Álgebra lineal – Semana 1

Vectores en $\mathbb{R}^n$ y espacios vectoriales

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

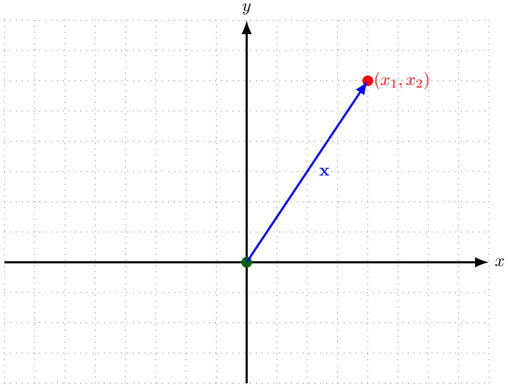
27 de julio de 2021

1 8 0 3

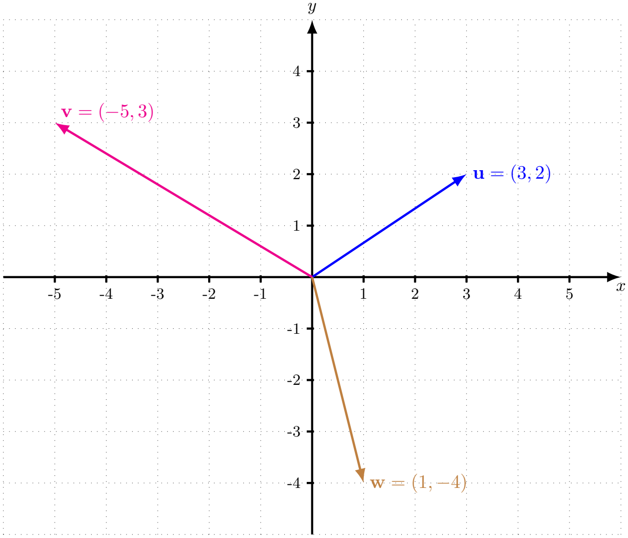
Vectores en el plano

Definición 1

Un **vector en el plano** se representa geométricamente por un segmento de recta dirigido, cuyo *punto inicial* es el origen $(0, 0)$ y su *punto terminal* es un punto arbitrario (x_1, x_2).



Ejemplos de vectores en el plano



(a) Ejemplo 1

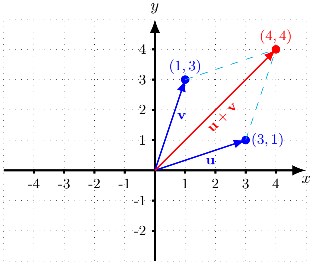
Definición 2 (Igualdad de vectores)

Dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en el plano se dice que son *iguales* si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

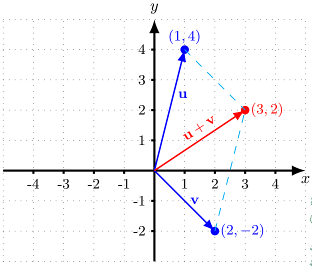
Definición 3 (Suma de vectores en el plano)

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vectores en el plano. La **suma** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como el vector

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$



(a) Ejemplo 2



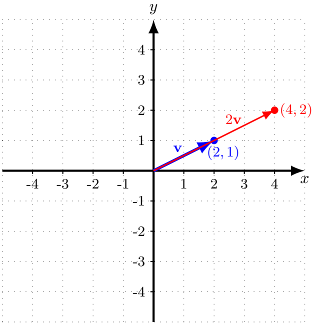
(b) Ejemplo 3

Multiplicación escalar

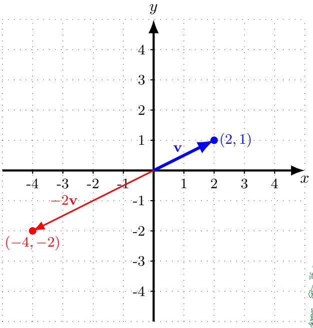
Definición 4 (Multiplicación por escalar)

Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un vector en el plano y c un escalar. La **multiplicación por escalar** de un vector $\mathbf{v}$ por el escalar c se define como el vector

$$c\mathbf{v} = c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2)$$



(a) Ejemplo 4



(b) Ejemplo 5

Operaciones con vectores en el plano

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vectores en el plano y $c \in \mathbb{R}$ un escalar.

