最適化理論

凸計画問題

凸計画問題の標準形

$f_0, f_1, \ldots, f_m$ は凸関数。

$$\begin{aligned} \text{minimize } & f_0(x) \\ \text{subject to } & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & a_i^T x = b, \quad i = 1, 2, \ldots, p \end{aligned}$$

練習問題

P1, P2のうちどちらが凸計画問題か。

$$
\begin{aligned}
\text{P1:}\ \ \text{minimize}\ & ||x||_2^2 \\
\text{subject to}\ & x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{P2:}\ \ \text{minimize}\ & ||x||_2^2 \\
\text{subject to}\ & x_1^2 - x_2^2 - 1 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 = 1
\end{aligned}
$$

暗黙の制約条件

$$D = \bigcap_{i=0}^{m} \mathrm{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{dom} h_i$$

- D は最適化問題の定義域と呼ばれる。
- 実行可能領域は、D の部分集合となる。

大域最適解

$$F \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, a_j^T x = b,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, p\}$$

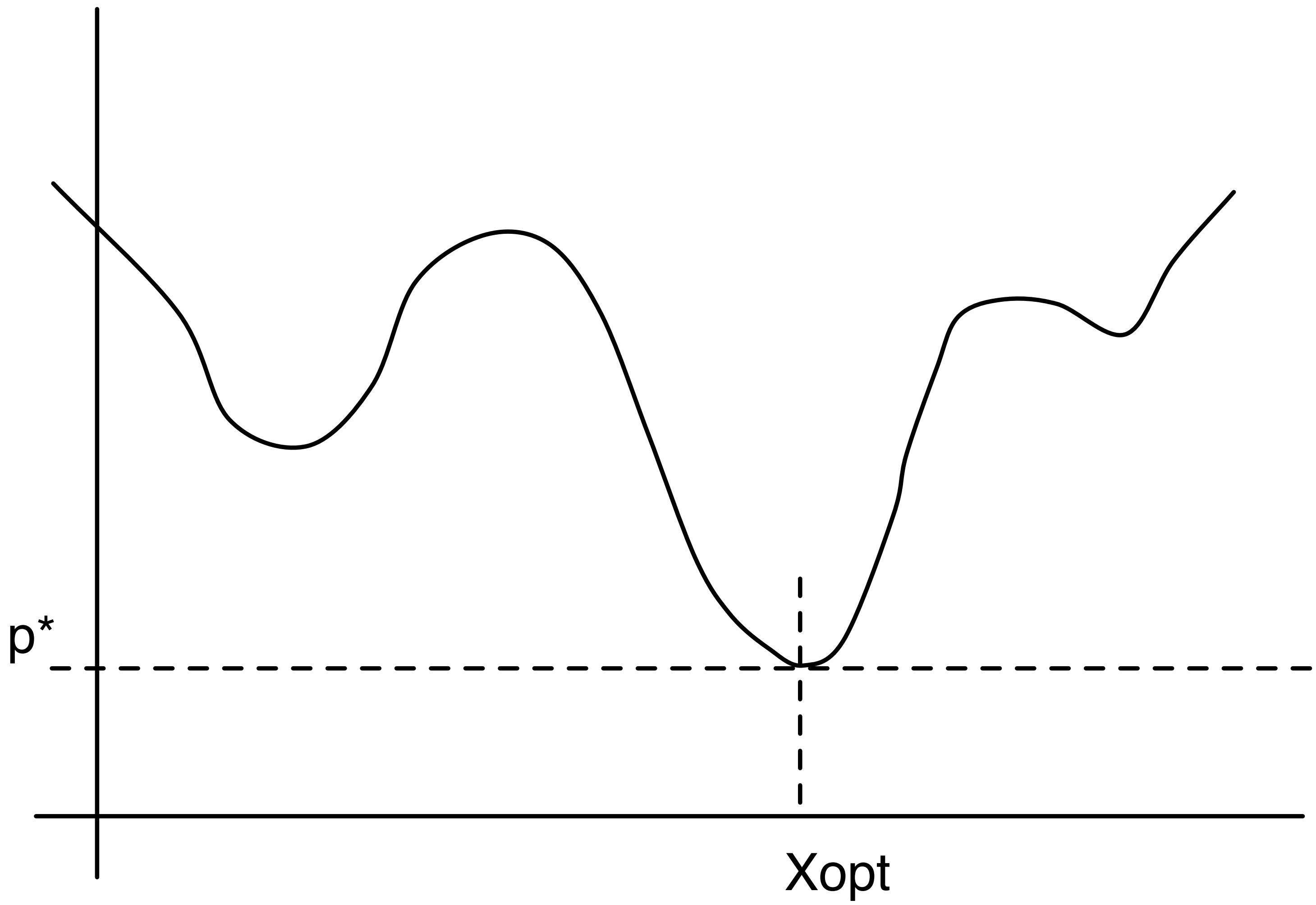
最適値

$$p^* = \inf_{x \in F} f_0(x)$$

最適解集合(大域的最適解)

$$X_{opt} = \{x \in F : f_0(x) = p^*\}$$

凸ではない一般の非線形関数の場合



局所最適解

$x \in F$ が局所最適解である $\Leftrightarrow$ ある $R > 0$ が存在し、

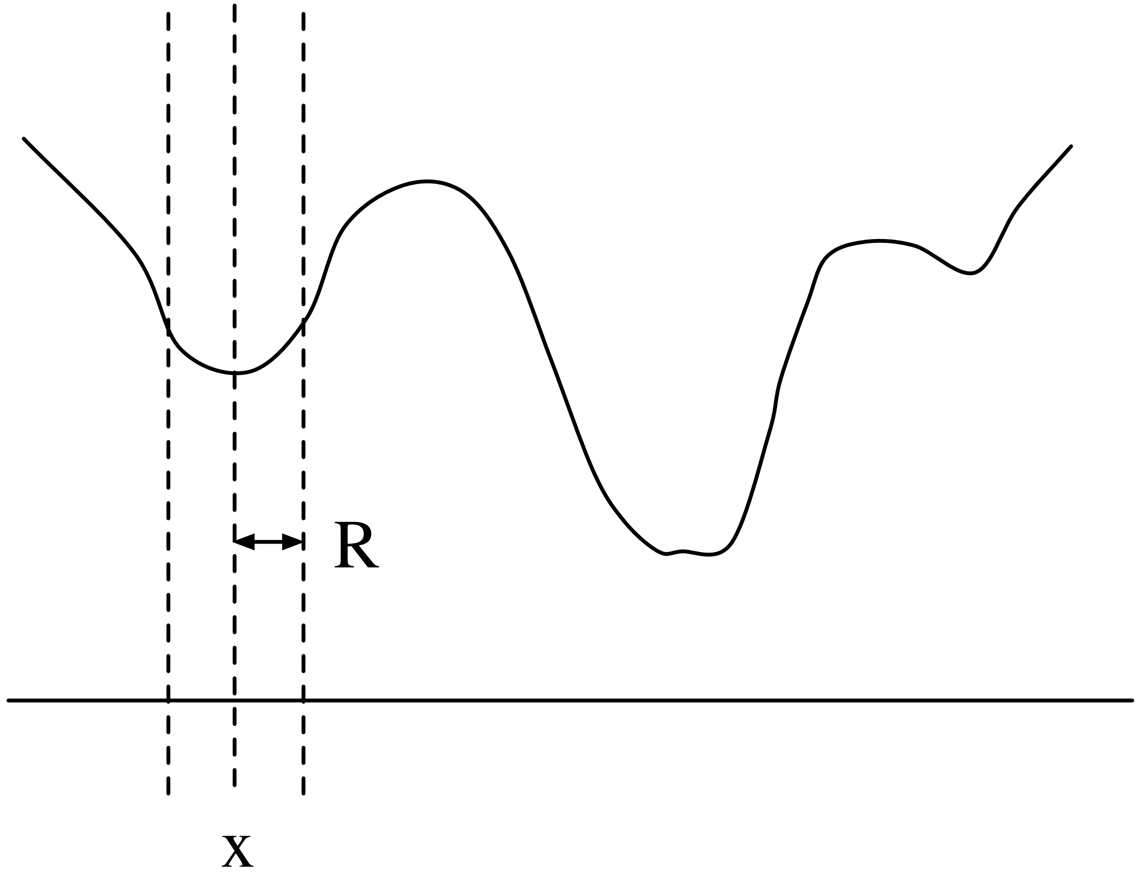
$$\forall z \in F \cap \{y : ||y - x||^2 \leq R\}$$

