演習問題 解答 (6)

問題 1

$$f(x) \triangleq P_{Y|X}(5|x)P_X(x) \tag{1}$$

と置く。$x = 1, 2, 3$ について $f(x)$ の値を評価すると

$$\begin{aligned} f(1) &= P_{Y|X}(5|1)P_X(1) = 0 \times 0.5 = 0 & (2) \\ f(2) &= P_{Y|X}(5|2)P_X(2) = 0.1 \times 0.4 = 0.04 & (3) \\ f(3) &= P_{Y|X}(5|3)P_X(3) = 0.2 \times 0.1 = 0.02 & (4) \end{aligned}$$

を得る。$f(2)$ が最大値となることから、MAP 推定値は $\hat{x} = 2$ となる。

問題 2

パラメータ θ を持つパラメトリックモデル分布を

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$$

とする。観測値 $a_1, \ldots, a_T$ が与えられた。次の問いに答えよ。

(1) まず同時密度関数を考えると

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_T|\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^T \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^T (x_i-\theta)^2}{2}\right)$$

となる。したがって、対数尤度関数は

$$L(\theta) \triangleq -\frac{\sum_{i=1}^T (a_i-\theta)^2}{2} + C$$

となる。

(2) $L(\theta)$ は 2 次関数であり上に凸であることから、その極値で最大値を取る。極値条件

$$\frac{L(\theta)}{d\theta} = \sum_{i=1}^T (a_i - \theta) = 0$$

を解くことで、最尤推定パラメータ

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^T a_i}{T}$$

を得る。