

# 第一编 数理逻辑

## 第一章 命题逻辑

### 1.1 命题符号化

否定词 $\neg$ ，合取词 $\wedge$ ，析取词 $\vee$ ，蕴含词 $\rightarrow$ ，等值词 $\leftrightarrow$

若一个命题是一个简单陈述句，则称之为**简单命题**；由简单命题通过 $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 这些联结词组成的命题称为**复合命题**； $P \rightarrow Q$ 是**条件命题**； $P \leftrightarrow Q$ 是**双条件命题**。

### 1.2 合式公式

命题常元	T, F
命题变元	$P_1, P_2, \dots, P$
联结词	$\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
辅助词	( )

这个字母表可记为 $\Sigma (P_1, P_2, \dots)$ ，如不引起混淆，也可简记为 $\Sigma$ 。 $\Sigma (P_1, P_2, \dots)$ 表示

字母表 $\Sigma (P_1, P_2, \dots)$ 上的所有字符串，包括空串 $\epsilon$ ；用 $\Sigma^*$ 表示 $\Sigma$ 上的所有非空符号串的集合。

● **合式公式**：(1) 命题常元或命题变元是合式公式；(2) 若 A, B 是合式公式，则  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$  是合式公式；(3) 只有通过有限次使用 (1), (2) 所得到的符号串才是合式公式。

代入和替换：替换只要求对该子公式的某一出现或某几个出现进行替换，而不是对每一处出现都进行替换。

### 1.3 永真公式

**解释**：设  $A$  是含有  $n$  个命题变元的合式公式，对  $A$  的一组真值赋值，称为对  $A$  的一个解释，记作  $I = \langle I(P_1), I(P_2), \dots, I(P_n) \rangle$ ，其中  $I(P_i)$  取 0 或 1， $I(\neg A) = \neg I(A)$ 。

合式公式可分为：永真式，永假式，可满足式。

逻辑恒等式：

永真蕴含式：

### 1.4 范式

**文字**：命题变元或命题变元的否定称为文字，并称命题变元为正文字，命题变元的否定为负文字。

**基本和**的归纳定义是：①文字是基本和；②若 A, B 是基本和，则  $A \vee B$  是基本和。

**合取范式**的归纳定义如下：①基本和是合取范式；②若 A, B 是合取范式，则  $(A \wedge B)$  是合取范式。

**主合取范式**的归纳定义是：①极大项是主合取范式；②若 A, B 是主合取范式，则  $(A \wedge B)$  是主合取范式。

**基本积**的归纳定义是：①文字是基本积；②若 A, B 是基本积，则  $A \wedge B$  是基本积。

**析取范式**的归纳定义如下：①基本积是析取范式；②若 A, B 是析取范式，则  $(A \vee B)$  是析取范式。

**主析取范式**的归纳定义是：①极小项是主析取范式；②若 A, B 是主析取范式，则  $(A \vee B)$  是主析取范式。

### ▲ 1.5 推理理论

推理规则：(1)附加规则

- (2)化简规则
- (3)MP 规则
- (4)拒取式
- (5)析取三段论
- (6)假言三段论
- (7)合取引入
- (8)构造二性难

#### ▲ 证明方法:

- (1)前件假证明法
- (2)后件真证明法
- (3)直接证明法
- (4)间接证明法
- (5)分情况证明法
- (6)附加前提证明法
- (7)反证法

#### ▲ 公理系统一般由下列几部分组成:

- (1)初始符号: 它们是不经定义而直接使用的符号;
- (2)形成规则: 确定定义在初始符号上的哪些符号串是合式公式;
- (3)公理集: 它们是不经证明而被认为是恒真的命题;
- (4)推理规则: 规定如何从公理和前面已经推导出的合式公式经过符号变形而推出其它公式。

命题逻辑的公理系统 L 的定义如下:

- (1)初始符号:
- (2)形成规则: ①P 是合式公式; ②若 A 是合式公式, 则  $(\neg A)$  是合式公式; ③若 A 和 B 是合式公式, 则  $(A \rightarrow B)$  是合式公式; ④只有通过有限次使用①~③得到的符号串是合式公式。
- (3)公理集:  $(L) (A \rightarrow (B \rightarrow A))$ ;  $(L) ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ ;  $(L) (((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow A))$ 。
- (4)推理规则: 从 A 和  $(A \rightarrow B)$  可推出 B。

**证明:** L 中的证明是合式公式的一个有穷序列  $A, A, \dots A$ , 其中 A 或者是公理, 或者是序列中其前的某两个合式公式经 MP 规则得到。并称该证明人是 A 是在 L 中的证明, 称 A 是 L 的定理, 记作  $\vdash A$ 。

