数値解析

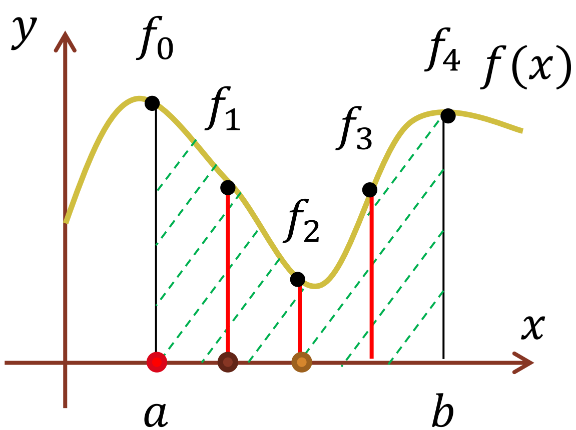
第11回 重積分･ロンバーグ法

目的

- ロンバーグ法の考え方を理解し、実装する

復習: シンプソン公式

$$\boxed{\int_a^{a+2h} P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)}$$



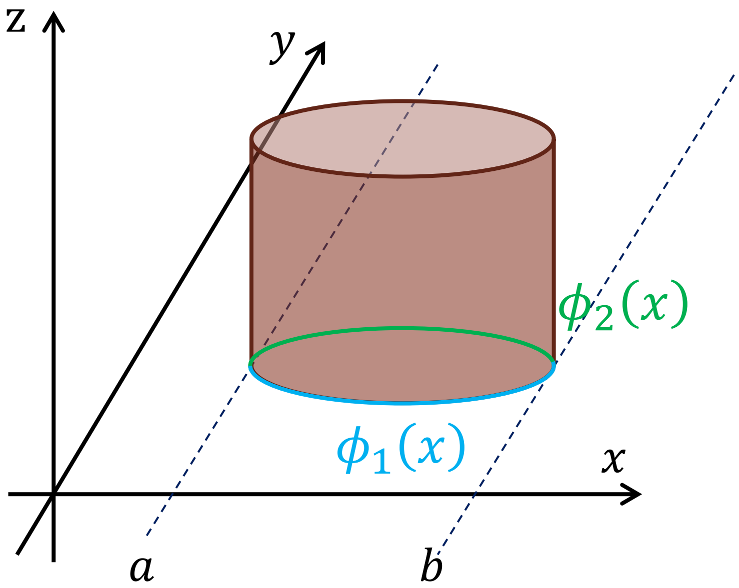
積分領域を2n分割

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2})$$

重積分 (2重積分)

- 2重(定)積分の図形的意味



$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dxdy$$

$z = f(x, y), z = 0, y = \phi_1(x), y = \phi_2(x)$で

囲まれた領域の**体積**

解き方

$f(x, y)$をyについて積分

$\rightarrow F(x)$という1変数関数になる.

重積分の数値解

解き方
$f(x,y)$をyについて積分
 $\rightarrow F(x)$という1変数関数になる.

