《微分方程1》第五讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年10月25日

考虑 $y'' + py' + qy = 0$, 其中$p, q \in \mathbb{R}$ 为常数. 指数函数的导数性质$(e^{mx})' = me^{mx}$, 启发我们寻求方程的指数函数解.

将$y = e^{mx}$ 代入方程得 $m^2e^{mx} + pme^{mx} + qe^{mx} = 0$. 约去指数函数$e^{mx}$ 得

$$m^2 + pm + q = 0. \qquad (*)$$

方程(*)称为微分方程$y'' + py' + qy = 0$ 的辅助方程(auxiliary eqution) 或特征方程 (characteristic equation); 其根称作特征根; 多项式$m^2 + pm + q$ 称作方程的特征多项式 (characteristic polynomial).

Theorem

指数函数e^{mx} 是微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解，当且仅当m是其特征根，即$m^2+pm+q=0$.

基本解组

为了求方程$y''+py'+qy=0$ 的基本解组，需要对特征方程和特征根作进一步讨论．熟知特征方程$m^2+pm+q=0$ 的两个根，即特征根可表为

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

情形一：$p^2>4q$. 此时方程有两个互异的实特征根m_1, m_2. 它们对应两个解e^{m_1x}, e^{m_2x}. 显然它们线性无关，因为它们的比$\frac{e^{m_1x}}{e^{m_2x}}=e^{(m_1-m_2)x}$ 不是常数．因此解e^{m_1x}, e^{m_2x} 构成了方程基本解组．

情形二：$p^2 < 4q$. 此时两个特征根为一对共轭复根，方程有一对共轭复函数解e^{m_1x} 和e^{m_2x}. 若设$m_1 = a + ib$，则$m_1 = a - ib$，这里$a, b \in \mathbb{R}$，$b \neq 0$，则这对复函数解可写作

$$e^{m_1x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx),\ e^{m_2x} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx).$$

不难看出，它们的实部函数$e^{ax}\cos bx$ 和虚部函数$e^{ax}\sin bx$ 是方程的实函数解. 显然它们线性无关. 故它们构成方程的一个基本解组. 因此对于情形二，方程$y'' + py' + qy = 0$ 的一般(实函数)解为$y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)$.

情形三：$p^2=4q$. 此时方程的两个特征根相等，或者说方程有一个二重特征根 $m_1=-p/2$. 于是$y_1=e^{-px/2}$ 是方程的一个非平凡解. 回忆由已知构造新解的结论可知

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p dx}dx$$

$$=e^{-px/2}\int e^{px}e^{-px}dx=xe^{-px/2}$$

也是解，它与y_1 一起构成方程的一个基本解组.

例子：求齐次方程$y'' - 2y' + y = 0$ 的一般解.

解：特征方程为$m^2 - 2m + 1 = 0$. 特征根$m_1 = 1$ 为二重. 于是方程有基本解组e^x, xe^x. 故方程的一般解为$y = e^x(c_1 + c_2 x)$.

考虑非齐次方程$y'' + py' + qy = R(x)$，这里p, q 为实常数．以下将证明，当$R(x)$ 为以下三类函数时，我们可用待定系数方法求特解．

(i) 指数函数e^{ax};

(ii) 三角函数$\sin bx, \cos bx$;

(iii) 多项式$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$

指数函数情形

Theorem

考虑方程$y'' + py' + qy = e^{ax}$,

(i) 当a 不是特征根时, 方程有特解$y_p = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$, 这里$f(\lambda)$ 是特征多项式, 即$f(\lambda) := \lambda^2 + p\lambda + q$;

(ii) 当a 是单重特征根时, 即$f(a) = 0$, 但$f'(a) \neq 0$ 时, 方程有特解$y_p = \frac{1}{f'(a)}xe^{ax}$;

(iii) 当a 是二重特征根时, 方程有特解$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$.

