Álgebra lineal – Semana 6

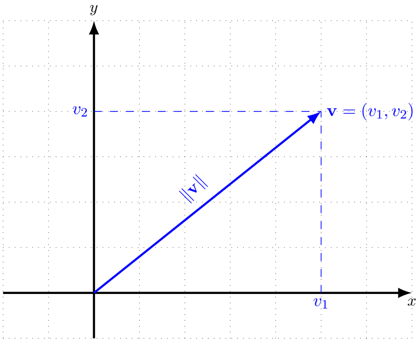
Bases ortonormales y proyecciones en $\mathbb{R}^n$

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$



Definición 1

La ***longitud*** o ***magnitud*** de un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$

Definición 1

La ***longitud*** o ***magnitud*** de un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Ejemplo 1

(a) Halle la longitud del vector $\mathbf{v} = (0, -2, 1, 4, -2)$ de $\mathbb{R}^5$.

Solución.

Longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$

Definición 1

La ***longitud*** o ***magnitud*** de un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Ejemplo 1

- En $\mathbb{R}^3$, halle la longitud del vector

$$\mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right).$$

Solución.

Longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$

Definición 1

La ***longitud*** o ***magnitud*** de un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Ejemplo 1

- En $\mathbb{R}^3$, halle la longitud de cada uno de los vectores de la base canónica (estándar)

$$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Solución.

1 8 0 3

Vectores unitarios

Propiedad 1

Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ y c es un escalar, entonces

$$\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$$

Propiedad 2

Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ diferente del vector cero, entonces

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

es un vector de longitud 1 (***vector unitario***) en la dirección de $\mathbf{v}$.

1 8 0 3

Vectores unitarios

Propiedad 2

Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ diferente del vector cero, entonces

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

es un vector de longitud 1 (***vector unitario***) en la dirección de $\mathbf{v}$.

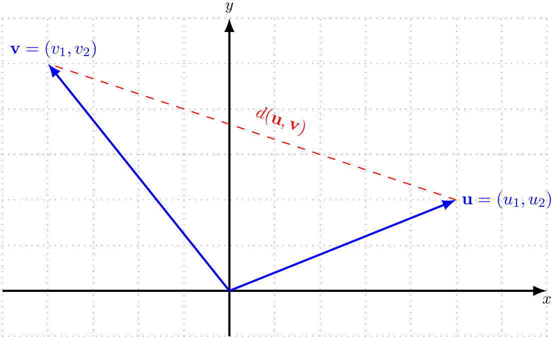
Ejemplo 2

Encuentre el vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{v} = (3, -1, 2)$.

Solución.

1 8 0 3

Distancia entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$



Definición 2

La ***distancia*** entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \cdots + (v_n - u_n)^2}.$$

Distancia entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$

Definición 2

La ***distancia*** entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \cdots + (v_n - u_n)^2}.$$

Ejemplo 3

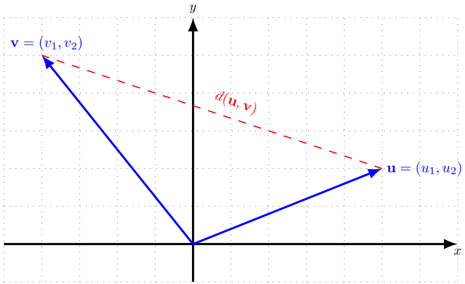
Encuentre la distancia entre los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} = (0, 0, 2) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (2, 0, 1).$$

Solución.

