数値解析

第2回: メモリの動的確保、行列・ベクトルとノルム

本日の目標

1. メモリの動的確保について理解する
2. ライブラリ関数を使えるようになる
3. 配列を用いた行列演算をプログラムできるようにする

領域(メモリ，配列)の動的確保

- プログラム実行中に，必要な量の領域を作る
  - malloc (Memory Allocation)
- 使わなくなったときには解放する
  - free

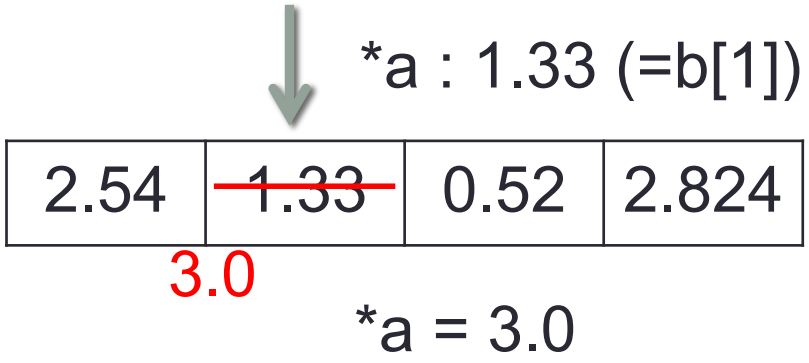
例)

- 卒業証書は，3月になってから作成する
- 実行(後期日程完了)するまで，何人卒業できるかわからない
- 4月に十分多い枚数を作っておくことも可能だが非効率

復習: ポインタと配列

double b[4] ={2.54, 1.33, 0.52, 2.824}

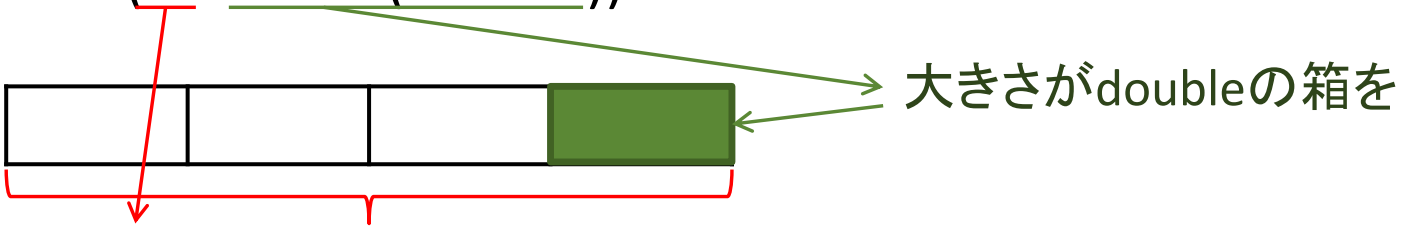
double *a = (b+1)



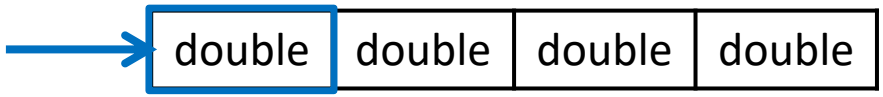
- 要素番号を伴わずに出てきた配列は，先頭要素へのポインタ
- ポインタの加減は，オブジェクトのサイズ分ずつアドレスを変化
- 間接参照演算子と，ポインタ型と，積演算子はどれも*なので注意する

1次元配列の動的確保 (malloc)

① malloc(4 * sizeof(double))



