Álgebra lineal – Semana 5

Cambio de base

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Coordenadas

Propiedad 1

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Entonces para cada vector $\mathbf{v} \in V$, existen escalares *únicos* $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Definición 1

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V y $\mathbf{v} \in V$ tal que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

A los escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ se les llama las ***coordenadas de*** $\mathbf{v}$ ***respecto a*** $\mathcal{B}$ y al vector columna

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

se le denomina el ***vector coordenado de*** $\mathbf{v}$ ***respecto a*** $\mathcal{B}$.

Definición 1

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V y $\mathbf{v} \in V$ tal que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

A los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se les llama las ***coordenadas de*** $\mathbf{v}$ ***respecto a*** $\mathcal{B}$ y al vector columna

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

se le denomina el ***vector coordenado de*** $\mathbf{v}$ ***respecto a*** $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1

Encuentre el vector coordenado $[x]_{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{x} = (-3, 2, 1)$ respecto a la base canónica $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Definición 1

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V y $\mathbf{v} \in V$ tal que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

A los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se les llama las ***coordenadas de*** $\mathbf{v}$ ***respecto a*** $\mathcal{B}$ y al vector columna

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

se le denomina el ***vector coordenado de*** $\mathbf{v}$ ***respecto a*** $\mathcal{B}$.

Ejemplo 2

Encuentre el vector coordenado $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ de $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$ respecto a la base canónica $\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2\}$ de P_2.

Solución.

Coordenadas

Ejemplo 3

Encuentre el vector coordenado $[A]_{\mathcal{B}}$ de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

respecto a la base canónica $\mathcal{B} = \{E_{11},\ E_{12},\ E_{21},\ E_{22}\}$ de M_{22}.

Solución.

Coordenadas

Ejemplo 4

El vector coordenado de $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ respecto a la base (no estándar) $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,2)\}$ es

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determine el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica.

Solución.

Coordenadas

Ejemplo 5

Encuentre el vector de coordenadas de $[x]_{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$ en $\mathbb{R}^3$ relativo a la base (no estándar) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (2, 3, -5)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

1 8 0 3

Coordenadas

Ejemplo 6

Encuentre el vector coordenado $[p(x)]_{\mathcal{C}}$ de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ respecto a la base $\mathcal{C} = \{1 + x,\, x + x^2,\, 1 + x^2\}$ de P_2.

Solución.

1 8 0 3

Coordenadas

Propiedad 2

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en V y c un escalar. Entonces:

- $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$
- $[c\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = c\,[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$

Coordenadas

Propiedad 3

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V y sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ vectores en V. Entonces el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es linealmente independiente (LI) en V si y sólo si

$$\{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}\}$$

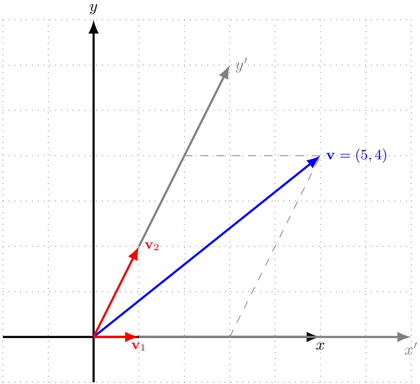
es linealmente independiente (LI) en $\mathbb{R}^n$.

Coordenadas

Ejemplo 1

Halle los vectores de coordenadas del vector $\mathbf{v} = (5,4)$ en $\mathbb{R}^2$, respecto a las bases

$$\mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{(1,0)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(0,1)}_{\mathbf{u}_2} \Big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \Big\{ \underbrace{(1,0)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{(1,2)}_{\mathbf{v}_2} \Big\}.$$



$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = ?$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = ?$$

1 8 0 3

Coordenadas respecto a una base no estándar

Ejemplo 2

Considere en $\mathbb{R}^2$ las bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} \right\}.$$

Encuentre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ dado que

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Solución.