1803

Distancia entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$



Propiedad 3

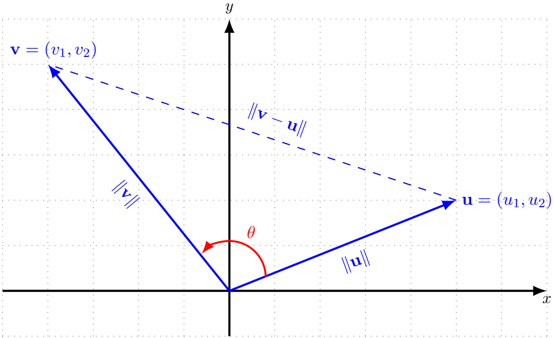
La distancia entre vectores de $\mathbb{R}^n$,

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

satisface las siguientes propiedades:

- a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$.
- b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
- c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^2$



Propiedad 4

El ángulo θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ del plano, está dado por

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

Producto escalar (o punto) en $\mathbb{R}^n$

Definición 3

Recordemos que el ***producto punto*** o ***producto escalar*** de dos vectores

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Observación 1

El producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de dos vectores es un escalar y ***no*** un vector.

Producto escalar (o punto) en $\mathbb{R}^n$

Definición 3

Recordemos que el ***producto punto*** o ***producto escalar*** de dos vectores

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Ejemplo 4

Encuentre el producto escalar de los vectores

$$\mathbf{u} = (1, 2, 0, -3) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (3, -2, 4, 2).$$

Solución.

1 8 0 3

Propiedades del producto escalar

Propiedad 5

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ y c es un escalar, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- c) $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
- d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$
- e) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$
- e) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

1803

Propiedades del producto escalar

Ejemplo 5

Considere los vectores

$$\mathbf{u} = (2, -2), \qquad \mathbf{v} = (5, 8), \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w} = (-4, 3).$$

Calcule

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
b. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
c. $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$
d. $\|\mathbf{w}\|^2$
e. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$

Solución.

1 8 0 3

Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$

Propiedad 6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|,$$

donde $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ denota el valor absoluto del producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Definición 4

El ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$

Definición 4

El ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Ejemplo 6

Calcule el ángulo entre los vectores

$$\mathbf{u} = (-4, 0, 2, -2) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (2, 0, -1, 1).$$

Solución.

1 8 0 3

Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$

Definición 4

El ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Observación 2

En la definición 4, $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ siempre son positivos y por tanto

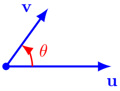
a) $\cos\theta$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ son positivos ó

b) $\cos\theta$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ son negativos.

$\theta = 0$

$\cos\theta = 1$

(a) Direcciones iguales



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta > 0$

(b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$

Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$

Definición 4

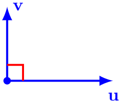
El ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Observación 2

En la definición 4, $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ siempre son positivos y por tanto

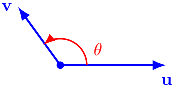
a. $\cos\theta$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ son positivos ó
b. $\cos\theta$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ son negativos.



$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = 0$

(a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$



$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\cos\theta < 0$

(b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$

Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$

Definición 5

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice que son ***ortogonales*** (o ***perpendiculares***) si

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ejemplo 7

Determine si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales.

a. $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$.
b. $\mathbf{u} = (3, 2, -1, 4)$ y $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 0)$.

Solución.

1 8 0 3

Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$

Definición 5

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice que son ***ortogonales*** (o ***perpendiculares***) si

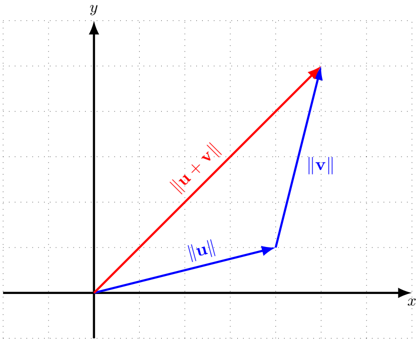
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ejemplo 8

Determine todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\mathbf{u} = (4, 2)$.

Solución.

