

数值解析

第3回 非線形方程式

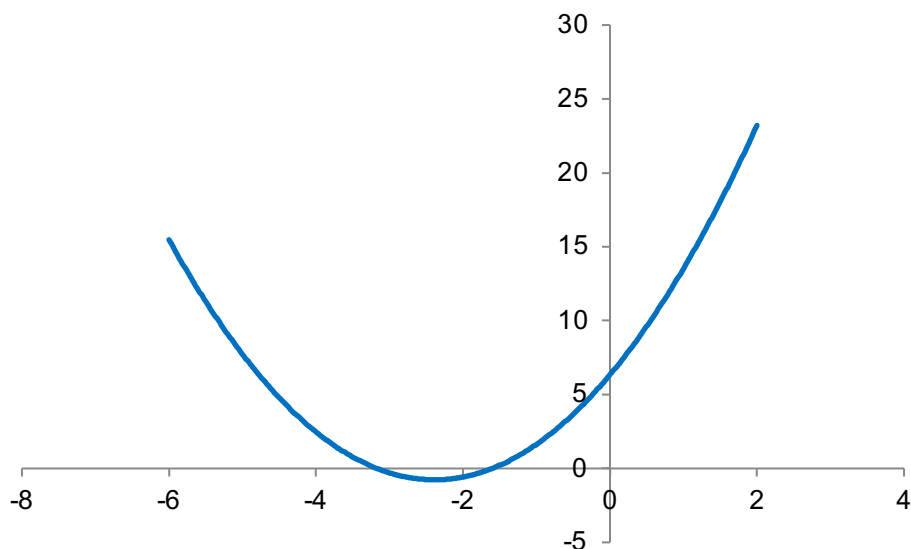
本日の目標

1. 2つの手法で非線形方程式の数値解を求める
 1. 2分法
 2. ニュートン法

非線形とは

- 線形でないもの.
- 変数(x)に関する2次以上の多項式で表されるもの.
- 三角関数 etc.

