知能工学特別講義 第５講

担当：和田山 正

名古屋工業大学

本講義の内容

- 圧縮センシングの概要
- 応用
- スパース信号再現アルゴリズムについて

圧縮センシング

- Compressed Sensing (CS)
- 信号処理・機械学習・情報理論の分野で注目
- Donoho, Candes, Taoらが理論を建設(2003年前後)

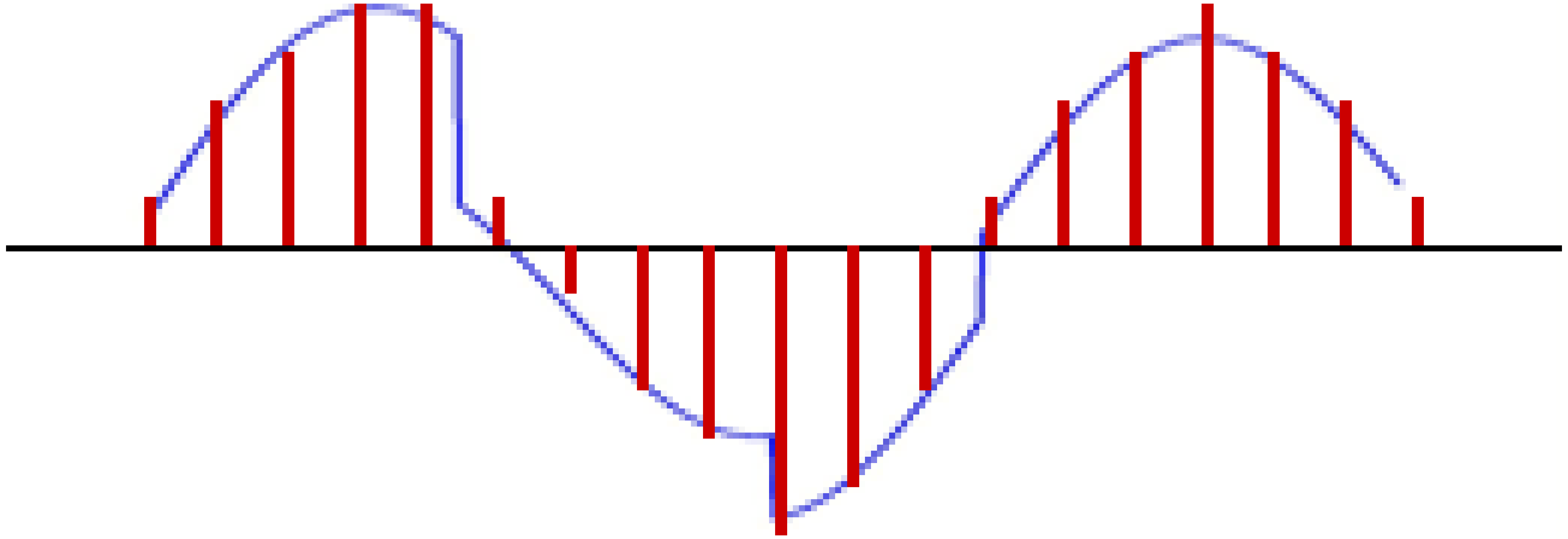
David Donoho
Stanford Univ.

Emanuel Candes
Stanford Univ.

Terence Tao
UCLA

シャノン・ナイキスト　サンプリング定理

「周波数帯域の２倍のサンプリング周波数でサンプリングすれば、完全な再構成が可能」



デジタル信号処理系

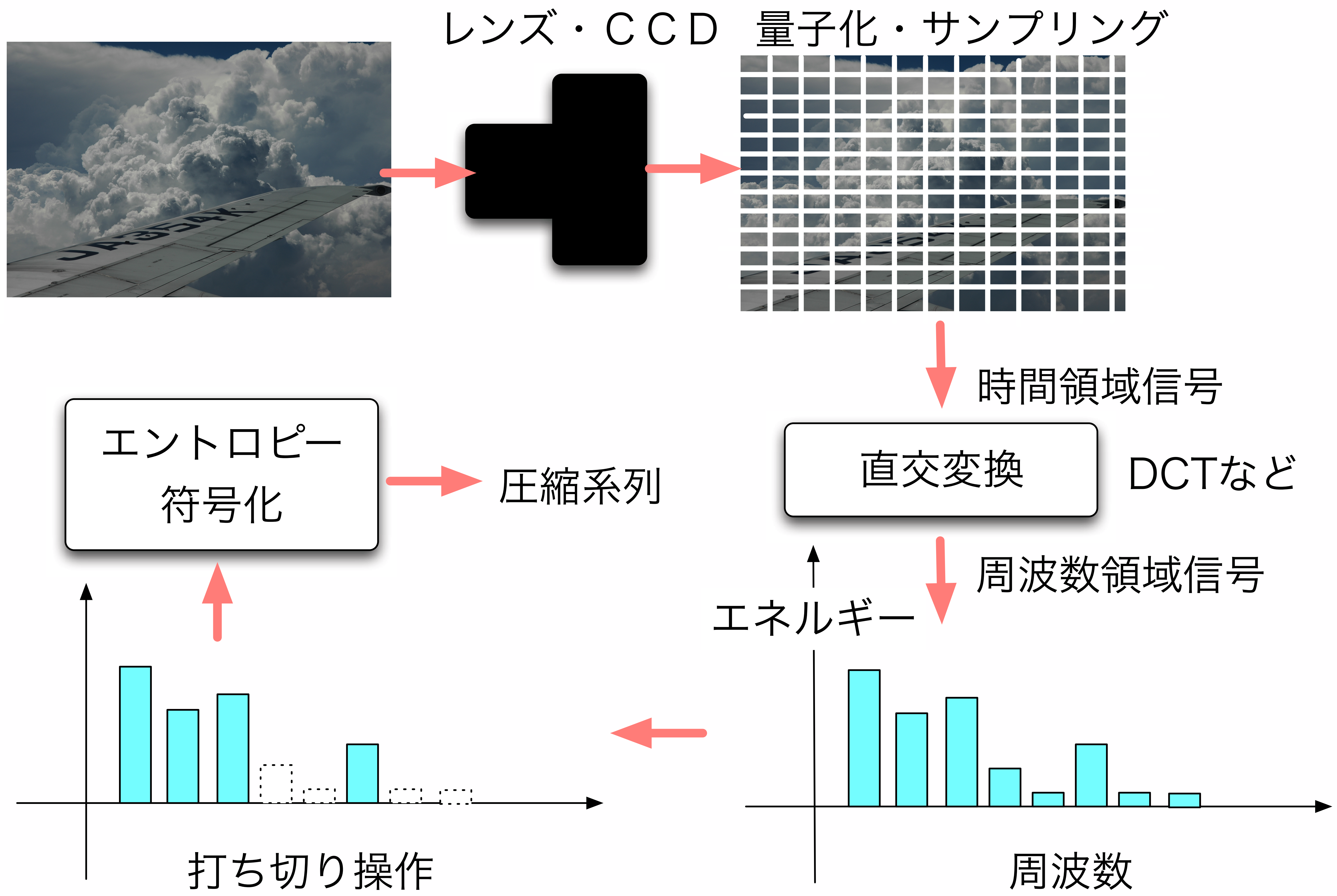
センサ

Analog-Digital (A/D)
コンバータ

データ圧縮
信号処理

たくさんのサンプリング信号が必要？

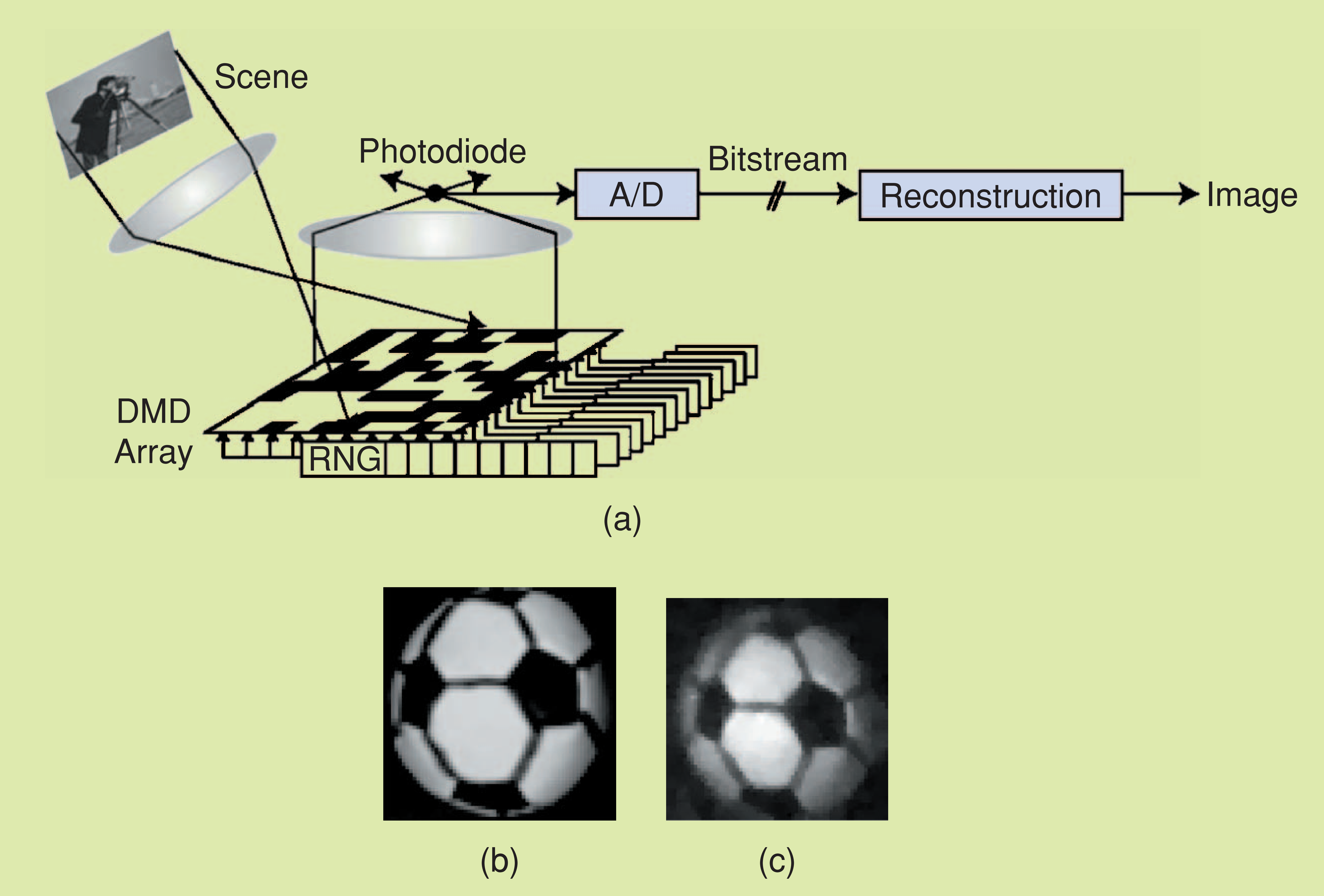
画像の非可逆圧縮系



圧縮センシングの問題意識

- JPEGなどでは、大量のサンプル信号を非可逆圧縮する
- 圧縮過程において、低エネルギーデータを捨てている
- 大量のサンプル信号は無駄？
- 捨てるんだったら最初からもっと少ないサンプル数で実はよいのでは？

