

# 数値解析

---

第14回 常微分方程式(3) ～ ルンゲ・クッタ法 ～

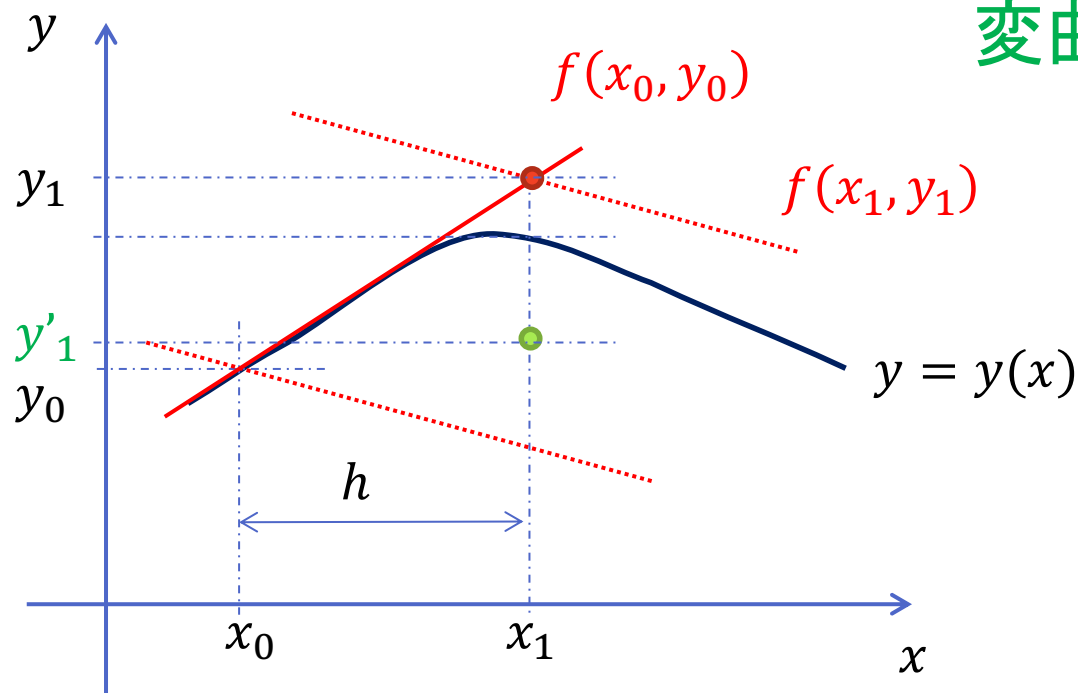
# 目的

- さらに高次の(実用的な)微分方程式解法を理解し実装する。

# Heun法の問題

- $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left( f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)) \right)$$

変曲点で精度低下



テイラー2次展開: 傾きの変化量に線形性を仮定

# Runge-Kutta法

- 両端のみでなく, 区間中の点の位置と重みの取り方を一般化したもの.