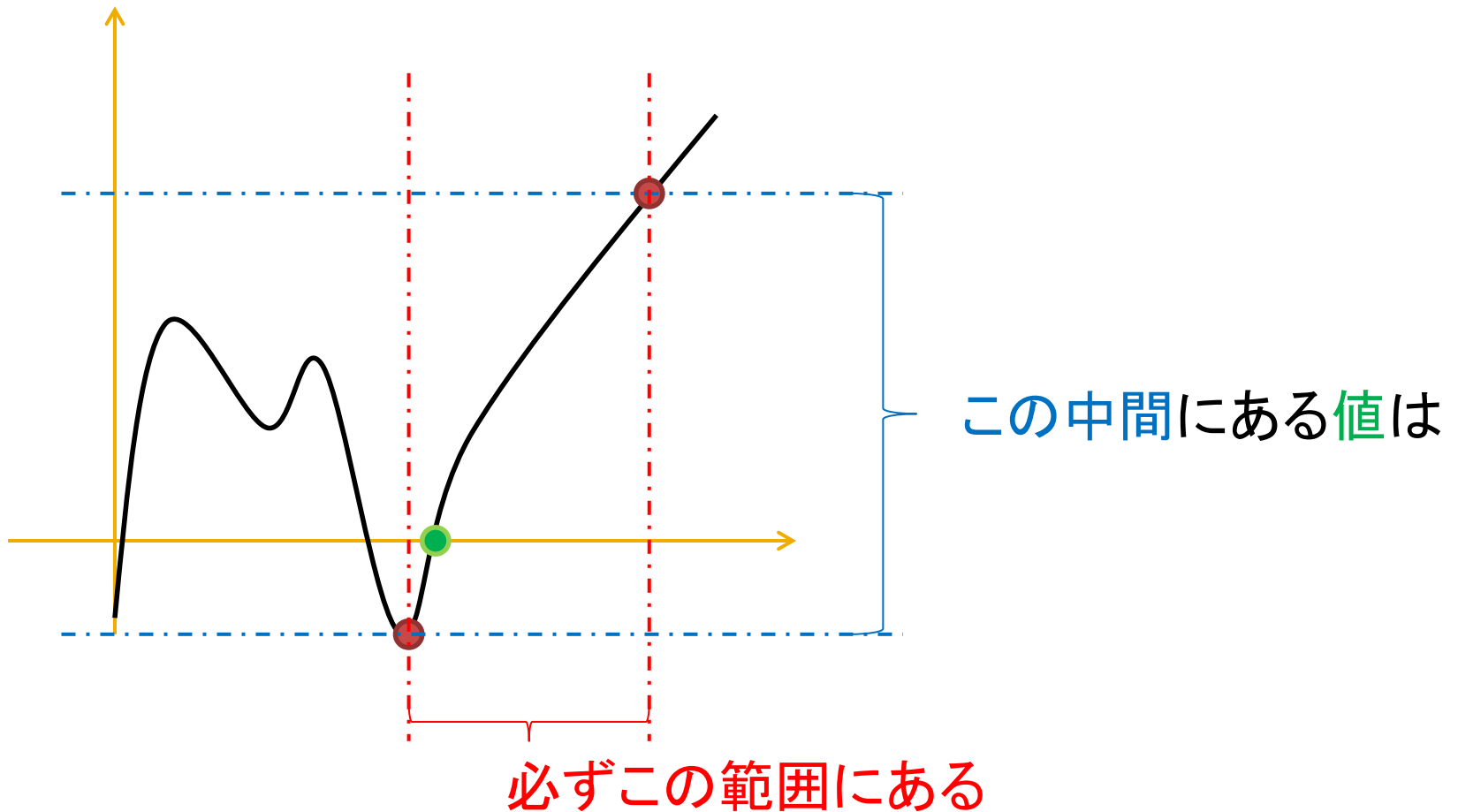
例) $y = x^2 + 5x + 6$



$$y = 3x^3 + 1$$
$$y = \sin x + 1.0$$

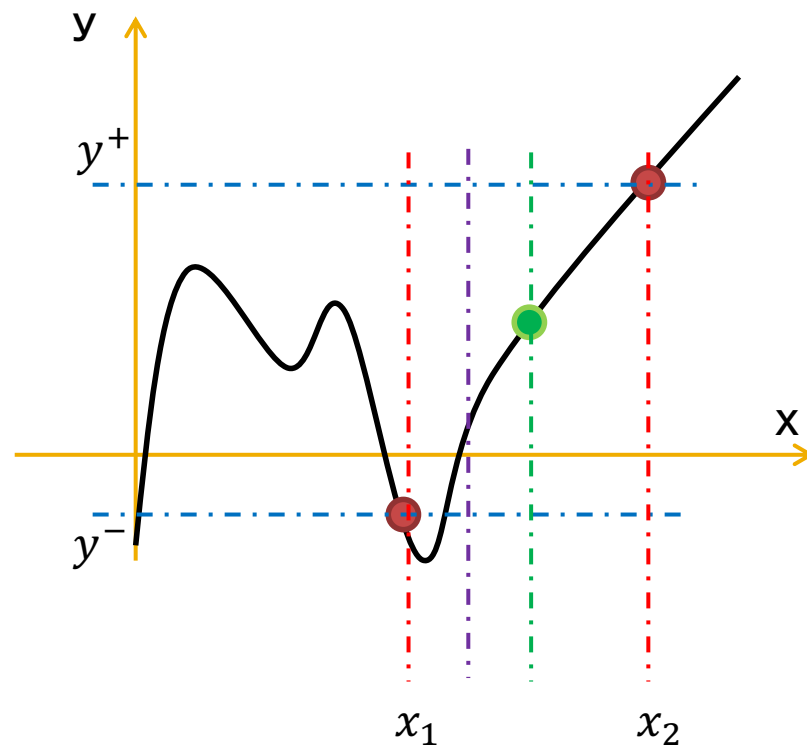
2分法

- 中間値の定理



2分法

1. 何らかの方法で y^+ と y^- を見つける.
2. 対応する $[x_1, x_2]$ の中間を計算する.
3. 符号が異なるペアの区間を選ぶ.
4. 3の区間の中間を計算する.
5. 以下繰り返し