1ピクセルカメラ



[FIG3] (a) Single-pixel, compressive sensing camera. (b) Conventional digital camera image of a soccer ball. (c) 64 $\times$ 64 black-and-white image $\hat{x}$ of the same ball ($N = 4{,}096$ pixels) recovered from $M = 1{,}600$ random measurements taken by the camera in (a). The images in (b) and (c) are not meant to be aligned.

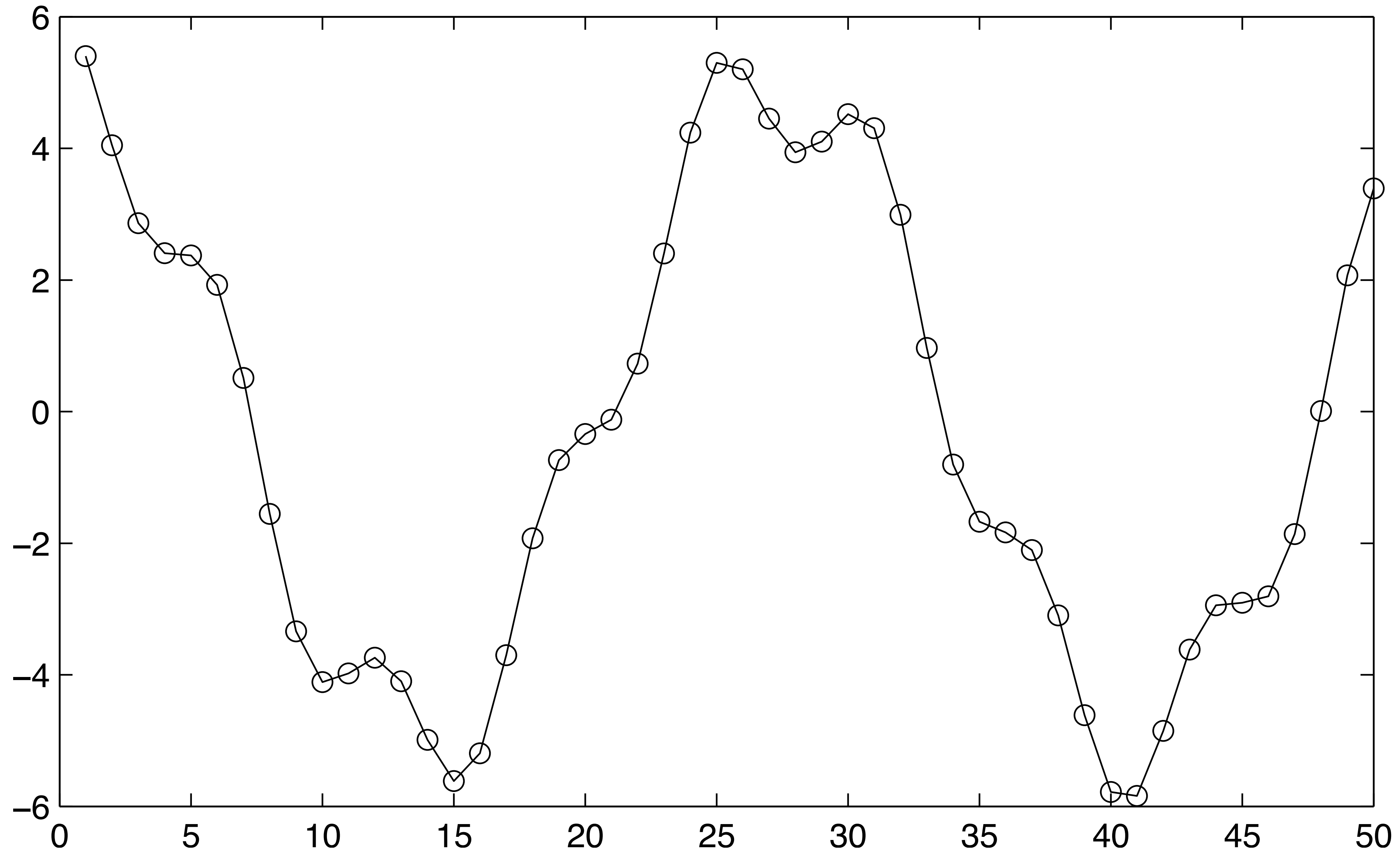
時系列信号

時系列信号

$y \in \mathbb{R}^n$ を" 時系列"、" 1 次元信号" とみなす。

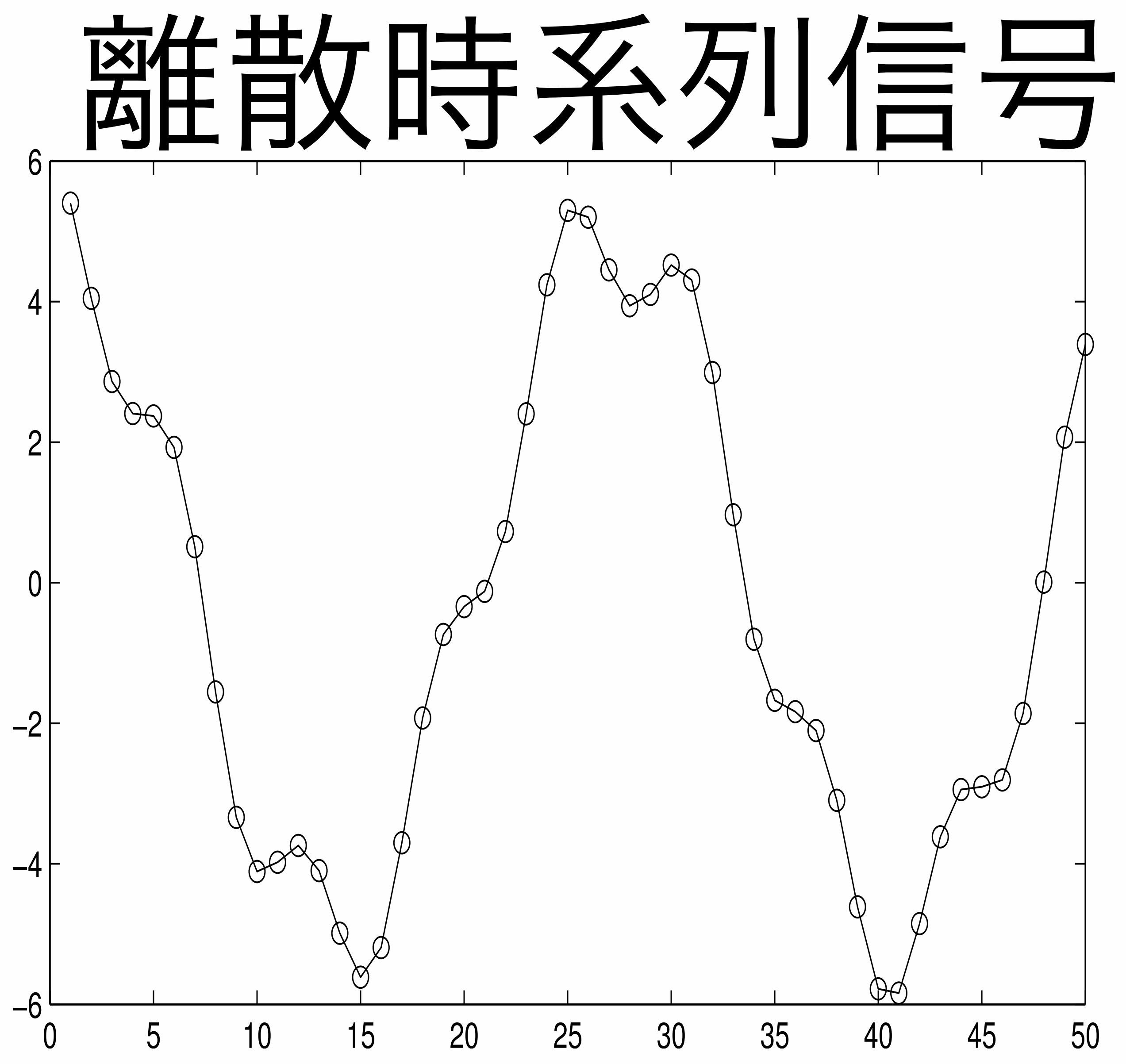
例: $y \in \mathbb{R}^{50}$, $k = 1, 2, \ldots, 50$ について

