

## 演習問題 (12) 解答

### 問題 1

いま  $x, y \in \mathbb{R}^n$  がともに 2 ノルム球  $S$  に含まれる ( $\|x\|_2 \leq r, \|y\|_2 \leq r$ ) ことを仮定する。また、 $\theta$  を  $0 \leq \theta \leq 1$  を満たす実数とする。ここで

$$z = \theta x + (1 - \theta)y$$

と置く。この  $z$  の 2 ノルムを評価すると三角不等式を利用することにより

$$\|z\|_2 = \|\theta x + (1 - \theta)y\|_2 \quad (1)$$

$$\leq \|\theta x\|_2 + \|(1 - \theta)y\|_2 \quad (2)$$

$$= \theta\|x\|_2 + (1 - \theta)\|y\|_2 \quad (3)$$

$$\leq \theta r + (1 - \theta)r = r \quad (4)$$

となるため、 $z \in S$  である。したがって、 $S$  は凸集合である。

### 問題 2 (チャレンジ問題)

2 点  $x, y \in C$  を任意に選ぶ。また、

$$z = \theta x + (1 - \theta)y$$

と置く ( $\theta$  は  $0 \leq \theta \leq 1$  を満たす任意の実数)。  $x, y \in C$  であるので、  $x, y \in A$  である。  $A$  は仮定から凸集合なので、  $z \in A$  である。同様に  $z \in B$  が仮定から言える。この両者から、  $z \in A \cap B = C$  となるため、  $C$  は凸集合である。