最適化理論

数理計画問題

よく使う記号と記法(1)

$\mathbb{R}$	実数
$\mathbb{R}^n$	n次元実数空間
$\mathbb{R}_+$	非負の実数
$\mathbb{R}_{++}$	正の実数
x^T	xの転置ベクトル(行ベクトル)

- ベクトルもxのように通常フォントを使う。
- ベクトルxの第i成分はx_iとする。
- ベクトル$x \in \mathbb{R}^n$は列ベクトルを表す。

よく使う記号と記法(2)

$\mathrm{dom} f$	関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の定義域
$\min_{x \in X} f(x)$	関数 f の最小値
$\inf_{x \in X} f(x)$	関数 f の下限値(infimum)

$$\inf_{x \in X} f(x) \equiv \max\{v \in \mathbb{R} : \forall x \in X, v \leq f(x)\}$$

クイズ

- $\mathrm{dom}\,\ln(x)$ を述べよ。
- $\mathrm{dom}\ e^x$ を述べよ。
- $\inf_{x \in R_{++}} (1/x)$ を求めよ。

数理計画問題(最適化問題)

$$\text{minimize } f_0(x)$$
$$\text{subject to } f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

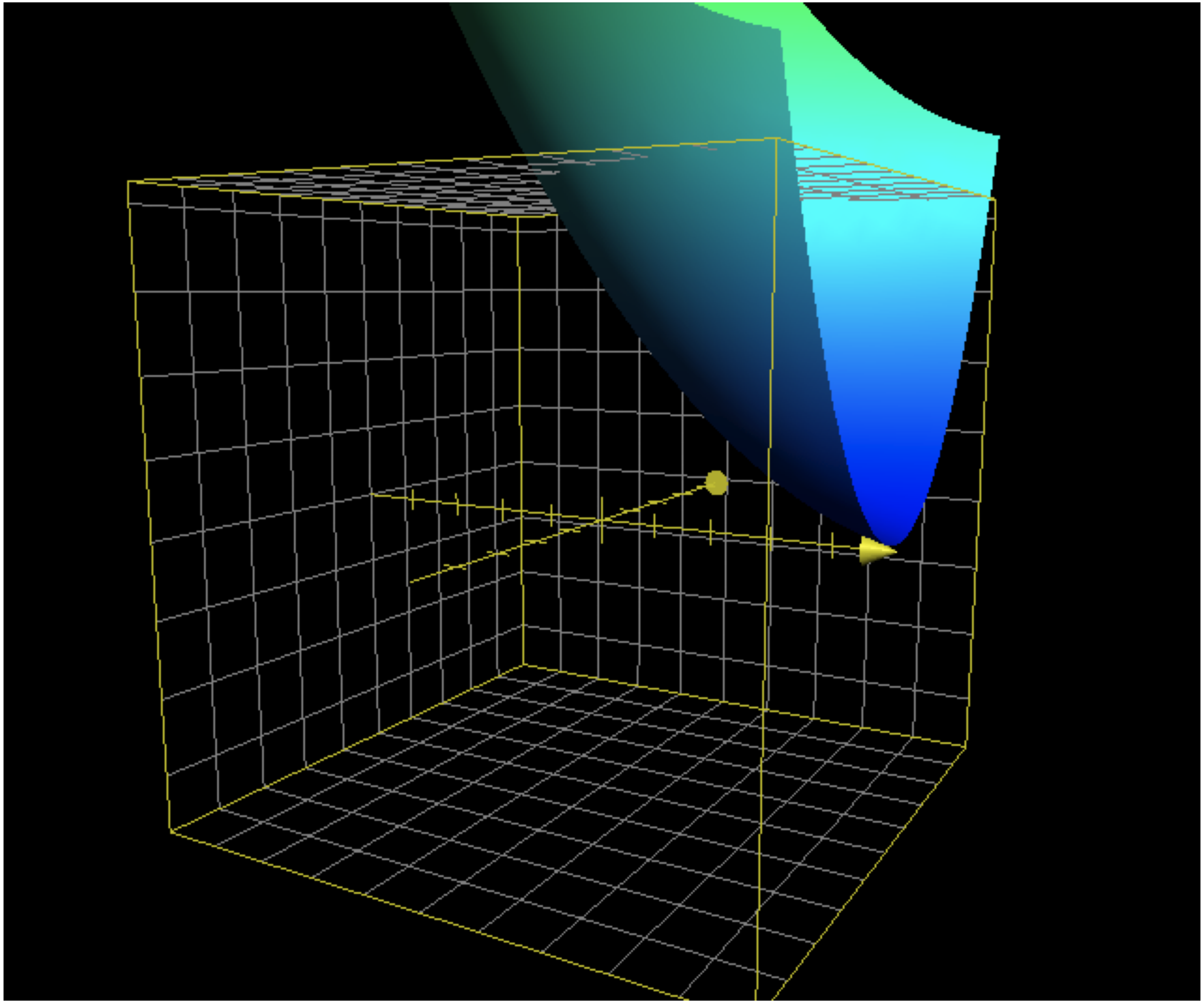
- f_0: 目的関数 ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- $f_i (i = 1, 2, \ldots, m)$: 制約関数($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- 制約関数は制約条件とも呼ばれる。

