

# 確率と最適化

凸計画問題と双対性

# 凸計画問題の標準形

---

$f_0, f_1, \dots, f_m$  は凸関数。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f_0(x) \\ & \text{subject to } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad a_i^T x = b, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

## クイズ

P1, P2のうちどちらが凸計画問題か。

$$\begin{aligned} \text{P1: minimize } & \|x\|_2^2 \\ \text{subject to } & x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{P2: minimize } & \|x\|_2^2 \\ \text{subject to } & x_1^2 - x_2^2 - 1 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

# 大域最適解

---

$$F \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, a_j^T x = b, \\ i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p\}$$

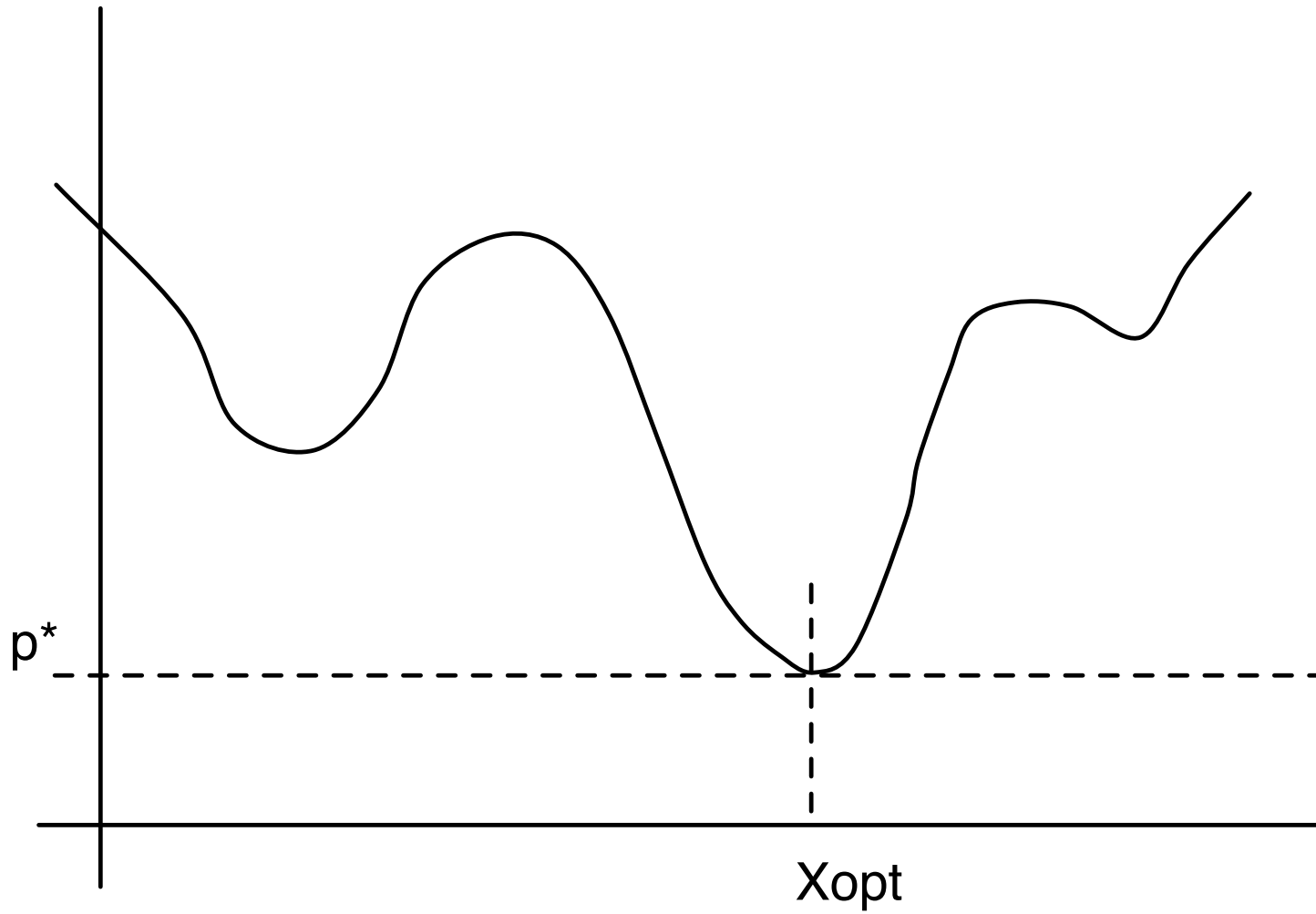
## 最適値

$$p^* = \inf_{x \in F} f_0(x)$$

## 最適解集合 (大域的最適解)

$$X_{opt} = \{x \in F : f_0(x) = p^*\}$$

# 凸ではない一般の関数の場合

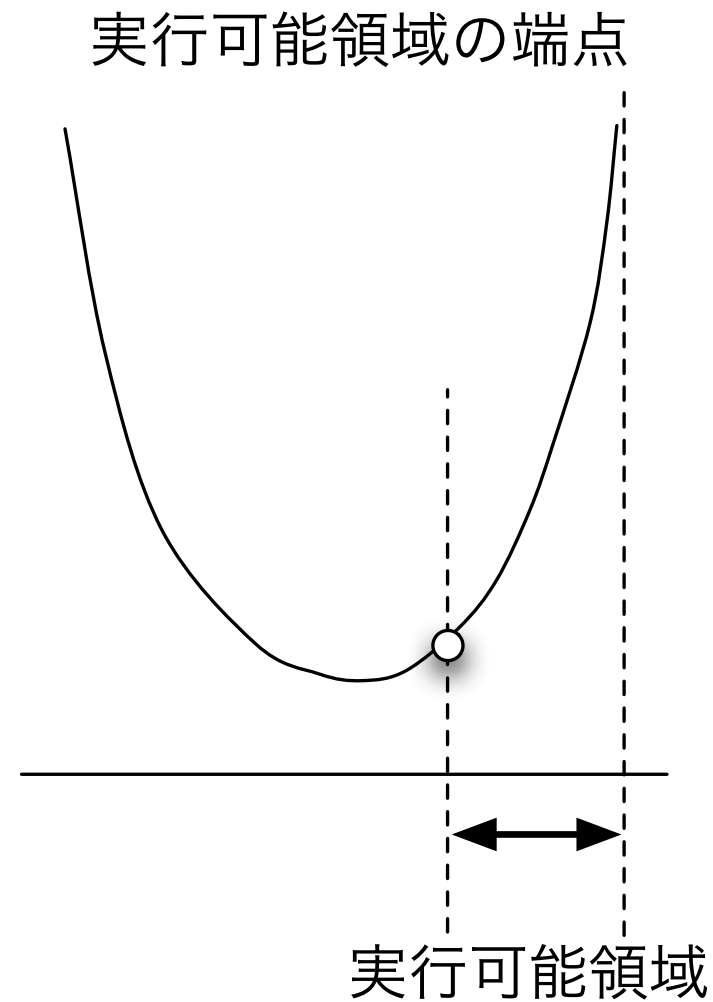
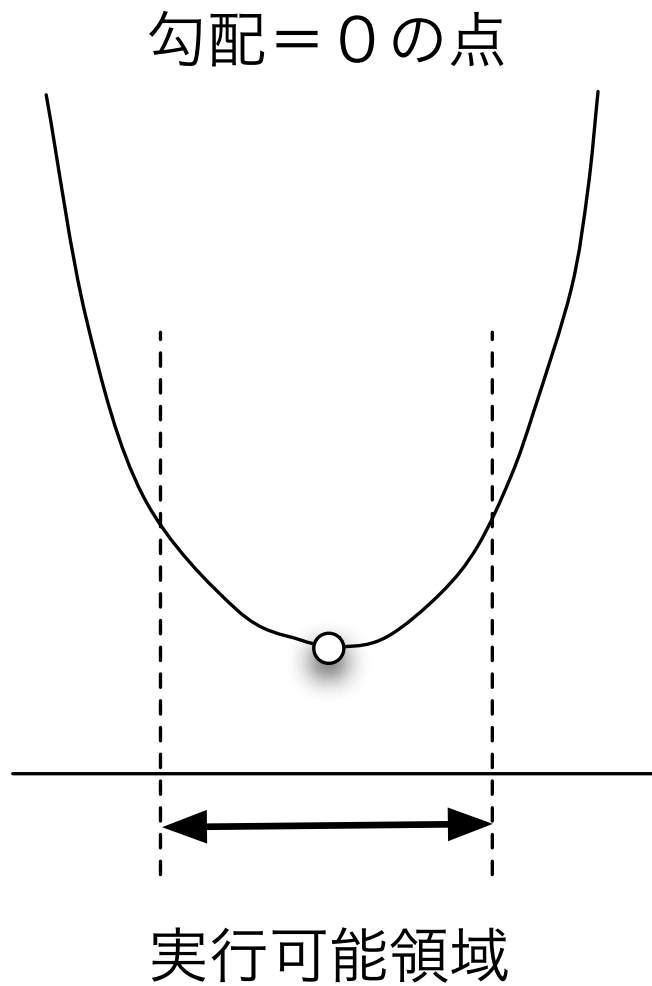


