



Universidad Nacional de Colombia

Ingeniería Eléctrica y Electrónica

# Sistemas de control usando Julia

Hernando Díaz  
Leonardo Bermeo

---

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica  
Bogotá  
2025



# Índice general

Índice general	1
Índice de figuras	4
<b>1 Sistemas dinámicos en Julia</b>	<b>9</b>
1.1. Funciones de transferencia en Julia . . . . .	9
1.2. Modelos de variables de estado en Julia . . . . .	12
1.3. Sistemas multivariables (MIMO) . . . . .	14
1.4. Modelos de sistemas dinámicos interconectados . . . . .	16
1.5. Simulación de sistemas lineales en Julia . . . . .	19
<b>2 Efectos de la realimentación</b>	<b>25</b>
2.1. Sistemas bien planteados . . . . .	26
2.2. Ecuaciones básicas de la realimentación . . . . .	29
2.3. Efecto sobre polos y ceros . . . . .	32
2.4. Ejercicios . . . . .	34
<b>3 Estabilidad</b>	<b>35</b>
3.1. El “dogma” de estabilidad . . . . .	35
3.2. Criterio de Routh-Hurwitz . . . . .	36
3.3. Criterio de Nyquist . . . . .	38
3.4. Estabilidad interna . . . . .	48
3.5. Teoría de estabilidad de Lyapunov . . . . .	51
3.6. Ejercicios . . . . .	56
<b>4 Especificaciones</b>	<b>57</b>
4.1. ¿Lazo abierto o lazo cerrado? . . . . .	57
4.2. Requisitos de estabilidad . . . . .	59
4.3. Desempeño — Especificaciones estáticas . . . . .	59
4.4. Especificaciones en tiempo y frecuencia . . . . .	63
4.5. Especificaciones sobre la señal de control . . . . .	70
4.6. Ejercicios . . . . .	71
<b>5 Diseño de controladores</b>	<b>73</b>
5.1. Control “perfecto” . . . . .	73

5.2. Realimentación de alta ganancia . . . . .	75
5.3. Control PID . . . . .	75
5.4. Saturación del actuador . . . . .	81
5.5. Control “on-off” . . . . .	83
<b>6 Diseño clásico de controladores</b>	<b>86</b>
6.1. Diseño por asignación de polos . . . . .	86
6.2. Lugar geométrico de las Raíces . . . . .	92
6.3. Diseño basado en respuesta de frecuencia . . . . .	107
Apéndice B. Implementación de controles adelanto/atraso . . . . .	134
<b>7 Diseño con variables de estado</b>	<b>136</b>
7.1. Controlabilidad y observabilidad . . . . .	137
7.2. Realimentación de variables de estado . . . . .	141
7.3. Estimación de estado . . . . .	146
7.4. Sistema Controlador - Observador . . . . .	151
7.5. Control óptimo lineal cuadrático . . . . .	156
7.6. Control PI vectorial . . . . .	162
Apéndice: observabilidad y controlabilidad . . . . .	170
<b>8 Diseño Algebraico</b>	<b>172</b>
8.1. Asignación de polos . . . . .	172
8.2. Controlador de dos parámetros . . . . .	180
8.3. Funciones de transferencia implementables . . . . .	183
8.4. Diseño del controlador de dos parámetros (2P) . . . . .	186
8.5. Diseño hacia adentro (“Inward”) . . . . .	195
8.6. Control óptimo ITAE . . . . .	198
8.7. Control óptimo LQ . . . . .	206
Apéndice 1: Teorema de Sylvester . . . . .	213
Apéndice 2: Teorema de Parseval . . . . .	214
Apéndice 3: Solución del problema LQ . . . . .	215
Ejercicios . . . . .	220
<b>9 Sistemas de tiempo discreto</b>	<b>221</b>
9.1. Estructura de los controladores digitales . . . . .	221
9.2. Señales de tiempo continuo y discreto . . . . .	222
9.3. Muestreo . . . . .	223
9.4. Conversión análogo-digital . . . . .	229
9.5. Proceso de conversión A/D . . . . .	231
9.6. Conversión digital - análoga D/A . . . . .	231
9.7. Retenciones de orden cero y uno . . . . .	232
9.8. Ecuaciones de diferencias . . . . .	234
9.9. Ecuación característica de ecuaciones de diferencias . . . . .	236
9.10. Transformada $z$ . . . . .	237
9.11. Propiedades de la transformada $z$ . . . . .	238
9.12. Transformada $z$ de señales muestreadas . . . . .	239

9.13. Inversión de la transformada $z$ . . . . .	240
9.14. Solución de ecuaciones de diferencias . . . . .	241
9.15. Funciones de transferencia discretas . . . . .	243
9.16. Variables de estado discretas . . . . .	244
9.17. Estabilidad de sistemas discretos . . . . .	248
9.18. Relación polos - respuesta transitoria . . . . .	249
9.19. Tabla de transformadas $z$ . . . . .	251
<b>10 Controladores discretos</b>	<b>252</b>
10.1. Especificaciones para sistemas discretos . . . . .	252
10.2. Respuesta de frecuencia . . . . .	254
10.3. Modelos discretos de sistemas continuos . . . . .	257
10.4. Traducción de diseños análogos . . . . .	266
10.5. Diseño digital directo . . . . .	271
10.6. Controlabilidad y observabilidad de sistemas discretos . . . . .	272
10.7. Realimentación de variables de estado . . . . .	273
10.8. Acción integral . . . . .	275
10.9. Equivalente discreto de un sistema con retardo . . . . .	275
10.10 Selección del tiempo de muestreo . . . . .	276
<b>Bibliografía</b>	<b>277</b>

# Índice de figuras

1.1. Conexión en cascada . . . . .	16
1.2. Conexión en paralelo . . . . .	17
1.3. Conexión de realimentación . . . . .	18
1.4. Respuesta a un escalón . . . . .	21
1.5. Respuesta a un escalón . . . . .	22
1.6. Respuesta a un impulso . . . . .	23
1.7. Respuesta a una rampa . . . . .	24
2.1. Control con realimentación . . . . .	25
2.2. Sistema de ejemplo . . . . .	26
2.3. Sistema no BP . . . . .	28
2.4. Sistema de lazo cerrado . . . . .	33
3.1. Sistema con entrada y salida . . . . .	35
3.2. Sistema de ejemplo . . . . .	38
3.3. Sistema de control elemental . . . . .	39
3.4. Curva de Nyquist . . . . .	40
3.5. Diagrama de Nyquist de $\frac{2}{(s+1)(s+2)}$ . . . . .	43
3.6. Modificación de la curva de Nyquist cuando hay polos imaginarios . . . . .	44
3.7. Diagrama de Nyquist de $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ . . . . .	44
3.8. Diagrama de Nyquist de $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ . . . . .	45
3.9. Diagrama de Nyquist de sistema con retardo . . . . .	47
3.10. Margen de fase . . . . .	48
3.11. Márgenes de estabilidad de $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ . . . . .	49
3.12. Cancelación de polos y ceros . . . . .	49
3.13. Estabilidad interna . . . . .	50
4.1. Control de lazo cerrado . . . . .	59
4.2. Sistema con entrada y salida . . . . .	64
4.3. Respuesta al escalón típica . . . . .	64
4.4. Respuesta a perturbación tipo escalón . . . . .	66
4.5. Margen de Fase . . . . .	70
4.6. Relación entre Margen de Fase $MF$ y máxima sensibilidad $M_S$ . . . . .	71
5.1. Proceso con perturbación . . . . .	74

5.2. Control “perfecto” . . . . .	74
5.3. Inversión aproximada por realimentación . . . . .	75
5.4. Curva de reacción típica . . . . .	78
5.5. Sistema con ganancia crítica . . . . .	79
5.6. Curva de reacción . . . . .	80
5.7. Diseño Z-N, curva de reacción. Respuesta al escalón . . . . .	80
5.8. Diseño Z-N, lazo cerrado. Respuesta al escalón . . . . .	81
5.9. Efecto de la saturación integral . . . . .	82
5.10. Efecto de la saturación integral y del control antiwindup . . . . .	82
5.11. Control on-off . . . . .	84
5.12. Respuesta sistema con control On-Off . . . . .	84
6.1. Polos de un sistema de segundo orden . . . . .	87
6.2. Respuesta al escalón de sistema de segundo orden . . . . .	88
6.3. Zona rosa . . . . .	91
6.4. Control proporcional . . . . .	93
6.5. Lugar geométrico de las raíces de $P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ . . . . .	94
6.6. Lugar geométrico de $\frac{1}{5s^3+10.25s^2+6.25s+1}$ . . . . .	96
6.7. Lugar geométrico de $\frac{1}{5s^3+10.25s^2+6.25s+1}$ . . . . .	97
6.8. Lugar geométrico de $\frac{2}{s(s+2)}$ . . . . .	100
6.9. Respuesta al escalón del sistema con $k = 1.05$ . . . . .	101
6.10. Lugar geométrico del sistema con $K(s) = k\frac{1+3.7s}{s}$ . . . . .	102
6.11. Respuesta al escalón del sistema usando $K(s) = 0.262\frac{1+3.7s}{s}$ . . . . .	102
6.12. Lugar geométrico del sistema con $K(s) = k1 + 1.053s1 + 0.6s$ . . . . .	103
6.13. Respuesta al escalón del sistema usando $K(s) = 4.08\frac{1+1.053s}{1+0.6s}$ . . . . .	104
6.14. Lugar geométrico del sistema con $K(s) = k\frac{1+0.5s}{1+0.061s}$ . . . . .	105
6.15. Respuesta al escalón del sistema usando $K(s) = k\frac{1+0.5s}{1+0.061s}$ . . . . .	105
6.16. Controlador de adelanto/atraso . . . . .	106
6.17. Diagrama de Nyquist . . . . .	108
6.18. Diseños en adelanto y en atraso . . . . .	109
6.19. Restricciones para moldear el lazo . . . . .	112
6.20. Polos y ceros del controlador de atraso . . . . .	113
6.21. Respuesta de frecuencia del controlador de atraso . . . . .	113
6.22. Diagrama de Bode de $20P(s)$ y de $K(s)P(s)$ con controlador de atraso . . . . .	115
6.23. Respuesta al escalón, usando controlador de atraso . . . . .	116
6.24. Polos y ceros del controlador de adelanto . . . . .	117
6.25. Respuesta de frecuencia del controlador de atraso . . . . .	117
6.26. Respuesta de frecuencia de $kP(s)$ y de $L(s) = K(s)P(s)$ , usando controlador de adelanto . . . . .	121
6.27. Respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado . . . . .	122
6.28. Diagrama de Bode de $S(s)$ . . . . .	122
6.29. Respuesta de frecuencia usando controlador de atraso-adelanto . . . . .	124
6.30. Respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado . . . . .	125
6.31. Evaluación gráfica de $\angle L(s_0)$ . . . . .	126

6.32. Variación de la ganancia a lo largo del $LG$ . . . . .	130
6.33. a. Evaluación gráfica del ángulo de partida. b. Ampliación cerca de $s_0$ . . . . .	131
6.34. $LG$ de $\frac{1}{s(s+2)(s^2-s+1.25)}$ . . . . .	133
6.35. $LG$ de $\frac{s+2}{s(s+1)}$ . . . . .	133
6.36. Red de atraso de fase . . . . .	134
6.37. Red de adelanto de fase . . . . .	135
7.1. Realimentación de variables de estado . . . . .	142
7.2. Respuesta al escalón de sistema con RVE . . . . .	144
7.3. Realimentación de variables de estado con precompensador . . . . .	145
7.4. Respuesta al escalón de sistema con RVE y precompensador . . . . .	146
7.5. Estimador de estado . . . . .	147
7.6. Observador elemental . . . . .	148
7.7. Observador asintótico . . . . .	149
7.8. Estimación de las variables de estado: (a) $x_1(t)$ y $\hat{x}_1(t)$ . (a) $x_2(t)$ y $\hat{x}_2(t)$ . Las líneas continuas son las variables reales; las punteadas, las estimadas. . . . .	151
7.9. Controlador - observador . . . . .	152
7.10. Respuesta al escalón de sistema con RVE directa (línea continua) y usando un observador (línea punteada) . . . . .	154
7.11. Controlador con RVE y observador . . . . .	155
7.12. Controlador con RVE y observador . . . . .	156
7.13. Respuesta al escalón de un controlador óptimo LQR: (a) $y(t)$ . (b) $u(t)$ . . . . .	158
7.14. Respuesta al escalón de un controlador óptimo LQR con $\rho = 1$ : (a) $y(t)$ . (b) $u(t)$ . . . . .	161
7.15. Respuesta al escalón de un controlador óptimo LQR con $\rho = 0.0477$ : (a) $y(t)$ . (b) $u(t)$ . . . . .	162
7.16. Control PI vectorial . . . . .	164
7.17. Respuesta al escalón usando un PI vectorial . . . . .	166
7.18. Respuesta al escalón usando control óptimo LQ . . . . .	168
7.19. Respuesta al escalón usando un PI vectorial . . . . .	168
8.1. Control con Realimentación Unitaria (RU) . . . . .	173
8.2. Controlador de dos parámetros . . . . .	180
8.3. Controlador de dos parámetros . . . . .	181
8.4. Una implementación del controlador 2P . . . . .	182
8.5. Sistema de lazo cerrado . . . . .	183
8.6. Sistema de control 2P con perturbación . . . . .	192
8.7. Respuesta del sistema con controlador de dos parámetros usando rechazo de perturbaciones. . . . .	194
8.8. Respuesta de sistemas ITAE óptimos con $\varepsilon_p = 0$ de diferentes órdenes o grados relativos. . . . .	200
8.9. Efecto del valor de $\omega_0$ sobre la respuesta de sistemas ITAE óptimos de orden con $\varepsilon_p = 0$ de orden 2. . . . .	200



8.10. Respuesta de sistemas ITAE óptimos con $\varepsilon_v = 0$ , de diferentes órdenes o grados relativos. . . . .	201
8.11. Respuesta de sistemas ITAE óptimos con $\varepsilon_a = 0$ , de diferentes órdenes o grados relativos. . . . .	202
8.12. Respuesta del sistema ITAE óptimo con $U_{\text{máx}} = 10$ . . . . .	203
8.13. Respuesta del sistema ITAE óptimo con $U_{\text{máx}} = 10$ . . . . .	205
8.14. Respuesta del sistema ITAE óptimo con $U_{\text{máx}} = 10$ . . . . .	206
8.15. Respuesta del sistema óptimo Lq, para la planta $P(s) = \frac{1}{s(s+3)}$ , con $q = 100$ . . . . .	209
8.16. Respuesta del sistema óptimo Lq, para la planta $P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.25s + 5)}$ , con $q = 25$ . . . . .	211
8.17. Respuesta del sistema óptimo LQ, para la planta $P(s) = \frac{s-0.5}{s(s-1)}$ , con $q = 100$ . . . . .	212
8.18. Contorno de integración . . . . .	218
9.1. Sistema de control digital . . . . .	222
9.2. Muestreo . . . . .	224
9.3. Proceso de muestreo . . . . .	224
9.4. Modelo matemático del muestreo . . . . .	224
9.5. Tren de impulsos . . . . .	225
9.6. Muestreo ideal (con impulsos) . . . . .	226
9.7. Respuesta de frecuencia de señal análoga . . . . .	226
9.8. Muestreo ideal. Respuesta de frecuencia de señal muestreada. $\omega_s > 2B$ . . . . .	227
9.9. El fenómeno de "Aliasing", cuando $\omega_s < 2B$ . . . . .	228
9.10. Transformada del pulso $p_\tau(t)$ de corta duración . . . . .	228
9.11. Muestreo real. Respuesta de frecuencia de señal muestreada. $\omega_s > 2B$ . . . . .	229
9.12. Convertidor Análogo/Digital . . . . .	229
9.13. Muestreo y retención ("sample and hold") . . . . .	230
9.14. Circuito de muestreo y retención (S/H) . . . . .	230
9.15. Error de cuantificación y ruido de cuantificación . . . . .	231
9.16. Proceso de conversión A/D . . . . .	232
9.17. Convertidor Digital/Análogo tipo fuente de tensión . . . . .	232
9.18. Convertidor Digital/Análogo tipo fuente de corriente . . . . .	233
9.19. Retención de orden cero (ZOH) y de orden uno . . . . .	233
9.20. Proceso de conversión D/A . . . . .	234
9.21. Realización de sistema discreto . . . . .	247
9.22. Relación entre respuesta y localización de los polos. . . . .	250
9.23. Transformada del pulso $p_\tau(t)$ . . . . .	251
10.1. La transformación $z = e^{sT_s}$ . . . . .	255
10.2. Las regiones con $t_s < 1$ . . . . .	256
10.3. Las regiones con $SP < 5\%$ . . . . .	256
10.4. Las regiones con $\omega_0 < w$ . . . . .	257
10.5. Integración de $f(t)$ . . . . .	261

10.6. Aproximación de Euler . . . . .	262
10.7. Aproximación de Euler — Región de estabilidad . . . . .	263
10.8. Diferencia hacia atrás . . . . .	264
10.9. Diferencia hacia atrás — Región de estabilidad . . . . .	265
10.10 Regla trapezoidal . . . . .	265
10.11 Regla trapezoidal — Región de estabilidad . . . . .	266
10.12 Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos . . . . .	268
10.13 Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos . . . . .	269
10.14 Control con Realimentación Unitaria (RU) . . . . .	270
10.15 Respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado con controlador análogo . . . . .	270
10.16 Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos. zoh: Línea punteada. Línea roja: control continuo. Línea azul: aproximación de Tustin. $T_s = 0.02$ seg. . . . .	271
10.17 Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos. zoh: Línea punteada. Línea continua: control continuo. $T_s = 0.0025$ seg. . . . .	272

## Capítulo 1

# Sistemas dinámicos en Julia

En esta obra, vamos a utilizar el lenguaje de programación Julia para efectuar los análisis y diseños de sistemas de control. Lo primero que necesitamos es poder expresar los modelos, ya sean en forma de función de transferencia o de variables de estado, para poder llevar a cabo los cálculos necesarios para nuestros diseños.

Hemos reunido la carga de los paquetes que vamos a utilizar, además de algunas funciones sencillas para resolver los problemas propuestos en el texto en un archivo que hemos denominado `ControlUN.jl`. Para simplificar los procesos, la mayoría de los ejemplos empiezan por incluir este archivo; por lo tanto, casi todos los ejemplos empiezan con una instrucción `include("ControlUN.jl")`. El único requisito para su uso es que el archivo se encuentre en la misma carpeta donde se van a guardar los archivos de trabajo. La mayoría de las herramientas que vamos a usar en este curso fueron desarrolladas por F. Carlson et al [CFHT21] en el paquete `ControlSystems.jl`. Existen dos versiones de dicho paquete: la versión completa que requiere el uso de la herramienta de solución de ecuaciones diferenciales y que puede requerir un tiempo considerable para instalar y usar por primera vez; una versión reducida `ControlSystemsBase` que contiene prácticamente todas las funciones que vamos a usar, excepto las de simulación. Para hacer algunos cálculos matriciales usaremos el paquete de `LinearAlgebra` y, para efectuar operaciones con polinomios (básicamente, encontrar todas las raíces del polinomio y construir el polinomio a partir de sus raíces), necesitaremos el paquete `Polynomials`. Cuando se van a producir gráficas de cualquier tipo usaremos el paquete `Plots.jl` junto con sus *backends*, `gr`, `Plotly`.

### 1.1. Funciones de transferencia en Julia

Un modelo de un sistema dinámico lineal, descrito por una ecuación diferencial de orden  $n$ ,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$$

la cual, después de aplicarle la Transformada de Laplace, se convierte en la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{n(s)}{d(s)} = P(s)$$

En Julia, se especifican los vectores con los coeficientes del numerador  $n(s)$  y del denominador  $d(s)$ , así:

$$n = [b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0]$$

y

$$d = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$$

La función de transferencia, entonces se define por

---

```
1 P = tf(n, d)
```

---

**Ejemplo 1.1.** La función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = P(s) = \frac{0.85 s^3 + 2.25 s^2 - 0.18 s + 2.22}{s^4 + 0.670 s^3 - 3.18 s + 1.45}$$

se define de la siguiente forma:

---

```
1 using ControlSystemsBase
2 n_p = [0.85, 2.25, -0.18, 2.22]
3 d_p = [1, 0.670, 0, -3.18, 1.45]
4 P = tf(n_p, d_p)
```

---

Una forma muy utilizada de definir las funciones de transferencia consiste en escribirlas como cocientes de polinomios en la variable  $s$ , la cual se define como una función de transferencia básica:

---

```
1 s = tf("s")
```

---

**Ejemplo 1.2.** *La función de transferencia*

$$P(s) = \frac{2.5s + 0.5}{s^4 - 3.5s^3 + 2s^2 + 4s + 2.2}$$

se puede definir en la forma:

---

```

1 using ControlSystemsBase
2 s = tf("s")
3 P = (2.5 s+0.5)/(s^4 -3.5 s^3 + 2 s^2 + 4 s+2.2)

```

---

Con frecuencia se especifica la función de transferencia en forma factorizada:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)} = k_P \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \cdots (s - z_1)(s - z_0)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \cdots (s - p_1)(s - p_0)}$$

donde  $z_i \in \mathbb{C}$  son los **ceros**, los  $p_i \in \mathbb{C}$  son los **polos** de  $P(s)$  y  $k_P$  es la ganancia de la función de transferencia. Nótese que, para un sistema real, físicamente realizable, es necesario que  $m \leq n$ ; es decir, la función racional así definida tiene que ser **propia**.

Para definir una función de transferencia en Julia, a partir de los polos, ceros y ganancia, se usa el comando **zpk**.

**Ejemplo 1.3.** *Para definir las funciones de transferencia*

$$g(s) = 2.5 \frac{s + 0.5}{s(s + 1)(s - 2)}, \quad p(s) = 4.8 \frac{1}{s(s + 1)(s + 0.5)}$$

se usa,

---

```

1 polos_g = [-1, 0, 2]
2 ceros_g = [-0.5]
3 k_g = 2.5
4 g = zpk(ceros_g, polos_g, k_g)
5 polos_p = [-1, -0.5, 0]
6 ceros_p = []
7 k_p = 4.8
8 p = zpk(ceros_p, polos_p, k_p)

```

---

Con frecuencia, necesitamos extraer los datos de una función de transferencia; por ejemplo, requerimos los polinomios del numerador  $n(s)$  y denominador  $d(s)$  de la función  $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  definida por medio de la función **tf** o, los polos, ceros y ganancia de una función definida con **zpk**. Para ello se usan las funciones **zpkdata** y **tfddata**, disponibles en nuestro caso en **ControlSystemsBase** o en **ControlUN.jl**. Por el momento, **tfddata** solo funciona para funciones de transferencia de sistemas SISO.

**Ejemplo 1.4.** Para las funciones de transferencia,

$$g(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} = \frac{2.5s + 0.5}{s^3 + 2s^2 + 4s + 2.2}, \quad p(s) = 4.8 \frac{s - 4}{s(s + 1)(s + 0.5)}$$

podemos obtener los polinomios  $n_g(s) = 2.5s + 0.5$  y  $d_g(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + 2.2$  en la forma de vectores de coeficientes  $n = [2.5, 0.5]$ ,  $d = [1, 2, 4, 2.2]$ , utilizando y el vector de polos, ceros y ganancia de  $p(s)$  como:

---

```

1 g = tf([2.5, 0.5], [1, 2, 4, 2.2])
2 p = zpk([4], [0, -1, -0.5], 4.8)
3 n_g, d_g = tfdata(g)
4 ceros_p, polos_p, k_p = zpkdata(p)

```

---

También es posible transformar de una representación a la otra mediante las funciones `tf` y `zpk`, como se ilustra a continuación:

---

```

1 g = tf([2.5, 0.5], [1, 2, 4, 2.2])
2 p = zpk([4], [0, -1, -0.5], 4.8)
3 g_zpk = zpk(g)
4 p_tf = tf(p)

```

---

## 1.2. Modelos de variables de estado en Julia

El otro tipo de modelos lineales que usaremos es el de variables de estado. En este caso, la dinámica está descrita por un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. Es decir, una ecuación vectorial de la forma

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1.1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , es un vector de **variables de estado**,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es un vector de **variables de entrada** (en nuestro caso, solamente usaremos el caso  $m = 1$ , pero la formulación es general),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

La relación entre la entrada y la salida se establece mediante una ecuación que relaciona la **variable de salida** con las variables de estado y las de entrada. La **ecuación de salida**, entonces, será:

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (1.2)$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de variables de salida (que, en nuestro caso, será un escalar; es decir,  $p = 1$ ),  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Muy frecuentemente, se tiene que  $D$  es una matriz de ceros. En el caso SISO (Single Input Single Output — una entrada una salida)  $D = 0$ , un escalar.

En Julia, se define un modelo de variables de estado mediante la función `ss`, cuyos argumentos son las matrices  $A, B, C, D$ . En la función `ss`, basta especificar 0, cuando la matriz  $D$  es cero, independientemente de sus dimensiones.

**Ejemplo 1.5.** Para definir el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

usamos el código Julia:

---

```
1 using ControlSystemsBase
2 A = [-3 0 -1;-4 0 2;-1 0 0]
3 B = [1; 0; 0]
4 C = [0 -1 -2]
5 sys = ss(A, B, C, 0)
```

---

Una construcción frecuente ocurre cuando no se especifica una salida, sino que solo estamos interesados en las variables de estado. En ese caso la matriz  $C$  es una matriz identidad. En el llamado de la función `ss` se especifica `I` (esta definición requiere utilizar el paquete `LinearAlgebra`). El programa, en ese caso, define una matriz identidad de dimensiones adecuadas para la matriz  $C$ .

**Ejemplo 1.6.** En el ejemplo anterior, cuando queremos conocer la evolución de las variables de estado, usamos el siguiente código:

---

```
1 using ControlSystemsBase
2 using LinearAlgebra
3 A = [-3 0 -1;-4 0 2;-1 0 0]
4 B = [1; 0; 0]
5 sys_x = ss(A, B, I, 0)
```

---

La función `ss` también permite encontrar la representación en variables de estado de un sistema definido por medio de las funciones `tf` o `zpk`.

Para obtener las matrices  $A, B, C, D$  de un sistema descrito por ecuaciones de estado existe la función `ssdata`.

**Ejemplo 1.7.** Aquí vamos a ilustrar la conversión de sistemas definidos por funciones de transferencia a variables de estado y la obtención de los parámetros correspondientes.

---

```

1 using ControlSystemsBase
2 g = tf([2.5, 0.5],[1, 2, 4, 2.2])
3 p = zpk([4],[0, -1, -0.5],4.8)
4 g_s = ss(g)
5 A_g, B_g, C_g, D_g = ssdata(g_s)
6 p_s = ss(p)
7 A_p, B_p, C_p, D_p = ssdata(p_s)

```

---

### 1.3. Sistemas multivariantes (MIMO)

Un sistema con varias variables de entrada y de salida, en general, se especifica por una matriz de transferencia, donde cada término es una función de transferencia. Un sistema MIMO también se puede representar por una ecuación de estado donde la entrada o la salida (o ambos) son vectores.

#### Creación de sistemas MIMO

La función `ss` permite definir un sistema MIMO cuando se especifican matrices cuyas dimensiones indican un vector de salida y uno de entrada. En el ejemplo siguiente, especificamos un sistema cualquiera con dos (2) entradas, tres (3) salidas y cuatro variables de estado.

---

```

1 include("ControlUN.jl")
2 # Definimos un sistema con tres salidas, dos entradas
3 #   y cuatro variables de estado
4 sys_s = ssrand(3, 2, 4; proper=true):
5 A, B, C, D = ssdata(sys_s);
6 # Para mostrar las matrices:
7 A
8 B
9 C
10 D
11 # Transformamos a una matriz de transferencia
12 sys_tf = tf(sys_s)

```

---

#### Sistema MIMO a partir de componentes

Un sistema mimo se puede formar como la concatenación de sistemas SISO.

**Ejemplo 1.8.** *Los dos sistemas*

$$K_1 = \frac{1}{s+1}, \quad K_2 = \frac{3}{s+2}$$



se van a usar para formar un sistema con dos entradas  $r(s)$ ,  $y(s)$  y una salida

$$\begin{aligned} u(s) &= K_1(s)r(s) + K_2(s)y(s) \\ &= \begin{bmatrix} K_1(s) & K_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En Julia, se especifica este sistema como:

---

```
1 include("ControlUN.jl")
2 # Definimos las componentes K_1 y K_2
3 K_1 = tf([1.],[1, 1])
4 K_2 = tf([3.0],[1, 2])
5 # Concatenamos los dos subsistemas
6 K = [K_1 K_2]
```

---

También es posible formar un sistema diagonal, dos subsistemas sin acoplamiento, mediante la función `append`. Por ejemplo, a partir de los sistemas definidos arriba, queremos formar el sistema

$$K_{diag} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

---

```
1 include("ControlUN.jl")
2 # Definimos las componentes K_1 y K_2
3 K_1 = tf([1.],[1, 1])
4 K_2 = tf([3.0],[1, 2])
5 # Formamos sistema diagonal
6 K_diag = append(K_1, K_2)
7 K_diag
```

---

Un sistema más complejo se puede formar concatenando las componentes. Por ejemplo para formar la matriz de transferencia,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1.5} & \frac{3}{s(s+2)} & \frac{0.25}{s+1.2} \\ \frac{s-3}{s^2+0.8s+1} & \frac{4}{s+2} & -\frac{1}{s+1.2} \end{bmatrix}$$

procedemos así:

---

```
1 # Forma general
2 s = tf('s')
3 P_11 = 1/(s+1.5)
4 P_12 = 3/(s*(s+2))
```

---

```

5 P_13 = 0.25/(s+1.2)
6 P_21 = (s-3)/(s^2+0.8*s+1)
7 P_22 = 4/(s+2)
8 P_23 = -1/(s+1.2)
9 # Formamos sistema 3 entradas, dos salidas
10 P = [P_11 P_12 P_13; P_21 P_22 P_23]
11 # Convertimos a variables de estado
12 P_s = ss(P)

```

---

#### 1.4. Modelos de sistemas dinámicos interconectados

En control, normalmente, no analizamos la respuesta de un sistema aislado sino que lo conectamos con otros sistemas dinámicos para cambiar su comportamiento dinámico. Prácticamente cualquier interconexión se puede representar como una combinación de tres estructuras básicas: conexión en serie, conexión en paralelo y estructura de realimentación (*feedback*). Además de estas operaciones básicas necesitamos disponer de medios para construir sistemas multivariables (MIMO: Multi-input-Multi-Output) a partir de componentes más simples. Es preciso poder hacer la representación de estas conexiones en Julia, si vamos a usarlas en los problemas de diseño.

##### Conexión en cascada —serie—

Cuando la salida de un sistema sirve como entrada a otro, tenemos una conexión en **cascada**. En este caso, si la conexión es como se muestra en la figura 1.1,

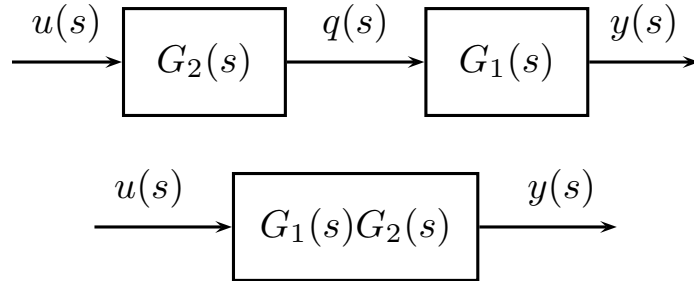


Figura 1.1: Conexión en cascada

$$y(s) = G_1(s)q(s), \quad q(s) = G_2(s)u(s)$$

entonces,

$$y(s) = G_1(s)q(s) = G_1(s)G_2(s)u(s) = G_{eq}u(s)$$

El vector de variables de estado resultante comprende la unión de los estados de los dos subsistemas.

En Julia, basta multiplicar los objetos (funciones de transferencia o variables de estado). No hay que olvidar cancelar los polos y ceros correspondientes, si es posible. Para ello, usamos la función `minreal`.<sup>1</sup>

---

```

1 using ControlSystemsBase
2 # ssrand(ni, no, ns) genera un sistema con
3 # parámetros aleatorios,
4 #   ni entradas,
5 #   no salidas,
6 #   ns estados
7 G_1 = ssrand(1, 1, 3, proper=true, stable=true)
8 G_2 = ssrand(1, 1, 2, proper=true, stable=true)
9 G_eq = minreal(G_1 * G_2)

```

---

### Conexión en paralelo

Una de las conexiones más sencillas es la paralela en donde, las salidas de dos subsistemas con la misma entrada se suman para producir una salida. La figura siguiente ilustra el proceso en forma sencilla. De la figura 1.2,

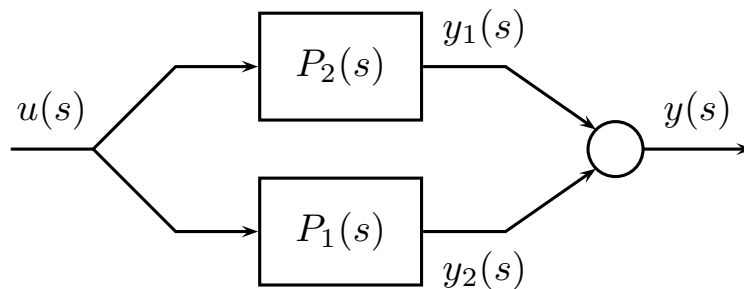


Figura 1.2: Conexión en paralelo

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s) = P_1(s)u(s) + P_2(s)u(s)$$

Por lo tanto,

$$y(s) = [P_1(s) + P_2(s)]u(s) = P_{eq}u(s)$$

En Julia, el modelo equivalente se obtiene, sencillamente, sumando las funciones de transferencia.

---

<sup>1</sup>`minreal` debería usarse prácticamente después de cualquier operación que involucre sumas o productos de funciones de transferencia.

---

```

1 using ControlSystemsBase
2 # ssrand(ni, no, ns) genera un sistema con
3 # parámetros aleatorios y
4 #   ni entradas,
5 #   no salidas,
6 #   ns estados
7 P_1 = ssrand(1, 1, 3, proper=true, stable=true)
8 P_2 = ssrand(1, 1, 2, proper=true, stable=true)
9 P_eq = minreal(P_1 + P_2)

```

---

### Realimentación —feedback—

La última conexión básica es la de realimentación (o retroalimentación, si se quiere). Esta configuración se representa en la figura siguiente. A partir de las relaciones implícitas en la figura 1.3,

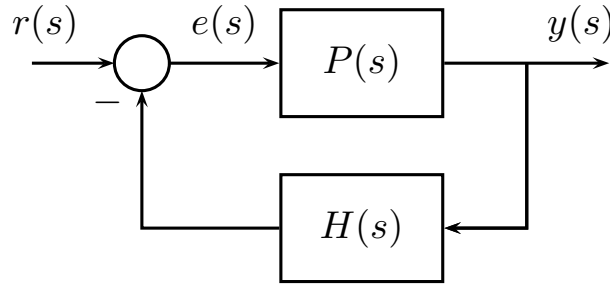


Figura 1.3: Conexión de realimentación

$$\begin{aligned}
 e(s) &= r(s) - H(s)y(s) \\
 y(s) &= P(s)e(s) \\
 &= P(s)[r(s) - H(s)y(s)]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[1 + P(s)H(s)]y(s) = P(s)r(s)$$

entonces,

$$y(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)H(s)}r(s) = G_{eq}r(s) \quad (1.3)$$

En Julia, existe la función `feedback` que calcula el equivalente del lazo de realimentación. La configuración (bastante común en la práctica) de realimentación unitaria, cuando  $H = 1$ , se obtiene omitiendo el segundo argumento.

---

```

1 using ControlSystemsBase
2 P = ssrand(1, 1, 3, proper=true, stable=true)
3 H = ssrand(1, 1, 2, proper=true, stable=true)
4 P_eq = feedback(P, H)
5 P_eq = minreal(P_eq)
6 # Cuando no se especifica el sistema H, se supone
7 # realimentación unitaria (H = 1)
8 P_ru = feedback(P)

```

---

## 1.5. Simulación de sistemas lineales en Julia

Para obtener la respuesta en tiempo de un sistema lineal, descrito por ecuaciones de estado o funciones de transferencia, ante entradas estándar, existen dos funciones:

1. **step**: Para simular la respuesta ante una señal tipo escalón unitario; es decir,

$$u_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

2. **impulse**: Simula la respuesta ante un impulso unitario  $\delta_o(t)$ ; una función delta de Dirac, en  $t = 0$ .

### Respuesta a un escalón

Existen dos funciones principales asociadas con la respuesta a un escalón de un sistema lineal: **step()** que simula la respuesta al escalón unitario y **stepinfo()**, la cual usa los resultados de la simulación para evaluar las características de la respuesta que se suelen usar en aplicaciones de control. Es necesario agregar aquí que la simulación siempre se hace para un sistema modelado por variables de estado. Cuando la entrada es una función de transferencia, siempre lo primero que se hace es transformarla a un modelo de estado. Es por eso que una de las salidas del proceso es el vector  $x$  de variables de estado.

**step()**

La instrucción básica es:

---

```

1 r_escalon = step(P, Tfinal)
2 y, t, x = step(P, Tfinal)

```

---

donde **r\_escalon** es una estructura que contiene todos los resultados de la simulación: esta estructura se puede graficar directamente; **Tfinal** es la duración

de la simulación. En la segunda forma, `r_escalon` se descompone en las series correspondientes.

**Ejemplo 1.9.** Para calcular la respuesta al escalón de

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 3.6704s + 2.2361}$$

usamos:

---

```
1 P = tf([1],[1, 3.6704, 2.2361])
2 r_escalon = step(P)
3 plot(r_escalon)
```

---

`stepinfo()`

La función `stepinfo()` utiliza la estructura `r_escalon` generada por la función `step()` para evaluar características de la respuesta. El resultado es una estructura tipo `StepInfo`, que puede ser graficada usando `plot()`. Algunas de las características calculadas por esta función son:

- `y0`: El valor inicial de la respuesta al escalón.
- `yf`: El valor final de la respuesta al escalón.
- `stepsize`: El tamaño del escalón.
- `peak`: El valor pico de la respuesta al escalón.
- `peakttime`: El momento en el que se produce el pico.
- `overshoot`: El sobrepico de la respuesta al escalón.
- `settlingtime`: El momento en el que la respuesta al escalón se ha estabilizado dentro de una franja del valor final. `settling_th` del valor final.
- `risetime`: El momento en el que la respuesta aumenta desde umbral `risetime_th[1]` hasta `risetime_th[2]` del valor final. Suele ser entre 10 % y 90 %.

**Ejemplo 1.10.** Queremos obtener la respuesta a un escalón del sistema

$$P = \frac{1}{s^2 + 3.6704s + 2.2361}$$

para ello, usamos las siguientes instrucciones en Julia:

---

```

1 P = tf([1],[1, 3.6704, 2.2361])
2 r_escalon = step(P)
3 escinfo = stepinfo(r_escalon)
4 plot(escinfo, legend=:bottomright)

```

---

El resultado se muestra en la figura 1.6.

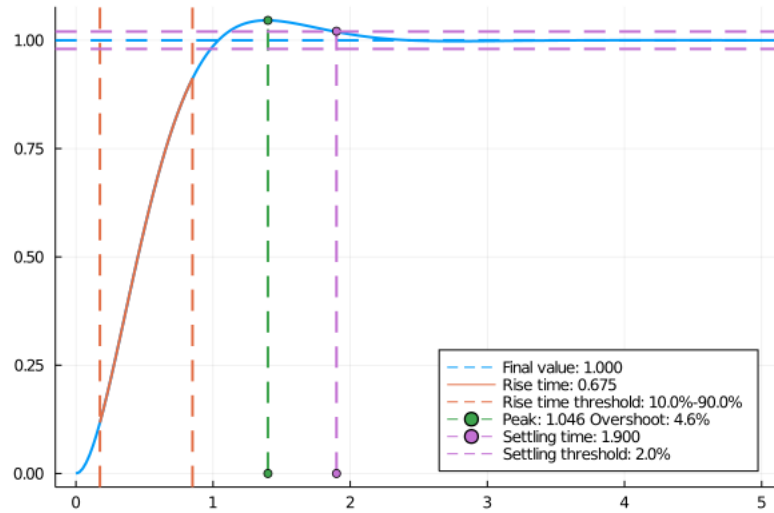


Figura 1.4: Respuesta a un escalón

Un resultado interesante que permite esta simulación ocurre cuando se define una arreglo de varias funciones de transferencia. Entonces, es posible simular la respuesta de cada una de ellas en una sola instrucción. Vamos a ilustrar esta característica con un ejemplo.

**Ejemplo 1.11.** Queremos estudiar la respuesta a un escalón de un conjunto de funciones de transferencia, dado por

$$F_{\omega_o}(s) = \frac{\omega_o}{s^2 + 1.4\omega_o s + \omega_o^2}, \text{ para } \omega_o \in \{2, 3, 4, 5\}$$

La simulación se realiza por medio del segmento:

---

```

1 w0 = 2
2 s = tf("s")
3 FTs = TransferFunction[w0^2/(s^2 + 1.4* w0 * s + w0^2) for w0 = [2, 3,
  ↪ 4, 5]]
4 plot(step.(FTs,5), label=["w0 = 2" "w0 = 3" "w0 = 4" "w0 = 5"
  ↪ ], legend=:bottomright)

```

---

el resultado es una figura que contiene la respuesta al escalón de cada uno de los sistemas incluidos en el arreglo. La respuesta se puede observar en la figura

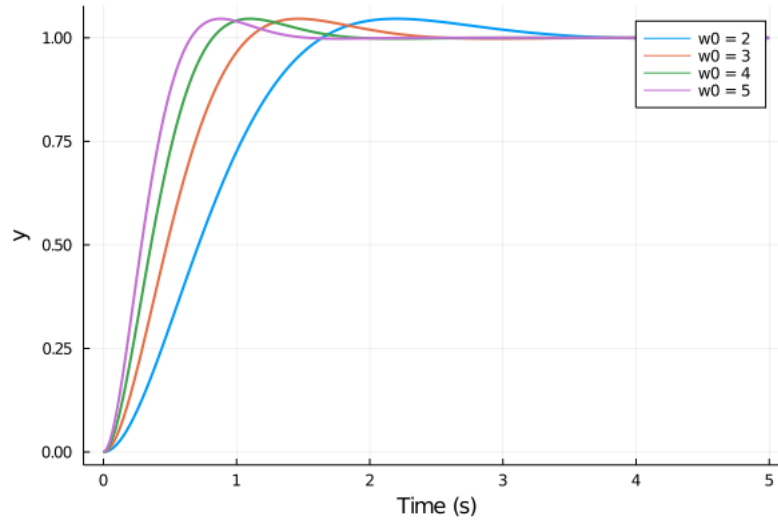


Figura 1.5: Respuesta a un escalón

### Respuesta a un impulso

Como sabemos, la respuesta a un impulso constituye la descripción básica de un sistema lineal en el dominio del tiempo. La respuesta al impulso es la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia. En Julia, usamos la función `impulse()` para simular la respuesta al impulso. La forma básica se ilustra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.12.** Vamos a simular la respuesta al impulso de la función de transferencia

$$P = \frac{5}{s^3 + 2.9925s + 6.2866s + 5}$$

para ello, usamos las siguientes instrucciones en Julia:

---

```

1 P = tf([5],[1, 2.9925, 6.2866, 5])
2 plot(impulse(P))

```

---

El resultado se muestra en la figura 1.6.



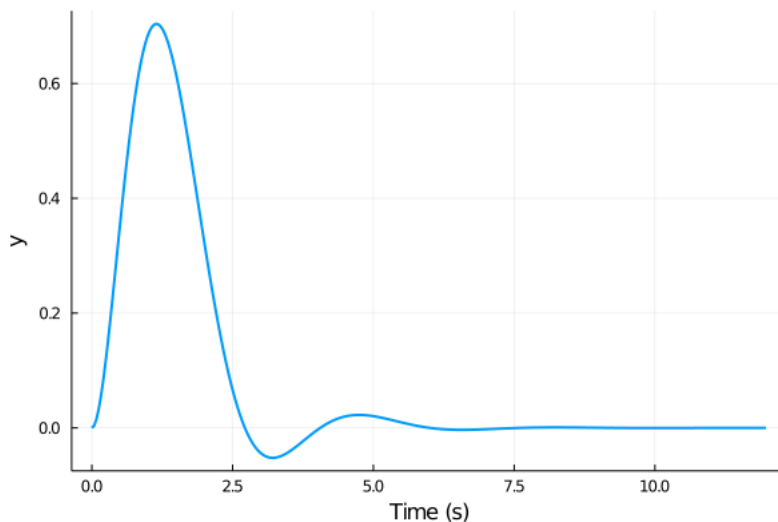


Figura 1.6: Respuesta a un impulso

### Respuesta a entradas arbitrarias — `lsim`

El método `lsim()` permite simular sistemas lineales, descritos por ecuaciones de estado, ante entradas de forma arbitraria. Solamente vamos a ver aquí un caso simple. En capítulos posteriores, veremos casos más detallados.

La entrada al sistema se define por medio de una función que depende del tiempo y del estado del sistema. Para cada tiempo  $t$ , se debe poder calcular

$$u(x, t) = f(x, t)$$

Para ilustrar el proceso, en el siguiente ejemplo definiremos una función que es una rampa que se aplanan en determinado momento.

**Ejemplo 1.13.** *Vamos a simular la respuesta del sistema*

$$T(s) = \frac{21.6s + 16}{s^4 + 4.2s^3 + 13.6s^2 + 21.6s + 16}$$

ante una entrada que es una rampa de pendiente 0.1 que en  $t = 5$  se vuelve constante. Es decir,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0.1t & 0 \leq t \leq 5 \\ 0.5 & t \geq 5 \end{cases}$$

La especificación, en Julia, de la simulación se muestra en el siguiente segmento de código.

---

```

1 T1 = tf([21.6, 16], [1, 4.22, 13.6, 21.6, 16])
2 sys = ss(T1)
3 x0 = [0, 0, 0, 0] # condición inicial cero
4 t = 0:0.1:15 # vector de tiempos para la simulación
5 u_ramp = (x,t)->[0.1t] .- [0.1*(t-5)] .* (t>5) # rampa termina en t = 5
6 y, t, x, uout = lsim(sys,u_ramp,t,x0=x0) # Simulación
7 plot(t,y', lab="Posición_1", xlabel="Time [s]",legend=:bottomright)
8 ramp = 0.1.*collect(t) .- 0.1.*(collect(t) .- 5) .* (collect(t) .> 5) #
  ↪ Para graficar la entrada
9 plot!(t,ramp, lab="Referencia", l=(black, :dash, 0.5)) # agrega la
  ↪ entrada al gráfico

```

---

Los resultados se muestran en la figura 1.7.

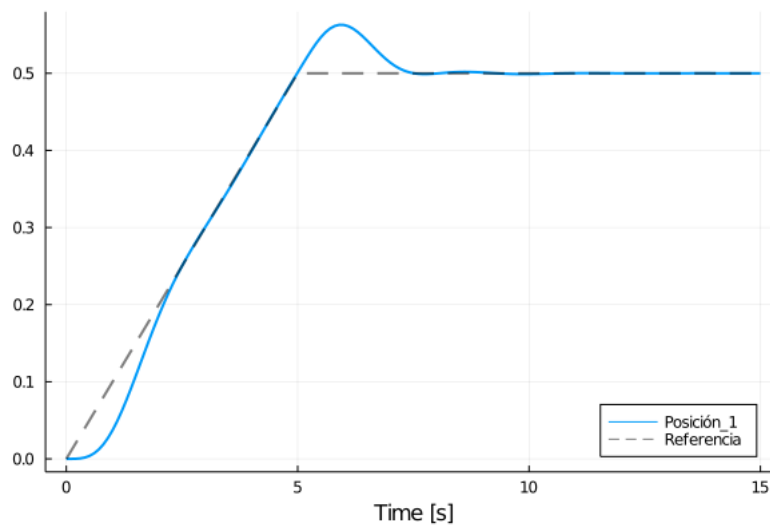


Figura 1.7: Respuesta a una rampa

## Capítulo 2

# Efectos de la realimentación

La característica básica para el control de cualquier proceso es la habilidad de tomar decisiones con base en la respuesta real del sistema. Esta operación, que consiste en comparar la respuesta del proceso con la respuesta deseada, se conoce, en la jerga del control, como *Realimentación*. Se trata de la traducción de la palabra inglesa “feedback.”<sup>1</sup>

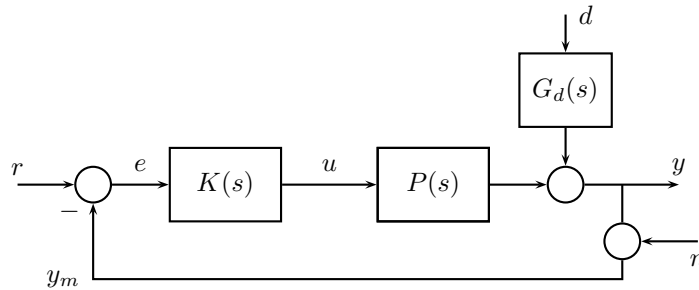


Figura 2.1: Control con realimentación

La figura 2.1 ilustra el principio de la realimentación. Allí,  $r$  representa una señal de referencia; la respuesta del proceso ante una señal de entrada  $u$  (la cual denominamos *Variable manipulada* o algunas veces *control*) es  $y$  (la cual llamaremos *Variable controlada*);  $d$  representa una perturbación externa que afecta la respuesta del proceso. La función de transferencia  $P(s)$  modela la relación entrada/salida (E/S) del proceso controlado,  $G_d$  representa el efecto de la perturbación sobre la salida. La variable controlada o salida  $y$  se mide por medio de algún aparato apropiado. Sin embargo la medición  $y_m$  no es

---

<sup>1</sup>Esta palabra en el lenguaje normal se traduce como *retroalimentación*. En la literatura de control y automatización, por alguna razón (probablemente pura comodidad), no se usa mucho esta traducción.

perfecta sino que difiere del valor real en una diferencia, la cual denominaremos *Ruido de medición*. Este “ruido” puede deberse a muchos factores, ya sean imperfecciones o descalibraciones en los instrumentos de medida, efectos de conversiones análogo/digital o digital/análogo o el efecto de ruido real en los equipos de transmisión o transducción; todos estos efectos los reuniremos en una sola variable que hemos denominado *ruido de medición*,  $n$ .

La variable medida  $y_m$  se compara con el valor de referencia  $r$ , como se muestra en la figura. Con base en esta comparación el *Controlador*, descrito por la función de transferencia  $K(s)$  produce un valor de  $u$  que debe tratar de reducir el error  $e$ . A este esquema de control se le conoce como *Control de lazo cerrado*. El objetivo de este capítulo es analizar las propiedades de los sistemas de lazo cerrado.

En este capítulo nos limitaremos a sistemas como el de la figura 2.1, denominado de *Realimentación unitaria*. Posteriormente analizaremos estructuras más complejas. Las conclusiones de nuestro análisis son lo suficientemente generales como para aplicarse en dichas configuraciones.

## 2.1. Sistemas bien planteados

Una vez más estudiemos el sistema con realimentación, mostrado en la figura 2.2. Observando el diagrama se ve que

$$PK(r - y) = y \quad \Rightarrow \quad (1 + PK)y = PKr$$

Para que este sistema sea capaz de operar, se requiere que exista solución  $y$  de esta ecuación para cualquier señal de entrada  $u$ . Esto se puede garantizar si  $1 + P(s)K(s)$  no es idénticamente cero. En ese caso, se puede obtener,

$$y = \frac{PK}{1 + PK}u$$

Si no se cumple la condición, el sistema no puede operar.

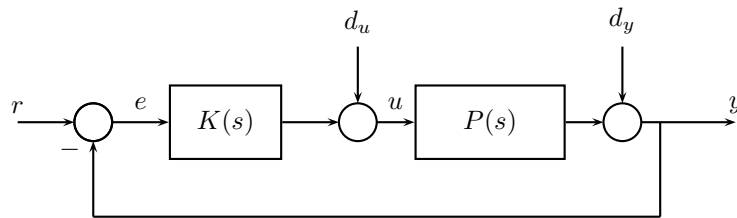


Figura 2.2: Sistema de ejemplo

Decimos que el sistema está *bien planteado* (abreviado BP) si  $1 + P(s)K(s)$  no es idénticamente cero. Por lo tanto, es necesario encontrar las condiciones que garanticen que el sistema es BP. El siguiente teorema presenta tales condiciones.

**Teorema 1.** *El sistema de lazo cerrado mostrado en la figura 2.2 es BP si y sólo si,*

$$1 + P(\infty)K(\infty) \neq 0 \quad (2.1)$$

□

Consideremos realizaciones en variables de estado para  $P$  y  $K$ :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t); \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\dot{x}_K = A_K x_K(t) + B_K e(t); \quad u(t) = C_K x_K(t) + D_K e(t)$$

El sistema de lazo cerrado es BP si y sólo si este sistema tiene soluciones para cualquier  $r$ , tales que  $e = r - y$ . Combinando las dos ecuaciones de salida,

$$u(t) = C_K x_K(t) - D_K y(t) + D_K r(t) \quad (2.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.3)$$

las cuales se pueden combinar como:

$$\begin{bmatrix} 1 & D_K \\ -D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_K \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_K \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.4)$$

Esta ecuación muestra que es posible encontrar valores únicos de  $u(t)$  e  $y(t)$  para cualesquiera  $x(t)$ ,  $x_K(t)$  y  $r(t)$  si y sólo si

$$1 + P(\infty)K(\infty) = 1 + DD_K \neq 0$$

puesto que  $P(\infty) = D$  y  $K(\infty) = D_K$ .

### Funciones de transferencia propias

**Definición 1.** Una función de transferencia  $F = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$  es *propia* si se cumple  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = a < \infty$ . Es fácil ver que esto es equivalente a<sup>2</sup>:

$$\partial N(s) \leq \partial D(s)$$

$F$  es *estrictamente propia* si  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ , lo cual es equivalente a

$$\partial N(s) < \partial D(s)$$

$F$  es *impropia* si  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \infty$ , lo cual es equivalente a

$$\partial N(s) > \partial D(s)$$

---

<sup>2</sup>Usaremos el símbolo  $\partial N(s)$  para denotar el grado del polinomio  $N(s)$ .

Las funciones de transferencia impropias no pueden realizarse físicamente (no existe una realización en variables de estado). Por esta razón exigiremos que todas las funciones de transferencia en nuestro desarrollo sean propias.

Si fuera posible realizar una función de transferencia impropia, ésta tendría características de diferenciador, puesto que si  $\partial N = n$  y  $\partial D = m$ , entonces

$$F(s) = s^{m-n} + \dots + F_p(s)$$

donde  $F_p(s)$  es propia. Por lo tanto, amplificaría las señales de alta frecuencia con ganancia proporcional a su frecuencia. Afortunadamente, todos los sistemas físicos tienen características tipo *pasa-bajos*.

### Sistemas propios y bien planteados

Veamos qué relación existe entre los sistemas BP y las funciones de transferencia propias. Nótese que si las funciones de transferencia de  $P$  y  $K$  son propias, entonces, sus productos también lo son. Además, si  $1 + P(\infty)K(\infty) \neq 0$ , entonces,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{PK}{1 + PK} < \infty$$

Por lo tanto, un sistema BP tiene una función de transferencia propia. En realidad, por la fórmula de Mason, cualquier función de transferencia es propia si se cumple la condición 2.1. Por lo tanto, un sistema es BP si y sólo si cualquier función de transferencia posible, **de lazo cerrado**, es propia.

Nótese que un sistema de lazo cerrado puede no ser BP, aunque todas las funciones de transferencia sean propias, como lo muestra el siguiente ejemplo. Naturalmente, si alguna de las funciones es estrictamente propia, el sistema de lazo cerrado es automáticamente BP.

**Ejemplo 2.1.** El sistema de la figura 2.3 tiene  $1 + P(\infty)K(\infty) = 0$  aunque todas las funciones de transferencia de sus componentes son propias. En efecto,

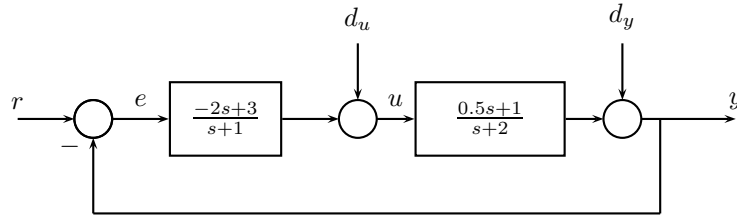


Figura 2.3: Sistema no BP

$1 + P(\infty)K(\infty) = 1 + 0.5(-2) = 0$ . Esto se comprueba cuando calculamos la

función de transferencia de lazo cerrado,

$$T(s) = \frac{\frac{-2s+3}{s+1} \frac{0.5s+1}{s+2}}{1 + \frac{-2s+3}{s+1} \frac{0.5s+1}{s+2}} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}s$$

Obtenemos una función impropia, con características de diferenciador.

## 2.2. Ecuaciones básicas de la realimentación

En la figura 2.1 se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - y_m(s) = r(s) - y(s) - n(s) \\ u(s) &= K(s)e(s) \\ y(s) &= P(s)u(s) + G_d(s)d(s) \end{aligned}$$

a partir de las cuales se obtiene,

$$e(s) = r(s) - P(s)K(s)e(s) - n(s) - G_d(s)d(s)$$

factorizando,

$$[1 + P(s)K(s)] e(s) = r(s) - n(s) - G_d(s)d(s) \quad (2.5)$$

Si  $1 + P(s)K(s) \neq 0$  entonces,

$$e(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} [r(s) - n(s) - G_d(s)d(s)] \quad (2.6)$$

Además, de

$$u(s) = K(s) e(s) = K(s)(r(s) - n(s) - y(s))$$

por lo tanto,

$$y(s) = P(s)K(s) (r(s) - n(s) - y(s)) + G_d(s) d(s)$$

y

$$(1 + P(s)K(s)) y(s) = P(s)K(s) (r(s) - n(s)) + G_d(s) d(s)$$

Luego,

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} [r(s) - n(s)] + \frac{1}{1 + P(s)K(s)} G_d(s) d(s) \quad (2.7)$$

Guiados por estas ecuaciones vamos a definir las siguientes funciones de transferencia:

$$L(s) := P(s)K(s), \quad \text{Función de transferencia del lazo.} \quad (2.8)$$

$$S(s) := \frac{1}{1 + L(s)}, \quad \text{Función de transferencia de sensibilidad.} \quad (2.9)$$

$$T(s) := L(s)S(s), \quad \text{Función de sensibilidad complementaria.} \quad (2.10)$$

Usando las definiciones anteriores se pueden escribir las ecuaciones 2.6 y 2.7 como:

$$e(s) = S(s) [r(s) - n(s) - G_d(s)d(s)] \quad (2.11)$$

$$y(s) = T(s) [r(s) - n(s)] + S(s) G_d(s) d(s) \quad (2.12)$$

Las funciones de transferencia  $S(s)$  y  $T(s)$  que hemos definido tienen una propiedad fundamental:

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + L(s)} + \frac{L(s)}{1 + L(s)} = 1 \quad (2.13)$$

lo cual explica el nombre dado a  $T$ .

Hay que notar que la variable que hemos llamado  $e$  no es la diferencia entre la salida y la referencia ( $r - y$ ) sino entre la salida medida y la referencia ( $r - y - n$ ). Definamos el *Error de seguimiento real*  $\epsilon := r - y$ . Usando esta definición, es fácil probar que

$$\epsilon(s) = S(s) [r(s) - G_d(s)d(s)] - T(s)n(s) \quad (2.14)$$

Por supuesto, cuando no hay ruido, los dos errores coinciden.

Esta ecuación ilustra el problema fundamental del control: Queremos hacer que el error real  $\epsilon$  sea tan pequeño como sea posible. Para ello, trataremos de hacer que la función de sensibilidad  $S(s)$  sea pequeña de modo que el proceso no se vea afectado por cambios en la referencia o por las perturbaciones. Sin embargo, por la propiedad fundamental 2.13, si  $|S(s)| \ll 1$ , entonces  $|T(s)| \approx 1$ , lo cual implica que el efecto del ruido no se atenúa en lo más mínimo.

En realidad, el problema no es tan complejo debido a las características de las señales. Por lo general, la referencia y las perturbaciones suelen ser señales de baja frecuencia, muchas veces constantes o rampas. En cambio el ruido es, generalmente, de alta frecuencia. Posteriormente, veremos que el efecto del ruido se puede reducir mediante una adecuada atenuación a las frecuencias en las cuales éste es significativo, sin afectar en forma notoria la respuesta ante perturbaciones y referencias.

La ecuación 2.14 también permite considerar la principal característica de la realimentación. Supongamos la respuesta del sistema a una frecuencia determinada  $\omega$ :

$$\epsilon(j\omega) = S(j\omega) [r(j\omega) - G_d(j\omega)d(j\omega)] - T(j\omega)n(j\omega)$$

La cual justifica, hasta cierto punto el nombre de *Función de sensibilidad* dado a  $S$ . En realidad la definición surgió de la siguiente propiedad: Si consideramos a  $T(j\omega)$  como función de  $L(j\omega)$ , entonces,

$$\frac{dT(j\omega)}{dL(j\omega)} = \frac{1}{(1 + L(j\omega))^2}$$



entonces, la variación porcentual es

$$\frac{dT(j\omega)/T(j\omega)}{dL(j\omega)/L(j\omega)} = \frac{dT(j\omega)L(j\omega)}{dL(j\omega)T(j\omega)} = \frac{1}{1+L(j\omega)} = S(j\omega)$$

Es decir, que  $S$  representa la sensibilidad de la función de transferencia, a cualquier frecuencia, con respecto a la variación de los parámetros de lazo abierto (ya sean de la planta  $P$  o del controlador  $K$ ). Esto también significa que si la ganancia del lazo  $|L(j\omega)|$  es alta a una frecuencia dada, el sistema se vuelve insensible a los parámetros de la planta<sup>3</sup>.

Si la ganancia  $|L(j\omega)|$  es alta entonces,

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \approx \frac{1}{|L(j\omega)|} \ll 1$$

### Propiedad de inversión

Analicemos el sistema sin perturbación. Ahora estamos interesados en estudiar la función de transferencia que relaciona la señal de referencia  $r$  con el control  $u$ .

$$G_{ur}(s) := \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{K(s)}{1+K(s)P(s)}$$

Si la ganancia del controlador es grande ( $|K(j\omega)| \gg 1$ ), entonces,  $1+K(s)P(s) \approx K(s)P(s)$ , por lo tanto,

$$G_{ur}(s) = \frac{u(s)}{r(s)} \approx \frac{1}{P(s)} = P^{-1}(s)$$

Entonces, el efecto de la realimentación con ganancia grande es el de producir una señal de control que representa, aproximadamente, el efecto de la función de transferencia  $P^{-1}(s)$  sobre  $r$ .

$$u(s) \approx \frac{1}{P(s)}r(s) = P^{-1}(s)r(s) \quad (2.15)$$

### Comportamiento asintótico

Para terminar esta sección notemos que, debido a consideraciones físicas, todos los sistemas reales tienen comportamientos *pasabajos*, es decir que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L(j\omega)| = 0,$$

por lo cual,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S(j\omega)| = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |T(j\omega)| = 0$$

y, normalmente para satisfacer requisitos de operación, se busca que a bajas frecuencias  $|L(j\omega)| \gg 1$ , luego,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |S(j\omega)| \approx 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |T(j\omega)| \approx 1$$

---

<sup>3</sup>Este es el famoso *Teorema de Black*, la base de todos los circuitos análogos modernos basados en amplificadores operacionales: Si la ganancia del amplificador es alta, la ganancia del circuito con realimentación es independiente de dicha ganancia.

### 2.3. Efecto sobre polos y ceros

Hemos visto que los polos del sistema de lazo cerrado determinan su estabilidad; también sabemos que los ceros pueden modificar la respuesta de un sistema y más adelante veremos que los ceros en el SPD tienen implicaciones importantes para el diseño. Por ello, queremos analizar el efecto de la realimentación sobre los polos y los ceros.

Supongamos que las funciones de transferencia están dadas por funciones racionales propias:

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}, \quad K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)}$$

donde los polinomios  $n_P$  y  $d_P$  son coprimos<sup>4</sup>; similarmente,  $n_K$  y  $d_K$  son coprimos. Entonces,

$$L(s) = \frac{n_L(s)}{d_L(s)} = P(s)K(s) = \frac{n_P(s)n_K(s)}{d_P(s)d_K(s)}$$

Los polos de  $L$ , llamados *Polos de lazo abierto*, son las raíces de  $d_L$ , las cuales corresponden a la unión de los polos de  $P$  y de  $K$ , a menos que algún polo de  $P$  se cancele con un cero de  $K$  o viceversa. Los *Ceros de lazo abierto* son los ceros de  $n_L$ , los cuales también son la unión de los ceros de  $P$  y  $K$ , a menos que haya una cancelación polo-cero.

Con estas expresiones,

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{n_L(s)}{d_L(s)}} = \frac{d_L(s)}{d_L(s) + n_L(s)}$$

y

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{n_L(s)}{d_L(s)}}{1 + \frac{n_L(s)}{d_L(s)}} = \frac{n_L(s)}{d_L(s) + n_L(s)}$$

Observando estas expresiones, se puede concluir lo siguiente

1. Los polos de  $T$  y de  $S$  son iguales. Son las raíces del polinomio  $d_L(s) + n_L(s)$ . Los llamaremos *Polos de lazo cerrado*. Éstos son diferentes de los polos de lazo abierto. La realimentación tiene el efecto de modificar los polos. De hecho, esta es una de las propiedades fundamentales: usando realimentación es posible estabilizar o desestabilizar un sistema.
2. Los ceros de  $T$  (denominados *Ceros de lazo cerrado*), son iguales a los ceros de lazo abierto. La realimentación no tiene efecto sobre los ceros. En realidad, si un diseño requiere modificar los ceros, es necesario usar cancelación polo-cero<sup>5</sup>. Esta propiedad va a ser fundamental para determinar las respuestas que son posibles usando control con realimentación.

<sup>4</sup>No tienen factores comunes, o éstos han sido cancelados.

<sup>5</sup>Esto trae sus propios problemas, como veremos en el capítulo 3

3. Los ceros de  $S$  son los polos de lazo abierto. Esto tiene algunas implicaciones para la respuesta del error, especialmente en sistemas que son inestables en lazo abierto.

Por último, consideremos la siguiente definición:

**Definición 2** (Grado relativo). *Dada una función racional*

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$$

*se define su grado relativo como*

$$g.r.G(s) := \partial d_G - \partial n_G$$

Se puede observar, a partir de las ecuaciones básicas, que la realimentación no cambia el grado relativo de  $L(s)$ . Es más, debido a que la función de transferencia del controlador debe ser propia, se puede probar fácilmente que

$$g.r.T(s) \geq g.r.P(s), \quad g.r.T(s) \geq g.r.K(s)$$

**Ejemplo 2.2.** *El sistema de la figura 2.4 usa un controlador tipo PI (Proporcional Integral):*

$$k \left[ 1 + \frac{1}{8s} \right] = k \frac{s + \frac{1}{8}}{s}$$

*y tiene polos de lazo abierto en 0, -1 y -0.25 y un cero en -0.125.*

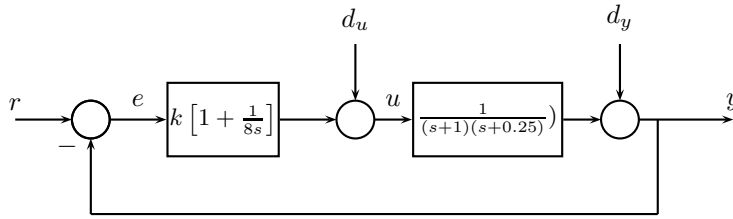


Figura 2.4: Sistema de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{k(8s + 1)}{8s^3 + 10s^2 + (8k + 2)s + k}$$

La cual tiene un cero de lazo cerrado en  $-1/8 = -0.125$ , tal como el sistema de lazo abierto, y polos que dependen del valor de  $k$ . Por ejemplo, para  $k = 1$ , los polos están en

$$\{s = -0.11128, -0.56936 \pm j0.89393\}$$

y para  $k = 0.5$ , los polos están en

$$\{s = -9.8120 \times 10^{-2}, -0.57594 \pm j0.55251\}$$

El grado relativo de  $T$  es 2, comparado con  $g.r.P(s) = 2$  y  $g.r.K(s) = 0$

## 2.4. Ejercicios

- 1.

## Capítulo 3

# Estabilidad

En este capítulo estudiaremos varias técnicas para evaluar la estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas dinámicos. En primer lugar, consideraremos dos métodos aplicables a sistemas lineales. A continuación, presentaremos el método de Lyapunov, el cual permite analizar la estabilidad de sistemas no lineales. En la última parte del capítulo se introduce el concepto de *Desigualdad Matricial*, una herramienta fundamental en la teoría moderna de control.

### 3.1. El “dogma” de estabilidad

Ningún sistema práctico puede funcionar a menos que sea **estable**. Por lo tanto, el primer requisito para todo diseño es su estabilidad. Existen varias definiciones alternativas del concepto de estabilidad. Por lo general, usaremos la llamada *E/S* (*Estabilidad Entrada/Salida*) o *BIBO* (*Bounded Input Bounded Output*).

**Definición 3** (Estabilidad Entrada/Salida). *Un sistema como el de la figura 3.1 se dice Estable E/S (o simplemente Estable, cuando el contexto es claro) si cualquier entrada acotada, produce una salida acotada:*

$$\max_t |u(t)| < \infty \Rightarrow \max_t |y(t)| < \infty$$

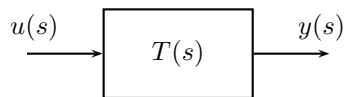


Figura 3.1: Sistema con entrada y salida

Usando los resultados de los capítulos anteriores, podemos formular el siguiente criterio de estabilidad:

**Teorema 2.** Sea un sistema lineal, descrito por la función de transferencia

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomios coprimos (sin factores comunes). Como sabemos, este sistema tiene un equilibrio estable <sup>1</sup> cuando los polos están en el semiplano izquierdo del plano complejo. <sup>2</sup>  $\square$

La ecuación característica, cuyas raíces determinan los polos es

$$D(s) = 0 \quad (3.2)$$

Un polinomio, cuyas raíces están todas en el SPI se denomina *polinomio Hurwitz*.

### 3.2. Criterio de Routh-Hurwitz

Los primeros estudios sobre la teoría general de estabilidad del equilibrio de sistemas lineales fueron realizados por J. C. Maxwell en 1868 y las primeras soluciones fueron obtenidas por Ch. Hermite en 1856. El inglés E. J. Routh, en 1877 publicó un algoritmo para hallar el número de raíces en el SPD. En 1895, A. Hurwitz creó un algoritmo, basado en el resultado de Hermite, para determinar el número de raíces en el SPD. Actualmente, se utiliza este método, basado en determinantes, con el nombre de **Routh-Hurwitz**.

