《初等概率论》第 8 讲

邓 婉 璐

清华大学
统计学研究中心

October 23, 2018

随机变量的数学期望

例 1.1

假设一个班有 $n=120$ 个学生，期中考试后有 n_j 个同学的成绩是 j 分 $(0 \le j \le 100)$. 用 x_i 表示第 i 个同学的成绩，则全班同学的平均分是

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{100} j n_j = \sum_{j=0}^{100} j \frac{n_j}{n}.$$

现从班中任选一个同学，用 X 表示该同学的期中考试成绩，则 X 有分布

$$p_j = \mathbb{P}(X=j) = \frac{n_j}{n}, \quad 0 \le j \le 100.$$

随机变量 X 的分布就是该班期中考试成绩的分布，所以 X 的数学期望应当定义为平均分 μ.

A. 离散型的情况

定义 1.1 (数学期望或期望 (Expectation))

设 X 有概率分布

$$p_j = \mathbb{P}(X = x_j), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

只要级数 $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| p_j$ 收敛，就称

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathbb{P}(X = x_j)$$

为 X 的**数学期望**或**均值**.

♣ 只取有限个值的随机变量的数学期望总是存在的.

♣ 将 p_j 视为横坐标 x_j 处的质量，由于

$$\sum_{j=0}^{\infty}(x_j-\mu)p_j=\sum_{j=0}^{\infty}x_jp_j-\mu=0,$$

知 $\{p_j\}$ 的质心是 μ, 所以数学期望 $E(X)$ 是 X 的分布的质心.

♣ 常见分布的数学期望

例 1.2 (两点分布 $B(1,p)$)

设 $X \sim B(1,p)$，即：$\mathbb{P}(X=1)=p=1-\mathbb{P}(X=0)$，则

$$E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p.$$

例 1.3

设 A 是事件，I_A 是 A 的示性函数，则 I_A 服从两点分布，且 $EI_A=\mathbb{P}(A)$.

随机变量的数学期望

例 1.4 (二项分布 $B(n,p)$)

设 $X \sim B(n,p)$,即:$p_j = \mathbb{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$, $0 \leq j \leq n$. 则 $E(X) = np$.

证明. 按照期望的定义,得

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \qquad \left(\text{use } j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1}\right) \\
&= np \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} p^{j-1} (1-p)^{n-j} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= np(p + (1-p))^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}
$$

随机变量的数学期望

例 1.5 (Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$)

设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 即

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

则

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda.$$

例 1.6 (几何分布 $G(p)$)

设 $X \sim G(p)$, 即

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

则 $E(X) = 1/p$.

B. 连续型的情况

定义 1.2 (数学期望或期望 (Expectation))

设 X 有概率密度 $f(x)$，如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty,$$

就称

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

为 X 的**数学期望**或**均值**.

例 1.7 ($\mathcal{U}(a,b)$)

设 $X\sim\mathcal{U}(a,b)$，即

$$f(x)=\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x).$$

则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}.$$

例 1.8 (指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$)

设 $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$，即

$$f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},\quad x>0.$$

则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_0^{\infty}x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}.$$

随机变量的数学期望

例 1.9 (正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，即

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

则

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mu f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)\,dx \\ &= \mu + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \mu + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= \mu. \end{aligned}$$

例 1.10 (Gamma 分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$)

设 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, 即

$$f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x},\quad x>0.$$

则

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}dx\\&\overset{t=\beta x}{=\!=\!=}\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{(\alpha+1)-1}\mathrm{e}^{-t}dx\\&=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}\\&\overset{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{\alpha}{\beta}.\end{aligned}$$

♣ 当 $\alpha=1$ 时，Gamma(α,β) 分布退化为指数分布 $\mathcal{E}(\beta)$.

例 1.11

设 X 的数学期望存在，概率密度 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称，即 $f(x+\mu)=f(x-\mu)$，则 $E(X)=\mu$.

