確率と最適化

—連続型確率変数—

今回学ぶこと

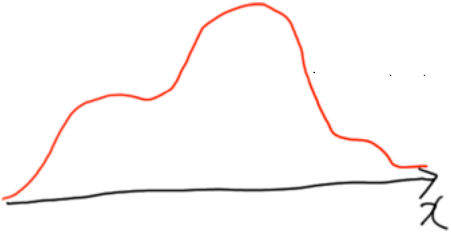
- 連続型確率変数
- 確率密度関数の復習
- 代表的な連続な確率密度関数について
- 連続型確率変数における確率推論

連続型確率変数

連続型確率変数 $=$ 実数値を実現値とする確率変数

- X: 確率変数
- $D(X) = \mathbb{R}$: ここで $\mathbb{R}$ は実数値全体の集合
- $P_X(x) (x \in \mathbb{R})$: 確率密度関数

確率密度関数の性質



- 確率密度関数 $P_X(x)$ は、確率変数 X に確率的振る舞いを表す一変数実数値関数である。
- “$P_X(x)$ の値 $=$ 確率” ではないことに注意！
- 確率密度関数 $P_X(x)$ は次の性質を満たす：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) dx = 1$$

確率密度関数と確率

X が区間 $[a, b]$ に含まれる確率

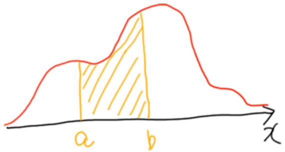
閉区間 $[a, b]$ は

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

と定義される (a, b は $a \leq b$ を満たす実数)。確率変数 X が閉区間 $[a, b]$ の範囲に実現値を持つ確率を $Prob[X \in [a, b]]$ と書くと

$$Prob[X \in [a, b]] = \int_a^b P_X(x) dx$$

となる。



期待値: 平均と分散

期待値

実数値関数 f の期待値

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P_X(x)dx$$

- 平均 ($f(x) = x$ とする)

$$m \triangleq E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xP_X(x)dx$$

- 分散 ($f(x) = (x-m)^2$ とする)

$$\sigma^2 \triangleq E[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 P_X(x)dx$$

ガウス確率変数

特に重要な連続確率変数として、ガウス確率変数が挙げられる。

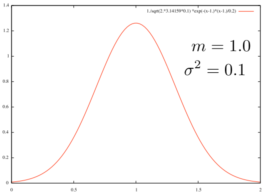
- 自然界にしばしば現れる、普遍的（中心極限定理との関係)
- 対数を取ると二次関数となり、取り扱いやすい

ガウス確率密度関数 (1 変数)

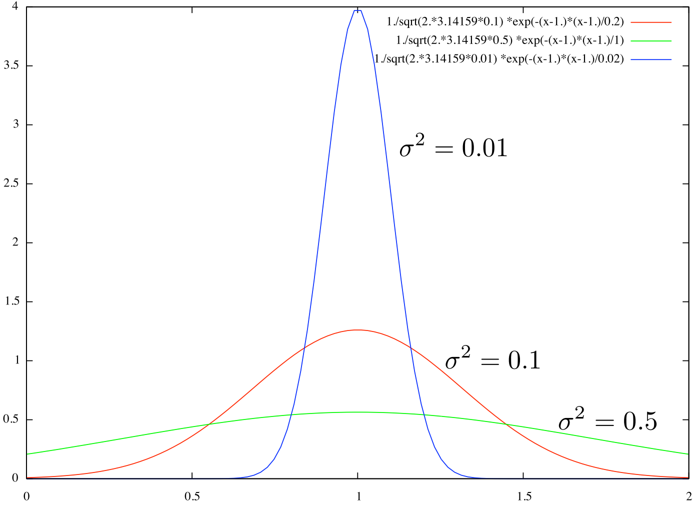
- μ:平均, σ^2:分散

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

確率変数 X がこのガウス分布に従う場合、$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ と書く。



分散の異なるガウス分布



同時確率密度関数 (joint PDF)

与えられた 2 つの実数値確率変数 X, Y について、同時 PDF を

$$P_{XY}(x, y)$$

と書く。3 変数以上の場合も同様。次の 2 つの条件を満たす必要がある。

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ P_{XY}(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x, y) dxdy = 1$$

同時確率密度関数と確率 (1)

与えられた $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}(a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2)$ に対して閉長方形 C を