**Criterio de Routh** Este criterio simplificado, permite descartar ciertos casos inestables con poco trabajo.

**Teorema 3.** El sistema con ecuación característica 3.2 es estable sólo si todos los coeficientes tienen el mismo signo.  $\square$

**Teorema de Routh-Hurwitz** Dado el polinomio característico

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad \text{con } a_n > 0$$

Se construye la tabla de Routh-Hurwitz (R-H),

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$	$a_2$	$a_0$	$\cdots$	$a_3$	$a_1$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$	$a_1$	0	$\cdots$	$a_2$	$a_0$
$s^{n-2}$	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	$b_{n-6}$	$\cdots$	Si $n$ par		Si $n$ impar		
$s^{n-3}$	$c_{n-3}$	$c_{n-5}$	$\cdots$						
$\vdots$									
$s^1$									
$s^0$									

<sup>1</sup>Abusando del lenguaje, diremos que *el sistema es estable*.

<sup>2</sup>Usaremos las abreviaturas **SPI**: Semiplano izquierdo y **SPD**: Semiplano Derecho.

donde la primera fila contiene los coeficientes de  $s^{n-2k}$  en orden descendente, la segunda fila contiene los de  $s^{n-2k-1}$  y las filas siguientes se calculan a partir de

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} & b_{n-i} &= \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-i} \\ a_{n-1} & a_{n-i-1} \end{vmatrix} \\ c_{n-3} &= \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} & b_{n-j} &= \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j} \\ b_{n-2} & a_{n-j-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Los demás elementos de la fila se calculan manteniendo la primera columna. Las otras filas se calculan en forma análoga.

**Teorema 4.** *El sistema  $G(s)$  es estable si y sólo si todos los elementos de la primera columna son mayores que cero. Además, el número de raíces en SPD es igual al número de cambios de signo en la primera columna*

La demostración del teorema se puede hallar en [Gan60] o [Mei95, HDB98].

□

**Ejemplo 3.1.** Consideremos el sistema dado por

$$T(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$$

Usando el criterio de Routh se puede ver que este sistema es inestable, por el coeficiente negativo en  $D(s)$ . Para verificar esto, formamos la tabla R-H:

$$\begin{array}{c} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ \frac{-1}{2}(1+2) & 0 \\ \frac{-1}{1.5}(0+1.5) & 0 \end{array} \right. = \begin{array}{c} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1.5 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right.$$

puesto que hay un cambio de signo en la primera columna, hay un polo en SPD. En efecto, factorizando el polinomio,

$$s^3 + 2s^2 - s + 1 = (s-1)(s+1)(s+2)$$

**Ejemplo 3.2.** Veamos las condiciones de estabilidad del sistema de segundo orden con

$$D(s) = s^2 + a_1s + a_0$$

La tabla de R-H para este caso es:

$$\begin{array}{c} s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & a_0 \\ a_1 & 0 \\ \frac{-1}{a_1}(0 - a_1a_0) & 0 \end{array} \right. = \begin{array}{c} s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & a_0 \\ a_1 & 0 \\ a_0 & 0 \end{array} \right.$$

lo cual muestra que el sistema de segundo orden es estable si y sólo si  $a_1 > 0$  y  $a_0 > 0$

El criterio de Routh-Hurwitz se puede aplicar para estudiar el efecto de los parámetros del controlador sobre la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

**Ejemplo 3.3.** Consideremos el sistema mostrado en la siguiente figura: Pa-

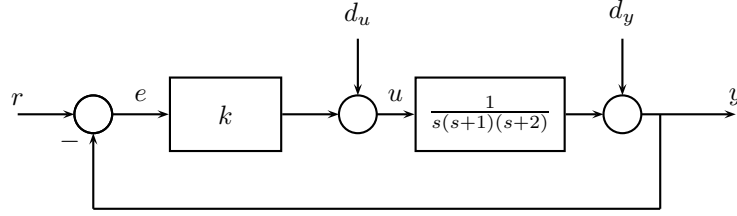


Figura 3.2: Sistema de ejemplo

ra evaluar la estabilidad del sistema de lazo cerrado, hallemos la función de transferencia

$$T(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s + k}$$

de donde se encuentra la tabla R-H

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & \frac{6-k}{3} & 0 \\ s^0 & k & 0 \end{array}$$

El sistema es estable si la primera columna es positiva, lo cual se cumple si  $k > 0$  y  $k < 6$ .

**Ejemplo 3.4.** Generalizando el ejemplo anterior, si

$$D(s) = k + (1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)$$

a partir del criterio R-H, este sistema es estable si

$$(T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3)(T_1 + T_2 + T_3) > (k + 1)T_1T_2T_3$$

lo cual se puede simplificar, definiendo  $\tau_2 = T_2/T_1$  y  $\tau_3 = T_3/T_1$  como:

$$k < (1 + \tau_2 + \tau_3) \left( 1 + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) - 1$$

### 3.3. Criterio de Nyquist

El criterio de Nyquist fue desarrollado por H. Nyquist en 1932. Se basa en la respuesta de frecuencia de lazo abierto. Tiene la ventaja de que se puede usar con datos experimentales sin necesidad de obtener un modelo matemático de la planta.



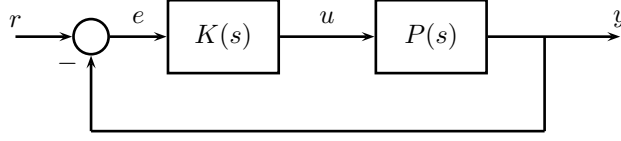


Figura 3.3: Sistema de control elemental

### Principio del argumento

El criterio de Nyquist se basa en un corolario del Teorema de Cauchy-Goursat en análisis complejo: el llamado *principio del argumento*, el cual se puede expresar de la forma siguiente:

**Principio del argumento** Sea  $G(s)$  una función meromorfa (analítica, excepto en un número finito de polos) en una región  $R$  encerrada por una curva cerrada, simple,  $\gamma$ .  $G$  no tiene ceros ni polos en  $\gamma$ . Si  $G$  tiene  $n_R$  polos y  $m_R$  ceros en el interior de  $R$ , entonces,

$$2\pi j(n_R - m_R) = \oint_{\gamma} \frac{G'(z)}{G(z)} dz = j \oint_{\gamma} d \arg(G(z))$$

Lo cual significa que por cada vuelta que se da alrededor de  $\gamma$  el argumento de  $G$  cambia en  $2\pi(n_R - m_R)$ . Eso significa que la imagen de  $\gamma$  bajo la función  $G$  da  $n_R - m_R$  vueltas alrededor del origen, en la misma dirección de  $\gamma$ .

La demostración del teorema se puede ver en [Lan85] o [MA66].

### Teorema de Nyquist

Consideremos el sistema representado en la figura 3.3. Para este sistema,

$$T(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)}$$

y la ecuación característica se obtiene igualando el denominador a cero:

$$F(s) := 1 + K(s)P(s) = 1 + L(s) = 0$$

Los polos de lazo cerrado son los ceros de la función  $F$  definida arriba. Los polos de  $F$  son, como se puede verificar fácilmente, los polos de  $L(s) = K(s)P(s)$ ; es decir, los polos de lazo abierto.

Observemos que la función  $F$  permite analizar la estabilidad del sistema de lazo cerrado. Queremos determinar cuántos ceros tiene  $F$  en el SPD. Aquí es donde entra en juego el principio del argumento.

Para emplear el principio del argumento al análisis de estabilidad de un sistema de control, debemos recordar que estamos interesados en saber si existen polos de lazo cerrado, es decir, ceros de  $F(s)$  en el SPD. Por lo tanto, debemos encontrar una curva que encierre todos esos puntos. Nyquist ideó la curva de la figura 3.4: El semicírculo, de radio  $R$  se puede hacer tan grande como se desee

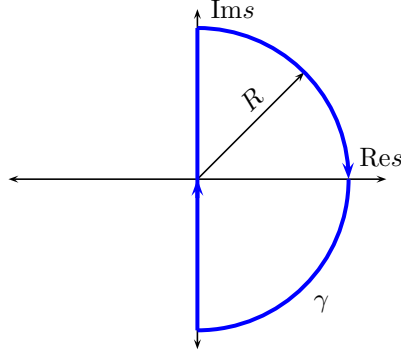


Figura 3.4: Curva de Nyquist

si dejamos que  $R$  crezca sin límite. Por lo tanto, usando esta curva  $\gamma$  como contorno de integración, podemos hallar la variación total del argumento en esa curva. De acuerdo con el principio del argumento, esa variación, para  $F$ , está dada por

$$2\pi(n - m) = \oint_{\gamma} d \arg(F(z))$$

El número de vueltas que la imagen de  $F(s)$  da alrededor del origen se puede determinar construyendo la curva imagen de  $\gamma$

$$\mathcal{N} = \{F(z) | z \in \gamma\}$$

Esta curva se denomina *diagrama de Nyquist de  $F$* .

Puesto que el número de vueltas se puede determinar gráficamente, entonces se puede hallar  $n - m$ . Por otra parte, el número de polos  $n$  de  $F$  en el SPD es conocido, porque éstos son los polos, inestables, de lazo abierto. Por lo tanto, si el número de vueltas es  $V$ , el número de polos de lazo cerrado en SPD es

$$n = V + m$$

Y, para que el sistema de lazo cerrado sea estable ( $m = 0$  —el denominador  $F(s) = 1 + L(s)$  no tiene ceros en SPD), se requiere entonces que

$$V = -n$$

es decir, que el número de vueltas alrededor del origen debe ser igual al número de polos inestables de lazo abierto, pero las vueltas deben darse en sentido

contrario a la curva  $\gamma$ . Es decir, en sentido antihorario si la curva  $\gamma$  se recorre como se muestra en la figura.

Para simplificar aún más el proceso se puede observar que  $F(s) = 1 + L(s)$  da  $k$  vueltas alrededor de 0, si y sólo si,  $L(s)$  da las mismas  $k$  vueltas pero alrededor de  $-1$ .

**Teorema de Nyquist** Entonces, el resultado anterior se puede expresar en forma equivalente:

**Teorema 5.** Si la función de transferencia de lazo abierto  $L(s) = K(s)P(s)$  tiene  $n$  polos en SPD y el diagrama de Nyquist de  $L(s)$  da  $V$  vueltas alrededor del punto  $-1$ , entonces, el sistema de lazo cerrado tiene  $V + n$  polos en SPD.

□

**Criterio de Nyquist** Si el sistema de lazo cerrado es estable, el número de polos en SPD tiene que ser cero, por lo tanto, tenemos el siguiente criterio de estabilidad:

**Teorema 6.** Si la función de transferencia de lazo abierto  $L(s) = K(s)P(s)$  tiene  $n$  polos en SPD, entonces el sistema de lazo cerrado es estable si sólo si el diagrama de Nyquist de  $L(s)$  da  $n$  vueltas alrededor del punto  $-1$  en sentido antihorario.

□

**Teorema 7.** Si la función de transferencia de lazo abierto  $L(s) = K(s)P(s)$  es estable (no tiene polos en SPD), entonces el sistema de lazo cerrado es estable si sólo si el diagrama de Nyquist de  $L(s)$  no encierra el punto  $-1$ , ni pasa por él.

□

**Diagrama de Nyquist** Usando el resultado anterior es fácil estudiar la estabilidad del sistema de lazo cerrado. Sin embargo, aún queda pendiente el problema de construir el diagrama de Nyquist. Para ello, es importante analizar la curva  $\gamma$ .

$\gamma$  está compuesta por dos partes: el eje imaginario; es decir, puntos de la forma  $s = j\omega$  y los puntos sobre el semicírculo de radio infinito. Luego, tenemos que analizar el comportamiento de la función de transferencia  $L$  en estas dos regiones. Veamos en primer lugar qué sucede con el semicírculo:

Debemos estudiar el comportamiento de  $L$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Pero si  $L$  es una función propia, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) = \text{constante}$$

y la constante no depende de la dirección en la cual  $s$  crece. Además, si  $L$  es estrictamente propia, la constante es cero. Lo que esto significa, desde el punto de vista del diagrama de Nyquist, es que esta parte del diagrama se reduce a un solo punto, que puede ser cero.

Ahora sólo resta analizar los puntos en el eje imaginario. Es decir, queremos hallar los puntos

$$\{L(j\omega) \mid -\infty \leq \omega \leq \infty\}$$

lo cual no es otra cosa que la *Respuesta de frecuencia* de  $L$ .

El proceso se puede simplificar aun más usando la propiedad de las funciones racionales con coeficientes reales de que

$$L(-j\omega) = L(j\omega)^*$$

o, en forma equivalente,

$$|L(-j\omega)| = |L(j\omega)| \quad \angle \{L(-j\omega)\} = -\angle \{L(j\omega)\}$$

Lo cual muestra que el diagrama es simétrico con respecto al eje real y, por lo tanto, basta calcularlo para  $\omega \geq 0$ .

### Diagramas de Nyquist en Julia

La construcción del diagrama de Nyquist se reduce a calcular la respuesta de frecuencia de  $L$  y graficar  $\text{Re}L(j\omega)$  vs.  $\text{Im}L(j\omega)$ . Julia tiene el comando

---

```
1 nyquist(P)
```

---

el cual calcula y grafica el diagrama de Nyquist.

**Ejemplo 3.5.** Analicemos la estabilidad del sistema de control con  $K(s) = 1$  y  $P(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$ . Los polos de lazo abierto son  $-1$  y  $-2$ .

Los comandos Julia para obtener el diagrama de Nyquist son

---

```
1 # Definición de la función L
2 L = zpk([], [-1, -2], 2)
3 # Cálculo del diagrama
4 nyquist(L)
```

---

El resultado es la gráfica mostrada en la figura 3.5. Se puede observar que el diagrama no encierra al punto  $-1$ . Y, como no hay polos de lazo abierto en SPD, el sistema de lazo cerrado es estable.

**Polos en eje imaginario** La existencia de polos en el eje imaginario presenta un problema para la aplicación del teorema de Nyquist, puesto que en ese caso la curva  $\gamma$  pasa por polos de  $L$  y, entonces, el principio del argumento no es válido. Para remediar esto, se usa una modificación simple de la curva  $\gamma$ . Vamos a ilustrar este fenómeno con un ejemplo:

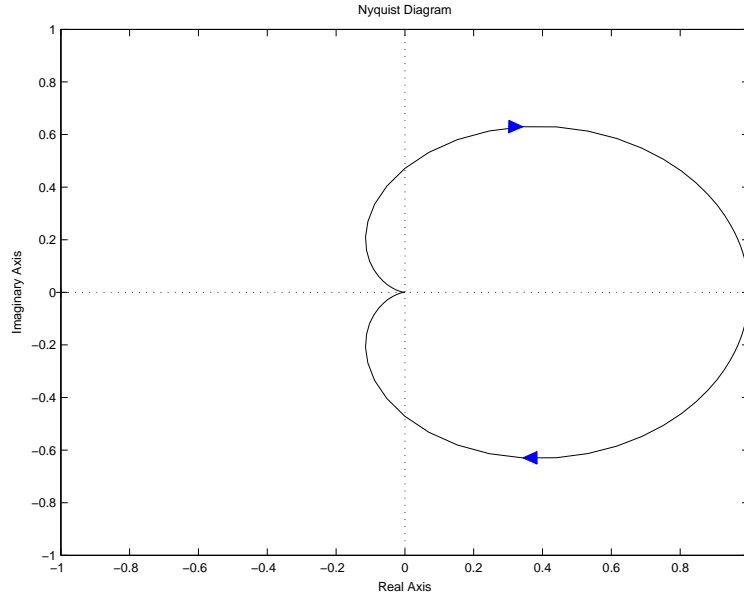


Figura 3.5: Diagrama de Nyquist de  $\frac{2}{(s+1)(s+2)}$

**Ejemplo 3.6.** Consideremos el sistema del ejemplo 3.3, con

$$P = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Puesto que hay un polo en el origen, debemos modificar la curva  $\gamma$  de modo que no pase por allí. La solución es modificar la curva como se muestra en la figura 3.6. El semicírculo tiene un radio  $\epsilon$  muy pequeño, de manera que excluya solamente al punto  $s = 0$ . Usando Julia para dibujar el diagrama de Nyquist, mediante los comandos

---

```
1 L = zpk([], [0, -1, -2], 1)
2 nyquist(L)
```

---

El resultado se muestra en la figura 3.7. Como era de esperar, el diagrama crece cuando la frecuencia tiende a cero (ganancia d.c. infinita) debido al efecto del polo en el origen (acción integral). Pero se puede ver también que el diagrama no encierra al punto  $-1$ . De hecho, el cruce del eje real se produce en el punto  $s = -0.166$ .

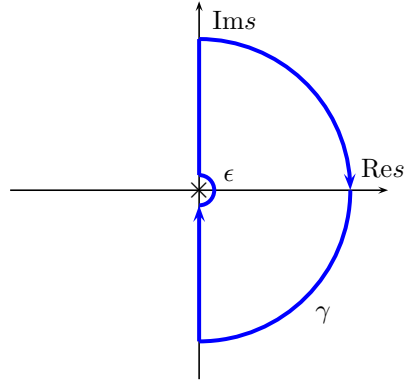
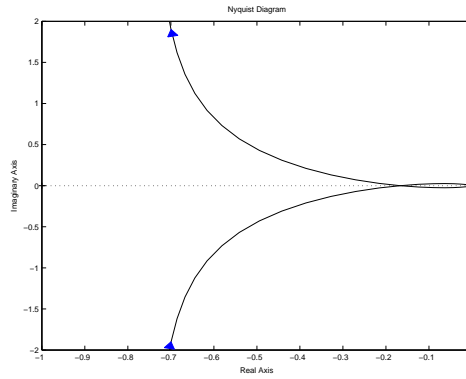


Figura 3.6: Modificación de la curva de Nyquist cuando hay polos imaginarios

Figura 3.7: Diagrama de Nyquist de  $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ 

### Margen de estabilidad

El criterio de Nyquist se puede usar para obtener estimaciones de los rangos de valores de la ganancia del control proporcional que mantienen la estabilidad del sistema. Para ello, basta con observar que el efecto de una ganancia  $k$  sobre el diagrama de Nyquist es el de amplificar todo el diagrama por el factor  $k$ . En efecto,

$$|kL(j\omega)| = |k| |L(j\omega)|$$

Cuando el sistema de lazo cerrado es estable con una ganancia dada, como en el ejemplo anterior, es posible encontrar un rango de ganancias para las cuales el sistema sigue siendo estable.

**Definición 4** (Margen de ganancia). *El máximo valor de la ganancia para la cual el sistema sigue siendo estable se denomina Margen de ganancia del*

sistema y se denota como  $MG$ .

Si el diagrama de Nyquist cruza el eje real en el punto  $-a$ , con  $0 < a < 1$ , entonces  $MG = 1/a$ . La frecuencia a la cual se produce esto se conoce como frecuencia de cruce de fase y se denota  $\omega_{180}$ . Entonces,

$$MG = 1/|L(j\omega_{180})|$$

Si el diagrama no cruza el eje o lo cruza a la derecha del origen se dice que el margen de ganancia es infinito.

**Ejemplo 3.7.** En el ejemplo anterior, el diagrama de Nyquist de  $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$  con  $k = 1$  cruza el eje real en el punto  $-0.166$ . Por lo tanto,

$$MG = 1/0.166 = 6$$

resultado que coincide con el del ejemplo 3.3.

La figura 3.8 muestra que, en efecto, si dibujamos el diagrama de Nyquist de  $\frac{6}{s(s+1)(s+2)}$ , se puede observar que éste cruza el eje real exactamente en el punto  $-1$ .

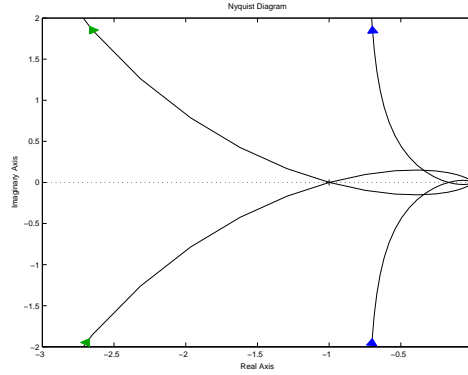


Figura 3.8: Diagrama de Nyquist de  $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$

En la práctica, existe incertidumbre acerca de los valores de los parámetros tanto del proceso como del controlador. Por lo tanto, el margen de ganancia representa una especie de *seguro* contra la incertidumbre en la ganancia, ya sea del proceso o del controlador. Entonces, un sistema con margen de ganancia grande sigue siendo estable aunque la ganancia no sea exactamente la que se ha modelado. Por esta razón, el margen de ganancia se considera como una de las formas de cuantificar la *robustez* del sistema de lazo cerrado.

### Estabilidad de sistemas con retardo

Hemos aprendido que muchos sistemas pueden modelarse por medio de la combinación de un sistema lineal junto con un retardo en el tiempo o tiempo

muerto. Además, aunque son menos frecuentes en la práctica, existen muchos sistemas que tienen tiempos muertos reales, debido a las condiciones físicas del proceso. Por estas razones, es muy importante evaluar la estabilidad de sistemas con retardo.

Consideremos un sistema de lazo cerrado con un retardo de  $\theta$  segundos. Un modelo para la función de transferencia del lazo se puede obtener en la forma,

$$L(s) = G(s)e^{-s\theta}$$

Queremos analizar la estabilidad del sistema de lazo cerrado. Para ello, vamos a construir el diagrama de Nyquist. Supongamos que el diagrama de Nyquist de  $G(s)$  ha sido construido. Entonces, ¿cuál es su relación con el diagrama de Nyquist de  $L(s)$ ?

Veamos el efecto del retardo sobre la respuesta de frecuencia

$$L(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega\theta}$$

Usando las propiedades de la función exponencial,

$$|e^{-j\omega\theta}| = 1, \quad \angle \{e^{-j\omega\theta}\} = -\omega\theta$$

se halla que

$$|L(j\omega)| = |G(j\omega)|, \quad \angle \{L(j\omega)\} = \angle \{G(j\omega)\} - \omega\theta.$$

Esto quiere decir que el retardo no modifica la respuesta de magnitud, pero en cambio el ángulo de fase gira un ángulo  $-\omega\theta$ .

Veamos qué significa esto para el diagrama de Nyquist. Supongamos que el diagrama de Nyquist de  $G$  tiene la forma de la curva I en la figura 3.9. Entonces, el correspondiente diagrama para  $L$  se puede obtener girando cada punto un ángulo  $\omega\theta$  en sentido horario. El resultado es la curva II de la figura.

Se puede ver que, aunque la magnitud de la respuesta no cambia, las condiciones de estabilidad si pueden modificarse y el sistema con retardo puede ser inestable aunque el sistema original no lo sea. Eso se debe a que el diagrama de Nyquist del sistema con retardo puede encerrar al punto  $-1$ .

Supongamos que tenemos un sistema estable cuyo diagrama de Nyquist es como el de la figura 3.9. Para cuantificar el efecto de un posible retardo se desarrolló el concepto de *Margen de fase*. La figura 3.10 ilustra el concepto. El ángulo de fase en la frecuencia para la cual la magnitud es uno determina el margen de fase. Claramente se ve que si el ángulo  $\varphi$  es grande entonces el sistema mantiene su estabilidad aunque haya incertidumbre acerca de la magnitud del tiempo de retardo. La frecuencia a la cual la ganancia es uno, se denomina *frecuencia de cruce* (en inglés, “crossover frequency”, término muy usado).



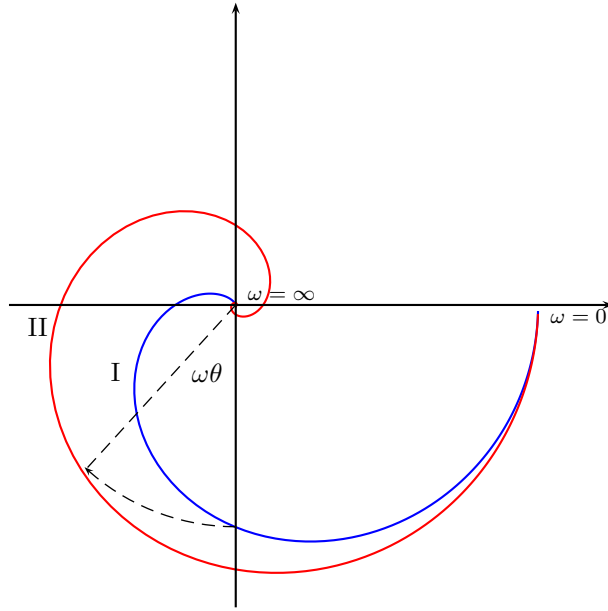


Figura 3.9: Diagrama de Nyquist de sistema con retardo

**Definición 5.** El Margen de fase se define como

$$MF = \angle \{L(j\omega_c)\} + 180$$

donde  $\omega_c$  es la menor frecuencia donde  $|L(j\omega)| = 1$ , decreciendo.

#### Márgenes a partir de la respuesta de frecuencia

El cálculo de los márgenes de estabilidad, tanto de ganancia como de fase se pueden obtener muy fácilmente a partir del Diagrama de Bode de  $L$ . Para ello, es necesario determinar las frecuencias de cruce  $\omega_{180}$  donde el ángulo de fase es  $-180^\circ$  y  $\omega_c$  donde la ganancia es 1 (0dB). Usando las definiciones, los márgenes se pueden estimar muy fácilmente.

El margen de ganancia se obtiene como

$$MG(dB) = -|L(j\omega_{180})| (dB)$$

aprovechando las propiedades de la función logaritmo. El margen de fase se obtiene como

$$MF = 180 + \angle \{L(j\omega_c)\}.$$

Julia provee la función

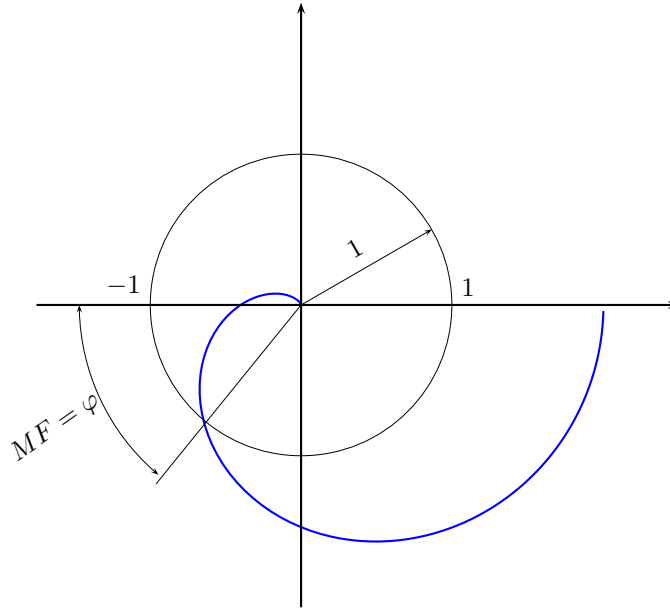


Figura 3.10: Margen de fase

---

1 `margin(L)`

---

la cual calcula los dos márgenes y, además, dibuja el diagrama de Bode.

**Ejemplo 3.8.** *Calculemos los márgenes de ganancia y de fase del sistema descrito por*

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

*El diagrama muestra que*

$$\omega_{180} = 1.41 \text{ rad/s}, \quad MG = 15.6 \text{ dB} = 6; \quad \omega_c = 0.446 \text{ rad/s}, \quad MF = 53.4^\circ$$

### 3.4. Estabilidad interna

La figura 3.12 ilustra un problema que puede presentarse con plantas inestables. El controlador usa *Cancelación de polos y ceros*; es decir, que el controlador tiene un cero igual al polo inestable de la planta. El sistema de lazo

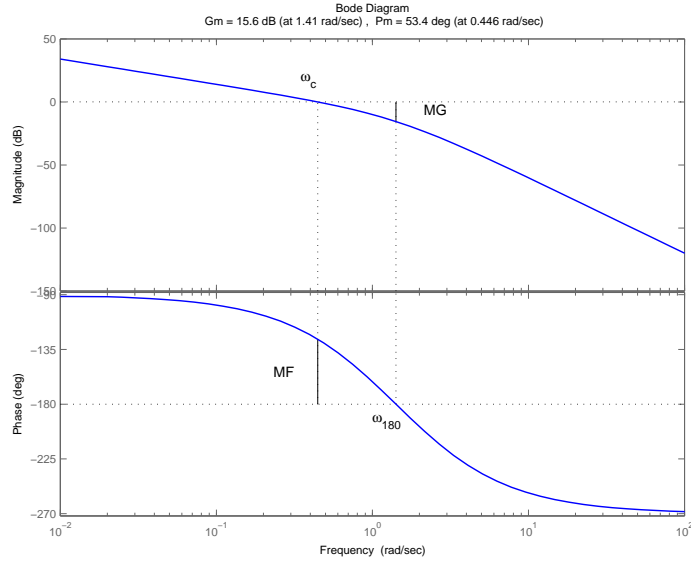


Figura 3.11: Márgenes de estabilidad de  $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$

cerrado tiene

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{s-2}{s+2} \frac{1}{s(s-2)}}{1 + \frac{s-2}{s+2} \frac{1}{s(s-2)}} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

de manera que podría pensarse que el diseño es satisfactorio. Sin embargo, veremos que adolece de una falla fatal.

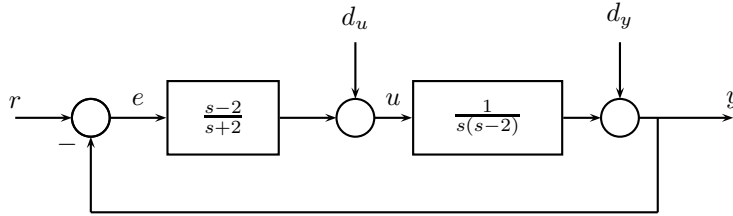


Figura 3.12: Cancelación de polos y ceros

Consideremos la función de transferencia que relaciona las perturbaciones en la entrada de la planta a su salida:

$$\frac{y(s)}{d_u(s)} = \frac{\frac{1}{s(s-2)}}{1 + \frac{s-2}{s+2} \frac{1}{s(s-2)}} = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)}$$

Inestable! Así, cualquier perturbación o ruido en la entrada de la planta producirá una respuesta que crece exponencialmente. Claramente, este diseño es inaceptable.

En la práctica, es imposible obtener la función de transferencia que cancele **exactamente** el polo. Si, en vez del controlador dado, usáramos

$$K(s) = \frac{s - 2.002}{s + 2}$$

se obtendría,

$$T(s) = \frac{s - 2.002}{s^3 - 3s - 2.002}$$

la cual tiene un polo inestable en  $s = 2.00022$ . Lo anterior muestra que ni siquiera la función  $T$  es estable en la práctica.

Para tener en cuenta el problema de la cancelación polo-cero, se define el siguiente concepto:

**Definición 6** (Estabilidad Interna). *Decimos que un sistema tiene Estabilidad Interna (o que es internamente estable —IE—) si es BP (bien planteado) y para cualquier condición inicial tanto de la planta ( $x(0)$ ) como del controlador ( $x_K(0)$ ), se cumple que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_K(t) = 0$$

*cuando todas las entradas externas son cero.*

La estabilidad interna es equivalente a que la función de transferencia de cualquier posible punto de entrada a cualquier posible punto de salida es estable E/S [DP13].

Consideremos el sistema de la figura 3.13: Para que este sistema sea IE, **TODAS** las funciones de transferencia  $\frac{e}{r}$ ,  $\frac{e}{d_u}$ ,  $\frac{e}{d_y}$ ,  $\frac{u}{r}$ ,  $\frac{u}{d_u}$ ,  $\frac{u}{d_y}$ ,  $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{y}{d_u}$  y  $\frac{y}{d_y}$  deben ser estables.

En realidad, debido a que las funciones de transferencia no son independientes, basta con que un subconjunto lo sea, como muestra el siguiente teorema:

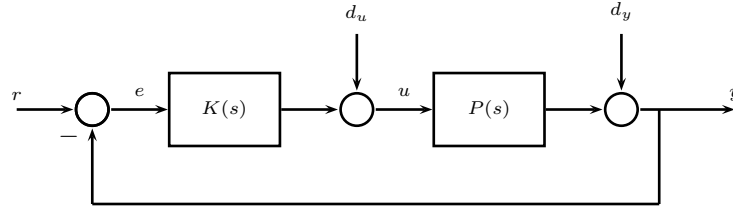


Figura 3.13: Estabilidad interna

**Teorema 8** (Estabilidad interna). *El sistema de la figura 3.13 es internamente estable si y sólo si, las funciones de transferencia  $\frac{u}{d_u}$ ,  $\frac{u}{d_y}$ ,  $\frac{y}{d_u}$  y  $\frac{y}{d_y}$  son estables.*  $\square$

La demostración se puede ver en [DP13], sección 5.1.

La cancelación de polos y ceros en SPD puede producir un sistema inestable, como hemos podido observar. Sin embargo, cuando no se permiten dichas cancelaciones, es posible simplificar la prueba de estabilidad:

**Teorema 9.** *Si no hay cancelación de polos y ceros en SPD, el sistema es estable si y sólo si una cualquiera de las cuatro funciones  $\frac{u}{d_u}$ ,  $\frac{u}{d_y}$ ,  $\frac{y}{d_u}$  o  $\frac{y}{d_y}$  es estable.*  $\square$

Una consecuencia de los teoremas anteriores es que sea casi imposible tener un sistema IE cuando se permiten cancelaciones de polos y ceros en SPD. Además, en la práctica, dichas cancelaciones no se pueden realizar exactamente, lo cual complica aún más el problema. Por estas razones, vamos a usar el siguiente precepto de diseño:

Un diseño de sistema de control que utilice cancelación de polos con ceros, localizados en el SPD, es **INACEPTABLE**

### 3.5. Teoría de estabilidad de Lyapunov

En esta sección vamos a estudiar un método de análisis de estabilidad muy general, aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales. Este método, desarrollado en 1892 por el ruso A. Lyapunov suele ser la base de la mayoría de los desarrollos en la teoría de estabilidad.

Consideremos un sistema descrito por ecuaciones de estado

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (3.3)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ . Supongamos que este sistema tiene un punto de equilibrio  $\bar{x}$ ; es decir que se cumple  $f(\bar{x}) = 0$ . Lyapunov definió:

**Definición 7** (Estabilidad en el sentido de Lyapunov). *Sea  $\bar{x}$  un punto de equilibrio del sistema 3.3. El punto se dice estable en el sentido de Lyapunov (LE) si dado  $\epsilon$ , existe  $\delta$  tal que*

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \quad \forall t > t_0$$

*Si el punto de equilibrio no es estable se llama inestable.*

**Definición 8** (Estabilidad asintótica).  *$\bar{x}$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable (AE), si es estable (LE) y, además,*

$$x(t) \rightarrow \bar{x} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Es decir, que el equilibrio es estable si todas las trayectorias que arrancan (en  $t_0$ ) cerca del punto, permanecen cerca de él todo el tiempo y es asintóticamente estable si es estable y, además las soluciones tienden a  $\bar{x}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### Método directo

El concepto básico para el análisis de estabilidad es el de *función de Lyapunov*:

**Definición 9** (Función de Lyapunov). *Sea una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positiva definida (es decir que  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ ).  $V$  es una función de Lyapunov para el sistema 3.3 si la función es no creciente a lo largo de las soluciones  $x(t)$  de 3.3. Esto se puede verificar calculando la derivada a lo largo de las soluciones:*

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} f \leq 0$$

Los principales resultados de la teoría de Lyapunov son los dos teoremas siguientes:

**Teorema 10** (Método directo de Lyapunov). *Sea  $\bar{x}$  un punto de equilibrio del sistema 3.3. Si existe una función de Lyapunov para el sistema, entonces  $\bar{x}$  es estable (LE).*  $\square$

**Teorema 11.** *Si  $V$  es función de Lyapunov para el sistema 3.3 y además*

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} f < 0$$

*entonces,  $\bar{x}$  es asintóticamente estable (AE).*  $\square$

La demostración de estos teoremas se puede ver en [SH74, Per13].

La teoría de Lyapunov es una generalización de un teorema de Lagrange que dice que un equilibrio de un sistema mecánico es estable si la energía potencial es mínima en ese punto. Vamos a ilustrar la aplicación del método con unos ejemplos.

**Ejemplo 3.9.** *El sistema lineal*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

*tiene un punto de equilibrio en el origen (como todos los sistemas lineales). Consideremos la siguiente función como candidata a función de Lyapunov:*

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Claramente, la función es positiva definida. Calculemos la derivada a lo largo de las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1(-2x_1 - 4x_2) + 2x_2(4x_1 - 2x_2) \\ &= -4x_1^2 - 4x_2^2 < 0 \quad \forall x\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $V$  es función de Lyapunov y  $x = 0$  es LE y AE. Esto se puede verificar fácilmente para este sistema calculando los valores propios. Estos son  $-1 - 2j$  y  $-1 + 2j$

**Ejemplo 3.10.** Ahora estudiemos la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema no lineal,

$$\dot{x}_1 = -x_2^3 \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 \tag{3.5}$$

El único punto de equilibrio es  $x = 0$ . Consideremos de nuevo la función  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  como candidata. Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2^3 \\ x_1^3 \end{bmatrix} \\ &= -2x_1x_2^3 + 2x_1^3x_2\end{aligned}$$

Puesto que esta última función puede ser positiva o negativa, dependiendo del punto, no sirve como función de Lyapunov.

Ahora ensayemos la función  $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$  como candidata. En este caso,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \begin{bmatrix} 4x_1^3 & 4x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2^3 \\ x_1^3 \end{bmatrix} \\ &= -4x_1^3x_2^3 + 4x_2^3x_1^3 = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto el origen es estable.

Este ejemplo ilustra la dificultad principal del método directo de Lyapunov: no hay garantía de que una función dada sirva como función de Lyapunov y el hecho de que una función no sirva no quiere decir, de ninguna manera, que el equilibrio sea inestable.

## Linealización

Hemos estudiado en capítulos anteriores el proceso de linealización de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio. Estudiemos la relación entre la estabilidad del sistema linealizado y la del sistema original. Sea

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi$$

la linealización alrededor de  $\bar{x}$ , donde  $\xi = x - \bar{x}$  y  $Df(\bar{x})$  es el Jacobiano de  $f$  evaluado en  $\bar{x}$ . Usando el método directo de Lyapunov es posible demostrar el siguiente teorema (ver [SH74, Wig])

**Teorema 12** (Estabilidad por linealización). *Supongamos que todos los valores propios del Jacobiano  $Df(\bar{x})$  tienen parte real negativa. Entonces,  $\bar{x}$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema no lineal.*  $\square$

**Ejemplo 3.11.** *El péndulo amortiguado, descrito por:*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2$$

*tiene un punto de equilibrio en el origen. La linealización en este punto tiene el Jacobiano,*

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

*cuyos valores propios son  $-0.5 \pm j0.866$ . Por lo tanto, el origen es AE.*

### Ecuación de Lyapunov

En esta sección aplicaremos el método directo de Lyapunov a un sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax \tag{3.6}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Escojamos una función candidata de Lyapunov, cuadrática de la forma

$$V(x) = x^T P x = \sum_i \sum_j P_{ij} x_i x_j$$

donde la matriz  $P$  es simétrica. Para que  $V$  sirva como función de Lyapunov debe ser positiva definida. Entonces,  $P$  debe tener la propiedad de que

$$x^T P x \geq 0, \quad \forall x \neq 0$$

Una matriz con esta propiedad se denomina Positiva definida y se denota con el símbolo  $P > 0$ . Si  $P$  es positiva definida todos sus valores propios son positivos.

La derivada de  $V$  a lo largo de las soluciones de la ecuación está dada por:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P A x = x^T \{A^T P + P A\} x$$

Si el sistema es AE entonces, la derivada debe ser negativa para todo  $x$ . Una forma de garantizar esto consiste en garantizar que exista una matriz  $Q > 0$ , de manera que  $\dot{V} = x^T \{A^T P + P A\} x = -x^T Q x < 0$

Factorizando, se ve que la condición se cumple si

$$A^T P + P A + Q = 0 \tag{3.7}$$

Esta ecuación matricial se conoce como *ecuación de Lyapunov*.

Es fácil ver, usando el desarrollo anterior que es posible obtener condiciones para la estabilidad del sistema lineal.



**Teorema 13** (Estabilidad de sistema lineal). *El sistema lineal 3.6 es asintóticamente estable si y sólo si, para cualquier matriz  $Q > 0$ , la ecuación de Lyapunov  $A^T P + PA + Q = 0$  tiene solución única  $P > 0$*   $\square$

Una demostración de este teorema se puede hallar en [Che95].

**Ejemplo 3.12.** *El sistema lineal con*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ya fue considerado. Veamos el análisis de estabilidad utilizando la ecuación de Lyapunov.

Para ello, seleccionemos una matriz  $Q > 0$ , por ejemplo,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuación de Lyapunov puede obtenerse usando Julia con el comando

---

```
1 P = lyap(A,Q)
```

---

Se obtiene la solución

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La cual, evidentemente, es positiva definida (los dos valores propios son 0.5). En realidad, para cualquier  $Q$  que seleccionemos, es posible encontrar una matriz  $P > 0$ .

## Desigualdades matriciales

La expresión  $P > 0$  es un ejemplo de lo que se denomina una *Desigualdad Matricial*. Significa, como hemos visto, que la matriz es positiva definida. En forma similar definimos que una matriz  $X$  es *negativa definida*, (lo cual se denota por  $X < 0$ ) si  $-X > 0$ .

Consideremos el problema de determinar la estabilidad de un sistema lineal  $\dot{x} = Ax$ . Debemos determinar si existe solución de la ecuación de Lyapunov 3.7 para cualquier matriz  $Q > 0$ . Esta condición se puede resumir mediante la desigualdad matricial

$$A^T P + PA < 0 \tag{3.8}$$

En este caso, el problema de estabilidad se reduce a determinar si existe una matriz  $P$  tal que la desigualdad 3.8 queda satisfecha. A este problema se le conoce como *el problema de factibilidad de la desigualdad*. La desigualdad matricial 3.8 es *factible* si existe un  $P$  que satisface la desigualdad.

### 3.6. Ejercicios

## Capítulo 4

# Especificaciones

El primer paso para diseñar un controlador consiste en saber qué se espera de él. En otras palabras, cómo se espera que sea la respuesta del sistema controlado. No es frecuente que esto esté determinado de forma única. Por lo general, cuando se requiere controlar un proceso determinado lo que se conoce son algunas guías generales sobre su operación y el ingeniero de control debe elaborar, junto con los ingenieros de proceso un conjunto de especificaciones que sirvan para diseñar un controlador.

Por lo general, las especificaciones más importantes son estáticas: Se requiere que el punto de operación se mantenga dentro de ciertos rangos deseables. Por ejemplo, en un control de temperatura normalmente son permisibles desviaciones de unos pocos grados.

Otra característica deseable es la velocidad de respuesta: generalmente, es mejor un sistema que responde rápidamente que uno lento. En muchos procesos no son aceptables los llamados *sobrepicos*: en un control de nivel, por ejemplo, si la altura del líquido sobrepasa, aunque sea temporalmente el valor deseado, puede ocasionar inconvenientes de operación. Estos son ejemplos de características dinámicas deseables, las cuales dan origen a las especificaciones para el diseño de controladores.

### 4.1. ¿Lazo abierto o lazo cerrado?

La primera decisión que se debe tomar es cómo debe ser la estructura o *arquitectura* del sistema. En este punto tenemos dos opciones de diseño: se puede usar un control con o sin realimentación<sup>1</sup>.

La selección de la arquitectura del controlador depende fundamentalmente de si existen perturbaciones y de si existen incertidumbres acerca del modelo del sistema.

---

<sup>1</sup>Posteriormente, en el capítulo 8 consideraremos los llamados controladores de dos parámetros. Otros controladores más complejos son posibles, pero generalmente son considerados únicamente en cursos de control multivariable

Un ejemplo puede ilustrar las diferencias: consideremos dos opciones para el control de nivel de un tanque:

- I. La primera consiste en una válvula de alimentación de agua, controlada por un reloj. Cuando se acciona la válvula, permanece abierta por un tiempo, determinado de antemano. El tiempo ha sido calculado de manera que cuando la presión de alimentación de agua es la nominal, el nivel de agua obtenido es exactamente el deseado.
- II. La segunda opción utiliza un sensor de presión para medir el nivel de agua y una válvula. El nivel medido ( $h$ ) se compara con el deseado ( $r$ ) y, se mantiene la válvula abierta mientras el nivel esté por debajo del deseado. En caso contrario se cierra la válvula.

En condiciones normales, los dos sistemas funcionan igualmente bien. El tanque se llena hasta el nivel deseado y permanece así.

Sin embargo supongamos, en primer lugar, que la presión temporalmente se encuentra por debajo del valor nominal. En ese caso, el flujo en la válvula se reduce y, por lo tanto, el tiempo requerido para llenar el tanque aumenta<sup>2</sup>. Por supuesto, el sistema I no podrá lograr el objetivo de controlar el nivel, puesto que no tiene forma de detectar que el nivel alcanzado no es el deseado. El sistema II no tiene inconvenientes para lograrlo. Una situación análoga se produce cuando el desgaste u obstrucción de la válvula y de las tuberías limitan el caudal de entrada.

Algo más frecuente puede ser la presencia de fugas que reducen el nivel del tanque, después de que está lleno. Obviamente, el esquema I, no tiene ninguna forma de contrarrestar esta *perturbación*; el control tipo II no debería tener ningún inconveniente.

Este ejemplo ilustra las características de los controles de *lazo abierto* como el esquema I y los de *lazo cerrado* como el II. La diferencia, por supuesto es la presencia de la realimentación, la cual permite compensar tanto las *incertidumbres* en el modelo del proceso y del controlador, como las *perturbaciones* externas, como las fugas del ejemplo.

En resumen, un sistema de lazo cerrado se requiere cuando la respuesta del sistema debe mantenerse en su nivel deseado independientemente de las condiciones internas o externas. Los sistemas de lazo abierto no suelen usarse sino en sistemas que no tienen exigencias de exactitud o en donde existen mecanismos de realimentación diferentes. En adelante, consideraremos que todos los sistemas de control usan realimentación, a menos que se especifique lo contrario.

Para especificar el desempeño deseable de un sistema de control por lo general escogemos una respuesta deseable ante señales estándar. Por ejemplo

---

<sup>2</sup>El caso de aumento de presión, aunque menos frecuente, puede ser potencialmente, mucho más grave.

la respuesta del sistema ante cambios tipo escalón en la señal de referencia o en la perturbación.

A partir de este momento vamos a suponer que el efecto de todas las perturbaciones se puede concentrar en una sola señal en la salida de la planta, como el diagrama de la figura 4.1. La función de transferencia  $G_d$  representa el efecto de las perturbaciones sobre la salida de la planta.

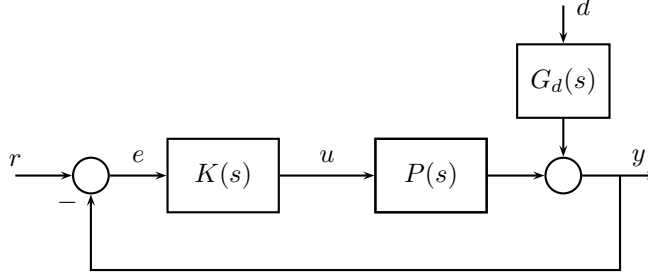


Figura 4.1: Control de lazo cerrado

Usando el desarrollo del capítulo 2,

$$e = S(s) [r - G_d d] \quad (4.1)$$

donde a

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (4.2)$$

la hemos llamado la **función de sensibilidad** del sistema de lazo cerrado y a  $L(s) = P(s)K(s)$  se le denomina la **función de transferencia del lazo**.

## 4.2. Requisitos de estabilidad

Usando nuestro *Dogma de Estabilidad*, enunciado en el capítulo 3, el primer requisito de un diseño es que sea estable internamente.<sup>3</sup>

Entonces, se requiere que las cuatro funciones de transferencia  $\frac{u}{d_u}$ ,  $\frac{u}{d_y}$ ,  $\frac{y}{d_u}$  y  $\frac{y}{d_y}$  sean estables. En el capítulo anterior, vimos que esto es equivalente a que  $T(s)$  sea estable y que no haya ninguna cancelación de polos y ceros en el SPD.

## 4.3. Desempeño — Especificaciones estáticas

Aparte de la estabilidad, deseamos que el sistema de lazo cerrado cumpla con ciertos requisitos de respuesta. A estas especificaciones las denominamos

<sup>3</sup>Podría aducirse que es más fundamental el requisito de que sea BP. Sin embargo, si el sistema no es BP, no puede funcionar. Que sea estable significa que puede seguir funcionando sin quemarse o destruirse.

*Requisitos de desempeño.* La característica de desempeño que los usuarios de los sistemas de control consideran más importante suele ser la capacidad de mantener el punto de operación, en presencia de cambios y perturbaciones externas. Generalmente, lo que se busca es que el sistema controlado regrese al punto de operación después de algunas desviaciones transitorias. El desempeño durante el período transitorio suele ser menos importante.

Las especificaciones estáticas se refieren a la respuesta del sistema de lazo cerrado, en estado estacionario, ante entradas especificadas. Las entradas que se usan con frecuencia son escalones o rampas en la referencia y escalones en las perturbaciones. Aunque estas son las más usadas, es posible especificar comportamientos más complejos.

Vamos a suponer que la función de sensibilidad es de la forma

$$S(s) = \frac{\gamma_m s^m + \cdots \gamma_1 s + \gamma_0}{s^n + \cdots \alpha_1 s + \alpha_0} = \Gamma \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

donde todos los polos  $p_i \in \text{SPI}$ . Analizaremos en primer lugar la respuesta ante escalones.

### Error de posición

Consideremos de nuevo el sistema de la figura 4.1, inicialmente sin perturbación ( $d = 0$ ) y con una señal de referencia tipo escalón de amplitud  $A$ . Supongamos que  $S(s)$  es estable. Entonces, del teorema del valor final, el error de estado estacionario es:

$$e_s := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s} = S(0)A = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}.$$

Queremos que el error sea pequeño, ojalá cero, en estado estacionario. Por lo tanto definimos el error relativo:

**Definición 10** (Error de posición). *El error de posición se define como el valor estacionario del error ante una referencia tipo escalón de amplitud  $A$ , en por ciento (o por unidad) del valor de la referencia:*

$$\varepsilon_p := \frac{|e_s|}{A} \times 100 = |S(0)| \times 100 \quad (4.3)$$

Para tener cero error de posición, entonces, se requiere que:

$$S(0) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = 0$$

o, lo que es equivalente,  $T(0) = 1 - S(0) = 1$ .

Asociado con el error de posición vamos a analizar el efecto de las perturbaciones. Ahora suponemos una perturbación tipo escalón de amplitud  $B$  y cero referencia. Entonces, el error en estado estacionario es:

$$e_p := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = - \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)G_d(s) \frac{B}{s} = -S(0)G_d(0)B. \quad (4.4)$$

Analizando las ecuaciones 4.3 y 4.4 se puede observar que para reducir los errores, tanto debidos a la referencia como a las perturbaciones, es necesario reducir el valor d.c. de  $S$ ,  $S(0)$  o lograr que  $T(0) = 1$ . Puesto que,

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + K(s)P(s)}$$

esto significa que debemos tratar de que la ganancia d.c. del lazo sea lo más grande posible para obtener un error pequeño.

Si se especifica que el error de posición debe ser menor que una cantidad dada  $\gamma$ , por ejemplo, se debe cumplir,

$$|S(0)| < \delta$$

o

$$-\delta < \frac{1}{1 + L(0)} < \delta$$

lo cual se cumple si

$$L(0) < -1 - \frac{1}{\delta}, \quad \text{ó} \quad L(0) > \frac{1}{\delta} - 1$$

**Ejemplo 4.1.** Si  $P(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$  y  $G_d = \frac{0.25}{s+1}$ , cuál es el menor valor de la ganancia  $k$  de un control proporcional ( $P$ ) tal que el sistema es estable y tiene un error de posición  $\varepsilon < 0.05$ ? Calculemos la función de sensibilidad:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k}{(s+1)(s+2)}} = \frac{(s+1)(s+2)}{s^2 + 3s + 2 + k}$$

entonces,  $S(0) = \frac{2}{2+k}$ .

Para este sistema de segundo orden, la tabla RH indica que el sistema de lazo cerrado es estable si y sólo si  $2 + k > 0$ , o sea,  $k > -2$ .

El error de posición es  $\varepsilon_p = S(0) = \frac{2}{2+k}$ . Si queremos que  $\varepsilon < 0.05$ , se requiere que

$$\left| \frac{2}{2+k} \right| < 0.05, \quad \Rightarrow \quad k > 38, \quad \text{ó} \quad k < -42$$

Por lo tanto, para satisfacer las especificaciones (incluyendo, por supuesto, estabilidad), es necesario tener  $k > 38$ .

Usando el valor  $k = 40$ , el error producido por una perturbación escalón unitario es:

$$|e_p| = S(0)G_d(0) = \frac{2}{2+k}0.25 = 0.0119 = 1.2\%$$

### Error de velocidad

Otra señal usada frecuentemente como referencia<sup>4</sup> es una rampa de pendiente  $m$ . En este caso,

$$u(t) = mt; \quad \text{para } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u(s) = \frac{m}{s^2}$$

Ante esta señal, el error se puede obtener como,

$$e(s) = S(s) \frac{m}{s^2} = m \Gamma \frac{s^2(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \quad (4.5)$$

Usando fracciones parciales, esto se puede escribir:

$$e(s) = m \frac{A}{s^2} + m \frac{B}{s} + m(\text{términos debidos a los polos de } S(s)) \quad (4.6)$$

Los coeficientes  $A$  y  $B$  se pueden obtener, usando el teorema de los residuos [Lan85] como:

$$A = S(0) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}$$

$$B = S'(0) = \frac{\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0^2}$$

Invirtiendo la transformada en 4.6,

$$e(t) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0} mt + \frac{\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0^2} m + \text{términos decrecientes exponencialmente}$$

Cuando crece el tiempo, los términos exponenciales desaparecen, así que, asintóticamente,

$$e(t) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0} mt + \frac{\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0^2} m \quad (4.7)$$

Lo cual indica que la respuesta estacionaria del error está compuesta por una constante más una rampa. En realidad, este error crece con  $t$ , a menos que  $S(0) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0} = 0$ , la cual es la condición para cero error de posición. Por lo tanto, para que el error ante una rampa sea finito, el sistema debe tener cero error de posición.

**Definición 11** (Error de velocidad). *El error de velocidad se define como el valor estacionario del error ante una referencia tipo rampa de pendiente  $m$ , en por ciento (o por unidad) del valor de  $m$ :*

$$\varepsilon_v : = |S(0)t + S'(0)| \times 100 \quad (4.8)$$

$$= \left| \frac{\gamma_0}{\alpha_0} t + \frac{\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0^2} \right| \times 100 \quad (4.9)$$

---

<sup>4</sup>Es tradicional que no se usen rampas como perturbaciones. En caso necesario, se puede incluir la dinámica en  $G_d(s)$ .



Para tener un error de velocidad finito (no creciente con el tiempo  $t$ ), se requiere que  $\gamma_0 = 0$  y esto simplifica la expresión del error de velocidad:

$$\varepsilon_v := \left| \frac{\gamma_1}{\alpha_0} \right| \times 100 \quad (4.10)$$

pero si lo que se requiere es que el error de velocidad sea cero,  $\gamma_1$  también debe ser cero.

### Acción integral

Cuando el controlador  $K(s)$  o la planta  $P(s)$  tienen un integrador libre, entonces la función de transferencia  $L(s)$  se puede escribir,

$$L(s) = \frac{1}{s} L_1(s)$$

y, por lo tanto,  $L(0) \rightarrow \infty$ , lo cual garantiza que el error de posición es cero siempre.

### El tipo de un sistema

Consideremos un sistema de lazo cerrado con realimentación unitaria como se muestra en la figura 4.1. Hemos visto que la presencia de un integrador tiene un efecto dramático sobre la respuesta estática: Si la planta contiene un integrador, el error de posición siempre será cero, independientemente del controlador, Si tiene dos, el error de velocidad es cero, etc. Este concepto conduce a la siguiente definición:

**Definición 12** (Tipo de un sistema.). *Un proceso descrito por la función de transferencia  $P(s)$  es de tipo  $k$ , si  $P(s)$  se puede escribir en la forma*

$$P(s) = \frac{P_1(s)}{s^k}$$

donde la función de transferencia  $P_1(s)$  no tiene polos (ni ceros) en  $s = 0$ .

**Ejemplo 4.2.**  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  es tipo 1 mientras que  $Q(s) = \frac{s+1}{s^3(s-1)(s-2)}$  es tipo 3.  $B(s) = \frac{1}{s-5}$  no es de ningún tipo.

Usando la definición anterior, tenemos que un sistema tipo 1 siempre tiene un error de posición igual a cero y error de velocidad finito. Un sistema tipo 2 tiene error de velocidad cero.

## 4.4. Especificaciones en tiempo y frecuencia

Las especificaciones estáticas garantizan que la respuesta del proceso alcance un valor deseado, con error tolerable. Sin embargo, eso sólo se logra después

de un período transitorio que puede tardar mucho tiempo e incluir desviaciones intolerables para el proceso. Por esta razón, es necesario considerar también especificaciones relativas a la respuesta transitoria. Las especificaciones, por lo general, se refieren a la respuesta ante un escalón; esto se usa, aun en casos en los cuales el sistema va a estar sometido a entradas diferentes a escalones.

### Cambios en la referencia

Consideremos, en primer lugar un sistema sin perturbaciones, como se muestra en la figura 4.2. Una respuesta típica de un sistema ante un escalón tiene

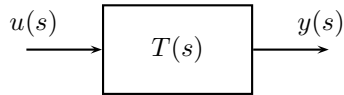


Figura 4.2: Sistema con entrada y salida

la forma mostrada en la figura 4.3, la cual servirá para definir las principales características que pueden ser especificadas.

Los siguientes indicadores caracterizan la respuesta a un escalón de altura  $a$ :

$y_s$ : El valor estacionario de  $y(t)$ .

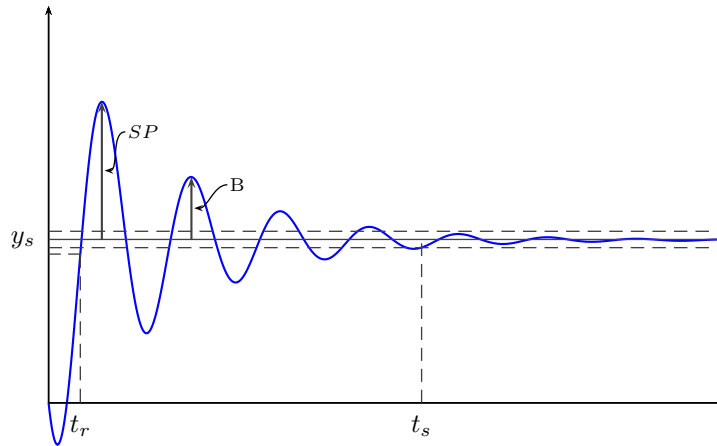


Figura 4.3: Respuesta al escalón típica

$t_s$ : El *tiempo de asentamiento* es el tiempo que tarda la respuesta en quedar dentro de una franja  $y_s(1 \pm 0.05)$ <sup>5</sup>.

$SP$ : El *sobrepico (máximo)* es el valor pico de exceso de la respuesta con respecto a  $y_s$ . Por lo general se especifica en por ciento o por unidad de  $y_s$ :

$$SP(\%) = \frac{|y_{max} - y_s|}{y_s} \times 100 (\%)$$

$t_r$ : El *tiempo de subida* se define como el tiempo que tarda la respuesta en llegar a  $0.9y_s$  por primera vez<sup>6</sup>.  $t_r$  es una buena medida de la rapidez con que responde el sistema.

$B$ : El segundo sobrepico. Generalmente se usa para definir la llamada *Relación de decaimiento*

$$RD = \frac{SP}{B}$$

Para ilustrar estos conceptos supongamos un usuario que oprime el botón marcado **7** en un ascensor. En este contexto, el ascensor se comporta como un control de posición. El valor estacionario ( $y_s$ ) determina el nivel a donde finalmente se llega. Por supuesto, el usuario espera que sea exactamente el séptimo piso. Pero seguramente un error de 1 cm es tolerable.  $t_s$  es el tiempo que tarda el ascensor en estabilizarse en la altura final; seguramente el usuario desea que sea corto. El sobrepico implica que el ascensor “se pasa” un poco de la altura deseada; no es muy agradable un sobrepico muy pronunciado, por razones de comodidad. En este sistema probablemente no sea necesario ni deseable que  $t_r$  sea muy corto (por qué?), pero hay muchos ejemplos de procesos donde esto es muy importante.

## Perturbaciones

Una respuesta típica del error debido a una perturbación es la de la figura 4.4. Por lo general, las especificaciones en este caso se refieren al error estático, al error máximo permisible y al tiempo de asentamiento.

## Márgenes de estabilidad

Una alternativa de especificación, muy usada en la industria eléctrica y aeroespacial, consiste en expresar los requisitos del diseño en términos de la respuesta de frecuencia. Esto tiene la ventaja de que no se limita a un tipo de entrada sino que describe la respuesta ante muchos estímulos. Es posible garantizar algunas características de la respuesta dinámica mediante la especificación de márgenes de ganancia y de fase de  $L(s)$ . Sin embargo, el uso de

<sup>5</sup>O, puede ser 0.01 ó 0.02, según las necesidades.

<sup>6</sup>También se suele definir  $t_r$  como el tiempo que tarda  $y(t)$  en pasar de  $0.1y_s$  a  $0.9y_s$ . Este es el valor dado por defecto en la función `stepinfo`, en Julia.

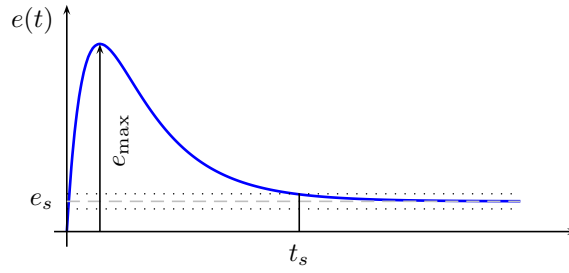


Figura 4.4: Respuesta a perturbación tipo escalón

estas especificaciones se justifica más por sus características de robustez ante incertidumbres, tal como se discutió en el capítulo de estabilidad.

El margen de ganancia constituye una garantía ante posibles errores o cambios en la ganancia de estado estacionaria del sistema. La especificación se da en la forma

$$MG > m$$

La cual implica que la ganancia d.c. se puede multiplicar por  $m$  sin perder estabilidad. Un valor típico de esta especificación es  $MG > 2$ , ( $\approx 6dB$ ).

El margen de ganancia garantiza que el sistema es unumune ante retardos y tiempos muertos.<sup>7</sup> La especificación se enuncia en la forma:

$$MF > f$$

Lo cual garantiza que el sistema puede soportar un retardo no modelado máximo de  $f/\omega_c$ , donde  $\omega_c$  es la frecuencia de cruce de ganancia (“crossover”). Un valor típico especificado es  $MF > 60^\circ$ .

### Máxima ganancia pico

Es posible establecer especificaciones en el dominio de frecuencia con base en las funciones de transferencia de lazo cerrado. Este tipo de especificación se puede relacionar más fácilmente con las especificaciones en el dominio del tiempo. Además, como veremos, estas especificaciones están íntimamente relacionadas con los márgenes de fase y de ganancia.

**Definición 13** (Ganancia pico). *La ganancia pico de una función de transferencia  $F(s)$  se define como*<sup>8</sup>

$$M_F := \max_{\omega} |F(j\omega)|$$

<sup>7</sup>probablemente asociados con aproximaciones obtenidas en punto de operación diferentes al usado actualmente.

<sup>8</sup>Conocido en matemáticas como la norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Por lo tanto,  $M_F = \|F\|_\infty$ .

Entonces, tenemos que

$$M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)|, \quad M_T = \max_{\omega} |T(j\omega)|$$

Valores típicos especificados son  $M_S < 2$  y  $M_T < 1.25$ .

Los valores de  $M_S$  y  $M_T$  no son independientes. En efecto, usando la desigualdad triangular,

$$||S| - |T|| \leq |S + T| = |1| = 1$$

lo cual implica que la diferencia entre los dos no puede ser mayor que 1. Así que, por lo general, basta especificar uno solo de  $M_S$  o  $M_T$ .

$M_S$  caracteriza el desempeño del sistema de lazo cerrado, desde el punto de vista del error<sup>9</sup> En efecto, puesto que  $e = S(r - G_d d)$ , podemos analizar el efecto del controlador comparando este error con el que se presenta cuando se elimina el controlador ( $u = 0$ ), el cual es  $e_0 = r - G_d d$ . Notamos que si  $|S(j\omega)| < 1$ , el efecto del controlador es benéfico, comparado con el sistema sin controlador. Pero si  $|S(j\omega)| > 1$ , el controlador, de hecho, empeora el desempeño. Las especificaciones estáticas siempre requieren que  $|S| < 1$  a baja frecuencia. Además, hemos visto en el capítulo sobre modelos que todos los sistemas físicos reales son estrictamente propios (todos dejan de responder a medida que la frecuencia aumenta —son “pasa-bajos”—). Eso significa que para altas frecuencias,  $|L| \rightarrow 0$ . Por lo tanto,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S(j\omega)| = 1$ .

En realidad, como muestra [SP05], para todos los sistemas reales,  $|S(j\omega)| > 1$  para alguna frecuencia. En efecto, para  $\omega = \omega_{180}$ ,  $L(j\omega) = 1/MG$  es real y negativo. Por lo tanto,

$$S(j\omega_{180}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{MG}} > 1$$

Por lo tanto, todo sistema para el cual exista  $\omega_{180}$  (que resulta ser cualquier sistema dinámico),  $M_S > 1$ .

Existe una íntima relación entre  $M_S$  y  $MF$  ó  $MG$ . Es posible probar<sup>10</sup> lo siguiente:

**Teorema 14.** *Si el sistema de lazo cerrado tiene una ganancia pico  $M_S$ , entonces,*

$$MG \geq \frac{M_S}{M_S - 1}, \quad MF \geq 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2M_S} \right)$$

Además, si el  $MF$  está dado en radianes,

$$MF \geq \frac{1}{M_S}$$

□

<sup>9</sup>Este desarrollo está basado en [SP05], sección 2.4.3.

<sup>10</sup>Ver el apéndice de este capítulo

Estas desigualdades implican que si un cierto controlador garantiza que si el diagrama de Nyquist permanece fuera de un círculo de radio  $\mu$  alrededor del punto  $-1$ ; es decir si  $M_S < \mu$ , el margen de ganancia será mayor o igual que  $M_S/(M_S - 1)$  y el margen de fase será mayor que  $2\sin^{-1}(1/(2M_S))$ . Como resultado de estas relaciones, los diseños modernos se suelen hacer minimizando  $M_S$  o  $M_T$  mucho más fácilmente, desde el punto de vista matemático, que en términos de  $MG$  o  $MF$ .

**Ejemplo 4.3.** La especificación típica de  $M_S < 2$  implica que  $MG \geq 2$  y  $MF \geq 0.5 \text{ rad} = 28.6^\circ$

Para finalizar esta sección, hay que anotar que un mayor valor de  $M_S$  implica, normalmente, un mayor sobrepico en la respuesta al escalón.

### Obtención de $M_T$ a partir de $L$

Hemos aprendido que las especificaciones del sobrepico se pueden relacionar con el valor máximo de la ganancia en función de la frecuencia. Aquí vamos a ver cómo se puede relacionar este valor con la función de transferencia de lazo abierto.

Para la configuración de realimentación unitaria, es posible encontrar una relación entre la ganancia  $|T(j\omega)|$  y las componentes real e imaginaria de  $L(j\omega)$ . Esto nos permitirá relacionar la ganancia pico con el diagrama de Nyquist y será fundamental en el diseño de controladores.

La función de transferencia de lazo cerrado está dada por

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$$

La magnitud es

$$|T(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \quad (4.11)$$

Calculemos el lugar geométrico de los puntos que tienen ganancia constante  $M$  en el plano  $L(s)$ ; es decir, el plano  $x - y$ , donde

$$L(j\omega) = x + jy$$

Remplazando la expresión de  $L$  en la ecuación (8.8),

$$\begin{aligned} |T(s)| &= \frac{|x + jy|}{|1 + x + jy|} \\ &= \left[ \frac{x^2 + y^2}{(1 + x)^2 + y^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

estamos interesados en los puntos donde  $|T(s)| = M$  (una constante). Entonces,

$$M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

luego,

$$M^2 (1 + x)^2 + M^2 y^2 = x^2 + y^2$$

y

$$M^2 (1 + 2x + x^2) + M^2 y^2 = x^2 + y^2$$

agrupando,

$$(M^2 - 1) y^2 + (M^2 - 1) x^2 + 2M^2 x + M^2 = 0$$

$$y^2 + x^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2} x - \frac{M^2}{1 - M^2} = 0$$

vamos a sumar y restar  $\left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2$  para completar el cuadrado, con lo cual se obtiene,

$$\left(x - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2$$

la cual representa una circunferencia de radio  $\frac{M}{1 - M^2}$ , con centro en  $\frac{M^2}{1 - M^2}$ . Nótese que, a medida que  $M$  tiende a uno, el radio se hace infinito. La figura siguiente muestra curvas de  $M$ -constante.

Cómo determinar la máxima ganancia? Combinando las curvas de  $M$ -constante con el diagrama de Nyquist de  $L(s)$ , se observa que  $M$  varía a medida que cambia la frecuencia, y existe una curva de  $M = M_T$ , tangente al diagrama. Esa es la máxima ganancia.

Usando este resultado, se puede ver que la especificación de sobrepico también se puede relacionar con el diagrama de Nyquist, es decir, con la respuesta de frecuencia del sistema de lazo abierto.

### Ancho de banda

El ancho de banda de un sistema de lazo cerrado caracteriza las frecuencias más altas que producen una respuesta del sistema. Teniendo en cuenta que una respuesta más rápida implica siempre mayor contenido de alta frecuencia, es claro que el ancho de banda tiene relación directa con la velocidad de respuesta. Sin embargo, aún queda la pregunta de cómo caracterizar el ancho de banda. Para propósitos de control, la definición más adecuada se basa en la función de sensibilidad:

**Definición 14** (Ancho de banda). *El Ancho de banda del sistema de lazo cerrado ( $\omega_B$ ) se define como la menor frecuencia a la cual  $|S(j\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$*

Es posible dar una especificación del ancho de banda con base en la función de transferencia de lazo  $L$ . Se puede probar que si  $MF < 90^\circ$  entonces,  $\omega_c > \omega_B$ .

