演習問題 解答

問 1

(a)

$$
\begin{aligned}
P_X(0) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{XY}(0,y) && (1)\\
&= P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1) = 1/8 + 3/8 = 1/2 && (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_X(1) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{XY}(1,y) && (3)\\
&= P_{XY}(1,0) + P_{XY}(1,1) = 2/8 + 2/8 = 1/2 && (4)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P_Y(0) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{XY}(x,0) && (5)\\
&= P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,0) = 1/8 + 2/8 = 3/8 && (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_Y(1) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{XY}(x,1) && (7)\\
&= P_{XY}(0,1) + P_{XY}(1,1) = 3/8 + 2/8 = 5/8 && (8)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P_{Y|X}(0|0) &= \frac{P_{XY}(0,0)}{P_X(0)} && (9)\\
&= \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4} && (10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{Y|X}(1|0) &= \frac{P_{XY}(0,1)}{P_X(0)} && (11)\\
&= \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4} && (12)
\end{aligned}
$$

(d)

チェイン則から得られる

$$
\begin{aligned}
P_{XY}(x,y) &= P_X(x)P_{Y|X}(y|x), \\
P_{XY}(x,y) &= P_Y(y)P_{X|Y}(x|y)
\end{aligned}
$$

の左辺が等しいことに注目すると次の等式が得られる。

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_X(x)P_{Y|X}(y|x)}{P_Y(y)} \tag{13}$$

この関係式をベイズ則 (Bayes rule) と呼ぶ。

問 2

$P_{XY}(x,y)$

$y \backslash x$	0	1
0	0.03	0.27
1	0.07	0.63

まずこの同時分布について、周辺分布を計算する。

$$P_X(0) = 0.1 \tag{14}$$
$$P_X(1) = 0.9 \tag{15}$$
$$P_Y(0) = 0.3 \tag{16}$$
$$P_Y(1) = 0.7 \tag{17}$$

$x=0, y=0$ のときは、

$$P_X(0)P_Y(0) = 0.1 \times 0.3 = 0.03 = P_{XY}(0,0)$$

が成り立つ（注意：$x=0, y=0$ のときだけをチェックしても独立性を証明したことにはならない）。同様に

$$P_X(0)P_Y(1) = 0.1 \times 0.7 = 0.08 = P_{XY}(0,1)$$

$$P_X(1)P_Y(0) = 0.9 \times 0.3 = 0.27 = P_{XY}(1,0)$$

$$P_X(1)P_Y(1) = 0.9 \times 0.7 = 0.63 = P_{XY}(1,1)$$

となることから、X, Y の同時分布が任意の x, y についてそれぞれの周辺分布の積と等しいことから X, Y は独立である。