

图　4.8

4.17　(1) 不能; (2) 能; (3) 不能.

分析　函数和关系的区别在于它们的对应法则. 在关系 R 的表达式中, 如果〈x, y〉∈R, 就说 x 对应到 y. 对于二元关系 R, 这种对应可以是一对一的, 多对一的和一对多的. 这里的一对多指的是一个 x 对应到多个 y. 但是对于函数, 则不允许这种一对多的对应. 至于单射函数, 不但不允许一对多, 也不允许多对一, 只能存在一对一的对应. 为了判别一个关系是否为函数, 就要检查关系的对应中是否存在一对多的情况. 如本题中的(1) 式, 〈1, 2〉和〈1, 1〉同时在关系中出现, 因此不是函数. 又如(3) 式, 〈1, 1〉和〈1, - 1〉也同时在关系中出现, 破坏了函数定义.

4.18　当 R= I_S 时满足要求.

4.19　f　f, g　f, f　g, h　g, f　g　h∈N^N, 且

$$f\ ¡£f(n) = n + 2,\qquad g\ ¡£f(n) = 2n + 2,$$

$$f\ ¡£g(n) = 2n + 1,\qquad h\ ¡£g(n) = 0,$$

$$g\ ¡£h(n) = \begin{matrix} 0 & n\text{ 为偶数} \\ 2 & n\text{ 为奇数,} \end{matrix}$$

$$f\ ¡£g\ ¡£h(n) = \begin{matrix} 1 & n\text{ 为偶数} \\ 3 & n\text{ 为奇数.} \end{matrix}$$

分析　注意合成的正确表示方法. 表示 f 和 g 合成的方法有两种:

1°　说明 f　g 是从哪个集合到哪个集合的函数. 然后给出 f　g(x) 的计算公式.

2°　给出 f　g 的集合表达式.

本题中的结果都采用了第一种表示方法, 先说明结果函数是从 N 到 N 的函数, 然后分别给出函数值的计算公式. 也可以采用第二种方法, 如

$$f\circ f=\{\langle n,n+2\rangle \mid n\in N\},$$
$$f\circ g\circ h=\{\langle x,1\rangle,\langle y,3\rangle \mid x,y\in N\ \text{且}\ x\ \text{为偶数},\ y\ \text{为奇数}\}.$$
但是, 如果写成 $f\circ f=n+2$ 就错了, 因为 $f\circ f$ 是函数, 是有序对的集合, 与函数值 $f\circ f(n)$ 是根本不同的两回事, 不能混为一谈.

4.20 $f^{-1}: R\times R\to R\times R$,

$$f^{-1}(\langle x,y\rangle)=\left\langle \frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right\rangle.$$

分析 首先由 f 的双射性确定 f^{-1} 一定存在. 然后通过 f 的定义求出反函数的对应法则. 设 f 将 $\langle x,y\rangle$ 对应到 $\langle u,v\rangle$. 根据 f 的定义有

$$\langle u,v\rangle=\langle x+y,x-y\rangle \quad x+y=u\wedge x-y=v$$
$$2x=u+v\wedge 2y=u-v \quad x=\frac{u+v}{2}\wedge y=\frac{u-v}{2}.$$

因而反函数的对应法则是 $\langle u,v\rangle$ 对应到 $\left\langle\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right\rangle$.

4.21 (1) 如下列出 $g\circ f$ 的对应关系

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$f(x)$	1	2	3	4	0	5	6	7	8	…
$g(f(x))$	3	1	3	2	0	3	3	3	4	…

从而得到

$$g\circ f: N\to N$$
$$g\circ f(x)=\begin{cases}3 & x=0,2\ \text{或大于等于}\ 5\ \text{的奇数}\\ 1 & x=1\\ 2 & x=3\\ \frac{x}{2} & x\geq 6\ \text{且}\ x\ \text{为偶数}\\ 0 & x=4\end{cases},$$

$g\circ f$ 是满射的, 但不是单射的.

(2) $g\circ f(\{0,1,2\})=\{1,3\}$.

4.22 (1) $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

$B^A=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$, 其中

$$f_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle\},\quad f_2=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle\},$$
$$f_3=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle\},\quad f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}.$$

(2) 令 $f: P(A)\to B^A$, 且

$$f(\varnothing)=f_1,\ f(\{a\})=f_2,\ f(\{b\})=f_3,\ f(\{a,b\})=f_4.$$

分析 对于任意集合 A, 都可以构造从 $P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的双射函数. 任取 A 的子集 $B\in P(A)$, B 的特征函数 $\chi_B: A\to\{0,1\}$ 定义为

$$\chi_B(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\in A-B.\end{cases}$$

不同的子集的特征函数也不同, 因此, 令

$$\varphi: P(A) \to \{0,1\}^A,$$
$$\varphi(B) = \chi_B,$$

φ是 $P(A)$到$\{0,1\}^A$ 的双射. 在本题的实例中的 φ是 $\varphi(\varnothing) = f_1$, $\varphi(\{a\}) = f_3$, $\varphi(\{b\}) = f_2$, $\varphi(\{a,b\}) = f_4$.

4.23 (1) $f: A\to B$, $f(x) = 2^x$.

(2) $f: A\to B$, $f(x) = \sin x$.

分析 给定集合 A, B, 如何构造从 A 到 B 的双射? 一般可采用下面的方法处理.

1° 若 A, B 都是有穷集合, 可以先用列元素的方法表示 A, B, 然后顺序将 A 中的元素与 B 中的元素建立对应, 如习题 4.22.

2° 若 A, B 是实数区间, 可以采用直线方程作为从 A 到 B 的双射函数.

例如, $A = [1, 2]$, $B = [2, 6]$是实数区间. 如图 4.9 所示, 先将 A, B 区间分别标记在直角坐标系的 x 轴和 y 轴上. 过$(1, 2)$和$(2, 6)$两点的直线方程将 A 中的每个数映到 B 中的每个数, 因此, 该直线方程所代表的一次函数就是从 A 到 B 的双射函数. 由解析几何的知识可以得到双射函数 $f: A\to B$, $f(x) = 4x - 2$.

这种通过直线方程构造双射函数的方法对任意两个同类型的实数区间(同为闭区间、开区间或半开半闭的区间)都是适用的. 但对半开半闭的区间要注意开端点与开端点对应, 闭端点与闭端点对应. 此外还要说明一点, 对于某些特殊的实数区间可能选择其他严格单调的初等函数更方便. 例如, $A = [-1, 1]$, $B = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 那么取 $f(x) = \arcsin x$ 即可.

图 4.9

3° A 是一个无穷集合, B 是自然数集 N.

为构造从 A 到 B 的双射只须将 A 中的元素排成一个有序序列, 且指定这个序列的初始元素, 这就叫做把 A"良序化". 比如说 A 良序化以后, 是集合$\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$, 那么令 $f: A\to B$, $f(x_i) = i$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, f 就是从 A 到 B 的双射.

例如, 构造从整数集 Z 到自然数集 N 的双射. 如下排列 Z 中元素, 然后列出对应的自然数, 即

$$\begin{array}{ll} Z: & 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \cdots \\ N: & 0, \ \ \ 1, 2, \ \ \ 3, 4, \ \ \ 5, 6, \cdots \end{array}$$

观察这两个序列, 不难找到对应法则.

$$f: Z \to N, \ f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

显然 f 是从 Z 到 N 的双射.

最后要指出, 并不是任何两个集合都可以构造双射的. 比如说, 含有元素不一样多的有穷集之间不存在双射. 即使都是无穷集也不一定存在双射, 如实数集 R 和自然数集 N 之间就不存在双射. 这就涉及到集合"大小"的描述和度量方法, 限于篇幅对此就不进行深

入讨论了,有兴趣的读者可以阅读其他的《离散数学》书籍.

4.24 $f_1(x)=f_1(y) \quad x=y$, R_1 为 N 上的恒等关系,且有

$$N/R_1=\{\{n\}\mid n\in N\}.$$

$f_2(x)=f_2(y) \quad x$ 与 y 的奇偶性相同.在 N 中的所有奇数构成一个等价类,所有的偶数构成另一个等价类.因此,

$$N/R_2=\{\{2n\mid n\in N\},\ \{2n+1\mid n\in N\}\}.$$

$f_3(x)=f_3(y) \quad x\equiv y(\mathrm{mod}3)$,即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等.根据余数分别为 0,1,2 可将 N 中的数分成 3 个等价类,因而

$$N/R_3=\{\{3n\mid n\in N\},\ \{3n+1\mid n\in N\},\ \{3n+2\mid n\in N\}\}.$$

4.25 (1) $f \quad g: N\rightarrow R$, $f \quad g(x)=x^2-x$,

$f \quad g$ 不是单射也不是满射.

$f \quad g(A)=\{2,12,30,56,90\}$,

$f \quad g(B)=\{0\}$.

(2) $f \quad g: Z\rightarrow R$, $f \quad g(x)=e^{x^2}$.

$f \quad g$ 不是单射也不是满射.

$f \quad g(A)= \quad e^{n^2}\mid n\in N \quad .$

$f \quad g(B)= \quad e^{4n^2}\mid n\in N \quad .$

第 5 章　代数系统的一般性质

内 容 提 要

1. 二元和一元代数运算

设 S 为集合, 函数 $f: S\times S \to S$ 和 $f: S \to S$ 分别称为 S 上的二元和一元运算. 若 f 是 S 上的二元或一元运算, 这时也称 S 对运算 f 是封闭的. 通常用不同的算符, 如 $\circ$, $*$, $\cdot$, $\triangle$, $\cdots$ 来代表不同的二元或一元运算.

给出一个二元或一元运算的方法有两种——解析表达式或运算表, 其中运算表只能定义有穷集上的二元或一元运算.

2. 二元运算的性质

设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上的二元运算, 和这些运算相关的性质, 或称算律有:

交换律　$\forall x, y \in S$ 有 $x \circ y = y \circ x$.

结合律　$\forall x, y, z \in S$ 有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

幂等律　$\forall x \in S$ 有 $x \circ x = x$.

消去律　$\forall x, y, z \in S, x \neq \theta$ 有

$$x \circ y = x \circ z \quad y = z.$$

$$y \circ x = z \circ x \quad y = z.$$

$\circ$ 对 $*$ 的分配律　$\forall x, y, z \in S$ 有

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z).$$

$$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x).$$

$\circ$ 和 $*$ 的吸收律　$\circ$ 和 $*$ 可交换且 $\forall x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x.$$

$$x * (x \circ y) = x.$$

上述的交换律、结合律、幂等律和消去律都是对 $\circ$ 运算而言的, 其中消去律中的 θ 指该运算的零元. 剩下的两条算律是与 $\circ$ 和 $*$ 两个运算有关的. 注意在谈分配律时应该说明哪个运算对哪个运算可分配, 因为当 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足分配律时, $*$ 运算对 $\circ$ 运算却不一定满足分配律.

3. 二元运算的特异元素

设 $\circ$ 为 S 上的二元运算, 和 $\circ$ 运算相关的特异元素有

幺元 e　　$\forall x \in S$ 有 $x \circ e = e \circ x = x$.

零元 θ　　$\forall x \in S$ 有 $x \circ \theta = \theta \circ x = \theta$

幂等元 x　　$x \in S$ 且 $x \circ x = x$.

可逆元 x 的逆元 y 　　$y \in S$ 且 $x \circ y = y \circ x = e$.

对于给定的集合 S 和 S 上的二元运算 $\circ$,如果存在幺元或零元,一定是唯一的;如果存在幂等元和可逆元,则可能存在多个. 对于可结合的二元运算,如果 S 中的某个元素 x 是可逆元,则 x 存在唯一的逆元,记作 x^{-1}. 特别地,幺元 e 是可逆元且 $e^{-1} = e$,而零元 θ 不是可逆元.

4. 代数系统、子代数和积代数

非空集合 S 和 S 上的 k 个二元或一元运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 构成代数系统,记作 $\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$.

在某些代数系统中将一些二元运算的特异元素作为系统性质规定下来,例如,独异点中的幺元,布尔代数中的全下界 0 和全上界 1 等,称这些元素为该系统的代数常数.

设 $V = \langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$ 是代数系统,B 是 S 的非空子集. 如果 B 对 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 都是封闭的,且 B 和 S 含有相同的代数常数,则称 $\langle B, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$ 是 V 的子代数,当 B 　 S 时称为 V 的真子代数.

设 $V_1 = \langle S_1, \circ \rangle$, $V_2 = \langle S_2, * \rangle$ 是代数系统,在 $S_1 \times S_2$ 上定义二元运算 $\cdot$: $\forall \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in S_1 \times S_2$ 有

$$\langle x_1, y_1 \rangle \cdot \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 \circ x_2, y_1 * y_2 \rangle,$$

称 $\langle S_1 \times S_2, \cdot \rangle$ 为 V_1 和 V_2 的积代数,记作 $V_1 \times V_2$.

5. 代数系统的同态与同构

设 $V_1 = \langle S_1, \circ \rangle$, $V_2 = \langle S_2, * \rangle$ 是具有一个二元运算的代数系统,$\varphi S_1 \to S_2$,若 $\forall x, y \in S_1$ 有

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y),$$

则称 φ 是 V_1 到 V_2 的同态映射,简称同态,且称 $\langle \varphi(S_1), * \rangle$ 是 V_1 在 φ 下的同态象,记作 $\varphi(V_1)$.

设 φ 是代数系统 $V_1 = \langle S_1, \circ \rangle$ 到 $V_2 = \langle S_2, * \rangle$ 的同态. 若 φ 是满射的,则称 φ 是 V_1 到 V_2 的满同态,记作 $V_1 \overset{\varphi}{\sim} V_2$;若 φ 是单射的,则称 φ 是 V_1 到 V_2 的单同态;若 φ 是双射的,则称 φ 是 V_1 到 V_2 的同构,记作 $V_1 \overset{\varphi}{\cong} V_2$. 当 $V_1 = V_2$ 时,称同态或同构 φ 为自同态或自同构.

6. 小结

通过本章的学习应该达到下面的基本要求:

给定集合与运算的解析表达式,写出该运算的运算表.

给定集合和运算,判别该集合对运算是否封闭(或者说运算是否为给定集合上的运算,也可以说给定集合对于这些运算是否构成代数系统).

给定二元运算,说明运算是否满足交换律、结合律、幂等律、分配律和吸收律.

给定二元运算,求出该运算的幺元、零元、幂等元和所有可逆元素的逆元.

给定代数系统 $V_1=\langle S_1, ∘\rangle$, $V_2=\langle S_2, *\rangle$, 其中 ∘和 * 为二元运算, 判定 $\varphi: S_1\rightarrow S_2$ 是否为 V_1 到 V_2 的同态映射. 如果是, 说明φ是否为单同态、满同态和同构, 并求出同态象 $\varphi(V_1)$.

习　　题

5.1　题 5.1～5.6 是填充题. 题目要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

设 $S=\{a, b\}$, 则 S 上可以定义 $\boxed{A}$ 个二元运算. 其中有 4 个运算 f_1, f_2, f_3, f_4, 其运算如表 5.1 所示:

表　5.1

f_1	a	b
a	a	a
b	a	a

f_2	a	b
a	a	b
b	b	a

f_3	a	b
a	b	a
b	a	a

f_4	a	b
a	a	b
b	a	b

则只有 $\boxed{B}$ 满足交换律, $\boxed{C}$ 满足幂等律, $\boxed{D}$ 有幺元, $\boxed{E}$ 有零元.

供选择的答案

A: ① 4; ② 8; ③ 16; ④ 2.

B, C, D, E:

⑤ f_1 和 f_2; ⑥ f_1, f_2 和 f_3; ⑦ f_3 和 f_4; ⑧ f_4; ⑨ f_1; ⑩ f_2.

5.2　设 $S=Q\times Q$, 其中 Q 为有理数集合. 定义 S 上的二元运算 *, ∀$\langle a, b\rangle, \langle x, y\rangle\in S$ 有

$$\langle a, b\rangle * \langle x, y\rangle=\langle ax, ay+b\rangle,$$

则　(1) $\langle 3, 4\rangle * \langle 1, 2\rangle=\boxed{A}$, $\langle -1, 3\rangle * \langle 5, 2\rangle=\boxed{B}$.

(2) $\langle S, *\rangle$ 是 $\boxed{C}$.

(3) $\langle S, *\rangle$ 的幺元是 $\boxed{D}$.

(4) $\langle S, *\rangle$ $\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B:

① $\langle 3, 10\rangle$; ② $\langle 3, 8\rangle$; ③ $\langle -5, 1\rangle$.

C: ④ 可交换的; ⑤ 可结合的; ⑥ 不是可交换也不是可结合的.

D: ⑦ $\langle 1, 0\rangle$; ⑧ $\langle 0, 1\rangle$.

E: ⑨ 只有唯一的逆元;

⑩ $a\neq 0$ 时, 元素 $\langle a, b\rangle$ 有逆元.

5.3　R 为实数集, 定义以下 6 个函数 $f_1, f_2, \cdots, f_6$, ∀ $x, y\in R$ 有

$$f_1(\langle x, y\rangle)=x+y,$$

$$f_2(\langle x, y\rangle)=x-y,$$

$$f_3(\langle x,y\rangle)=xy,$$
$$f_4(\langle x,y\rangle)=\max\{x,y\},$$
$$f_5(\langle x,y\rangle)=\min\{x,y\},$$
$$f_6(\langle x,y\rangle)=|x-y|$$

那么,其中有$\boxed{A}$个是 R 上的二元运算,有$\boxed{B}$个是可交换的,$\boxed{C}$个是可结合的,$\boxed{D}$个是有幺元的,$\boxed{E}$个是有零元的.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 0; ② 1; ③ 2; ④ 3; ⑤ 4; ⑥ 5; ⑦ 6.

5.4 (1) 设 $V=\langle Z,+,\cdot\rangle$,其中+和·分别表示普通加法和乘法,则 V 有$\boxed{A}$个不同的子代数,且这些子代数$\boxed{B}$.

(2) 令 $T_1=\{2n|n\in Z\}$,则 T_1 是 V 的$\boxed{C}$.

(3) 令 $T_2=\{2n+1|n\in Z\}$,则 T_2 不是 V 的子代数,其原因是 T_2 $\boxed{D}$.

(4) 令 $T_3=\{-1,0,1\}$,则 T_3 不是 V 的子代数,其原因是 T_3 $\boxed{E}$.

供选择的答案

A: ① 有限; ② 无限.

B: ③ 含有有限个元素; ④ 含有无限个元素; ⑤ 有的含有有限个元素,有的含有无限个元素.

C: ⑥ 平凡的子代数; ⑦ 非平凡的子代数.

D, E: ⑧ 对加法不封闭; ⑨ 对乘法不封闭; ⑩ 对加法和乘法都不封闭.

5.5 设 $V=\langle R^+,\cdot\rangle$,其中·为普通乘法. 对任意 $x\in R^+$ 令 $\varphi(x)=|x|$, $\varphi(x)=2x$, $\varphi(x)=x^2$, $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(x)=-x$,则其中有$\boxed{A}$个是 V 的自同态. 它们是$\boxed{B}$,有$\boxed{C}$个是单自同态而不是满自同态,$\boxed{D}$个是满自同态而不是单自同态,$\boxed{E}$个是自同构.

供选择的答案

A, C, D, E:

① 0; ② 1; ③ 2; ④ 3; ⑤ 4; ⑥ 5.

B: ⑦ φ, φ, φ; ⑧ φ, φ; ⑨ φ, φ, φ; ⑩ φ, φ, φ, φ.

5.6 设 $V=\langle Z,+\rangle$,其中+为普通加法. ∀ $x\in Z$ 令 $\varphi(x)=x$, $\varphi(x)=0$, $\varphi(x)=x+5$, $\varphi(x)=2x$, $\varphi(x)=x^2$, $\varphi(x)=-x$,则 φ, …, φ 中有$\boxed{A}$个是 V 的自同态,其中$\boxed{B}$个不是 V 的自同构,$\boxed{C}$个只是单自同态不是满自同态,$\boxed{D}$个是满自同态不是单自同态. 零同态的同态象是$\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, C, D:

① 0; ② 1; ③ 2; ④ 3; ⑤ 4; ⑥ 5; ⑦ 6; E: ⑧ {0}; ⑨ 0; ⑩ Z.

5.7 设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$,问下面定义的二元运算*是否为 S 上的二元运算?

(1) $x*y=\gcd(x,y)$, x 与 y 的最大公约数.

(2) $x*y=\mathrm{lcm}(x,y)$, x 与 y 的最小公倍数.

(3) $x*y=$ 大于等于 xy 的最小整数.

(4) $x * y = \max\{x, y\}$.

(5) $x * y =$ 质数 p 的个数，其中 $x \leq p \leq y$.

5.8　下面各集合都是 N 的子集，它们在普通加法运算下是否封闭？

(1) $\{x \mid x$ 的某次幂可以被 16 整除$\}$.

(2) $\{x \mid x$ 与 5 互质$\}$.

(3) $\{x \mid x$ 是 30 的因子$\}$.

(4) $\{x \mid x$ 是 30 的倍数$\}$.

5.9　设 $V = \langle S, * \rangle$，其中 $S = \{a, b, c\}$，$*$ 的运算表分别给定如下：

(1)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

(2)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

(3)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

分别对以上每种情况讨论 $*$ 运算的可交换性、幂等性，是否含有幺元以及 S 中的元素是否含有逆元.

5.10　设 $V_1 = \langle \{0, 1, 2\}, \circ \rangle$，$V_2 = \langle \{0, 1\}, * \rangle$，其中 $\circ$ 表示模 3 加法，$*$ 表示模 2 乘法，试构造积代数 $V_1 \times V_2$ 的运算表，并指出积代数的幺元.

5.11　设代数系统 $V = \langle A, \circ, *, \Delta \rangle$，其中 $A = \{1, 2, 5, 10\}$，$\forall x, y \in A$ 有 $x \circ y = x$ 与 y 的最大公约数，$x * y = x$ 与 y 的最小公倍数，$\Delta x = \dfrac{10}{x}$. 给出关于 $\circ, *$ 和 Δ 运算的运算表.

5.12　设 $V = \langle R^*, \circ \rangle$ 是代数系统，其中 R^* 为非零实数的集合. 分别对下述小题讨论 $\circ$ 运算是否可交换、可结合，并求幺元和所有可逆元素的逆元.

(1) $\forall a, b \in R^*$，$a \circ b = \dfrac{1}{2}(a + b)$.

(2) $\forall a, b \in R^*$，$a \circ b = \dfrac{a}{b}$.

(3) $\forall a, b \in R^*$，$a \circ b = ab$.

5.13　设 $V = \langle A, * \rangle$ 为代数系统，其中 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $\forall a, b \in A$，$a * b = (ab) \bmod 5$.

(1) 列出 $*$ 的运算表.

(2) $*$ 是否有零元和幺元？若有幺元，请求出所有可逆元素的逆元.

5.14　设 $A = \{1, 2\}$，$V = \langle A^A, \circ \rangle$，其中 $\circ$ 表示函数的合成. 试给出 V 的运算表，并求出 V 的幺元和所有可逆元素的逆元.

5.15　设 $A = \{x \mid x \in R \wedge x \neq 0, 1\}$. 在 A 上定义 6 个函数如下：

$f_1(x) = x$，$f_2(x) = \dfrac{1}{x}$，$f_3(x) = 1 - x$，$f_4(x) = \dfrac{1}{1-x}$，$f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$，$f_6(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$V = \langle S, \circ \rangle$，其中 $S = \{f_1, f_2, \cdots, f_6\}$，$\circ$ 为函数的复合.

(1) 给出 V 的运算表.

(2) 说明 V 的幺元和所有可逆元素的逆元.

习 题 解 答

5.1　A: ③; B: ⑥; C: ⑧; D: ⑩; E: ⑨.

分析　S 为 n 元集,那么 $S\times S$ 有 n^2 个元素. S 上的一个二元运算就是函数 $f: S\times S\to S$. 这样的函数有 n^{n^2} 个. 因此 $\{a, b\}$ 上的二元运算有 $2^{2^2}=16$ 个.

下面说明通过运算表判别二元运算性质及求特异元素的方法.

1° 交换律. 若运算表中元素关于主对角线成对称分布,则该运算满足交换律.

2° 幂等律. 设运算表表头元素的排列顺序为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 如果主对角线元素的排列也为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则该运算满足幂等律.

其他性质,如结合律或者涉及到两个运算表的分配律和吸收律,在运算表中没有明显的特征,只能针对所有可能的元素 x, y, z 等来验证相关的算律是否成立.

3° 幺元 e. 设运算表表头元素的排列顺序为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 如果元素 x_i 所在的行和列的元素排列顺序也是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则 x_i 为幺元.

4° 零元 θ 如果元素 x_i 所在的行和列的元素都是 x_i,则 x_i 是零元.

5° 幂等元. 设运算表表头元素的排列顺序为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 如果主对角线上第 i 个元素恰为 x_i, $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$,那么 x_i 是幂等元. 易见幺元和零元都是幂等元.

6° 可逆元素及其逆元. 设 x_i 为任意元素,如果 x_i 所在的行和列都有幺元,并且这两个幺元关于主对角线成对称分布,比如说第 i 行第 j 列和第 j 行第 i 列的两个位置,那么 x_j 与 x_i 互为逆元. 如果 x_i 所在的行和列具有共同的幺元,则幺元一定在主对角线上,那么 x_i 的逆元就是 x_i 自己. 如果 x_i 所在的行或者所在的列没有幺元,那么 x_i 不是可逆元素. 不难看出幺元 e 一定是可逆元素,且 $e^{-1}=e$; 而零元 θ 不是可逆元素.

以本题为例, f_1, f_2, f_3 的运算表是对称分布的,因此,这三个运算是可交换的,而 f_4 不是可交换的. 再看幂等律. 四个运算表表头元素排列都是 a, b,其中主对角线元素排列为 a, b 的只有 f_4,所以, f_4 遵从幂等律. 下面考虑幺元. 如果某元素所在的行和列元素的排列都是 a, b,该元素就是幺元. 不难看出只有 f_2 中的 a 满足这一要求,因此, a 是 f_2 的幺元,其他三个运算都不存在幺元. 最后考虑零元. 如果 a 所在的行和列元素都是 a,那么 a 就是零元;同样的,若 b 所在的行和列元素都是 b,那么 b 就是零元. 检查这四个运算表, f_1 中的 a 满足要求,是零元,其他运算都没有零元. 在 f_4 的运算表中,尽管 a 和 b 的列都满足要求,但行不满足要求. 因而 f_4 中也没有零元.

5.2　A: ①; B: ③; C: ⑤; D: ⑦; E: ⑩.

分析　对于用解析表达式定义的二元运算 $\circ$ 和 $*$,判别它们是否满足交换律、结合律、幂等律、分配律和吸收律的方法总结如下:

1° $\circ$ 运算的交换律

任取 x, y,根据 $\circ$ 运算的解析表达式验证等式 $x\circ y=y\circ x$ 是否成立. 如果成立, $\circ$ 运算就满足交换律.

2° $\circ$ 运算的结合律

任取 x, y, z,根据 $\circ$ 运算的解析表达式验证等式 $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$ 是否成立.

如果成立， 运算就是可结合的.

3° 运算的幂等律

任取 x，根据 运算的解析表达式验证等式 x x = x 是否成立. 如果成立， 运算满足幂等律.

4° 运算对* 运算的分配律

任取 x，y，z，根据 和* 运算的解析表达式验证等式 x (y* z) = (x y)* (x z) 和(y* z) x = (y x)* (z x)是否成立. 如果成立，则 运算对* 运算满足分配律.

5° 和* 运算的吸收律

首先验证 和* 运算是可交换的. 然后任取 x，y，根据 和* 运算的解析表达式验证等式 x (x* y) = x 和 x* (x y) = x 是否成立. 如果成立，则 和* 运算满足吸收律.

设 是用解析表达式定义的 A 上的二元运算，求解对于该运算的特异元素可以采用下述方法：

1° 求幺元 e. 根据幺元定义，" x∈A，e 应该满足等式 x e = e x = x. 将等式中的 x e 和 e x 用关于 运算的解析表达式代入并将结果化简，然后由 x 的任意性来确定 e.

2° 求零元 θ 根据零元定义，" x∈A，θ应该满足等式 x θ= θ x = θ 将等式中的 x θ和 θ x 用关于 运算的解析表达式代入并将结果化简，然后由 x 的任意性确定 θ

3° 求幂等元. 将 x x = x 等式中的 x x 用关于 运算的解析表达式代入并化简，然后求解该方程，所得到的解就是幂等元.

4° 求可逆元素的逆元. 任取 x∈A，设 x 的逆元为 y，则 x 与 y 应该满足等式 x y = y x = e. 将等式中的 x y 和 y x 用关于 运算的解析表达式代入，并将 e 用 运算的幺元代入，然后化简等式. 观察使得该等式成立的 x 应该满足的条件，然后将 y 用含有 x 的公式表示出来，从而得到 x 的逆元. 这里特别要说明一点，如果 运算不存在幺元 e，则所有的元素都是不可逆的.

以本题为例，具体的分析过程如下：

任取〈a，b〉，〈x，y〉∈Q× Q，由

〈a，b〉* 〈x，y〉= 〈ax，ay + b〉，

〈x，y〉* 〈a，b〉= 〈xa，xb + y〉，

可知一般情况下 ay + b≠xb + y，所以* 运算不是可交换的.

任取〈a，b〉，〈x，y〉，〈u，v〉∈Q× Q，由

(〈a，b〉* 〈x，y〉) * 〈u，v〉= 〈ax，ay + b〉* 〈u，v〉

= 〈axu，axv + ay + b〉，

〈a，b〉* (〈x，y〉* 〈u，v〉) = 〈a，b〉* 〈xu，xv + y〉

= 〈axu，a(xv + y) + b〉= 〈axu，axv + ay + b〉，

可知* 运算是可结合的.

设* 运算的幺元为〈e_1，e_2〉，则" 〈a，b〉∈Q× Q 有

〈a，b〉* 〈e_1，e_2〉= 〈a，b〉，

〈e_1，e_2〉* 〈a，b〉= 〈a，b〉，

代入关于* 运算的解析表达式得

$\langle ae_1, ae_2 + b\rangle = \langle a, b\rangle$,

$\langle e_1 a, e_1 b + e_2\rangle = \langle a, b\rangle$.

从而得到

$ae_1 = a, ae_2 + b = b, e_1 a = a, e_1 b + e_2 = b$.

由于 a, b 是任意有理数, 要使得上述四个等式都成立, 必有

$e_1 = 1, e_2 = 0$.

所以, * 运算的幺元为$\langle 1, 0\rangle$.

对于任意的$\langle a, b\rangle \in Q \times Q$, 设$\langle a, b\rangle$的逆元为$\langle x, y\rangle$, 那么有

$\langle a, b\rangle * \langle x, y\rangle = \langle 1, 0\rangle$,

$\langle x, y\rangle * \langle a, b\rangle = \langle 1, 0\rangle$.

代入关于* 运算的解析表达式得

$\langle ax, ay + b\rangle = \langle 1, 0\rangle$,

$\langle xa, xb + y\rangle = \langle 1, 0\rangle$,

从而得到

$ax = 1, ay + b = 0, xa = 1, xb + y = 0$.

解得

$$x = \frac{1}{a}\ (a \neq 0), y = -\frac{b}{a}(a \neq 0).$$

这说明对一切$\langle a, b\rangle \in Q \times Q$, 只要 $a \neq 0$ 都存在逆元$\left\langle \frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right\rangle$.

最后补充说明一点. 不难验证, * 运算没有零元. 而关于* 运算的幂等元是$\langle 1, 0\rangle$和$\langle 0, b\rangle$, 其中 b 为任意有理数.

5.3 A: ⑦; B: ⑥; C: ⑤; D: ③; E: ②.

分析 怎样检验运算 是否为 S 上的二元运算, 或者说 S 是否关于 运算封闭? 主要是验证以下两个条件是否满足:

1° 任何 S 中的元素都可以作为参与运算的元素.

2° 运算的结果仍旧是 S 中的元素.

如果给定了两个以上的运算, 在讨论封闭性时要分别对每个运算讨论.

容易验证本题中的 6 个函数全是实数集 R 上的二元运算. 它们的可交换性、结合性、幺元和零元的判别结果如下.

	交换	结合	幺元	零元
f_1			为 0	
f_2				
f_3			为 1	为 0
f_4				
f_5				
f_6				

5.4　A: ②; B: ⑤; C: ⑦; D: ⑧; E: ⑧.

分析　对于给定的自然数 n, $n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$nZ = \{nk \mid k \in Z\}$$

是 V 的子代数. 因为 $\forall\, nk_1, nk_2 \in nZ$ 有

$$nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2) \in nZ,$$

$$nk_1 \cdot nk_2 = n(k_1 n k_2) \in nZ.$$

这说明 nZ 关于+ 和 · 运算都是封闭的, 满足子代数的定义. 由于 n 可以取任何自然数, 这样的子代数有无数多个. 其中当 $n = 0$ 时, $nZ = \{0\}$是有穷集合, 即有限的子代数, 其余都是无限的子代数.

对于 T_2 来说, 它是奇整数的集合. 而奇数加奇数等于偶数, 因而 T_2 关于加法不封闭. 类似地, T_3 关于加法也不封闭, 因为 $1 \in T_3$, 但 $1 + 1 = 2 \notin T_3$. 因而可以判定 T_2 和 T_3 都不是 V 的子代数, 尽管 T_2 和 T_3 对于乘法是封闭的.

5.5　A: ④; B: ⑨; C: ①; D: ①; E: ④.

分析　构成代数系统的要素有三个: 集合、二元或一元运算及代数常数. 如果 φ是代数系统 V_1 到 V_2 的同态, 那么 φ必须满足以下条件:

1° $\varphi: V_1 \to V_2$, 即 φ是 V_1 到 V_2 的函数.

2° 对 V_1 和 V_2 上任意对应的二元运算　和　有

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ' \varphi(y),\ \forall\, x, y \in V_1.$$

对 V_1 和 V_2 上任意对应的一元运算 Δ和 Δ有

$$\varphi(\Delta x) = \Delta' \varphi(x),\ \forall\, x \in V_1.$$

3° 对 V_1 和 V_2 上任意对应的代数常数 k 和 k 有

$$\varphi(k) = k'.$$

以本题为例. 因为只有一个二元运算, 验证时只要检验条件 1°, 2° 即可. 具体的验证过程如下: φ, φ, φ, φ 都是 R^+ 到 R^+ 的映射, 且

$$\forall\, x, y \in R^+,\ \varphi(x \cdot y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

$$\forall\, x, y \in R^+,\ \varphi(x \cdot y) = (xy)^2 = x^2 \cdot y^2 = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

$$\forall\, x, y \in R^+,\ \varphi(x \cdot y) = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

所以 φ, φ和 φ是 V 的自同态. 但是 φ 和 φ 不是 V 的自同态. 原因如下:

$$\varphi(1 \cdot 2) = \varphi(2) = 4,$$

$$\varphi(1) \cdot \varphi(2) = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) = 8,$$

故 $\varphi(1 \cdot 2) \neq \varphi(1) \cdot \varphi(2)$, 破坏了同态映射的条件 2°. 而对于 φ, 它将正数映到负数, 根本不是 R^+ 到 R^+ 的函数, 破坏了条件 1°, 当然更谈不到同态了.

容易看出 φ, φ和 φ的图像在 R^+ 上都是严格单调的, 且它们的函数值分布在整个 R^+ 中, 因此, 它们都是双射的, 都是 V 的自同构.

通过上面的分析已经知道了判别同态及其性质的基本方法. 下面补充介绍一些典型

同态映射的实例,以供读者参考.

1° $V=\langle Z,+\rangle$是整数加群. 令 $\varphi: Z\to Z$, $\varphi(x)=ax$, $\forall x\in Z$,这里的 a 是给定的整数. 那么, $\forall x,y\in Z$ 有

$$\varphi(x+y)=a(x+y)=ax+ay=\varphi(x)+\varphi(y).$$

φ是 V 的自同态.

当 $a=0$ 时, φ不是单同态, 也不是满同态, 其同态象为$\langle\{0\},+\rangle$.

当 $a=\pm 1$ 时, φ为自同构.

