演習問題 (2) 解答

問題 1

まず X_1 に関する周辺分布を下記の通り求める。

$$\begin{aligned} P_{X_1}(0) &= 0.8 + 0.1 = 0.9 \\ P_{X_1}(1) &= 0.1 + 0.0 = 0.1 \end{aligned}$$

$X_1 = 1$ を観測した状況のもとに X_2 に関する事後確率分布は次のとおり：

$$\begin{aligned} P_{X_2|X_1}(0|1) &= \frac{P_{X_1X_2}(1,0)}{P_{X_1}(1)} = \frac{0.1}{0.1} = 1 \\ P_{X_2|X_1}(1|1) &= \frac{P_{X_1X_2}(1,1)}{P_{X_1}(1)} = \frac{0}{0.1} = 0 \end{aligned}$$

となる。表 2 に示される同時分布を見ると $X_1 = X_2 = 1$ が生起する確率がゼロであるので、$X_1 = 1$ が観測されたならば、X_2 は自動的に 0 と確定する。事後確率計算において、「自動的に」この推論が行われていることに注意したい。

問題 2

ベイズ則を利用して事後確率を求める典型的な問題である。ベイズ則より

$$P_{W|S}(w|1) = \frac{P_{S|W}(1|w)P_W(w)}{P_S(1)}$$

として計算を進めればよい。まず、分母の $P_S(1)$ を求める：

$$\begin{aligned} P_S(1) &= \sum_w P_{WS}(w,1) & (1) \\ &= \sum_w P_W(w)P_{S|W}(1|w) & (2) \\ &= P_W(0)P_{S|W}(1|0) + P_W(1)P_{S|W}(1|1) & (3) \\ &= 0.7 \times 0.1 + 0.3 \times 0.5 = 0.22 & (4) \end{aligned}$$

以上に基づき、事後確率分布は次の通りになる。

$$\begin{aligned} P_{W|S}(0|1) &= \frac{P_{S|W}(1|0)P_W(0)}{P_S(1)} = \frac{0.1 \times 0.7}{0.22} = \frac{7}{22} \\ P_{W|S}(1|1) &= \frac{P_{S|W}(1|1)P_W(1)}{P_S(1)} = \frac{0.5 \times 0.3}{0.22} = \frac{15}{22} \end{aligned}$$

もともと道が濡れている可能性は事前確率 $P_W(1) = 0.3$ であったが、「滑っている人を見た」という観測のもとに、濡れている可能性が $P_{W|S}(1|1) = 15/22$ にアップしたと考えることができる。

問題３

$X_3 = 0$ が観測されたときの X_1, X_2 に関する事後確率分布は

$$\begin{aligned} P_{X_1X_2|X_3}(x_1, x_2|0) &= \frac{P_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, 0)}{P_{X_3}(0)} \\ &= \frac{P_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, 0)}{\sum_{x_1}\sum_{x_2} P_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, 0)} \end{aligned}$$

と書き直すことができる。分母は

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2} P_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, 0) = 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.5$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} P_{X_1X_2|X_3}(0, 0|0) &= \frac{P_{X_1X_2X_3}(0, 0, 0)}{0.5} = 0.4 \\ P_{X_1X_2|X_3}(0, 1|0) &= \frac{P_{X_1X_2X_3}(0, 1, 0)}{0.5} = 0.2 \\ P_{X_1X_2|X_3}(1, 0|0) &= \frac{P_{X_1X_2X_3}(1, 0, 0)}{0.5} = 0.2 \\ P_{X_1X_2|X_3}(1, 1|0) &= \frac{P_{X_1X_2X_3}(1, 1, 0)}{0.5} = 0.2 \end{aligned}$$

となる。

同様の計算で $P_{X_1|X_3}(x_1|0)$ を計算することもできるが、ここでは、$P_{X_1X_2|X_3}(x_1, x_2|0)$ を周辺化して計算を行う：

$$P_{X_1|X_3}(x_1|0) = \sum_{x_2} P_{X_1X_2|X_3}(x_1, x_2|0)$$

したがって、

$$\begin{aligned} P_{X_1|X_3}(0|0) &= P_{X_1X_2|X_3}(0, 0|0) + P_{X_1X_2|X_3}(0, 1|0) = 0.4 + 0.2 = 0.6 \\ P_{X_1|X_3}(1|0) &= P_{X_1X_2|X_3}(1, 0|0) + P_{X_1X_2|X_3}(1, 1|0) = 0.2 + 0.2 = 0.4 \end{aligned}$$

を得る。

問題４

事後確率 $P_{X_1|X_3X_4}(x_1|x_3x_4)$ を同時確率分布 $P_{X_1X_2X_3X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ で表すと次のようになる：

$$\begin{aligned} P_{X_1|X_3X_4}(x_1|x_3^*x_4^*) &= \frac{P_{X_1X_3X_4}(x_1, x_3^*, x_4^*)}{P_{X_3X_4}(x_3^*, x_4^*)} \\ &= \frac{\sum_{x_2} P_{X_1X_2X_3X_4}(x_1, x_2, x_3^*, x_4^*)}{\sum_{x_1}\sum_{x_2} P_{X_1X_2X_3X_4}(x_1, x_2, x_3^*, x_4^*)} \end{aligned}$$