

確率と最適化

凸関数とその性質

凸計画問題の標準形

f_0, f_1, \dots, f_m は凸関数。

$x \in \mathbb{R}^n, a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}.$

minimize $f_0(x)$

subject to $f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

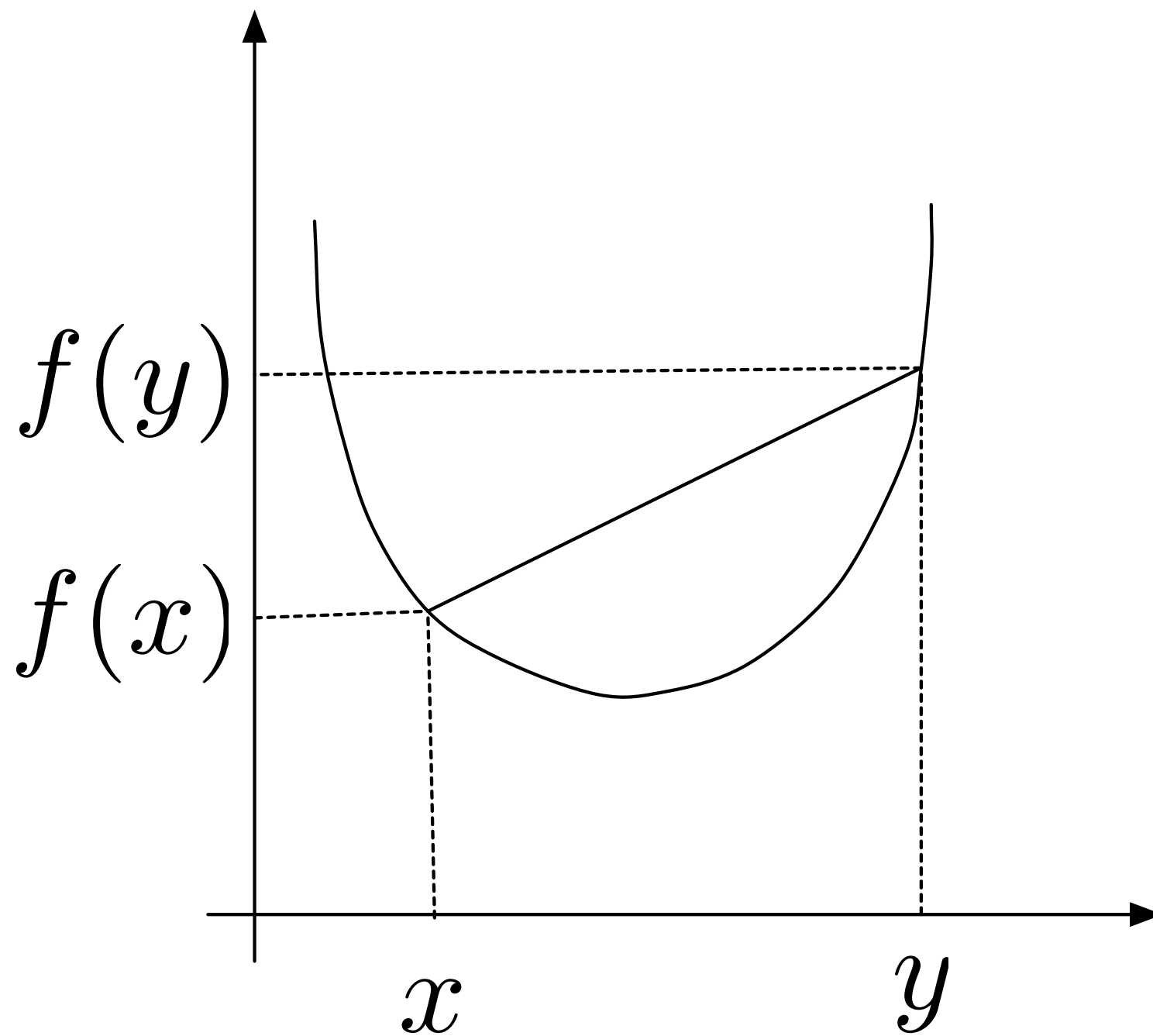
$a_i^T x = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$

凸関数 (convex function)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の $x, y \in \text{dom} f$ について