# 凸計画問題の特徴

---

- “局所最適解＝大域最適解” が成り立つ。
- 局所最適解を求めるアルゴリズムを利用して大域最適解を見出すことができる。

# 凸計画問題の最適解



# 無制約凸関数最小化

---

$f_0$  を凸関数とする。

$$\text{minimize } f_0(x) \text{ s.t. } x \in \text{dom } f_0$$

この場合も“局所最適解＝大域最適解”が成り立つ。 $f_0$  が微分可能な場合には局所解条件

$$\nabla f_0(x) = 0$$

を解くことにより、大域最適解を見いだすことができる。



## クイズ：無制約凸関数最小化の具体例

次の無制約最適化問題を  $\nabla f(x_1, x_2) = 0$  より解け。

$$\text{minimize } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \text{ s.t. } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$$

## クイズの解答

---

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$  と置く。

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1) \quad (2)$$

となる。これらをゼロとおいて解くことにより、  
 $x_1 = 1, x_2 = 1$  を得る。

# ラグランジアンと双対関数

---

## 一般の数理計画問題

かならずしも凸計画とは限らない、次の数理計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f_0(x) \\ & \text{subject to } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$  である。この問題の最適値を  $p^*$  とし、実行可能領域を  $F$  とする。

# ラグランジアン の 定義

---

$$x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m, \nu \in \mathbb{R}^p$$

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x)$$

- $\lambda_i$ :  $f_i(x) \leq 0$  に対応するラグランジュ乗数
- $\nu_i$ :  $h_i(x) = 0$  に対応するラグランジュ乗数

# ラグランジュ双対関数

---

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \nu) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x) \right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^m \text{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^p \text{dom} h_i$$

# ラグランジュ双対関数の性質

---

(1) Concave 関数となる。

(2)  $\lambda \geq 0$  のとき、

$$g(\lambda, \nu) \leq p^*$$

が成り立つ (最適値の下界値)。

(3)  $\lambda \geq 0$  のとき、任意の  $x \in F$  について

$$g(\lambda, \nu) \leq f(x)$$

が成り立つ。

## クイズ: 具体例

---

次の凸計画問題を考える。ここで、 $x \in \mathbb{R}$ である。

$$\text{minimize } x^2$$

$$\text{subject to } -x + 1 \leq 0$$

- この問題のラグランジアンを書き下せ。
- ラグランジュ双対関数を求めよ。
- ラグランジュ双対関数が最適値の下界となっていることを確認せよ。

# クイズ解答

---

ラグランジアンは

$$L(x, \lambda, \nu) = x^2 + \lambda(-x + 1)$$

となる。 $L$ を $x$ の関数としてみると2次関数であり、凸である。したがって、極値条件

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0$$

より、 $x = \lambda/2$ を得る。この値を $L$ に代入することにより、ラグランジュ双対関数が



$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda \left(-\frac{\lambda}{2} + 1\right) \\ &= -\frac{\lambda^2}{4} + \lambda = -\frac{1}{4}(\lambda - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

