数値解析

第13回 常微分方程式(2) 〜 ホイン法 〜

目的

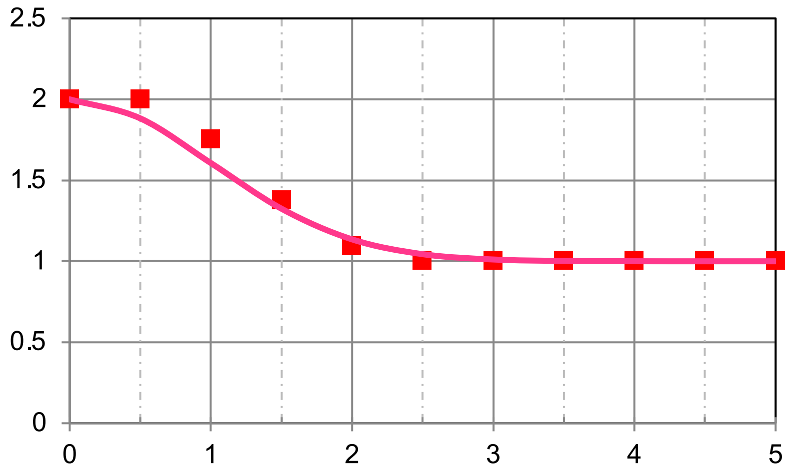
- より高次の微分方程式解法を理解し実装する

微分方程式の解

- 例題は「たまたま」収束関数だった.
  →「誤差」も収束するので刻み幅の影響は軽微

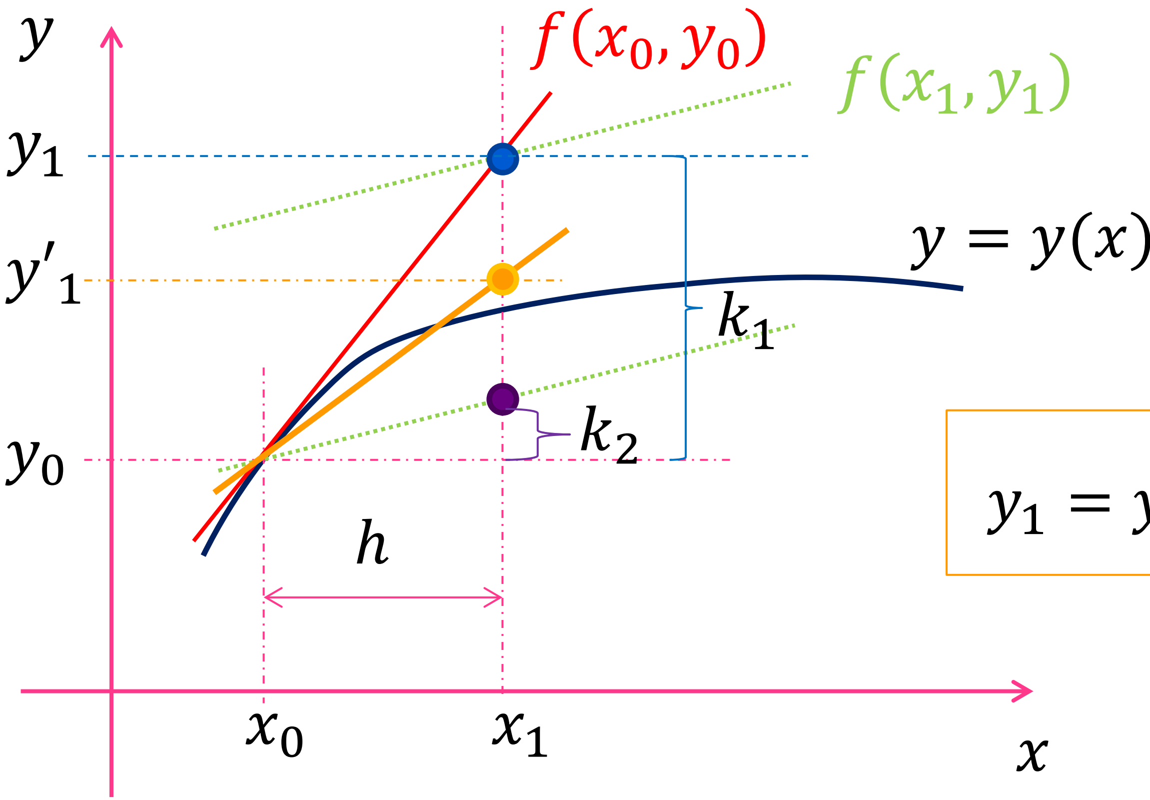
$$\frac{dy}{dx} = -xy + x$$

$$= x(1 - y)$$



$y = 1$で傾きの符号が反転

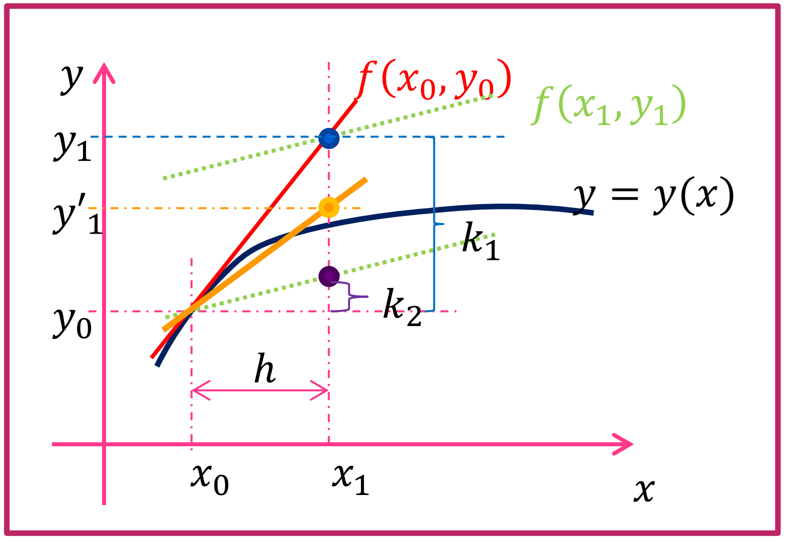
Heun法



$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

区間の両端の傾きの平均値を利用

Heun法



$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}\Big(f(x_0, y_0)h + f\big(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0)\big)h\Big)$$

$$= y_0 + \frac{h}{2}\Big(f(x_0, y_0) + f\big(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0)\big)\Big)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\big)\Big)}$$