Heun法を少し一般化

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \underline{f_{avg}}$$

複数の点で求めた傾きの重みつき平均値

Heun法: 両端を均等重み( $\frac{1}{2}$ )で平均化

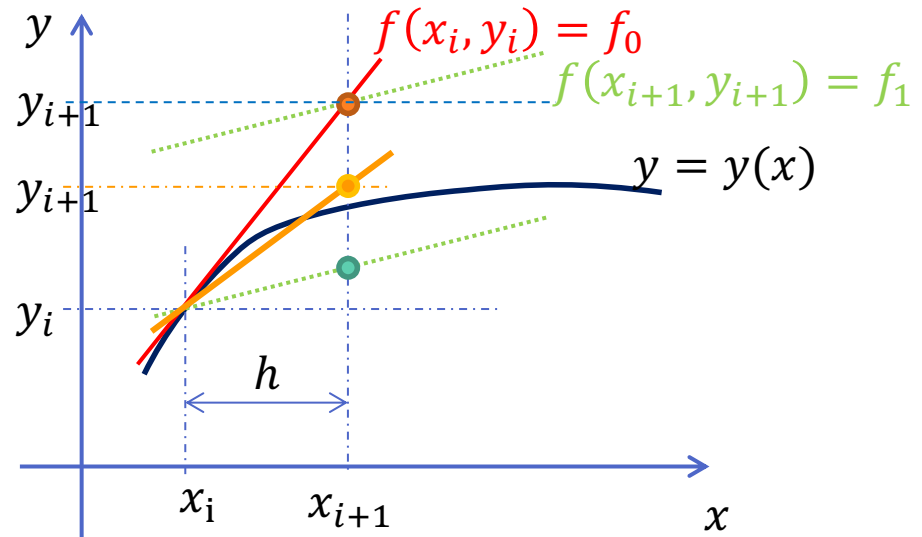
$$f_{avg} = \sum_j a_j f_j \qquad \sum_j a_j = 1$$

重み

# 2次(2点)のRunge-Kutta法

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_{avg}$$

$$f_{avg} = \sum_{j=0}^1 a_j f_j \quad \sum_j a_j = 1$$



- $a_0 = 1, a_1 = 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad : \text{Euler法}$$

- $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})) \quad : \text{Heun法}$$

計算のための一時的なステップ: 仮ステップ

# 2次(2点)のRunge-Kutta法

- 仮ステップの取り方もバリエーションになる.

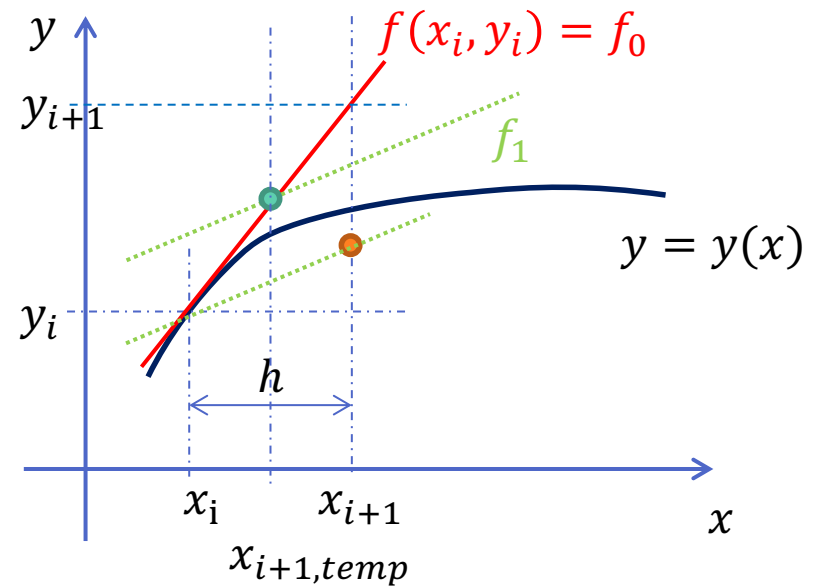
$$x_{i+1,temp} = x_i + \alpha h$$

例:  $\alpha = \frac{1}{2}$        $x_{i+1,temp} = x_i + \frac{1}{2}h$

$$f_1 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + f_0 \frac{h}{2}\right)$$

- $a_0 = 0, a_1 = 1$

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + f_0 \frac{h}{2}\right) \quad : \text{中点法}$$