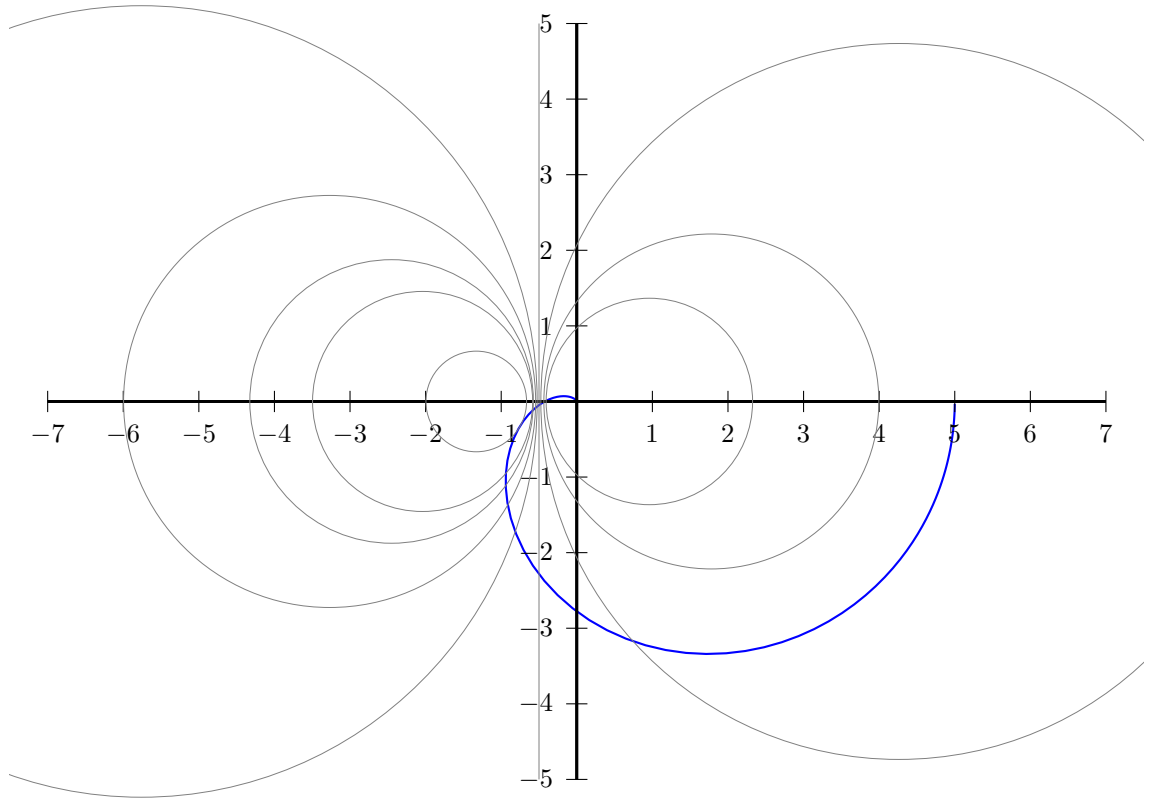


Figura 4.5: Margen de Fase

### Ganancia de alta frecuencia

La última especificación, en el dominio de frecuencia, se requiere para atenuar el ruido de medición, el cual suele ser de alta frecuencia. Para limitar el efecto de este ruido sobre la respuesta del sistema, se suele agregar una especificación acerca de la máxima ganancia a una cierta frecuencia, digamos  $\omega_n$ , por encima de la cual el ruido puede ser significativo. La especificación se da en la forma

$$|T(j\omega_n)| < m$$

## 4.5. Especificaciones sobre la señal de control

Para evitar la saturación de los actuadores y sus consecuencias desagradables sobre el sistema, es necesario incluir en los diseños una restricción sobre la magnitud de la señal que se le aplica al actuador. Por lo general, esta restricción



se da en la forma de una desigualdad

$$U_{\min} \leq u(t) \leq U_{\max}, \forall t \geq 0$$

donde  $U_{\min}$  y  $U_{\max}$  son los valores mínimo y máximo permisibles para  $u$ .

Teniendo en cuenta que la señal  $u$  normalmente representa desviaciones con respecto al valor nominal de la salida del actuador, esta restricción se suele escribir como

$$|u(t)| \leq U_M$$

## 4.6. Ejercicios

1. Demuestre que en un sistema de lazo cerrado con

$$T(s) = \frac{\beta_m s^m + \cdots \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \cdots \alpha_1 s + \alpha_0}$$

el error de posición es cero si y sólo si  $\alpha_0 = \beta_0$  y el error de velocidad es cero si y sólo si el error de posición es cero y  $\alpha_1 = \beta_1$ .

## Apéndice: relación entre $MF$ y $M_S$

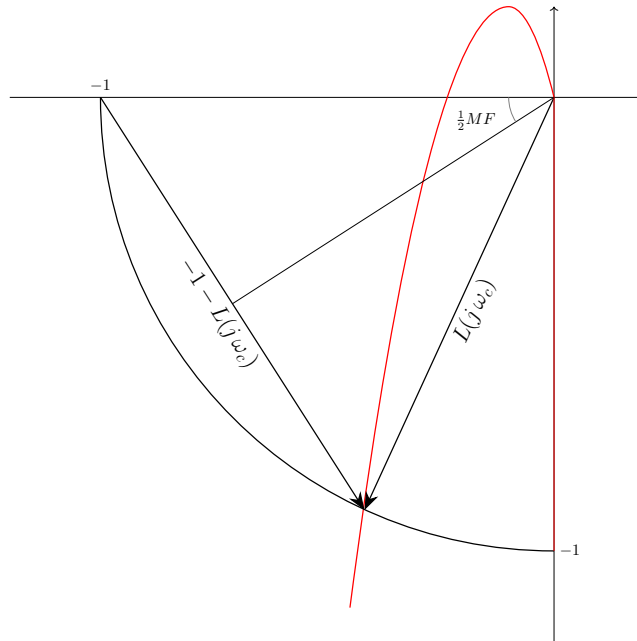


Figura 4.6: Relación entre Margen de Fase  $MF$  y máxima sensibilidad  $M_S$

Notemos que  $L(j\omega_{180}) = -1/MG$ . Por lo tanto,

$$T(j\omega_{180}) = \frac{-1}{MG - 1} \quad (4.12)$$

$$S(j\omega_{180}) = \frac{1}{1 - 1/MG} \quad (4.13)$$

Entonces,

$$MG \geq \frac{M_S}{M_S - 1}$$

La figura 4.6 muestra que

$$\begin{aligned} |S(j\omega_c)| &= 1/|1 + L(j\omega_c)| \\ &= 1/|-1 - L(j\omega_c)| \end{aligned}$$

Recordando que  $|L(j\omega_c)| = 1$ ,

$$M_S \geq |S(j\omega_c)| = |T(j\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(MF/2)}$$

Luego,

$$\sin(MF/2) \geq \frac{1}{2M_S}$$

y, entonces,

$$MF \geq 2 \arcsin\left(\frac{1}{2M_S}\right) \geq \frac{1}{M_S}$$

cuando el  $MF$  está dado en radianes.

## Capítulo 5

# Diseño de controladores

En este capítulo vamos a estudiar algunos de los controladores más simples. Sin embargo, no se los puede menospreciar: algunos estudios indican que los tipos de controladores que consideraremos aquí constituyen por lo menos el 90 % de todos los controladores usados en la industria y la mayoría de los ingenieros de control se ganan la vida diseñando e instalando controladores simples.

Empezaremos por desarrollar el concepto de un *control perfecto*, el cual es sólo una idealización de lo que queremos que haga el controlador. No obstante su carácter ideal, esta idea es muy poderosa y con frecuencia se usa en control para evaluar las posibilidades y limitaciones de control.

A continuación, se considerará el control PID, tal vez el más usado de todos. Veremos sus propiedades y algunos métodos de diseño, de carácter empírico. También consideraremos el problema de saturación de los actuadores y su efecto sobre el control PID. Para terminar, estudiaremos el control “on-off”, considerándolo como un caso particular del anterior.

### 5.1. Control “perfecto”

El objetivo de un sistema de control es el de lograr que la respuesta de la planta sea como la deseamos, aunque existan perturbaciones. Si el modelo del proceso se puede representar como en la figura 5.1, por medio de,

$$y(s) = P(s)u(s) + G_d(s)d(s)$$

Vamos a suponer que es posible, de alguna forma, hallar una función de transferencia que es la inversa de  $P(s)$ <sup>1</sup>; es decir, supondremos que existe una  $P^{-1}(s)$ , tal que  $P^{-1}(s)P(s) = 1$ . En ese caso, es posible lograr lo que se conoce como *Control perfecto*: Podemos hallar una  $u$  tal que  $y(t) = r(t)$ ,  $\forall t$ . Diremos que este controlador logra *Seguimiento perfecto* porque la salida es igual a la

---

<sup>1</sup>Después consideraremos el problema de hallar la inversa.

referencia todo el tiempo, y también logra *Rechazo de perturbaciones perfecto* puesto que el efecto de las perturbaciones es eliminado exactamente. En efecto, si usamos

$$u(s) = P^{-1}(s) [r(s) - G_d(s)d(s)]$$

entonces,

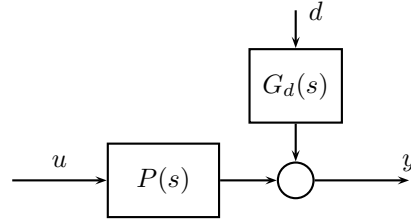


Figura 5.1: Proceso con perturbación

$$\begin{aligned} y(s) &= P(s) \{ P^{-1}(s) [r(s) - G_d(s)d(s)] \} + G_d(s)d(s) \\ &= r(s) - G_d(s)d(s) + G_d(s)d(s) \\ &= r(s) \end{aligned}$$

Lo cual prueba que si podemos hallar la *Inversa de la planta*  $P^{-1}(s)$ , se puede lograr control perfecto<sup>2</sup>. Prácticamente todos los métodos de diseño de controladores buscan aproximar de una forma u otra esta inversa.

Usando este control, el sistema controlado tiene la estructura mostrada en la figura 5.2

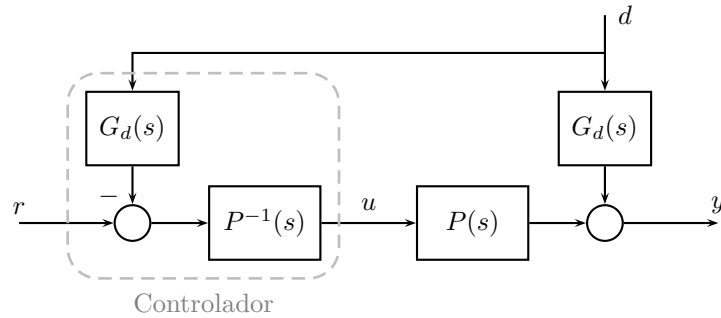


Figura 5.2: Control “perfecto”

Sin embargo, rápidamente vemos que el problema de hallar la inversa no es fácil: Si  $P(s)$  es estrictamente propia, entonces  $1/P(s)$  es impropia; además, si

<sup>2</sup>Claro, también suponemos que la perturbación  $d$  se puede medir.

$P$  es inestable, el producto  $P(s)P^{-1}(s)$  incluye una cancelación polo-cero en SPD, las cuales hemos excluido terminantemente. Aun así, la idea de inversión sigue siendo válida, aunque sea sólo una inversa aproximada.

## 5.2. Realimentación de alta ganancia

La forma más usada de aproximar la inversión consiste en usar realimentación. Hemos visto en el capítulo 2, sección 2.2 que un sistema de control con realimentación con alta ganancia produce una señal  $u$  que es aproximadamente igual a  $P^{-1}(s)r(s)$ . Por lo tanto, podemos aproximar la configuración del controlador por medio de la configuración de lazo cerrado, mostrada en la figura 5.3. 5.2

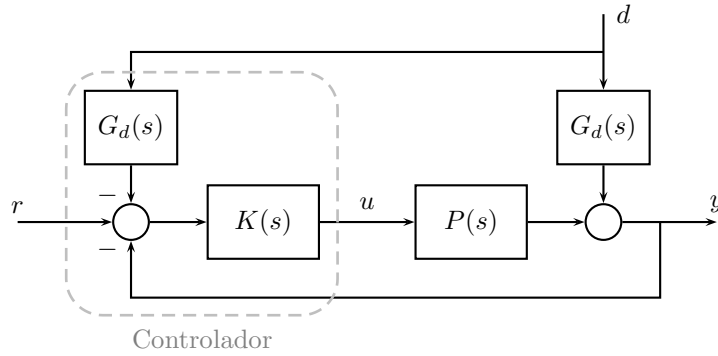


Figura 5.3: Inversión aproximada por realimentación

En la práctica, no es posible usar ganancias demasiado grandes por varias razones: En primer lugar, una ganancia muy alta suele producir una señal  $u(t)$  grande, lo cual produce saturación de los actuadores; ya hemos visto en el capítulo 2 que esto tiene efectos indeseables. En segundo lugar, también hemos aprendido que una ganancia alta produce una sensibilidad baja, pero también produce amplificación del ruido de medición. Sin embargo, es posible diseñar la función  $K(s)$  de tal forma que tenga una ganancia suficientemente alta a las frecuencias donde las señales  $r(j\omega)$  y  $d(j\omega)$  son significativas.

## 5.3. Control PID

El tipo de controlador más usado en la industria es, sin lugar a dudas, el llamado *Proporcional Integral Diferencial* o PID (por sus iniciales). Éste consiste (idealmente) en una función de transferencia de la forma:

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

La cual se prefiere escribir en la forma,

$$K(s) = k_p \left[ 1 + \frac{1}{T_r s} + T_d s \right] \quad (5.1)$$

Esto corresponde a una relación en el dominio del tiempo de la forma:

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{1}{T_r} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}.$$

Es decir, una parte **P**roportional al error, otra proporcional a la **I**ntegral del error y una a la **D**erivada del error con respecto al tiempo.

Los coeficientes de la expresión del error se conocen con los siguiente nombres:

$k_p$ : Ganancia (proporcional)

$k_i$ : Ganancia integral

$k_d$ : Ganancia diferencial

$T_r$ : Tiempo de reposición (“reset”)

$T_d$ : Tiempo diferencial.

La ecuación 5.1 muestra que la expresión del controlador no es propia, por lo cual no se puede realizar físicamente. El término diferencial<sup>3</sup> (D) no se puede implementar en forma exacta. Por eso en la práctica se reemplaza por una función propia de la forma,

$$\frac{T_d s}{1 + \tau_d s}$$

donde  $\tau_d$  es un parámetro fijado por el fabricante, el cual determina la ganancia de alta frecuencia; esta ganancia es la que determina la atenuación del ruido a alta frecuencia.  $\tau_d$  por lo general se escoge como  $\tau_d = T_d/N$  con  $N \in [5, 20]$ .

El controlador PID real está dado por:

$$K(s) = k_p \left[ 1 + \frac{1}{T_r s} + \frac{T_d s}{1 + \tau_d s} \right] \quad (5.2)$$

el cual se puede escribir como una función de segundo orden con un integrador (polo en  $s = 0$ ):

$$K(s) = \frac{k_p}{T_r} \left[ \frac{T_r (T_d + \tau_d) s^2 + (T_r + \tau_d) s + 1}{s (1 + \tau_d s)} \right] \quad (5.3)$$

El polo en  $s = 0$  (o lo que es equivalente, el integrador) produce una ganancia infinita a baja frecuencia, con lo cual se logra el efecto de inversión para las señales de baja frecuencia.

---

<sup>3</sup>Algunos lo llaman derivativo.

### Sintonización de controladores PID

La sintonización de controladores PID se lleva a cabo mediante procedimientos empíricos. Las técnicas más utilizadas fueron publicadas por J.G. Ziegler y N.B. Nichols, en 1942. Ziegler y Nichols crearon dos métodos. Uno de ellos se basa en la respuesta del proceso ante un escalón; se le conoce como el método de lazo abierto o de *Curva de reacción*. El otro método se basa en encontrar el margen de ganancia del sistema de lazo cerrado; se conoce como método de oscilación.

En realidad no existe ninguna garantía de que los métodos empíricos produzcan un ajuste adecuado. Por lo general, los valores recomendados sirven como ajuste inicial, a partir del cual se debe afinar el ajuste, de acuerdo con la respuesta obtenida. Para lograr un buen ajuste, vale la pena considerar el efecto que tiene variar cada uno de los parámetros. Para facilitar el análisis, hemos resumido en la siguiente tabla 5.1 el efecto de **aumentar**  $k_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$ , sobre la velocidad de respuesta y sobre la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

Parámetro	Estabilidad	Velocidad
$k_p \nearrow$	Desestabilizador	Aumenta
$T_i \nearrow$	Estabilizador	Disminuye
$T_d \nearrow$	Estabilizador	Aumenta

Cuadro 5.1: Efecto de aumentar parámetros del controlador PID

### Método de lazo abierto

En este método el proceso se lleva a su punto de operación con el controlador desconectado y, en ese punto, se somete a un cambio en la entrada tipo escalón, con lo cual la entrada pasa de un valor inicial  $u_0$  a un valor  $u_f$ . Por lo general, se recomienda que el escalón sea de 10 a 20 % del valor nominal.

La respuesta del proceso se debe registrar. Una respuesta típica se muestra en la curva gruesa de la figura 5.4<sup>4</sup>. La respuesta al escalón se conoce como curva de reacción en la industria de procesos.

A partir de la curva de reacción se obtienen los valores inicial  $y_0$  y final  $y_f$  de la respuesta y, además, el punto de inflexión; es decir el punto donde la pendiente de la curva es máxima, la cual ocurre en el tiempo  $t_{\text{máx}}$ . En ese punto se traza la tangente y se encuentra su cruce con las rectas de  $y = y_0$  y  $y = y_f$ . Los cruces se producen en  $L$  y  $t_1$ , respectivamente, tal como se muestra en la figura 5.4. También se requiere el punto de intersección con  $t = 0$ ,  $y_I$ .

Ahora definimos los siguientes parámetros

$$T = t_1 - L; \quad K = \frac{y_s - y_0}{u_f - u_0}; \quad a = y_0 - y_I$$

<sup>4</sup>Si la respuesta al escalón no es de esta forma, el método no es aplicable.

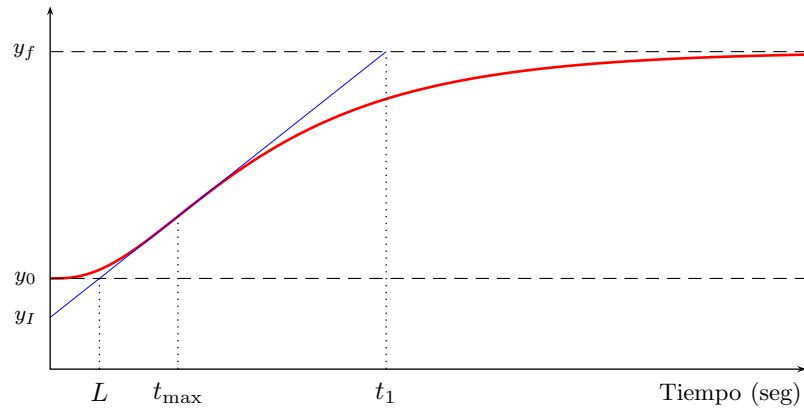


Figura 5.4: Curva de reacción típica

Usando estos parámetros se puede aproximar la respuesta de lazo abierto por medio de un sistema de primer orden con retardo, en la forma:

$$P(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls}$$

Los valores recomendados por Ziegler y Nichols son los siguientes (tabla 5.2), dependiendo de si se va a instalar sólo un control Proporcional (P), Proporcional Integral (PI) o un Proporcional Integral Diferencial (PID) completo.

Tipo	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3L$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$0.5L$

Cuadro 5.2: Valores recomendados para el controlador PID

### Método de lazo cerrado

Ziegler y Nichols desarrollaron otro método utilizable en plantas que son estables en lazo abierto. El procedimiento consiste en lo siguiente:

1. Usar una ganancia  $k_p$  muy baja y desactivar la acción integral I (hacer  $T_i = \infty$ ) y la diferencial D (haciendo  $T_d = 0$ ).
2. Incrementar la ganancia  $k_p$  lentamente hasta cuando el sistema de lazo cerrado oscile.



3. Registrar la ganancia  $k_{cr}$  a la cual se produce la oscilación y el período  $T_{cr}$ , tal como se ilustra en la figura 5.5.
4. Los valores recomendados para los parámetros del controlador están dados en términos de  $k_{cr}$  y  $T_{cr}$ , según la tabla 5.3

Tipo	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5k_{cr}$		
PI	$0.45k_{cr}$	$0.83T_{cr}$	
PID	$0.6k_{cr}$	$0.5T_{cr}$	$0.125T_{cr}$

Cuadro 5.3: Valores recomendados para el controlador PID

Cuando se dispone de un modelo para el proceso, es fácil encontrar la ganancia y el período críticos usando simulación o la tabla de RH<sup>5</sup>.

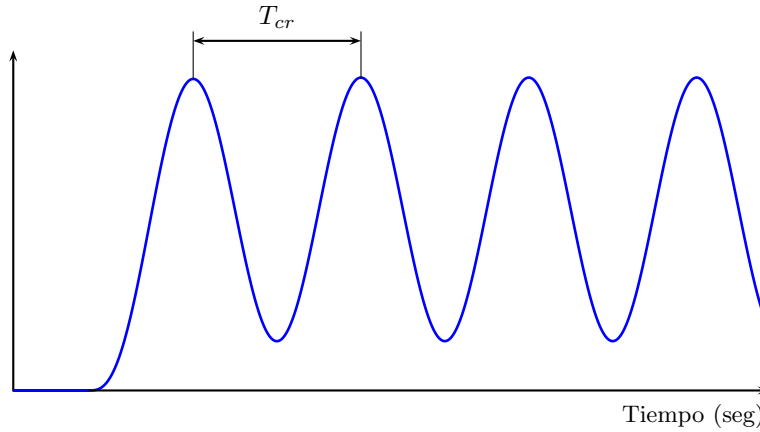


Figura 5.5: Sistema con ganancia crítica

**Ejemplo 5.1.** Consideremos un proceso descrito por la función de transferencia

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(1.25s+1)(4s+1)}$$

Para este proceso se obtuvo la respuesta al escalón (curva de reacción), la cual se muestra en la figura 5.6. Usando la figura, se obtiene,

$$L = 1.303; \quad K = 1; \quad t_1 = 8.89; \quad a = 0.172$$

<sup>5</sup>También se puede usar la técnica de “root-locus”, descrita en el capítulo ??.

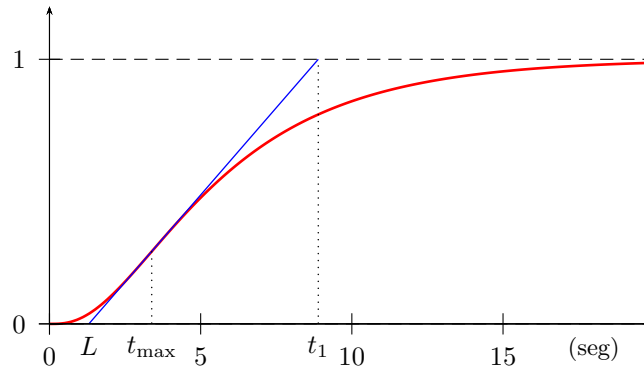


Figura 5.6: Curva de reacción

de donde,  $T = t_1 - L = 7.59$ . Usando estos datos se obtienen los parámetros para un controlador PID:

$$k_p = 1.2/a = 6.98; \quad T_i = 2L = 2.6; \quad T_d = 0.5L = 0.65$$

Con estos valores se obtuvieron las respuesta del sistema de lazo cerrado ante cambios tipo escalón en la referencia y el la perturbación, usando controladores tipo P, PI y PID. Estos resultados se pueden observar en la figura 5.7

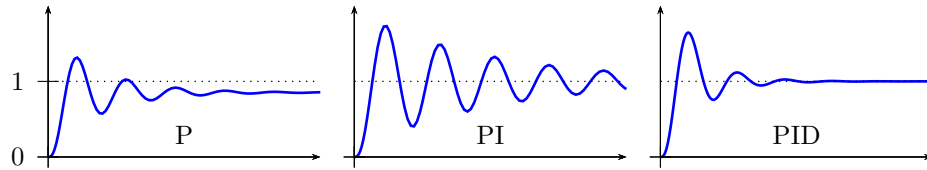


Figura 5.7: Diseño Z-N, curva de reacción. Respuesta al escalón

Usando un control proporcional, e incrementando la ganancia se halla la ganancia crítica  $k_{cr} = 11.91$  y el período de oscilación  $T_{cr} = 5.51$ . Usando estos valores se puede diseñar el controlador PID:

$$k_p = 0.5k_{cr} = 7.14; \quad T_i = 0.5T_{cr} = 2.76; \quad T_d = 0.125T_{cr} = 0.69$$

Con estos parámetros, se obtuvo la respuesta al escalón, la cual se muestra en la figura 5.8, junto con las respuestas del sistema bajo controles P y PI.

Para este ejemplo los dos métodos dan valores muy similares de los parámetros y, por lo tanto las respuestas son parecidas. Sin embargo, esto no siempre sucede. Las respuestas de lazo cerrado muestran el efecto de la acción integral

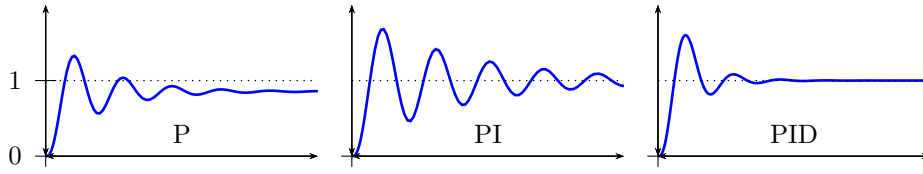


Figura 5.8: Diseño Z-N, lazo cerrado. Respuesta al escalón

para eliminar el error estático, pero también su efecto desestabilizador. La acción diferencial tiene un efecto estabilizador puesto que introduce el equivalente de amortiguamiento.

Las respuestas mostradas muestran sobrepicos pronunciados. Esta es una característica frecuente en los diseños realizados mediante el ajuste de Ziegler-Nichols.

Se han desarrollado muchos métodos alternativos para ajustar controladores PID. Algunos de los más utilizados son los de Cohen-Coon, el cual usa curva de reacción y el de Astrom, el cual utiliza un relé para hallar los valores de  $k_{cr}$  y  $T_{cr}$  en forma más simple y segura. La referencia [AW95] contiene muchas indicaciones sobre el uso y ajuste así como variantes y refinamientos del controlador PID.

## 5.4. Saturación del actuador

La saturación del actuador deteriora el desempeño del sistema de lazo cerrado. La razón básica es que mientras el actuador está saturado, el sistema actúa prácticamente como si estuviera en lazo abierto y la respuesta no afecta a la señal de entrada.

En el caso de un controlador con acción integral como los PID, este fenómeno se hace más pronunciado, debido a que el integrador suma todos los errores, sin tomar en cuenta que la señal que afecta al proceso no es la que el controlador produce sino la que el actuador puede producir. Así mientras haya saturación, por ejemplo en el límite superior, la integral aumenta sin que esto afecte realmente al proceso. Sin embargo, cuando se requiera que la señal de control baje, el controlador está dominado por el término integral y se demorará en producir el efecto necesario. Este fenómeno se conoce como *Saturación integral* o “reset windup”.

Para ver el efecto de la saturación sobre la respuesta del sistema, consideremos de nuevo el ejemplo anterior. Vamos a suponer que el actuador tiene un límite de variación tal que

$$|u(t)| \leq 2$$

En ese caso la respuesta es mucho más lenta para responder y tarda mucho más tiempo en llevar el error a cero por primera vez. Esto se puede apreciar en la figura 5.9, en donde la línea punteada muestra la respuesta obtenida con un actuador sin limitaciones y la línea continua es la respuesta del sistema real, con actuador limitado.

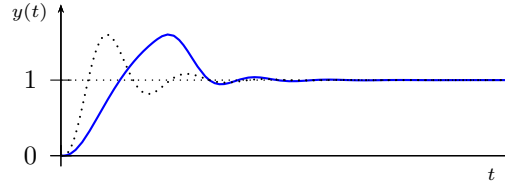


Figura 5.9: Efecto de la saturación integral

**Anti “reset-windup”** Para evitar los efectos molestos e inconvenientes de la saturación sobre el sistema de lazo cerrado es necesario que el controlador PID utilice alguna forma de compensar estos efectos siempre que se pueda detectar la saturación.

La forma más simple de compensación consiste en suspender la integración cuando el actuador está saturado. A esta alternativa se le conoce como *integración condicional* y el controlador resultante se conoce como *control anti-windup*<sup>6</sup> o *control de la saturación integral*.

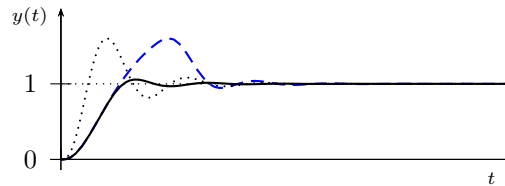


Figura 5.10: Efecto de la saturación integral y del control antiwindup

En la figura 5.10 se observa el resultado de un control PID con CAW. La línea de rayas es la respuesta del sistema sin anti-windup y la línea continua es el resultado del control CAW. Para referencia se ha incluido también la respuesta del sistema con actuador no saturado (línea punteada). Vemos que el CAW reduce drásticamente el sobrepico y, en general, produce una respuesta mucho mejor. La velocidad de respuesta, representada por el tiempo de subida, sigue siendo mayor que el caso sin saturación, pero esto es inevitable, a menos que se pueda reemplazar el actuador.

<sup>6</sup>El cual abreviaremos como CAW

## 5.5. Control “on-off”

Supongamos un sistema de control proporcional. Esto significa que un error pequeño producirá un valor alto de  $u(t) = k_p e(t)$ . Si la ganancia es muy grande, entonces, el actuador se saturará muy fácilmente. Si el actuador tiene un rango de operación dado por

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$$

entonces, la salida del actuador consistirá en una señal que salta de  $u_{\max}$  a  $u_{\min}$  y viceversa, cada vez que  $e(t)$  cambia de signo.

La aplicación típica de este tipo de controlador es en la regulación de temperatura de un horno eléctrico (también se usan frecuentemente para regular presiones). Prácticamente todos los hornos pequeños funcionan de esta forma. Veamos cómo funciona este sistema: Supongamos que  $u_{\min} = 0$ . En primer lugar, cuando se aplica un escalón positivo  $r$ , por ejemplo cuando se enciende el horno la señal de control toma su valor máximo ( $u(t) = u_{\max}$ ), lo cual hace aumentar la variable controlada (temperatura) hasta cuando se logra que  $e(t) = 0$ , es decir, cuando  $y(t) = r$  (la temperatura alcanzó el nivel deseado). En este punto,  $e(t)$  cambia de signo, lo cual provoca el cambio a  $u(t) = 0$  (la corriente en la resistencia del horno se interrumpe). La resistencia empieza a enfriarse, pero aún es capaz de calentar un poco el interior del horno. Poco tiempo después, el horno empieza a enfriarse. Cuando la temperatura desciende por debajo del valor  $r$ , el error nuevamente se vuelve positivo y la resistencia se enciende. Este proceso mantiene la temperatura en el valor deseado.

Sin embargo, Hay un problema con este controlador. Cuando la temperatura se encuentra muy cerca del valor deseado, la resistencia de calefacción prende y apaga permanentemente<sup>7</sup>, lo cual con seguridad dañará el interruptor o contactor usado para abrir y cerrar el circuito. Aunque mantendrá la temperatura en el valor deseado.

Cómo se puede evitar esta situación?

Una solución ideada para evitar este problema consiste en apagar y prender el actuador en valores diferentes: Se apaga cuando  $e(t) = E_1$  y vuelve a prender cuando  $e(t) = E_2$ , donde  $E_1 > E_2$ . Esta relación se puede representar en forma gráfica como muestra la figura 5.11. Este tipo de relación se conoce como *histéresis*. Nótese que el valor de  $u(t)$  no depende en este caso únicamente del valor del error  $u(t)$ , sino también de su derivada. Cuando  $0 \leq e(t) \leq E_1$ ,  $u(t) = u_{\max}$  si  $e(t)$  es decreciente y  $u(t) = u_{\min}$  en caso contrario.

La diferencia  $\delta = E_1 - E_2$  se conoce como *Magnitud de Ajuste*. Este valor caracteriza la operación del sistema de lazo cerrado, puesto que el error oscilará entre  $E_2$  y  $E_1$  en un comportamiento periódico, conocido como *Ciclo límite*. La amplitud de la oscilación es  $\delta$ . La figura 5.12 muestra la respuesta de un sistema con control On-Off ante un cambio en la referencia y ante una perturbación.

<sup>7</sup>A esta condición se le conoce como modo de *chirrido* (“shattering mode”).

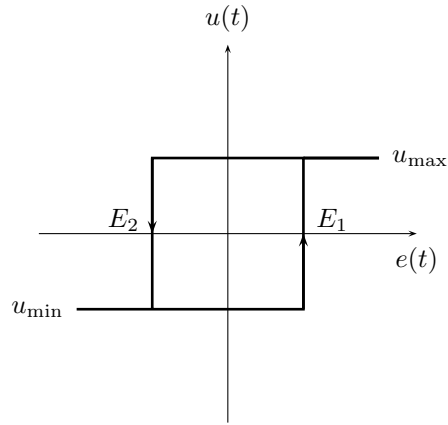


Figura 5.11: Control on-off

La figura también ilustra el comportamiento del actuador. Nótese la aparición del ciclo límite en la respuesta.

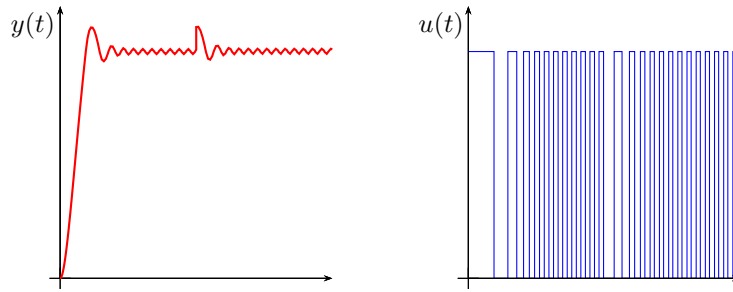


Figura 5.12: Respuesta sistema con control On-Off

La especificación de los controladores se suele dar en términos del ajuste  $\delta$  y de uno de los valores  $E_1$  o  $E_2$ . Las dos opciones se conocen con los siguientes nombres:

**Ajuste aditivo:** Se especifica  $E_2$ .  $E_1$  está dado por  $E_1 = E_2 + \delta$ .

**Ajuste diferencial:** Se especifica  $E_1$ . En ese caso,  $E_2 = E_1 - \delta$ .

La amplitud del ciclo límite es  $\delta$  y su frecuencia depende de la dinámica del proceso. Esta frecuencia es la que determina el deterioro del interruptor. Para el controlador On-Off, al igual que para el PID, la velocidad de respuesta depende fundamentalmente del valor  $u_{\text{máx}}$  del actuador.

Puesto que el controlador On-Off es, básicamente, un controlador de alta ganancia, produce una aproximación aceptable a la inversa  $P^{-1}(s)$ . Es capaz de rechazar perturbaciones y *seguir* la referencia. Sin embargo, la presencia del ciclo límite crea algunos inconvenientes. Dependiendo de la aplicación, éstos pueden ser inaceptables; por ejemplo en sistemas electromecánicos, las vibraciones resultantes pueden ser muy dañinas y producir fatiga de los materiales.

## Capítulo 6

# Diseño clásico de controladores

En este capítulo estudiaremos los métodos clásicos de diseño de controladores. En primera instancia revisaremos la relación entre los polos de lazo cerrado y la respuesta transitoria del sistema. El resultado será una región del plano complejo donde quisiéramos los polos: La región privilegiada donde localizaremos los polos.

El primer método de diseño que vamos a considerar es el *Lugar geométrico de las raíces* o “Root-Locus”. Éste es simplemente una forma de estudiar la variación de la posición de los polos de lazo cerrado cuando se cambia un parámetro del controlador (generalmente la ganancia).

La última parte del capítulo presenta el diseño basado en la respuesta de frecuencia usando redes de adelanto y atraso.

### 6.1. Diseño por asignación de polos

Para un sistema de segundo orden existe una relación directa entre las características de su respuesta al escalón y la localización de los polos. Esta relación la vamos a extrapolar a todos los sistemas, teniendo en cuenta que un sistema de orden mayor se puede aproximar por medio de un sistema de primero o segundo orden.

Consideraremos el sistema descrito por la función de transferencia típica de segundo orden:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (6.1)$$

Donde se usan los parámetros:

$\zeta$ : La relación de amortiguamiento.

$\omega_0$ : La frecuencia natural no amortiguada.



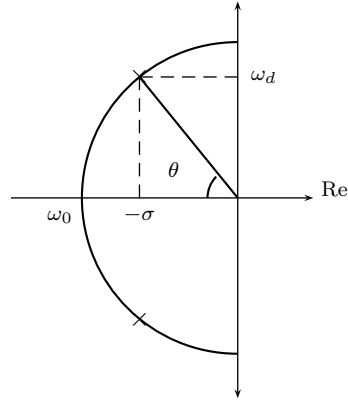


Figura 6.1: Polos de un sistema de segundo orden

$G(s)$  tiene sus polos en

$$s_{1,2} = \begin{cases} -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} & \text{si } \zeta \geq 1 \\ -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} & \text{si } \zeta < 1 \end{cases}$$

Analicemos el caso complejo: Los polos complejos conjugados se muestran en la figura 6.1. Los polos se pueden escribir

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

donde

$\sigma$ : Se conoce como factor de amortiguamiento.

$\omega$ : Se llama frecuencia natural (amortiguada).

Su magnitud es:

$$|s_{1,2}| = \omega_0\sqrt{\zeta^2 + 1 - \zeta^2} = \omega_0$$

la cual sólo depende de  $\omega_0$ . El ángulo  $\theta$  está dado por:

$$\cos \theta = \frac{\zeta\omega_0}{\omega_0} = \zeta \quad \text{ó} \quad \sin \theta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (6.2)$$

y depende únicamente de  $\zeta$ .

La respuesta del sistema ante un escalón unitario se puede hallar mediante transformada de Laplace en la forma:

$$y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)}$$

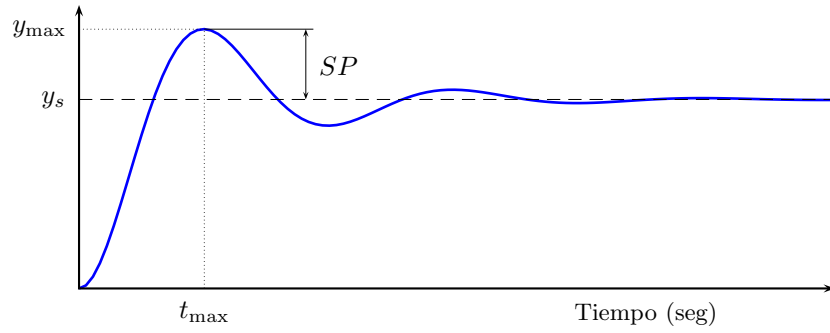


Figura 6.2: Respuesta al escalón de sistema de segundo orden

Esta expresión puede invertirse, usando descomposición en fracciones parciales:

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{a}{s - \sigma + j\omega} + \frac{a^*}{s - \sigma - j\omega}$$

donde

$$a = y(s)(s - \sigma + j\omega)|_{s=\sigma-j\omega} = \frac{\omega_0^2}{2\omega j(\sigma + j\omega)}$$

Invirtiendo y combinando las exponenciales complejas se obtiene:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta) = 1 - \frac{1}{\sin \theta} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta) \quad (6.3)$$

### Sobrepico

Queremos relacionar el sobrepico  $SP$  con los polos. Entonces, hallemos  $SP$ . El máximo de  $y(t)$  ocurre cuando  $\frac{dy}{dt} = 0$ , es decir,

$$\frac{dy}{dt} = -\sigma \frac{\omega_0}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta) - \omega_0 e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) = 0$$

lo cual ocurre cuando

$$\frac{\sin(\omega t + \theta)}{\cos(\omega t + \theta)} = \tan(\omega t + \theta) = \frac{\omega}{-\sigma} = \tan \theta$$

Usando la fórmula de adición,

$$\tan(\omega t + \theta) = \frac{\tan \omega t + \tan \theta}{1 + \tan \omega t \tan \theta}$$

se ve que los máximos (y mínimos) ocurren cuando  $\tan \omega t = 0$ , es decir,

$$\omega t = k\pi, \quad k = 0, 1, \dots$$

Fácilmente se ve que el máximo ocurre cuando  $k = 1$ . Por lo tanto,

$$t_{\text{máx}} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6.4)$$

y el valor máximo de  $y(t)$  es:

$$y_{\text{máx}} = y(t_{\text{máx}}) = 1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{\sigma t_{\text{máx}}} \sin(\pi + \theta) = 1 + \frac{1}{\sin \theta} e^{\sigma t_{\text{máx}}} \sin(\theta)$$

Por lo tanto, se halla el valor pico de la respuesta:

$$y_{\text{máx}} = 1 + e^{-\zeta \pi / \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6.5)$$

y el sobrepico  $SP$  está dado por

$$SP = e^{-\zeta \pi / \sqrt{1 - \zeta^2}} = e^{-\pi \cot \theta} \quad (6.6)$$

Analizando la ecuación 6.6 vemos que el sobrepico depende únicamente de la relación de amortiguamiento  $\zeta$  (o del ángulo  $\theta$ ), para el sistema de segundo orden. Por ello cuando se requiere una especificación con respecto al  $SP$ , es posible convertirla en una con respecto al ángulo  $\theta$  de los polos de lazo cerrado. Puesto que la relación no es simple, la siguiente tabla sirve de referencia

$SP < 10\%$	$\theta < 53^\circ$
$SP < 5\%$	$\theta < 45^\circ$
$SP < 1\%$	$\theta < 36^\circ$

Cuadro 6.1: Sobrepico vs. ángulo  $\theta$

### Tiempo de asentamiento $t_s$

También queremos relacionar el tiempo de asentamiento con la localización de los polos. La ecuación 6.3 muestra que la diferencia  $y(t) - y_s$  decrece sólo debido al término exponencial. Por lo tanto, decrece más rápidamente mientras mayor sea  $\sigma$ . Por lo tanto, para reducir  $t_s$  se debe localizar los polos más a la izquierda del plano complejo. Para el sistema de segundo orden es posible encontrar una ecuación que relacione los dos valores. Sin embargo, usaremos una relación empírica, obtenida del sistema de segundo orden cuando  $\zeta < 0.8$  o cuando  $\zeta > 1.05$ :

$$\sigma \geq \frac{4.5}{t_s} \quad (6.7)$$

### Tiempo de ascenso

El tiempo de ascenso  $t_r$  también se puede relacionar con la posición de los polos. La ecuación 6.4 muestra que  $t_{\text{máx}}$  es inversamente proporcional a  $\omega_0$ , la

distancia de los polos al origen. Por lo tanto, el tiempo de ascenso también será inversamente proporcional a  $\omega_0$ . Esto quiere decir que para reducir el tiempo de ascenso, se debe buscar que los polos estén tan lejos del origen como sea posible.

### La zona rosa del plano complejo

En esta sección hemos visto que, para los sistemas de segundo orden, es posible establecer una zona privilegiada del plano complejo donde deben estar los polos de lazo cerrado para cumplir las especificaciones de sobrepico y de tiempo de asentamiento. Para sistemas de orden mayor que dos no es posible establecer rigurosamente una zona así. Sin embargo, vamos a usar los resultados obtenidos como guía para el diseño de cualquier sistema, estableciendo una región del plano complejo donde deseamos localizar los polos.

Entonces, dados valores especificados de  $SP$  y de  $t_s$ , usaremos los resultados de la tabla 6.1 y la ecuación 6.7 para definir la región, que llamaremos *Zona rosa*<sup>1</sup> en la forma

$$Z_D := \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \Re s < -\frac{4.5}{t_s}; \theta < \theta_{SP} \right\}$$

donde  $\theta$  satisface  $\tan \theta = \Im s / \Re s$  y  $\theta_{SP}$  está dado por la tabla 6.1.

**Ejemplo 6.1.** Para ilustrar el concepto de la zona rosa veamos dónde deben estar localizados los polos de un sistema de lazo cerrado cuando se ha especificado que

$$SP < 5\%; \quad t_s < 1.5 \text{ seg}$$

De la tabla 6.1 se observa que el ángulo debe satisfacer  $\theta < 45^\circ$ . Además, para satisfacer el requerimiento de tiempo de asentamiento, se debe cumplir que  $\sigma > 4.5/1.5 = 3$ . Por lo tanto, la zona rosa para este problema es la que se muestra en la figura 6.3.

### Constante de tiempo

Para un sistema de primer orden de la forma,

$$P(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{k}{Ts+1}$$

la constante de tiempo se define como  $T = 1/a$ . La respuesta al escalón de este sistema es:

$$y(t) = k(1 - e^{-at}) = k(1 - e^{t/T})$$

Como vemos, la constante de tiempo es el inverso del polo de la función de transferencia de primer orden. Vamos a tratar de generalizar este concepto a funciones de transferencia de orden mayor.

<sup>1</sup>O, región privilegiada u otro nombre distintivo. Usamos el símbolo  $Z_D$  para indicar que la zona está relacionada con unas especificaciones de diseño dadas.

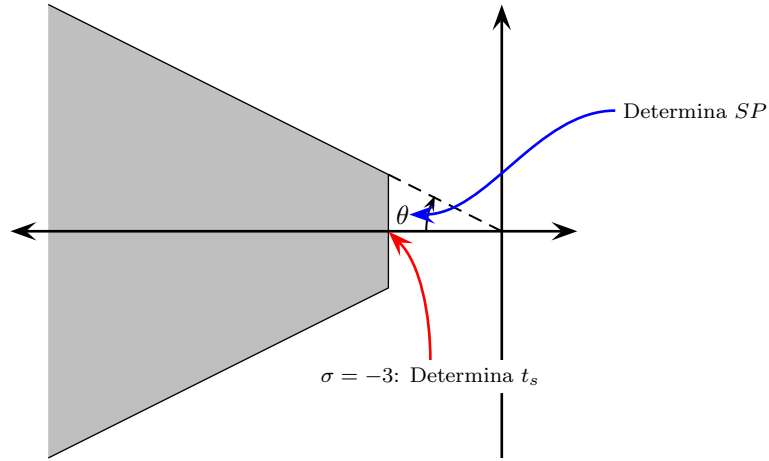


Figura 6.3: Zona rosa

Para un sistema estable de orden mayor, descrito por

$$P(s) = \frac{k(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - \sigma_1 - j\omega_1) \cdots (s - \sigma_\nu - j\omega_\nu)}$$

la respuesta al escalón está dada por una constante más una suma de exponenciales de la forma  $e^{\sigma_i t + j\omega_i t}$ , las cuales decrecen debido al término  $e^{\sigma_i t}$ . Desde luego, unas decrecen más rápido que otras. Por esta razón haremos la siguiente,

**Definición 15** (Polo dominante:). *El polo dominante de la función de transferencia estable  $P(s)$  es aquel cuya parte real es mayor (el más cercano al eje imaginario).*

Usando el concepto de polo dominante, es fácil definir la constante de tiempo de cualquier sistema.

**Definición 16** (Constante de tiempo:). *Si  $\sigma_d \pm j\omega_d$  es el polo dominante de  $P(s)$ , se define la constante de tiempo como*

$$T_P = \frac{1}{-\sigma_p}$$

**Ejemplo 6.2.** *La función de transferencia*

$$G(s) = \frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}$$

tiene sus polos en  $\{-1, -0.8, -0, 25\}$ , Por lo tanto, el polo dominante es  $-0, 25$  y la constante de tiempo está dada por:

$$T_G = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ seg.}$$

El cálculo es fácil en Julia:

---

```

1      # Definición de la función de transferencia
2      G = tf(1, [5, 10.25, 6.25, 1]);
3      # Cálculo de los polos
4      polos = pole(G)
5      # Encuentra el polo que tiene máxima parte real
6      # y calcula la constante de tiempo
7      T = -1. / maximum(real.(polos))

```

---

**Ejemplo 6.3.** La función de transferencia

$$T(s) = \frac{2}{s^4 + 4.6s^3 + 8.44s^2 + 8.12s + 3.28}$$

tiene polos en  $\{-1, -2, -0.8 + j, -0.8 - j\}$ . Luego el polo dominante es  $-0.8 \pm j$  y la constante de tiempo es  $T_T = 1/0.8 = 1.25$  seg.

El cálculo se hizo en Julia usando,

---

```

1      # Definición de la función de transferencia
2      T = tf(2, [1, 4.6, 8.44, 8.12, 3.28]);
3      # Encuentra el polo que tiene máxima parte real
4      # y calcula la constante de tiempo
5      T = -1. / maximum(real.(pole(T)))

```

---

## 6.2. Lugar geométrico de las Raíces

Para ilustrar el primer método de diseño consideremos el sistema de control proporcional de la figura 6.4, donde

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}.$$

Los polos de la función de transferencia de lazo cerrado,

$$T(s) = \frac{kP(s)}{1 + kP(s)} = \frac{kn_P(s)}{d_P(s) + kn_P(s)}$$

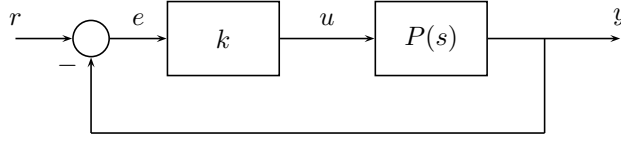


Figura 6.4: Control proporcional

son las raíces de la ecuación característica

$$d_P(s) + k n_P(s) = 0 \quad (6.8)$$

Si  $\partial d_P(s) = n$ , la ecuación 6.8 es una ecuación de grado  $n$  para cualquier valor de  $k$ . Queremos analizar el comportamiento de las raíces cuando  $k$  varía entre 0 e  $\infty$ . El objetivo es identificar los valores de la ganancia  $k$  para los cuales todos los polos se encuentran en la zona rosa de nuestro problema.

**Definición 17** (Lugar geométrico de las raíces —“root-locus”—). *El lugar geométrico de los polos de  $T(s)$  cuando la ganancia  $k$  varía entre 0 e  $\infty$  se conoce como el lugar geométrico de las raíces o “root-locus”.*

**Ejemplo 6.4.** Para el proceso descrito por

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

la ecuación característica es:

$$1 + k \frac{1}{s(s+2)} = s(s+2) + k = 0$$

luego los polos de lazo cerrado son las raíces de  $s^2 + 2s + k$ , las cuales están dadas por:  $-1 \pm \sqrt{1-k}$ . Es fácil ver que las raíces son reales y distintas para  $k \in [0, 1)$ ; las dos coinciden si  $k = 1$  y son complejas conjugadas para  $k > 1$ .

La variación de los polos se representa en forma gráfica en el plano complejo como se muestra en la figura 6.5. A esta figura se le conoce como lugar geométrico (o “root-locus”) para el sistema descrito por  $P(s)$ . En esa figura, el símbolo  $\times$  indica la posición de los polos de lazo abierto (polos de  $P(s)$ ) y con el fin de resaltar la existencia de dos polos, se han dibujado dos ramas de diferente color<sup>2</sup>.

En el caso general, la ecuación característica se puede escribir como

$$1 + kL(s) = 0$$

<sup>2</sup>Desde luego, no hay forma de decidir cuál de los dos polos reales es el que desciende o asciende a medida que  $k$  aumenta.

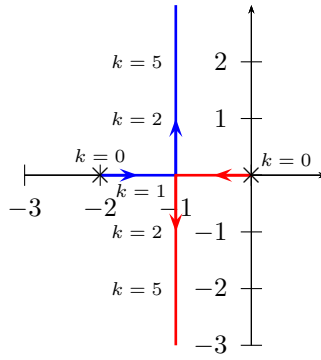


Figura 6.5: Lugar geométrico de las raíces de  $P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

Por lo tanto, un punto  $s_0$  del plano complejo pertenece al lugar geométrico ( $s_0$  es un polo de lazo cerrado, para alguna ganancia  $k_0$ ) si satisface

$$1 + k_0 L(s_0) = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$L(s_0) = \frac{-1}{k_0} \quad (6.9)$$

Esta última ecuación se puede escribir en términos de magnitud y fase como:

$$\angle L(s_0) = -180^\circ; \quad |L(s_0)| = \frac{1}{k_0} \quad (6.10)$$

lo cual significa que para que  $s_0$  esté en el lugar geométrico, basta con que cumpla la condición de ángulo. La ganancia necesaria se puede determinar de la condición de magnitud.

### Obtención del lugar geométrico

Existe un procedimiento simple para dibujar el lugar geométrico de las raíces. Sin embargo, hoy en día, la forma más práctica de obtenerlo es mediante un computador o calculadora programable, usando una técnica de *fuerza bruta*. Es decir, tomar diferentes valores de la ganancia y calcular los polos de lazo cerrado. No obstante, es importante poder bosquejar el lugar geométrico rápidamente. Por esta razón, hemos incluido en un apéndice de este capítulo el desarrollo del método *analítico* usado para dibujar el “root-locus”.

Nuestro desarrollo supone que se dispone de algunas formas de obtener el lugar geométrico. Y las gráficas que presentamos se obtuvieron usando Julia. Este programa cuenta con varias herramientas para obtener el lugar geométrico. La más simple de todas es el comando



---

```
1 plot(rlocus(L))
```

---

el cual dibuja el lugar geométrico de cualquier función de transferencia  $L$  o sistema LTI definido.

**Ejemplo 6.5.** Para calcular el lugar geométrico correspondiente al sistema descrito por

$$L(s) = \frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}$$

usamos el siguiente código en Julia:

---

```
1 # Definimos el sistema LTI
2 L = tf(1,[5, 10.25, 6.25, 1])
3 # Obtenemos el root locus
4 plot(rlocus(L))
```

---

El resultado se presenta en la figura 6.6. Presionando el botón derecho del ratón sobre la gráfica permite seleccionar la opción **Grid**, la cual genera curvas de ángulo  $\theta$ <sup>3</sup> y de distancia al origen constantes. Éstas, como hemos visto, se relacionan con el sobrepico y el tiempo de ascenso. Dicha figura también ilustra cómo al señalar con el cursor sobre un punto del lugar geométrico, aparece una tabla que contiene la localización del polo escogido, la ganancia correspondiente, la relación de amortiguamiento  $\zeta$  equivalente, el sobrepico esperado  $SP$  y la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_0$  equivalente.

El punto que se seleccionó en el lugar geométrico es  $0.366 + j0.388$ , el cual corresponde a una ganancia de  $k = 0.874$  y debemos esperar un sobrepico de 5.14 % en la respuesta al escalón.

La figura 6.7 muestra el lugar geométrico del ejemplo anterior. Se han incluido también restricciones para sobrepico y tiempo de asentamiento.

### Diseño usando el lugar geométrico

Veamos cómo se puede usar el lugar geométrico para diseñar controladores. Empezaremos nuestro diseño seleccionando un tipo de controlador fijo, con algunos parámetros variables. Por lo general, vamos a considerar que la ganancia es variable. Posteriormente veremos cómo se puede generalizar el lugar geométrico de las raíces al caso de variación de otros parámetros.

---

<sup>3</sup>O, lo que es equivalente, de la relación de amortiguamiento  $\zeta$  equivalente.

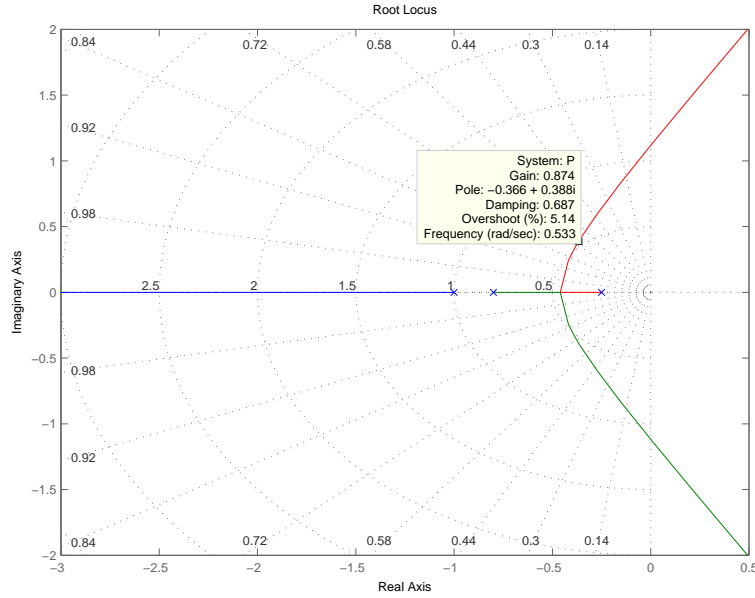


Figura 6.6: Lugar geométrico de  $\frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}$

Usaremos un procedimiento general para el diseño de controladores. El sistema de lazo cerrado lo representaremos por la función de sensibilidad complementaria:

$$T(s) = \frac{kL(s)}{1 + kL(s)}$$

1. Seleccionar una configuración del controlador, con una ganancia variable  $k$ .
2. Encontrar el rango de valores de ganancia  $[k_{\min}, k_{\max}]$  que garantizan la estabilidad.
3. Escoger el valor de ganancia mínima  $\underline{k}$  que garantiza el cumplimiento de la especificación estática. Si  $\underline{k} \notin [k_{\min}, k_{\max}]$ , es necesario seleccionar otro tipo de controlador (volver al paso 1).
4. Traducir las especificaciones dinámicas  $SP$  y  $t_s$  en una *Zona rosa (ZR)*, donde deben estar los polos.
5. Construir el lugar geométrico para  $L(s)$ , indicando la *ZR* y determinar los valores de la ganancia que garantizan que **TODOS** los polos están en *ZR*. Si no hay valores de ganancia que satisfagan esto, volver a 1.
6. Escoger un valor de ganancia, que satisfaga todas las condiciones anteriores, de modo que permita satisfacer otras condiciones como  $t_r$ , etc.

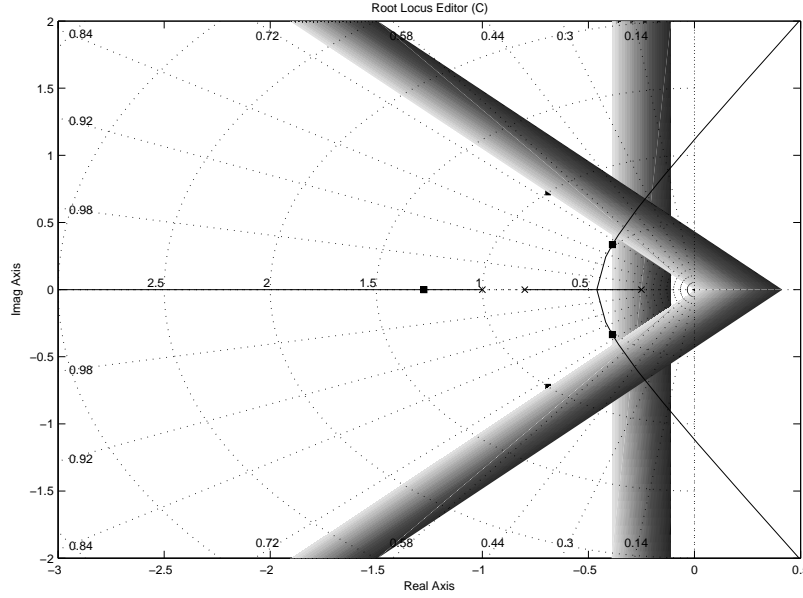


Figura 6.7: Lugar geométrico de  $\frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}$

7. Simular la respuesta del sistema de lazo cerrado con el controlador diseñado, para garantizar que efectivamente se cumplen todas las especificaciones.

### Tipos de controladores

Entre los controladores utilizados más frecuentemente vamos a mencionar algunos que se pueden incluir fácilmente en los diseños usando el lugar geométrico. De hecho, nuestra discusión a continuación estará orientada hacia el diseño usando las herramientas del paquete `ControlSystems` de Julia.

**Control proporcional** Una ganancia simple.

$$K(s) = k$$

**Control Proporcional Integral (PI)** Se trata de un control de la forma,

$$K(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = k_p \frac{T_i s + 1}{T_i s}$$

el cual se puede describir como un controlador con un polo en el origen y un cero que se puede ajustar. La posición del cero determina el tiempo de reposición  $T_i$ . Según hemos visto antes, aumentar  $T_i$  (o sea, correr el cero a la derecha) tiene

un efecto estabilizador, pero reduce la velocidad de respuesta y suele aumentar los sobrepicos.

**Control Proporcional Diferencial (PD)** Se trata de un control de la forma,

$$K(s) = k_p \left[ 1 + \frac{T_d s}{1 + \tau_d s} \right] = k_p \left[ \frac{(T_d + \tau_d) s + 1}{\tau_d s + 1} \right]$$

lo cual se puede escribir, teniendo en cuenta la relación  $\tau_d = T_d/N$ , donde  $N$  está en el intervalo 5-20, como:

$$K(s) = k_p (N + 1) \frac{s + \frac{N}{(N+1)T_d}}{s + \frac{N}{T_d}} = \bar{k}_p \frac{s - z}{s - p}$$

Es decir, que el controlador PD se puede representar como una ganancia, junto con un cero real  $z$  y un polo  $p$ , aproximadamente igual a  $10z$

El controlador PD es, en la práctica, un caso especial del controlador de adelanto, descrito más adelante. Por lo general, la introducción de una acción diferencial produce un efecto de amortiguamiento; esto generalmente reduce los sobrepicos.

**Control PID** Ya hemos visto, en la ecuación 5.3, la cual repetiremos aquí, que este controlador se puede escribir como una función de segundo orden con un polo en el origen:

$$K(s) = \frac{k_p}{T_r} \left[ \frac{T_r (T_d + \tau_d) s^2 + (T_r + \tau_d) s + 1}{s (1 + \tau_d s)} \right]$$

o, en forma general,

$$K(s) = k_p \left[ \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1}{s (1 + \beta s)} \right] = k \left[ \frac{(s + \gamma_1) (s + \gamma_2)}{s (s + \delta)} \right]$$

y esta función de transferencia se puede implementar con una ganancia variable, un polo en el origen, un par de ceros  $-\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , los cuales pueden ser reales o complejos, y un polo en  $-\delta = -1/\tau_d$ . Teniendo en cuenta que  $\tau_d$  normalmente no es un parámetro ajustable en los controladores y que suele ser grande, el último es un polo estable, lejos del origen.

**Controlador de adelanto o de atraso** Este tipo de controladores consiste en una función de transferencia de la forma:

$$K(s) = k \frac{s + \gamma}{s + \delta}.$$

Se denomina *de adelanto* cuando  $\gamma > \delta$  y *de atraso* cuando  $\gamma < \delta$ <sup>4</sup>. Podemos observar que su implementación incluye un polo y un cero. Si el polo está a la izquierda del cero, es un controlador de adelanto; es de atraso, en caso contrario.

<sup>4</sup>La razón es la característica de fase de su respuesta de frecuencia, como discutiremos en la sección siguiente.

**Controlador de adelanto-atraso** En este controlador se combinan dos (o más) controladores de adelanto o de atraso, en la forma:

$$K(s) = k \left( \frac{s + \gamma_1}{s + \delta_1} \right) \left( \frac{s + \gamma_2}{s + \delta_2} \right)$$

E incluye dos polos y dos ceros, generalmente reales.

### Ejemplos de diseño

El diseño de un sistema de control clásico, mediante asignación de polos consiste en seleccionar una de las estructuras de controladores descritos arriba y ajustar sus parámetros hasta cuando los polos queden todos localizados dentro de la *zona rosa*,  $Z_D$ . Es conveniente empezar el análisis con el controlador más simple que permita cumplir las especificaciones.

Vamos a ilustrar el diseño de controladores mediante algunos ejemplos.

**Ejemplo 6.6.** Consideremos el control de posición de un motor d.c., descrito por:

$$P(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

Se requiere que el sistema de lazo cerrado sea capaz de seguir un escalón en la referencia con cero error de posición y, además debe satisfacer

$$SP < 5\%, \quad t_s < 5 \text{ seg}$$

y el tiempo de ascenso debe ser lo menor posible. Ensayemos, en primer lugar un control proporcional ( $P$ ). En ese caso,  $K(s) = k$  y,

$$T(s) = \frac{k \frac{2}{s(s+2)}}{1 + k \frac{2}{s(s+2)}} = \frac{2k}{s^2 + 2s + 2k}$$

Por lo tanto,

$$S(s) = \frac{s^2 - 2s}{s^2 + 2s + 2k}$$

y,  $S(0) = 0$ , independientemente de  $k$ . Entonces, el sistema de lazo cerrado cumple las especificaciones estáticas independientemente de  $k$ .<sup>5</sup> Además, las otras especificaciones imponen limitaciones acerca de la localización de los polos (originan una zona rosa para este problema). La especificación  $SP < 5\%$  requiere  $\theta < 45^\circ$  y  $t_s < 5 \text{ seg}$  implica que

$$\sigma > \frac{4.5}{t_s} = 0.9.$$

Por lo tanto, los polos de lazo cerrado deben quedar localizados a la izquierda de  $-0.9$ .

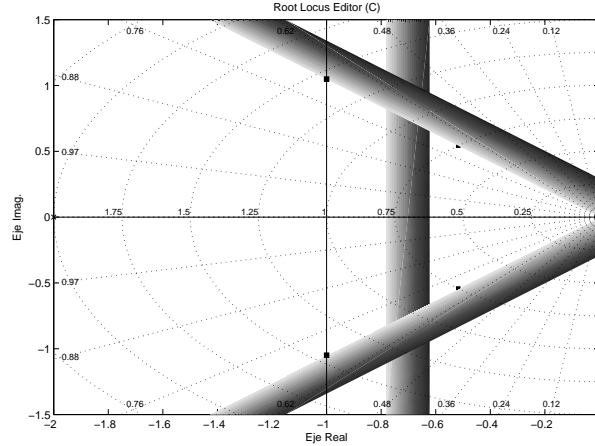


Figura 6.8: Lugar geométrico de  $\frac{2}{s(s+2)}$

Entonces, debemos construir el lugar geométrico para  $P$ . Éste se muestra en la figura 6.8, junto con la zona rosa especificada  $Z_D$ . A partir del lugar geométrico, se encuentra que los dos polos están en  $Z_D$  cuando  $k \in [0.476, 1.05]$ . Cualquier ganancia en ese rango satisfará las restricciones de  $SP$  y  $t_s$ . Para reducir  $t_r$ , queremos tener los polos tan lejos del origen como sea posible. Las curvas de distancia (semicírculos con centro en el origen) muestran que la localización ideal es en  $-1 \pm j$ , la cual se logra con una ganancia de  $k \approx 1.05$ . Éste es el valor escogido para el controlador. Los cuadrados pequeños muestran la posición de los polos con la ganancia que escogimos.

Finalmente, para verificar que la respuesta es satisfactoria, simulamos la respuesta al escalón unitario en la referencia. En la figura 6.9 se presenta la respuesta. La simulación muestra que  $SP = 5\%$ ,  $t_s = 4.14$  seg. y  $t_r = 1.79$  seg. Todas las especificaciones quedan satisfechas. La figura también presenta la magnitud de la señal de control, con lo cual es fácil determinar si se presenta saturación del actuador. En el caso presente, el valor máximo es  $U_{\text{máx}} = 1.05$  el cual ocurre en  $t = 0$ .

Es frecuente que un controlador tipo P no permita cumplir todas las especificaciones. En ese caso, es necesario introducir polos o ceros en  $K(s)$  hasta cumplir los requisitos del diseño. Los ejemplos siguientes ilustran varias opciones para diseñar controladores.

**Ejemplo 6.7.** Consideremos de nuevo la planta del ejemplo 6.5:

$$P(S) = \frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}$$

<sup>5</sup>Esto era de esperar, puesto que el sistema es *tipo 1*. Entonces,  $S(0) = 0$ , en cualquier configuración que use realimentación unitaria.

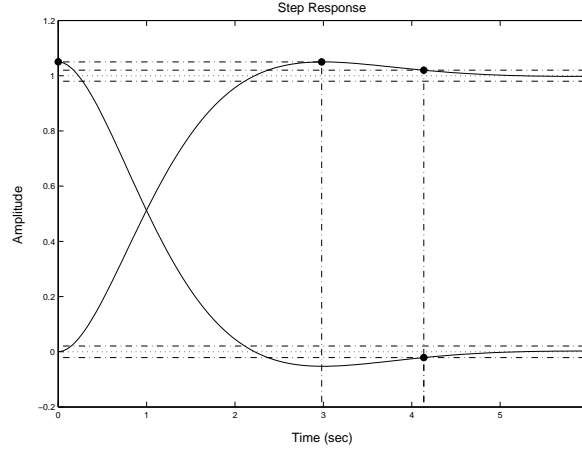


Figura 6.9: Respuesta al escalón del sistema con  $k = 1.05$ .

cuyo lugar geométrico se muestra en la figura 6.7

Supongamos que se requiere que el error de posición sea menor que 5 %, y que  $SP < 10\%$  y  $t_s < 20$  seg.

Para satisfacer la especificación de error estático, ensayemos primero un control  $P$ . En ese caso, la función de sensibilidad de lazo cerrado es

$$S(s) = \frac{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + k + 1}$$

de donde,  $S(0) = \frac{1}{k+1} = \varepsilon_p$ . Luego, para que  $\varepsilon_p < 0.05$  es necesario que  $k > 19$ . Usando el lugar geométrico se puede determinar que la máxima ganancia para estabilidad es  $k = 12.2$ .<sup>6</sup> Por lo tanto, no hay forma de cumplir con el error de posición, usando este controlador.

Ensayamos, entonces, un control  $PI$ . Esto, debido a que la acción integral automáticamente asegura un error de posición igual a cero. Entonces, agregamos un polo en  $s = 0$  (para el integrador) y un cero.

Haciendo este ajuste se obtuvo el siguiente controlador

$$K(s) = k \frac{1 + 3.7s}{s}$$

con el cual el LG queda como se muestra en la figura 6.10 (en realidad, sólo se muestra una parte del LG, donde están los polos dominantes, además del polo en el origen y el cero en  $-3.7$ ). En este diagrama ajustamos la ganancia de modo que los polos estén en  $Z_D$  y, además, queden lo más lejos posible del origen, para asegurar un tiempo de ascenso pequeño. Un valor aceptable

<sup>6</sup>O, podemos usar la tabla de Routh-Hurwitz.