$F(x)$の積分($\int_a^b F(x)dx$): 台形公式・シンプソン公式

$$\frac{h}{2}(F_0+F_1)+\frac{h}{2}(F_1+F2)+\cdots+\frac{h}{2}(F_{n-1}+F_n)$$

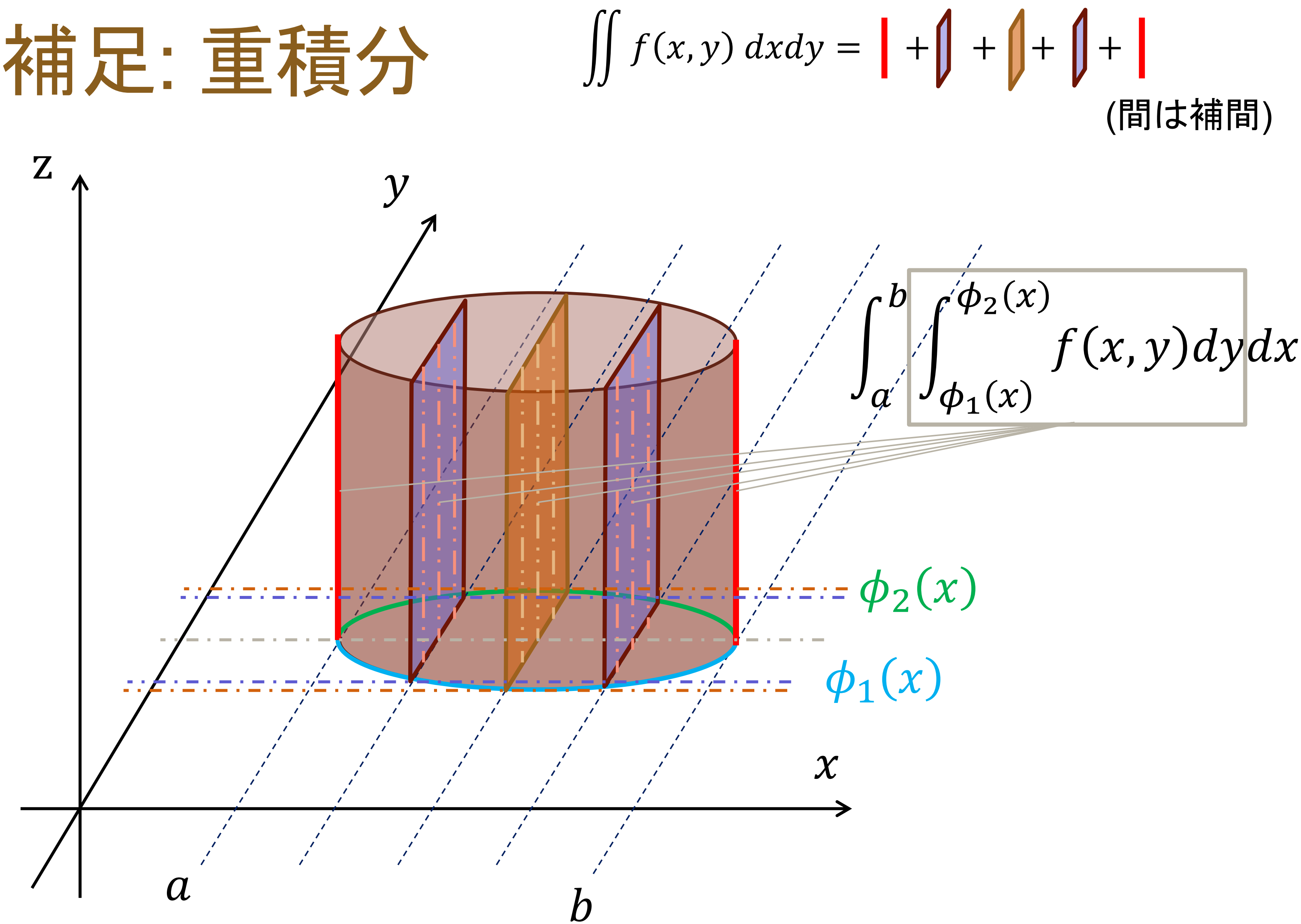
$$F_i=F(x_i)=\int_{\phi_1(x_i)}^{\phi_2(x_i)} f(x_i,y)dy$$

