数値解析

第12回 常微分方程式(1) ～ オイラー法 ～

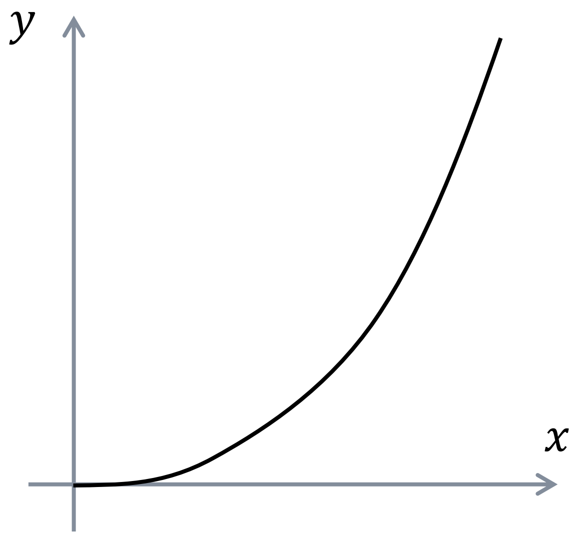
目的

- 常微分方程式の数値解を理解する。
- 基本的な手法で常微分方程式の解法を実装する。

例: 等加速度直線運動

- $y = \frac{1}{2}x^2$

ある初期値(初期条件)が与えられたときに,
成立する微分方程式の解: 特殊解



実際に利用する際には・・・
特殊解の式から特定の値を求める.

微分方程式

- 例: 力学問題

速度$v(x)$で直線運度する物体のα秒後の位置yを求めよ(初期位置を0とする)

$$\frac{dy}{dx} = v(x) \Rightarrow \int dy = \int v(x)dx$$

$$y = V(x) + C$$

$v(x) = x$(等加速度運動)だったとすると

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

初期値$x = 0, y = 0$より$C = 0$ よってα秒後の位置yは

$$y = \frac{1}{2}\alpha^2$$

※ 後の説明と整合性のため時刻をxとしています.

一般化

- $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

この解は積分方程式

$$y = \int f(x,y)dx + C$$

初期条件$y(x_0) = y_0$を導入する.

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx + y_0$$

$x = x_0$のとき，この定積分は0

参考

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

とできるなら変数分離形.

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

例題は，

$$g(x) = x$$
$$h(y) = 1$$

変数分離形は簡単に解ける.

積分方程式の解

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx + y_0$$

$f(x, y) = g(x)$であればただの数値積分

一般には

$$y = F(y) + y_0$$

反復的に解けそう

参考: 連立方程式の反復解

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \phi(\boldsymbol{x}_k)$$

オイラー法

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx + y_0$$

積分区間$x - x_0 = h$をさくとる

その間の$f(x, y)$の変化は無視

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

$$y = f(x_0, y_0) \int_{x_0}^{x_0+h} dx + y_0$$

$$\boxed{y = y_0 + f(x_0, y_0)h}$$

$x = x_0$における$y(x)$のテイラー展開(1次)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

