Álgebra lineal – Semana 4

Espacios fundamentales de una matriz

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Vectores renglón (fila) y vectores columna

Matriz A · **Vectores renglón de A** · **Vectores columna de A**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_2} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_n}$$

Ejemplo 1

A · **Vectores renglón** · **Vectores columna**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (0, 1, -1) \\ \mathbf{r}_2 &= (-2, 3, 4) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_3}$$

Espacio renglón y espacio columna de una matriz

Matriz A	**Vectores renglón de A**	**Vectores columna de A**
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$	$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_2} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_n}$

Definición 1

Sea A una matriz $m \times n$.

- (a) El ***espacio renglón*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones de A:
$$R_A = \text{gen}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$$
- (b) El ***espacio columna*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A:
$$C_A = \text{gen}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$$

Definición 1

Sea A una matriz $m \times n$.

- (a) El ***espacio renglón*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones de A:
$$R_A = \text{gen}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$$
- (b) El ***espacio columna*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A:
$$C_A = \text{gen}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$$

Ejemplo 2

Determine el *espacio renglón* y el *espacio columna* de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución.

Definición 1

Sea A una matriz $m \times n$.

- (a) El ***espacio renglón*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones de A:
$$R_A = \text{gen}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$$
- (b) El ***espacio columna*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A:
$$C_A = \text{gen}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$$

Ejemplo 3

Halle una base para el *espacio renglón* de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Ejemplo 4

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Determine si $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ está en C_A y describa a C_A.

Solución.

1 8 0 3

Ejemplo 4

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Determine si $\mathbf{w} = (4, 5)$ está en R_A y describa a R_A.

Solución.

Definición 1

Sea A una matriz $m \times n$.

- (a) El ***espacio renglón*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones de A:
$$R_A = \text{gen}\left\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\right\}$$
- (b) El ***espacio columna*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A:
$$C_A = \text{gen}\left\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\right\}$$

Propiedad 1 (base para el espacio renglón)

Si A y B son matrices $m \times n$ equivalentes por renglones, entonces el espacio renglón de A es igual al espacio renglón de B, es decir, $R_A = R_B$.

Observación 1

- (a) La propiedad 1 establece que el *espacio renglón* de una matriz no se modifica por la aplicación de operaciones elementales en los renglones.
- (b) La aplicación de operaciones elementales en los renglones de una matriz *puede* modificar el *espacio columna*.

Definición 1

Sea A una matriz $m \times n$.

- (a) El ***espacio renglón*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones de A:
$$R_A = \text{gen}\,\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$$
- (b) El ***espacio columna*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A:
$$C_A = \text{gen}\,\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$$

Propiedad 2 (base para el espacio renglón)

Si una matriz A es equivalente por renglones a una matriz B que está en forma escalonada, entonces los renglones no nulos de B forman una base para el espacio renglón de A.

Propiedad 2 (base para el espacio renglón)

Si una matriz A es equivalente por renglones a una matriz B que está en forma escalonada, entonces los renglones no nulos de B forman una base para el espacio renglón de A.

Ejemplo 5

Halle una base para el *espacio renglón* de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

Propiedad 2 (base para el espacio renglón)

Si una matriz A es equivalente por renglones a una matriz B que está en forma escalonada, entonces los renglones no nulos de B forman una base para el espacio renglón de A.

Ejemplo 6

Halle una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$S = \left\{ \underbrace{(-1,2,5)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{(3,0,3)}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{(5,1,8)}_{\mathbf{v}_3} \right\},$$

Solución

1 8 0 3

Base para el espacio columna de una matriz

Propiedad 3

Si A es una matriz $m \times n$, entonces $C_A = R_{A^T}$.

Observación 2

Para hallar una base del espacio columna de una matriz A podemos aplicar la propiedad 2 a la matriz A^T.

Propiedad 3

Si A es una matriz $m \times n$, entonces $C_A = R_{A^T}$.

Ejemplo 7

Halle una base para el *espacio columna* de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

1 8 0 3

Base para el espacio columna de una matriz

Ejemplo 8

Compare las relaciones de dependencia entre las columnas de la matriz A y las columnas de una matriz escalonada de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

1 8 0 3

Base para el espacio columna de una matriz

Observación 3

- (a) La aplicación de operaciones elementales en los renglones de una matriz *puede* cambiar el *espacio columna*.
- (b) La aplicación de operaciones elementales en los renglones de una matriz *no* cambia las relaciones de dependencia entre las columnas.
- (b) Una base para C_A está formada por las columnas de A que correspondan a las columnas que contienen los 1 pivote en la matriz escalonada.

1 8 0 3

Base para el espacio columna de una matriz

Ejemplo 9

Halle una base para el espacio columna de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

Propiedad 4

Si A es una matriz $m \times n$, entonces el espacio renglón de A y el espacio columna de A tienen la misma dimensión.

Definición 2 (rango de una matriz)

La dimensión del espacio renglón (o columna) de una matriz se llama el ***rango*** de A y se denota por $\rho(A)$.

Ejemplo 10

Halle el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución

Soluciones de un sistema lineal homogéneo

Definición 1

Sea A una matriz $m \times n$. Al conjunto de todas las soluciones del sistema lineal homogéneo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

se le denomina el ***espacio nulo*** de A y se denota por N_A:

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

A la dimensión del espacio nulo de A se le denomina ***nulidad*** de A y se denota por $\nu(A)$:

$$\nu(A) = \dim N_A$$

1 8 0 3

Soluciones de un sistema lineal homogéneo

Ejemplo 1

Encuentre el espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

Rango y nulidad de una matriz

Definición 1

Sea A una matriz $m \times n$. Al conjunto de todas las soluciones del sistema lineal homogéneo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

se le denomina el ***espacio nulo*** de A y se denota por N_A:

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

A la dimensión del espacio nulo de A se le denomina ***nulidad*** de A y se denota por $\nu(A)$:

$$\nu(A) = \dim N_A$$

Propiedad 1

Sea A una matriz $m \times n$. Entonces

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

Observación 1

La propiedad 4 nos dice que "rango + nulidad = número de columnas".

Ejemplo 2

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre el rango y la nulidad de A.

Solución

Ejemplo 2

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

b) Encuentre un subconjunto de vectores columna de A que formen una base para C_A.

Solución

1803

Ejemplo 2

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

- Si es posible, escriba la tercera columna de A como combinación lineal de las dos primeras.

Solución

1 8 0 3

Consistencia de un sistema de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{b} \in C_A$$

Propiedad 2

Un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A. Esto ocurrirá si y sólo si A y la matriz aumentada (A, b) tiene el mismo rango.

Ejemplo 3

Determine si el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

tiene solución.

Solución

Sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes cuadrada

Propiedad 3

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. A es no singular (invertible).
b. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para cada $\mathbf{b}$.
c. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.
d. A es equivalente (por renglones) a I_n.
e. $\det A \neq 0$.
f. $\rho(A) = n$.
g. Los n vectores renglones de A son linealmente independientes.
h. Los n vectores columna de A son linealmente independientes.

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3