m等分して数値計算 $\frac{\phi_2(x_i)-\phi_1(x_i)}{m}=k$

$$\frac{k}{2}(g_0+g_1)+\frac{k}{2}(g_1+g2)+\cdots+\frac{h}{2}(g_{m-1}+g_m)$$

$$g_i=f(x_i,y_i)$$

補足: 重積分

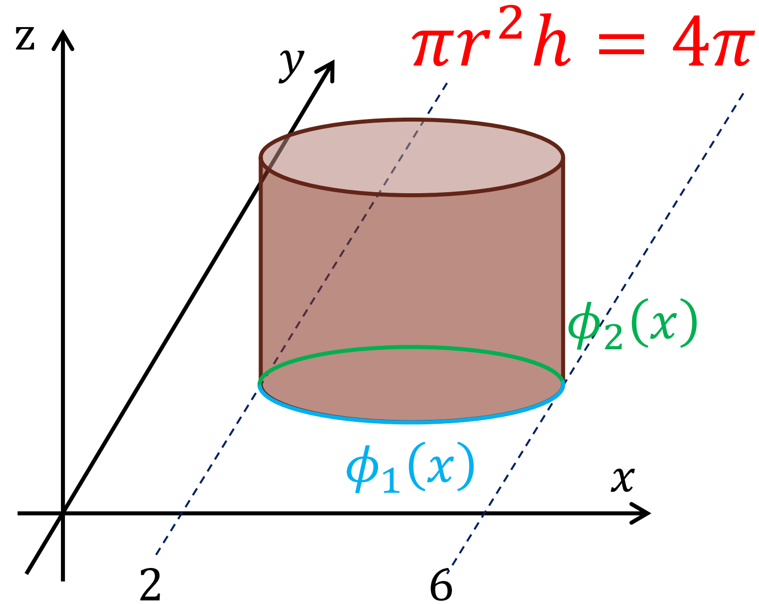

$\iint f(x,y)\,dxdy =$ + + + +
(間は補間)
z
y
x
a
b
$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$
$\phi_2(x)$
$\phi_1(x)$

例: $z = 1, z = 0, (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$

1. yについて解く

$$(y-4)^2 = 4 - (x-4)^2$$
$$= \{2 + (x-4)\} + \{2 - (x-4)\}$$
$$= (x-2)(6-x)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{(x-2)(6-x)}$$



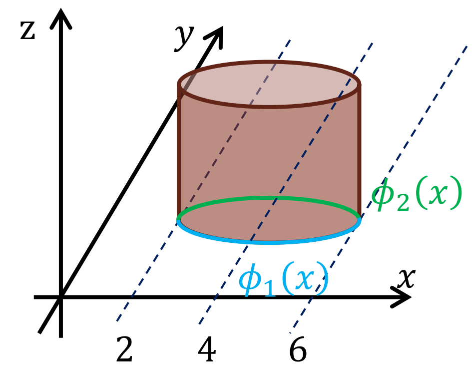
$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dxdy \Rightarrow \int_2^6 \int_{4-\sqrt{(x-2)(6-x)}}^{4+\sqrt{(x-2)(6-x)}} 1\, dydx$$

例: 台形公式, n=m=2で解く

$$f(x, y) = 1$$

$$\phi_1(x) = 4 - \sqrt{(x-2)(6-x)}$$

$$\phi_2(x) = 4 + \sqrt{(x-2)(6-x)}$$



$$x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 6$$

$$\phi_1(x_0) = 4,\ \phi_1(x_1) = 2,\ \phi_1(x_2) = 4$$

$$\phi_2(x_0) = 4,\ \phi_2(x_1) = 6,\ \phi_2(x_2) = 4$$

$$h = \frac{6-2}{2} = 2$$

$$\boxed{g = 1}$$

$F(x_0)$: $k = 0$ ⇒ $F(x_0) = 0$

$F(x_1)$: $k = \frac{6-2}{2} = 2$ ⇒ $F(x_1) = \frac{2}{2}(1+1) + \frac{2}{2}(1+1) = 4$

