

数値解析

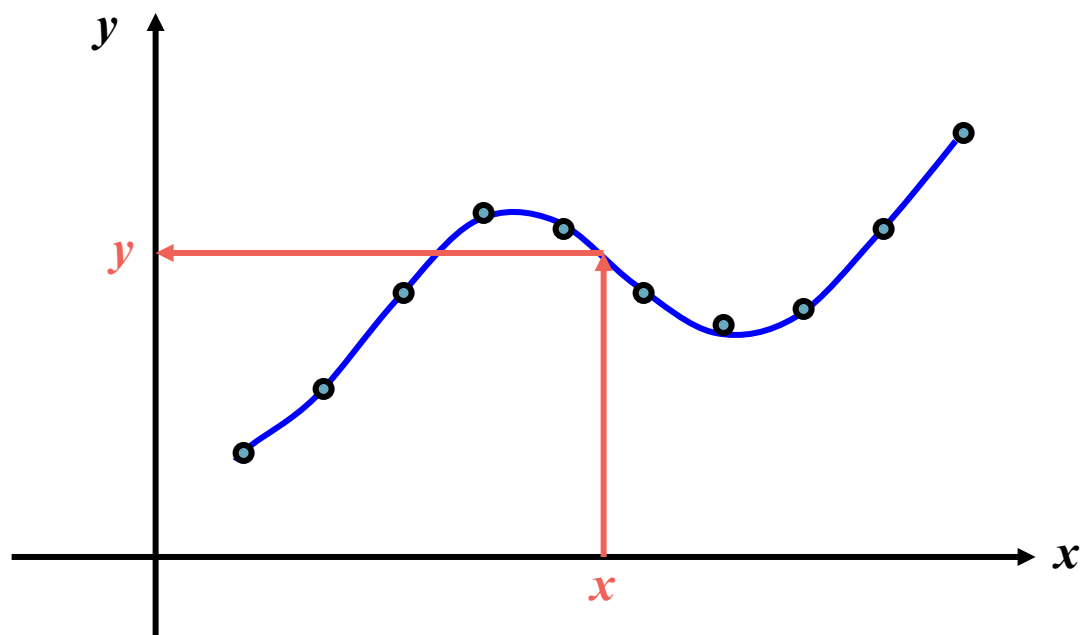
第9回 関数近似と補間2 ～ラグランジュ補間, ニュートン補間～

目的

- 近似と補間の違いを理解する
- 多項式による補間を実装できるようにする

補間 (interpolation)

- 複数の (x_i, y_i) のペアが与えられたとき,
 - 与えられた**すべての点を通る関数**を求め,
 - 任意の x に対し, 対応する y を求める手法.



関数近似と補間

- 関数近似 (fitting)

データ群を関数で表現することで, おおまかな傾向を知る.

関数がデータ点を通らないことが多い.

誤差がある測定データにおいて, 誤差の影響を軽減できる.

あてはめ関数が不適切だとデータ点ですら正しく表現できない.

- 補間 (interpolation)

データ群をすべて通る関数を求め, 任意の点で値を推定する.

誤差が含まれるデータでは誤差の影響を受けやすい

少なくともデータ点においては正確に表現される.

ラグランジュ補間

- **n+1組のデータ** $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ を**n次の多項式**で表すことで補間する. (一意)
- 必ずデータ点を通ることから補間n次多項式は

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \boxed{l_i(x)}$$

n次多項式

例えばデータ (x_0, y_0) に関して

$$P_n(x_0) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad l_i(x_0) = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

ラグランジュ補間

- 一般的なデータ (x_k, y_k) に関して

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x_k) \qquad l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases}$$

$k \neq i$ のとき $l_i(x) = 0$ の条件より,

$$l_i(x) = A(x - x_0) \underbrace{(x - x_1)}_{x = x_1 \text{ のとき } 0} \dots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \dots \underbrace{(x - x_n)}_{x = x_n \text{ のとき } 0}$$

