Homework 2

问题 1：

数学模型是运用数理逻辑方法和数学语言建构的科学或工程模型。建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁。数学模型是针对参照某种事物系统的特征或数量依存关系，采用数学语言，概括地或近似地表述出的一种数学结构，这种数学结构是借助于数学符号刻划出来的某种系统的纯关系结构。从广义理解，数学模型包括数学中的各种概念，各种公式和各种理论。

在应用数学领域中，数学建模有着非常强大且重要的作用。近期学习的课程常微分方程里面，就有微分方程模型的建立和求解。例如一边进水一边排水的浓度问题，带有空气阻力的自由上抛运动，存款问题等。上节课所学的传染病模型也属于微分方程模型的一种。

问题 2：

见下页

问题 3：

在 SEIRADQ 传染病模型中，通过调整参数可以发现，当居家隔离率（A）较高时，病毒传播速度明显会减缓，但是居家隔离不会影响最终的平衡状态。因此我们在防疫的过程中，确保一定的居家隔离率，确实可以起到不错的效果。

但是我们发现，在后奥密克戎时期，流行的病毒往往不止一种，会有很多的变种的亚种，各地区流行的病毒种类也不完全相同。因此我们可以增加一个病毒种类，让这个模型三维化，同时考虑各种病毒参数不同以及占比不同，以达到更好的模拟。

Epidemic Models 学习笔记

1、概述：

传染病的基本数学模型，研究传染病的传播速度、空间范围、传播途径、动力学机理等问题，以指导对传染病的有效地预防和控制。常见的传染病模型按照传染病类型分为 SI、SIR、SIRS、SEIR 模型等。这里主要讨论前 4 种传染病微分方程模型。

2、SI 模型：

将人群分为 S 类和 I 类，建立如下微分方程

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \text{，} \frac{dI}{dt} = \beta SI$$

这个模型我们可以得出以下两个结论：

（1）指数增长率 r 正比于总人数。当传染率 β 一定时，一定染病地区内的总人数 K 越多，传染病爆发的速度越快，说明了隔离的重要性；

（2）在 $I = \frac{K}{2}$ 时，病人数目 I 增加得最快，是医院的门诊量最大的时候，医疗卫生部门要重点关注。

3、SIR 模型：

SI 模型只考虑了传染病爆发和传播的过程。SIR 模型进一步考虑了病人的康复过程。

模型的微分方程为：

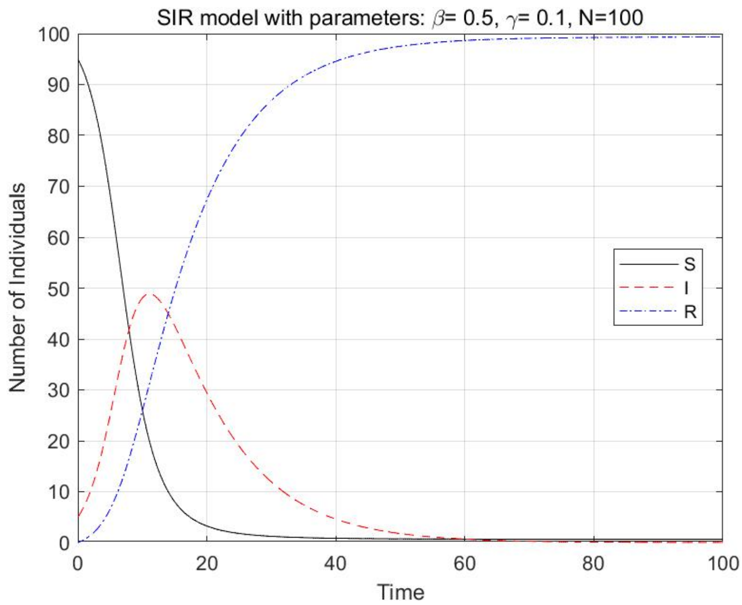
$$\frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N} \text{，} \frac{dI}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \gamma I \text{，} \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

会发现它们的相轨迹满足：

$$I + S - \frac{\gamma}{\beta} \ln S = const$$

给定 $t = 0$ 时刻的初条件 $S = S_0$，随着 S 从 S_0 开始单调递减，染病人数 I 在 $S = \frac{\gamma}{\beta}$ 时达到峰值，随后一直回落，直到减为零。

其函数图像如下：



4、SIRS：

如果所研究的传染病为非致死性的，但康复后获得的免疫不能终身保持，则康复者 R 可能再次变为易感者 S。

此时有微分方程组：

$$\frac{dS}{dt}=-\beta SI+\alpha R,\quad \frac{dI}{dt}=\beta SI-\gamma I,\quad \frac{dR}{dt}=\gamma I-\alpha R$$

分析可知：

系统有两个不动点 $S=N(I=R=0)$ 或 $S=\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{I}{R}=\frac{\alpha}{\gamma}\right)$.前者表示疾病从研究地区消除，而后者则是流行状态。因此消除流行病的参数条件是 $\gamma>\beta N$

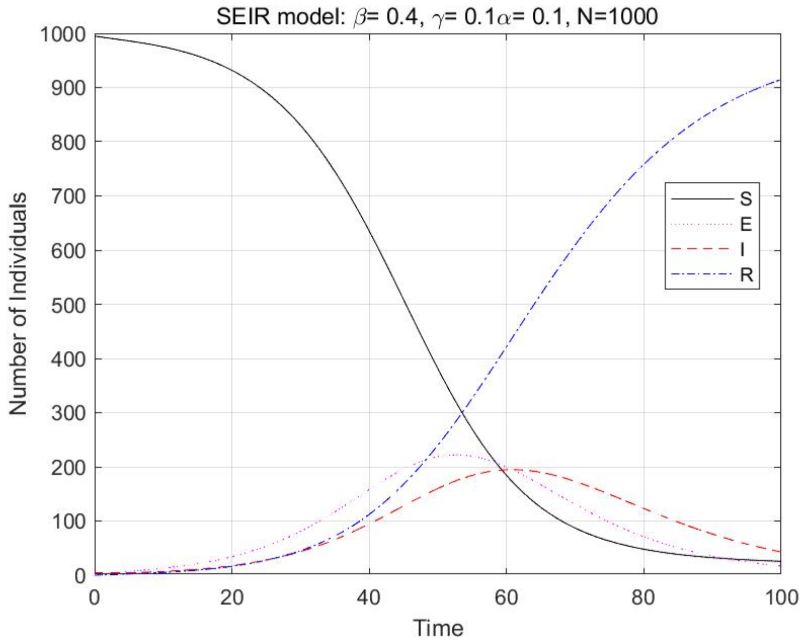
5、SEIR：

如果所研究的传染病有一定的潜伏期，与病人接触过的健康人并不马上患病，而是成为病原体的携带者，归入 E 类。此时有

$$\frac{dS}{dt}=-\beta SI,\quad \frac{dI}{dt}=\alpha E-\gamma_2 I$$

$$\frac{dR}{dt}=\gamma_1 E+\gamma_2 I,\quad \frac{dE}{dt}=\beta SI-(\alpha+\gamma_1)E$$

其函数图像为：



6、总结：

基于常微分方程的传染病模型可以给传染病一个基本的预测，但是过于抽象和简化，导致预测上仍有很多可以改进和不足之处。