について

$$f_0(z) \geq f_0(x)$$

が成り立つ。

凸ではない一般の非線形関数の場合



凸計画問題の特徴

- “局所最適解＝大域最適解” が成り立つ。

証明のスケッチ

$x \in F$ を局所解とする。また、$f_0(y) < f_0(x)$ を満たす $y \in F (y \neq x)$ が存在するものと仮定する。

- F の凸性より、x と y をつなぐ線分は F に含まれる。$\Leftrightarrow \theta x + (1-\theta)y \in F, \quad 0 \leq \theta < 1$
- f_0 の凸性より、

$$f_0(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f_0(x) + (1-\theta) f_0(y)$$

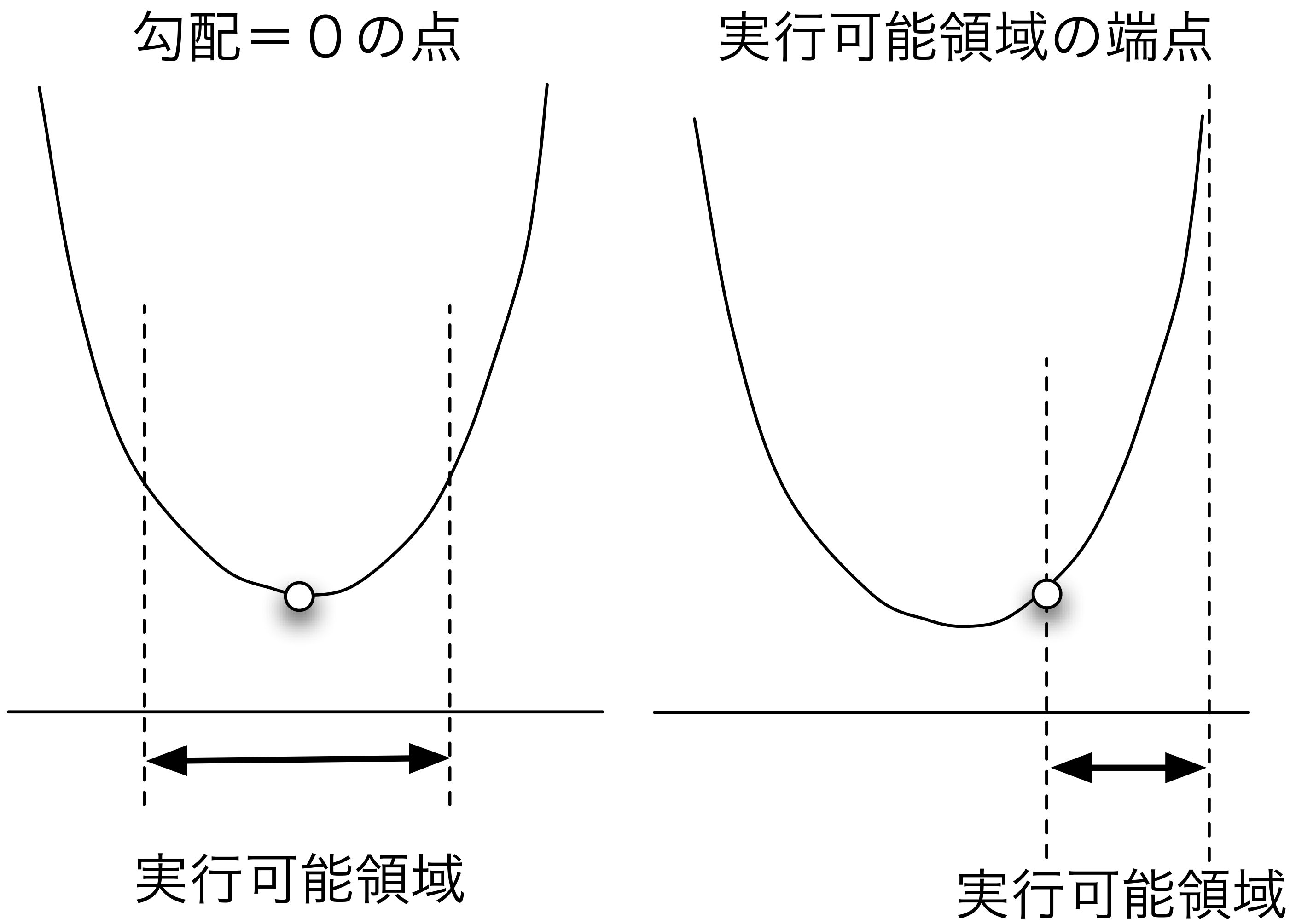
$$< f_0(x)$$

以上より、どんなにRを小さくとっても、$f_0(z) < f_0(x)$を満たすベクトルzがR-近傍とFの共通集合内に存在する。$\Rightarrow x$は局所解ではない。

