数値解析

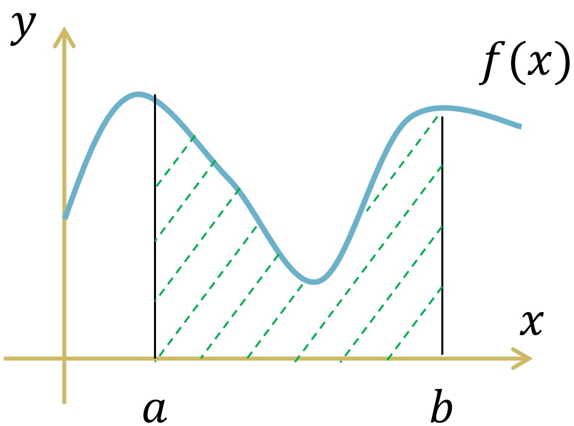
第10回 台形公式･シンプソン公式

目的

- 数値積分を理解し、実装する

数値積分

- (定)積分の図形的意味



$$\int_a^b f(x)dx$$

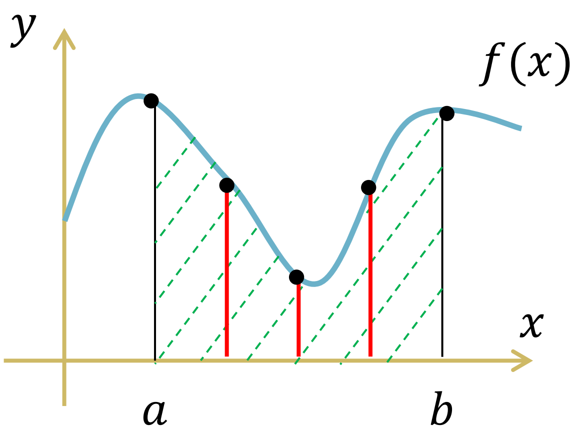
$f(x), y = 0, x = a, x = b$で囲まれた領域

の**面積**

例: yが電流, xが時間なら,
$f(x)$は瞬間電流(mA)
$\int_a^b f(x)dx$は使用電力量(mAh)

基本的な考え方

- 領域を分割する(データを計測する)



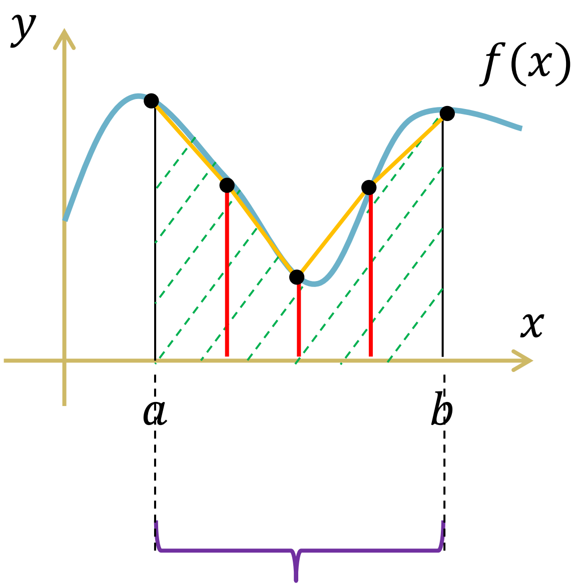
各点の間を**補間**する.

- ラグランジェ補間
- ニュートン補間

多項式なので簡単に値が求められる.

台形公式: 1次補間

- 直線で結ぶ (隣り合う2点で計算)



区間をn分割

台形の面積

$$\boxed{\frac{上底＋下底}{2}×高さ}$$

$f(x_{i+1})$

$f(x_i)$

$$\frac{b-a}{n}$$

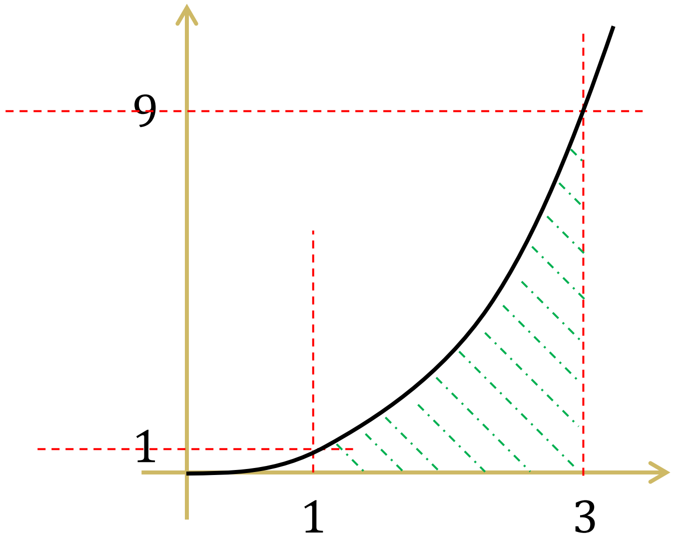
例: $\int_1^3 x^2 dx$

$$= \frac{1}{3}[x^3]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}(27 - 1)$$