证明：情形(i)：a 不是特征根，即$f(a)\neq 0$．由于指数函数的性质，我们有理由期待方程有解形如$y=Ae^{ax}$．将其代入方程并加以整理得$Af(a)=1$，即$A=\frac{1}{f(a)}$．结论(i)得证．

情形(ii)：a 是单重特征根．假设方程有解形如$y=Axe^{ax}$．将其代入方程并加以整理得$A(2a+p)=1$．此即$A=\frac{1}{2a+p}=\frac{1}{f'(a)}$．结论(ii)得证．

情形(iii)：a 是二重特征根．此时$f(m)=m^2-2am+a^2$．设方程有解形如$y=Ax^2e^{ax}$．将其代入方程并加以整理得$2A=1$．由此可见方程有特解$y_p=\frac{1}{2}e^{ax}$．定理得证．$\square$

Theorem

考虑方程$y''+py'+qy=\sin bx$ 或$y''+py'+qy=\cos bx$,

(i) 当ib 不是特征根时，方程有唯一一个特解，形如$y_p=A\sin bx+B\cos bx$;

(ii) 当ib 是特征根时，即$f(\pm ib)=0$，方程有唯一一个特解，形如$y_p=x(A\sin bx+B\cos bx)$.

Proof.

证明思想：考虑方程$y''+py'+qy=e^{ibx}$. 再根据指数函数情形的结论，并分离实部和虚部，即可证明结论. 细节略去. □

例子：求方程$y''+y=\sin x$ 的特解.

解：此时特征多项式$f(m)=m^2+1$，特征根为$\pm i$. 由定理知方程有唯一特解，形如$y_p=x(A\sin x+B\cos x)$. 代入方程得

$$2A\cos x-2B\sin x+x(-A\sin x-B\cos x)$$

$$+x(A\sin x+b\cos x)=\sin x.$$

比较$\sin x$ 和$\cos x$ 的系数得$A=0$，$B=-1/2$. 故方程有特解$y_p=\frac{-x}{2}\cos x$. 解答完毕.

多项式情形

Theorem

考虑方程$y'' + py' + qy = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$,

(i) 当0 不是特征根时，即$q \neq 0$ 时，方程有唯一一个特解，形如$y_p = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$;

(ii) 当0 是单重特征根时，即$q = 0$，但$p \neq 0$，方程有唯一一个特解，形如$y_p = x(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)$;

(iii) 当0 是二重特征根时，即$q = p = 0$ 时，方程有唯一一个特解，形如$y_p = x^2(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)$.

定理证明

证明：将$y_p = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$ 代入方程得

$$2A_2 + \cdots + n(n-1)A_nx^{n-2} + p(A_1 + 2A_2x + \cdots + nA_nx^{n-1})$$

$$+q(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

比较系数得

$$\begin{bmatrix} q & & & \\ * & q & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix},$$

定理证明续

这里$*$ 代表一些我们目前不感兴趣的数. 由于$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, 故上述线性代数方程组的系数矩阵非奇, 从而方程组有唯一解. 结论(i)得证. 结论(ii) 和(iii)证明类似. 证毕. $\square$

例：求方程$y''-y'-2y=4x^2$ 的一般解.

解：考虑对应的齐次方程为$y''-y'-2y=0$. 它的特征方程为$m^2-m-2=0$, 即$(m-2)(m+1)=0$. 齐次方程的一般解为$y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$. 以下求非齐次方程的特解. 由于方程的右端为多项式, 且$m=0$ 不是特征根, 故由定理可知方程有唯一的特解, 形如$y_p=A+Bx+Cx^2$. 将其代入方程, 并比较系数得

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ B \\ A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

例子续

解之得$(C,B,A)=(-2,2,-3)$. 于是所求特解为

$$y_p=-3+2x-2x^2.$$

方程$y''-y'-2y=4x^2$ 的一般解为

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-3+2x-2x^2,$$

其中c_1,c_2 为任意常数. 解答完毕.

考虑一般二阶线性非齐次方程及其对应的齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

假设已知齐次方程$(*)_{齐}$ 的一个基本解组$y_1(x)$, $y_2(x)$. 为了得到非齐方程$(*)_{非}$ 的一般解，我们需要方程$(*)_{非}$ 的一个特解$y_p(x)$. 往下将利用基本解组$y_1(x)$, $y_2(x)$ 来构造一个特解$y_p(x)$. 其构造方法具有一般性，称作参数变易法，或常数变易法.

参数变易法的由来

我们知道，对于任意常数c_1 和c_2，线性组合$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$均为齐次方程$(*)_{齐}$ 的解. Euler 尝试寻求非齐方程$(*)_{非}$ 具有如下形式的特解

$$y(x)=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x),$$

其中$v_1(x)$ 和$v_2(x)$ 为两个待定函数，即将原来常数线性组合$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 变为函数组合$v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)$. 参数变易法由此而得名.