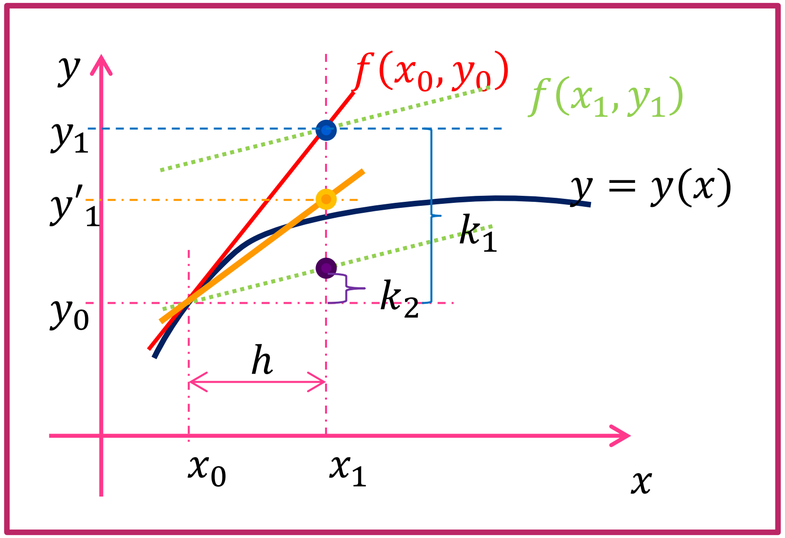
補足 1

- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, \underline{y_i + hf(x_i, y_i)}\big)\Big)$

オイラー法で計算したy_{i+1}

$$= y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_{i+1,temp}\big)\Big)$$

仮にx_{i+1}まで進めて(仮ステップ)から
もう一度やりなおして精度よく進む.



補足 2

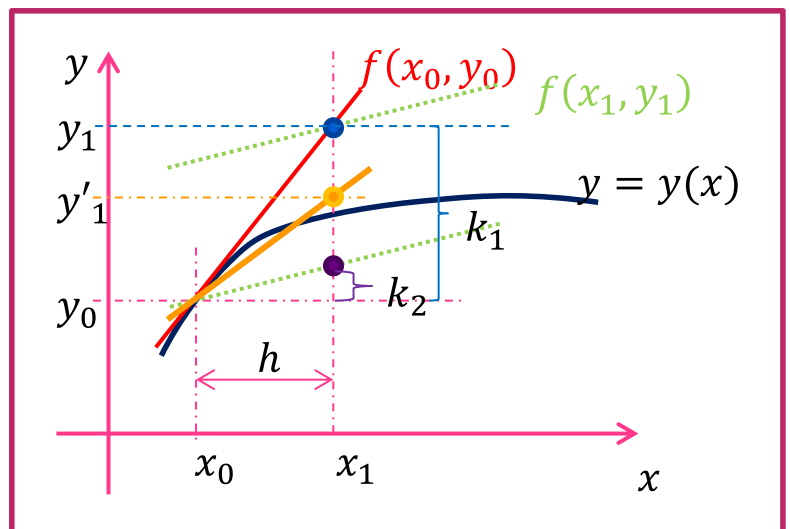
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right)\right)$$

$$= y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{h^2}{2}\left(\underbrace{\frac{f(x_{i+1}, y_i + f(x_i, y_i)h) - f(x_i, y_i)}{h}}_{\text{微分(差分)}}\right)$$

$$= y_i + y_i'h + \frac{h^2}{2}y_i''$$

2次のテイラー展開

図からも明らかに「傾きの変化」(=2階微分)が導入されていることがわかる.