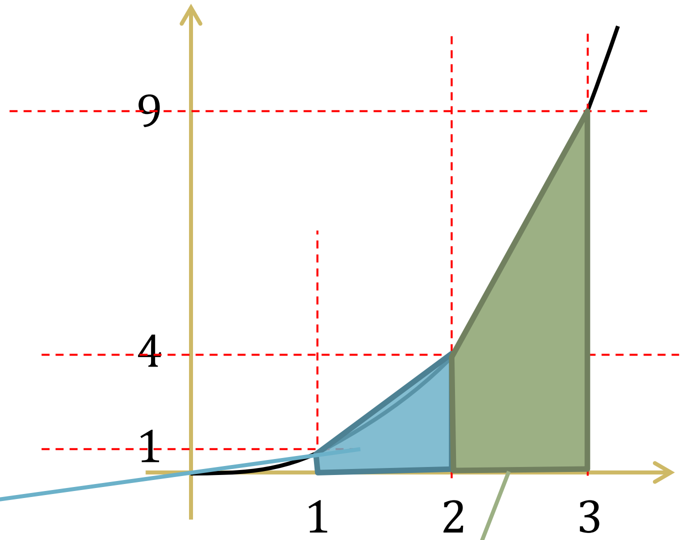
$$= \frac{26}{3}$$

$$\approx 8.667$$



例: $\int_1^3 x^2 dx \approx 8.667$

1刻みに分割



$$\frac{1+4}{2}\times 1 = 2.5$$

$$\frac{4+9}{2}\times 1 = 6.5$$

合計: 9.0

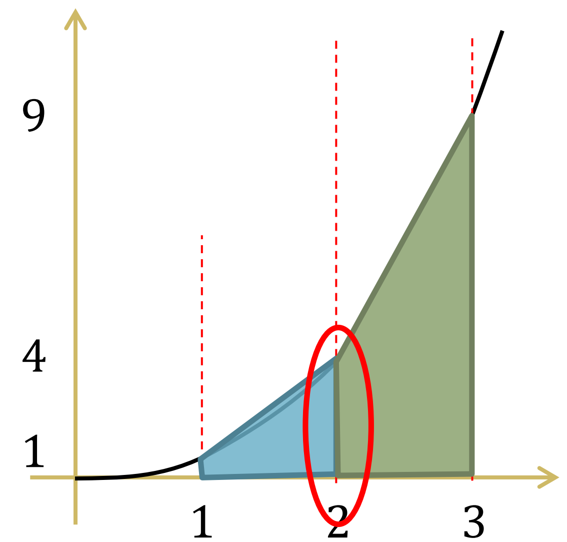
プログラム

- n分割し，分割の幅をhとすれば

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1})$$

無駄を少なくプログラムするには，展開して

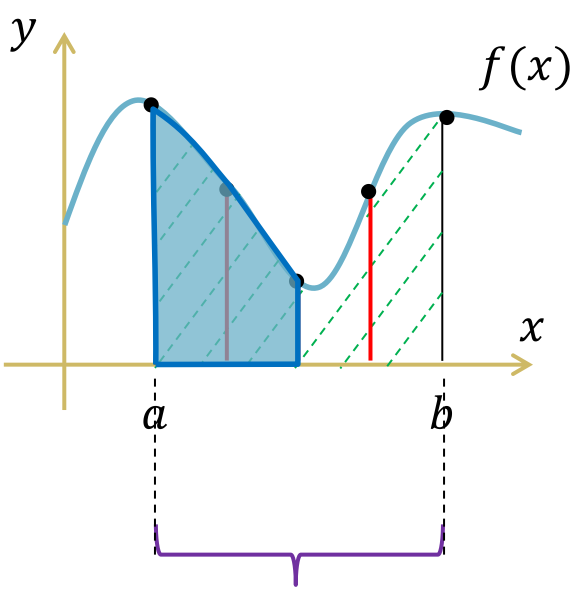
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}) = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_n\right)$$



この値を2回計算するのは無駄

シンプソン公式: 2次補間

- 2次曲線で結ぶ (3点で計算)



区間を2n分割

$$h = \frac{b-a}{2n}$$


の面積

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx \approx \int_a^{a+2h} P_2(x)\,dx$$