$F(x_2)$: 0

$$Ans = \frac{2}{2}(F_0 + F_1) + \frac{2}{2}(F_1 + F_2) = 4 + 4 = 8$$

プログラムで確認

- 台形公式
  20分割 : 12.418

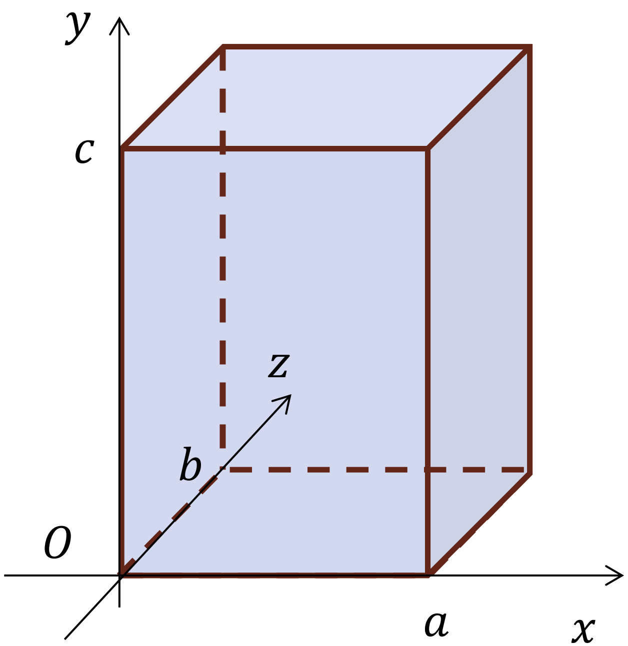
- シンプソン公式
  2分割: 10.667
  20分割: 12.508

$$F(x_1) = \frac{2}{3}(1 + 4 + 1) = 4$$

$$Ans = \frac{2}{3}(4 \times F_1) = + \frac{32}{3} = 10.667$$

- 解析解
  12.566

補足: 重積分



体積は？

$a\times b\times c$ (底面積×高さ)

(縦×横)

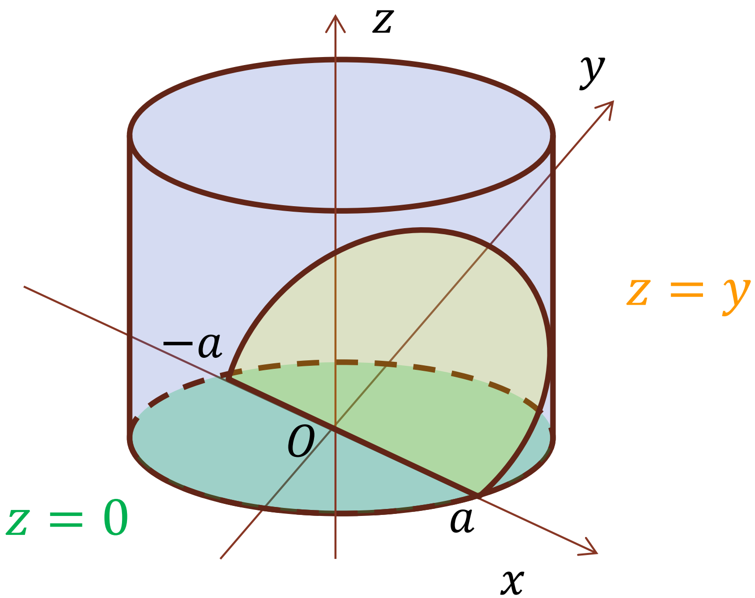
$$a\times b = \int_0^a b\,dx$$

$$a\times b\times c = \int_0^c \left(\int_0^a b\,dx \right) dy$$

$x = a$　　$y = b$　　$z = c$

どの2変数をとってもかまわない.

補足: 重積分例題



底面$x^2+y^2=a^2$の円柱を

$z=y$と$z=0$で切り出す

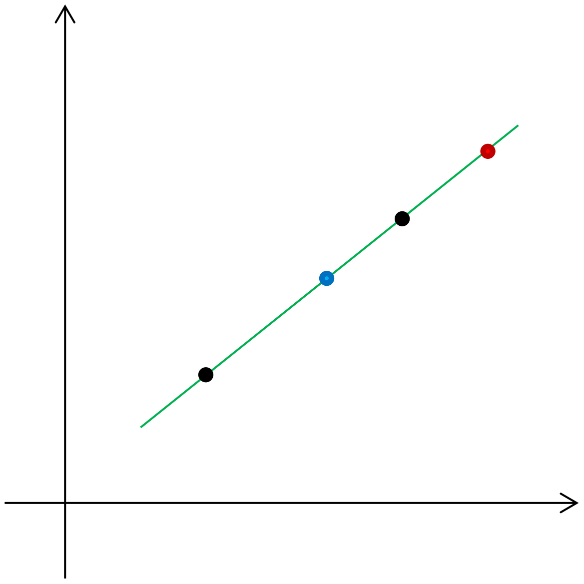
$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dydx$$