と得られる。 $g(\lambda, \nu)$ は $\lambda = 2$ のとき、極大値(最大値)を取り最大値1である。確かに

$$p^* = 1 \geq g(2, \nu) = 1$$

# ラグランジュ双対問題

---

下界  $p^* \geq g(\lambda, \nu)$  を最も厳しくするには、 $g(\lambda, \nu)$  を最大化すればよい。

## ラグランジュ双対問題

maximize  $g(\lambda, \nu)$

subject to  $\lambda \geq 0$

- もとの最適化問題を主問題 (primal problem) と呼ぶ。
- $x$  を主変数、 $(\lambda, \nu)$  を双対変数と呼ぶ。

# 弱双対性と強双対性

---

双対問題の最適値を  $d^*$  とする。

弱双対性  $d^* \leq p^*$  が主問題が凸であっても非凸であっても成り立つ。

強双対性  $d^* = p^*$  が多くの凸計画問題(すべてではない) について成り立つ。

# 強双対性が成り立っている例

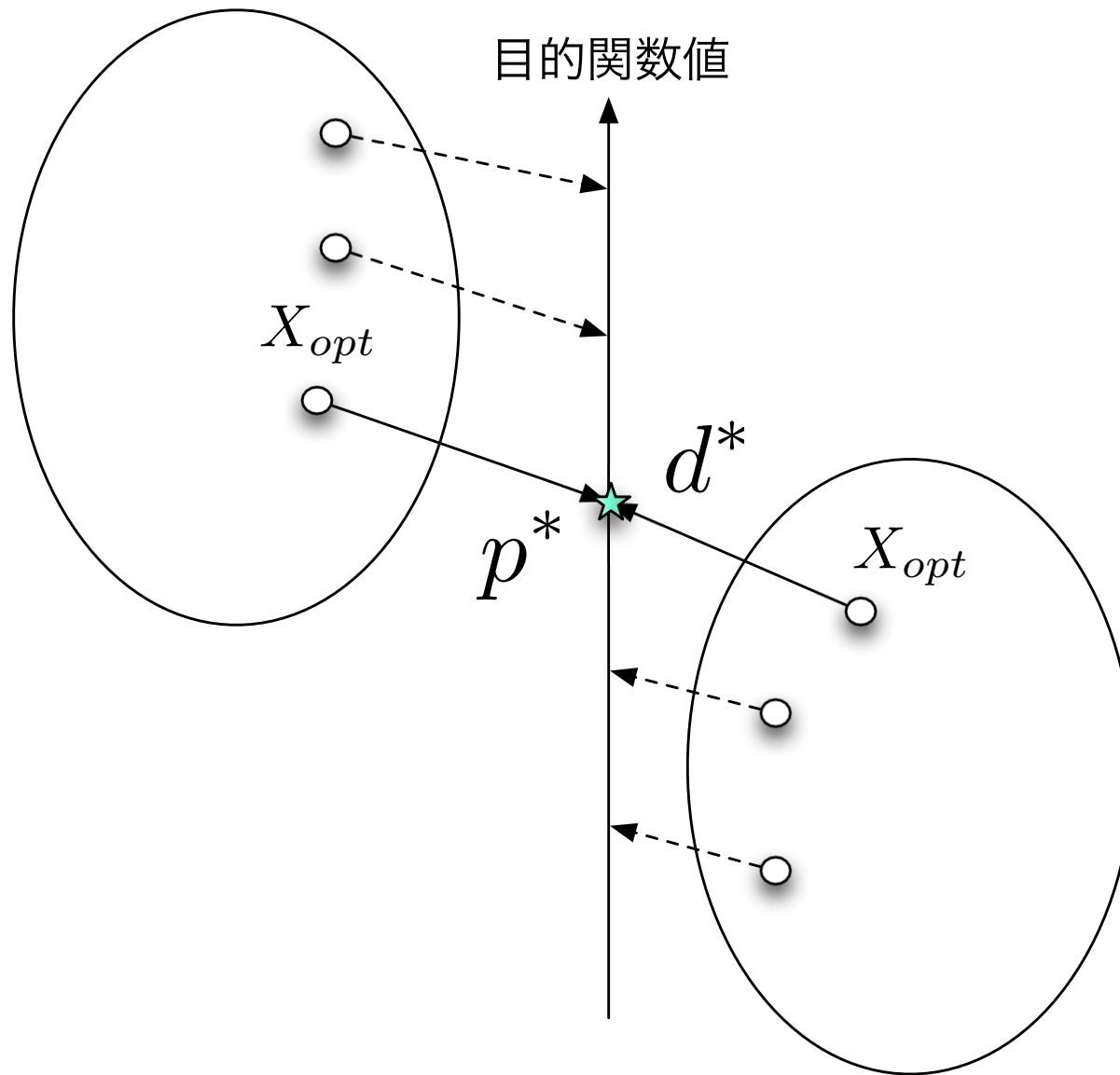
主問題 ( $p^* = 1$ )