**演绎:** 设  $\Gamma$  是合式公式集, L 中的从  $\Gamma$  推出 A 的一个演绎是合式公式的一个有穷序列  $A, A, \dots A$ , 其中 A 或者是公理, 或者是  $\Gamma$  中的一个合式公式, 或者是序列中其前的某两个合式公式经 MP 规则得到。  $\Gamma$  中的合式公式称为假设。

#### L 的演绎定理:

推论: 设 A, B, C 是 L 的任意合式公式, 则  $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C$ 。

### 1.6 联结词的全功能集

设 C 是联结词的集合, 若任何公式均可由仅含 C 中联结词的公式等价的表示, 则称 C 是联结词的**全功能集**; 若从 C 中任意去掉一个联结词, 则 C 不是全功能集, 则称 C 是联结词的**极小全功能集**。

## 第二章 一阶逻辑

### 2.1 命题符号化

在一阶逻辑中, 我们把所讨论的对象称为**个体**, 用来表示个体的符号称为**个体词**。若一个个体词表示一个特定个体, 则称之为**个体常元**; 若一个个体词泛指任何一个个体, 则称之为**个体变元**; 个体变元的取值范围称为**个体域**或**论域**。

在简单命题中，表示个体的性质或个体之间联系的词称为谓词，表示数量的词称为量词，量词一般有两种：全称量词 $\forall$ 和存在量词 $\exists$

2.2 合式公式

一阶谓词逻辑的字母表 $\Sigma$ 为

个体常元	$a, b, c, \dots$
个体变元	$x, y, z, \dots$
函数符号	$f, g, h, \dots$ ( $n$ 元函数 $f$ 可记为 $f$ )
谓词符号	$P, Q, R, \dots$
联结词	$\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
量词	$\forall \exists$
辅助符号	$()$

项的归纳定义如下：(1)个体常元和个体变元是项；(2)若  $t, t, t, \dots$  是项，则  $f(t, t, t, \dots)$  是项；(3)只有通过有限次使用 (1) 和 (2) 所得到的符号串是项。

设  $t, t, t, \dots, t$  是项，则称  $P(t, t, t, \dots, t)$  为**原子公式**。

**合式公式**的归纳定义如下：(1)原子公式是合式公式；(2)若  $A, B$  是合式公式，则  $(\neg A), (A \wedge), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B), \forall xA, \exists xA$  是合式公式；(3)只有通过有限次使用 (1), (2) 所得到的符号串才是合式公式。

在合式公式  $QxA$  中，称  $A$  为  $Q$  的**辖域**，其中  $Q$  为 $\forall$ 或 $\exists$ 。变元  $x$  在  $Qx$  及  $Q$  的辖域中的出现称为  $x$  的**约束出现**，并称  $x$  为**约束变元**； $x$  的非约束出现称为  $x$  的**自由出现**，并称  $x$  为**自由变元**。

**换名规则**：若要将约束变元  $x$  改为  $y$ ，则(1)将  $Qx$  中的  $x$  及在  $Q$  的辖域中自由出现的  $x$  均改为  $y$ ；(2) $y$  不在限制  $x$  的量词的辖域中出现。

2.2 永真公式

合式公式  $G$  的一个  $I$  是由一个非空集合  $D$  （称为  $I$  的论域）和如下一组规则组成：

- (1)对  $G$  中的每一个个体常元和自由个体变元指定  $D$  中的一个元素；
- (2)对  $G$  中的每一个  $n$  元函数，指定  $D$  上的一个  $n$  元函数；
- (3)对  $G$  中的每一个  $n$  元谓词符号，指定  $D$  上的一个  $n$  元谓词。

永真式：

2.4 范式

称下述形式的公式为**前束范式**： $QxQxQxQ \dots B$ , 其中  $Q$  为 $\forall$ 或 $\exists$ ,  $B$  是不含任何量词的公式。并称  $QxQxQxQ$  为**前束词**，称  $B$  为**母式**。

Skolem 范式

设前束范式为  $QxQx \dots Qx \dots Qx B$ 。若  $Qx$  为 $\exists x$  ( $1 \leq t \leq r$ ), 那么(1)当  $Qx$  左边无全

称量词时，用  $B$  中未出现的个体常元  $a$  支代替  $B$  中  $x$  的所有出现，并删支出  $Qx$ ；(2)当  $Qx$  左边的所有全称量词为  $Qx_1 Qx_2, \dots, Qx_n$  ( $1 \leq n$ ) 时，取  $B$  中未出现的  $s$  元函数符号  $f$ ，用  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  代替  $B$  中  $x$  的所有出现，并删支  $Qx$ 。这种消去量词的变换称为 **Skolem 变换**。

