Ec4 制御工学 IB　第 7 回

1　微分要素・積分要素の周波数応答

時間 t の関数 $x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ とすると（初期値 $x(0)=0$ とする）

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sX(s), \qquad \mathcal{L}\left[\int_0^t x(t')\mathrm{d}t'\right]=\frac{1}{s}X(s)$$

が成り立つため，$P_{\mathrm{D}}(s)=s$, $P_{\mathrm{I}}(s)=1/s$ のことをそれぞれ**微分要素**，**積分要素**という。これらの周波数応答を調べてみよう。

1.1　微分要素の周波数応答

まず微分要素 $P_{\mathrm{D}}(s)$ の周波数伝達関数，ゲイン，位相はそれぞれ以下のようになる（$\omega>0$ である）。

周波数伝達関数	
ゲイン [dB]	
位相 [deg.]	

ゲインのデシベル値について，角周波数 ω を 10 倍にしたときの変化を見てみると

$20\log_{10}\lvert P_{\mathrm{D}}(j\omega\times 10)\rvert =$

というようにゲインが 20 dB 増える。これを「微分要素のゲインの勾配が +20 dB/dec である」と表現する。dec は 10 倍の意味である (decade)。

1.2　積分要素の周波数応答

続いて積分要素 $P_{\mathrm{I}}(s)=1/s$ の周波数応答を調べてみよう。

周波数伝達関数	
ゲイン [dB]	
位相 [deg.]	

ゲインのデシベル値について，角周波数 ω を 10 倍にしたときの変化を見てみると

$20\log_{10}\lvert P_{\mathrm{I}}(j\omega\times 10)\rvert =$

となるので，積分要素のゲインの勾配は ________________ である。

2　ボード線図

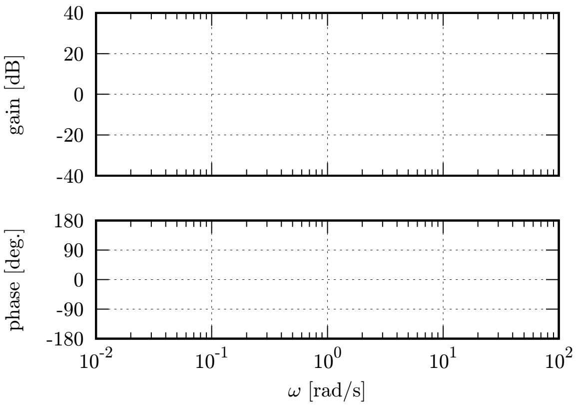
システムの周波数応答をグラフで表すものの 1 つが**ボード線図** (Bode diagram) である[*1]。ボード線図は**ゲイン線図**と**位相線図**の 2 つからなり，どちらも片対数グラフで横軸は角周波数である（実験では横軸を周波数にすることも多い)。ゲイン線図の縦軸の単位は dB，位相線図の縦軸の単位は deg. である。

まずデシベルに慣れるために以下の表を完成させよう。$\log_{10}(2) = 0.3$ としてよい。

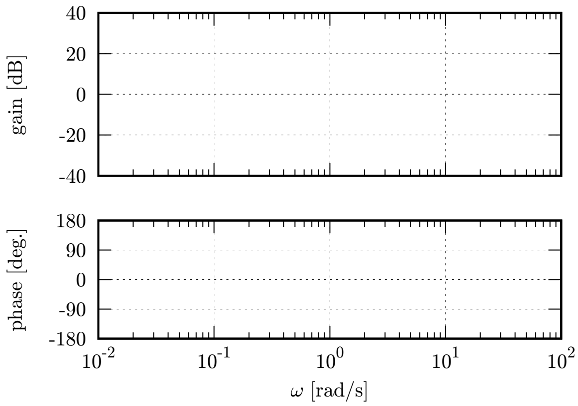
数値	0.01		$1/\sqrt{2}$	1		10	100
デシベル値		-20 dB			6 dB		

先ほど調べた周波数応答の式をもとに，微分要素と積分要素のボード線図をそれぞれ描いてみよう。

微分要素 $P_{\mathrm{D}}(s) = s$ のボード線図



積分要素 $P_{\mathrm{I}}(s) = 1/s$ のボード線図



3　1 次システムの周波数応答

定常ゲイン $K = 1$ の 1 次システム $P_{1\mathrm{st}}(s) = 1/(1 + Ts)$ の周波数応答を調べてみよう。

周波数伝達関数 $P_{1\mathrm{st}}(j\omega)$	
ゲイン $\lvert P_{1\mathrm{st}}(j\omega)\rvert$	
ゲイン [dB] $20\log_{10}\lvert P_{1\mathrm{st}}(j\omega)\rvert$	
位相 $\angle P_{1\mathrm{st}}(j\omega)$	

