最適化理論

凸集合

凸集合

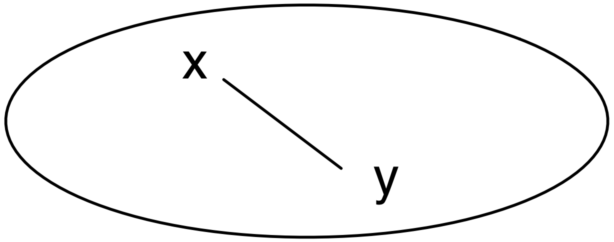
集合Cは$\mathbb{R}^n$の部分集合とする。任意の$x, y \in C$と任意の$\theta \in \mathbb{R}(0 \leq \theta \leq 1)$について

$$\theta x + (1 - \theta) y \in C$$

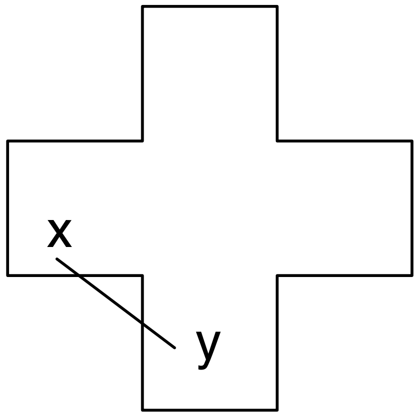
が成り立つとき、Cは凸集合(convex set)である、という。

凸集合の定義の意味

$\theta x + (1-\theta)y$ は点 x, y をつなぐ線分となるため、“C 内の任意の 2 点をつなぐ線分が完全に C に含まれる場合、C は凸である” ということになる。



凸集合



凸集合ではない

重要な凸集合

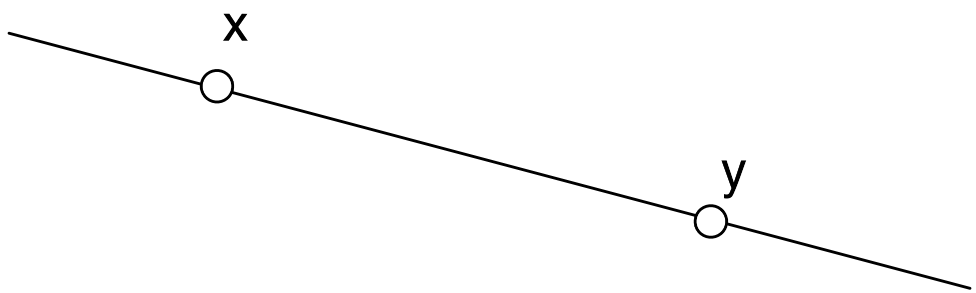
これから取り上げる $\mathbb{R}^n$ の部分集合はすべて凸集合である。

直線

相異なる$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$について、

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

と表される集合を直線(line)と呼ぶ。



超平面(hyperplane)

$a \in \mathbb{R}^n$ (法線ベクトル)
$b \in \mathbb{R}$ に対して、集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}, \quad (a \neq 0)$$

を超平面と呼ぶ。

- $n = 2$: P は直線(自由度1)
- $n = 3$: P は平面(自由度2)