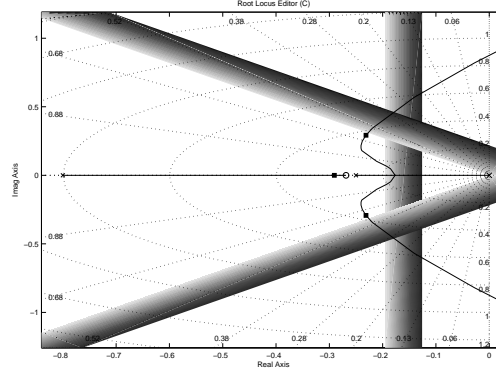


Figura 6.10: Lugar geométrico del sistema con  $K(s) = k \frac{1+3.7s}{s}$ .

es  $k = 0.262$ . Con esa ganancia los polos quedan como muestran los pequeños cuadrados en la figura 6.10. Este controlador es un PI con  $T_i = 3.7$  seg y  $k_p = 0.262 \times 3.7 = 0.964$ .

Para verificar que el diseño cumple con las especificaciones, simulamos la respuesta al escalón unitario en la referencia. La respuesta está en la figura 6.11. Se obtiene:

$$SP = 10\%; \quad t_s = 16.9 \text{ seg}; \quad t_r = 5.11 \text{ seg}. \quad U_{\text{máx}} = 1.44$$

lo cual cumple con todos los requisitos.

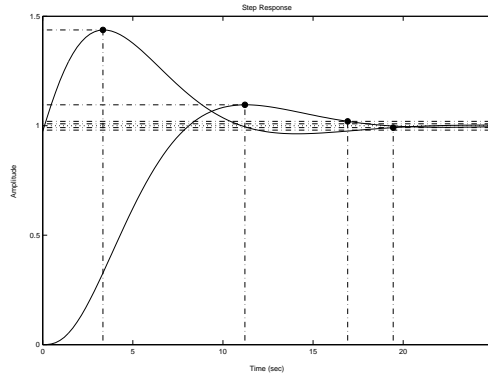


Figura 6.11: Respuesta al escalón del sistema usando  $K(s) = 0.262 \frac{1+3.7s}{s}$ .

En el ejemplo siguiente compararemos diferentes controladores para un proceso dado. Se trata de evaluar un diseño Ziegler-Nichols en comparación con lo que es posible para otros tipos de controladores e inclusive para un PID sintonizado de otra forma,



Ahora, consideraremos un ejemplo (5.1 del capítulo 5), que utilizamos para ilustrar el diseño de un control PID usando las reglas de Ziegler-Nichols. Veremos si podemos lograr una respuesta mejor usando el diseño LG.

**Ejemplo 6.8.** Consideremos de nuevo la planta

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(1.25s+1)(4s+1)}$$

y tratemos de diseñar un controlador tal que  $\varepsilon_p = 0$ ,  $SP < 10\%$  y  $t_s < 20$  seg.

En primer lugar, usemos el método de Ziegler-Nichols de lazo cerrado. Construyendo el LG de  $P$  se puede encontrar  $k_{cr} = 72$  y  $T_{cr} = 3.095$  seg. Entonces, el ajuste ZN es

$$k_p = 43.2, \quad T_i = 1.548, \quad T_d = 0.387$$

Con estos valores, se obtiene una respuesta al escalón con los siguientes datos:

$$SP = 49\%, \quad t_s = 6.15 \text{ seg}, \quad U_{\text{máx}} = 44$$

Como se observa, el valor máximo de  $u(t)$  es bastante alto; casi con seguridad debemos esperar saturación y efecto del control anti-windup.

Veamos si es posible diseñar un controlador mejor usando el método del lugar geométrico: Ensayemos un controlador de adelanto. Utilizando *root locus*, obtuvimos el siguiente controlador:

$$K(s) = 4.08 \frac{1 + 1.053s}{1 + 0.6s}$$

cuyo lugar geométrico se muestra en la figura 6.12.

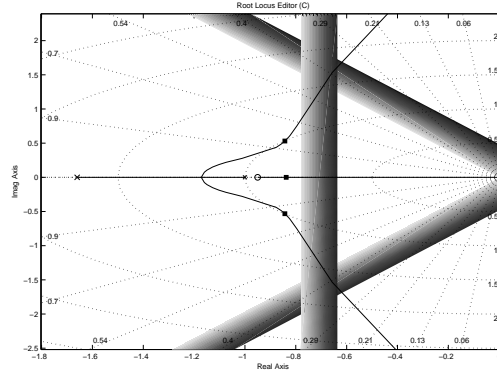


Figura 6.12: Lugar geométrico del sistema con  $K(s) = k1 + 1.053s1 + 0.6s$ .

Usando este controlador, la respuesta al escalón es la de la figura 6.13, para la cual se obtuvo

$$SP = 0, \quad t_s = 4.72 \text{ seg}, \quad U_{\text{máx}} = 7.14$$

Se puede notar que la respuesta es más rápida, sin sobrepico y que el valor máximo de  $u(t)$  es mucho menor (casi un sexto) que en el caso anterior.

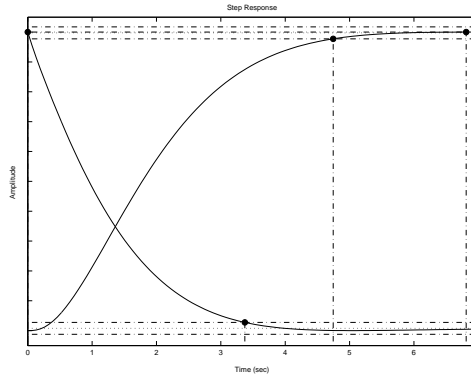


Figura 6.13: Respuesta al escalón del sistema usando  $K(s) = 4.08 \frac{1+1.053s}{1+0.6s}$ .

El último ejemplo es un diseño de un controlador para un sistema inestable y no minifase. Este es un tipo de sistema para el cual no es fácil el diseño.

**Ejemplo 6.9.** Vamos a diseñar un controlador para el proceso dado por:

$$P(s) = \frac{s-2}{s(s+1)}$$

El cero en el SPD ( $s=2$ ) y el polo en  $s=0$  hacen difícil este problema. Por ejemplo, no es posible usar ninguno de los métodos de Ziegler-Nichols. (Por qué?) Sin embargo, el método del lugar geométrico sí permite este diseño.

Usando un controlador tipo adelanto, es posible obtener un diseño de lazo cerrado con  $t_s = 5.01$  seg y sin sobrepico. El controlador obtenido es

$$K(s) = -0.865 \frac{1+0.5s}{1+0.061s}$$

el cual usa una cancelación del polo en  $s=2$ , la cual está dentro de la zona rosa y, por lo tanto, no presenta problemas. La figura 6.14 muestra el lugar geométrico obtenido y la 6.15 presenta la respuesta al escalón. Nótese la respuesta inversa debida al cero no minifase. Las curvas de respuesta han sido normalizadas, de modo que ambas parecen tener la misma amplitud. En realidad, son bastante diferentes las magnitudes.

### Generalización del lugar geométrico

Todos los ejemplos anteriores mostraban la variación de los polos de lazo cerrado cuando se cambia la ganancia. Es posible generalizar esto para visualizar la localización de los polos a medida que se cambian otros parámetros. Esto

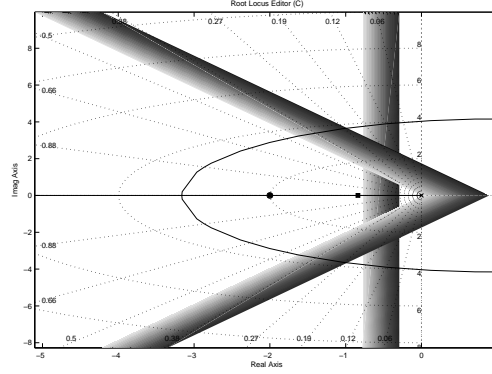


Figura 6.14: Lugar geométrico del sistema con  $K(s) = k \frac{1+0.5s}{1+0.061s}$ .

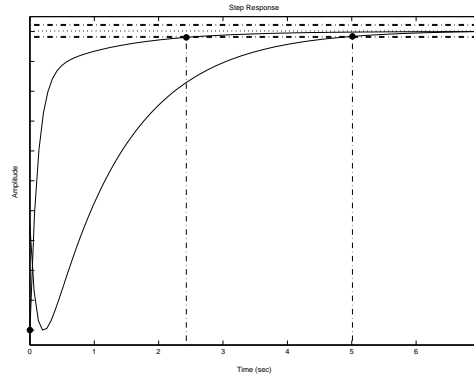


Figura 6.15: Respuesta al escalón del sistema usando  $K(s) = k \frac{1+0.5s}{1+0.061s}$ .

es posible siempre y cuando la ecuación característica sea una función afín del parámetro.

Si el polinomio característico 6.8 se puede escribir en la forma de una función afín del parámetro  $\kappa$ ; es decir, si la ecuación característica es de la forma:

$$g(s) + \kappa h(s) = 0 \quad (6.11)$$

donde  $g(s), h(s) \in \mathbb{R}[s]$  (polinomios con coeficientes reales) y  $\kappa$  un parámetro real, entonces, es posible obtener el lugar geométrico de los polos de lazo cerrado cuando el parámetro varía de 0 a  $\infty$ , usando las mismas técnicas anteriores.

Para ello, escribimos la ecuación característica como:

$$\frac{h(s)}{g(s)} = -\frac{1}{\kappa} \quad (6.12)$$

la cual tiene exactamente la misma forma usada para construir el lugar geométrico con respecto a  $k$  (ecuación 6.9). Por ello, basta construir el lugar geométrico para la función de transferencia artificial<sup>7</sup>

$$\hat{L}(s) = \frac{h(s)}{g(s)}$$

Usando este artificio podemos hacer un diseño del sistema de control, con respecto a variaciones de otros parámetros diferentes de la ganancia proporcional. Nótese que el procedimiento de diseño no depende de la naturaleza del parámetro.

Ilustremos el método con un ejemplo.

**Ejemplo 6.10.** Consideremos el sistema de la figura 6.16, en la cual se ha representado un controlador tipo red de adelanto/atraso.

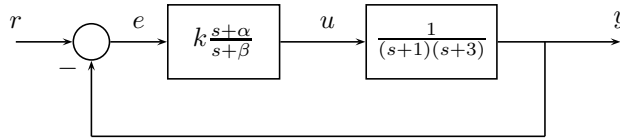


Figura 6.16: Controlador de adelanto/atraso

La función de transferencia del controlador es

$$K(s) = k \frac{s + \alpha}{s + \beta}$$

y la planta está descrita por

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$$

en este caso, la función de transferencia de lazo cerrado es

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{k \frac{s + \alpha}{s + \beta} \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}}{1 + k \frac{s + \alpha}{s + \beta} \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}} \\ &= \frac{k(s + \alpha)}{s^3 + 4s^2 + 3s + \beta s^2 + 4\beta s + 3\beta + ks + k\alpha} \end{aligned}$$

Para analizar los polos de lazo cerrado estudiamos las raíces de la ecuación característica:

$$s^3 + 4s^2 + 3s + \beta s^2 + 4\beta s + 3\beta + ks + k\alpha = 0$$

<sup>7</sup>No es una función de transferencia real, sólo un artificio.

Esta ecuación permite evaluar el efecto de variar cada uno de los parámetros, en forma separada, sobre los polos de lazo cerrado.

Por ejemplo, si nos interesa variar la ganancia  $k$ , la ecuación se factoriza en la forma

$$s^3 + 4s^2 + 3s + \beta s^2 + 4\beta s + 3\beta + k(s + \alpha) = 0$$

de donde,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} &= \frac{s + \alpha}{s^3 + 4s^2 + 3s + \beta s^2 + 4\beta s + 3\beta} \\ &= \frac{s + \alpha}{(s + \beta)(s + 1)(s + 3)} \end{aligned}$$

como era de esperarse, dado todo el desarrollo anterior.

Pero si queremos analizar los polos para diferentes valores de  $\alpha$ , la factorización que se requiere es

$$(s^3 + 4s^2 + 3s + \beta s^2 + 4\beta s + 3\beta + ks) + k\alpha = 0$$

de donde se obtiene,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} &= \frac{k}{s^3 + 4s^2 + 3s + \beta s^2 + 4\beta s + 3\beta + ks} \\ &= \frac{k}{s^3 + (\beta + 4)s^2 + (4\beta + 3 + k)s + 3\beta} \end{aligned}$$

Finalmente, si el parámetro cuyo efecto sobre los polos de lazo cerrado queremos analizar es  $\beta$ , usamos la siguiente factorización

$$\begin{aligned} s^3 + 4s^2 + 3s + \beta s^2 + 4\beta s + 3\beta + ks + k\alpha &= 0 \\ (4s + 3 + s^2)\beta + s^3 + 4s^2 + 3s + k\alpha + ks &= 0 \end{aligned}$$

y la ecuación para el lugar geométrico es, en este caso,

$$-\frac{1}{\beta} = \frac{4s + 3 + s^2}{s^3 + 4s^2 + 3s + k\alpha + ks}$$

Excepto en casos especiales, esta generalización del lugar geométrico es innecesaria hoy en día debido a la versatilidad de las herramientas de diseño. En efecto, se puede introducir un controlador de la forma deseada, agregando un polo y un cero ajustables. De esa manera, es posible visualizar el efecto de variar dos (o más) parámetros simultáneamente.

### 6.3. Diseño basado en respuesta de frecuencia

En esta sección estudiaremos algunas técnicas basadas en la respuesta de frecuencia para diseñar sistemas de control. Vamos a ver que el énfasis aquí no

es tanto en la respuesta transitoria sino en la robustez; es decir, la capacidad del sistema de lazo cerrado para mantener su estabilidad y desempeño ante incertidumbres. Comenzaremos nuestra exposición con las técnicas tradicionales de control, basadas en controladores de adelanto/atraso. A continuación haremos una breve presentación de la técnica general de *Moldeado del lazo* o “Loop shaping” para el diseño.

El sistema de lazo cerrado debe cumplir, en primer lugar, con el requisito de estabilidad. Hemos visto, que esto puede relacionarse con el margen de fase y de ganancia. Para un sistema estable en lazo abierto, el diagrama de Nyquist debe tener la forma mostrada en la figura 6.17. Para mantener la estabilidad, es conveniente que  $|L(j\omega)|$  sea pequeño<sup>8</sup>; de esa forma, podemos garantizar que  $|1 + L(j\omega)|$  permanezca próximo a 1 y, por lo tanto, el diagrama de Nyquist permanece lejos del punto crítico  $-1$ . De hecho, podemos decir que la forma de garantizar la estabilidad es que

$$1 + L(j\omega) \neq 0, \quad \forall \omega. \quad (6.13)$$

Nótese que esto también es válido para una planta inestable: si se cumple la condición 6.13, el número de vueltas del diagrama de Nyquist alrededor de  $-1$  no cambia. Entonces, desde el punto de vista de la estabilidad, es deseable que  $S(s) := \frac{1}{1+L(s)}$  sea pequeño. Un valor grande implica que el diagrama de Nyquist se acerca peligrosamente al punto  $-1$ .

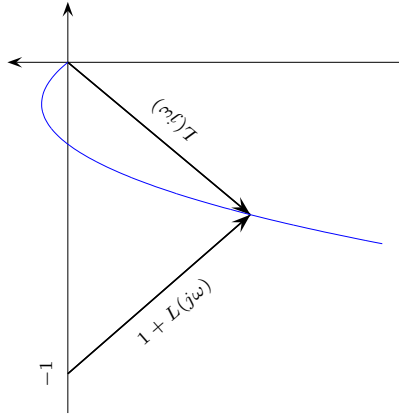


Figura 6.17: Diagrama de Nyquist

Ahora consideremos el desempeño de nuestro sistema: Para entender mejor el propósito de nuestro desarrollo, recordemos la ecuación 2.14 que expresa el error de seguimiento real, la cual repetimos aquí:

$$\epsilon(s) = r(s) - y(s) = S(s) [r(s) - G_d(s)d(s)] - T(s)n(s)$$

<sup>8</sup>Por lo menos para  $\omega \geq \omega_c$ .

la cual se puede escribir, usando la definición de las funciones de transferencia como,

$$\epsilon(s) = \frac{1}{1 + L(s)} [r(s) - G_d(s)d(s)] - \frac{L(s)}{1 + L(s)} n(s). \quad (6.14)$$

donde  $L(s) = P(s)K(s)$ .

Entonces, para lograr los objetivos de diseño de controladores, podríamos decir que para lograr buen seguimiento de la referencia y buen rechazo de perturbaciones, requerimos que  $|L(s)|$  sea grande; para atenuar el ruido necesitamos que  $|L(s)|$  sea pequeño; para que la señal de control no sea muy grande, se requiere que  $|L(s)|$  y  $|K(s)|$  sean pequeñas.

Las exigencias anteriores no son iguales a todas las frecuencias, teniendo en cuenta las características espectrales de las señales  $r$ ,  $d$  y  $n$ . Por lo tanto, el problema de diseño se puede reducir a *moldear* la función de transferencia del lazo  $L(j\omega)$  de manera que su respuesta de frecuencia cumpla con los requerimientos dados a cada frecuencia.

Además de las características estáticas, el desempeño implica ciertas características dinámicas. Una de las más importantes es el sobrepico. En capítulos anteriores hemos aprendido que el sobrepico se puede relacionar con la respuesta de frecuencia: en el diagrama de Nyquist podemos hallar contornos de  $M_T$  constante, las cuales están relacionadas con sobrepicos dados.

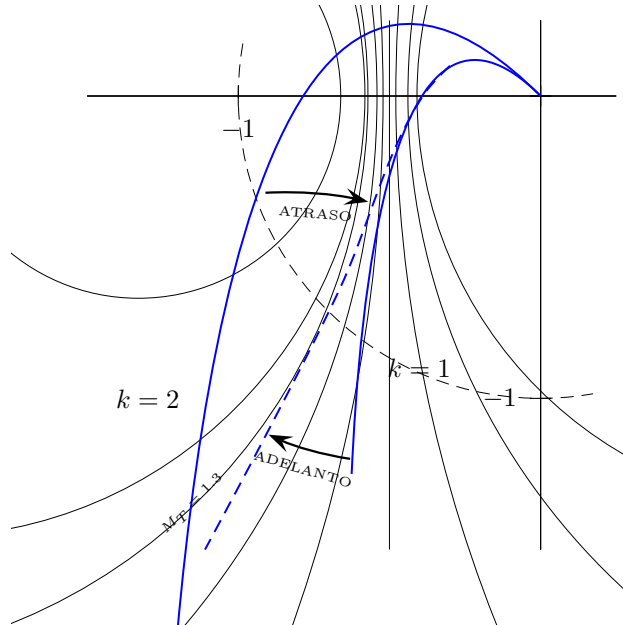


Figura 6.18: Diseños en adelanto y en atraso

Las condiciones estáticas y las dinámicas son contradictorias: Para reducir

los errores estáticos (de posición o velocidad) generalmente se requiere usar ganancias grandes; en cambio, para reducir el sobrepico no se puede usar una ganancia grande. El problema se ilustra en la figura 6.18: la figura muestra el diagrama de Nyquist para  $L_1(s) = kP(s)$  usando  $k = 1$ . Para satisfacer las especificaciones de estado estacionario, se ha determinado que se debe usar  $k = 2$ ; el diagrama correspondiente también está en la figura.

Observamos que la ganancia requerida ( $L_2(s) = 2P(s)$ ) implica que el sobrepico va a ser mayor y, además, los márgenes de ganancia y fase se reducen. Una solución apropiada sería buscar una función de transferencia del lazo ( $L(s)$ ) como la correspondiente a la línea punteada en la figura 6.18. Esa función se aproxima a  $L_2$  para baja frecuencia, con lo cual reduce el error estático, y a  $L_1$  a frecuencias mayores, logrando así cumplir con la estabilidad y especificaciones dinámicas. A este proceso de *moldear* la función de transferencia del lazo se le conoce como *moldear el lazo*.

Existen varias formas de moldear el lazo. Dos de las forma más populares se ilustran en la figura 6.18:

**Diseño de atraso** Se selecciona la ganancia  $k$  para satisfacer las especificaciones estáticas y se le adiciona una función de transferencia que produzca atenuación a alta frecuencia. El efecto neto es el de reducir la frecuencia de cruce ( $\omega_c$ ).

**Diseño de adelanto** La ganancia  $k$  se escoge para satisfacer las condiciones estáticas y se agrega una función de transferencia que cambia el ángulo de fase, girándolo para obtener un  $M_T$  aceptable. Esto equivale a transformar la función  $L_1$ , introduciendo amplificación a alta frecuencia. El efecto neto es aumentar la frecuencia de cruce ( $\omega_c$ ).

Es posible diseñar controladores que usan combinaciones de los dos efectos: Adelanto-atraso o Atraso-adelanto.

### Restricción sobre la pendiente del diagrama de Bode

H. W. Bode demostró en 1945[Bod45] que la magnitud y el ángulo de fase no son independientes para sistemas de fase mínima (sistemas sin ceros en SPD ni retardos). Si  $L(s)$  es una función de transferencia estable, minifase, entonces,

$$\angle L(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |L(j\omega)|}{d u} \ln \coth \left| \frac{u}{2} \right| du \quad (6.15)$$

donde  $u = \ln(\omega/\omega_0)$ . Aunque esta expresión parece formidable, realmente no es tan difícil de interpretar: en primer lugar la variable  $u$  es la frecuencia normalizada, en escala logarítmica. La derivada

$$N(j\omega_0) := \left[ \frac{d \ln |L(j\omega)|}{d u} \right]_{\omega=\omega_0}$$



no es otra cosa que la pendiente del diagrama de Bode de magnitud, expresada en unidades de 20 dB/década. Es decir, que si el diagrama de Bode tiene una pendiente de  $-20$  dB/década,  $N(j\omega_0) = -1$ .  $N(j\omega_0)$  se denomina la *rata de descenso* (“roll-off rate”, en inglés<sup>9</sup>).

No obstante su aspecto, la ecuación 6.15 tiene una interpretación relativamente sencilla. Usando la definición anterior, la ecuación queda:

$$\angle L(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(j\omega_0 u) \ln \coth \left| \frac{u}{2} \right| du$$

la cual indica que el ángulo de fase a una frecuencia dada  $\omega_0$  se calcula integrando la pendiente local del diagrama de Bode, ponderada por la función  $\ln \coth \left| \frac{u}{2} \right|$ . Sin embargo, esta última función es muy particular, puesto que se hace infinita en  $u = 1$ ; es decir, para  $\omega = \omega_0$ . Por lo tanto, realmente la integral prácticamente sólo se ve afectada por la pendiente en cercanías de  $\omega_0$ . Generalmente, tomar la pendiente promedio una década arriba y abajo de  $\omega_0$  es suficiente. Finalmente,  $\int_{-\infty}^{\infty} \ln \coth \left| \frac{u}{2} \right| du = \frac{\pi^2}{2}$ .

Si la rata de descenso es constante, por ejemplo, como en la función de transferencia  $L(s) = k/s^n$ , para la cual  $N(j\omega) = -n$  entonces la ecuación 6.15 implica

$$\angle L(j\omega_0) = -n \frac{\pi}{2}.$$

Esta expresión conduce a la aproximación, bastante buena,

$$\angle L(j\omega_0) \approx \bar{N}(j\omega_0) \frac{\pi}{2} = \bar{N}(j\omega_0) 90^\circ \quad (6.16)$$

donde  $\bar{N}(j\omega_0)$  es la rata de descenso promediada alrededor del punto  $\omega_0$ . Lejos de los punto de quiebre  $\bar{N}(j\omega_0) \approx N(j\omega_0)$ .

Cuando  $L$  tiene ceros en SPD el ángulo de fase tiene un atraso adicional. Igual puede afirmarse para un sistema con retardo, como hemos visto en el capítulo 3.

Lo anterior tiene implicaciones acerca de la rata de descenso de  $L(s)$  en cercanías de la frecuencia de cruce  $\omega_c$ . Si tratamos de hacer que el diagrama de Bode descienda muy rápido cerca de  $\omega_c$ , por ejemplo, si  $N(\omega_c) = -3$ , entonces el sistema de lazo cerrado será inestable, pues en  $\omega = \omega_c$ , es decir, cuando la magnitud es uno, el ángulo de fase será menor que  $-180^\circ$  y el diagrama de Nyquist encerrará al punto  $-1$ . Una rata de descenso de  $-2$  es lo máximo permitido cerca de  $\omega_c$ .<sup>10</sup>

<sup>9</sup>No existe un término comúnmente aceptado en castellano para referirse a este concepto. El que hemos usado refleja, por lo menos en parte su significado. Normalmente, en las publicaciones se utiliza el término en inglés.

<sup>10</sup>Si hay ceros no minifase o retardos, ni siquiera esto es suficiente.

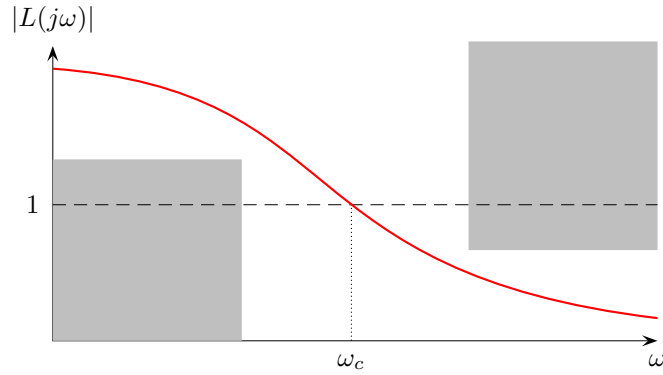


Figura 6.19: Restricciones para moldear el lazo

### Restricciones para moldear el lazo

Podemos resumir las condiciones deseables para la respuesta de frecuencia de la función de transferencia del lazo  $L(s)$  así:

$$\begin{aligned} |L(j\omega)| & \text{ grande para bajas frecuencias} \\ |L(j\omega)| & \text{ pequeña para altas frecuencias} \\ N(j\omega) & \text{ limitada en la región de transición} \end{aligned}$$

Esto podría resumirse en forma gráfica por medio de la figura 6.19, en donde las regiones sombreadas son prohibidas.

### Diseño de atraso

Para moldear el lazo con un controlador de atraso, introducimos un controlador de la forma:

$$K(s) = k \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} \quad (6.17)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ . Claramente,  $K(s)$  tiene un polo en  $s = -1/T$  y un cero en  $s = -1/\alpha T$

La razón para llamar a  $K(s)$  un controlador de atraso es su característica de fase: El ángulo de fase de  $K(s)$  siempre es negativo. Es fácil ver que esto es cierto si se considera el diagrama de los polos y ceros, tal como muestra la figura 6.20. Para cualquier frecuencia  $\omega$ ,

$$\angle K(j\omega) = \theta - \phi \leq 0$$

puesto que  $\theta \leq \phi$ ,  $\forall \omega \geq 0$ . Por lo tanto, a cualquier frecuencia, el controlador produce atraso de fase.

La respuesta de frecuencia de  $K(s)$  muestra que la ganancia d.c. es exactamente  $k$  y, la ganancia de alta frecuencia es  $k\alpha < k$ . Esto implica una atenuación

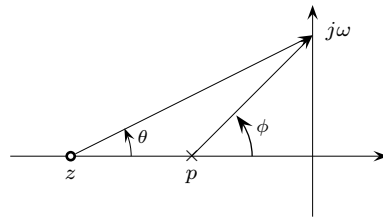


Figura 6.20: Polos y ceros del controlador de atraso

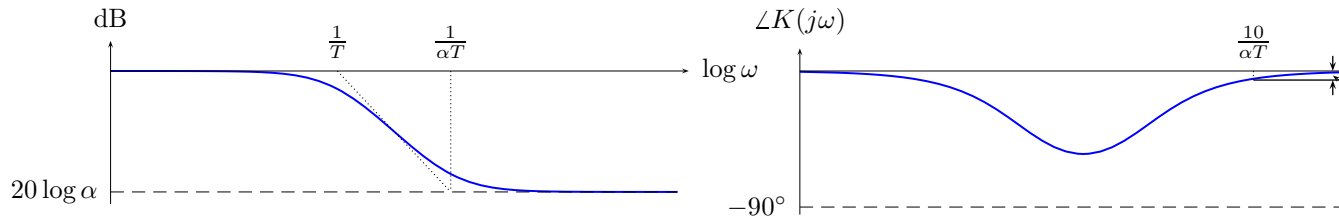


Figura 6.21: Respuesta de frecuencia del controlador de atraso

a alta frecuencia, tal como deseábamos. El diagrama de Bode de  $K(s)$  tiene puntos de quiebre en  $\omega_1 = 1/T$  y  $\omega_2 = 1/\alpha T$ . En la figura 6.21 se muestra la respuesta de frecuencia típica. Un hecho notable, el cual usaremos en nuestro desarrollo, es que el ángulo de fase en  $\omega = 10/\alpha T$  (una década por encima de la frecuencia de corte  $1/\alpha T$ ) es siempre el mismo ( $\approx -5.6^\circ$ ). eso significa que el controlador atrasa la fase en esa cantidad y, por lo tanto, ese valor se debe tener en cuenta al hacer el diseño.

### Procedimiento de diseño

El diseño de un controlador de atraso usa la atenuación producida por  $K(s)$  para reducir la ganancia del lazo a 1 (0 dB) en la frecuencia donde el ángulo de fase es el necesario para obtener el margen de fase  $MF$  deseado<sup>11</sup>. El procedimiento se puede resumir así:

Dada la función de transferencia de la planta  $P(s)$ , las especificaciones estáticas ( $\varepsilon_p$  o  $\varepsilon_v$ , según el caso) y el margen de fase  $MF$ ,

1. Encontrar la ganancia  $k$  requerida para satisfacer las especificaciones estáticas.
2. Calcular la respuesta de frecuencia de  $kP(s)$ . Obtener  $MF$  y  $MG$  de ahí.

<sup>11</sup>Más una corrección de  $5.6^\circ$  para compensar el atraso introducido por el controlador

3. Hallar la frecuencia ( $\omega'_c$ ) tal que,

$$\angle \{kP(j\omega'_c)\} = MF + 5.6 - 180$$

Esta será la frecuencia de cruce de  $K(s)P(s)$  y la haremos igual a  $10/\alpha T$ .  
Por lo tanto,

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega'_c}{10}$$

4. Para lograr que la ganancia sea igual a 1 en  $\omega = \omega'_c$ , el controlador de atraso debe producir una atenuación que compense la ganancia  $|kP(j\omega'_c)|$ .  
Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{1}{|kP(j\omega'_c)|}$$

Y, por lo tanto, queda determinado también  $T$ :

$$T = \frac{10}{\alpha \omega'_c}$$

5. El controlador resultante es

$$K(s) = k \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1}$$

6. Simular la respuesta del sistema en el tiempo, para garantizar que es aceptable.

**Ejemplo 6.11.** Diseñaremos un controlador de atraso para controlar el proceso del ejemplo 6.5

$$P(S) = \frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}$$

Para el cual que se requiere que el error de posición sea menor que 5 %, y que  $MF > 60^\circ$ .

Para satisfacer la especificación de error estático con una ganancia  $k$ , la función de sensibilidad de lazo cerrado es

$$S(s) = \frac{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + k + 1}$$

de donde,  $S(0) = \frac{1}{k+1} = \varepsilon_p$ . Luego, para que  $\varepsilon_p < 0.05$  es necesario que  $k > 19$ .  
Escojamos  $k = 20$ .

El diagrama de Bode de  $kP(s)$ , obtenido en Julia mediante las instrucciones

---

```

1 P = tf(1, [5, 10.25, 6.25, 1])
2 k = 20;
3 margin(k * P)
4 marginplot(k * P)

```

---

está en la figura 6.22. De allí obtenemos:

$$MF = -14.9^\circ, \quad MG = -4.37 \text{ dB}$$

El cual es inestable (antes determinamos que la máxima ganancia para estabilidad era  $\approx 12$ ).

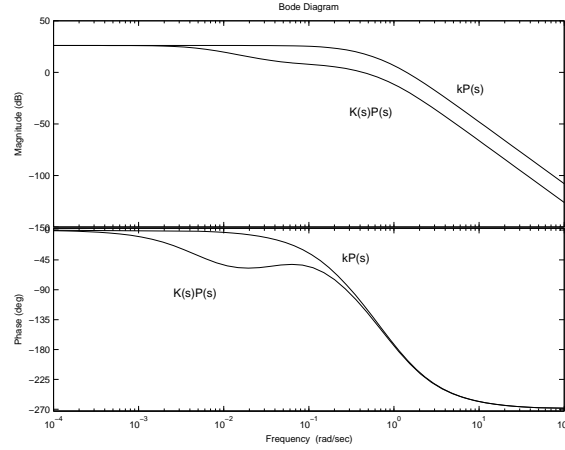


Figura 6.22: Diagrama de Bode de  $20P(s)$  y de  $K(s)P(s)$  con controlador de atraso

Usando la información de respuesta de frecuencia, buscamos una frecuencia  $\omega'_c$  para la cual

$$\angle \{kP(j\omega'_c)\} = MF + 5.6 - 180 = -112.4^\circ$$

lo cual ocurre para  $\omega'_c = 0.4297 \text{ rad/seg}$ . A esa frecuencia calculamos  $|kP(j\omega'_c)|$

Podemos encontrar los parámetros del controlador:

$$\alpha = \frac{1}{|kP(j\omega'_c)|} = 0.1228, \quad T = \frac{10}{\alpha\omega'_c} = 189.45$$

Con lo cual se obtiene el controlador

$$K(s) = 20 \frac{23.27s + 1}{189.4s + 1}$$

En la figura 6.22 se incluyó la respuesta de frecuencia de  $L(s) = K(s)P(s)$  junto con la de  $kP(s)$ , para ver el efecto del controlador. Para el sistema compensado se cumple que

$$MF = 63.4^\circ, \quad MG = 13.1 \text{ dB}$$

lo cual cumple con las especificaciones.

Finalmente, se simuló la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado, la cual hemos incluido en la figura 6.23. Debe notarse la respuesta bastante lenta<sup>12</sup>, sin sobrepico.

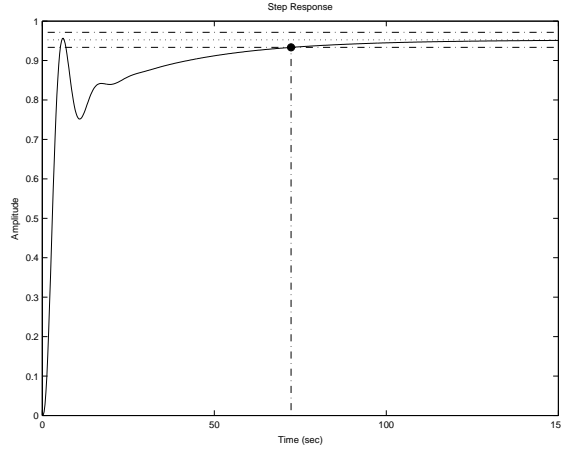


Figura 6.23: Respuesta al escalón, usando controlador de atraso

### Diseño con Controlador de adelanto

Otra opción para moldear el lazo es usar un controlador de adelanto. Éste tiene una función de transferencia de la forma

$$K(s) = k \frac{\beta T s + 1}{T s + 1}$$

donde  $\beta > 1$ .  $K(s)$  tiene un polo en  $p = -1/T$  y un cero en  $z = -1/\beta T$ . Puesto que  $\beta > 1$ , entonces  $z < p$ .

Esta función de transferencia,  $K(s)$  se denomina un controlador de adelanto a causa de su característica de fase: El ángulo de fase de  $K(s)$  siempre es positivo. Para ver esto, consideremos el diagrama de los polos y ceros, tal como muestra la figura 6.24. Para cualquier frecuencia  $\omega$ ,

$$\angle K(j\omega) = \theta - \phi \geq 0$$

puesto que  $\theta \geq \phi$ ,  $\forall \omega \geq 0$ . Por lo tanto, a cualquier frecuencia, el controlador produce un adelanto de fase.

La ganancia d.c. de  $K(s)$  es  $k$  y, la ganancia de alta frecuencia es  $k\beta > k$ . Por lo tanto, el controlador de adelanto produce amplificación a altas frecuencias. El diagrama de Bode tiene puntos de quiebre en  $\omega_1 = 1/\beta T$  y  $\omega_2 = 1/T$ . En la figura 6.25 se muestra la respuesta de frecuencia típica.

<sup>12</sup>Esta suele ser una característica de los controladores de atraso, debido a la reducción en el ancho de banda producido por la atenuación de alta frecuencia.

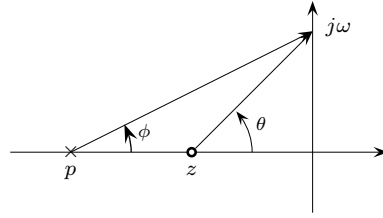


Figura 6.24: Polos y ceros del controlador de adelanto

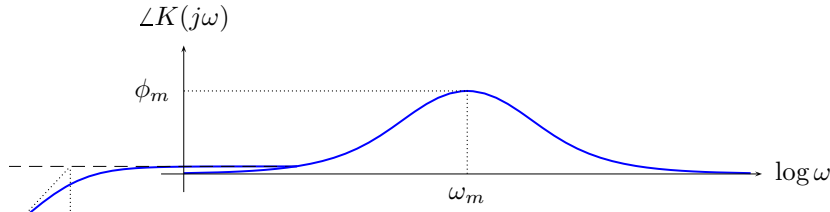


Figura 6.25: Respuesta de frecuencia del controlador de atraso

Para el diseño de controladores de adelanto, usaremos más el adelanto de fase que la amplificación. Por esta razón, queremos determinar el ángulo de fase:

$$\angle \{K(j\omega)\} = \tan^{-1} \beta T \omega - \tan^{-1} T \omega = \tan^{-1} \frac{T \omega (\beta - 1)}{1 + \beta T^2 \omega^2}$$

Para hallar el máximo adelanto de fase  $\phi_m$ , diferenciamos con respecto a  $\omega$  e igualamos a cero. Se obtiene,

$$\frac{d \tan^{-1} \frac{T \omega (\beta - 1)}{1 + \beta T^2 \omega^2}}{d \omega} = \frac{T \beta - T + T^3 \beta \omega^2 - T^3 \beta^2 \omega^2}{T^2 \omega^2 + T^2 \beta^2 \omega^2 + T^4 \beta^2 \omega^4 + 1} = 0$$

Para encontrar la solución, basta igualar el numerador a cero, puesto que el denominador es siempre positivo:

$$T \beta - T + T^3 \beta \omega^2 - T^3 \beta^2 \omega^2 = -T (\beta - 1) (T^2 \beta \omega^2 - 1) = 0$$

cuya solución es

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta} T}$$

Por lo tanto, el máximo ángulo está dado por

$$\tan \phi_m = \frac{\beta - 1}{2\sqrt{\beta}}$$

Usando la identidad<sup>13</sup>  $\sin \phi = \tan \phi / \sqrt{1 + \tan^2 \phi}$ , se encuentra la expresión:

$$\sin \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad (6.18)$$

de donde obtenemos una expresión para el parámetro  $\beta$  en función del adelanto de fase requerido  $\phi_m$ :

$$\beta = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \quad (6.19)$$

Por supuesto, es posible usar la simetría de la curva de fase con respecto al punto  $\omega_m$ , el cual es el punto medio (en escala logarítmica) entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , para obtener este resultado.

La ganancia del controlador para  $\omega = \omega_m$  es  $\sqrt{\beta}k$ .

Entonces, es posible ajustar el adelanto de fase variando  $\beta$ . Pero esto tiene limitaciones, puesto que  $k\beta$  es la ganancia de alta frecuencia del compensador. Valores mayores de  $\phi_m$  implican ganancias grandes que siempre son indeseables.

Para tener una idea de lo que se puede hacer con un controlador de adelanto, analicemos la ecuación 6.18: la derivada  $\frac{d\phi_m}{d\beta}$  es positiva para todo  $\beta \geq 1$ . Eso significa que la función es creciente. Sin embargo,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \phi_m(\beta) = \frac{\pi}{2}$$

lo cual significa que el máximo obtenible es menor que  $90^\circ$ . En la práctica, las ganancias no pueden ser demasiado altas, so riesgo de saturar todos los actuadores. Un valor máximo, comúnmente aceptado de  $\beta$ , es de alrededor de 15, lo cual representa un adelanto de fase de  $61^\circ$ . Aumentar la ganancia a 20, sólo produce  $64^\circ$ , un aumento reducido.

Esto también significa que no es factible usar un controlador de adelanto, por sí solo para corregir el ángulo en más de  $60$ - $65^\circ$ .

### Procedimiento de diseño

El diseño de controladores de adelanto busca seleccionar la frecuencia de cruce  $\omega_c$  de modo que coincida con la frecuencia de máximo adelanto de fase  $\omega_m$ . Sin embargo, la ganancia positiva  $\sqrt{\beta}k$  de  $K(s)$  a esa frecuencia ocasiona una amplificación que hace desplazar la frecuencia de cruce hacia la derecha. Y este desplazamiento es variable, dependiendo de  $\beta$ . Por lo tanto, el procedimiento requiere de un proceso iterativo hasta cuando se cumplan las especificaciones.

Resumiremos el diseño con controlador de adelanto así:

Dada la función de transferencia de la planta  $P(s)$ , las especificaciones estáticas ( $\varepsilon_p$  o  $\varepsilon_v$ , según el caso) y el margen de fase  $MF$ ,

---

<sup>13</sup>Válida para  $0 < \phi < \pi/2$ .



1. Encontrar la ganancia  $k$  requerida para satisfacer las especificaciones estáticas.
2. Calcular la respuesta de frecuencia de  $kP(s)$ . Determinar  $\phi_P$ , el margen de fase de  $kP(s)$ , y las frecuencias de cruce  $\omega_c$  y  $\omega_{180}$ .
3. Determinar la corrección necesaria de fase  $\phi = MF - \phi_P$ .
4. Estimar el desplazamiento de fase que debe proporcionar el controlador: puesto que al introducir el controlador la frecuencia de cruce se corre a la derecha, el controlador debe dar una frecuencia mayor que  $\phi$ . Le agregamos una corrección  $\theta$  que se irá refinando a medida que avanzamos<sup>14</sup>. Entonces, el controlador debe tener

$$\phi_m = \phi + \theta$$

5. Calcular:

$$\beta = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

y la ganancia introducida por el controlador en  $\omega_m$ ,  $\sqrt{\beta}k$ .

6. Determinar la nueva frecuencia de cruce  $\omega'_c$ . Ésta está dada por la frecuencia donde

$$|kP(j\omega'_c)| = \frac{1}{\sqrt{\beta}k}$$

7. Calcular

$$\phi'_P := \angle \{kP(j\omega'_c)\} + 180^\circ$$

Si  $\theta' := \phi'_P - \phi_P > \theta$ , escoger  $\theta = \theta'$  y VOLVER AL PASO 4.

8. Usar  $\omega_m = \omega'_c$  y calcular

$$T = \frac{1}{\sqrt{\beta}\omega'_c}$$

9. El controlador resultante es

$$K(s) = k \frac{\beta T s + 1}{T s + 1}$$

10. Simular la respuesta del sistema en el tiempo, para garantizar que es aceptable.

**Ejemplo 6.12.** Diseñaremos un controlador de adelanto para controlar el proceso del ejemplo 6.5

$$P(S) = \frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}$$

---

<sup>14</sup>Un valor aceptable es  $\theta = 8^\circ$ .

Para el cual se requiere que el error de posición sea menor que 5 %, y que  $MF > 60^\circ$ .

Para satisfacer la especificación de error estático con una ganancia  $k$ , ya determinamos que  $k > 19$ . Escojamos  $k = 20$ , como antes.

El diagrama de Bode de  $kP(s)$  muestra:

$$MF = -14.9^\circ, \quad MG = -4.37 \text{ dB}$$

Esto significa que si se usa un controlador de adelanto, debería ser capaz de adelantar la fase en  $60 + 14.9 \approx 75^\circ$ , lo cual es muy difícil. Por lo tanto, no es recomendable usar este diseño.

**Ejemplo 6.13.** Diseñemos un controlador de adelanto para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

de tal forma que  $MF = 50^\circ$  y  $MG = 6 \text{ dB}$ . El sistema de lazo cerrado debe ser diseñado para seguir rampas, por lo cual el error de velocidad debe satisfacer,  $\varepsilon_v \leq 0.2$ .

Usando un control proporcional,

$$S(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + k}$$

Para satisfacer la especificación estática, se requiere que

$$\varepsilon_v = S'(0) = \frac{2}{k} \leq 0.2$$

lo cual se logra si  $k \geq 10$ . Escojamos  $k = 10$ .

Ensayemos a diseñar un controlador de adelanto. Siguiendo el procedimiento descrito:

1. Ya hemos determinado que  $k = 10$ .
2. La respuesta de frecuencia de  $10P(s)$  permite obtener  $\phi_P = 35^\circ$  a una frecuencia  $\omega_c = 2.86 \text{ rad/seg}$ .
3. La corrección necesaria de fase es  $\phi = 60 - 35 = 25^\circ$ .
4. El desplazamiento de fase que debe proporcionar el controlador lo estimamos como:

$$\phi_m = \phi + \theta = 25 + 8 = 33^\circ$$

5. Calcular:

$$\beta = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = 2.57$$

y la ganancia introducida por el controlador en  $\omega_m$ ,  $\sqrt{\beta}k = 16.03$ .

6. Determinar la nueva frecuencia de cruce  $\omega'_c$ . Ésta está dada por la frecuencia donde

$$|kP(j\omega'_c)| = \frac{1}{\sqrt{\beta k}} = 0.0624$$

El resultado es  $\omega'_c = 3.95$  rad/seg.

7. Calcular

$$\phi'_P := \angle \{kP(j\omega'_c)\} + 180 = 27.05^\circ$$

Como  $\theta' := \phi'_P - \phi_P > \theta$ , escoger  $\theta = \theta'$  y REPETIMOS DESDE EL PASO 4.

8. después de cuatro iteraciones obtenemos:

$$\beta = 3.697, \quad \omega'_c = 4.297 \text{ rad/seg}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\beta}\omega'_c} = 0.121$$

9. El controlador resultante es

$$K(s) = k \frac{\beta Ts + 1}{Ts + 1} = 10 \frac{0.4474s + 1}{0.121s + 1}$$

En la figura 6.26 hemos graficado la respuesta de frecuencia de  $kP(s)$  junto con la de  $L(s) = K(s)P(s)$  para apreciar el efecto del adelanto de fase.

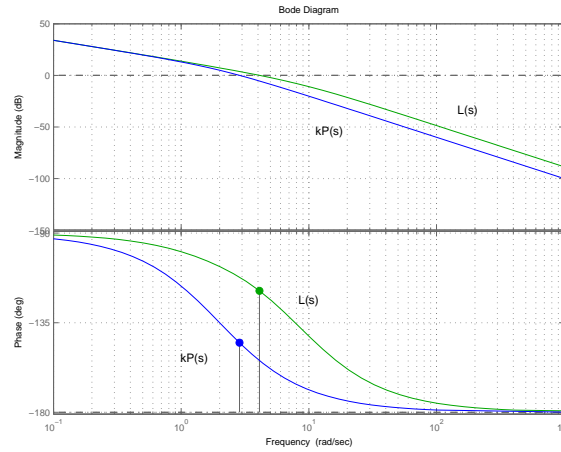


Figura 6.26: Respuesta de frecuencia de  $kP(s)$  y de  $L(s) = K(s)P(s)$ , usando controlador de adelanto

10. Simulamos la respuesta del sistema en el tiempo y se obtiene la figura 6.27. Como se observa,  $SP = 8\%$ ,  $t_s = 1.09$  seg.

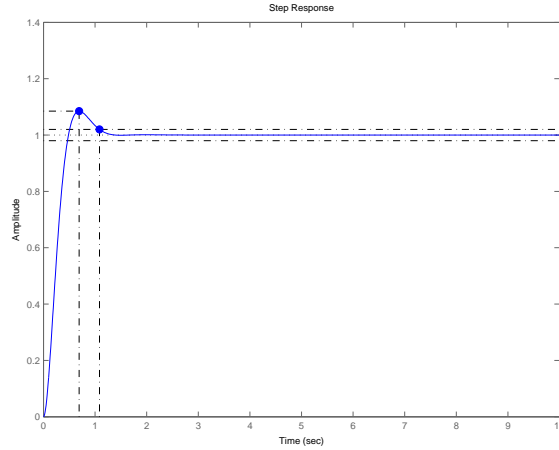


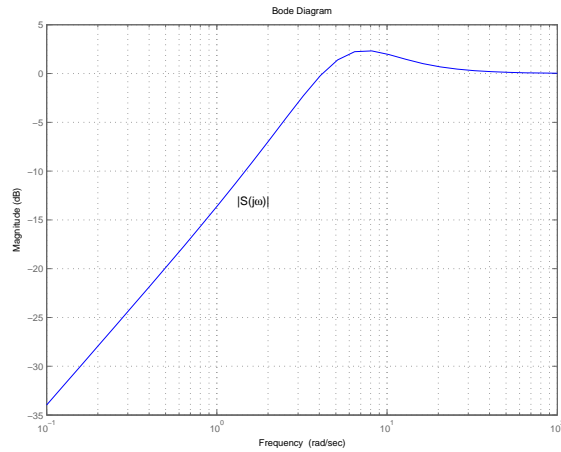
Figura 6.27: Respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado

Finalmente calculamos las funciones de transferencia y la respuesta de frecuencia del sistema de lazo cerrado. El resultado es:

$$T(s) = \frac{4.474s + 10}{0.121s^3 + 1.242s^2 + 6.474s + 10}$$

$$S(s) = \frac{0.121s^3 + 1.242s^2 + 2s}{0.121s^3 + 1.242s^2 + 6.474s + 10}$$

y el diagrama de Bode de  $S(s)$  se muestra en la figura 6.28

Figura 6.28: Diagrama de Bode de  $S(s)$

### Diseño de atraso-adelanto

En ocasiones, existe una especificación acerca de la frecuencia de corte  $\omega_c$ , la cual, según hemos visto, determina el ancho de banda del sistema de lazo cerrado. Los procedimientos de diseño descritos arriba permiten cumplir con el margen de fase, pero no facilitan la selección de  $\omega_c$ .

Ahora, vamos a ilustrar la forma de combinar un controlador de atraso con uno de adelanto con el fin de lograr el objetivo de garantizar  $\omega_c$ . El procedimiento es muy simple:

1. Escoger  $k$  para satisfacer las especificaciones estáticas.
2. Seleccionamos un controlador de adelanto de manera que produzca el ángulo de fase deseado a la frecuencia  $\omega_c$ . En este punto no nos preocupamos por la ganancia.
3. A continuación, diseñamos un controlador de atraso que produzca la atenuación necesaria para lograr que la ganancia en  $\omega_c$  sea exactamente 1.

Un ejemplo permitirá entender mejor el proceso.

**Ejemplo 6.14.** Veamos de nuevo el problema anterior con

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

de tal forma que  $MF = 60^\circ$ ,  $MG = 6$  dB y  $\omega_c = 2$  rad/seg. El sistema de lazo cerrado debe ser diseñado para seguir rampas, por lo cual el error de velocidad debe satisfacer,  $\varepsilon_v \leq 0.2$ .

La ganancia mínima debe ser  $k = 10$ , según determinamos antes.

El primer paso es evaluar el ángulo de fase y la magnitud en  $\omega = 2$  rad/seg.

$$\angle P(j2) = -135^\circ; \quad |kP(j2)| = 1.7678.$$

El controlador de adelanto debe garantizar que el ángulo a esta frecuencia sea  $-120^\circ$ . Sin embargo, teniendo en cuenta que vamos a introducir un controlador de atraso que “se come”  $5.6^\circ$ , realmente el ángulo que debe proporcionar el controlador de adelanto es de  $\phi_m = 60 + 135 + 5.6 - 180 = 20.6^\circ$ .

Un adelanto de  $\phi_m = 20.6^\circ$  requiere

$$\beta = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = 2.0857$$

y,

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}\omega_c} = 0.3462$$

Luego el controlador es

$$K_1(s) = 10 \frac{0.7221s + 1}{0.3462s + 1}$$

A continuación diseñamos un controlador de atraso que produzca una ganancia igual a 1 en  $\omega = 2$ . Para ello se requiere que

$$\alpha = \frac{1}{|kK_1(j\omega_c)P(j\omega_c)|} = 0.3917$$

$$T_2 = \frac{10}{\alpha\omega_c} = 12.764$$

con lo cual se obtiene,

$$K_2(s) = \frac{5s + 1}{12.76s + 1}$$

Usando el controlador compuesto

$$K(s) = 10 \frac{0.7221s + 1}{0.3462s + 1} \frac{5s + 1}{12.76s + 1}$$

se obtiene un  $MF = 62^\circ$ , con  $\omega_c = 2.01$ , el cual cumple todas las especificaciones.

La figura 6.29 presenta la respuesta de frecuencia de  $kP(s)$  (curva intermedia, en color azul), de  $kK_1(s)P(s)$  (curva superior, de color verde) y la de  $L(s) = K(s)P(s)$  (curva inferior, de color rojo). Vale la pena notar el efecto de amplificación y el adelanto de fase de  $K_1(s)$  y la atenuación introducida por  $K_2(s)$ .

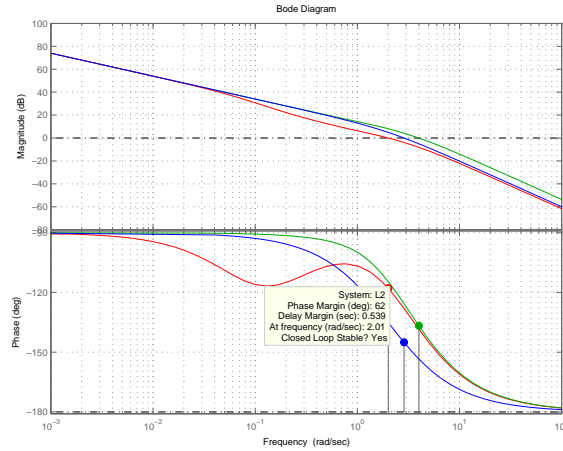


Figura 6.29: Respuesta de frecuencia usando controlador de atraso-adelanto

Las funciones de lazo cerrado resultantes son

$$T(s) = \frac{36.1s^2 + 57.22s + 10}{4.419s^4 + 21.95s^3 + 63.33s^2 + 59.22s + 10}$$

y

$$S(s) = \frac{s^4 + 4.967s^3 + 6.16s^2 + 0.4525s}{s^4 + 4.967s^3 + 14.33s^2 + 13.4s + 2.263}$$

Para terminar, simulamos la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado. En la figura 6.30 se puede observar el comportamiento. La respuesta tiene  $SP = 9\%$  y  $t_s = 6.57$  seg.

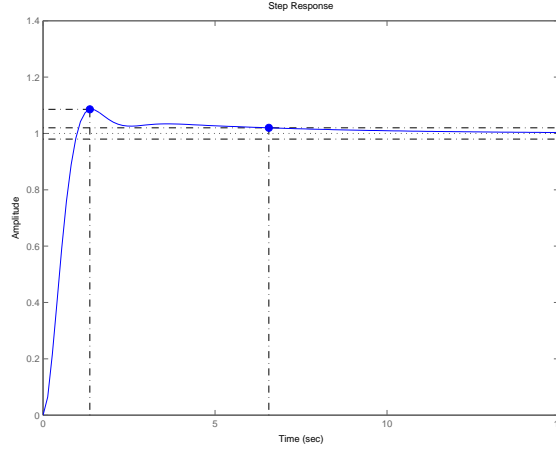


Figura 6.30: Respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado

## Apéndice A. Construcción del lugar geométrico

Es posible construir el lugar geométrico<sup>15</sup> en forma *analítica* usando algunas reglas simples, fácilmente deducibles de las condiciones del LG.

Recordemos que la condición para que un punto  $s_0$  pertenezca al *LG* de  $L(s)$  es

$$L(s_0) = \frac{-1}{k_0}$$

La cual se puede escribir en términos de magnitud y fase como:

$$\angle L(s_0) = -180^\circ; \quad |L(s_0)| = \frac{1}{k_0} \quad (6.20)$$

La condición de fase es la única indispensable, tal como habíamos mencionado antes. En realidad, la condición se puede escribir en forma general como

$$s_0 \in LG \quad \text{si y sólo si} \quad \angle L(s_0) = -k180^\circ, \quad \text{con} \quad k = \pm 1, \pm 3, \dots$$

<sup>15</sup>Usaré la sigla *LG* para referirme al lugar geométrico.

y el procedimiento para construir el  $LG$  consiste en chequear si un punto dado pertenece a él.

Es fácil calcular el ángulo de fase de  $L(s)$  en un punto  $s_0$ , en forma geométrica: Si

$$L(s) = \frac{\gamma \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

donde los  $z_i$ 's son ceros y los  $p_i$ 's son polos de lazo abierto. Entonces,

$$\angle L(s_0) = \angle \gamma + \sum_{i=1}^m \angle(s_0 - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s_0 - p_j)$$

Nótese que  $s_0 - q$  es el vector que va de  $q$  a  $s_0$  en el plano  $\mathbb{C}$ . El cálculo se ilustra con la figura 6.31. Para el caso mostrado en la figura y suponiendo que

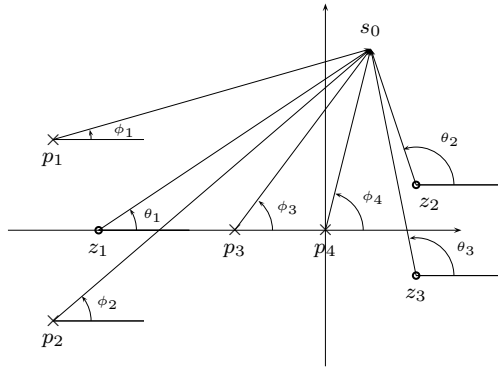


Figura 6.31: Evaluación gráfica de  $\angle L(s_0)$ .

$\gamma > 0$ ,

$$\angle L(s_0) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4.$$

Para facilitar el proceso de construcción del  $LG$ , obtendremos un conjunto de reglas que facilitan la construcción del  $LG$ .

Supondremos que  $L(s)$  es una función racional propia de  $s$ :

$$L(s) = \frac{n_L(s)}{d_L(s)}$$

con  $\partial n_L(s) = m$  y  $\partial d_L(s) = n$ , con  $n \geq m$ . Los ceros de  $n_L(s)$  son, por supuesto, los ceros de  $L$  (ceros de lazo abierto) y los ceros de  $d_L(s)$  son los polos de  $L$  (polos de lazo abierto). La ecuación característica  $1 + kL(s) = 0$  se puede escribir:

$$d_L(s) + k n_L(s) = 0 \quad (6.21)$$

la cual es una ecuación polinomial de grado  $n$ .



**Regla 1: Número de ramas del  $LG$** 

Para cada valor de  $k \geq 0$ , la ecuación 6.21 es una ecuación de grado  $n$ . Por lo tanto, tiene  $n$  raíces. Entonces:

**Regla 1:** El  $LG$  tiene  $n$  ramas que corresponden a las raíces de la ecuación característica.

**Regla 2: Simetría respecto al eje real**

Puesto que los coeficientes de la ecuación 6.21 son reales, las raíces son o reales o aparecen en pares complejos conjugados, para cualquier  $k \geq 0$ . Por lo tanto,

**Regla 2:** El  $LG$  es simétrico con respecto al eje real.

**Regla 3:  $LG$  en el eje real**

Para determinar si un punto  $s_0 \in \mathbb{R}$  pertenece o no al  $LG$ , evaluamos si se cumple la condición de ángulo. Hay que notar, primero, que los pares de polos o ceros complejos no contribuyen al ángulo de fase si  $s_0 \in \mathbb{R}$ , debido a la simetría (los dos ángulos se cancelan). Basta, entonces, considerar los polos o ceros reales.

Si el polo  $p_i$  está a la izquierda del punto  $s_0$ ; es decir, si  $p_i < s_0$ , entonces  $s_0 - p_j$  es un número real positivo. Por lo tanto,

$$\angle(s_0 - p_i) = 0.$$

Igual sucede si se trata de un cero. Por lo tanto los polos o ceros a la izquierda de  $s_0$  no contribuyen al ángulo de fase.

Cuando el polo  $p_i$  está a la derecha del punto  $s_0$ ; es decir, si  $p_i > s_0$ , entonces  $s_0 - p_j$  es un número real negativo. Por lo tanto,

$$\angle(s_0 - p_i) = 180^\circ.$$

Por supuesto, lo mismo sucede con un cero. Y un número par de ceros o polos a la derecha del punto  $s_0$  produce un ángulo de  $0^\circ$ .

Resumiendo, tenemos la regla siguiente:

**Regla 3:** Un punto  $s_0$  del eje real está en el  $LG$  si y sólo si el número de polos y ceros a su derecha es impar.

**Regla 4:  $LG$  cuando  $k \rightarrow 0$** 

La ecuación característica  $d_L(s) + kn_L(s) = 0$  cuando  $k \rightarrow 0$  se convierte en

$$d_L(s) = 0$$

lo cual significa que los polos de lazo cerrado tienden hacia los polos de lazo abierto cuando  $k \rightarrow 0$ , como era de esperarse.

**Regla 4:** Cuando  $k \rightarrow 0$ , el  $LG$  tiende hacia los polos de lazo abierto<sup>16</sup>.

**Regla 5:**  $LG$  cuando  $k \rightarrow \infty$

La ecuación característica se puede escribir como

$$\frac{n_L(s)}{d_L(s)} = L(s) = -\frac{1}{k}$$

lo cual tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Esto significa que el numerador de  $L(s)$  se hace cero (tiende hacia un cero de  $L(s)$ ) o que el denominador  $d_L(s)$  se hace infinito. Esto último solamente puede ocurrir cuando  $s \rightarrow \infty$ , puesto que  $d_L(s)$  es un polinomio.

Teniendo en cuenta que el  $LG$  tiene  $n$  ramas y que  $L(s)$  sólo tiene  $m \leq n$  ceros finitos, podemos concluir:

**Regla 5:** Cuando  $k \rightarrow \infty$ ,  $n$  ramas del  $LG$  tienden hacia los ceros de lazo abierto y las restantes  $n - m$  tienden a  $\infty$ <sup>17</sup>.

**Regla 6:**  $LG$  cuando  $|s| \rightarrow \infty$  (comportamiento asintótico)

La ecuación característica se puede escribir como

$$\frac{d_L(s)}{n_L(s)} = \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\gamma \prod_{j=1}^m (s - z_j)} = -k$$

Esta ecuación se puede reescribir:

$$\frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} = \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots} = -\gamma k \quad (6.22)$$

donde

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n p_i; \quad b_{m-1} = -\sum_{j=1}^m z_j$$

Expandiendo la fracción de la ecuación 6.22 en serie de potencias se obtiene,

$$-\gamma k = s^{n-m} + c_{n-m-1}s^{n-m-1} + \dots \quad (6.23)$$

<sup>16</sup>Coloquialmente decimos que el  $LG$  *arranca o empieza* en los polos de lazo abierto.

<sup>17</sup>Se dice, coloquialmente, que el  $LG$  *termina* en los ceros de lazo abierto o tiende a infinito.

donde

$$c_{n-m-1} = a_{n-1} - b_{m-1} = \sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i$$

Cuando  $|s| \rightarrow \infty$ , es suficiente tomar los dos primeros términos. Esto sugiere que comparemos la ecuación 6.23 con la de una estrella simétrica de  $n - m$  puntas, con centro en  $c$ , la cual está dada por:

$$(s - c)^{n-m} = -\gamma k. \quad (6.24)$$

Cuando  $k$  varía de 0 a  $\infty$ , esta ecuación describe un conjunto de  $n - m$  rayos emanando del punto  $c$ , formando ángulos de  $2\pi/(n - m)$  entre ellos. El rayo más cercano al eje real forma con éste un ángulo de  $\pi/(n - m)$ .

Expandiendo la ecuación 6.24 en serie de potencias, se obtiene:

$$s^{n-m} + (n - m)cs^{n-m-1} + \dots = -\gamma k$$

y, si comparamos esta última ecuación con 6.23, podemos afirmar que las ramas del  $LG$  coinciden cuando  $k \rightarrow \infty$ , o lo que es equivalente,  $|s| \rightarrow \infty$ , con la de una estrella, si

$$c_{n-m-1} = (n - m)c$$

ó

$$c = \frac{\sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i}{n - m}$$

Esto se puede resumir así:

**Regla 6:** Cuando  $|s| \rightarrow \infty$ , las  $n - m$  ramas que tienden a infinito se aproximan asintóticamente a una estrella con centro en

$$c = \frac{\sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i}{n - m} \quad (6.25)$$

y cuyos rayos forman ángulos de  $2\pi/(n - m)$  entre ellos. El rayo más cercano al eje real forma con éste un ángulo de  $\pi/(n - m)$ .

### Regla 7: Puntos de bifurcación del $LG$

Ya hemos encontrado varios ejemplos de lugares geométricos en los cuales dos (o más) ramas coinciden en un punto y luego se separan. Nuestro primer ejemplo (figura 6.5) muestra el  $LG$  de

$$L(s) = \frac{1}{s(s + 2)}$$

Dos ramas del  $LG$  en el eje real que se encuentran en  $s = -1$  y se alejan del eje hacia valores complejos. La región se encuentra entre los dos polos de lazo abierto en 0 y en  $-2$ .

Analizando el comportamiento de la ganancia  $k$  en esa región, se observa que  $k = 0$  en los polos de lazo abierto y aumenta hacia el interior de la región. Si calculamos la ganancia en cada punto, usando la condición de  $LG$ ,

$$k = -1/L(s) = -s(s+2)$$

y la graficamos en la región  $[-2, 0]$ , obtenemos la curva de la figura 6.32

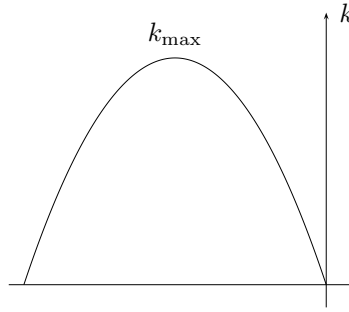


Figura 6.32: Variación de la ganancia a lo largo del  $LG$

Es claro que la bifurcación (punto donde se separan las ramas) ocurre en el sitio donde la ganancia tiene un máximo local. También puede ocurrir el fenómeno opuesto de dos ramas que se unen y ello ocurre donde hay un mínimo local de  $k$ . Por lo tanto, podemos expresar la condición de bifurcación como:

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d(1/L(s))}{ds} = 0$$

Usando el hecho de que si  $k$  es máximo (resp. mínimo), entonces  $1/k$  es mínimo (resp. máximo), entonces la condición también se cumple donde

$$\frac{dL(s)}{ds} = 0$$

Se puede usar cualquiera de estas condiciones; por lo general, se debe usar la que sea más simple de aplicar.

**Regla 7:** El  $LG$  se separa (o llega) al eje real en los puntos donde

$$\frac{d(1/L(s))}{ds} = 0, \quad \text{ó} \quad \frac{dL(s)}{ds} = 0$$

**Regla 8: Ángulo de partida de un polo**

El  $LG$  sale de los polos. Cuando el polo es real, el ángulo de partida es normalmente  $0^\circ$  ó  $180^\circ$ , dependiendo de cuántos polos hay a la derecha (ver

regla 3). Si el polo es doble, entonces dos ramas salen de él, con ángulos de  $\pm 90^\circ$ .

Cuando el polo es complejo, la situación es un poco más compleja, pero puede estudiarse fácilmente. Supongamos el sistema con

$$L(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2 - s + 1.25)}$$

el cual tiene polos (de lazo abierto) en 0,  $-2$  y  $0.5 \pm j$ . Queremos determinar el ángulo de partida del  $LG$  del polo en  $0.5 + j$ .

Para ello, consideremos un punto  $s_0$  del  $LG$ , muy cerca del polo. Evaluamos el ángulo de fase en  $s_0$ , usando la información de la figura 6.33, la cual muestra las contribuciones de los vectores  $s_0 - p_i$ , con excepción del polo cercano. Ésta última no se alcanza a ver, debido a la escala. Para poderla apreciar, hemos ampliado la región cercana al punto  $s_0$ .

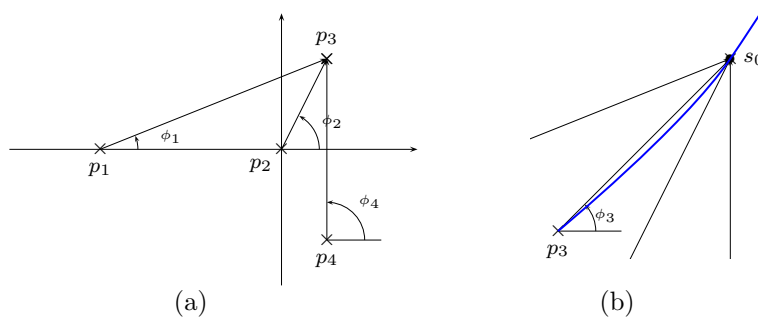


Figura 6.33: a. Evaluación gráfica del ángulo de partida. b. Ampliación cerca de  $s_0$ .

El punto  $s_0$  está muy cerca del polo  $p_3$ , por lo tanto, los ángulos  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_4$  en las dos gráficas son prácticamente idénticos. La condición de ángulo implica que

$$\angle L(s_0) = -\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = -180^\circ$$

y el ángulo de partida es  $\phi_3$ , si el punto está suficientemente cerca del polo. Por lo tanto, el ángulo de partida se puede hallar a partir de la condición de ángulo. Para el ejemplo, se determinó

$$\phi_3 = -180 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_4 = 180 + 22 + 63 + 90 = -5^\circ$$

Entonces, para determinar el ángulo de partida se usa la

**Regla 8:** El ángulo de partida de un polo o de llegada a un cero se puede encontrar, evaluando  $\angle L(s_0)$  en un punto  $s_0$  cercano al polo o cero y aplicando la condición de ángulo.

**Ejemplo 6.15.** Construiremos el lugar geométrico de

$$L(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2 - s + 1.25)}$$

$L$  es de cuarto orden, tiene polos (de lazo abierto) en 0,  $-2$  y  $0.5 \pm j$ , y, por lo tanto, hay cuatro ramas del LG. Este sistema tiene  $n = 4$ ,  $m = 0$ . Puesto que no hay ceros, entonces todas las cuatro ramas tienden a infinito.

El primer paso para construir el LG consiste en señalar los polos y los ceros de lazo abierto. A continuación, se determinan los segmentos del eje real que pertenecen al LG. En nuestro caso, el segmento  $[-2, 0]$  está en el LG, puesto que para cualquier punto en ese segmento, hay un polo a su derecha (tres, si se cuentan los polos complejos).