Matriz de cambio de base

Definición 1

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V. A la matriz $n \times n$ cuyas columnas son los vectores coordenados

$$[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}$$

se le llama ***matriz de cambio de base*** de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y se denota por $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Es decir,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\; [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \; \middle| \; [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}} \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \; \right)$$

Observación 1

a. Piense en $\mathcal{B}$ como la base “antigua” y $\mathcal{C}$ como la base “nueva”.
b. Las columnas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son son precisamente los vectores coordenados obtenidos al escribir los vectores de la base antigua en términos de los nuevos.

Matriz de cambio de base

Definición 1

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V. A la matriz $n \times n$ cuyas columnas son los vectores coordenados

$$[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}$$

se le llama ***matriz de cambio de base*** de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y se denota por $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Es decir,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\; [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \;\middle|\; [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \; \right)$$

Propiedad 1

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V y sea $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Entonces

- a) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ en V.
- b) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es la única matriz que satisface la propiedad (a).
- c) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es invertible y $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$

Matriz de cambio de base

Propiedad 1

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V y sea $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Entonces

- (a) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ en V.
- (b) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es la única matriz que satisface la propiedad (a).
- (c) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es invertible y $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$

Ejemplo 3

Encuentre las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ para

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C} = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}.$$

Luego encuentre el vector coordenado de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ respecto a $\mathcal{C}$.

Solución.

Matriz de cambio de base

Ejemplo 3

Encuentre las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ para

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}.$$

Luego encuentre el vector coordenado de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ respecto a $\mathcal{C}$.

Solución. (Continuación)

Matriz de cambio de base

Propiedad 1

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V y sea $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Entonces

- (a) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ en V.
- (b) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es la única matriz que satisface la propiedad (a).
- (c) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es invertible y $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$

Observación 2

Para encontrar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ utilizando la propiedad $3(a)$ no es necesario conocer explícitamente a la matriz de cambio de base

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \ \right).$$

Si conocemos a $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ y a $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ podemos utilizar eliminación gaussiana así:

$$\left(\ P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \mid [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \ \right) \longrightarrow \left(\ I \mid (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \ \right) \longrightarrow \left(\ I \mid P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \ \right)$$

Observación 2

Para encontrar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ utilizando la propiedad $3(a)$ no es necesario conocer explícitamente a la matriz de cambio de base

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}\ \middle|\ [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}\ \middle|\ \cdots\ \middle|\ [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}\ \right).$$

Si conocemos a $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ y a $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ podemos utilizar eliminación gaussiana así:

$$\left(\ P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\ \middle|\ [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\ \right) \longrightarrow \left(\ I\ \middle|\ (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\ \right) \longrightarrow \left(\ I\ \middle|\ P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\ \right)$$

Ejemplo 4

Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$ en $\mathbb{R}^3$, respecto a la base

$$\mathcal{C} = \Big\{ (1, 0, 1),\ (0, -1, 2),\ (2, 3, -5) \Big\}.$$

Solución.

Matriz de cambio de base por medio de eliminación de Gauss-Jordan

Propiedad 2

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V. Sean

$$B = \left(\; [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{E}} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{E}} \; \right)$$

y

$$C = \left(\; [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{E}} \mid \cdots \mid [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}} \; \right),$$

donde $\mathcal{E}$ es cualquier base para V. Entonces al aplicar eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada $(\; C \mid B \;)$, se obtiene

$$(\; C \mid B \;) \longrightarrow (\; I \mid P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \;).$$

Observación 3

Si $\mathcal{E}$ es una base canónica, la propiedad 2 es muy fácil de usar porque en tal caso

$$B = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \qquad \text{y} \qquad C = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}$$

son muy fáciles de calcular.

Matriz de cambio de base por medio de eliminación de Gauss-Jordan

Ejemplo 5

Encuentre la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ para las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \Big\{(6,3,3),(4,-1,3),(5,5,2)\Big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \Big\{(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1)\Big\}.$$

Solución.

Ejemplo 6

En P_2,

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{B} = \left\{ 6 - x,\ 3x,\ x^2 - x - 2 \right\}.$$

Escriba a $p(x)$ en términos de la base $\mathcal{C} = \left\{ 2,\ -4 + x,\ x + x^2 \right\}$.

Solución.

1 8 0 3

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3