演習問題　解答

問題 1

次のように設定する。

- ドアに 1,2,3 と番号をつける。
- プレイヤーはドア 1 を選択したものと仮定する。
- 確率変数 X は車の位置を表す。$D(X)=\{1,2,3\}$：

$$P_X(1)=P_X(2)=P_X(3)=1/3$$

- 確率変数 M はモンティが開けるドアを表す。$D(M)=\{2,3\}$

このとき同時分布は下記の表の通りになる。

x	m	$P_{XM}(x,m)$
1	2	1/6
1	3	1/6
2	3	1/3
3	2	1/3

注：上記以外の x, m の組み合わせでは、$P_{XM}(x,m)=0$

$P_{X|M}(3|2)$（「モンティが 2 つ目のドアを開けたとき、選択ドアを変更」に対応）を計算してみよう。$P_M(2)=1/6+1/3=1/2$ であるので、

$$P_{X|M}(3|2)=\frac{P_{XM}(3,2)}{P_M(2)}=2/3$$

が得られる。まとめると事前確率 $P_X(1)=1/3$ だったのが、ドア選択を変更することにより $P_{X|M}(3|2)=2/3$ と確率が 2 倍になる。なお、モンティがドア 3 を開けた場合も同様。

問題 2

まず X_2 に関する周辺分布を求めておく：

$$\begin{aligned}P_{X_2}(1) &= \sum_{x_1}\sum_{x_2} P_{X_1X_2X_3}(x_1,1,x_3) \\ &= 0.1+0.1+0.1+0.1=0.4\end{aligned}$$

この値を利用することにより

$$
\begin{aligned}
P_{X_1|X_2}(0|1) &= \frac{P_{X_1X_2}(0,1)}{P_{X_2}(1)} \\
&= \frac{\sum_{x_3} P_{X_1X_2X_3}(0,1,x_3)}{P_{X_2}(1)} \\
&= \frac{0.1+0.1}{0.4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

を得る。

問題 3

問題設定より、同時分布が次の形で表されることに注意（マルコフ連鎖)。

$$P_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3) = P_{X_1}(x_1)P_{X_2|X_1}(x_2|x_1)P_{X_3|X_2}(x_2|x_1)$$

ここで、問題設定より

$$
\begin{aligned}
P_{X_2|X_1}(0|0) &= 1/2 \\
P_{X_2|X_1}(1|0) &= 1/2 \\
P_{X_2|X_1}(0|1) &= 1/4 \\
P_{X_2|X_1}(1|1) &= 3/4
\end{aligned}
$$

となる ($P_{X_3|X_2}(x_3|x_2)$ も同様)。したがって、同時分布は次の通りとなる。

x_1	x_2	x_3	$P_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1/8
0	0	1	1/8
0	1	0	1/16
0	1	1	3/16
1	0	0	1/16
1	0	1	1/16
1	1	0	3/16
1	1	1	9/32

まず、$P_{X_3}(1)$ を求めると

$$
\begin{aligned}
P_{X_3}(1) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{32} \\
&= \frac{4+6+2+9}{32} = \frac{21}{32}
\end{aligned}
$$

となる。この値を利用すると

$$\begin{aligned}
P_{X_1|X_3}(0|1) &= \frac{P_{X_1X_3}(0,1)}{P_{X_3}(1)} \\
&= \frac{\sum_{x_2} P_{X_1X_2X_3}(0,x_2,1)}{P_{X_3}(1)} \\
&= \frac{\frac{1}{8}+\frac{3}{16}}{\frac{21}{32}} \\
&= \frac{10}{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{X_1|X_3}(1|1) &= 1 - P_{X_1|X_3}(0|1) \\
&= \frac{11}{21}
\end{aligned}$$

を得る。

問題 4

目標とする事後確率を与えられた同時分布に基づいて書きなおすことで

$$\begin{aligned}
P_{X_1|X_n}(x_1|x_n^*) &= \frac{P_{X_1X_n}(x_1,x_n^*)}{P_{X_n}(x_n^*)} \\
&= \frac{\sum_{x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}} P_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n^*)}{\sum_{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}} P_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n^*)}
\end{aligned}$$

を得る。

分子の和は 2^{n-2} 個の項を含む和であり、分母の和は 2^{n-1} 個の項を含む和である。したがって、加算回数は

$$2^{n-2} - 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-2} + 2^{n-1} - 2$$

回である。