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

を満たすとき、 f を凸関数 (convex function) と呼ぶ。ただし、 θ は $0 \leq \theta \leq 1$ を満たす実数。



凸関数：補足

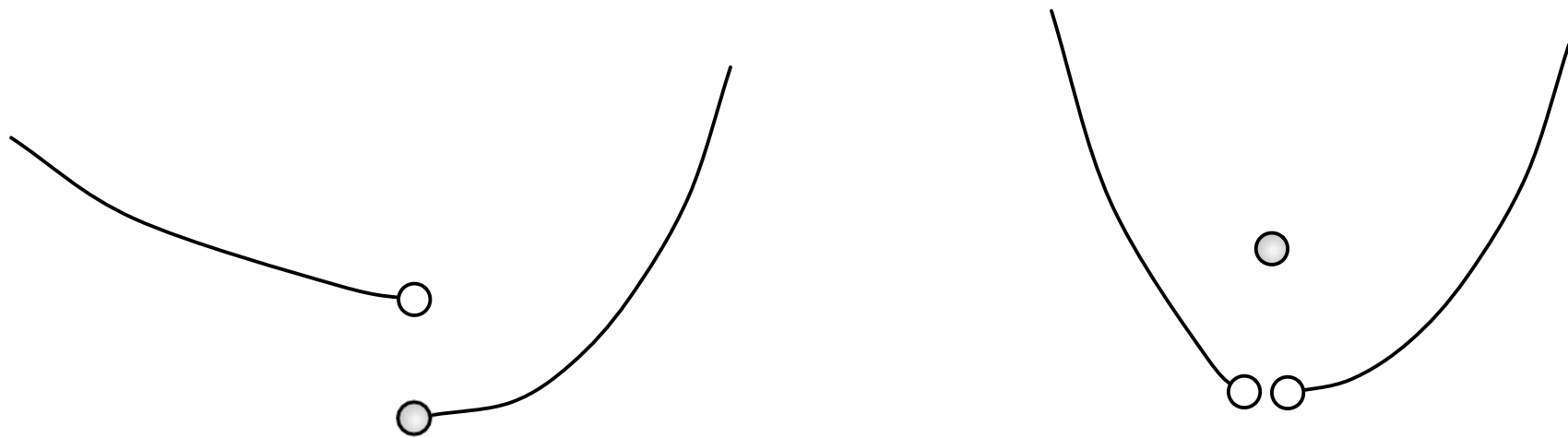
- f が convex(=凸) の場合、 $-f$ は concave という。
- 不等式

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

が成り立つとき、 f は真に凸 (strictly convex) である、という

凸関数の連続性

- 凸関数はかならず連続関数になる (自明なことではない)



非連続関数 (非凸関数)

凸関数の例 (1次元の場合)

- アフィン関数: $ax + b (a, b \in \mathbb{R})$
- 指数関数: $e^{ax} (a \in \mathbb{R})$
- ベキ関数: $x^\alpha (x \in \mathbb{R}_{++}, \alpha \geq 1 \text{ or } \alpha \leq 0)$
- 負対数関数: $-\ln(x) (x \in \mathbb{R}_{++})$

クイズ

アフィン関数: $f(z) = az + b (a, b \in \mathbb{R})$ が凸関数であることを示せ。

解答例

$x, y \in \mathbb{R} (x \neq y)$ を任意に選ぶ。また、 $\theta \in [0, 1]$ を任意に選ぶ。 $z = \theta x + (1 - \theta)y$ と置くと

$$f(z) = a(\theta x + (1 - \theta)y) + b \quad (1)$$

$$= \theta ax + (1 - \theta)ay + \theta b + (1 - \theta)b \quad (2)$$

$$= \theta(ax + b) + (1 - \theta)(ay + b) \quad (3)$$

$$= \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \quad (4)$$

が成り立つ。したがって、アフィン関数は凸関数である。

凸関数の例 (多次元の場合)

- アフィン関数:

$$ax^T + b (x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R})$$

- ノルム関数: $\|x\| (x \in \mathbb{R}^n)$

ノルム関数

以下では、 $x \in \mathbb{R}^n$ を仮定する。

ℓ_1 -ノルム

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots |x_n|$$

ℓ_2 -ノルム

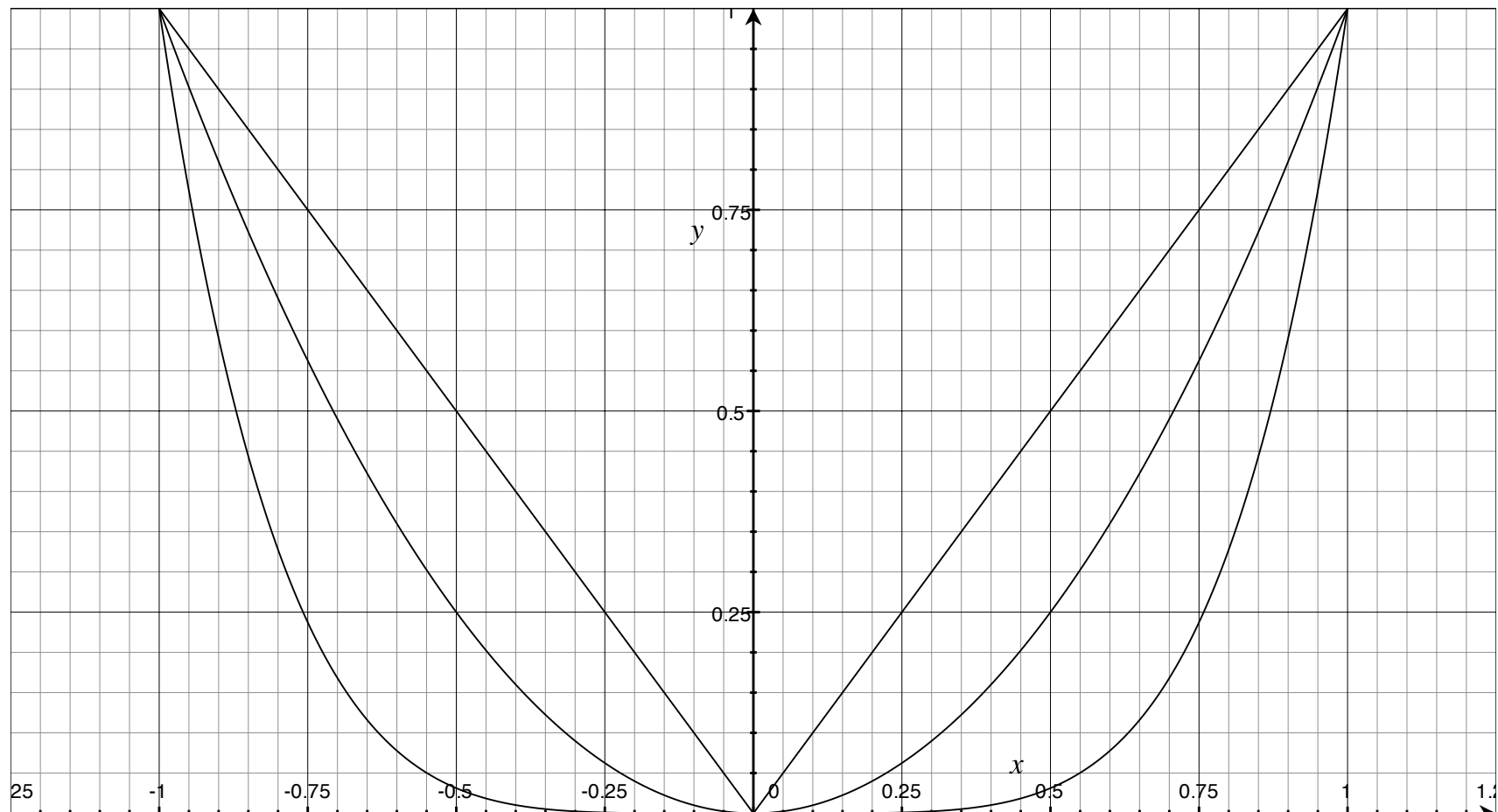
$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots |x_n|^2}$$

ℓ_∞ -ノルム

$$||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_n|\}$$

ℓ_p -ノルム

$$||x||_p \equiv \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$



ノルム関数のプロット ($p = 1, 2, 5$)

クイズ

$x \in \mathbb{R}^2$ とする。 ℓ_2 -ノルム

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$$

が凸関数であることを示せ。ただし、三角不等式

$$\|a + b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2 \quad (5)$$

を利用せよ。

解答例

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 (\alpha \neq \beta)$ を任意に選ぶ。また、 $\theta \in [0, 1]$ を任意に選ぶ。ここで、 $x = \theta\alpha + (1 - \theta)\beta$ と置くと

$$f(x) = \|\theta\alpha + (1 - \theta)\beta\|_2 \quad (6)$$

となる。ここで三角不等式を利用すると

$$\|\theta\alpha + (1 - \theta)\beta\|_2 \leq \|\theta\alpha\|_2 + \|(1 - \theta)\beta\|_2$$

$$\begin{aligned} ||\theta\alpha||_2 + ||(1 - \theta)\beta||_2 &= \theta||\alpha||_2 + (1 - \theta)||\beta||_2 \\ &= \theta f(\alpha) + (1 - \theta)f(\beta) \end{aligned}$$

