

演習問題 (13)

問題 1

次の問題を KKT 条件を利用して最適解を求めよ。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } x_1^2 + x_2^2 \\ & \text{subject to } x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

この種の問題を解く手法を“ラグランジュの未定乗数決定法”と呼ぶことがある。ラグランジュの未定乗数決定法は、(強双対性の成り立つ) 制約が等式制約のみの凸計画問題の KKT 条件を解析的に解いていると解釈できる。

問題 2

次の問題を KKT 条件を利用して最適解を求めよ。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } x^2 \\ & \text{subject to } -x + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

すでに見たようにこの問題のラグランジアンは

$$L(x, \lambda, \nu) = x^2 + \lambda(-x + 1)$$

となる。このとき、条件 4 は、

$$\nabla L(x, \lambda, \nu) = 2x - \lambda = 0$$

となる。また、条件 3(相補性条件) より、

$$\lambda(-x + 1) = 0$$

これを解くと $\lambda = 0$ または、 $x = 1$ となるが、 $\lambda = 0, x = 0$ となるため、 x の実行可能条件を満たさない。

一方、 $x = 1, \lambda = 2$ は KKT 条件のすべての条件を満足するので、これが解である。