確率と最適化

数理計画問題

よく使う記号と記法(1)

$\mathbb{R}$	実数
$\mathbb{R}^n$	n次元実数空間
$\mathbb{R}_+$	非負の実数
$\mathbb{R}_{++}$	正の実数
x^T	xの転置ベクトル(行ベクトル)

- ベクトルもxのように通常フォントを使う。
- ベクトルxの第i成分はx_iとする。
- ベクトル$x \in \mathbb{R}^n$は列ベクトルを表す。

よく使う記号と記法(2)

$\mathrm{dom} f$	関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の定義域
$\min_{x \in X} f(x)$	関数 f の最小値
$\inf_{x \in X} f(x)$	関数 f の下限値(infimum)

$$\inf_{x \in X} f(x) \equiv \max\{v \in \mathbb{R} : \forall x \in X, v \leq f(x)\}$$

クイズ

- $\operatorname{dom} \ln(x)$ を述べよ。
- $\operatorname{dom}\ e^x$ を述べよ。
- $\inf_{x \in R_{++}} (1/x)$ を求めよ。

数理計画問題(最適化問題)

$$\text{minimize } f_0(x)$$
$$\text{subject to } f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

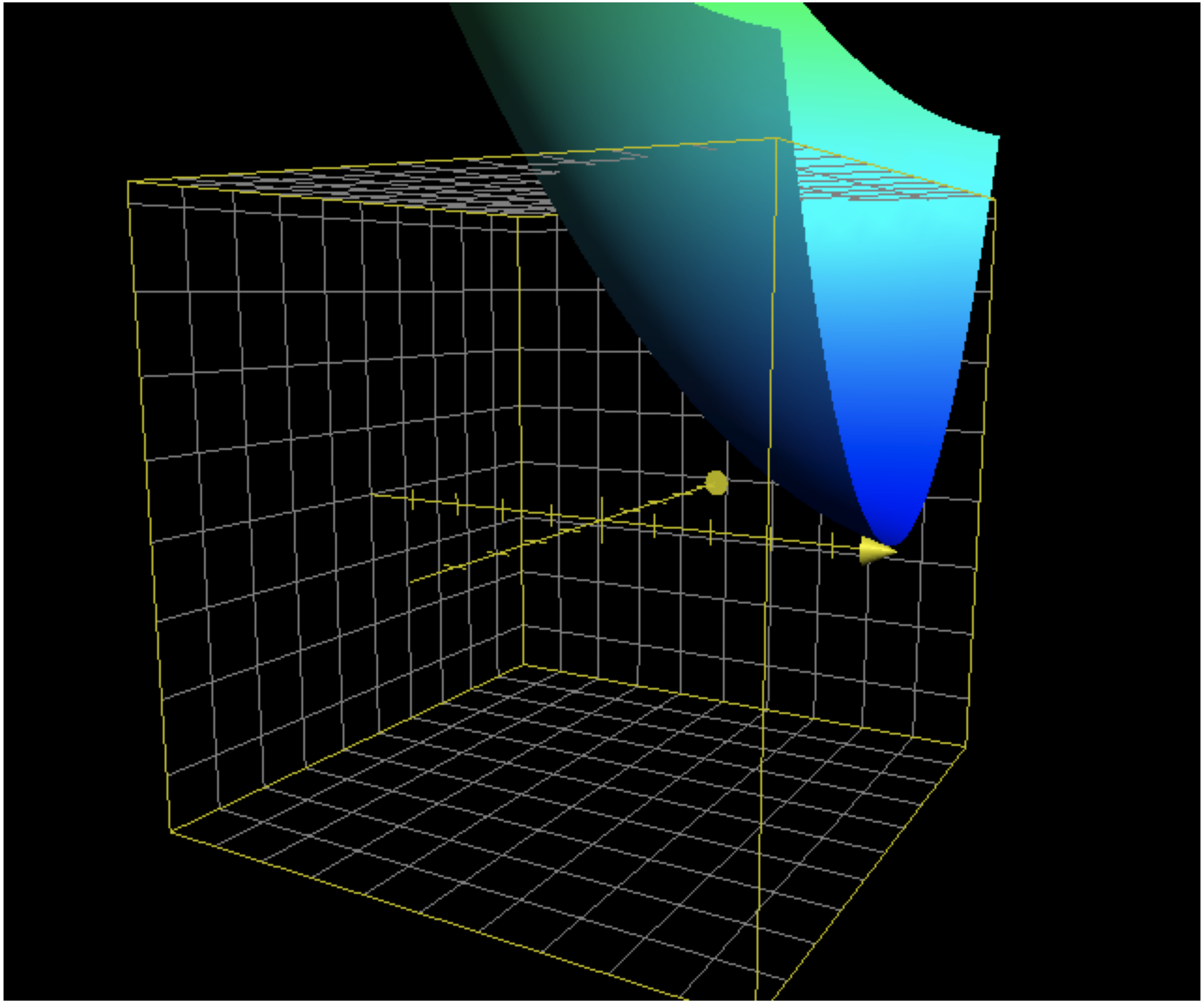
- f_0: 目的関数 ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- $f_i (i = 1, 2, \ldots, m)$: 制約関数($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- 制約関数は制約条件とも呼ばれる。