1. La **suma** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como el vector

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

2. La **multiplicación por escalar** de un vector $\mathbf{v}$ por un escalar c se define como el vector

$$c\mathbf{v} = c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2)$$

Ejemplo 6

Considere los vectores $\mathbf{u} = (3, 4)$ y $\mathbf{v} = (-2, 5)$. Calcule:

a. $\frac{1}{2}\mathbf{v}$.
b. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
c. $\frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{u}$.

Vectores en el plano

Propiedad 1

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en el plano y sean c y d escalares. Entonces:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es un vector en el plano.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
4. El vector cero $\mathbf{0}=(0,0)$ satisface la siguiente propiedad:
$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$$
5. El vector $-\mathbf{u}=(-u_1,-u_2)$ satisface la siguiente propiedad:
$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$$
6. $c\mathbf{u}$ es un vector en el plano.
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$.
8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Observación 1

a. El producto de un vector $\mathbf{v}$ por el escalar -1 se denota por

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}.$$

b. Al vector $-\mathbf{v}$ se le denomina *inverso aditivo* de $\mathbf{v}$.

c. La resta de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se se define como $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

d. Al conjunto de todos los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en el plano se le denota por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \text{ y } x_2 \in \mathbb{R}\}$$

e. Al conjunto de todos los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en el espacio se le denota por

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2 \text{ y } x_2 \in \mathbb{R}\}$$

f. Al conjunto de todas las n-túplas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ se le denota por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Definición 5 (Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^n$)

Sean $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$ un escalar.

1. La **suma** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como el vector

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

2. La **multiplicación por escalar** de un vector $\mathbf{v}$ por un escalar c se define como el vector

$$c\mathbf{v} = c(v_1, \dots, v_n) = (cv_1, \dots, cv_n)$$

Observación 2

a. El producto de un vector $\mathbf{v}$ por el escalar -1 se denota por

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = (-v_1, \dots, -v_n).$$

b. Al vector $-\mathbf{v}$ se le denomina *inverso aditivo* de $\mathbf{v}$.

c. La resta de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se se define como

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n).$$

b. El vector cero en $\mathbb{R}^n$ se denota por $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición 5 (Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^n$)

Sean $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$ un escalar.

1. La **suma** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como el vector

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

2. La **multiplicación por escalar** de un vector $\mathbf{v}$ por un escalar c se define como el vector

$$c\mathbf{v} = c(v_1, \ldots, v_n) = (cv_1, \ldots, cv_n)$$

Ejemplo 7

Considere los vectores $\mathbf{u} = (-1, 0, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, -1, 5)$. Calcule:

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
b. $2\mathbf{u}$.
c. $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Propiedad 2

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y sean c y d escalares. Entonces:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
4. El vector cero $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ satisface la siguiente propiedad:
$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$$
5. El vector $-\mathbf{u}=(-u_1,\ldots,-u_n)$ satisface la siguiente propiedad:
$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$$
6. $c\mathbf{u}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$.
8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^n$

Propiedad 2

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y sean c y d escalares. Entonces:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
4. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$.
5. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$.
8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Ejemplo 8

Considere los vectores $\mathbf{u}=(2,-1,5,0)$, $\mathbf{v}=(4,3,1,-1)$ y $\mathbf{w}=(-6,2,0,3)$. En cada uno de los siguientes casos halle a $\mathbf{x}$.

a. $\mathbf{x}=2\mathbf{u}-(\mathbf{v}+3\mathbf{w})$.
b. $3(\mathbf{x}+\mathbf{w})=2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}$.

Propiedades de vector cero y del inverso aditivo

Propiedad 3

Sean $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ y c un escalar. Entonces:

1. Si $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. Si $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.
3. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
4. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
5. $c\mathbf{u} = \mathbf{0} \implies c = 0$ ó $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

1 8 0 3

Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 9

Considere los vectores $\mathbf{x} = (-1, -2, -2)$, $\mathbf{u} = (0, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$. Encuentre escalares a, b y c tales que

$$\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

1 8 0 3

Espacios vectoriales (reales)

Definición 5 (Espacio vectorial)

Sea V un conjunto (no vacío) en el que están definidas dos operaciones (**suma de vectores** y **multiplicación por escalar**). Se dice que V es un espacio vectorial (real) si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar (número real) c y d en $\mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en V.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
4. Existe en V un vector cero $\mathbf{0}$ tal que
$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}.$$
5. Para cada $\mathbf{u}$, existe en V un vector denotado por $-\mathbf{u}$ tal que
$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}.$$
6. $c\mathbf{u}$ está en V.
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$.
8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$.
9. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

$\mathbb{R}^n$ con las operaciones estándar es un espacio vectorial

Axiomas de un espacio vectorial (real) V

Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar c y d en $\mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. Existe en V un vector cero $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$, existe un vector $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ está en V.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Ejemplo 1

$\mathbb{R}^n$ con las operaciones de *suma* y *multiplicación por escalar* estándar es un espacio vectorial.