ベクトルaに直交する原点を通る超平面：

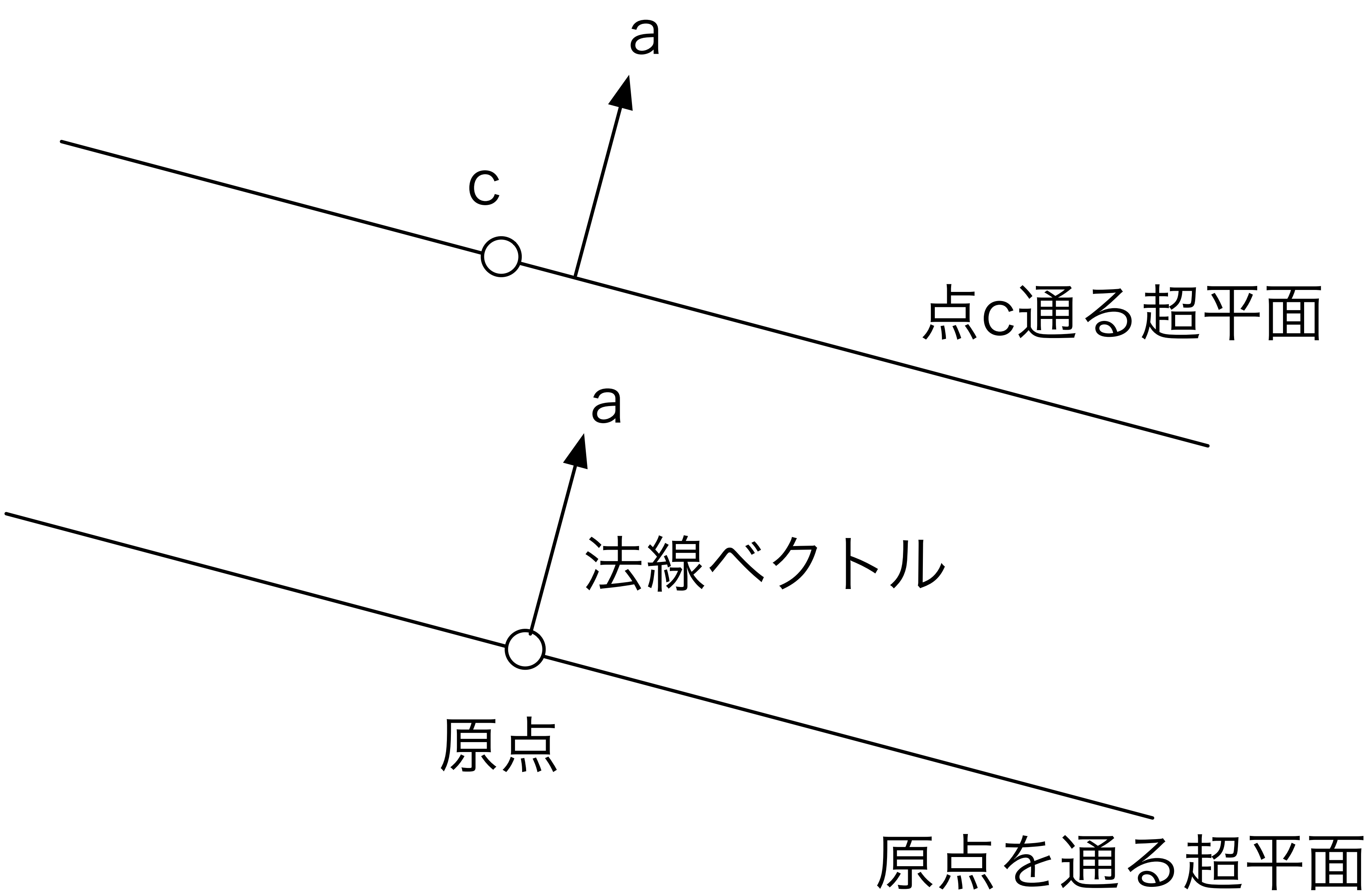
$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = 0\}$$