$\Rightarrow y$の存在仮定と矛盾

$\Rightarrow$ 局所解＝大域解

凸計画問題の最適解



無制約凸関数最小化

f_0 を凸関数とする。

$$\text{minimize } f_0(x) \text{ s.t. } x \in \operatorname{dom} f_0$$

この場合も "局所最適解＝大域最適解" が成り立つ。f_0 が微分可能な場合には局所解条件

$$\nabla f_0(x) = 0$$

を解くことにより、大域最適解を見いだすことができる。

無制約凸関数最小化の具体例

練習問題

次の無制約最適化問題を $\nabla f_0(x) = 0$ より解け。

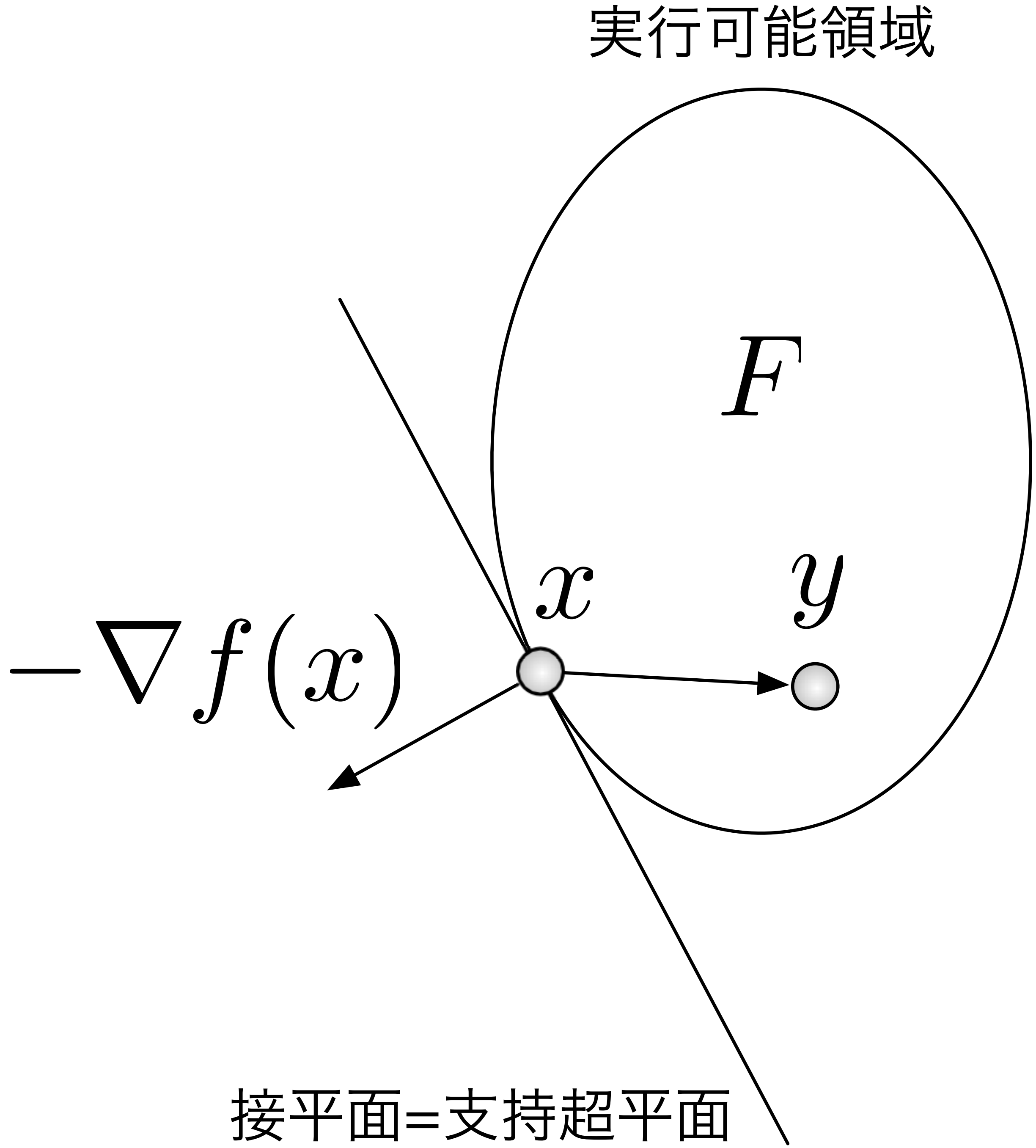
$$\text{minimize } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \text{ s.t. } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$$