Desigualdad triangular

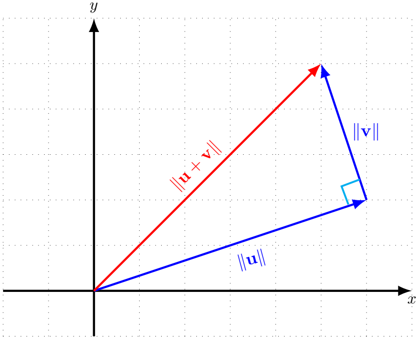


Propiedad 7 (Desigualdad triangular)

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Teorema de Pitágoras



Propiedad 8 (Teorema de Pitágoras)

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Relación entre el producto punto y el producto de matrices

Observación 3

Si los vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ los representamos como vectores columna

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

entonces el ***producto punto*** o ***producto escalar*** de ellos se puede expresar como el producto de matrices

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Observación 3

Si los vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ los representamos como vectores columna, entonces el ***producto punto*** o ***producto escalar*** de ellos se puede expresar como el producto de matrices

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

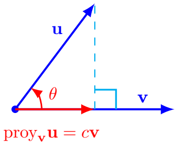
Ejemplo 9

Calcule el producto punto de los vectores

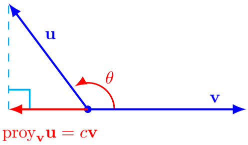
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^n$



(a) $c > 0$



(b) $c < 0$

Definición 6

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$. La ***proyección ortogonal*** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es el vector definido por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\ \mathbf{v}$$

Proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^n$

Definición 6

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$. La ***proyección ortogonal*** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es el vector definido por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v}$$

Ejemplo 10

Encuentre la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (6, 2, 4)$ sobre $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$.

Solución.

Conjuntos ortogonales en $\mathbb{R}^n$

Observación 1

En $\mathbb{R}^3$ el conjunto de vectores de

$$B = \Big\{ \underbrace{(1,0,0)}_{\mathbf{e}_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\mathbf{e}_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\mathbf{e}_3} \Big\},$$

satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ y $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$.
- (b) $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1$.

Definición 1

Considere en $\mathbb{R}^n$ un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}.$$

Se dice que:

- (a) S es ***ortogonal*** si cada par de vectores en S distintos es ortogonal.
- (b) S es ***ortonormal*** si S es ortogonal y cada vector en S es ***unitario***.

Conjuntos ortogonales en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 1

Muestre que el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal.

$$S = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{\mathbf{v}_3} \right\}.$$

Solución.

Relación entre conjuntos ortogonales y LI

Definición 1

Considere en $\mathbb{R}^n$ un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}.$$

Se dice que:

- a) S es ***ortogonal*** si cada par de vectores en S distintos es ortogonal.
- b) S es ***ortonormal*** si S es ortogonal y cada vector en S es ***unitario***.

Propiedad 1

Si $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es un *conjunto ortogonal* de vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, entonces S es linealmente independiente.

1 8 0 3

Relación entre conjuntos ortogonales y LI

Definición 1

Considere en $\mathbb{R}^n$ un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}.$$

Se dice que:

- a) S es ***ortogonal*** si cada par de vectores en S distintos es ortogonal.
- b) S es ***ortonormal*** si S es ortogonal y cada vector en S es ***unitario***.

Propiedad 2

En $\mathbb{R}^n$ todo conjunto ortogonal de n vectores es base.

1 8 0 3

Relación entre conjuntos ortogonales y LI

Propiedad 2

En $\mathbb{R}^n$ todo conjunto ortogonal de n vectores es base.

Ejemplo 2

Muestre que el siguiente conjunto de vectores es base para $\mathbb{R}^4$.

$$S = \Big\{ \underbrace{(2,3,2,-2)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{(1,0,0,1)}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{(-1,0,2,1)}_{\mathbf{v}_3}, \underbrace{(-1,2,-1,1)}_{\mathbf{v}_4} \Big\},$$

Solución.