## ▲2.5 推理理论

- (1)全称指定规则 (US 规则):
- (2)存在推广规则 (EG 规则):
- (3)存在指定规则 (ES 规则):
- (4)全称推广规则 (UG 规则):

## 第二编 集合论

### 第三章 集合

#### 3.1 集合的基本概念及其表示法

集合,  $N, I, Q, R, C$

●设  $A$  是任意集合,  $|A|$  表示  $A$  所含有的元素的个数。

- (1)若  $|A|=0$ , 则称  $A$  是空集, 记作  $\emptyset$ 。
- (2)若  $|A|$  是自然数, 则称  $A$  是有限集。
- (3)若  $|A|$  无穷大, 则称  $A$  是无限集。

▲集合的表示法:(1)列举法 按某一次序列出集合的全部或部分元素, 并用一对花括号括起;

(2)描述法 用谓词描述出集合元素的公共特征, 其形式为  $S=\{x|P(x)\}$ ;

(3)归纳定义法 通常包括以下三步:

- ①基本步  $S$  非空且  $S$  中的任意元素均是  $A$  的元素;
- ②归纳步 给出一组规则, 从  $A$  的元素出发, 依据这些规则所得到的仍是  $A$  的元素;
- ③极小化 若  $S$  的任意元素均是  $A$  的元素, 并且  $S$  满足①和②, 则  $S$  与  $A$  有相同的元素。

元素可以多次出现的集合为**多重集**, 无特别说明, 集合均指一般集合, 不是多重集。

#### 3.2 集合的运算

并: 交:

差: 补:

完全以集合为元素的集合称为集类, 常用字母  $\mathcal{A}$  表示。

广义交: 广义并:

▲

环和: 环积:

幂: 设  $A$  是集合, 则称  $\{x|x \subseteq A\}$  为  $A$  的幂集,  $A$  的幂集即是由  $A$  的所有子集组成的集合。

#### 3.3 基本集合恒等式

### 3.4 容斥原理

### 3.5 集合的笛卡尔积

- 称  $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$  为由  $x$  和  $y$  组成的**有序二重组**，也称为**序偶**。
- 设  $n \in I$ ,  $x, x, \dots, x$  是  $n$  个任意的元素。(1)若  $n=1$ , 则令  $\langle x \rangle = x$ ; (2)若  $n=2$ , 则令  $\langle x, x \rangle = \{\{x\}, \{x, x\}\}$ ; (3)若  $n>2$ , 则令  $\langle x, x, \dots, x \rangle = \langle \langle x, x, \dots, x \rangle, x \rangle$ . 称  $\langle x, x, \dots, x \rangle$  是由  $x, x, \dots, x$  组成的**有序  $n$  重组**，称  $x$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是它的第  $i$  个分量。
- 设  $n \in I$ , 集合  $A, A, \dots, A$  的**笛卡尔积**  $A A \dots A$  定义为  $A A \dots A = \{\langle a, a, \dots, a \rangle \mid a \in A, i=1, 2, 3, \dots, n\}$ . 称  $n$  为该笛卡尔积的**维数**。若  $A=A=\dots A$ , 则记  $A A A \dots A$  为  $A^n$ 。笛卡尔积满足下列分配律:

## 第四章 二元关系

- 设  $n \in I$ ,  $A, A, \dots, A$  是  $n$  个集合,  $R \subseteq A A \dots A$ , 称  $R$  是集合  $A, A, \dots, A$  上的 **$n$  元关系**。若  $A=A=\dots=A=A$ , 则称  $R$  是  $A$  上的 **$n$  元关系**。当  $n=2$  时, 称  $R$  是  $A$  到  $A$  的**二元关系**,  $A$  称为  $R$  的**前域**,  $A$  称为  $R$  的**陪域**, 称  $\text{dom}(R) = \{x \mid x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R\}$  为  $R$  的**定义域**, 称  $\text{ran}(R) = \{y \mid y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R\}$  为  $R$  的**值域**。

若  $\langle a, b \rangle \in R$ , 则说  $a$  与  $b$  有关系  $R$ , 常用中缀法记为  $aRb$ ; 若  $\langle a, b \rangle \notin R$ , 则说  $a$  与  $b$  没有关系  $R$ , 常用中缀法记为  $a \not R b$ 。

由于任意集合均有两个平凡子集, 即空集和集合自身, 因此称  $A A \dots A$  上的关系为**空关系**, 称  $A A \dots A$  为**全域关系**。

$A$  上的关系  $\{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$  称为  $A$  上的**恒等关系**, 记为  $I$ 。

- 设  $R \subseteq A, R \subseteq A$ . 若 (1)  $n=m$ ; (2)  $R=R$ ; (3) 集合  $R$  和  $R$  相等, 则称关系  $R$  与  $R$  相等, 记为  $R=R$ 。