ロンバーグ法

その前に・・・言葉の定義の復習

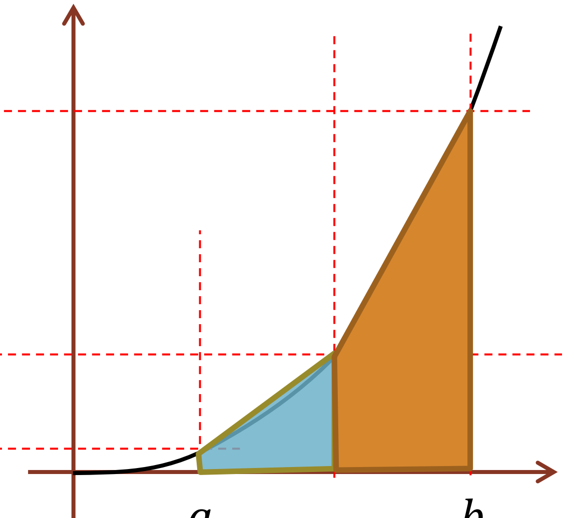
- 補間，内挿，interpolation
  既知の値(データ)から，その間の値を求めること.

- 補外，外挿, extrapolation
  既知の値(データ)から，その外側の値を求めること.



台形公式とシンプソン公式の関係

同じ計測点を使う→関係があるのでは?



$n=1$のとき

$$T_0=\frac{h_0}{2}(f_a+f_b)$$

$n=2$のとき　　$h_1=\dfrac{h_0}{2}$

$$T_1=\frac{h_1}{2}(f_a+f_1)+\frac{h_1}{2}(f_1+f_b)=\frac{T_0}{2}+h_1f_1$$

T: 台形公式

S: シンプソン公式

$$S_1=\frac{h_1}{3}(f_a+4f_1+f_b)=\frac{4}{3}h_1f_1+\frac{2}{3}T_0-\frac{2}{3}T_0+\frac{2}{3}h_1(f_a+f_b)$$

$$=\frac{4}{3}T_1-\frac{2}{3}T_0+\frac{1}{3}T_0=T_1+\frac{T_1-T_0}{3}$$

台形公式とシンプソン公式の関係

$n=4$のとき ($n=3$はシンプソン公式が使えないので省く)　$h_2=\dfrac{h_1}{2}$　$f_2{}'=f_1$

$$T_2=\frac{h_2}{2}\left(f_a+2(f_1'+f_2'+f_3')+f_b\right)=\frac{T_1}{2}+h_2(f_1'+f_3')$$

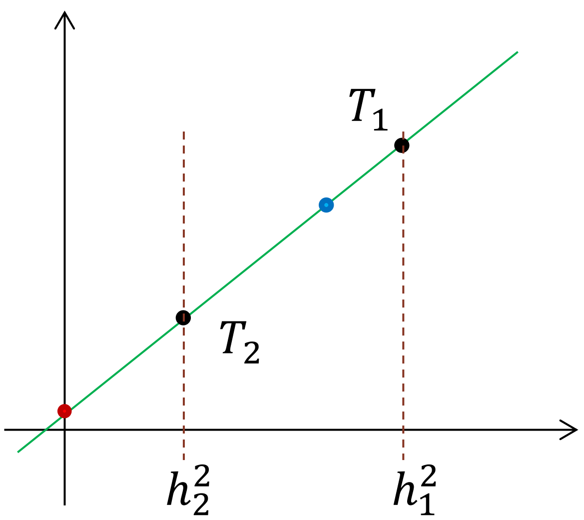
$$S_2=\frac{h_2}{3}\left(f_a+4f_1{}'+f_2{}'\right)+\frac{h_2}{3}\left(f_2{}'+4f_3{}'+f_b\right)=T_2+\frac{T_2-T_1}{3}$$

