演習問題 (5) 解答

問題 1

$\lambda \geq 0$ において

$$\begin{aligned} P_{L|X}(\lambda|3) &\propto P_L(\lambda) P_{X|L}(3|\lambda) && (1) \\ &= \lambda \exp(-\lambda) \times \lambda \exp(-3\lambda) && (2) \\ &= \lambda^2 \exp(-4\lambda) && (3) \end{aligned}$$

となる。$\lambda < 0$ では $P_{L|X}(\lambda|3) = 0$ である。

問題 2

確率変数 X を乳がんがある $(X=1)$ または乳がんがない $(X=0)$ を表す確率変数であるとする。また、確率変数 Y をマンモグラフィーの結果が陽性 $(Y=1)$ または陰性 $(Y=0)$ を表す。問題設定より

$$\begin{aligned} P_X(0) &= 0.99 && (4) \\ P_X(1) &= 0.01 && (5) \\ P_{Y|X}(0|0) &= 0.9 && (6) \\ P_{Y|X}(1|0) &= 0.1 && (7) \\ P_{Y|X}(0|1) &= 0.25 && (8) \\ P_{Y|X}(1|1) &= 0.75 && (9) \end{aligned}$$

である。まずベイズ公式の分母 (正規化定数) を求める。

$$\begin{aligned} P_Y(1) &= \sum_x P_{XY}(x,1) && (10) \\ &= \sum_x P_X(x) P_{Y|X}(1|x) && (11) \\ &= P_X(0) P_{Y|X}(1|0) + P_X(1) P_{Y|X}(1|1) && (12) \\ &= 0.99 \times 0.1 + 0.01 \times 0.75 && (13) \\ &= 0.99 \times 0.1 + 0.01 \times 0.75 && (14) \\ &= 0.1065 && (15) \end{aligned}$$

となる。ベイズ則より

$$\begin{aligned} P_{X|Y}(x|1) &= \frac{P_X(x) P_{Y|X}(1|x)}{P_Y(1)} && (16) \\ &= \frac{P_X(x) P_{Y|X}(1|x)}{0.1065} && (17) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$P_{X|Y}(0|1) = \frac{P_X(0)P_{Y|X}(1|0)}{0.1065} \tag{18}$$
$$= \frac{0.99 \times 0.1}{0.1065} \simeq 0.93 \tag{19}$$

$$P_{X|Y}(1|1) = \frac{P_X(1)P_{Y|X}(1|1)}{0.1065} \tag{20}$$
$$= \frac{0.01 \times 0.75}{0.1065} \simeq 0.07 \tag{21}$$

となる。

期待損失を計算すると

$$E[L(X|0)] = \sum_x P_{X|Y}(x|1)L(x|0) \tag{22}$$
$$= P_{X|Y}(0|1)L(0|0) + P_{X|Y}(1|1)L(1|0) \tag{23}$$
$$= 0.93 \times 0 + 0.07 \times 100 = 7 \tag{24}$$

$$E[L(X|1)] = \sum_x P_{X|Y}(x|1)L(x|0) \tag{25}$$
$$= P_{X|Y}(0|1)L(0|1) + P_{X|Y}(1|1)L(1|1) \tag{26}$$
$$= 0.93 \times 10 + 0.07 \times 0 = 9.3 \tag{27}$$

を得る。$E[L(X|0)] < E[L(X|1)]$ であることから、期待損失の小さい行動を選択することが合理的であるという考え方 (ベイズ行動選択基準) から、「検査を勧めない」を選択する。