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$$

とする。

(X, Y) が C に含まれる確率

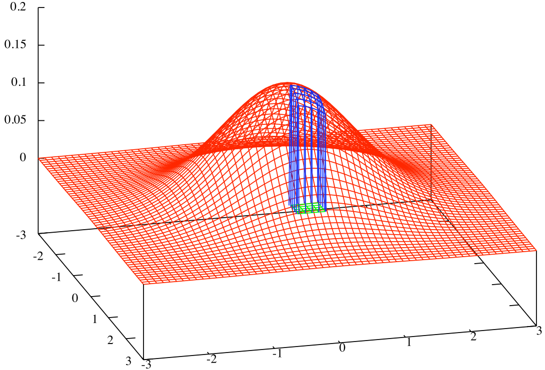
(X, Y) の組の実現値が長方形 C に含まれる確率 $Prob[(X, Y) \in C]$ は

$$Prob[(X, Y) \in C] = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} P_{XY}(x, y) dxdy$$

と与えられる。

同時確率密度関数と確率 (2)

$$Prob[(X, Y) \in C] = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} P_{XY}(x, y) dxdy$$



周辺化・周辺確率密度関数

$P_{XY}(x, y)$: 同時確率密度関数

周辺化

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x, y) dy$$

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x, y) dx$$

条件付確率密度関数

条件付確率密度関数の定義

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)}$$

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $P_X(x) > 0$ でないと定義できないことに注意。

さまざまな確率密度関数：一様分布

一様分布

一様分布は、区間 $[\alpha, \beta]$ において、一定値 $t > 0$ を値として持つ確率密度関数である。すなわち、X をそのような一様分布に従う確率変数とすると

$$P_X(x) = \begin{cases} t & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

問題
上記の一様分布を t の値を α, β で書け。

さまざまな確率密度関数：指数分布

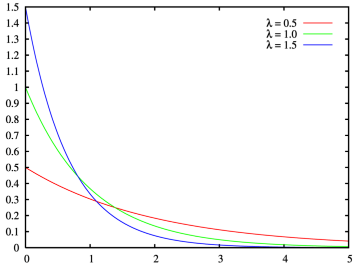
指数分布

確率密度関数

$$P_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

を指数分布と呼ぶ。ここで、パラメータ λ は正の実数である。

まれにしか生じない事象 (ポアソン分布に従う) の生起間隔をモデル化する場合などに利用される。



平均ベクトルと共分散行列

- n 次元ベクトル型の確率変数

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$$

- $D(X) = \mathbb{R}^n$
- $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$: 平均値ベクトル
- $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$: 共分散行列

平均値ベクトル

$$\mu_i = E[X_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

共分散行列 $S = \{S_{i,j}\}$

$$S_{i,j} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

さまざまな確率密度関数：多次元ガウス分布

- n 次元ベクトル型の確率変数

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$$

- $D(X) = \mathbb{R}^n$
- $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$: 平均値ベクトル
- $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$: 共分散行列

多次元ガウス分布

次の確率密度関数を多次元ガウス分布と呼ぶ:

$$P_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{|S|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T S^{-1}(x-\mu)\right)$$

ここで $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ である。

確率変数 X がこのガウス分布に従う場合、$X \sim \mathcal{N}(\mu, S)$ と書く。

連続型確率変数における事後確率の計算

- 基本的な考え方は、離散確率変数の場合と同様。
- 周辺化: 和 $\rightarrow$ 積分

同時確率密度関数が既知のとき

同時確率密度関数が既知の場合:

- $P_{XY}(x, y)$ が既知。
- Y の実現値 y^* が得られている。

の事後確率の計算は次のようになる。

事後確率密度関数

$$
\begin{aligned}
P_{X|Y}(x|y^*) &= \frac{P_{XY}(x, y^*)}{P_Y(y^*)} \\
&= \frac{P_{XY}(x, y^*)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x, y^*)dx}
\end{aligned}
$$

と計算できる。

事前確率密度関数と条件付確率密度関数が既知のとき

次に事前確率密度関数と条件付確率密度関数が既知の場合:

- $P_X(x)$ が既知。
- $P_{Y|X}(y|x)$ が既知。
- Y の実現値 y^* が得られている。

このとき、観測できない確率変数 X に関する事後確率は次のように与えられる。

事後確率密度関数

$$
\begin{aligned}
P_{X|Y}(x|y^*) &= \frac{P_{Y|X}(y^*|x)P_X(x)}{P_Y(y^*)} \\
&= \frac{P_{Y|X}(y^*|x)P_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{Y|X}(y^*|x)P_X(x)dx}
\end{aligned}
$$