1 8 0 3

Coeficientes de Fourier

Propiedad 3

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un *base ortogonal* para $\mathbb{R}^n$, entonces cada vector $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$ se pude representar como

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\right)\mathbf{v}_n.$$

Observación 2

$$\mathbf{w} = \text{proy}_{\mathbf{v_1}}\mathbf{w} + \text{proy}_{\mathbf{v_2}}\mathbf{w} + \cdots + \text{proy}_{\mathbf{v_n}}\mathbf{w}.$$

1 8 0 3

Coeficientes de Fourier

Propiedad 4

Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es un *base ortonormal* para $\mathbb{R}^n$, entonces cada vector $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$ se pude representar como

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n.$$

Coeficientes de Fourier

Propiedad 4

Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es un *base ortonormal* para $\mathbb{R}^n$, entonces cada vector $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$ se pude representar como

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1)\, \mathbf{u}_1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2)\, \mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n.$$

Observación 3

- a. En la propiedad 3, a las coordenadas de $\mathbf{w}$ respecto a la base B se les llama *coeficientes de Fourier* de $\mathbf{w}$ respecto a B.
- b. El vector de coordenadas de $\mathbf{w}$ respecto a al base B es

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Propiedad 4

Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es un *base ortonormal* para $\mathbb{R}^n$, entonces cada vector $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$ se pude representar como

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n.$$

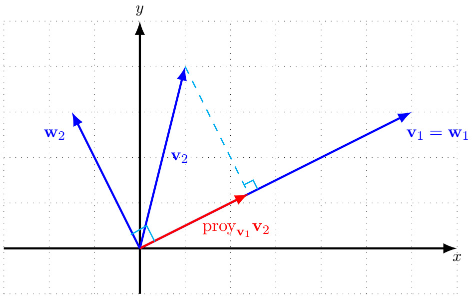
Ejemplo 3

Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{w} = (5, -5, 2)$ respecto a la base ortonormal

$$B = \left\{ \underbrace{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{\left(0, 0, 1\right)}_{\mathbf{v}_3} \right\}.$$

Solución.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt en $\mathbb{R}^2$



Propiedad 4 (Gram-Schmidt)

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces los vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 \end{aligned}$$

forman una base *ortogonal* de $\mathbb{R}^2$.

Propiedad 4 (Gram-Schmidt)

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces los vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1\\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathrm{proy}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1\end{aligned}$$

forman una base *ortogonal* de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4

Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la siguiente base de $\mathbb{R}^2$:

$$B = \Big\{ \underbrace{(1,1)}_{\mathbf{v}_1},\ \underbrace{(0,1)}_{\mathbf{v}_2} \Big\},$$

Solución.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt en $\mathbb{R}^n$

Propiedad 5 (Gram-Schmidt en $\mathbb{R}^n$)

1. Sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.
2. Definimos $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathrm{proy}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \mathrm{proy}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_3 - \mathrm{proy}_{\mathbf{w}_2}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\,\mathbf{w}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\,\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1}}{\|\mathbf{w}_{n-1}\|^2}\,\mathbf{w}_{n-1}
\end{aligned}
$$

   Entonces el conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es una base *ortogonal* para $\mathbb{R}^n$.
3. Definimos $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$ y entonces el conjunto

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

   es una base *ortonormal* de $\mathbb{R}^n$.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt en $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proy}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_3 - \text{proy}_{\mathbf{w}_2}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\,\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\,\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1}}{\|\mathbf{w}_{n-1}\|^2}\,\mathbf{w}_{n-1}$$

Ejemplo 5

Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \Big\{ \underbrace{(1,1,0)}_{\mathbf{v}_1},\ \underbrace{(1,2,0)}_{\mathbf{v}_2},\ \underbrace{(0,1,2)}_{\mathbf{v}_3} \Big\}.$$

Definición 2

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base *ortogonal*

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces la ***proyección ortogonal*** de $\mathbf{v}$ sobre H es el vector definido por

$$\text{proy}_H \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\right)\mathbf{v}_k.$$

Observación 4

$$\text{proy}_H \mathbf{v} = \text{proy}_{\mathbf{v_1}} \mathbf{v} + \text{proy}_{\mathbf{v_2}} \mathbf{v} + \cdots + \text{proy}_{\mathbf{v_k}} \mathbf{v}.$$

1 8 0 3

Definición 2

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base *ortogonal*

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces la ***proyección ortogonal*** de $\mathbf{v}$ sobre H es el vector definido por

$$\operatorname{proy}_H \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\right)\mathbf{v}_k.$$

Ejemplo 6

Encuentre la *proyección ortogonal* del vector $\mathbf{v} = (1, 1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio generado por los vectores

$$\mathbf{w}_1 = (0, 3, 1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w}_2 = (2, 0, 0).$$

Solución.