当 $a\neq 0,\pm 1$ 时, φ为单自同态, 其同态象为$\langle aZ,+\rangle$, 其中 $aZ=\{ak\mid k\in Z\}$.

2° $V=\langle Z_n,\oplus\rangle$是模 n 整数加群, 其中 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$. $\forall x,y\in Z_n$ 有 $x\oplus y=(x+y)\bmod n$. 令 $\varphi: Z_n\to Z_n$, $\varphi(x)=(px)\bmod n$, 其中 $p=0,1,\cdots,n-1$. 可以证明 φ 是 V 的自同态. 因为 $\forall x,y\in Z_n$ 有

$$\begin{aligned}\varphi(x\oplus y)&=(p(x\oplus y))\bmod n\\&=(px\oplus py)\bmod n=(px)\bmod n\oplus(py)\bmod n\\&=\varphi(x)\oplus\varphi(y).\end{aligned}$$

由于 p 有 n 种取值, 这里定义了 n 个自同态.

例如, $n=6$, $Z_6=\{0,1,\cdots,5\}$. $V=\langle Z_6,\oplus\rangle$上有 6 个自同态, 即 $\varphi,\varphi,\cdots,\varphi$. 其中

$$\begin{array}{lll}\varphi(x)=0, & \forall x\in Z_6, & \\ \varphi(x)=x, & \forall x\in Z_6, & \\ \varphi(1)=2, & \varphi(2)=4, & \varphi(3)=0,\\ \varphi(4)=2, & \varphi(5)=4, & \varphi(0)=0.\\ \varphi(1)=3, & \varphi(2)=0, & \varphi(3)=3,\\ \varphi(4)=0, & \varphi(5)=3, & \varphi(0)=0.\\ \varphi(1)=4, & \varphi(2)=2, & \varphi(3)=0,\\ \varphi(4)=4, & \varphi(5)=2, & \varphi(0)=0,\\ \varphi(1)=5, & \varphi(2)=4, & \varphi(3)=3,\\ \varphi(4)=2, & \varphi(5)=1, & \varphi(0)=0.\end{array}$$

这 6 个自同态中 φ 和 φ是自同构, 其他的既不是单同态, 也不是满同态. φ 的同态象为$\langle\{0\},\oplus\rangle$. φ 和 φ 的同态象为$\langle\{0,2,4\},\oplus\rangle$, φ的同态象为$\langle\{0,3\},\oplus\rangle$.

3° 设 $V_1=\langle Z,+\rangle$, $V_2=\langle Z_n,\oplus\rangle$分别为整数加群和模 n 整数加群. $\varphi: Z\to Z_n$, $\varphi(x)=(x)\bmod n$ 容易证明 φ是满同态.

4° 设 $V_1=\langle R,+\rangle$, $V_2=\langle R^*,\cdot\rangle$, 其中 R 和 R^* 分别代表实数集和非零实数集, + 和 · 分别代表普通加法和乘法. $\varphi: R\to R^*$, $\varphi(x)=e^x$ 是 V_1 到 V_2 的单同态, 其同态象为$\langle R^+,\cdot\rangle$, 这里的 R^+ 是正实数集.

5° 设 $V_1=\langle A,\ \rangle$, $V_2=\langle B,*\rangle$是具有一个二元运算的代数系统. V_1 与 V_2 的积代数为$\langle A\times B,\cdot\rangle$. 令 $\varphi: A\times B\to A$, $\varphi(\langle a,b\rangle)=a$, 那么 φ是积代数 $V_1\times V_2$ 到 V_1 的同态, 因为对任意$\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\in A\times B$ 有

$$\varphi(\langle a_1, b_1\rangle ¡¤ \langle a_2, b_2\rangle) = \varphi(\langle a_1 ¡£ a_2, b_1 * b_2\rangle)$$
$$= a_1 ¡£ a_2 = \varphi(\langle a_1, b_1\rangle) ¡£ \varphi(\langle a_2, b_2\rangle).$$

容易看出 φ是满同态. 只有当 B 为单元集时 φ为同构.

5.6 A: ⑤; B: ③; C: ②; D: ①; E: ⑧.

5.7 (1) 和(4) 是代数系统.

(2) 不是, 例如 lcm(9, 10) = 90, 90 $\notin$ S.

(3) 不是, 例如 9* 10= 90, 90 $\notin$ S.

(5) 不是, 例如 9* 10= 0, 0 $\notin$ S.

5.8 (1) 封闭, 若 x^s, y^t 是 16 的倍数, 则 $(x+y)^{s+t}$ 也是 16 的倍数.

(2) 不封闭, 例如 2 和 5 互质, 3 也和 5 互质, 但 2+ 3= 5 却不和 5 互质.

(3) 不封闭, 3 和 5 都是 30 的因子, 但是 3+ 5= 8 不是 30 的因子.

(4) 封闭.

5.9 (1) 可交换, 不幂等. a 是幺元, 且 $a^{-1} = a$, b 和 c 互为逆元.

(2) 不可交换, 有幂等性, 无幺元, 当然不考虑逆元了.

(3) 可交换, 有幂等性, 幺元是 a, $a^{-1} = a$, b 和 c 都没有逆元.

分析　这里补充谈谈结合律的判定问题. 在验证结合律 $(x * y) * z = x * (y * z)$ 是否成立时, 等式中的 x, y, z 可以取 a, b, c 中的任何元素, 共有 27 种可能的选法. 这意味着必须要验证 27 个等式, 工作量很大. 若 x, y, z 中有幺元或零元存在, 则等式显然成立. 考虑到这个因素, 在验证时可以不选取集合中的幺元和零元. 下面以本题为例来判定结合律是否成立.

(1) a 是幺元. 只须对 b 和 c 进行验证. 又由于* 运算的可交换性, 全是 b 或全是 c 的情况可以忽略, 因而需要验证的只有下面六种情况:

$$(b*b)*c = c*c = b = b*a = b*(b*c),$$
$$(b*c)*b = a*b = b = b*a = b*(c*b),$$
$$(b*c)*c = a*c = c = b*b = b*(c*c),$$
$$(c*b)*b = a*b = b = c*c = c*(b*b),$$
$$(c*b)*c = a*c = c = c*a = c*(b*c),$$
$$(c*c)*b = b*b = c = c*a = c*(c*b).$$

由以上验证可知* 运算是可结合的.

(2) 通过观察发现, " x, y $\in$ S 有 $x * y = y$. 每个元素都是右零元. 因而必有" x, y, z $\in$ S,

$$(x*y)*z = y*z = z, \quad x*(y*z) = x*z = z.$$

这就证明了结合律是成立的.

(3) c 是零元, 故只须对 a 和 b 验证. 显然 $(a*a)*a = a*(a*a)$, 因此, 只须考虑至少含有一个 b 的等式. 由 $a*b = b*a = b$, $b*b = b$ 可知无论 b 处在哪一个位置, 等式两边都等于 b, 因此结合律成立.

5.10　结果如表 5.2 所示.

表　5.2

	⟨0, 0⟩	⟨0, 1⟩	⟨1, 0⟩	⟨1, 1⟩	⟨2, 0⟩	⟨2, 1⟩
⟨0, 0⟩	⟨0, 0⟩	⟨0, 0⟩	⟨1, 0⟩	⟨1, 0⟩	⟨2, 0⟩	⟨2, 0⟩
⟨0, 1⟩	⟨0, 0⟩	⟨0, 1⟩	⟨1, 0⟩	⟨1, 1⟩	⟨2, 0⟩	⟨2, 1⟩
⟨1, 0⟩	⟨1, 0⟩	⟨1, 0⟩	⟨2, 0⟩	⟨2, 0⟩	⟨0, 0⟩	⟨0, 0⟩
⟨1, 1⟩	⟨1, 0⟩	⟨1, 1⟩	⟨2, 0⟩	⟨2, 1⟩	⟨0, 0⟩	⟨0, 1⟩
⟨2, 0⟩	⟨2, 0⟩	⟨2, 0⟩	⟨0, 0⟩	⟨0, 0⟩	⟨1, 0⟩	⟨1, 0⟩
⟨2, 1⟩	⟨2, 0⟩	⟨2, 1⟩	⟨0, 0⟩	⟨0, 1⟩	⟨1, 0⟩	⟨1, 1⟩

其中⟨0, 1⟩为幺元.

5.11　运算表如表 5.3 所示.

表　5.3

	1	2	5	10
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
5	1	1	5	5
10	1	2	5	10

*	1	2	5	10
1	1	2	5	10
2	2	2	10	10
5	5	10	5	10
10	10	10	10	10

x	Δx
1	10
2	5
5	2
10	1

5.12　(1) 可交换, 不可结合, 无幺元, 无可逆元素.

(2) 不可交换, 不可结合, 无幺元, 无可逆元素.

(3) 可交换, 可结合, 幺元是 1, " $a \in R^*$ 有 $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

5.13　结果如表 5.4 所示.

表　5.4

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

零元　0

幺元　1

逆元　$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3,$
$3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4,$
0 无逆元.

5.14　$A^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, 其中

$f_1(1) = 1, f_1(2) = 1;$

$f_2(1) = 1, f_2(2) = 2;$

$f_3(1) = 2, f_3(2) = 1;$

$f_4(1) = 2, f_4(2) = 2.$

运算表如表 5.5 所示.

表 5.5

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

幺元 f_2

逆元 f_1 **无逆元**, $f_2^{-1}=f_2$, $f_3^{-1}=f_3$, f_4 **无逆元**.

5.15 **运算表如表 5.6 所示.**

表 5.6

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

幺元 f_1

逆元 $f_1^{-1}=f_1$, $f_2^{-1}=f_2$, $f_3^{-1}=f_3$,
$f_4^{-1}=f_5$, $f_5^{-1}=f_4$, $f_6^{-1}=f_6$.

分析 注意复合函数的计算顺序. 例如,

$$f_4 \circ f_3(x) = f_4(f_3(x)) = f_4(1-x)$$

$$= \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} = f_2(x).$$

从而得到 $f_4 \circ f_3 = f_2$.

第 6 章　几个典型的代数系统

内 容 提 要

1. 半群、独异点和群的一般概念

设 V=〈S，　〉是代数系统，　为二元运算．如果　运算是可结合的，则称 V 为半群．如果半群中的　运算含有幺元 e，则称该半群为含幺半群，也称为独异点．为了强调幺元的存在，有时将独异点 V 记作〈S，　，e〉．设〈G，　〉是独异点，如果对 G 中的任何元素 x 都有 $x^{-1} \in G$，则称 G 是群．由以上定义可以知道，群一定是独异点和半群，但半群和独异点不一定是群．

在半群中可以定义元素的正整数次幂．对任意元素 x 和正整数 n 有

$$x^n = \underbrace{x \text{¡£} x \text{¡£} \cdots \text{¡£} x}_{n\text{个}x},$$

表示 n 个 x 运算的结果．除此之外，在独异点和群中可以定义 x 的零次幂，即 $x^0 = e$．进一步，在群中还可以定义 x 的负整数次幂．设 n 为正整数，那么

$$x^{-n} = \underbrace{x^{-1} \text{¡£} x^{-1} \text{¡£} \cdots \text{¡£} x^{-1}}_{n\text{个}x^{-1}},$$

表示 n 个 x^{-1}运算的结果．半群、独异点和群的幂运算都遵从下面的规则：

$$x^n \text{¡£} x^m = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

半群的子代数叫做子半群，独异点的子代数叫做子独异点．由子代数的定义不难看出，如果 V=〈S，　〉是半群，T 是 S 的非空子集，只要 T 对　运算封闭，那么〈T，　〉就是 V 的子半群．而对独异点 V=〈S，　，e〉来说，若 T 是 S 的非空子集，那么只有当 T 对　运算封闭且 e∈T 时，〈T，　，e〉才构成 V 的子独异点．这是由于幺元 e 是独异点的代数常数，而半群没有代数常数的缘故．

2. 群中常用术语和典型实例

若群 G 中的二元运算是可交换的，则称群 G 为交换群，也叫做阿贝尔(Abel)群．

若群 G 中有无限多个元素，则称 G 为无限群，否则称为有限群．对有限群 G，G 中元素个数叫做 G 的阶，记作©¦G©¦

只含幺元 e 的群称为平凡群，是 1 阶群．

下面是一些典型群的实例．

(1) 整数集 Z、有理数集 Q、实数集 R 和复数集 C 关于数的加法构成群，分别称为整数加群、有理数加群、实数加群和复数加群．非零实数集 R^* 关于数的乘法构成群．这些群都是无限群，也是阿贝尔群．

(2) 含 $Z_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$，那么 Z_n 关于模 n 整数加法构成群，称为模 n 整数加群．

是一个 n 阶阿贝尔群.

(3) 设 $G=\{e,a,b,c\}$, G 上的二元运算由表 6.1 给出. 不难证明 G 是一个群, 称为 Klein 四元群. 从表中可以看出 G 中运算是可交换的, e 为幺元, $\forall x\in G$, $x^{-1}=x$, 且在 a, b, c 三个元素中任何两个元素的运算结果都等于剩下的元素.

表 6.1

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(4) 设 G 为群, 如果存在 $a\in G$ 使得

$$G=\{a^k \mid k\in Z\},$$

则称 G 为循环群, 记作 $G=\langle a\rangle$, 称 a 为 G 的生成元. 若循环群 G 中含有无限多个元素, 则称 G 为无限循环群; 若 $|G|=n$, 则称 G 为 n 阶循环群. 容易证明循环群都是阿贝尔群, 但阿贝尔群不一定是循环群. 例如, Klein 四元群是阿贝尔群, 但不是循环群.

(5) 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$. S 上的任何双射函数 $\sigma: S\to S$ 称为一个 n 元置换, 置换的复合运算称为置换的乘法. 若将 S 上所有 n 元置换的集合记作 S_n, 那么 S_n 关于置换的乘法构成群, 称为 n 元对称群. S_n 的任何子群称为 n 元置换群. 当 $n\geq 3$ 时, S_n 不是阿贝尔群.

对任何 n 元置换 $\sigma\in S_n$, 可以将 σ 记为

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix},$$

称为 σ 的置换表示. 若 n 元置换 τ 的映射规则满足

$$\tau(a_1)=a_2,\ \tau(a_2)=a_3,\ \cdots,\ \tau(a_{m-1})=a_m,\ \tau(a_m)=a_1$$

并且保持其他的元素不变, 可将 τ 简记为

$$(a_1a_2\cdots a_m),$$

称为一个 m 次轮换. 可以证明任何 n 元置换 σ 都可以唯一地表示成一系列不相交的轮换之积, 称为 σ 的轮换表示.

3. 子群

设 G 是群, H 是 G 的非空子集, 如果 H 关于 G 中的运算构成群, 则称 H 为 G 的子群, 记作 $H\leq G$. 任何群 G 都有两个平凡子群: $\{e\}$ 和 G 自己, 除此之外都是 G 的非平凡的真子群.

设 G 为群, $x\in G$, 称 x 的所有幂的集合

$$H=\{x^k \mid k\in Z\}$$

所构成的子群为由 x 生成的子群, 记作 $\langle x\rangle$.

设 G 为群, 令

$$C=\{a \mid a\in G \text{ 且 } \forall x\in G(ax=xa)\},$$

即与 G 中所有元素都可交换的元素构成的集合, 则 C 是 G 的子群. 称为 G 的中心.

4. 元素的阶

设 G 为群. $x\in G$, 使得等式 $x^k=e$ 成立的最小正整数 k 称为 x 的阶. 如果 x 的阶存在, 记作 $|x|$, 并称 x 是有限阶元, 否则称 x 为无限阶元.

设 G 是无限群, 那么 G 中可能存在着无限阶元. 例如, 整数加法群$\langle Z, +\rangle$, 除 0 以外, 其他元素都是无限阶元. 但对某些无限阶群来说, 尽管群中含有无限多个元素, 但每个元素都是有限阶元. 例如, 单位根构成的集合

$$G=\{x \mid x\in C \text{ 且 } x^n=1, n\in Z\}, C \text{ 为复数集}$$

关于数的乘法构成群. 对任意 $x\in G$, 若 x 是 n 次根, 则$|x| \mid n$.

若 G 是 n 阶群, 则 G 中每个元素的阶都存在, 并且是 n 的因子.

5. 群的基本性质

关于群的性质有以下定理.

定理 6.1 设 G 为群, 则群中的幂运算满足

(1) $\forall x\in G$ 有$(x^{-1})^{-1}=x$,

(2) $\forall x, y\in G$ 有$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$,

(3) $\forall x\in G$ 有 $x^nx^m=x^{n+m}$,

(4) $\forall x\in G$ 有 $(x^n)^m=x^{nm}$,

(5) 若 G 为阿贝尔群 则$\forall x, y\in G$ 有$(xy)^n=x^ny^n$.

定理 6.2 设 G 为群, $\forall a, b\in G$. 方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 在 G 中有解, 且有唯一解.

定理 6.3 设 G 为群, 则 G 中适合消去律, 即对任意 $a, b, c\in G$ 有

(1) $ab=ac \Rightarrow b=c$,

(2) $ba=ca \Rightarrow b=c$.

6. 环和域

设$\langle R, +, \cdot\rangle$是代数系统, + 和 · 为二元运算, 分别称为加法和乘法. 若

(1) $\langle R, +\rangle$为阿贝尔群,

(2) $\langle R, \cdot\rangle$为半群,

(3) 乘法 · 对加法+ 适合分配律,

则称$\langle R, +, \cdot\rangle$是环.

由于在环 R 中存在两个二元运算, 为了避免混淆, 通常将加法幺元记作 0, 而将乘法幺元记作 1(如果存在的话). 类似地, 可将环中元素 a 的加法逆元称作 a 的负元, 记作 $-a$; 而将 a 的乘法逆元称作 a 的逆元, 记作 a^{-1}.

设$\langle R, +, \cdot\rangle$为环, 若存在元素 $a, b\in R, a\neq 0, b\neq 0$, 但 $ab=0$, 则称 a 为 R 中的左零因子, b 为 R 中的右零因子.

乘法可交换的, 含有幺元 1 的, 并且没有左和右零因子的环称为整环.

如果整环 R 至少含有 2 个元素, 且每个元素 $x(x\neq 0)$ 都有逆元 $x^{-1}\in R$, 则称 R 是域.

有理数集 Q, 实数集 R, 复数集 C 关于数的加法和乘法分别构成有理数域、实数域和复数域. 但整数集 Z 关于数的加法和乘法只能构成整环, 但不是域. 模 n 整数环$\langle Z_n, \oplus, \odot\rangle$当 n 为合数时不是整环, 也不是域; 但当 n 为素数时构成域.

7. 格的两个等价定义

设$\langle S, \preccurlyeq\rangle$是偏序集, 若$\forall x, y\in S$, $\{x, y\}$都有最小上界和最大下界, 则称 S 关于$\preccurlyeq$ 作

成一个格. 由于最小上界与最大下界的唯一性, 可以把求{x, y}的最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算, 分别用算符∨和∧表示, 从而〈S, ∨, ∧〉构成一个具有两个二元运算的代数系统, 称为由偏序集的格所导出的代数系统.

设〈S, * , 〉是具有两个二元运算的代数系统, 且对于* 和 运算适合交换律、结合律和吸收律, 则可以适当定义 S 中的偏序t 使得〈S, t 〉构成一个格, 且" a, b∈S, 有

$$a \wedge b = a * b, \quad a \vee b = a ¡£ b.$$

称这个格是由代数系统〈S, * , 〉导出的格.

以上两种定义格的方法是等价的.

8. 格的性质

格的主要性质有以下两条:

(1) 格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号= , t , s , ∨, ∧的命题. 令 f^* 是将 f 中的t 改写成 s , s 改写成t , ∨改写成∧, ∧改写成∨所得到的命题, 称为 f 的对偶命题. 根据格的对偶原理, 若 f 对一切格为真, 则 f^* 也对一切格为真.

(2) 设〈L, t 〉为格, 则运算∨和∧适合交换律、结合律、幂等律和吸收律.

9. 分配格、有补格和布尔格

设〈L, ∧, ∨〉是格, 若" a, b, c∈L 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

成立, 则称 L 为分配格.

如果格 L 中存在最小元和最大元, 则分别称为 L 的全下界和全上界, 记作 0 和 1. 这时也称 L 为有界格, 记作〈L, ∧, ∨, 0, 1〉.

设 L 为有界格, x∈L, 若存在 y∈L 使得 x∧y= 0 且 x∨y= 1 成立, 则称 y 是 x 的补元. 在有界格中, 0 和 1 互为补元, 而其他元素则情况各异, 有的不存在补元, 有的存在一个补元, 有的存在多个补元. 如果有界格中的每个元素都至少存在一个补元, 则称这个格为有补格.

有补分配格称为布尔格, 也叫做布尔代数. 在布尔代数 B 中每个元素都存在唯一的补元, 求补运算 可看作布尔代数中的一元运算, 并满足下述算律:

(1) 双重否定律 $(a')' = a$, " a∈B.

(2) D · M 律 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ " a, b∈B

10. 小结

通过本章的学习应达到以下的基本要求:

给定集合 S 和二元运算 , 能判定〈S, 〉是否构成半群、独异点和群.

给定半群 S 和子集 B, 判定 B 是否为 S 的子半群; 给定独异点 V 和子集 B, 判定 B 是

否为 V 的子独异点; 给定群 G 和子集 H, 判定 H 是否为 G 的子群.

给定群 G 和 $x \in G$, 求 $|G|$, $|x|$ 以及 x^n. 求解群方程. 求由 x 生成的子群$\langle x \rangle$.

求循环群 $G = \langle a \rangle$的所有生成元和子群.

给定 n 元置换 σ和 τ, 试把它们表成不交的轮换之积, 求 στ和 σ^{-1}.

给定集合 S 和 S 上的两个二元运算, 判定它们能否构成环、交换环、含幺环、整环和域.

计算环中的多项式.

判别格、分配格、有界格、有补格和布尔格.

求格中公式的对偶式. 给定格中元素 x, y, 求 $x \wedge y$ 和 $x \vee y$. 求有界格的全下界、全上界和给定元素的补元.

习　题

题 6.1～6.3 是填充题. 题目要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

6.1 对以下定义的集合和运算判别它们能否构成代数系统? 如果能, 请说明是构成哪一种代数系统?

(1) $S_1 = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n\}$, + 为普通加法, 则 S_1 是$\boxed{A}$.

(2) $S_2 = \left\{\frac{1}{2}, 0, 2\right\}$, * 为普通乘法, 则 S_2 是$\boxed{B}$.

(3) $S_3 = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, n 为任意给定的正整数且 $n \geq 2$, * 为模 n 乘法, 　为模 n 加法, 则 S_3 是$\boxed{C}$.

(4) $S_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $\leq$为小于等于关系, 则 S_4 是$\boxed{D}$.

(5) $S_5 = M_n(R)$, + 为矩阵加法, 则 S_5 是$\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 半群, 不是独异点; ② 独异点, 不是群; ③ 群; ④ 环, 不一定是域; ⑤ 域; ⑥ 格, 不是布尔代数; ⑦ 布尔代数; ⑧ 代数系统, 但不是以上 7 种; ⑨ 不是代数系统.

6.2 (1) 设 $G = \{0, 1, 2, 3\}$, 若$\odot$为模 4 乘法, 则$\langle G, \odot \rangle$构成$\boxed{A}$.

(2) 若　为模 4 加法, 则$\langle G, \ \rangle$是$\boxed{B}$阶群, 且是$\boxed{C}$. G 中的 2 阶元是$\boxed{D}$, 4 阶元是$\boxed{E}$.

供选择的答案

A: ① 群; ② 半群, 不是群.

B: ③ 有限; ④ 无限.

C: ⑤ Klein 四元群; ⑥ 置换群; ⑦ 循环群.

D, E: ⑧ 0; ⑨ 1 和 3; ⑩ 2.

6.3 (1) 设$\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$是布尔代数, 则 L 中的运算$\wedge$和$\vee$是$\boxed{A}$, 运算$\vee$的幺元是$\boxed{B}$, 零元是$\boxed{C}$, 最小的子布尔代数是由集合$\boxed{D}$构成.

(2) 在布尔代数 L 中表达式

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

的等价式是$\boxed{\text{E}}$.

供选择的答案

A: ① 适合 D.M 律、幂等律、消去律和结合律; ② 适合 D.M 律、结合律、幂等律、分配律; ③ 适合结合律、交换律、消去律、分配律.

B, C: ④ 0; ⑤ 1.

D: ⑥ {1}; ⑦ {0, 1}.

E: ⑧ $b\wedge(a\vee c)$; ⑨ $(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)$; ⑩ $(a\vee b)\wedge(a\vee b\vee c)\wedge(b\vee c)$.

6.4 设 Z 为整数集合, 在 Z 上定义二元运算 ∘, ∀ x, y∈Z 有

$$x \circ y = x + y - 2,$$

那么 Z 与运算 ∘ 能否构成群? 为什么?

6.5 设 $G = \{a, b, c, d\}$, 其中 $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

G 上的运算是矩阵乘法.

(1) 找出 G 的全部子群.

(2) 在同构的意义下 G 是 4 阶循环群还是 Klein 四元群?

(3) 令 S 是 G 的所有子群的集合, 定义 S 上的包含关系 ⊆, 则⟨S, ⊆⟩构成偏序集, 画出这个偏序集的哈斯图.

6.6 令 $Z[i] = \{a + bi \mid a, b \in Z\}$, 其中 i 为虚数单位, 即 $i^2 = -1$, 那么 Z[i] 对于普通加法和乘法能否构成环? 为什么?

6.7 下列各集合对于整除关系都构成偏序集, 判断哪些偏序集是格?

(1) L = {1, 2, 3, 4, 5}.

(2) L = {1, 2, 3, 6, 12}.

(3) L = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}.

(4) $L = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^n\}$.

6.8 设⟨S, ∧, ∨, ′, 0, 1⟩是布尔代数, 在 S 上定义二元运算 ∘, ∀ x, y∈S 有

$$x \circ y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y).$$

那么⟨S, ∘⟩能否构成代数系统? 如果能, 指出是哪种代数系统.

6.9 设 A = {1, 2, 3, 4, 5}, ⟨P(A), ⊕⟩构成群, 其中 ⊕ 为集合的对称差.

(1) 求解群方程{1, 3} ⊕ X = {3, 4, 5}.

(2) 令 B = {1, 4, 5}, 求由 B 生成的循环子群⟨B⟩.

6.10 以下两个置换是 S_6 中的置换, 其中

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 试把 σ 和 τ 表成不交的轮换之积.

(2) 求 $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

6.11 判断以下映射是否为同态映射. 如果是, 说明它是否为单同态和满同态.

(1) G 为群, $\varphi G \to G$, $\varphi(x) = e$, " $x \in G$, 其中 e 是 G 的幺元.

(2) $G = \langle Z, + \rangle$为整数加群, $\varphi G \to G$, $\varphi(n) = 2n$, " $n \in Z$.

(3) $G_1 = \langle R, + \rangle$, $G_2 = \langle R^+, \cdot \rangle$, 其中 R 为实数集, R^+ 为正实数集, + 和 · 分别为普通加法和乘法. $\varphi G_1 \to G_2$, $\varphi(x) = e^x$, " $x \in R$.

6.12 设 $A = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$是 110 的正因子集, $\langle A, t \rangle$构成偏序集, 其中 t 为整除关系.

(1) 画出偏序集$\langle A, t \rangle$的哈斯图.

(2) 说明该偏序集是否构成布尔代数, 为什么?

6.13 图 6.1 中给出了一些偏序集的哈斯图.

图 6.1

(1) 指出哪些不是格并说明理由.

(2) 对那些是格的说明它们是否为分配格、有补格和布尔格.

6.14 在图 6.2 所示的三个有界格中哪些元素有补元? 如果有, 请指出该元素所有的补元.

图 6.2

习 题 解 答

6.1　A: ⑨; B: ⑨; C: ④; D: ⑥; E: ③;

分析　对于给定的集合和运算判别它们是否构成代数系统的关键是检查集合对给定运算的封闭性，具体方法已在 5.3 节做过说明．下面分别讨论对各种不同代数系统的判别方法．

1°　给定集合 S 和二元运算　，判定〈S,　〉是否构成半群、独异点和群．根据定义，判别时要涉及到以下条件的验证：

条件 1　S 关于　运算封闭，

条件 2　　运算满足结合律，

条件 3　　运算有幺元，

条件 4　" $x \in S$，$x^{-1} \in S$．

其中半群判定只涉及条件 1 和 2；独异点判定涉及条件 1、2 和 3；而群的判定则涉及到所有的四个条件．

2°　给定集合 S 和二元运算　和＊，判定〈S,　,＊〉是否构成环、交换环、含幺环、整环、域．根据有关定义需要检验的条件有：

条件 1　〈S,　〉构成交换群，

条件 2　〈S,＊〉构成半群，

条件 3　＊对　运算的分配律，

条件 4　＊运算满足交换律，

条件 5　＊运算有幺元，

条件 6　＊运算不含零因子——消去律，

条件 7　©$©≥2，" $x \in S$，$x \neq 0$，有 $x^{-1} \in S$（对＊运算）．

其中环的判定涉及条件 1，2 和 3；交换环的判定涉及条件 1，2，3 和 4；含幺环的判定涉及条件 1，2，3 和 5；整环的判定涉及条件 1～6；而域的判定则涉及全部 7 个条件．

3°　判定偏序集〈S, t〉或代数系统〈S,　,＊〉是否构成格、分配格、有补格和布尔格．

若〈S, t〉为偏序集，首先验证" $x, y \in S$，$x \wedge y$ 和 $x \vee y$ 是否属于 S．若满足条件则 S 为格，且〈S, ∧, ∨〉构成代数系统．若〈S,　,＊〉是代数系统且　和＊运算满足交换律、结合律和吸收律，则〈S,　,＊〉构成格．

在此基础上作为分配格的充分必要条件是不含有与图 6.3 所示的格同构的子格．而有补格和布尔格的判定只要根据定义进行即可．注意对于有限格，只要元素个数不是 2 的幂，则一定不是布尔格．但元素个数恰为 2^n 的有限格中只有唯一的布尔格．

以本题为例具体的判定过程如下：

(1) 由 $n+n=2n \notin S_1$ 可知 S_1 对＋运算不封闭，根本不构成代数系统．

图　6.3

(2) 由 $2*2=4\notin S_2$ 可知 S_2 对* 运算不封闭, 也不构成代数系统.

(3) S_3 关于 ,* 运算封闭, 构成代数系统. 且 S_3 关于模 n 加法 满足交换群的定义, 关于模 n 乘法* 满足半群的定义, 且* 对 有分配律. 因而〈S_3, ,* 〉构成环. 但当 n= 6 时, 有 $2*3=3*2=0$. S_6 中含有零因子 2 和 3, 不是整环, 也不是域. 类似地分析可知, 当 n 为合数时, S_n 不是域, 但 n 为素数时 S_n 构成域.

(4) S_4 是偏序集. 对于小于等于关系≤, $x\wedge y=\min\{x,y\}$, $x\vee y=\max\{x,y\}$, 显然有 $x\wedge y, x\vee y\in S_4$, 构成格. 但 S_4 不是有补格, 2 和 3 没有补元, 也不是布尔代数.

(5) 容易验证 S_5 关于矩阵加法构成群.

6.2 A: ②; B: ③; C: ⑦; D: ⑩; E: ⑨.

分析 此处的 G 实际上是 Z_4. Z_n 关于模 n 加法构成群, 但关于模 n 乘法只构成独异点, 而不构成群, 因为 0 没有乘法逆元. 〈G, ī 〉是循环群. 2 是 2 阶元, 1 和 3 是 4 阶元.

如何求群 G 中元素的阶? 如果©G©¦ n, 则" x∈G, ©x©¦是 n 的正因子. 首先找到 n 的正因子, 并从小到大列出来, 然后依次检查每个正因子 r. 使得 $x^r=e$ 的最小的正因子 r 就是 x 的阶. 本题的©G©¦ 4, 4 的正因子是 1, 2, 4. 由于

$$2^1 = 2 \neq 0.$$

$$2^2 = 2\ \bar{\imath}\ 2 = 0.$$

所以, ©2©¦ 2. 类似地有

$$3^1 = 3,\quad 3^2 = 3\ \bar{\imath}\ 3 = 2,\quad 3^3 = 3\ \bar{\imath}\ 3\ \bar{\imath}\ 3 = 1,\quad 3^4 = 3\ \bar{\imath}\ 3\ \bar{\imath}\ 3\ \bar{\imath}\ 3 = 0,$$

因而©3©¦ 4.

6.3 A: ②; B: ④; C: ⑤; D: ⑦; E: ⑧.

分析 (1) 根据布尔代数定义可知∧和∨运算适合交换律、结合律、幂等律、分配律、D·M 律等, 不适合消去律. " $x\in L$, $0\vee x=x$, $x\vee 0=x$, $x\vee 1=1$, $1\vee x=1$, 所以, 0 是∨运算的幺元, 1 是∨运算的零元. 由于在布尔代数的表示〈L, ∧, ∨, ′, 0, 1〉中, 0 和 1 是作为代数常数列出来的, 所以, 最小的子布尔代数应包含所有的代数常数. 经验证{0, 1}恰构成子布尔代数, 因而是最小的子布尔代数.

(2) 表达式的等价式与对偶式是两个概念, 应加以区别. 容易看出, 由吸收律、交换律、分配律有

$$\begin{aligned}
&(a\wedge b)\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(b\wedge c) \\
&= (a\wedge b)\vee(b\wedge c) && \text{吸收律} \\
&= (b\wedge a)\vee(b\wedge c) && \text{交换律} \\
&= b\wedge(a\vee c) && \text{分配律}
\end{aligned}$$

这说明该表达式与 $b\wedge(a\vee c)$ 是等价的, 而其他两个表达式都不满足要求.

6.4 易证 Z 对 运算是封闭的, 且对任意 $x, y, z\in Z$ 有

$$(x ¡£ y) ¡£ z = (x + y - 2) + z - 2 = x + y + z - 4,$$

$$x ¡£ (y ¡£ z) = x ¡£ (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 = x + y + z - 4,$$

结合律成立. 2 是 运算的幺元. " $x\in Z$, $4-x$ 是 x 关于 运算的逆元. 综合上述, 〈Z, 〉构成群.

6.5　**根据矩阵乘法可以得到 G 的运算表如下:**

·	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

图　6.4

由运算表可以看出 a **是幺元. 又由**

$$b^2 = a,\quad c^4 = c^2c^2 = b^2 = a,\quad d^4 = d^2d^2 = b^2 = a.$$

知道 $|b| = 2$, $|c| = |d| = 4$. **当** $|G|$ **与** G **中元素** x **的阶相等时, 有** $G = \langle x\rangle$. **因此** G **是** 4 **阶循环群.**

G **的子群有** $\{a\}, \{a, b\}, G$ **三个. 令** $S = \{\{a\}, \{a, b\}, G\}$, **则** $\langle S,\ \ \rangle$ **的哈斯图如图** 6.4 **所示.**

分析　这里对怎样求一个循环群的生成元和子群做一点说明.

1°　**若** $G = \langle a\rangle$ **是无限循环群, 那么** G **只有两个生成元, 即** a **和** a^{-1}. G **的子群有无数多个, 它们分别由** a^k **生成, 这里的** k **可以是** 0, 1, …. **将** a^k **生成的子群的元素列出来就是**

$$\langle a^k\rangle = \{e, a^k, a^{-k}, a^{2k}, a^{-2k}, \cdots\},$$

该子群也是一个无限循环群. 不难证明当 $k \neq l$ **时, 子群** $\langle a^k\rangle \neq \langle a^l\rangle$.

例如, $G = \langle Z, +\rangle$, **那么** $G = \langle 1\rangle$ **是无限循环群.** G **的生成元为** 1 **和** -1. G **的由** 1^k **生成的子群是** $\langle 1^k\rangle = \langle k\rangle = \{0, k, -k, 2k, -2k, \cdots\} = kZ$, **其中** $k = 0, 1, \cdots$.