待定函数的确定

对组合$y = v_1y_1 + v_2y_2$ 求导得

$$y' = (v_1'y_1 + v_2'y_2) + (v_1y_1' + v_2y_2').$$

进一步求导求导将出现二阶导数v_1'' 和v_2'', 这可能造成不便. 尝试提出关于待定函数v_1, v_2 的第一个强加条件

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0. \qquad (*).$$

于是$y' = v_1y_1' + v_2y_2'$. 再次求导得

$$y'' = v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1y_1'' + v_2y_2''.$$

待定函数的确定，续1

将上述y'和y''的表达式带入非齐方程$(*)_{非}$得

$$(v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1y_1'' + v_2y_2'') + P(x)(v_1y_1' + v_2y_2')$$
$$+Q(x)(v_1y_1 + v_2y_2) = R(x).$$

重新组合得

$$v_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + v_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]$$
$$+(v_1'y_1' + v_2'y_2') = R(x).$$

注意到y_1和y_2均为齐次方程$(*)_{齐}$的解，于是我们得到关于待定函数v_1, v_2的第二个强加条件

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = R(x). \qquad (**).$$

将这两个强加条件(*) 和(**) 联立起来得

$$\begin{cases} v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0, \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' = R(x), \end{cases} \text{或} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R(x) \end{bmatrix}.$$

于是得

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ R(x) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{W(x)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R(x) \end{bmatrix} = \frac{R(x)}{W(x)} \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

这里$W(x)$ 记基本解组y_1, y_2 所对应的Wronsky 行列式．因此

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \int \frac{R(x)}{W(x)} \begin{bmatrix} -y_2(x) \\ y_1(x) \end{bmatrix} dx.$$

因只需一个特解，故可取定积分

$$\begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix} = \int_{x_0}^{x} \frac{R(s)}{W(s)} \begin{bmatrix} -y_2(s) \\ y_1(s) \end{bmatrix} ds,$$

这里$x_0 \in J$ 为一个固定点．至此我们得到一个特解

$$y_p(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{-y_2(s)R(s)}{W(s)} ds + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)R(s)}{W(s)} ds.$$

特解的Cauchy形式

为方便，上述特解还可写作如下Cauchy 形式

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)R(s)ds,$$

其中函数定义如下

$$H(s,x) := \frac{W(s,x)}{W(s)},$$

$$W(s,x) := \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}.$$

函数$H(s,x)$ 常称为基本解组y_1, y_2 所对应的Cauchy 函数.

参数变易法总结

定理：假设已知齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的一个基本解组$y_1(x)$，$y_2(x)$，则非齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$的一般解为$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x)$，其中

$$y_p(x):=\int_{x_0}^{x}H(s,x)R(s)ds$$

是非齐方程的一个特解，$H(s,x)$ 是基本解组y_1，y_2 所对应的Cauchy 函数.

例子

例：求方程$y''+y=\frac{1}{\sin x}$, $x\in(0,\pi)$.

解：已知齐次方程$y''+y=0$ 有基本解组$y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$. 它们对应的Cauchy 函数为

$$H(s,x):=\frac{W(s,x)}{W(s)}=\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos s & \sin s \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}=\sin x\cos s-\cos x\sin s.$$

由此可得方程$y''+y=\frac{1}{\sin x}$ 的特解如下

例子

$$y_p(x) := \int_{x_0}^{x} H(s,x)R(s)ds$$

$$= \int_{\pi/2}^{x} (\sin x \cos s - \cos x \sin s) \frac{ds}{\sin s}$$

$$= \sin x \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos s ds}{\sin s} - \cos x \int_{\pi/2}^{x} ds$$

$$= \sin x \ln \sin x - x \cos x + \frac{\pi}{2} \cos x.$$

注意$\frac{\pi}{2}\cos x$ 是齐次方程的解. 故去掉$\frac{\pi}{2}\cos x$ 后y_p 仍然是特解.

于是方程$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ 的一般解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln \sin x - x \cos x.$$

情形一：无阻尼简谐振动. 考虑一轨道推车，其质量为M，一端由弹簧连接，如图. 当推车的位移$x = 0$ 时处于静止状态. 如果推车有位移x 时，推车受到弹簧施加的(线性)恢复力$F_s = -kx$，$k > 0$ 称作弹性系数.