② 確保できたら先頭要素を指すポインタを返します



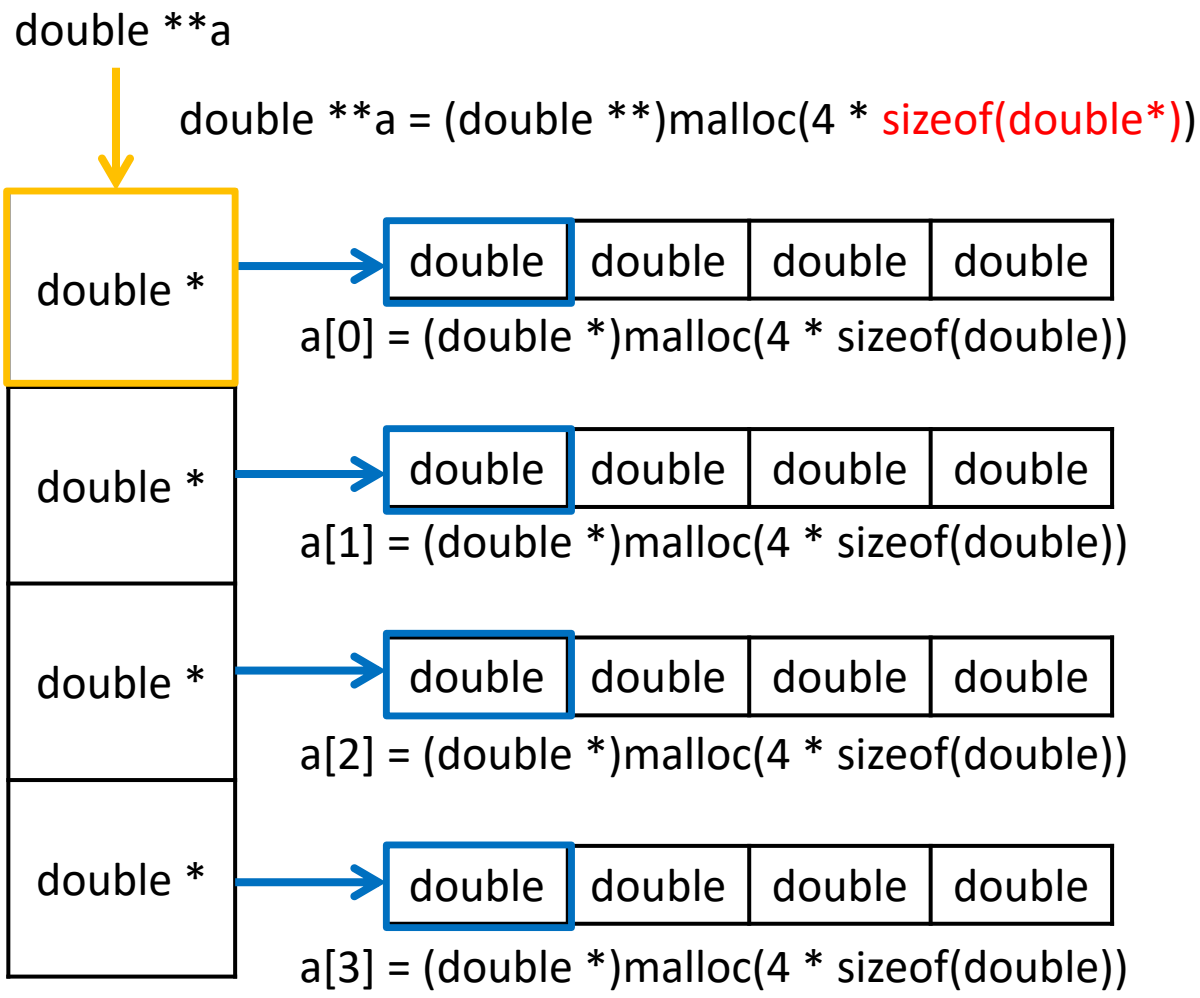
double *a = (double *)malloc(4 * sizeof(double))

先頭はaで表す　　1箱の大きさはdouble: キャスト(double *)

