

1 システムの安定性判別

伝達関数の極の実部が負であればシステムが安定であることがわかった。しかし、システムが高次になると実際に極を求めるのが困難なので、極を求めずに安定性を判別する方法が作られている。

1.1 安定性の必要条件

伝達関数 $G(s) = N(s)/D(s)$ の分母多項式 $D(s)$ のことを**特性多項式**という。システムが安定である必要条件として以下が言えることがわかっている。

安定性の必要条件

伝達関数の特性多項式の係数が全て正である

これは必要条件なので、これを満たしているからといって安定であるとは言えないが、これを満たしていなければ必ず不安定であると言える。例を見てみよう。

極が $p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3$ のときの特性多項式 $D(s)$ (安定)

(ヒント: $D(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)$ を展開する)

極が $p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = 4$ のときの特性多項式 $D(s)$ (不安定)

極が $p_1 = 1 + j3, p_2 = 1 - j3, p_3 = -4$ のときの特性多項式 $D(s)$ (不安定)

1.2 ラウス・フルビッツの安定判別法

極を求めることなく、分母多項式の係数だけから安定性を判別する方法がラウスとフルビッツによって独立に考案された。両者が数学的には同等であったため、**ラウス・フルビッツの安定判別法**と呼ばれることもある。実際には方法が違うのでそれぞれ**ラウス法**、**フルビッツ法**と呼ばれる。

2 フルビッツの安定判別法

特性多項式が $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ で表される n 次システムについて、 n 次の正方行列であるフルビッツ行列 H を以下のように定義する。

フルビッツ行列

これに対してフルビッツ小行列式 H_i ($i = 1, \dots, n$) を次のように定義する。

H_i を行列 H の _____ ならびに _____ の要素からなる行列の行列式とする。

たとえば、 H_1, H_2, H_3 は以下のようなになる。

これらを使って、以下のようにシステムが安定である必要十分条件が得られる。ただし、安定性の必要条件（特性多項式の係数が全て正）はすでに確かめてあるとする。

【フルビッツの安定判別法】 システムが安定である必要十分条件は

例題

特性多項式が

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 1$$

であるシステムのフルビッツ行列 H およびフルビッツ小行列式 H_2, H_3 の値を求めよ。

3 ラウスの安定判別法

特性多項式が $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ で表される n 次システムについて、次に示すラウス数列を使って安定判別を行う。

ラウス数列

1 行目, 2 行目は特性多項式の係数を順に並べることで作成できる。3 行目以降は次に示す規則にしたがって計算する。

この数列を使って、以下のようにシステムが安定である必要十分条件が得られる。

【ラウスの安定判別法】

例題

特性多項式が

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 1$$

であるシステムのラウス数列を求めよ。

授業内課題

以下の特性多項式のシステムについて，フルビッツ法およびラウス法で安定判別せよ。Web にて回答を行う。Teams からリンクをクリック。

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 1$$

課題

ラウス・フルビッツの安定判別法は**係数の数値が決まっていなくても使える**というメリットがある。例えば，図 1 で表されるような比例制御を考える際に，安定であるための K の範囲を求めることができる。

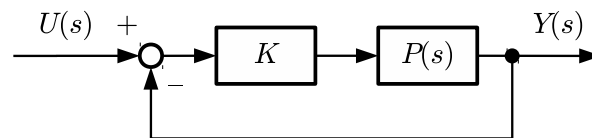


図 1 比例制御のブロック線図

制御対象の伝達関数を

$$P(s) = \frac{s - 1}{s^4 + s^3 + 2s^2 - 2s + 4}$$

とする。以下の項目についてまとめよ。

- (1) $P(s)$ の安定性を判別せよ。
- (2) 図 1 の比例制御を施したときのフィードバック制御系の伝達関数 $G(s)$ を求めよ。
- (3) フルビッツ法かラウス法を使って，フィードバック制御系が安定となるための K の条件を求めよ。
(過程全てを書かなくてよいが， H_2 , H_3 の式や，ラウス数列の 1 列目は書くように。)
- (4) Python-control を使って K が安定条件を満たす場合と満たさない場合それぞれのステップ応答を調べ，求めた条件が正しいことを確かめよ (条件の境界ピッタリじゃない方がよい)

提出方法 Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出

提出期限 次回授業まで

ファイル名 “出席番号 2 桁_授業回_氏名.html” (例) 00_05_KazukiSakai.html