#### ▲关系的表示

(1)集合表示法; (2)关系矩阵表示法; (3)关系图表示法。

### 4.2 关系的性质

- 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A A$ . (1)若  $\forall x (x \in A \rightarrow xRx)$ , 则称  $R$  是**自反的**; (2)若  $\forall x (x \in A \rightarrow \neg xRx)$ , 则称  $R$  是**反自反的**; (3)若  $\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$ , 则称  $R$  是**对称的**; (4)若  $\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$ , 则称  $R$  是**反对称的**; (5)若  $\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ , 则称  $R$  是**传递的**。

### 4.3 关系的运算

- 设  $A, B$  是集合,  $R \subseteq A B$ , 且  $S \subseteq A B$ , 则**交**  $R \cap S$ , **并**  $R \cup S$ , **差**  $R-S$  和**补**  $R$  均是  $A$  和  $B$  上的二元关系, 且  $x(R \cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$ ,  $x(R \cup S)y \Leftrightarrow xRy \vee xSy$ ,  $x(R-S)y \Leftrightarrow xRy \wedge \neg xSy$ ,  $xRy \Leftrightarrow$

$xRy$ .

- 设  $A$  和  $B$  是集合,  $R \subseteq A \times B$ , 令  $R^{-1} \subseteq B \times A$  且  $R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle | xRy \}$ , 则称  $R^{-1}$  是  $R$  的**逆关系**。
- ▲ 设  $A$  和  $B$  是集合,  $R_i \subseteq A \times B (i=1,2)$ , 则 (1)  $(R^{-1})^{-1} = R$ ; (2)  $(R \cap R_i)^{-1} = R^{-1} \cap R_i^{-1}$ ; (3)  $(R \cup R_i)^{-1} = R^{-1} \cup R_i^{-1}$ ; (4)  $(R - R_i)^{-1} = R^{-1} - R_i^{-1}$ ; (5)  $(R^{-1})^{-1} = R$ ; (6) 若  $R \subseteq R_i$ , 则  $R^{-1} \subseteq R_i^{-1}$ 。
- 关系的合成: 设  $A, B$  和  $C$  是集合,  $R \subseteq A \times B$ ,  $R_i \subseteq B \times C$ ,  $R$  与  $R_i$  的合成关系是  $R \circ R_i \subseteq A \times C$ , 且  $R \circ R_i = \{ \langle x, z \rangle | x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y (y \in B \wedge xRy \wedge yR_i z) \}$ 。

合成运算不满足交换律, 但是它满足结合律。

▲

- 关系的幂: 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 则  $R$  的  $n$  次幂定义为  $R^0 = I_A$ ,  $R^n = R \circ R^{n-1}$ 。

▲

- 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A$ 。若  $R \subseteq A \times A$ , 且满足: (1)  $R$  是自反的 (对称的、传递的); (2)  $R \subseteq R$ ; (3) 若  $R \subseteq A \times A$  且满足: ①  $R$  是自反的 (对称的、传递的), ②  $R \subseteq R$ , 则  $R \subseteq R$ ; 那么称  $R$  是  $R$  的自反 (对称、传递) **闭包**, 记为  $r(R)$  ( $s(R)$ ,  $t(R)$ )。
- ▲ 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A$ , 则 (1)  $R$  是自反的当且仅当  $r(R) = R$ ; (2)  $R$  是对称的当且仅当  $s(R) = R$ ; (3)  $R$  是传递的当且仅当  $t(R) = R$ 。
- ▲ 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A$ , 则 (1)  $r(R) = R \cup I_A$ ; (2)  $s(R) = R \cup R^{-1}$ ; (3)  $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。
- ▲ 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A (i=1,2)$ , 若  $R \subseteq R_i$ , 则 (1)  $r(R) \subseteq r(R_i)$ ; (2)  $s(R) \subseteq s(R_i)$ ; (3)  $t(R) \subseteq t(R_i)$ 。
- ▲ 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A$ , (1) 若  $R$  是自反的, 则  $s(R)$  和  $t(R)$  自反的; (2) 若  $R$  是对称的, 则  $r(R)$  和  $t(R)$  是对称的; (3) 若  $R$  是传递的, 则  $r(R)$  传递的。
- ▲ 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A$ , 则 (1)  $rs(R) = sr(R)$ ; (2)  $rt(R) = tr(R)$ ; (3)  $st(R) \subseteq ts(R)$ 。