证明. 令 $g(t)=tf(t+\mu)$，此时 $g(t)$ 是奇函数，即 $g(-t)=-g(t)$. 于是

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x-\mu+\mu)\,dx \\
&= \mu + \int_{-\infty}^{\infty} tf(t+\mu)\,dt = \mu.
\end{aligned}
$$

C. 更一般的情况

定义 1.3

如果随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$，则 X 的数学期望

$$E(X)=\int_{\Omega} X d\mathbb{P}=\int_{R} x dF(x).$$

具体地，对任意单调不减的右连续函数 $G(x)$，如果其在 $(a,b]$ 上仅在最多可列个 $x_j, j=1,2,\ldots$ 处有跳跃，且 $\sum_{j:x_j\in(a,b]}|g(x_j)|[G(x_j)-G(x_j-0)]<\infty$，
则可形式地定义
$\int_a^b g(x)dG(x)=\sum_{j:x_j\in(a,b]} g(x_j)[G(x_j)-G(x_j-0)]$.

对某随机变量 X，假设存在非负函数 $f_0(x)$，使得 X 的分布函数 $F(x)$ 可分解为 $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$，其中

$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(s)\,ds$,
$F_2(x)$ 仅在可列个 $x_j, j = 1, 2, \ldots$ 处有跳跃，即 $P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_j - 0)$. 如有
$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_0(x)\,dx + \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(X = x_j) < \infty$, 则 EX 存在，且
$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_0(x)\,dx + \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$.
从而我们可将 EX 形式化地表示成
$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$.

例 1.12

抛均匀硬币．正面直接得钱 0.5 元；反面则需转一个幸运转盘，可得钱数为 0 到 1(元) 的均匀分布．记最终获得钱数为 X. 则有 $EX = \frac{1}{2}$.

♣ 【如果期望存在的话】同分布的随机变量有相同的期望.

随机变（向）量函数的数学期望

定理 2.1

设 $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ 是随机向量，$\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in R^n$. 如果 $\mathbf{X}$ 有联合分布函数 $F(\mathbf{x})$, 实函数 $g(\mathbf{x})$ 使得

$$\int_{R^n}|g(\mathbf{x})|dF(\mathbf{x})<\infty.$$

则 $Y=g(\mathbf{X})$ 有数学期望

$$E(Y)=:E(g(\mathbf{X}))=\int_{R^n}g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}).$$

♣ 该定理为计算随机向量函数的数学期望时带来很大的方便，最主要的是不再需要推导随机变量 Y 的分布.

随机变（向）量函数的数学期望

例 2.1

设 $X \sim \mathcal{U}(0, \pi/2)$，计算 $E(\cos(X))$.

解.

$$E(\cos(X)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \cos(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \frac{2}{\pi}.$$

例 2.2

设 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, α 是常数，计算 $E(|X|^{\alpha})$.

解. X 有概率密度

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

对 $\alpha > -1$, 有

$$\begin{aligned} E(|X|^{\alpha}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx \\ &\xlongequal{x=\sqrt{2t}} \frac{(\sqrt{2})^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha+1}{2}-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt \\ &= \sqrt{\frac{2^{\alpha}}{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right). \end{aligned}$$

特别地，(1). $E(X^2) = 1$; (2). $E|X| = \sqrt{2/\pi}$; (3). $E|X|^{\alpha} = \infty\,(\alpha \le -1)$. 【注意：$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$】

例 2.3

设 $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, 且 X, Y 独立，令 $Z = (X^2 + Y^2)^\alpha$, 计算 $E(Z)$.

解. 对 $\alpha > -1$, 有

$$E(Z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1).$$

当 $\alpha \le -1$，有 $E(Z) = \infty$.

例 2.4

设 (X, Y) 在单位圆 $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ 内均匀分布，计算 $E(X)$, $E(Y)$.

解. (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} I_D.$$

则

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{R^2} x f(x, y)\, dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx \Big) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

数学期望的性质

一般来说，$E(g(X)) \neq g(E(X))$. 下面有一些特例.

定理 3.1

$E|X| < +\infty, E|Y| < +\infty$，且 a, b, C 都是实数，则

1. $EC = C$;
2. $|EX| \leq E|X|$;
3. $E(aX + bY) = aEX + bEY$; (Linearity)
4. $X \leq Y$ $a.s.$, $\Longrightarrow EX \leq EY$;
5. X 和 Y 独立，则 $E(XY) = (EX)(EY)$.

期望的用途举例：

1. 做决策
2. 整体情况的一种总结或刻画
3. 简化求解 (e.g. $P(A) = EI_A$.)

数学期望的性质

例 3.1 (收藏问题)

盒中有一套邮票，共 N 张. 从中有放回地每次抽取一张，要收集 k 张不同的邮票，期望抽取多少次?