2°　**若** $G = \langle a\rangle$ **是** n **阶循环群, 那么** $G = \{e, a, \cdots, a^{n-1}\}$. G **的生成元有** (n) **个, 这里的** (n) **是欧拉函数, 即小于等于** n **且与** n **互素的正整数个数. 求生成元的方法是: 先找到所有小于等于** n **且与** n **互素的正整数. 对于每个这样的正整数** r, a^r **就是** G **的生成元.** G **的子群个数由** n **的正因子数决定. 对于** n **的每个正因子** d, $\langle a^{\frac{n}{d}}\rangle$ **就是** G **的** d **阶子群.**

以本题为例. $|G| = 4$, **与** 4 **互素的数是** 1 **和** 3. **因此** $G = \langle c\rangle$ **的生成元是** $c^1 = c$, $c^3 = d$. **再考虑子群.** 4 **的正因子是** 1, 2, 4, **所以,** G **的子群有** 3 **个, 即**

$\langle c^{\frac{4}{1}}\rangle = \langle c^4\rangle = \langle a\rangle = \{a\}$,　　　1 **阶子群**

$\langle c^{\frac{4}{2}}\rangle = \langle c^2\rangle = \{b, a\}$,　　　2 **阶子群**

$\langle c^{\frac{4}{4}}\rangle = \langle c\rangle = G$.　　　4 **阶子群**

根据包含关系不难得到图 6.4 **所示的哈斯图.**

6.6　Z[i] **对普通加法和乘法是封闭的, 且加法满足交换律、结合律, 乘法满足结合律, 乘法对加法满足分配律. 又知道加法的幺元是** 0, " $a + bi \in Z[i]$, $-a - bi$ **是** $a + bi$ **的负元. 从而** Z[i] **关于加法和乘法构成环. 容易看出这是一个整环, 但不是域.**

6.7　(1) **不是格,** (2), (3) **和**(4) **都是格.**

6.8　**任取** $x, y \in S$, **由** S **的性质有**

$$x\ ī\ y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \in S,$$

S **关于** ī **是封闭的, 构成代数系统** $\langle S, ī\ \rangle$. **容易验证** ī **运算满足结合律. 幺元是** 0, **因为**

" $x\in S$ 有

$$x \,\bar{\imath}\, 0 = (x \wedge 0') \vee (x' \wedge 0) = (x \wedge 1) \vee (x' \wedge 0) = x \vee 0 = x.$$

同理有 $0\,\bar{\imath}\, x = x$. 且" $x\in S$ 有

$$x \,\bar{\imath}\, x = (x \wedge x') \vee (x' \wedge x) = 0 \vee 0 = 0,$$

即 $x^{-1} = x$. 综合上述, $\langle S, \bar{\imath} \rangle$构成群.

6.9 (1) $X = \{1, 4, 5\}$

(2) $\langle B\rangle = \{B, B^2\} = \{\{1, 4, 5\},\quad \}$.

分析　设 G 为群, $a, b\in G$. 群方程 $ax = b$ 在 G 中有唯一解 $x = a^{-1}b$. 类似地, 群方程 $ya = b$ 在 G 中也有唯一解 $y = ba^{-1}$. 代入本题有

$$X = \{1, 3\}^{-1} \,\bar{\imath}\, \{3, 4, 5\} = \{1, 3\} \,\bar{\imath}\, \{3, 4, 5\} = \{1, 4, 5\}$$

由于对任何 $B\in P(A)$ 有 $B\,\bar{\imath}\, B = \quad$, 因而有

$$B^n = \begin{cases} B & n \text{ 为奇数} \\ & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

尽管$\langle B\rangle$中包含了 B 的所有幂, 但只有两个结果, 即 B 和　.

6.10 (1) $\sigma = (124)(365)$, $\tau = (1634)(25)$.

(2) $\sigma\tau = (15423)$, $\tau\sigma = (15462)$,

$\sigma\tau\sigma^{-1} = (15423)(563)(421) = (1256)(34)$.

分析　为了求出 σ的轮换表示, 先任选一个元素, 比如说 1, 从上述表示式中找到 $\sigma(1)$. 如果 $\sigma(1) = 1$, 则第一个轮换就找到了, 是(1). 如果 $\sigma(1) = i_1$, $i_1 \neq 1$, 接下去找 $\sigma(i_1) = i_2$. 继续这一过程, 直到某个 i_k 满足 $\sigma(i_k) = 1$ 为止. 通过这样的挑选, 从$\{1, 2, \cdots, n\}$中选出了一个序列: $1, i_1, i_2, \cdots, i_k$, 其中的元素满足 $\sigma(1) = i_1$, $\sigma(i_1) = i_2$, $\cdots$, $\sigma(i_{k-1}) = i_k$, $\sigma(i_k) = 1$. 这就是从 σ中分解出来的第一个轮换$(1\, i_1\, i_2 \cdots i_k)$. 如果该轮换包含了$\{1, 2, \cdots, n\}$中的所有元素, 那么分解结束, 并且有 $\sigma = (1\, i_1\, i_2 \cdots i_k)$; 否则任取$\{1, 2, \cdots, n\}$中剩余的一个元素 j_1, 然后找到第二个轮换$(j_1\, j_2 \cdots j_l)$. 照这样做下去, 直到$\{1, 2, \cdots, n\}$中没有剩下的元素为止.

以本题的 σ为例. 由 σ的置换表示知道. $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(4) = 1$, 从而得到第一个轮换(124). 接着从$\{3, 5, 6\}$中选取 3, 继续这一过程, 得到 $\sigma(3) = 6$, $\sigma(6) = 5$, $\sigma(5) = 3$, 这就是第二个轮换(365). 所有的元素都出现在轮换之中, 分解结束, 并且 $\sigma = (124)(365)$.

在求置换 σ的轮换表示时可将表示式中的 1-轮换省略. 例如, $\sigma = (13)(2)(46)(5)$ 中的(2) 和(5)都是 1-轮换, 可将 σ简记为$(13)(46)$. 此外要说明的是表示式中的轮换是不相交的, 即同一个元素不能出现在两个轮换之中. 如果交换了轮换的次序, 或者选择了轮换中不同的元素作为首元素而保持顺序不变, 那么所得的轮换表示是相同的. 例如, $\sigma = (124)(365)$ 也可以写作 $\sigma = (365)(124)$ 或 $\sigma = (241)(365)$ 等.

给定 n 元置换 σ和 τ, 怎样求 $\sigma\tau$或 σ^{-1}, τ^{-1}呢? 根据复合函数的定义, 只需求出 $\sigma\tau(1)$, $\sigma\tau(2)$, $\cdots$, $\sigma\tau(n)$ 就可以得到 $\sigma\tau$的置换表示或轮换表示. 以本题为例, $\sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(6) = 5$. 类似地有 $\sigma\tau(2) = 3$, $\sigma\tau(3) = 1$, $\sigma\tau(4) = 2$, $\sigma\tau(5) = 4$, $\sigma\tau(6) = 6$, 从而得到 $\sigma\tau = (15423)(6)$, 化简为 $\sigma\tau = (15423)$. 逆的计算比乘法简单. 设 $\sigma = \tau\,\tau \cdots \tau$ 为 σ的轮换表示

式，那么 $\sigma^{-1}=\tau_k^{-1}\cdots\tau_2^{-1}\tau_1^{-1}$，其中的 τ_j 若为轮换 $(i_1 i_2\cdots i_l)$，则有 $\tau_j^{-1}=(i_l\cdots i_2 i_1)$，$j=1,2,\cdots,k$．例如，$\sigma=(124)(365)$，则 $\sigma^{-1}=(563)(421)$．从而

$$\sigma\tau\sigma^{-1}=(\sigma\tau)\sigma^{-1}=(15423)(563)(421).$$

而

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(1)=\sigma\tau(4)=2,\quad \sigma\tau\sigma^{-1}(2)=\sigma\tau(1)=5,$$
$$\sigma\tau\sigma^{-1}(3)=\sigma\tau(5)=4,\quad \sigma\tau\sigma^{-1}(4)=\sigma\tau(2)=3,$$
$$\sigma\tau\sigma^{-1}(5)=\sigma\tau(6)=6,\quad \sigma\tau\sigma^{-1}(6)=\sigma\tau(3)=1.$$

因此，得到 $\sigma\tau\sigma^{-1}=(1256)(34)$．在 $\sigma\tau\sigma^{-1}(5)$ 的计算中有 $\sigma\tau(6)$ 出现．观察到 $\sigma\tau$ 的表示式 (15423) 中不含有 6，这就意味着 $\sigma\tau(6)=6$．

6.11　(1) 是同态映射．当 $G=\{e\}$ 时为单同态、满同态和同构．而当 G 不是平凡群时，φ 既不是单同态，也不是满同态．

(2) 是同态映射，且为单同态，不是满同态．

(3) 是同态映射，也是单同态和满同态．

6.12　(1) 哈斯图如图 6.5 所示．

(2) 可以构成布尔代数．$\forall x,y\in A$，$x\vee y$ 是 x 与 y 的最小公倍数，$x\wedge y$ 是 x 与 y 的最大公约数．而 A 关于 $\vee$ 和 $\wedge$ 运算是封闭的．容易验证 $\vee$ 和 $\wedge$ 运算满足交换律、结合律、吸收律，且是互相可分配的，因此，该偏序集构成分配格．$\forall x\in A$，$\dfrac{110}{x}$ 是 x 的补元，这就证明了该偏序集构成有补分配格，即布尔代数．

图　6.5

6.13　(1) 图 6.1 中的(3)，(4)，(5)，(8)图不是格．(3)图中的 $\{f,g\}$ 没有最小上界；(4)图中的 $\{a,e\}$ 没有最大下界；(5)图中的 $\{d,e\}$ 没有最大下界；(8)图中的 $\{d,e\}$ 没有最小上界．

(2) 图 6.1 中的(1)，(2)图为分配格，但不是有补格和布尔格；(6)图不是分配格和布尔格，但是有补格；(7)图不是分配格，也不是有补格和布尔格．

分析　图 6.1 中格(1)和(2)的所有五元子格都不与图 6.3 中的格同构，因而它们都是分配格．但对于图 6.1(6)和(7)中的格都能找到与图 6.3(2)中的格同构的子格．例如，图 6.1(6)中的 $\{a,b,c,d,f\}$ 和(7)中的 $\{a,b,c,f,g\}$，因此，它们都不是分配格．

再考虑补元．(1)图中格的 b,c,d 元素都没补元；(2)图中格的 b,c,d,e 元素都没补元；(7)图中格的 d 元素没有补元．它们都不是有补格．而(6)图中格的每个元素都有补元，是有补格．

6.14　(1)图中 0 与 1 互为补元；a,b,c,d 都没有补元．(2)图中 0 与 1 互为补元；a 的补元是 b 和 d；c 的补元是 b 和 d；b 的补元为 a 和 c；d 的补元为 a 和 c．(3)图中 0 与 1 互为补元；b 与 c 互为补元；a 与 d 都没有补元．

第 7 章　图的基本概念

内 容 提 要

1．图

无向图与有向图　无向图 $G=\langle V,E\rangle$，其中，$V(\neq\emptyset)$ 称为顶点集，其元素称为顶点，E 是 $V\&V$ 的多重子集，称为边集，其元素称为无向边或边. 有向图 $D=\langle V,E\rangle$，其中 V 同无向图，E 是 $V\times V$ 的多重子集，其元素称为有向边或边. 有时用 G 泛指图（无向的或有向的），但 D 只表示有向图. 用 $V(G)(V(D))$，$E(G)(E(D))$ 分别表示 $G(D)$ 的顶点集与边集.

零图与平凡图　若 $G=\langle V,E\rangle$ 中，$E\neq\emptyset$，则称 G 为零图，此时又若 $|V|=1$，则称 G 为平凡图.

关联与相邻　设图 $G=\langle V,E\rangle$，$u,v\in V$，$(u,v)\in E$（对于有向图，$\langle u,v\rangle\in E$），常记 $e=(u,v)$（对于有向图，$e=\langle u,v\rangle$），称 u,v 为 e 的端点（对于有向边，称 u 为 e 的始点，v 为 e 的终点），称 e 与 u 或 v 是彼此相关联的. 无边关联的顶点称为孤立点，若 e 关联的两个顶点重合，则称 e 为环. 若 $u\neq v$，则称 e 与 u（或 v）的关联次数为 1，若 $u=v$（即 e 为环），则称 e 与 u 关联的次数为 2. 若顶点 u,v 之间有边关联，则称 u 与 v 相邻，若两条边至少有一个公共端点，则称这两条边相邻.

顶点的度数　设 v 为无向图中的一个顶点，称 v 作为边的端点的次数之和为 v 的度数或度，记作 $d(v)$. 若 v 为有向图中一个顶点，称 v 作为边的始点次数之和为 v 的出度，记作 $d^+(v)$，v 作为边的终点的次数之和为 v 的入度，记作 $d^-(v)$，称 $d^+(v)+d^-(v)$ 为 v 的度数或度，记作 $d(v)$. 称 $\max\{d(v)|v\in V(G)\}$ 为 G 的最大度，记作 $\Delta(G)$ 或 Δ，称 $\min\{d(v)|v\in V(G)\}$ 为 G 的最小度，记作 $\delta(G)$ 或 δ. 类似地定义有向图中的最大度 $\Delta(D)$，最大出度 $\Delta^+(D)$，最大入度 $\Delta^-(D)$，最小度 $\delta(D)$，最小出度 $\delta^+(D)$，最小入度 $\delta^-(D)$.

简单图　对于无向图，若关联一对顶点的边多于 1 条，则称这些边为平行边. 对于有向图，关联一对顶点的方向相同的边如果多于 1 条，则称这些边为平行边. 既不含平行边，也不含环的图称为简单图.

完全图　设 G 为 n 阶（n 个顶点）无向简单图，若 G 中任何两个顶点均相邻，则称 G 为 n 阶完全图，记作 K_n. 设 D 为 n 阶有向简单图，若 D 中任何两个顶点之间均有两条方向相反的边，则称 D 为 n 阶有向完全图.

正则图　设 G 为 n 阶无向简单图，若 G 中每个顶点的度数均为 k，则称 G 为 k 正则图.

子图　设 $G=\langle V,E\rangle$，$G'=\langle V',E'\rangle$，若 $V'\subseteq V$，且 $E'\subseteq E$，则称 G' 为 G 的子图，记作 $G'\subseteq G$. 若 $G'\subseteq G$ 且 $G'\neq G$，则称 G' 为 G 的真子图. 若 $G'\subseteq G$ 且 $V'=V$，则称 G' 为 G 的生成子图. 若 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$，称以 V_1 为顶点集，以两个端点均在 V_1 中的边为边集的图为

V_1 的导出子图. 若 $E_1 \subseteq E$ 且 $E_1 \neq \emptyset$, 称以 E_1 为边集, 以 E_1 中边关联的顶点为顶点集的图为 E_1 的导出子图.

补图 设 $G=\langle V, E\rangle$ 为 n 阶简单图, 称以 V 为顶点集, 以使 G 成为 n 阶完全图的添加边为边集的图为 G 的补图, 记作 $\overline{G}$.

图的同构 设 $G_1=\langle V_1, E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为两个无向图, 若存在双射函数 $f: V_1\rightarrow V_2$, 使得对于任意的 $e=(v_i, v_j)\in E_1$ 当且仅当$(f(v_i), f(v_j))=e'\in E_2$, 且 e 与 e' 的重数相同, 则称 G_1 与 G_2 同构, 记作 $G_1\cong G_2$. 类似定义两个有向图之间的同构.

主要定理

定理 7.1 任何图 G 中各顶点的度数之和等于边数的两倍, 又若 G 为有向图, 则各顶点的入度之和等于各顶点的出度之和, 都等于边数.

推论 任何图 G 中, 奇度顶点的个数为偶数.

定理 7.1 称为握手定理或图论基本定理.

2. 通路、回路、图的连通性

通路与回路 设 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\cdots e_lv_l$ 为图 G 中的顶点与边的交替序列, 若 Γ满足: v_{i-1}, v_i 为 e_i 的端点(若 G 为有向图, 要求 v_{i-1}是 e_i 的始点, v_i 是 e_i 的终点), $i=0, 1, 2, \cdots, l$, 则称 Γ 为 G 中通路, v_0, v_l 分别称为通路的始点和终点, Γ中边的数目 l 称为通路长度. 若 $v_0=v_l$, 通路称为回路. 若 Γ中各边互不相同, 则称 Γ为简单通路, 又若 $v_0=v_l$, 则称 Γ为简单回路. 若 Γ中各顶点互不相同, 则称 Γ为初终通路, 又若 Γ中除 $v_0=v_l$ 外, 各顶点各不相同, 并且各边也互不相同, 则称 Γ为初级回路或圈. 有边重复出现的通路称为复杂通路, 有边重复出现的回路称为复杂回路.

顶点之间的连通关系 在无向图 G 中, 若顶点 v_i 到 v_j 有通路, 则称 v_i 与 v_j 连通, 规定顶点与自身连通, 顶点之间的连通关系是等价关系. 在有向图 D 中, 若 v_i 到 v_j 有通路, 则称 v_i 可达 v_j, 规定任何顶点与自身可达.

短程线与距离

若 v_i 与 v_j 连通(对于有向图, 若 v_i 可达 v_j), 则称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的短程线, 短程线的长度称为 v_i 到 v_j 的距离, 用 $d(v_i, v_j)$ 表示(对于有向图, 用 $d\langle v_i, v_j\rangle$表示). 若 v_i 与 v_j 不连通(对于有向图, 若 v_i 不可达 v_j), 则规定 $d(v_i, v_j)=\infty(d\langle v_i, v_j\rangle=\infty)$, 且 $d(v_i, v_i)=0(d\langle v_i, v_i\rangle=0)$. $d(v_i, v_j)\geq 0(d\langle v_i, v_j\rangle\geq 0)$, $d(v_i, v_j)+d(v_j, v_k)\geq d(v_i, v_k)(d\langle v_i, v_j\rangle+d\langle v_j, v_k\rangle\geq d\langle v_i, v_k\rangle)$, $d(v_i, v_j)=d(v_j, v_i)$.

无向图的连通性

若无向图 G 中任何两顶点都连通, 则称 G 是连通图. 对于任意的无向图 G, 设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是顶点之间连通关系的等价类, 则称它们的导出子图为 G 的连通分支, 用 $p(G)$表示 G 的连通分支数.

有向图的连通性

若略去有向图 D 中各边的箭头, 所得无向图是无向连通图, 则称 D 是弱连通图(或称 D 是连通图); 若 D 中任何两顶点至少一个可达另一个, 则称 D 是单向连通图; 若 D 中任何两顶点都是相互可达的, 则称 D 是强连通图. 若 D 是强连的, 则 D 一定单向连通, 若 D

单向连通,则 D 一定弱连通.

点割集与割点

若无向图 $G=\langle V,E\rangle$**中,存在** V' V,**使得** $p(G-V')>p(G)$,**而任意的** V'' V',**均有** $p(G-V'')=p(G)$,**则称** V' **为** G **的点割集,若** V' **为单元集,即** $V'=\{v\}$,**即称** v **为** G **的割点.这里** $G-V'$ **表示从** G **中去掉** V' **中所有顶点及其关联的边.**

边割集及桥　若无向图 $G=\langle V,E\rangle$**中,存在** E' E,**使得** $p(G-E')>p(G)$,**而对于任意的** E'' E',**均有** $p(G-E'')=p(G)$,**则称** E' **是** G **的边割集或割集.若** E' **为单元集,即** $E'=\{e\}$,**则称** e **为** G **中的桥或割边.这里,** $G-E'$ **表示从** G **中去掉** E' **中全部边.**

3. 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$**中,** $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,**令** m_{ij} **为** v_i **与** e_j **的关联次数,则称** $(m_{ij})_{n\times m}$**为** G **的关联矩阵,记作** $M(G)$.

有向图的关联矩阵

设在无环的有向图 $D=\langle V,E\rangle$**中,** $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,**令**

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{ 为 }e_j\text{ 的始点}\\ 0, & v_i\text{ 与 }e_j\text{ 不关联}\\ -1, & v_i\text{ 为 }e_j\text{ 的终点,}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$**为** D **的关联矩阵,记作** $M(D)$.

有向图的可达矩阵

在有向图 $D=\langle V,E\rangle$**中,** $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,**令**

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{ 可达 }v_j\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}$$

则称 $(p_{ij})_{n\times n}$**为** D **的可达矩阵,记作** $P(D)$.**由于** v_i **可达** v_i,**所以,** $P(D)$ **中** $p_{ii}=1$, $i=1,2,\cdots,n$.

有向图的邻接矩阵

在有向图 $D=\langle V,E\rangle$**中,** $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, ©‡©╪ m.**令** $a_{ij}^{(1)}$**为** v_i **邻接到** v_j **的边的条数,则称** $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$**为** D **的邻接矩阵,记作** $A(D)$,**简记为** A,**并用** A^l **表示** A **的** $l(l\geq 1)$**次幂,** A^l **中元素用** $a_{ij}^{(l)}$ **表示.再令** $B_r=A+A^2+\cdots+A^r$, B_r **中元素用** $b_{ij}^{(r)}$ **表示.**

主要定理及推论

定理 7.2　设 A **为有向图的邻接矩阵,** $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,**则** $A^l(l\geq 1)$**中元素** $a_{ij}^{(l)}$**为顶点** v_i **到** v_j **长度为** l **的通路数,** $\sum\limits_{i,j}a_{ij}^{(l)}$ **为** D **中长度为** l **的通路总数,其中** $\sum\limits_{i}a_{ii}^{(l)}$ **为** D **中长度为** l **的回路数.**

推论　** $B_r(r\geq 1)$中元素** $b_{ij}^{(r)}$**为** D **中** v_i **到** v_j **长度小于等于** r **的通路数,** $\sum\limits_{i,j}b_{ij}^{(r)}$ **为** D **中长度小于等于** r **的通路数,其中** $\sum\limits_{i}b_{ii}^{(r)}$ **为** D **中长度小于等于** r **的回路数.**

4. 最短路径及关键路径

带权图 对于图 G 的每条边 $e=(v_i, v_j)$($e=\langle v_i, v_j\rangle$), 附加上一个实数 $w(e)$(或记为 w_{ij}), 称 $w(e)$(w_{ij})为边 e 上的权. 若 G 各边均有权, 则称 G 为带权图, 并称 G 中各边带权之和为 G 的权, 记作 $W(G)$.

最短路径

设 G 是各边的权均非负的带权图, u, v 为 G 中任意两点, 从 u 到 v 所有通路中其权最小的通路称为 u 到 v 的最短通路或最短路径. 求 G 中指定两点之间的最短路径的算法由 E. W. Dijkstra 给出, 称为标号法(见《离散数学》第 7 章).

PERT 图

D 是连通简单有向带权(非负)图, 无回路, 有一个顶点入度为 0(称为发点), 有一个顶点出度为 0(称为收点), 则称 D 为计划评审技术图, 简记为 PERT 图.

关键路径

在 PERT 图中, 从发点到收点的最长路径(按权计算)称为关键路径. 通过求图中各顶点的最早完成时间、最晚完成时间、缓冲时间, 求关键路径. 顶点 v 在关键路径上当且仅当 v 的缓冲时间为 0. 求最早完成时间、最晚完成时间、缓冲时间的算法见《离散数学》第 7 章.

5. 小结

本章概念较多, 它们都是图论各分支中用到的基本概念. 在学习和领会这些概念时, 以下几点要特别注意.

(1) 牢记图论基本定理, 即握手定理及其推论的内容, 并且能灵活地应用它. 例如, 在求解无向图(比如, 已知边数 m 和一些顶点的度数, 求另外一些或一个顶点的度数), 求解无向树(见第 8 章)以及判断某些非负整数能否充当图的度数列等问题中都要用到握手定理或推论. 另外在图论的许多证明题中也要用到握手定理.

(2) 记住简单图的概念和简单图的主要特征, 即 n 阶无向简单图 G 中, 最大度 $\Delta(G) \le n-1$, n 阶有向简单图 D 中, 最大度 $\Delta(D) \le 2(n-1)$, 最大出度 $\Delta^+(D) \le n-1$, 最大入度 $\Delta^-(D) \le n-1$. 在讨论给定的非负整数列能否充当无向图的度数列时, 以上性质都起很大的作用. 另外还要弄清楚哪些概念是用简单图定义的, 例如, 完全图(无向的或有向的)、正则图、补图等都是针对简单图定义的.

(3) 要弄清楚图之间同构的概念. 要知道判断两个图是否同构至今还是一个难题, 但要会根据定义判断阶数 n 较小的两个图是否同构. 会求 4 阶无向完全图 K_4 和 3 阶有向完全图的非同构的子图. 要知道在同构的意义下, n 阶简单图都是 n 阶完全图的子图.

(4) 要弄清楚图中通路与回路的概念及其分类以及它们的关系, 即初级的通路(回路)都是简单的, 但反之不真. 还要知道长为 1 和 2 的圈只能在非简单图中找到, 在简单图中初级回路(圈)的长度都大于等于 3.

(5) 在讨论图的连通性时, 要特别注意有向连通图的分类及它们之间的关系, 即强连通的有向图必为单向连通的, 单向连通的必为弱连通的, 但反之都不真.

(6) 在图的矩阵表示中, 可以用有向图的邻接矩阵及各次幂, 求图中的通路数及回路

数. 要注意, 这里不同的通路(回路)是按定义来区分的, 而不是同构意义下区分的, 比如长度为 $l(l\geq 1)$ 的圈在计算长度为 l 的回路时被计算 l 次, 也就是说, 不同始点(也是终点)的圈被看成是不同的.

习　题

7.1　下列各组数中, 哪些能构成无向图的度数列?哪些能构成无向简单图的度数列?

(1) 1, 1, 1, 2, 3

(2) 2, 2, 2, 2, 2

(3) 3, 3, 3, 3

(4) 1, 2, 3, 4, 5

(5) 1, 3, 3, 3

7.2　设有向简单图的度数列为 2, 2, 3, 3, 入度列为 0, 0, 2, 3, 试求 D 的出度列.

7.3　设 D 是 4 阶有向简单图, 度数列为 3, 3, 3, 3. 它的入度列(或出度列)能为 1, 1, 1, 1 吗?

7.4　设 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 为一正整数列, $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 互不相同, 问此序列能构成 n 阶无向简单图的度数列吗? 为什么?

7.5　下面各无向图中有几个顶点?

(1) 16 条边, 每个顶点都是 2 度顶点.

(2) 21 条边, 3 个 4 度顶点, 其余的都是 3 度顶点.

(3) 24 条边, 各顶点的度数是相同的.

7.6　35 条边, 每个顶点的度数至少为 3 的图最多有几个顶点?

7.7　设 n 阶无向简单图 G 中, $\delta(G)=n-1$, 问 $\Delta(G)$ 应为多少?

7.8　一个 $n(n\geq 2)$ 阶无向简单图 G 中, n 为奇数, 已知 G 中有 r 个奇度顶点, 问 G 的补图 $\overline{G}$ 中有几个奇度顶点?

7.9　设 D 是 n 阶有向简单图, D' 是 D 的子图, 已知 D' 的边数 $m'=n(n-1)$, 问 D 的边数 m 为多少?

7.10　画出 K_4 的所有非同构的子图, 其中有几个是生成子图? 生成子图中有几个是连通图?

7.11　设 G 为 n 阶简单图(有向的或无向的), $\overline{G}$ 为 G 的补图, 若 $G\cong\overline{G}$, 则称 G 为自补图. K_4 的生成子图中有几个非同构的自补图?

7.12　画出 3 阶有向完全图所有非同构的子图, 问其中有几个是生成子图?生成子图中有几个是自补图?

7.13　设 G_1, G_2, G_3 均为 4 阶无向简单图, 它们均有两条边. 它们能彼此非同构吗?为什么?

7.14　已知 n 阶无向图 G 中有 m 条边, 各顶点的度数均为 3. 已知 $2n-3=m$, 问在同构意义下, G 是唯一的吗? 若 G 为简单图时, 是否唯一?

7.15　在 K_6 的边上涂上红色或蓝色. 证明对于任意一种随意的涂法, 总存在红色 K_3

或蓝色 K_3.

7.16　试寻找 3 个 4 阶有向简单图 D_1, D_2, D_3, 使得 D_1 为强连通图; D_2 为单向连通图, 但不是强连通的; 而 D_3 为弱连通图, 但不是单向连通的, 当然, 更不是强连通的.

7.17　设 V 和 E 分别为无向连通图 G 的点割集和边割集. $G-E$ 的连通分支个数一定为几? $G-V$ 的连通分支数也是定数吗?

7.18　有向图 D 如图 7.1 所示. 求 D 中长度为 4 的通路总数, 并指出其中有多少条是回路? 又有几条是 v_3 到 v_4 的通路?

图　7.1

题 7.19～7.23 的要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

7.19　设 n 阶图 G 中有 m 条边, 每个顶点的度不是 k 就是 $k+1$, 若 G 中有 N_k 个 k 度顶点, N_{k+1} 个 $(k+1)$ 度顶点, 则 N_k 为 $\boxed{A}$.

供选择的答案

A: ① $n/2$; ② $n \cdot k$; ③ $n(k+1)$; ④ $n(k+1)-2m$; ⑤ $n(k+1)-m$.

7.20　如果一个简单图 $G \cong \overline{G}$ ($\overline{G}$ 为 G 的补图), 则称 G 是自补图.

(1) 非同构的无向的 4 阶自补图有 $\boxed{A}$ 个;

(2) 非同构的无向的 5 阶自补图有 $\boxed{B}$ 个.

供选择的答案

A, B: ① 0; ② 1; ③ 2; ④ 3.

7.21　在图 7.2 所示的 6 个图中, 强连通图为 $\boxed{A}$, 单向连通图为 $\boxed{B}$. 图(3) 中 $d\langle a, b\rangle$ 为 $\boxed{C}$, $d\langle b, a\rangle$ 为 $\boxed{D}$.

图　7.2

供选择的答案

A, B: ① (1), (2), (3); ② (4), (5), (6); ③ (1), (2), (4), (5), (6); ④ (1), (5), (6).

C, D: ① 1; ② 2; ③ 3; ④ ∞; ⑤ 0.

7.22　**给定有向带权图如图 7.3 所示.**

图中 b **到** a **的最短路径的权为** $\boxed{A}$; b **到** d **最短路径的权为** $\boxed{B}$; b **到** e **最短路径的权为** $\boxed{C}$; b **到** g **最短路径的权为** $\boxed{D}$.

供选择的答案

A, B, C, D: ① 4; ② 5; ③ 6; ④ 7; ⑤ 8; ⑥ 9; ⑦ 10.

图　7.3　　　　　　　　　**图**　7.4

7.23　**图 7.4 所示的图为** PERT **图.**

(1) v_6 **的最早完成时间为** $\boxed{A}$, **最晚完成时间为** $\boxed{B}$, **缓冲时间为** $\boxed{C}$;

(2) **关键路径为** $\boxed{D}$.

供选择的答案

A, B, C: ① 0; ② 1; ③ 2; ④ 3; ⑤ 4; ⑥ 5; ⑦ 6; ⑧ 7; ⑨ 8; ⑩ 9; ⑪ 10.

D: ① $v_1v_3v_6v_8v_9$; ② $v_1v_4v_7v_8v_9$; ③ $v_1v_2v_5v_9$; ④ $v_1v_2v_3v_5v_9$.

习 题 解 答

7.1　(1), (2), (3), (5) **都能构成无向图的度数列, 其中除(5)外又都能构成无向简单图的度数列.**

分析　1° **非负整数列** $d_1, d_2, \cdots, d_n$ **能构成无向图的度数列当且仅当** $\sum_{i=1}^{n} d_i$ **为偶数, 即** $d_1, d_2, \cdots, d_n$ **中的奇数为偶数个.** (1), (2), (3), (5) **中分别有 4 个, 0 个, 4 个, 4 个奇数, 所以, 它们都能构成无向图的度数列, 当然, 所对应的无向图很可能是非简单图. 而(4)中有 3 个奇数, 因而它不能构成无向图度数列. 否则就违背了握手定理的推论.**

2° (5) **虽然能构成无向图的度数列, 但不能构成无向简单度数列. 否则, 若存在无向简单图** G, **以 1, 3, 3, 3 为度数列, 不妨设** G **中顶点为** v_1, v_2, v_3, v_4, **且** $d(v_1) = 1$, **于是** $d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 3$. **而** v_1 **只能与** v_2, v_3, v_4 **之一相邻, 设** v_1 **与** v_2 **相邻, 这样一来, 除** v_2 **能达到 3 度外,** v_3, v_4 **都达不到 3 度, 这是矛盾的.**

在图 7.5 所示的 4 个图中, (1) 以 1 为度数列, (2) 以 2 为度数列, (3) 以 3 为度数列, (4) 以 4 为度数列(非简单图).

图 7.5

7.2 设有向简单图 D 以 2, 2, 3, 3 为度数列, 对应的顶点分别为 v_1, v_2, v_3, v_4, 由于 $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$, 所以, $d^+(v_1) = d(v_1) - d^-(v_1) = 2 - 0 = 2$, $d^+(v_2) = d(v_2) - d^-(v_2) = 2 - 0 = 2$, $d^+(v_3) = d(v_3) - d^-(v_3) = 3 - 2 = 1$, $d^+(v_4) = d(v_4) - d^-(v_4) = 3 - 3 = 0$. 由此可知, D 的出度列为 2, 2, 1, 0, 且满足 $\sum d^+(v_i) = \sum d^-(v_i)$. 请读者画出一个有向图, 以 2, 2, 3, 3 为度数列, 且以 0, 0, 2, 3 为入度列, 以 2, 2, 1, 0 为出度列.

7.3 D 的入度列不可能为 1, 1, 1, 1. 否则, 必有出度列为 2, 2, 2, 2(因为 $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$), 此时, 入度列元素之和为 4, 不等于出度列元素之和 8, 这违背握手定理. 类似地讨论可知, 1, 1, 1, 1 也不能为 D 的出度列.

7.4 不能. n 阶无向简单图的最大度 $\Delta \leq n-1$. 而这里的 n 个正整数彼此不同, 因而 $\max\{d_i\} \geq n$, 就是说, $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中至少存在一数大于等于 n, 因而这 n 个数不能构成无向简单图的度数列, 否则所得图的最大度大于 n, 这与最大度应该小于等于 $n-1$ 矛盾.

7.5 (1) 16 个顶点. 图中边数 $m = 16$, 设图中的顶点数为 n. 根据握手定理可知

$$2m = 32 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2n$$

所以, $n = 16$.

(2) 13 个顶点. 图中边数 $m = 21$, 设 3 度顶点个数为 x, 由握手定理有

$$2m = 42 = 3 \times 4 + 3x$$

由此方程解出 $x = 10$, 于是图中顶点数 $n = 3 + 10 = 13$.

(3) 由握手定理及各顶点度数均相同, 寻找方程

$$2 \times 24 = 48 = nk$$

的非负整数解, 这里不会出现 n, k 均为奇数的情况. 其中 n 为阶数, 即顶点数, k 为度数. 共可得到下面 10 种情况的图.

① 1 个顶点, 度数为 48. 此图一定是由一个顶点的 24 个环构成, 当然为非简单图.

② 2 个顶点, 每个顶点的度数均为 24. 这样的图有多种非同构的情况, 一定为非简单图.

③ 3 个顶点, 每个顶点的度数均为 16. 所对应的图也都是非简单图.

④ 4 个顶点, 每个顶点的度数均为 12. 所对应的图也都是非简单图.

⑤ 6 个顶点, 每个顶点的度数均为 8. 所对应的图也都是非简单图.

⑥ 8 个顶点, 每个顶点的度数均为 6. 所对应的非同构的图中有简单图, 也有非简

单图.

⑦ 12 个顶点, 每个顶点的度数均为 4. 所对应的非同构的图中有简单图, 也有非简单图.

⑧ 16 个顶点, 每个顶点的度数均为 3. 所对应的非同构的图中有简单图, 也有非简单图.

⑨ 24 个顶点, 每个顶点的度数均为 2. 所对应的非同构的图中有简单图, 也有非简单图.

⑩ 48 个顶点, 每个顶点的度数均为 1. 所对应的图是唯一的, 即由 24 个 K_2 构成的简单图.