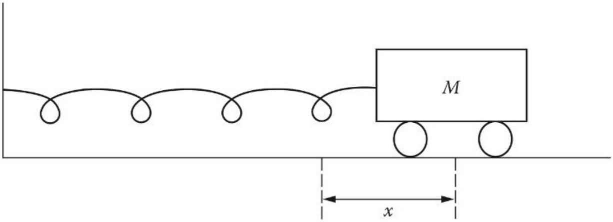


FIGURE 25

再假设推车在水平滚动是无摩擦力，则根据Newton 第二运动定律知

$$M\ddot{x} = -kx \quad \text{或} \quad \ddot{x} + a^2 x = 0,$$

其中$a^2 = k/M$. 其一般解为$x(t) = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$. 这是推车的运动是周期运动，常称为(和)谐振动.

如果推车在初始时刻位于$x(0) = x_0$ 处，且初始速度$x'(0) = 0$，则推车的运动方程为$x(t) = x_0 \cos at$.

力学上通常称$|x_0|$ 为振幅(amplitude); 称$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ 为振动周期; 称$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$ 为振动频率. 如图.

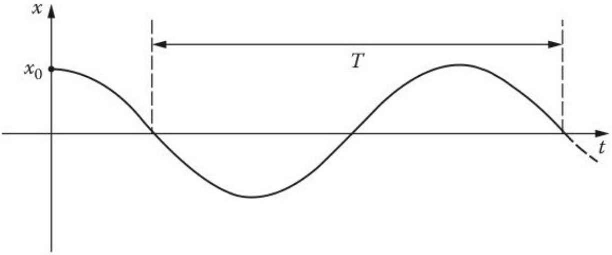


FIGURE 26

继续上述讨论. 假设推车在水平滚动是受到阻力F_d 作用, 例如空气阻力等, 并假定$F_d = -cx'(t)$, 即阻力与速度成正比, 则根据Newton 第二运动定律知

$$M\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad \text{或} \quad \ddot{x} + 2bx' + a^2x = 0,$$

其中$a^2 = \frac{k}{M}$, $b = \frac{c}{2M}$. 这是二阶线性常系数方程, 其特征方程为$m^2 + 2bm + a^2 = 0$, 特征根为

$$m_1, m_2 = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Case A: $b > a$. 这个假设大致意味着阻力大于弹性恢复力．此时两个特征根$m_1, m_2 < 0$, 为互异的负实数．故方程的一般解为$x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$. 如果初始位移为$x(0) = x_0$, 初始速度为$\dot{x}(0) = 0$, 则推车的运动方程为

$$x(t) = \frac{1}{m_1 - m_2}\left(m_1e^{m_2t} - m_2e^{m_1t}\right).$$

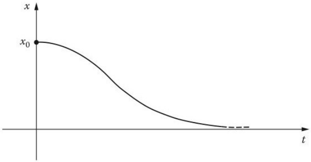


FIGURE 27

Case B: $b = a$. 此时两个特征根合二为一称为一个二重特征根$m_1 = m_2 = -a$. 故一般解为$x(t) = e^{-at}(c_1 + c_2 t)$. 显然$x(t) \to -$, 当$t \to +\infty$. 易证，满足初始条件$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ 的解为$x(t) = x_0 e^{-at}(1 + at)$.

Case C: $b < a$. 此时两个特征值为一对共轭复数. 若记$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$, 则特征根可写作$m_1, m_2 = -b \pm \alpha$. 于是方程的一般解为$e^{-bt}(c_1 \cos t + \sin t)$. 简单计算表明，满足初值条件$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ 的解为$x(t) = \frac{x_0}{\alpha} e^{-bt}(\alpha \cos t + b \sin t)$. 这个解还可以写作

$$x(t) = \frac{x_0\sqrt{\alpha^2 - b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta),$$

其中$\theta := \arctan\frac{b}{\alpha}$. 此时虽然解不再是周期解，但解仍有类似的性质. 例如取值正负相间，零点间距为常数$\frac{\pi}{\alpha}$. 解$x(t)$ 的函数图像，如图.