台形公式の積分誤差: ステップ幅hの2乗に比例

2つの異なるステップから補外でステップ0を推定

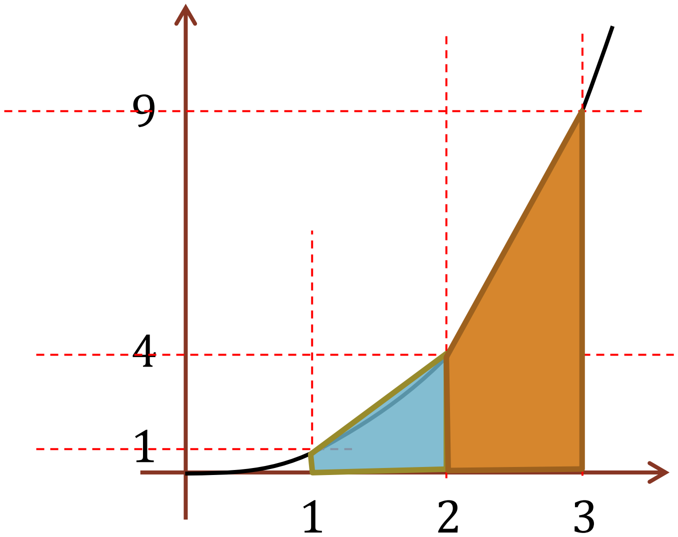
$$T_2-\frac{T_2-T_1}{h_2^2-h_1^2}h_2^2=T_2-\frac{T_2-T_1}{\frac{1}{4}h_1^2-h_1^2}\frac{1}{4}h_1^2$$

$$=T_2+\frac{T_2-T_1}{3}$$



例: $\int_1^3 x^2 dx \approx 8.667$

$S_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_0}{3}$ $\quad T_1 = \frac{T_0}{2} + h_1 f_1$



$$T_0 = \frac{2}{2}(1+9) = 10$$

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + h_1 f_1 = 5 + 4 = 9$$

$$S_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_0}{3} = 9 + \frac{9-10}{3}$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8.667$$

ロンバーグ法 (ロンバーグ積分)

- 補外を用いて漸化的に精度向上する手法

台形→シンプソンの変換をより高次に拡張する.

分割数 $n = 2^k$, 補間次数$p = 2^m$ を導入

T_m^k: T_1^1 → 2分割のシンプソン公式による数値積分

奇数だけ

$$\boxed{T_0^{k+1} = \frac{1}{2}T_0^k + h_{k+1}\sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i-1)h_{k+1})}$$

分割数増加

$$\boxed{T_{m+1}^{k+1} = T_m^{k+1} + \frac{T_m^{k+1} - T_m^k}{4^{m+1} - 1}}$$

補間次数増加

$m \leq k$

この2式による繰り返し更新

ロンバーグ表

補間次数

$$T_{m+1}^{k+1} = T_m^{k+1} + \frac{T_m^{k+1} - T_m^{k}}{4^{m+1} - 1}$$

	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m-5
k=0	T_0^0					
k=1	T_0^1	T_1^1				
k=2	T_0^2	T_1^2	T_2^2			
k=3	T_0^3	T_1^3	T_2^3	T_3^3		
k=4	T_0^4	T_1^4	T_2^4	T_3^4	T_4^4	
k=5	T_0^5	T_1^5	T_2^5	T_3^5	T_4^5	T_5^5

分割数

高精度

$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2} T_0^k + h_{k+1} \sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i-1)h_{k+1})$$