凸計画問題の局所解条件

$x \in F$ を局所解 (= 大域解) であることと

$$\forall y \in F, \quad \nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0$$

が成り立つことは同値である。



実行可能領域
F
x
y
$-\nabla f(x)$
接平面=支持超平面

練習問題

次の凸最適化問題の最適解について、前ページのような図的説明を作りなさい。

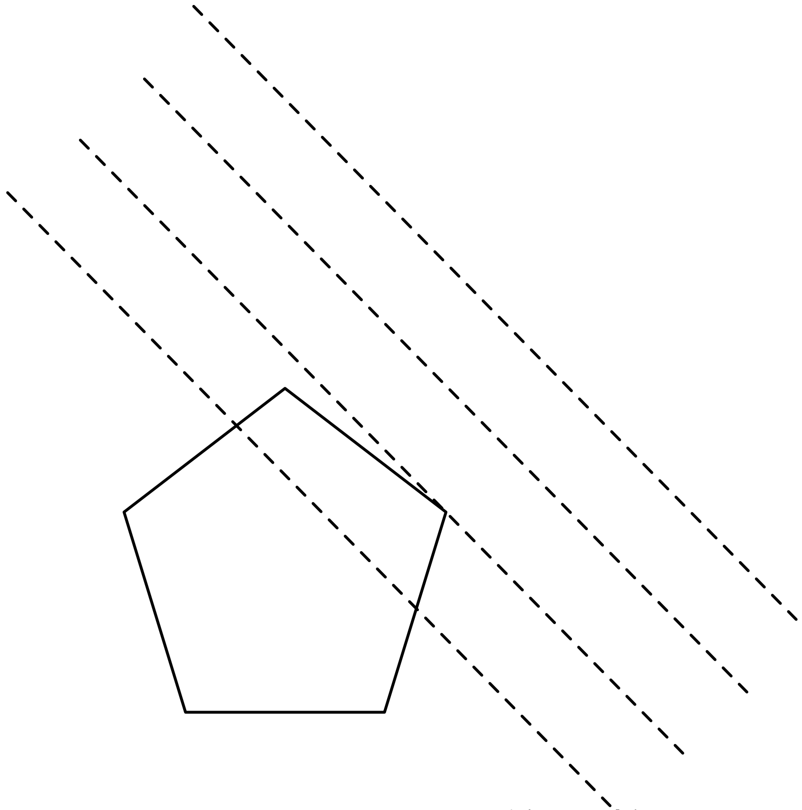
$$
\begin{aligned}
\text{minimize } & (x-2)^2 + (y-2)^2 \\
\text{subject to } & x^2 + y^2 - 1 \leq 0
\end{aligned}
$$