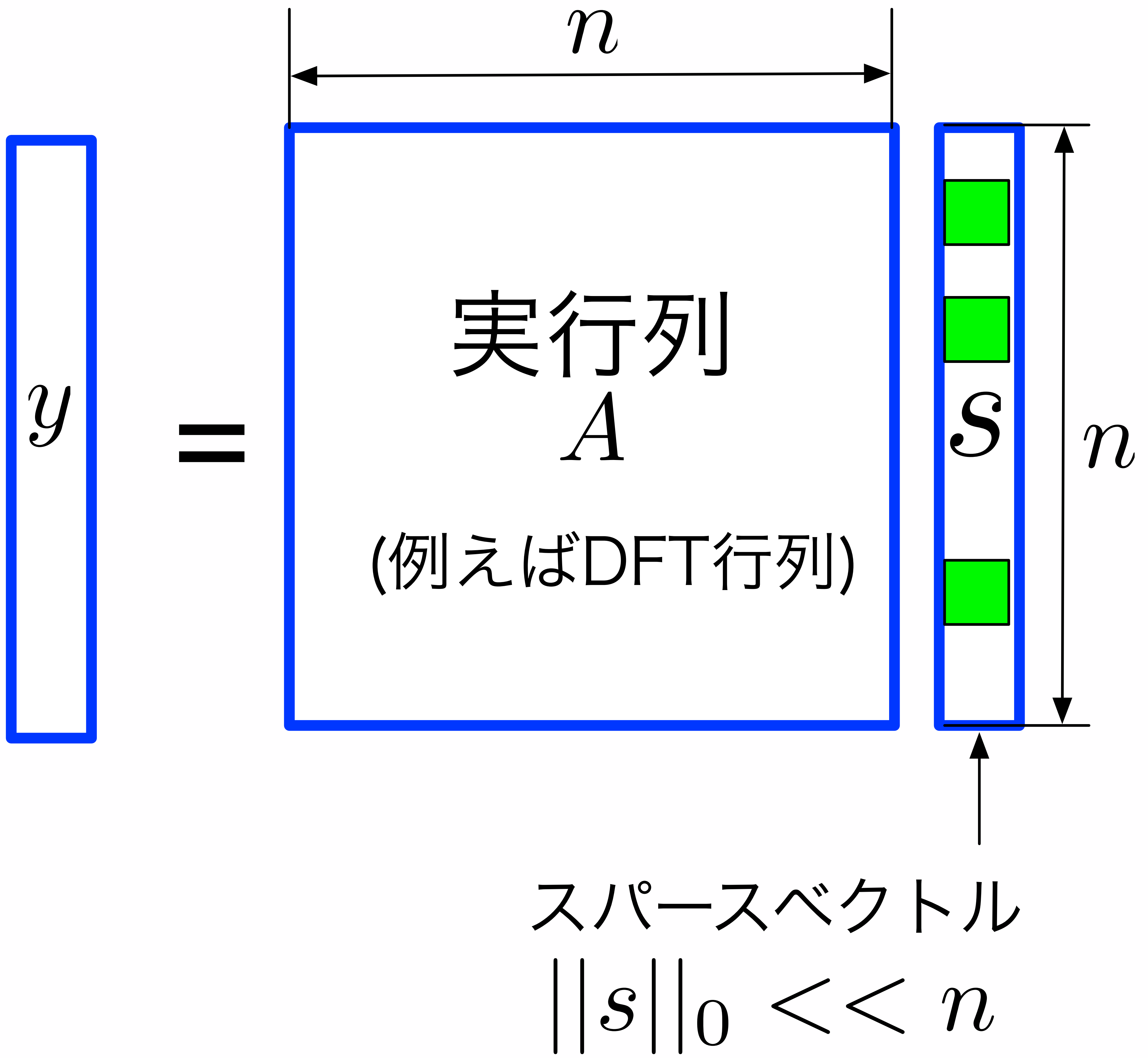
$$y_k = \cos(10.1 \times 0.1k) + 5\cos(2.3 \times 0.1k),$$



