

数値解析

第6回 連立一次方程式の反復解法

今日の目標

- 反復による連立方程式の解法を理解する

非線形方程式の確認(復習)

- 2分法とニュートン法では一般的に**ニュートン法の方が収束が速い**.
- 2分法は初期区間(y_+ と y_- のペア)が見つかれば**必ず収束**する.
- ニュートン法は**初期値設定が不適切だと収束しない**.
 - Note: テイラー展開の1次近似 (初期値 x_0 は解に十分近い)
 - ニュートン法のプログラムでは**繰返し回数**による制限を必ずつける.

本題: 反復解

- 繰り返しで真の解に近づける(非線形方程式のときと同じ)
 $Ax = b$ を $x_{k+1} = \phi(x_k)$ の形で求める.

連立方程式の場合

- ヤコビ法 (Jacobi method)
- ガウス・ザイデル法 (Gauss-Seidel method)

基本的な考え方

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

対角成分以外を右辺に移項

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} \right) \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} \right) \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{aligned}$$

ヤコビ法

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left\{ b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} \right) \right\}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left\{ b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} \right) \right\}$$

⋮

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left\{ b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} \right) \right\}$$

一般形

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right\}$$

対角より左側

対角より右側

参考: 行列式で記載

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right\}$$

対角(D)より左側 = L

対角(D)より右側 = U

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k)})$$

注意:

対角行列D, 下三角行列L, 上三角行列Uであるが, LU分解とは異なる.
 $A = D + L + U$ (LU分解は $PA = LU$)

ガウス・ザイデル法

- 基本的な考え方: ヤコビ法で常に最新の値を使う

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left\{ b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} \right) \right\} \\x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left\{ b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} \right) \right\} \\&\vdots \\x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left\{ b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} \right) \right\}\end{aligned}$$

直前(1行上)までで計算された値をすぐに使う。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right\}$$

参考: 行列式で記載

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right\}$$

対角(D)より左側 = L

対角(D)より右側 = U

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)})$$

注意:

対角行列D, 下三角行列L, 上三角行列Uであるが, LU分解とは異なる.
 $A = D + L + U$ (LU分解は $PA = LU$)

演習課題6

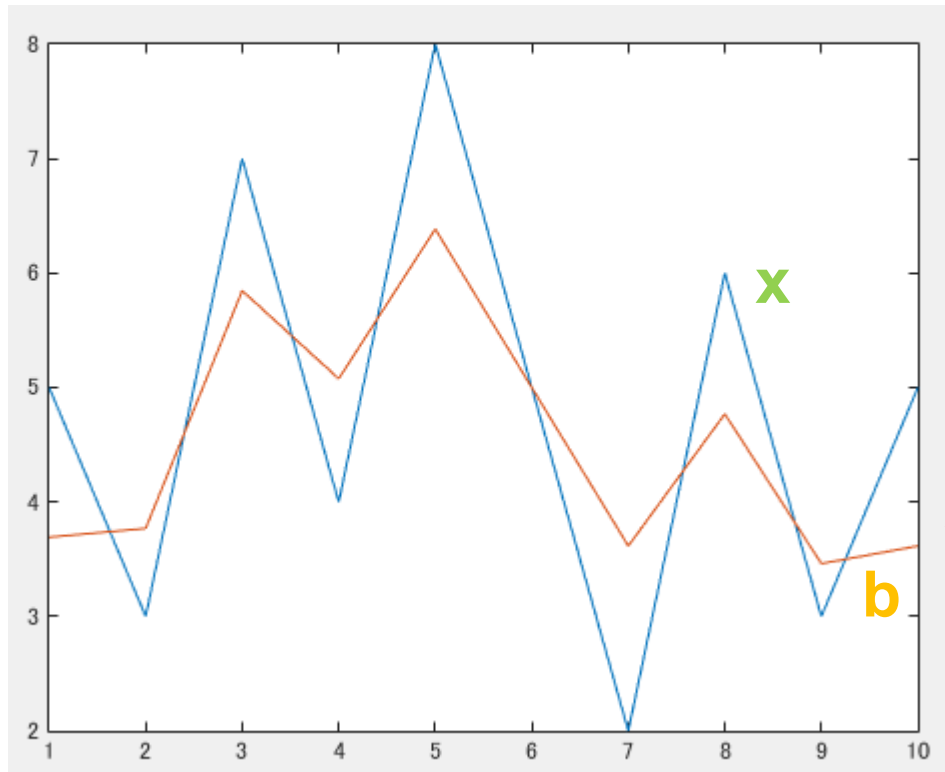
$$Ax = b$$

$$A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3.69 \\ 3.77 \\ 5.85 \\ 5.08 \\ 6.38 \\ 5.00 \\ 3.62 \\ 4.77 \\ 3.46 \\ 3.62 \end{pmatrix}$$

Aをinput1.csv, bをinput2.csvから入力し,
ヤコビ法及びガウス・ザイデル法で上記を解け.
反復回数を決め, 収束が比較できるようにすること。

補足(余談)

- 演習問題はフィルタリングの問題(終端処理省略)



正規化したxとbのグラフ

鈍った信号から元の信号を復元する問題(逆問題)