El espacio vectorial de todas las matrices 2×3

Axiomas de un espacio vectorial (real) V

Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar c y d en $\mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. Existe en V un vector cero $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$, existe un vector $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ está en V.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Ejemplo 2

El conjunto M_{23} de todas las matrices 2×3, con las operaciones de suma de matrices y multiplicación por escalares es un espacio vectorial.

Ejemplo 3

Considere el conjunto P_2 de todos los poliomios de la forma

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

donde a_0, a_1, a_2 son números reales. La *suma* de dos polinomios

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{y} \qquad q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

se define como

$$(p+q)(x) = (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$

y la *multiplicación por escalar* del polinomio $p(x) = a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ por el escalar c se define como

$$(cp)(x) = ca_2x^2 + ca_1x + ca_0.$$

Demuestre que P_2 es un espacio vectorial.

Observación 1

P_n se define como el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que n, junto con el polinomio cero.

Ejemplo 4

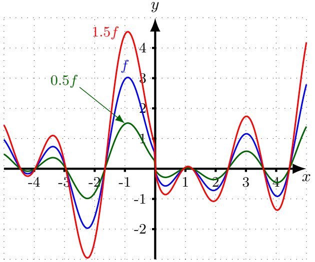
Considere el conjunto $\mathcal{F}$ de todas las funciones de valor real definidas en la recta numérica. La *suma* de dos funciones f y g en $\mathcal{F}$ se define como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

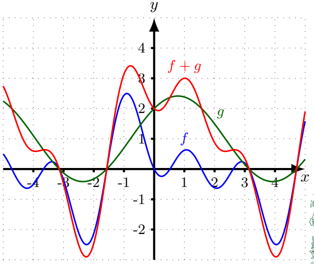
y la *multiplicación por escalar* de una función f en $\mathcal{F}$ por el escalar c se define como

$$(cf)(x) = cf(x).$$

Demuestre que $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial.



(a) $f, 0.5f, 1.5f$



(b) $f, g, f+g$

1 8 0 3

Un conjunto que no es espacio vectorial

Axiomas de un espacio vectorial (real) V

Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar c y d en $\mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. Existe en V un vector cero $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$, existe un vector $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ está en V.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Ejemplo 5

El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar (producto de enteros) **no** es un espacio vectorial.

Un conjunto que no es espacio vectorial

Axiomas de un espacio vectorial (real) V

Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar c y d en $\mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. Existe en V un vector cero $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$, existe un vector $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ está en V.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Ejemplo 6

Sea $V = \mathbb{R}^2$ con la definición usual de suma, pero la multiplicación por escalar es la siguiente:

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0).$$

Demuestre que V **no** es espacio vectorial.

Propiedades de la multiplicación escalar

Propiedad 3

Sea $\mathbf{v}$ un vector de un espacio vectorial V y c un escalar. Entonces:

a. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
b. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
c. Si $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $c = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
d. $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Subespacio vectorial

Definición 1 (Subespacio vectorial)

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V se dice que es un subespacio (vectorial) de V, si W es un espacio vectorial bajo las operaciones de *suma* y *multiplicación por escalar* definidas en V.

Observación 1

Si W es un subespacio de V, entonces W debe ser cerrado bajo las operaciones inherentes a V.

Definición 1 (Subespacio vectorial)

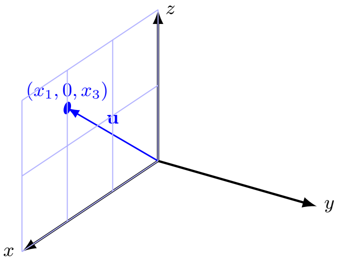
Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V se dice que es un subespacio (vectorial) de V, si W es un espacio vectorial bajo las operaciones de *suma* y *multiplicación por escalar* definidas en V.

Ejemplo 1

Demuestre que el conjunto

$$W = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1 \text{ y } x_3 \text{ son números reales } \}$$

es un *subespacio* de $\mathbb{R}^3$ con las operaciones usuales.