凸計画問題のサブクラス

- **線形計画問題** (Linear programming, LP)
- 2**次計画問題**(Quadratic programming, QP)
- 2**次制約**2**次計画問題**(Qudratic constraint quadratic programming, QCQP)
- 2**次錐画問題**(Second order cone programming, SOCP)
- **半正定値計画問題**(Semi-definite programming, SDP)

線形計画問題LP

$$\begin{aligned} \text{minimize } & c^T x \\ \text{subject to } & Gx \leq h \\ & Ax = b \end{aligned}$$

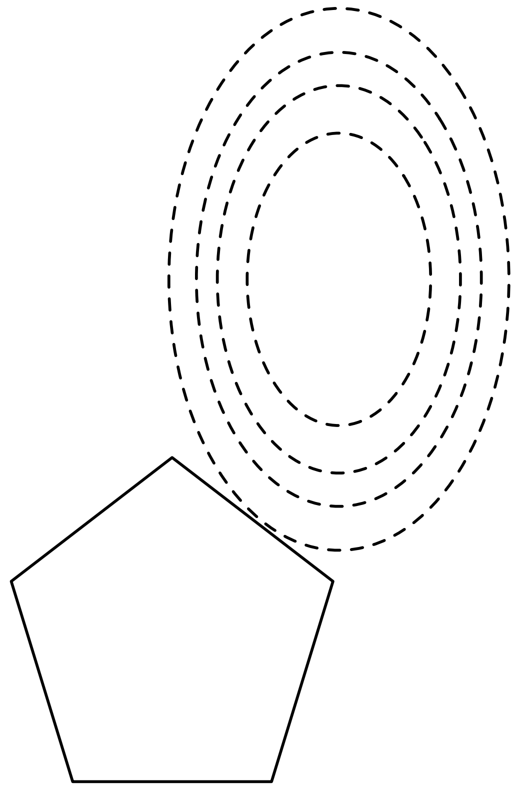


- LP **問題の解は頂点となる(面全体になることもある)**

2次計画問題QP

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\ \text{subject to } & Gx \le h \\ & Ax = b \end{aligned}$$