$k = i$ のとき $l_i(x) = 1$ の条件より,

$$1 = A(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{k-1})(x_i - x_{k+1}) \dots (x_i - x_n)$$

$$A = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{k-1})(x_i - x_{k+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

ラグランジュ補間

- (x_i, y_i) に関して

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{k-1})(x_i - x_{k+1}) \dots (x_i - x_n)}$$
$$= \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$



$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

ラグランジュ補間多項式

ラグランジュ補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$ の3点から, $(5, y)$ の値を求める.

$$i = 0$$

$$y_0 \times \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = 1 \times \frac{x - 3}{-2} \times \frac{x - 7}{-6}$$

$$i = 1$$

$$9 \times \frac{x - 1}{2} \times \frac{x - 7}{-4}$$

$$i = 2$$

$$49 \times \frac{x - 1}{6} \times \frac{x - 3}{4}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

ラグランジュ補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$ の3点から, $(5, y)$ の値を求める.

$$i = 0$$

$$1 \times \frac{x-3}{-2} \times \frac{x-7}{-6}$$

$$x = 5$$

$$1 \times \frac{5-3}{-2} \times \frac{5-7}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$i = 1$$

$$9 \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-7}{-4}$$

$$9 \times \frac{5-1}{2} \times \frac{5-7}{-4} = \frac{72}{8} = 9$$

$$i = 2$$

$$49 \times \frac{x-1}{6} \times \frac{x-3}{4}$$

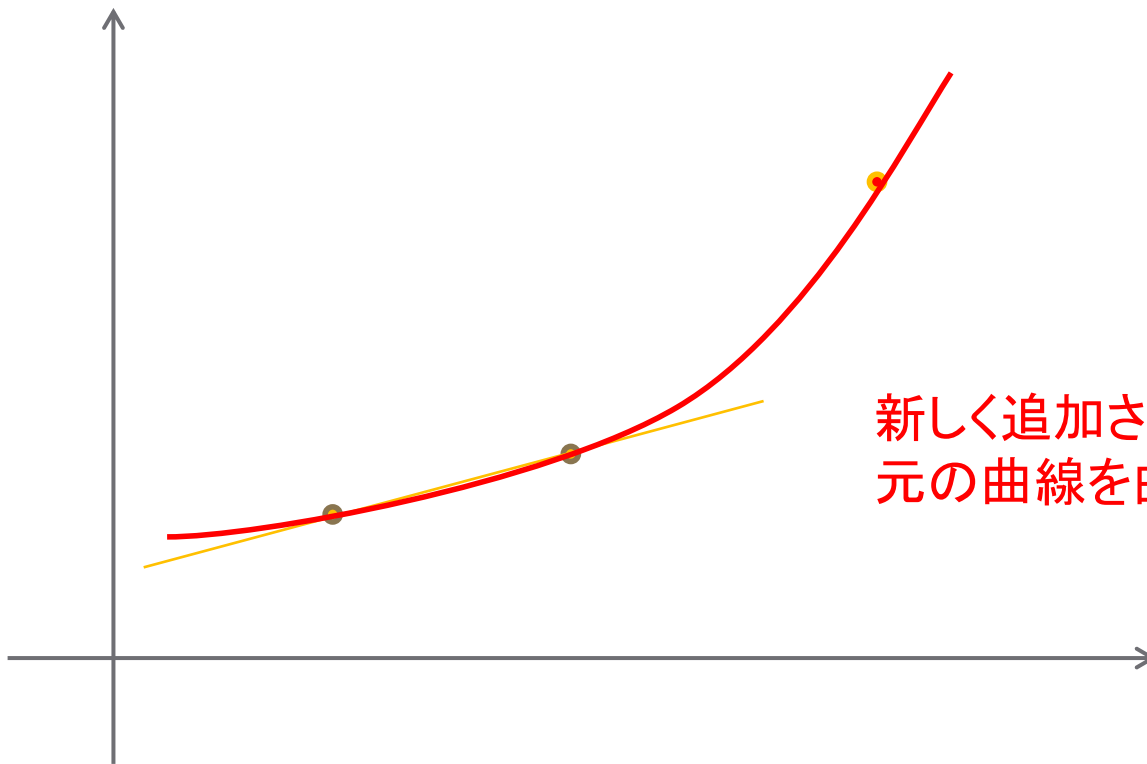
$$49 \times \frac{5-1}{6} \times \frac{5-3}{4} = \frac{49 \times 8}{24} = \frac{49}{3}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$y = P_2(5) = -\frac{1}{3} + 9 + \frac{49}{3} = 9 + \frac{48}{3} = 25$$

