

演習問題 (12) 解答

問題 1

いま $x, y \in \mathbb{R}^n$ がともに 2 ノルム球 S に含まれる ($\|x\|_2 \leq r, \|y\|_2 \leq r$) ことを仮定する。また、 θ を $0 \leq \theta \leq 1$ を満たす実数とする。ここで

$$z = \theta x + (1 - \theta)y$$

と置く。この z の 2 ノルムを評価すると三角不等式を利用することにより

$$\|z\|_2 = \|\theta x + (1 - \theta)y\|_2 \quad (1)$$

$$\leq \|\theta x\|_2 + \|(1 - \theta)y\|_2 \quad (2)$$

$$= \theta\|x\|_2 + (1 - \theta)\|y\|_2 \quad (3)$$

$$\leq \theta r + (1 - \theta)r = r \quad (4)$$

となるため、 $z \in S$ である。したがって、 S は凸集合である。

問題 2

2 点 $x, y \in C$ を任意に選ぶ。また、

$$z = \theta x + (1 - \theta)y$$

と置く (θ は $0 \leq \theta \leq 1$ を満たす任意の実数)。 $x, y \in C$ であるので、 $x, y \in A$ である。 A は仮定から凸集合なので、 $z \in A$ である。同様に $z \in B$ が仮定から言える。この両者から、 $z \in A \cap B = C$ となるため、 C は凸集合である。

問題 3

反例をひとつあげればよい。例えば $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ など。