2次計画問題の例

$$\text{minimize } (x_1 - 6)^2 + 2x_2^2$$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 &\le 5 \\
-x_1 &\le 5 \\
x_2 &\le 5 \\
-x_2 &\le 5
\end{aligned}
$$



実行可能領域(feasible set)

$$\mathcal{F} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ の場合、その問題は"実行可能"(feasible)である、という。
- 実行可能領域は、f_i の定義域の共通集合に含まれる。

$$\mathcal{F} \subset \bigcap_{i=0}^{m} \mathrm{dom} f_i$$

最適値と最適解

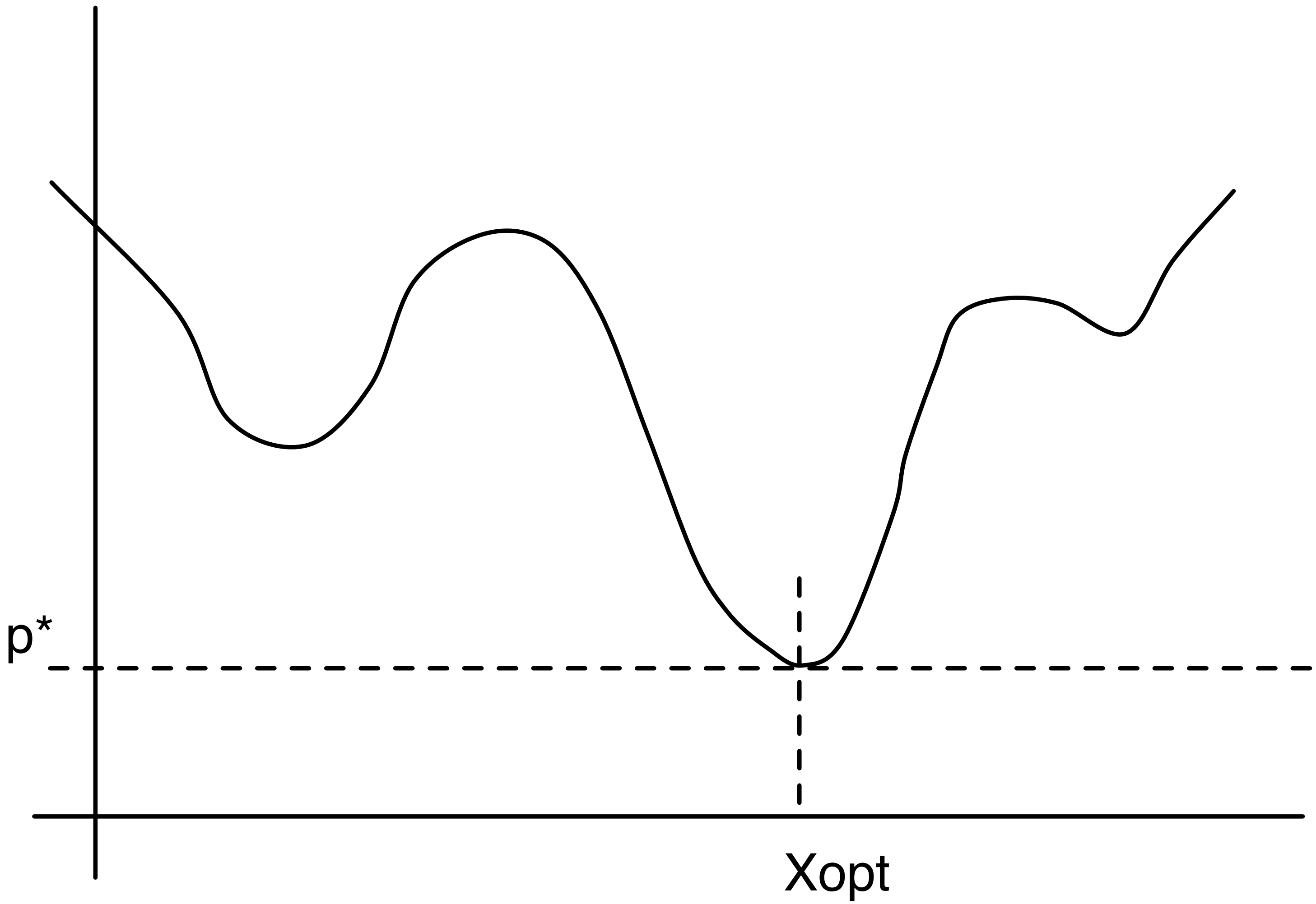
$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{F}} f_0(x)$$