#### 4.4 等价关系和划分

- 设  $A$  是集合,  $R \subseteq A \times A$ 。若  $R$  是自反的、对称的和传递的, 则称  $R$  是  $A$  上的**等价关系**, 并且若  $aRb$ , 则说  $a$  与  $b$  等价。
- 设  $R$  是集合  $A$  上的等价关系。对任何  $a \in A$ , 称  $[a] = \{ x | x \in A \wedge xRa \}$  为  $a$  关于  $R$  的**等价类** (有时简记为  $[a]$ ), 并且称  $a$  为  $[a]$  的代表元; 若等价类个数有限, 则称  $R$  的不同类的个数为  $R$  的**秩**, 否则称  $R$  的秩是无限的, 称  $\{ [a] | a \in A \}$  为  $A$  关于  $R$  的**商集**, 记为  $A/R$ 。
- ▲ 设  $R$  是  $A$  上的等价关系,  $A = \bigcup_{i=1}^n [a_i]$ ,  $a, b \in A$ , 则 (1)  $[a] = [b]$  当且仅当  $aRb$ ; (2)  $aRb$  当且仅当  $[a] = [b]$ ; (3)  $[a] \cap [b] = \emptyset$  或者  $[a] \cap [b] = [a]$ 。
- 设集合  $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ ,  $\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \dots, A_k \}$ 。若  $\mathcal{A}$  满足: (1)  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ ; (2)  $A$  中任意两个不同元素不相交; (3)  $\bigcup_{i=1}^k A_i = A$ ; 则称  $\mathcal{A}$  是  $A$  的一个**划分**, 且称  $A_i$  中的元素为**划分块**; 若  $k$  有限, 则称  $\mathcal{A}$  的不同划分块的个数为  $\mathcal{A}$  的**秩**, 否则称  $\mathcal{A}$  的秩是无限的。
- ▲ 设集合  $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ ,  $R$  是  $A$  上的等价关系, 则  $A/R$  是  $A$  的一个划分。
- ▲ 设集合  $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ ,  $R$  和  $R_i$  是  $A$  上的等价关系, 则  $R \subseteq R_i$  当且仅当  $A/R \subseteq A/R_i$ 。
- 等价关系可以诱导一个划分, 一个等价关系所诱导的划分是惟一的。
- ▲ 设  $\mathcal{A}$  是非空集合  $A$  的划分, 定义  $A$  上的二元关系  $R$  为:  $aRb$  当且仅当  $a$  和  $b$  同属于  $A$  的一个划分块。则  $R$  是  $A$  上的等价关系。
- ▲ 设集合  $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ ,  $\mathcal{A}$  是  $A$  的一个划分,  $R$  是  $A$  上的一个等价关系, 则  $\mathcal{A}$  诱导  $R$  当且仅当  $R$  诱导  $\mathcal{A}$ 。
- 一个等价关系可以惟一诱导出一个划分, 一个划分也可惟一确定一个等价关系。
- ▲ 设集合  $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ ,  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  是  $A$  的划分, 且它们诱导的等价关系分别为  $R$  和  $R_i$ , 那么  $\mathcal{A}$  细分  $\mathcal{B}$  当且仅当  $R \subseteq R_i$ 。

- 设集合  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ ，和  $\mathcal{A}$  是  $A$  划分。(1)若  $\mathcal{A}$  是  $A$  的划分，且① 细分  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$ ；②若  $\mathcal{B}$  细分  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{C}$ ，则  $\mathcal{C}$  细分  $\mathcal{A}$ ，则称  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  的积。记为  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 。(2)若  $\mathcal{A}$  是  $A$  的划分，且①  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  细分  $\mathcal{C}$ ；②若  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  细分  $\mathcal{A}$ ，则  $\mathcal{C}$  细分  $\mathcal{A}$ ，则称  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  的和。记为  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 。
- ▲ 设集合  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ ，和  $\mathcal{A}$  是  $A$  的划分，且它们诱导的等价关系分别为  $R$  和  $R'$ ，那么(1) $R \cap R'$  诱导的划分是  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ；(2) $t(R \cup R')$  诱导的划分是  $\mathcal{A}$ 。

#### 4.5 序关系

序关系是一类重要的二元关系，它提供了比较集合中元素的一种方法。

- **偏序关系**：设  $A$  是集合， $R \subseteq A \times A$ 。若  $R$  是自反的、反对称的和传递的，则称  $R$  是  $A$  上的偏序关系，并称  $\langle A, R \rangle$  是偏序集。  
偏序关系有时也称作半序或部分序关系，常用  $\leq$  表示偏序关系。
- **覆盖**：设  $R$  是集合  $A$  上的偏序关系， $a \in A$ 。若  $b \in A$  满足(1) $aRb$  且  $b \neq a$ ；(2)若  $x \in A$  使得  $aRx$  且  $xRb$ ，则必有  $x=a$  或  $x=b$ 。那么称  $b$  是  $a$  关于  $R$  的覆盖。
- 

