

MA206 Homework10

12110120 赵钊

1 第 1 题

1.1 a

画图估计如下:

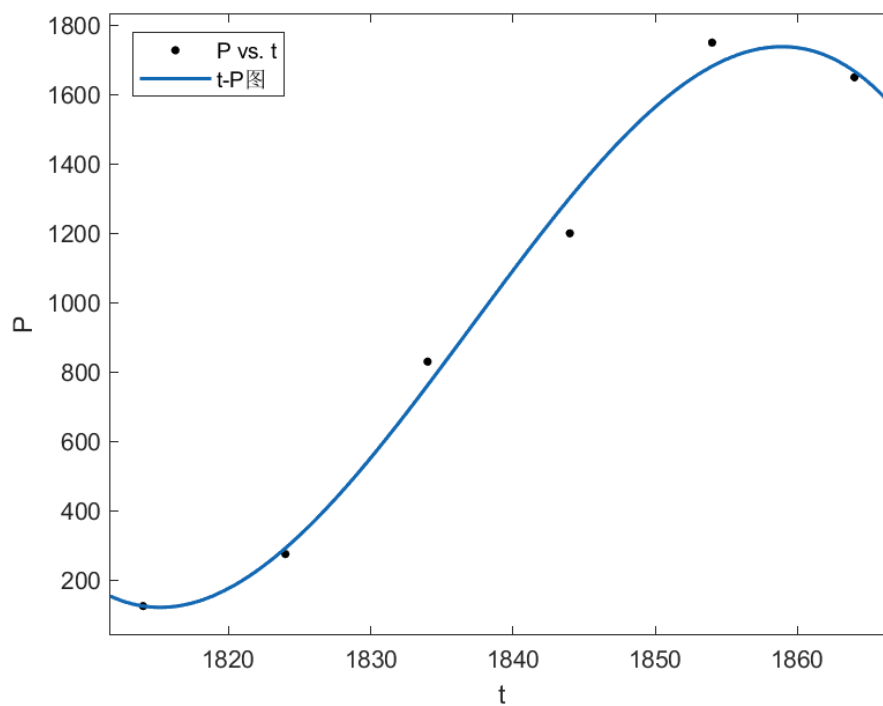


图 1: a

1.2 b

通过取不同的 M 值, 计算 M 与 $\ln[P/(M-P)]$ 的相关系数, 计算结果如下表:

M	1900	1950	2000	2050	2100	2150	2200
$\text{Cov}(t, \ln[P/(M-P)])$	0.963948	0.966361	0.967412	0.967758	0.967713	0.967439	0.967032

发现 $M = 2050$ 时，相关性最大，此时的数据如下表：

t	P	$\ln[P/(M-P)]$
1814	125	-2.734367509
1824	275	-1.864784604
1834	830	-0.385180437
1844	1200	0.344840486
1854	1750	1.763588592
1864	1650	1.41706602