最適解集合(大域的最適解)

$$X_{opt} = \{x \in \mathcal{F} : f_0(x) = p^*\}$$

最適解集合がただ一つの元を含むととき、X_{opt} を単に最適解と呼ぶこともある。

凸ではない一般の非凸関数の場合



実行不能問題、底抜け問題

- 実行可能領域が空集合の場合、その問題は実行不能(infeasible)である。その場合は、

$$p^* = \infty$$

とする。

- もし、制約条件が下に向けて、底が抜けている(unbounded below)場合、

$$p^* = \inf_{x \in F} f_0(x) = -\infty$$

例

- 実行不能問題の例

$$\text{minimize } x^2 \text{ s.t. } x < 0, x > 1$$

- 底抜け問題の例

$$\text{minimize } -x \text{ s.t. } x > 1$$

クイズ

次の制約領域は実行可能となるのは、パラメータ c がどの範囲にある場合か。

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &\leq 1 \\
x &\geq c \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

線形計画問題(Linear Programming, LP)

$$\text{minimize } c^T x$$

$$\text{subject to } a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

- さまざまな応用がある。

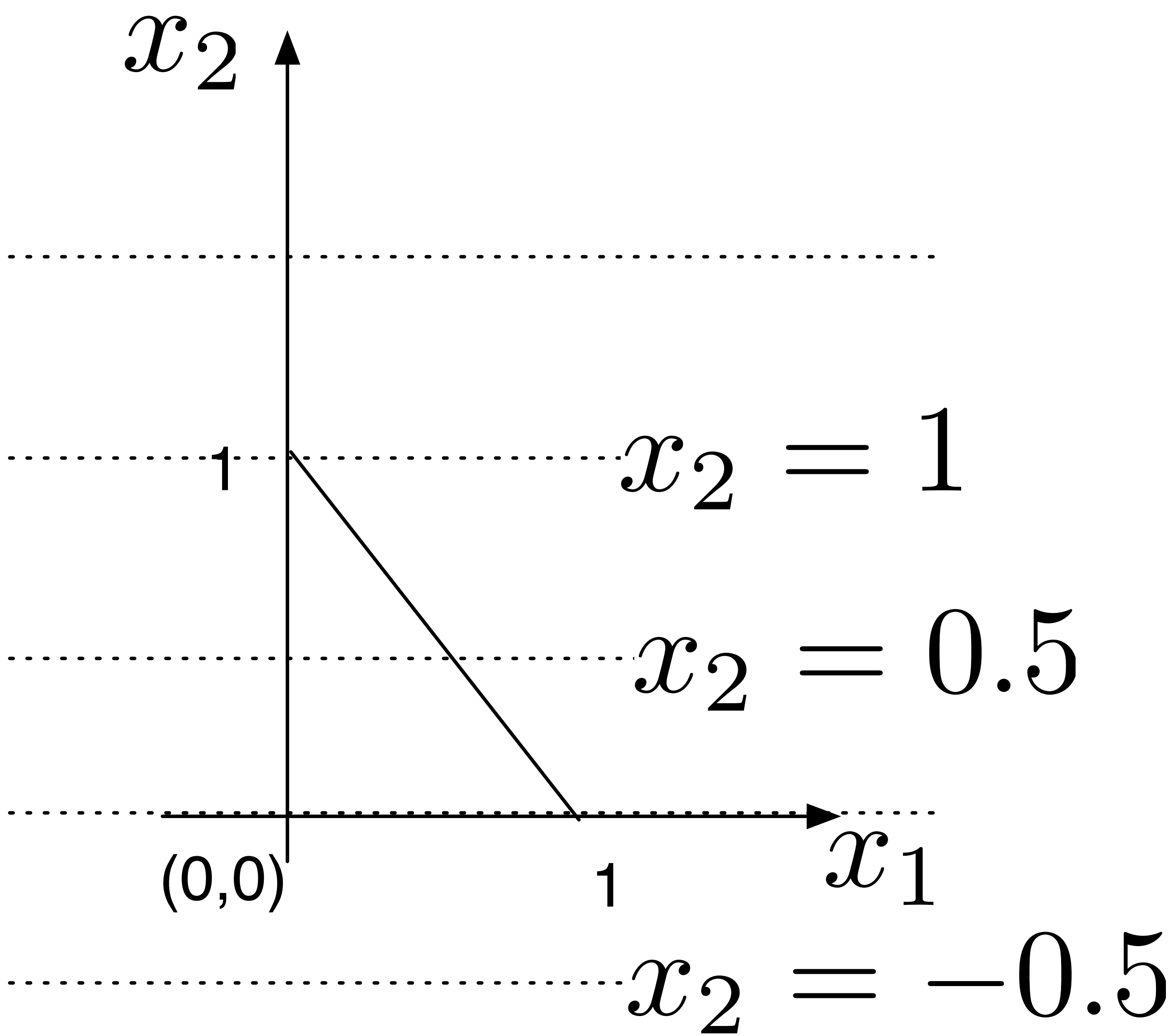
クイズ

$$\text{minimize } x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

(1) 実行可能領域を図示せよ。(2)最適点を求めよ。


x_2
$x_2 = 1$
1
$x_2 = 0.5$