上の超平面を点$c \in \mathbb{R}^n$を通るようにシフトすると

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T (x - c) = 0\}$$

となる。

$$a^T (x - c) = 0 \Leftrightarrow a^T x = b (b = a^T c)$$


a
c
点c通る超平面
a
法線ベクトル
原点
原点を通る超平面

アフィン集合

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

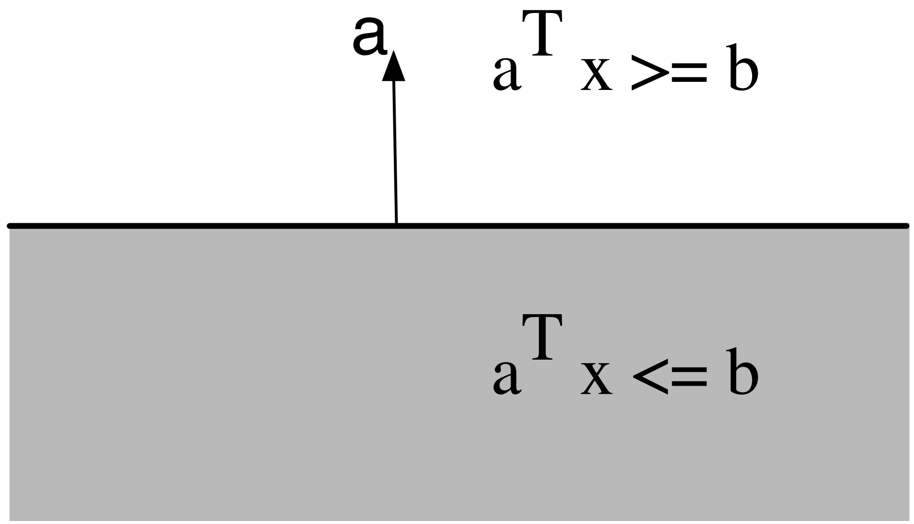
$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

直線、超平面を一般化した集合。

半空間 (halfspace)

$a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ **のとき、**

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \le b\}, \quad (a \ne 0)$$



支持超平面(supporting hyperplane)

集合$C \subset \mathbb{R}^n$の境界上の点x_0を通る超平面P:

$$P = \{x : a^T(x - x_0) = 0\}$$

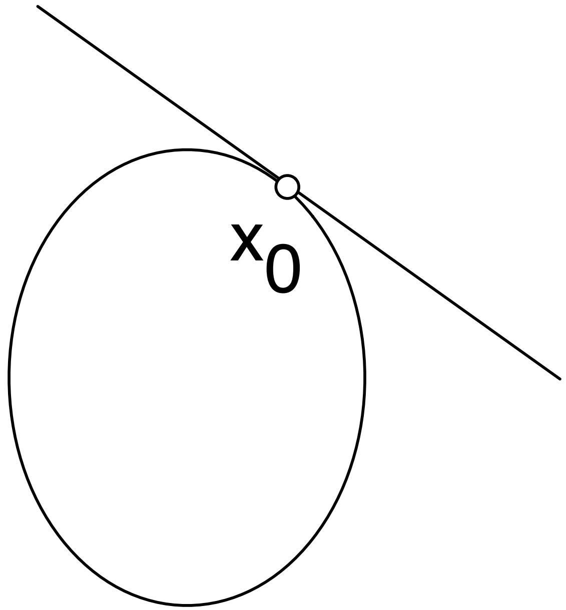
が

$$\forall x \in C, \quad a^T(x - x_0) \leq 0, a \neq 0$$

を満たすとき、Pは集合Cの点x_0における支持超平面と呼ぶ。
Cが滑らかな集合(多様体)の場合、支持超平面はCの接平面となる。

支持超平面定理

集合Cが凸集合の場合、Cの境界の任意の点において、支持超平面が存在する。



超球(hypersphere)とノルム球

超球

$$B_2(x_c, r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_c||_2 \leq r\}$$

ノルム球

$$B_p(x_c, r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_c||_p \leq r\}$$

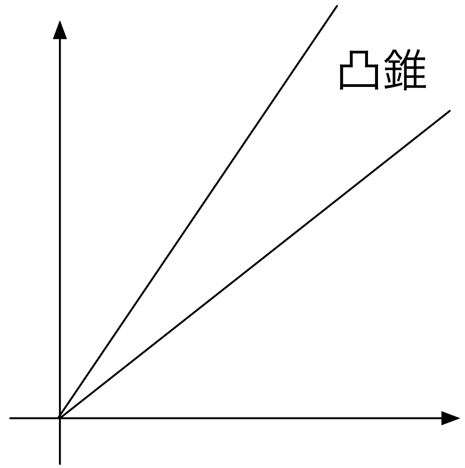
$$||x||_p \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

凸錐

集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が

$$\forall x \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x \in S$$

を満たすとき、S を錐 (cone) と呼ぶ。凸集合である錐を凸錐と呼ぶ。



凸結合と凸包

凸結合

k個の点

$$S \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \quad x_i \in \mathbb{R}^n$$

について、点xが

$$x = \theta_1 x_1 + \cdots \theta_k x_k, \quad \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$$

