Álgebra lineal – Semana 8

Transformaciones lineales, núcleo e imagen

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

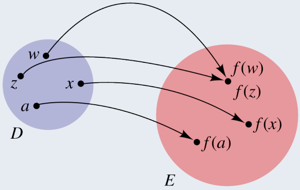
27 de julio de 2021

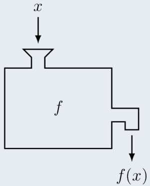
1 8 0 3

Funciones

Definición 1 (Función)

Una **función** f de un conjunto D en un conjunto E es una correspondencia que asigna a <u>todo</u> elemento x de D, <u>exactamente</u> un elemento y de E.



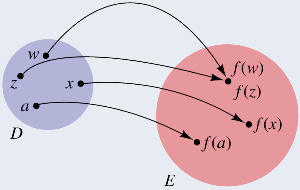


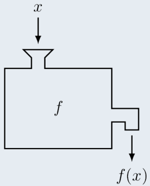
Observación 1

- (a) Una función f de D en E se denota por $f : D \to E$.
- (b) El conjunto D es el **dominio** de la función.
- (c) El conjunto E es el **codominio** de la función.
- (d) El elemento $y = f(x)$ de E se llama **imagen** de x bajo f.
- (e) La preimagen de y en E es el conjunto de todos los x en D tales que $f(x) = y$.

Definición 1 (Función)

Una **función** f de un conjunto D en un conjunto E es una correspondencia que asigna a todo elemento x de D, exactamente un elemento y de E.





Ejemplo 1

Sea f la función con dominio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ para cada x en $\mathbb{R}$.

- (a) Halle $f(-6), f(\sqrt{3}), f(a+b), f(a)+f(b)$
- (b) Halle el rango de f.

Solución.

Funciones entre espacios vectoriales

Observación 2

Vamos a considerar funciones

$$T : V \to W$$

donde V y W son espacios vectoriales.

Funciones entre espacios vectoriales

Ejemplo 2

Considere la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2).$$

- (a) Encuentre la imagen de $\mathbf{v} = (1, 2)$.
- (b) Encuentre la preimagen de $\mathbf{w} = (-1, 11)$.

Solución.

1 8 0 3

Transformaciones lineales

Definición 2 (Transformación lineal)

Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una función. Se dice que T es una ***transformación lineal*** si para todo vector $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y todo escalar c se cumplen las siguientes propiedades:

a. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
b. $T(c\mathbf{u}) = c\,T(\mathbf{u})$

Observación 3

$$T(\mathbf{u} \overset{\boxed{\text{Suma en } V}}{\overset{\downarrow}{+}} \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) \overset{\boxed{\text{Suma en } W}}{\overset{\downarrow}{+}} T(\mathbf{v}) \qquad T(\overset{\boxed{\text{Producto en } V}}{\overset{\downarrow}{c\mathbf{u}}}) = \overset{\boxed{\text{Producto en } W}}{\overset{\downarrow}{c\,T(\mathbf{u})}}$$

Transformaciones lineales

Ejemplo 3

Muestre que la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$$

es una tranformación lineal.

Solución.

1 8 0 3

Funciones que no son transformaciones lineales

Ejemplo 4

Muestre que las siguientes funciones **no** son transformaciones lineales.

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$.
b. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$.
c. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{sen} x$.

Solución.

Transformaciones lineales cero e identidad

Definición 3

Sean V y W espacios vectoriales.

ⓐ La ***transformación cero*** es la función $T : V \to W$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}, \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \text{ en } V.$$

ⓑ La ***transformación identidad*** es la función $T : V \to V$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \text{ en } V.$$

Propiedad 1

La ***transformación cero*** y la ***transformación identidad*** son transformaciones lineales.

1 8 0 3

Propiedades de las transformaciones lineales

Propiedad 2

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en V. Entonces:

a. $T(\mathbf{0}_{\text{V}}) = \mathbf{0}_{\text{W}}$.
b. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
c. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
d. Si $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_n\mathbf{v}_n$, entonces

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

1 8 0 3

Propiedades de las transformaciones lineales

Ejemplo 5

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,-1,4) \\ T(0,1,0) &= (1,5,-2) \\ T(0,0,1) &= (0,3,1) \end{aligned}$$

Calcule $T(2,3,-2)$.

Solución.

1 8 0 3

Transformación lineal definida por una matriz

Ejemplo 6

Considere la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule $T(2, -1)$.
- (b) Muestre que T es una transformación lineal.

Solución.

1 8 0 3

Transformaciones lineales definidas por una matrices

Propiedad 2

Sea A una matriz $m \times n$. La función T definida por

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Observación 3

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\text{vector en } \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}}_{\text{vector en } \mathbb{R}^m}$$

Rotación en el plano

Ejemplo 7

Muestre que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

tiene la propiedad de rotar todo vector en $\mathbb{R}^2$, un ángulo θ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Solución.

1 8 0 3

Proyección en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 8

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analice cómo transforma T a todo vector en $\mathbb{R}^3$.

Solución.

1 8 0 3

Transformación lineal entre espacios de matrices

Ejemplo 9

Muestre que la función $T : M_{mn} \to M_{nm}$ definida por

$$T(A) = A^T.$$

es una transformación lineal.

Solución.

El operador de multiplicación

Ejemplo 10

Demuestre que la función $T : P_2 \to P_3$ definida por

$$(Tp)(x) = xp(x)$$

es una transformación lineal.

1 8 0 3

El operador diferencial (cálculo)

Ejemplo 11

Muestre que la función $D : C^1[a, b] \to C^1[a, b]$ definida por

$$D(f) = f'.$$

es una transformación lineal.