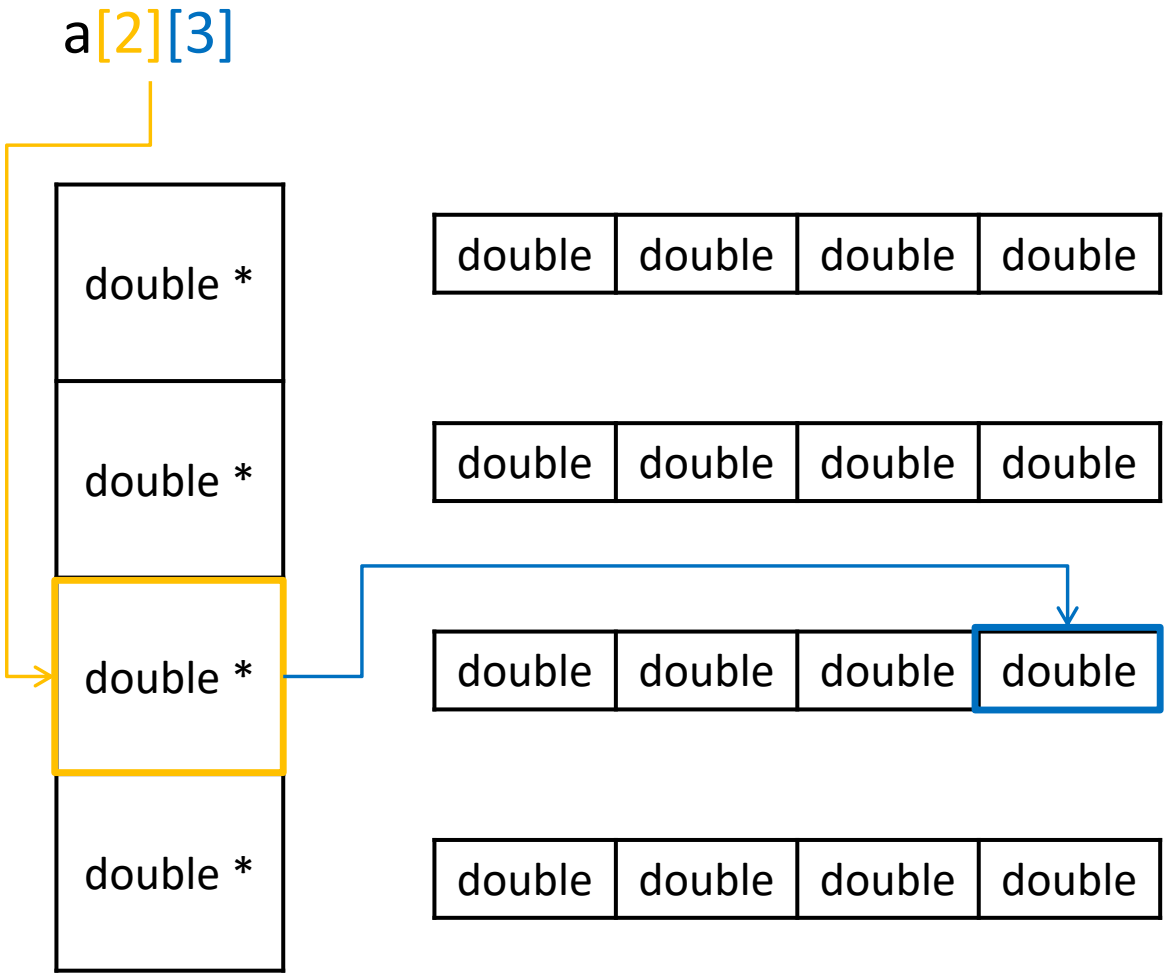
③ 使い終わったら後片付けをします.

free(a)

2次元配列


double **a
double **a = (double **)malloc(4 * sizeof(double*))
double *
double *
double *
double *
double double double double
a[0] = (double *)malloc(4 * sizeof(double))
double double double double
a[1] = (double *)malloc(4 * sizeof(double))
double double double double
a[2] = (double *)malloc(4 * sizeof(double))
double double double double
a[3] = (double *)malloc(4 * sizeof(double))

2次元配列(使用時)



