

# 確率と最適化

凸集合

# 凸集合

---

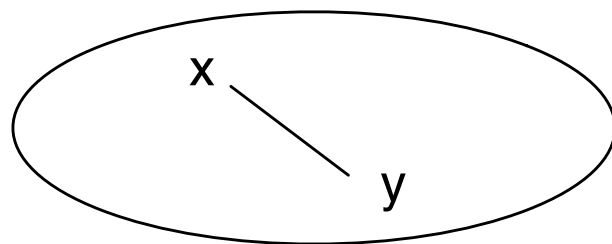
集合  $C$  は  $\mathbb{R}^n$  の部分集合とする。任意の  $x, y \in C$  と任意の  $\theta \in \mathbb{R} (0 \leq \theta \leq 1)$  について

$$\theta x + (1 - \theta)y \in C$$

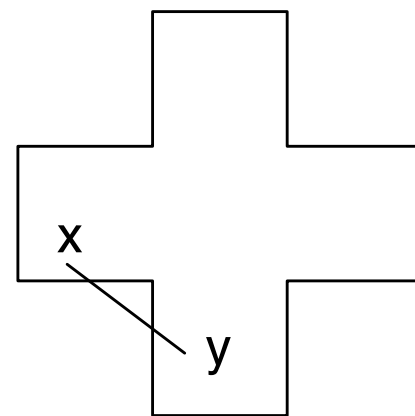
が成り立つとき、 $C$  は凸集合 (convex set) である、という。

## 凸集合の定義の意味

$\theta x + (1 - \theta)y$  は点  $x, y$  をつなぐ線分となるため、  
“ $C$  内の任意の2点をつなぐ線分が完全に  $C$  に含まれる場合、 $C$  は凸である” ということになる。



凸集合



凸集合ではない

# 重要な凸集合

---

これから取り上げる  $\mathbb{R}^n$  の部分集合はすべて凸集合である。

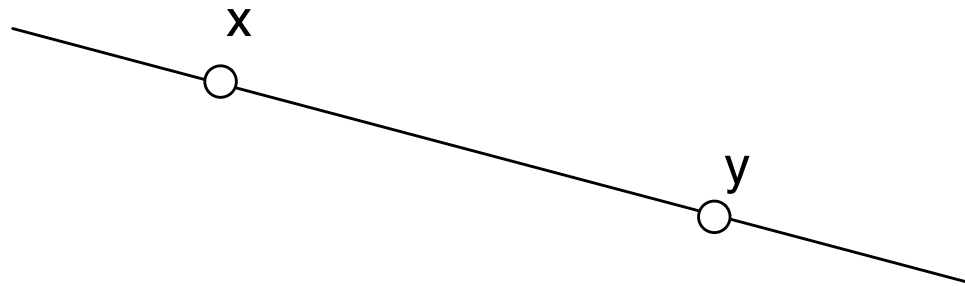
# 直線

---

相異なる  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  について、

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

と表される集合を直線 (line) と呼ぶ。



# 超平面 (hyperplane)

---

$a \in \mathbb{R}^n$  (法線ベクトル)

$b \in \mathbb{R}$  に対して、集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}, \quad (a \neq 0)$$

を超平面と呼ぶ。

- $n = 2$ :  $P$  は直線 (自由度 1)
- $n = 3$ :  $P$  は平面 (自由度 2)