分析 由于 n 阶无向简单图 G 中, $\Delta(G)\le n-1$, 所以①～⑤所对应的图不可能有简单图. ⑥～⑨既有简单图, 也有非简单图, 读者可以画出若干个非同构的图, 而⑩只能为简单图.

7.6 设 G 为 n 阶图, 由握手定理可知

$$70 = 2\times 35 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge 3n,$$

所以,

$$n \le \left\lfloor \frac{70}{3} \right\rfloor = 23.$$

这里, $\lfloor x \rfloor$ 为不大于 x 的最大整数. 例如 $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$, $\left\lfloor \frac{70}{3} \right\rfloor = 23$.

7.7 由于 $\delta(G) = n-1$, 说明 G 中任何顶点 v 的度数 $d(v)\ge\delta(G) = n-1$, 可是由于 G 为简单图, 因而 $\Delta(G)\le n-1$, 这又使得 $d(v)\le n-1$, 于是 $d(v) = n-1$, 也就是说, G 中每个顶点的度数都是 $n-1$, 因而应有 $\Delta(G) = n-1$. 于是 G 为$(n-1)$阶正则图, 即 G 为 n 阶完全图 K_n.

7.8 由 G 的补图 $\overline{G}$ 的定义可知, $G\cup\overline{G}$ 为 K_n, 由于 n 为奇数, 所以, K_n 中各顶点的度数 $n-1$ 为偶数. 对于任意的 $v\in V(G)$, 应有 $v\in V(\overline{G})$, 且

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = d_{K_n}(v) = n-1$$

其中 $d_G(v)$ 表示 v 在 G 中的度数, $d_{\overline{G}}(v)$ 表示 v 在 $\overline{G}$ 中的度数. 由于 $n-1$ 为偶数, 所以, $d_G(v)$ 与 $d_{\overline{G}}(v)$ 同为奇数或同为偶数, 因而若 G 有 r 个奇度顶点, 则 $\overline{G}$ 也有 r 个奇度顶点.

7.9 由于 $D'\subseteq D$, 所以, $m'\le m$. 而 n 阶有向简单图中, 边数 $m\le n(n-1)$, 所以, 应有

$$n(n-1) = m'\le m \le n(n-1).$$

这就导致 $m= n(n-1)$, 这说明 D 为 n 阶完全图, 且 $D'\cong D$.

7.10 图 7.6 给出了 K_4 的 18 个非同构的子图, 其中有 11 个生成子图(⑧～⑱), 其中连通的有 6 个(⑬, ⑭, ⑮, ⑯, ⑰, ⑱). 图 7.6 中 n, m 分别为顶点数和边数.

7.11 K_4 的生成子图中只有一个是自补图, 它就是图 7.6 中的⑬图.

分析 K_4 有 11 个生成子图, 在图 7.6 中, 它们分别如图⑧～⑱所示. 要判断它们之中哪些是自补图, 首先要知道同构图的性质. 设 G_1 与 G_2 为两个图(同为无向图或同为有向图), n_1, n_2 和 m_1, m_2 分别为 G_1, G_2 的顶点数和边数. 若 $G_1\cong G_2$, 则 $n_1= n_2$ 且 $m_1= m_2$.

图　7.6

⑧的补图为,? = K_4, 它们的边数不同, 所以, 不可能同构. 因而⑧与,? 均不是自补图. 类似地, ⑨的补图为,? , 它们也非同构, 因而它们也都不是自补图. 0 与,? 互为补图, 它们非同构, 因而它们都不是自补图. ,? 与,? 互为补图, 它们非同构, 所以, 它们都不是自补图. 类似地, ,? 与,? 互为补图且非同构, 所以, 它们也都不是自补图.

而,? 与自己的补图同构, 所以, ,? 是自补图.

7.12　3 阶有向完全图共有 20 个非同构的子图, 见图 7.7 所示, 其中⑤～0 为生成子图, 生成子图中⑧, ,? , ,? , ,? 均为自补图.

分析　在图 7.7 所示的生成子图中, ⑤与,? 互为补图, ⑥与0 互为补图, ⑦与⑨互为补图, ,? 与,? 互为补图, ,? 与,? 互为补图, ,? 与0 互为补图, 以上互为补图的两个图边数均不相同, 所以, 它们都不是自补图. 而⑧, ,? , ,? , ,? 4 个图都与自己的补图同构, 所以, 它们都是自补图.

7.13　不能.

分析　在同构的意义下, G_1, G_2, G_3 都是 K_4 的子图, 而且都是生成子图. 而 K_4 的两条边的生成子图中, 只有两个是非同构的, 见图 7.6 中0 与,? 所示. 由鸽巢原理可知, G_1, G_2, G_3 中至少有两个是同构的, 因而它们不可能彼此都非同构.

鸽巢原理　m 只鸽子飞进 n 个鸽巢, 其中 $m \geq n$, 则至少存在一巢飞入至少 $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ 只鸽子. 这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数。例如, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil 2.5 \rceil = 3$.

7.14　G 是不唯一的, 即使 G 是简单图也不唯一.

图 7.7

分析 由握手定理可知 $2m=3n$, 又由给的条件得联立方程组

$$\begin{cases} 2m=3n \\ 2n-3=m. \end{cases}$$

解出 $n=6, m=9$. 6 个顶点, 9 条边, 每个顶点的度数都是 3 的图有多种非同构的情况, 其中有多个非简单图(带平行边或环), 有两个非同构的简单图, 在图 7.8 中(1), (2)给出了这两个非同构的简单图.

满足条件的非同构的简单图只有图 7.8 中, (1), (2)所示的图, (1)与(2)是非同构的. 注意在(1)中不存在 3 个彼此相邻的顶点, 而在(2)中存在 3 个彼此相邻的顶点, 因而(1)图与(2)图非同构. 下面分析满足条件的简单图只有两个是非同构的. 首先注意到(1)中与(2)中图都是 K_6 的生成子图, 并且还有这样的事实, 设 G_1, G_2 都是 n 阶简单图, 则 $G_1 \cong G_2$ 当且仅当 $\bar{G}_1 \cong \bar{G}_2$, 其中 $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ 分别为 G_1 与 G_2 的补图. 满足要求的简单图都是 6 阶 9 条边的 3 正则图, 因而它们的补图都为 6 阶 6 条边的 2 正则图(即每个顶点度数都是 2). 而 K_6 的所有生成子图中, 6 条边 2 正则的非同构的图只有两个, 见图 7.8 中(3), (4)所示的图, 其中(3)为(1)的补图, (4)为(2)的补图, 所以, 满足要求的非同构的简

图 7.8

单图只有两个.

但满足要求的非简单图有多个非同构的,读者可自己画出多个来.

7.15　将 K_6 的顶点标定顺序,讨论 v_1 所关联的边.由鸽巢原理(见7.13题),与 v_1 关联的5条边中至少有3条边颜色相同,不妨设存在3条红色边,见图7.9中(1)所示(用实线表示红色边)并设它们关联另外3个顶点分别为 v_2, v_4, v_6.若 v_2, v_4, v_6 构成的 K_3 中还有红色边,比如边 (v_2, v_4) 为红色,则 v_1, v_2, v_4 构成的 K_3 为红色 K_3,见图7.9中(2)所示.若 v_2, v_4, v_6 构成的 K_3 各边都是蓝色(用虚线表示),则 v_2, v_4, v_6 构成的 K_3 为蓝色的.

图　7.9

7.16

在图7.10所示的3个图中,(1)为强连通图,(2)为单向连通图,但不是强连通的,(3)是弱连通的,不是单向连通的,更不是强连通的.

图　7.10

分析　在(1)中任何两个顶点之间都有通路,即任何两个顶点都是相互可达的,因而它是强连通的.(2)中c不可达任何顶点,因而它不是强连通的,但任何两个顶点中存在一个顶点可达另外一个顶点,所以,它是单向可达的.(3)中a,c互相均不可达,因而它不是单向连通的,更不是强连通的.

判断有向图的连通性有下面两个判别法.

1°　有向图D是强连通的当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路.

2°　有向图D是单向连通的当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路.

(1)中abcda为经过每个顶点一次的回路,所以,它是强连通的.(2)中abdc为经过每个顶点的通路,所以,它是单向连通的,但没有经过每个顶点的回路,所以,它不是强连通的.(3)中无经过每个顶点的回路,也无经过每个顶点的通路,所以,它只能是弱连通的.

7.17　$G-E$ 的连通分支一定为2,而 $G-V$ 的连通分支数是不确定的.

分析　设 E 为连通图 G 的边割集,则 $G-E$ 的连通分支数 $p(G-E')=2$,不可能大于2.否则,比如 $p(G-E')=3$,则 $G-E$ 由3个小图 G_1, G_2, G_3 组成,且 E 中边的两个端

点分属于两个不同的小图. 设 E' 中的边的两个端点一个在 G_1 中, 另一个在 G_2 中, 则 $E'' \subset E'$, 易知 $p(G - E'') = 2$, 这与 E' 为边割集矛盾, 所以, $p(G - E') = 2$.

但 $p(G - V')$ 不是定数, 当然它大于等于 2. 在图 7.11 中, $V' = \{u, v\}$ 为(1)的点割集, $p(G - V') = 2$, 其中 G 为(1)中图. $V'' = \{v\}$ 为(2)中图的点割集, 且 v 为割点, $p(G - V'') = 4$, 其中 G 为(2)中图.

图　7.11

7.18　解此题, 只要求出 D 的邻接矩阵的前 4 次幂即可.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D 中长度为 4 的通路数为 A^4 中元素之和, 等于 15, 其中对角线上元素之和为 3, 即 D 中长度为 3 的回路数为 3. v_3 到 v_4 的长度为 4 的通路数等于 $a_{34}^{(4)} = 2$.

分析　用邻接矩阵的幂求有向图 D 中的通路数和回路数应该注意以下几点:

1°　这里所谈通路或回路是定义意义下的, 不是同构意义下的. 比如, 不同始点(终点)的回路看成是不同的. 例如, $v_1v_2v_1$ 和 $v_2v_1v_2$ 被认为是两条不同的长度为 2 的回路, 在同构意义下, 它们是一条回路.

2°　这里的通路或回路不但有初级的、简单的, 还有复杂的. 例如, $v_1v_2v_1v_2v_1$ 是一条长为 4 的复杂回路.

3°　回路仍然看成是通路的特殊情况.

读者可利用 A^2, A^3, 求 D 中长度为 2 和 3 的通路数和回路数.

7.19 答案　A: ④.

分析　G 中有 N_k 个 k 度顶点, 有 $(n - N_k)$ 个 $(k + 1)$ 度顶点, 由握手定理可知

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = k \cdot N_k + (k + 1)(n - N_k) = 2m$$

$$N_k = n(k + 1) - 2m.$$

7.20 答案　A: ②; B: ③.

分析

在图 7.12 中，图(1)与它的补同构，再没有与图(1)非同构的自补图了，所以非同构的无向的 4 阶自补图只有 1 个. 图(2)与它的补同构，图(3)与它的补也同构，而图(2)与图(3)不同构，再没有与(2)，(3)非同构的自补图了，所以，非同构的 5 阶自补图有 2 个.

图 7.12

7.21 **答案** A: ④; B: ③; C: ④; D: ①.

分析 (1)中存在经过每个顶点的回路，如 adcba.(2)中存在经过每个顶点的通路，但无回路.(3)中无经过每个顶点至少一次的通路，其实，b, d 两个顶点互不可达.(4)中有经过每个顶点至少一次的通路，但无回路，aedcbd 为经过每个顶点的通路.(5)中存在经过每个顶点至少一次的回路，如 aedbcdba.(6)中也存在经过每个顶点的回路，如 baebdcb. 由 7.16 题可知，(1)，(5)，(6)是强连通的，(1)，(2)，(4)，(5)，(6)是单向连通的，(2)，(4)是非强连通的单向连通图. 注意，强连通图必为单向连通图. 6 个图中，只有(3)既不是强连通的，也不是单向连通的，它只是弱连通图.

在(3)中，从 a 到 b 无通路，所以，$d\langle a, b\rangle=\infty$，而 b 到 a 有唯一的通路 ba，所以 $d\langle b, a\rangle= 1$.

7.22 **答案** A: ①; B: ⑥; C: ②; D: ④.

分析 用 Dijkstra 标号法，将计算结果列在表 7.1 中. 表中第 x 列最后标定的 $\boxed{y}$ /Z 表示 b 到 x 的最短路径的权为 y，且在 b 到 x 的最短路径上，Z 邻接到 x，即 x 的前驱元为 Z. 由表 7.1 可知，a 的前驱元为 c(即 a 邻接到 c)，c 的前驱元为 b，所以，b 到 a 的最短路径为 bca，其权为 4. 类似地讨论可知，b 到 c 的最短路径为 bc，其权为 1. b 到 d 的最短路径为 bcegd，其权为 9. b 到 e 的最短路径为 bce，其权为 5. b 到 f 的最短路径为 bcf，其权为 4. 而 b 到 g 的最短路径为 bceg，其权为 7.

表 7.1

k \ 顶点	a	b	c	d	e	f	g
0	7	$\boxed{0}$	1	∞	∞	∞	∞
1	4		$\boxed{1}$ /b	∞	5	4	∞
2	$\boxed{4}$ /c			12	5	4	∞
3				12	5	$\boxed{4}$ /c	11
4				12	$\boxed{5}$ /c		7
5				9			$\boxed{7}$ /e
6				$\boxed{9}$ /g			
	4	0	1	9	5	4	7

7.23 **答案**　A: ⑧; B: 0 ; C: ③; D: ③**和**④.

分析　**按求最早、最晚完成时间的公式**, **先求各顶点的最早完成时间**, **再求最晚完成时间**, **最后求缓冲时间**.

(1) **最早完成时间**:

$TE(v_1) = 0$;

$\Gamma^{-}(v_2) = \{v_1\}$,　　$TE(v_2) = \max\{0+3\} = 3$;

$\Gamma^{-}(v_3) = \{v_1, v_2\}$,　　$TE(v_3) = \max\{0+2, 3+0\} = 3$;

$\Gamma^{-}(v_4) = \{v_1, v_3\}$,　　$TE(v_4) = \max\{0+4, 3+2\} = 5$;

$\Gamma^{-}(v_5) = \{v_2, v_3\}$,　　$TE(v_5) = \max\{3+4, 3+4\} = 7$;

$\Gamma^{-}(v_6) = \{v_3, v_5\}$,　　$TE(v_6) = \max\{3+4, 7+0\} = 7$;

$\Gamma^{-}(v_7) = \{v_4, v_5\}$,　　$TE(v_7) = \max\{5+5, 7+3\} = 10$;

$\Gamma^{-}(v_8) = \{v_6, v_7\}$,　　$TE(v_8) = \max\{7+3, 10+1\} = 11$;

$\Gamma^{-}(v_9) = \{v_5, v_8\}$,　　$TE(v_9) = \max\{7+6, 11+1\} = 13$.

(2) **最晚完成时间**:

$TL(v_9) = 13$;

$\Gamma^{+}(v_8) = \{v_9\}$,　　$TL(v_8) = \min\{13-1\} = 12$;

$\Gamma^{+}(v_6) = \{v_8\}$,　　$TL(v_6) = \min\{12-3\} = 9$;

$\Gamma^{+}(v_7) = \{v_8\}$,　　$TL(v_7) = \min\{12-1\} = 11$;

$\Gamma^{+}(v_5) = \{v_6, v_9\}$,　　$TL(v_5) = \min\{9-0, 13-6\} = 7$;

$\Gamma^{+}(v_4) = \{v_7\}$,　　$TL(v_4) = \min\{11-5\} = 6$;

$\Gamma^{+}(v_3) = \{v_4, v_5, v_6\}$,　　$TL(v_3) = \min\{6-2, 7-4, 9-4\} = 3$;

$\Gamma^{+}(v_2) = \{v_3, v_5\}$,　　$TL(v_2) = \min\{3-0, 7-4\} = 3$;

$\Gamma^{+}(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$,　　$TL(v_1) = \min\{3-3, 3-2, 6-4\} = 0$.

(3) **缓冲时间**:

$TS(v_1) = TS(v_2) = TS(v_3) = TS(v_5) = TS(v_9) = 0$;

$TS(v_4) = 1$; $TS(v_6) = 2$; $TS(v_7) = TS(v_8) = 1$.

(4) **关键路径有两条**: $v_1v_2v_5v_9$ **和** $v_1v_2v_3v_5v_9$.

第 8 章　一些特殊的图

内 容 提 要

1. 二部图

二部图与完全二部图

若能将无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 的顶点集 V 分成两个子集 V_1 和 $V_2(V_1\cap V_2=\varnothing)$，使得 G 中任何一条边的两个端点都是，一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为二部图，称 V_1 和 V_2 为互补顶点子集，也常记为 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$. 又若 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为简单二部图，且 V_1 中每个顶点均与 V_2 中所有顶点相邻，则称 G 为完全二部图，记作 $G=K_{r,s}$，其中 $|V_1|=r$，$|V_2|=s$.

匹配与匹配数

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图，$E'\subseteq E$，若 E' 中任何两条边均不相邻，则称 E' 为 G 中的匹配（或称边独立集）. 若 E' 中再加入任何一条边后，所得集合都不是 G 中匹配了，则称 E' 为 G 中极大匹配. 边数最多的极大匹配称为最大匹配，最大匹配中边的条数称为 G 的匹配数（或边独立数）记作 $\beta_1(G)$，简记为 β_1. 设 M 为 $G=\langle V,E\rangle$ 中一个匹配，任意的 $v\in V$，若存在 $e\in M$，使得 e 与 v 关联，则称 v 为 M 饱和点，否则称 v 为 M 非饱和点. 若 G 中不存在 M 非饱和点，则称 M 为 G 中的完美匹配.

二部图中的匹配

设 M 为二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 中一个匹配，若 $|M|=\min\{|V_1|,|V_2|\}$，则称 M 为 G 中的完备匹配.

主要定理

定理 8.1　无向图 G 为二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路.

定理 8.2（Hall 定理）　设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 中，$|V_1|\leq|V_2|$，G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 k 个顶点（$k=1,2,\cdots,|V_1|$）至少与 V_2 中 k 个顶点相邻.

Hall 定理中的条件称为"相异性条件".

定理 8.3　在二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 中，若

(1) V_1 中每个顶点至少关联 $t(t\geq 1)$ 条边；

(2) V_2 中每个顶点至多关联 t 条边，

则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

2. 欧拉图

欧拉回路与欧拉图

经过图中每条边一次且仅一次并且行遍图中所有顶点的通路，称为欧拉通路，若欧拉通路为回路，则称它为欧拉回路，具有欧拉回路的图称为欧拉图.

主要定理

定理 8.4　无向图 G 具有欧拉通路当且仅当 G 中没有或有两个奇度顶点. 若无奇度顶点, 则欧拉通路为回路, 若有两个奇度顶点, 则它们是每条欧拉通路的两个端点.

定理 8.5　无向图 G 为欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度顶点.

定理 8.6　有向图 D 为欧拉图当且仅当 D 连通, 且除两个顶点外, 其余顶点的入度等于出度, 这两个例外的顶点中, 一个的入度比出度大 1, 另一个的入度比出度小 1.

定理 8.7　有向图 D 为欧拉图当且仅当 D 连通且每个顶点的入度等于出度.

3. 哈密尔顿图

哈密尔顿回路与哈密尔顿图

经过图中每个顶点一次且仅一次的通路称为哈密尔顿通路, 若通路为回路, 则称它为哈密尔顿回路, 具有哈密尔顿回路的图称为哈密尔顿图.

主要定理

定理 8.8　无向图 $G=\langle V, E\rangle$ 为哈密尔顿图, $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$, 则

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

其中 $p(G-V_1)$ 为 $G-V_1$ 的连通分支数.

定理 8.9　G 为 $n(n\geq 3)$ 阶无向简单图, 若 G 中任何一对不相邻的顶点度数之和都大于等于 $n-1$, 则 G 中存在哈密尔顿通路, 又若 G 中任何一对不相邻的顶点度数之和都大于等于 n, 则 G 为哈密尔顿图.

4. 平面图

平面图与平面嵌入

如果能将无向图 G 画在平面上, 使其除顶点处外没有边相交, 则称 G 为平面图. 画出的无边相交的图称为 G 的平面嵌入.

平面图的面与次数

平面图 G 的平面嵌入将所在平面分成的若干个区域称为 G 的面. 面积无限的面称为无限面或外部面. 面积有限的面称为有限面或内部面. 包围每个面所有边所构成的回路称为该面的边界, 边界的长度称为面的次数, 用 $\deg(R_i)$ 表示面 R_i 的次数. 注意, 这里所谈回路可能是初级的, 也可能是简单的, 还可能是复杂的, 特别是外部面的边界还可能是由分离回路构成.

极大平面图

如果在简单平面图 G 的任意两个不相邻的顶点之间再加一条边, 所得图为非平面图, 则称 G 为极大平面图.

极小非平面图

若在非平面图 G 中任意删除一条边, 所得图为平面图, 则称 G 为极小非平面图.

平面图的对偶图

设平面图 $G=\langle V, E\rangle$ 有 n 个顶点, m 条边, r 个面. 做 G^* 如下:

(1) 在 G 的每个面 R_i 中放置 G^* 的顶点 v_i^*.

(2) 对于 G 的任意的边 e_k, 若 e_k 是 G 的面 R_i, R_j 公共边界上的边, 则连接 R_i, R_j 中的顶点 v_i^* 和 v_j^*, 得边 e_k^* 与 e_k 相交作为 G^* 的边. 若 e_k 只在面 R_i 的边界中出现, 则以 R_i 中的顶点 v_i^* 为端点做环 e_k^* 与 e_k 相交, 则 e_k^* 为 G^* 中的环.

利用上述方法所做的图 G^* 称为 G 的对偶图.

主要定理

定理 8.10 平面图 G(平面嵌入)各面次数之和等于边数的两倍, 即 $\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)=2m$, 其中 m 为 G 中边数.

定理 8.11 极大平面图 G 是连通的.

定理 8.12 设 G 是 $n(n\geq3)$ 阶简单平面图, G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3.

定理 8.13(欧拉公式) 设 G 为连通的平面图, 则有

$$n-m+r=2.$$

其中, n, m, r 分别为 G 的顶点数、边数和面数.

定理 8.14(欧拉公式的推广) 对于具有 p 个连通分支的平面图 G, 有

$$n-m+r=p+1.$$

其中, n, m, r, p 分别为 G 的顶点数、边数、面数和连通分支数.

定理 8.15 n 阶, m 条边的连通的平面图 G 中, 每个面的次数至少为 $l(l\geq3)$, 则

$$m\leq\frac{l}{l-2}(n-2).$$

若 G 具有 p 个连通分支, 其他条件不变, 则

$$m\leq\frac{l}{l-2}(n-p-1).$$

定理 8.16 设 G 是 $n(n\geq3)$ 阶简单平面图, 则

$$m\leq3n-6.$$

若 G 为 $n(n\geq3)$ 阶极大平面图, 则

$$m=3n-6.$$

其中 m 为边数.

定理 8.17 设 G 是连通的简单平面图, 则

$$\delta(G)\leq5.$$

定理 8.18(库拉图斯基定理) 图 G 为平面图当且仅当 G 中没有可以收缩成 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

定理 8.19(库拉图斯基定理) 图 G 为平面图当且仅当 G 中没有与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚子图.

定理 8.20 设 G^* 为连通平面图 G 的对偶图, n^*, m^*, r^*; n, m, r 分别为 G^* 与 G 的顶点数、边数和面数, 则

(1) $n^*=r$;

(2) $m^*=m$;

(3) $r^* = n$;

(4) $d(v_i^*) = \deg(R_i)$.

其中,v_i^* 位于 R_i 中. 若 G 具有 p 个连通分支, 则 $r^* = n - p + 1$, 其他结论不变.

5. 本章含 4 种特殊的图, 在学习这些特殊的图时应注意以下几点:

(1) 要弄清完美匹配与完备匹配的区别, 并弄清完备匹配成为完美匹配的条件.

(2) 要明确图中只存在欧拉通路而无欧拉回路的图不是欧拉图, 类似地, 图中只存在哈密尔顿通路不含哈密尔顿回路的图不是哈密尔顿图.

(3) 注意定理 8.8 是哈密尔顿图的必要条件, 而不是充分条件. 例如, 彼得森图满足定理 8.8 中条件, 但它不是哈密尔顿图. 而定理 8.9 中给出的任何两个不相邻的顶点度数之和大于等于阶数 n 的条件是哈密尔顿图的充分条件, 但不是必要的, 例如, $n(n \geq 5)$ 阶圈不满足这个条件, 但 n 阶圈为哈密尔顿图.

(5) 平面图理论中定理较多, 但许多定理(如定理 8.13 到定理 8.16) 都与欧拉公式有关, 所以, 还是容易记忆和理解的.

习　　题

8.1　画出完全二部图 $K_{1,3}$, $K_{2,4}$ 和 $K_{2,2}$.

8.2　设 G 为 $n(n \geq 1)$ 阶二部图, 至少用几种颜色给 G 的顶点染色, 使相邻的顶点颜色不同?

8.3　完全二部图 $K_{r,s}$ 中, 边数 m 为多少?

8.4　完全二部图 $K_{r,s}$ 的匹配数 β 为多少?

8.5　今有工人甲、乙、丙要完成三项任务 a, b, c. 已知工人甲能胜任 a, b, c 三项任务; 工人乙能胜任 a, b 两项任务; 工人丙能胜任 b, c 两项任务. 你能给出一种安排方案, 使每个工人各完成一项他们能胜任的任务吗?

8.6　画一个无向欧拉图, 使它具有:

(1) 偶数个顶点, 偶数条边;

(2) 奇数个顶点, 奇数条边;

(3) 偶数个顶点, 奇数条边;

(4) 奇数个顶点, 偶数条边.

8.7　画一个有向的欧拉图, 要求同 8.6.

8.8　画一个无向图, 使它是:

(1) 既是欧拉图, 又是哈密尔顿图;

(2) 是欧拉图, 而不是哈密尔顿图;

(3) 是哈密尔顿图, 而不是欧拉图;

(4) 既不是欧拉图, 也不是哈密尔顿图.

8.9　画一个有向图, 要求同 8.8 题.

8.10　若 D 为有向欧拉图, 则 D 一定为强连通图. 其逆命题成立吗?

8.11　在什么条件下无向完全图 $K_n(n\geq 2)$ 为哈密尔顿图? 又在什么条件下为欧拉图?

8.12　有割点的无向图 G 不可能为哈密尔顿图, G 也一定不是欧拉图吗?

8.13　今有 a, b, c, d, e, f, g 7 个人, 已知下列事实:

a. 会讲英语;

b. 会讲英语和汉语;

c. 会讲英语、意大利语和俄语;

d. 会讲日语和汉语;

e. 会讲德语和意大利语;

f. 会讲法语、日语和俄语;

g. 会讲法语和德语.

试问这 7 个人应如何排座位, 才能使每个人都能和他身边的人交谈?

8.14　某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成的双色布. 已知在品种中, 每种颜色至少分别和其他 5 种颜色中的 3 种颜色搭配, 证明可以挑出 3 种双色布, 它们恰有 6 种不同的颜色.

8.15　指出图 8.1 所示平面图各面的次数, 并验证各面次数之和等于边数的两倍.

8.16　求图 8.1 所示平面图 G 的对偶图 G^*, 并验证 $n^*=r$, $m^*=m$, $r^*=n$, 其中, n, m, r 分别为 G 的顶点数、边数和面数, 而 n^*, m^*, r^* 分别为 G^* 的顶点数、边数和面数.

图 8.1　　　　图 8.2

8.17　求图 8.2 所示平面图 G 的对偶图 G^*, 再求 G^* 的对偶图 G^{**}, G^{**} 与 G 同构吗?

8.18　彼得森图如图 8.3 所示. 证明它不是二部图, 也不是欧拉图, 还不是平面图.

8.19　证明图 8.4 所示图 G 是哈密尔顿图, 但它不是平面图.

8.20　图 8.5 所示图 G 为平面图, 试给出它的一个平面嵌入. 它是极大平面图吗?

题 8.21～8.23 的要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

图 8.3　　　　图 8.4　　　　图 8.5

8.21 (1) 完全图 $K_n(n\geq1)$都是欧拉图. 这个命题的真值为$\boxed{A}$.

(2) 完全图 $K_n(n\geq1)$都是哈密尔顿图. 这个命题的真值为$\boxed{B}$.

(3) 完全二部图 $K_{n,m}(n\geq1, m\geq1)$都是欧拉图. 这个命题的真值为$\boxed{C}$.

(4) 完全二部图 $K_{n,m}(n\geq1, m\geq1)$都是哈密尔顿图. 这个命题的真值为$\boxed{D}$.

供选择的答案

A, B, C, D: ① 真; ② 假.

8.22 (1) 设 G_1 与 G_2 是两个平面图, 若 G_1 ü G_2, 则它们的对偶图 G_1^* ü G_2^*. 这个命题的真值为$\boxed{A}$.

(2) 任何平面图 G 的对偶图 G^* 的对偶图 G^{**} 与 G 同构. 这个命题的真值为$\boxed{B}$.

(3) 任何平面图 G 的对偶图 G^* 的面数 r^* 都等于 G 的顶点数 n. 这个命题的真值为$\boxed{C}$.

供选择的答案

A, B, C: ① 真; ② 假.

8.23 6 个顶点 11 条边的所有可能的非同构的连通的简单的非平面图有$\boxed{A}$个, 其中有$\boxed{B}$个含子图 $K_{3,3}$, 有$\boxed{C}$个含与 K_5 同胚子图.

供选择的答案

A, B, C: ① 1; ② 2; ③ 3; ④ 4; ⑤ 5; ⑥ 6; ⑦ 7; ⑧ 8.

习 题 解 答

8.1 图 8.6 中, (1)所示的图为 $K_{1,3}$, (2)所示的图为 $K_{2,3}$, (3)所示的图为 $K_{2,2}$. 它们分别各有不同的同构形式.

图 8.6

8.2 若 G 为零图, 用一种颜色就够了. 若 G 是非零图的二部图, 用两种颜色就够了.

分析 根据二部图的定义可知, n 阶零图(无边的图)是二部图(含平凡图), 对 n 阶零图的每个顶点都用同一种颜色染色, 因为无边, 所以, 不会出现相邻顶点染同色, 因而一种颜色就够用了.

而对于非零图的二部图 G, 顶点集 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 =$ ě, G 中任何边的两个端点都分别属于 V_1 和 V_2, 也就是说, 不存在两个端点都在 V_1 中或都在 V_2 中的边, 因而 V_1 中各顶点彼此不相邻, V_2 中顶点也彼此不相邻, 于是给 V_1 中顶点染同一种颜色, V_2 中顶点染另种颜色, 就保证任何一条边的两个端点都染不同颜色, 也就是说用两种颜色就够了.

8.3 完全二部图 $K_{r,s}$中的边数 $m = rs$.

分析 设完全二部图 $K_{r,s}$ 的顶点集为 V, 则 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, 且 $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $K_{r,s}$ 是简单图, 且 V_1 中每个顶点与 V_2 中所有顶点相邻, 而且 V_1 中任何两个不同顶点关联的边互不相同, 所以, 边数 $m = rs$.

8.4 完全二部图 $K_{r,s}$ 中, 匹配数 $\beta = \min\{r, s\}$, 即 β 等于 r, s 中的小者.

分析 不妨设 $r \leq s$, 且二部图 $K_{r,s}$ 中, $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, 由 Hall 定理可知, 图中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配, 设 M 为一个完备匹配, 则 V_1 中顶点全为 M 饱和点, 所以, $\beta = r$.

8.5 能安排多种方案, 使每个工人去完成一项他们各自能胜任的任务.

分析 设 $V_1 = \{$甲, 乙, 丙$\}$, 则 V_1 为工人集合, $V_2 = \{a, b, c\}$, 则 V_2 为任务集合. 令 $V = V_1 \cup V_2$, $E = \{(x, y) \mid x$ 能胜任 $y\}$, 得无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 则 G 为二部图, 见图 8.7 所示. 本题是求图中完美匹配问题. 给图中一个完美匹配就对应一个分配方案. 图 8.7 满足 Hall 定理中的相异性条件, 所以, 存在完备匹配, 又因为 $|V_1| = |V_2| = 3$, 所以, 完备匹配也为完美匹配. 其实, 从图上, 可以找到多个完美匹配. 取

图 8.7

$$M_1 = \{(\text{甲}, a), (\text{乙}, b), (\text{丙}, c)\},$$

此匹配对应的方案为甲完成 a, 乙完成 b, 丙完成 c, 见图中粗边所示的匹配.

$$M_2 = \{(\text{甲}, b), (\text{乙}, a), (\text{丙}, c)\},$$

M_2 对应的分配方案为甲完成 b, 乙完成 a, 丙完成 c.

请读者再找出其余的分配方案.

8.6 本题的答案太多. 如果不限定画出的图为简单图, 非常容易地给出 4 族图分别满足要求.

(1) n(n 为偶数, 且 $n \geq 2$) 阶圈都是偶数个顶点, 偶数条边的欧拉图.

(2) n(n 为奇数, 且 $n \geq 1$) 阶圈都是奇数个顶点, 奇数条边的欧拉图.

(3) 在(1)中的圈上任选一个顶点, 在此顶点处加一个环, 所得图为偶数个顶点, 奇数条边的欧拉图.

(4) 在(3)中的圈上任选一个顶点, 在此顶点处加一个环, 所得图为奇数个顶点, 偶数条边的欧拉图.

分析 上面给出的 4 族图都是连通的, 并且所有顶点的度数都是偶数, 所以, 都是欧拉图. 并且(1), (2)中的图都是简单图. 而(3), (4)中的图都带环, 因而都是非简单图. 于是, 如果要求所给出的图必须是简单图, 则(3), (4)中的图不满足要求.

其实, 欧拉图是若干个边不重的圈的并, 由这种性质, 同样可以得到满足(3), (4)中要求的简单欧拉图. 设 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是长度大于等于 3 的 k 个奇圈(长度为奇数的圈称为奇圈), 其中 k 为偶数, 将 G_1 中某个顶点与 G_2 中的某顶点重合, 但边不重合, G_2 中某顶点与 G_3 中某顶点重合, 但边不重合, 继续地, 最后将 G_{k-1} 中某顶点与 G_k 中某顶点重合, 边不重合, 设最后得连通图为 G, 则 G 中有奇数个顶点, 偶数条边, 且所有顶点度数均为偶数, 所以, 这样的一族图满足(4)的要求, 其中一个特例为图 8.8 中(1)所示.

在以上各图中, 若 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 中有一个偶圈, 其他条件不变, 构造方法同上, 则所得图 G 为偶数个顶点, 奇数条边的简单欧拉图, 满足(3)的要求. 图 8.8 中(2)所示为一个特

图 8.8

殊的情况.

8.7 本题的讨论类似于 8.6 题,只是将所有无向圈全变成有向圈即可,请读者自己画出满足要求的一些特殊有向欧拉图.

8.8 本题的答案也是很多的,这里给出满足要求的最简单的一些图族,而且全为简单图.

(1) $n(n\geq3)$阶圈,它们都是欧拉图,又都是哈密尔顿图.

(2) 给定 $k(k\geq2)$ 个长度大于等于 3 的初级回路,即圈 $G_1, G_2, \cdots, G_k$,用 8.6 题方法构造的图 G 均为欧拉图,但都不是哈密尔顿图,图 8.8 给出的两个图是这里的特例.

(3) 在 $n(n\geq4)$阶圈中,找两个不相邻的顶点,在它们之间加一条边,所得图均为哈密尔顿图,但都不是欧拉图.

(4) 在(2) 中的图中,设存在长度大于等于4的圈,比如说G_1,在G_1中找两个不相邻顶点,在它们之间加一条新边,然后用 8.6 题方法构造图 G,则 G 既不是欧拉图,也不是哈密尔顿图,见图 8.9 所示的图.

