Álgebra lineal – Semanas 14 y 15

Diagonalización ortogonal y aplicaciones

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Introducción

Ejemplo 1

Si es posible, diagonalice la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1 8 0 3

Matrices diagonalizables ortogonalmente

Definición 1

Una matriz cuadrada A es ***diagonalizable ortogonalmente*** si existe una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que

$$Q^T AQ = D.$$

Propiedad 1

Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces A es simétrica.

1 8 0 3

Propiedad de las matrices simétricas

Propiedad 2

Si A una matriz simétrica con entradas reales, entonces los valores propios de A son reales.

Propiedad de las matrices simétricas

Propiedad 3

Sea A una matriz simétrica. Si λ_1 y λ_2 son valores propios *distintos* de A, entonces sus correspondientes vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son *ortogonales*.

1 8 0 3

Vectores propios de una matriz simétrica

Ejemplo 2

Muestre que cualquier par de vectores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

correspondientes a valores propios *distintos*, son ortogonales.

1 8 0 3

Teorema espectral

Propiedad 4 (Teorema espectral)

Sea A una matriz cuadrada con entradas reales. Entonces A es simétrica si y sólo si A es *diagonalizable ortogonalmente*.

1 8 0 3

Matrices diagonalizables ortogonalmente

Ejemplo 3

Determine cuáles de las siguientes matrices son *diagonalizables ortogonalmente*.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

1 8 0 3

Procedimiento de diagonalización ortogonal

Definición 1

Una matriz cuadrada A es ***diagonalizable ortogonalmente*** si existe una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que

$$Q^T AQ = D.$$

Procedimiento 1

Sea A una matriz simétrica $n \times n$.

1. Halle los vectores propios de A y la multiplicidad de cada uno.
2. Para cada vector propio de multiplicidad 1, elija un vector propio unitario (normalice el vector propio).
3. Para cada vector propio de multiplicidad $k \geq 2$, encuentre un conjunto de k vectores propios linealmente independientes. Si este conjunto no es ortonormal, aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.
4. La aplicación de los pasos (2) y (3) generan un conjunto ortonormal de n vectores propios. Utilice estos vectores para formar las columnas de Q. La matriz $Q^T AQ = D$ será diagonal.

Ejemplo de una matriz diagonalizable

Ejemplo 4

Diagonalice ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consecuencias del teorema espectral

- Si A es una matriz simétrica, entonces

$$A = QDQ^T = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{q}_1 & \cdots & \lambda_n \mathbf{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T$$

Definición 2

La ***descomposición espectral*** de una matriz simétrica A se define como

$$A = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T$$

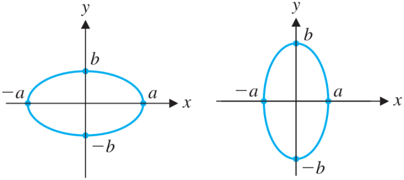
Matrices diagonalizables ortogonalmente

Ejemplo 5

Encuentre una matriz 2×2 con valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$, y correspondientes vectores propios

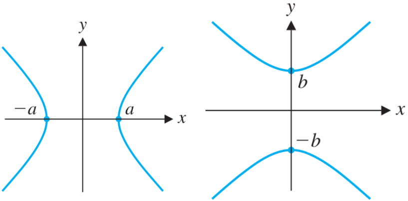
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Introducción



(a) $a > b$ (b) $a < b$

Figura 1: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



(a) $a, b > 0$ (b) $a, b > 0$

Figura 2: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Formas cuadráticas

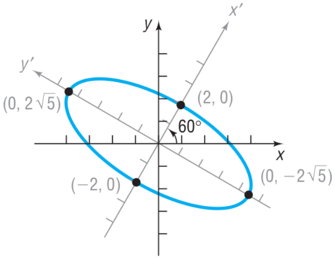


Figura 3: $x^2 + \sqrt{3}\,xy + 2y^2 = 10$

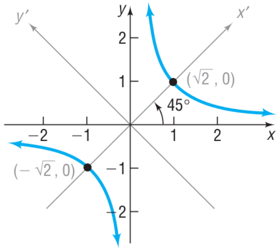


Figura 4: $xy = 1$

Definición 1 (Forma cuadrática)

Una expresión de la forma

$$ax^2 + cxy + by^2$$

se llama ***forma cuadrática*** en las variables x y y.

Ejemplos

1. $$4x^2 + 9y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
2. $$5x^2 + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
3. $$2x^2 - 3y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
4. $$5x^2 + 4xy + 3y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
5. $$5x^2 + 14xy - 3y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Propiedad 1 (Representación matricial de formas cuadráticas)

$$ax^2 + cxy + by^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

6. $4x^2 + 9y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

7. $13x^2 - 10xy + 13y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Observación 1

a. Formas cuadráticas asociadas a matrices diagonales no tienen "términos cruzados" xy.
b. La matriz A asociada a una forma cuadrática es simétrica.
c. Toda matriz simétrica real se puede diagonalizar ortogonalmente.
d. En toda forma cuadrática es posible eliminar los "términos cruzados" xy, mediante un cambio de variables adecuado.

