

## 演習問題 (11) 解答

### 問題 1

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

### 問題 2

ヘッセ行列を求めると

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

である。2 次形式を考えると

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 \quad (3)$$

となる。したがって、任意の  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  に対して、

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4)$$

が成立する。すなわち、このヘッセ行列は半正定値となるため、この関数は凸関数である。

### 問題 3

$$f(x) \equiv x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$$

を二階微分すると

$$f''(x) = \frac{1}{x-x^2} \quad (5)$$

となる。範囲  $0 < x < 1$  において、 $f''(x) > 0$  であることから、 $f$  が凸関数であることが示せた。