数値解析

第7回 固有値

今日の目標

- 固有値の図形的な意味をなんとなく理解する
- 最大・最小固有値が計算できるようになる

固有値

正則な正方行列**A**に対し

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

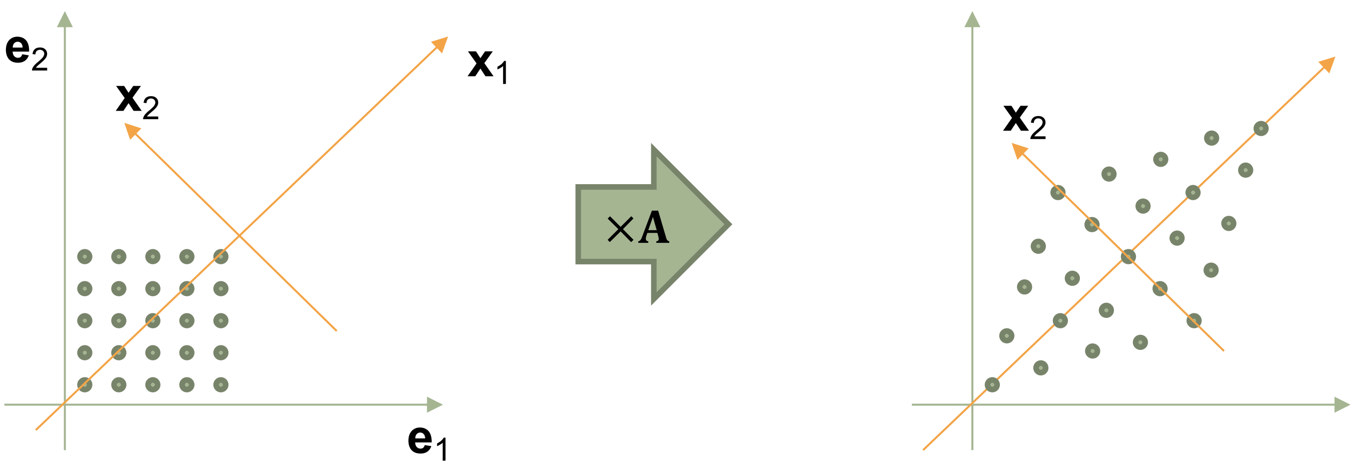
λ: 固有値
x: 固有ベクトル

一般に, 5次以上の行列の固有値を求めるのは困難

⇒ （応用先が多い）**最大固有値・最小固有値**を求める

計算法に入る前に･･･

- 正則行列**A**の異なる固有値(λ_1, λ_2,･･･)に対応する固有ベクトル($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,)はそれぞれ線型独立となる。（対称行列では直行する）



$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = c'_1\mathbf{x}_1 + c'_2\mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{Ay} = c'_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c'_2\lambda_2\mathbf{x}_2$$

固有ベクトル: 変換によって向きが変わらないベクトル
固有値: 変換によって引き延ばされる割合

最大固有値

- 固有値の性質から

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{x}_\mathrm{n}$$

$$\mathbf{A}^k\mathbf{y} = c_1\lambda_1^\mathrm{k}\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_\mathrm{n}$$

絶対値最大の固有値をλ_{max}とすると

$$\mathbf{A}^k\mathbf{y} = \lambda_{max}^k\left(c_1\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_{max}}}_{<1}\right)^\mathrm{k}\mathbf{x}_1 + c_2\left(\underline{\frac{\lambda_2}{\lambda_{max}}}\right)^\mathrm{k}\mathbf{x}_2 + \cdots + c_\mathrm{max}\mathbf{x}_\mathrm{m} + \cdots + c_n\left(\underline{\frac{\lambda_n}{\lambda_{max}}}\right)^\mathrm{k}\mathbf{x}_\mathrm{n}\right)$$

べき数kが十分大きければ

$$\boxed{\approx \lambda_{max}^k\, c_\mathrm{max}\,\mathbf{x}_\mathrm{m}}$$

最大固有値の計算

- べき数kが十分に大きい状態において

$$\frac{\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{y}}{\mathbf{A}^{k}\mathbf{y}} \approx \frac{\lambda_{max}^{k+1}\, c_{\max}\, \mathbf{x}_{\mathrm{m}}}{\lambda_{max}^{k}\, c_{\max}\, \mathbf{x}_{\mathrm{m}}} \approx \lambda_{max}$$

この関係は適当に取った**y**について成り立つ。

⇨ 任意の**y**を初期値とした以下の反復で固有値を求めることができる。

$$\boxed{\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)} \quad \lambda = \max_{\mathrm{dim}}\left(\frac{\mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k)}}\right)}$$

比が最大となる次元

収束（終了）条件

$$\boxed{\frac{\left|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right|}{\left|\lambda^{(k)}\right|} < \varepsilon}$$

(k): 括弧つきの数字は反復数

捕捉: λの計算

内積を用いて以下のように計算しても良い。

$$\lambda = \frac{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k)}}$$

反復毎の最大値探索を内積に置き換えることで高速化

また，次のステップの入力ベクトルは正規化した方が安定する。

$$\mathbf{y}^{(k)} \rightarrow \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|}$$

最小固有値

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

両辺に逆行列**A**$^{-1}$を左側から掛ける

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{x}}$$

⇨ **A**$^{-1}$の最大固有値が求まれば，逆数で最小固有値が求まる。

最小固有値の計算

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}^{(k)}$$

このままでは，**Aの逆行列**が必要

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)}$$

AはLU分解可能なので，

$$\boxed{\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} \qquad \frac{1}{\lambda} = \max_{\mathrm{dim}}\left(\frac{\mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k)}}\right)}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{y}^{(k)}$$
$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{z}$$

を解く

$$\lambda = \frac{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k)}}{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k+1)}}$$ でもOK

演習課題7

- 行列Aをinput.csvから読み取り，最大固有値と最小固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 7 & -5 \\ 0 & 10 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$