確率と最適化

凸集合

凸集合

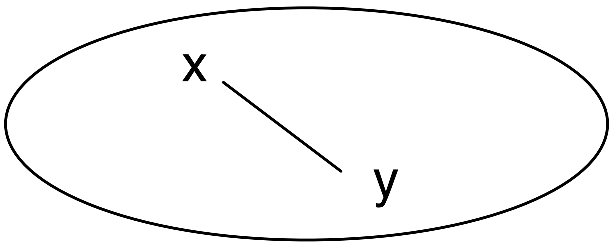
集合 C は $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。任意の $x, y \in C$ と任意の $\theta \in \mathbb{R}(0 \leq \theta \leq 1)$ について

$$\theta x + (1 - \theta)y \in C$$

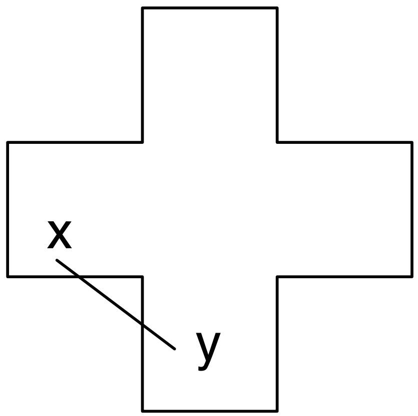
が成り立つとき、C は凸集合(convex set)である、という。

<u>凸集合の定義の意味</u>

$\theta x + (1-\theta)y$ は点 x, y をつなぐ線分となるため、"C 内の任意の2点をつなぐ線分が完全に C に含まれる場合、C は凸である" ということになる。



凸集合



凸集合ではない

重要な凸集合

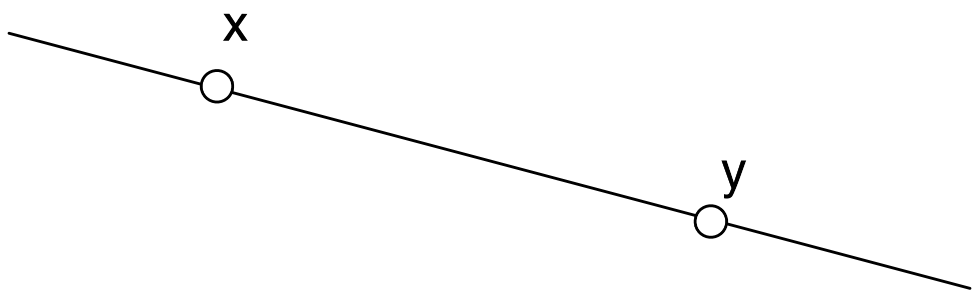
これから取り上げる $\mathbb{R}^n$ の部分集合はすべて凸集合である。

直線

相異なる $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ について、

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

と表される集合を直線(line)と呼ぶ。



超平面(hyperplane)

$a \in \mathbb{R}^n$ (法線ベクトル)

$b \in \mathbb{R}$ に対して、集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}, \quad (a \neq 0)$$

を超平面と呼ぶ。

- $n = 2$: P は直線(自由度1)
- $n = 3$: P は平面(自由度2)

ベクトルaに直交する原点を通る超平面：

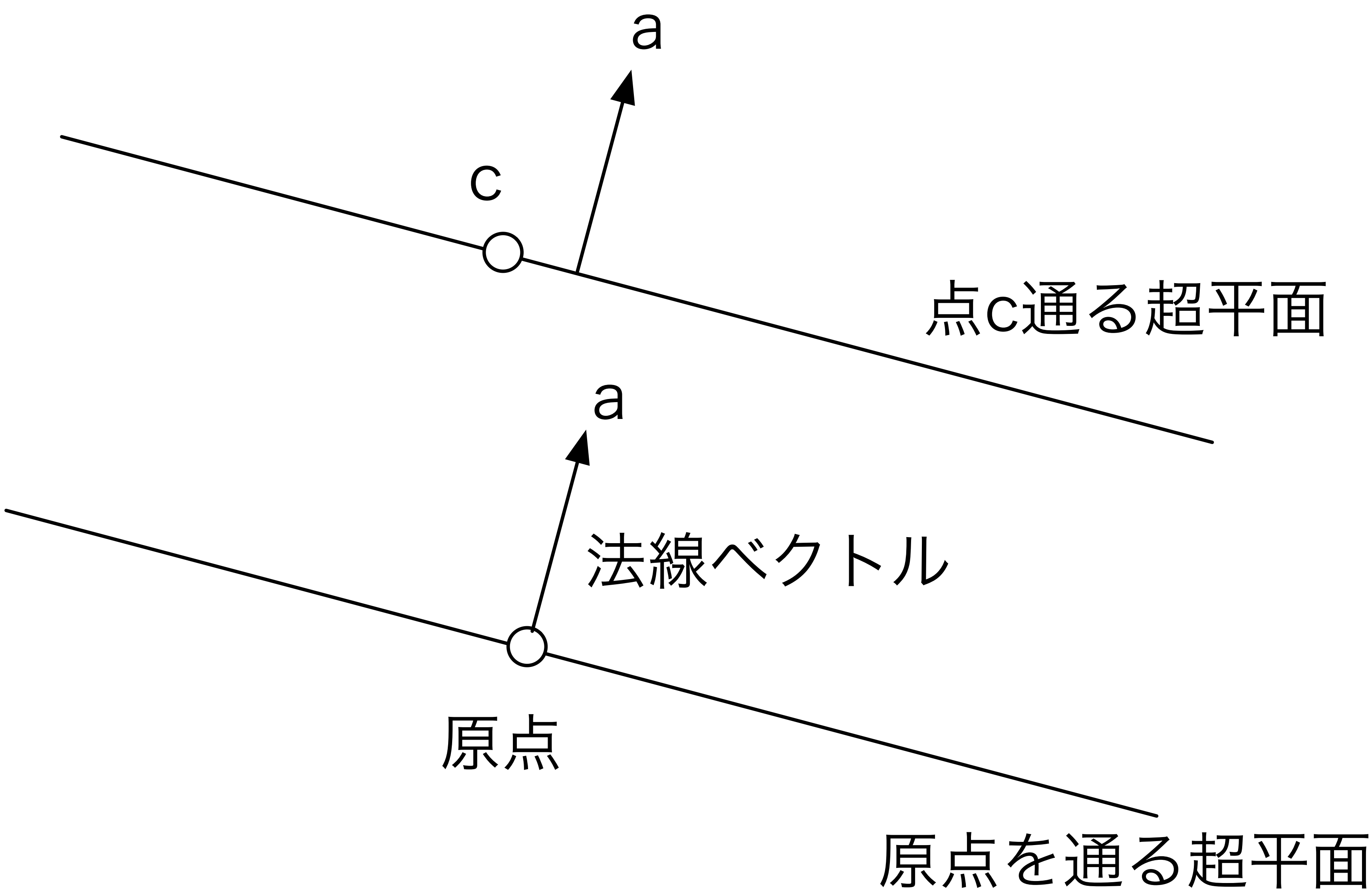
$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = 0\}$$