2次計画問題の例

$$\text{minimize } (x_1 - 6)^2 + 2x_2^2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5 \\ -x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 5 \\ -x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$



クイズ

次の２次計画問題を解け。

$$\text{minimize } x_1^2 + 2x_2^2$$

subject to

$$-x_1 \leq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$

2変数関数の可視化

Wolframalpha は数式処理だけでなく、関数の可視化にも大変に役に立つ。

`http://www.wolframalpha.com`

実行可能領域(feasible set)

$$\mathcal{F} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$の場合、その問題は"実行可能"(feasible)である、という。
- 実行可能領域は、f_iの定義域の共通集合に含まれる。

$$\mathcal{F} \subset \bigcap_{i=0}^{m} \mathrm{dom} f_i$$

最適値と最適解

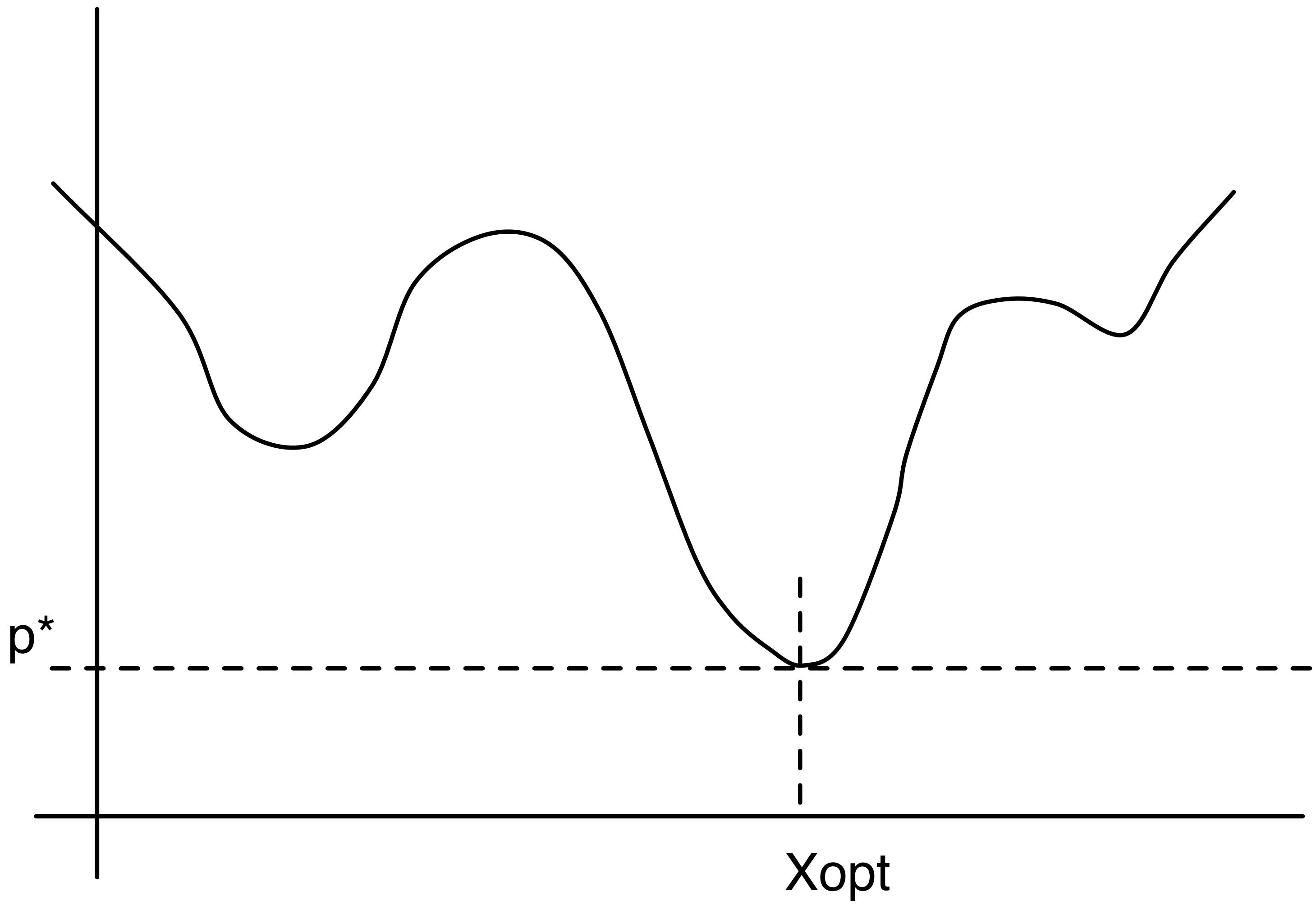
$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{F}} f_0(x)$$

最適解集合(大域的最適解)

$$X_{opt} = \{x \in \mathcal{F} : f_0(x) = p^*\}$$

最適解集合がただ一つの元を含むととき、X_{opt} を単に最適解と呼ぶこともある。

凸ではない一般の非凸関数の場合



実行不能問題、底抜け問題

- 実行可能領域が空集合の場合、その問題は実行不能(infeasible)である。その場合は、

$$p^* = \infty$$

とする。

- もし、制約条件が下に向けて、底が抜けている(unbounded below)場合、

$$p^* = \inf_{x \in F} f_0(x) = -\infty$$

例

- 実行不能問題の例

$$\text{minimize } x^2 \text{ s.t. } x < 0, x > 1$$

- 底抜け問題の例

$$\text{minimize } -x \text{ s.t. } x > 1$$

クイズ

次の制約領域は実行可能となるのは、パラメータcがどの範囲にある場合か。

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &\leq 1 \\
x &\geq c \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

線形計画問題(Linear Programming, LP)

$$\text{minimize } c^T x$$

$$\text{subject to } a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

- さまざまな応用がある。
- 現代のの線形計画ソルバ(CPLEX, Gloubi など)では、数万変数を含む巨大の線形計画問題も取集ことができるようになっている。