スパースベクトル

非ゼロ要素数がベクトル長に比べて非常に少ないベクトルをスパースベクトルと呼ぶ





ウェーブレット変換

ウェーブレット変換

上位1%の大きさの係数のみ残し、残りの係数はゼロとする

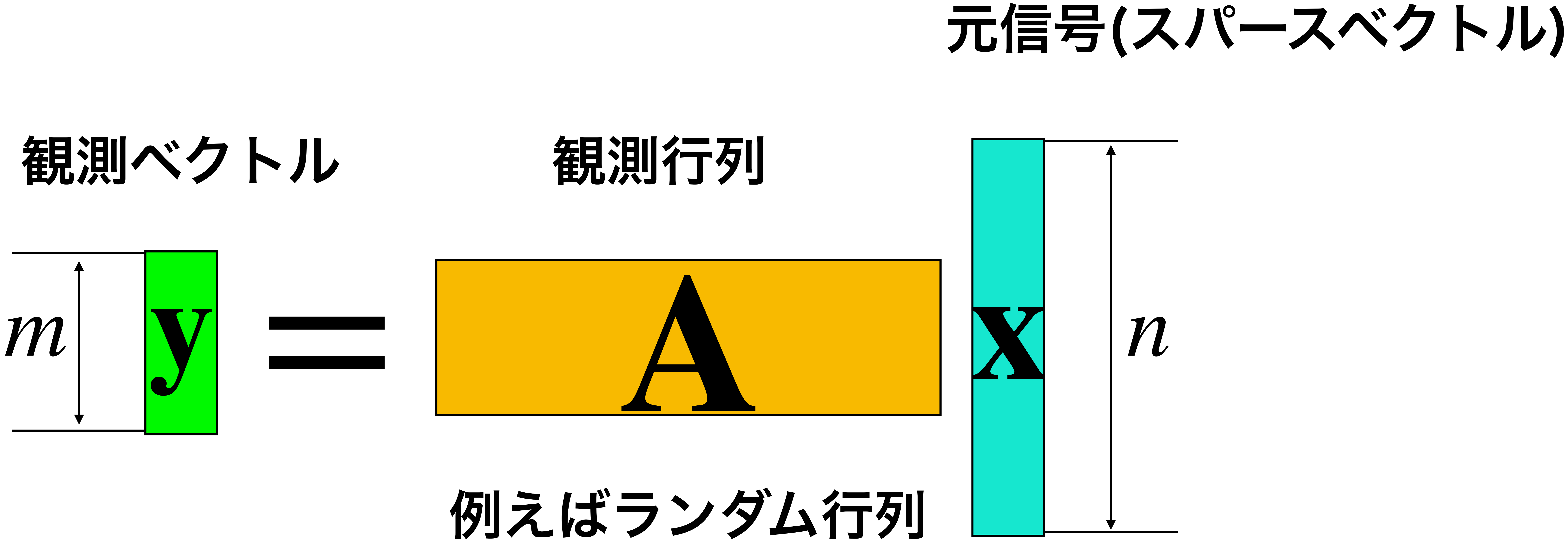
original

approximated

rel. error $= 0.031$

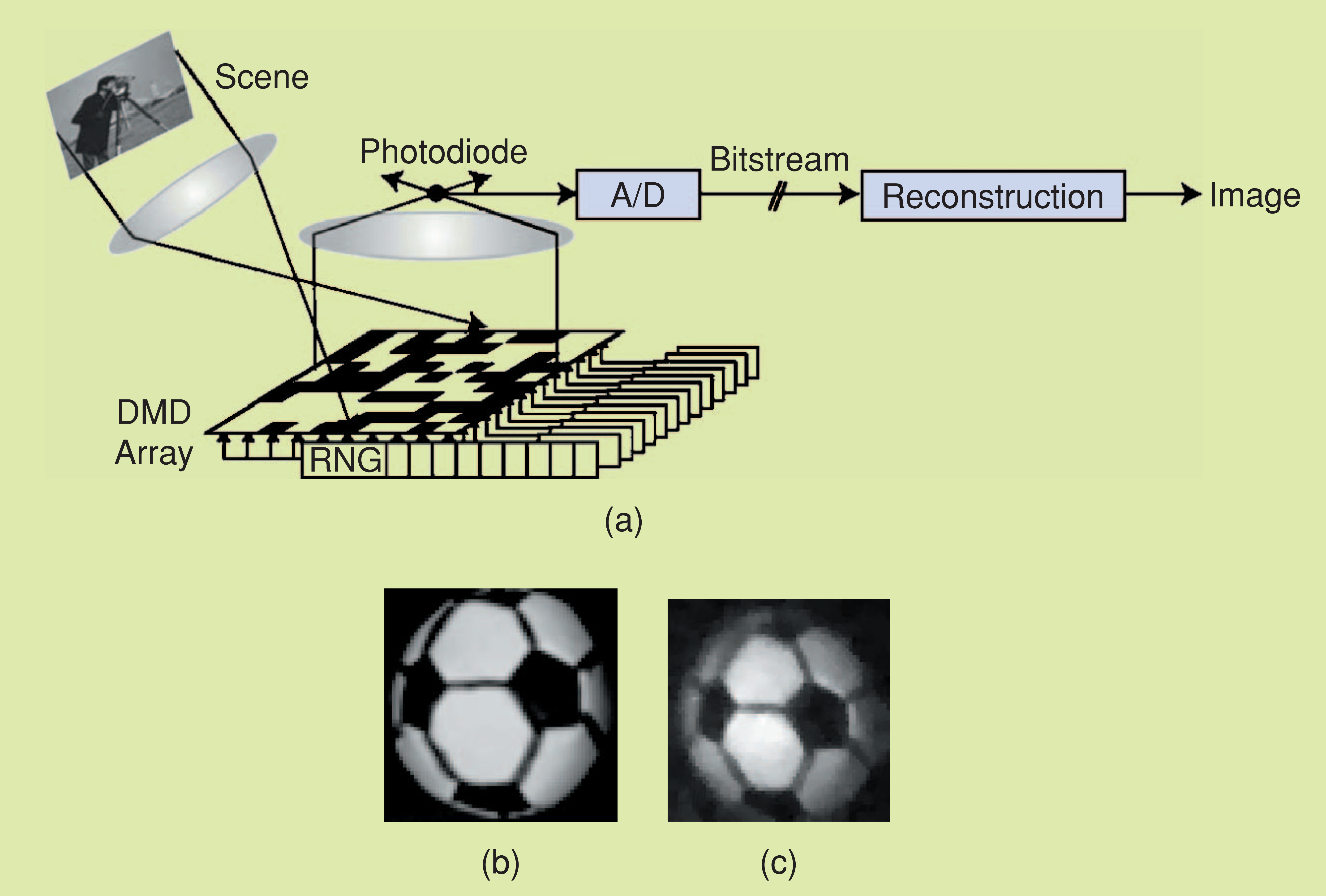
From Presentation by Justin Romberg

圧縮センシングの問題設定



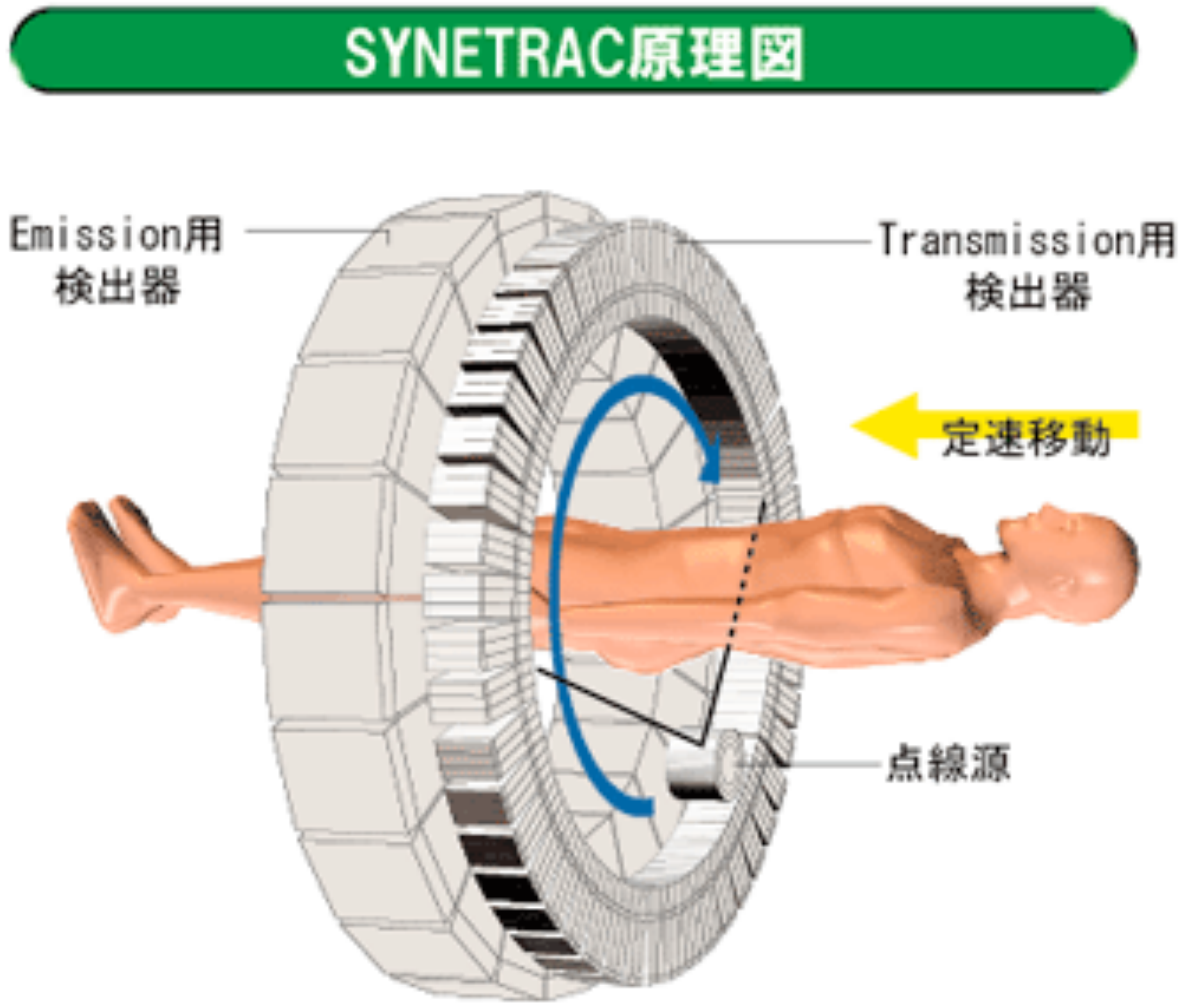
観測ベクトルyからスパースベクトルxを再現したい

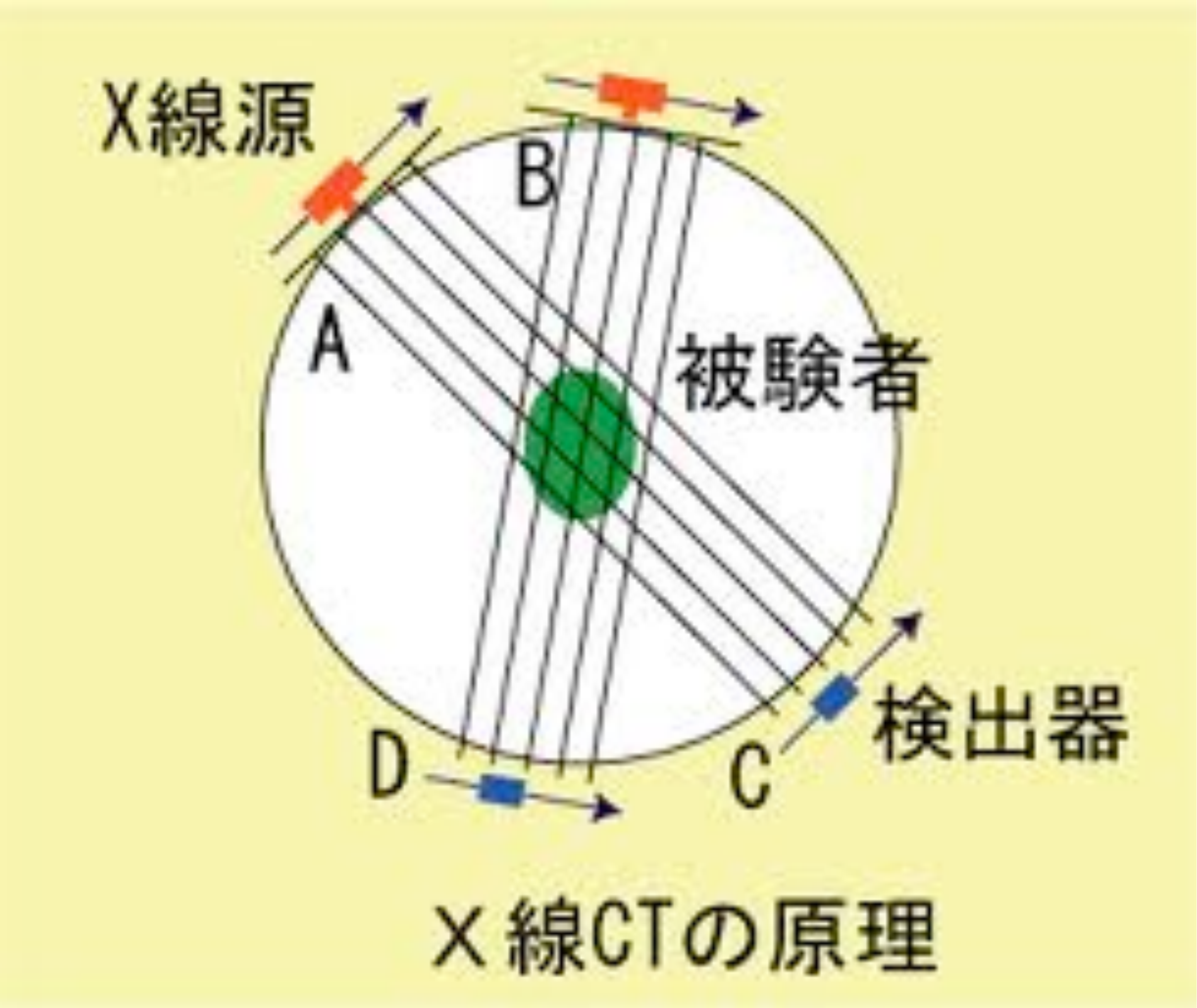
1ピクセルカメラ



[FIG3] (a) Single-pixel, compressive sensing camera. (b) Conventional digital camera image of a soccer ball. (c) 64×64 **black-and-white image** $\widehat{x}$ **of the same ball (**$N = 4{,}096$ **pixels) recovered from** $M = 1{,}600$ **random measurements taken by the camera in (a). The images in (b) and (c) are not meant to be aligned.**