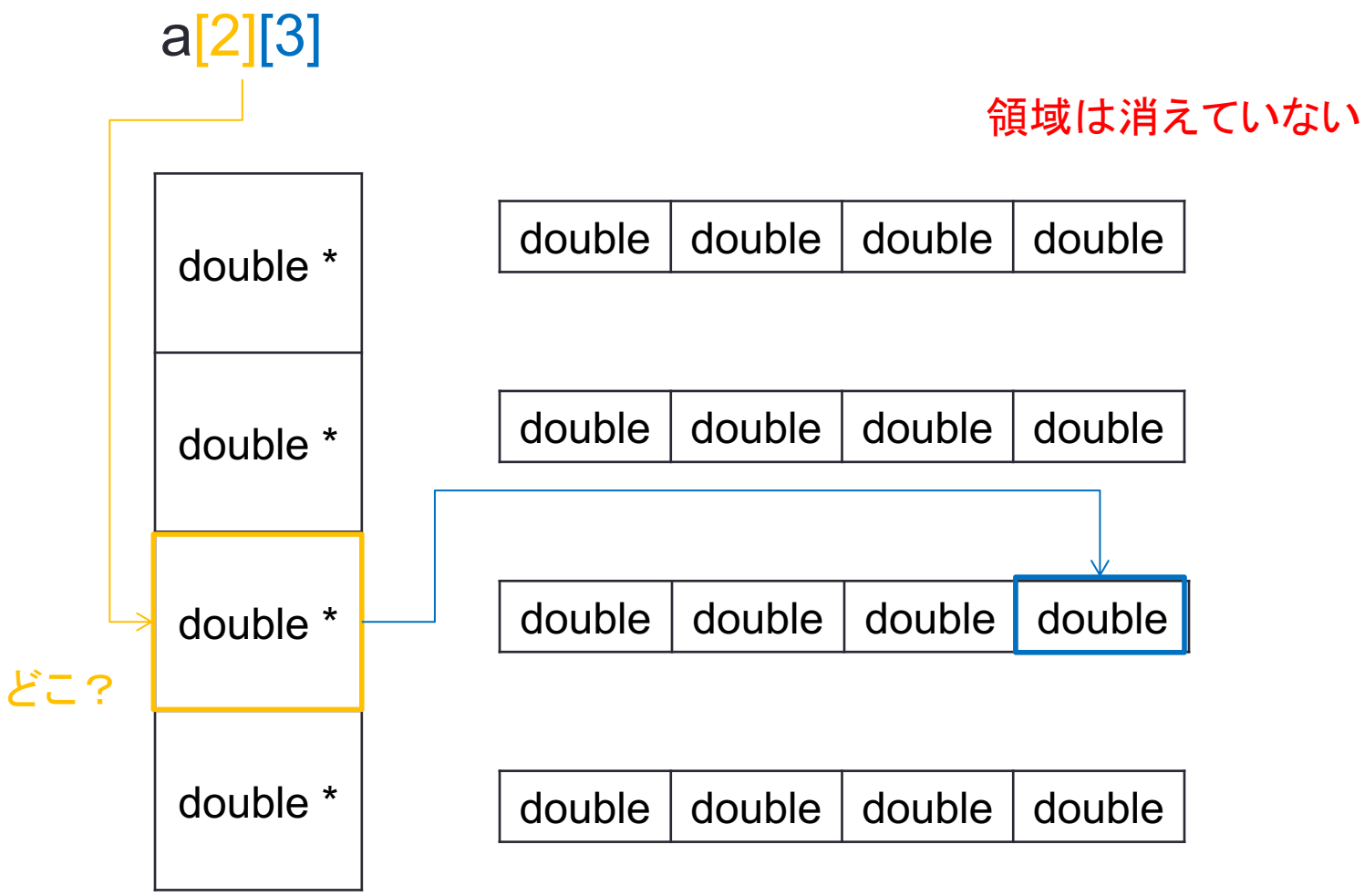
3次元以上も同様にして作成可能

補足

領域解放する際は、末端から順に解放する.

