

MA206 Homework5

12110120 赵钊

2023 年 4 月 4 日

1 第 1 题

1.1 1

1.1.1 a

V	P	$\log V$	$\log P$
341948	4.81	12.74241396	1.570697084
1092759	5.88	13.90421625	1.771556762
5491	3.31	8.610865667	1.196948189
49375	4.9	10.8071995	1.589235205
1340000	5.62	14.10818017	1.726331664
365	2.76	5.899897354	1.01523068
2500	2.27	7.824046011	0.819779831
78200	3.85	11.26702493	1.348073148
867023	5.21	13.67282078	1.650579856
14000	3.70	9.546812609	1.30833282
23700	3.27	10.07323033	1.184789985
70700	4.31	11.16620085	1.460937904
304500	4.42	12.62642637	1.486139696
138000	4.39	11.83500896	1.479329227
2602000	5.05	14.77179094	1.619388243

表 1: 数据处理

数据如上表。

1.1.2 b

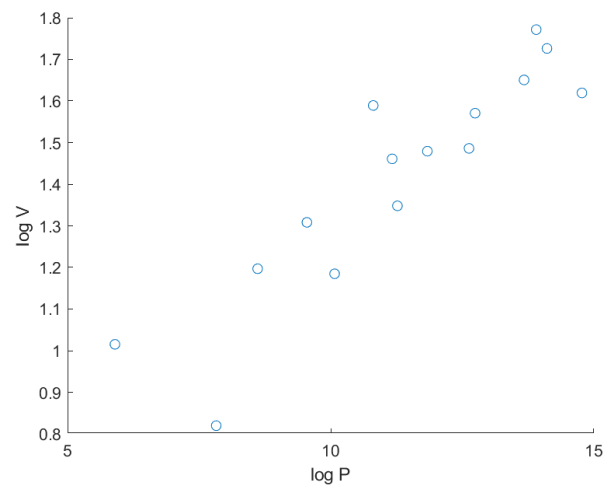


图 1: 散点图

1.1.3 c - e

拟合得到一次函数如下:

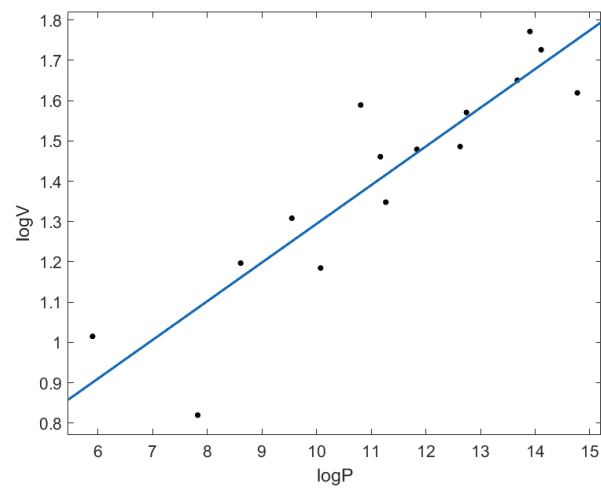


图 2: 拟合图

其函数表达式为

$$\log V = 0.096 \log P + 0.3343 \quad (R^2 = 0.8131)$$

1.1.4 f

对 (e) 得到的函数表达式同时取 $e^{(\cdot)}$
得到

$$V = 1.397 P^{0.096}$$

1.2 2

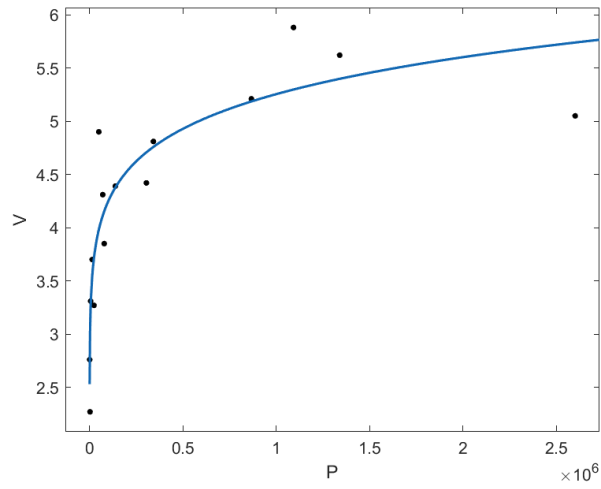


图 3: 拟合图

1.3 3 - 4

Location	V	V_p	$ V - V_p $
1	4.81	4.747408168	0.062591832
2	5.88	5.307557988	0.572442012
3	3.31	3.193029601	0.116970399
4	4.9	3.942512587	0.957487413
5	5.62	5.412506947	0.207493053
6	2.76	2.461367836	0.298632164
7	2.27	2.960728928	0.690728928
8	3.85	4.120446261	0.270446261
9	5.21	5.190955974	0.019044026
10	3.70	3.493210023	0.206789977
11	3.27	3.674279987	0.404279987
12	4.31	4.080756395	0.229243605
13	4.42	4.694839897	0.274839897
14	4.39	4.351357828	0.038642172
15	5.05	5.76853997	0.71853997

表 2: 数据处理

残差平均值为 $\frac{1}{15} \sum |V - V_p| = 0.338$

V 的真实值均值为 $\frac{1}{15} \sum V = 4.25$

误差比率为 $\frac{0.338}{4.25} = 7.9\%$

拟合精确度仍有提升空间。

2 第 2 题

2.1 a

使用拉格朗日插值法对 15 组数据 (设为 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{14}, y_{14})$) 进行拟合, 拟合成为最高次项为 14 的多项式, 其表达式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{14} y_n L_n(x)$$

其中

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{14})}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{14})}$$

使用多项式拟合的弊端在于, 用拟合函数进行预测效果较差, 原因是其头部和尾部可能不收敛, 从而使预测结果偏差甚远。

2.2 b

同 (a) 的做法, 本题对 14 组数据进行最高次项为 13 的多项式拟合, 数据如下

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	17	19	20	22	23	25	31	32	33	36	37	38	39	41
y_i	19	25	32	51	57	71	141	123	187	192	205	252	248	294

表 3: 数据

3 第 3 题

3.1 1

对数据进行多次差分, 差分过程如下

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	24	56	110	192	308	464

表 4: 数据

Δx	0	1	2	3	4	5	6
y	6	16	32	54	82	116	156

表 5: 一阶差分

$\Delta^2 x$	0	1	2	3	4	5
y	10	16	22	28	34	40

表 6: 二阶差分

$\Delta^3 x$	0	1	2	3	4
y	6	6	6	6	6

表 7: 三阶差分

观察到三阶差分的插值已相等，因此多项式拟合最高次项为 3 次。

3.2 2

对数据进行差分，差分过程如下

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	23	48	73	98	123	148	173	198

表 8: 数据

Δx	0	1	2	3	4	5	6
y	25	25	25	25	25	25	25

表 9: 一阶差分

观察到一阶差分的插值已相等，因此多项式拟合最高次项为 1 次。

3.3 3

对数据进行差分，差分过程如下

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	15	33	61	99	147	205	273

表 10: 数据

Δx	0	1	2	3	4	5	6
y	8	18	28	38	48	58	68

表 11: 一阶差分

$\Delta^2 x$	0	1	2	3	4	5
y	10	10	10	10	10	10

表 12: 二阶差分

观察到二阶差分的插值已相等，因此多项式拟合最高次项为 2 次。

3.4 4

对数据进行多次差分，过程如下

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	4.5	20	90	403	1808	8103	36316

表 13: 数据

Δx	0	1	2	3	4	5	6
y	3.5	15.5	70	313	1405	6295	28213

表 14: 一阶差分

$\Delta^2 x$	0	1	2	3	4	5
y	12	54.5	243	1092	4890	21918

表 15: 二阶差分

$\Delta^2 x$	0	1	2	3	4
y	42.5	188.5	849	3798	17028

表 16: 三阶差分

$\Delta^2 x$	0	1	2	3
y	146	660.5	2949	13230

表 17: 四阶差分

$\Delta^2 x$	0	1	2
y	514.5	2288.5	10281

表 18: 五阶差分

$\Delta^2 x$	0	1
y	1774	7992.5

表 19: 六阶差分

直到六阶差分仍未得到相等的差分值，则该数据的多项式拟合次数为 7 次