解. 用 S_k 表示收集到第 k 张新邮票时的抽取次数，$S_0=0$, 则 $X_k=S_k-S_{k-1}$ 是等待第 k 张 (下一张) 新邮票的抽取次数. 抽到第 $k-1$ 张新票后，对于收藏者而言，盒中有 $N-k+1$ 张新票，所以 X_k 服从参数为 $p_k=(N-k+1)/N$ 的几何分布：

$$\mathbb{P}(X_k=j)=p_k(1-p_k)^{j-1},\quad j=1,2,\ldots.$$

显然，$EX_k=\frac{1}{p_k}=\frac{N}{(N-k+1)}$. 由 $S_n=X_1+\ldots+X_n$ 得

数学期望的性质

$$ES_k = \sum_{j=1}^{k} EX_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{N}{N-k+1} = N \sum_{j=N-k+1}^{N} \frac{1}{j}$$

$$= N\left(\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{N-k} \frac{1}{m}\right) \approx N \ln \frac{N+1}{N-k+1}.$$

特别地，$ES_N \approx N\ln(N+1)$. $ES_{[N/2]} \approx N\ln 2 = 0.693N$. 此结论说明，当 N 较大时，收集全套邮票的一半比较容易，收全就比较困难了。收齐 50 张一套的邮票平均需要抽取 $N\ln(N+1) = 50 \times 3.93 = 196.6$ 次.

例 3.2

如果 $E|X|=0$，则 $\mathbb{P}(X=0)=1$，即 $X=0$ $a.s.$

证明.

$$\mathbb{P}(|X|>1/n)=\mathbb{P}(n|X|>1)=EI_{\{n|X|>1\}}\le E(n|X|I_{\{n|X|>1\}}) \le nE|X|=0.$$

由概率的连续性，可得

$$\mathbb{P}(|X|>0)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X|>1/n\}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X|>1/n)=0.$$

最后，$\mathbb{P}(X=0)=1-\mathbb{P}(|X|>0)=1.$

定义 3.1

设 X 是随机变量，m 是正整数. 如果 $E(|X|^m) < \infty$，称 $E(X^m)$ 为 X 的m **阶原点矩**，称 $E(X-EX)^m$ 为 X 的m **阶中心矩**. 当 $m > 2$ 时，我们将原点矩和中心矩统称为**高阶矩**.

随机变量的方差

定义 4.1 (随机变量的方差 (Variance))

如果随机变量 X 的期望 $\mu = EX$ 有限，则称 $E(X-\mu)^2$ 为 X 的**方差 (Variance)**，记作 $\mathrm{var}(X)$ 或者 σ_X^2. 当 $\mathrm{var}(X) < \infty$ 时，称 X 的方差有限. 称 $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$ 为 X 的**标准差**.

♣ 方差表示 X 在期望附近的集中程度.

♣ 常用的计算公式：$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

随机变量的方差

♣ 常见分布的方差

例 4.1 (两点分布 $B(1,p)$)

设 $X \sim B(1,p)$，即：$\mathbb{P}(X=1)=p$, $\mathbb{P}(X=0)=q=1-p$. 注意到 $X^2=X$，$EX=p$，则

$$\operatorname{var}(X)=E(X^2)-(EX)^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

例 4.2 (二项分布 $B(n,p)$)

设 $X \sim B(n,p)$，即：

$$\mathbb{P}(X=j)=\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j},\quad 0\le j\le n.$$

则 $\operatorname{var}(X)=npq$.

例 4.3 (Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$)

设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 即

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k=0,1,\ldots.$$

则

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(X(X-1))+EX=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda \\ &= \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda \\ &= \lambda^2+\lambda. \end{aligned}$$

因此，$\operatorname{var}(X)=\lambda$.

例 4.4 (几何分布 $G(p)$)

设 $X \sim G(p)$, 即

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

则

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + EX = \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)pq^{j-1} + p^{-1}$$

$$= pq\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q^j\Big)'' + p^{-1}$$

$$= pq\Big(\frac{1}{1-q}\Big)'' + p^{-1} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

因此, $\mathrm{var}(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = q/p^2$.