- **拟序关系**：设  $A$  是集合， $R \subseteq A \times A$ 。若  $R$  是反自反的和传递的，则称  $R$  是  $A$  上的拟序关系，并称  $\langle A, R \rangle$  是拟序集。
- ▲ 拟序关系是反对称的。
- ▲ 设  $A$  是集合。 $R \subseteq A \times A$ 。(1)若  $R$  是偏序关系，则  $R \cup I$  是拟序关系；(2)若  $R$  是拟序关系，则  $R \cup I$  是偏序关系。
- **全序关系**：设  $\langle A, \leq \rangle$  是偏序集，若  $\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$ ，则称  $\leq$  是  $A$  上的全序关系，并称  $\langle A, \leq \rangle$  为全序集。全序关系也称作线序关系，全序集  $\langle A, \leq \rangle$  也称作线序集或链。
- **良序关系**：设  $\langle A, \leq \rangle$  是偏序集，若对任意的  $S, \emptyset \neq S \subseteq A$ ，则  $S$  有最小元，那么称  $\leq$  是  $A$  上的良序关系，并称  $\langle A, \leq \rangle$  为良序集。

#### 4.6 相容关系

- 设  $A$  是集合， $R \subseteq A \times A$ 。若  $R$  是自反的和对称的，则称  $R$  是  $A$  上的**相容关系**；若  $aRb$ ，则称  $x$  与  $y$  相容，否则称  $x$  与  $y$  不相容。
- 设  $R$  是集合  $A$  上的相容关系。(1)若  $C \subseteq A$ ，且  $\forall a, b \in C$ ，有  $aRb$ ，则称  $C$  是  $R$  的一个**相容类**。(2)若  $C$  是  $R$  的相容类， $\forall b \in C$ ，则必有  $a \in C$  使得  $aRb$ ，那么称  $C$  是  $R$  的一个**极大相容类**。
- ▲ 求极大相容类的方法：(1)关系图法；(2)关系矩阵法。

## 第五章 函数

### 5.1 函数的基本概念和性质

- 设  $X$  和  $Y$  是任意集合， $f \subseteq X \times Y$ 。若  $\forall x (x \in X \rightarrow \exists ! y (y \in Y \wedge \langle x, y \rangle \in f))$ ，则称  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的函数，记为  $f: X \rightarrow Y$ 。  
设  $f: X \rightarrow Y, X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。定义  $R \subseteq X \times X$  为  $\forall x, y \in X, x R y$  当且仅当  $f(x) = f(y)$ ，则易证  $R$  是  $X$  上的等价关系（称之为由  $f$  诱导的等价关系），并且由关系  $R$  确定的划分为  $\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$ 。

$\in Y \wedge f(\{y\}) = \{y\}$ . 令  $g: X \rightarrow X/R, g(x) = [x]$ , 称  $g$  是由  $f$  诱导的规范映射。可见对给定的一个函数均可得到一个规范映射。

- 设  $X$  和  $Y$  是任意集合, 则从  $X$  到  $Y$  的所有函数构成的集合记为  $Y^X$ , 即  $Y^X = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ . 当一个函数是递归定义时, 常需要验证函数是良定的 (well-defined).
- 设  $f: X \rightarrow Y$ . (1) 若  $f(X) = Y$ , 则称  $f$  是满射的。(2) 若  $\forall x \forall y (x \in X \wedge f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$ , 则称  $f$  是单射的。(3) 若  $f$  既是单射的, 又是满射的, 则称  $f$  是双射的。
- **集合的特征函数**: 设  $U$  是全集,  $A \subseteq U$ . 定义  $A$  的特征函数为  $\chi_A: U \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

## 5.2 函数的合成

- ▲ 设  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ , 则  $f$  与  $g$  的合成关系  $g \circ f$  是从  $X$  到  $Z$  的函数, 并且对一切  $x \in X, f(g(x)) = g(f(x))$ .
- ▲ 设  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ , 则 (1) 若  $f$  和  $g$  是满射, 则  $g \circ f$  是满射; (2) 若  $f$  和  $g$  是单射, 则  $g \circ f$  是单射; (3) 若  $f$  和  $g$  是双射, 则  $g \circ f$  是双射。
- ▲ 设  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ , 则 (1) 若  $g \circ f$  是满射, 则  $g$  是满射; (2) 若  $g \circ f$  是单射, 则  $f$  是单射; (3) 若  $g \circ f$  是双射, 则  $g$  是满射且  $f$  是单射。

