Ec4 制御工学 IB　第 4 回

1　伝達関数の極と安定性の必要十分条件

1.1　準備：数学的な用語など

制御工学では関数の**根**，**極**，**零点**という用語がよく出てくる。$F(s)$, $N(s)$, $D(s)$ を s の多項式として，$P(s) = N(s)/D(s)$ とすると，

$F(s)$ **の根**	$F(s) = 0$ となる s のこと。
$P(s)$ **の極**	$D(s) = 0$ となる s のこと。$D(s)$ の根。
$P(s)$ **の零点**	$N(s) = 0$ となる s のこと。$N(s)$ の根。

1.2　システムの安定性の定義

「システムが安定である」とは制御工学において以下のように定義されている。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿に対して微分方程式の解（時間応答）が＿＿＿＿＿＿＿＿に向かわないこと。

実際には特にステップ入力に対する時間応答について調べればよい。この定義より，一次システムも二次システムも安定なシステムであることがわかる。

1.3　伝達関数の極とステップ応答

ある伝達関数 $P(s)$ が n 個の極 p_i $(i = 1, \ldots, n)$ と m 個の零点 z_j $(j = 1, \ldots, m)$ を持つとして，全体の係数を k とする。ひとまず p_i が互いに異なる実数の場合を考えると，

$$P(s) = k\frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

と表すことができる。この伝達関数のステップ応答のラプラス変換 $Y(s) = P(s)U(s)$ は

$$Y(s) = P(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

であるからこれをラプラス逆変換して $y(t)$ を求めると，

これより，システム $P(s)$ が安定となるための必要十分条件は

であることがわかる。

現実的なシステムでは伝達関数の極は実数か共役複素数の組となる。$P(s)$ の極が実数極 p_i $(i = 1, \dots, \ell)$ と複素共役極 $a_k \pm j\omega_k$ $(k = 1, \dots, m)$ であるとすると，

$$Y(s) = P(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{\alpha_\ell}{s - p_\ell} + \frac{\beta_1}{(s - a_1)^2 + \omega_1^2} + \cdots \frac{\beta_m}{(s - a_m)^2 + \omega_m^2}$$

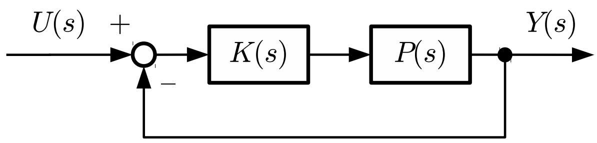
であるからこれをラプラス逆変換して $y(t)$ を求めると，

となる。この式から，複素数極も含まれる一般のシステムが安定となる必要十分条件は

であることがわかる。なお，この条件は重極が存在する場合にも成立する（重極の項についてのラプラス逆変換が収束する条件も同様なので)。

2　フィードバック制御系の安定性

下左図にフィードバック制御系のブロック線図を示す。$P(s)$ は制御対象の伝達関数であり，$K(s)$ は制御器の伝達関数である。



フィードバック制御系の伝達関数 $G(s)$

$K(s)$, $P(s)$ がそれぞれ分母・分子多項式を使って

$$K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}, \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$$

と表されるとする。$G(s)$ を $N_K(s)$, $D_K(s)$, $N_P(s)$, $D_P(s)$ で表した式と，フィードバック制御系が安定となるための $N_K(s)$, $D_K(s)$, $N_P(s)$, $D_P(s)$ についての必要十分条件をまとめる。

$G(s)$ の式の形	
フィードバック制御系が安定となる必要十分条件	

これより，$P(s)$ が不安定でも，$K(s)$ を適切に与えれば全体として安定にできることがわかる。

3　Python-control で伝達関数の極や零点を扱う

今回，伝達関数の極が応答に影響することを学んだ。Python-control では伝達関数の極や零点から伝達関数の分母・分子の係数を求めることができる。それによってシステムを定義することができる。

例えば伝達関数の零点が -2 で極が $-1 \pm j$, -3 でゲインが 2 のシステムを定義するには,

```
In[1]: import numpy as np
In[2]: import matplotlib.pyplot as plt
In[3]: from control.matlab import *
In[4]: z = [-2]
In[5]: p = [-1+1j, -1-1j, -3]
In[6]: k = 2
In[7]: n, d = zpk2tf(z, p, k)
In[8]: P = tf(n, d)
```

とすればよい。なお，零点を持たないシステムであれば `zero = []` と，空のリストにする。

課題

1. 以下の 2 つの伝達関数についてステップ応答を描画し，その違いを考察せよ（グラフは重ねなくてよい)。t の範囲は 0 s から 5 s までで 100 点取ることととする。
   - $P_1(s)$：零点なし $z = []$，極 $p = -1 \pm 5j$，ゲイン $k = 1$
   - $P_2(s)$：零点なし $z = []$，極 $p = +1 \pm 5j$，ゲイン $k = 1$
2. 以下の 3 つの伝達関数についてステップ応答を描画し，その違いを考察せよ（グラフは重ねる)。t の範囲は 0 s から 5 s までで 100 点取ることととする。
   - $P_3(s)$：零点なし $z = []$，極 $p = -1 \pm 5j$，ゲイン $k = 26$
   - $P_4(s)$：零点なし $z = []$，極 $p = -3 \pm 5j$，ゲイン $k = 34$
   - $P_5(s)$：零点なし $z = []$，極 $p = -5 \pm 5j$，ゲイン $k = 50$

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出
提出期限　次回授業まで
ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_04_KazukiSakai.html`