例 4.5 ($\mathcal{U}(a,b)$)

设 $X \sim \mathcal{U}(a,b)$，即

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x).$$

则

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X) &= E(X^2) - (EX)^2 \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

随机变量的方差

例 4.6 (指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$)

设 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$，即

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

则

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

所以

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

例 4.7 (正态分布 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$)

设 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 即

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\,dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\,dt \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

例 4.8 (Gamma 分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$)

设 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, 即

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x},\quad x>0.$$

则

$$\begin{aligned}
E(X^2)&=\int_0^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\beta x}dx\\
&\xlongequal{t=\beta x}\frac{1}{\beta^2\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{(\alpha+2)-1}\mathrm{e}^{-t}dx\\
&=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2\Gamma(\alpha)}\\
&\xlongequal{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.
\end{aligned}$$

故，$\mathrm{var}(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-(\alpha/\beta)^2=\alpha/\beta^2.$

方差的性质

定理 4.1 (方差的性质)

设 $EX = \mu$, $\mathrm{var}(X) < \infty$, 则

1. $\mathrm{var}(aX + b) = a^2\mathrm{var}(X)$, $a, b \in R$.
2. $\mathrm{var}(X) = E(X-\mu)^2 \leq E(X-c)^2$, $\forall c \in R$.
3. $\mathrm{var}(X) = 0 \Longleftrightarrow X = \mu \ a.s.$
4. $X_1, ..., X_n$ 相互独立，则

$$\mathrm{var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k).$$

定义 4.2 (标准化)

设 $\mathrm{var}(X) < \infty$，令 $Y = (X - EX)/\sqrt{\mathrm{var}(X)}$. 则 $EY = 0$, $\mathrm{var}(Y) = 1$. 此时称 Y 是 X 的标准化. 特别地，当 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 时，$Y = (X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$.

有用的不等式

定理 4.2 (Markov 不等式)

对随机变量 X 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|^\alpha}{\varepsilon^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

证明. 显然

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) = EI_{\{|X| \geq \varepsilon\}} &= EI_{\{|X|^\alpha \geq \varepsilon^\alpha\}} \\ &\leq E\{(|X|^\alpha/\varepsilon^\alpha) I_{\{|X|^\alpha \geq \varepsilon^\alpha\}}\} \\ &\leq E\{(|X|^\alpha/\varepsilon^\alpha)\} = \frac{E|X|^\alpha}{\varepsilon^\alpha}, \quad \alpha > 0.\end{aligned}$$

推论 4.1 (Chebyshev 不等式)

$$\mathbb{P}(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

有用的不等式

定理 4.3 (内积不等式)

设 $EX^2 < \infty$ 和 $EY^2 < \infty$，则有

$$|E(XY)| \le \sqrt{EX^2 EY^2}.$$

等号成立的充分必要条件是存在不全为零的常数 a, b 使得 $aX + bY = 0$ a.s.

证明. 对于不全为零的常数 a, b，二次型

$$\begin{aligned} E(aX + bY)^2 &= a^2 E(X^2) + 2abE(XY) + b^2 E(Y^2) \\ &= (a, b)\Sigma(a, b)' \ge 0, \end{aligned}$$

其中 $\Sigma = \begin{pmatrix} E(X^2) & E(XY) \\ E(XY) & E(Y^2) \end{pmatrix}$. 由 Σ 的非负定性可得结论成立. 从 $\det(\Sigma) = E(X^2)E(Y^2) - [E(XY)]^2 = 0$，知 $E(aX + bY)^2 = 0 \Longleftrightarrow aX + bY = 0$ a.s.

小结

知识点

- 期望的定义、由其引伸出的方差、协方差、相关系数的定义
- 期望的性质、由其引伸出的方差等的性质
- 期望、方差等的计算方法

技巧

- 利用归一化、对称性等简化期望的计算
- 其他小的计算技巧：阶乘错位、求导
- 利用示性函数建立概率与期望的连接
- 便捷计算随机变（向）量函数的期望

作业

打 * 的题目是选做，不算成绩，因而不必写入作业：

- 教材第 2 章 16, 19*, 22, 26, 29*; 第 3 章 10*, 13, 15(ii)(iii), 17*;
- 设 X 是取非负整数值的随机变量，证明 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} (X > k)$.
- 设非负随机变量 X 有概率密度 $f(x)$，则 $P(X \geq M) \leq \frac{1}{M} \int_M^{\infty} x f(x)\, dx$.

$$Thank \quad you!$$