ベクトル  $a$  に直交する原点を通る超平面：

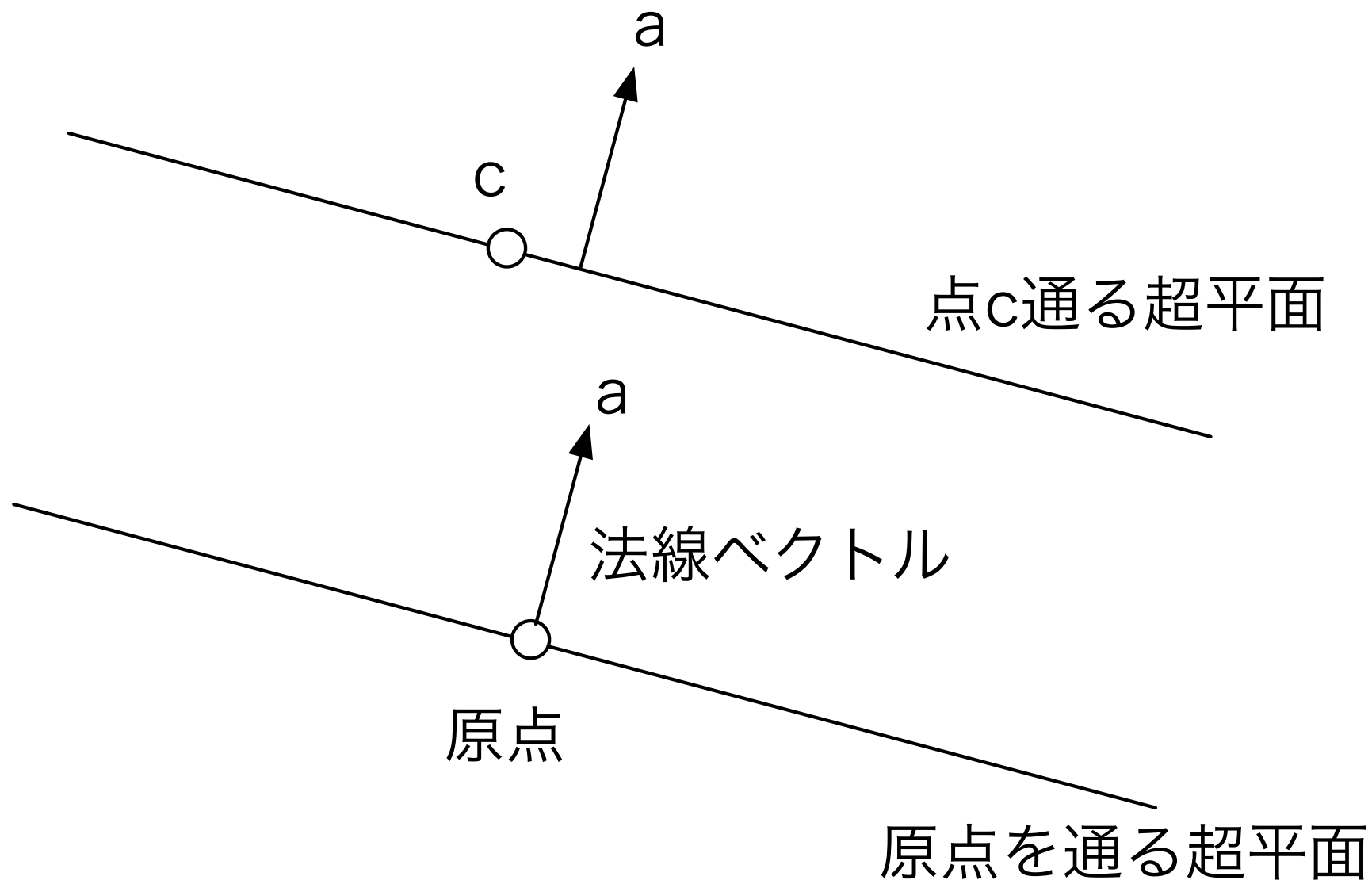
$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = 0\}$$

上の超平面を点  $c \in \mathbb{R}^n$  を通るようにシフトすると

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T (x - c) = 0\}$$

となる。

$$a^T (x - c) = 0 \Leftrightarrow a^T x = b (b = a^T c)$$





# クイズ

---

## 超平面

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}, \quad (a \neq 0)$$

が凸集合であることを示せ。

# クイズ解答

---

$x \in P, y \in P$  と仮定する。  $0 \leq \theta \leq 1$  を満たす任意の  $\theta$  について  $z = \theta x + (1 - \theta)y$  と置く。この仮定のもとに

$$a^T z + b = a^T (\theta x + (1 - \theta)y) \quad (1)$$

$$= \theta(a^T x) + (1 - \theta)(a^T y) \quad (2)$$

$$= \theta b + (1 - \theta)b \quad (3)$$

$$= b \quad (4)$$

が成立し  $z \in P$  となるため、 $P$  は凸集合である。

# アフィン集合

---

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

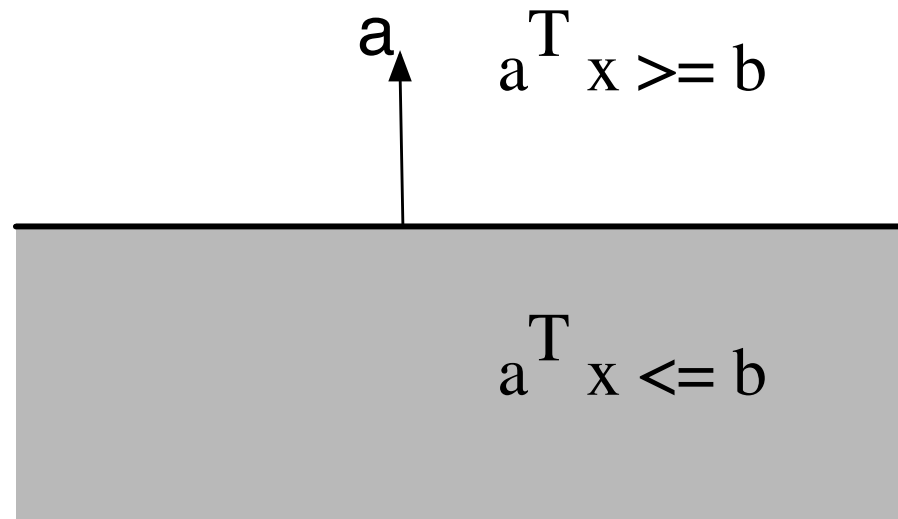
直線、超平面を一般化した集合。

# 半空間 (halfspace)

---

$a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$  のとき、

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}, \quad (a \neq 0)$$



# 支持超平面 (supporting hyperplane)

集合  $C \subset \mathbb{R}^n$  の境界上の点  $x_0$  を通る超平面  $P$ :