補足の補足(数学)

- $y''(x) = \frac{d}{dx} f(x,y)$

  $x = x(x), y = y(x)$と明示的に置くことにより，上記は全微分

$$\frac{d}{dx} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \cdot f(x,y)$$

- 2変数関数のテイラー展開

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \sum_n \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x,y)$$

  $k = hf(x,y)$と置いて1次まで展開すると

$$f(x+h, y+hf(x,y)) = f(x,y) + h \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + hf(x,y) \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$= f(x,y) + hy''(x)$$

例題: $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

- 解析解

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y)$$

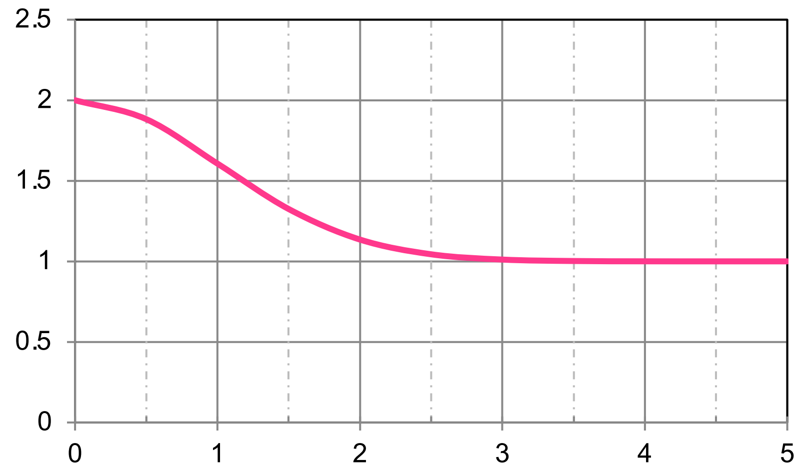
$$\int \frac{dy}{1-y} = \int x\,dx$$

$$-\log(1-y) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$1 - y = \pm e^{-\frac{1}{2}x^2 + c}$$

$$y = 1 \mp e^c e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = 1 \mp Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$$



$y(0) = 2$だから

$$2 = 1 \mp A$$

$$\therefore \mp A = 1$$

$$y = 1 + e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

例題: $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

- ホイン法数値解 (ステップ0.5)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right)\right)$$

$$y_{0.5} = y_0 + \frac{0.5}{2}\left((-x_0\, y_0 + x_0) + \left(-x_{0.5}\left(y_0 + 0.5(-x_0 y_0 + x_0)\right) + x_{0.5}\right)\right)$$

$$= 2 + 0.25\left((0 \cdot 2 + 0) + (-0.5(2 + 0.5(-0 \cdot 2 + 0)) + 0.5)\right)$$

$$= 2 + 0.25\left(0 + (-0.5 \cdot 2 + 0.5)\right)$$

$$= 2 + 0.25 \cdot (-0.5)$$

$$= 1.875$$

例題: $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

- ホイン法数値解 (ステップ0.5)

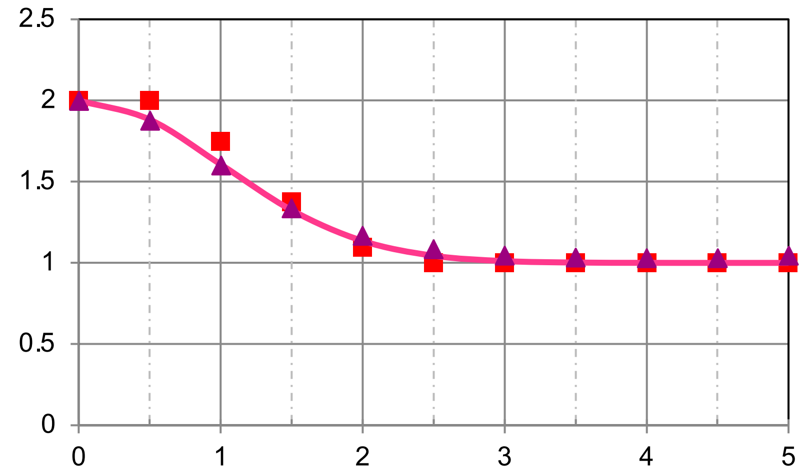
$$y(0.5) = 1.875$$

$$y(1.0) = 1.602$$

$$y(1.5) = 1.338$$

$$y(2.0) = 1.169$$

$$\ldots$$



演習課題13

- 例題のホイン法をC言語で実装せよ.
  その際，xの初期値，ステップ幅，xの最終値，yの初期値はinput.csvにより，記載の順で与えることとする。