Solución.

El operador integral (cálculo)

Ejemplo 12

Muestre que la función $T : C[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

es una transformación lineal.

Solución.

Núcleo de una transformación lineal

Observación 1

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces

$$T(\mathbf{0}_{\mathrm{V}}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}$$

Definición 1 (Núcleo)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El ***núcleo*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}$:

$$\mathrm{nu}\ T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}\}.$$

1803

Núcleo de una transformación lineal

Definición 1 (Núcleo)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El ***núcleo*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\text{w}}$:

$$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\text{w}}\}.$$

Ejemplo 1

Sea $T : M_{32} \to M_{23}$ la transformación lineal definida por

$$T(A) = A^T.$$

Encuentre el núcleo de T.

Solución.

1 8 0 3

Núcleo de las transformaciones cero e identidad

Definición 1 (Núcleo)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El ***núcleo*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}$:

$$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}\}.$$

Ejemplo 2

Encuentre el núcleo de la ***transformación cero*** $T : V \to W$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}, \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \text{ en } V.$$

Solución.

Núcleo de las transformaciones cero e identidad

Definición 1 (Núcleo)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El ***núcleo*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}$:

$$\mathrm{nu}\ T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}\}.$$

Ejemplo 3

Encuentre el núcleo de la ***transformación identidad*** $T : V \to V$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \text{ en } V.$$

Solución.

1 8 0 3

Núcleo de una transformación lineal

Definición 1 (Núcleo)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El ***núcleo*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}$:

$$\operatorname{nu} T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}\}.$$

Ejemplo 4

Encuentre el núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Solución.

1 8 0 3

Núcleo de una transformación lineal

Definición 1 (Núcleo)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El ***núcleo*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}$:

$$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}\}.$$

Ejemplo 5

Encuentre el núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_2 - 2x_1, 0, -x_1).$$

Solución.

1 8 0 3

Núcleo de una transformación lineal

Definición 1 (Núcleo)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El ***núcleo*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}$:

$$\mathrm{nu}\ T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathrm{w}}\}.$$

Ejemplo 6

Encuentre el núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Propiedades del núcleo

Propiedad 1

El núcleo nu T de una transformación lineal $T : V \to W$ es un subespacio vectorial de V.

Propiedades del núcleo

Propiedad 2

Sea A una matriz $m \times n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la transformación lineal definida por

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Entonces el núcleo de T es igual al espacio solución del sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Es decir, el núcleo de T es igual al ***espacio nulo*** de A:

$$\operatorname{nu} T = N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

1 8 0 3

Imagen de una transformación lineal

Definición 2 (Imagen)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. La ***imagen*** de T es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{w}$ en W que son imágenes de vectores en V. Es decir,

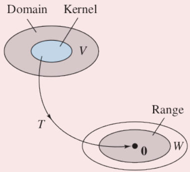
$$\text{im } T = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

Propiedad 3

La imagen im T de una transformación lineal $T : V \to W$ es un subespacio vectorial de W.

Observación 2

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.



- (a) nu T es un subespacio de V.
- (b) im T es un subespacio de W.

Imagen de una transformación lineal

Observación 2

Sea A una matriz $m \times n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la transformación lineal

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} \in \operatorname{im} T \iff T(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{b} \in C_A$$

Propiedad 4

Sea A una matriz $m \times n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la transformación lineal $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Entonces la ***imagen*** de T es igual al ***espacio generado por las columnas*** de A. Es decir,

$$\operatorname{im} T = C_A.$$

Ejemplo 7

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Encuentre una base para im T.

Solución.

Rango y nulidad de una transformación lineal

Definición 3 (Rango y nulidad)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

(a) A la dimensión del núcleo de T se le llama la ***nulidad*** de T y se la denota por $\nu(T)$:
$$\nu(T) = \dim \operatorname{nu} T.$$

(b) A la dimensión de la imagen de T se le llama el ***rango*** de T y se la denota por $\rho(T)$:
$$\rho(T) = \dim \operatorname{im} T.$$

Observación 1

Si A una matriz $m \times n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la transformación lineal $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces:

(a) $\rho(T) = \dim \operatorname{im} T = \dim C_A = \rho(A)$.

(b) $\nu(T) = \dim \operatorname{nu} T = \dim N_A = \nu(A)$.

(c) $\rho(A) + \nu(A) =$ número de columnas de $A = n$.

(d) $\rho(T) + \nu(T) = n = \dim \mathbb{R}^n$.

Rango y nulidad de una transformación lineal

Definición 3 (Rango y nulidad)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

a. A la dimensión del núcleo de T se le llama la ***nulidad*** de T y se denota por $\nu(T)$:
$$\nu(T) = \dim \operatorname{nu} T.$$

b. A la dimensión de la imagen de T se le llama el ***rango*** de T y se denota por $\rho(T)$:
$$\rho(T) = \dim \operatorname{im} T.$$

Propiedad 5

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal definida en un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces

$$\rho(T) + \nu(T) = n = \dim V.$$

Observación 1

"dimensión de la imagen + dimensión del núcleo = dimensión del dominio"

Propiedad 5

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal definida en un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces

$$\rho(T) + \nu(T) = n = \dim V.$$

Ejemplo 7

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentre el rango y la nulidad de T.

Solución.

1 8 0 3

Determinación del rango y la nulidad de una transformación lineal

Ejemplo 8

Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ una transformación lineal.

- a) Encuentre la dimensión del núcleo de T si el rango es 2.
- b) Encuentre el rango de T si la nulidad de T es 4.
- c) Encuentre el rango de T si $\operatorname{nu} T = \{\mathbf{0}\}$.

Solución.

1 8 0 3

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.