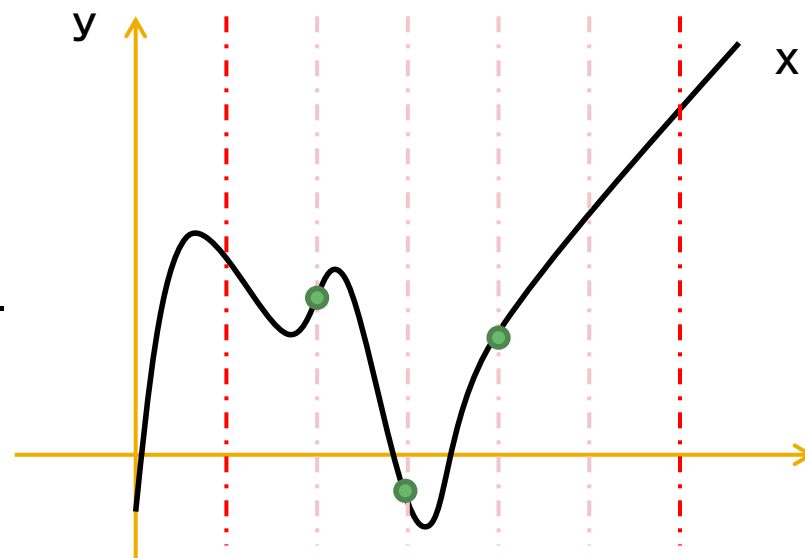
区間の幅は1ステップで半分になる.
→最大誤差は $1/2^n$ (n はステップ数)

2分法

- 対象区間の見つけ方

1. 全区間と刻み幅を決める.
2. 符号が変わるペアを対象区間とする.

符号反転の判別: $y_1 \times y_2 < 0$



解が2つある

- 求めたい問題は $f(x) = 0$ の形にする.
- $f(x) \geq 0$ が常に成り立つ問題は解けない.

例:

- $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$ の $[-3, 3]$ における解

1. $[-3, 3]$ を1刻みで計算してみる.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	30	-15	-16	-9	-6	5	60



ここに解が存在する



2. $[1, 2]$ を選択し, 中間値1.5のときの $f(x)$ を計算する.

x	1	1.5	2
f(x)	-6	-3.2	5



解はこちらに存在 → $[1.5, 2]$ を選択し, $f(1.75)$ を計算

例:

- $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$ の $[-3, 3]$ における解

3. $[1.5, 2]$ の中間値 1.75 における $f(x)$ の計算

x	1.5	1.75	2
f(x)	-3.2	-0.1	5



解はこちらに存在

4. 以下繰り返し

- $f(x)$ が一定値以下になる (0 に近づく)
- 指定回数の繰り返しが完了する

とき終了する.

ニュートン法

- $f(x) = 0$ の $x = x_0$ に関するテイラー展開

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \underbrace{(x - x_0)^2}_{\approx 0} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \underbrace{(x - x_0)^n}_{\approx 0} + \cdots$$

$x - x_0$ が十分に小さい (x_0 は真の解 α に十分近い)

$$f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \approx 0$$

$$\Delta x = \alpha - x_0$$

$$\Delta x \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\alpha = \Delta x + x_0$$