上の超平面を点$c \in \mathbb{R}^n$を通るようにシフトすると

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T (x - c) = 0\}$$

となる。

$$a^T (x - c) = 0 \Leftrightarrow a^T x = b (b = a^T c)$$


a
c
点c通る超平面
a
法線ベクトル
原点
原点を通る超平面

クイズ

超平面

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}, \quad (a \neq 0)$$

が凸集合であることを示せ。

クイズ解答

$x \in P, y \in P$ と仮定する。$0 \leq \theta \leq 1$ を満たす任意の θ ついて $z = \theta x + (1-\theta)y$ と置く。この仮定のもとに

$$
\begin{aligned}
a^T z + b &= a^T(\theta x + (1-\theta)y) && (1)\\
&= \theta(a^T x) + (1-\theta)(a^T y) && (2)\\
&= \theta b + (1-\theta)b && (3)\\
&= b && (4)
\end{aligned}
$$

が成立し $z \in P$ となるため、P は凸集合である。

アフィン集合

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

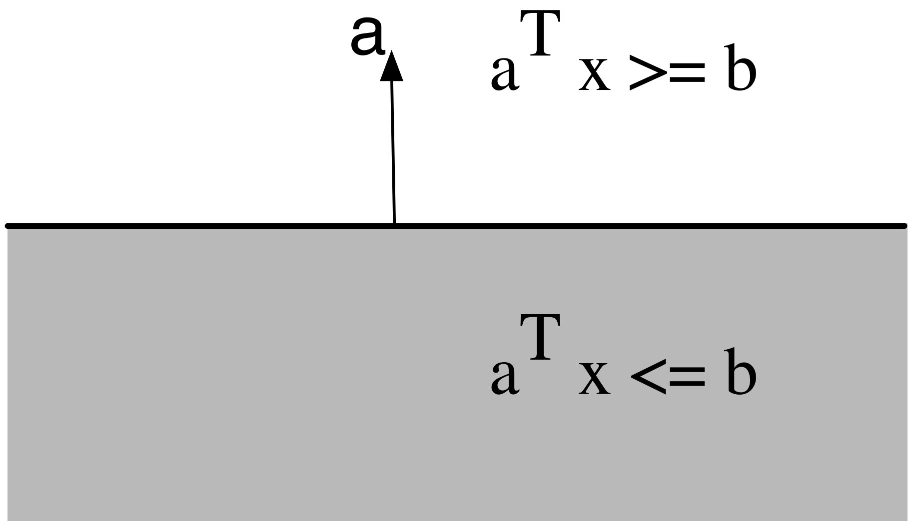
$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

直線、超平面を一般化した集合。

半空間 (halfspace)

$a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$のとき、

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}, \quad (a \neq 0)$$



超球(hypersphere)とノルム球

超球

$$B_2(x_c, r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_c||_2 \leq r\}$$

ノルム球

$$B_p(x_c, r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_c||_p \leq r\}$$

$$||x||_p \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

サブレベル集合

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$について

$$C_\alpha \equiv \{x \in \mathrm{dom} f : f(x) \le \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

をfのサブレベル集合と呼ぶ。凸関数のサブレベル集合は凸集合になる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

凸集合の共通集合

$C_1, C_2, \ldots, C_k \subset \mathbb{R}^n$ をそれぞれ凸集合とする。
それらの共通集合

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_k$$

は凸集合となる。
無限個の凸集合の共通集合もやはり凸集合となる。

凸計画問題の標準形

$f_0, f_1, \ldots, f_m$ は凸関数。

$$\begin{aligned} \text{minimize } & f_0(x) \\ \text{subject to } & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & a_i^T x = b, \quad i = 1, 2, \ldots, p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \equiv \{ & x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \le 0, a_j^T x = b, \\ & i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, p \} \end{aligned}$$

凸計画問題の実行可能領域$\mathcal{F}$は凸関数のサブレベル集合とアフィン集合の共通集合であるので、凸集合となる。

凸計画問題のもうひとつの見方

凸関数f_0を凸集合である実行可能領域$\mathcal{F}$において、最小化する問題。

線形計画法

$$\text{minimize } c^T x$$

$$\text{subject to } a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

線形計画問題のもうひとつの見方

- 目的関数 $c^T x$ を多面体である実行可能領域 F において、最小化する問題。
- 凸計画問題のひとつのクラス