Las cuatro ramas tienden a infinito, por lo tanto, se acercan asintóticamente hacia una estrella con centro en

$$c = \frac{\sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i}{n - m} = \frac{-2 + 0 + 0.5 + j + 0.5 - j}{4} = \frac{-1}{4}$$

los cuales forman ángulos de  $90^\circ$  entre sí. El rayo más cercano al eje real forma un ángulo de  $45^\circ$  con él.

Debemos calcular el punto de bifurcación entre  $-2$  y  $0$ , donde las dos ramas se separan. Para ello, debemos encontrar un punto donde  $\frac{d}{ds} \frac{1}{L(s)} = 0$ , es decir

$$\frac{d[s(s+2)(s^2 - s + 1.25)]}{ds} = 4s^3 + 3s - 1.5s + 2.5 = 0$$

y resolviendo la ecuación, se halla  $s = -1.3621$ .

Finalmente, se calcula el ángulo de partida de los polos. esta parte ya la hicimos. Por lo tanto, el LG queda finalmente como se muestra en la figura [6.34](#)

**Ejemplo 6.16.** Ahora vamos a construir el LG de

$$L(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}.$$

Claramente,  $n = 2$ ,  $m = 1$ . El LG tiene dos ramas que arrancan en los polos en 0 y  $-1$  y una de las ramas termina en el cero en  $-2$ . Una de las ramas tiende a infinito.

El primer paso para construir el LG consiste en determinar cuáles partes del eje real pertenecen al LG. Usando la regla 3, se ve que los segmentos  $[-1, 0]$  y  $(-\infty, -2]$  están en el LG. El segmento  $[-1, 0]$  se encuentra entre dos polos, por lo cual el LG debe bifurcarse en algún punto y los polos se vuelven complejos. Similarmente, en el segmento  $(-\infty, -2]$  hay dos ramas, una de las cuales tiende a  $-\infty$  y la otra tiende al cero en  $-2$ . por lo tanto, debe haber un punto de bifurcación donde los polos se vuelven reales.

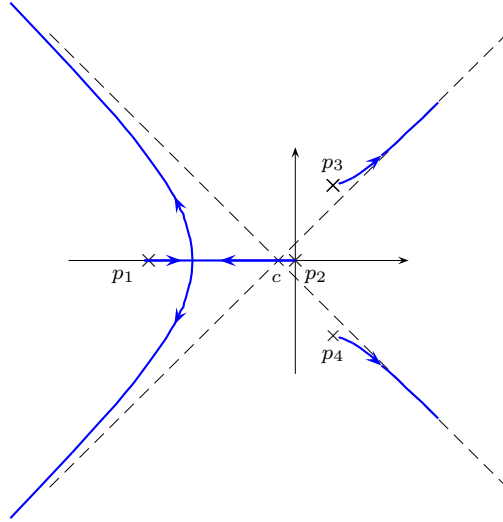


Figura 6.34:  $LG$  de  $\frac{1}{s(s+2)(s^2-s+1.25)}$

Para determinar dónde se producen las bifurcaciones, encontramos los puntos donde la ganancia es máxima. Para ello,

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d \left[ -\frac{s^2+s}{s+2} \right]}{ds} = -\frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} = 0$$

cuyas soluciones son  $-\sqrt{2}-2, = -3.4142$  y  $\sqrt{2}-2 = -0.58579$ . Por lo tanto, éstos dos puntos son los de bifurcación.

En la figura 6.35 está el  $LG$  construido usando las reglas anteriores.

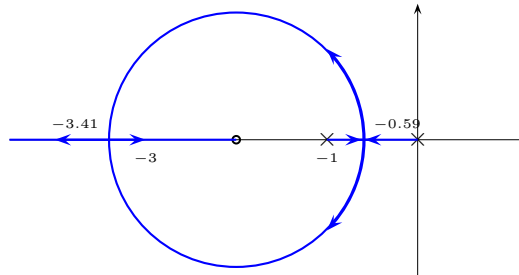


Figura 6.35:  $LG$  de  $\frac{s+2}{s(s+1)}$

## Apéndice B. Implementación de controles adelanto/atraso

Los controladores de adelanto o de atraso se pueden implementar en forma sencilla mediante circuitos eléctricos simples. Esto los hizo muy populares cuando todos los controladores eran análogos. Hoy en día, la mayoría de los controladores se implementan digitalmente, por lo cual ya no son tan populares como solían serlo.

### Circuito de atraso de fase

La función de transferencia de un controlador de atraso,

$$K(s) = k \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \quad (6.26)$$

con  $\alpha < 1$ , se puede obtener mediante un circuito simple RC como el que se muestra en la figura 6.36.

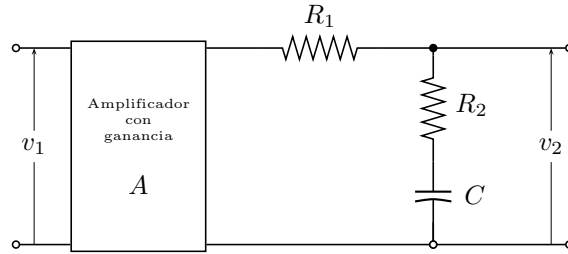


Figura 6.36: Red de atraso de fase

En efecto, en el circuito se puede obtener mediante división de tensión:

$$v_2(s) = A \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} v_1(s)$$

de donde,

$$v_2(s) = A \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}. \quad (6.27)$$

Comparando las ecuaciones 6.26 y 6.27 se nota que es posible implementar el controlador de atraso 6.26 mediante el circuito mostrado si se escogen sus parámetros tales que

$$k = A \quad (6.28)$$

$$T = (R_1 + R_2)C \quad (6.29)$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (6.30)$$

con lo cual se cumple la condición  $\alpha < 1$  del controlador de atraso.



### Red de adelanto de fase

El controlador de adelanto con función de transferencia:

$$K(s) = k \frac{\beta T s + 1}{T s + 1} \quad (6.31)$$

con  $\beta > 1$ , también puede implementarse mediante un circuito simple RC, como el que muestra la figura 6.37.

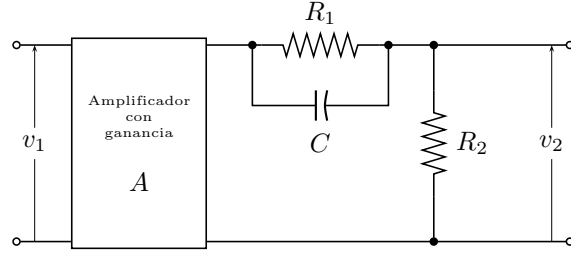


Figura 6.37: Red de adelanto de fase

Usando las ecuaciones de división de tensión, se halla:

$$v_2(s) = A \frac{R_2}{\frac{R_1/Cs}{R_1 + 1/Cs} + R_2} v_1(s)$$

lo cual se puede escribir en la forma:

$$v_2(s) = \frac{AR_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 C s + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C s + 1}. \quad (6.32)$$

Si se comparan las ecuaciones 6.31 y 6.32 vemos que es posible implementar el controlador de adelanto 6.31 usando el circuito mostrado si se escogen sus parámetros de forma que

$$k = \frac{A R_2}{R_1 + R_2} \quad (6.33)$$

$$T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \quad (6.34)$$

$$\beta = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (6.35)$$

y se cumple que  $\beta > 1$ , como se requiere.

## Capítulo 7

# Diseño con variables de estado

En este capítulo vamos a considerar el diseño de controladores basados en la representación de variables de estado. Vamos a suponer que la planta  $P(s)$  se puede representar mediante una realización en variables de estado de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Para el diseño nos limitaremos al caso  $m = 1$ ,  $p = 1$  (SISO —una entrada - una salida—). Sin embargo, los métodos son generales y se pueden usar en sistemas multivariables.

Para iniciar el capítulo, revisaremos las nociones de *Controlabilidad* y *Observabilidad*, las cuales serán centrales para el desarrollo. La técnica básica para el diseño de controladores basados en variables de estado es la *realimentación de las variables de estado*. Se trata, básicamente, de una técnica de localización de polos y se presenta en la segunda sección.

La implementación de controladores con realimentación de variables de estado requiere medir todas las variables. Esto por lo general no es factible por lo cual se suele acudir a la “estimación” de dichas variables. Para ello diseñamos un *observador*, usando las técnicas descritas en la sección 7.3. A continuación, se presenta la técnica de diseño óptimo cuadrático (LQ), el cual produce un sistema con características dinámicas bastante buenas.

Los controladores con realimentación de las variables de estado pueden ser muy buenos desde el punto de vista dinámico, pero no para cumplir condiciones estáticas. Para remediar esta deficiencia, se introduce el concepto de un controlador *PI vectorial*, en la última parte del capítulo.

## 7.1. Controlabilidad y observabilidad

La noción de controlabilidad de un sistema dinámico es fundamental para el diseño de sistemas de control.

**Definición 18** (Controlabilidad). *Un sistema se llama controlable si es posible encontrar una señal de entrada (control) que haga variar el estado del sistema de un estado inicial arbitrario a un estado final cualquiera, especificado, en un tiempo finito.*

R. Kalman, en los 60's demostró el siguiente:

**Teorema 15.** *Un sistema lineal descrito por ecuaciones de estado es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad*

$$\theta_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

tiene rango  $n$ .

La demostración se puede encontrar en [Che95]. □

La matriz  $\theta_c$  tiene dimensiones  $n \times nm$ . Se puede notar que la controlabilidad no depende de la matriz  $C$ . Por ello se dice que el par  $(A, B)$  es controlable, no importa cuál sea  $C$ .

La noción de observabilidad de un sistema dinámico es la dual de la controlabilidad y surge en la medición para el diseño de sistemas de control.

**Definición 19** (Observabilidad). *Un sistema se llama observable si es posible reconstruir el vector de estado inicial  $x(0)$ , a partir de las señales de entrada y de salida del sistema, medidas durante un intervalo finito de tiempo*

R. Kalman, en los 60's también demostró el siguiente:

**Teorema 16.** *Un sistema lineal descrito por ecuaciones de estado es observable si y sólo si la matriz de observabilidad*

$$\theta_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene rango  $n$ .

Vamos a ver a continuación que este teorema se puede considerar como un corolario del anterior. □

La matriz  $\theta_c$  tiene dimensiones  $nm \times n$ . Y, como en el caso de la controlabilidad, se puede ver que la observabilidad no depende de la matriz  $B$ . Por ello se dice que el par  $(A, C)$  es observable, no importa cuál sea  $B$ .

### Relación entre controlabilidad y observabilidad

Observando las definiciones, notamos una gran similitud y las condiciones de los teoremas de Kalman resaltan este hecho.

Si la matriz de observabilidad se transpone, se encuentra

$$\begin{aligned}\theta_o^T &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}\end{aligned}$$

la cual es la matriz de controlabilidad del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A^T z(t) + C^T u(t) \\ y(t) &= B^T z(t) + Du(t)\end{aligned}$$

llamado el *dual* del sistema original. Análogamente, la matriz de observabilidad de este sistema, es la transpuesta de la matriz de controlabilidad del sistema original.

**Ejemplo 7.1.** *El sistema con*

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -0.8868 & -0.0098 & -0.5788 \\ 0.0409 & -0.1636 & 0.3461 \\ -0.5846 & 0.5404 & -1.8854 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0.5283 \\ -0.0934 \\ 0.3895 \end{bmatrix} \\ C &= [-0.0927 \quad -0.3516 \quad 0.0725] \\ D &= -0.2359\end{aligned}$$

*Tiene la matriz de controlabilidad*

$$\theta_c = \begin{bmatrix} 0.5283 & -0.6930 & 1.2459 \\ -0.0934 & 0.1717 & -0.4349 \\ 0.3895 & -1.0936 & 2.5598 \end{bmatrix}$$

*cuyo rango es 3. La matriz de observabilidad en este caso es:*

$$\theta_o = \begin{bmatrix} -0.0927 & -0.3516 & 0.0725 \\ 0.0255 & 0.0977 & -0.2048 \\ 0.1012 & -0.1269 & 0.4052 \end{bmatrix}$$

*y también tiene rango 3. Por lo tanto, el sistema es controlable y observable.*

### Transformación de coordenadas

Las nociones de controlabilidad y observabilidad son independientes del sistema de coordenadas que se escoja. Esta propiedad es fundamental, puesto que hemos visto que un modelo de variables de estado puede representarse de infinitas maneras, simplemente mediante el cambio de coordenadas en el espacio de estado.

Supongamos dos realizaciones diferentes pero equivalentes; es decir, relacionadas por medio de una transformación de similitud,

$$x(t) = Tz(t)$$

donde  $T$  es una matriz no singular. Es posible escribir

$$z(t) = T^{-1}x(t)$$

Entonces,  $z$  satisface la ecuación de estado

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= CTz(t) + Du(t)\end{aligned}$$

y la matriz de controlabilidad para este sistema es

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_c &= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \cdots & T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = T^{-1}\theta_c\end{aligned}$$

Puesto que  $T$  es no singular,  $\bar{\theta}_c$  y  $\theta_c$  tienen el mismo rango.

Un cálculo análogo se puede hacer para la observabilidad. Por lo tanto, las propiedades de controlabilidad y observabilidad no varían cuando se toman realizaciones equivalentes.

**Ejemplo 7.2.** *La función de transferencia*

$$P = \frac{-s + 2}{s^2 + 3s - 10}$$

*tiene una realización (sistema equivalente de variables de estado)*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0.0 & 4.0 \\ 2.5 & -3.0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

*Las matrices de controlabilidad y observabilidad de este sistema son:*

$$\theta_c = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \theta_o = \begin{bmatrix} 0.5 & -1.0 \\ -2.5 & 5 \end{bmatrix}$$

*cuyos rangos son dos y uno, respectivamente. Por lo tanto el sistema es controlable pero no observable. Para visualizar lo que esto significa, vamos a hacer*

una transformación de coordenadas que diagonalice la matriz  $A$ . Esto se puede obtener a partir de los autovectores de  $A$ . La matriz de autovectores en este caso es:

$$T = \begin{bmatrix} -0.6247 & 0.8944 \\ 0.7809 & 0.4472 \end{bmatrix}$$

Usando esta como matriz de transformación, obtenemos un sistema *diagonalizado*:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -5 v_1 + 0.9147 u \\ \dot{v}_2 &= 2 v_2 + 0.6389 u \\ y &= -1.0932 v_1\end{aligned}$$

En este modelo, las variables de estado  $v_1$  y  $v_2$  no se afectan entre ellas. Y la salida solo refleja las variaciones de  $v_1$ . De hecho,  $v_2$  crece exponencialmente y las mediciones de la salida no permiten saberlo. En realidad, la señal de control se puede escoger para estabilizar a  $v_2$ , pero no hay forma de saber que es inestable.

Un modelo como este, donde las ecuaciones de estado son desacopladas (cada variable de estado sólo depende de sí misma y, a veces, de la entrada) se conoce como modelo *modal* y las variables de estado son los *modos*. Como vemos, algunos de los modos son *observables* y otros no lo son. En este caso, el primer modo  $v_1$  es observable y el segundo  $v_2$  no lo es.

Para la función de transferencia 7.2 es posible encontrar otra realización, donde

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1], & D = 0\end{aligned}$$

Para este sistema, se encuentra que es observable pero no controlable. Una realización equivalente, diagonal, se puede obtener, transformando  $x = T z$ , donde

$$T = \begin{bmatrix} -0.8944 & 0.9806 \\ 0.4472 & 0.1961 \end{bmatrix}$$

es la matriz de los autovectores de  $A$ .

En este caso, el sistema transformado queda

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -5 z_1 - 2.2361 u \\ \dot{z}_2 &= 2 z_2 \\ y &= 0.4472 z_1 + 0.1961 z_2\end{aligned}$$

Es fácil notar que la señal de entrada  $u$  no afecta de ninguna manera a la variable  $z_2$ . La respuesta de  $z(t)$  es completamente independiente del control.

La salida medida en este caso, si permite saber que  $z_2$  está creciendo exponencialmente, pero no hay nada que podamos hacer para evitarlo.

En el caso actual, el modo no controlable, además, es inestable. Decimos que este sistema es no estabilizable.

La función de transferencia de este sistema

$$P(s) = \frac{s-3}{s^2-s-6}$$

se puede simplificar, factorizando el denominador, como

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Se puede demostrar [Che95] que si un sistema no es controlable o no observable, debe haber alguna cancelación de polos y ceros. Es decir, que se puede obtener una realización de dimensión menor. Un modelo de estado controlable y observable se denomina *Realización mínima*. En Julia existe la función `minreal()` para obtener una realización controlable y observable.

La controlabilidad y la observabilidad se pueden caracterizar de varias formas alternativas. El apéndice de este capítulo presenta un resultado muy general en ese sentido.

## 7.2. Realimentación de variables de estado

La principal configuración de control, basada en variables de estado, utiliza una señal de control de la forma

$$u(t) = r(t) - Gx(t) \quad (7.3)$$

donde  $G$  es una matriz de ganancia de dimensión  $m \times n$ . Esta configuración se llama *Realimentación de variables de estado*.<sup>1</sup>

Usando la definición 7.3 en la ecuación de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + B(r(t) - Gx(t)) \\ &= (A - BG)x(t) + Br(t) \\ &= A_{LC}x(t) + Br(t) \end{aligned}$$

donde  $A_{LC} = A - BG$  es la matriz de estado de lazo cerrado.

Puesto que la dinámica del sistema depende fundamentalmente de la matriz de estado, se observa en esta ecuación que es posible cambiar el comportamiento del sistema usando esta ley de control.

---

<sup>1</sup>Lo cual llamaremos por la sigla RVE.

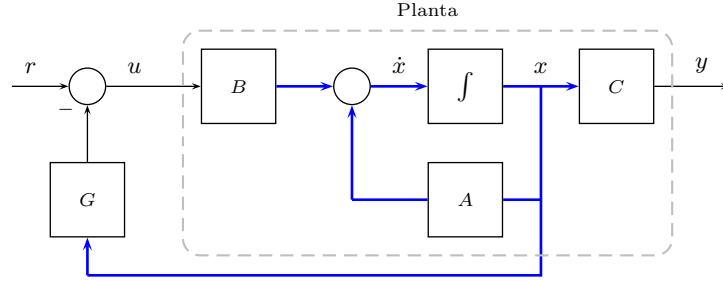


Figura 7.1: Realimentación de variables de estado

### Qué se puede hacer con RVE?

El principal resultado en esta área fue obtenido por R. Kalman:

**Teorema 17** (Localización de polos). *Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces es posible asignar los polos (valores propios) de la matriz  $(A - BG)$  en cualquier lugar del plano complejo, seleccionando adecuadamente la matriz  $G$ .*

Para la demostración se puede consultar [Won74].  $\square$

De esta forma podemos lograr un diseño con asignación de polos mediante RVE, usando una zona de diseño o zona rosa.

**Ejemplo 7.3.** Dado el sistema con

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los valores propios (polos) de  $A$  son  $-3$  y  $1$ . El sistema es controlable; por lo tanto, se pueden asignar los polos de lazo cerrado en cualquier posición del plano complejo usando RVE.

Usando RVE,

$$\begin{aligned} A - BG &= \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 - k_1 & 4 - k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} \lambda + 6 & 3.5 \\ k_1 - 6 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2 + k_2)\lambda - 3 + 6k_2 - 3.5k_1.$$



Si queremos asignar los polos en  $-3$  y  $-1$ , el polinomio característico sería  $(\lambda + 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$ . Si ahora igualamos los coeficientes de los dos polinomios se obtiene,

$$\begin{aligned} 2 + k_2 &= 4 \\ -3 + 6k_2 - 3.5k_1 &= 3 \end{aligned}$$

La solución del sistema de ecuaciones es  $k_2 = 2.0$ ,  $k_1 = 1.7143$ .

Entonces, la ley de control

$$u(t) = r(t) - 1.7143x_1(t) - 2x_2(t)$$

produce un sistema de lazo cerrado con los polos en la posición deseada.

### Localización de polos en Julia

Julia tiene una rutina que resuelve el problema de asignación de polos.

En el caso SISO, utiliza el llamado algoritmo de Ackerman ([?]), un método que puede tener algunos problemas numéricos, no es muy recomendable para sistemas de dimensión muy grande. En esos casos, es recomendable usar precisión extendida.

Para sistemas MIMO utiliza `place_kvnd`, un algoritmo más confiable.

Para resolver el problema anterior, se usaría:

---

```

1 A=[-6, -3.5; 6 4]
2 B=[0; 1]
3 # Localización deseada
4 polos=[-3, -1]
5 # Calcula matriz de ganancia para localizar los polos
6 G=place(A,B,polos)

```

---

### Características estáticas — Precompensadores

Analicemos la respuesta del sistema de lazo cerrado. La función de transferencia de lazo cerrado está dada por:

$$y(s) = \left[ C (sI - A + BG)^{-1} B + D \right] r(s)$$

Para considerar la respuesta estática, estudiemos la ganancia d.c. del sistema de lazo cerrado. Suponiendo que el sistema de lazo cerrado es estable, o sea que la matriz  $A - BG$  es Hurwitz, entonces no tiene valores propios en  $s = 0$ . Eso significa que  $A - BG$  es no singular. Por lo tanto, es posible calcular la ganancia d.c.:

$$T(0) = C (-A + BG)^{-1} B + D$$

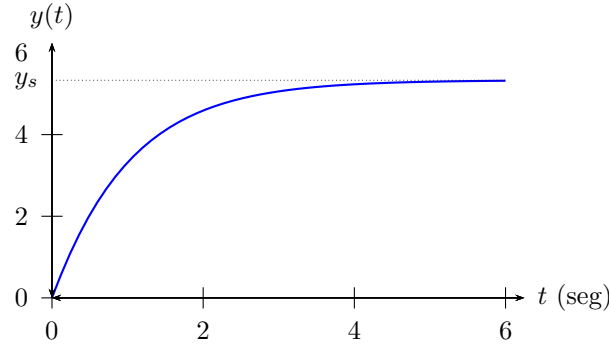


Figura 7.2: Respuesta al escalón de sistema con RVE

por lo tanto,

$$S(0) = 1 - C(-A + BG)^{-1}B - D$$

Y no hay garantía de que  $|S(0)|$  sea pequeña. Eso significa que el error debido a variaciones de la referencia o a perturbaciones no se puede garantizar que sea pequeño.

**Ejemplo 7.4.** En el ejemplo anterior, la matriz de estado de lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} A - BG &= \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 - k_1 & 4 - k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 4.286 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La ganancia d.c. es

$$T(0) = C(-A + BG)^{-1}B + D = 5.333$$

y, por lo tanto

$$S(0) = 1 - 5.333 = -4.3333.$$

La respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado está en la figura 7.2

### Precompensación

El control de RVE no presta atención a las especificaciones estáticas; es decir, a la respuesta de estado estacionario, tal como acabamos de ver en el ejemplo. Esto presenta un problema puesto que, como hemos dicho varias veces, las especificaciones estáticas suelen ser las más importantes.

Una forma, muy usada, de reducir el problema consiste en agregar un *precompensador*, el cual no es más que una ganancia  $F$ , colocada antes del

comparador, como se muestra en la figura 7.3. En el ejemplo anterior, se debería usar

$$F = 1/T(0) = 1/5.333 = 0.1875$$

En el caso general,  $F(s)$  puede ser una función de transferencia que sirva para acondicionar la señal de referencia y hace parte del controlador.

Cuando la función de transferencia  $F$  es constante, realmente no es necesario incluir ninguna ganancia, puesto que basta con modificar la señal de referencia. Por ejemplo, si se trata de un control de temperatura, basta retirar la placa donde están marcadas las temperaturas de referencia y donde dice  $100^\circ$ , remplazarlo por  $533^\circ$ , o donde corresponde una temperatura de  $18.75^\circ$  escribir  $100^\circ$ , etc.

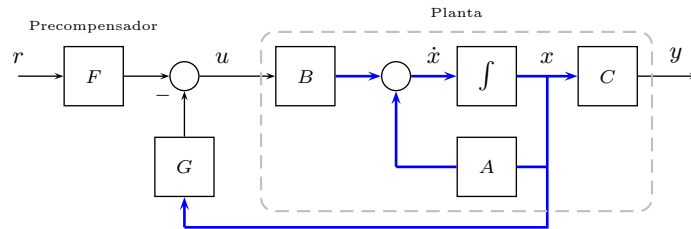


Figura 7.3: Realimentación de variables de estado con precompensador

La inclusión de un precompensador no elimina el efecto de las perturbaciones ni reduce los efectos de incertidumbres en el modelo debidas a errores de modelado o cambios debidos a envejecimiento, desgaste, calentamiento, etc. Sin embargo, es una forma muy simple de lograr cumplir las especificaciones estáticas. En el final del capítulo veremos cómo se puede incluir acción integral en el controlador de RVE para reducir a cero el error de posición.

**Ejemplo 7.5.** En el ejemplo anterior, si el precompensador tiene una ganancia  $F = 1/T(0) = 0.1875$ , la respuesta al escalón es como la de la figura 7.4

El código Julia para hacer este cálculo es:

```
1 include("ControlUN.jl")
2 A = [-6 -3.5; 6 4]
3 B = [0; 1]
4 C = [4 5]
5 sys = ss(A, B, C, 0)
6 polos = [-3 -1]
7 K = place(A, B, polos)
8 eigen(A).values
9 eigen(A - B * K).values
10 pole(sys)
```

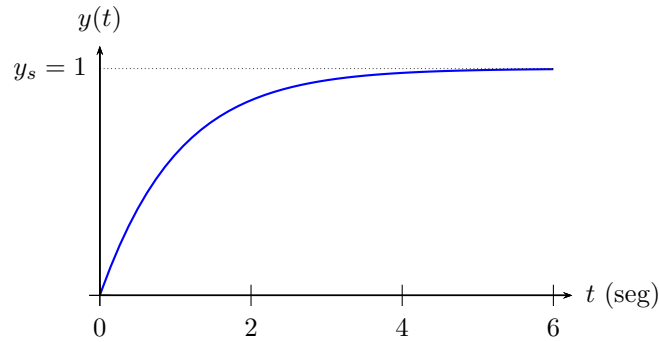


Figura 7.4: Respuesta al escalón de sistema con RVE y precompensador

```

11 # Sistema de lazo cerrado
12 sys_lc = ss(A - B*K, B, C, 0)
13 pole(sys_lc)
14 K
15 step_plt(sys_lc, 10)
16 # Ganancia precompensador
17 F = 1 / dcgain(sys_lc)[1,1]
18 # Sistema lazo cerrado con precompensador
19 sys_lc_pre = F * sys_lc
20 step_plt(sys_lc_pre, 10)

```

---

### 7.3. Estimación de estado

El principal problema para la implementación de RVE es que se requiere medir todo el estado; es decir, todas las componentes del vector de estado instantáneo  $x(t)$  y para todo  $t$ . Normalmente, en un sistema de control, sólo se dispone de unas pocas mediciones de las variables; por lo general, sólo la salida. La configuración de la planta es como se muestra, por ejemplo en la figura 7.3.

Pero para implementar la RVE se requiere hallar todo el vector de estado  $x(t)$ , por lo cual es necesario medir o calcular todas sus componentes.

#### Estimador de estado

Para poder implementar un controlador basado en RVE, se desarrolló un *estimador de estado* (también llamado *observador*). Este es un sistema en el cual se calculan, en forma aproximada, las variables de estado a partir de la entrada y la salida de la planta.

La respuesta del observador es un vector  $\hat{x}(t)$  denominado *estimación de  $x(t)$*  o *vector de estado estimado*. El concepto se ilustra en la figura 7.5.

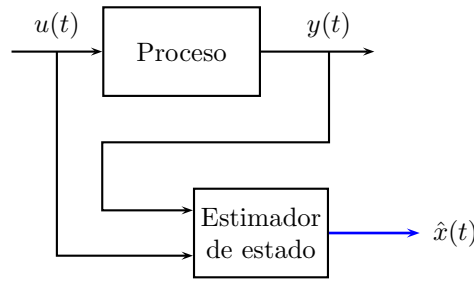


Figura 7.5: Estimador de estado

### Estimador de estado asintótico

Por lo general, es imposible lograr que  $\hat{x}(t) = x(t), \forall t$ . Por esa razón, nos conformamos con un estimador de estado asintótico. Es decir, uno en el cual

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0 \quad (7.4)$$

El vector

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

se denomina error de estimación.

Usando esta definición, la condición para un estimador de estado asintótico se puede escribir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_x(t)\| = 0$$

### Implementación del observador

Un estimador de estado elemental se puede implementar mediante una simulación, en tiempo real, de la planta. Consideremos una planta descrita por ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

(vamos a considerar plantas estrictamente propias —con  $D = 0$ —, con el fin de simplificar las ecuaciones y las figuras.)

Un estimador de estado elemental es una simulación de la planta, de la forma mostrada en la figura 7.6. Debido al teorema de unicidad de las ecuaciones diferenciales, los dos sistemas tienen iguales soluciones, siempre y cuando las condiciones iniciales sean iguales. (Y esto, ¿es un problema?)

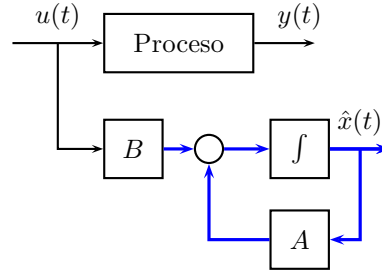


Figura 7.6: Observador elemental

El problema es que no se conoce el estado inicial de la planta. (En realidad, si se conociera el estado inicial  $x(0)$ , se podrían resolver las ecuaciones de estado y hallar  $x(t)$ ) y no necesitaríamos observador.

Sin embargo, aún no hemos empleado la medición de la salida de la planta. Vamos a usar una señal de realimentación de la forma

$$L(y - C\hat{x})$$

para tratar de hacer que el error tienda a cero.

La ecuación de estado del estimador queda así:

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

o

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ &= (A - LC)\hat{x} + Bu + LCx \end{aligned}$$

Las ecuaciones de estado del sistema planta-observador se pueden agrupar en la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u$$

Con el fin de aclarar las interacciones entre los componentes, vamos a efectuar un cambio de variable, usando  $e_x(t)$  en vez de  $\hat{x}$ . Para ello, calculamos la derivada  $\dot{e}_x$ .

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \frac{d}{dt}(x - \hat{x}) \\ &= Ax + Bu - LCx - (A - LC)\hat{x} - Bu \\ &= (A - LC)(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)e_x \end{aligned}$$

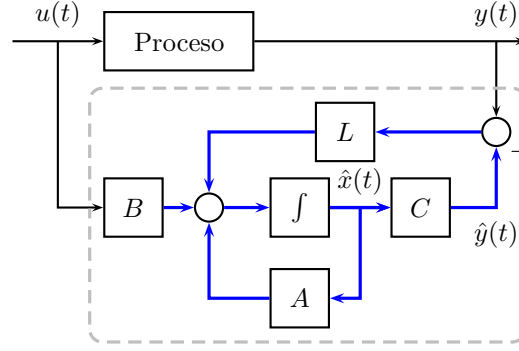


Figura 7.7: Observador asintótico

Por lo tanto, si la matriz  $L$  se escoge de manera que los polos de  $A - LC$  sean estables, entonces el error tiende a cero exponencialmente.

Las ecuaciones combinadas de la planta y el observador se pueden escribir

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

### Diseño del observador

Para diseñar el observador basta seleccionar una matriz  $L$  que haga que  $A - LC$  tenga sus polos (denominados *polos del observador*) en una región deseada del SPI. Por lo general, se requiere que los polos del observador tengan parte real negativa menor que los polos del sistema de lazo cerrado (*polos del controlador*).

Un criterio empírico usado frecuentemente es

$$\Re \lambda_o < 5 \Re \lambda_c$$

donde  $\lambda_o$  es el conjunto de los polos del observador y  $\lambda_c$  representa el conjunto de los polos del sistema de lazo cerrado.

Para hallar la matriz de ganancia del observador  $L$  se puede usar un algoritmo de asignación de polos. Pero teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \lambda(A - LC) &= \lambda(A - LC)^T \\ &= \lambda(A^T - C^T L^T) \end{aligned}$$

donde  $\lambda(A)$  representa los valores propios de la matriz  $A$ , entonces, es posible usar el mismo algoritmo, usado para asignar los polos del controlador, para asignar los polos del observador.

Se puede hallar la matriz  $L$  que asigna unos polos dados al observador si se asignan los polos a un controlador para un sistema

$$\dot{z} = A^T z + C^T u$$

En Julia, se usaría el siguiente comando,

---

```
1 L=place(A',C',PolosObs)';
2 # nótese las transposiciones
```

---

Cuando el sistema lineal está definido como ecuación de estado, la matriz  $L$  para la localización de los polos del observador se puede obtener en Julia:

---

```
1 L=place(sys,PolosObs, :o);
2 # Sin transposiciones
```

---

**Ejemplo 7.6.** Vamos a implementar un control con RVE, usando un observador para el sistema

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los polos del sistema de lazo cerrado van a ser asignados en  $[-3 \pm 0.5j]$ .

Se diseñará un observador para implementar este controlador. Los polos del observador se asignarán en  $\begin{bmatrix} -12 & -15 \end{bmatrix}$ .

Para hallar la matriz de ganancia  $G$  tal que  $A-BG$  tiene polos en  $[-3 \pm 0.5j]$  y la matriz  $L$  tal que  $A-LC$  tiene sus polos en  $\begin{bmatrix} -12 & -15 \end{bmatrix}$ , usamos el algoritmo de asignación de polos en Julia

---

```
1 A=[-3 -1; 2 0]
2 B=[0.5;0]
3 C=[0 1]
4 # Polos del controlador
5 poloC=[-3+0.5im, -3-0.5im]
6 # G=place(A,B,poloC)
7 sys = ss(A,B,C,0)
8 G = place(sys, poloC, :c)
9 # Polos del observador
10 PolObs=[-12, -15]
11 # L=place(A',C',PolObs)'
12 L = place(sys, PolObs, :o)
```

---



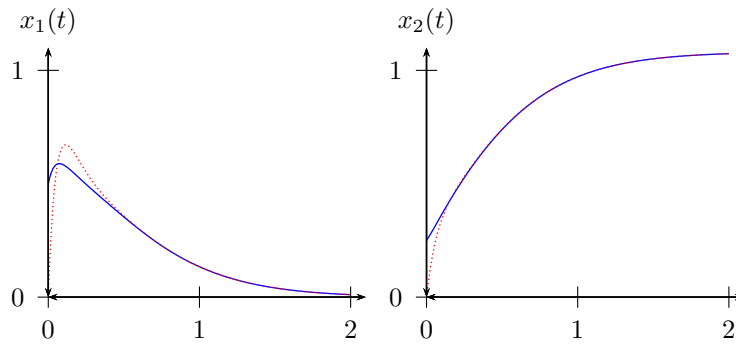


Figura 7.8: Estimación de las variables de estado: (a)  $x_1(t)$  y  $\hat{x}_1(t)$ . (a)  $x_2(t)$  y  $\hat{x}_2(t)$ . Las líneas continuas son las variables reales; las punteadas, las estimadas.

El resultado es

$$G = \begin{bmatrix} 6 & 7.25 \end{bmatrix}$$

y

$$L = \begin{bmatrix} 53 \\ 24 \end{bmatrix}$$

En la figura 7.8 se observa el resultado de la estimación de estado. La curva de la figura (a) muestra la variable  $x_1(t)$  y su estimado  $\hat{x}_1(t)$ . La curva de la figura (b) es el resultado análogo para  $x_2$ . Las condiciones iniciales son  $x(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}^T$ . Las condiciones iniciales para  $\hat{x}$  son cero.

Cuando el vector inicial  $x(0)$  es cero, los valores estimados coinciden con los reales todo el tiempo, como era de esperarse.

## 7.4. Sistema Controlador - Observador

Cuando se usa un observador para implementar un control con RVE surgen las preguntas:

1. ¿La respuesta del sistema de lazo cerrado se ve afectada por el observador?
2. ¿El diseño del observador modifica el diseño del sistema de lazo cerrado?  
Es decir, ¿la asignación de polos del observador, cambia los polos que se habían escogido con el controlador?

Para responder a estas preguntas vamos a considerar el sistema de lazo cerrado usando un observador. En este caso, la ley de control 7.3 se reemplaza

por

$$u(t) = r(t) - G\hat{x}(t) \quad (7.5)$$

como se ilustra en la figura 7.9.

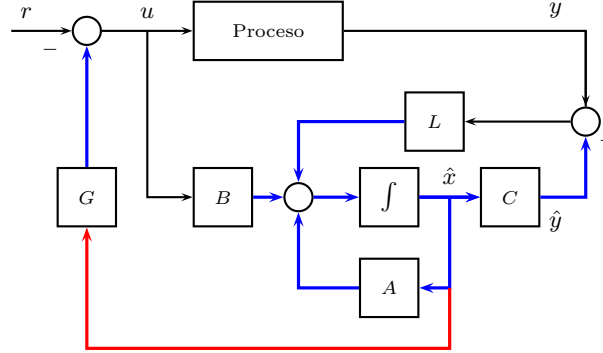


Figura 7.9: Controlador - observador

Por lo tanto, el sistema compuesto controlador - observador queda así:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

donde  $e_x = x - \hat{x}$ . por lo tanto,  $\dot{\hat{x}} = x - \dot{e}_x$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu \\ &= Ax + B(r - k\hat{x}) \\ &= Ax - BG(x - e_x) + Br \end{aligned}$$

Entonces, las ecuaciones combinadas del controlador y el observador son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BG & BG \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Usando una propiedad de las matrices triangulares por bloques [Gan60, Mey23], se tiene,

$$\lambda \begin{bmatrix} A - BG & BG \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} = \lambda(A - BG) \cup \lambda(A - LC) \quad (7.6)$$

Donde  $\lambda(X)$  representa el conjunto de los valores propios de la matriz  $X$ . De manera que el sistema de lazo cerrado tiene dos conjuntos de polos: Los polos del controlador y los del observador.

En conclusión, el hecho de incluir el observador no modifica la dinámica del sistema de lazo cerrado. De hecho, es posible diseñar por separado el controlador y el observador.

La relación 7.6 se denomina *teorema de separación*, debido a esta propiedad.

A continuación, vamos a comparar la respuesta de un sistema de lazo cerrado cuando se usa RVE, directamente usando mediciones de las variables de estado, y cuando lo que se realimenta es el estado estimado.

**Ejemplo 7.7.** Consideramos el sistema con

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)(s+2)}$$

Este sistema ya lo consideramos anteriormente para RVE y para diseñar un observador. Una realización en variables de estado para este sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5811 \end{bmatrix} \\ C &= [ 1.5811 \quad 0 \quad 0 ] \end{aligned}$$

Usamos una matriz de ganancia

$$G = [ 3.7947 \quad 11.3842 \quad 5.0596 ]$$

para colocar los polos del controlador en

$$[ -2 \quad -3 \quad -4 ]$$

Los polos del observador se asignan en

$$[ -20 \quad -25 \quad -30 ]$$

para lo cual se requiere una matriz de ganancia

$$L = \begin{bmatrix} 46.8 \\ 562.3 \\ 1832.9 \end{bmatrix}$$

Las curvas de la figura 7.10 muestran la respuesta del sistema de lazo cerrado cuando se usa RVE directamente usando mediciones de las variables de

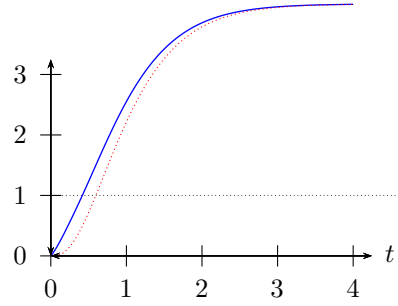


Figura 7.10: Respuesta al escalón de sistema con RVE directa (línea continua) y usando un observador (línea punteada)

estado (línea continua) y cuando se usa un observador para estimarlas (línea punteada). Las características dinámicas son muy similares.

También es necesario anotar que si las condiciones iniciales son cero, como ocurre en muchos procesos linealizados, las dos respuestas son idénticas. De hecho, todos los modelos de función de transferencia suponen que las condiciones iniciales son cero.

### Controlador basado en observador

El controlador RVE, implementado mediante un observador se puede considerar como un controlador dinámico que usa realimentación de la salida de la planta. Vamos a hallar la función de transferencia de dicho controlador.

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

donde la salida del controlador es la señal de control:

$$u(t) = r(t) - G\hat{x}(t).$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= (A - LC - BG)\hat{x}(t) + Br(t) - Ly(t) \\ u(t) &= -G\hat{x}(t) + r(t) \end{aligned}$$

y aplicando transformada de Laplace a las dos ecuaciones con cero condiciones iniciales, usando el procedimiento estándar para obtener la función de transferencia, obtenemos:

$$u(s) = \left\{ G(sI - A + LC + BG)^{-1} \begin{bmatrix} B & -L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} r(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

La cual es una función de transferencia que relaciona dos variables de entrada,  $r(s)$  y  $y(s)$ , con una variable de salida  $u(s)$ . Se trata de una función de transferencia matricial o una *Matriz de transferencia*.

Este tipo de controladores, que aparece aquí por primera vez, es cada vez más usado en las aplicaciones del control. La relación de entrada/salida descrita por la ecuación 7.7 se puede escribir como una matriz de transferencia del controlador: se puede representar en forma gráfica por el diagrama de bloques de la figura 7.11.

$$\begin{aligned} K(s) &= \begin{bmatrix} K_r(s) & K_y(s) \end{bmatrix} \\ &= G(sI - A + LC + BG)^{-1} \begin{bmatrix} B & -L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

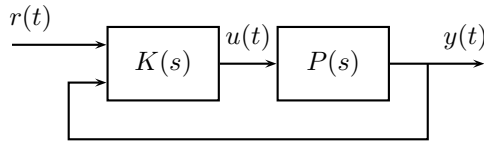


Figura 7.11: Controlador con RVE y observador

**Ejemplo 7.8.** En el ejemplo 7.7, el controlador tiene:

$$\begin{aligned} A_{ob} &= A - LC - BG = \begin{bmatrix} -0.0740 & 0.0020 & 0 \\ -0.8890 & 0.0010 & 0.0020 \\ -2.9040 & -0.0180 & -0.0100 \end{bmatrix} \\ B_{ob} &= \begin{bmatrix} B & -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0468 \\ 0 & -0.5623 \\ 0.0016 & -1.8329 \end{bmatrix} \\ C_{ob} &= G \\ D_{ob} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz de transferencia resultante es:

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_r(s) & K_y(s) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} K_r(s) &= \frac{s^3 + 91s^2 + 3090s + 47640}{s^3 + 83s^2 + 2470s + 31320} \\ K_y(s) &= \frac{-15850s^2 - 49700s - 360000}{s^3 + 83s^2 + 2470s + 31320} \end{aligned}$$

La estructura del controlador se puede representar en la forma mostrada en la figura 7.12. En el capítulo siguiente, veremos que este controlador se conoce como *de dos parámetros* o de *dos grados de libertad*.

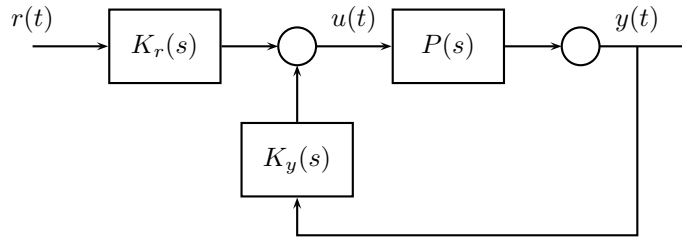


Figura 7.12: Controlador con RVE y observador

### Observadores reducidos

El observador tiene que proporcionar todas las variables de estado para implementar el controlador RVE. Pero, debemos notar que por lo menos tenemos una medición: la salida  $y$ . En sistemas multivariables, es posible tener varias variables de salida ( $y \in \mathbb{R}^p$ ). D. Luenberger [Lue66], diseñó un observador reducido, que usa  $y$  como una variable de estado, con lo cual solamente es necesario estimar  $n - 1$  (o, en el caso de varias salidas, con  $y \in \mathbb{R}^p$ , sólo se requiere estimar  $n - p$  variables). En el caso SISO, esto realmente no representa un gran ahorro de trabajo, pero en cambio, introduce algunos problemas desde el punto de vista de la robustez [Doy78].

Las referencias [Lue66, KS72] presentan, en detalle, el diseño de observadores reducidos.

### 7.5. Control óptimo lineal cuadrático

Una alternativa para seleccionar una localización aceptable de los polos, consiste en usar un método de optimización. Un regulador cuadrático lineal (LQR por su sigla en inglés), minimiza la función objetivo

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (7.8)$$

para un sistema descrito por ecuaciones de estado. En el caso SISO, la ecuación 7.8 queda

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + Ru^2(t)] dt \quad (7.9)$$

En la expresión anterior,  $Q$  es una matriz simétrica positiva semidefinida ( $Q \geq 0$ ) y  $R$  es una matriz simétrica y positiva definida ( $R > 0$ ). Las matrices positivas definidas y semidefinidas las consideramos anteriormente en el capítulo de estabilidad.

La solución del problema de optimización es una ley tipo RVE de la forma<sup>2</sup>

$$u(t) = -R^{-1}B^T P x(t) \quad (7.10)$$

donde la matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface la ecuación algebraica de Riccati

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

La función objetivo  $J$ , de la ecuación (7.9) representa una función siempre positiva o cero de las variables de estado más una, también positiva o cero de la señal de control. Para minimizar la integral, la señal de control debe lograr que  $x(t)$  tienda a cero rápidamente, pero al mismo tiempo sin tener valores muy grandes de  $u(t)$ , porque eso hace crecer la integral. La solución óptima, entonces, será un compromiso entre la reducción de  $\|x(t)\|$  y valores aceptables de  $|u(t)|$ .

### Existencia de controladores

El resultado más importante en esta área es el siguiente,

**Teorema 18.** *Supongamos que el par  $(A, B)$  es controlable<sup>3</sup>, entonces, existe una única solución  $P > 0$  de la ecuación de Riccati que estabiliza el sistema de lazo cerrado.*

Para la demostración se puede consultar [KS72]. □

### Márgenes de estabilidad

Es posible demostrar, aunque ello esté un poco más allá del alcance de este curso, que el diseño LQR produce características deseables del sistema de lazo cerrado. En particular, es posible probar (ver [ZDG96] o [AM07], por ejemplo) que si la matriz de ganancia  $G$  se escoge de acuerdo con la ecuación 7.10, entonces el sistema de lazo cerrado tiene los siguientes márgenes de estabilidad:

$$MG > 2; \quad MF > 60^\circ$$

### Solución en Julia

La solución del problema LQR se puede obtener en Julia mediante el comando

---

<sup>1</sup> `G=lqr(A,B,Q,R)`

---

<sup>2</sup>La demostración requiere una excursión bastante larga por el terreno del control óptimo. Pruebas, relativamente simples, se pueden encontrar en [KS72] y [ZDG96].

<sup>3</sup>En realidad, es posible relajar esta condición: con que sea estabilizable es suficiente.

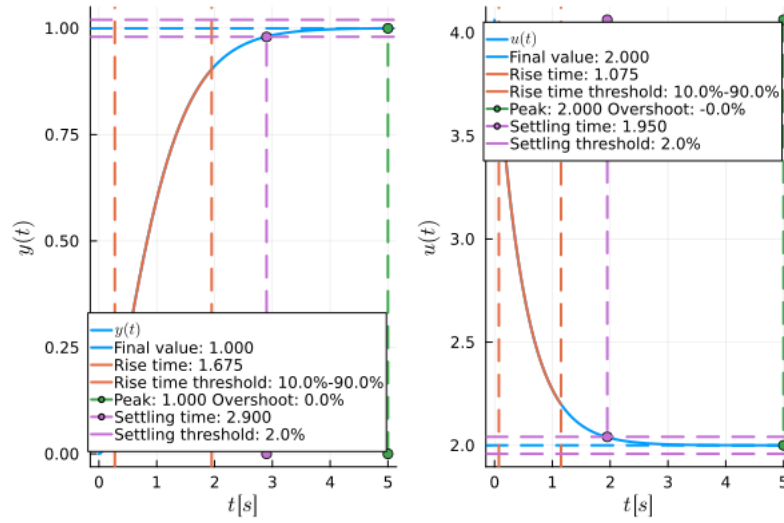


Figura 7.13: Respuesta al escalón de un controlador óptimo LQR: (a)  $y(t)$ . (b)  $u(t)$ .

**Ejemplo 7.9.** Vamos a diseñar un control para el sistema descrito, utilizando un control óptimo LQR.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y con

$$Q = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$R = 2$$

La solución, usando Julia, se halla como

$$G = \begin{bmatrix} 2.0620 & 2.0620 \end{bmatrix}$$

La respuesta del sistema de lazo cerrado aparece en la figura 7.13.

Los polos de lazo cerrado son

$$\begin{bmatrix} -2.031 \\ -2.000 \end{bmatrix}$$



Y la figura muestra que no hay sobrepicos, el máximo valor de  $u(t)$  es 4 y el tiempo de asentamiento  $t_s = 2.57$  seg.

El código Julia para hacer estos cálculos está a continuación:

---

```

1 using ControlSystems, LinearAlgebra, Plots
2 A = [-3 -1; 2 0]
3 B = [0.5; 0]
4 C = [0 1]
5 sys = ss(A, B, C, 0)
6 Q = 25.0I(2)
7 R = 2.0
8 G = lqr(sys, Q, R)
9 sys_cl = ss(A-B*G, B, C, 0)
10 step_plt(sys_cl, 5)
11 G_ur = minreal(sys_cl / sys)
12 plt = yu_stp_plt(sys_cl, G_ur, 5)

```

---

### Selección de las matrices de ponderación, $R$ y $Q$

El proceso de diseño LQ requiere la selección, por parte del diseñador, de las dos matrices de ponderación  $R$  y  $Q$ .<sup>4</sup> Cómo se deben escoger?

Lo primero que se debe notar es que las matrices representan pesos relativos que se les dan a las variables de estado y a la señal de control. Como el proceso de optimización busca reducir la *función objetivo* 7.8, un valor grande de un peso aplicado a una de las variables de estado, por ejemplo  $x_i(t)$ , hará que el diseño busque reducir rápidamente esa variable de manera que la integral no se vea muy afectada. Similarmente, un valor grande de  $Q$  hará que el diseño busque valores pequeños de la señal  $u(t)$ .

Usando esta idea, se suele tomar valores tentativos de  $Q$  y  $R$ . Si no hay razones para hacer otra cosa, es mejor empezar con una matriz diagonal para  $Q$ . Si los valores resultantes de  $u(t)$  producen saturación de los actuadores, se aumenta el valor de  $R$ . Si alguna variable de estado asume valores demasiado grandes, se le puede aumentar el peso correspondiente. De esta manera se procede hasta lograr un diseño aceptable.

Una posibilidad adicional, muy usada en el caso SISO, consiste en usar una

---

<sup>4</sup>En el caso de una sola entrada, la matriz  $R$  se reduce a un escalar, que llamaremos  $\rho$ .

función objetivo de la forma:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^\infty [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt \\
 &= \int_0^\infty [y^T(t)y(t) + u^T(t)\rho u(t)] dt \\
 &= \int_0^\infty [x^T(t)C^T C x(t) + \rho u^T(t)u(t)] dt
 \end{aligned}$$

en la cual se dan ponderaciones relativas a la salida y a la entrada, sin preocuparnos por las variables de estado. Para ello usamos:

$$Q = C^T C, \quad R = \rho$$

En este caso, si la señal de control  $u(t)$  excede cierto límite, es necesario aumentar el valor de  $\rho$  para reducir su valor máximo. Cuando la señal de control es, consistentemente, menor que el valor permitido, se puede reducir  $\rho$  para lograr una respuesta más rápida.

**Ejemplo 7.10.** *Ilustremos la selección de las matrices de ponderación para el ejemplo 7.9. Supongamos que se escoge  $Q = C^T C$  y  $R = \rho$ . Además, supongamos que el actuador disponible tiene una restricción que limita la señal de control en el rango*

$$|u(t)| \leq 5 \quad \forall t$$

*En este caso, solamente hay un valor que podemos escoger, es decir,  $\rho$ . Inicialmente tomemos  $\rho = 1$  y resolvamos el problema LQ.*

*La matriz de ganancia óptima en este caso es*

$$\begin{bmatrix} 0.1554 & 0.2361 \end{bmatrix}$$

*Las curvas de respuesta ante un escalón se muestran en la figura 7.14. Se observa que*

$$U_{\max} = \max_t |u(t)| = 2.2361$$

*de manera que este controlador satisface las condiciones del problema. El tiempo de asentamiento para este diseño es  $t_s = 4.12$  seg.*

*Sin embargo, queda la sensación de que se puede diseñar un controlador que responda más rápido, puesto que el actuador tiene un gran margen de acción.*

*Cambiando los valores de  $\rho$ , es posible obtener un diseño para el cual la respuesta sea más rápida, sin saturar el actuador. Después de varios intentos, se logró un diseño con  $\rho = 0.0477 \simeq$ , para el cual*

$$U_{\max} = \max_t |u(t)| = 4.9964.$$

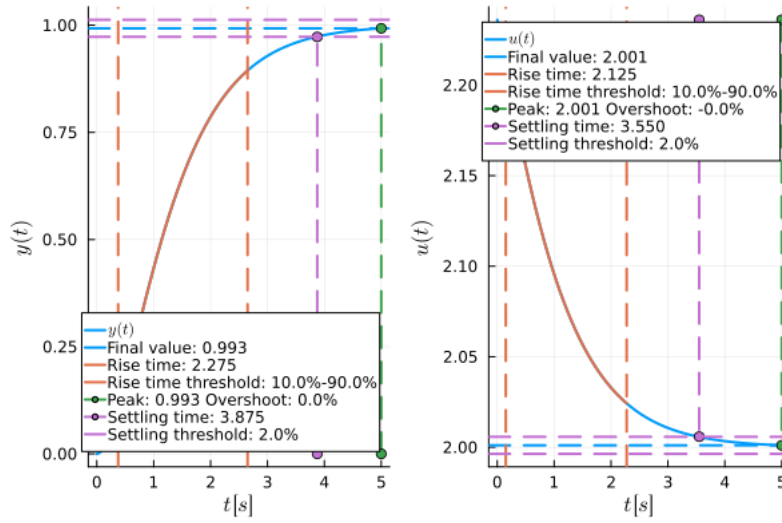


Figura 7.14: Respuesta al escalón de un controlador óptimo LQR con  $\rho = 1$ : (a)  $y(t)$ . (b)  $u(t)$ .

La respuesta ante un escalón se muestra en la figura 7.15. El tiempo de asentamiento para este diseño es  $t_s = 1.94$  seg, una notable mejora con respecto al diseño anterior.

La matriz de ganancia óptima en este caso es

$$\begin{bmatrix} 1.7441 & 2.9964 \end{bmatrix}$$

El código Julia para este cálculo está a continuación.

```

1 include("ControlUN.jl")
2 A = [-3 -1; 2 0]
3 B = [0.5; 0]
4 C = [0 1]
5 sys = ss(A, B, C, 0)
6 rank(ctrb(sys))
7 Q = C'*C
8 rho = 1.
9 G = lqr(sys, Q, rho)
10 sys_cl = ss(A-B*G, B, C, 0)
11 step_plt(sys_cl, 5)
12 sys_cl = sys_cl/dcgain(sys_cl)[1]
13 G_ur = minreal(sys_cl / sys)
14 u_max = max_resp_step(G_ur)

```

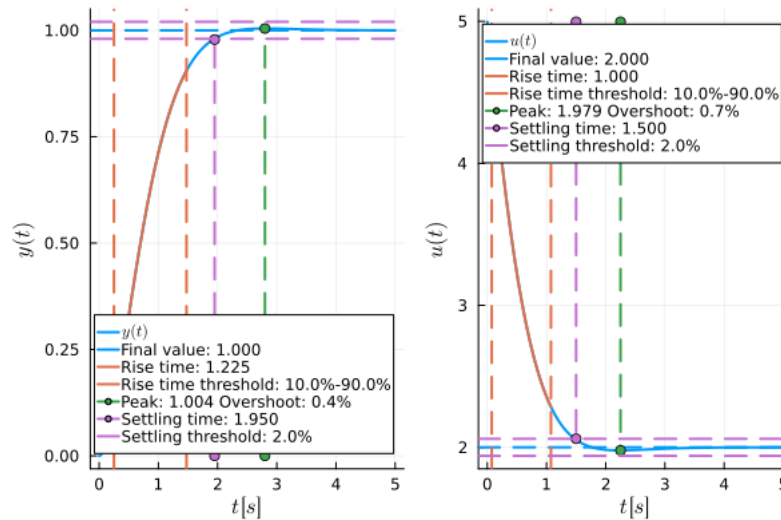


Figura 7.15: Respuesta al escalón de un controlador óptimo LQR con  $\rho = 0.0477$ : (a)  $y(t)$ . (b)  $u(t)$ .

```

15 plt = yu_stp_plt(sys_cl, G_ur, 5)
16 #
17 rho = 0.0477
18 G = lqr(sys, Q, rho)
19 sys_cl = ss(A-B*G, B, C, 0)
20 sys_cl = sys_cl/dcgain(sys_cl)[1]
21 step_plt(sys_cl, 5)
22 G_ur = minreal(sys_cl / sys)
23 u_max = max_resp_step(G_ur)
24 plt = yu_stp_plt(sys_cl, G_ur, 5)

```

## 7.6. Control PI vectorial

En las secciones anteriores hemos aprendido que el control se puede hacer utilizando las variables de estado. Resumiendo lo anterior se puede decir:

- Usando RVE se puede lograr asignación de polos y modificar la respuesta transitoria.
- Los controladores basados en RVE no consideran directamente las especificaciones estáticas. Para eliminar errores de estado estacionario aceptables, se requiere usar un precompensador. Pero los sistemas basados en este tipo de diseño no son robustos para reducir los errores.

- En capítulos anteriores aprendimos que una forma de lograr un diseño robusto consiste en usar una acción integral o control PI.

A partir de estas observaciones surgió la idea de generalizar el control PI al caso de variables de estado. La idea es muy simple. Basta considerar la integral del error como variable de estado.

A partir del sistema descrito por ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Calculamos el error de rastreo

$$\begin{aligned}e(t) &= y(t) - r(t) \\ &= Cx(t) - r(t)\end{aligned}$$

Para lograr una acción integral, definimos una variable igual a la integral del error:

$$\sigma(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Entonces, si queremos usar la acción integral en el controlador, debemos definir una nueva variable de estado (artificial)  $\sigma(t)$  cuya derivada es el integrando anterior

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= y(t) - r(t) \\ &= Cx(t) - r(t)\end{aligned}$$

Combinando esta ecuación con la ecuación de estado original,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{\sigma}(t) &= Cx(t) - r(t)\end{aligned}$$

Vamos a considerar este sistema aumentado como un conjunto de ecuaciones de estado y ensayaremos una ley de realimentación de las variables de estado (incluyendo a  $\sigma$ ), de la forma,

$$u(t) = r(t) - Gx(t) - G_I \sigma(t)$$

La estructura de este controlador se puede representar como muestra la figura 7.16

La última ecuación se puede representar vectorialmente como,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\sigma}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BG & -BG_I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

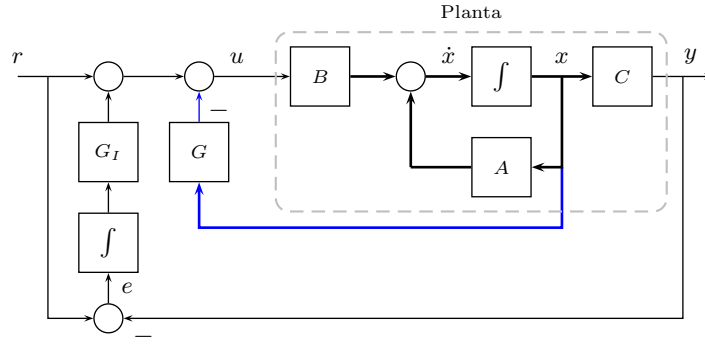


Figura 7.16: Control PI vectorial

Definiendo las matrices

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Es posible seleccionar una matriz de ganancia

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G & G_I \end{bmatrix}$$

de manera que la matriz

$$\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{G} = \begin{bmatrix} A - BG & -BG_I \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

tenga valores propios en una región aceptable.

Esto es posible siempre y cuando el par  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  sea controlable. Se puede demostrar que esto sucede cuando  $(A, B)$  es controlable,  $(A, C)$  es observable y además,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + 1. \quad (7.11)$$

Para ello usemos la condición (iv) del teorema 19 del apéndice. El sistema aumentado es controlable si

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} - \lambda I & \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$$= \begin{bmatrix} A - \lambda I & 0 & B \\ C & \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

tiene  $\text{rank} = n + 1$ .

Cuando  $\lambda \neq 0$  es muy fácil ver que la matriz tiene  $\text{rank} = n + 1$  y cuando  $\lambda = 0$ , se puede usar la condición 7.11.

**Ejemplo 7.11.** *Vamos a modificar un diseño llevado a cabo antes para lograr rastreo asintótico de referencias constantes. La planta es*

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}$$

o

$$G(s) = \frac{1}{(s + 3)(s - 2)}$$

*Esta planta se puede representar por la realización*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Vamos a asignar los polos del sistema de lazo cerrado, incluyendo la acción integral, en*

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

*Las matrices aumentadas son*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Para lo cual se calcula, usando Julia,*

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 22 & 53 & 60 \end{bmatrix}$$

*De donde,*

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} 22 & 53 \end{bmatrix} \\ G_I &= 60 \end{aligned}$$

*La respuesta del sistema de lazo cerrado se muestra a continuación en la figura 7.17. Se puede observar que el error de estado estacionario desaparece.*

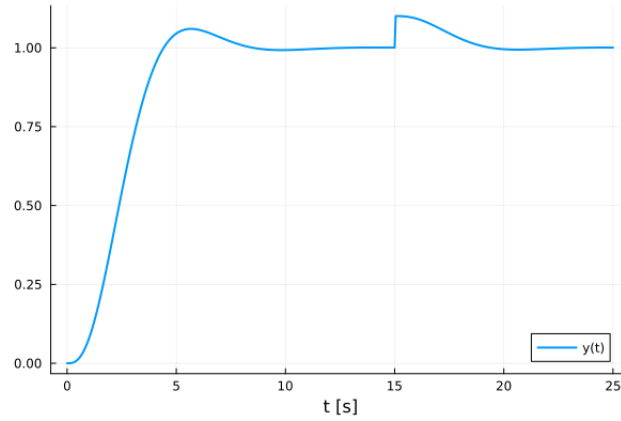


Figura 7.17: Respuesta al escalón usando un PI vectorial

En la simulación se incluyó una perturbación en la salida de la planta en  $t = 4$  seg y se puede ver que el sistema de control también elimina el efecto de la perturbación.

El siguiente código calcula la solución y la simulación.

---

```

1 include("ControlUN.jl")
2 P = zpk([], [-3, 2], 1)
3 sys = ss(P)
4 A = [-1 3; 2 0]
5 n = size(A)[1]
6 B = [0.5; 0]
7 C = [0 1]
8 A_a = [A zeros(n, 1); C 0]
9 B_a = [B; 0]
10 rank(ctrb(A_a, B_a))
11 polos = [-3, -4, -5]
12 K = place(A_a, B_a, polos)
13 eigen(A_a - B_a * K).values
14 Kx = K[1, 1:n]'
15 Ki = K[1, end]'
16 #
17 A_pi = [A - B * Kx - B * Ki; C 0]
18 eigen(A_pi).values
19 B_pi = [B zeros(n, 1); -1 1]
20 sys_pi = ss(A_pi, B_pi, [C 0], [0 1])
21
22 u(x, t) = [1; 0.1 * (t > 5)] # Form control law
23 t = 0:0.05:10
24 x0 = [0, 0, 0]
```



```

25 y, t, x, uout = lsim(sys_pi,u,t,x0=x0)
26 plot(t,y', lab=["Salida"], xlabel="Time [s]")

```

**Ejemplo 7.12.** Para finalizar este capítulo vamos a diseñar un controlador para la planta del ejemplo 6.12 de capítulo anterior:

$$P(s) = \frac{1}{5s^3 + 10.25s^2 + 6.25s + 1}.$$

usando un control óptimo LQ, incluyendo acción integral.

Una realización en variables de estado se puede encontrar con:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -2.05 & -0.3125 & -0.0250 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En primer lugar, diseñaremos un controlador óptimo LQ con

$$Q = C^T C, \quad R = \rho = 0.01$$

La solución óptima requiere una matriz de ganancia:

$$G = \begin{bmatrix} 7.3665 & 4.6232 & 1.8100 \end{bmatrix}$$

Para asegurar cero error de posición, usaremos un precompensador con ganancia

$$F = \frac{1}{T(0)} = \frac{1}{0.0995} = 10.0499$$

La respuesta al escalón de este sistema se puede ver en la figura 7.18. Tiene un sobrepico de 4.4%,  $t_s = 5.78\text{seg}$ , y el valor máximo del control es  $U_{\text{máx}} = 11.27$ .

Para ver el rechazo de perturbaciones de nuestro sistema, simulamos una perturbación de magnitud 0.1 en la salida, después de que el sistema alcance el estado estacionario, en  $t = 15\text{seg}$ . La respuesta muestra que el error estático es de 0.013, lo cual representa un 13% del valor de la perturbación.

Para comparación, usaremos además un control PI vectorial, el cual vamos a diseñar con la técnica LQR. Para ello, usamos

$$\begin{aligned}
 Q &= \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \\
 R &= 0.0010
 \end{aligned}$$

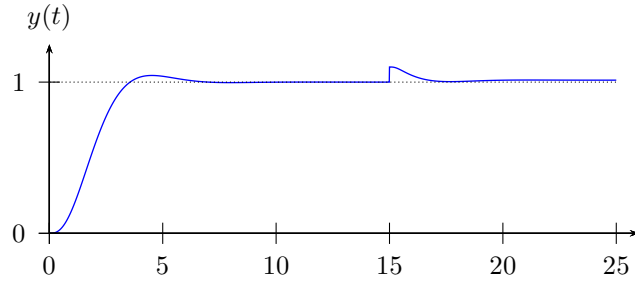


Figura 7.18: Respuesta al escalón usando control óptimo LQ

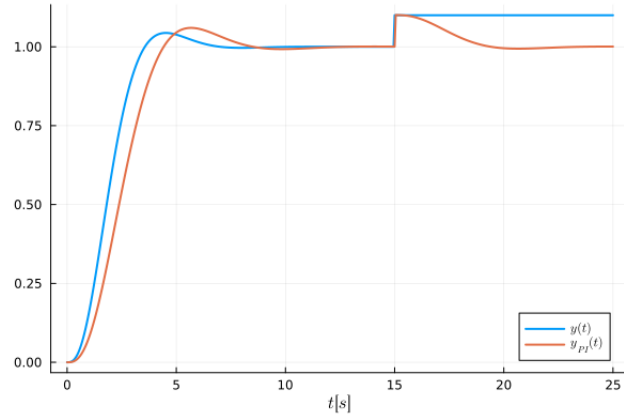


Figura 7.19: Respuesta al escalón usando un PI vectorial

Usando estos valores se encuentra una matriz de ganancia

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 235.9419 & 365.7416 & 382.6568 & 632.4555 \end{bmatrix}$$

de donde,

$$G = \begin{bmatrix} 235.9419 & 365.7416 & 382.6568 \end{bmatrix}$$

y

$$G_I = 632.4555$$

La respuesta del sistema de lazo cerrado se muestra en la figura 7.19, comparado con la respuesta del mismo controlador pero sin acción integral. El tiempo de asentamiento es  $t_s = 10.26\text{seg}$ . No hay sobrepico. Los polos de lazo cerrado son todos reales. El máximo valor de la señal de control es  $U_{\text{máx}} = 17.14$ . El sistema de lazo cerrado también rechaza la perturbación en la salida.

Como se ve, la introducción de la acción integral hace un poco más lenta la respuesta, pero elimina las perturbaciones.

A continuación se presenta el código para hacer estos dos diseños.

---

```

1 include("ControlUN.jl")
2 P = tf([1],[5, 10.25, 6.25, 1])
3 sys = ss(P)
4 A = [-2.05 -0.3125 -0.025; 4 0 0; 0 2 0]
5 n = size(A)[1]
6 B = [0.125; 0; 0]
7 C = [0 0 0.2]
8 Q = C' * C
9 R = 0.01
10 A, B, C, D = ssdata(sys)
11 Q = C' * C
12 G = lqr(sys, Q, R)
13 G = lqr(A, B, Q, R)
14 sys_lqr = ss(A-B*G, B, C, 0)
15 F = 1. / dcgain(sys_lqr)[1]
16 T = F * tf(sys_lqr)
17
18 Gur = minreal(tf(T) / tf(P))
19 max_resp_step(Gur)
20 yu_stp_plt(T, Gur, 10)
21
22 u(x,t) = -G*x .+ (t>0); # Form control law
23 t = 0:0.05:25
24 x0 = [0, 0, 0]
25 y, t, x, uout = lsim(sys, u, t, x0=x0)
26 pl = plot(t, y', lab="y(t)", xlabel="t [s]")
27 length(t)
28 y_d = zeros(501)
29 for i in 1:501
30     y_d[i] = y[i] * F
31     if i>300
32         y_d[i] += 0.1
33     end
34 end
35 plot(t, y_d, lab=L"y(t)", xlabel=L"t [s]")
36 A_a = [A zeros(n,1); C 0]
37 B_a = [B; 0]
38 Q = diagm([40, 40, 100, 400])
39 R = 0.001
40 rank(ctrb(A_a, B_a))
41 K = lqr(A_a, B_a, Q, R)
42 eigen(A_a-B_a*K).values
43 Kx = K[1,1:n]'
44 Ki = K[1,end]'
45 #
46 A_pi = [A-B*Kx -B*Ki; C 0]
47 eigen(A_pi).values

```

```

48 B_pi = [B zeros(n,1) ; -1 1]
49 sys_pi = ss(A_pi, B_pi, [C 0], [0 1])
50
51 u(x,t) = [1; 0.1.*(t>15)] # Form control law
52 t = 0:0.05:25
53 x0 = [0,0, 0, 0]
54 y, t, x, uout = lsim(sys_pi,u,t,x0=x0)
55 plot!(t,y', lab=L"y_{PI}(t)")

```

---

## Apéndice: Observabilidad y controlabilidad

En este breve apéndice voy a presentar algunas caracterizaciones alternas de la controlabilidad y la observabilidad. Las pruebas se suelen presentar con detalles en los cursos de sistemas lineales y se pueden consultar, por ejemplo en [ZDG96, Che87].

**Teorema 19** (Controlabilidad). *Los siguientes son equivalentes:*

(i) El par  $(A, B)$  es controlable.

(ii) La matriz

$$W_c(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

es positiva definida para todo  $t > 0$ .

