

演習問題 (11) 解答

問題 1

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

問題 2

ヘッセ行列を求めると

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

である。2 次形式を考えると

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 4x_2^2 \quad (3)$$

となる。したがって、任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4)$$

が成立する。すなわち、このヘッセ行列は半正定値となるため、この関数は凸関数である。

問題 3

$$f(x) = e^{ax}$$

を二階微分すると

$$f''(x) = a^2 e^{ax} \quad (5)$$

を得る。任意の $a, x \in \mathbb{R}$ について $a^2 e^{ax} \geq 0$ であることから $f(x)$ は convex 関数である。