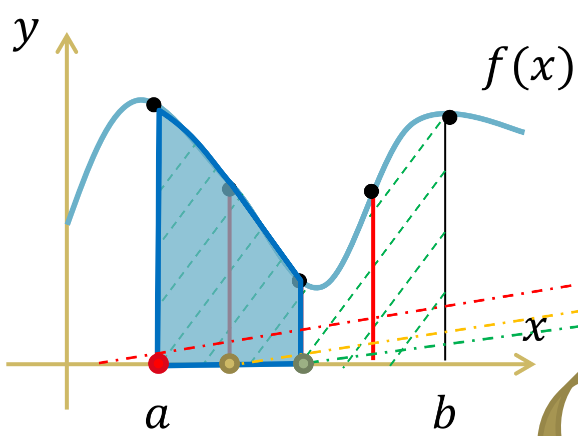
ラグランジェ補間

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}}$$

シンプソン公式: 2次補間

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

- 2次曲線で結ぶ (3点で計算)



$$\int_a^{a+2h} P_2(x)\,dx$$

$$\int_a^{a+2h} f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\,dx$$

$$+ \int_a^{a+2h} \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}\,dx$$

置換積分

$$\int_0^2 f_0 \frac{(a+sh)-(a+h)}{a-(a+h)}\frac{(a+sh)-(a+2s)}{a-(a+2h)}\,h\,ds$$

$$h = \frac{b-a}{2n} \quad \Rightarrow \quad x = a + sh$$

$$= f_0 \int_0^2 \frac{(s-1)h}{-h}\frac{(s-2)h}{-2h}\,h\,ds$$

$$= \frac{h}{3} f_0$$

$$\frac{dx}{ds} = h$$

$i = 0, \quad \frac{h}{3} f_0$

シンプソン公式

- 同様にして

$i = 1 \Rightarrow \frac{4}{3} h f_1 \qquad i = 2 \Rightarrow \frac{h}{3} f_2$

$$\boxed{\int_a^{a+2h} P_2(x)\, dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)}$$

シンプソン公式

補足資料

$$\int_0^2 \frac{(s-1)h}{-h}\frac{(s-2)h}{-2h}h\,ds = \frac{h}{2}\int_0^2 (s-1)(s-2)ds$$

部分積分法

$$= \frac{h}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}(s-1)^2(s-2)\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 (s-1)^2 ds\right\}$$

$$= \frac{h}{2}\left\{-\frac{1}{2}(-2) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(s-1)^3\right]_0^2\right\}$$

$$= \frac{h}{2}\left\{1 - \frac{1}{6}(1-(-1)\right\}$$

$$= \frac{h}{2}\times\frac{2}{3}$$

$$= \frac{h}{3}$$

例: $\int_1^3 x^2 dx \approx 8.667$

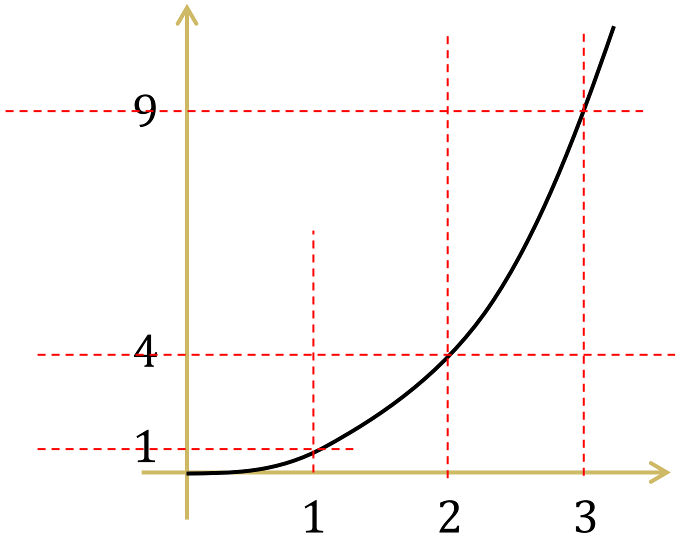
- 1刻みに分割

$$\boxed{\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)}$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 4\times4 + 9)$$

$$= \frac{26}{3}$$

$$\approx 8.667$$



プログラム

- 2n分割し，分割の幅をhとすれば

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3}(f_{2k} + 4f_{2k+1} + f_{2k+2})$$

無駄を少なくプログラムするには，展開して

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3}(f_{2k} + 4f_{2k+1} + f_{2k+2}) = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2n} + 4\sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+1} + 2\sum_{k=0}^{n-2} f_{2k+2}\right)$$

分割数の選択

分割数(計測点数)を増やせば精度が向上

分割数(計測点数)を増やせば計算コストが増大

点数の選び方: その間の変化が補間で近似できる.

- 台形公式 → 直線で近似できる. (区分線形)
- シンプソン公式 → 2次関数で近似できる.

演習課題10

1. 台形公式によって$\int_{a_1}^{a_2} x^2 dx$を求めよ.
   ただし区間の分割数a_0,および，積分範囲[a_1, a_2]はinput.csvにより1行3列のベクトルで与えることとする。