(iii) La matriz de controlabilidad  $\theta_C$  tiene rango completo de filas ( $= n$ ).

(iv) La matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$$

tiene rango completo de filas para  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

(v) Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $x$  es el vector propio izquierdo, asociado; es decir, si

$$x^* A = x^* \lambda$$

entonces,  $x^* B \neq 0$ .

(vi) Los valores propios de  $A - BG$  se pueden asignar arbitrariamente en cualquier lugar de  $\mathbb{C}$ , siempre y cuando respeten la regla de los complejos conjugados, seleccionando adecuadamente la matriz de ganancia  $G$ .

□

**Definición 20** (Gramiano de controlabilidad). La matriz

$$L_C := W_c(\infty) = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

se denomina el Gramiano de controlabilidad. Por la condición (ii) del teorema anterior, entonces, el sistema es controlable si y sólo si  $L_c > 0$ .

**Teorema 20** (Observabilidad). *Los siguientes son equivalentes:*

(i) El par  $(C, A)$  es observable.

(ii) La matriz

$$W_o(t) := \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

es positiva definida para todo  $t > 0$ .

(iii) La matriz de observabilidad  $\theta_o$  tiene rango completo de columnas ( $= n$ ).

(iv) La matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

tiene rango completo de columnas para  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

(v) Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $y$  es el vector propio (derecho), asociado; es decir, si

$$A y = \lambda y$$

entonces,  $C y \neq 0$ .

(vi) Los valores propios de  $A - LC$  se pueden asignar arbitrariamente en cualquier lugar de  $\mathbb{C}$ , siempre y cuando respeten la regla de los complejos conjugados, seleccionando adecuadamente la matriz de ganancia  $L$ .

(vii) El par  $(A^T, C^T)$  es controlable.

□

**Definición 21** (Gramiano de observabilidad). *La matriz*

$$L_o := W_o(\infty) = \int_0^\infty e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

se denomina el Gramiano de observabilidad. Por la condición (ii) del teorema anterior, entonces, el sistema es observable si y sólo si  $L_o > 0$ .

## Capítulo 8

# Diseño Algebraico

En este capítulo estudiaremos lo llamados métodos de diseño algebraicos. Se trata de técnicas que tratan de reducir el problema de diseño a un problema . Los temas incluyen la localización de polos y el diseño de controladores de dos parámetros. Esto conduce a una metodología de diseño completamente diferente de todas las anteriores: en vez de seleccionar un controlador y ajustarlo para cumplir las especificaciones, se escoge una función de transferencia de lazo cerrado que cumpla las especificaciones; el controlador que permite implementar dicha función se encuentra usando el método algebraico. El capítulo termina con algunas técnicas para generar controladores con características deseables.

En todo este capítulo supondremos que el proceso a ser controlado está descrito por la función de transferencia propia:

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}, \quad K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)},$$

donde los polinomios  $n_P$  y  $d_P$  son coprimos (no tienen factores comunes) y  $\partial d_P(s) \leq \partial n_P(s)$ .

### 8.1. Asignación de polos

En primer lugar, consideremos el sistema de lazo cerrado con realimentación unitaria como el de la figura 8.1. Para este sistema,

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}r(s)$$

Supongamos, además que el controlador es:

$$K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)}$$

donde los polinomios  $n_K$  y  $d_K$  son coprimos. Entonces,

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{n_L(s)}{d_L(s)}} = \frac{d_K(s) d_P}{d_K(s) d_P(s) + n_K(s) n_P(s)}$$

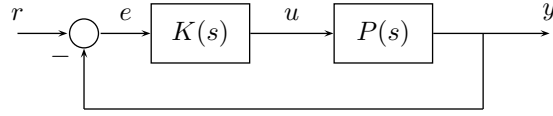


Figura 8.1: Control con Realimentación Unitaria (RU)

En el capítulo 4, estudiamos las propiedades del sistema de lazo cerrado con realimentación unitaria (RU). Recordando las principales conclusiones, tenemos que la función de lazo cerrado  $T(s)$  tiene los mismos ceros de  $L(s) = K(s)P(s)$ . Los polos sí se pueden modificar. Además, el grado relativo de  $T(s)$  es mayor o igual que el de la planta  $P(s)$  porque el controlador tiene que ser propio.

Ahora queremos analizar el problema de localización de polos: Qué se puede lograr con RU? Para ello, consideremos el polinomio característico,

$$d_K(s)d_P(s) + n_K(s)n_P(s)$$

Escribamos los polinomios en forma explícita: La planta es de orden  $n$ .

$$\begin{aligned} d_P(s) &= D_n s^n + \cdots + D_1 s + D_0; \quad D_n \neq 0 \\ n_P(s) &= N_n s^n + \cdots + N_1 s + N_0 \end{aligned}$$

y escogemos el controlador, de orden  $m$ .

$$\begin{aligned} n_K(s) &= X_m s^m + \cdots + X_1 s + X_0 \\ d_K(s) &= Y_m s^m + \cdots + Y_1 s + Y_0; \quad Y_m \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio  $d_T(s)$  es de grado  $n + m$ . Supongamos que vamos a tratar de asignar los polos de forma que

$$\begin{aligned} d_T(s) &= (s - p_1) \cdots (s - p_{n+m}) \\ &= F_{n+m} s^{n+m} + \cdots + F_1 s + F_0. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en el polinomio característico,

$$\begin{aligned} F_{n+m} s^{n+m} + \cdots + F_1 s + F_0 &= (Y_m s^m + \cdots + Y_1 s + Y_0) (D_n s^n + \cdots + D_1 s + D_0) \\ &\quad + (X_m s^m + \cdots + X_1 s + X_0) (N_n s^n + \cdots + N_1 s + N_0) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Efectuando los productos:

$$\begin{aligned} F_{n+m} s^{n+m} + \cdots + F_1 s + F_0 &= (D_n Y_m + N_n X_m) s^{n+m} + \cdots + \\ &\quad + (D_0 Y_1 + D_1 Y_0 + N_0 X_1 + N_1 X_0) s + (D_0 Y_0 + N_0 X_0) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes:

$$\begin{aligned} F_{n+m} &= D_n Y_m + N_n X_m \\ &\vdots \\ F_1 &= D_0 Y_1 + D_1 Y_0 + N_0 X_1 + N_1 X_0 \\ F_0 &= D_0 Y_0 + N_0 X_0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} D_n & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 & 0 & 0 \\ D_{n-1} & D_n & \cdots & 0 & N_{n-1} & N_n & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_0 & D_1 & \cdots & D_n & N_0 & N_1 & \cdots & N_n \\ 0 & D_0 & \cdots & D_{n-1} & 0 & N_0 & \cdots & N_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_0 & 0 & 0 & \cdots & N_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_m \\ Y_{m-1} \\ \vdots \\ Y_0 \\ X_m \\ X_{m-1} \\ \vdots \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+m} \\ F_{n+m-1} \\ \vdots \\ F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Este sistema constituye un conjunto de  $n + m + 1$  ecuaciones en  $2(m + 1)$  incógnitas.

Bajo qué condiciones existen soluciones de las ecuaciones anteriores? Una condición necesaria es que el número de filas de la matriz sea menor o igual que el número de columnas. Esto significa que existen soluciones si

$$n + m + 1 \leq 2m + 2$$

o sea, si

$$n - 1 \leq m$$

Lo cual significa que el controlador debe tener por lo menos un orden igual al de la planta menos uno.

Cuando se cumple esta condición, el teorema de Sylvester (ver apéndice) implica que la matriz tiene rango completo de columnas (columnas linealmente independientes) si y sólo si los polinomios  $d_P(s)$  y  $n_P(s)$  no tienen factores comunes.

Resumiendo, tenemos el siguiente:

**Teorema 21** (Asignación de polos). *Dada la planta  $P(s)$  y polos de lazo cerrado<sup>1</sup>, tales que*

$$\begin{aligned} d_T(s) &= (s - p_1) \cdots (s - p_{n+m}) \\ &= F_{n+m}s^{n+m} + \cdots + F_1s + F_0, \end{aligned}$$

*es posible encontrar un controlador  $K(s)$ , de orden  $m \geq n - 1$ , tal que el sistema de lazo cerrado, con RU, tiene sus polos en los lugares asignados.*

<sup>1</sup>Arbitrarios, excepto que los polos complejos deben venir en pares conjugados.



**Prueba:**

Puesto que  $d_P(s)$  y  $n_P(s)$  son coprimos, la matriz de la ecuación 8.2 tiene rango completo de columnas. Y puesto que  $m \geq n - 1$ , entonces, el sistema de ecuaciones lineales 8.2 tiene solución.  $\square$

La ecuación

$$d_T(s) = n_P(s)n_K(s) + d_P(s)d_K(s)$$

y la equivalente, ecuación 8.2, son ecuaciones cuyas incógnitas son polinomios. Se denominan *Ecuaciones de Diofanto o diofánticas*, en honor de Diofanto, un matemático griego (de Alejandría) del siglo III.

Una vez resuelta la ecuación diofántica, el controlador se halla como

$$K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)}$$

donde

$$\begin{aligned} n_K(s) &= X_m s^m + \cdots + X_1 s + X_0 \\ d_K(s) &= Y_m s^m + \cdots + Y_1 s + Y_0 \end{aligned}$$

Y la función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{n_P(s)n_K(s)}{d_P(s)d_K(s) + n_P(s)n_K(s)}$$

Nótese que algunos ceros de  $T$  (los ceros de  $K(s)$ ) aparecen como resultado del cálculo pero los ceros de  $P$  se mantienen.

Ahora queremos estudiar qué sucede con la respuesta estacionaria. La función de sensibilidad resulta:

$$S(s) = \frac{d_P(s)d_K(s)}{d_P(s)d_K(s) + n_P(s)n_K(s)}$$

por lo tanto, podemos evaluar las características estáticas mediante las ganancias d.c.:

$$S(0) = \frac{d_P(0)d_K(0)}{d_P(0)d_K(0) + n_P(0)n_K(0)} = \frac{d_P(0)Y_0}{d_P(0)Y_0 + n_P(0)X_0}$$

Así que, para anular el error de posición, requerimos que

$$S(0) = \frac{d_P(0)Y_0}{d_P(0)Y_0 + n_P(0)X_0} = 0$$

lo cual se obtiene con  $d_P(0) = 0$  (en el caso de una planta tipo 1 o mayor), o sea con  $Y_0 = 0$ .

Cuando  $m = n - 1$ , la ecuación diofántica tiene exactamente una solución. Pero si  $m \geq n$ , existen múltiples soluciones. Esto puede aprovecharse para satisfacer otros criterios. Por ejemplo, si es posible obtener una solución para la

cual  $Y_0 = 0$ , se logra un sistema que rechaza cambios en la referencia o perturbaciones tipo escalón. En este caso, la función de transferencia del controlador queda:

$$K(s) = \frac{X_m s^m + \dots + X_1 s + X_0}{Y_m s^m + \dots + Y_1 s} = \frac{X_m s^m + \dots + X_1 s + X_0}{s(Y_m s^{m-1} + \dots + Y_1)}$$

es decir, un controlador con acción integral.

**Ejemplo 8.1.** Diseñemos un controlador para la planta

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

que asigne los polos en

$$\{-2.3 \pm j2.6, -1.8\}$$

El polinomio característico resultante debe ser:

$$d_T(s) = s^3 + 6.4s^2 + 20.33s + 21.69$$

La ecuación diofántica para el problema de asignación de polos es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_0 \\ X_1 \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6.4 \\ 20.33 \\ 21.69 \end{bmatrix}$$

y la solución es:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 7.73 \\ 14.49 \end{bmatrix}$$

de manera que el controlador está dado por

$$K(s) = \frac{7.73s + 14.49}{s + 2.4}$$

Con este controlador, se obtiene una función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{7.73(s + 1.875)}{(s + 1.8)(s^2 + 4.6s + 12.05)}$$

de donde se obtiene,

$$S(0) = 1 - T(0) = 0.332$$

lo cual representa un error de 33% en la respuesta estática. Este error se puede corregir, como en cualquier caso con un precompensador con ganancia

$$F = 1/T(0) = 1.4969$$

Para este problema también podemos usar un controlador de orden  $m = 2$ . Para ello, seleccionemos los polos de lazo cerrado en

$$\{-2.3 \pm j2.6, -1.8, -3\}$$

Puesto que en este caso, hay más variables que ecuaciones, podemos darle un valor arbitrario a una de las variables. Seleccionamos una solución de la ecuación diofántica con  $Y_0 = 0$ . La solución obtenida es

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5.4 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 14.93 \\ 66.48 \\ 65.07 \end{bmatrix}$$

entonces, el controlador está dado por

$$K(s) = \frac{14.93s^2 + 66.48s + 65.07}{s^2 + 5.4s}$$

el cual, de acuerdo con los resultados del capítulo 5, es un controlador PID.

Con este controlador, la función de transferencia de lazo cerrado resultante es:

$$T(s) = \frac{14.93(s + 1.453)}{(s + 1.8)(s^2 + 4.6s + 12.05)}$$

lo cual implica que,

$$S(0) = 1 - T(0) = 0$$

lo cual implica que el sistema tiene cero error de posición, como era de esperarse, dada la acción integral del controlador

**Ejemplo 8.2.** Consideremos el problema de asignación de polos para la planta

$$P(s) = \frac{10}{s(s-1)(s+2)}$$

puesto que la planta es de orden 3, para poder asignar los polos de lazo cerrado requerimos un controlador de orden 2, por lo menos. Usemos  $m = 2$ ; entonces, el sistema de lazo cerrado tendrá  $n + m = 5$  polos, los cuales podemos asignar, arbitrariamente, como

$$\{-3, -4, -5, -20, -12\}$$

lo cual significa que el polinomio característico es

$$d_T(s) = s^5 + 44s^4 + 671s^3 + 4444s^2 + 13200s + 14400$$

La ecuación diofántica para este ejemplo es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 44 \\ 671 \\ 4444 \\ 13200 \\ 14400 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema está dada por

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 43 \\ 630 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 390 \\ 1446 \\ 1440 \end{bmatrix}$$

de manera que el controlador está dado por

$$K(s) = \frac{390s^2 + 1446s + 1440}{s^2 + 43s + 630} = \frac{390(s^2 + 3.708s + 3.692)}{s^2 + 43s + 630}$$

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$T(s) = \frac{3900(s^2 + 3.708s + 3.692)}{(s + 20)(s + 12)(s + 5)(s + 4)(s + 3)}$$

la cual tiene polos en los lugares deseados.

Para este problema, no es necesario introducir acción integral, debido a que la planta es tipo 1 (tiene un integrador libre).

### Diseño de PID con asignación de polos

Los resultados de la sección anterior sugieren la posibilidad de usar la técnica de asignación de polos para diseñar controladores PID. En efecto, hemos aprendido que un controlador PID se puede representar por medio de una función de transferencia de segundo orden de la forma

$$K(s) = \frac{X_2s^2 + X_1s + X_0}{s(Y_2s + Y_1)} \quad (8.3)$$

Es decir, una función de transferencia de segundo orden con uno de sus coeficientes ( $Y_0$ ) igual a cero. Este tipo de controlador se puede obtener usando asignación de polos, para un sistema de segundo orden.

Entonces, si la planta está descrita por la función de transferencia de segundo orden:<sup>2</sup>

$$P(s) = \frac{N_2s^2 + N_1s + N_0}{D_2s^2 + D_1s + D_0}$$

podemos aplicar el procedimiento anterior para diseñar un controlador PID que asigne los polos en la posición deseada.

Usando el controlador de la forma 8.3, la ecuación característica queda en la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= (Y_2s^2 + Y_1s)(D_2s^2 + D_1s + D_0) + (X_2s^2 + X_1s + X_0)(N_2s^2 + N_1s + N_0) \\ &= s^4(N_2X_2 + Y_2D_2) + s^3(N_1X_2 + N_2X_1 + Y_1D_2 + Y_2D_1) + \\ &\quad + s^2(N_0X_2 + N_1X_1 + N_2X_0 + Y_1D_1 + Y_2D_0) + \\ &\quad + s(N_0X_1 + N_1X_0 + Y_1D_0) + N_0X_0 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>O se puede encontrar una aproximación de segundo orden de esta forma.

A partir de la localización deseada de los polos se forma el polinomio  $d_T(s) = F_4s^4 + F_3s^3 + F_2s^2 + F_1s + F_0$ . Igualando los coeficientes, se llega al sistema de ecuaciones lineales (ecuación diofántica):

$$\begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ N_1 & N_2 & 0 & D_1 & D_2 \\ N_0 & N_1 & N_2 & D_0 & D_1 \\ 0 & N_0 & N_1 & 0 & D_0 \\ 0 & 0 & N_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_0 \\ Y_2 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Necesitamos determinar las condiciones que garanticen la existencia de soluciones. Usando el teorema de Sylvester y la forma especial del controlador, es fácil probar el siguiente:

**Teorema 22** (Existencia de controlador PID para asignar polos). *Dada una planta de segundo orden de la forma*

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)} = \frac{N_2s^2 + N_1s + N_0}{D_2s^2 + D_1s + D_0}$$

*y un conjunto de cuatro polos arbitrarios, excepto por cumplir la condición de complejos conjugados en el caso complejo, existe un controlador PID tal que el sistema de lazo cerrado tiene los polos especificados, si y sólo si los polinomios  $n_P(s)$  y  $d_P(s)$  son coprimos y además,  $N_0 \neq 0$ .*  $\square$

El teorema dice que para una planta de segundo orden, se puede diseñar un controlador PID que asigna polos si  $P(s)$  no tiene un cero en  $s = 0$  (la planta no tiene un diferenciador).

**Ejemplo 8.3.** *Necesitamos diseñar un controlador PID para la planta*

$$P(s) = \frac{s + 2}{4(s + 0.5)(s + 1)}$$

*de manera que los polos de lazo cerrado estén en*

$$\{-8, -6, -1.4247 + j0.5071, -1.4247 - j0.5071\}$$

*El controlador resultante es*

$$K(s) = \frac{72.2175(s^2 + 3.192s + 3.04)}{s(s - 2.705)}$$

*y la función de transferencia de lazo cerrado resultante es:*

$$T(s) = \frac{18.0544(s + 2)(s^2 + 3.192s + 3.04)}{(s + 8)(s + 6)(s^2 + 2.849s + 2.287)}$$

*la cual tiene los polos en la posición deseada.*

## 8.2. Controlador de dos parámetros

En el controlador RU, se tiene,

$$u(s) = K(s)r(s) - K(s)y(s)$$

Esta expresión se puede generalizar si se toman diferentes funciones de transferencia para las dos señales involucradas. Es decir,

$$u(s) = K_1(s)r(s) - K_2(s)y(s)$$

Este controlador se denomina *Controlador de dos parámetros (C2P)* o también *de dos grados de libertad*.

En el capítulo anterior vimos que un controlador con realimentación de variables de estado, implementado con un observador tiene esta forma. También vimos que este controlador permite asignar los polos arbitrariamente. Ahora veremos que un controlador de este tipo permite una mayor libertad para el diseño. En el caso RVE con observador, las dos funciones de transferencia  $K_5(s)$  y  $K_y(s)$  tienen el mismo denominador. Vamos a usar esa misma configuración. Aquí vamos a repetir la figura para referencias futuras.

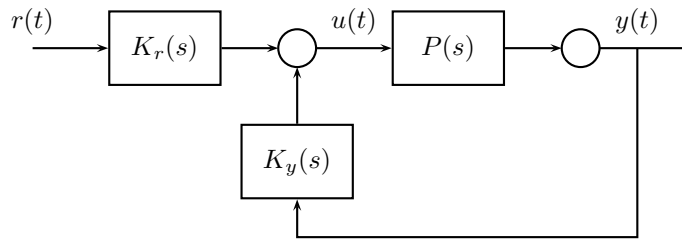


Figura 8.2: Controlador de dos parámetros

En adelante supondremos que,

$$\begin{aligned} K_r(s) &= \frac{L(s)}{A(s)} \\ K_y(s) &= \frac{M(s)}{A(s)}. \end{aligned}$$

En realidad, con el fin de evitar problemas de cancelación de polos indeseables y para simplificar la implementación del controlador, se debe implementar el controlador como una unidad; es decir, como un sistema de dos entradas y una salida y no como dos funciones de transferencia escalares<sup>3</sup>. La función de

<sup>3</sup>En la subsección 8.4 se presenta la forma de implementar el controlador usando variables de estado

transferencia que se debe implementar es la matriz

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_r(s) & -K_y(s) \end{bmatrix}$$

como fue el caso del controlador RVE.

De manera que el controlador está dado por la siguiente relación:

$$u(s) = \begin{bmatrix} K_r(s) & -K_y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$$

La estructura del controlador resultante se ilustra en la figura 8.3.

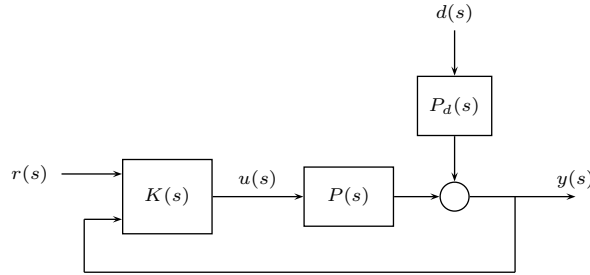


Figura 8.3: Controlador de dos parámetros

Cuando se usa el mismo denominador para las dos funciones de transferencia la relación entrada/salida del controlador está dada por:

$$u(s) = \frac{1}{A(s)} \begin{bmatrix} L(s) & -M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$$

donde  $A(s)$ ,  $L(s)$  y  $M(s)$  son polinomios con

$$\begin{aligned} \partial A(s) &\geq \partial L(s) \\ \partial A(s) &\geq \partial M(s) \end{aligned}$$

Cuando  $K_y$  es minifase (no tiene ceros en SPD), el controlador de dos parámetros se puede implementar en la forma mostrada en la figura siguiente.

En este caso,

$$u = K_y K'_r r - K_y y$$

la cual es una forma muy usada del controlador 2P.

Cuando se usa el controlador 2P, la función de lazo cerrado  $T(s)$  se puede obtener de,

$$y(s) = P(s) (K_r(s)r(s) - K_y(s)y(s))$$

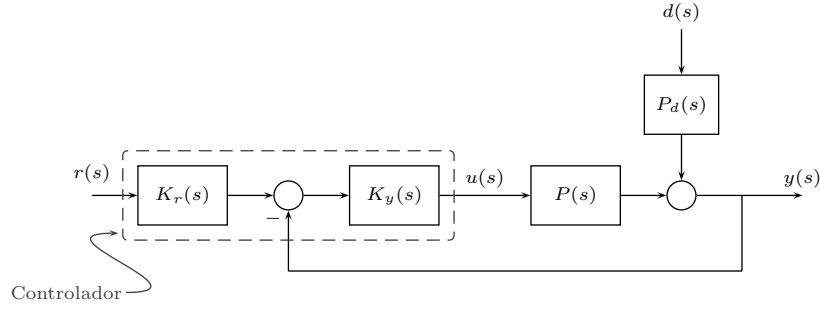


Figura 8.4: Una implementación del controlador 2P

$$y(s) = \frac{P(s)K_r(s)}{1 + P(s)K_y(s)} r(s)$$

Si, como se supuso antes,

$$P = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}$$

entonces,

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)K_r(s)}{1 + P(s)K_y(s)} = \frac{\frac{n_P(s)}{d_P(s)} \frac{L(s)}{A(s)}}{1 + \frac{n_P(s)}{d_P(s)} \frac{M(s)}{A(s)}} \\ &= \frac{n_P(s)L(s)}{d_P(s)A(s) + n_P(s)M(s)} \end{aligned} \quad (8.5)$$

El cual permite, (ajustando  $A(s)$ ,  $M(s)$  y  $L(s)$ ) modificar los polos y los ceros. Los polos se ajustan modificando el denominador. Los ceros se pueden cambiar mediante cancelación de polos y ceros y agregando ceros mediante el polinomio  $L(s)$ . Por supuesto, la cancelación de un polo con un cero solamente se permite dentro de la zona rosa que hemos escogido, con el fin de evitar inestabilidades o respuestas indeseables.

Analizando un poco más la ecuación 8.5 se puede concluir que el grado relativo de  $T(s)$  no puede ser menor que el de  $P(s)$ , tal como en el caso de realimentación unitaria (RU). Es decir,

$$g.r.T(s) \geq g.r.P(s)$$

En realidad, esta desigualdad es válida para cualquier combinación de funciones de transferencia propias, conectadas en cascada con  $P(s)$  o con realimentación que incluya en el lazo a  $P(s)$  (el llamado grupo de realimentación). No es válida para configuraciones que hagan “by-pass” a la planta; pero estas configuraciones, desde el punto de vista del control, no son relevantes.



Veamos cómo afecta a las perturbaciones este controlador: La función de transferencia correspondiente es

$$y = \frac{1}{1 + PK_y} P_d d$$

Por lo tanto,  $K_r$  no afecta para nada la respuesta a las perturbaciones.

Entonces, desde el punto de vista del rechazo de perturbaciones, el controlador 2P se puede diseñar en la misma forma que el 1P. El grado de libertad adicional ( $K_y$ ) se usa para mejorar el rastreo de señales de entrada.

### 8.3. Funciones de transferencia implementables

Los resultados de la sección anterior conducen a preguntarnos cuáles funciones de transferencia de lazo cerrado se pueden lograr mediante el uso de controladores propios. Esta sección está basada en [Che95, Che87].

**Definición 22** (Función de transferencia implementable). *Dada una planta  $P(s)$ , la función de lazo cerrado  $T(s)$  es implementable, si se puede obtener como resultado de una conexión arbitraria de funciones de transferencia, como se muestra en la figura 8.5, las cuales satisfacen las condiciones siguientes:*

1. Todas las funciones de transferencia son funciones racionales propias.
2. El sistema de lazo cerrado es Bien Planteado.
3. El sistema de lazo cerrado es Internamente Estable.
4. Todas las trayectorias de la entrada a la salida pasan por la planta.

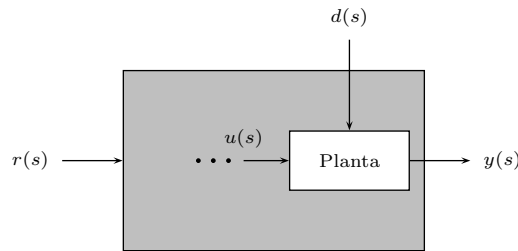


Figura 8.5: Sistema de lazo cerrado

El teorema presentado a continuación proporciona un criterio para decidir cuándo una función de transferencia  $T(s)$  es implementable,

**Teorema 23** (Función de transferencia implementable). Si  $P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}$  es una función de transferencia propia, entonces,  $T(s)$  es implementable si y sólo si las dos funciones de transferencia  $T(s)$  y

$$G_{ur}(s) = \frac{T(s)}{P(s)}$$

son propias y estables.

**Prueba:**

Solamente probaré la necesidad. La suficiencia se verificará en forma constructiva con un algoritmo de síntesis al final del capítulo.

Supongamos que la función de transferencia  $T(s)$  es implementable. Entonces, el sistema de lazo cerrado es Bien Planteado e Internamente Estable. Eso significa que todas las funciones de transferencia de lazo cerrado son propias y estables. Por lo tanto,  $T(s)$  y  $G_{ur}(s)$  son propias y estables.

La suficiencia de las condiciones la demostraremos en forma constructiva en la sección 8.4. Ver también [Che87].  $\square$

Como consecuencia del teorema anterior, se puede probar el siguiente teorema que proporciona un criterio de implementabilidad.

**Teorema 24** (Criterio de implementabilidad). Dada  $P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}$ , una función de transferencia propia, entonces,

$$T(s) = \frac{n_T(s)}{d_T(s)}$$

es implementable si y sólo si:

1.  $g.r. T(s) \geq g.r. P(s)$ ,
2. Todos los ceros de  $P(s)$  en SPD se mantienen en  $T(s)$  y
3. El polinomio  $d_T(s)$  es Hurwitz.

**Prueba:**

$\Rightarrow$ : Supongamos que  $T$  es implementable, entonces, por el teorema 23,  $T(s)$  y  $G_{ur}(s)$  son propias y estables. Sea

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}$$

una función de transferencia propia y coprima. Y sean

$$T(s) = \frac{n_T(s)}{d_T(s)}, \quad G_{ur}(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$$

funciones de transferencia propias y estables y coprimas<sup>4</sup>. Entonces,

$$T(s) = G_{ur}(s)P(s) = \frac{n_T(s)}{d_T(s)} = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} \frac{n_P(s)}{d_P(s)} \quad (8.6)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g.r. T(s) &= \partial d_G(s) + \partial d_P(s) - (\partial n_G(s) + \partial n_P(s)) \\ &= (\partial d_G(s) - \partial n_G(s)) + (\partial d_P(s) - \partial n_P(s)) \\ &= g.r. G_{ur}(s) + g.r. P(s) \geq g.r. P(s) \end{aligned}$$

puesto que  $G_{ur}(s)$  es propia.

Supongamos que  $n_P(s)$  tiene ceros en SPD. Entonces, puesto que  $T(s)$  y  $G_{ur}(s)$  son estables, sus denominadores son Hurwitz. Como  $G_{ur}(s)$  está dada por:

$$G_{ur}(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{T(s)}{P(s)} = \frac{n_T(s)}{d_T(s)} \frac{d_P(s)}{n_P(s)} \quad (8.7)$$

los ceros de  $n_P(s)$  en SPD tienen que cancelarse. Pero no se pueden cancelar con los ceros de  $d_P$  pues supusimos que esto ya se había hecho. La única forma de que estos ceros desaparezcan para que  $d_G(s)$  sea Hurwitz es que se cancelen con ceros de  $n_T(s)$ . Eso significa que los ceros no minifase de  $P(s)$  tienen que mantenerse en  $T(s)$ .

⇐: Si  $g.r. T(s) \geq g.r. P(s)$ , entonces  $T(s)$  es propia ya que  $P(s)$  lo es y, además,  $g.r. G_u \geq 0$  luego  $G_{ur}(s)$  es propia. Además, por la condición (iii),  $T(s)$  es estable.

Sólo falta probar que  $G_{ur}(s)$  es estable. La ecuación 8.7 muestra que si se cumple la condición (ii), entonces,  $d_G(s)$  es Hurwitz y, por lo tanto,  $G_{ur}(s)$  es estable. El teorema 23 implica entonces que  $T(s)$  es implementable.

□

**Ejemplo 8.4.** Si

$$P(s) = \frac{(s - 0.5)(s + 1)}{s(s + 2)(s - 2)}$$

entonces,

1.  $T_1(s) = 1$  no es implementable, pues tiene  $g.r. = 0 < g.r. P(s) = 1$ .
2.  $T_2(s) = \frac{2}{s+2}$  no es implementable pues no conserva el cero en  $s = 0.5$ .
3.  $T_3(s) = \frac{s-0.5}{s(s+3)}$  no es implementable porque no es estable (polo en  $s = 0$ ).
4.  $T_4(s) = \frac{s-0.5}{(s+1)(s+3)}$  es implementable.
5.  $T_5(s) = \frac{s-0.5}{(s+1)(s+3)^2}$  es implementable.

<sup>4</sup>Si fuere necesario, se pueden cancelar los factores comunes.

### 8.4. Diseño del controlador de dos parámetros (2P)

Supongamos que la planta está dada por

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}$$

donde  $n_P(s)$  y  $d_P(s)$  son coprimos, con  $\partial d_P(s) = n > \partial n_P(s) = k$ . Dada una función de transferencia *implementable*,

$$T(s) = \frac{n_T(s)}{d_T(s)}$$

buscamos compensadores propios  $L(s)/A(s)$  y  $M(s)/A(s)$ , tales que,

$$T(s) = \frac{n_T(s)}{d_T(s)} = \frac{L(s)n_P(s)}{A(s)d_P(s) + M(s)n_P(s)} \quad (8.8)$$

La solución del problema se presenta en forma de un procedimiento de diseño:

1. En primer lugar, buscamos que los ceros de  $P(s)$  en SPD no sean modificados. Para ello se requiere calcular

$$H(s) = \frac{T(s)}{n_P(s)} = \frac{n_T(s)}{d_T(s)n_P(s)} := \frac{n_H(s)}{d_H(s)} \quad (8.9)$$

donde  $n_H(s)$  y  $d_H(s)$  son coprimos (Hay que cancelar los factores comunes, si los hay). Puesto que  $n_T(s)$  y  $d_T(s)$  también son coprimos, los únicos factores comunes posibles ocurren entre  $n_T(s)$  y  $n_P(s)$ ; es decir, los ceros de la planta que se conservan en  $T(s)$ .

La función  $H(s)$  resulta después de cancelar todos estos factores. Obsérvese que si  $n_T(s) = n_P(s)$ , entonces,  $d_H(s) = d_T(s)$  y  $n_H(s) = 1$ . A partir de la ecuación 8.9, la ecuación 8.8 se puede escribir,

$$T(s) = \frac{n_H(s)n_P(s)}{d_H(s)} = \frac{L(s)n_P(s)}{A(s)d_P(s) + M(s)n_P(s)} \quad (8.10)$$

Partiendo de esta ecuación, se podría igualar los polinomios del numerador y del denominador para hallar polinomios  $A$ ,  $M$  y  $L$ . Sin embargo, esto no garantiza que el controlador sea propio.

2. Para garantizar que la función de transferencia del controlador sea propia, se introduce un polinomio Hurwitz arbitrario, pero seleccionado por el diseñador  $\bar{d}_H(s)$  tal que el grado de  $\bar{d}_H(s)d_H(s)$  sea por lo menos  $2n - 1$ . Si  $\partial d_H(s) = h$ , entonces el grado de  $\bar{d}_H(s)$  debe ser mayor o igual a  $2n - 1 - h$ . El polinomio  $\bar{d}_H(s)$  no aparece en la función de transferencia  $T(s)$ , es decir, que va a ser cancelado durante el diseño. Por lo tanto, sus

raíces deben estar en una región del plano complejo donde sea aceptable la cancelación *polo-cero* (zona rosa del problema). El polinomio  $\bar{d}_H(s)$  se conoce como *polinomio del observador*.<sup>5</sup>

3. La ecuación 8.10 se puede escribir así:

$$T(s) = \frac{n_H(s)n_P(s)}{d_H(s)} = \frac{n_H(s)\bar{d}_H(s)n_P(s)}{d_H(s)\bar{d}_H(s)} \quad (8.11)$$

$$= \frac{L(s)n_P(s)}{A(s)d_P(s) + M(s)n_P(s)} \quad (8.12)$$

Ahora sí, se igualan el numerador y el denominador:

$$L(s) = n_H(s)\bar{d}_H(s) \quad (8.13)$$

y

$$A(s)d_P(s) + M(s)n_P(s) = d_H(s)\bar{d}_H(s) := F(s)$$

de donde se pueden hallar los polinomios  $A(s)$  y  $M(s)$ . Para ello, se pueden efectuar los productos e igualar los coeficientes.

Escribiendo explícitamente los polinomios,

$$\begin{aligned} n_P(s) &= n_{n-1}s^{n-1} + \cdots + n_1s + n_o \\ d_P(s) &= D_ns^n + \cdots + D_1s + D_o \\ A(s) &= A_ms^m + \cdots + A_1s + A_o \\ M(s) &= M_ms^m + \cdots + M_1s + M_o \end{aligned}$$

$$F(s) := d_H(s)\bar{d}_H(s) = F_{n+m}s^{n+m} + \cdots + F_1s + F_o$$

donde  $m \geq n - 1$ .

Escribiendo este conjunto de ecuaciones lineales en forma matricial, los coeficientes de  $A(s)$  y  $M(s)$  se obtienen a partir de,

$$\begin{bmatrix} D_n & N_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D_{n-1} & N_{n-1} & D_n & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ D_o & N_o & D_1 & N_1 & & D_n & 0 \\ \vdots & \vdots & D_o & N_o & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & D_1 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_o & N_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m \\ M_m \\ A_{m-1} \\ M_{m-1} \\ \vdots \\ A_o \\ M_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+m} \\ \vdots \\ F_2 \\ F_1 \\ F_o \end{bmatrix}$$

o, en forma más conveniente, desde el punto de vista de su implementación en Julia,

---

<sup>5</sup>Las raíces del polinomio  $\bar{d}_H(s)$  tienen un papel análogo al de los polos del observador en el controlador con RVE.

$$\begin{bmatrix}
D_n & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 & \cdots & 0 \\
D_{n-1} & D_n & \cdots & \vdots & N_{n-1} & N_n & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
D_o & D_1 & \cdots & D_n & N_o & N_1 & \cdots & N_n \\
0 & D_o & \cdots & D_{n-1} & 0 & N_o & \cdots & N_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & D_o & 0 & 0 & \cdots & N_o
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_m \\
A_{m-1} \\
\vdots \\
A_o \\
M_m \\
M_{m-1} \\
\vdots \\
M_o
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_{n+m} \\
\vdots \\
F_2 \\
F_1 \\
F_o
\end{bmatrix}
\quad (8.14)$$

La solución de estas ecuaciones proporciona los compensadores  $L(s)/A(s)$  y  $M(s)/A(s)$ . Por lo tanto, debemos hallar condiciones que garanticen la existencia de soluciones de la ecuación diofántica.

Analizando la ecuación 8.14, notamos que la matriz es idéntica a la obtenida para el problema de asignación de polos. Por lo dichas condiciones siguen siendo válidas. El resultado podría resumirse en el siguiente:

**Teorema 25** (Existencia del controlador 2P). *Si la planta está dada por*

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}$$

donde  $d_P(s)$  y  $n_P(s)$  son polinomios coprimos con  $\partial d_P(s) \leq \partial n_P(s)$ , entonces, dada una función de transferencia implementable  $T(s)$ , es posible encontrar un controlador de dos parámetros

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{L(s)}{A(s)} & -\frac{M(s)}{A(s)} \end{bmatrix}$$

de orden  $m \geq n - 1$ , tal que el sistema de lazo cerrado tiene la función de transferencia de sensibilidad complementaria igual a  $T(s)$ . Si el orden del controlador satisface  $m \geq n$ , entonces, la solución no es única y se pueden escoger algunos de los valores de los coeficientes en forma arbitraria, para satisfacer otras condiciones de diseño.  $\square$

**Ejemplo 8.5.** Para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

se quiere diseñar un controlador que implemente la función de lazo cerrado.

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + 5.385s + 10}$$

$$H(s) = \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{10}{s^2 + 5.385s + 10}$$

Puesto que  $\partial D_H = 2$ , se requiere un polinomio  $\bar{D}_H$  de grado  $\geq 1$ , para que  $\partial D_H \bar{D}_H \geq n - 1 = 3$ . Se va a usar un controlador de orden  $m = 2$ . Para ello se requiere un polinomio del observador de grado 2. Se usará  $\bar{D}_H = (s+1.5)(s+2)$ .

A partir de los datos,

$$\begin{aligned} L(s) &= N_H(s)\bar{D}_H(s) \\ &= 10(s^2 + 3.5s + 3.0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_H\bar{D}_H &= (s^2 + 5.385s + 10)(s^2 + 3.5s + 3.0) \\ &= s^4 + 8.885s^3 + 31.848s^2 + 51.155s + 30.0 \end{aligned}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 8.8852 \\ 31.8481 \\ 51.1555 \\ 30.0 \end{bmatrix}$$

Y la ecuación diofántica queda,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \\ M_2 \\ M_1 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 8.8852 \\ 31.8481 \\ 51.1555 \\ 30.0 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 5.8852 & 17.0518 \end{bmatrix} \\ M &= \begin{bmatrix} -2.8592 & 0 & 30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con esta solución se halla el controlador de dos parámetros como

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{10s^2 + 35s + 30}{s^2 + 5.885s + 17.05} & \frac{2.859s^2 - 30}{s^2 + 5.885s + 17.05} \end{bmatrix}$$

La implementación en Julia es

---

```

1 using Plots; gr(linewidth = 2, grid=:true)
2 include("ControlUN.jl")
3 P = tf(zpk([], [0, -3], 1))
4 To = tf([10], [1, 5.385, 10])
5 polos_obs = [-1.5, -2]
6 Kr, Ky, T, Gur = dise_2p(P, To, polos_obs)
7 Kr
8 Ky
9 T
```

```

10 Gur
11 res = step_plt(T, 5)
12 yu_stp_plt(T, Gur, 5)
13 max_resp_step(Gur)

```

---

**Ejemplo 8.6.** Para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

Se quiere implementar la función de transferencia de lazo cerrado,

$$T(s) = \frac{5}{s^3 + 5.041s^2 + 7.708s + 5}$$

Para implementar esta función de transferencia se necesita  $m \geq 2$  y ello requiere  $\partial \bar{d}_H \geq 2$ . Vamos a usar  $\bar{d}_H = (s+1)(s+2)$ . Se obtiene un controlador

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{5s^2 + 15s + 10}{s^2 + 4.041s + 5.667} & \frac{-3.416s^2 - 13.42s - 10}{s^2 + 4.041s + 5.667} \end{bmatrix}$$

El cálculo en Julia:

---

```

1 P = tf(zpk([], [0, -1, -3], 1))
2 To = tf([5], [1, 5.041, 7.708, 5])
3 polos_obs = [-1, -2]
4 Kr, Ky, T, Gur = dise_2p(P, To, polos_obs)
5 Kr
6 Ky
7 T
8 Gur
9 step_plt(T, 8)
10 max_resp_step(Gur)

```

---

## Rechazo de perturbaciones

Vamos a considerar el efecto que tiene el polinomio del observador  $\bar{D}_p$  sobre las funciones de transferencia que caracterizan el sistema de lazo cerrado.

La función de transferencia de lazo cerrado  $T(s)$  no se ve influenciada por la selección de  $\bar{d}_H(s)$ , puesto que

$$T(s) = \frac{n_H(s)\bar{d}_H(s)n_P(s)}{d_H(s)\bar{d}_H(s)} = \frac{L(s)n_P(s)}{A(s)d_P(s) + M(s)n_P(s)}$$

Y el polinomio  $\bar{d}_H$  se cancela.



La función de transferencia  $G_{ur}(s) = u(s)/r(s) = T(s)/P(s)$  se calcula como

$$G_{ur}(s) = \frac{L(s)d_P(s)}{A(s)d_P(s) + M(s)n_P(s)}$$

Y tampoco tiene ninguna influencia del observador. (Esto era de esperarse, puesto que todo el diseño se basó en esta propiedad).

Sin embargo, cuando se consideran perturbaciones en la entrada o en la salida de la planta, la situación es diferente:

$$\begin{aligned} G_{yp}(s) &= \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{P(s)}{1 + P(s)M(s)/A(s)} \\ &= \frac{n_P(s)A(s)}{A(s)d_P(s) + M(s)n_P(s)} = \frac{n_P(s)A(s)}{d_H(s)\bar{d}_H(s)} \end{aligned}$$

La cual sí incluye el efecto del polinomio del observador en el denominador.

En realidad, el numerador también se ve influenciado por  $\bar{d}_H(s)$ , puesto que la ecuación Diofántica depende de este polinomio.

Vamos a analizar el efecto de  $\bar{d}_H(s)$  sobre la respuesta a las perturbaciones, suponiendo que éstas son tipo escalón (perturbaciones constantes) y mediante ejemplos.

**Ejemplo 8.7.** Se desea implementar la función de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{5}{s^2 + 4.031s + 5}$$

Para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s + 2.5)}$$

Para ello se seleccionó  $\bar{d}_H(s) = s + 2$  y se obtuvo un controlador

$$K(s) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{5s + 1}{s + 3.531} & \frac{-4.234s - 10}{s + 3.531} \end{array} \right]$$

Una perturbación de 0.1 en la salida produce una respuesta con valor estacionario de 0.0353.

Pero si se escoge  $\bar{d}_H = s + 20$ , el error es 0.0215.

Finalmente, si  $\bar{d}_H = s + 2000$ , el error es 0.02005.

**Definición 23** (Rechazo asintótico de perturbaciones). Un sistema como el de la figura 8.6 se dice que Rechaza asintóticamente perturbaciones tipo escalón si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$$

cuando la entrada es una perturbación  $d(t)$  tipo escalón.

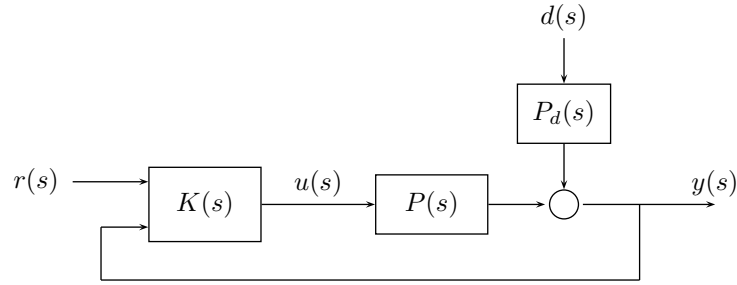


Figura 8.6: Sistema de control 2P con perturbación

En la configuración 2P, esto significa que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s G_{yd}(s) d(s) &= 0 \\ G_{yd}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener esta condición se requiere,

$$G_{yd}(0) = \frac{n_P(0)A(0)}{d_H(0)\bar{d}_H(0)} = 0$$

Sin embargo,  $d_H(0)\bar{d}_H(0) = F(0) \neq 0$ , pero finito. Adicionalmente,  $n_P(0) = N_0$  no se puede variar y, en general, no es cero.

Por lo tanto, la única posibilidad de lograr el efecto es seleccionando  $A(0) = 0$ . Pero, el polinomio  $A$  se obtiene de la solución de la ecuación diofántica. Sólo es posible darle el valor  $A_0 = 0$  cuando el sistema de ecuaciones tiene múltiples soluciones. En este caso, se le puede asignar valores a algunas de las incógnitas. Para rechazar perturbaciones la condición requerida es  $A_0 = 0$ .

### Control 2P con acción integral

Si es posible escoger una solución de la ecuación diofántica con  $A_0=0$ , el polinomio del denominador se puede escribir

$$\begin{aligned} A(s) &= A_m s^m + \cdots + A_1 s = s (A_m s^{m-1} + \cdots + A_1) \\ &= s \bar{A}(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el controlador se puede escribir en la forma

$$K(s) = \frac{1}{s \bar{A}(s)} \begin{bmatrix} L(s) & -M(s) \end{bmatrix}$$

la cual representa un integrador, junto con un controlador de dos parámetros. Lo podemos denominar un control 2P con acción integral.

Estamos interesados en determinar las condiciones que debe satisfacer la planta para que exista un controlador de estas características. Dichas condiciones están dadas por el siguiente

**Teorema 26** (Existencia del controlador con acción integral). *Dada una planta descrita por*

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)} = \frac{N_n s^n + \dots + N_1 s + N_0}{D_n s^n + \dots + D_1 s + D_0}$$

*Es posible diseñar un controlador 2P con acción integral, de orden  $m = n$ , si  $N_0 \neq 0$ .*

**Prueba:**

*Si es posible escoger un controlador de orden  $n$ , la ecuación diofántica tiene múltiples soluciones. El problema se reduce a hallar las condiciones para que existan soluciones con  $A_0 = 0$ .*

La ecuación 8.14 muestra que esto es posible si la matriz resultante después de eliminar la columna correspondiente a la variable  $A_0$  tiene el mismo rango que la matriz original. Por inspección de dicha ecuación, se observa que  $N_0 \neq 0$  es una condición suficiente para ello<sup>6</sup>.  $\square$

**Ejemplo 8.8.** Se desea implementar la función de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{5}{s^2 + 4.031s + 5}$$

Para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s + 2.5)}$$

Para ello se seleccionó  $\bar{d}_H(s) = s + 2$  y se obtuvo un controlador:

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{5s + 1}{s + 3.531} & \frac{-4.234s - 10}{s + 3.531} \end{bmatrix}$$

Antes notamos que una perturbación de 0.1 en la salida produce una respuesta con valor estacionario de 0.0353. Pero si se escoge  $\bar{d}_H = s + 20$ , el error es 0.0215. Y cuando  $\bar{d}_H = s + 2000$ , el error es 0.02005.

En cambio, si se usa un controlador de segundo orden  $m = 2$ , es posible escoger la solución de la ecuación de Diofanto con  $A_0 = 0$ . Un controlador en este caso es

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{5s^2 + 15s + 10}{s^2 + 4.531s} & \frac{-7.765s^2 - 23.06s - 10}{s^2 + 4.531s} \end{bmatrix}$$

La respuesta del sistema ante un escalón en la referencia, en este caso, está en la figura 8.7. En  $t = 4$  seg se aplica una perturbación tipo escalón en la salida, equivalente al 10 % del valor nominal. La figura ilustra el efecto de rechazo de la perturbación debido a la acción integral del controlador.

<sup>6</sup>Exactamente la misma condición que habíamos obtenido para el diseño de asignación de polos

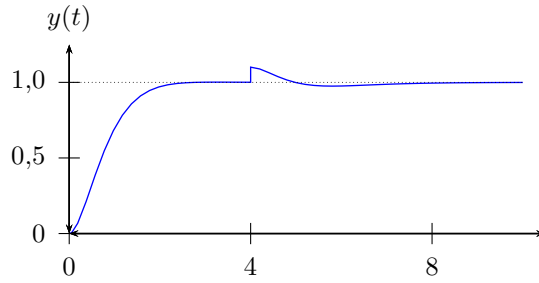


Figura 8.7: Respuesta del sistema con controlador de dos parámetros usando rechazo de perturbaciones.

### Realización del compensador

Una función de transferencia vectorial se puede implementar mediante variables de estado como se ilustra a continuación con un ejemplo.

Consideremos la matriz de transferencia,

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{10s^2 + 5s + 30}{s^2 + 5s + 12} & -\frac{2s - 3}{s^2 + 5s + 12} \end{bmatrix}$$

La cual se puede escribir, efectuando las divisiones, como:

$$K(s) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{45s + 90}{s^2 + 5s + 12} & -\frac{2s - 3}{s^2 + 5s + 12} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u(s) &= \left\{ \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{45s + 90}{s^2 + 5s + 12} & -\frac{2s - 3}{s^2 + 5s + 12} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} r(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \\ &= 10r + \left( -\frac{45s + 90}{s^2 + 5s + 12} \right) r + \left( -\frac{2s - 3}{s^2 + 5s + 12} \right) y \end{aligned}$$

Definiendo,

$$w(s) = u(s) - 10r(s)$$

se halla

$$(s^2 + 5s + 12)w = (-45s - 90)r + (-2s + 3)y$$

agrupando términos

$$s^2w = (-5w - 45r - 2y)s + (-12w - 90r + 3y)$$

$$\begin{aligned} w &= (-5w - 45r - 2y)s^{-1} + (-12w - 90r - 3y)s^{-2} \\ &= \frac{1}{s} \left[ -5w - 45r - 2y + \frac{1}{s}(-12w - 90r + 3y) \right] \end{aligned}$$

$$w = \frac{1}{s} \underbrace{\left[ -5w - 45r - 2y + \underbrace{\frac{1}{s}(-12w - 90r + 3y)}_{x_2(s)} \right]}_{x_1(s)} \quad (8.15)$$

Definiendo variables de estado como se muestra en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -12w - 90r + 3y \\ &= -12x_1 - 90r + 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5w - 45r - 2y + x_2 \\ &= -5x_1 + x_2 - 45r - 2y \end{aligned}$$

Agrupando los términos,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5x_1 + x_2 - 45r - 2y \\ \dot{x}_2 &= -12x_1 - 90r + 3y \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -45 & -2 \\ -90 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix}$$

$$u = x_1 + 10r$$

En la práctica, esta realización se obtiene usando Julia, a partir de la matriz de transferencia. Si está definida la matriz de transferencia  $K(s)$ , una realización se puede obtener con los comandos:

---

```
1 K_s = ss(K)
2 A_k, B_k, C_k, D_k = ssdata(K_s)
```

---

## 8.5. Diseño hacia adentro (“Inward”)

Usando un controlador de dos parámetros es posible implementar cualquier función de transferencia implementable. Esto posibilita una metodología completamente diferente de diseño de sistemas de control: el llamado *Diseño de Afuera hacia Adentro*.

A diferencia de las técnicas de diseño descritas hasta ahora en las cuales se ensayan diferentes controladores hasta satisfacer las condiciones de diseño, esta técnica selecciona una función de transferencia de lazo cerrado  $T(s)$  que

satisfaga las especificaciones y, luego, calcula un controlador que produzca esa función de transferencia. De esta manera, estamos seguros desde el comienzo que el sistema de lazo cerrado va a cumplir las especificaciones.

Desde luego, el método tiene algunas desventajas, de las cuales la principal es la complejidad de los controladores. Ya sabemos que para controlar una planta de orden  $n$  se requiere un controlador de orden  $m \geq n - 1$ . Esto limitó el uso de esta técnica cuando fue desarrollada, hace 45 años [Cha61]. La posibilidad de implementar digitalmente los controladores, aunado al bajo costo de los computadores los ha hecho mucho más atractivos en la actualidad. De hecho, se ha implementado un controlador programable de muy bajo costo, capaz de controlar sistemas hasta de orden 10, en microcontroladores de ocho bits, ver [Ber03].

En este método, el problema se reduce a hallar una función de transferencia apropiada, que satisfaga las condiciones de diseño, sin saturar el actuador. Para ello, normalmente se ensayan varias funciones tentativas y se determina

$$U_{\text{máx}} = \max_t |u(t)|$$

para cada una de ellas, hasta que se halla una función con respuesta aceptable y que no sature el actuador.

Una vez escogida una función de transferencia con características deseables, surge el problema de encontrar un controlador que produzca dicha función. Ya sabemos que usando un controlador de dos parámetros se puede lograr cualquier función implementable. Pero, surge la pregunta de si será posible hacerlo con un controlador de realimentación unitaria.

La respuesta es: algunas veces. Pero teniendo en cuenta la simplicidad del controlador RU, vale la pena analizar cada caso particular. Para un controlador RU, la ecuación 8.1 da la relación Entrada/Salida. En dicha ecuación podemos despejar  $K(s)$ :

$$K(s) = \frac{T(s)}{1 - P(s)T(s)}. \quad (8.16)$$

El problema con este método es que no hay garantía de que la función de transferencia del controlador,  $K(s)$  sea propia ni existe forma de evitar cancelación de polos y ceros indeseables. En efecto, escribiendo la ecuación en términos de los polinomios de numerador y denominador:

$$K(s) = \frac{n_P(s)d_P(s)}{d_P(s)d_T(s) - n_P(s)n_T(s)}$$

es fácil observar que si  $P(s)$  tiene polos inestables, éstos aparecerán como ceros en  $K(s)$ . Por lo tanto, se producirá una cancelación polo-cero inestable y el controlador será inaceptable.

Sin embargo, cuando el controlador es aceptable, este método es muy simple y puede ser usado.

**Ejemplo 8.9.** *Tratemos de diseñar un controlador tipo RU para obtener la función de transferencia*

$$T(s) = \frac{-10s + 5}{s^2 + 10.54s + 5}$$

para la planta

$$P(s) = \frac{s - 0.5}{s(s - 1)}$$

Usando la ecuación 8.16 se encuentra,

$$K(s) = \frac{-10s(s - 1)(s - 0.5)}{(s + 8.835)(s + 1.769)(s - 0.888)(s - 0.1801)}$$

el cual, obviamente, es inaceptable debido a la cancelación de los polos en  $s = 0$  y en  $s = 0.5$ .

**Ejemplo 8.10.** *Vamos a tratar de hallar un controlador RU para la planta*

$$P(s) = \frac{1}{s(s + 3)}$$

que implemente la función de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + 5.385s + 10}$$

### Cómo escoger a $T(s)$ ?

La función de transferencia escogida debe tener características que la hagan deseable. Entre ellas podemos mencionar las siguientes:

- Debe ser implementable
- Debe tener características estáticas apropiadas
- Debe tener una respuesta transitoria aceptable

La búsqueda de funciones de transferencia aceptables para  $T(s)$  se suele basar en técnicas de optimización. Para seleccionar la función de transferencia de lazo cerrado en forma óptima, se usan diferentes criterios de desempeño. Casi todos se basan en el comportamiento del error de rastreo ante una señal estándar, tal como un escalón.

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Algunos de los más importantes criterios son los siguientes:

**IAE** (Integral del valor Absoluto del Error)

$$J_1 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Este criterio penaliza todas las desviaciones, sean positivas o negativas.

**ISE** (Integral del cuadrado del Error)

$$J_2 = \int_0^{\infty} |e(t)|^2 dt$$

Este criterio penaliza todas las desviaciones, sean positivas o negativas, pero mucho más las desviaciones grandes que las chicas.

**ITAE** (Integral del tiempo por el valor Absoluto del Error)

$$J_3 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

Este criterio penaliza todas las desviaciones, sean positivas o negativas. Sin embargo, penaliza mucho menos las desviaciones que se producen al comienzo del tiempo. Por lo tanto, este índice no penaliza el comportamiento transitorio.

Nunca se usa el índice

$$J_3 = \int_0^{\infty} e(t) dt$$

Por qué?

Todos los procesos de optimización deben incorporar una restricción que limite la magnitud de la señal de control. De manera que todos deben incluir la restricción

$$|u(t)| \leq M$$

En las dos secciones siguientes ilustraremos el diseño ITAE y una modificación del ISE, ideada para evitar tener que incluir restricciones relativas a la magnitud del control en el proceso de optimización.

## 8.6. Control óptimo ITAE

Un sistema es ITAE-óptimo si la función de transferencia de lazo cerrado se escoge de manera que minimiza el índice de desempeño

$$\begin{aligned} ITAE &= \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \\ &= \int_0^{\infty} t |y(t) - r(t)| dt \end{aligned}$$



(La Integral del **T**iempo por el valor **A**bsoluto del **E**rror, cuando la señal de referencia es un escalón). Este criterio penaliza todas las desviaciones, sean positivas o negativas. Sin embargo, penaliza mucho menos las desviaciones que se producen al comienzo del tiempo (cuando  $t$  es pequeño). Por lo tanto, este índice no penaliza mucho el comportamiento transitorio. Es uno de los más usados. Incluso hay gente que cree que es el único que existe.

### Funciones de transferencia ITAE-óptimas

Usando técnicas de optimización y simulación, se han hallado funciones de transferencia que minimizan el ITAE para sistemas de una entrada y una salida (SISO).

Las funciones óptimas se han diseñado, dependiendo del tipo de señales que se va a rastrear. En los siguientes cuadros se presentan las funciones de transferencia óptimas para señales tipo escalón, rampa y parábola.

### Sistemas ITAE-óptimos con $\epsilon_p = 0$

Estos sistemas son capaces de rastrear escalones con cero error. Las funciones de transferencia óptimas son de la forma

$$T(s) = \frac{\alpha_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0}$$

donde los denominadores son de la forma:

$$\begin{aligned} & s + \omega_o \\ & s^2 + 1.4\omega_o s + \omega_o^2 \\ & s^3 + 1.75\omega_o s^2 + 2.15\omega_o^2 s + \omega_o^3 \\ & s^4 + 2.1\omega_o s^3 + 3.4\omega_o^2 s^2 + 2.7\omega_o^3 s + \omega_o^4 \\ & s^5 + 2.8\omega_o s^4 + 5\omega_o^2 s^3 + 5.5\omega_o^3 s^2 + 3.4\omega_o^4 s + \omega_o^5 \\ & s^6 + 3.25\omega_o s^5 + 6.6\omega_o^2 s^4 + 8.6\omega_o^3 s^3 + 7.45\omega_o^4 s^2 + 3.95\omega_o^5 s + \omega_o^6 \end{aligned}$$

El parámetro  $\alpha_o = \omega_o$  determina la velocidad de respuesta y, por lo tanto, la amplitud de la señal de control (el  $U_{\text{máx}}$ )

Las siguientes gráficas (figura 8.8) muestran las respuestas de un sistema ITAE con diferentes grados relativos y con  $\omega_o = 1$  y  $\omega_o = 5$

Con el fin de analizar el efecto del parámetro  $\omega_o$  sobre la respuesta, incluimos la respuesta de sistemas ITAE óptimos de orden 2, con varios valores de  $\omega_o$ , en la figura 8.9. Se observa que al aumentar el valor de  $\omega_o$ , la respuesta se hace más rápida. Esto siempre requiere usar más energía en el control y por lo general implica mayores valores de  $U_{\text{máx}}$ . La forma de la respuesta no cambia, excepto por la contracción del eje de tiempo. Este efecto se puede demostrar usando la propiedad de cambio de escala de tiempo de la transformada de Laplace<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>  $\mathcal{L}[f(at)] = f(s/a)/a$

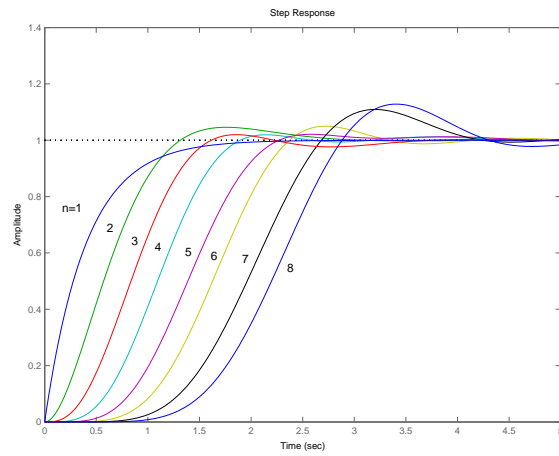


Figura 8.8: Respuesta de sistemas ITAE óptimos con  $\varepsilon_p = 0$  de diferentes órdenes o grados relativos.

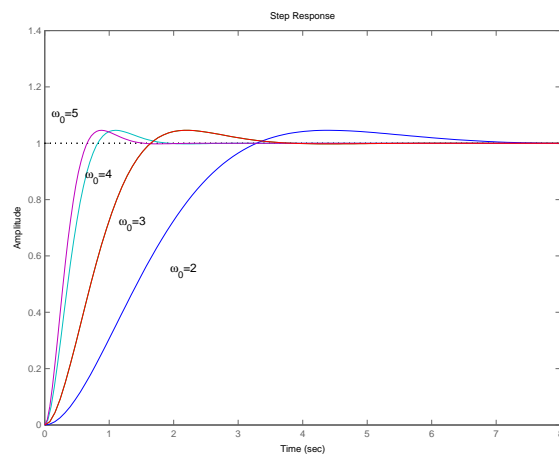


Figura 8.9: Efecto del valor de  $\omega_0$  sobre la respuesta de sistemas ITAE óptimos de orden con  $\varepsilon_p = 0$  de orden 2.

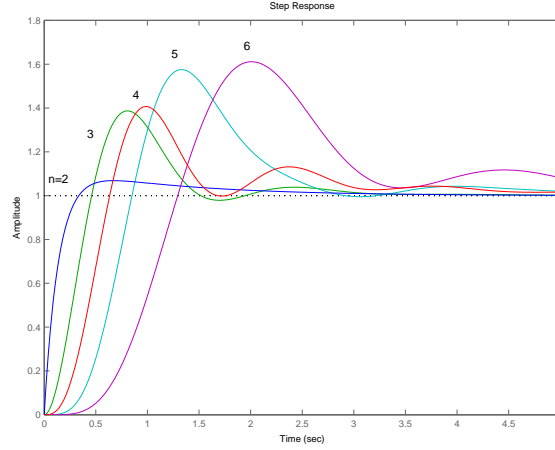


Figura 8.10: Respuesta de sistemas ITAE óptimos con  $\varepsilon_v = 0$ , de diferentes órdenes o grados relativos.

### Sistemas ITAE-óptimos con $\epsilon_v = 0$

Estos sistemas son capaces de rastrear rampas con error cero. Las funciones de transferencia óptimas son de la forma,

$$T(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

donde los denominadores son de la forma:

$$\begin{aligned} & s^2 + 3.2 \omega_o s + \omega_o^2 \\ & s^3 + 1.75 \omega_o s^2 + 3.25 \omega_o^2 s + \omega_o^3 \\ & s^4 + 2.41 \omega_o s^3 + 4.93 \omega_o^2 s^2 + 5.14 \omega_o^3 s + \omega_o^4 \\ & s^5 + 2.19 \omega_o s^4 + 6.5 \omega_o^2 s^3 + 6.3 \omega_o^3 s^2 + 5.24 \omega_o^4 s + \omega_o^5 \\ & s^6 + 6.12 \omega_o s^5 + 13.42 \omega_o^2 s^4 + 17.16 \omega_o^3 s^3 + 14.14 \omega_o^4 s^2 + 6.76 \omega_o^5 s + \omega_o^6 \end{aligned}$$

Las funciones  $T(s)$  son de grado relativo  $n - 1$ .

En la figura 8.10 aparecen las respuestas de sistemas ITAE con diferentes grados relativos y con  $\omega_o = 1$ .

### Sistemas ITAE-óptimos con cero error de aceleración

Estos sistemas son capaces de rastrear parábolas con error cero. Las funciones de transferencia óptimas son de la forma,

$$G_o(s) = \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

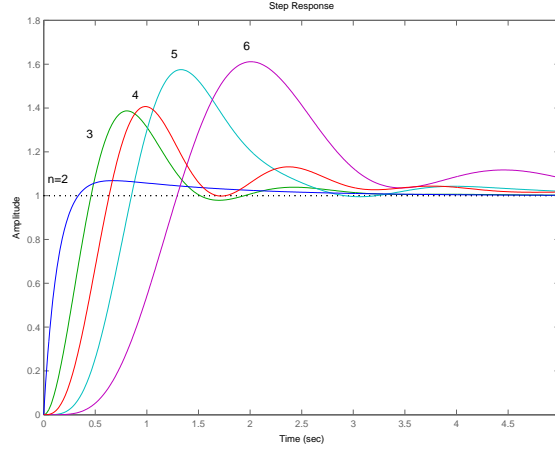


Figura 8.11: Respuesta de sistemas ITAE óptimos con  $\varepsilon_a = 0$ , de diferentes órdenes o grados relativos.

Los denominadores son de la forma:

$$\begin{aligned}
 &s^3 + 2.97\omega_o s^2 + 4.94\omega_o^2 s + \omega_o^3 \\
 &s^4 + 3.71\omega_o s^3 + 7.88\omega_o^2 s^2 + 5.93\omega_o^3 s + \omega_o^4 \\
 &s^5 + 3.81\omega_o s^4 + 9.94\omega_o^2 s^3 + 13.44\omega_o^3 s^2 + 7.36\omega_o^4 s + \omega_o^5 \\
 &s^6 + 3.93\omega_o s^5 + 11.68\omega_o^2 s^4 + 18.56\omega_o^3 s^3 + 19.3\omega_o^4 s^2 + 8.06\omega_o^5 s + \omega_o^6
 \end{aligned}$$

Las funciones  $T(s)$  son de grado relativo  $n - 2$ .

Las gráficas mostradas en la figura 8.11 muestran las respuestas de sistemas ITAE con diferentes grados relativos y con  $\omega_o = 1$ .

**Ejemplo 8.11.** Para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

Hallar  $T(s)$  ITAE-óptima. con  $|u(t)| \leq 10$

Una función de tranferencia ITAE óptima con g.r. = 2 es

$$T(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 1.4\omega_o s + \omega_o^2}$$

El valor de  $\omega_o$  se debe seleccionar de tal forma que se cumpla la restricción.

El siguiente código de Julia permite, usando diversos valores de  $\omega_0$ , hallar la función de transferencia óptima.

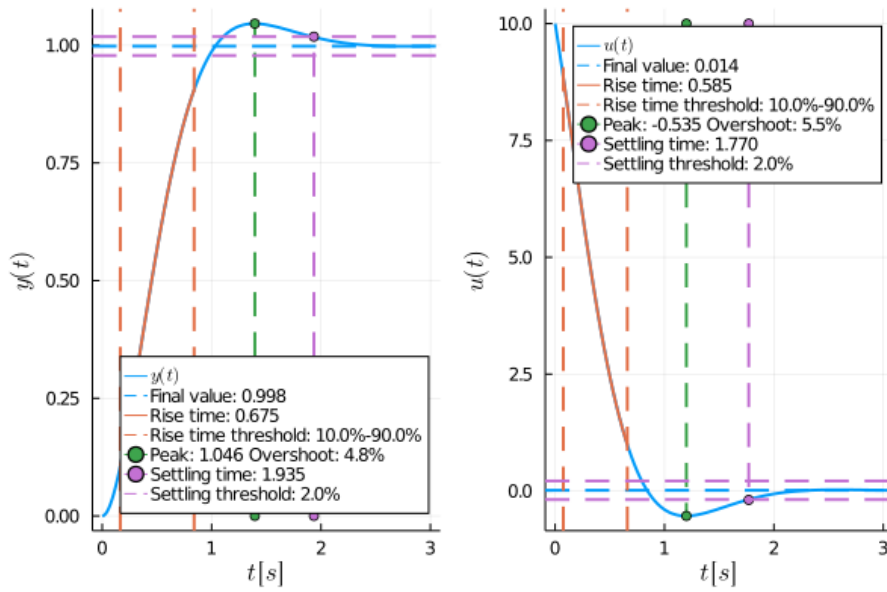


Figura 8.12: Respuesta del sistema ITAE óptimo con  $U_{\max} = 10$ .

---

```

1 P=tf([1],[1, 3, 0])
2 w0 = 1
3 w0 = sqrt(10)
4 T = tf([w0^2],[1, 1.4*w0, w0^2])
5 Gur = minreal(T/P)
6 max_resp_step(Gur)
7 step_plt(T, 5)

```

---

Usando  $\omega_0 = 1$ , se halla  $U_{\max} = 1.4832$ . Podemos aumentar  $\omega_0$ . Mediante simulación se halla que el valor de  $\omega_0 = 3.1623 = \sqrt{10}$  produce un sistema de lazo cerrado con respuesta al escalón como la que se presenta en la figura 8.12. El sobrepico es 4.6 % y  $t_s = 1.89$  seg. El valor máximo de la señal de control  $U_{\max}$  es 10, como buscábamos.

A continuación, diseñamos el controlador que permita implementar esta función de transferencia óptima de lazo cerrado. Las componentes del controlador son:

$$K_r(s) = \frac{10s^2 + 90s + 200}{s^2 + 10.4272s + 52.1995}$$

$$K_y(s) = \frac{-13.6364s^2 + 21.9453s + 200}{s^2 + 10.4272s + 52.1995}$$

Supongamos que el sistema está siendo diseñado para seguir referencias tipo rampa. En ese caso, queremos que el error de velocidad sea cero, Por lo tanto, usaremos una función de transferencia de grado relativo 2 (para que sea implementable), de la forma siguiente:

$$T(s) = \frac{3.25\omega^2 s + \omega^3}{s^3 + 1.75\omega s^2 + 3.25\omega^2 s + \omega^3}.$$

El siguiente código julia calcula la función ITAE-óptima:

---

```

1 include("ControlUN.jl")
2 s = tf('s')
3 P = 1/(s*(s+5))
4 w0 = 1
5 w0 = 10
6 w0 = cbrt(10)
7 T = tf([w0^3], [1, 1.75w0, 2.15w0^2, w0^3])
8 Gur = minreal(T/P)
9 max_resp_step(Gur)
10 p = yu_stp_plt(T, Gur, 6)

```

---

Y, el controlador que permita implementar esta función de transferencia óptima de lazo cerrado es:

**Ejemplo 8.12.** Hallar la función de transferencia ITAE-óptima que satisface  $|u(t)| \leq 5$  para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.25s + 5)}$$

La planta tiene grado relativo 3. Por lo tanto, para que sea implementable, buscamos una función ITAE óptima de grado relativo 3. Es decir, de la forma

$$T(s) = \frac{\omega_o^3}{s^3 + 1.75\omega_o s^2 + 2.15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$$

Y se determina el valor de  $\omega_o$  que satisface la restricción del actuador.