[*1] Bode は考案者の名前であり，板 (board) ではない。

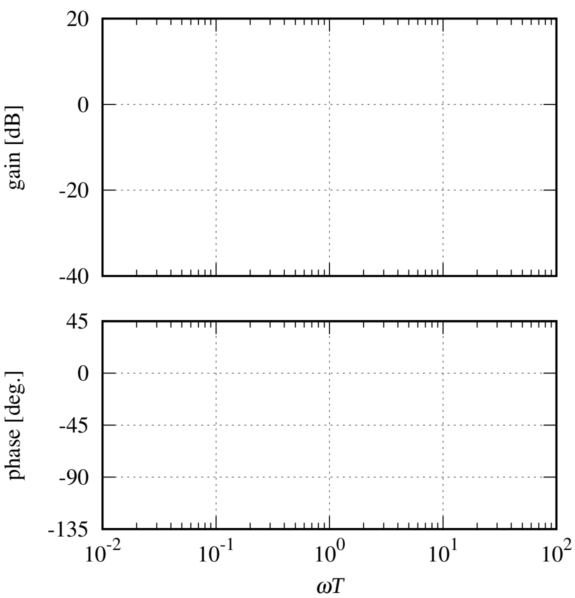
1 次システムのボード線図は曲線になるが，折れ線で近似する方法が広く知られている。伝達関数において $s = j\omega$ として周波数伝達関数を作っているので，ω が小さいところについては伝達関数において s が小さい近似をとって，ω が大きいところについては s が大きい近似をとってみる。

	ωT が小さい $(1 + Ts \approx 1)$	ωT が大きい $(1 + Ts \approx Ts)$
$P_{\mathrm{1st}}(s)$ の近似		
近似における周波数伝達関数 $P_{\mathrm{1st}}(j\omega)$		
近似におけるゲイン $\lvert P_{\mathrm{1st}}(j\omega)\rvert$		
近似における位相 $\angle P_{\mathrm{1st}}(j\omega)$		

これより，以下のように 1 次システムのボード線図の折れ線近似を行う。区間ごとに値が一定の直線か，傾きが一定の直線かを切り替えればよい。実際にボード線図を描く際には，横軸は ωT ではなく ω なので，$\omega T = 1$ を $\omega = 1/T$ に置き換えて描けばよい。T が変わると平行移動する形となる。

ωT の区間	その区間のゲイン線図の値か勾配
$\omega T < 1$	
$1 < \omega T$	

ωT の区間	その区間の位相線図
$\omega T < 1/5$	
$1/5 < \omega T < 5$	$\omega T =$ ____ で _______ を通る直線
$5 < \omega T$	



ボード線図を見てわかるように，1 次システムは入力に含まれる周波数の低い成分をそのまま通過させ，周波数の高い成分を小さくする性質がある．この性質を**ローパス特性**といい，1 次システムを **1 次のローパスフィルタ**とも呼ぶ。折れ線近似における交点の周波数を**カットオフ周波数**と呼ぶ．ローパス特性を持つアナログ信号をディジタル信号に標本化する際に必要な**アンチエイリアスフィルタ**としてよく使われる。

4　Python-control で周波数応答を調べ，ボード線図を描く

Python-control でシステムの周波数応答を得るには `bode` 関数を使う．伝達関数と角周波数のリストを渡すとゲインと位相を計算してくれる。以下は $P(s) = 1/(s+1)$ のゲイン線図を描く例である。

```
 In[1]: import numpy as np
 In[2]: import matplotlib.pyplot as plt
 In[3]: from control.matlab import *
 In[4]: n = [1]
 In[5]: d = [1, 1]
 In[6]: P = tf(n, d)
 In[7]: w = np.logspace(-3, 3, 100)
 In[8]: gain, phase, w = bode(P, w, Plot=False)
 In[9]: g_dB = 20 * np.log10(gain)
In[10]: p_deg = phase * 180 / np.pi
In[11]: plt.semilogx(w, g_dB)
        plt.xlabel("$\omega $ [rad/s]")
        plt.ylabel("gain [dB]")
        plt.grid()
        plt.show()
In[12]: plt.semilogx(w, p_deg)
        plt.xlabel("$\omega $ [rad/s]")
        plt.ylabel("phase [deg.]")
        plt.grid()
        plt.show()
```

`bode` 関数はデフォルトで良い感じにグラフをプロットしてくれるので，基本的にはデフォルトに任せておけばよい。パラメータの `Plot=False` とすることでそのプロットを抑制することもできる。

`semilogx` 関数は片対数グラフをプロットする関数である．x 軸が対数スケールになる以外は `plot` と同じ機能を持ち，線種の指定なども同様にできる。

課題

(1). 1 次システム $P_{\mathrm{1st}}(s) = 1/(1+Ts)$ の $\omega T = 1$ のときのゲインの値 [dB] および $\omega T = 0.2, 5$ のときの位相の値 [deg.] を計算せよ。割り切れない場合は小数点以下第 1 位まででよい。

(2). 以下の信号 $u(t)$ を 1 次システム $P_1(s) = 1/(0.1s+1)$ に入力したときの応答 $y_1(t)$ のグラフを描き，$u(t)$ のグラフと比較してローパス特性を確認せよ。t の範囲は 0 s から 4 s とする。

$$u(t) = \sin(5t) + \sin(50t). \tag{1}$$

(3). 1 次システム $P_1(s) = 1/(0.1s+1)$ のボード線図を書き，ゲイン線図と位相線図について，折れ線近似と重ねたグラフを作成せよ。
（ヒント：`plt.plot` は与えた点を線分でつなぐので，折れ線近似の始点と折れる点と終点を与えて，`plt.semilogx` でのプロットと重ねればよい）

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出
提出期限　次回授業まで
ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_07_KazukiSakai.html`