Diagonalización de una forma cuadrática

$$A \text{ simétrica} \quad \Longrightarrow \quad A = QDQ^T, \quad \text{con } Q \text{ ortogonal.}$$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \;=\; \mathbf{x}^T \left(QDQ^T\right) \mathbf{x} \;=\; \left(Q^T \mathbf{x}\right)^T D \left(Q^T \mathbf{x}\right) \;=\; \mathbf{x}'^T D\, \mathbf{x}'$$

Observación 1

El cambio de variable $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$ es una rotación de ejes que permite eliminar los términos cruzados xy en la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

Propiedad 2 (Teorema de los ejes principales)

Si A es la matriz simétrica 2×2 asociada a una forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ y si Q es una matriz ortogonal tal que $Q^T AQ = D$ es una matriz diagonal, entonces el cambio de variable $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$ transforma la forma cuadrática en

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2$$

Diagonalización de cónicas

Ejemplo 1

Encuentre un cambio de variable que transforme la forma cuadrática

$$5x^2 + 4xy + 2y^2$$

en una sin términos cruzados en xy.

1 8 0 3

Matrices ortogonales 2×2

Propiedad 3

Si A es una matriz ortogonal de 2×2, entonces

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(a) Rotación (b) Reflexión

para algún $0 \leq \theta < 2\pi$. Además, A corresponde a una rotación en $\mathbb{R}^2$ si $\det A = 1$ y A corresponde a una reflexión en $\mathbb{R}^2$ si $\det A = -1$.

Diagonalización de cónicas

Ejemplo 2

Identifique y grafique de la cónica cuya ecuación es

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6.$$

Definición 2 (Ecuación cuadrática general)

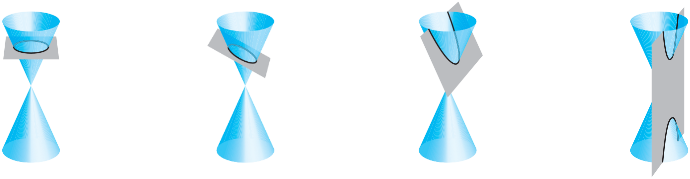
La forma general de una *ecuación cuadrática* en dos variables x y y es

$$ax^2 + cxy + by^2 + dx + ey + f = 0,$$

donde al menos uno de los coeficientes a, b y c es distinto de cero.

Observación 2

La gráfica de una ecuación cuadrática en dos variables corresponde a una sección cónica (que puede ser degenerada).



(a) Circunferencia (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbola

Figura 6: Secciones cónicas (no degeneradas)

Secciones cónicas rotadas y trasladadas

Propiedad 4 (Representación matricial de formas cuadráticas)

La expresión cuadrática

$$ax^2 + cxy + by^2 + dx + ey + f$$

se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} + B\mathbf{x} + f$$

Propiedad 5 (Teorema de los ejes principales - versión 2)

Considere la sección cónica

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} + B\mathbf{x} + f = 0.$$

Si Q es una matriz ortogonal tal que $Q^T AQ = D$ es una matriz diagonal, entonces el cambio de variable $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$ transforma la sección cónica en

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + f = \lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + BQ\mathbf{x}' + f = 0$$

Procedimiento para aplicar el teorema de los ejes principales

Procedimiento

1. Considere la matriz simétrica A de la sección cónica y halle sus valores propios λ_1 y λ_2.
2. Halle los vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2. Normalice estos vectores para formar la matriz Q.
3. Si $\det Q = -1$, intercambie las columnas de Q para que de esta forma $\det Q = 1$ y así
$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
4. El ángulo θ representa el ángulo de rotación de la cónica.
5. La ecuación de la cónica rotada es
$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + BQ\mathbf{x}' + f = 0$$

Secciones cónicas rotadas y trasladadas

Ejemplo 3

Identifique y grafique de la cónica cuya ecuación es

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 16\sqrt{2}\,x - 32 = 0.$$

1 8 0 3

Secciones cónicas rotadas y trasladadas

Propiedad 6

Considere la sección cónica rotada

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + BQ\mathbf{x}' + f = 0.$$

a. Si λ_1 y λ_2 son ambos positivos, o son ambos negativos, la gráfica es una elipse.
b. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, la gráfica es una circunferencia.
c. Si λ_1 y λ_2 son de signos opuestos, la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se cortan.
d. Si $\lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = 0$, la gráfica es una parábola, dos rectas que se cortan o una sección cónica degenerada.

1 8 0 3

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3