Álgebra lineal – Semana 2

Combinación lineal, espacio generado e independencia lineal

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

1 8 0 3

Combinación lineal

Definición 1 (Combinación lineal)

Un vector $\mathbf{v}$ en un espacio vectorial V se dice que es ***combinación lineal*** de los vectores

$$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$$

de V, si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_k\mathbf{v_k}.$$

1 8 0 3

Combinación lineal

Definición 1 (Combinación lineal)

Un vector $\mathbf{v}$ en un espacio vectorial V se dice que es ***combinación lineal*** de los vectores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ de V si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_k\mathbf{v_k}$$

Ejemplo 1

Muestre que en el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{\underbrace{(1,3,1)}_{\mathbf{v_1}}, \underbrace{(0,1,2)}_{\mathbf{v_2}}, \underbrace{(1,0,-5)}_{\mathbf{v_3}}\},$$

el vector $\mathbf{v_1}$ es ***combinación lineal*** de los vectores $\mathbf{v_2}$ y $\mathbf{v_3}$.

Solución.

Combinación lineal

Ejemplo 2

Muestre que en el conjunto de vectores de M_{22},

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v_3}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v_4}} \right\},$$

el vector $\mathbf{v_1}$ es ***combinación lineal*** de los vectores $\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ y $\mathbf{v_4}$.

Solución.

1 8 0 3

Combinación lineal

Ejemplo 3

En $V = \mathbb{R}^3$, escriba al vector $\mathbf{v} = (1,1,1)$ como combinación lineal de los vectores en el conjunto

$$S = \{\underbrace{(1,2,3)}_{\mathbf{v_1}},\ \underbrace{(0,1,2)}_{\mathbf{v_2}},\ \underbrace{(-1,0,1)}_{\mathbf{v_3}}\}.$$

Solución.

1 8 0 3

Combinación lineal

Ejemplo 4

En $V = \mathbb{R}^3$, escriba al vector $\mathbf{w} = (1, -2, 2)$ como combinación lineal de los vectores en el conjunto

$$S = \{\underbrace{(1,2,3)}_{\mathbf{v_1}},\ \underbrace{(0,1,2)}_{\mathbf{v_2}},\ \underbrace{(-1,0,1)}_{\mathbf{v_3}}\}.$$

Solución.

1 8 0 3

Conjuntos generadores

Definición 2 (Conjunto generador)

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en un espacio vectorial V ***genera*** a V si todo vector en V se puede escribir como combinación lineal de los vectores en S. Es decir, para todo vector $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Ejemplo 5

El conjunto de vectores

$$S = \{\underbrace{(1,0,0)}_{\mathbf{i}}, \underbrace{(0,1,0)}_{\mathbf{j}}, \underbrace{(0,0,1)}_{\mathbf{k}}\}.$$

genera a $\mathbb{R}^3$.

Solución.

1 8 0 3

Conjuntos generadores de polinomios

Definición 2 (Conjunto generador)

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ en un espacio vectorial V ***genera*** a V si todo vector en V se puede escribir como combinación lineal de los vectores en S. Es decir, para todo vector $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Ejemplo 6

El conjunto de vectores

$$S = \{1, x, x^2\}$$

genera a P_2.

Solución.

Conjuntos generadores de polinomios

Definición 2 (Conjunto generador)

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en un espacio vectorial V ***genera*** a V si todo vector en V se puede escribir como combinación lineal de los vectores en S. Es decir, para todo vector $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Ejemplo 7

Ningún conjunto finito de polinomios genera a P.

Solución.

Conjuntos generador de $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 8

El conjunto de vectores

$$S = \{\underbrace{(1,2,3)}_{\mathbf{v_1}}, \underbrace{(0,1,2)}_{\mathbf{v_2}}, \underbrace{(-2,0,1)}_{\mathbf{v_3}}\},$$

genera a $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Conjuntos generador de M_{22}

Ejemplo 9

El conjunto de vectores

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_4} \right\},$$

genera a M_{22}.

Solución.

Espacio generado por un conjunto de vectores

Definición 3 (Espacio generado)

El ***espacio generado*** por un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

en un espacio vectorial V, se define como el conjunto de TODAS las combinaciones lineales de S. Al ***espacio generado*** por S se le denota por

$$\operatorname{gen}(S) \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

$$\operatorname{gen}(S) = \left\{ c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \text{ son números reales } \right\}.$$

Ejemplo 10

Halle el espacio generado por el vector $\mathbf{v} = (2, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución.

Espacio generado por un conjunto de vectores

Definición 3 (Espacio generado)

El ***espacio generado*** por un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

en un espacio vectorial V, se define como el conjunto de TODAS las combinaciones lineales de S. Al ***espacio generado*** por S se le denota por

$$\operatorname{gen}(S) \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

$$\operatorname{gen}(S) = \left\{ c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \text{ son números reales } \right\}.$$

Propiedad 1

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces

$$\operatorname{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Espacio generado por un conjunto de vectores

Definición 3 (Espacio generado)

El ***espacio generado*** por un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

en un espacio vectorial V, se define como el conjunto de TODAS las combinaciones lineales de S. Al ***espacio generado*** por S se le denota por

$$\operatorname{gen}(S) \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

$$\operatorname{gen}(S) = \left\{ c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \text{ son números reales} \right\}.$$

Ejemplo 11

Demuestre que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores que generan un espacio vectorial V, entonces para todo vector $\mathbf{w}$ en V, los vectores $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ también generan a V.