X線CTの原理

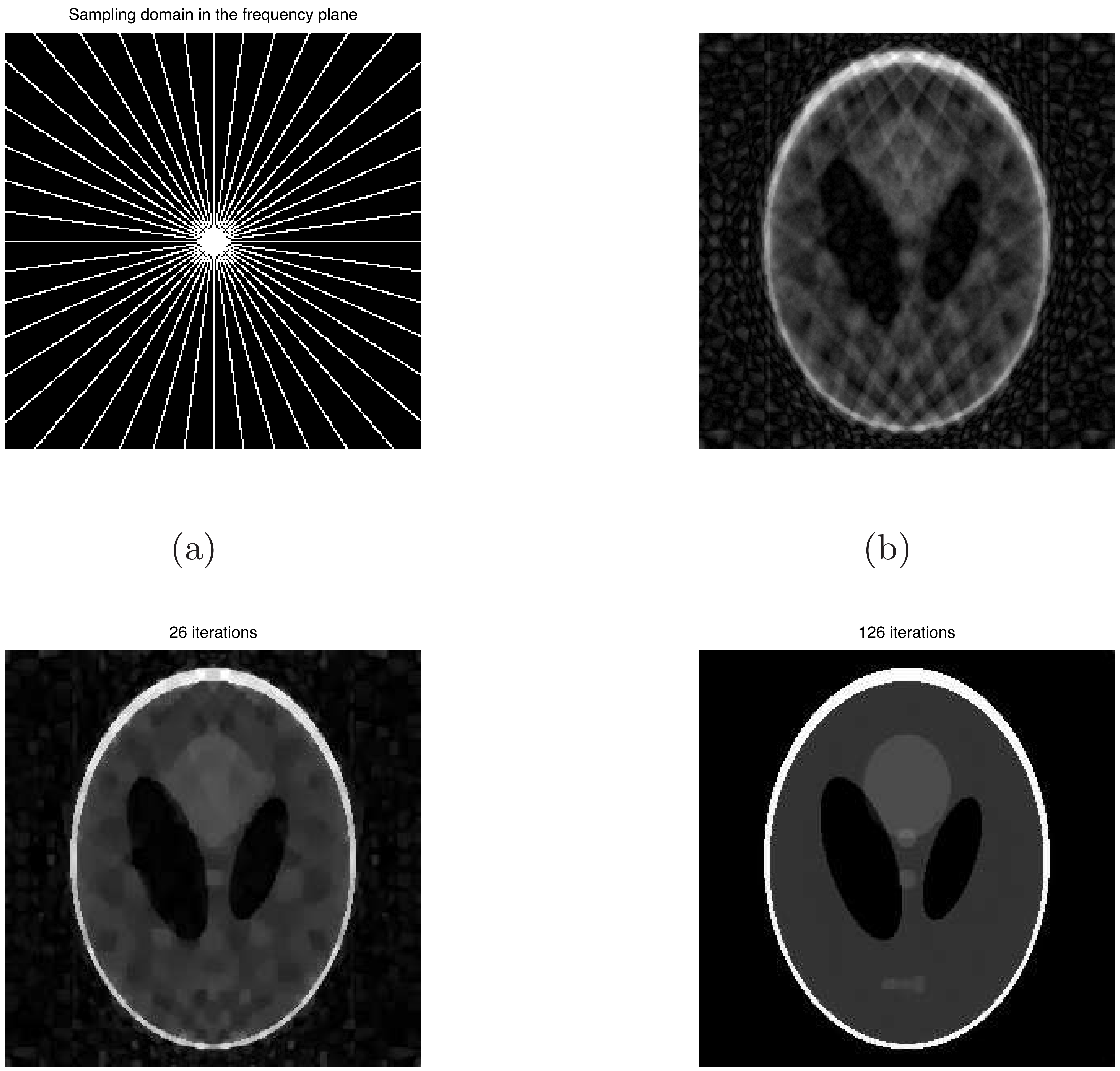




＊　可能な限りサンプル数は減らしたい

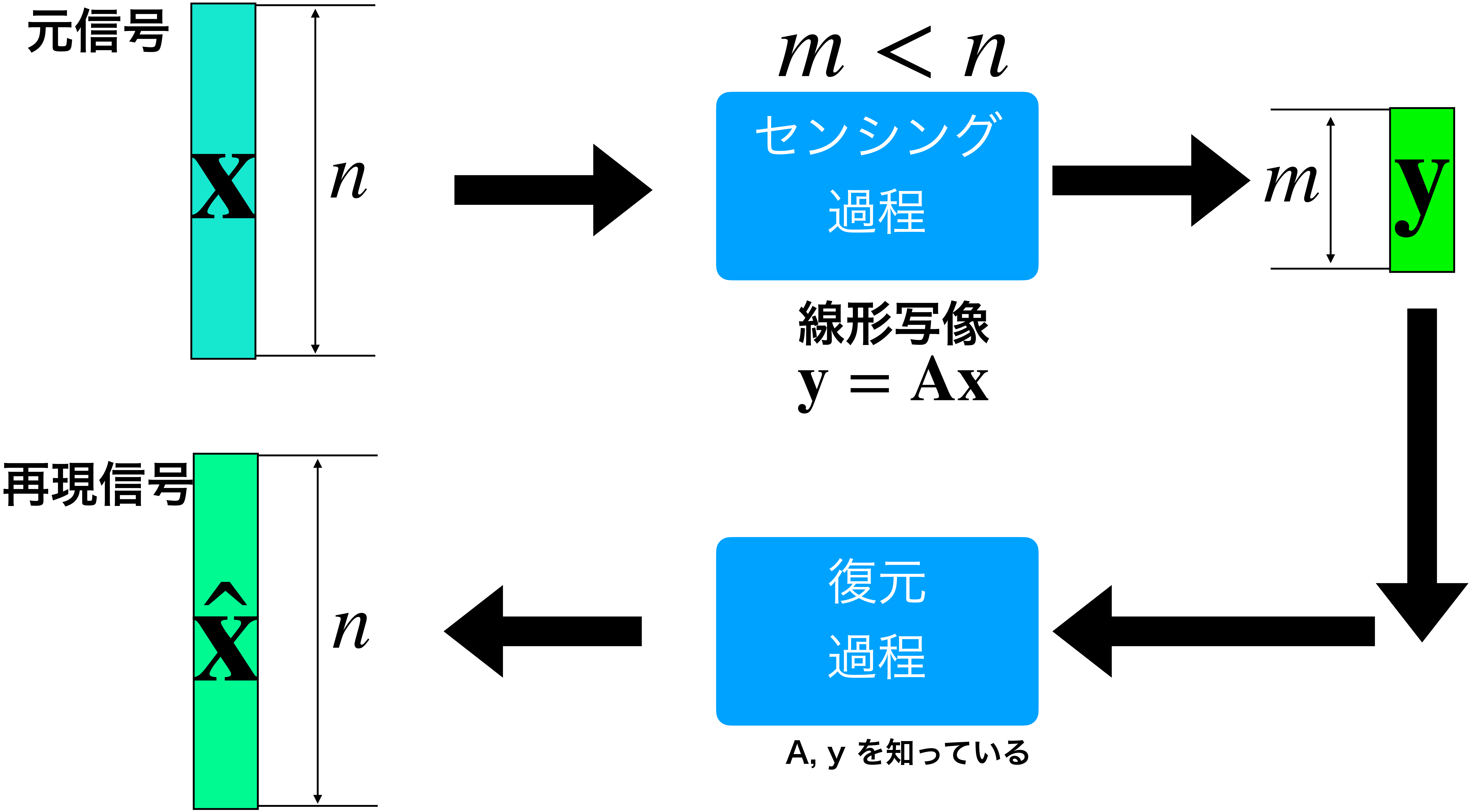
＊　しかし再現画質は向上させたい

X線CTにおける再現画像



(a) (b) (c) (d)

圧縮センシングの問題設定



再現信号はなるべく元信号に近いほうが嬉しい

不良設定問題(1)

一見すると連立方程式を解けばよいだけに見えるが

↓

$$m < n$$

↓

未知数が方程式の数よりも多い不良設定問題になっている

不良設定問題(2)

$$
\begin{aligned}
3x + 2z - y &= 1 \\
-x + 4z + 5y &= -3
\end{aligned}
$$

を解いて下さい(未知数を確定してください)と言っているようなもの。

圧縮センシング問題における信号再現

- 観測行列Aはm x n 行列であり、y からxを再現する問題は不良設定問題(=無数に解がある)になっている。
- 付加条件がないと解が一意に定まらない。
- 「スパースベクトル」の仮定を入れると解の一意性が証明できる場合がある

L0最適化に基づくスパース信号再現

- L0ノルム$\|\mathbf{x}\|_0$は$\mathbf{x}$の非ゼロ要素数を表す
- スパース解を求める次の問題はNP困難問題であり、計算量的に解くことが困難

$$\text{minimize } \|\mathbf{x}'\|_0 \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$$

L1最適化に基づくスパース信号再現

- 元信号ベクトルxがうスパースベクトルであるという前提条件を利用する。

- 次の最適化問題を解く

$$\boxed{\text{minimize } \|\mathbf{x}'\|_1 \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}'}$$