$$P = \{x : a^T(x - x_0) = 0\}$$

が

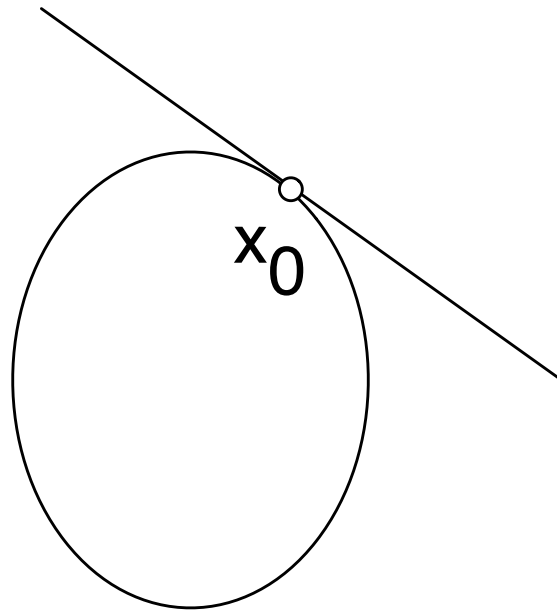
$$\forall x \in C, \quad a^T(x - x_0) \leq 0, a \neq 0$$

を満たすとき、 $P$  は集合  $C$  の点  $x_0$  における支持超平面と呼ぶ。

$C$  が滑らかな集合 (多様体) の場合、支持超平面は  $C$  の接平面となる。

## 支持超平面定理

集合  $C$  が凸集合の場合、 $C$  の境界の任意の点において、支持超平面が存在する。



# 超球 (hypersphere) とノルム球

---

## 超球

$$B_2(x_c, r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_c||_2 \leq r\}$$

## ノルム球

$$B_p(x_c, r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_c||_p \leq r\}$$

$$||x||_p \equiv \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

# クイズ

---

$$n = 2, x_c = (0, 0)^T, r = 1$$

とする。 $\ell_1, \ell_2$ -ノルムに基づくノルム球を図示せよ。



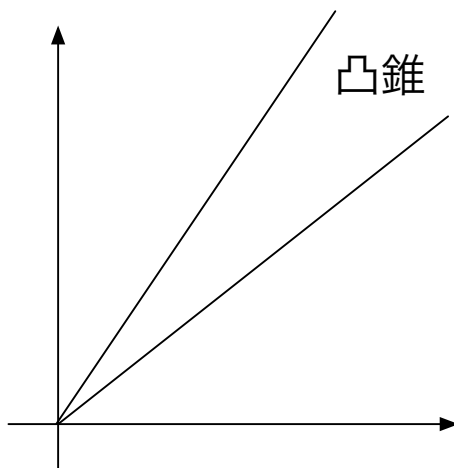
# 凸錐

---

集合  $S \subset \mathbb{R}^n$  が

$$\forall x \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x \in S$$

を満たすとき、 $S$  を錐 (cone) と呼ぶ。凸集合である錐を凸錐と呼ぶ。



# 多面体 (polytope, polyhedra)

有限個の半空間の共通集合を多面体 (polyhedra) という。すなわち、 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