Solución.

Espacio generado por un conjunto de vectores

Definición 3 (Espacio generado)

El ***espacio generado*** por un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

en un espacio vectorial V, se define como el conjunto de TODAS las combinaciones lineales de S. Al ***espacio generado*** por S se le denota por

$$\operatorname{gen}(S) \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

$$\operatorname{gen}(S) = \left\{ c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \text{ son números reales} \right\}.$$

Ejemplo 12

Demuestre que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores que generan un espacio vectorial V y que si uno de los vectores $\mathbf{v}_k$ es combinación lineal del resto, entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sin el vector $\mathbf{v}_k$ también generan a V.

Solución.

Espacio generado por un conjunto de vectores

Definición 3 (Espacio generado)

El ***espacio generado*** por un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

en un espacio vectorial V, se define como el conjunto de TODAS las combinaciones lineales de S. Al ***espacio generado*** por S se le denota por

$$\text{gen}\,(S) \qquad \text{ó} \qquad \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

$$\text{gen}\,(S) = \left\{ c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \text{ son números reales} \right\}.$$

Ejemplo 13

Demuestre que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores que generan un espacio vectorial V y que si uno de los vectores $\mathbf{v}_k$ es el vector cero, entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sin el vector cero también generan a V.

Solución.

Independencia lineal

Observación 1

- (a) Dado un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, la ecuación

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

siempre tiene la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

- (b) En el ejemplo 1 vimos que $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, donde

$$\mathbf{v_1} = (1,3,1),\ \mathbf{v_2} = (0,1,2)\ \text{ y }\ \mathbf{v_3} = (1,0,-5)$$

y por tanto la ecuación

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

tiene la **solución NO trivial**

$$c_1 = 1,\ c_2 = -3,\ c_3 = -1.$$

Independencia lineal

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

- a) Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

  tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

- b) Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

1 8 0 3

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

- (a) Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

  tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

- (b) Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Ejemplo 1

Muestre que el conjunto de vectores $S = \{(1,2),(2,4)\}$ en $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente (LD).

Solución

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

- a) Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

- b) Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Ejemplo 2

Muestre que el conjunto de vectores $S = \{(0,0),(1,2)\}$ en $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente (LD).

Solución

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

- (a) Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0, \; c_2 = 0, \; \ldots, \; c_k = 0.$$

- (b) Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Ejemplo 3

Muestre que el conjunto de vectores $S = \{(1,0), (0,1), (-2,5)\}$ en $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente (LD).

Solución

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

- (a) Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

  tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

- (b) Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Propiedad 1

Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

Conjuntos linealmente independientes

Ejemplo 4

Determine si el conjunto de vectores

$$S = \{ \underbrace{(1,2,3)}_{\mathbf{v_1}}, \underbrace{(0,1,2)}_{\mathbf{v_2}}, \underbrace{(-2,0,1)}_{\mathbf{v_3}} \}$$

en $V = \mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente (LD) o independiente (LI).

Solución.

1 8 0 3

Test para la independencia lineal

Procedimiento 1

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V. Para determinar si S es LI o LD efectúe los siguientes pasos:

- (a) A partir de la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

  escriba un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en las variables $c_1, \ldots, c_k$.
- (b) Utilice eliminación gaussiana para resolver el sistema.
- (c) Si el sistema tiene solamente la solución trivial

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0,$$

  entonces el conjunto S es linealmente independiente (LI).
- (d) Si el sistema tiene soluciones no triviales, entonces el conjunto S es linealmente dependiente (LD).

Test para la independencia lineal

Ejemplo 5

Determine si el siguiente conjunto de vectores en P_2 es LI o LD.

$$\left\{\underbrace{1+x-2x^2}_{\mathbf{v_1}},\ \underbrace{2+5x-x^2}_{\mathbf{v_2}},\ \underbrace{x+x^2}_{\mathbf{v_3}}\right\}$$

Solución.

1 8 0 3

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

a. Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

b. Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Propiedad 2

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente dependiente (LD) si y sólo si al menos uno de los vectores $\mathbf{v}_j$ puede escribirse como combinación lineal de los otros vectores en S.

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

- (a) Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

- (b) Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Ejemplo 6

Suponga que $\mathbf{v}$ es un vector de un espacio vectorial V. Determine si el conjunto $\{\mathbf{v}\}$ es LI o LD.

Solución.

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

- (a) Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

- (b) Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Ejemplo 7

Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores en un espacio vectorial V y que $\mathbf{v}_1$ es el vector cero. Determine si el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es LI o LD.

Solución.

Conjuntos linealmente dependientes

Definición 1 (Independencia lineal)

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.

a. Se dice que S es ***linealmente independiente*** (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

tiene solamente la **solución trivial**

$$c_1 = 0, \; c_2 = 0, \; \ldots, \; c_k = 0.$$

b. Si existen soluciones no triviales de (1), se dice que S es ***linealmente dependiente*** (LD).

Ejemplo 8

Suponga que en el listado de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ uno de ellos es múltiplo escalar de otro. Determine si el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es LI o LD.

Solución.

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.

1803