Procediendo en forma similar al ejemplo anterior, se halla el máximo valor de  $\omega_o = \sqrt[3]{5} = 1.71$ . La respuesta correspondiente, está en la figura 8.13

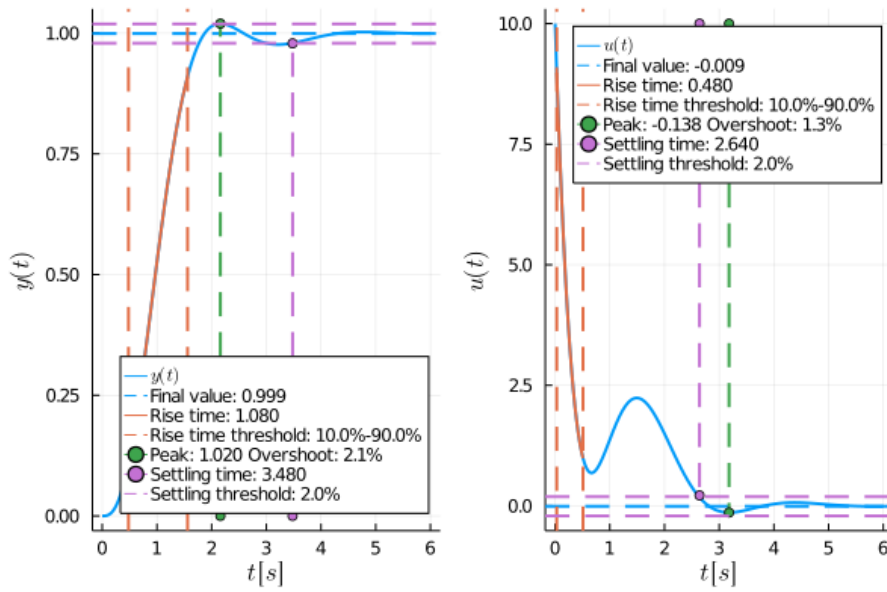


Figura 8.13: Respuesta del sistema ITAE óptimo con  $U_{\max} = 10$ .

**Ejemplo 8.13.** Hallar la función de transferencia ITAE-óptima que satisface  $|u(t)| \leq 10$  para la planta

$$P(s) = \frac{s - 0.5}{s(s - 1)}$$

En este caso, el cero no minifase representa algunos problemas: Para que la función  $T(s)$  sea implementable, debe conservar el cero. Y, además, su grado relativo debe ser por lo menos uno. Para usar una de las funciones óptimas ITAE, necesitamos una función de transferencia implementable de la forma

$$T(s) = \frac{-2\omega_o^2(s - 0.5)}{s^2 + 1.4\omega_o s + \omega_o^2}$$

La ganancia  $-2$  se incluye para garantizar que la ganancia d.c. sea igual a 1.

Una vez más, se calcula el valor de  $\omega_o$  que satisface la restricción del actuador, procediendo en forma experimental. Con un valor de  $\omega_o = 2.235$  se logra una respuesta con  $t_s = 3.09$  seg y  $SP = 13\%$ . La respuesta tiene una respuesta inversa, como era de esperar, debido al cero no minifase. La amplitud del “subpico” es bastante grande:  $-174\%$ . La gráfica se encuentra en la figura 8.14.

Es necesario anotar que en este caso, no hay garantía de que  $T(s)$  sea ITAE óptima, pues las funciones de transferencia ITAE no fueron obtenidas para sistemas no minifase. La respuesta obtenida simplemente representa una

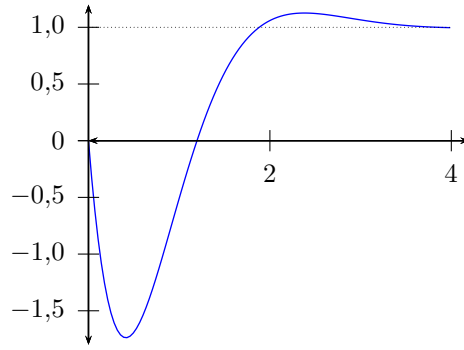


Figura 8.14: Respuesta del sistema ITAE óptimo con  $U_{\text{máx}} = 10$ .

forma de obtener una función de transferencia implementable, con base en las funciones anteriores.

### 8.7. Control óptimo LQ

Una forma relativamente simple de hallar funciones de transferencia con características deseables es mediante el uso de un índice de desempeño cuadrático de la forma

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ q [y(t) - r(t)]^2 + u(t)^2 \right\} dt$$

Donde  $q > 0$ .

Cuando  $q$  es grande, se le da más peso al error que a la señal de control y la solución tiende a tener valores grandes de  $u(t)$ . Pero si  $q$  es pequeño, se vuelve más importante la magnitud del control y la solución produce valores menores de  $u(t)$ . El problema se denomina LQ (Linear Quadratic). Modernamente, se denomina el problema  $\mathcal{H}_2$  [Mor89].

#### Solución del problema LQ

Dada la planta descrita por medio de la función de transferencia

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)},$$

la solución del problema de control óptimo LQ se halla a partir del polinomio

$$Q(s) = d_P(s)d_P(-s) + q n_P(s)n_P(-s)$$

Donde  $q > 0$ .

Este polinomio tiene la característica de que

$$Q(s) = Q(-s)$$



Por lo tanto, si  $s_0$  es una raíz,  $-s_0$  también lo es. Adicionalmente, las raíces complejas deben aparecer en pares conjugados por ser reales los coeficientes. De manera que las raíces son simétricas con respecto al origen.

Vamos a ver que  $Q(s)$  no puede tener raíces imaginarias. En efecto, si  $j\omega$  es una raíz, entonces,

$$\begin{aligned} Q(j\omega) &= d_P(j\omega)d_P(-j\omega) + qn_P(j\omega)n_P(-j\omega) \\ &= |d_P(j\omega)|^2 + |n_P(j\omega)|^2 = 0 \end{aligned}$$

Lo cual implica que tanto el numerador como el denominador de  $P(s)$  son cero en  $s = j\omega$ . Pero hemos supuesto que estos polinomios no tienen factores comunes. Por lo tanto,  $Q(j\omega)$  no puede ser cero.

En conclusión, el polinomio  $Q(s)$  tiene  $n$  raíces en el SPD y  $n$  en el SPI. Esto quiere decir que se puede hacer una factorización de la forma

$$Q(s) = d_P(s)d_P(-s) + qn_P(s)n_P(-s) = D_T(s)D_T(-s)$$

Donde  $D_T(s)$  es Hurwitz. Esta factorización se denomina *factorización espectral*.

La solución del problema LQ para una entrada de referencia tipo escalón y una planta tipo uno (con un integrador) se halla en la siguiente forma (Ver [Cha61]):

1. A partir de  $P(s)$  y  $q$ , formar el polinomio

$$Q(s) = d_P(s)d_P(-s) + qn_P(s)n_P(-s)$$

2. Hallar la factorización espectral de  $Q(s)$ .

$$Q(s) = D_T(s)D_T(-s)$$

Donde  $D_T(s)$  es Hurwitz.

3. La función de transferencia óptima se calcula como:

$$T(s) = \frac{qn_P(0)}{D_T(0)} \frac{n_P(s)}{D_T(s)}$$

Es posible relajar las condiciones del problema, usando una formulación de variables de estado. (ver [ZDG96, Mor89]).

**Ejemplo 8.14.** Para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

Hallar  $T(s)$  que minimiza

$$J = \int_0^\infty \left\{ q [y(t) - r(t)]^2 + u(t)^2 \right\} dt$$

con  $q = 10$ .

A partir de  $P(s)$ ,

$$\begin{aligned} n_P(s) &= 1; & n_P(-s) &= 1 \\ d_P(s) &= s(s+3); & d_P(s) &= -s(-s+3) \end{aligned}$$

se forma el polinomio,

$$Q(s) = s^4 - 9s^2 + 5$$

Las raíces de  $Q(s)$  se pueden hallar como  $-2.8992$ ,  $2.8992$  y  $-0.7713$  y  $0.7713$ . A partir de las raíces hallamos la factorización espectral

$$Q(s) = D_T(s)D_T(-s) = (s^2 + 3.6704s + 2.2361)(s^2 - 3.6704s + 2.2361)$$

Por lo tanto,

$$D_T(s) = s^2 + 3.6704s + 2.2361$$

cuyas raíces son  $-2.8992$  y  $-0.7713$ .

A partir de  $D_T(s)$ , se halla

$$T(s) = \frac{qn_P(0) n_P(s)}{D_T(0) D_T(s)} = \frac{2.236}{s^2 + 3.67s + 2.236}$$

y

$$G_{ur}(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{2.236s^2 + 6.708s}{s^2 + 3.67s + 2.236}$$

Después de simular la respuesta a un escalón, se obtiene  $U_{\text{máx}} = 2.2361 = \sqrt{5}$ .

Si el actuador tiene una limitación  $|u(t)| \leq 10$ , se puede aumentar el valor de  $q$ . Usaremos  $q = 100$ .

Con este valor de  $q$ , se encuentra que  $U_{\text{máx}} = 10$  y

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + 5.385s + 10}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{10s^2 + 30s}{s^2 + 5.385s + 10}$$

Con esta función de transferencia de lazo cerrado, la respuesta al escalón es como la de la figura 8.15. La respuesta tiene un sobrepico de  $0.61\%$  y un valor de  $t_s = 1.39$  seg.

Esta función de transferencia se puede implementar, mediante un controlador  $2P$ , usando un polo del observador en  $s = -4$ . El controlador resultante es:

$$K(s) = \left[ \frac{10s+40}{s+6.385} \quad \frac{-12.39s-40}{s+6.385} \right]$$

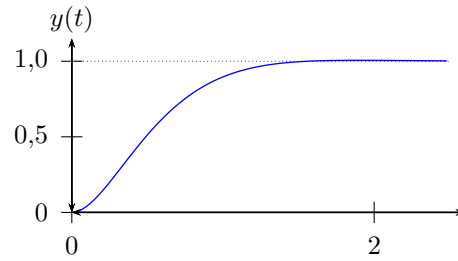


Figura 8.15: Respuesta del sistema óptimo Lq, para la planta  $P(s) = \frac{1}{s(s+3)}$ , con  $q = 100$ .

La solución del problema LQ, en el ejemplo anterior se obtuvo mediante el programa Julia mostrado a continuación:

---

```

1 P=tf([1],[1, 3, 0])
2 q=100
3 T,Gur = lq_1(P,q)
4 Umax = max_resp_step(Gur)
5 step_plt(T)

```

---

donde se ha usado la función

---

```

1 function lq_1(P,q)
2     n, d = tfdata(P);
3     Qd = convol(d, cambia_signo(d));
4     Qn = q * convol(n, cambia_signo(n));
5     Qa = zeros(Complex,length(Qd));
6     l = length(Qd) - length(Qn);
7     Qa[l+1:end] = Qn;
8     Q = Qd .+ Qa;
9     r = polroots(Q[:,1]);
10    inestables = real.(r).> 0;
11    indices = findall(iszero,inestables);
12    dT = poly(r[indices,1])[:,1];
13    T = tf(n,dT);
14    T = T / dcgain(T)[1];
15    Gur = minreal(T / P) ;
16    T, Gur
17 end

```

---

que requiere algunas funciones accesorias:

---

```

1 function convol(h,u)
2     n = length(h);
3     m = length(u);
4     l = n + m-1;
5     w = zeros(Complex,l,1);
6     for i in 1:l
7         for j in max(1,i+1-m):min(i,n)
8             w[i] = w[i] + h[j]*u[i-j+1];
9         end
10    end
11    w;
12 end
13
14 function poly(raices)
15     n = length(raices)
16     pol = [1.0+0.0im, -raices[1]]
17     for i in 2:n
18         pol = convol(pol, [1.0+0.0im, -raices[i]])
19     end
20     return real.(pol)
21 end
22
23 function reverse_poly(polyn)
24     n = length(polyn)
25     poly_r = zeros(Complex,n)
26     for i in 1:n
27         poly_r[i] = polyn[n + 1 - i]
28     end
29     return poly_r
30 end
31
32
33 function polroots(polin)
34     raices_p = PolynomialRoots.roots(reverse_poly(polin))
35 end
36
37 function tfdata(G)
38     # Obtiene numerador y denominador de fcn de transferencia
39     # para sistema SISO
40     G = tf(G)
41     n = num(G)[1,1]
42     d = den(G)[1,1]
43     n, d
44 end
45
46 function cambia_signo(n)
47     n1 = n
48     long = length(n1) - 1
49     n2 = ones(long+1)

```

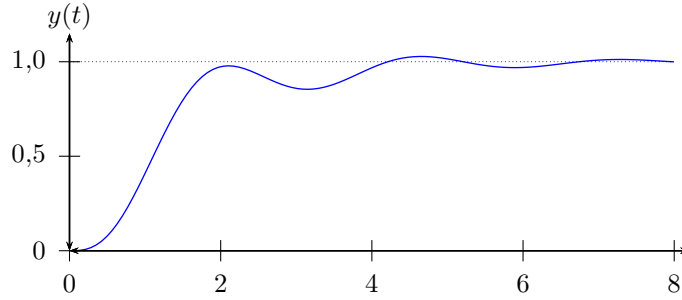


Figura 8.16: Respuesta del sistema óptimo Lq, para la planta  $P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.25s + 5)}$ , con  $q = 25$ .

```

50     for j in long:-2:1
51         n2[j] = -1
52     end
53     return n2 .*n
54 end

```

**Ejemplo 8.15.** Hallar la función de transferencia óptima cuadrática que satisface  $|u(t)| \leq 5$  para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.25s + 5)}$$

Usando  $q = 1$ , calculamos un controlador óptimo y obtenemos un valor de  $U_{\max} = 1$ . Con  $q = 2$ , el valor correspondiente es  $U_{\max} = \sqrt{2}$ . Esto sugiere que el valor necesario de  $q$  es de 25. En efecto, en este caso, se halla  $U_{\max} = 5$ .

La función de transferencia óptima es

$$T(s) = \frac{1.414}{s^3 + 0.6516s^2 + 5.181s + 1.414}$$

El controlador de dos parámetros que permite implementar esta función de transferencia es:

$$K(s) = \left[ \frac{1.414s^2 + 12.73s + 28.28}{s^2 + 9.402s + 23.69} \quad \frac{-8.143s^2 + 2.125s - 28.28}{s^2 + 9.402s + 23.69} \right]$$

El código que implementa estos cálculos es:

```

1 include("ControlUN.jl")
2 P = tf(1, [1, 0.25, 5, 0])

```

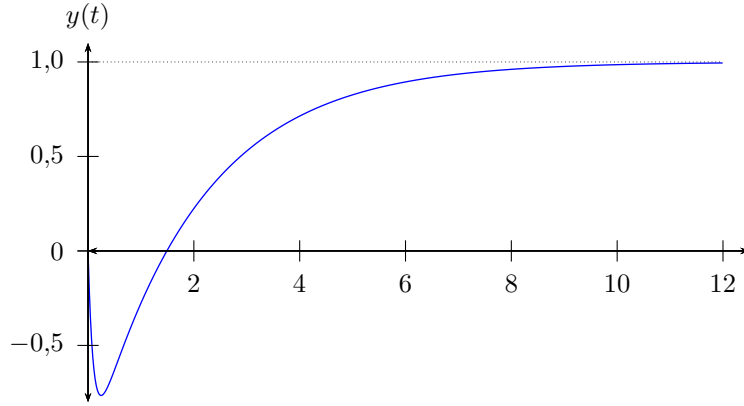


Figura 8.17: Respuesta del sistema óptimo LQ, para la planta  $P(s) = \frac{s - 0.5}{s(s - 1)}$ , con  $q = 100$ .

```

3  q = 1.
4  T, Gur = lq_1(P,q)
5  u_max = max_resp_step(Gur)
6  q = 2
7  T, Gur = lq_1(P,q)
8  u_max = max_resp_step(Gur)
9  q = 25
10 T, Gur = lq_1(P,q)
11 u_max = max_resp_step(Gur)
12 pl = yu_stp_plt(T, Gur,15)
13 polos_ob = [-1, -2]
14 Kr, Ky = dise_2p(P, T, polos_ob)

```

**Ejemplo 8.16.** Hallar la función de transferencia óptima cuadrática que satisface  $|u(t)| \leq 10$  para la planta

$$P(s) = \frac{s - 0.5}{s(s - 1)}$$

Después de ensayar varios valores de  $q$ , obtuvimos que con  $q = 100$ , se halla que  $U_{\max} = 10$ , como se ha especificado. La función de transferencia óptima es la siguiente:

$$T(s) = \frac{-10s + 5}{s^2 + 10.54s + 5}$$

y la respuesta al escalón se muestra en la figura 8.17.

Esta función se puede obtener usando un controlador de dos parámetros dado por:

$$K(s) = \left[ \frac{-10s-40}{s-189.8} \quad \frac{-205.4s+40}{s-189.8} \right]$$

Código Julia:

---

```

1 include("ControlUN.jl")
2 P = tf([1, -0.5], [1, -1, 0])
3 P_mf = tf(1, [1, -1, 0])
4 q = 1.
5 T_mf, Gur = lq_1(P_mf, q)
6 T = -T_mf*tf([1, -0.5], [1])
7 step_plt(T, 10)
8 G_ur = minreal(T / P)
9 u_max = max_resp_step(G_ur)
10 q = 10
11 T_mf, Gur = lq_1(P_mf, q)
12 T = -T_mf*tf([1, -0.5], [1])
13 step_plt(T, 10)
14 G_ur = minreal(T / P)
15 u_max = max_resp_step(G_ur)
16 q = 100
17 T_mf, Gur = lq_1(P_mf, q)
18 T = -T_mf*tf([1, -0.5], [1])
19 step_plt(T, 10)
20 G_ur = minreal(T / P)
21 u_max = max_resp_step(G_ur)

```

---

## Apéndice 1: Teorema de Sylvester

**Definición 24** (Matriz de Sylvester). *Dados dos polinomios*

$$\begin{aligned}
 p(s) &= p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0 \\
 q(s) &= q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \cdots + q_1 s + q_0
 \end{aligned}$$

se define su matriz de Sylvester como

$$M := \begin{bmatrix}
 p_n & 0 & \cdots & 0 & q_n & 0 & 0 & 0 \\
 p_{n-1} & p_n & \cdots & 0 & q_{n-1} & q_n & & \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 p_0 & p_1 & \cdots & p_n & q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\
 0 & p_0 & \cdots & p_{n-1} & 0 & q_0 & \cdots & q_{n-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & p_0 & 0 & 0 & \cdots & q_0
 \end{bmatrix}$$

**Teorema 27** (Sylvester). *Los polinomios  $p(s)$  y  $q(s)$  son coprimos si y sólo si la matriz de Sylvester  $M$  es no singular.*

**Prueba:**

Usando el algoritmo de Euclides, es fácil probar [KR<sup>+</sup>13], que  $p(s)$  y  $q(s)$  son coprimos si y sólo si, existen polinomios  $x(s)$  e  $y(s)$  tales que

$$x(s)p(s) + y(s)q(s) = 1. \quad (8.17)$$

Escribiendo la ecuación 8.17 explícitamente, en términos de los coeficientes de

$$\begin{aligned} x(s) &= \xi_n s^n + \xi_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \xi_1 s + \xi_0 \\ y(s) &= \eta_n s^n + \eta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \eta_1 s + \eta_0 \end{aligned}$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} 1 &= (p_0 + p_1 s + \cdots + p_n s^n)(\eta_0 + \eta_1 s + \cdots + \eta_m s^m) \\ &\quad + (q_0 + q_1 s + \cdots + q_n s^n)(\xi_0 + \xi_1 s + \cdots + \xi_m s^m) \end{aligned}$$

Se puede ver, fácilmente, que basta tomar  $m = n - 1$  para satisfacer la ecuación 8.17. Por lo tanto, efectuando los productos e igualando los coeficientes de los dos polinomios,

$$\begin{aligned} 0 &= q_n \eta_{n-1} + p_n \xi_{n-1} \\ &\vdots \\ 0 &= q_0 \eta_1 + q_1 \eta_0 + p_0 \xi_1 + p_1 \xi_0 \\ 1 &= q_0 \eta_0 + p_0 \xi_0 \end{aligned}$$

lo cual se puede escribir matricialmente como

$$\begin{bmatrix} p_n & 0 & \cdots & 0 & q_n & 0 & 0 & 0 \\ p_{n-1} & p_n & \cdots & 0 & q_{n-1} & q_n & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n & q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ 0 & p_0 & \cdots & p_{n-1} & 0 & q_0 & \cdots & q_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_0 & 0 & 0 & \cdots & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{n-1} \\ \vdots \\ \eta_0 \\ \xi_{n-1} \\ \vdots \\ \xi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes es, desde luego, la matriz de Sylvester. Y el sistema de ecuaciones tiene solución si dicha matriz es no singular. La demostración de que esta condición es necesaria se deja como ejercicio.

□

## Apéndice 2: Teorema de Parseval

Sea  $x(t)$  una función, nula para valores de  $t < 0$  y que tiende a cero exponencialmente; es decir, que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x(t)$  decrece más rápido que  $e^{-\epsilon t}$ .<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Eso significa que la transformada de Laplace,

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{s t} dt$$



Entonces,

$$\int_0^\infty x(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(s) X(-s) ds \quad (8.18)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty x(t) \left[ \int_{-j\infty}^{j\infty} X(s) e^{st} ds \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(s) \left[ \int_0^\infty x(t) e^{st} dt \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(s) X(-s) ds \end{aligned}$$

### Apéndice 3: Solución del problema LQ

Consideramos el sistema de control con una función de transferencia

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)}$$

óptima; es decir, la función  $T(s)$  real-racional propia (cociente de dos polinomios con coeficientes reales), estable, tal que se minimiza la funcional objetivo

$$J = \int_0^\infty [e(t)^2 + \rho u(t)^2] dt$$

donde  $e(t) = y(t) - r(t)$  y la señal de entrada a la planta es  $u(t)$ . También suponemos que la planta a ser controlada está descrita por una función de transferencia

$$P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}$$

irreducible; es decir que  $n_P(s)$  y  $d_P(s)$  no tienen factores comunes. Vamos a resolver el problema de encontrar la función de transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{n_P(s)n_K(s)}{n_P(s)n_K(s) + d_P(s)d_K(s)}$$

**óptima** para una entrada dada, tipo escalón. En este desarrollo, vamos a limitarnos a los sistemas de fase mínima (**minifase**); es decir, sistemas que no

---

existe y la integral converge para todo  $s : \text{Res} > -\epsilon$ .

Además, la transformada inversa está dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(s) e^{-st} ds.$$

Similarmente,

$$X(-s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt.$$

y la integral converge para todo  $s : \text{Res} < \epsilon$ .

tienen ceros en el semiplano derecho, por simplicidad. Es posible hacer una formulación general, pero la demostración requiere varios ajustes que no intentaremos presentar aquí.

A partir de la figura, en términos de las transformadas de Laplace,

$$e(s) = r(s) - y(s) = [T(s) - 1]r(s)$$

Una vez conocida la función  $T$  óptima, es posible establecer la señal de control que produce esa respuesta óptima:

$$u(s) = \frac{y(s)}{P(s)} = \frac{T(s)}{P(s)}r(s)$$

Usando el teorema de Parseval,

$$\int_0^\infty [q e^2(t) + u^2(t)] dt = q J_e + J_u \quad (8.19)$$

donde los dos términos están dados por las integrales equivalentes, con base en el teorema de Parseval:

$$J_e = \int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [T(s) - 1] [T(-s) - 1] r(s)r(-s) ds$$

$$J_u = \int_0^\infty u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{[T(s)T(-s)r(s)r(-s)]}{P(s)P(-s)} ds$$

Para  $q > 0$  fijo, supondremos que existe la función de transferencia óptima  $T^*(s)$  que minimiza la integral y usaremos una técnica estándar en Cálculo Variacional en la cual haremos una pequeña variación alrededor del óptimo. Aquí la variación es una función de transferencia estable y propia. En este punto solo consideramos aceptables las funciones de transferencia que son real-racionales, propias y estables. Este conjunto se denota por  $RH_2$ .

Entonces, una función de transferencia estable cualquiera se puede escribir como

$$T(s) = T^*(s) + \lambda T_1(s)$$

donde  $T^*(s)$  es la función de transferencia óptima,  $T_1(s)$  es una función de transferencia, de perturbación, propia y estable y  $\lambda$  es una constante. Puesto que todos los polos de  $T^*$  y  $T$  están en el SPI, los polos de  $T_1$  tienen que también estar en el SPI. ( $RH_2$  es un espacio vectorial, de funciones). Intentamos encontrar las condiciones que debe satisfacer  $T^*(S)$  para ser óptima. Vamos a necesitar calcular  $T(-s) = T^*(-s) + \lambda T_1(-s)$ .

Vamos a obtener algunas ecuaciones bastante largas, por lo tanto, siguiendo el desarrollo de [Cha61], vamos a definir algunas abreviaturas:  $T^*, T, r$  y  $P$

representan, respectivamente,  $T^*(s), T(s), r(s)$  y  $P(s)$ ; a su vez,  $\bar{T}^*, \bar{T}, \bar{r}$  y  $\bar{P}$  representan, respectivamente,  $T^*(-s), T(-s), r(-s)$  y  $P(-s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} q J_e + J_u &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} q(T^* + \lambda T_1)(\bar{T}^* + \lambda \bar{T}_1) r \bar{r} ds + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(T^* + \lambda T_1)(\bar{T}^* + \lambda \bar{T}_1) r \bar{r}}{P \bar{P}} ds \\ &= J_1 + \lambda(J_2 + J_3) + \lambda^2 J_4 \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ q(T^* - 1)(\bar{T}^* - 1) + \frac{T^* \bar{T}^*}{P \bar{P}} \right] r \bar{r} ds + \\ J_2 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ q(\bar{T}^* - 1) + \frac{\bar{T}^*}{P \bar{P}} \right] r \bar{r} T_1 ds + \\ J_3 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ q(\bar{T}^* - 1) + \frac{T^*}{P \bar{P}} \right] r \bar{r} \bar{T} ds + \\ J_4 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ q + \frac{1}{P \bar{P}} \right] r \bar{r} T_1 \bar{T}_1 ds \end{aligned}$$

En la última ecuación, por definición, la primera integral  $J_1$  representa el valor óptimo de  $J$ . El último sumando siempre será positivo. En la segunda integral  $J_2$ , cuando sustituimos  $s$  por  $-s$ , el integrando es igual al de  $J_3$ . Como la integración se hace sobre todo el eje imaginario, las dos integrales tienen que ser iguales. Por lo tanto,

$$J = J_1 + 2\lambda J_3 + \lambda^2 J_4$$

Entonces, una condición suficiente para que  $T^*$  sea la solución óptima, es que la integral  $J_3$  y, por lo tanto también  $J_2$ , sea nula. Si  $J_2$  y  $J_3$  son nulas, el mínimo valor de  $J$  ocurre cuando  $T_1(s) = 0$  es decir, cuando  $T(s) = T^*(s)$ .

Se puede demostrar que esta condición también es suficiente: en efecto, si  $J_3 \neq 0$ , se puede escoger  $\lambda$  suficientemente pequeña para que  $\lambda^2 J_4 < 2|\lambda J_3|$  y el signo de  $\lambda$  se puede escoger de manera que  $\lambda J_3 < 0$ . De esta manera se halla una  $T(s)$  tal que el valor objetivo es menor que el de  $T^*$ , lo cual contradice que  $T^*$  sea la función óptima. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que  $T^*$  sea óptima es que

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ q(T^*(s) - 1) + \frac{T^*}{P \bar{P}} \right] r \bar{r} \bar{T}_1 ds = 0 \quad (8.20)$$

para cualquier función  $T_1(s)$  propia y estable.

La integral de la ecuación 8.20 puede evaluarse, usando una integral de contorno, considerando que la trayectoria que comprende el eje imaginario es parte de la trayectoria cerrada mostrada en la figura, donde  $R \rightarrow \infty$  8.18.

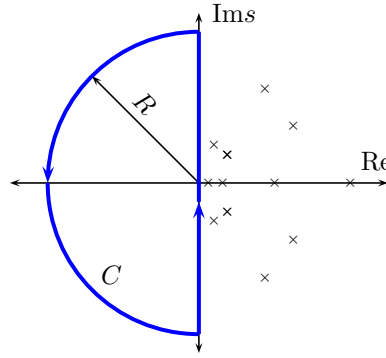


Figura 8.18: Contorno de integración

La integral de contorno se evalúa por medio del teorema de residuos de Cauchy. Lo primero que notamos es que para cualquier  $T_1$  estable,  $\bar{T}$  tiene todos sus polos en el SPD.

Para calcular la integral, consideramos a continuación el comportamiento del integrando en el arco semicircular. Cuando  $s \rightarrow \infty$  y para una entrada tipo escalón ( $r(s) = 1/s$  y  $r(-s) = -1/s$ ), es posible usar el teorema del valor inicial de las transformadas de Laplace para calcular sus valores asintóticos en el plano  $s$ .

$$\begin{aligned} r(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s r(s) = 1 \\ y(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s T(s) r(s) < \infty \\ u(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{T(s) r(s)}{P(s)} < \infty \end{aligned}$$

Como todos los valores iniciales son finitos, los términos en  $r, T r, T r/P$  tienden a cero al menos tan rápido como  $1/s$ , lo mismo que  $\bar{r}, \bar{T} \bar{r}$  y  $\bar{T} \bar{r}/\bar{P}$ . Esto quiere decir que el integrando se anula en el  $s = \infty$  y, por lo tanto, el valor de la integral de contorno es igual al valor de la integral original sobre el eje imaginario.

Ahora bien,  $\bar{T}$  solo tiene polos en SPD (fuera de  $C$ ). Entonces, se requiere que

$$\left[ q(T^* - 1) + \frac{T^*}{P \bar{P}} \right] r \bar{r}$$

tenga todos sus polos en SPD (fuera de  $C$ ) para que la integral sea cero. Por lo tanto, una condición necesaria para que  $T^*$  sea óptima es que

$$\left[ q(T^* - 1) + \frac{T^*}{P \bar{P}} \right] r \bar{r} = X(s) \quad (8.21)$$

donde  $X(s)$  es una función racional sin polos en SPI. Esta última ecuación se puede escribir como

$$\left(q + \frac{1}{P\bar{P}}\right) r \bar{r} T^* - q r \bar{r} = X(s) \quad (8.22)$$

Consideremos el primer término de la última ecuación:

$$\begin{aligned} q + \frac{1}{P\bar{P}} &= q + \frac{1}{P(s)P(-s)} = q + \frac{1}{\frac{n_P(s)n_P(-s)}{d_P(s)d_P(-s)}} \\ &= q + \frac{d_P(s)d_P(-s)}{n_P(s)n_P(-s)} \\ &= \frac{q n_P(s)n_P(-s) + d_P(s)d_P(-s)}{n_P(s)n_P(-s)} \end{aligned}$$

Esta última expresión es una función par, con respecto a  $s$ : si cambiamos  $s$  por  $-s$ , la función permanece invariante, por lo tanto si, por ejemplo,  $z$  es un polo o un cero,  $-z$  también lo será. Esto significa que es posible hacer una factorización en el producto de una función con todos sus polos y ceros en SPI (una función de transferencia estable y minifase, aunque no sea propia) con una que tenga todos los polos y ceros en el SPD, en la forma:

$$\frac{q n_P(s)n_P(-s) + d_P(s)d_P(-s)}{n_P(s)n_P(-s)} = Y(s)Y(-s) = Y \bar{Y}$$

Este tipo de factorización, como se había mencionado antes, se conoce como **factorización espectral**. Usando la notación introducida en el texto principal,

$$\frac{Q(s)}{n_P(s)n_P(-s)} = Y(s)Y(-s) = \frac{D_T(s)D_T(-s)}{n_T(s)n_P(-s)} = Y \bar{Y}$$

Queremos hacer una factorización espectral para los términos de la ecuación 8.22. Por lo tanto, en el caso de una entrada tipo escalón unitario, es posible aproximar la transformada de Laplace como

$$r(s)r(-s) = \frac{1}{-s^2} \cong \frac{1}{(s+\epsilon)(\epsilon-s)}$$

donde  $\epsilon$  es una constante positiva muy pequeña. A partir de esta por lo cual,

$$Z(s) = \frac{1}{s+\epsilon}$$

Usando esta factorización, podemos escribir la ecuación 8.22 como

$$Y \bar{Y} Z \bar{Z} T^* - Z \bar{Z} = X \quad (8.23)$$

dividiendo por  $\bar{Y} \bar{Z}$ ,

$$Y Z T^* - \frac{Z}{\bar{Y}} = \frac{X}{\bar{Y} \bar{Z}}$$

El término  $Z/\bar{Y}$  se puede expandir en fracciones parciales:

$$\frac{Z}{\bar{Y}} = \sum_{\alpha_i \in SPI} \frac{A_i}{s - \alpha_i} + \sum_{\beta_i \in SPD} \frac{B_i}{s - \beta_i}$$

En la ecuación 8.23 separamos los términos con polos o ceros en cada semiplano:

$$Y Z T^* - \sum_{\alpha_i \in SPI} \frac{A_i}{s - \alpha_i} = \frac{X}{\bar{Y} \bar{Z}} + \sum_{\beta_i \in SPD} \frac{B_i}{s - \beta_i}$$

En esta última ecuación, los términos del lado izquierdo solo cuentan con polos y ceros en el semiplano izquierdo y los del lado derecho tienen sus polos y ceros en el semiplano derecho. Por lo tanto tenemos que los dos lados deben ser iguales a una función que sea analítica en todo el plano complejo. La única función con estas características es una función constante. Sin embargo, es posible evaluar que en el límite  $s \rightarrow \infty$  todos los términos convergen a cero. Por lo tanto, el valor de la constante tiene que ser cero.

En consecuencia, la función de transferencia óptima debe satisfacer:

$$T^* = \frac{1}{Y \bar{Z}} \left[ \sum_{\alpha_i \in SPI} \frac{A_i}{s - \alpha_i} \right] \quad (8.24)$$

Para el caso que hemos visto, de entrada tipo escalón, la sumatoria de la ecuación se reduce a un solo término con  $A_i = 1/Y(0)$  y la ecuación queda

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{s}{Y(s)} \frac{1}{s Y(0)} = \frac{1}{Y(0) Y(s)} \\ &= \frac{1}{Y(0)} \frac{n_P(s)}{d_T(s)} \end{aligned} \quad (8.25)$$

## Ejercicios

Dada una planta  $P(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s(s+4)(s+2)(s-0.5)}$  Cuáles de las siguientes son implementables?

1.  $T(s) = 1$
2.  $T(s) = \frac{(s+4)}{s(s^2+2s+1)}$
3.  $\frac{(s-1)(s+4)}{(s-2)(s^2+2s+1)}$
4.  $\frac{(s-1)}{(s+2)(s^2+2s+1)}$

## Capítulo 9

# Sistemas de tiempo discreto

Prácticamente todas las implementaciones actuales de sistemas de control utilizan tecnología digital. Incluso los controladores de proceso (PIDs) que se consiguen comercialmente trabajan en forma digital, internamente; aunque ello sea *transparente* para el usuario.

Esto ha sido posible por los enormes progresos en la tecnología digital, con reducciones de costos **espectaculares**. Eso ha significado que los computadores dedicados a labores de control actualmente representen una parte menor del costo de un sistema de control. Comparados con el costo de la instrumentación y de los actuadores, un computador con capacidad de cálculo de sobra no representa ni 10 % del costo en la mayoría de las aplicaciones.

Recientemente, la mayoría de los PLCs (Controladores Lógicos Programables) con cierta capacidad, incorporan funciones de control *discreto*, con los cuales se pueden implementar controles avanzados sin costo adicional de hardware.

El tema de este capítulo es el análisis de sistemas de tiempo discreto, como preparación para el diseño de controles discretos o digitales del capítulo siguiente.

### 9.1. Estructura de los controladores digitales

El objetivo de diseñar controladores digitales es remplazar los controladores análogos que hemos considerado en forma exclusiva hasta ahora. Sin embargo, debido a las características de operación de los computadores digitales, no es posible efectuar un remplazo en forma exacta. En efecto, un computador digital trabaja en forma secuencial, de manera que cuando se produce una señal a su entrada, se requiere un tiempo finito antes de producir la respuesta correspondiente. Sólo entonces, se puede considerar de nuevo la señal de entrada. Por lo tanto, el proceso trabaja por ciclos durante los cuales el computador adquiere las señales, realiza los cálculos requeridos y envía de nuevo las respuestas.

La otra característica de los procesadores digitales es que trabajan con números, generalmente almacenados en forma de palabras formadas por dígitos binarios. Por lo tanto, para poder comunicar los valores de las señales análogas del sistema controlado se requiere efectuar una *conversión Análogo/Digital* (A/D). Además, una vez calculada la respuesta del controlador, se debe hacer una *conversión Digital/Análoga* que produzca una señal análoga capaz de operar el actuador, a partir de los números con los cuales trabaja el computador. Toda esta operación debe estar sincronizada por medio de un reloj que coordine las diferentes operaciones.

La figura 9.1 ilustra el concepto en forma esquemática. En la práctica, el reloj hace parte del computador y los convertidores A/D y D/A suelen estar en un equipo periférico, encargado de la adquisición de datos.

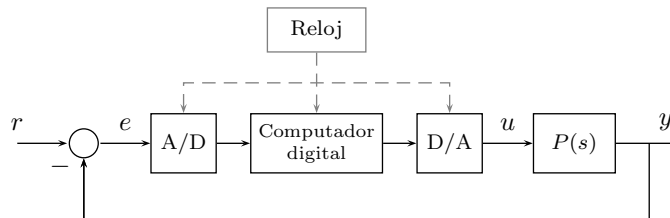


Figura 9.1: Sistema de control digital

Un sistema de control digital tiene unas características deseables comparado con un controlador análogo:

**Costo** La principal razón, desde el punto de vista práctico.

**Repetibilidad y exactitud** Por su diseño, es muy fácil diseñar controladores que siempre produzcan el mismo resultado ante una entrada dada.

**Programabilidad — Flexibilidad** Es posible cambiar completamente un controlador solamente reprogramando el algoritmo, sin modificar el hardware.

**Estabilidad de componentes** Es posible reemplazar cualquier parte del controlador sin correr el riesgo de que su funcionamiento cambie.

**Versatilidad** Es posible utilizar controladores más complejos sin incurrir en costos adicionales ni aumentar la probabilidad de falla del controlador.

## 9.2. Señales de tiempo continuo y discreto

Casi todas las señales que hemos considerado hasta ahora son de tiempo continuo. Ello significa que están definidas sobre un intervalo de números reales.



Generalmente, se definen para todos los valores positivos del tiempo.

$$x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

La característica principal de una señal de tiempo discreto es que tiene valores para todo  $t$ . Ejemplos de señales de tiempo continuo son la posición de una partícula, la corriente en un circuito eléctrico, etc.

### Señales de tiempo discreto

Una señal de tiempo discreto (también llamada, un poco *chambronamente*, señal discreta) sólo tiene valores en instantes discretos de tiempo. Ejemplos de señales discretas son: El índice de inflación, el cual sólo se calcula en forma mensual. También el IPC (índice de precios al consumidor) o el IPP (índice de precios al productor) se evalúan mensualmente. No tiene sentido preocuparse por el índice de inflación el 10 de octubre a las 11 horas, sino únicamente la inflación del mes de octubre.

### 9.3. Muestreo

Como hemos discutido, la principal característica de un procesador digital es su funcionamiento secuencial: Esto significa que trabaja con señales de tiempo discreto. Y ésta es la principal razón para analizar señales de tiempo discreto.

Pero las señales asociadas con los procesos físicos son, generalmente, continuas. Por lo tanto, es necesario hacer una *discretización*. El proceso básico para el control digital, entonces, es el de convertir una señal de tiempo continuo en una señal discreta. Esta operación se conoce como *muestreo*. La figura 9.2 muestra el concepto de muestreo periódico cuando se muestra la variación de nivel de un tanque de almacenamiento durante un período de 24 horas. El nivel del tanque se registra cada dos horas en la bitácora de operación (los pequeños círculos).

El proceso de muestreo de una señal análoga se puede representar en forma simplificada como una operación de suicheo, de la forma que se muestra a continuación en la figura 9.3. Cuando el interruptor se cierra, la salida es igual a la entrada. El tiempo que permanece cerrado el interruptor ( $\tau$ ) debe ser corto comparado con el período ( $T_s$ ), para que la señal sea aproximadamente constante durante ese tiempo y se pueda convertir a un número.

Matemáticamente, la operación de muestreo se puede representar por medio de una multiplicación de la señal por una sucesión de pulsos de corta duración. Si  $x(t)$  es la señal que se va a muestrear, el interruptor se cierra cada  $T_s$  segundos durante un intervalo  $\tau$ . El período  $T_s$  se conoce como *tiempo o período de muestreo*. A la señal muestreada la denominaremos  $x_s(t)$ . Entonces, la señal muestreada se puede generar por medio del producto

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

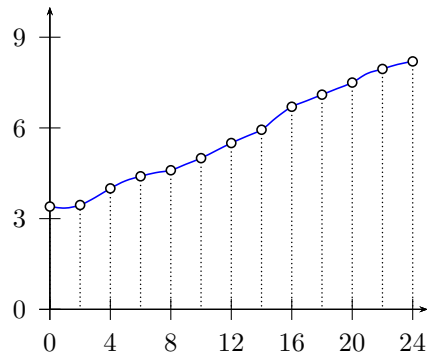


Figura 9.2: Muestreo

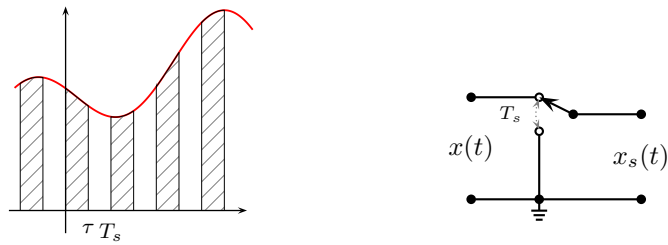


Figura 9.3: Proceso de muestreo

donde  $s(t)$  es una sucesión de pulsos (denominada función de muestreo), como se muestra en la siguiente figura (9.4).

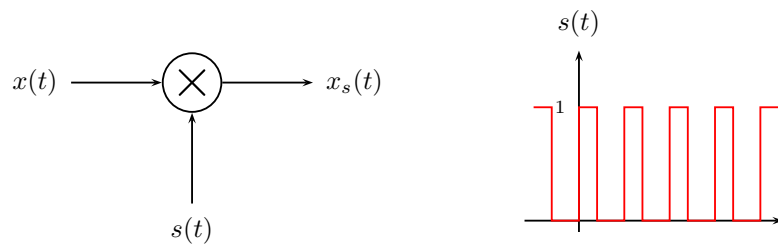


Figura 9.4: Modelo matemático del muestreo

### Muestreo ideal

El muestreo ideal es aquel que se lleva a cabo en forma instantánea. Es decir, con  $\tau \rightarrow 0$ ; sin embargo, en ese caso, la energía de la señal tiende a cero. Para evitar eso, se usan pulsos de amplitud mayor.

Con el fin de mantener una potencia constante, vamos a hacer una idealización y suponer que la señal de muestreo está formada por impulsos, como se puede observar en la figura siguiente (9.5).

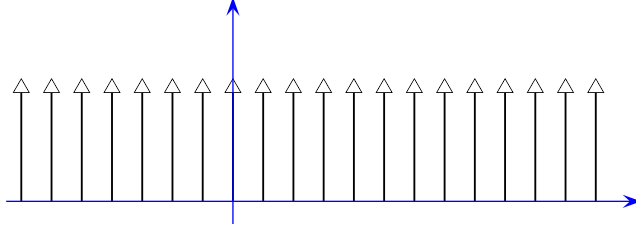


Figura 9.5: Tren de impulsos

La señal de muestreo en el caso ideal, entonces, es

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Si se muestrea la señal continua  $x(t)$  mostrada en la figura 9.6 por medio de un tren de impulsos, entonces la señal muestreada es

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \end{aligned}$$

(puesto que  $x(t) \delta(t - kT_s) = x(kT_s) \delta(t - kT_s)$ ).

Estamos interesados en analizar el espectro de frecuencia de la señal muestreada. Supongamos que la señal original  $x(t)$  tiene un espectro como el de la figura 9.7. Vamos a calcular la transformada de Fourier de  $x_s(t)$ : Para ello consideremos la transformada del tren de impulsos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[s(t)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\delta(t - kT_s)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT_s} \end{aligned}$$

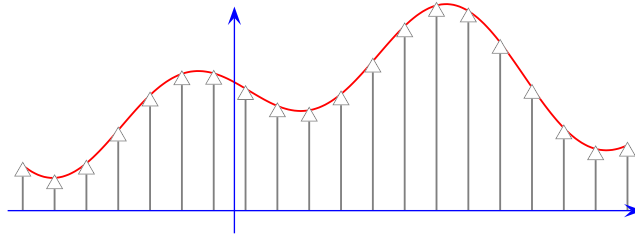


Figura 9.6: Muestreo ideal (con impulsos)

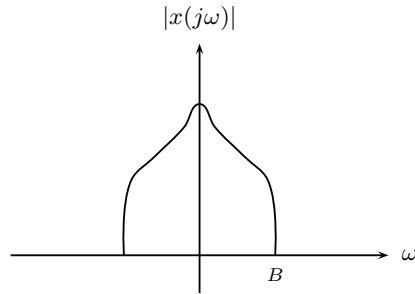


Figura 9.7: Respuesta de frecuencia de señal análoga

Usando la propiedad del producto de funciones, se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x_s(t)] &= \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[s(t)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\omega - \frac{2k\pi}{T_s})\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}X_s(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)\end{aligned}$$

donde  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s$  es la frecuencia (angular) de muestreo. Esta expresión representa una sucesión de copias del espectro de la señal original, desplazadas a la frecuencia central  $k\omega_s$ , como se ilustra en seguida en la figura 9.8.

Si la señal original tiene un ancho de banda limitado, digamos  $B$ , se puede recuperar a partir de la señal muestreada.

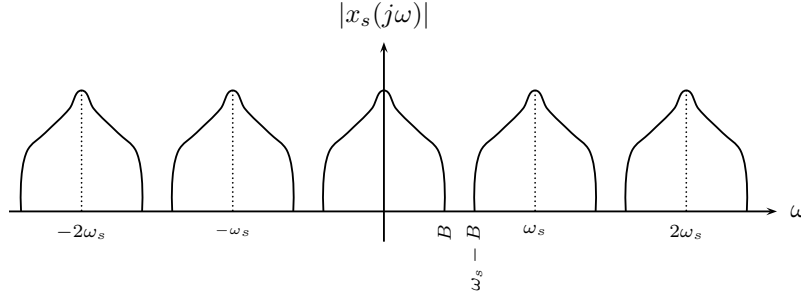


Figura 9.8: Muestreo ideal. Respuesta de frecuencia de señal muestreada.  $\omega_s > 2B$

### ¿Cómo recuperar la señal original?

Un vistazo al espectro de la señal muestreada (figura 9.8) permite notar que es fácil recuperar la señal original mediante un filtro pasa bajos con un ancho de banda ligeramente mayor que  $B$ ! El filtro pasa bajos permite pasar, casi sin distorsión las frecuencias menores que una frecuencia de corte  $\omega_c$  y atenúa considerablemente las señales de frecuencia mayor. Para que esto permita recuperar la señal original, es preciso que los espectros desplazados no se mezclen. Es decir, se requiere,

$$\omega_s - B \geq B.$$

Para ello, es necesario que la frecuencia de muestreo  $\omega_s$  sea mayor o igual que el doble del ancho de banda de la señal original; es decir,

$$\omega_s \geq 2B$$

**Definición 25** (Frecuencia de Nyquist). *La frecuencia mínima de muestreo para la cual no se mezclan las señales ( $\omega_N = 2B$ ) se denomina la frecuencia de Nyquist*

### “Aliasing”

Cuando la frecuencia de muestreo no es suficientemente alta o cuando la señal de entrada no es de banda limitada, no es posible recuperar la señal original debido a que los espectros se mezclan a frecuencias cercanas a  $\omega_s$ . En este caso, algunas componentes de alta frecuencia aparecen a la salida como si fueran de frecuencia menor. Una componente de frecuencia  $\omega_0 > f_s/2$  aparece como si tuviera una frecuencia  $\omega_s - \omega_0$ , la cual es menor que  $\omega_s/2$ .

El fenómeno se puede visualizar como si algunas componentes de alta frecuencia se *hicieran pasar* por otras de menor frecuencia (ver figura 9.9): Han asumido un “alias”. Al fenómeno se le conoce en la literatura como *Aliasing*.

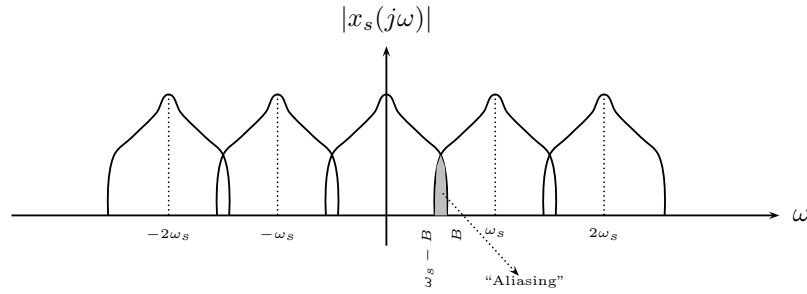


Figura 9.9: El fenómeno de “Aliasing”, cuando  $\omega_s < 2B$

En señales de audio, el fenómeno de “aliasing” se manifiesta como un enronquecimiento de las componentes de alta frecuencia.

Para evitar el aliasing se suele incluir un filtro (análogo), antes del muestreo, cuyo fin limitar el ancho de banda de la señal que entra al muestreador. Este filtro se conoce como *filtro “anti-aliasing”*. Otra opción para evitar el “aliasing” consiste en utilizar una frecuencia de muestreo mayor de la necesaria (“oversampling”).

### Muestreo real

El muestreo por impulsos no es posible en la práctica. Ya hemos considerado el muestreo por medio de pulsos, como se representó en la figura 9.3. ¿Cómo se afecta el proceso de muestreo y la recuperación de la señal original en este caso?

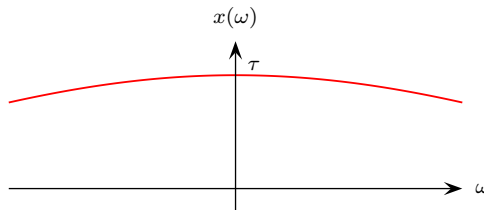


Figura 9.10: Transformada del pulso  $p_\tau(t)$  de corta duración

La transformada de Fourier del pulso tiene la forma mostrada en la figura 9.23 del apéndice (página 251). Cuando la duración de los pulsos es corta, con respecto al período de muestreo, la reducción del espectro es gradual y para frecuencias bajas el espectro es casi constante. Eso significa que a bajas frecuencias se comporta en forma muy similar al impulso. La figura 9.10 presenta el espectro, para bajas frecuencias, de un pulso de corta duración.

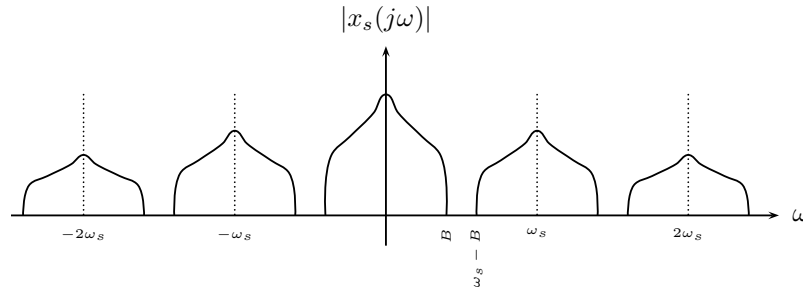


Figura 9.11: Muestreo real. Respuesta de frecuencia de señal muestreada.  $\omega_s > 2B$

Cuando el muestreo se hace con estos pulsos, la transformada de Fourier de la señal muestreada se puede obtener en forma análoga a la del muestreo ideal. La única diferencia consiste en que el espectro, lentamente decreciente, del pulso reemplaza al espectro constante del impulso. El resultado se puede observar en la figura 9.11. Nótese que los resultados anteriores acerca de la frecuencia de muestreo y de la recuperación de la señal original no se ven afectados por el uso de pulsos en vez de impulsos, siempre y cuando los pulsos sean de corta duración.

## 9.4. Conversión análogo-digital

El proceso de conversión de una señal análoga de tiempo continuo a una señal digital que pueda ser manejada por el procesador digital requiere de varias etapas. A continuación se describen en forma breve.

El proceso real de conversión se lleva a cabo en forma iterativa, usando un proceso que se muestra en forma simplificada en la figura 9.12.

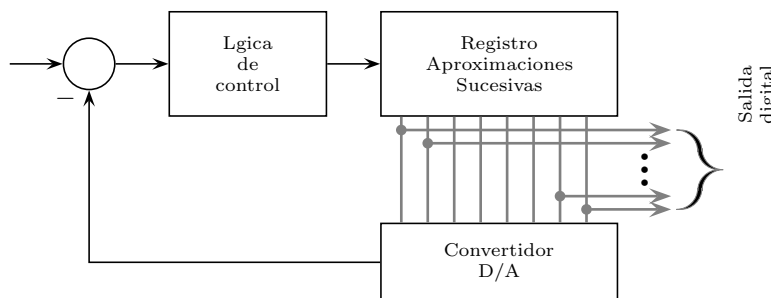


Figura 9.12: Convertidor Análogo/Digital

La conversión Análogo/Digital (A/D) es un proceso de aproximaciones sucesivas, en el cual, se van ajustando los valores de los diferentes bits y se compara el valor obtenido con la señal análoga. Para poder hacer la comparación se necesita un convertidor Digital/Análogo (D/A). Mediante un algoritmo de aproximación, se ajustan los valores digitales hasta cuando se logra un error aceptable.

### Retención (“Hold”)

Puesto que la conversión A/D requiere un proceso de aproximación, no es instantánea sino que requiere un tiempo. Sin embargo, si la señal análoga está variando, puede ser difícil lograr convergencia en la aproximación.

Para evitar ese problema, se utiliza un dispositivo de retención (“hold”) que mantiene un valor aproximadamente constante de la señal muestreada. La combinación del muestreo y retención se conoce en la literatura técnica como “sample and hold (S/H)”. La figura 9.13 muestra el proceso.

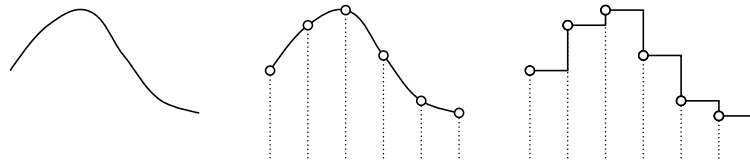


Figura 9.13: Muestreo y retención (“sample and hold”)

La implementación del dispositivo de muestreo y retención utiliza un circuito electrónico que usa dos amplificadores operacionales con un capacitor para mantener el voltaje aproximadamente constante. Un diagrama simplificado está en la figura 9.14

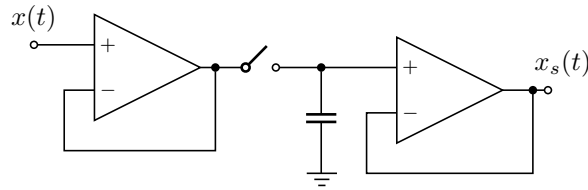


Figura 9.14: Circuito de muestreo y retención (S/H)

### “Cuantización”

La señal muestreada se debe convertir a un número para poder usarla en el computador. Para ello, se debe comparar con un número de posibles valores co-



respondientes a los posibles números que se pueden representar con el número de bits del convertidor. Por ejemplo, si el convertidor es de 3 bits, existen ocho valores diferentes<sup>1</sup>. A este proceso se le conoce como *cuantización*. El convertidor A/D (ADC) compara el valor de la señal con sus niveles predeterminados y escoge el más cercano, tal como se muestra en la figura 9.15.

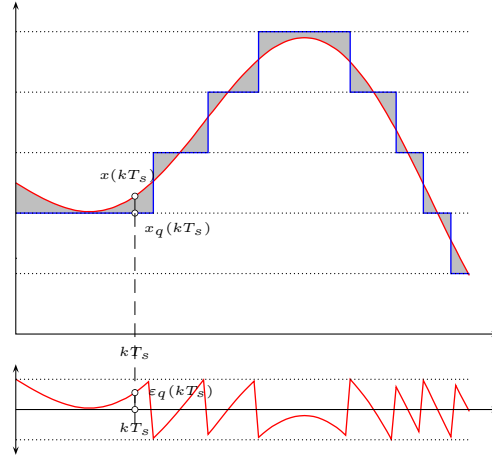


Figura 9.15: Error de cuantificación y ruido de cuantificación

El proceso de cuantización introduce algunos errores puesto que sólo hay un número finito de valores posibles. La señal convertida  $x_q(kT_s)$  se diferencia de la señal original muestreada en  $t = kT_s$ , es decir de  $x(kT_s)$  en un valor dado por

$$x_q(kT_s) = x(kT_s) + \varepsilon_q(kT_s)$$

El valor máximo del error es igual a la mitad de la diferencia entre los niveles. Por lo tanto, a medida que aumenta el número de bits del convertidor A/D, se reduce este error. Con los convertidores actualmente disponibles, los errores de cuantificación son prácticamente despreciables.

## 9.5. Proceso de conversión A/D

El proceso completo de conversión A/D se resume a continuación.

## 9.6. Conversión digital - análoga D/A

Una vez el computador efectúa los cálculos necesarios el resultado se debe convertir a una señal análoga para alimentar el actuador. Para la conversión

<sup>1</sup>Por supuesto, los convertidores actuales usan muchos más bits. Hasta 13 bits son comunes en la actualidad.

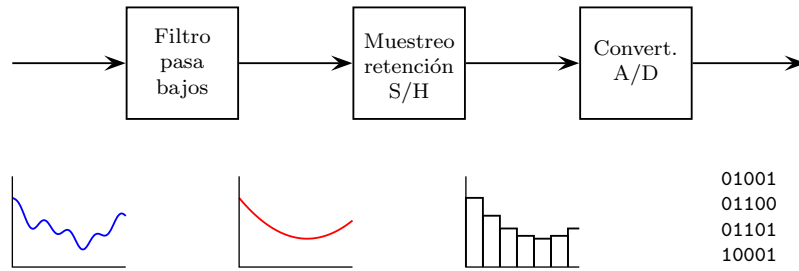


Figura 9.16: Proceso de conversión A/D

D/A se usan varios tipos de convertidores. Los convertidores más utilizados son los tipo fuente de voltaje o fuente de corriente. Los primeros producen una señal de voltaje proporcional al valor del número que se va a convertir. En la figura 9.17 se muestra una implementación simplificada.

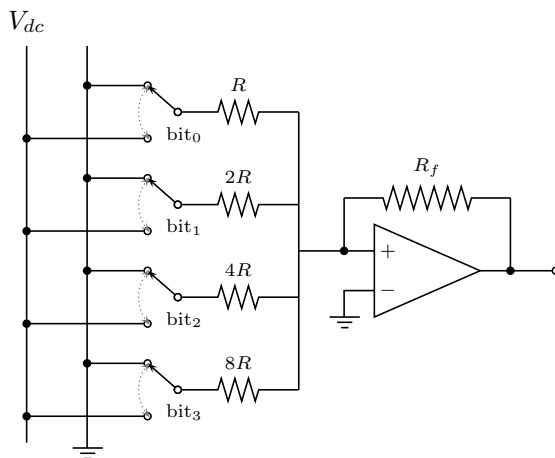


Figura 9.17: Convertidor Digital/Análogo tipo fuente de tensión

El convertidor tipo fuente de corriente, usa una combinación de fuentes de corriente con valores discretos, las cuales sumadas producen el valor deseado, como muestra la figura 9.18.

### 9.7. Retenciones de orden cero y uno

Un convertidor D/A produce un valor análogo en el instante en que se produce la conversión (una señal análoga de tiempo discreto). Pero, para alimentar

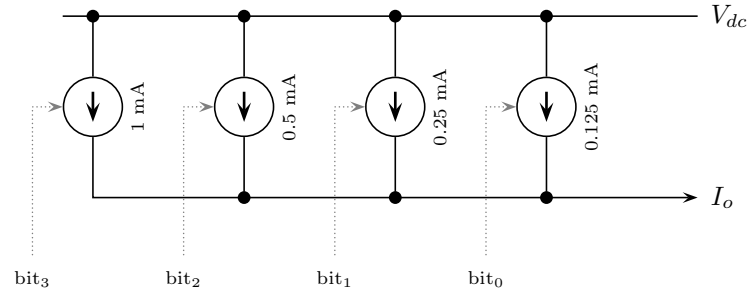


Figura 9.18: Convertidor Digital/Análogo tipo fuente de corriente

a los actuadores, se requiere un dispositivo de retención (“hold”) que mantenga un valor persistente en la salida (una señal de tiempo continuo).

Se utilizan dos tipos de retenciones

1. **Retención de orden cero (zero order hold — ZOH)**, el cual mantiene una señal en un valor constante, igual al último valor de la señal discreta.

$$u_c(t) = u_d(kT_s), \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$$

donde  $u_c(t)$  es la señal, continua, de salida del ZOH y  $u_d(kT_s)$  es la señal discreta de entrada en el instante  $kT_s$ . El ZOH es el más usado.

2. **Retención de orden uno**, el cual produce una señal continua que es una extrapolación lineal de los dos últimos instantes de muestreo.

En la figura 9.19 se presenta el funcionamiento de las retenciones de orden cero y uno.

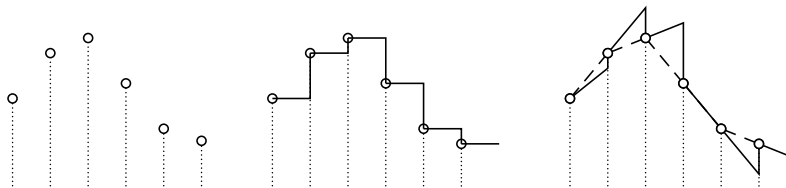


Figura 9.19: Retención de orden cero (ZOH) y de orden uno

El proceso completo de conversión análogo - digital, usando una retención de orden cero (ZOH), se muestra a continuación (ver figura 9.20). En aplicaciones de audio, el filtro pasabajos sirve para reducir el ruido de alta frecuencia. En

la mayoría de las aplicaciones en control, los actuadores y las plantas tienen características de pasa bajos, por lo cual el filtro suele ser innecesario.

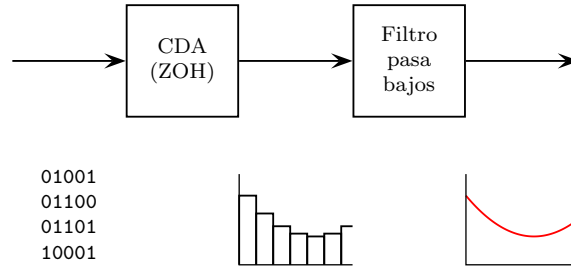


Figura 9.20: Proceso de conversión D/A

## 9.8. Ecuaciones de diferencias

Puesto que las señales de tiempo discreto sólo están definidas en instantes discretos, su dinámica no está descrita por derivadas sino por diferencias. Éstas permiten describir los cambios de la variable de un instante al siguiente. El modelo matemático apropiado para describir el comportamiento de un sistema de tiempo discreto es una ecuación de diferencias, en contraste con las ecuaciones diferenciales que modelan un sistema continuo.

Un ejemplo de una ecuación de diferencias es el siguiente:

$$\begin{aligned} y[(k+2)T_s] + 3y[(k+1)T_s] + 4y[kT_s] \\ = -0.5u[(k+1)T_s] + u[kT_s] \end{aligned}$$

En este capítulo vamos a suponer que el tiempo de muestreo es constante. Por esa razón, de ahora en adelante, vamos a eliminar a  $T_s$  de la ecuación y la dejaremos en la forma

$$\begin{aligned} y(k+2) + 3y(k+1) + 4y(k) \\ = -0.5u(k+1) + u(k) \end{aligned}$$

Se define el orden de la ecuación de diferencias como el máximo valor de la diferencia  $m$ , en el tiempo, de los términos  $y(k+m)$  que están incluidos en ella. Por ejemplo, la ecuación anterior tiene orden dos.

### Solución de las ecuaciones de diferencias

Las ecuaciones de diferencias son muy sencillas de resolver, en contraste con las ecuaciones diferenciales. Todo lo que se requiere es sustituir los valores anteriores y despejar el término de orden mayor.

En la ecuación anterior, es posible calcular el valor de  $y(k+2)$ ,

$$y(k+2) = -3y(k+1) - 4y(k) - 0.5u(k+1) + u(k)$$

De modo que, por ejemplo, se puede calcular  $y(1)$ , si se usa  $k = -1$ ,

$$y(1) = -3y(0) - 4y(-1) - 0.5u(0) + u(-1)$$

De modo que para poder hallar un valor de  $y$  se requieren dos valores anteriores de  $y$  y de  $u$ . Por lo tanto, la ecuación, de orden dos, necesita dos valores “iniciales”.

Se puede demostrar fácilmente que una ecuación de orden  $n$  requiere  $n$  valores iniciales especificados para poder resolverla.

**Ejemplo 9.1.** Para la ecuación,

$$y(k+2) = -3y(k+1) - 4y(k) - 0.5u(k+1) + u(kT_s)$$

sean las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(-1) &= 0 \end{aligned}$$

Y sea la entrada una señal constante; es decir,

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, la solución se halla en forma recursiva como

$$\begin{aligned} y(1) &= -3y(0) - 4y(-1) - 0.5u(0) + u(-1) \\ &= -3.5 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} y(2) &= -3y(1) - 4y(0) - 0.5u(1) + u(0) \\ &= -14 \end{aligned}$$

Etc.

Sin embargo, generalmente, queremos una forma general que permita calcular cualquier término. Para ello usaremos la transformada  $z$ .

### 9.9. Ecuación característica de ecuaciones de diferencias

Cuando se analizan las respuestas del sistema discreto, representado por una ecuación de diferencias, se observa que las funciones del tipo

$$a^k$$

tienen un papel similar a la función exponencial de los sistemas continuos: Los matemáticos dirían que las funciones de la forma  $a^k$  sirven como *base* para el espacio de soluciones de la ecuación de diferencias.

Esta observación sugiere una forma de analizar la respuesta natural de un sistema descrito por la ecuación de diferencias: Consiste en suponer una solución *tentativa* de la forma

$$y(k) = \lambda^k$$

Cuando se reemplaza esta solución en la ecuación homogénea

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_0 y(k) = 0$$

y usando las propiedades de  $y$ , es decir,

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \lambda^{k+1} \\ &= \lambda \lambda^k \\ &= \lambda y(k) \end{aligned}$$

y, en general,

$$y(k+n) = \lambda^n y(k)$$

La ecuación de diferencias queda

$$\lambda^n y(k) + a_{n-1} \lambda^{n-1} y(k) + \cdots + a_0 y(k) = 0$$

Factorizando,

$$(\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0) y(k) = 0$$

Para que esta ecuación sea válida existen dos posibilidades:  $y(k) \equiv 0$  ó

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

A esta última ecuación se le conoce como *ecuación característica*. Nótese la similitud con el caso de ecuaciones diferenciales.

Entonces, para que haya soluciones no nulas de la ecuación homogénea, éstas deben ser de la forma

$$y(k) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k$$

donde los  $\lambda_i$ 's son raíces de la ecuación característica. Un poco más adelante, veremos que estas *raíces características* determinan la estabilidad de las respuestas del sistema discreto.

### 9.10. Transformada $z$

Existe una técnica análoga a la de transformada de Laplace que se puede aplicar a las ecuaciones de diferencias. Se conoce como transformada  $z$ .

La transformada  $z$  fue creada por De Moivre como la *función generadora* de una distribución de probabilidad (en 1730!). Su aplicación a las ecuaciones de diferencias se hizo desde comienzos del siglo pasado.

**Definición 26** (Transformada  $z$ ). *Dada una sucesión*

$$\{x(n)\}_{n=0}^{\infty} = \{x(0), x(1), x(2), \dots\}$$

*se define su transformada  $z$  en la forma*

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(k)] := \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

**Ejemplo 9.2.** *Consideremos la sucesión*

$$x(k) = \lambda^k$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A partir de la definición,

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^k \end{aligned}$$

La última es una serie geométrica con razón  $(\lambda z^{-1})$ . La serie converge si su razón satisface  $|\lambda z^{-1}| < 1$ . En ese caso, su suma se conoce:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^k &= \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - \lambda} \end{aligned}$$

La cual es válida para  $z > \lambda$ .

Un caso especial ocurre cuando  $\lambda = e^{aT_s}$ , el cual aparece cuando se muestrea una señal exponencial con un período de muestreo  $T_s$ . En este caso,

$$\mathcal{Z}[e^{akT_s}] = \frac{z}{z - e^{aT_s}}$$

**Ejemplo 9.3.** Sea la función escalón unitario discreto,

$$u_0(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

La transformada  $z$  se puede obtener notando que éste es un caso especial del ejemplo 2 (con  $\lambda = 1$ ). La transformada del escalón unitario es, entonces,

$$\mathcal{Z}[u_0(k)] = \frac{z}{z-1}$$

**Ejemplo 9.4.** La función

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

se conoce como delta de Kronecker y representa, en el caso discreto, el papel de la delta de Dirac de los sistemas continuos.

La transformada se calcula directamente a partir de la definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\delta(k)] &= \delta(0) + \delta(1)z^{-1} + \delta(2)z^{-2} + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

### 9.11. Propiedades de la transformada $z$

La transformada  $z$  tiene las siguientes propiedades:

1. **Linealidad:** Si  $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$  y  $Y(z) = \mathcal{Z}[y(k)]$ , entonces dados dos números reales  $a$  y  $b$ ,

$$\mathcal{Z}[ax(k) + by(k)] = aX(z) + bY(z)$$

Esta propiedad se demuestra fácilmente a partir de la definición.