$$\begin{aligned} & \text{minimize } x^2 \\ & \text{subject to } -x + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

双対問題 ( $d^* = 1$ )

$$\begin{aligned} & \text{maximize } -\frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda \\ & \text{subject to } \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

主問題の実行可能領域



双対問題の実行可能領域

# KKT 条件

---

- KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker) 条件は、強双対性の成立する凸計画問題の最適解が満たすべき必要十分条件である。
- KKT 条件は、最適解の解析的な導出や数値最適化アルゴリズムの原理としても重要である。

# 相補性条件

---

$x^*$  を主問題の最適解、 $\lambda^*$  と  $\nu^*$  を双対問題の最適解とする。強双対性を仮定すると

$$\begin{aligned} f_0(x^*) &= g(\lambda^*, \nu^*) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda^*, \nu^*) \\ &\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \nu_i^* f_i(x^*) \\ &\leq f_0(x^*) \end{aligned}$$

すなわち、上の不等式部分は全て等号となる。

この等式より次のことが言える。

- $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = 0$  となる。

$$\lambda_i > 0 \Rightarrow f_i(x^*) = 0, \quad \lambda_i = 0 \Rightarrow f_i(x^*) \leq 0$$

この条件を相補性条件という。

- $f_0(x^*) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda^*, \nu^*)$  となることから、

$$\nabla_x L(x, \lambda^*, \nu^*) \big|_{x=x^*} = 0$$



# KKT 条件

---

条件1  $x$  が主問題の実行可能解であること。

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

条件2 双対変数の制約:  $\lambda \geq 0$

条件3 相補性条件:  $\lambda_i f_i(x) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ )

条件4 ラグランジアンに関する極値条件:

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i \nabla h_i(x) = 0$$

# KKT 条件の役割

---

強双対性が成り立つ凸計画問題の場合、  
 $(x, \lambda, \nu)$  が最適値  $\Leftrightarrow$  KKT 条件が成り立つ

- 非凸な問題でも強双対性が成り立つ場合、  
“ $(x, \lambda, \nu)$  が最適値  $\Rightarrow$  KKT 条件成立” となる  
が逆は必ずしも真ならず。
- 凸計画問題の場合、KKT 条件を解析的、数値的に解くことによって最適解を求めることができる。