

MA206 Homework3

12110120 赵钊

2023 年 3 月 20 日

1 概述

这是 MA206 2023 Spring 的第 3 次作业，共 2 题。

第 1 题为利用动力系统计算总经济能否达到目标及达到目标的时间，解题步骤为列出递推式，通过递推式求解出通式，最后进行判断。

第 2 题与第 1 题相似，列出递推式并进行求解。第 2 问通过计算总还款金额来判断重新融资是否合理。

2 第 1 题

2.1 符号说明

序号	符号	符号说明
1	a_n	第 n 个月后需要还款的金额
2	r_m	第 m 年增加的利息
3	l	最优惠成交额
4	l_0	定金

表 1: 第 1 题符号说明

2.2 递推式分析

根据题意，容易得知，在支付完定金之后，有关系式：

$$a_n = a_0 - 500 + \frac{1}{12}r_m$$

其中

$$a_0 = l - l_0$$

2.3 问题求解

以列表中的第 1 个 Ford Fiesta 为例，在第 1 个月支付完定金 500\$ 后，

$$a_0 = 14200 - 500 = 13700$$

$$r_1 = a_0 \times 4.5\% = 616.5$$

因此第 1 年过后,

$$a_12 = a_0 - 6000 + r_1 = 8316.5$$

$$r_2 = a_12 \times 4.5\% = 374.2425$$

第 2 年过后,

$$a_24 = a_12 - 6000 + r_2 = 2690.7425$$

$$r_3 = a_24 \times 4.5\% = 121.01$$

发现

$$a_36 = a_24 - 6000 + r_3 < 0$$

得出结论在付清定金的第 3 年内, 可以买到 Ford Fiesta

同样的方式对其他 7 个公司提供的方案进行求解, 得到结果如下

名称	能否购买
Ford Focus	能
Chevy Volt	否
Chevy Cruz	能
Toyota Camry	能
Toyota Camry Hybrid	能
Toyota Corolla	能
Toyota Prius	能

表 2: 第 1 题结论

2.4 结论

按照题目条件给定的策略进行购买, 可以买到 Ford Fiesta、Ford Focus、Chevy Cruz、Toyota Camry、Toyota Camry Hybrid、Toyota Corolla 和 Toyota Prius, 即除去 Chevy Volt 均可以购买。

3 第 2 题

3.1 符号说明

序号	符号	符号说明
1	a_n	第 n 个月后可以还款的金额
2	r	月利率
3	p	月还款额

表 3: 第 2 题符号说明

3.2 第 1 问

由题目可知:

$$a_0 = 250000, r = 0.4\%$$

根据等量关系列出递推式:

$$a_n = (1 + r)a_{n-1} - p$$

进行恒等变换有:

$$a_n - \frac{p}{r} = (1 + r)a_{n-1} - p - \frac{p}{r}$$

$$a_n - \frac{p}{r} = (1 + r)(a_{n-1} - \frac{p}{r})$$

由递推式可以得到:

$$a_n = (1 + r)^n(a_0 - \frac{p}{r}) + \frac{p}{r}$$

带入 $a_{360} = 0$ 、 $a_0 = 250000$ 和 $r = 0.4\%$ 解得:

$$p = 1311.66$$

结论: 每月还款数额 $p = 1311.66\$$

3.3 第 2 问

$$a_{96} = (1 + r)^{96}(a_0 - \frac{p_0}{r}) + \frac{p_0}{r}$$

其中

$$a_0 = 250000, r = 0.4\%, p_0 = 1311.66$$

得到

$$a_{96} = 213614$$

同样地, 将 $b_0 = 213614$ 、 $b_{20} = 0$ 、 $r_1 = 4\%$ 代入如下表达式

$$b_n = (1 + r_1)^n(b_0 - \frac{p_1}{r_1}) + \frac{p_1}{r_1}$$

解得

$$p_1 = 15718.2$$

因此改为 20 年期贷款的月付额为 $\frac{1}{12}p_1 = 1309.85\$$

同法可计算出, 15 年期贷款的月付额为 1578.37\$

原总支付额为 $s_0 = 1311.66 \times 360 = 472198\$$

20 年期贷款总支付额为 $s_1 = 1311.66 \times 96 + 1309.85 \times 240 + 2500 = 442783\$$

15 年期贷款总支付额为 $s_2 = 1311.66 \times 96 + 1578.37 \times 180 + 2500 = 412526\$$

发现 $s_2 < s_1 < s_0$

因此应该选择进行融资, 如果经济可以承担 15 年期贷款的月付额, 应优先选择 15 年期贷款.