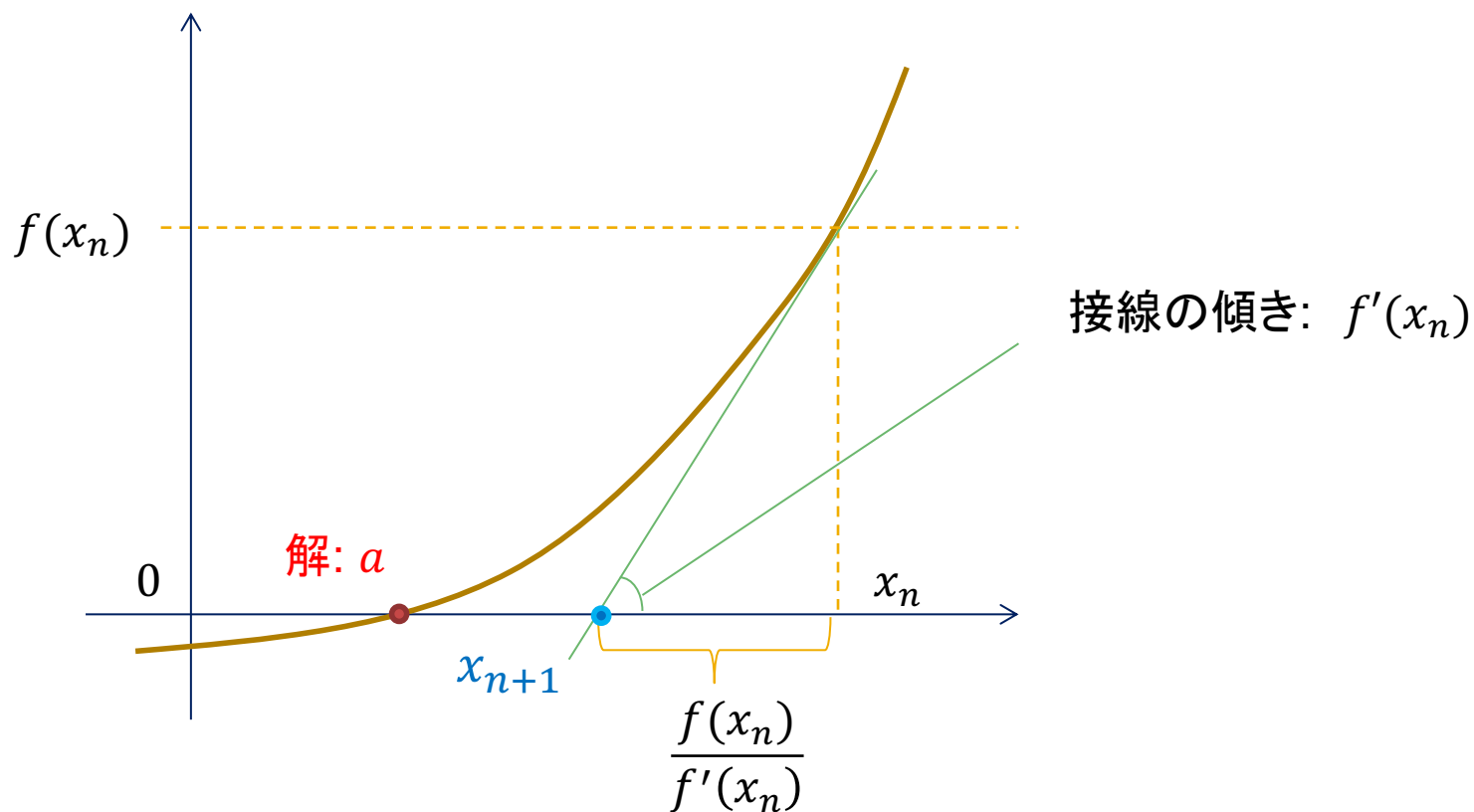
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$n=0, 1, 2, \dots$ と繰り返し解く