例えば、double **matrix に2次元配列を割り当てた場合
 free(matrix)
を先にやってしまうとmatrix[0] で作った領域が解放できない.

```
for (行)
{
  free(matrix[行])
}
free(matrix)
```


a[2][3]
領域は消えていない
double *
double *
double *
double *
どこ？
double double double double
double double double double
double double double double
double double double double

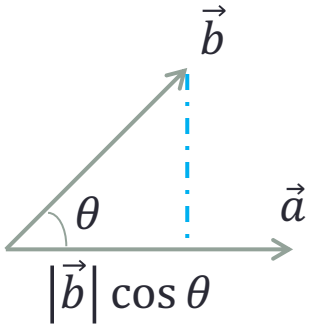
ベクトルの演算

- 和・差

  成分ごとの和・差を計算.

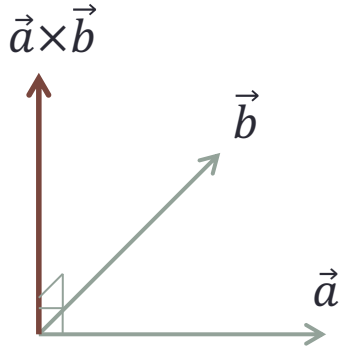
- 内積　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$



- 外積　$\vec{a}\times\vec{b}$

  大きさ $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, $\vec{a}$と$\vec{b}$に直交

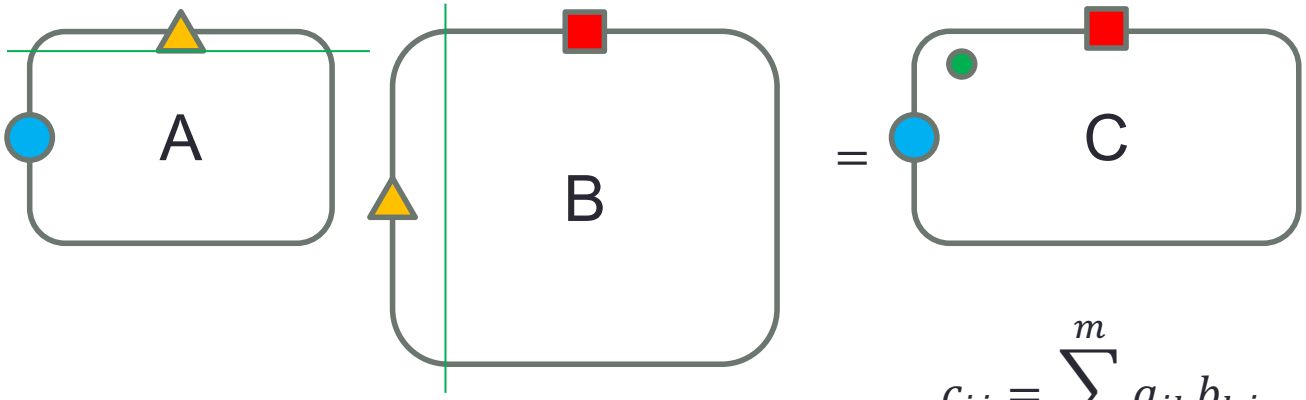


行列の演算

- 和・差

  成分ごとの和・差を計算.

- 積



$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

行列の演算

- 転置

  行と列を入れ替える

逆行列

正方行列Aに対して,

$$AX = XA = E$$

となる行列Xを逆行列といい, A^{-1}と記述する.

逆行列が存在するとき行列Aは正則であるといい,
逆行列が存在しなければ特異であるという.

ベクトルノルム

長さ(距離)，大きさの概念の一般化

$$\sqrt[p]{\sum_{i=n}^{n} |x_i|^p}$$

- p=2 (2-ノルム)，n=2 (2次元ベクトル)の場合

  $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$: ベクトルの長さ(大きさ)，ユークリッドノルム

ベクトルノルム

- p=1の場合 (1-ノルム), n=2では

  $|x_1| + |x_2|$: 絶対値の総和

- p=∞の場合 (∞-ノルム, 最大値ノルム), n=2では

$$(|x_1|^{\infty} + |x_2|^{\infty})^{\frac{1}{\infty}} = \max_{i=1,2} |x_i|$$

最大値ノルムの証明

$$(|x_1|^\infty + |x_2|^\infty)^{\frac{1}{\infty}}$$

最大値では1
最大値以外では1より小さい

最大値を仮にx_mと置く

$$(|x_1|^\infty + |x_2|^\infty)^{\frac{1}{\infty}} = \left\{|x_m|^\infty \left(\frac{|x_1|}{|x_m|}\right)^\infty + |x_m|^\infty \left(\frac{|x_2|}{|x_m|}\right)^\infty\right\}^{\frac{1}{\infty}}$$