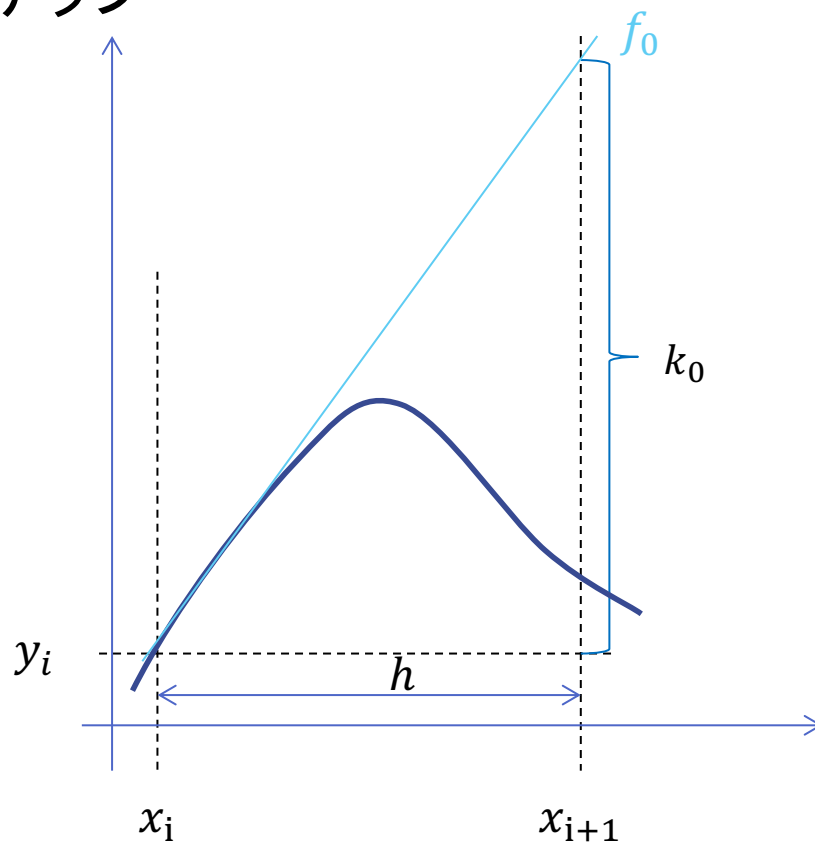
# 4次のRunge-Kutta法

- $y_{i+1} = y_i + h(a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3)$

3回の仮ステップと, 1回の本ステップ

$$f_0 = f(x_i, y_i)$$

$$k_0 = f_0h$$

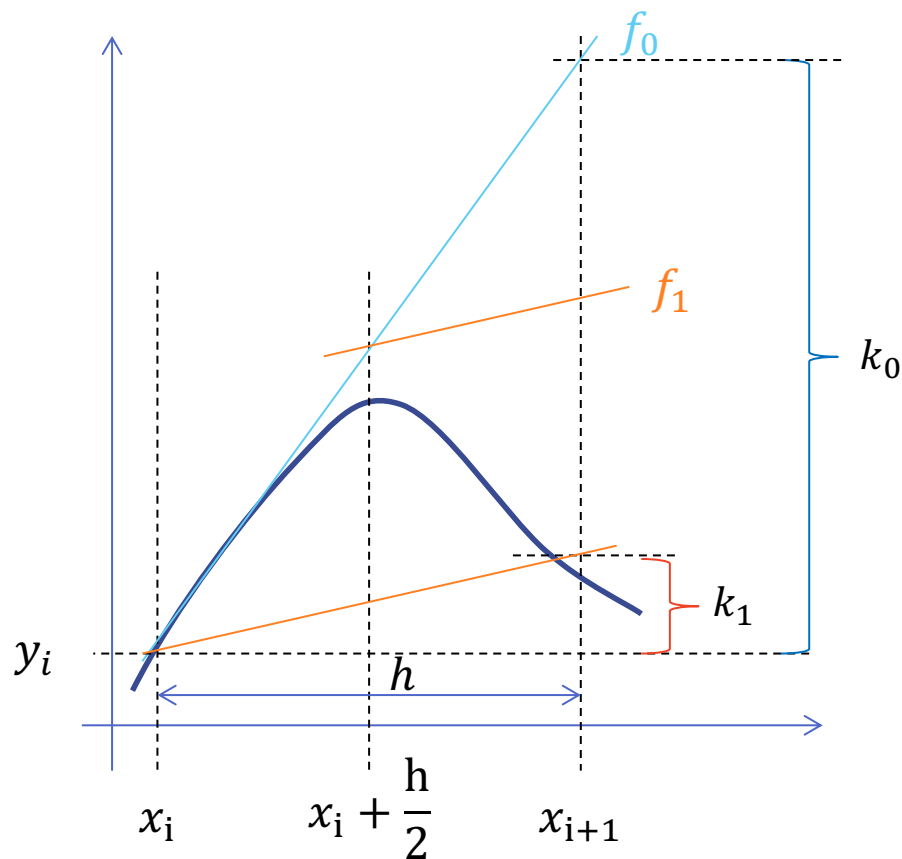


ステップ(0): 傾き算出

# 4次のRunge-Kutta法

$$f_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_1 = f_1 h$$



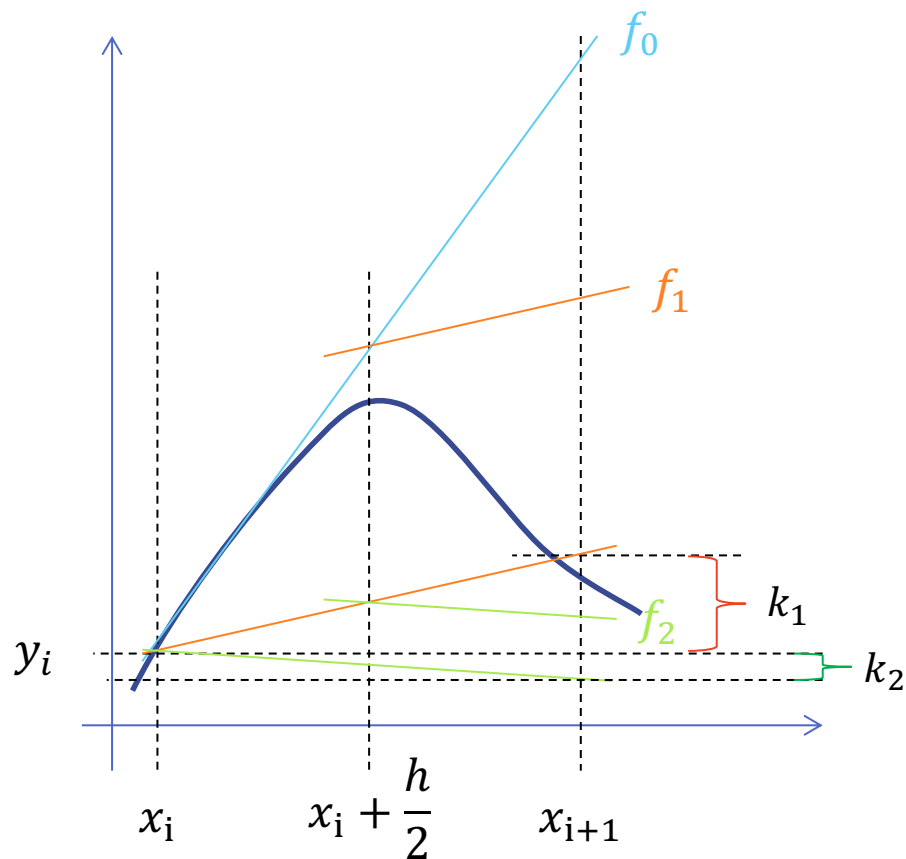
仮ステップ(1):  $2/h$ 進む



# 4次のRunge-Kutta法

$$f_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_2 = f_2 h$$

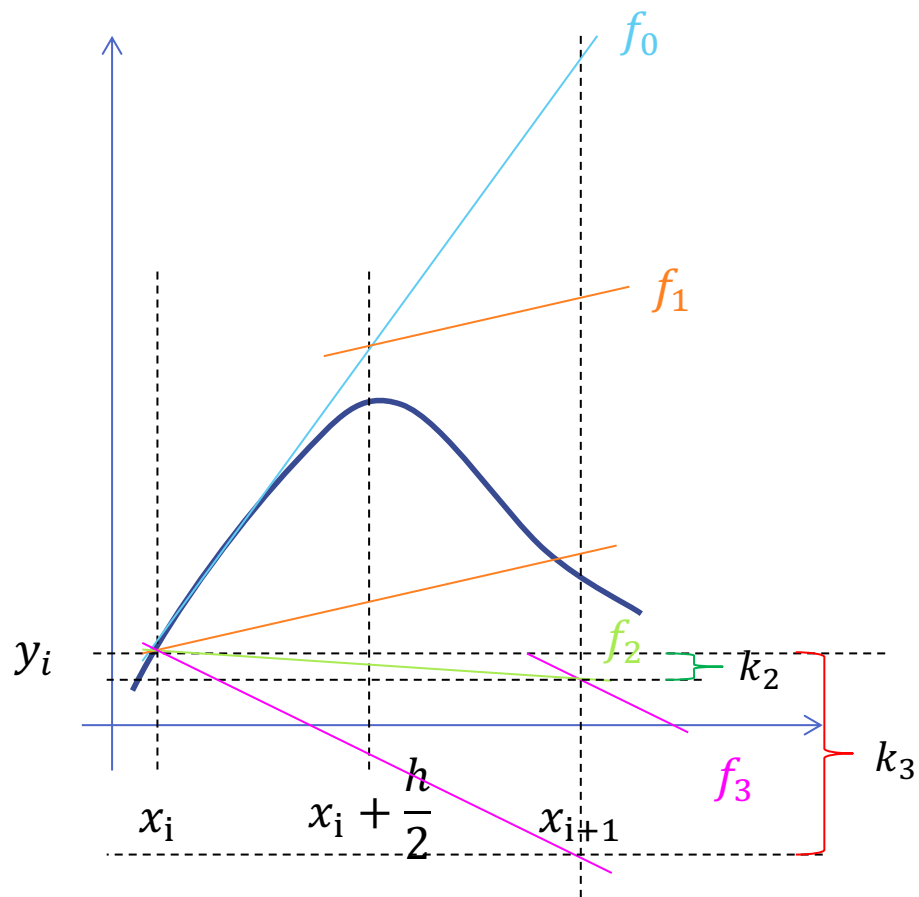


仮ステップ(2):  $2/h$ 進む