拟合得到：

$$\ln[P/(2050 - P)] = 0.0925t - 170.3$$

即

$$P(t) = \frac{2050}{e^{-0.0925t+170.3} + 1}$$

2 第 2 题

2.1 a

2 个主要影响：

1. 微分方程中的参数 k 会影响方程的变化率，从而影响峰值的大小。
2. 参数 N 影响取到极大或极小值的时候，自变量 X 的值。

2.2 b

以 $k = 1$, $N = 4$ 为例：

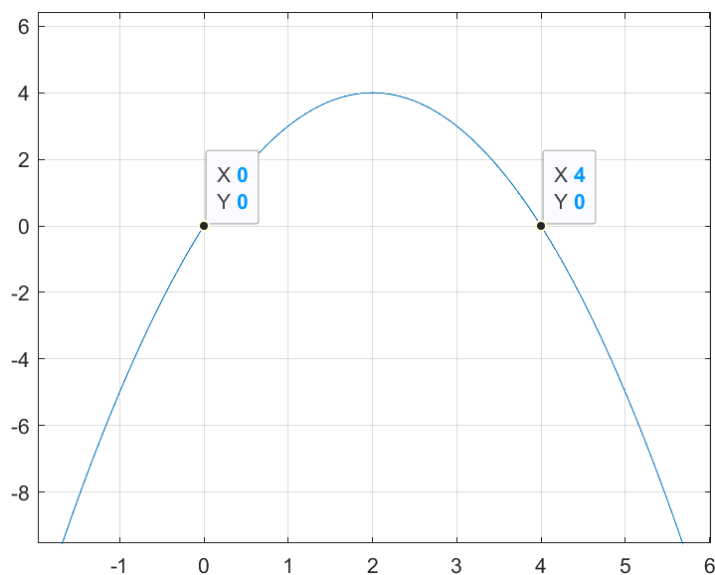


图 2: b

2.3 c

$X_1 < N/2$:

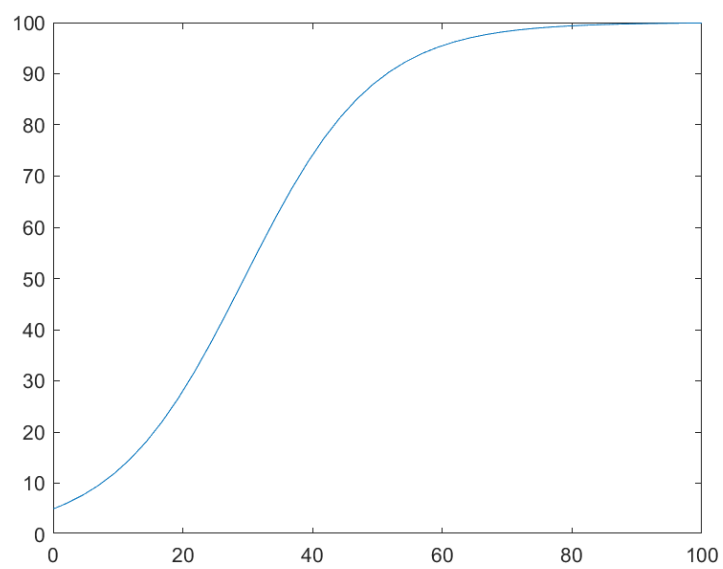


图 3: c-1

$X_2 > N/2$:

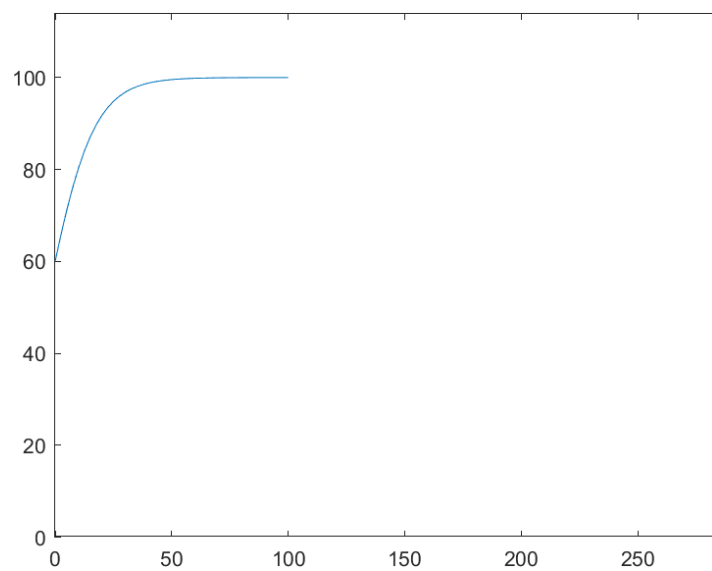


图 4: c-2

2.4 d

原微分方程可变为

$$\frac{dX}{X(N-X)} = kdt$$

对两边进行积分可得

$$\int \frac{1}{N} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{N-X} \right) dX = \int kdt$$

计算可得

$$\frac{1}{N} \ln \frac{X}{N-X} = kt$$

$$\frac{X}{N-X} = e^{kNt}$$

$$\frac{N}{X} = e^{-kNt} + 1$$

那么有

$$X(t) = \frac{N}{e^{-kNt} + 1}$$

2.5 e

因为 $k > 0$ 、 $N > 0$ ，因此当 $t \rightarrow \infty$ 时， $e^{-kNt} \rightarrow 0$ ，所以 $X \rightarrow N$