图 8.9

分析 (1) 中图满足要求是显然的. (2) 中构造的图 G 是连通的,并且各顶点度数均为偶数,所以,都是欧拉图,但因为 G 中存在割点,将割点从 G 中删除,所得图至少有两个连通分支,这破坏了哈密尔顿图的必要条件,所以,G 不是哈密尔顿图. (3) 中构造的图中,所有顶点都排在一个圈上,所以,图中存在哈密尔顿回路,因而为哈密尔顿图,但因图中有奇度顶点(度数为奇数的顶点),所以,不是欧拉图. 由以上讨论可知,(4) 中图既不是欧拉图,也不是哈密尔顿图.

其实,读者可以找许多族图,分别满足题中的要求.

8.9 请读者自己讨论.

8.10 其逆命题不真.

分析 若 D 是强连通的有向图,则 D 中任何两个顶点都是相互可达的,但并没有要求 D 中每个顶点的入度都等于出度. 在图 8.2 所示的 3 个强连通的有向图都不是欧拉图.

8.11 除 K_2 不是哈密尔顿图之外,$K_n(n\geq3)$ 全是哈密尔顿图. K_n(n 为奇数) 为欧拉图. 规定 K_1(平凡图) 既是欧拉图,又是哈密尔顿图.

分析 从哈密尔顿图的定义不难看出,n 阶图 G 是否为哈密尔顿图,就看是否能将 G 中的所有顶点排在 G 中的一个长为 n 的初级回路,即圈上. $K_n(n\geq3)$ 中存在多个这样的生成圈(含所有顶点的圈),所以,$K_n(n\geq3)$ 都是哈密尔顿图.

在完全图 K_n 中, 各顶点的度数均为 $n-1$, 若 K_n 为欧拉图, 则必有 $n-1$ 为偶数, 即 n 为奇数, 于是, 当 n 为奇数时, K_n 连通且无奇度顶点, 所以, K_n(n 为奇数) 都是欧拉图. 当 n 为偶数时, 各顶点的度数均为奇数, 当然不是欧拉图.

8.12　有割点的图也可以为欧拉图.

分析　无向图 G 为欧拉图当且仅当 G 连通且没有奇度顶点. 只要 G 连通且无奇度顶点(割点的度数也为偶数), G 就是欧拉图. 图 8.8 所示的两个图都有割点, 但它们都是欧拉图.

8.13　将 7 个人排座在圆桌周围, 其排法为 abdfgeca.

分析　做无向图 $G=\langle V, E\rangle$, 其中,

$$V=\{a, b, c, d, e, f, g\},$$

$$E=\{(u, v) \mid u, v \in V \text{ 且 } u \text{ 与 } v \text{ 有共同语言}\}.$$

图 G 为图 8.10 所示. 图 G 是连通图, 于是, 能否将这 7 个人排座在圆桌周围, 使得每个人能与两边的人交谈, 就转化成了图 G 中是否存在哈密尔顿回路(也就是 G 是否为哈密尔顿图). 通过观察发现 G 中存在哈密尔顿回路, abdfgeca 就是其中的一条哈密尔顿回路.

图　8.10

8.14　用 v_i 表示颜色 i, $i=1, 2, \cdots, 6$. 做无向图 $G=\langle V, E\rangle$, 其中

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

$$E=\{(u, v) \mid u, v \in V \text{ 且 } u \neq v, \text{ 并且 } u \text{ 与 } v \text{ 能搭配}\}.$$

对于任意的 $v\in V$, $d(v)$ 表示顶点 v 与别的能搭配的颜色个数, 易知 G 是简单图, 且对于任意的 $u, v\in V$, 均有 $d(u)+d(v)\geq 3+3=6$, 由定理 8.9 可知, G 为哈密尔顿图, 因而 G 中存在哈密尔顿回路, 不妨设 $v_{i_1}v_{i_2}v_{i_3}v_{i_4}v_{i_5}v_{i_6}v_{i_1}$ 为其中的一条, 在这种回路上, 每个顶点代表的颜色都能与它相邻顶点代表的颜色相搭配. 于是, 让 v_{i_1} 与 v_{i_2}, v_{i_3} 与 v_{i_4}, v_{i_5} 与 v_{i_6} 所代表的颜色相搭配, 就能织出 3 种双色布, 包含了 6 种颜色.

8.15　$\deg(R_1)=4$, $\deg(R_2)=1$, $\deg(R_3)=3$, 而 $\deg(R_0)=12$. $\sum_{i=0}^{3}\deg(R_i)=20=2\times 10$, 本图边数 $m=10$.

分析　平面图(平面嵌入)的面 R_i 的次数等于包围它的边界的回路的长度, 这里所说回路, 可能是初级的, 可能是简单的, 也可能是复杂的, 还可能由若干个回路组成. 图 8.1 所示图中, R_1, R_2, R_3 的边界都是初级回路, 而 R_0 的边界为复杂回路(有的边在回路中重复出现), 即 $e_1e_2e_5e_7e_6e_8e_9e_{10}e_6e_5e_3e_4$, 长度为 12, 其中边 e_5, e_6 在其中各出现两次.

8.16　图 8.11 中, 实线边所示的图为图 8.1 中图 G, 虚线边, 实心点图为它的对偶图 G^*. 由图可知, G 的顶点数 n, 边数 m, 面数 r 分别为 8, 10 和 4, 而 G^* 的顶点数 n^*, 边数

图　8.11

m^*，面数 r^* 分别为 4, 10 和 8, 于是有 $n^* = r, m^* = m, r^* = n$.

分析　从图 8.11 还可以发现, G 的每个顶点位于 G^* 的一个面中, 且 G^* 的每个面只含 G 的一个顶点, 所以, $r^* = n$. 这是连通平面图 G 的性质. 若 G 是具有 k 个连通分支的平面图, $k \geq 2$, 则应有 $r^* = n - k + 1$. 读者自己给出一个非连通的平面图, 求出它的对偶图, 来验证这个结论. 另外, 用图 8.1 还可以验证, 对于任意的 v^* (G^* 中的顶点), 若它处于 G 的面 R_i 中, 则应有 $d(v^*) = \deg(R_i)$.

8.17　G^{**} 不能与 G 同构.

分析　任意平面图的对偶图都是连通的, 因而 G^* 与 G^{**} 都是连通图, 而 G 是具有 3 个连通分支的非连通图, 连通图与非连通图显然是不能同构的.

图 8.12 中, 实线边图为图 8.2 中的图 G, 虚线边图为 G 的对偶图 G^*, 带小杠的边组成的图是 G^* 的对偶图 G^{**}, 显然 $G^{**} \ncong G$.

图　8.12

8.18　因为彼得森图中有长度为奇数的圈, 根据定理 8.1 可知它不是二部图. 图中每个顶点的度数均为 3, 由定理 8.5 可知它不是欧拉图. 又因为它可以收缩成 K_5, 由库拉图斯基定理可知它也不是平面图.

其实, 彼得森图也不是哈密尔顿图, 这里就不给出证明了.

8.19　将图 8.4 重画在图 8.13 中, 并且将顶点标定. 图中 afbdcea 为图中的哈密尔顿回路, 见图中粗边所示, 所以, 该图为哈密尔顿图.

将图中边 $(d, e), (e, f), (f, d)$ 三条去掉, 所得图为原来图的子图, 它为 $K_{3,3}$, 可取 $V_1 = \{a, b, c\}$, $V_2 = \{d, e, f\}$, 由库拉图斯基定理可知, 该图不是平面图.

8.20　图 8.14 所示图为图 8.5 所示图的平面嵌入.

图　8.13　　　　　　　　图　8.14

分析　该图为极大平面图. 此图 G 中, 顶点数 $n=6$, 边数 $m=12$. 若 G 不是极大平面图, 则应该存在不相邻的顶点 u, v, 在它们之间再加一条边所得 G 还应该是简单平面图, G 的顶点数 $n' = n = 6$, $m' = n + 1 = 13$, 于是会有

$$m' = 13 > 3n' - 6 = 12.$$

这与定理 8.16 矛盾, 所以, G 为极大平面图.

其实, $n(n\geq 3)$ 阶简单平面图 G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3. 由图 8.14 可知, G 的每个面的次数均为 3, 所以, G 为极大平面图.

8.21 答案　A, B, C, D 全为②

分析　(1) 只有 n 为奇数时命题为真, 见 8.11 的解答与分析.

(2) $n\neq 2$ 时, 命题为真, 见 8.11 的解答与分析.

(3) 只有 n, m 都是偶数时, $K_{n,m}$ 中才无奇度数顶点, 因而 $K_{n,m}$ 为欧拉图, 其他情况下, 即 n, m 中至少有一个是奇数, 这时 $K_{n,m}$ 中必有奇度顶点, 因而不是欧拉图.

(4) 只有 $n=m$ 时, $K_{n,n}$ 中存在哈密尔顿回路, 因而为哈密尔顿图.

当 $n\neq m$ 时, 不妨设 $n<m$, 并且在二部图 $K_{n,m}$ 中, $|V_1|=n$, $|V_2|=m$, 则 $p(G-V_1)=m>|V_1|=n$, 这与定理 8.8 矛盾. 所以, $n\neq m$ 时, $K_{n,m}$ 不是哈密尔顿图.

8.22 答案　A: ②; B: ②; C: ②.

分析　(1)

图　8.15

图 8.15 中, 两个实边图是同构的, 但它们的对偶图(虚边图)是不同构的.

(2) 任何平面图的对偶图都是连通图. 设 G 是非连通的平面图, 显然有 $G\not\cong G^{**}$.

(3) 当 G 是非连通的平面图时, $r^* = n - k + 1$, 其中 k 为 G 的连通分支数.

8.23 答案　A: ④; B: ②; C: ②.

分析 根据库拉图斯基定理可知,所求的图必含有 K_5 或 $K_{3,3}$同胚子图,或含可收缩成 K_5 或 $K_{3,3}$的子图. 由于顶点数和边数均已限定,因而由 $K_{3,3}$加 2 条边的图可满足要求,由 K_5 增加一个顶点,一条边的图可满足要求,将所有的非同构的简单图画出来,共有 4 个,其中由 $K_{3,3}$产生的有 2 个,由 K_5 产生的有 2 个. 见图 8.16 所示.

图 8.16

第 9 章　树

内 容 提 要

1. 无向树及生成树

无向树

连通不含回路(初级回路或简单回路)的无向图称为无向树, 常用 T 表示. 设 G 是具有 $p(p \geq 2)$ 个连通分支的无向图, 每个连通分支都是无向树, 则称 G 为森林. 在树 T 中, 度数为 1 的顶点称为树叶, 非树叶的顶点称为分支点. 注意, 平凡图称为平凡树, 它没有树叶, 也没有分支点.

生成树

设 T 为无向图 G 的生成子图, 若 T 是树, 则称 T 为 G 的生成树. G 在 T 中的边称为 T 的树枝, G 不在 T 中的边称为 T 的弦. T 的全体弦组成的集合的导出子图称为 T 的余树. 注意, T 的余树可能不连通, 也可能含回路, 因而余树不一定是树, 更不一定是 G 的生成树.

基本回路与基本回路系统

设 T 是 n 阶 m 条边的无向图 G 的生成树, G 中只含 T 的一条弦, 其余的边都是 T 的树枝的回路称为 G 对应 T 的基本回路, G 中全体基本回路集合, 称为 G 对应 T 的基本回路系统.

基本割集与基本割集系统

设 T 是 n 阶 m 条边的无向图 G 的生成树, G 中只含 T 的一条树枝, 其余边全为 T 的弦的割集(边割集)称为 G 中对应 T 的基本割集, G 中全体基本割集集合, 称为对应 T 的基本割集系统.

最小生成树

无向带权连通图 G 的所有生成树中, 其权最小的称为最小生成树.

可用避圈法(Kruskal 算法)求最小生成树, 见《离散数学》.

主要定理

定理 9.1　设无向图 $G=\langle V, E\rangle$, 则下面命题等价:

(1) G 连通不含回路.

(2) G 的每对顶点之间有唯一的一条路径.

(3) G 连通, 且 $m=n-1$.

(4) G 中无回路且 $m=n-1$.

(5) G 中无回路, 但在 G 中任何两个不相邻顶点之间加一条新边, 所得图中含唯一的一条初级回路.

(6) G 连通且每条边都是桥.

(3), (4)中, n, m 分别为 G 的顶点数和边数. 将(2)叙述成“G 的每对顶点之间具有唯一的一条简单通路”也是可以的, 可以证明两种叙述是等价的.

定理 9.2 $n(n\geq 2)$阶无向树至少有两片树叶.

定理 9.3 无向图 G 具有生成树当且仅当 G 是连通的.

定理 9.4 设 T 是 n 阶 m 条边无向连通图 G 中的生成树, 则 T 有 $n-1$ 条树枝, $m-n+1$条弦.

2. 根树及其应用

有向树及根树

若略去有向图所有边的方向所得无向图为无向树, 则称 D 为有向树. 一棵非平凡的有向树 T, 如果只有一个顶点的入度为 0, 其余顶点的入度均为 1, 则称 T 为根树. 在根树中, 入度为 0 的顶点称为树根. 入度为 1, 出度为 0 的顶点称为树叶. 入度为 1, 出度不为 0 的顶点称为内点, 树根与内点统称为分支点. 在根树中, 从树根到任意顶点的通路长度称为该顶点的层数, 层数最大顶点的层数称为树高.

根树与家族树

一棵根树可以看成一个家族. 若顶点 u 邻接到顶点 v, 即有向边$\langle u, v\rangle$在树中, 则称 u 是 v 的父亲, v 是 u 的儿子. 若 v_1, v_2 的父亲相同, 则称它们是兄弟. 又若 u 可达 v, 则称 u 为 v 的祖先, v 为 u 的后代.

根树与根子树

设 v 为根树 T 中非根顶点, 称由 v 及其后代的导出子图为 T 的以 v 为根的根子树.

根树与有序树

若将根树 T 中的顶点按层数标定顺序, 则称 T 为有序树.

根树的分类

设 T 为一棵根树. (1) 若 T 的每个分支点至多有 r 个儿子, 则称 T 为 r 元树. 若 T 的每个分支点都恰好有 r 个儿子, 则称 T 为 r 元正则树, 此时又若 T 的所有树叶层数相同, 则称 T 为 r 元完全正则树.

(2) 有序的 r 元树, 称为 r 元有序树. 有序的 r 元正则树称为 r 元有序正则树. 有序的 r 元完全正则树称为 r 元有序完全正则树.

最优树

2 元树 T 的 t 片树叶分别带实数权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$. 称 $W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(w_i)$ 为 T 的权, 其中 $l(w_i)$为带权为 w_i 的树叶的层数. 在所有带权为 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的 2 元树中, 其权最小的 2 元树称为最优树. 用 Huffman 算法求最优树, 见《离散数学》.

前缀码与最佳前缀码

长为 n 的符号串 $\beta=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n$ 中, 称 $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \cdots, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$ 分别为 β的长为 $1, 2, \cdots, n-1$ 的前缀. $B=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$为 m 个符号串集合, 若 B中任何两个符号串 β_i, β_j 互不为前缀, 则称 B为前缀码. 若 B 中的符号串均由两个元素(如 0 和 1)构成, 则称 B为 2 元前缀码.

一棵带 t 片树叶的 2 元树可以产生一个带 t 个符号串的 2 元前缀码. 由最优 2 元树产生的前缀码称为最佳前缀码.

2 元有序正则树与算式

2 元有序正则树可以表示算式: 运算符放在分支点上, 数或变量放在树叶上, 并规定被减数和被除数放在左边树叶上.

行遍或周游 2 元有序正则树

(1) 中序行遍法访问次序为: 左子树, 树根, 右子树.

(2) 前序行遍法访问次序为: 树根, 左子树, 右子树.

(3) 后序行遍法访问次序为: 左子树, 右子树, 树根.

对于表示算式的 2 元有序正则树采用中序行遍法可以还原算式. 用前序行遍法可以产生波兰符号表示法. 用后序行遍法可以产生逆波兰符号表示法.

3. 小结

学习本章要注意以下几点.

(1) 在求解无向树时, 一定注意将树的主要性质之一, 即 $m = n - 1$(m, n 分别为树的边数和顶点数)与握手定理配合在一起用, 即

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m = 2(n-1)$$

此公式在解无向树时起很大作用.

(2) 画 $n(n \leq 6)$ 阶非同构的无向树时, 也要用到树的性质 $m = n - 1$(m, n 同(1)中), 由此就知道了所求树的度数之和, 并且由于非平凡树无零度顶点, 因而能给出不同度数列的分配方案, 当然不同的方案画出的无向树是非同构的, 特别要注意的是, 同一个分配方案, 由于顶点之间的相邻关系的不同, 也会产生非同构的树.

(3) 画 $n(n \leq 5)$ 阶非同构的根树时, 要先画出 n 阶非同构的无向树, 然后由每个非同构的无向树再派生出非同构的根树, 就可以得到全体 n 阶非同构的根树了.

(4) 在用 Huffman 算法求最佳前缀码时, 若先将各符号出现频率乘 100, 所得数做为权求最优树, 则最优树的权 $W(T)$ 为传输 100 个按给定频率出现的符号所用二进制数字的个数. 另外, 还应注意, 由于顶点所放位置不同, 所求最优树不一定唯一, 因而所得前缀码可能不同, 但一般说来各符号的码长不变, 特别是, 最优树的权是固定不变的.

习　题

9.1　设无向树 T 有 3 个 3 度、2 个 2 度顶点, 其余顶点都是树叶, 问 T 有几片树叶?

9.2　设无向树 T 有 7 片树叶, 其余顶点的度数均为 3, 求 T 中 3 度顶点数, 能画出几棵具有此种度数的非同构的无向树?

9.3　对于具有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的森林, 恰巧加多少条新边能使所得图为无向树?

9.4　已知 $n(n \geq 2)$ 阶无向简单图 G 具有 $n-1$ 条边, G 一定为树吗?

9.5 **试画出度数列为** 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4 **的所有非同构的** 7 **阶无向树**.

9.6 **画出图** 9.1 **所示无向图的所有非同构的生成树**.

图 9.1

9.7 **在图** 9.2 **所示的无向图** G **中**, **实线边所示的子图为** G **的一棵生成树** T, **求** G **的对应于** T **的基本回路系统和基本割集系统**.

图 9.2 **图** 9.3

9.8 **求图** 9.3 **所示两个带权图的最小生成树**, **并计算它们的权**.

9.9 **下面给出的符号串集合中**, **哪些是前缀码**?

B_1 = {0, 10, 110, 1111}

B_2 = {1, 01, 001, 000}

B_3 = {1, 11, 101, 001, 0011}

B_4 = {b, c, aa, ac, aba, abb, abc}

B_5 = {b, c, a, aa, ac, aba, abb, abc}

9.10 **利用图** 9.4 **中给出的** 2 **元树和** 3 **元树**, **产生一个** 2 **元前缀码**, **和一个** 3 **元前缀码**.

图 9.4

9.11 **图** 9.5 **给出的** 2 **元树表达一个算式**.

(1) **给出这个算式的表达式**;

图 9.5

(2) 给出算式的波兰符号法表达式;

(3) 给出算式的逆波兰符号法表达式.

题 9.12～9.14 的要求, 是从供选择的答案中选出填入叙述中的□内的正确答案.

9.12 计算非同构的根树的个数.

(1) 2 个顶点非同构的根树为 $\boxed{A}$ 个;

(2) 3 个顶点非同构的根树为 $\boxed{B}$ 个;

(3) 4 个顶点非同构的根树为 $\boxed{C}$ 个;

(4) 5 个顶点非同构的根树为 $\boxed{D}$ 个.

供选择的答案

A, B, C, D: ① 1; ② 2; ③ 3; ④ 4; ⑤ 5; ⑥ 6; ⑦ 7; ⑧ 8; ⑨ 9; ⑩ 10.

9.13 设 7 个字母在通信中出现的频率如下:

a: 35%, b: 20%, c: 15%, d: 10%,

e: 10%, f: 5%, g: 5%.

编一个最佳 2 元前缀码. 在这个前缀码中, a, b, c, d, e, f, g 的码长分别是 $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$, $\boxed{F}$, $\boxed{G}$.

传输 10^4 个按上述比例出现的字母需要 $\boxed{H}$ 个二进制数字.

供选择的答案

A, B, C, D, E, F, G: ① 1; ② 2; ③ 3; ④ 4; ⑤ 5; ⑥ 6.

H: ① 20000; ② 25000; ③ 25500.

9.14 给定算式

$$\{[(a+b)*c]*(d+e)\}-[f-(g*h)].$$

此算式的波兰符号法表示式为 $\boxed{A}$, 逆波兰符号法表示式为 $\boxed{B}$.

供选择的答案

A, B: ① - * * a + bc + def - g * h;

② - * * + abc + de - f * gh;

③ * - * + abc + de - f * gh;

④ ab+ c* de+ * fgh* - - ;

⑤ ab+ c* de+ * gh* f - - .

习题解答

9.1 有 5 片树叶.

分析 设 T 有 x 个 1 度顶点(即树叶). 则 T 的顶点数 $n=3+2+x=5+x$, T 的边数 $m=n-1=4+x$. 由握手定理得方程

$$2m=2(4+x)=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=3\times3+2\times2+1\cdot x=13+x.$$

由方程解出 $x=5$.

所求无向树 T 的度数列为 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3. 由这个度数列可以画多棵非同构的无向树, 图 9.6 给出的 4 棵都具有上述度数列, 且它们是非同构的.

图 9.6

9.2 T 中有 5 个 3 度顶点

分析 设 T 中有 x 个 3 度顶点, 则 T 中的顶点数 $n=7+x$, 边数 $m=n-1=6+x$, 由握手定理得方程

$$2m=12+2x=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=3x+7.$$

由此解出 $x=5$, 即 T 中有 5 个 3 度顶点. T 的度数列为 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3. 由于 T 中只有树叶和 3 度顶点, 因而 3 度顶点可依次相邻, 见图 9.7 所示. 还有一棵与它非同构的树, 请读者自己画出.

图 9.7

9.3 加 $k-1$ 条新边才能使所得图为无向树.

分析 设具有 k 个连通分支的森林为 G, 则 G 有 k 个连通分支 $T_1, T_2, \cdots, T_k$, T_i 全为树, $i=1,2,\cdots,k$. 加新边不能在 T_i 内部加, 否则必产生回路. 因而必须在不同的小树之间加新边. 每加一条新边后, 所得到的森林就减少一个连通分支. 恰好加 $k-1$ 条新边, 就使所得图连通且无回路, 因而是树. 在加边过程中, 只需注意, 不在同一个连通分支中加边. 下面给出一种加边方法. 取 v_i 为 T_i 中顶点, 加新边(v_i, v_{i+1}), $i=1,2,\cdots,k-1$, 则所得图为树. 见图 9.8 给出的一个特例. 图中虚线边为新加的边.

9.4 不一定.

分析 n 阶无向树 T 具有 $n-1$ 条边, 这是无向树 T 的必要条件, 但不是充分条件. 例如, $n-1$ 阶圈(即 $n-1$ 个顶点的初级回路)和一个孤立点组成无向简单图具有 $n-1$ 条

图 9.8

边,但它显然不是树.

9.5 非同构的无向树共有 2 棵,如图 9.9 所示.

图 9.9

分析 由度数列 1,1,1,1,2,2,4 不难看出,唯一的 4 度顶点必须与 2 度顶点相邻,它与 1 个 2 度顶点相邻,还是与两个 2 度顶点都相邻,所得树是非同构的,再没有其他情况.因而是两棵非同构的树.

9.6 有两棵非同构的生成树,见图 9.10 所示.

图 9.10

分析 图 9.10 是 5 阶图(5 个顶点的图),5 阶非同构的无向树只有 3 棵,理由如下.5 阶无向树中,顶点数 $n=5$,边数 $m=4$,各顶点度数之和为 8,度数分配方案有 3 种,分别为

① 1, 1, 1, 1, 4;

② 1, 1, 1, 2, 3;

③ 1, 1, 2, 2, 2.

每种方案只有一棵非同构的树.图 9.10 所示的 5 阶图的非同构的生成树的度数列不能超出以上 3 种,也就是说,它至多有 3 棵非同构的生成树,但由于图中无 4 度顶点,所以,不可能有度数列为①的生成树,于是该图最多有两棵非同构的生成树.但在图 9.10 中已经找出了两个非同构的生成树,其中(1)的度数列为③,(2)的度数列为②,因而该图准确地有两棵非同构的生成树.

9.7 基本回路为:

$$C_c = cbad,\ C_e = ead,\ C_g = gfa,\ C_h = hfab.$$

基本回路系统为$\{C_c, C_e, C_g, C_h\}$.

基本割集为:

$$S_a=\{a,e,c,g,h\},\quad S_b=\{b,c,h\},$$
$$S_d=\{d,e,c\},\quad S_f=\{f,g,h\}.$$

基本回路系统为$\{S_a,S_b,S_d,S_f\}$.

分析 1° 注意基本回路用边的序列表示,而基本割集用边的集合表示.

2° 基本回路中,只含一条弦,其余的边全为树枝,其求法是这样的:设弦 $e=(v_i,v_j)$,则 v_i,v_j 在生成树 T 中,且在 T 中,v_i,v_j 之间存在唯一的路径 $\Gamma_{i,j}$,则 $\Gamma_{i,j}$ 与 $e=(v_i,v_j)$ 组成的回路为 G 中对应弦 e 的基本回路.

3° 基本割集中,只含一条树枝,其余的边都是弦,其求法是这样的:设树枝 $e=(v_i,v_j)$,则 e 为 T 中桥,于是 $T-e$(将 e 从 T 中去掉),产生两棵小树 T_1 与 T_2,则

$$S_e=\{e'\mid e'\text{在 } G \text{ 中且 } e'\text{的两个端点分别在 } T_1 \text{ 和 } T_2 \text{ 中}\}$$

S_e 为树枝 e 对应的基本割集.显然 $e\in S_e$,S_e 中另外的边全是弦.注意,两棵小树 T_1 与 T_2 中很可能有平凡树(一个顶点).

图 9.11

$T-a$ 得两棵小树如图 9.11 中(1)所示.G 中一个端点在 T_1 中,另一个端点在 T_2 中的边为 a(树枝),e,c,g,h,它们全是弦,于是

$$S_a=\{a,e,c,g,h\}.$$

$T-b$ 得两棵小树如图 9.11 中(2)所示,其中有一棵为平凡树.G 中一个端点在 T_1 中,另一个端点在 T_2 中的边除树枝 b 外,还有弦 c,h,所以,

$$S_b=\{b,c,h\}.$$

$T-d$ 产生的两棵小树如图 9.11 中(3)所示.G 中一个端点在 T_1 中,另一个端点在 T_2 中的边,除树枝 d 外,还有两条弦 c,e,所以,

$$S_d=\{d,c,e\}.$$

$T-f$ 产生的两棵小树如图 9.11 中(4)所示.由它产生的基本割集为

$$S_f=\{f,g,h\}.$$

9.8 按 Kruskal 求最小生成树的算法,求出的图 9.3(1)的最小生成树 T 为图 9.12 中(1)所示,其 $W(T)=7$.(2)的最小生成树 T 为图 9.12 中(2)所示,其 $W(T)=11$.

9.9 B_1,B_2,B_4 为前缀码.

分析 在 B_1,B_2,B_4 中任何符号串都不是另外符号串的前串,因而它们都是前缀码.而在 B_3 中,1 是 11,101 的前缀,因而 B_3 不是前缀码.在 B_5 中,a 是 aa,ac 等的前缀,因而 B_5 也不是前缀码.

图 9.12

9.10 由图 9.4(1)给出的 2 元前缀码为

$$B_1 = \{00, 0100, 01010, 011, 11\}.$$

由(2)给出的 3 元前缀码为

$$B_2 = \{00, 01, 0200, 0201, 0202, 022, 1, 2\}.$$

分析 B_1 是由 2 元树产生的 2 元前缀码(因为码中的符号串由两个符号 0, 1 组成), 类似地, B_2 是由 3 元树产生的 3 元前缀码(因为码中符号串由 3 个符号 0, 1, 2 组成). 一般地, 由 r 元树产生 r 元前缀码.

9.11 (1) 算式的表达式为

$$(((a + (b * c)) * d - e) \div (f + g)) + ((h * i) * j).$$

由于 $*$, $\div$ 优先于 $+$, $-$, 因而可以省去一些括号, 使其成为

$$((a + b * c) * d - e) \div (f + g) + h * i * j.$$

(2) 算式的波兰符号法表达式为

$$+ \div - * + a * bcde + fg * * hij.$$

(3) 算式的逆波兰符号法表达式为

$$abc * + d * e - fg + \div hi * j * + .$$

9.12 答案 A: ①; B: ②; C: ④; D: ⑨.

分析 对于每种情况都先求出非同构的无向树, 然后求出每棵非同构的无向树派生出来的所有非同构的根树. 图 9.13 中, (1), (2), (3), (4) 分别画出了 2 阶, 3 阶, 4 阶, 5 阶所有非同构的无向树, 分别为 1 棵, 1 棵, 2 棵和 3 棵无向树.

图 9.13

2 阶无向树只有 1 棵, 它有两个 1 度顶点, 见图 9.13 中(1)所示, 以 1 个顶点为树根, 1 个顶点为树叶, 得到 1 棵根树.

3 阶非同构的无向树也只有 1 棵, 见图 9.13 中(2)所示. 它有两个 1 度顶点, 1 个 2 度顶点, 以 1 度顶点为根的根树与以 2 度顶点为根的根树显然是非同构的根树, 所以, 2 阶非同构的根树有两棵.

4 阶非同构的无向树有两棵, 见图 9.13 中(3)所示. 第一棵树有 3 片树叶, 1 个 3 度顶

点, 以树叶为根的根树与以 3 度顶点为根的根树非同构. 所以, 由第一棵树能生成两个非同构的根树, 见图 9.14 中(1) 所示. 第二棵树有两片树叶, 两个 2 度顶点, 由对称性, 以树叶为根的根树与 2 度顶点为根的根树非同构, 见图 9.14 中(2) 所示. 所以, 4 阶非同构的根树有 4 棵.

图　9.14

5 阶非同构的无向树有 3 棵, 见图 9.13 中(4)所示. 由第一棵能派生两棵非同构的根树, 由第二棵能派生 4 棵非同构的根树, 由第三棵能派生 3 棵非同构的根树, 所以, 5 阶非同构的根树共有 9 棵, 请读者将它们都画出来.

9.13 答案　A: ②; B: ②; C: ③; D: ③; E: ③; F: ④; G: ④; H: ③.

分析　将所有的频率都乘 100, 所得结果按从小到大顺序排列:

$$w_g = 5,\ w_f = 5,\ w_e = 10,\ w_d = 10,\ w_c = 15,\ w_b = 20,\ w_a = 35.$$

以以上各数为权, 用 Huffman 算法求一棵最优树, 见图 9.15 所示.

图　9.15

对照各个权可知各字母的前缀码如下:

a —— 10,　　b —— 01,　　c —— 111,　　d —— 110,

e —— 001,　　f —— 0001,　　g —— 0000.

于是, a, b 的码长为 2, c, d, e 的码长为 3, f, g 的码长为 4.

$W(T) = 255$(各分支点的权之和), $W(T)$ 是传输 100 按给定频率出现的字母所用的二进制数字, 因而传输 10^4 个按上述频率出现的字母要用 $2.55 \times 10^4 = 25500$ 个二进制数字.

最后还应指出一点, 在画最优树时, 由于顶点位置的不同, 所得前缀码可能不同, 即有些字母的码子在不同的最优树中可能不同, 但一般说来码长不改变. 特别是, 不同的最优树, 它们的权是固定不变的.

9.14 答案　A: ②; B: ④.

分析　用 2 元有序正则树表示算式, 树叶表示参加运算的数, 分支点上放运算符, 并将被减数(被除数) 放在左子树上, 所得 2 元树如图 9.16 所示.

图　9.16

用前序行遍法访问此树, 得波兰符号表示法为

$$- * * + abc + de - f * gh.$$

用后序行遍法访问此树, 得逆波兰符号表示法为

$$ab + c * de + * fgh * - - .$$

第 10 章　组合分析初步

内 容 提 要

1. 加法法则与乘法法则

加法法则　如果事件 A 有 p 种产生的方式,事件 B 有 q 种产生的方式,则事件“A 或 B”有 $p+q$ 种产生的方式.

乘法法则　如果事件 A 有 p 种产生的方式,事件 B 有 q 种产生的方式,则事件“A 与 B”有 pq 种产生的方式.

2. 排列与组合的定义

设 S 为 n 元集. 从 S 中有序选取的 r 个元素叫做 S 的一个 r 排列,不同排列的总数记作 P_n^r. 如果 $r=n$,则称这个排列为 S 的全排列,简称为 S 的排列.

设 S 为 n 元集,从 S 中无序选取的 r 个元素叫做 S 的一个 r 组合,不同组合的总数记作 C_n^r.

集合 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$ 叫做多重集,其中 n_i 表示元素 a_i 在 S 中出现的次数,称为 a_i 的重复度. 通常 $1\leq n_i\leq\infty$, $i=1,2,\cdots k$. 当 $n_i=\infty$ 时,表示 S 中含有足够多的 a_i 以供选取.

从多重集 S 中有序选取的 r 个元素叫做 S 的一个 r 排列. 当 $r=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 时,称为 S 的全排列,也叫做 S 的排列.

从多重集 S 中无序选取的 r 个元素,也就是 S 的一个 r 子多重集,叫做 S 的一个 r 组合.

3. 排列组合的基本公式

(1) 集合的排列组合公式

令 $n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$, 规定 $0!=1$.

$$P_n^r=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & r\leq n,\\ 0 & r>n.\end{cases}$$

r 环排列数为 $\dfrac{P_n^r}{r}$.

$$C_n^r=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!} & r\leq n,\\ 0 & r>n.\end{cases}$$

$$C_n^r=C_n^{n-r}.$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

(2) 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$, 令 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$. 且将 S 的 r 排列数与 r 组合数分别记作 N_p 与 N_c.

$$N_p=\begin{cases} k^r & r<n \text{ 且所有的 } n_i\geq r \\ \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} & r=n \\ 0 & r>n, \end{cases}$$

$$N_c=\begin{cases} C_{k+r-1}^r & r<n \text{ 且所有的 } n_i\geq r \\ 1 & r=n \\ 0 & r>n. \end{cases}$$

上面公式中的 $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$ 可简记为 $\dbinom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}$, 如果限定多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_k\}$, $r\geq k$, 且 S 中每种元素在 r 组合中至少出现一次, 则 S 的 r 组合数是 C_{r-1}^{k-1}.

习　　题

题 10.1～10.5 的要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

10.1　某产品加工需要 1, 2, 3, 4, 5 道工序. 那么安排这些加工工序共有 $\boxed{A}$ 种方法. 若工序 1 必须先加工, 则有 $\boxed{B}$ 种方法. 若工序 4 不能放在最后加工, 则有 $\boxed{C}$ 种方法. 若工序 3 必须紧跟在工序 2 的后边, 则有 $\boxed{D}$ 种方法. 若工序 3 必须在工序 5 的前边, 则有 $\boxed{E}$ 种方法.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 6; ② 12; ③24; ④ 30; ⑤ 48; ⑥ 60; ⑦ 80; ⑧ 96; ⑨ 100; ⑩ 120.

10.2　100 件产品, 从其中任意抽出 3 件共有 $\boxed{A}$ 种方法. 如果 100 件产品中有 2 件次品, 则抽出的产品中恰好有 2 件次品的有 $\boxed{B}$ 种方法, 至少有 1 件次品的有 $\boxed{C}$ 种方法, 恰好有 1 件次品的有 $\boxed{D}$ 种方法, 没有次品的有 $\boxed{E}$ 种方法.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 1; ② 100; ③ 98; ④ 4753; ⑤ 9506; ⑥ 9604; ⑦ 152096; ⑧ 156947;

⑨ 161700; ⑩ 以上答案都不对.

10.3　从整数 1, 2, ⋯, 50 中选出 2 个数, 共有 $\boxed{A}$ 种方法. 若这两个数之和是偶数, 则有 $\boxed{B}$ 种方法. 若其和为奇数, 则有 $\boxed{C}$ 种方法. 若其差等于 7, 则有 $\boxed{D}$ 种方法. 若其差小于等于 7, 则有 $\boxed{E}$ 种方法.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 43; ② 100; ③ 300; ④ 322; ⑤ 600; ⑥ 625; ⑦ 672; ⑧ 1200; ⑨ 1225;

⑩ 以上答案都不对.