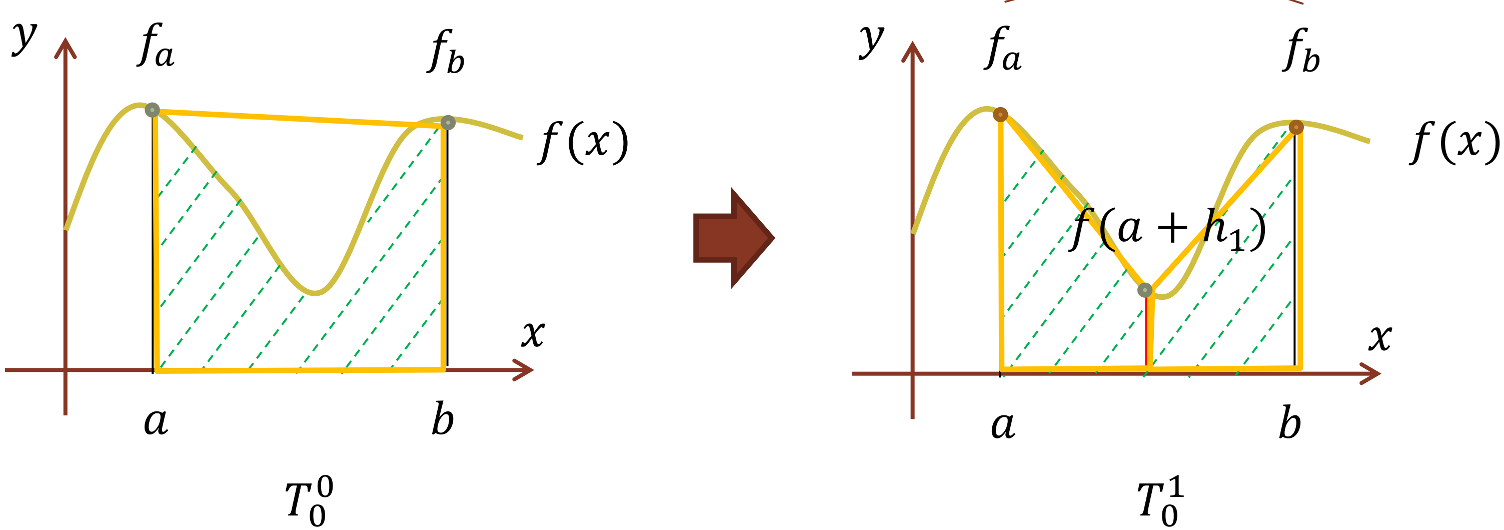
補足: Romberg積分

- 分割数の増加

$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2}T_0^k + h_{k+1}\sum_{i=1}^{2^k} f(a+(2i-1)h_{k+1})$$