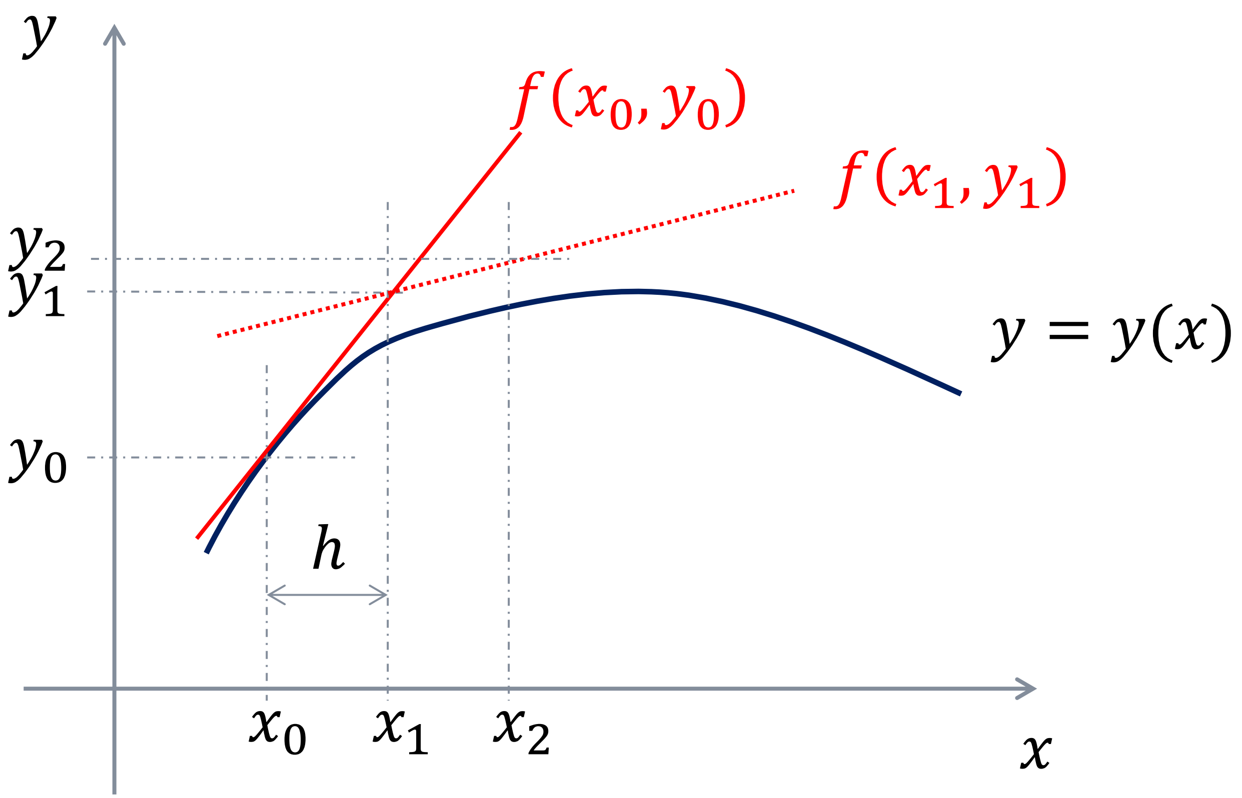
求めたいxの値まで微小変化を繰り返す

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

参考: 連立方程式の反復解

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \phi(\boldsymbol{x}_k)$$

オイラー法概念図



例題: $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

- 解析解

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y)$$

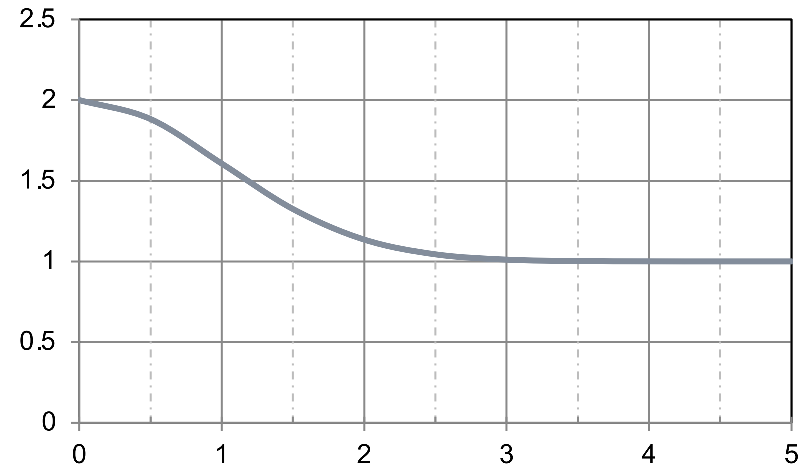
$$\int \frac{dy}{1-y} = \int x\,dx$$

$$-\log(1-y) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$1 - y = \pm e^{-\frac{1}{2}x^2 + c}$$

$$y = 1 \mp e^c e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = 1 \mp Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$$



$y(0) = 2$だから

$$2 = 1 \mp A$$

$$\therefore\ \mp A = 1$$

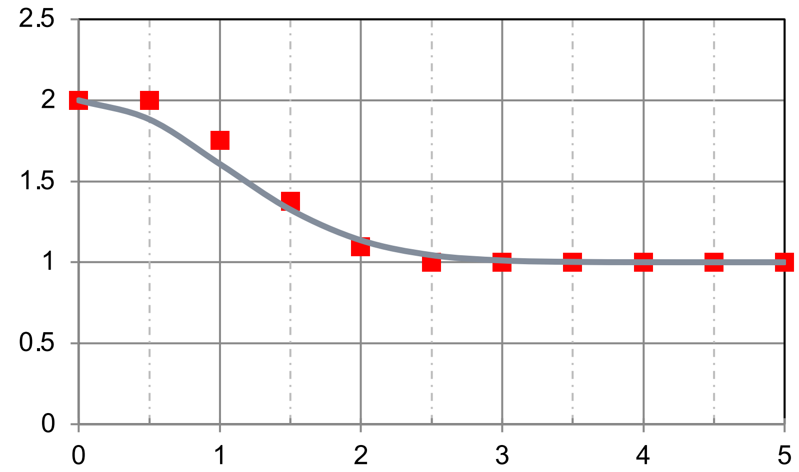
$$y = 1 + e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

例題: $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

- オイラー法数値解 (ステップ0.5)

$y(0.5) = 2 + (-0 \times 2 + 0) \times 0.5 = 2$

$y(1.0) = 2 + (-0.5 \times 2 + 0.5) \times 0.5$
$= 1.75$



$y(1.5) = 1.75 + (-1.0 \times 1.75 + 1.0) \times 0.5$
$= 1.375$

$y(2.0) = 1.375 + (-1.5 \times 1.375 + 1.5) \times 0.5$
$= 1.09375$

…

演習課題12

- 例題の微分方程式をオイラー法で解くプログラムを実装せよ. その際, xの初期値, ステップ幅, xの最終値, yの初期値はinput.csvにより, 記載の順で与えることとする。