ただし、$P \succeq 0$。



- QP問題の解は頂点となるとは限らない。

2次制約2次計画問題QCQP

$$\text{minimize } (1/2)x^T P_0 x + q^T x + r$$

$$\text{subject to } (1/2)x^T P_i x + q_i^T x + r_i \le 0, i = 1, \ldots, m$$

$$Ax = b$$

ただし、 $P_i \succeq 0 (i = 1, \ldots, m)$ **である。**

数理計画問題ソルバについて

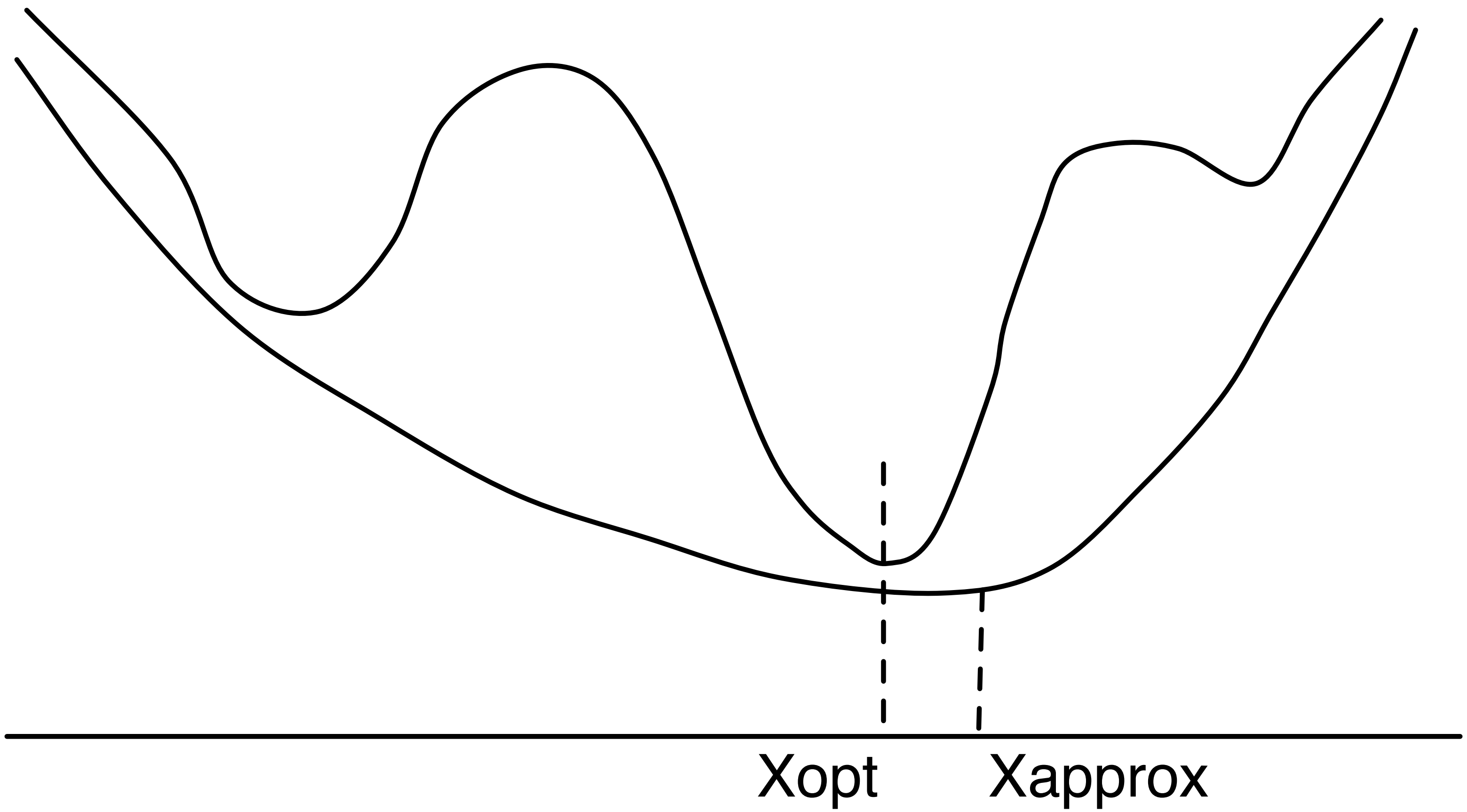
- 標準形の凸計画問題は、凸最適化ソルバ（Nuopt, cvxopt, cvxpy など）により、効率よく解くことができる。
- 問題を線形計画問題に帰着できるならば、より効率よく解くことができる(CPLEX など)。
- 与えれた問題が凸計画問題であることを見抜く、または帰着できるためには凸計画法に関する知識が必要となる。

非凸計画問題における凸計画法の利用

目的関数が非凸の一般の非線形関数の場合、複数の局所解が生じることがある。そのような場合には、残念ながら凸計画法に匹敵する効率のよい最適化アルゴリズムは存在しない。下記のような手段がよく利用される。

- 分枝限定法
- 遺伝的アルゴリズム

凸関数による下界



制約領域の凸緩和