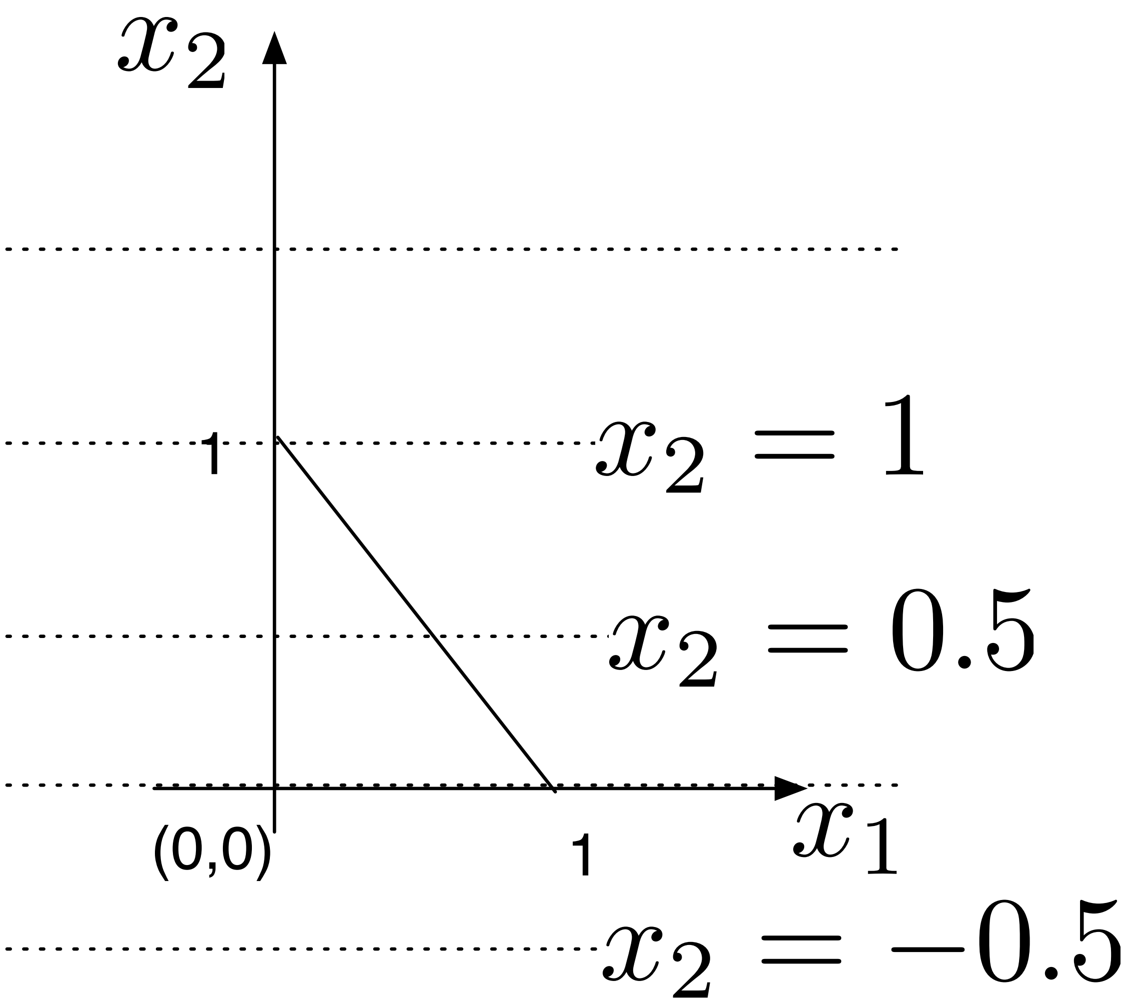
クイズ

$$\text{minimize } x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

(1) 実行可能領域を図示せよ。(2)最適点を求めよ。



最小値は0, 最適点は例えば$(x_1, x_2) = (0, 0)$

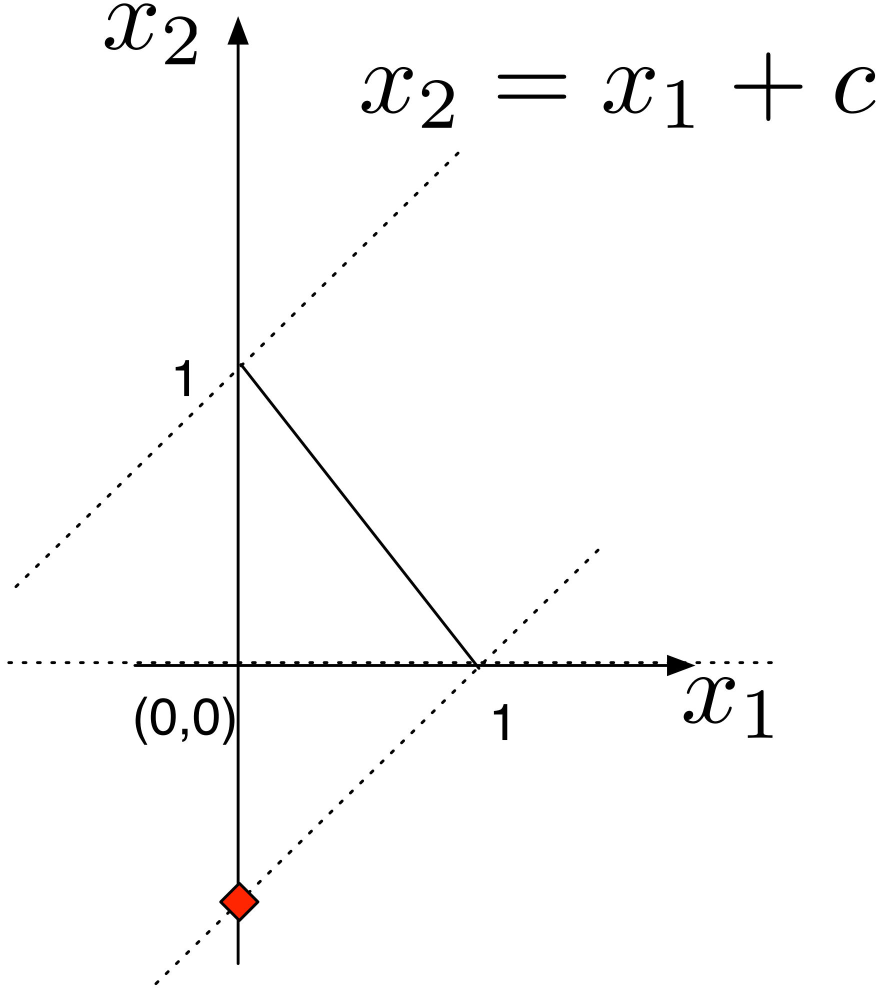
<u>クイズ</u>

$$\text{minimize} \; -x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

最適値・最適点を求めよ。



最小値は-1, 最適点は$(x_1, x_2) = (1, 0)$

数理計画問題を解く

数理計画問題を解く $\longrightarrow$ 最適値と最適点を求める。

- 可能ならば、解析解を求める。
- 最適化アルゴリズムを適用する。
  - 計算量的に扱いやすい問題クラス:
    線形計画問題、2次計画問題、凸計画問題
  - 計算量的に扱いにくい問題クラス:
    一般の非線形計画問題

古典的な最適化問題の分類

線形最適化問題 (線形計画法)	非線形最適化問題

現代的な最適化問題の分類

凸最適化問題	非凸最適化問題

線形計画問題 (LP)
2次計画問題(QP)
2次制約2次計画問題(QCQP)
2次錐計画問題(SOCP)
半正定値計画問題(SDP)

凸計画問題

- 効率よく解ける最も広い問題クラス
- 理論が整備されている(双対性理論)
- 効率のよい最適化アルゴリズムが知られている
- 高い問題記述能力

近年さまざまな分野での応用が広がる
信号処理・通信・機械学習・回路設計・建造物構造設計・組み合わせ最適化・制御理論など。

凸計画法を使いこなすには

凸計画問題を利用するには基礎的な知識が必要：

- 現実の問題を凸最適化の形に定式化
- 与えられた数理計画問題を凸最適化の形に変形
- 与えられた数理計画問題を凸最適化で近似
- 双対性の利用