Estadística
Semana 3: Probabilidad

Conceptos básicos

Espacio muestral

El espacio muestral de un experimento, representado por Ω, es simplemente el conjunto que incluye todos los resultados posibles de ese experimento.

Probabilidad Clásica o de Laplace

En un experimento aleatorio con un espacio muestral en el que todos los resultados son equiprobables, se emplea la probabilidad de Laplace para calcular la probabilidad de un evento A. La fórmula asociada a este enfoque es la siguiente:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

donde:

- $\#(A)$ representa el número de resultados favorables al evento A,
- $\#(\Omega)$ es el número total de resultados posibles en el espacio muestral.

Reglas de Probabilidad

Sean A y B eventos.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. $P(\emptyset) = 0$.

Probabilidad Condicional

Supongamos que $P(B) > 0$. Definimos la probabilidad condicional de A dado B como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejercicio 1:

Halle el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar una moneda corriente hasta obtener por primera vez cara.

Solución:

Definimos el espacio muestral Ω de la siguiente manera:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Esto significa que los 3 primeros lanzamientos fueron sella y el cuarto fue cara.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, \infty\}$$

Notemos que el 1 significa que en el primer lanzamiento se obtuvo cara. Similarmente, el 4 significa que los 3 primeros lanzamientos fueron sello y el cuarto fue cara.

Ejercicio 2:

Encuentra las probabilidades bajo resultados igualmente probables. Indique el espacio muestral en cada caso.

(a) Lanzar una moneda.

$$P(\text{cara}) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

(b) Lanzar una moneda tres veces.

$$P(\text{lanzar al menos dos caras seguidas}) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

(c) Lanzar dos dados.

$$P(\text{la suma es 7}) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Ejercicio 3:

Consider el lanzamiento de una moneda 4 veces. Hallar la probabilidad de obtener

1. Al menos tres caras.
2. Menos de tres caras.
3. Que relación hay entre los dos eventos anteriores.

Solución

$$P(\text{Al menos 3 caras}) = \frac{5}{16}$$

$$P(\text{menos de 3 caras}) = 1 - P(\text{al menos 3 caras}) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}.$$

Uno es el complemento del otro.

Ejercicio 4:

Considere una baraja española de 48 cartas la cual consta de 48 cartas divididas en cuatro palos: oros, copas, bastos y espadas. Cada palo es enumerado del 1 al 12.

1. Determinar la probabilidad de seleccionar una carta y que corresponda a copa.
2. Se seleccionan dos cartas, calcular la probabilidad de que al menos una sea copa.
3. Si se seleccionan tres cartas, calcular la probabilidad de que las tres correspondan a espada.

Solución:

En la solución se recurre a la probabilidad de Laplace.

1. Denotemos como A el evento de seleccionar una carta y obtener una copa. Entonces
$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{12}{48} \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$
2. Denotemos como B el evento de seleccionar dos cartas y obtener al menos una copa. El evento B^c se refiere al evento de obtener ninguna copa.
$$P(B^c) = \frac{36 * 35}{48 * 47} = 0{,}558$$
Por lo tanto, $P(B) = 1 - P(D^c) = 0{,}44$
3. Sea F definido como el evento de seleccionar tres cartas y obtener tres espadas.
$$P(F) = \frac{12 * 11 * 10}{48 * 47 * 46} = 0{,}0127$$

Ejercicio 5:

Considere el lanzamiento de un dado justo. Sean A los eventos definidos como obtener el 2 y B el evento de obtener un resultado par. Hallar $P(A)$ y $P(A|B)$.

Solución

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Además:
$$\begin{aligned} A &= \{2\} \\ B &= \{2, 4, 6\} \end{aligned}$$
Como cualquier cara del dado es igualmente probable, entonces
$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados en A}}{\text{número de elementos en E}} = \frac{1}{6}.$$
Similarmente se calcula que $P(B) = \frac{1}{2}$. Como $A \cap B = \{2\}$ entonces $P(A \cap B) = 1/6$.
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$
Notemos como la probabilidad de A es $P(A) = 1/6$ y al condicionar sobre el evento B, esta probabilidad se incrementa a $1/3$. Este incremento es debido a la información adicional proporcionada por el evento B.

Ejercicio 6:

$70\,\%$ de las aeronaves ligeras que desaparecen en vuelo en cierto país son posteriormente localizadas. De las aeronaves que son localizadas, $60\,\%$ cuentan con un localizador de emergencia, mientras que $90\,\%$ de las aeronaves no localizadas no cuentan con dicho localizador. Suponga que una aeronave ligera ha desaparecido.

1. Si tiene un localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que no será localizada?
2. Si no tiene un localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que será localizada?

(Ejercicio tomado de: Devore J. (2012). Probabilidad y estadística para ingeniería y Ciencias. página 81)

Solución