10.4　书架上有 9 本不同的书，其中 4 本是红皮的，5 本是白皮的，则

(1) 9 本书的排列有 $\boxed{A}$ 种方法.

(2) 若白皮书必须排在一起，则有 $\boxed{B}$ 种方法.

(3) 若白皮书排在一起，红皮书也排在一起，则有 $\boxed{C}$ 种方法.

(4) 若所有的白皮书必须排在红皮书的前边，则有 $\boxed{D}$ 种方法.

(5) 若红皮书与白皮书必须相间，则有 $\boxed{E}$ 种方法.

供选择的答案

A, B, C, D, E:

① 576; ② 1152; ③ 1440; ④ 2880; ⑤ 5760; ⑥ 7200; ⑦ 14400; ⑧ 28800;

⑨ 362880; ⑩ 以上答案都不对.

10.5　从去掉大小王的 52 张扑克牌中任意选出 5 张牌. 则有 $\boxed{A}$ 种方法.

(1) 如果其中含有 4 张 K，则有 $\boxed{B}$ 种方法.

(2) 如果这 5 张牌的点数恰好是连续分布的，例如，9, 8, 7, 6, 5，那么有 $\boxed{C}$ 种方法.

(3) 如果这 5 张牌是同种花色的，则有 $\boxed{D}$ 种方法.

(4) 如果这 5 张牌的点数都不相同，则有 $\boxed{E}$ 种方法.

供选择的答案

A: ① P_{52}^{5}; ② C_{52}^{5}.

B, C, D, E:

③ 48; ④ 196; ⑤ 1024; ⑥ 1287; ⑦ 5148; ⑧ 10240; ⑨ 1317888;

⑩ 以上数字都不对.

10.6　(1) 15 名篮球队员被分到 A, B, C 三个组，使得每个组有 5 名运动员，那么有多少种方法?

(2) 15 名篮球队员被分成三个组，使得每个组有 5 名运动员，那么有多少种方法?

10.7　从整数 1, 2, …, 100 中选出 3 个数，使得它们的和正好被 4 整除，有多少种方法?

10.8　有相同的红球 4 个，黄球 3 个，白球 3 个，如果把它们排成一条直线，则有多少种方法?

10.9　从 0, 1, 2 三个数字中可重复地选择 n 个数字排列，有多少种排法? 若不允许相邻位置的数字相同又有多少种排法?

10.10　从集合 $\{a_1, \cdots, a_9\}$ 中无序选取 4 个元素，求

(1) a_1, a_2, a_3 中至多选取其一的方法数.

(2) a_1, a_2, a_3 中不能同时选取 2 个的方法数.

(3) a_1, a_2, a_3 中不能同时选取 3 个且 a_4 和 a_5 或者不取或者全取的方法数.

10.11　多重集合 $\{5 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c, 1 \cdot d, 1 \cdot e\}$ 中的全体元素构成字母序列，求其中

(1) 任何 2 个 a 都不相邻的序列数.

(2) b, c, d, e 中任何 2 个字母不相邻的序列数.

10.12　求满足不等式 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$ 的正整数解的个数.

10.13　求多重集 $S=\{3\cdot a, 4\cdot b, 2\cdot c\}$中的所有元素构成的,且同类字母的全体不能相邻的排列数.例如排列 aabbbacbc 符合要求,而排列 abbbbcaac 不符合要求.

10.14　设 A 为 n 元集.问

(1) A 上有多少个不同的二元关系?其中又有多少个自反关系、反自反关系、对称关系、反对称关系?有多少对称的同时又是反对称的关系?

(2) 有多少个从 A 到 A 的函数?其中有多少个双射函数?

(3) 有多少个 A 上的二元运算和一元运算?

10.15　一个商店出售 20 种冰激凌.一个顾客买 4 盒冰激凌,问有多少种选法?如果 4 盒中只有 3 种冰激凌,问有多少种选法?

10.16　有 3 类明信片,分别是 3,4,5 张.把它们全部送给 5 个朋友(允许有的人得到 0 张),问有多少种不同的方式?

10.17　有多少种方法把 $2n+1$ 个苹果分给 3 个孩子,使得任两个孩子的苹果数加在一起比第 3 个孩子的苹果多?

10.18　有 3 只蓝球,2 只红球,2 只黄球排成一排。若要求黄球不相邻,问有多少种排法?

10.19　由 2 个 1,3 个 2,2 个 3 组成 7 位数,要求在这些数中不出现连续的 2 个 1、连续的 3 个 2 和连续的 2 个 3,问这样的 7 位数有多少个?

10.20　在空间直角坐标系中如果一个点的 x, y, z 坐标都是整数,就称这个点为整点.求由平面 $x+y+z=n$ 和 x 平面、y 平面、z 平面所围成区域(包括围成区域的平面在内)的整点个数,这里的 n 是给定的正整数.

10.21　求以凸 n 边形的顶点作为顶点,以 n 边形内部的对角线作为边的三角形有多少个?

10.22　设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, $f:N\to N$.

(1) 如果 f 是单调递增的,问不同的 f 有多少个?

(2) 如果 f 是严格单调函数,问不同的 f 有多少个?

10.23　从$\{1,2,\cdots,9\}$中选取不同的数字构成 7 位数.如果 5 和 6 不相邻,则有多少个不同的 7 位数?

10.24　在 1 到 1000 之间(包括 1 和 1000 在内)有多少个整数其各位数字之和小于 7?

习 题 解 答

组合计数的公式不难理解,但应用起来却很灵活,如果考虑得不细致就容易出错.在具体给出习题解答以前先就基本组合计数问题的解题技巧做一点介绍.

1.组合问题的"一一对应"

先看一个简单的例子.

设有 100 个人参加乒乓球比赛,比赛采用淘汰制.如果某人在一场比赛中输了,就被淘汰出去,而不能再进入下一轮的比赛,问至少需要进行多少场比赛才能决出冠军?

一种自然的想法是先将 100 人分成 50 组, 第 1 轮进行 50 场比赛, 取胜的人进入第 2 轮. 第 2 轮须安排 25 场比赛. 那么第 3 轮须安排 12 场比赛, 1 人轮空; 第 4 轮须安排 6 场比赛, 仍旧有 1 人轮空. 类似地, 第 5 轮 3 场, 第 6 轮 2 场, 到第 7 轮 1 场决出冠军. 总共需进行

$$50+25+12+6+3+2+1=99$$

场比赛. 能不能用少于 99 场的比赛来决出冠军呢? 不能! 我们换一个角度考虑问题. 100 名选手中只能产生一个冠军, 因此, 必须经过比赛淘汰掉 99 个选手. 而每一场比赛恰好淘汰掉 1 名选手. 比赛与淘汰的选手是一一对应的, 因此为淘汰 99 名选手至少要举行 99 场比赛.

这种考虑问题的方法就是“一一对应”的方法, 利用这种方法往往会收到意想不到的结果. 通常的作法是把一个新的组合计数问题与某个已知的组合计数模型之间建立一一对应的联系, 然后直接利用已知计数模型的公式或结果求解.

常用的组合计数模型有以下两个:

(1) **选取模型**　这种选取模型可分成 4 个子类: n 元集的有序或无序选取; 多重集的有序或无序选取. 它们分别对应于集合或多重集的排列组合, 相应的公式已经在本章的第一节中给出. 其中只有当多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2\cdots, n_k\cdot a_k\}$中的某个重复数 $n_i<r$ 时, 不存在相应的排列组合公式, 在这种情况下只能用其他的组合计数方法求解.

(2) **不定方程的模型**　考虑方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

$$x_i\in N,\quad i=1,2,\cdots,k$$

的解的个数, 这也是典型的组合问题, 结果为 C_{k+r-1}^r. 这个计数问题与多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$的 r 组合数问题是一一对应的, 因为 S 的任何一个 r 组合就是 S 的子多重集$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2,\cdots, x_k\cdot a_k\}$, 其中 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$, 且 $x_i\in N$, $i=1,2,\cdots,k$.

可以把这个模型做一点推广. 考虑下面的方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

$$l_i\leq x_i, x_i\in N\quad i=1,2,\cdots,k$$

的解的计数问题. 这里的 x_i 至少要等于某个正整数 l_i. 可以通过变换将这类问题转变成前面的不定方程问题求解. 例如, 在方程

$$x_1+x_2+x_3=15$$

$$1\leq x_1, 2\leq x_2, 2\leq x_3, x_1, x_2, x_3\in N$$

中, 令 $x_1'=x_1-1, x_2'=x_2-2, x_3'=x_3-2$, 得到方程

$$x_1'+x_2'+x_3'=10$$

$$x_1', x_2', x_3'\in N.$$

显然这两个不定方程的解是一一对应的.

除了这两个组合计数模型以外, 还有许多其他的计数模型. 限于篇幅, 这里不再介绍. 希望读者在学习过程中不断归纳、积累. 掌握的组合计数模型越多, 解题的方法就越多, 思路也就更加灵活.

2. **加法法则与乘法法则**

加法法则与乘法法则是组合计数的基本原则,在许多问题中有着广泛的应用. 两个原则的叙述非常简单,但在使用时要注意它们的前提条件和区别.

使用加法法则的前提条件是“产生的方式不能重叠”,即同一种产生方式只能属于一个事件. 如果把每个事件的产生方式作为元素构成集合,那么任意两个集合都是不交的. 因此,所有产生方式的总数是各类产生方式数之和. 而乘法法则的前提条件是“产生方式彼此独立”,即不同事件的产生方式之间互相没有影响,各种事件的产生方式可以任意选取,而不会受到其他事件产生方式的干扰.

加法法则与乘法法则的使用是有区别的. 加法法则用于分类选取,而乘法法则用于分步选取. 通常在对产生方式进行计数时,先根据不同的特征将所有的方式划分成若干类,当每一类的方式数都得到以后,通过相加求得最终结果,这就是分类选取,对应于加法法则. 而在计数每一类选取的方式时,往往要经过几步选择才能完成. 比如说,选择一条从 A 经过 B, C,最终到达 D 的道路就需三步: A→B, B→C, C→D. 如果缺少其中的任何一步都不能得到一种完整的选法,而不同步的选法是相互独立的. 这种分步选取恰恰对应了乘法法则. 分类选取的每一类计数都是满足某种特征的最终选法,而分步选取的每一步计数只是计数了构成整个选法的一系列选择中的一步选择.

在处理实际选取问题时经常将加法法则、乘法法则与简单的排列组合公式结合起来使用. 对于初学者来说为了使结果更可靠,尽量从多种角度分析问题和求解问题. 如果使用不同的方法能得到相同的结果,这种结果就更为可信.

下面是本章习题的解答.

10.1　A: ⑩; B: ③; C: ⑧; D: ③; E: ⑥.

分析　这是一个从含 5 道工序的集合中进行有序选取的问题. 如果不加任何限制地选择 5 道工序,方法数为

$$P_5^5 = 5! = 120.$$

如果工序 1 必须先加工,则方法数是后 4 道工序的排列数 P_4^4. 若工序 4 不能放在最后加工,则总方法数为

$$P_5^5 - P_4^4 = 5! - 4! = 96.$$

这里的 P_4^4 表示工序 4 放在最后加工的方法数. 换一个角度考虑问题,可以将所有的选法按工序 4 分别放在第 1、第 2、第 3 和第 4 道工序进行分类. 根据加法法则有

$$P_4^4 + P_4^4 + P_4^4 + P_4^4 = 4P_4^4 = 96$$

种方法. 两个结果完全一样. 若工序 3 必须紧跟在工序 2 的后边,选法数也是 P_4^4,因为这时可将工序 2 和工序 3 看成一个整体与其他的工序进行排列. 解决以上问题的组合模型是选取模型,公式是加法法则和基本的排列组合公式.

对于本题的最后一问,如果也采取分类选取的方法就很麻烦. 一种分类方法是: 工序 3 排在第 1 位,有 $P_4^4 = 24$ 种方法; 工序 3 排在第 2 位,有 $P_4^4 - P_3^3 = 24 - 6 = 18$ 种方法; 工序 3 排在第 3 位有 $2P_3^3 = 2 \times 6 = 12$ 种方法; 工序 3 排在第 4 位有 $P_3^3 = 6$ 种方法. 由加法法则,总选法数是 $24 + 18 + 12 + 6 = 60$. 如果用一一对应的方法求解就很方便. 观察到工序 3 排在工序 5 前边的选法与工序 5 排在工序 3 前边的选法是一一对应的,故所求的选法数占总选法数的一半,结果得 60.

10.2　A: ⑨; B: ③; C: ⑥; D: ⑤; E: ⑦.

分析　这里的问题是一个无序选取的问题. 从 100 件产品中任意抽出 3 件, 有 $C_{100}^3=161\,700$种方法, 其中恰有 2 件次品的方法有 $C_{98}^1=98$ 种方法. 为确定至少有 1 件次品的方法有两个途径. 一是确定无次品的方法数, 然后从总方法数减去这种方法数, 即 $C_{100}^3-C_{98}^3=9604$. 二是进行分类选取, 恰有 1 件次品的方法数是 $2C_{98}^2$, 恰有 2 件次品的方法数是 C_{98}^1, 两项相加得 $2C_{98}^2+C_{98}^1=9604$. 两种途径结果一样.

10.3　A: ⑨; B: ⑤; C: ⑥; D: ①; E: ④.

分析　将$\{1,2,\cdots,50\}$划分成两个子集, 其中 A 是奇数构成的子集, B 是偶数构成的子集. 若两个数之和为偶数, 则它们必同时取自 A 或同时取自 B. 由加法法则方法数是 $2C_{25}^2=600$. 若两个数之和为奇数, 它们只能一个取自 A, 而另一个取自 B. 由乘法法则有 $C_{25}^1C_{25}^1=625$ 种方法. 若两个数之差等于 7, 则这两个数只能按下述方式选取: 1 和 8, 2 和 9, 3 和 10, …, 43 和 50. 共有 43 种方式. 对于两个数之差小于等于 7 的选法, 按照其差分别为 1, 2, …, 7 进行分类, 对应各类的选法数是 49, 48, …, 43. 由加法法则, 总的方法有 $49+48+\cdots+43=322$ 种.

10.4　A: ⑨; B: ⑦; C: ⑤; D: ④; E: ④.

分析　这道题是典型的分步选取问题. 由于选取是有序的, 在有些步的计数时会涉及到集合的排列公式.

9 本书的排列有 $9!=362880$ 种方法. 为了保证白皮书排在一起, 可以分两步做: 先将所有的白皮书进行排列, 然后将排好的白皮书作为一个整体再与剩下的红皮书一起排列. 由乘法法则, 这种排列有 $5!\cdot 5!=14400$ 种方法. 类似地分析可以知道, 白皮书排在一起且红皮书也排在一起的方法数是 $2\cdot 5!\cdot 4!=5760$, 白皮书必须排在红皮书前边的方法数是 $5!\cdot 4!=2880$. 最后, 对于红皮书与白皮书必须相间的排法可分两步构成, 先将 5 本白皮书排好作为格子的分界, 然后将 4 本红皮书放入 4 个格子, 所求方法数是 $5!\cdot 4!=2880$.

10.5　A: ②; B: ③; C: ⑧; D: ⑦; E: ⑨.

分析　从 52 张牌中任选 5 张牌的方法数是 C_{52}^5.

(1) 若其中含 4 张 K, 剩下的 1 张从其他 48 张中选取, 有 48 种方法.

(2) 若 5 张牌点数连续分布, 点数最小的牌可以是 A, 2, …, 10, 共 10 种可能. 对于每一种点的分布方案, 每张牌可以取 4 种花色. 根据加法法则和乘法法则有 $10\cdot 4^5=10240$ 种方法.

(3) 若 5 张牌是同花色的, 按照花色的不同可将选法分成 4 类, 针对其中一种选定的花色又可以从 13 张牌中任取 5 张, 因此, 所求的选法有 $4C_{13}^5=5148$ 种.

(4) 若 5 张牌的点数都不相同, 则点数有 C_{13}^5种分配的方案. 针对其中任何一种分配方案, 每种点数的牌又可以有 4 种花色的选择, 故所求的方法数是 $C_{13}^5\cdot 4^5=1317888$.

10.6　(1) $C_{15}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_5^5=756756$.

(2) $\dfrac{1}{3!}C_{15}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_5^5=126126$.

10.7　把 100 个数按除以 4 的余数是 0, 1, 2, 3 分成 4 组, 分别记作 A, B, C, D. 则所

求的选法可分类如下:

3 个数同时取自 A: C_{25}^3.

2 个数取自 B, 1 个数取自 C: $C_{25}^2 \cdot C_{25}^1$.

2 个数取自 C, 1 个数取自 A: $C_{25}^2 \cdot C_{25}^1$.

2 个数取自 D, 1 个数取自 C: $C_{25}^2 \cdot C_{25}^1$.

A, B, D 每组各取 1 个: $C_{25}^1 \cdot C_{25}^1 \cdot C_{25}^1$.

由加法法则所求方法数

$$N = C_{25}^3 + 3C_{25}^2 \text{¡¤} C_{25}^1 + (C_{25}^1)^3 = 40425.$$

10.8 令 $S = \{4 \cdot 红球, 3 \cdot 黄球, 3 \cdot 白球\}$, 则 S 的全排列数为 $\dfrac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!}$.

10.9 在排列中有 n 位. 如果不加任何限制, 每一位都有 3 种选法, 不同的排列有 3^n 种. 如果要求相邻的数字不同, 那么第 1 位有 3 种选法, 从第 2 位到第 n 位每位只有 2 种选法, 所以, 不同的排列有 $3 \cdot 2^{n-1}$ 种.

10.10 (1) 将所求选法分类如下:

a_1, a_2, a_3 中恰选 1 个: $3C_6^3$.

a_1, a_2, a_3 全不选: C_6^4.

$N_1 = 3C_6^3 + C_6^4 = 75$.

(2) 将所求选法分类如下:

a_1, a_2, a_3 中至多选 1 个: 75.

a_1, a_2, a_3 全部选中: C_6^1.

$N_2 = 75 + 6 = 81$.

(3) 将所求选法分类如下:

a_4, a_5 全取(必然 a_1, a_2, a_3 不能全取): C_7^2.

a_4, a_5 不取, 这类选法又划分为两个子类:

a_1, a_2, a_3 全取: C_4^1.

a_1, a_2, a_3 不全取: $C_7^4 - C_4^1$.

$N_3 = C_7^2 + (C_7^4 - C_4^1) = 21 + 31 = 52$.

10.11 该多重集合 5 个 a 和 4 个其他的元素.

(1) 若没有 2 个 a 相邻, 必须用其他 4 个元素作为格子分界将 5 个 a 隔开. 构成格子的方法数为 4!, 而放入 a 的方法只有 1 种, 故结果是 $4! = 24$.

(2) 方法 1: 先放好 5 个 a 有 1 种方法, 将 5 个 a 作为格子分界构成 6 个格子, 然后从这 6 个格子中选 4 个放入 b, c, d, e. 故所求方法数为 $P_6^4 = 360$.

方法 2: 先放好 b, c, d 和 e, 有 4! 种方法, 然后用 a 将 b, c, d, e 的排列隔开. 为了不使 b, c, d, e 中的任何字母相邻, 必须在每两个字母间插入 1 个 a, 这样需插入 3 个 a. 剩下的 2 个 a 可以放在 b, c, d, e 之间的 3 个位置, 也可放在 b, c, d, e 的前边或后边, 每个 a 有 5 种放法. 所以, 共有 25 种放 a 的方法. 由乘法法则, 所求方法数是 $25 \cdot 4! = 600$.

10.12 方程 $x_1 + x_2 + x_3 = r (r \geq 3)$ 的正整数解的个数是 $C_{r-1}^{3-1} = C_{r-1}^2$. 令 $r = 3, 4, 5, 6$, 并将所得结果求和, 即是所求的方法数.

$$N = C_{3-1}^2 + C_{4-1}^2 + C_{5-1}^2 + C_{6-1}^2 = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2$$
$$= 1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

10.13　多重集 S 的全排列数为 $\binom{9}{3\ 4\ 2}$，令所有这样的排列构成集合 T. 如下构造 T 的子集:

$$T_1 = \{x \mid x \in T \text{ 且 } x \text{ 中含有连续的 } 3 \text{ 个 } a\},$$
$$T_2 = \{x \mid x \in T \text{ 且 } x \text{ 中含有连续的 } 4 \text{ 个 } b\},$$
$$T_3 = \{x \mid x \in T \text{ 且 } x \text{ 中含有连续的 } 2 \text{ 个 } c\}.$$

为了计数这些子集的元素数, 可将连续的字母看成一个大字母, 从而有

$$x \in T_1 \Leftrightarrow x \text{ 为}\{1\cdot a, 4\cdot b, 2\cdot c\}\text{ 的全排列},$$
$$x \in T_2 \Leftrightarrow x \text{ 为}\{3\cdot a, 1\cdot b, 2\cdot c\}\text{ 的全排列},$$
$$x \in T_3 \Leftrightarrow x \text{ 为}\{3\cdot a, 4\cdot b, 1\cdot c\}\text{ 的全排列}.$$

根据相应的计数公式有

$$|T_1| = \binom{7}{1\ 4\ 2},\ |T_2| = \binom{6}{3\ 1\ 2},\ |T_3| = \binom{8}{3\ 4\ 1}.$$

类似地分析可得

$$|T_1 \cap T_2| = \binom{4}{1\ 1\ 2},\ |T_1 \cap T_3| = \binom{6}{1\ 4\ 1},\ |T_2 \cap T_3| = \binom{5}{3\ 1\ 1}.$$
$$|T_1 \cap T_2 \cap T_3| = \binom{3}{1\ 1\ 1}.$$

由第 3 章的包含排斥原理有

$$\begin{aligned}
|\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \overline{T_3}| &= |T| - (|T_1| + |T_2| + |T_3|) \\
&\quad + (|T_1 \cap T_2| + |T_1 \cap T_3| + |T_2 \cap T_3|) - |T_1 \cap T_2 \cap T_3| \\
&= \binom{9}{3\ 4\ 2} - \binom{7}{1\ 4\ 2} + \binom{6}{3\ 1\ 2} + \binom{8}{3\ 4\ 1} \\
&\quad + \binom{4}{1\ 1\ 2} + \binom{6}{1\ 4\ 1} + \binom{5}{3\ 1\ 1} - \binom{3}{1\ 1\ 1} \\
&= \frac{9!}{3!4!2!} - \frac{7!}{4!2!} + \frac{6!}{3!2!} + \frac{8!}{3!4!} + \frac{4!}{2!} + \frac{6!}{4!} + \frac{5!}{3!} - \frac{3!}{1!} \\
&= 871.
\end{aligned}$$

10.14　(1) A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系, 其中有 $4^{C_n^2}$ 个不同的自反关系, 有 $4^{C_n^2}$ 个不同的反自反关系, 有 $2^{C_n^2+n}$ 个不同的对称关系, 有 $2^n \cdot 3^{C_n^2}$ 个不同的反对称关系, 有 2^n 个不同的对称且反对称的关系.

(2) 存在有 n^n 个不同的从 A 到 A 的函数, 其中有 $n!$ 个双射函数.

(3) 存在有 n^{n^2} 个 A 上的二元运算, 有 n^n 个 A 上的一元运算.

分析 (1)在关系图中关系的性质取决于环和边的选择. 自反关系图中每个结点都有环, 只有 1 种加环的方法. 再考虑边, 对任意结点 v_i, v_j, $i\neq j$, 有 4 种加边的方法: $v_i\to v_j$, $v_j\to v_i$, v_i 和 v_j 有一对方向相反的边, v_i 与 v_j 之间没有边. 任何一对结点都有 4 种方式, C_n^2 对结点则有 $4^{C_n^2}$种加边的方法. 综合考虑加环和加边的方法, 由乘法法则应该是 $1\cdot 4^{C_n^2}=4^{C_n^2}$种. 反自反关系和自反关系之间存在着一一对应, 所以, 也有 $4^{C_n^2}$种不同的反自反关系.

对称关系的每个结点可以有环, 也可以没有环, 有 2 种加环的方法, 因而 n 个结点有 2^n 种加环的方法. 任何一对结点可以有 2 种加边的方法(无边或者一对边), 因此, 加边的方法有 $2^{C_n^2}$种. 根据乘法法则有 $2^n\cdot 2^{C_n^2}=2^{C_n^2+n}$个不同的对称关系. 类似地分析反对称关系, 加边的方法有 3 种(无边或者单向边), 从而可知有 $2^n\cdot 3^{C_n^2}$个不同的反对称关系. 同时具有对称和反对称性的关系图中除了环以外没有其他的边, 环的选择有 2^n 种, 因此, 存在 2^n 个不同的对称并且反对称的关系.

(2) 所有的函数 $f: A\to A$ 构成集合 A^A, 而 $|A^A|=n^n$, 所以, 有 n^n 个从 A 到 A 的函数. 任何双射函数都是 A 上的 n 元置换. 每个置换与 n 元集的一个排列对应, 所以, 有 $n!$ 个双射函数.

(3) 任何函数 $f: A\times A\to A$ 就是 A 上的二元运算, 所有这样的函数构成集合 $A^{A\times A}$, 而 $|A^{A\times A}|=n^{n^2}$, 所以, 存在 n^{n^2}个 A 上的二元运算. 而 A 上的一元运算是一个从 A 到 A 的函数, 因而有 n^n 个 A 上的一元运算.

10.15 设买的每种冰激凌数量分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_{20}$, 则有方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_{20}=4$$
$$x_i\in N,\ i=1,2,\cdots,20.$$

该方程的解的个数就是所求的选法数. 这个数为 $C_{20+4-1}^4=C_{23}^4=8855$.

如果 4 盒中只有 3 种冰激凌, 那么必是其中的一种是 2 盒, 另外两种各 1 盒. 第 1 步先确定是哪 3 种, 有 C_{20}^3种选择; 第 2 步从这 3 种中挑出买 2 盒的 1 种, 有 C_3^1 种方法, 根据乘法法则所求选法数是 $C_{20}^3\cdot C_3^1=3420$.

10.16 考虑第 1 种明信片, 5 个朋友所得到的明信片数分别记为 $x_1, x_2, \cdots, x_5$, 其和为 3, 因而得到不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_5=3$$
$$x_i\in N.$$

该方程的解的个数是将第 1 种明信片送 5 个朋友的方法数, 结果为 $C_{5+3-1}^3=C_7^3$.

类似地处理后两种明信片, 送给朋友的方法数分别为 C_8^4 和 C_9^5. 综合上述, 使用乘法法则, 所求的方式有 $C_7^3\cdot C_8^4\cdot C_9^5=35\times 70\times 126=308700$ 种.

分析 把这个问题推广如下: 有 k 类明信片, A_i 表示第 i 类明信片的张数, $i=1,2,\cdots,k$. 把这些明信片全部送给 n 个朋友. 问有多少种方式? 和本题的处理类似, 第 i 类明信片送给 n 个朋友的方式有 $C_{A_i+n-1}^{A_i}$种, 那么 k 类明信片的方式有 $\prod_{i=1}^{k}C_{A_i+n-1}^{A_i}$ 种.

10.17 设 x_1, x_2, x_3 分别为 3 个孩子所得到的苹果数. 根据题目条件可得到不定方程

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2n+1 \\ x_1+x_2>x_3 \\ x_1+x_3>x_2 \\ x_2+x_3>x_1 \\ x_1,x_2,x_3\in \mathbf{N}. \end{cases}$$

要使得 x_1,x_2,x_3 中任何两个相加都大于第 3 个必须满足 $x_1,x_2,x_3\leq n$ 的条件, 原方程可变形为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2n+1 \\ x_1,x_2,x_3\leq n \\ x_1,x_2,x_3\in \mathbf{N}. \end{cases}$$

回顾不定方程的组合模型, 无论是基本模型, 还是推广模型都没有这种形式. 因此, 我们还需要进一步把问题转变成已有的模型. 将所有的方法划分成下面 4 类:

$$\begin{array}{llll} x_1\geq n+1, & x_2\leq n, & x_3\leq n, & \text{方法数 } N_1 \\ x_1\leq n, & x_2\geq n+1, & x_3\leq n, & \text{方法数 } N_2 \\ x_1\leq n, & x_2\leq n, & x_3\geq n+1, & \text{方法数 } N_3 \\ x_1,\ x_2,x_3\leq n, & & & \text{方法数 } N_4 \end{array}$$

容易看出这 4 类中的任何两类都是不重叠的, 且 $N_1=N_2=N_3$, 而 N_4 就是所求的结果. 设所有的分法总数为 N_0, 则 $N_4=N_0-3N_1$. 利用基本模型求得

$$N_0=C_{2n+1+3-1}^{2n+1}=C_{2n+3}^{2}.$$

再利用推广的模型, 求得

$$N_1=C_{n+3-1}^{n}=C_{n+2}^{2}.$$

从而得到最终结果 $N_4=C_{2n+3}^{2}-3C_{n+2}^{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$.

10.18　令 $S=\{3\cdot 蓝球, 2\cdot 红球, 2\cdot 黄球\}$, 如果不加任何限制, S 中元素的全排列方法数是 $\binom{7}{3\ 2\ 2}$. 其中黄球相邻的排列与多重集 $\{3\cdot 蓝球, 2\cdot 红球, 1\cdot 黄球\}$ 的排列是一一对应的, 有 $\binom{6}{3\ 2\ 1}$ 种方法. 因此, 所求的排法数是

$$\binom{7}{3\ 2\ 2}-\binom{6}{3\ 2\ 1}=\frac{7!}{3!\,2!\,2!}-\frac{6!}{3!\,2!}=150.$$

10.19　设多重集 $S=\{2\cdot 1, 3\cdot 2, 2\cdot 3\}$. 令 A 是 S 的所有全排列构成的集合. 如下构造 A 的子集:

$$A_1=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 中含连续的 2 个 } 1\},$$
$$A_2=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 中含连续的 3 个 } 2\},$$
$$A_3=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 中含连续的 2 个 } 3\},$$

则

$$|A|=\binom{7}{2\ 3\ 2},\qquad |A_1|=\binom{6}{1\ 3\ 2},$$

$$|A_2| = \binom{5}{2\ 1\ 2}, \qquad |A_3| = \binom{6}{2\ 3\ 1},$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4}{1\ 1\ 2}, \qquad |A_1 \cap A_3| = \binom{5}{1\ 3\ 1},$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{4}{2\ 1\ 1}, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{3}{1\ 1\ 1}.$$

由包含排斥原理得

$$\begin{aligned}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= \binom{7}{2\ 3\ 2} - \binom{6}{1\ 3\ 2} + \binom{5}{2\ 1\ 2} + \binom{6}{2\ 3\ 1} \\ &\quad + \binom{4}{1\ 1\ 2} + \binom{5}{1\ 3\ 1} + \binom{4}{2\ 1\ 1} - \binom{3}{1\ 1\ 1} \\ &= 210 - (60 + 30 + 60) + (12 + 20 + 12) - 6 \\ &= 98.\end{aligned}$$

10.20 **考虑平面** $x + y + z = i$ **上的整点个数** N_i, $i = 0, 1, \cdots, n$. **不难看出, 所求区域内的整点个数是** $\sum_{i=0}^{n} N_i$. **为求得** N_i, **只需找到方程**

$$\begin{cases} x + y + z = i \\ x, y, z \in \mathbf{N} \end{cases}$$

的解的个数. 由不定方程的基本模型可知 $N_i = C_{i+3-1}^{i} = C_{i+2}^{i} = C_{i+2}^{2}$. **从而得到区域内的点数为**

$$\sum_{i=0}^{n} N_i = \sum_{i=0}^{n} C_{i+2}^{2} = C_{n+3}^{3}.$$

分析　下面给出 $\sum_{i=0}^{n} C_{i+2}^{2} = C_{n+3}^{3}$ **的证明.**

由组合公式 $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ **可以得到等式**

$$C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^{r}, \quad \text{即 } C_n^{r-1} = C_{n+1}^{r} - C_n^{r}.$$

将这个等式代入 $\sum_{i=0}^{n} N_i$ **得**

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} C_{i+2}^{2} &= C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{n+2}^{2} \\ &= C_3^3 + [C_4^3 - C_3^3] + [C_5^3 - C_4^3] + \cdots + [C_{n+3}^3 - C_{n+2}^3].\end{aligned}$$

将括号去掉, 并将正负相反的项消掉, 上式只剩下一项, 即 C_{n+3}^{3}.

10.21 **方法 1: 任取定一个顶点, 比如说** v_1. **为构成所要求的三角形必须从** $v_3, v_4, \cdots, v_{n-1}$ **中选取另外两个顶点, 且这两个顶点不相邻. 从** $n-3$ **个顶点中任取两个顶点有** C_{n-3}^{2} **种方式, 其中相邻顶点的取法为** $n-4$ **种. 故以** v_1 **作为一个顶点能够构成所要求的三角形有** $C_{n-3}^{2} - (n-4) = C_{n-4}^{2}$ **个. 考虑到所有的顶点, 每个顶点都可以作为** v_1, **共可构成三角形** nC_{n-4}^{2} **个. 但其中每个三角形被重复计数 3 次. 因此, 所求的三角形为** $\dfrac{n}{3}C_{n-4}^{2} = \dfrac{1}{6}n(n$

$-4)(n-5)$ 个.

方法 2: 由 n 个结点任意组成三角形, 共有 C_n^3 种方法. 将这些三角形划分成三类:

含 1 条多边形的边: $n(n-4)$ 个;

含 2 条多边形的边: n 个;

不含多边形的边, 即所求的三角形.

由以上分析可知, 所求的三角形有

$$C_n^3 - n(n-4) - n = \frac{1}{6}n(n-4)(n-5) \text{ 个}.$$

方法 3: 设所有三角形的集合为 S. 如下定义 S 的子集:

$$A_1 = \{x \mid x \in S \text{ 且 } x \text{ 的顶点中含有 } v_1, v_2\},$$
$$A_2 = \{x \mid x \in S \text{ 且 } x \text{ 的顶点中含有 } v_2, v_3\},$$
$$\vdots$$
$$A_{n-1} = \{x \mid x \in S \text{ 且 } x \text{ 的顶点中含有 } v_{n-1}, v_n\},$$
$$A_n = \{x \mid x \in S \text{ 且 } x \text{ 的顶点中含有 } v_n, v_1\},$$

所求三角形数为 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$. 不难得到

$$|S| = C_n^3.$$
$$|A_i| = (n-2), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$
$$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} 1 & j = i+1 \\ 0 & j \neq i+1 \end{cases}, \quad 1 \le i < j \le n.$$
$$|A_n \cap A_1| = 1, \quad |A_n \cap A_j| = 0 \ (j \neq 1),$$
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0, \quad 1 \le i < j < k \le n.$$
$$\vdots$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = 0.$$
$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = C_n^3 - n(n-2) + n$$
$$= \frac{1}{6}n(n-4)(n-5).$$

10.22 (1) 请看图 10.1. 任给 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的一个单调递增函数, 可以做一条对应的折线. 以横坐标代表 x, 纵坐标代表 $f(x)$, 在图中可以得到 n 个格点: $(1, f(1))$, $(2, f(2))$, $\cdots$, $(n, f(n))$. 从 $(1, 1)$ 点出发向上做连线到 $(1, f(1))$ 点. 如果 $f(2) = f(1)$, 则继续向右连线到 $(2, f(2))$; 如果 $f(2) > f(1)$, 则由 $(1, f(1))$ 点向右经过 $(2, f(1))$ 点再向上连线到 $(2, f(2))$ 点. 按照这种方法一直将折线连到 $(n, f(n))$ 点. 若 $f(n) = n$, 就将折线向右连到 $(n+1, n)$ 点; 若 $f(n) < n$, 则向右经 $(n+1, f(n))$ 点再向上连线到 $(n+1, n)$ 点. 这样就得到一条从 $(1, 1)$ 点到 $(n+1, n)$ 点的非降路径. 不难看出, 所求的单调函数与这种非降路径之间存在着一一对应. 非降路径从 $(1, 1)$ 到 $(n+1, n)$ 需向右走 n 步, 向上走 $n-1$ 步. 不同的非降路径数

图 10.1

是从 $2n-1$ 步中选取 n 步的方法数, 即 C_{2n-1}^{n}. 从而知道所求的单调函数有 C_{2n-1}^{n} 个.