を得る。

凸関数の組み合わせ

- $\alpha, \beta \geq 0$ とし、 $f(x), g(x)$ を凸関数 ($x \in \mathbb{R}^n$) とすると

$$\alpha f(x) + \beta g(x)$$

も凸関数となる (凸関数の非負係数和)。

- $f(x)$ が凸関数の場合、 $f(Ax + b)$ も凸関数となる (アフィン関数との合成関数)。

その他の凸性を保つ操作

- $f(x, y)$ が凸関数で、 C が凸集合の場合、

$$g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y)$$

も凸関数となる。

この性質からラグランジュ双対関数(後述)の concave 性が導かれる。

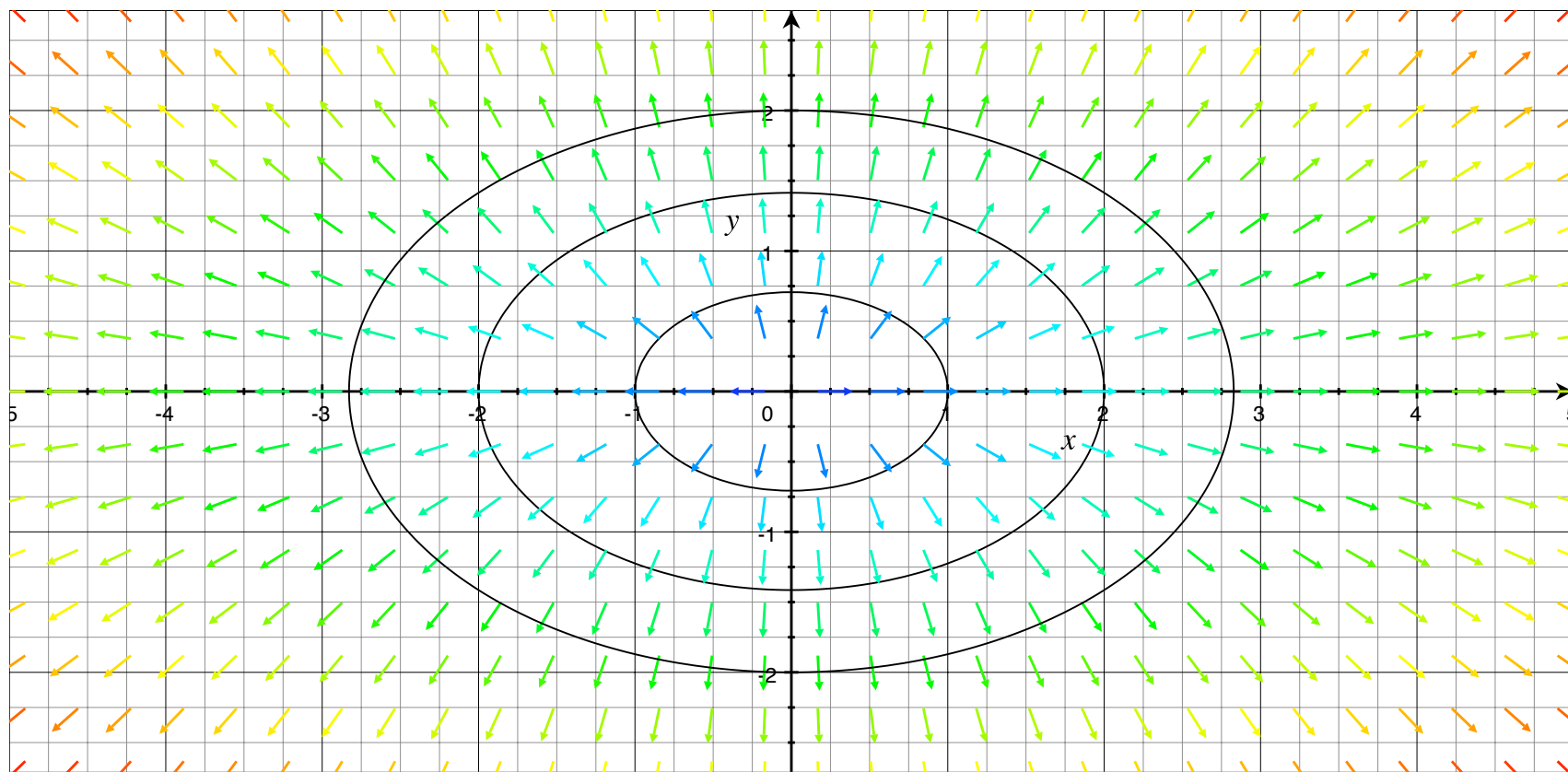
勾配ベクトル

f の勾配ベクトル (gradient):

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$$

例 : $f(x_1, x_2) = x^2 + 2y^2$ の場合、

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$



関数 $f(x_1, x_2) = x^2 + 2y^2$ の勾配ベクトル場楕円
は等高線 $x^2 + 2y^2 = q (q = 1, 4, 8)$ を表す。

