演習問題

問 1

確率計算の基本則 (離散確率変数版)

すべて足すと 1

$$\sum_{x \in D(X)} P_X(x) = 1 \tag{1}$$

周辺化

$$P_X(x) = \sum_{y \in D(Y)} P_{XY}(x, y) \tag{2}$$

条件付確率 (チェイン則)

$$P_{XY}(x, y) = P_{Y|X}(y|x) P_X(x) \tag{3}$$

ベイズ則

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_X(x) P_{Y|X}(y|x)}{P_Y(y)} \tag{4}$$

確率変数 $X, Y (\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\})$ は次の同時分布を持つ。

$$P_{XY}(0, 0) = 1/8 \tag{5}$$
$$P_{XY}(0, 1) = 3/8 \tag{6}$$
$$P_{XY}(1, 0) = 2/8 \tag{7}$$
$$P_{XY}(1, 1) = 2/8 \tag{8}$$

次の問に答えよ。

(a) $P_X(0), P_X(1)$ を求めよ。

(b) $P_Y(0), P_Y(1)$ を求めよ。

(c) $P_{Y|X}(0|0), P_{Y|X}(1|0)$ を求めよ。

(d) チェイン則に基づいてベイズ則を導け。

問 2

n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ について考える。この確率変数の組に対応する同時分布 $P_{X_1 \cdots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が任意の $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(x_1) \times$

$\cdots \times D(x_n)$ について

$$P_{X_1 \cdots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2) \cdots \times P_{X_n}(x_n) \tag{9}$$

が成り立つならば、組 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ は**独立**である、という。言い換えると

同時分布が各変数の周辺分布の積として因子分解できる $\Leftrightarrow$ 独立

である。次の同時分布 $P_{XY}(x, y)$ を持つ 2 つの確率変数 X, Y が独立であることを示せ。

$P_{XY}(x, y)$

$y \backslash x$	0	1
0	0.03	0.27
1	0.07	0.63