# 4次のRunge-Kutta法

$$f_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$$

$$k_3 = f_3 h$$



仮ステップ(3):  $h$ 進む

# 4次のRunge-Kutta法

- $y_{i+1} = y_i + h(a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3)$

$$k_0 = f_0h \quad k_1 = f_1h \quad k_2 = f_2h \quad k_3 = f_3h$$

$$y_{i+1} = y_i + a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3$$

$$f_0 = f(x_i, y_i)$$

$$f^{(1)}$$

$$f_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$f^{(2)}$$

$$f_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$f^{(3)}$$

$$f_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$$

$$f^{(4)}$$

高次の関数になっている.

⇒ 4次のテイラー展開に一致できる

# 4次のRunge-Kutta法

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}$$

$$k_0 = f_0 h \quad f_0 = f(x_i, y_i)$$

$$k_1 = f_1 h \quad f_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_2 = f_2 h \quad f_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f_3 h \quad f_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$$

# 補足

- 2次るとき同様, 重みやステップの作り方はほかにもある.  
興味がある人は図書館などで参考文献を調べるとよい.

# 演習課題14

- $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

を4次のRunge-Kutta法で解くプログラムを作成せよ。  
その際、xの初期値, ステップ幅, xの最終値, yの初期値は  
input.csvにより, 記載の順で与えることとする。