レベル集合と勾配ベクトル

$$S_\alpha = \{x \in \text{dom} f : f(x) = \alpha\}$$

を f のレベル集合と呼ぶ。

- 勾配ベクトルは、レベル集合の接平面の法線ベクトルとなっている。

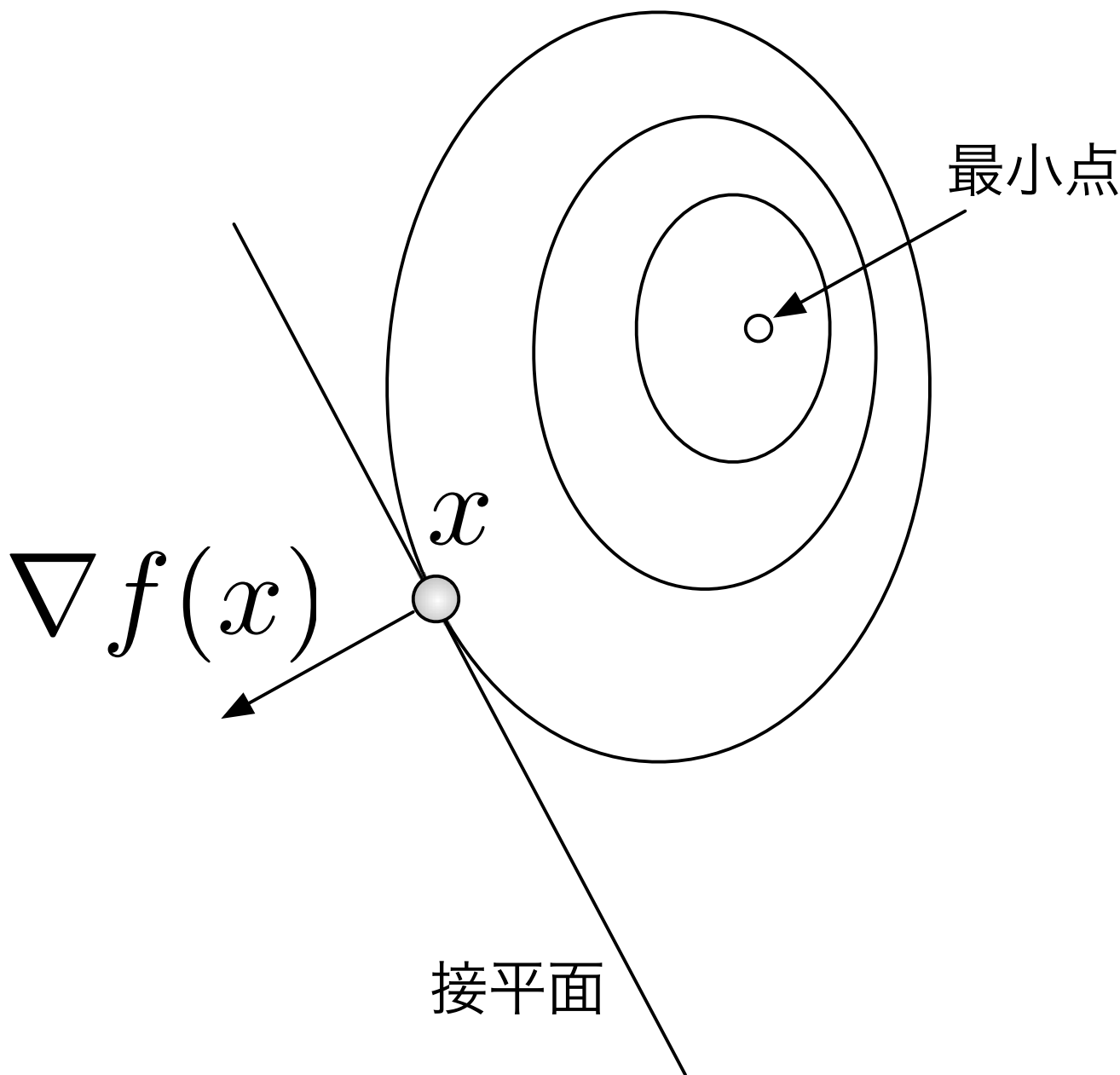
例：天気図の場合、気圧の等高線がレベル集合となる。

凸関数のレベル集合

最小点

$\nabla f(x)$
 x

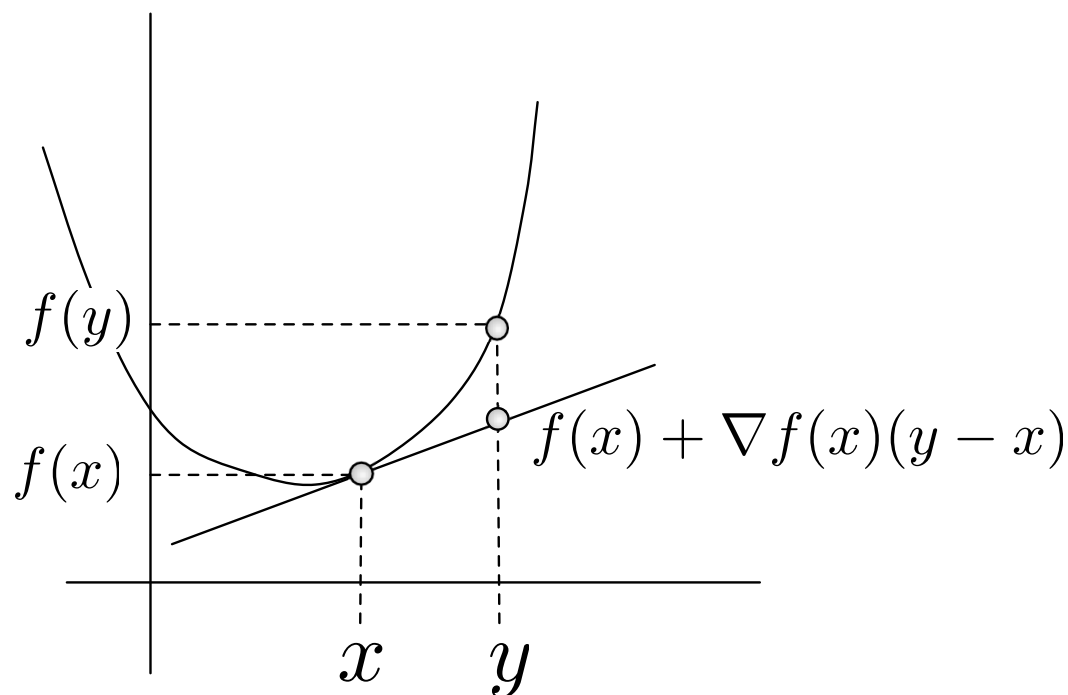
接平面



凸関数の1次条件

f が凸関数であることと次の関係は同値である。

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \quad \forall x, y \in \text{dom } f$$



2 次の凸関数条件

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom } f$ が凸集合とする。

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0, \quad x \in \text{dom } f$$

と f が凸関数であることは同値である。

行列 A が $A \succeq 0$ であるとは、 A が半正定値行列 (semi definite matrix) であることを意味する。

ヘッセ行列 (Hessian matrix)

$$\nabla^2 f(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

クイズ

$$f(x) \equiv (x_1 - 6)^2 + 2x_2^2$$

について、ヘッセ行列を求めよ。

半正定値行列 (semidefinite matrix)

$n \times n$ 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ について

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T A x \geq 0$$

が成立するとき、 $A \succeq 0$ と書き、 A を半正定値行列と呼ぶ。半正定値行列の固有値は、すべて非負である。

クイズ

$$f(x) \equiv (x_1 - 6)^2 + 2x_2^2$$

が凸関数であることを示せ。