ニュートン補間

- ラグランジュ補間は次数(点数)が変わると全部再計算→面倒
- 増えた分だけ計算することはできないか？



ニュートン補間

新しく追加された点を通るように
元の曲線を曲げてやる.

$$\bullet P_k(x) = P_{k-1}(x) + p_k$$

k次の多項式

k-1次の補間多項式

k次の補間多項式

k-1次の補間多項式はk-1個の点すべてを通過していたはずなので

$$p_k(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

となるように構成すれば, k次補間式 $P_k(x)$ も必ずこれらの点を通る.

$$p_k(x) = b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

ニュートン補間

$$P_k(x) = \underbrace{P_{k-1}(x)} + p_k$$



$$P_{k-1}(x) = P_{k-2}(x) + p_{k-1}$$

$$p_k(x) = b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

$k = 0$ のときは1

1点(0次式) $P_0(x_0) = b_0 = y_0$

2点(1次式) $P_1(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = y_1$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

ニュートン補間

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

1点(0次式) $P_0(x_0) = b_0 = y_0$

2点(1次式) $P_1(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = y_1$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

3点(2次式) $P_2(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = y_2$

$$f[x_0, x_1, x_2] = b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right)$$

$f[x_1, x_2]$

$f[x_0, x_1]$

差分

n点(n-1次式)

$$b_n = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

n階差(分)商

補足資料: 3次の式変形

$$P_2(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = y_2$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = y_2 - y_0$$

$$b_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \left\{ y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) \right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}(x_2 - x_0) \right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{(y_1 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} \right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{(y_1 - y_0)(x_1 - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} \right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right\}$$

ニュートン補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$ の3点から, $(5, y)$ の値を求める.

y	1階差分商	2階差分商
y_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
y_1	$f[x_1, x_2]$	NA
y_2	NA	NA

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{9-1}{3-1} & f[x_0, x_1, x_2] \\ 9 & \frac{49-9}{7-3} & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{10-4}{7-1} \\ 9 & 10 & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix}$$

ニュートン補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$ の3点から, $(5, y)$ の値を求める.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_1)(x - x_0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix}$$

$(5, y)$ では,

$$p_2(x) = 1 + 4(5 - 1) + 1(5 - 3)(5 - 1) = 25$$

ラグランジュ補間と同じ結果(3点を通る2次式は一意)

補足: 1点追加したら

$$\begin{pmatrix} y_0 & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ y_1 & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & NA \\ y_2 & f[x_2, x_3] & NA & NA \\ y_3 & NA & NA & NA \end{pmatrix}$$

$$p_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_1)(x - x_0) \\ + b_3(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0)$$

増えたところだけ計算

演習課題9

1. k9-input.csvから計測データを読み込み, その中から以下に示す最初の3点を利用した補間により, $x = 2.0$ のときの値を求めよ.

$(x, y):$ $(-1.0, -1.0)$ $(1.5, 7.125)$ $(3.0, 63.0)$

2. k9-input.csvに記録された4つ目の計測データ $(4.0, 159.0)$ も利用した補間により $x = 2.0$ のときの値を求めよ.