演習問題 (4)　解答

問 1

確率密度関数における「積分して 1」ルール

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)dx = 1 \tag{1}$$

より、

$$\int_{\alpha}^{\beta} t dx = t(\beta - \alpha) = 1 \tag{2}$$

が成立する。上式より、

$$t = \frac{1}{\beta - \alpha} \tag{3}$$

が成り立つ。

問 2

e^{-ax} の不定積分は

$$\int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} + C \tag{4}$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx && (5) \\ &= \left[-\lambda \times \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\infty} && (6) \\ &= 1 && (7) \end{aligned}$$

を得る。

問 3

ガウス確率密度関数を実数全体で積分すると 1 となることに注意すると

$$\begin{aligned} P_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dy && (8) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} \right) dy && (9) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) && (10) \end{aligned}$$

を得る。

問 4

同時分布が 2 次元ガウス分布

$$P_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \tag{11}$$

であるとし、Y の実現値 $y^* = 2$ が観測されたものとしよう。事後確率密度関数は

$$P_{X|Y}(x|y^*) = \frac{P_{XY}(x,y^*)}{P_Y(y^*)} = \frac{P_{XY}(x,y^*)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x,y^*)dx}$$

であるので、まず分母を計算すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x,2)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+2^2}{2}\right) dx \qquad (12) \\ &= \frac{1}{e^2\sqrt{2\pi}} \qquad (13) \end{aligned}$$

を得る。この値を利用すると

$$P_{X|Y}(x|2) = \frac{e^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2+2^2}{2}\right) \tag{14}$$

を得る。

問 5

M に関する事後確率密度関数は

$$P_{M|X}(m|x^*) = \frac{P_{X|M}(x^*|m)P_M(m)}{P_X(x^*)} = \frac{P_{X|M}(x^*|m)P_M(m)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{X|M}(x^*|m)P_M(m)dm} \tag{15}$$

と与えられる。分母の正規化定数 (エビデンス) の計算を行い、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_{X|M}(2.3|m)P_M(m)dm &= \int_{-5}^{5} \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(2.3-m)^2}{2}\right) dm \\ &= \alpha (= 0.0996533 = 1/10.0348) \qquad (16) \end{aligned}$$

と置く。したがって、事後確率密度関数は

$$P_{M|X}(m|x^*) = \begin{cases} \frac{1}{10\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(2.3-m)^2}{2}\right) & -5 \le m \le 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

となる (概形はスライドにて)。