奇数だけ

計算済み

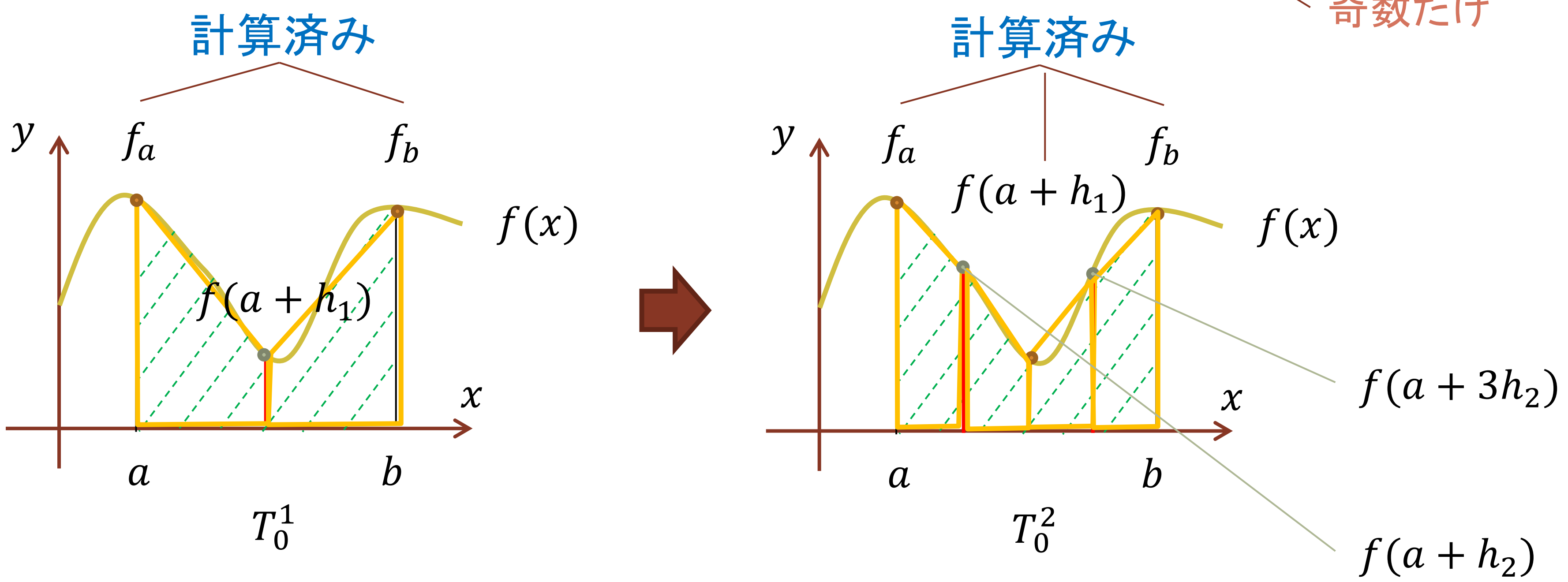


補足: Romberg積分

- 分割数の増加

$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2}T_0^k + h_{k+1}\sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i-1)h_{k+1})$$

奇数だけ



補足: Romberg積分

- 数式

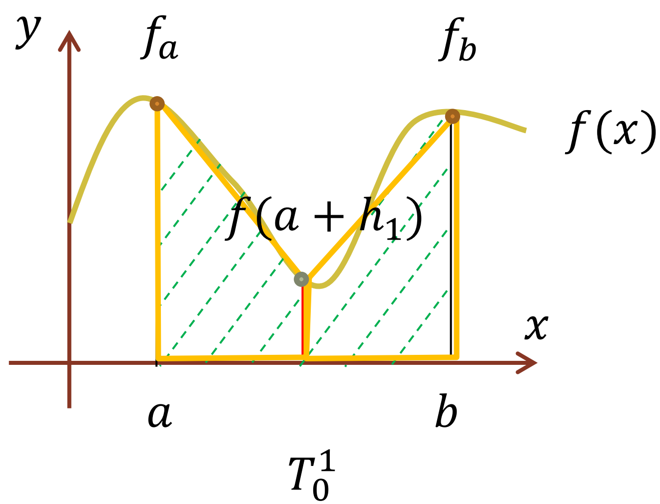
$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2}T_0^k + h_{k+1}\sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i - 1)h_{k+1})$$

$$T_0^0 = h_0 \times \frac{f_a + f_b}{2}$$

$$T_0^1 = h_1 \times \frac{f_a + f(a + h_1)}{2} + h_1 \times \frac{f(a + h_1) + f_b}{2}$$

$$= \frac{1}{2}h_0 \times \frac{f_a + f_b}{2} + h_1 \times \frac{f(a + h_1)}{2} \times 2$$

$$= \frac{1}{2}T_0^0 + h_1 f(a + h_1)$$



※ 台形公式では両端は1回，残りは2回ずつ利用される.

ロンバーグ積分の終了判定

- ロンバーク積分は漸化式

終了(収束)判定条件

1. 最大分割数に達する.
2. 次数や分割数増加による値の変化が規定値以下.

演習課題11

1. ロンバーグ法により$\int_1^{2.5} e^x \, dx$を求めよ．解とともに分割数と次数も示すこと.
   ただし積分範囲[a_1, a_2]はinput.csvにより1行2列のベクトルで与えることとする。