$$= \{|x_m|^\infty (1)^\infty + |x_m|^\infty (1\text{以下})^\infty\}^{\frac{1}{\infty}}$$
$$= |x_m|^\infty{}^{\frac{1}{\infty}}$$
$$= |x_m|$$

ソート

数（データ）をあるルールに従って並べかえること.

ex) 学籍番号順，50音順，アルファベット順

- バブルソート
- クイックソート
- 選択ソート
- ヒープソート
- etc.

バブルソート

3	1	5	9	2

1個目と2個目の要素を比較し，小さい順に並べる．

1	3	5	9	2

2個目と3個目の要素を比較し，小さい順に並べる．

1	3	5	9	2

3個目と4個目の要素を比較し，小さい順に並べる．

1	3	5	9	2

4個目と5個目の要素を比較し，小さい順に並べる．

1	3	5	2	9

n個の要素に対し，n-1回の比較で1セット．1セット終わると最大値が最後尾に来る．

バブルソート

2セット目，また先頭から順に同じことを実行する．

1	3	5	2	9

2番目に大きい数が最後から2番目の要素に入る．

1	3	2	5	9

n-1セット繰り返すことで，データは小さい順に整列される．

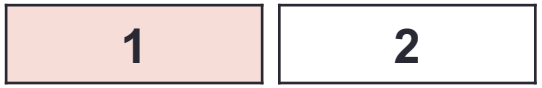
計算量: $(n-1)^2$

実際には不要な比較・交換を省けるのでもう少し下がる

クイックソート

ピボットを選び，数列をピボット以下と以上に分割

分割されたそれぞれで同じことを繰り返す



計算量: $Q_n = n - 1 + Q_a + Q_b$

(Q_aとQ_bはサブセットの計算量)

最悪値: バブルソートと同じ，平均値: $2n \log n$

計算量，Order

計算量の概略を比較するとき，Oという表記が使われる．

- 高い次数のものを抜き出す
- 係数は省く

ex)

バブルソート$(n-1)^2 \rightarrow O(n^2)$

クイックソートの平均$2n\log n \rightarrow O(n\log n)$

参考: qsort関数

```
void qsort(void *array, size_t  n, size_t m,
        int (*comp)(const void *a1, const void *a2)  )
```

比較関数へのポインタ int (*comp)(const void *a1, const void *a2)) が必要

講義中にソートが必要な際は,

- qsort関数
- 自作のソート関数(過去のプログラム授業で作ったもの)

どちらを使っても良い.

演習課題2

（予備）以下の計算をおこなえ

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

k2-input1.csvから行列Aを，k2-input2.csvからベクトルxを入力し，行列積Axの計算を行うプログラムを作成せよ。

例 $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

余談

- 行列積って役に立つの？

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3(x_1 + x_2 + x_3) \\ 1/3(x_2 + x_3 + x_4) \\ 1/3(x_3 + x_4 + x_5) \\ 0 \end{pmatrix}$$

移動平均の計算

課題について

- 2週間に1回程度の課題
- 2週目終了後2週間で提出締切(今回は11/8)
- 提出ファイルが複数になる場合はzip圧縮して1ファイルにする
- Blackboard上の提出ページか，readme.txtにて説明を加える
  - コンパイル環境，コンパイル方法，実行方法等
- 配布したライブラリに関しては変更していなければ添付不要
  - 説明にライブラリ使用について記載すること
- 動作確認用のデータファイルは課題と同時に掲載
- 評価用データファイルは評価の時間に公開