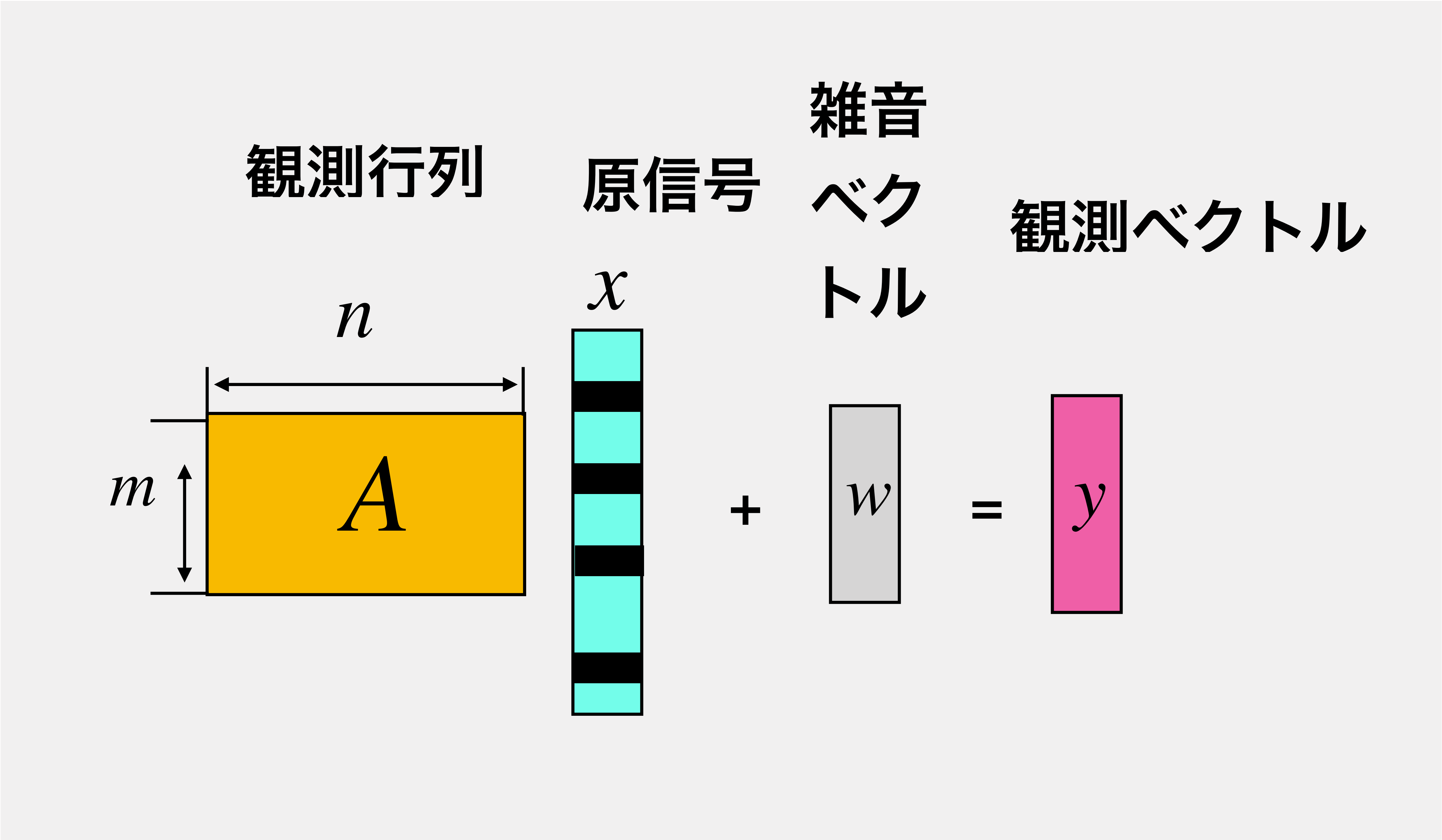
L1最適化 = 線形計画法

minimize $\|\mathbf{x}'\|_1$ subject to $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$

→

- 線形計画法に帰着することができ、効率的に解くことが可能
- 凸計画問題なので、局所解＝大域解
- 元信号の推定能力は高い

雑音ベクトルを含む圧縮センシング問題



観測ベクトルを見て，疎ベクトルを可能な限り正確に推定したい

LASSOに基づくスパース信号再現

LASSO (凸計画問題)

$$\hat{x} = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

二次項

(1) y と Ax の誤差の小さいxを選好
(2) 微分可能

L1-正規化項

(1) 解の唯一性をもたらす
(2) スパースベクトルを選好
(3) 微分不可能（原点にて）

- 凸計画ソルバ利用して解く
- 勾配法型アルゴリズムで解く

近接写像と近接勾配法

（注意）このページ内容は少し難しいので雰囲気を掴むだけでOK

近接写像

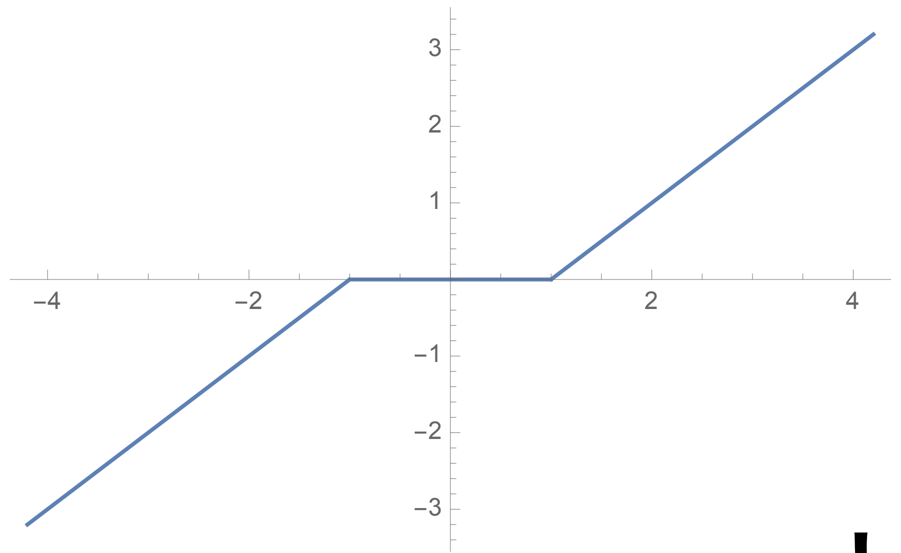
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{Prox}_{\gamma f}(x) := \arg\min_{u \in \mathbb{R}^n} f(u) + \frac{1}{2\gamma}\|x - u\|_2^2$$

(1) 射影演算子に似ている
(2) 微分不能関数を滑らかに

例: L1正規化項に対応する近接写像

$f(x) := |x| \ (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$



$\mathrm{Prox}_{\gamma f}(x) := \mathrm{sign}(x) \max\{|x| - \gamma, 0\} =: \eta(x; \gamma)$

ソフトしきい値関数

ゴール　$\text{minimize } f(x) + g(x) \ \ s.t. \ x \in \mathbb{R}^n$

$f(x)$:　微分可能
$g(x)$:　簡潔な近接演算子を持つ

近接勾配法 (proximal gradient method)

$$x^{n+1} := \mathrm{prox}_{\gamma g}(x^n - \gamma \nabla f(x^n))$$

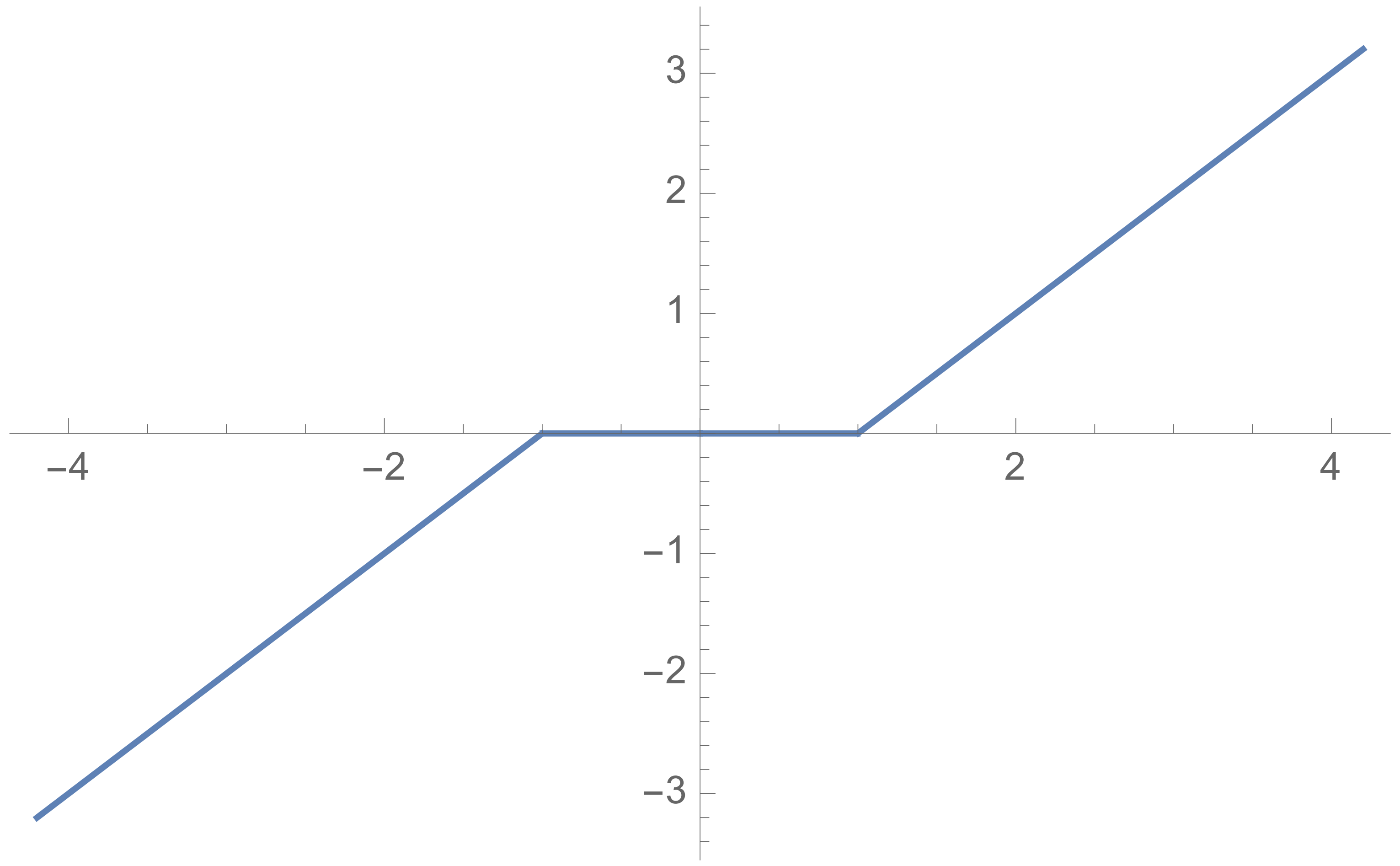
いくつかの条件が満足されるならば、近接勾配法において探索点は最小点に収束する

スパース信号再現アルゴリズム:ISTA

ISTA (Daubechies et.al, 2004)

$$r_t = s_t + \beta A^T(y - As_t)$$: 勾配ステップ

$$s_{t+1} = \eta(r_t; \tau)$$: 近接写像ステップ



$$\eta(x;\gamma) = \mathrm{sign}(x)\max\{|x| - \gamma, 0\}$$

ソフトしきい値関数

(1) LASSO解に収束する

(2) 収束が遅い β と τ はA^TA の最大固有値に基づき設定

ISTAに基づくスパース信号再現過程 (1)