(2) 严格单调函数分为严格单调递增和严格单调递减函数两种. 若 f 为严格单调递增函数, 那么 f 应该满足 $f(1)<f(2)<\cdots<f(n)$. 而所有的函数值都取自 $\{1,2,\cdots,n\}$ 集合, 因此, 必有 $f(1)=1, f(2)=2, \cdots, f(n)=n$, 即只有一个严格单调递增函数. 同样也只有一个严格单调递减函数, 所以, N 上的严格单调函数有 2 个.

10.23 所有的 7 位数有 P_9^7 个. 下面考虑其中 5 和 6 相邻的 7 位数个数 N. 构成这样的 7 位数需先从 $\{1,2,3,4,7,8,9\}$ 中选取 5 个数字, 有 C_7^5 种选法; 将 5 和 6 排好有 2 种排法; 然后将 5 和 6 作为一个整体再与选出的其他 5 个数字进行全排列, 有 $6!$ 种排法. 根据乘法法则得

$$N = 2\cdot 6!\cdot C_7^5 = 30240.$$

$$P_9^7 - N = 181440 - 30240 = 151200.$$

所求的 7 位数有 151200 个.

10.24 先考虑 1 到 999 之间的数. 设这种数的百位、十位和个位数字分别为 x_1, x_2 和 x_3, 易见它们都是 0 到 9 之间的整数, 且不全为 0, 即

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 < 7 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \in N. \end{aligned}$$

考虑方程

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = i, \quad i = 1, 2, \cdots, 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \in N. \end{aligned}$$

的解的个数 N_i. 根据公式有

$$N_i = C_{i+3-1}^{i} = C_{i+2}^{2}.$$

那么所求的数的个数为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} N_i + 1 &= C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + C_7^2 + C_8^2 + 1 \\ &= 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 1 \\ &= 84. \end{aligned}$$

注: 上式中的 $\sum_{i=1}^{6} N_i$ 只计数了 1 到 999 之间满足要求的数. 1000 的各位数字之和小于 7, 也符合要求, 因而在 1 到 1000 之间符合要求的数应该有 $\sum_{i=1}^{6} N_i + 1$ 个.

第 11 章　形式语言和自动机初步

内 容 提 要

1. 形式语言和形式文法

字母表与字符串　字母表是一个非空的有穷集合. 由字母表 Σ 中的符号组成的有穷序列叫做字母表 Σ 上的字符串. 字符串 ω 中的符号数叫做 ω 的长度, 记作 $|\omega|$. 长度为 0 的字符串叫做空串, 记作 ε. n 个 a 组成的字符串 $aa\cdots a$ 记作 a^n.

子串、前缀与后缀　字符串 ω 中若干个连续的符号组成的字符串称作 ω 的子串. 从最左端开始的子串称作前缀. 在最右端结束的子串称作后缀.

连接　设字符串 $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, $\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_n$, 把 β 接在 α 的后面称作 α 与 β 的连接, 记作 $\alpha\beta$, 即 $\alpha\beta = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$.

语言　字母表 Σ 上的字符串全体记作 Σ^*. Σ^* 的任何子集称作字母表 Σ 上的形式语言, 简称语言.

文法　形式文法简称作文法, 它由 4 部分组成, 记作 $G = \langle V, T, S, P\rangle$, 其中 V 是有穷的变元集, 变元又叫做非终结符; T 是有穷的终结符集, $T\cap V = \varnothing$; $S\in V$ 叫做起始符; P 是有穷的产生式集, 每一个产生式形如 $\alpha\to\beta$, 这里 $\alpha, \beta\in(V\cup T)^*$ 且 $\alpha\neq\varepsilon$.

派生　设文法 $G = \langle V, T, S, P\rangle$, $u, v\in(V\cup T)^*$. 如果存在 $\xi, \eta\in(V\cup T)^*$ 和 P 中的产生式 $\alpha\to\beta$, 使得 $u = \xi\alpha\eta$, $v = \xi\beta\eta$, 即把 u 中的子串 α 改写成 β, 得到 v, 则称由 u 用文法 G 可直接派生出 v, 记作 $u\underset{G}{\Rightarrow} v$. 如果 $u = u_1\underset{G}{\Rightarrow} u_2\underset{G}{\Rightarrow}\cdots\underset{G}{\Rightarrow} u_n = v$, 则称由 u 用文法 G 可派生出 v, 记作 $u\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} v$. 当不会引起混淆时, 通常略去 $\Rightarrow$ 下的 G, 把直接派生写成 $u\Rightarrow v$, 把派生写成 $u\overset{*}{\Rightarrow} v$.

文法生成的语言　文法 $G = \langle V, T, S, P\rangle$ 生成的语言

$$L(G) = \{\omega\in T^* \mid S\overset{*}{\Rightarrow}\omega\}.$$

著名的语言学家乔姆斯基(N. Chomsky)把文法分成 4 类, 分别生成 4 个层次的语言, 称作乔姆斯基谱系. 分类如下:

0 型文法与 0 型语言　0 型文法就是文法, 又叫做短语结构文法或无限制文法. 0 型文法生成的语言叫做 0 型语言.

1 型文法(上下文有关文法)与 1 型语言(上下文有关语言)　如果文法的每一个产生式 $\alpha\to\beta$ 有 $|\beta|\geq|\alpha|$, 则称作 1 型文法, 或上下文有关文法. 如果存在 1 型文法 G 使得 $L = L(G)$ 或 $L = L(G)\cup\{\varepsilon\}$, 则称 L 是一个 1 型语言, 或上下文有关语言.

2 型文法(上下文无关文法)与 2 型语言(上下文无关语言)　如果文法中每一个产生式都形如 $A\to\alpha$, 其中 $A\in V$, 则称作 2 型文法, 或上下文无关文法. 2 型文法生成的语言称

作 2 型语言, 或上下文无关语言.

右线性文法与左线性文法　右线性文法的产生式形如 $A\to\omega B$ 或 $A\to\omega$, 左线性文法的产生式形如 $A\to B\omega$ 或 $A\to\omega$, 其中 $A, B\in V$, $\omega\in T^*$.

3 型文法(正则文法) 与 3 型语言(正则语言)　右线性文法与左线性文法统称作 3 型文法, 或正则文法. 3 型文法生成的语言称作 3 型语言, 或正则语言.

2. 有穷自动机

确定型有穷自动机(DFA) 及其接受的语言. 确定型有穷自动机简记作 DFA, 由 5 部分组成, 记作 $M=\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, 其中 Q 是有穷的状态集, Σ 是有穷的输入字母表, $\delta: Q\times\Sigma\to Q$ 是状态转移函数, $q_0\in Q$ 是初始状态, $F\subseteq Q$ 是接受状态集或终结状态集.

递归地定义函数 $\hat{\delta}: Q\times\Sigma^*\to Q$ 如下: 对每一个 $q\in Q$, $\omega\in\Sigma^*$ 和 $a\in\Sigma$,

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q,$$

$$\hat{\delta}(q, \omega a) = \delta(\hat{\delta}(q, \omega), a).$$

如果 $\hat{\delta}(q_0, \omega)\in F$, 则称 DFA M 接受 ω. M 接受的字符串的全体称作 M 接受的语言, 记作 L(M). 即

$$L(M) = \{\omega\in\Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \omega)\in F\}.$$

非确定型有穷自动机(NFA)　非确定型有穷自动机 $M=\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ 与确定型有穷自动机的区别是状态转移函数为 $\delta: Q\times\Sigma\to P(Q)$, 这里 $P(Q)$ 是 Q 的幂集.

对于 NFA, $\hat{\delta}$ 的定义如下: 对每一个 $q\in Q$, $\omega\in\Sigma^*$ 和 $a\in\Sigma$,

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\},$$

$$\hat{\delta}(q, \omega a) = \bigcup_{p\in\hat{\delta}(q, \omega)}\delta(p, a).$$

如果 $\hat{\delta}(q_0, \omega)\cap F\neq\varnothing$, 则称 NFA M 接受字符串 ω. NFA M 接受的语言

$$L(M) = \{\omega\in\Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \omega)\cap F\neq\varnothing\}$$

如果把状态 q 等同于单元集{q}, 则 DFA 是 NFA 的特殊情况. DFA 和 NFA 统称为有穷自动机, 简记作 FA.

带 ε 转移的 NFA　对 NFA 稍加推广, 不仅在读 Σ 的符号后作状态转移, 而且可以在不读任何符号(或说读空串 ε) 的情况下自动作状态转移, 即状态转移函数为 $\delta: Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\to P(Q)$, 这就是带 ε 转移的 NFA.

状态转移图　DFA 可以用状态转移图表示. 状态转移图是一个有向图, 每一个结点代表一个状态. 初始状态用一个指向该结点的箭头标明, 接受状态用双圈标明. 如果 $\delta(q, a) = q'$, 则从结点 q 到 q' 有一条弧, 并且在弧旁标明 a. NFA 的状态转移图与 DFA 的类似, 两者的区别是: 对于每一个 $q\in Q$ 和 $a\in\Sigma$, DFA 的状态转移图中恰好有一条从结点 q 出发标有符号 a 的弧, 而 NFA 的状态转移图中可以有 1 条或多条这样的弧, 也可以没有这样的弧.

3. 图灵(Turing) 机

图灵机(TM)　图灵机简记作 TM, 它是一个有序组 $M=\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, A\rangle$, 其中

Q 是有穷的状态集, Σ是有穷的输入字母表, Γ是有穷的带字母表且 $\Sigma \quad \Gamma$, $q_0 \in Q$ 是初始状态, $B \in \Gamma - \Sigma$是空白符, $A \quad Q$ 是接受状态集, δ是动作函数. δ定义在 $Q \times \Gamma$ 的一个子集上, 取值于 $\Gamma \times \{L, R\} \times Q$.

设想 TM 是由控制器、读写头及一条带组成的装置. 带被划分成两头无限的小方格序列, 每一个小方格内存放 Γ中的一个符号. 控制器处于 Q 中某个状态. 读写头扫视一个方格, 可以读取和改写这个方格的内容、向左或向右移动. 假设 M 的当前状态是 q, 读写头读到的符号是 s. 如果 $\delta(q, s) = (s', L, q')$, 则读写头把扫视的方格内的符号改写成 s', 向左移动一格, 控制器转移到状态 q'; 如果 $\delta(q, s) = (s', R, q')$, M 的动作与刚才一样, 只是读写头向右移动一格; 如果 $\delta(q, s)$没有定义, 则停机.

格局 带上的内容, 读写头扫视的位置和控制器的状态称作 TM M 的一个格局. TM 的格局可写成 $\alpha q\beta$, 其中 $q \in Q$, $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ 且 $\beta \neq \varepsilon$, 它表示带的内容为 $\alpha\beta$, 两头的其余部分均为 B, 控制器处于状态 q, 读写头扫视 β左端的第一个符号.

设当前的状态为 q, 读到的符号为 a. 如果 $\delta(q, a)$没有定义, 则称这个格局是停机格局. 当 M 进入停机格局后, M 停机, 计算结束. 如果 $q \in A$ 且为停机格局, 则称这是接受的停机格局.

计算 设 σ和 τ是两个格局, $\sigma \quad \tau$表示从格局 σ经过一步到达 τ, 并且称 τ是 σ的后继. $\sigma \ ^* \ \tau$表示从 σ经过若干步到达 τ, 即 $\sigma = \sigma \quad \sigma \quad \cdots \quad \sigma = \tau$.

TM M 的计算是一个有穷的或无穷的格局序列 $\sigma, \sigma, \cdots$, 其中对每一个 $i > 1$, σ_{-1} σ.

TM 接受的语言 设 $\omega \in \Sigma^*$, $\sigma = q_0\omega$称作关于输入 ω的初始格局. 如果 M 从初始格局 $\sigma = q_0\omega$开始的计算结束在接受的停机格局, 则称 M 接受字符串 ω, M 接受的字符串全体称作 M 接受的语言, 或 M 识别的语言, 记作 L(M). 即

$$L(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \text{存在接受的停机格局 } \sigma \text{ 使得},\ q_0\omega \ ^* \ \sigma\}.$$

递归可枚举语言(r. e. 语言) 图灵机接受的语言称作递归可枚举语言.

TM 计算的函数 TM M 计算的 m 元函数 f_M 定义如下: 任给 $\omega, \cdots, \omega_m \in \Sigma^*$, 从初始格局 $\sigma = q_0\omega B\omega B\cdots B\omega_m$ 开始, 如果计算最终停机, 设停机时删去 Σ之外的符号后带上的内容为 v, 则 $f_M(\omega, \cdots, \omega_m) = v$; 如果计算永不停机, 则 $f_M(\omega, \cdots, \omega_m)$没有定义.

部分可计算(递归)函数与可计算(递归)函数 用 N 表示自然数集. N 上的 m 元部分函数 f 是从 N^m 的某个子集到 N 的函数. 如果 f 在 N^m 上的每一点都有定义, 则称 f 是 N 上的 m 元全函数.

设 f 是 N 上的 m 元部分函数, 如果存在 TM M 以一进制方式计算 f, 即对任意的 $x_1, \cdots, x_m \in N$, 若 $f(x_1, \cdots, x_m) = y$, 则 $f_M(1^{x_1}, \cdots, 1^{x_m}) = 1^y$; 若 $f(x_1, \cdots, x_m)$没有定义, 则 $f_M(1^{x_1}, \cdots, 1^{x_m})$也没有定义, 则称 f 是部分可计算的, 或部分递归的.

部分可计算的全函数称作可计算函数, 或递归函数.

4. 主要定理

定理 11.1 L 是 0 型语言当且仅当 L 是 r. e., 换句话说, L 由文法生成当且仅当 L

被 TM 接受.

数学家和计算机科学家们普遍接受下述看法

丘奇(Church)论题 人们所说的可计算的概念就是指 TM 可计算的.

定理 11.2 对于 $i=2,1,0$, 每一个 $i+1$ 型语言都是 i 型语言, 并且这个包含关系是真的, 即存在非 $i+1$ 型的 i 型语言.

定理 11.3 设语言 L, 下述命题是等价的:

(1) L 由右线性文法生成.

(2) L 由左线性文法生成.

(3) L 被 DFA 接受.

(4) L 被 NFA 接受.

(5) L 被带 ε 转移的 NFA 接受.

习　　题

11.1 描述算术表达式的文法如下:

$$G=\langle\{E,T,F\},\{a,+,-,*,/,(,)\},E,P\rangle,$$

这里符号的含义是 E: 算术表达式, T: 项, F: 因子, a: 数或变量.

$$\begin{array}{lll} P: & E\to E+T & E\to E-T \\ & E\to T & T\to T*F \\ & T\to T/F & T\to F \\ & F\to(E) & F\to a. \end{array}$$

试给出 G 派生出下述表达式的过程:

(1) $a+a*a$; (2) $(a-a)/(a*a+a*a)$.

11.2 设文法 $G=\langle\{S\},\{a,b\},S,P\rangle$, 其中 P: $S\to aS$, $S\to Sb$, $S\to\varepsilon$ 求 $L(G)$.

11.3 设文法 $G=\langle\{S,A,B\},\{a,b,c\},S,P\rangle$,

其中 P: (1) $S\to aSAB$ (2) $S\to aAB$

(3) $BA\to AB$ (4) $aA\to ab$

(5) $bA\to bb$ (6) $bB\to bc$

(7) $cB\to cc$

求证: 对任意的 $n\geq1$, $a^nb^nc^n\in L(G)$.

11.4 在程序设计语言中, 一串以字母开头的字母和数字称作标识符. 试给出生成所有标识符的右线性文法和左线性文法.

11.5 试给出生成下述语言的右线性文法和左线性文法:

(1) $L=\{\omega\in\{0,1\}^*\mid\omega$ 中有连续的 3 个 $0\}$;

(2) $L=\{a^mb^n\mid m,n\geq1\}$.

11.6 给出生成语言 $L=\{\omega\omega^T\mid\omega\in\{0,1\}^*\}$ 的文法, 这里 ω^T 的定义如下: 若 $\omega=a_1a_2\cdots a_n$, 则 $\omega^T=a_n\cdots a_2a_1$.

11.7 设右线性文法 $G=\langle\{S,A,B,C\},\{0,1\},S,P\rangle$,

其中　P: $S\to 0S$　　$A\to 1C$　　$C\to 0C$

$S\to 1S$　　$A\to 1$　　$C\to 1C$

$S\to 1A$　　$B\to 0C$　　$C\to 0$

$S\to 0B$　　$B\to 0$　　$C\to 1$

(1) 给出 G 的状态转换图;

(2) 试构造一个与 G 等价的左线性文法.

11.8　设 FA $M=\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\rangle$, δ见表 11.1.

(1) 给出 M 的状态转换图;

(2) M 是否接受下述字符串: 01010, 00101, 01001;

(3) 求 L(M).

表　11.1

δ	0	1
q_0	q_1	q_3
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_3	q_3

11.9　设 NFA $M=\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_3\}\rangle$, 其中 δ见表 11.2.

(1) 画出 M 的状态转移图;

(2) 用根树形式给出 M 对下述 ω的计算过程中的状态转移, 并问 M 是否接受 ω?

① ω= abbcc, ② ω= ababc, ③ ω= abbca.

表　11.2

δ	a	b	c
q_0	$\{q_0, q_1\}$	ě	ě
q_1	ě	$\{q_1, q_2\}$	ě
q_2	ě	ě	$\{q_2, q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ě	ě

11.10　设带 ε转移的 NFA M 的状态转移图如图 11.1 所示, 求 L(M).

图　11.1

11.11　给出接受下述语言的 DFA:

(1) $L=\{0^n1^m \mid n, m\geq 1\}$;

(2) 含有偶数个 0 的 0, 1 字符串的全体(偶数包括 0).

11.12　给出接受下述语言的 NFA:

(1) 以 01 为后缀的 0, 1 字符串的全体;

(2) 不含子串 011 的 0, 1 字符串的全体.

11.13　给出与题 11.9 NFA 等价的 DFA.

11.14　给出与题 11.10 带 ε转移的 NFA 等价的不带 ε转移的 NFA.

11.15　给出与题 11.8 FA 等价的右线性文法和左线性文法.

11.16　给出与题 11.10 带 ε转移的 NFA 等价的右线性文法和左线性文法.

11.17　给出与题 11.7 右线性文法 G 等价的 NFA.

11.18　设图灵机 $M = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_3\} \rangle$, 其中 δ见表 11.3. 试给出 M 对下述输入的计算: (1) 11010;　(2) 01100;　(3) 01011.

表　11.3

δ	0	1	B
q_0	$(0, R, q_0)$	$(1, R, q_0)$	(B, L, q_1)
q_1	(B, L, q_2)	$(1, R, q_0)$	(B, R, q_0)
q_2	(B, R, q_3)	—	—
q_3	—	—	—

11.19　试构造出接受下述语言的图灵机:

(1) 所有 0 和 1 的个数相同的 0, 1 字符串;

(2) $\{\omega\omega^T \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$, 见题 11.6.

11.20　试构造出计算下述函数的图灵机, 采取一进制表示数.

(1) $x + y$;　　(2) $3x$.

11.21　图灵机的状态转移函数 δ可以表成有穷的五元组集合, 每个五元组(q, s, s', X, q')代表 $\delta(q, s) = (s', X, q')$, 其中 $X = L$ 或 R. 故称这种图灵机为五元图灵机. 四元图灵机的 δ可表成有穷的四元组集合, 每个四元组形如(q, s, s', q'), (q, s, L, q')或(q, s, R, q'). 在四元组中符号的含义和五元组的相同. 四元图灵机的每一个动作除转移状态外, 或者改写一个符号, 或者向左、向右移动一格. 试证明: 语言 L 被一个四元图灵机接受当且仅当 L 被一个五元图灵机接受.

以下各题从供选择的答案中选出正确的答案填入□内.

11.22　下述文法 G 的终结符集合均为{0, 1}, 起始符均为 S, 大写字母均是变元.

(1) P: $S \to 0A$　　　$S \to 1B$

$B \to 1B$　　　$B \to 0A$

$A \to 0B$　　　$A \to 1A$

$A \to 0$　　　$B \to 1$

G 是 $\boxed{A}$ 文法. 由 S $\boxed{B}$ 派生出 00010, $\boxed{C}$ 派生出 01001, $\boxed{D}$ 派生出 10000.

(2) P: $S \to 0BA$　　　$B \to A10$

$A \to 1A$　　　$A \to 0$

G 是 $\boxed{A}$ 文法. 由 S $\boxed{B}$ 派生出 00101110, $\boxed{C}$ 派生出 00010, $\boxed{D}$ 派生出 01010.

(3) P: $S \to 0ABA$　　$AB \to A0B$

$BA \to B1A$　　$A \to 1B$

$B \to 0A$　　$A \to 0$

$B \to 1$

G 是 $\boxed{A}$ 文法. 由 S $\boxed{B}$ 派生出 0101110, $\boxed{C}$ 派生出 00010, $\boxed{D}$ 派生出 01010.

(4) P: $S \to 0SAB$　　$S \to BA$

$A \to 0A$　　$A \to 0$

$B \to 1$

G 是 $\boxed{A}$ 文法. 由 S $\boxed{B}$ 派生出 00010, $\boxed{C}$ 派生出 01001, $\boxed{D}$ 派生出 10000.

供选择的答案

A: ① 0 型; ② 1 型; ③ 2 型; ④ 右线性; ⑤ 左线性.

B, C, D: ① 能; ② 不能.

11.23　图 11.2 给出 4 个有穷自动机的状态转移图. 记 M_i 的状态转移函数为 $\delta(1 \le i \le 4)$.

图　11.2

(1) $\delta(q_0, 0) = \boxed{A}$, $\delta(q_1, 1) = \boxed{B}$, M_1 读完输入 01101 后的状态为 $\boxed{C}$, M_1 接受 $\boxed{D}$ 和 $\boxed{E}$.

(2) $\delta(q_1, 0) = \boxed{A}$, $\delta(q_2, 1) = \boxed{B}$, M_2 读完输入 01010 后的状态为 $\boxed{C}$, M_2 接受 $\boxed{D}$

和$\boxed{E}$.

(3) $\delta(q_0, 0) =$ $\boxed{A}$, $\delta(q_3, 1) =$ $\boxed{B}$, M_3 读完输入 11001 后的状态为$\boxed{C}$, M_3 接受$\boxed{D}$和$\boxed{E}$.

(4) $\delta(q_1, 1) =$ $\boxed{A}$, $\delta(q_2, 0) =$ $\boxed{B}$, M_4 读完输入 01010 后的状态为$\boxed{C}$, M_4 接受$\boxed{D}$和$\boxed{E}$.

供选择的答案

A, B, C: ① q_0; ② q_1; ③ q_2; ④ q_3; ⑤ $\{q_0, q_1\}$; ⑥ $\{q_0, q_2\}$; ⑦ $\{q_0, q_3\}$; ⑧ $\{q_1, q_2\}$; ⑨ $\{q_1, q_3\}$; 0̸ $\{q_2, q_3\}$; ,? $\{q_0, q_1, q_2\}$; ,? $\{q_0, q_1, q_3\}$; ,? $\{q_0, q_2, q_3\}$; ,? $\{q_1, q_2, q_3\}$; ,? $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$; ,? ě .

注: 这里不区别 q_i 和$\{q_i\}$.

D, E: ① 000000; ② 101010; ③ 00010; ④ 1001.

11.24 设图灵机 $M = \langle \{q_i$©$0 \le i \le 5\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta$ $q_0, B, \{q_5\}\rangle$, 其中 δ见表 11.4.

表 11.4

δ	0	1	B
q_0	$(0, R, q_0)$	$(1, R, q_0)$	(B, L, q_1)
q_1	$(1, L, q_3)$	$(0, L, q_2)$	-
q_2	$(1, L, q_4)$	$(0, L, q_5)$	-
q_3	$(0, L, q_4)$	$(1, L, q_4)$	-
q_4	$(1, L, q_4)$	$(0, L, q_5)$	(B, L, q_4)
q_5	-	-	-

给定输入 ω, M $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ ω 当 M 停机时, 输出有后缀$\boxed{C}$.

(1) $\omega=$ 10111;　　(2) $\omega=$ 10110;

(3) $\omega=$ 10;　　(4) $\omega=$ 10000;

(5) $\omega=$ 00001;　　(6) $\omega=$ 0.

供选择的答案

A: ① 停机在 q_0; ② 停机在 q_1; ③ 停机在 q_2; ④ 停机在 q_3; ⑤ 停机在 q_4; ⑥ 停机在 q_5; ⑦ 永不停机.

B: ① 接受; ② 拒绝.

C: ① 00; ② 01; ③ 10; ④ 11; ⑤ 0; ⑥ 1.

注: 当 A 的答案为⑦时, 不回答 C.

习 题 解 答

11.1 G 的产生式为

① $E \to E + T$, ② $E \to E - T$, ③ $E \to T$, ④ $T \to T * F$,
⑤ $T \to T / F$, ⑥ $T \to F$, ⑦ $F \to (E)$, ⑧ $F \to a$.

(1) G **派生出** a+ a* a **的过程如下**:

E　E + T　①
T + T　③
F + T　⑥
a + T　⑧
a + T* F　④
a + F* F　⑥
a + a* F　⑧
a + a* a.　⑧

(2) G **派生出**(a- a)/(a* a+ a* a)**的过程如下**:

E　T　③
T/F　⑤
F/F　⑥
(E)/F　⑦
(E - T)/F　②
(T - T)/F　③
(F - T)/F　⑥
(a - T)/F　⑧
(a - F)/F　⑥
(a - a)/F　⑧
(a - a)/(E)　⑦
(a - a)/(E + T)　①
(a - a)/(T + T)　③
(a - a)/(T* F + T)　④
(a - a)/(F* F + T)　⑥
(a - a)/(a* F + T)　⑧
(a - a)/(a* a + T)　⑧
(a - a)/(a* a + T* F)　④
(a - a)/(a* a + F* F)　⑥
(a - a)/(a* a + a* F)　⑧
(a - a)/(a* a + a* a)　⑧

分析　**该文法** G **是上下文无关文法. 派生过程通常不是唯一的. 例如**, (1)**的派生过程又可以为**

E　E + T　①
E + F　⑥
E + a　⑧
…

在解答中采用的是最左派生, 即在每一步对最左边的变元进行变换.

11.2　G 的产生式为

$$①S \to aS,\quad ②S \to Sb,\quad ③S \to \varepsilon$$

先看几个例子

$$
\begin{array}{llll}
S & \overset{*}{\Rightarrow} & a^3S & 3\text{ 次 }① \\
 & \Rightarrow & a^3. & ③ \\
S & \overset{*}{\Rightarrow} & Sb^5 & 5\text{ 次 }② \\
 & \Rightarrow & b^5. & ③ \\
S & \Rightarrow & \varepsilon & ③ \\
S & \overset{*}{\Rightarrow} & a^2S & 2\text{ 次 }① \\
 & \overset{*}{\Rightarrow} & a^2Sb^3 & 3\text{ 次 }② \\
 & \overset{*}{\Rightarrow} & a^6Sb^3 & 4\text{ 次 }① \\
 & \Rightarrow & a^6Sb^4 & 1\text{ 次 }② \\
 & \Rightarrow & a^6b^4 & ③
\end{array}
$$

一般地，在使用 n 次①（不必连续使用）和 m 次②（也不必连续使用）之后使用③，可得到 a^nb^m，这里 n 和 m 可以等于 0. 又，注意到使用①和②所得到的字符串中必含一个 S，并且 a 在 S 的左边，b 在 S 的右边，即 a^nSb^m. 使用一次③，删去字符串中的 S，得到 a^nb^m，不再有可以使用的产生式. 因此，G 也只能派生出形如 a^nb^m 的字符串，故

$$L(G) = \{a^nb^m \mid n, m \geq 0\}$$

分析　1°　给定 G，求 L(G) 的通常做法是先举几个例子，通过例子找到一般规律. 要注意的是，这些终结符串必须是能用 G 由起始符派生出来的，并且用 G 由起始符也只能派生出这些终结符串. 在找一般规律时，要考虑"能"与"只能"两个方面，这两个方面是相互补充的. 通常，"只能"要比"能"难. 特别是，要把"只能"说清楚（严格地说，应该是证明"只能"）更困难.

2°　本题给出的文法不是正则文法，因为它不是右线性文法，也不是左线性文法. 但是，语言 $\{a^nb^m \mid n, m \geq 0\}$ 是正则的，因为它可以由下述右线性文法生成：

$$\langle \{S, B\}, \{a, b\}, S, P\rangle,$$

其中 $P: S \to aS, S \to B, B \to bB, B \to \varepsilon$

11.3　G 的产生式为：

$$
\begin{array}{ll}
①\ S \to aSAB & ②\ S \to aAB \\
③\ BA \to AB & ④\ aA \to ab \\
⑤\ bA \to bb & ⑥\ bB \to bc \\
⑦\ cB \to cc &
\end{array}
$$

先看几个例子，

$$
\begin{array}{llll}
S & \Rightarrow & aAB & ② \\
 & \Rightarrow & abB & ④ \\
 & \Rightarrow & abc. & ⑥
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSAB && ① \\
&\Rightarrow a^{2}ABAB && ② \\
&\Rightarrow a^{2}AABB && ③ \\
&\Rightarrow a^{2}bABB && ④ \\
&\Rightarrow a^{2}b^{2}BB && ⑤ \\
&\Rightarrow a^{2}b^{2}cB && ⑥ \\
&\Rightarrow a^{2}b^{2}c^{2} && ⑦
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\overset{*}{\Rightarrow} a^{2}S(AB)^{2} && 2\text{ 次 }① \\
&\Rightarrow a^{3}(AB)^{3} && ② \\
&\overset{*}{\Rightarrow} a^{3}A^{3}B^{3} && 3\text{ 次 }③ \\
&\Rightarrow a^{3}bA^{2}B^{3} && ④ \\
&\overset{*}{\Rightarrow} a^{3}b^{3}B^{3} && 2\text{ 次 }⑤ \\
&\Rightarrow a^{3}b^{3}cB^{2} && ⑥ \\
&\overset{*}{\Rightarrow} a^{3}b^{3}c^{3}. && 2\text{ 次 }⑦
\end{aligned}
$$

至此, 大概已经能够看出文法生成 $a^{n}b^{n}c^{n}$ 的过程了. 派生过程如下:

$$
\begin{aligned}
S &\overset{*}{\Rightarrow} a^{n-1}S(AB)^{n-1} && n-1\text{ 次 }① \\
&\Rightarrow a^{n}(AB)^{n} && ② \\
&\overset{*}{\Rightarrow} a^{n}A^{n}B^{n} && \frac{1}{2}n(n-1)\text{ 次 }③ \\
&\Rightarrow a^{n}bA^{n-1}B^{n} && ④ \\
&\overset{*}{\Rightarrow} a^{n}b^{n}B^{n} && n-1\text{ 次 }⑤ \\
&\Rightarrow a^{n}b^{n}cB^{n-1} && ⑥ \\
&\overset{*}{\Rightarrow} a^{n}b^{n}c^{n}. && n-1\text{ 次 }⑦
\end{aligned}
$$

分析 实际上, G 也只能生成这种终结符串, 即

$$L(G) = \{a^{n}b^{n}c^{n} \mid n \geq 1\}.$$

有兴趣的读者可以进一步地证明“只能”. 不过要说清楚不是一件容易的事情.

这个语言是上下文有关语言, 还可以证明它不是上下文无关语言.

11.4 生成所有标识符的右线性文法为

$$G = \langle \{S, X\}, \{a, b, \cdots, z, 0, 1, \cdots, 9\}, S, P \rangle,$$

其中 P:

$$
\begin{array}{llll}
S \to aX, & S \to bX, & \cdots, & S \to zX, \\
X \to aX, & X \to bX, & \cdots, & X \to zX, \\
X \to 0X, & X \to 1X, & \cdots, & X \to 9X, \\
X \to \varepsilon & & &
\end{array}
$$

左线性文法为

$$G' = \langle \{S\}, \{a, b, \cdots, z, 0, 1, \cdots, 9\}, S, P' \rangle$$

其中 P':

$$S \to Sa, \quad S \to Sb, \quad \cdots, \quad S \to Sz,$$
$$S \to S0, \quad S \to S1, \quad \cdots, \quad S \to S9,$$
$$S \to a, \quad S \to b, \quad \cdots, \quad S \to z,$$

11.5　(1) $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \omega$ 中有连续的 3 个 0$\}$. 生成 L 的右线性文法为

$$G = \langle \{S, A\}, \{0, 1\}, S, P \rangle,$$

其中 P:

$$S \to 0S \qquad S \to 1S$$
$$S \to 000A \qquad A \to 0A$$
$$A \to 1A \qquad A \to \varepsilon$$

左线性文法为:

$$G' = \langle \{S, A\}, \{0, 1\}, S, P' \rangle.$$

其中 P':

$$S \to S0 \qquad S \to S1$$
$$S \to A000 \qquad A \to A0$$
$$A \to A1 \qquad A \to \varepsilon$$

(2) $L = \{a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$.

生成 L 的右线性文法为

$$G = \langle \{A, B\}, \{a, b\}, A, P \rangle.$$

其中 P:

$$A \to aA \qquad A \to aB$$
$$B \to bB \qquad B \to b.$$

左线性文法为

$$G' = \langle \{A, B\}, \{a, b\}, B, P \rangle.$$

其中 P:

$$B \to Bb \qquad B \to Ab$$
$$A \to Aa \qquad A \to a.$$

11.6　$L = \{\omega\omega^T \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$的元素

$$\omega\omega^T = a_1 a_2 \cdots a_n a_n \cdots a_2 a_1$$

的长度均为偶数且左右对称, 可以从中间开始同时向左右逐个生成符号, 每次左右生成相同的符号. 文法如下:

$$G = \langle \{S\}, \{0, 1\}, S, P \rangle.$$

其中 P:　$S \to 0S0, \quad S \to 1S1, \quad S \to \varepsilon$

分析　这是上下文无关文法, 故这个语言 L 是上下文无关语言. 可以证明 L 不是正则语言, 即不能用右线性文法生成, 也不能用左线性文法生成.

11.7　右线性文法 $G = \langle \{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, S, P \rangle$,

其中 P:

$$S \to 0S, \quad A \to 1C, \quad C \to 0C$$
$$S \to 1S \quad A \to 1 \quad C \to 1C$$
$$S \to 1A \quad B \to 0C \quad C \to 0$$

$S \to 0B \qquad B \to 0 \qquad C \to 1.$

(1) G 的状态转换图如图 11.3 所示.

图 11.3

(2) 与 G 等价的左线性文法为

$$G' = \langle \{S', S, A, B, C\}, \{0, 1\}, S', P'\rangle.$$

其中 P' 包含下述产生式, 右边括号内是 G 中对应的产生式:

$S' \to A1$	$(A \to 1)$
$S' \to B0$	$(B \to 0)$
$S' \to C1$	$(C \to 1)$
$S' \to C0$	$(C \to 0)$
$C \to C0$	$(C \to 0C)$
$C \to C1$	$(C \to 1C)$
$C \to A1$	$(A \to 1C)$
$C \to B0$	$(B \to 0C)$
$A \to S1$	$(S \to 1A)$
$B \to S0$	$(S \to 0B)$
$S \to S1$	$(S \to 1S)$
$S \to S0$	$(S \to 0S)$
$S \to \varepsilon$	

分析 两个文法等价是指它们生成相同的语言. 求与给定文法 G 等价的文法, 通常并不是先找到 G 生成的语言 L(G), 然后设计出满足要求的生成 L(G) 的文法. 因为一般情况下, 找到 L(G) 不是一件容易的事情, 很容易出错. 这类问题应该采用模拟的方法.《离散数学》定理 11.1 叙述了右线性文法与左线性文法的等价性, 其证明是构造性的. 任给一个右线性文法, 证明给出了构造与之等价的左线性文法的一般方法. 反之亦然. 也就是说, 这个定理 11.1 不仅叙述了这两种文法的等价性, 而且在证明中提供了这两种文法相互模拟的具体做法. 因此, 在学习时不仅要记住定理的结论, 而且要掌握模拟的方法. 给定一个右(左) 线性文法, 只要按照这个模拟方法去做, 就能得到与之等价的左(右) 线性文法. 关于 DFA 与 NFA, NFA 与带 ε转移的 NFA, 右(左) 线性文法与带 ε转移的 NFA 的等价性也都与此类似, 在《离散数学》中均以不同的方式给出了模拟方法.