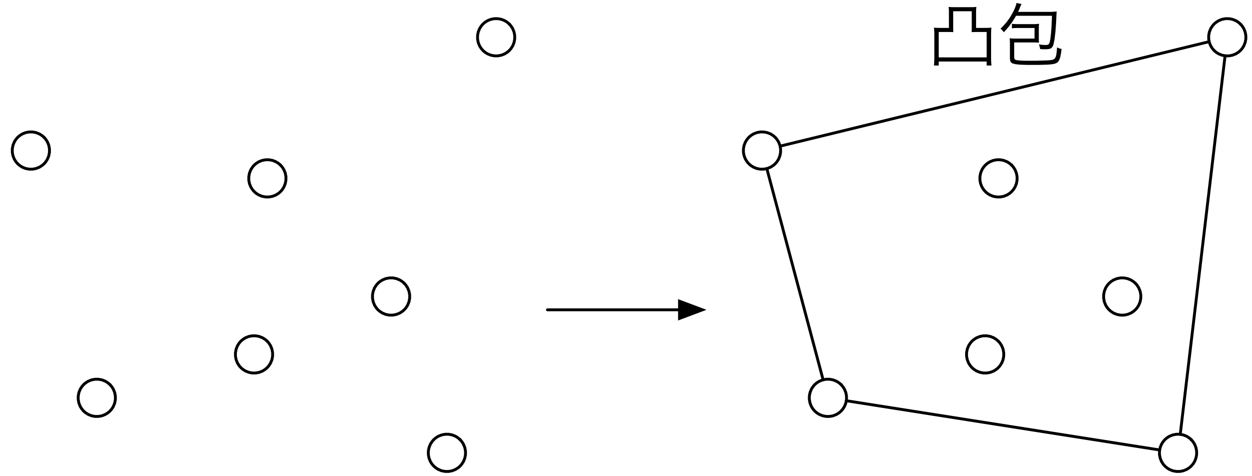
と書けるとき、xは$\{x_1, \ldots, x_k\}$の凸結合である、という。

凸包

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$について、

$$\mathrm{conv}(S) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{は} S \text{の凸結合}\}$$

をSの凸包(convex-hull)と呼ぶ。凸包は S を包含する最小 (集合の包含関係における) の凸集合となる。



多面体(polytope, polyhedra)

有限個の半空間の共通集合を多面体(polyhedra)という。すなわち、$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