(0,0)
1
x_1
$x_2 = -0.5$

クイズ

$$\text{minimize } 2x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

最適値・最適点を求めよ。

練習問題

線形計画問題の適用例をひとつ調べて詳細を述べよ。例えば、

- 生産計画問題
- 栄養問題
- 輸送問題
- ナップザック問題

など。

数理計画問題を解く

数理計画問題を解く $\longrightarrow$ 最適値と最適点を求める。

- 可能ならば、解析解を求める。
- 最適化アルゴリズムを適用する。
  - 計算量的に扱いやすい問題クラス:
    線形計画問題、2次計画問題、凸計画問題
  - 計算量的に扱いにくい問題クラス:
    一般の非線形計画問題

古典的な最適化問題の分類

線形最適化問題
（線形計画法）

非線形最適化問題

現代的な最適化問題の分類

凸最適化問題

非凸最適化問題

線形計画問題 (LP)
2次計画問題(QP)
2次制約2次計画問題(QCQP)
2次錐計画問題(SOCP)
半正定値計画問題(SDP)

凸計画問題

- 効率よく解ける最も広い問題クラス
- 理論が整備されている(双対性理論)
- 効率のよい最適化アルゴリズムが知られている
- 高い問題記述能力

近年さまざまな分野での応用が広がる
信号処理・通信・機械学習・回路設計・建造物構造設計・組み合わせ最適化・制御理論など。

凸計画法を使いこなすには

凸計画問題を利用するには基礎的な知識が必要：

- 現実の問題を凸最適化の形に定式化
- 与えられた数理計画問題を凸最適化の形に変形
- 与えられた数理計画問題を凸最適化で近似
- 双対性の利用

最適化法の歴史

- 1947: Danzig による単体法 (LP)
- 60年代:内点法の基本形(非線形最適化)
- 70年代: 楕円体法(LPの多項式性)
- 80年代: Karmarker による内点法
- 80年代後半から、現在：凸計画問題を解く内点法(Nesterov & Nemirovski 1994)