ニュートン法の模式図

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

静止するのは $f(x) = 0$ のとき



テイラー展開の仮定について

$x - x_0$ が十分に小さい(x_0 は真の解 α に十分近い)

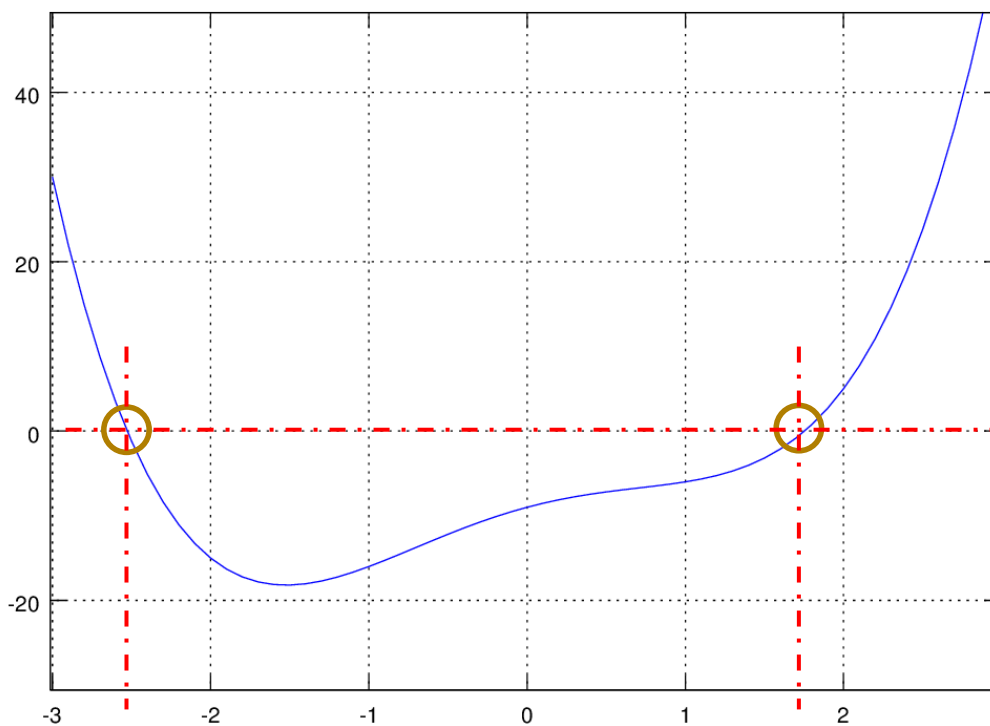


高次の項が無視できるほど小さくならない.
真の解から遠い x_0 を選ぶと解が収束しないことがある.

初期値の決め方 (その2)

- 作図してみる方法が簡単 (gnuplotなどが便利)

$$x^4 - 3x^2 + 5x - 9$$



-2.6ぐらい？

1.8ぐらい？

例:

- $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$
 $f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$

1. [1, 3]の中央値を初期値 $x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^4 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 9}{4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 5} = 2 - 0.2 = 1.8$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.8 - 0.0443 = 1.7557$$

x	2.00	1.80000	1.75564
f(x)	5.00	0.77760	0.03173
f'(x)	25.00	17.52800	16.11150
f(x)/f'(x)	0.20	0.04436	0.00197

微分の近似

- 前方差分

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

- 後方差分

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

微分が解析的に求められないときは差分を用いても良い。
ただし、初期値として x_0, x_1 の2つが必要となる。

演習課題3

1. $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$ について, k3-input.csvから入力された区間 $[a_1, a_2]$ に関して, 2分法とニュートン法をそれぞれで10回繰り返したときの解の変化を出力せよ.

ただし, 2分法は区間両端から開始することとし,
ニュートン法の初期値は区間の中央値とする.

また, 与式は区間の設定により複数の実数解を持つが,
k3-input.csvは必ず1つの実数解を持つ区間となるよう
与えることとする。