$$P \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

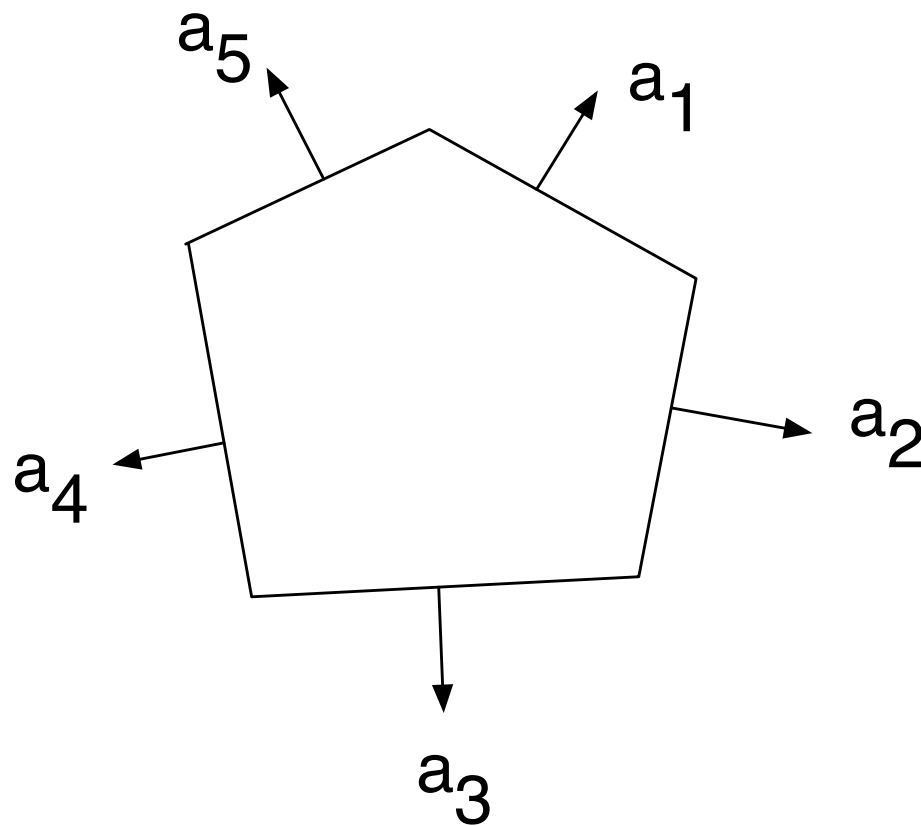
である。不等号は要素ごとの不等号を表す。  
半空間  $H_i$  を

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

と定義する。有界な polyhedra を polytope と呼ぶ。

多面体  $P$ :

$$P = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_m$$



# サブレベル集合

---

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  について

$$C_\alpha \equiv \{x \in \text{dom} f : f(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

を  $f$  のサブレベル集合と呼ぶ。凸関数のサブレベル集合は凸集合になる。

クイズ

$f(x_1, x_2) \equiv x_1^2 + 2x_2^2$  について、サブレベル集合  $C_1$  を図示せよ。

# 凸集合の共通集合

---

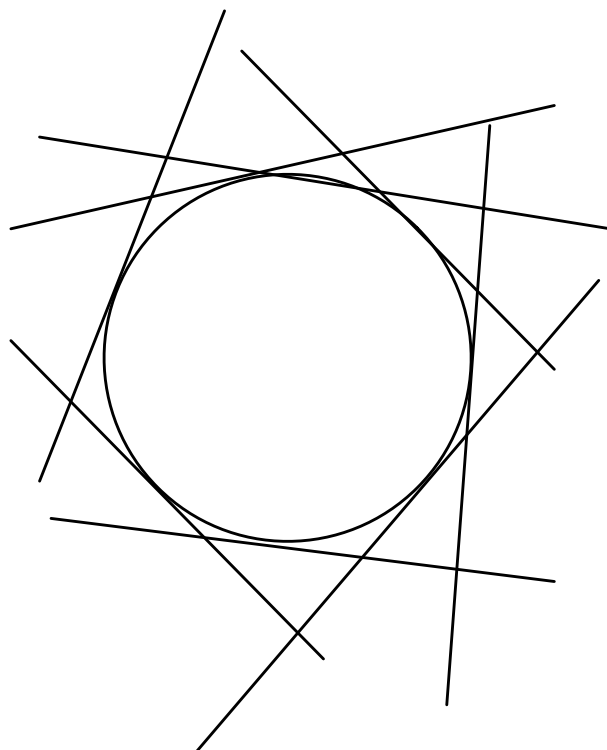
$C_1, C_2, \dots, C_k \subset \mathbb{R}^n$  をそれぞれ凸集合とする。  
それらの共通集合

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k$$

は凸集合となる。

無限個の凸集合の共通集合もやはり凸集合となる。

# 凸集合の半平面の共通集合としての表現



$$S = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$$

$H_i$  は  $S$  の支持超平面からなる半空間

## 凸計画問題の標準形

$f_0, f_1, \dots, f_m$  は凸関数。

minimize  $f_0(x)$

subject to  $f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

$a_i^T x = b, \quad i = 1, 2, \dots, p$

$$\mathcal{F} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, a_j^T x = b, \\ i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p\}$$

凸計画問題の実行可能領域  $\mathcal{F}$  は凸関数のサブレベル集合とアフィン集合の共通集合であるので、凸集合となる。

## 凸計画問題のもうひとつの見方

凸関数  $f_0$  を凸集合である実行可能領域  $\mathcal{F}$  において、最小化する問題。



# 線形計画法

$$\text{minimize } c^T x$$

$$\text{subject to } a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

## 線形計画問題のもうひとつの見方

- 目的関数  $c^T x$  を多面体である実行可能領域  $F$  において、最小化する問題。
- 凸計画問題のひとつのクラス