Proyección ortogonal

Definición 2

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base *ortogonal*

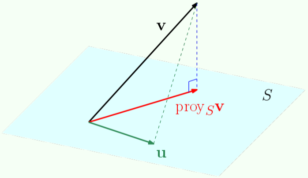
$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces la ***proyección ortogonal*** de $\mathbf{v}$ sobre H es el vector definido por

$$\text{proy}_H \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\right) \mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\right) \mathbf{v}_2 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\right) \mathbf{v}_k.$$

Propiedad 6

Suponga que S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces



$$\|\mathbf{v} - \text{proy}_S \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

para todo vector $\mathbf{u}$ en S.

Proyección ortogonal

Definición 2

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base *ortogonal*

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces la ***proyección ortogonal*** de $\mathbf{v}$ sobre H es el vector definido por

$$\operatorname{proy}_H \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\right)\mathbf{v}_k.$$

Propiedad 7

Suponga que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una *base ortonormal* para $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n.$$

Es decir, $\operatorname{proy}_{\mathbb{R}^n}\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Proyección ortogonal

Ejemplo 7

Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$H_1 = \text{gen}\{(-1,1,1)\} \qquad \text{y} \qquad H_2 = \text{gen}\{(1,0,1),(1,1,0)\}.$$

Demuestre que todos los vectores de H_1 son ortogonales a todos los vectores de H_2. En tal caso se dice que los subespacios H_1 y H_2 son ortogonales.

Solución.

Definición 3

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El ***complemento ortogonal*** de H es el conjunto denotado por $H^\perp$ y definido como

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{h} = 0 \text{ para todo } \mathbf{h} \in H\}$$

Ejemplo 8

Encuentre el complemento ortogonal del subespacio H de $\mathbb{R}^4$ generado por las columnas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

1803

Complemento ortogonal

Definición 3

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El ***complemento ortogonal*** de H es el conjunto denotado por $H^\perp$ y definido como

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{h} = 0 \text{ para todo } \mathbf{h} \in H\}$$

Propiedad 8

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces

a. $H^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
b. $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
c. $\dim H + \dim H^\perp = n$.

1 8 0 3

Complemento ortogonal

Definición 3

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El ***complemento ortogonal*** de H es el conjunto denotado por $H^\perp$ y definido como

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{h} = 0 \text{ para todo } \mathbf{h} \in H\}$$

Propiedad 9

Suponga que A es una matriz $m \times n$. Entonces

a. ${C_A}^\perp = N_{A^T}$.
b. ${N_A}^\perp = R_A$.

1 8 0 3

Complemento ortogonal

Definición 3

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El ***complemento ortogonal*** de H es el conjunto denotado por $H^\perp$ y definido como

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{h} = 0 \text{ para todo } \mathbf{h} \in H\}$$

Propiedad 10 (Teorema de la proyección)

Suponga que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ existen vectores únicos $\mathbf{p}$ en H y $\mathbf{q}$ en $H^\perp$ tales que

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = \text{proy}_H \mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v}$$

Ejemplo 9

Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que tiene como base a las columnas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Halle una base ortogonal para H.

Solución.

1803

Ejemplo 9

Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que tiene como base a las columnas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) Halle $\text{proy}_H \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = (-2, 0, 2, 2)$.

Solución.

Ejemplo 9

Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que tiene como base a las columnas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Halle $H^\perp$.

Solución.

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3