Prueba para un subespacio

Definición 1 (Subespacio vectorial)

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V se dice que es un subespacio (vectorial) de V, si W es un espacio vectorial bajo las operaciones de *suma* y *multiplicación por escalar* definidas en V.

Propiedad 1

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es subespacio de V si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en W.
b. Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

Observación 2

a. Si W es un subespacio vectorial de V, entonces tanto W como V deben tener el mismo vector cero $\mathbf{0}$.
b. El subespacio vectorial más simple de un espacio vectorial V es $W = \{\mathbf{0}\}$.
c. Otro subespacio vectorial obvio de un espacio vectorial V es $W = V$.

Un subespacio de $\mathbb{R}^2$

Propiedad 1

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es subespacio de V si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en W.
- (b) Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

Ejemplo 2

Demuestre que el conjunto

$$W = \{(x,y) \mid x+2y=0\}$$

es un *subespacio* de $\mathbb{R}^2$.

1803

Un conjunto que no es subespacio de $\mathbb{R}^2$

Propiedad 1

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es subespacio de V si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en W.
- (b) Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

Ejemplo 3

Demuestre que el conjunto

$$W = \{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$$

no es un *subespacio* de $\mathbb{R}^2$.

1 8 0 3

Un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Propiedad 1

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es subespacio de V si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en W.
b. Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

Ejemplo 4

Demuestre que el conjunto

$$W = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0, \text{ con } a, b, c \text{ números reales } \}$$

es un *subespacio* de $\mathbb{R}^3$.

Un subespacio de M_{22}

Propiedad 1

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es subespacio de V si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en W.
b. Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

Ejemplo 5

Sea W el conjunto de todas las matrices simétricas de 2×2. Demuestre que W es un subespacio de M_{22}.

1803

Un conjunto que no es subespacio de M_{22}

Propiedad 1

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es subespacio de V si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- a. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en W.
- b. Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

Ejemplo 6

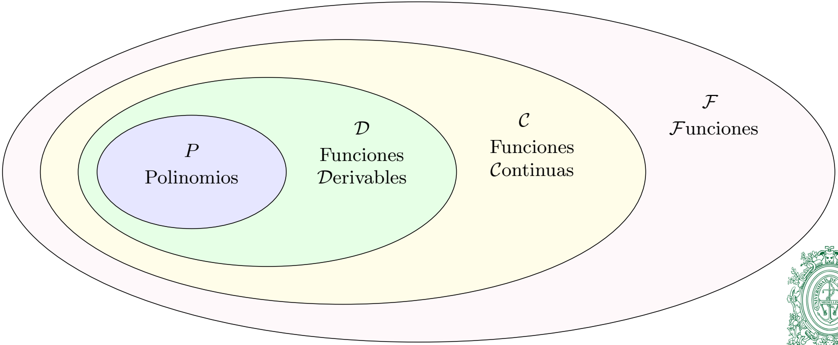
Sea W el conjunto de todas las matrices singulares de 2×2. Demuestre que W **no** es un subespacio de M_{22}.

1 8 0 3

Subespacios de funciones

Ejemplo 7

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las funciones continuas de valor real definidas en $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las funciones derivables de valor real definidas en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$, el espacio vectorial de todas las funciones con valor real definidas en $\mathbb{R}$.

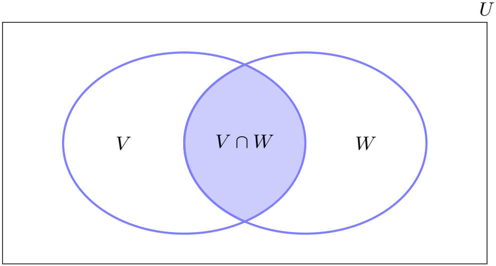


(a) $P \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$

Intersección de subespacios

Propiedad 2

Si V y W son subespacios de un espacio vectorial U, entonces la intersección de V y W, denotada por $V \cap W$, también es un subespacio de U.



(a) La intersección de subespacios es subespacio

Observación 3

La unión de subespacios **no** es (en general) un subespacio.

Intersección de subespacios

Propiedad 2

Si V y W son subespacios de un espacio vectorial U, entonces la intersección de V y W, denotada por $V \cap W$, también es un subespacio de U.

Ejemplo 8

En $\mathbb{R}^3$ considere los conjuntos

$$V = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 0\}$$

y

$$W = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}.$$

Demuestre que $V \cap W$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Describa a dicho subespacio.

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3