$$P \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

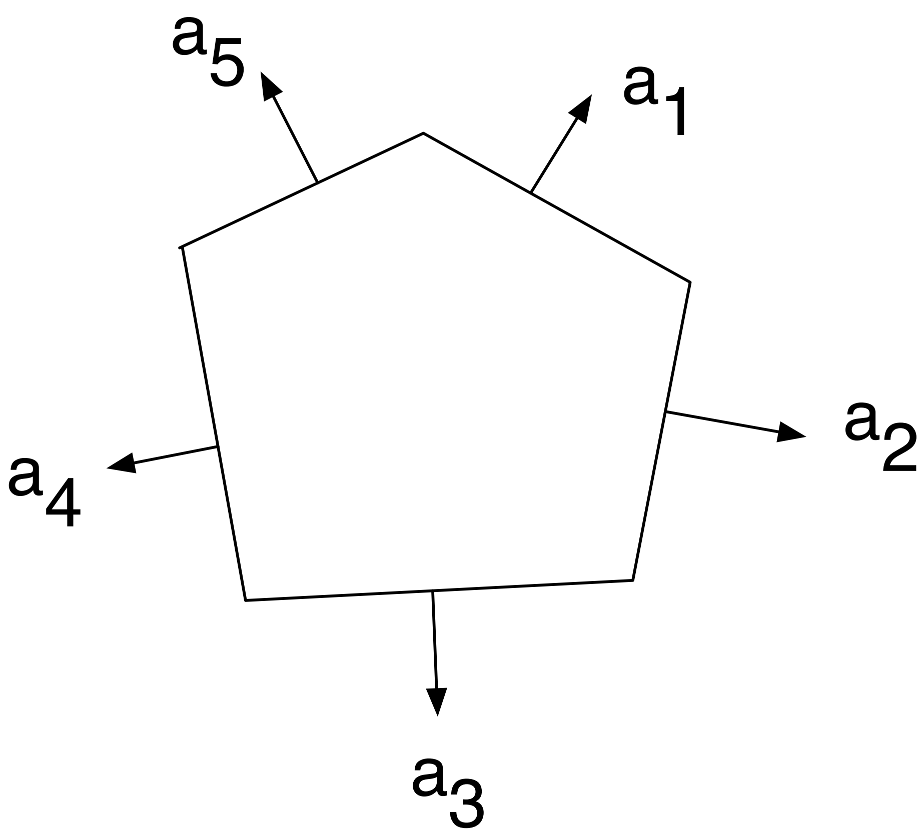
である。不等号は要素ごとの不等号を表す。
半空間 H_i を

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

と定義する。有界な polyhedra を polytope と呼ぶ。

多面体 P:

$$P = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_m$$



サブレベル集合

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について

$$C_\alpha \equiv \{x \in \mathrm{dom} f : f(x) \le \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

を f のサブレベル集合と呼ぶ。凸関数のサブレベル集合は凸集合になる。

__クイズ__

$f(x_1, x_2) \equiv x_1^2 + 2x_2^2$ について、サブレベル集合 C_1 を図示せよ。

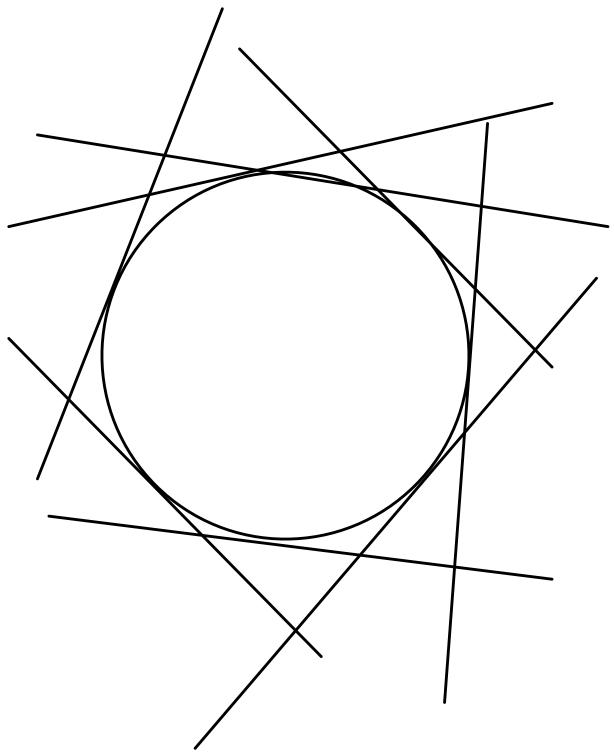
凸集合の共通集合

$C_1, C_2, \ldots, C_k \subset \mathbb{R}^n$ をそれぞれ凸集合とする。
それらの共通集合

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_k$$

は凸集合となる。
無限個の凸集合の共通集合もやはり凸集合となる。

凸集合の半平面の共通集合としての表現



$$S = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$$

H_i はSの支持超平面からなる半空間

凸計画問題の標準形

$f_0, f_1, \ldots, f_m$ は凸関数。

$$
\begin{aligned}
\text{minimize}\ & f_0(x) \\
\text{subject to}\ & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& a_i^T x = b, \quad i = 1, 2, \ldots, p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} \equiv \{ & x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \le 0, a_j^T x = b, \\
& i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, p \}
\end{aligned}
$$

凸計画問題の実行可能領域$\mathcal{F}$は凸関数のサブレベル集合とアフィン集合の共通集合であるので、凸集合となる。

凸計画問題のもうひとつの見方

凸関数f_0を凸集合である実行可能領域$\mathcal{F}$において、最小化する問題。

線形計画法

$$\text{minimize } c^T x$$

$$\text{subject to } a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

線形計画問題のもうひとつの見方

- 目的関数 $c^T x$ を多面体である実行可能領域 F において、最小化する問題。
- 凸計画問題のひとつのクラス