2. **Adelanto en el tiempo:** Sea  $x(k)$  una señal discreta. Su transformada  $z$  es

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] := \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

Definamos una señal (adelantada)

$$y(k) = x(k+1)$$

Entonces, la transformada  $z$  está dada por

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x(i)z^{-i+1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
Y(z) &= z \sum_{i=1}^{\infty} x(i) z^{-i} \\
&= z \left[ \sum_{i=1}^{\infty} x(i) z^{-i} + x(0) - x(0) \right] \\
&= z [x(z) - x(0)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$$

esta propiedad va a ser fundamental para resolver ecuaciones de diferencias.

La expresión anterior se puede generalizar al caso de adelantos de orden mayor:

$$\mathcal{Z}[x(k+2)] = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(-1)$$

etc.

### 3. Retardo en el tiempo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x(k-1)] &= z^{-1}X(z) + x(-1) \\
\mathcal{Z}[x(k-2)] &= z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)
\end{aligned}$$

Etc.

### 4. Teorema de valor inicial:

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Entonces,  $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

### 5. Teorema de valor final: Si $(1 - z^{-1})X(z)$ no tiene polos en o fuera del círculo unitario, entonces,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

## 9.12. Transformada $z$ de señales muestreadas

Un caso muy frecuente de señal discreta ocurre cuando se muestrea una señal continua. Por ejemplo, si se muestrea  $x(t)$  con un período  $T_s$ , la señal discreta obtenida de las muestras es

$$x_s(k) = x(kT_s)$$

En este caso, es posible relacionar la transformada de Laplace de la señal continua directamente con la transformada  $z$  de la señal muestreada.

Por ejemplo, si se muestrea la señal

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

cuya transformada de Laplace es

$$X(s) = \frac{1}{s - \lambda}$$

La señal muestreada, con período  $T_s$ , fijo, es

$$x(k) = e^{\lambda k T_s}$$

cuya transformada  $z$  es

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{\lambda T_s}}$$

por lo tanto, se puede hacer una asociación directa entre las tres funciones

$$\frac{1}{s - \lambda} \Leftrightarrow e^{\lambda t} \Leftrightarrow e^{\lambda k T_s} \Leftrightarrow \frac{z}{z - e^{\lambda T_s}}$$

### 9.13. Inversión de la transformada $z$

Para poder usar la transformada  $z$  en la solución de ecuaciones de diferencias, necesitamos hallar la transformada inversa. Existen tres formas básicas para hallar la transformada inversa:

1. **División directa:** Usando la definición de la transformada,

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Vamos a tratar de obtener una expansión de  $X(z)$  en potencias de  $z^{-1}$ . Para ello, efectuamos la división en la expresión de  $X(z)$ . Los coeficientes de la expansión son los términos de la sucesión  $x(k)$ , de acuerdo con la expresión anterior.

2. **Fracciones parciales:** Observando la tabla de transformadas se nota que casi todas tienen una  $z$  en el numerador. Entonces, queremos que las expresiones que obtengamos tengan esa forma. Para ello, hacemos una expansión en fracciones parciales de  $X(z)/z$ .

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_n}{z - p_n}$$

Una vez obtenidas las fracciones parciales, se multiplican los dos lados por  $z$

$$X(z) = A_0 + \frac{A_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{A_n z}{z - p_n}$$

La transformada inversa se puede obtener, entonces, como

$$x(k) = A_0 \delta(k) + A_1 (p_1)^k + \dots + A_n (p_n)^k$$

3. **Integral de contorno:** La transformada inversa se puede calcular como

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

donde el contorno de integración  $\Gamma$  incluye a todas las singularidades de  $X(z)$ .

**Ejemplo 9.5.** Hallar la transformada inversa de

$$X(z) = \frac{z+1}{z^2 - 1.5z - 1} = \frac{z+1}{(z-2)(z+0.5)}$$

1. **División directa:**

$$X(z) = z^{-1} + 2.5z^{-2} + 4.75z^{-3} + 9.625z^{-4} \dots$$

Entonces,

$$x = \{0, 1, 2.5, 4.75, 9.625, \dots\}$$

2. **Fracciones parciales:** En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{z+1}{z(z^2 - 1.5z - 1)} \\ &= \frac{z+1}{z(z-2)(z+0.5)} \end{aligned}$$

Ahora efectuamos la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{z} + \frac{0.4}{z+0.5} + \frac{0.6}{z-2}$$

Entonces,

$$X(z) = -1 + \frac{0.4z}{z+0.5} + \frac{0.6z}{z-2}$$

La transformada inversa se encuentra, consultando la tabla, como

$$x(k) = -\delta(k) + 0.4(-0.5)^k + 0.6(2)^k$$

## 9.14. Solución de ecuaciones de diferencias

La transformada  $z$  se puede emplear para resolver ecuaciones lineales de diferencias.

Consideremos la siguiente ecuación de diferencias

$$y(k+2) - 2.5y(k+1) + y(k) = u(k+1) + 3u(k)$$

con condiciones iniciales,  $y(0) = 1$ ;  $y(1) = 1$ ; y sea  $u(k) = u_0(k)$  (un escalón unitario).

Aplicando la transformada  $z$ , y usando las propiedades de traslación,

$$\begin{aligned} [z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1)] - 2.5 [z Y(z) - z y(0)] + Y(z) \\ = z U(z) - z u(0) + 3 U(z) \end{aligned}$$

Lo cual da

$$[z^2 - 2.5z + 1] Y(z) = [z + 3] U(z) + z^2 - 2.5z$$

Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 2.5z + 1} U(z) + \frac{z^2 - 2.5z}{z^2 - 2.5z + 1}$$

En la expresión anterior, se nota que la solución de la ecuación de diferencias está compuesta de dos partes: Una, que se puede llamar *respuesta forzada*, dependiente de la señal de entrada  $u$  y otra, llamada *respuesta natural*, que solamente depende de las condiciones iniciales. Esta propiedad, similar a la que tienen los sistemas de tiempo continuo, en realidad sólo depende de la naturaleza lineal del problema.

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z + 3}{z^2 - 2.5z + 1} \left[ \frac{z}{z - 1} \right]}_{\text{Respuesta forzada}} + \underbrace{\frac{z^2 - 2.5z}{z^2 - 2.5z + 1}}_{\text{Respuesta natural}}$$

Combinando las expresiones,

$$Y(z) = \frac{z(z^2 - 2.5z + 5.5)}{(z - 2)(z - 1)(z - .5)}$$

Y dividiendo por  $z$  y haciendo una descomposición en fracciones parciales,

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{(z^2 - 2.5z + 5.5)}{(z - 2)(z - 1)(z - .5)} \\ &= \frac{6}{z - .5} - \frac{8}{z - 1} + \frac{3}{z - 2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y(z) = -\frac{8z}{z - 1} + \frac{6z}{z - .5} + \frac{3z}{z - 2}$$

Entonces,

$$y(k) = -8 + 6(0.5)^k + 3(2)^k$$

### 9.15. Funciones de transferencia discretas

Por analogía con el caso de sistemas continuos, vamos a definir una función de transferencia para un sistema descrito por ecuaciones de diferencias.

Sea la ecuación de diferencias

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0y(k) \\ = b_nu(k+n) + \cdots + b_0u(k) \end{aligned}$$

con condiciones iniciales iguales a cero, es decir,

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \\ &\vdots \\ y(n-1) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando transformada  $z$  a la ecuación,

$$\begin{aligned} z^nY(z) + a_1z^{n-1}Y(z) + \cdots + a_0Y(z) \\ = b_nz^nU(z) + \cdots + b_0U(z) \end{aligned}$$

o

$$(z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_0)Y(z) = (b_nz^n + \cdots + b_0)U(z)$$

despejando la  $Y$ ,

$$Y(z) = \frac{b_nz^n + \cdots + b_0}{z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_0}U(z)$$

Entonces,

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

donde

$$G(z) = \frac{b_nz^n + \cdots + b_0}{z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Se denomina *función de transferencia discreta*.

Debe notarse que el denominador de la función de transferencia es el polinomio característico. Por lo tanto, igual que en el caso continuo, las raíces de la ecuación característica son polos de la función de transferencia.

**Ejemplo 9.6.** Para la ecuación de diferencias resuelta anteriormente, es decir,

$$y(k+2) - 2.5y(k+1) + y(k) = u(k+1) + 3u(k)$$

$z$ -transformamos:

$$z^2Y(z) - 2.5zY(z) + Y(z) = zU(z) + 3U(z)$$

Y la función de transferencia se encuentra:

$$G(z) = \frac{z+3}{z^2-2.5z+1}$$

Se puede ver, con facilidad, que las funciones de transferencia discretas tienen las mismas propiedades que las funciones de transferencia de sistemas continuos. Esto se debe a la linealidad de las ecuaciones. Por lo tanto, toda el álgebra de bloques desarrollada para sistemas continuos sirve, sin modificación, para los sistemas discretos.

### 9.16. Variables de estado discretas

Hemos visto que casi todos los conceptos de funciones de transferencia se pueden extender al caso discreto. También es posible definir ecuaciones de estado para sistemas discretos, e incluso, podemos hallar relaciones entre funciones de transferencia y ecuaciones de estado.

Una modelo de variables estado discretas es un sistema de ecuaciones de diferencias de la forma:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

(*ecuación de estado*), junto con una *ecuación de salida*,

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

En las ecuaciones anteriores,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , como en el caso continuo.

La solución de las ecuaciones de estado discretas es mucho más fácil que las de los sistemas continuos: Para ello, basta sustituir los valores anteriores en la ecuación de estado para hallar los nuevos valores.

Supongamos que las condiciones iniciales son

$$x(0) = x_0$$

Entonces, es posible calcular  $x(1)$ , usando la ecuación de estado,

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\ &= Ax_0 + Bu(0) \end{aligned}$$

En la misma forma,

$$\begin{aligned} x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\ &= A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1) \end{aligned}$$

y

$$x(3) = A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

Lo cual se puede generalizar para hallar,

$$x(k) = A^kx_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j}Bu(j)$$

Una vez determinadas las variables de estado, se puede hallar la salida:

$$y(k) = \underbrace{CA^k x_0}_{\text{Respuesta de entrada cero}} + \underbrace{C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j} Bu(j) + Du(k)}_{\text{Respuesta de estado cero}}$$

Al igual que en el caso de la ecuación de diferencias, la respuesta está compuesta de dos partes: Una que depende únicamente del estado inicial y ocurre aunque la entrada sea cero (*la respuesta de entrada cero* o respuesta natural) y otra componente que ocurre aunque el estado inicial sea cero, sólo depende de la entrada externa (*la respuesta de estado cero* o respuesta forzada).

### Relación ecuación de estado - función de transferencia

A partir de la ecuación de estado es posible hallar la función de transferencia de un sistema cuyas condiciones iniciales sean cero.

A partir de

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

y  $z$ -transformando, con  $x(0) = 0$ ,

$$zX(z) = AX(z) + BU(z)$$

entonces,

$$(zI - A)X(z) = BU(z)$$

y

$$X(z) = (zI - A)^{-1} BU(z)$$

Remplazando en la ecuación de salida,

$$Y(z) = \left[ C(zI - A)^{-1} B + D \right] U(z)$$

Comparando con la definición de la función de transferencia,

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

se encuentra,

$$G(z) = \left[ C(zI - A)^{-1} B + D \right]$$

Expresión que es, básicamente, idéntica a la obtenida para los sistemas continuos.

Usando el mismo razonamiento empleado para los sistemas continuos, se ve que los únicos términos que aparecen en el denominador de esta función son los correspondientes a  $\det(zI - A)$  cuando se calcula la inversa. Por lo tanto, los polos de  $G(z)$  son las raíces de la ecuación  $\det(zI - A) = 0$ .

Entonces, la ecuación característica es

$$\det(zI - A) = 0$$

La cual es un polinomio en  $z$ , de grado  $n$ . Esto prueba que los polos del sistema discreto son los valores propios de la matriz  $A$ , como en el caso continuo.

### Realización de funciones de transferencia

Una función de transferencia discreta se puede implementar, mediante variables de estado, en forma similar al procedimiento usado para sistemas continuos. Esto se ilustra a continuación con un ejemplo.

Consideremos la función de transferencia,

$$P(z) = \frac{z^2 + z + 3}{z^2 - 2.5z + 1}$$

Efectuando la división,

$$\begin{aligned} y(z) &= \left(1 + \frac{3.5z + 2}{z^2 - 2.5z + 1}\right) u(z) \\ &= u(z) + \left(\frac{3.5z + 2}{z^2 - 2.5z + 1}\right) u(z) \end{aligned}$$

Definiendo

$$w(z) = y(z) - u(z)$$

se halla

$$(z^2 - 2.5z + 1)w(z) = (3.5z + 2)u(z)$$

agrupando términos,

$$z^2w(z) = (2.5w(z) + 3.5u(z))z + (-w(z) + 2u(z))$$

$$\begin{aligned} w(z) &= (2.5w(z) + 3.5u(z))z^{-1} + (-w(z) + 2u(z))z^{-2} \\ &= \frac{1}{z} \left[ 2.5w(z) + 3.5u(z) + \frac{1}{z}(-w(z) + 2u(z)) \right] \end{aligned}$$

$$w(z) = \frac{1}{z} \left[ \underbrace{2.5w(z) + 3.5u(z)}_{x_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{z}(-w(z) + 2u(z))}_{x_2(z)} \right] \quad (9.1)$$

Definiendo variables de estado como se muestra en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= -w(k) + 2u(k) \\ &= -x_1(k) + 2u(k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= 2.5w(k) + 3.5u(k) + x_2(k) \\
 &= 2.5x_1(k) + 3.5u(k) + x_2(k)
 \end{aligned}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= 2.5x_1(k) + x_2(k) + 3.5u(k) \\
 x_2(k+1) &= -x_1(k) + 2u(k)
 \end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + u(k)$$

Este sistema se puede simular, usando el bloque básico de retardo en el tiempo,  $z^{-1}$ , como se muestra en la siguiente figura (fig. 9.21). En forma análoga a los sistemas continuos, se escogen como variables de estado las salidas de los retardos de manera que los valores siguientes ( $x_j(k+1)$ ) son, precisamente, las entradas de los bloques de retardo; la salida correspondiente es la variable de estado ( $x_j(k)$ ).

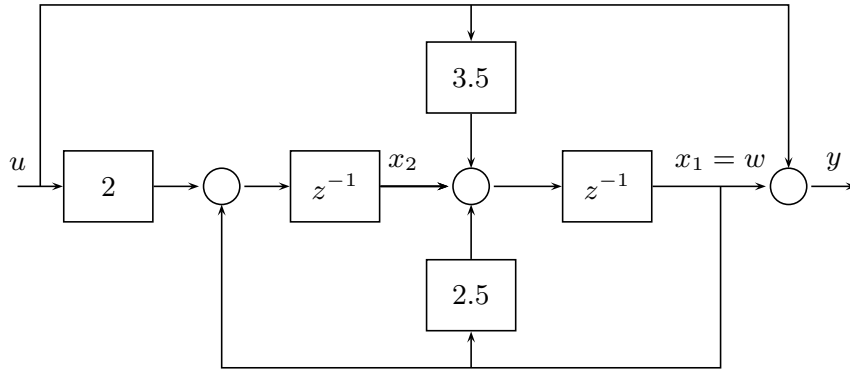


Figura 9.21: Realización de sistema discreto

En la práctica, esta realización se obtiene usando Julia, a partir de la matriz de transferencia.

### Sistemas discretos en Julia

La descripción de sistemas discretos en Julia se basa en los mismos objetos que se utilizan para los sistemas continuos. Se pueden definir modelos de variables de estado, funciones de transferencia o polos y ceros.

Para definir una función de transferencia como

$$G(z) = \frac{z^2 + z + 3}{z^2 - 2.5z + 1}$$

en Julia, se define, en primer lugar el tiempo de muestreo y después se usa un comando `tf`, como en el caso continuo:

---

```

1 Ts=0.1;           % El tiempo de muestreo
2 num=[1 1 3];      % Polinomio del numerador
3 den=[1 -2.5 1];   % Polinomio del denominador
4 P=tf(num,den,Ts)   % Función de transferencia discreta, con
    ↪ período T

```

---

En realidad todos los demás comandos de definición se usan en la misma forma que los del caso continuo, agregándole el tiempo de muestreo.

Por ejemplo, un modelo de variables de estado se puede describir mediante,

---

```

1 Ts=0.1;
2 A=[2.5 1;-1 0];
3 B=[3.5;2];
4 C=[1 0];
5 D=1;
6 Modest=ss(A,B,C,D,Ts)

```

---

Muchos de los comandos usados para analizar sistemas continuos se pueden emplear para sistemas discretos, sin ninguna modificación.

Por ejemplo, para simular la respuesta al escalón del sistema discreto anterior, se usa,

---

```

1 step(Modest)

```

---

### 9.17. Estabilidad de sistemas discretos

La respuesta de cualquier sistema dinámico debe ser acotada si va a funcionar durante un tiempo razonable. Vamos a hallar condiciones que garanticen la operación estable de un sistema discreto

Si los valores propios de  $A$  son  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  (no repetidos), la solución de estado cero de las ecuaciones de estado se puede obtener como

$$x(k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k c_i$$

donde los vectores  $c_i$  se calculan a partir de las condiciones iniciales.

¿Qué se necesita para que esta respuesta sea acotada?

La última ecuación, indica que la respuesta es acotada si

$$|\lambda_i| < 1$$

Y se puede demostrar que esta condición sigue siendo válida cuando se considera la respuesta ante una entrada externa, acotada.

Entonces, en el caso discreto, la condición para la estabilidad es que los polos del sistema tengan módulo menor que uno. Es decir, *que estén dentro del círculo unitario*.

## 9.18. Relación polos - respuesta transitoria

La posición de los polos, con respecto al círculo unitario, determina la respuesta de un sistema, además de su estabilidad. La relación se ilustra en la figura 9.22. Por simplicidad, se asocia la respuesta con uno sólo de cada par de polos, en el caso complejo. Por supuesto, es el par complejo el que determina la respuesta.

## Fundamentos matemáticos

### Transformada de Fourier

Dada una señal de tiempo continuo,  $x(t)$  se define su transformada de Fourier como:

$$x(\omega) := \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

**Ejemplo 9.7.** La transformada de Fourier de un pulso, definido por:

$$p_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } |t| \leq \tau \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Se puede calcular, usando la definición, como:

$$\begin{aligned} p_{\tau}(\omega) &= \mathcal{F}[p_{\tau}(t)] = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

Es ilustrativo ver la transformada en forma gráfica:

Cuando  $\tau$  es pequeño, la transformada se aproxima a una constante.

**Ejemplo 9.8.** Para hallar la transformada de Fourier de la función impulso, usamos la definición y las propiedades del impulso:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

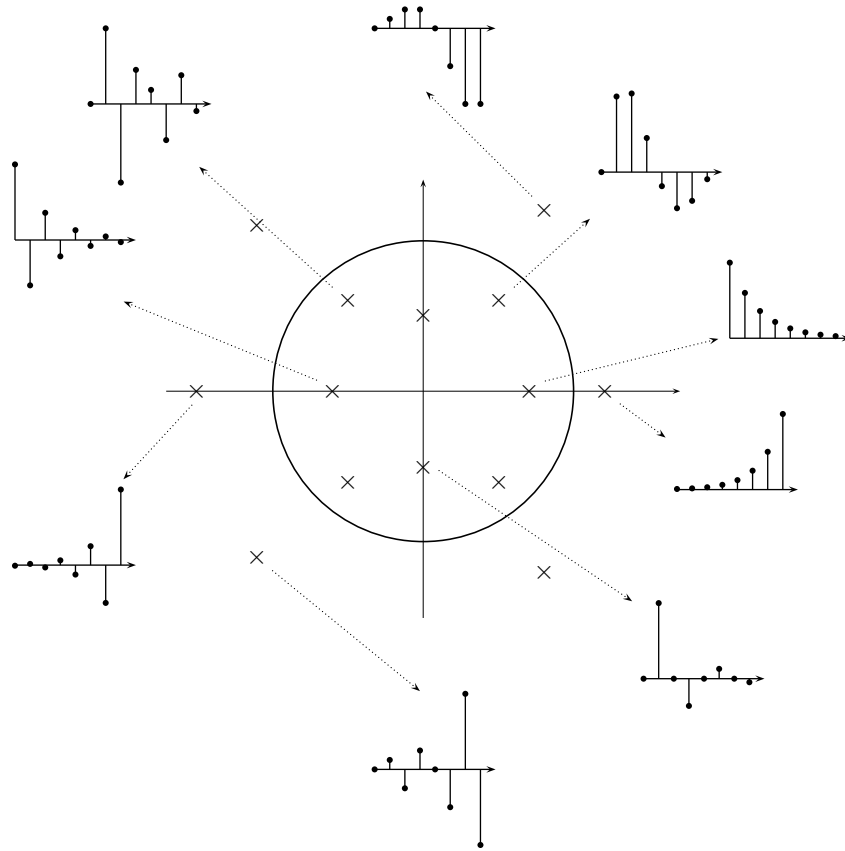


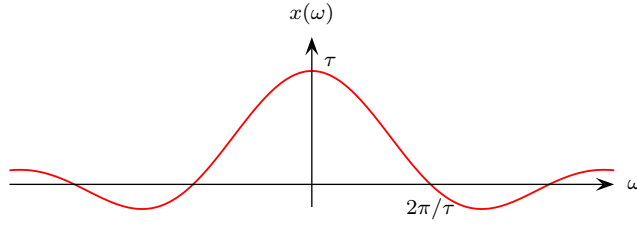
Figura 9.22: Relación entre respuesta y localización de los polos.

el cual es un resultado muy usado.

Para nuestros propósitos, las propiedades más importantes de la transformada de Fourier son

1. **(Unicidad de la transformada)** La transformada de una función es única: Eso significa que hay una relación uno a uno (*una biyección o isomorfismo*) de las transformadas con las funciones.
2. **(Producto de funciones)** La transformada de un producto de funciones es igual a la convolución de las transformadas.

$$\mathcal{F}[v(t)x(t)] = V(\omega) * X(\omega)$$

Figura 9.23: Transformada del pulso  $p_\tau(t)$ 

## 3. (Retardo en tiempo)

$$\mathcal{F}[x(t - \theta)] = X(\omega)e^{-j\omega\theta}$$

## 4. (Modulación)

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(\omega_c t + \theta)] = \frac{e^{j\theta}}{2} X(\omega - \omega_c) + \frac{e^{-j\theta}}{2} X(\omega + \omega_c)$$

La transformada de la función impulso es

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

9.19. Tabla de transformadas  $z$ 

Transformadas $z$ y transformadas de Laplace			
$\bar{F}(s)$	$f(t)$	$f(kT_s)$	$F(z)$
1	$\delta(t)$	—	—
$e^{-T_s s}$	$\delta(t - T_s)$	—	—
—	—	$\delta(kT_s)$	1
—	—	$\delta((k - n)T_s)$	$z^{-n}$
$\frac{1}{s}$	1	1	$\frac{z}{z - 1}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT_s$	$\frac{T_s z}{(z - 1)^2}$
$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT_s}$	$\frac{z}{z - e^{-aT_s}}$
$\frac{1}{(s + a)^2}$	$te^{-at}$	$kT_s e^{-akT_s}$	$\frac{T_s z e^{-aT_s}}{(z - e^{-aT_s})^2}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT_s$	$\frac{z \sin \omega T_s}{z^2 - 2z \cos \omega T_s + 1}$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT_s$	$\frac{z(z - \cos \omega T_s)}{z^2 - 2z \cos \omega T_s + 1}$
$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT_s} \sin \omega kT_s$	$\frac{ze^{-aT_s} \sin \omega T_s}{z^2 - 2ze^{-aT_s} \cos \omega T_s + e^{-2aT_s}}$
$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT_s} \cos \omega kT_s$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_s} \cos \omega T_s}{z^2 - 2ze^{-aT_s} \cos \omega T_s + e^{-2aT_s}}$

## Capítulo 10

# Controladores discretos

En este capítulo estudiaremos la forma de controlar sistemas continuos mediante controladores discretos.

Para diseñar controladores discretos existen dos metodologías básicas:

1. **Traducción de diseños análogos:** Se diseña un controlador análogo, usando las técnicas descritas en capítulos anteriores y se calcula un controlador discreto “equivalente”.
2. **Diseño digital directo:** Se utiliza un modelo digital de la planta y se diseña un controlador digital. Para este diseño se usan metodologías similares a las empleadas para el diseño análogo. Por ejemplo, es posible usar asignación de polos o el lugar geométrico para efectuar este diseño.

Un aspecto fundamental del diseño discreto es la selección de  $T_s$  (el período de muestreo). En la última parte del capítulo analizaremos este problema y presentaremos algunos criterios para la selección de este valor.

### 10.1. Especificaciones para sistemas discretos

Para diseñar sistemas de control, es necesario poder definir las condiciones que debe satisfacer el sistema para poder implementarlo.

En forma similar a los sistemas continuos, vamos a requerir que las funciones de transferencia sean propias. Si no lo fueran, se presentaría una situación imposible de crear físicamente en tiempo real. En efecto: Supongamos una función de transferencia impropia, de la forma

$$G = \frac{z^2 - 1}{z + 0.25}$$

Lo cual representa una ecuación de diferencias

$$y(k+1) + 0.25y(k) = u(k+2) - u(k)$$

la cual se puede escribir,

$$y(k) = -0.25y(k-1) + u(k+1) - u(k-1)$$

en la cual, la respuesta en el instante actual  $k$ , se ve influenciada por valores *futuros* ( $k+1$ ) de la entrada. Es decir, que se trata de un sistema anticipativo o no causal, imposible de construir en tiempo real. Un sistema de este tipo si se puede construir para el procesamiento de señales cuando se puede esperar un tiempo para producir la señal o cuando ya se conoce cuáles serán los valores futuros de la entrada  $u(t)$ ; por ejemplo, si dichos valores están almacenados. Pero en sistemas de control esto no es factible.

Por lo tanto, en sistemas de control, todas las funciones de transferencia deben ser propias.

### Respuesta estática

Ya hemos visto que una de las características más importantes de un sistema dinámico, desde el punto de vista del control es su respuesta estacionaria ante señales estándar. Las señales utilizadas para prueba son, generalmente, escalones, rampas y sinusoides de diferentes frecuencias.

### Respuesta al escalón

La respuesta estacionaria de un sistema descrito por una función de transferencia discreta

$$P(z)$$

ante un escalón, se obtiene a partir del teorema de valor final. Usando,

$$u(k) = u_0(k)$$

cuya transformada  $z$  es

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

Entonces,

$$y(z) = P(z) \frac{z}{z-1}$$

y el valor final es

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) P(z) \frac{z}{z-1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) P(z) \frac{z}{z-1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z}\right) P(z) \frac{z}{z-1} \\ &= P(1) \end{aligned}$$

Entonces, el valor estacionario está dado por la función de transferencia evaluada en  $z = 1$ . Este valor es la ganancia d.c. de un sistema discreto y se puede evaluar con la función `dcgain(P)` [1, 1] de Julia.

## 10.2. Respuesta de frecuencia

La respuesta de frecuencia de un sistema discreto es la respuesta estacionaria ante señales sinusoidales de diferentes frecuencias.

Para analizar la respuesta de frecuencia de un sistema discreto es necesario, en primer lugar, encontrar una relación entre la transformada de Laplace y la transformada  $z$ .

Para ello vamos a calcular la transformada  $z$  de una función muestreada por impulsos, como se muestra a continuación.

Definamos

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

La transformada de Laplace de esta función es

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s) e^{-kT_s s}$$

Si comparamos esta expresión con la transformada  $z$  de la sucesión  $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ , dada por

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

se observa que la transformada  $z$  de la función muestreada  $x(kT_s)$  se puede obtener de la transformada de Laplace de la función  $x^*(t)$ , muestreada por impulsos, si se identifica

$$z = e^{T_s s}$$

La transformación dada por esta ecuación, sin embargo, no es uno a uno: En efecto, si

$$s = \sigma + j\omega$$

entonces,

$$\begin{aligned} z &= e^{T_s(\sigma + j\omega)} \\ &= e^{T_s\sigma} e^{T_s j\omega} \end{aligned}$$

Pero,

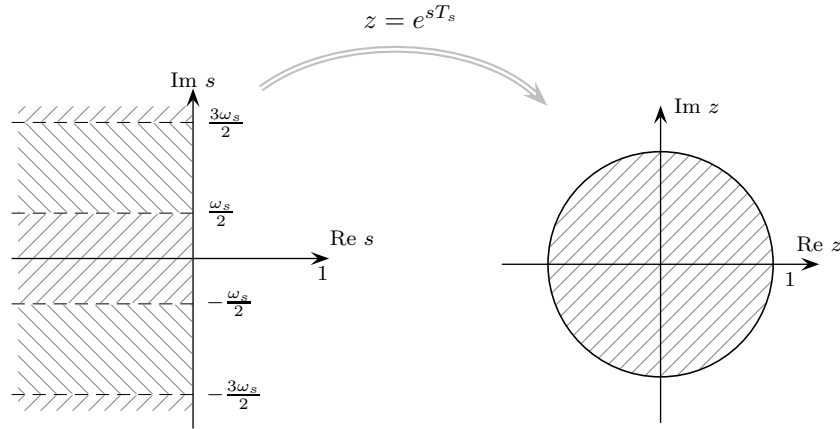
$$e^{T_s j\omega} = e^{T_s j(\omega + 2\pi)}$$

Por lo tanto, dos frecuencias que difieren en  $2\pi/T_s = \omega_s$  producen la misma señal muestreada. Este es el fenómeno de *aliasing*, descrito anteriormente. La transformación se ilustra en la figura siguiente (10.1).

Nótese que si  $\sigma = 0$ , entonces,

$$|z| = |e^{T_s j\omega}| = 1$$



Figura 10.1: La transformación  $z = e^{sT_s}$ 

lo cual indica que el eje imaginario se transforma en el círculo unitario y el semiplano izquierdo, ( $\sigma < 0$ ) se transforma en el interior del círculo unitario.

Debido al fenómeno de *aliasing*, la respuesta de frecuencia de un sistema discreto sólo es válida hasta una frecuencia  $\omega_s = \frac{\pi}{T_s}$ , es decir, a la mitad de la frecuencia de Nyquist.

De hecho, una frecuencia  $\omega > \omega_s$  se ve, desde el punto de vista del sistema discreto, como si fuera de frecuencia  $\omega - \omega_s$ . Por lo tanto, la respuesta de frecuencia es simétrica alrededor de la frecuencia  $\omega_s$ .

Esta es la razón por la cual los programas de diseño de filtros digitales sólo consideran frecuencias en el intervalo  $[0, \pi]$ , puesto que se considera el tiempo de muestreo igual a una unidad de tiempo. De esa forma, se hace el diseño independiente de  $T_s$ .

Las figuras siguientes muestran la respuesta de frecuencia de algunos sistemas discretos.

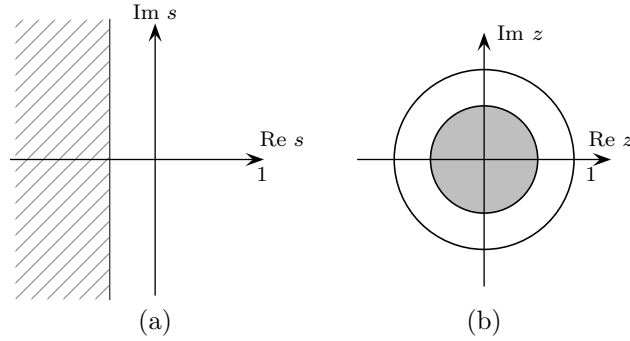
### Relación entre polos y respuesta transitoria

Al igual que en el caso continuo, la posición de los polos de un sistema determina características de su respuesta transitoria. Esta es la base de los métodos de diseño basados en localización de polos.

Para hallar regiones del plano  $z$  que garanticen valores de sobrepico, tiempo de asentamiento o frecuencia no amortiguada, analizaremos la forma como se transforman las regiones correspondientes del plano  $s$ .

**Especificación de  $t_s$** 

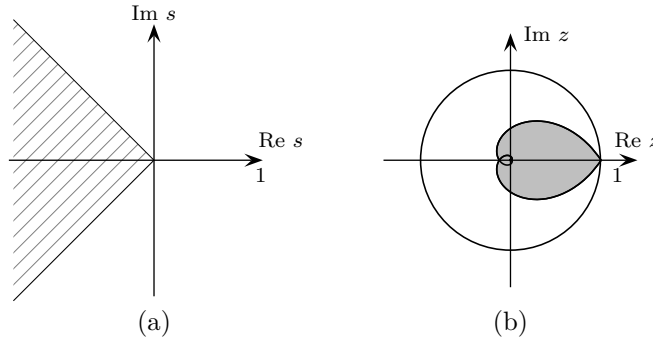
Hemos visto que para garantizar un tiempo de asentamiento menor que un cierto valor en un sistema continuo, los polos deben estar en una región como la que se muestra en la figura 10.2 (a). En la figura también (b) se muestra la región correspondiente del plano  $z$ , obtenida mediante la transformación  $z = e^{T_s s}$

Figura 10.2: Las regiones con  $t_s < 1$ 

Es claro que si  $s = \sigma + j\omega$ , entonces,  $z = e^{\sigma T_s} e^{j\omega T_s}$  y, por lo tanto,  $|z| = e^{\sigma T_s} < 1$  puesto que  $\sigma < 0$ .

**Especificación de  $SP$** 

Para garantizar que el sobrepico sea pequeño, hemos determinado ya que los polos deben estar colocados en una región como la que se muestra en la figura 10.3 (a). En la figura 10.3 (b) se incluye la correspondiente región en el plano  $z$ .

Figura 10.3: Las regiones con  $SP < 5\%$

### Especificación de $\omega_0$

Cuando se quiere garantizar que la frecuencia no amortiguada sea mayor que cierta cantidad, lo cual implica que los polos estén a una distancia del origen, con el fin de garantizar un tiempo de subida  $t_r$  dado, los polos deben estar en una región como las mostradas en la figura 10.4 (a), para sistemas continuos o 10.4 (b) para los discretos.

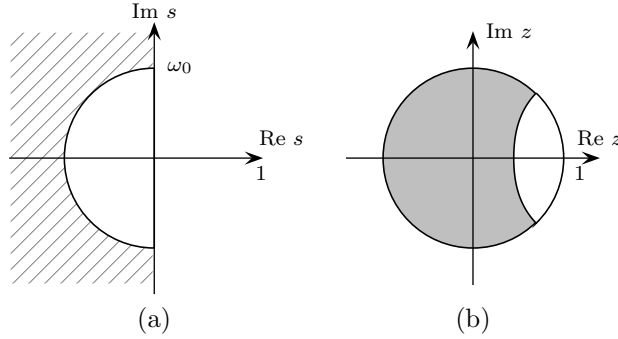


Figura 10.4: Las regiones con  $\omega_0 < w$

### 10.3. Modelos discretos de sistemas continuos

Para diseñar controladores digitales de plantas análogas, es necesario tener un medio para obtener un sistema discreto cuya respuesta aproxima la de un sistema continuo dado. El sistema continuo puede estar descrito por ecuaciones de estado o funciones de transferencia.

Vamos a presentar varias alternativas para la aproximación. Existen técnicas de aproximación en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia.

#### Aproximación en el dominio del tiempo

Vamos a analizar en primer lugar la aproximación de sistemas descritos por funciones de transferencia.

Supongamos un sistema descrito por  $P_c(s)$ , queremos encontrar una función de transferencia discreta  $P(z)$ , cuya respuesta ante cualquier señal de entrada coincida con la respuesta del sistema continuo en los instantes de muestreo (*invariante ante entradas dadas*).

En general, es imposible hallar una solución de este problema que funcione para cualquier señal de entrada. Por lo tanto, se utilizan sistemas discretos que producen los mismos valores, en los instantes de muestreo, que el sistema continuo para una señal especial. Por ejemplo, un escalón o una rampa.

En realidad, puesto que los convertidores digital análogos producen una serie de escalones cuando utilizan una retención de orden cero (zoh), los escalones son, prácticamente, los únicos utilizados.

### Invarianza ante escalones

El sistema discreto *invariante ante escalones* de  $P(s)$ , es uno cuya respuesta a un escalón (discreto) coincida con la respuesta al escalón del sistema original.

La respuesta al escalón del sistema continuo está dada por

$$y(s) = P_c(s) \frac{1}{s}$$

y la del sistema discreto, está dada por

$$y(z) = P(z) \frac{z}{z-1}$$

si las dos respuestas coinciden,

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ P(z) \frac{z}{z-1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ P_c(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=kT_s}$$

Entonces

$$P(z) \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ P_c(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=kT_s} \right\}$$

por lo tanto,

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ P_c(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=kT_s} \right\}$$

La última expresión se suele acortar como

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{P_c(s)}{s} \right]$$

donde se ha definido,

$$\mathcal{Z} \left[ P_c(s) \frac{1}{s} \right] := \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P_c(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT_s} \right\}$$

la cual se puede obtener directamente de la tabla de transformadas. La función de transferencia así obtenida se suele llamar la *función de transferencia de pulsos*.

Debido a las características de los convertidores D/A, es natural que ésta sea la aproximación más utilizada. Por lo general, se le conoce como la *aproximación zoh*, debido a esta relación.

**Ejemplo 10.1.** Sea

$$P_c(s) = \frac{s+1}{s+3}$$

Entonces,

$$\frac{P_c(s)}{s} = \frac{s+1}{s(s+3)}$$

Usando una descomposición en fracciones parciales,

$$\frac{P_c(s)}{s} = \frac{1}{3s} + \frac{2}{3(s+3)}$$

Entonces,

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{P_c(s)}{s} \right] = \frac{z}{3(z-1)} + \frac{2z}{3(z-e^{-3T_s})}$$

Si el período de muestreo  $T_s = 0.1\text{seg}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[ \frac{P_c(s)}{s} \right] &= \frac{z}{3(z-1)} + \frac{2z}{3(z-e^{-0.3})} \\ &= \frac{z}{3(z-1)} + \frac{2z}{3(z-0.7408)} \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} P(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{P_c(s)}{s} \right] \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{z}{3(z-1)} + \frac{2z}{3(z-0.7408)} \right) \\ &= \frac{z-0.9136}{z-0.7408} \end{aligned}$$

### Modelos de variables de estado

También se puede obtener un modelo discreto, invariante ante escalones (zoh) a partir de una representación en variables de estado.

Consideremos un sistema continuo descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Y suponemos que la señal de entrada es constante en el intervalo  $[kT_s, kT_s + T_s]$ . Es decir,

$$u(t) = u(kT_s), \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$$

Entonces, la solución de la ecuación de estado continua se puede hallar, para cualquier  $t \in [kT_s, kT_s + T_s]$ , a partir del estado en  $t = kT_s$ :

$$x(t) = e^{A(t-kT_s)}x(kT_s) + \int_{kT_s}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

En realidad, sólo nos interesa el valor del estado en  $t = (k+1)T_s$ . Éste está dado por

$$x(kT_s + T_s) = e^{AT_s}x(kT_s) + \left[ \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A(t-\tau)} B d\tau \right] u(kT_s)$$

haciendo un cambio de variable en la integral se encuentra que

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A(t-\tau)} B d\tau = \left[ \int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau \right] B$$

Entonces, obtenemos un modelo de estado, discreto, de la forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= e^{AT_s} \\ \bar{B} &= \left[ \int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau \right] B \end{aligned}$$

### Cálculo con Julia

En Julia, existe una rutina para calcular sistemas discretos invariantes al escalón. Para ello, se usa la función `c2d`.

Por ejemplo, para hallar un modelo discreto del sistema descrito por

$$P_c(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

usamos el siguiente procedimiento:

---

```

1 T=0.2
2 Pc=tf([4],[1 2 4])
3 P=c2d(Pc,T)

```

---

Y se obtiene,

$$P(z) = \frac{0.06941z + 0.06071}{z^2 - 1.54z + 0.6703}$$

La misma función permite encontrar un modelo discreto de un sistema descrito por ecuaciones de estado.

Por ejemplo, una realización del sistema anterior se puede encontrar mediante Julia usando

---

```

1 T=0.2
2 Pc=tf(4,[1 2 4])
3 Sc=ss(Pc)
4 S=c2d(Sc,T)
5 step(S,Pc)

```

---

### Aproximación en el dominio de frecuencia

Otra forma de lograr aproximaciones discretas de sistemas continuos consiste en buscar una aproximación del operador de Laplace  $s$ , en términos del operador  $z$ . Por razones numéricas, las aproximaciones se basan en integración, no en diferenciación.

Para llevar a cabo una aproximación en el dominio de frecuencia, consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

la cual se puede resolver si se dispone de un integrador.

La solución de la ecuación anterior se puede calcular recursivamente en la forma:

$$x(t + T_s) = x(t) + \int_t^{t+T_s} f(\tau) d\tau$$

La integral, obviamente, corresponde al área bajo la curva  $f(t)$ , entre los puntos  $t$  y  $t + T_s$  (figura 10.5).

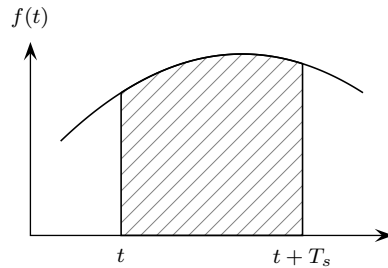


Figura 10.5: Integración de  $f(t)$

Para encontrar aproximaciones discretas usaremos diferentes formas de aproximar la integral.

### Aproximación de Euler

La forma más simple para aproximar la integral consiste en representar el área bajo la curva por medio de un rectángulo de altura  $f(t)$ , como se ilustra en la figura 10.6. Este tipo de aproximación se conoce como el método de Euler.

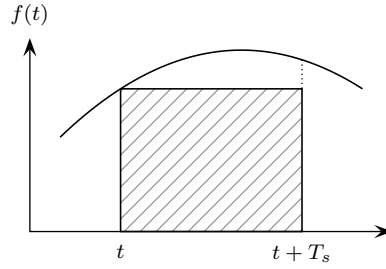


Figura 10.6: Aproximación de Euler

En este caso tenemos,

$$\int_t^{t+T_s} f(\tau) d\tau \approx f(t) T_s$$

y, entonces,

$$x(t + T_s) \approx x(t) + f(t) T_s$$

De aquí,

$$f(t) \approx \frac{x(t + T_s) - x(t)}{T_s}$$

lo cual equivale a aproximar la derivada por medio de

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t + T_s) - x(t)}{T_s} \quad (10.1)$$

Aplicando transformada  $z$  al lado derecho de la ecuación 10.1,

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{x(t + T_s) - x(t)}{T_s} \right\} = \frac{z x(z) - x(z)}{T_s} \quad (10.2)$$

$$= \frac{z - 1}{T_s} x(z) \quad (10.3)$$

Si ahora aplicamos transformada de Laplace al lado izquierdo de la ecuación 10.1 y comparamos las expresiones, obtenemos la asociación

$$s \mapsto \frac{z - 1}{T_s} \quad (10.4)$$

$$z \mapsto T_s s + 1 \quad (10.5)$$

Queremos analizar si la aproximación preserva la estabilidad de las soluciones. Para ello, consideramos cómo se transforman los valores de  $s$  en el SPI. Si  $\text{Re } s < 0$ , entonces  $\text{Re } z < 1$ . Es decir, que el SPI se transforma en el semiplano  $z < 1$ . Por lo tanto, muchos de los valores de  $s$  que dan origen a soluciones



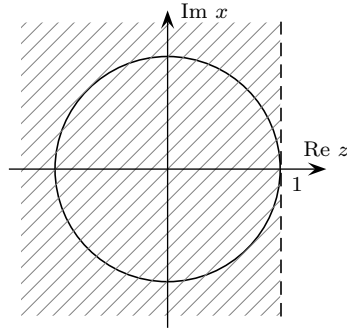


Figura 10.7: Aproximación de Euler — Región de estabilidad

estables se transforman en valores fuera del círculo unitario y, por lo tanto, originan soluciones inestables del sistema discreto.

La figura 10.7 presenta la imagen del SPI en relación con el círculo unitario.

El método de Euler también puede interpretarse como la aproximación de primer orden de la transformación  $z = e^{T_s s}$ ; es decir,

$$z = e^{T_s s} \approx 1 + T_s s$$

### Diferencia hacia atrás

Supongamos que en vez de la aproximación de Euler usamos la que se muestra en la figura 10.8. En ese caso,

$$\int_t^{t+T_s} f(\tau) d\tau \approx f(t + T_s) T_s$$

y, por lo tanto,

$$x(t + T_s) \approx x(t) + f(t + T_s) T_s$$

Entonces,

$$f(t + T_s) \approx \frac{x(t + T_s) - x(t)}{T_s}$$

lo cual es equivalente a la aproximación:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t) - x(t - T_s)}{T_s} \quad (10.6)$$

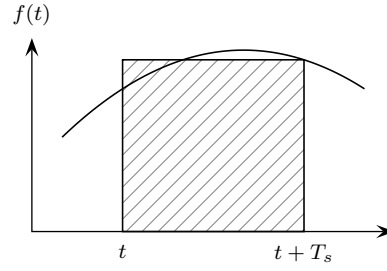


Figura 10.8: Diferencia hacia atrás

Aplicando transformada  $z$  al lado derecho de la ecuación 10.6,

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{x(t) - x(t - T_s)}{T_s} \right\} = \frac{x(z) - z^{-1}x(z)}{T_s} \quad (10.7)$$

$$= \frac{1 - z^{-1}}{T_s} x(z) \quad (10.8)$$

$$= \frac{z - 1}{zT_s} x(z) \quad (10.9)$$

De nuevo aplicamos transformada de Laplace al lado izquierdo de la ecuación 10.6 y comparamos las expresiones. Obtenemos la asociación:

$$s \mapsto \frac{z - 1}{zT_s} \quad (10.10)$$

$$z \mapsto \frac{1}{1 - T_s s} \quad (10.11)$$

En este caso, el semiplano  $\text{Re } s < 0$  se transforma en una porción del círculo unitario. Todos los valores de  $s$  en el SPI se transforman en puntos con  $|z| < 1$ , de manera que si el sistema continuo es estable, el sistema discreto también lo será. Esto se puede observar en la figura 10.9, en la cual se ha sombreado la imagen del SPI.

El método de diferencia hacia atrás se puede interpretar mediante la aproximación de primer orden,

$$z = e^{T_s s} = \frac{1}{e^{-T_s s}} \approx \frac{1}{1 - T_s s}$$

### Aproximación de Tustin (regla trapezoidal)

Una mejor aproximación de área bajo la curva se puede lograr mediante la regla trapezoidal, ilustrada en la figura 10.10.

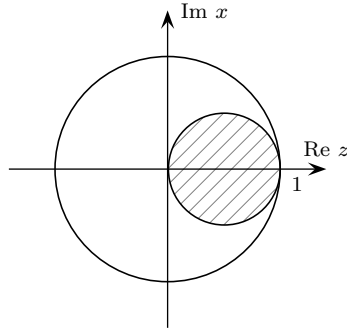


Figura 10.9: Diferencia hacia atrás — Región de estabilidad

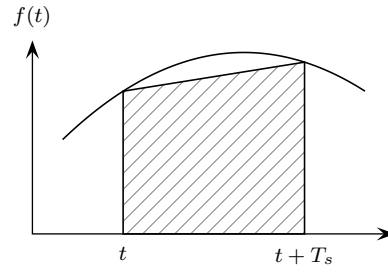


Figura 10.10: Regla trapezoidal

Entonces,

$$\int_t^{t+T_s} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2} [f(t) + f(t + T_s)] T_s$$

luego,

$$x(t + T_s) - x(t) \approx \frac{1}{2} [f(t) + f(t + T_s)] T_s$$

Aplicando transformada  $z$  a ambos lados,

$$zx(z) - x(z) \approx \frac{1}{2} [f(z) + zf(z)]$$

Por lo tanto,

$$f(z) \approx \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} x(z)$$

Puesto que ésta es la transformada  $z$  de  $f(t) = \dot{x}(t)$ , ello equivale a la

asociación:

$$s \mapsto \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (10.12)$$

$$z \mapsto \frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2} \quad (10.13)$$

La transformación dada por la ecuación 10.12 (o su inversa la ecuación 10.13) se conoce como transformación bilineal. La imagen del SPI bajo esta transformación constituye todo el círculo unitario. Por lo tanto, un sistema continuo estable se transforma en uno discreto estable. La imagen del SPI se observa en la figura 10.11.

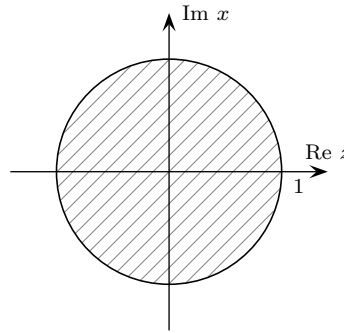


Figura 10.11: Regla trapezoidal — Región de estabilidad

Al igual que en los casos anteriores, el método de Tustin se puede obtener mediante una aproximación de la exponencial:

$$z = e^{T_s s} = \frac{e^{T_s s/2}}{e^{-T_s s/2}} \approx \frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2}.$$

En la sección siguiente usaremos estos métodos para hallar sistemas discretos cuya respuesta se aproxima a la de un sistema continuo dado.

#### 10.4. Traducción de diseños análogos

Para traducir un diseño análogo a uno digital con respuesta similar, usamos las diferentes técnicas de aproximación.

En la práctica, solamente se usan las técnicas de invarianza ante escalones y la de Tustin.

**Ejemplo 10.2.** Se ha diseñado un controlador tipo red de atraso para controlar la planta,

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

El controlador resultante es,

$$K(s) = 20 \frac{1 + 10s}{1 + 100s}$$

Y vamos a mirar diferentes alternativas para la implementación digital de este controlador. usaremos un valor de  $T_s = 0.1$  seg.

En primer lugar, consideramos una aproximación invariante ante escalones (“zoh”) y obtenemos,

$$K_z(z) = \frac{2z - 1.98}{z - 0.999}$$

A continuación, calculamos una aproximación de Euler, para lo cual, basta remplazar

$$s \mapsto \frac{z - 1}{T_s}$$

El controlador resultante es

$$\begin{aligned} K_z(z) &= 20 \frac{1 + 10 \left( \frac{z - 1}{T_s} \right)}{1 + 100 \left( \frac{z - 1}{T_s} \right)} \\ &= 20 \frac{T_s + 10z - 10}{T_s + 100z - 100} \end{aligned}$$

con  $T_s = 0.1$  seg, se halla,

$$K(z) = \frac{200z - 198}{100z - 99.9}$$

Usando una aproximación de diferencia hacia atrás, para lo cual se debe hacer la sustitución,

$$s \mapsto \frac{z - 1}{T_s z}$$

$$\begin{aligned} K_z(z) &= 20 \frac{1 + 10 \left( \frac{z - 1}{T_s z} \right)}{1 + 100 \left( \frac{z - 1}{T_s z} \right)} \\ &= 20 \frac{T_s z + 10z - 10}{T_s z + 100z - 100} \end{aligned}$$

con  $T_s = 0.1$  seg, se halla,

$$K(z) = \frac{202z - 200}{100.1z - 100}$$

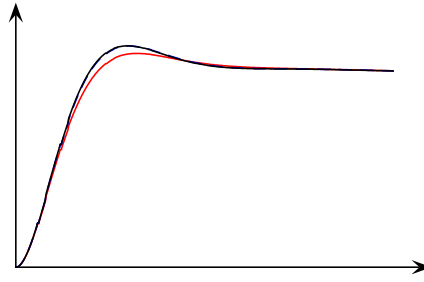


Figura 10.12: Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos

Por último, usaremos una aproximación de Tustin,

$$K(z) = \frac{2.009z - 1.989}{z - 0.999}$$

En la figura 10.12 se muestra una simulación de la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado, usando diferentes los diferentes métodos de aproximación. Las respuestas del sistema de lazo cerrado, usando los controladores discretos, son prácticamente indistinguibles y presentan un sobrepico un poco mayor (17% vs 14%) que el sistema con controlador continuo. El tiempo de asentamiento es prácticamente idéntico y el error estático es igual.

**Ejemplo 10.3.** Como un segundo ejemplo, vamos a traducir un controlador de dos parámetros.

Se desea implementar la función de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + 5.123s + 10}$$

Para la planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s + 2.5)}$$

Para ello se seleccionó  $\bar{D}_H = s + 2$  y se obtuvo el controlador,

$$K(s) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{10s + 20}{s + 4.623} & \frac{-8.688s - 20}{s + 4.623} \end{array} \right]$$

Este controlador se discretiza con un tiempo de muestreo de 0.05 seg. La aproximación zoh es

$$K_z(z) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{10z - 9.107}{z - 0.7937} & \frac{-8.69z + 7.797}{z - 0.7937} \end{array} \right]$$

Y la aproximación de Tustin da,

$$K_T(z) = \begin{bmatrix} \frac{9.413z - 8.516}{z - 0.7929} & \frac{-8.238z + 7.342}{z - 0.7929} \end{bmatrix}$$

Usando estos controladores se simuló la respuesta del sistema de lazo cerrado ante un escalón, usando cada uno de los controladores. Los resultados están en la figura 10.13. La curva inferior representa la respuesta del sistema usando el controlador continuo, mientras las dos superiores, que prácticamente no se pueden distinguir, muestran la respuesta del sistema utilizando controladores discretos. La curva continua usa el controlador zoh  $K_z(s)$ , mientras la curva punteada es la del sistema con el controlador  $K_T(s)$ .

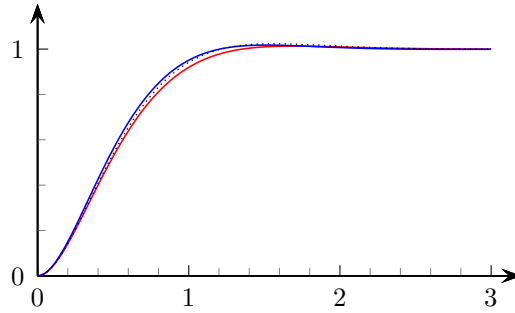


Figura 10.13: Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos

Los controladores discretos logran una respuesta muy similar a la del controlador continuo. Este último produce un  $SP = 1.3\%$ , la aproximación zoh produce  $SP = 1.8\%$  y la de Tustin  $SP = 2.1\%$ , valores todos razonablemente bajos. El valor de  $t_s$  es prácticamente igual para todos. Los controladores discretos logran un  $t_r$  ligeramente mayor que el continuo, pero las variaciones son muy leves.

**Ejemplo 10.4.** Dado el sistema siguiente (el cual representa la dinámica de la elevación de un avión STOL<sup>1</sup>), como se ilustra en la figura 10.14.

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{-500}{s(s+10)(s+1.4)}$$

Supongamos que el máximo valor posible de entrada al actuador (sin causar saturación) satisface

$$|u(t)| \leq 2$$

<sup>1</sup>STOL: Short Take Off and Landing, un avión diseñado para despegar y aterrizar en pistas muy cortas. Este modelo ha sido tomado de [Nel98]

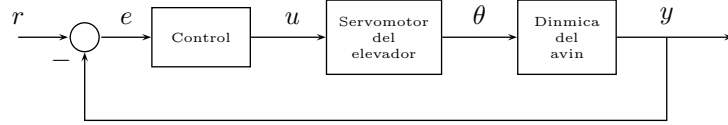


Figura 10.14: Control con Realimentación Unitaria (RU)

Vamos a implementar un controlador óptimo ITAE. Puesto que el grado relativo de la planta es 3 y no tiene ceros no minifase, seleccionamos una función de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{\omega_0^3}{s^3 + 1.75\omega_0 s^2 + 2.15\omega_0^2 s + \omega_0^3}$$

Simulando con diferentes valores de  $\omega_0$ , se obtiene el valor máximo de  $u(t)$ . Para  $\omega_0 = 10$ , se tiene  $u_{\text{máx}} = 2$ .

Por lo tanto, la función de lazo cerrado óptima es

$$T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17.5s^2 + 215s + 1000}$$

La respuesta al escalón se muestra a continuación: Como se observa, el tiempo de subida es  $t_r = 0.32$  seg.

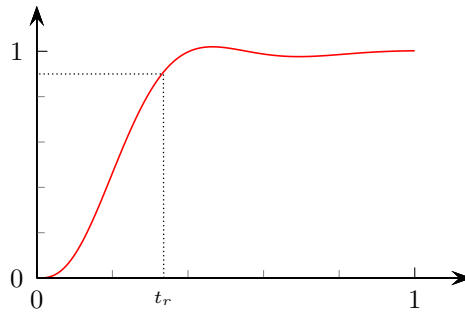


Figura 10.15: Respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado con controlador análogo

Para implementar este sistema, intentamos con la expresión

$$K(s) = \frac{T(s)}{P(s)(1 - T(s))}$$

con lo cual se obtiene,

$$K(s) = \frac{-2(s + 10)(s + 1.4)}{s^2 + 17.5s + 215}$$



Y, usando simulación se observa que este controlador, efectivamente produce una función de lazo cerrado como la deseada. También, se ve en la simulación que es capaz de rechazar perturbaciones constantes en la salida. Sin embargo, no puede rechazar perturbaciones en la entrada de la planta. De hecho, éstas se ven amplificadas grandemente, debido a la ganancia alta de la planta.

Vamos a ensayar un controlador de dos parámetros. Para ello implementaremos un controlador de orden  $m = 3$  (el mínimo orden es  $m = 2$ ). Para ello, definimos un polinomio del observador con polos en  $-10, -20, -30$ . Es decir,

$$\begin{aligned}\bar{D}_H &= (s + 10)(s + 20)(s + 30) \\ &= s^3 + 60s^2 + 1100s + 6000\end{aligned}$$

Con este polinomio, se obtiene,

$$K(s) = \left[ \frac{-2s^3 - 120s^2 - 2200s - 12000}{s^3 + 66.1s^2 + 1597s} \quad \frac{40.03s^3 + 750.3s^2 + 4780s + 12000}{s^3 + 66.1s^2 + 1597s} \right]$$

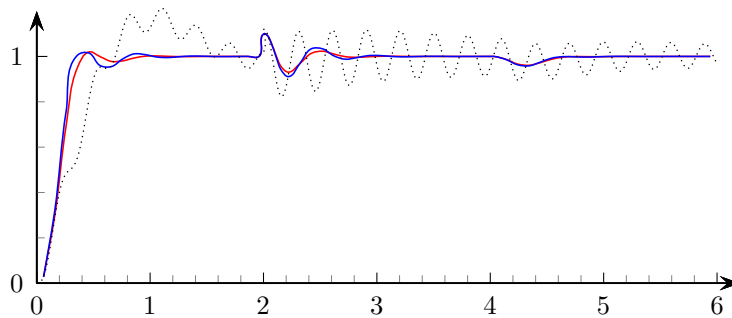


Figura 10.16: Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos. zoh: Línea punteada. Línea roja: control continuo. Línea azul: aproximación de Tustin.  $T_s = 0.02$  seg.

Para hacer una implementación discreta de este controlador seleccionamos un tiempo de muestreo  $T_s \leq 0.1t_r$ . Escogemos  $T_s = 0.02$  seg.

El sistema con controlador zoh presenta una oscilación grande. El de Tustin aproxima muy bien el controlador análogo. La gráfica está en la figura 10.16

El zoh sólo da un resultado aceptable con  $T_s = 0.0025$  seg, aunque la respuesta no es muy similar a la del sistema continuo, especialmente ante cambios en la referencia (ver figura 10.17).

## 10.5. Diseño digital directo

Como ejemplo de un diseño realizado directamente en el dominio discreto, vamos a considerar un diseño basado en *Realimentación de Variables de Estado*

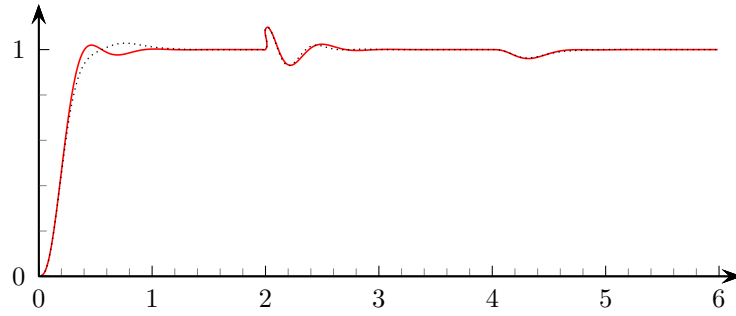


Figura 10.17: Respuesta del sistema de lazo cerrado con controlador análogo y controladores discretos. zoh: Línea punteada. Línea continua: control continuo.  $T_s = 0.0025$  seg.

(RVE) para un sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (10.14)$$

Para realizar un diseño basado en variables de estado, necesitamos estudiar los conceptos de controlabilidad y observabilidad, exactamente como en el caso continuo.

En realidad, los conceptos se pueden aplicar en el caso discreto en forma idéntica que para sistemas continuos. Realmente las definiciones son las mismas y lo único que haremos es copiar los principales resultados del caso continuo.

## 10.6. Controlabilidad y observabilidad de sistemas discretos

Un sistema discreto se llama *controlable* si es posible encontrar una señal de entrada (*control*) que haga variar el estado del sistema de un estado inicial arbitrario a un estado final cualquiera, especificado, en un tiempo finito. Las condiciones solamente dependen de la estructura de las matrices  $S$  y  $B$ , de modo que: Un sistema lineal descrito por ecuaciones de estado es controlable si y sólo si la *matriz de controlabilidad*

$$\theta_c = [ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ]$$

tiene rango  $n$  Exactamente como en el caso continuo.

Un sistema discreto se llama *observable* si es posible reconstruir el vector de estado inicial  $x(0)$ , a partir de las señales de entrada y de salida del sistema, medidas durante un intervalo finito de tiempo

El siguiente resultado es el mismo obtenido para los sistemas continuos:

**Teorema 28.** *Un sistema lineal descrito por ecuaciones de estado es observable si y sólo si la matriz de observabilidad*

$$\theta_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene rango  $n$ .

□

## 10.7. Realimentación de variables de estado

La principal configuración de control, usando variables de estado, es una ley de control de la forma

$$u(k) = r(k) - Kx(k)$$

donde  $K$  es una matriz de ganancia de dimensión  $m \times n$ . Esta configuración se llama *Realimentación de variables de estado (RVE)*.

Usando esta definición en la ecuación de estado,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (10.15)$$

$$= (A - BK)x(k) + Br(k) \quad (10.16)$$

Puesto que la dinámica del sistema depende fundamentalmente de la matriz de estado  $A$ , se observa que es posible cambiar el comportamiento del sistema usando este control.

### Qué se puede hacer con RVE?

El principal resultado en esta área fue obtenido por R. Kalman:

**Teorema.** Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces es posible asignar los polos (autovalores) de la matriz  $(A - BK)$  en cualquier lugar del plano complejo, seleccionando la matriz  $K$ . De esta forma podemos lograr un diseño con asignación de polos mediante RVE.

**Ejemplo 10.5.** *Vamos a diseñar un controlador usando RVE discretas para la planta continua*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para realizar un diseño digital para este sistema, lo primero que necesitamos es un modelo discreto del sistema análogo.

Usaremos un período de muestreo  $T_s = 0.1$  seg. Usando la función `c2d` del Julia, se obtiene:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.46755 & -0.31881 \\ 0.54653 & 1.3784 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -0.01643 \\ 0.11925 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nótese que el sistema es inestable, puesto que tiene polos en 0.7408 y 1.1052.

Usando RVE vamos a asignar los polos de lazo cerrado en 0.1 y 0.2.

Usando la función `place` se halla,

$$K = \begin{bmatrix} -1.6677 & 12.7341 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$u(k) = r(k) + 1.6677x_1(k) - 12.7341x_2(k)$$

produce un sistema de lazo cerrado con los polos en la posición deseada. El sistema se ha simulado usando un modelo Simulink con los resultados que se muestran.

### Diseño “Deadbeat”

Un tipo de diseño que es exclusivo de los sistemas discretos es el llamado “deadbeat”. En este tipo de diseño se asignan los polos del sistema de lazo cerrado de modo que todos están en el origen. En otras palabras, el sistema de lazo cerrado tiene  $n$  polos en  $z = 0$  y la ecuación característica de lazo cerrado es

$$z^n = 0$$

Este tipo de diseño implica que la respuesta del sistema se anula al cabo de  $n$  períodos de muestreo. Ello se puede demostrar fácilmente a partir del teorema de Cayley-Hamilton, el cual dice que toda matriz satisface a su propia ecuación característica. Eso significa que si la matriz de lazo cerrado es  $A_{LC} = A - BK$ , entonces

$$A_{LC}^n = 0$$

Por lo tanto,  $x(n) = 0$ , independientemente del estado inicial.

El diseño de un controlador “deadbeat”, se puede llevar a cabo con la función `place` del Julia.

Un problema asociado con el control “deadbeat” es que la señal de control tiende a ser muy grande si el período de muestreo es pequeño. Por esta razón,

se suele hacer un diseño para diferentes valores de  $T_s$  hasta cuando la señal  $u(k)$  tiene valores apropiados.

### 10.8. Acción integral

Una función básica para el diseño de controladores consiste en acumular los valores de una señal discreta. Sea  $x(k)$  una variable discreta cualquiera, un acumulador es un sistema dinámico descrito por

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k) + x(k) \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10.17)$$

En este caso, la solución de la ecuación de diferencias es

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} x(i)$$

El cual es el equivalente discreto de un integrador: Si  $x(k) > 0$ , entonces,  $y(k)$  crece y decrece en el caso  $x(k) < 0$ . Estas propiedades se pueden usar para los mismos fines que los integradores en sistemas continuos.

La función de transferencia del sistema es

$$P(z) = \frac{1}{z-1}$$

### 10.9. Equivalente discreto de un sistema con retardo

Un ejemplo frecuente aparece en sistemas lineales con retardo, de la forma

$$y(s) = \frac{k}{s+\alpha} e^{-s\theta} u(s)$$

En este caso, las técnicas usuales no se pueden usar, debido a la presencia del retardo. Sin embargo, es posible hallar un modelo discreto si se considera que

$$y(t) = q(t - \theta)$$

donde

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s+\alpha} u(s) \right\}$$

Entonces, es posible hallar un equivalente discreto para el sistema descrito por

$$q(s) = \frac{k}{s+\alpha} u(s)$$

por ejemplo  $P(z)$  y, luego, usar la propiedad de traslación de la transformada  $z$ . Si el tiempo de retardo es un múltiplo de  $T_s$ , es decir, si

$$\frac{\theta}{T_s} = \nu \text{ (un entero)}$$

entonces,  $y(t) = q(t - \nu T)$  y, en este caso,

$$y(z) = z^{-\nu} q(z)$$

Por lo tanto,

$$y(z) = z^{-\nu} P(z) u(z)$$

### 10.10. Selección del tiempo de muestreo

El único criterio descrito hasta ahora para la selección del período de muestreo se basaba en la necesidad de reconstruir las señales continuas a partir de los datos muestreados. Sin embargo, para controlar un sistema, se usan criterios de selección del tiempo de muestreo diferentes.

El criterio más utilizado se basa en la constante de tiempo dominante del sistema de lazo cerrado. El valor de  $T_s$  debe escogerse de manera que

$$\frac{\tau}{T_s} \approx 10$$

Otro criterio muy popular para seleccionar  $T$  consiste en calcular el tiempo de subida del sistema continuo,  $t_r$  y escoger

$$\frac{t_r}{T_s} \approx 5 - 10$$

Es decir, se toman de 5 a 10 muestras durante el tiempo de subida.

También se usa un criterio basado en la frecuencia natural amortiguada,  $\omega$ , de una aproximación por un sistema de segundo orden. En este caso,

$$\omega T_s \approx 0.12 - 0.36$$

Otro criterio, usado con frecuencia, está basado en la frecuencia de cruce (“crossover”) del sistema continuo. Se selecciona  $T_s$  de forma que satisfaga

$$0.2 \leq \omega_c T_s \leq 0.6$$

Este criterio produce tiempos de muestreo bastante cortos.

# Bibliografía

- [AM07] Brian DO Anderson and John B Moore. *Optimal control: linear quadratic methods*. Courier Corporation, 2007.
- [AW95] K.J. Astrom and B. Wittenmark. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. ISA Press, 1995.
- [Ber03] L. E. Bermeo. Sistema de desarrollo de controladores lineales si-so sobre microcontrolador embebido. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [Bod45] H. W. Bode. *Network analysis and feedback amplifier design*. Van Nostrand, Princeton, 1945.
- [CFHT21] Fredrik Bagge Carlson, Mattias Fält, Albin Heimerson, and Olof Troeng. Controlsystems. jl: A control toolbox in julia. In *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4847–4853. IEEE, 2021.
- [Cha61] S. S. Chang. *Synthesis of Optimal Control Systems*. McGraw-Hill, NewYork, 1961.
- [Che87] Chi-Tsong Chen. Introduction to the linear algebraic method for control system design. *IEEE Control Systems Magazine*, 7(5):36–42, 1987.
- [Che95] Chi-Tsong Chen. *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*. Oxford University Press, Inc., 1995.
- [Doy78] John Doyle. Guaranteed margins for lqg regulators. *IEEE Transactions on automatic Control*, 23(4):756–757, 1978.
- [DP13] Geir E Dullerud and Fernando Paganini. *A course in robust control theory: a convex approach*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Gan60] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*, volume 2. Chelsea, 1960.

- [HDB98] Ming-Tzu Ho, Aniruddha Datta, and Shankar P Bhattacharyya. An elementary derivation of the routh-hurwitz criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):405–409, 1998.
- [KR<sup>+</sup>13] Aleksej I Kostrikin, Igor Rostislavovich, et al. *Algebra I: Basic Notions of Algebra*. Springer, 2013.
- [KS72] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear optimal control systems*, volume 1. Wiley-interscience New York, 1972.
- [Lan85] S. Lang. *Complex Analysis*. Springer Verlag, 1985.
- [Lue66] David Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE transactions on automatic control*, 11(2):190–197, 1966.
- [MA66] D Martin and LV Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [Mat] Matlab. *Control Systems Toolbox*.
- [Mei95] Gjerrit Meinsma. Elementary proof of the routh-hurwitz test. *Systems & Control Letters*, 25(4):237–242, 1995.
- [Mey23] Carl D Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2023.
- [Mor89] M Morari. *Robust process control*. 1989.
- [Nel98] R. C. Nelson. *Flight stability and automatic control*. McGraw-Hill, New York, 1998.
- [Per13] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [SH74] Stephen Smale and Morris W Hirsch. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, volume 60. Elsevier, 1974.
- [SP05] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite. *Multivariable feedback control: analysis and design*. John Wiley & sons, 2005.
- [Wig] Stephen Wiggins. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos [electronic resource].
- [Won74] Walter Murray Wonham. *Linear multivariable control*, volume 101. Springer, 1974.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice-Hall, 1996.