11.8 FA $M = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\rangle$.

为了使用方便, 将 δ重列于表 11.5 中.

(1) M 的状态转移图如图 11.4 所示.

表　11.5

δ	0	1
q_0	q_1	q_3
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_3	q_3

图　11.4

(2) M 关于这几个输入的计算如下:

$$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{1} q_3$$

$$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{1} q_3.$$

即　$\hat{\delta}(q_0, 01010) = q_1$, $\hat{\delta}(q_0, 00101) = q_3$, $\hat{\delta}(q_0, 01001) = q_3$.

故 M 接受 01010, 不接受 00101 和 01001.

(3) 从 M 的状态转移图(图 11.4)不难看出, 从 q_0 开始、以 q_1 结束, 当且仅当从 q_0 到 q_1, 然后重复若干次 q_1 到 q_2 再回到 q_1, 故

$$L(M) = \{0(10)^n \mid n \geq 0\}.$$

11.9　NFA $M = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_3\}\rangle$, δ如表 11.6 所示(即表 11.2).

(1) M 的状态转移图如图 11.5 所示;

(2) M 关于 3 个输入的计算如图 11.6 所示.

$\hat{\delta}(q_0, abbcc) = \{q_2, q_3\}$, $\hat{\delta}(q_0, ababc) = \varnothing$, $\hat{\delta}(q_0, abbca) = \{q_0\}$.

所以, M 接受 abbcc, 不接受 ababc 和 abbca.

表　11.6

δ	a	b	c
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2, q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

图　11.5

11.10　由 M 的状态转移图 11.7(即图 11.1)不难看出, M 从 q_0 开始停止在 q_2, 当且仅当在状态 q_0 下读到若干个 0(可以是 0 个, 状态 q_0 不变), 然后 ε转移到状态 q_1; 在状态

图　11.6

图　11.7

q_1 下读到若干个 1, 然后再 ε转移到状态 q_2; 最后, 在状态 q_2 下读到若干个 2. 因此,

$$L(M) = \{0^i1^j2^k \mid i, j, k \geq 0\}.$$

11.11　(1) 接受语言 $L = \{0^n1^m \mid n, m \geq 1\}$的 DFA 为

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\} \rangle.$$

其中 δ如表 11.7 所示. 状态转移图见图 11.8. 状态 q_3 的作用是收集各种不接受的情况.

表　11.7

δ	0	1
q_0	q_1	q_3
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_3	q_3

图　11.8

(2) 接受含有偶数个 0 的所有 0, 1 串的 DFA 为

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\} \rangle.$$

其中 δ如表 11.8 所示. M 的状态转移图见图 11.9. M 的正确性显然.

表　11.8

δ	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_0	q_1

图　11.9

11.12　(1) 接受以 01 为后缀的所有 0, 1 串的 NFA 为

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\} \rangle.$$

其中 δ如表 11.9 所示. M 的状态转移图见图 11.10. 根据题目的要求, M 接受当且仅当最后 2 步是读 0 转移到 q_1, 再读 1 转移到 q_2, 并且恰好读完输入. 在此之前, 一直保持在状态 q_0, 不管是读 0 还是读 1.

表　11.9

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	∅	$\{q_2\}$
q_2	∅	∅

图　11.10

(2) 接受不含子串 011 的所有 0, 1 串的 NFA 为

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\} \rangle.$$

其中 δ如表 11.10 所示. 状态转移图见图 11.11.

从图 11.11 不难看出, 如果输入 ω中含有子串 011, M 在读完第一个子串 011(从左端算起)时转移到状态 q_3, 并且在此之前计算是确定型的, 即每一步的动作是唯一的. 换句话说, 如果 ω中不含子串 011, 则 M 不会转移到状态 q_3.

表　11.10

δ	0	1
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_3\}$
q_3	∅	∅

图　11.11

11.13　《离散数学》中例 11.9 给出了用 DFA 模拟 NFA 的方法.

$$\text{NFA } M = \langle Q, \{a, b, c\}, \delta, q_0, F \rangle.$$

其中 $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_3\}$, δ见表 11.6, 状态转移图见图 11.5.

与 M 等价的 DFA M 构造如下:

$$M' = \langle Q', \{a, b, c\}, \delta', \{q_0\}, F' \rangle.$$

按照用 DFA 模拟 NFA 的标准做法, 取 P(Q)作为 Q′, 对每一个 B　Q 和 $x \in \{a, b, c\}$,

$$\delta'(B, x) = \bigcup_{p \in B} \delta(p, x).$$

但是, 从$\{q_0\}$开始按照 δ进行计算, P(Q)中某些元素是不可能达到的, 从而可以删去. 表 11.11 给出 δ′表的第一列中没有出现的 B　Q 都是不可能达到的. 表 11.11 可按下述顺

序计算：首先计算 $\delta'(\{q_0\}, x)$, $x = a, b, c$, 得到第一行. 然后对第一行中的每一个 $B \subseteq Q$, 计算 $\delta'(B, x)$, $x = a, b, c$, 依次作为第 2 行, 第 3 行, …. 再对第 2 行中的每一个 $B \subseteq Q$, 计算 $\delta'(B, x)$, $x = a, b, c$. 当然, 每一个 $B \subseteq Q$ 至多计算一次, 直到没有新的 $B \subseteq Q$ 出现为止:

$$\delta'(\{q_0\}, a) = \delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\},$$

$$\begin{aligned}\delta'(\{q_0, q_1\}, a) &= \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) \\ &= \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\},\end{aligned}$$

其余的计算过程不一一列出.

由表 11.11 看出, 可以取

$$Q' = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_2, q_3\}, \varnothing\}$$

而

$$\begin{aligned}F' &= \{B \in Q' \mid B \cap F \neq \varnothing\} \\ &= \{\{q_2, q_3\}\}.\end{aligned}$$

DFA M' 的状态转移图如图 11.12 所示.

表 11.11

δ'	a	b	c
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$
$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\{q_2, q_3\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

图 11.12

11.14 带 ε转移的 NFA M 由图 11.1 给出. 要求给出与 M 等价的不带 ε转移的 NFA M'.《离散数学》中例 11.10 给出用不带 ε转移的 NFA 模拟带 ε转移的 NFA 的方法.

M' 的状态集、输入字母表和初始状态与 M 的相同.

首先求 M 的 εclosure, 对每一个 q, εclosure(q) 等于从 q 经过若干次(包括 0 次) ε转移可以达到的所有状态. 注意必有 $q \in \varepsilon$closure(q). 在这里, 由图 11.1,

$$\varepsilon\text{closure}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\},$$

$$\varepsilon\text{closure}(q_1) = \{q_1, q_2\},$$

$$\varepsilon\text{closure}(q_2) = \{q_2\}.$$

由于 $\varepsilon\text{closure}(q_0) \cap F = \{q_2\}$, 非空, 故

$$F' = F \cup \{q_0\} = \{q_0, q_2\}.$$

对每一个状态 q 和输入符号 a, $\delta'(q, a)$ 等于从 q 经过若干次 ε转移, 然后读符号 a 转移, 再作若干次 ε转移可以达到的所有状态, 即

$$\delta'(q, a) = \bigcup_{p \in \varepsilon closure(q)} \varepsilon closure(\delta(p, a)).$$

实际上,当不太复杂时,容易从状态转移图直接观察得到 δ', δ' 如表 11.12 所示.

综上所述,

$$M' = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, \delta', q_0, F'\}.$$

其中 $F' = \{q_0, q_2\}$, δ' 见表 11.12. 状态转移图见图 11.13.

表 11.12

δ'	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	ě	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	ě	ě	$\{q_2\}$

图 11.13

11.15 设 FA $M = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\rangle$. 其中 δ 见表 11.13(即表 11.1). 要求给出与 M 等价的右线性文法 G 和左线性文法 G′.《离散数学》中定理 11.5 的证明是构造性的,给出用右线性文法模拟 NFA 的方法. 等价的左线性文法可根据右线性文法构造出来,也可以直接从 NFA 用类似的方法构造出来.

表 11.13

δ	0	1
q_0	q_1	q_3
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_3	q_3

右线性文法

$$G = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, q_0, P\rangle.$$

左线性文法

$$G' = \langle\{S, q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, S, P'\rangle.$$

P 和 P′ 中的产生式如下,左边一列为对应的 δ 值. 注意到 q_1 是 M 的接受状态.

M	P	P′
$\delta(q_0, 0) = q_1$	$q_0 \to 0q_1$	$q_1 \to q_0 0$
	$q_0 \to 0$	$S \to q_0 0$
$\delta(q_0, 1) = q_3$	$q_0 \to 1q_3$	$q_3 \to q_0 1$
$\delta(q_1, 0) = q_3$	$q_1 \to 0q_3$	$q_3 \to q_1 0$
$\delta(q_1, 1) = q_2$	$q_1 \to 1q_2$	$q_2 \to q_1 1$
$\delta(q_2, 0) = q_1$	$q_2 \to 0q_1$	$q_1 \to q_2 0$
	$q_2 \to 0$	$S \to q_2 0$
$\delta(q_2, 1) = q_3$	$q_2 \to 1q_3$	$q_3 \to q_2 1$

$$\delta(q_3, 0) = q_3 \qquad q_3 \to 0q_3 \qquad q_3 \to q_3 0$$

$$\delta(q_3, 1) = q_3 \qquad q_3 \to 1q_3 \qquad q_3 \to q_3 1$$

$$q_0 \to \varepsilon$$

分析 1°《离散数学》定理 11.5 证明中的模拟方法适用于带 ε转移的 NFA, 当然也适用于 DFA. 本题的 M 是一个 DFA, 套用证明中的模拟方法时, 只需把 q 视同单元集{q}.

2° 这里初始状态 q_0 不是接受状态. 如果 q_0 是接受状态, 则在 G 中要引入一个新的变元 S′作起始符和产生式 $S' \to q_0$, $S' \to \varepsilon$ 当然, 对 G 也需作相应的变化.

3° 在 G 中, 从 q_3 派生出的字符串总含有 q_3, 得不到 0, 1 串. 因此, 只要在派生过程中出现 q_3, 就得不到 L(G) 中的字符串(这恰好反映了下述事实: M 一旦进入状态 q_3, 就永远处于状态 q_3, 从而不会接受输入串.). 显然, 从 G 中删去 q_3 及所有含有 q_3 的产生式不会影响它生成的语言. 所以, 与 M 等价的右线性文法可简化为

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, q_0, P \rangle.$$

其中 P: $q_0 \to 0q_1$, $q_0 \to 0$, $q_1 \to 1q_2$, $q_2 \to 0q_1$, $q_2 \to 0$.

相应地, 左线性文法可简化为

$$M' = \langle \{S, q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, S, P' \rangle.$$

其中 P′: $S \to q_0 0$, $S \to q_2 0$, $q_1 \to q_0 0$, $q_1 \to q_2 0$, $q_2 \to q_1 1$, $q_0 \to \varepsilon$

11.16 设带 ε转移的 NFA M 由图 11.1 给出. 注意到初始状态 q_0 不是接受状态, q_2 是接受状态.

与 M 等价的右线性文法为

$$G = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, q_0, P \rangle,$$

左线性文法为

$$G' = \langle \{S, q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, S, P' \rangle,$$

P 和 P′ 如下:

M	P	P′
$\delta(q_0, 0) = \{q_0\}$	$q_0 \to 0q_0$	$q_0 \to q_0 0$
		$q_0 \to \varepsilon$
$\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_1\}$	$q_0 \to q_1$	$q_1 \to q_0$
$\delta(q_1, 1) = \{q_1\}$	$q_1 \to 1q_1$	$q_1 \to q_1 1$
$\delta(q_1, \varepsilon) = \{q_2\}$	$q_1 \to q_2$	$q_2 \to q_1$
	$q_1 \to \varepsilon$	$S \to q_1$
$\delta(q_2, 2) = \{q_2\}$	$q_2 \to 2q_2$	$q_2 \to q_2 2$
	$q_2 \to 2$	$S \to q_2 2$

11.17 右线性文法 G 的产生式为

$$S \to 0S \qquad A \to 1C \qquad C \to 0C$$

$$S \to 1S \qquad A \to 1 \qquad C \to 1C$$

$$S \to 1A \qquad B \to 0C \qquad C \to 0$$
$$S \to 0B \qquad B \to 0 \qquad C \to 1$$

要构造与 G 等价的 NFA M,《离散数学》中定理 11.4 的证明给出了构造方法.

记

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, \{f\} \rangle.$$

其中 $Q = \{S, A, B, C, f\}$, $q_0 = S$,

$\Sigma = \{ \alpha \mid X \to \alpha Y$ 或 $X \to \alpha$ 是 G 的产生式$\}$

$= \{0, 1\}$.

δ 与 G 的产生式的对应如下:

G	M
$S \to 0S$, $S \to 0B$	$\delta(S, 0) = \{S, B\}$
$S \to 1S$, $S \to 1A$	$\delta(S, 1) = \{S, A\}$
	$\delta(A, 0) =$ ě
$A \to 1C$, $A \to 1$	$\delta(A, 1) = \{C, f\}$
$B \to 0C$, $B \to 0$	$\delta(B, 0) = \{C, f\}$
	$\delta(B, 1) =$ ě
$C \to 0C$, $C \to 0$	$\delta(C, 0) = \{C, f\}$
$C \to 1C$, $C \to 1$	$\delta(C, 1) = \{C, f\}$
	$\delta(f, 0) =$ ě
	$\delta(f, 1) =$ ě

综上所述, 下述 NFA 与 G 等价:

$$M = \langle \{S, A, B, C, f\}, \{0, 1\}, \delta, S, \{f\} \rangle,$$

其中 δ 如表 11.14 所示, 状态转移图见图 11.14.

表 11.14

δ	0	1
S	$\{S, B\}$	$\{S, A\}$
A	ě	$\{C, f\}$
B	$\{C, f\}$	ě
C	$\{C, f\}$	$\{C, f\}$
f	ě	ě

图 11.14

分析 当右线性文法 G 中含有形如 $A \to B$ 或 $A \to \varepsilon$ 的产生式时, 用上述方法模拟得到的 NFA 是带 ε 转移的. 当然, 如果需要的话, 可以进一步地消去 ε 转移.

11.18 为方便起见, 将 TM M 的动作函数 δ 重写一遍, 列于表 11.15 中, M 是确定型的.

(1) $q_0 11010$ $1q_0 1010$ $11q_0 010$ $110q_0 10$ $1101q_0 0$ $11010q_0 B$ $1101q_1 0B$ $110q_2 1BB$

(2) $q_0 01100$ $0q_0 1100$ $01q_0 100$ $011q_0 00$ $0110q_0 0$ $01100q_0 B$ $0110q_1 0B$

011$q_2$0BB　011Bq_3BB

(3) $q_0$01011　0$q_0$1011　01$q_0$011　010$q_0$11　0101$q_0$1　01011q_0B　0101$q_1$1B　01011q_0B　0101$q_1$1B　⋯

表 11.15

δ	0	1	B
q_0	$(0, R, q_0)$	$(1, R, q_0)$	(B, L, q_1)
q_1	(B, L, q_2)	$(1, R, q_0)$	(B, R, q_0)
q_2	(B, R, q_3)	—	—
q_3	—	—	—

计算在最后 2 个格局中永不休止地交替进行.

11.19 (1) 构造 TM M 接受所有 0 和 1 个数相同的 0, 1 串. 基本思想是, 读写头左右来回运动, 每次从左向右删去一个 0 和一个 1 后返回到左端. 如果这样能把输入串 ω删去, 则说明 ω中 0 和 1 的个数相等, 接受 ω

为使 M 简单一些, 引入辅助符号 x, 用来代替被删去的 0 和 1. 每次计算 M 都是从初始状态 q_0、读写头位于初始位置开始, 读写头向右跳过已被删去的 0 和 1(即 x), 找到第 1 个尚未被删去的 0 或 1. 若是 0, 则把它改写成 x, 转移到状态 q_1, 右移一格; 若是 1, 则把它改写成 x, 转移到状态 q_2, 右移一格. 如果在状态 q_0 下向右找不到 0 和 1(跳过所有 x 后读到 B), 则停机并且接受 ω

在状态 q_1 下向右找 1(跳过 0 和 x). 若找到 1, 则把它改写成 x, 转移到状态 q_3, 左移一格. 然后在状态 q_3 下, 向左跳过 x 和 1(不会有 0) 找到 B, 右移一格并且回到状态 q_0. 这就完成了一次计算(删去一个 0 和一个 1), 并且回到初始状态和读写头的初始位置, 为下一次计算做好了准备. 在状态 q_1 下只要还没有找到 1, 就一直向右找下去. 若一直到读到 B 还没有找到 1, 这表明 ω中 0 比 1 多, M 继续向右找下去, 永不停机.

类似地, 在状态 q_2 下向右找 0(跳过 1 和 x). 若找到 0, 则把它改写成 x, 转移到 q_4, 左移一格. 然后在 q_4 下向左跳过 x 和 0(不会有 1) 找到 B, 右移一格并且回到状态 q_0. 若在状态 q_2 下找不到 0, M 就一直向右找下去, 永不停机.

TM M 的形式描述如下:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, A \rangle.$$

其中 $Q = \{q_i \mid i = 0, 1, 2, 3, 4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, x, B\}$, $A = \{q_0\}$, δ如表 11.16 所示.

(2) 构造 TM M 接受语言

$$\{\omega\omega^T \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}.$$

基本思想是, 读写头左右来回运动查看两端的符号是否相同. 若相同则把它们删去, 继续进行. 如果这样能把输入串 x 全部删去, 则表明 x 形如 $\omega\omega^T$, M 接受 x. 如果在某一步发现两端的符号不相同, 或者 x 的长度为奇数, 则 M 拒绝 x.

q_0 删去左端第一个符号. 若这个符号是 0 则转移到 q_1, 若是 1 则转移到 q_2. 在 q_1 和 q_2 下, 向右搜索到B后分别转移到q_3和q_4, 并且左移一格到右端第一个符号. 若q_3读到0,

表 11.16

δ	0	1	x	B
q_0	(x, R, q_1)	(x, R, q_2)	(x, R, q_0)	—
q_1	$(0, R, q_1)$	(x, L, q_3)	(x, R, q_1)	(B, R, q_1)
q_2	(x, L, q_4)	$(1, R, q_2)$	(x, R, q_2)	(B, R, q_2)
q_3	$(0, L, q_3)$	$(1, L, q_3)$	(x, L, q_3)	(B, R, q_0)
q_4	$(0, L, q_4)$	$(1, L, q_4)$	(x, L, q_4)	(B, R, q_0)

则删去这个 0 且转移到 q_5; 若 q_4 读到 1, 则删去这个 1 且转移到 q_5. q_5 左移到左端后返回到 q_0. 重复上述计算. 否则, 即 q_3 读到 1 或 q_4 读到 0(这表明 x 左右不对称), 或者 q_3 和 q_4 读到 B(这表明 x 的长度为奇数), 则 M 永不停机. 如果 q_0 读到 B, 这表明已左右对称地把 x 删尽, M 停机, 接受 x.

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, A\rangle.$$

其中 $Q = \{q_i \mid i = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, B\}$, $A = \{q_0\}$, δ如表 11.17 所示.

表 11.17

δ	0	1	B
q_0	(B, R, q_1)	(B, R, q_2)	—
q_1	$(0, R, q_1)$	$(1, R, q_1)$	(B, L, q_3)
q_2	$(0, R, q_2)$	$(1, R, q_2)$	(B, L, q_4)
q_3	(B, L, q_5)	$(1, R, q_3)$	(B, R, q_3)
q_4	$(0, R, q_4)$	(B, L, q_5)	(B, R, q_4)
q_5	$(0, L, q_5)$	$(1, L, q_5)$	(B, R, q_0)

11.20 (1) 构造 TM M 以一进制方法计算 x+ y. 对任意的自然数 x 和 y, 初始格局为

$$q_0 1^x B 1^y,$$

当 M 停机时带的内容为 1^{x+y}. 这只需要把初始格局中 1^x 与 1^y 之间的 B 与右边的 1 逐个交换. 首先找到这个 B, 然后看右边是否是 1. 若是 1, 则把 1 改写成 B, 返回左边把 B 改写成 1, 再返回右边. 重复上述计算. 若是 B, 则表明已经完成交换, 停机, 计算结束.

$$M = \langle Q, \{1\}, \{1, B\}, \delta, q_0, B\rangle.$$

其中 $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, δ见表 11.18.

表 11.18

δ	1	B
q_0	$(1, R, q_0)$	(B, R, q_1)
q_1	(B, L, q_2)	—
q_2	—	$(1, R, q_0)$

(2) 构造 TM M 以一进制方式计算 3x, 对任意的自然数 x, 初始格局为

$$q_0 1^x.$$

当 M 停机时带的内容为 1^{3x}.

基本思想是,读写头左右来回运动,每一次删去输入 1^x 中的一个 1,在右端(与原来的 1^x 隔一个 B)写 3 个 1. 重复进行,直至将输入 1^x 删完为止.

$$M = \langle Q, \{1\}, \{1, B\}, \delta, q_0, B\rangle.$$

其中 $Q = \{q_i \mid 0 \le i \le 6\}$, δ见表 11.19.

表 11.19

δ	1	B
q_0	(B, R, q_1)	—
q_1	$(1, R, q_1)$	(B, R, q_2)
q_2	$(1, R, q_2)$	$(1, R, q_3)$
q_3	—	$(1, R, q_4)$
q_4	—	$(1, L, q_5)$
q_5	$(1, L, q_5)$	(B, L, q_6)
q_6	$(1, L, q_6)$	(B, R, q_0)

把读写头从左到右、再从右到左运动一次称作一轮. M 要进行 x 轮. 第 k+1 轮开始时的格局为

$$q_0 uBv$$

其中 $u = 1^{x-k}$, $v = 1^{3k}$, $0 \le k \le x$. 当 $k = x$ 时, $u = \varepsilon$, q_0 读到 B, 停机, 计算结束. 当 $k < x$ 时, q_0 把 u 的第一个 1 改写成 B, 转移到 q_1. q_1 右移, 跨过 B 时转移到 q_2. q_2 右移找到 v 右边的 B 把它改写成 1, 并且转移到 q_3. 接着把右边的 2 个 B 改写成 1, 经过 q_4 转移到 q_5. q_5 向左移动, 在跨过 B 时转移到 q_6. 继续向左找到 B, 向右移一格, 返回到 q_0. 这一轮计算结束, 此时的格局为

$$q_0 1^{x-k-1} B 1^{3(k+1)}.$$

为下一轮计算做好了准备.

11.21 先用四元图灵机模拟五元图灵机. 设五元图灵机

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B\rangle.$$

要构造四元图灵机 M' 模拟 M.

对于五元组 $qss'Rq'$, M' 要做 3 件事: 把 s 改写成 s', 右移一格、转移到 q'. M' 不能同时完成改写和右移, 必须分成 2 个动作. 为了在改写后能记住应转移到的状态 q', 引入新的状态 q'_R. 先用四元组 $qss'q'_R$ 把 s 改写成 s', 暂时转移到 q'_R. 而 q'_R 不管读到什么符号都右移且转移到状态 q'. 类似地, 为了模拟 $qss'Lq'$, M' 引入新状态 q'_L. q'_L 表示要左移和转移到 q'.

$$M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, B\rangle.$$

其中

$$Q' = \{q, q_R, q_L \mid q \in Q\}.$$

对 M 的每一个 $qss'Rq'$, M' 有 $qss'q'_R$; 对 M 的每一个 $qss'Lq'$, M' 有 $qss'q'_L$. 另外, 对每一个 $q \in Q$ 和 $s \in \Gamma$, M' 有

$$q_R sRq, \quad q_L sLq.$$

再用五元图灵机模拟四元图灵机. 设四元图灵机

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B\rangle.$$

要构造五元图灵机 M' 模拟 M.

对于 M 的四元组 $qsRq'$, 显然五元组 $qssRq'$ 的作用与它相同. 同样地, $qssLq'$ 与 $qsLq'$ 的作用相同. 对于四元组 $qss'q'$, M 只改写符号, 读写头不移动, 而 M' 的每一步读写头必须移动(向左或向右), 因此只好先向左、再向右移回原处. 与前面类似, 对每一个状态 $q \in Q$, M' 引入新的状态 q_R. q_R 表示要右移一格且转移到 q.

$$M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, B\rangle.$$

其中

$$Q' = \{q, q_R \mid q \in Q\}.$$

对 M 的每一个 $qsRq'$，M' 有 $qss'Rq'$；对 M 的每一个 $qsLq'$，M' 有 $qss'Lq'$；对 M 的每一个 $qss'q'$，M' 有 $qss'Lq'_R$. 另外,对每一个 $q \in Q$ 和 $s \in \Gamma$,有 $q_R sRq$.

11.22 答案

(1) A: ④, B: ①, C: ②, D: ①.

(2) A: ③, B: ①, C: ②, D: ②.

(3) A: ②, B: ①, C: ①, D: ②.

(4) A: ③, B: ②, C: ①, D: ①.

分析

(1) P: ① $S \to 0A$, ② $S \to 1B$,
③ $B \to 1B$, ④ $B \to 0A$,
⑤ $A \to 0B$, ⑥ $A \to 1A$,
⑦ $A \to 0$, ⑧ $B \to 1$.

G 是右线性文法.

G 能派生出 00010,派生过程如下:

$$S \xRightarrow{\text{①}} 0A \xRightarrow{\text{⑤}} 00B \xRightarrow{\text{④}} 000A \xRightarrow{\text{⑥}} 0001A \xRightarrow{\text{⑦}} 00010.$$

G 派生出 10000 的过程如下:

$$S \xRightarrow{\text{②}} 1B \xRightarrow{\text{④}} 10A \xRightarrow{\text{⑤}} 100B \xRightarrow{\text{④}} 1000A \xRightarrow{\text{⑦}} 10000.$$

G 不能派生出 01001. 因为要得到这个 0, 1 串,前 4 步必须是

$$S \xRightarrow{\text{①}} 0A \xRightarrow{\text{⑥}} 01A \xRightarrow{\text{⑤}} 010B \xRightarrow{\text{④}} 0100A,$$

最后一步只能使用 $A \to 0$,得不到 01001.

(2) P: ① $S \to 0BA$, ② $B \to A10$,
③ $A \to 1A$, ④ $A \to 0$.

G 是 2 型文法,即上下文无关文法.

G 能派生出 00101110,派生过程如下:

$$S \xRightarrow{\text{①}} 0BA \xRightarrow{\text{②}} 0A10A \xRightarrow{\text{④}} 0010A \xRightarrow{\text{③}} 00101A \xRightarrow{\text{③}} 001011A \xRightarrow{\text{③}} 0010111A \xRightarrow{\text{④}} 00101110.$$

不能派生出 00010 和 01010. 事实上,要得到 0, 1 串,必须使用产生式①和②,

$$S \Rightarrow 0BA \Rightarrow 0A10A.$$

可见能得到的 0, 1 串的长度不小于 5,并且只有再使用 2 次 $A \to 0$,才能得到长度为 5 的 0, 1 串. 所以, G 只能派生出唯一的一个长度为 5 的 0, 1 串 00100.

(3) P: ① $S \to 0ABA$, ② $AB \to A0B$,
③ $BA \to B1A$, ④ $A \to 1B$,
⑤ $B \to 0A$, ⑥ $A \to 0$,
⑦ $B \to 1$.

G 是 1 型文法，即上下文有关文法.

G 能派生出 0101110，派生过程如下：

$$S \overset{①}{\quad} 0ABA \overset{④}{\quad} 01BBA \overset{⑤}{\quad} 010ABA \overset{④}{\quad} 0101BBA \overset{⑦}{\quad} 01011BA \overset{⑦}{\quad} 010111A \overset{⑥}{\quad} 0101110.$$

G 派生出 00010 的过程如下：

$$S \overset{①}{\quad} 0ABA \overset{②}{\quad} 0A0BA \overset{⑥}{\quad} 000BA \overset{⑦}{\quad} 0001A \overset{⑥}{\quad} 00010.$$

G 不能派生出 01010. 事实上，第一步必须使用产生式①，得到 0ABA. 要想得到长度为 5 的 0, 1 串，必须且只能使用产生式②、③、④、⑤中的一个进行一次派生. 而为了得到前缀 01，只能使用产生式④，得到 01BBA. 显然，继续下去不可能得到 01010.

(4) P： ① $S \to 0SAB$，　② $S \to BA$，

　　③ $A \to 0A$，　④ $A \to 0$，

　　⑤ $B \to 1$.

G 是 2 型文法，即上下文无关文法.

G 能派生出 01001，派生过程如下：

$$S \overset{①}{\quad} 0SAB \overset{②}{\quad} 0BAAB \overset{⑤}{\quad} 01AAB \overset{④}{\quad} 010AB \overset{④}{\quad} 0100B \overset{⑤}{\quad} 01001.$$

G 能派生出 10000，派生过程如下：

$$S \overset{②}{\quad} BA \overset{⑤}{\quad} 1A \overset{③}{\quad} 10A \overset{③}{\quad} 100A \overset{③}{\quad} 1000A \overset{④}{\quad} 10000.$$

G 不能派生出 00010. 事实上，第一步只能使用产生式①或②. 不难发现，从 0SAB 只能派生出以 0 开头、以 1 结尾的 0, 1 串，从 BA 只能派生出以 1 开头、以 0 结尾的 0, 1 串. 因此，G 只能派生出首尾不同的 0, 1 串.

11.23　答案

(1) A：①，B：⑧，C：,?，D：②，E：④.

(2) A：①，B：①，C：②，D：①，E：④.

(3) A：②，B：④，C：④，D：②，E：④.

(4) A：⑨，B：,?，C：,?，D：②，E：③.

分析

(1) M_1 是 NFA，q_2 是接受状态，δ 见表 11.20.

表　11.20

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_2\}$

由表 11.20，

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0\},$$
$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}.$$

M_1 关于输入 01101 的计算如图 11.15 所示. 由图 11.15，M_1 读完 01101 后的状态集为

$$\delta(q_0, 01101) = \{q_0, q_1, q_2\}.$$

用同样的方法可以求得

$$\delta(q_0, 000000) = \{q_0\},$$
$$\delta(q_0, 101010) = \{q_0, q_1, q_2\},$$
$$\delta(q_0, 00010) = \{q_0, q_1\},$$

$$\delta(q_0, 1001) = \{q_0, q_1, q_2\}.$$

由于 q_2 是接受状态, M_1 接受 101010 和 1001.

(2) M_2 是 DFA, q_0 是接受状态, δ 见表 11.21.

由表 11.21,

$$\delta(q_1, 0) = q_0,$$

$$\delta(q_2, 1) = q_0.$$

表 11.21

δ	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_3
q_2	q_3	q_0
q_3	q_2	q_1

图 11.15

M_2 关于输入 01010 的计算如下:

$$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_1,$$

故 M_2 读完 01010 后的状态为

$$\delta(q_0, 01010) = q_1.$$

表 11.22

δ	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_3	q_3

用同样的方法可以求得

$$\delta(q_0, 000000) = q_0,$$

$$\delta(q_0, 101010) = q_3,$$

$$\delta(q_0, 00010) = q_2,$$

$$\delta(q_0, 1001) = q_0.$$

由于 q_0 是接受状态, M_2 接受 000000 和 1001.

(3) M_3 是 DFA, q_0 是接受状态, δ 见表 11.22.

由表 11.22,

$$\delta(q_0, 0) = q_1,$$

$$\delta(q_3, 1) = q_3.$$

M_3 关于输入 11001 的计算如下:

$$q_0 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{1} q_3,$$

故 M_3 读完 11001 后的状态为

$$\delta(q_0, 11001) = q_3.$$

用同样的方法可以求得

$$\delta(q_0, 000000) = q_3,$$
$$\delta(q_0, 101010) = q_0,$$
$$\delta(q_0, 00010) = q_3,$$
$$\delta(q_0, 1001) = q_0.$$

由于 q_0 是接受状态, 故 M_3 接受 101010 和 1001.

(4) M_4 是 NFA, q_2 是接受状态, δ 见表 11.23.

由表 11.23,

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_3\},$$
$$\delta(q_2, 0) = \text{ě} .$$

M_4 关于输入 01010 的计算如图 11.16 所示. 故 M_4 读完 01010 后的状态集为

$$\delta(q_0, 01010) = \{q_1, q_2, q_3\}.$$

表　11.23

δ	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	ě	$\{q_0\}$
q_3	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$

图　11.16

用同样的方法可求得

$$\delta(q_0, 000000) = \text{ě} ,$$
$$\delta(q_0, 101010) = \{q_1, q_2, q_3\},$$
$$\delta(q_0, 00010) = \{q_1, q_2\},$$
$$\delta(q_0, 1001) = \{q_0\}.$$

由于 q_2 是接受状态, M_4 接受 101010 和 00010.

11.24　答案

(1) A: ⑥, B: ①, C: ①.

(2) A: ⑥, B: ①, C: ④.

(3) A: ⑦, B: ②.

(4) A: ⑥, B: ①, C: ②

(5) A: ⑦, B: ②.

(6) A: ④, B: ②, C: ⑥.

分析 为方便起见，将 TM M 的动作函数 δ 重列于表 11.24.

表 11.24

δ	0	1	B
q_0	$(0, R, q_0)$	$(1, R, q_0)$	(B, L, q_1)
q_1	$(1, L, q_3)$	$(0, L, q_2)$	—
q_2	$(1, L, q_4)$	$(0, L, q_5)$	—
q_3	$(0, L, q_4)$	$(1, L, q_4)$	—
q_4	$(1, L, q_4)$	$(0, L, q_5)$	(B, L, q_4)
q_5	—	—	—

(1) M 关于 $\omega=10111$ 的计算如下：

$q_0 10111 \quad 1q_0 0111 \quad 10q_0 111 \quad 101q_0 11 \quad 1011q_0 1 \quad 10111q_0 B \quad 1011q_1 1B \quad 101q_2 10B \quad 10q_5 100B$.

M 停机在状态 q_5，接受 $\omega=10111$，停机时带的内容即 M，输出 10100.

(2) M 关于 $\omega=10110$ 的计算如下：

$q_0 10110 \overset{*}{\ } 10110q_0 B \quad 1011q_1 0B \quad 101q_3 11B \quad 10q_4 111B \quad 1q_5 0011B$.

M 停机在状态 q_5，接受 $\omega=10110$，M 输出 10011.

(3) M 关于 $\omega=10$ 的计算如下：

$q_0 10 \overset{*}{\ } 10q_0 B \quad 1q_1 0B \quad q_3 11B \quad q_4 B11B \quad q_4 BB11B \quad \cdots$

在状态 q_4 下不停地左移，永不停机.

M 永不停机，拒绝 $\omega=10$. M 没有输出.

(4) M 关于 $\omega=10000$ 的计算如下：

$q_0 10000 \overset{*}{\ } 10000q_0 B \quad 1000q_1 0B \quad 100q_3 01B \quad 10q_4 001B \quad 1q_4 0101B \quad q_4 11101B \quad q_5 B01101B$.

M 停机在 q_5，接受 $\omega=10000$，输出 01101.

(5) M 关于 $\omega=00001$ 的计算如下：

$q_0 00001 \overset{*}{\ } 00001q_0 B \quad 0000q_1 1B \quad 000q_2 00B \quad 00q_4 010B \quad 0q_4 0110B \quad q_4 01110B \quad q_4 B11110B \quad q_4 BB11110B \quad \cdots$

M 在状态 q_4 下不停地左移，永不停机，拒绝 $\omega=00001$，没有输出.

(6) M 关于 $\omega=0$ 的计算如下：

$q_0 0 \quad 0q_0 B \quad q_1 0B \quad q_3 B1B$.

M 停机在 q_3. 由于 q_3 不是接受状态，故 M 拒绝 $\omega=0$. M 的输出为 1.