Álgebra lineal – Semana 11

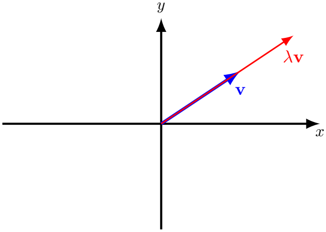
Valores y vectores propios

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

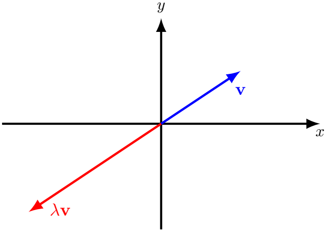
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Valores y vectores propios de una matriz



(a) $\lambda > 0$



(b) $\lambda < 0$

Definición 1

Sea A una matriz $n \times n$. Un escalar λ (real o complejo) se dice que es un ***valor propio*** de A, si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

Al vector $\mathbf{v}$ que satisface (1) se le denomina ***vector propio*** de A correspondiente a λ.

Valores y vectores propios de una matriz

Definición 1

Sea A una matriz $n \times n$. Un escalar λ (real o complejo) se dice que es un ***valor propio*** de A, si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

Al vector $\mathbf{v}$ que satisface (1) se le denomina ***vector propio*** de A correspondiente a λ.

Observación 1

- a) El vector $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ no puede ser vector propio de una matriz.
- b) El escalar $\lambda = 0$ sí puede ser valor propio de una matriz.
- c) Una matriz puede tener muchos valores propios y repetidos.
- d) A los valores propios de una matriz también se les llama ***autovalores*** o ***valores característicos***.
- e) A los vectores propios de una matriz también se les llama ***autovectores*** o ***vectores característicos***.

Definición 1

Sea A una matriz $n \times n$. Un escalar λ (real o complejo) se dice que es un ***valor propio*** de A, si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

Al vector $\mathbf{v}$ que satisface (1) se le denomina ***vector propio*** de A correspondiente a λ.

Ejemplo 1

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que:

a. $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ es un autovector de A correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 2$.
b. $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ es un autovector de A correspondiente al autovalor $\lambda_2 = -1$.

Solución.

Valores y vectores propios de una matriz

Ejemplo 2

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique que

$$\mathbf{v}_1 = (-3, -1, 1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$$

son vectores propios de A y encuentre sus valores propios correspondientes.

Solución.

Valores y vectores propios de una matriz

Ejemplo 3

Encuentre los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sus correspondientes vectores propios.

Solución.

1 8 0 3

Polinomio característico

Definición 1

Sea A una matriz $n \times n$. Un escalar λ (real o complejo) se dice que es un ***valor propio*** de A, si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

Al vector $\mathbf{v}$ que satisface (1) se le denomina ***vector propio*** de A correspondiente a λ.

Propiedad 1

Sea A una matriz $n \times n$. λ es un valor propio de A si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definición 2

Sea A una matriz $n \times n$. El determinante de la matriz $A - \lambda I$ se denota por $p(\lambda)$ y se denomina el ***polinomio característico*** de A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

La ecuación $p(\lambda) = 0$ se denomina ***ecuación característica*** de A.

Procedimiento 1

Sea A una matriz $n \times n$.

1. Halle el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
2. Halle las raíces de la ecuación característica $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
3. Resuelva el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = 0$, correspondiente a cada valor propio λ_i.

Ejemplo 4

Encuentre los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

1 8 0 3

Propiedades de los valores y vectores propios

Propiedad 2

Los valores propios de una matriz triangular son las entradas en su diagonal principal.

Propiedades de los valores y vectores propios

Propiedad 3

Sea A una matriz cuadrada. Entonces A es invertible si y sólo si 0 ***no*** es un valor propio de A.

Valores y vectores propios

Propiedad 4

Sea A una matriz $n \times n$ con valor propio λ. Entonces el conjunto

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

es un subespacio.