## 5.3 逆函数

- ▲ 设  $f: X \rightarrow Y$  是双射, 则  $f$  的逆关系  $f^{-1}$  是从  $Y$  到  $X$  的函数。
- ▲ 设  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的双射,  $g$  是从  $Y$  到  $X$  的函数, 则  $f^{-1} = g$  当且仅当  $g \circ f = 1_X$  且  $f \circ g = 1_Y$ .
- 设  $f: X \rightarrow Y$ . 若有  $g: Y \rightarrow X$  使得  $g \circ f = 1_X$  和  $f \circ g = 1_Y$  成立, 则称  $g$  是  $f$  的逆函数, 并称  $f$  是可逆的。
- (1) 若有  $g: X \rightarrow Y$ , 使得  $g \circ f = 1_X$  成立, 则称  $g$  是  $f$  的左可逆函数, 并称  $f$  是左可逆的。(2) 若有  $g: X \rightarrow Y$ , 使得  $f \circ g = 1_Y$  成立, 则称  $g$  是  $f$  的右可逆函数, 并称  $f$  是右可逆的。
- ▲ 设  $f: X \rightarrow Y, X \neq \emptyset$ , 则 (1)  $f$  是左可逆的当且仅当  $f$  是单射; (2)  $f$  是右可逆的当且仅当  $f$  是满射; (3)  $f$  是可逆的当且仅当  $f$  是双射, 或当且仅当  $f$  既是左可逆的, 又是右可逆的。

# 第六章 集合的基数

## 6.1 可数集和无限集

- 设  $S$  是任一集合, 称  $S^+ = S \cup \{S\}$  的后继集。
- 自然数  $N$  的归纳定义是: (1)  $0 \in N$ ; (2) 若  $n \in N$ , 则  $n^+ \in N$ ; (3) 若  $S \in N$ , 且满足 ①  $0 \in S$ ; ② 若  $n \in S$ , 则  $n^+ \in S$ ; 则  $S = N$ .
- 若  $m, n \in N, n \neq 0$  使  $m \in n$ , 则称  $m$  小于  $n$ , 记为  $m < n$ .
- 设  $A$  和  $B$  是任意集合, 若存在从  $A$  到  $B$  的双射, 则称  $A$  与  $B$  是等势的, 记为  $A \sim B$ ; 若  $A$  与  $B$  不等势, 则记为  $A \not\sim B$ .
- 若有  $n \in N$ , 使得  $N \sim A$ , 则称  $A$  是**有限集**, 且称其基数为  $n$ , 记为  $|A| = n$ ; 若  $A$  不是有限集, 则称  $A$  是**无限集**.
- ▲ 任何有限子集都不能与它的真子集等势
- 设  $A$  是任意集合. 若  $N \sim A$ , 则称  $A$  是**可数无限集**, 并称  $A$  的基数为  $\aleph_0$  (读作阿列夫零), 记为  $|A| = \aleph_0$ . 有限集与可数无限集称为**可数集**或**可列集**; 非可数集合称为**不可数集**.
- ▲ 可数集的任何子集都是可数集。可数个可数集的并集是可数集。若  $A$  和  $B$  是可数集, 则  $A \times B$  是可数集。



- ▲ 实数集合的子集  $[0, 1]$  不是可数无限集合。
  - 设  $A$  是任意集合。若  $[0, 1]^A$ , 则称  $A$  的基数为  $\aleph_A$  (读作阿列夫), 并称  $A$  是具有连续统势的集合, 记为  $|A| = \aleph_A$ 。
  - ▲ 设  $A, B, C$  和  $D$  是任意集合,  $A \sim B, C \sim D, A \cap C = B \cap D = \emptyset$ , 则  $A \cup C \sim B \cup D$ 。
- ### 6.2 集合基数的比较
- 设  $A$  和  $B$  是任意集合。若存在从  $A$  到  $B$  的双射函数, 则称  $A$  和  $B$  具有**相同的基数**。
  - ▲ 设  $A$  和  $B$  是任意集合, 则  $|A| = |B|$ ,  $|A| < |B|$  和  $|A| > |B|$  恰有一个成立。
  - ▲ 设  $A$  和  $B$  是任意集合。若  $|A| \leq |B|$ , 且  $|B| \leq |A|$ , 则  $|A| = |B|$ 。
- 要证明  $A$  与  $B$  有相同的基数, 只需找一个从  $A$  到  $B$  的双射即可。而此定理告诉我们, 只要找一个从  $A$  到  $B$  的单射和一个从  $B$  到  $A$  的单射就能证明  $A$  与  $B$  有相同的基数。
- ▲ 下列三个条件是等价的: (1) $A$  是无限集; (2) $A$  有可数无限子集; (3) $A$  有与其自身等势的真子集。
  - ▲ (1)若  $A$  是有限集, 则  $|A| < \aleph_A$ . (2)若  $A$  是无限集合, 则  $\aleph_A \leq |A|$ .
  - ▲ 设  $A$  是任意集合, 则  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ .

## 第七章 代数系统

- 设  $A$  为非空集合,  $n \in \mathbb{I}$ , 函数  $f: A \rightarrow A$  称为  $A$  上的一个  $n$  元运算,  $n$  称为该运算的阶。特别地,  $A$  中的每一个元素称为  $A$  上的一个 0 元运算。
- 设  $\circ$  是集合  $A$  上的  $n$  元运算,  $S$  是  $A$  的非空子集, 若  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ , 有  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$ , 则称  $S$  关于运算  $\circ$  是封闭的。
- ▲ 设  $\circ$  是  $A$  上的  $n$  元运算,  $\mathcal{S}$  是  $\mathcal{P}(A)$  的非空集合, 若  $\forall S \in \mathcal{S}$ ,  $S$  关于  $\circ$  封闭, 则  $\mathcal{S}$  关于  $\circ$  也封闭, 即广义交保持封闭性。
- 设  $*$  是集合  $A$  上的二元运算。若  $\forall a, b \in A$ , 有  $a * b = b * a$ , 则称  $*$  是可交换的, 或称  $*$  满足交换律。
- 设  $*$  是集合  $A$  上的二元运算。若  $\forall a, b, c \in A$ , 有  $(a * b) * c = a * (b * c)$ , 则称  $*$  是可结合的, 或称  $*$  满足结合律。
- 设  $*$  和  $\circ$  是  $A$  上的二元运算。(1)若  $\forall a, b, c \in A$ , 有  $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ , 则称  $*$  关于  $\circ$  是左可分配的。(2)若  $\forall a, b, c \in A$ , 有  $(b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a)$ , 则称  $*$  关于  $\circ$  是右可分配的。(3)若  $*$  关于  $\circ$  既是左可分配的, 又是右可分配的, 则称  $*$  关于  $\circ$  是满足分配律。
- ▲ 设  $*$  是  $A$  上可结合的二元运算, 则  $\forall n \in \mathbb{I}, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ , 表达式  $a_1 * a_2 * \dots * a_n$  经任意加括号而计算出的结果不变。
- ▲ 若  $*$  是  $A$  上可结合的二元运算, 则  $\forall a \in A$  及  $\forall m, n \in \mathbb{I}$ , 有  $a * a * \dots * a = a^{m+n}$ ,  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ 。
- 设  $*$  是  $A$  集合上的二元运算。(1)若  $\exists e \in A$ , 使得  $\forall a \in A$ , 有  $e * a = a$ , 则称  $e$  为关于  $*$  的左单位元, 也称左幺元。(2)若  $\exists e \in A$ , 使得  $\forall a \in A$ , 有  $a * e = a$ , 则称  $e$  为关于  $*$  的右单位元, 也称右幺元。(3)若  $\exists e \in A$ , 使得  $\forall a \in A$ , 有  $e * a = a * e = a$ , 则称  $e$  为关于  $*$  的单位元, 也称幺元。
- ▲ 设  $*$  是  $A$  上的二元运算,  $e$  和  $e'$  分别是关于  $*$  的左、右单位元, 则  $e = e'$ , 且它是关于  $*$  的惟一单位元。
- 设  $*$  是集合  $A$  上的二元运算。(1)若  $\exists 0 \in A$ , 使得  $\forall a \in A$ , 有  $0 * a = 0$ , 则称  $0$  为关于  $*$  的左零元。(2)若  $\exists 0 \in A$ , 使得  $\forall a \in A$ , 有  $a * 0 = 0$ , 则称  $0$  为关于  $*$  的右零元。(3)若  $\exists 0 \in A$ , 使得  $\forall a \in A$ , 有  $0 * a = a * 0 = 0$ , 则称  $0$  为关于  $*$  的零元。
- ▲ 设  $*$  是集合  $A$  上的二元运算,  $0$  和  $0'$  分别是关于  $*$  的左、右零元, 则  $0 = 0'$ , 且它是关于  $*$  的惟一零元。

- 设 $*$ 是集合 $A$ 上的二元运算,  $e$ 是关于 $*$ 的单位元,  $a \in A$ . (1)若 $\exists a \in A$ , 使得 $a * a = e$ , 则称 $a$ 关于 $*$ 是左可逆的, 并称 $a$ 是 $a$ 的关于 $*$ 的左逆元。(2)若 $\exists a \in A$ , 使得 $a * a = e$ , 则称 $a$ 关于 $*$ 是右可逆的, 并称 $a$ 是 $a$ 的关于 $*$ 的右逆元。(3)若 $\exists a \in A$ , 使得 $a * a = a * a = e$ , 则称 $a$ 关于 $*$ 是可逆的, 找称 $a$ 为 $a$ 的关于 $*$ 的逆元。