基本設定　$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}$

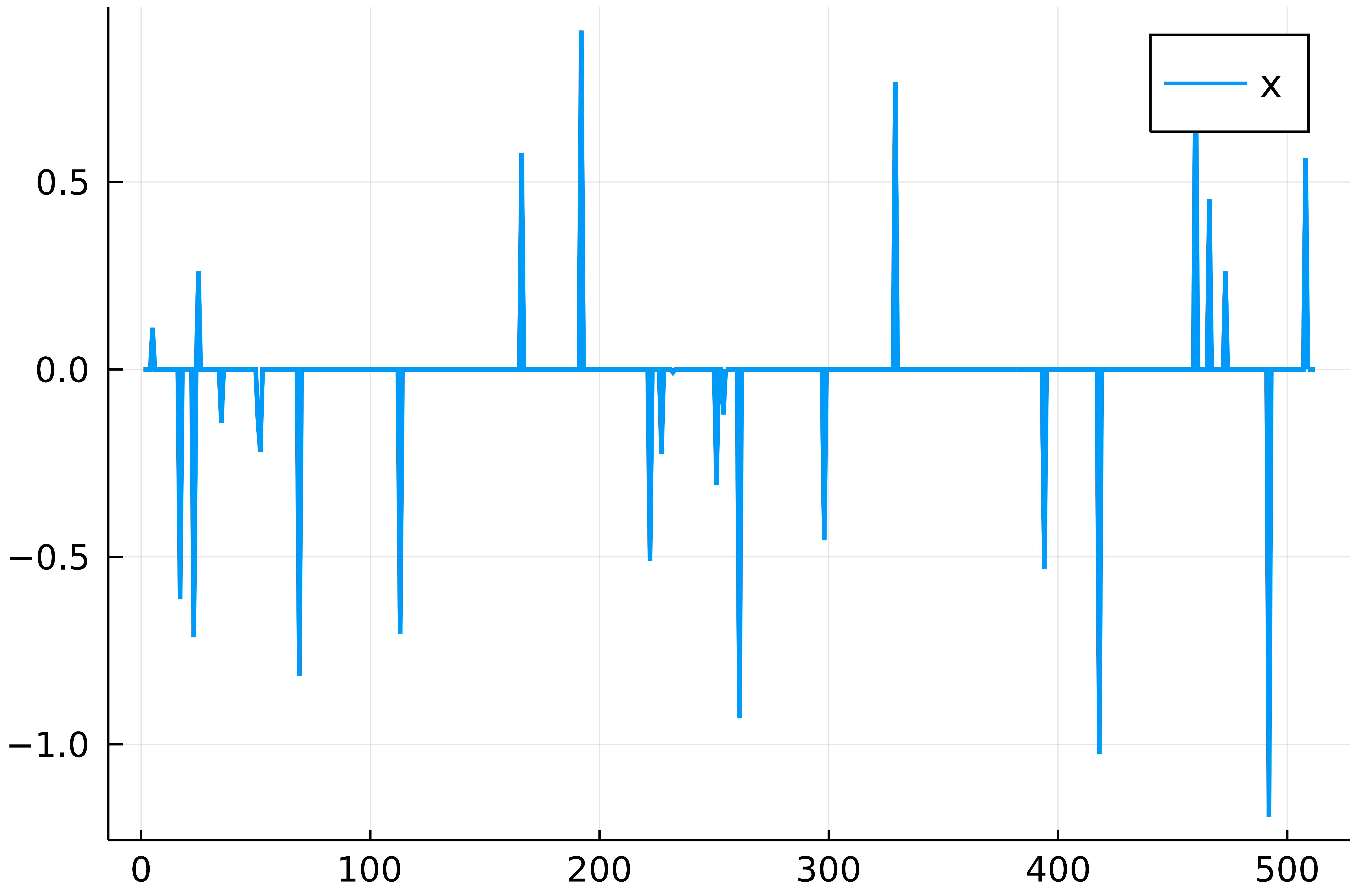
(1) n = 512 : 元信号長, スパース信号ベクトルの長さ
(2) m = 256: 観測ベクトル長
(3) σ = 0.1 : ガウス雑音ベクトル(平均ゼロ)の標準偏差
(4) Aの各要素は平均ゼロ、分散1のガウス乱数により生成

スパース信号の生成過程

(1) 確率p=0.05 のベルヌーイ過程(コイントス) により非ゼロ位置を決定
(2) 非ゼロ成分は平均ゼロ、分散1のガウス乱数

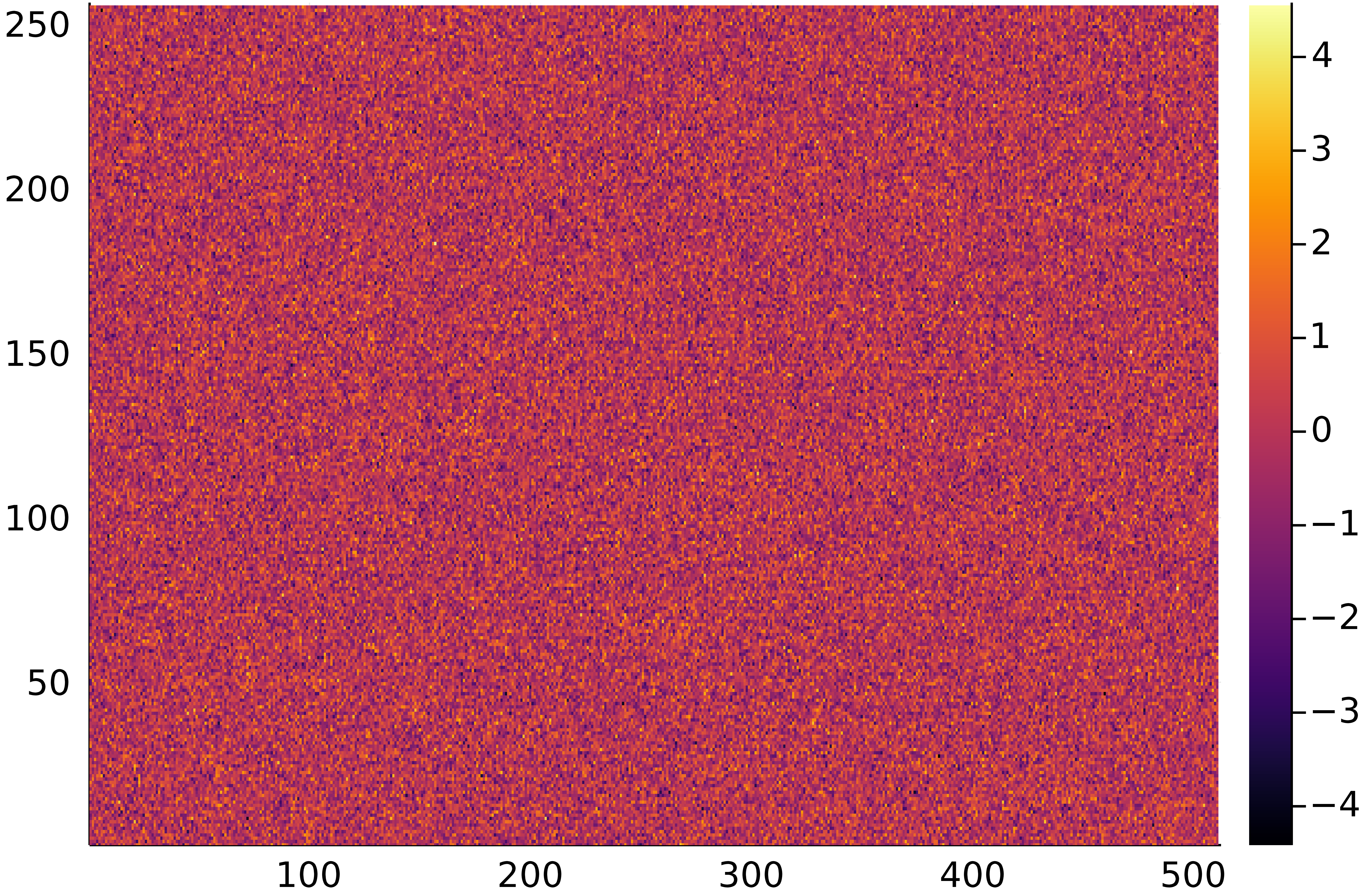
ISTAに基づくスパース信号再現過程 (2)

スパース信号ベクトル(原信号)の例



ISTAに基づくスパース信号再現過程 (2)

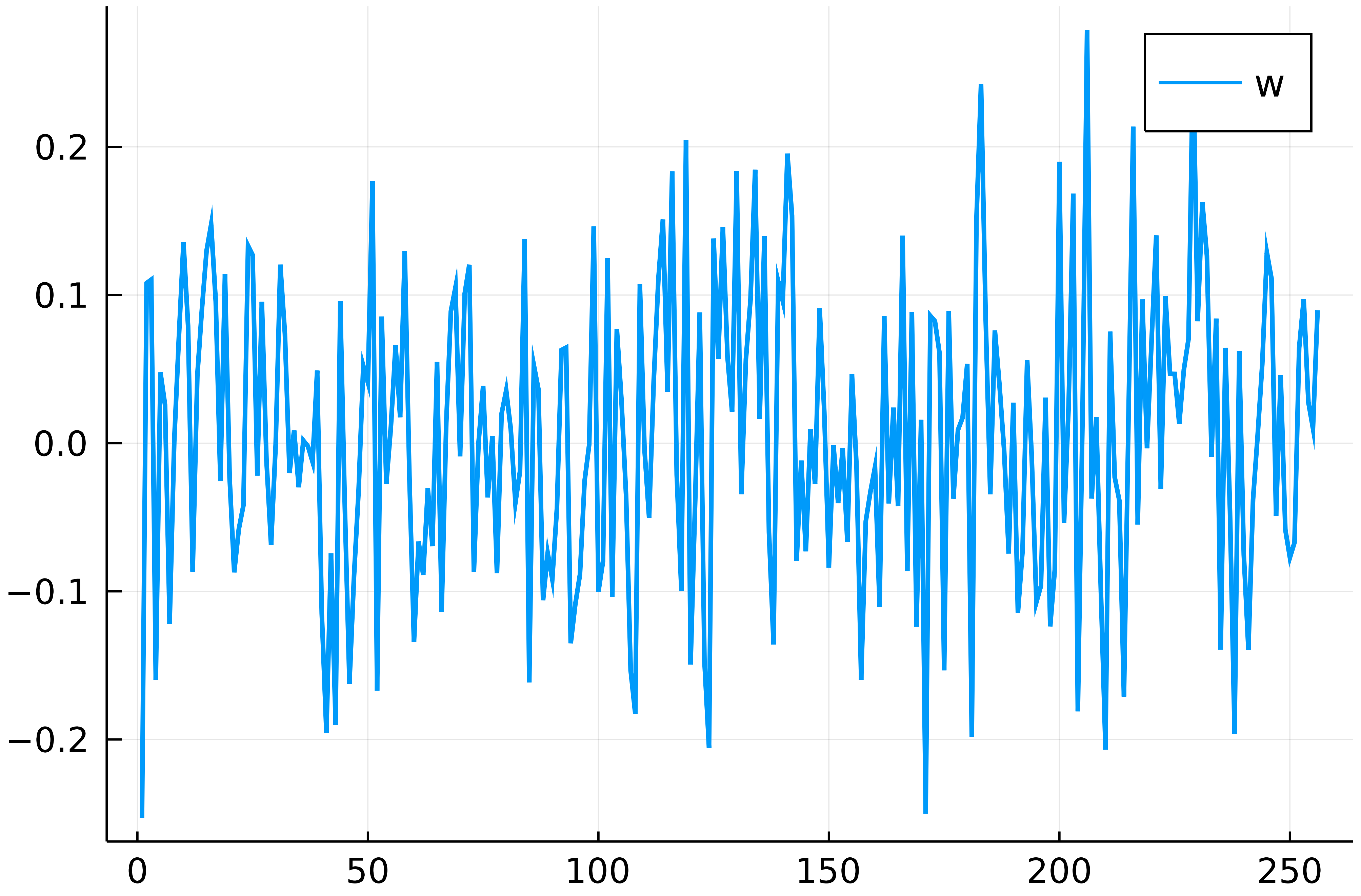
観測行列A (各要素は平均0, 分散1のガウス分布に従う)