1 8 0 3

Valores y vectores propios

Definición 3

Sea A una matriz $n \times n$ con valor propio λ. Al subespacio

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

se le denomina ***espacio propio*** o ***espacio característico*** de λ. A la dimensión de E_λ se le denomina ***multiplicidad geométrica*** de λ.

Observación 2

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x} \mid (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = N_{A-\lambda I}$$

1 8 0 3

Valores y vectores propios de una matriz

Procedimiento 1

Sea A una matriz $n \times n$.

1. Halle el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
2. Halle las raíces de la ecuación característica $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
3. Para cada valor propio λ_i, halle el espacio propio correspondiente E_{λ_i}.

1 8 0 3

Valores y vectores propios de una matriz

Ejemplo 5

Encuentre los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución.

Valores y vectores propios de una matriz

Ejemplo 6

Encuentre los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución.

Valores y vectores propios de una matriz

Propiedad 5

Sea A una matriz $n \times n$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son k valores propios distintos de A, entonces los correspondientes vectores propios $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes.

Multiplicidad algebraica y geométrica

Observación 3

En el ejemplo 4, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$ y $\dim E_\lambda = 2$.

Definición 4

Sea A una matriz cuadrada y sea λ_i un valor propio de A.

- a) Se dice que λ_i es un valor propio de **multiplicidad algebraica** k, si $(\lambda - \lambda_i)^k$ es la mayor potencia que es factor del polinomio característico de A.
- b) La **multiplicidad geométrica** de λ_i se define como la dimensión del espacio propio correspondiente a λ_i, es decir,

$$\text{multiplicidad geométrica de } \lambda_i = \dim E_{\lambda_i} = \nu(A - \lambda_i I).$$

Propiedades de los valores y vectores propios

Propiedad 6

Sea A una matriz cuadrada con valor propio λ. Entonces

$$\text{multiplicidad geométrica de } \lambda \ \leq \ \text{multiplicidad algebraica de } \lambda.$$

Propiedad 7

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces

a. A tiene n vectores propios *linealmente independientes* si y solo si la multiplicidad geométrica de todo valor propio de A es igual a la multiplicidad algebraica.
b. En particular, A tiene n vectores propios *linealmente independientes* si todos sus valores propios son diferentes.

Propiedades de los valores y vectores propios

Propiedad 8

Sean A una matriz cuadrada y λ un valor propio de A, con vector propio correspondiente $\mathbf{x}$. Entonces:

a. Para cualquier entero $n > 0$, λ^n es un valor propio de A^n con vector propio correspondiente $\mathbf{x}$.
b. Si A es invertible, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1} con vector propio correspondiente $\mathbf{x}$.
c. Si A es invertible, entonces para cualquier entero n, λ^n es un valor propio de A^n con vector propio correspondiente $\mathbf{x}$.

Propiedades de los valores y vectores propios

Ejemplo 7

La matriz A dada a continuación, tiene valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, con vectores propios correspondientes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

1 8 0 3

Propiedades de los valores y vectores propios

Propiedad 9

Suponga que A es una matriz cuadrada que tiene vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, con correspondientes valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Si $\mathbf{x}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m,$$

entonces para cualquier entero k,

$$A^k\mathbf{x} = c_1{\lambda_1}^k\mathbf{v}_1 + c_2{\lambda_2}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m{\lambda_m}^k\mathbf{v}_m.$$

1 8 0 3

Bibliografía

- Clara Mejía
  Álgebra lineal elemental y aplicaciones
  Ude@, 2006.

- Stanley Grossman
  Álgebra lineal
  McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

- David Poole
  Álgebra lineal: una introducción moderna
  Cengage Learning Editores, 2011.

- Bernard Kolman
  Álgebra lineal
  Pearson Educación, 2006.

- Ron Larson
  Fundamentos de Álgebra lineal
  Cengage Learning Editores, 2010.