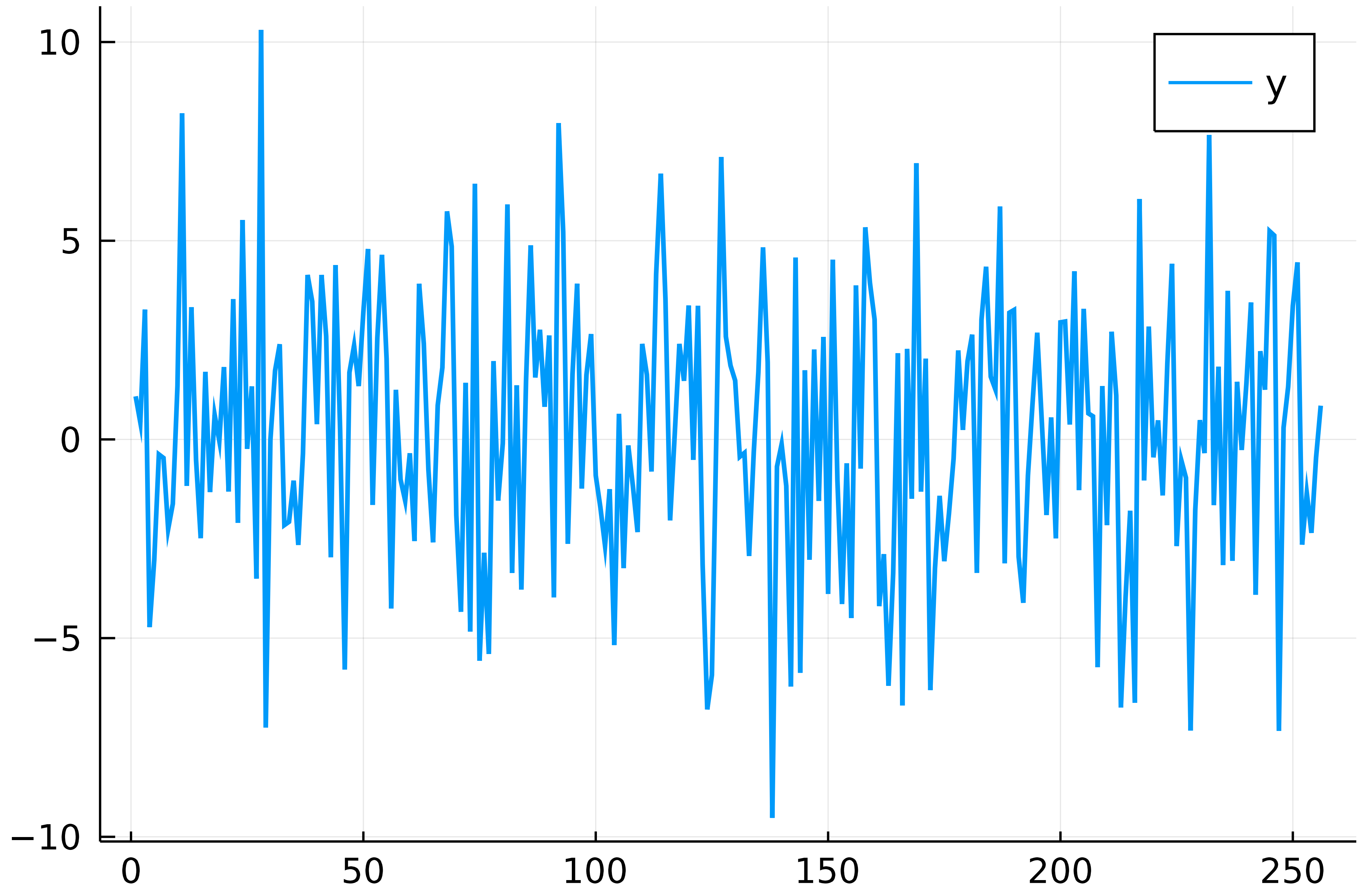
ISTAに基づくスパース信号再現過程 (3)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

雑音ベクトル w



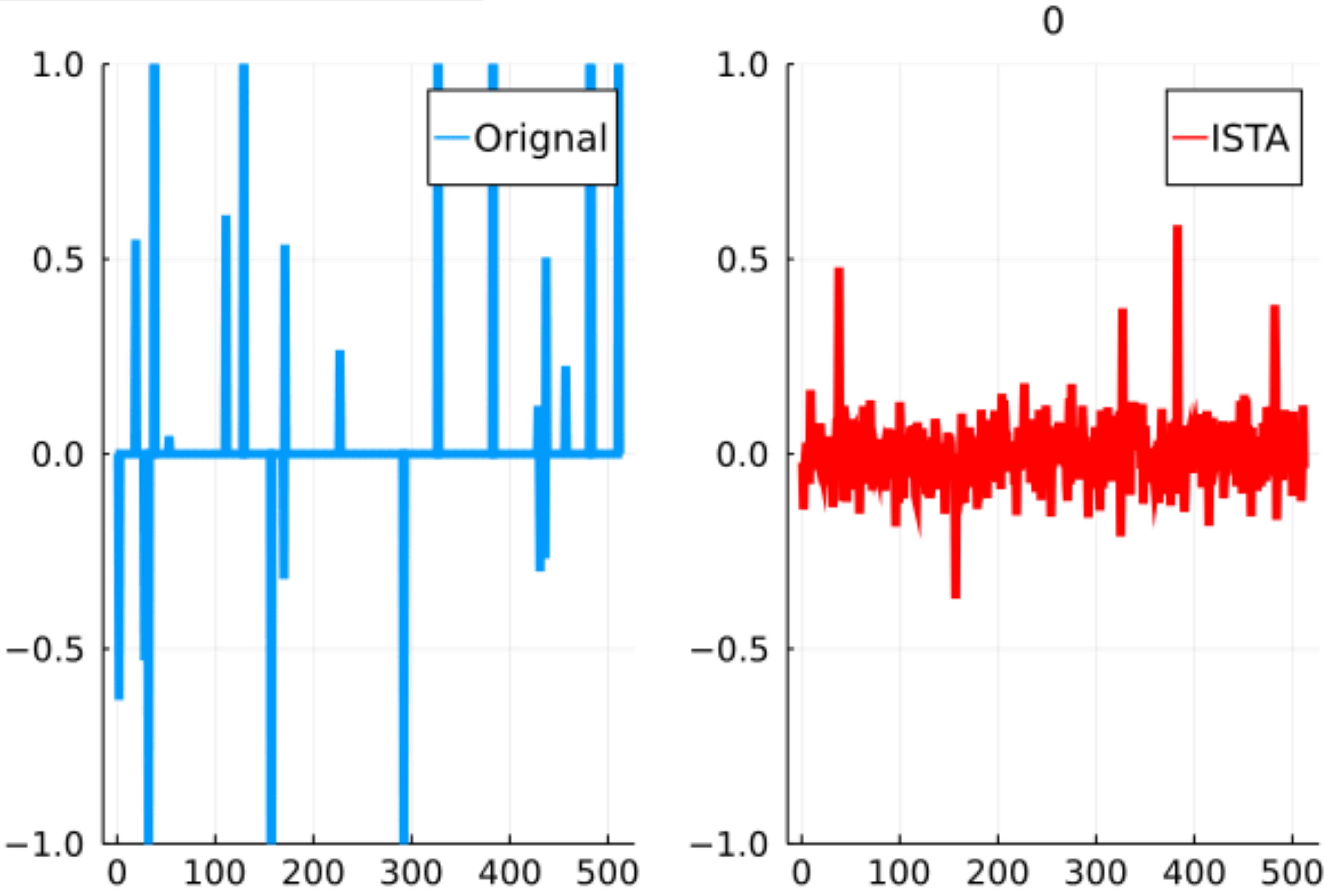
観測ベクトル y



ISTAに基づくスパース信号再現過程 (4)

ISTA

$$r_t = s_t + \beta A^T(y - As_t)$$
$$s_{t+1} = \eta(r_t; \tau)$$



本講義のまとめ

- 世の中の意味のある情報の多くはスパース信号ベクトル x 行列の形に表すことができる
- 圧縮センシングの動機と枠組み
- スパース信号再現のためのL1再構成⇒線形計画問題
- LASSO定式化とISITA
- 比較的簡単なアルゴリズムでスパース信号再現が可能