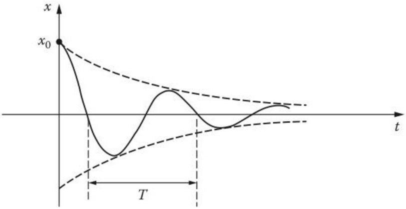


FIGURE 28

上述所考虑的两种推车振动：简谐振动和阻尼振动，均无外力作用，故常称作自由振动(free vibrations). 现考虑施加在推车上的一个外力(external force) $F_e = f(t)$，则根据Newton 第二运动定律得$M\ddot{x} = F_s + F_d + F_e$. 仍假设$F_s = -kx$, $F_d = -c\dot{x}$，则推车振动的微分方程为

$$\underbrace{M\ddot{x}}_{\text{惯性力}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{阻尼力}} + \underbrace{kx}_{\text{弹性力}} = \underbrace{f(t)}_{\text{外力}}$$

上述方程常称为线性振动方程.

非线性振动方程

与线性振动方程相关是非线性振动方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = h(t),$$

这类方程常称作Liénard 方程，其中$f(x)$ 为非常数函数，或者$g(x)$ 为非线性函数，$h(t)$ 为某个周期函数．这是在常微分方程领域被研究最多的一类方程，至今仍有许多未解之谜．

往下考虑周期外力情形下的线性振动，即$F_e = F_0 \cos t$，其振动方程为

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos t, \qquad (*)_{非}.$$

之前已求得对应的齐次方程

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

的基本解组，并且证明了非齐方程$(*)_{非}$ 有如下形式的特解$x_p(t) = A \sin t + B \cos t$. 将其带入方程$(*)_{非}$ 得

$$\omega^2 M\Big(- A \sin t - B \cos t\Big) + \omega c(A \cos t - B \sin t\Big)$$

$$+k(A \sin t + B \cos t) = F_0 \cos t.$$

整理并比较$\cos\omega t$ 和$\sin\omega t$ 的系数得

$$\begin{cases} \omega c A + (k-\omega^2 M)B = F_0, \\ (k-\omega^2 M)A - \omega c B = 0. \end{cases}$$

将上述方程组写作矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \omega c & k-\omega^2 M \\ k-\omega^2 M & -c\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解之得

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{F_0}{(k-\omega^2 M)^2 + \omega^2 c} \begin{bmatrix} \omega c \\ k-\omega^2 M \end{bmatrix}.$$

由此得特解

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}\left[\omega c\sin\omega t + (k-\omega^2M)\cos\omega t\right].$$

特解$x_p(t)$ 还可写作

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c}}\cos(\omega t-\phi),$$

其中

$$\phi := \arctan\left(\frac{\omega c}{k-\omega^2M}\right).$$

于是强迫振动方程的一般解为

$$x(t) = e^{-bt}(c_1\cos at + c_2\sin at) + x_p(t),$$

这里b 和α 的定义同前，即

$$b = \frac{c}{2M}, \quad \alpha^2 = \frac{k}{M} - b^2.$$

一般解的第一项$e^{-bt}(c_1\cos\alpha t + c_2\sin\alpha t) + x_p(t)$ 称为暂态项(transient)，因为当$t \to +\infty$ 是趋向于零．第二项，即特解$x_p(t)$ 称为稳态项(steady state)，因为每个解$x(t)$ 终将逼近与于$x_p(t)$，即$x(t) - x_p(t) \to 0$，当$t \to +\infty$.

考虑特解

$$x_p(t)=\frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}}\cos(\omega t-\phi).$$

在振动理论里，系数

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c}}$$

称为振幅(amplitude)，它依赖于F_0, k, c, ω. 当阻尼系数c 很小，且ω 接近与$\sqrt{\frac{k}{M}}$ 时，振幅很大. 这个现象称为共振(resonance).

往下我们要根据Newton 万有引力定律，以及所学微分方程的知识，推导出Kepler 的行星运动三定律.

考虑平面上一个质量为m 质点(例如行星) 在另一个质量为M 固定质点(例如太阳) 吸引力作用下的运动轨迹. 如图.

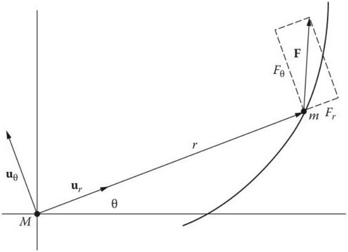


FIGURE 29

为方便，建立平面直角坐标系，设质点M 为原点．记运动质点m 的位置向量$\vec{r}$ 的单位向量为$\vec{u}_r$，则$\vec{u}_r$ 可表为

$$\vec{u}_r = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta,$$

其中θ 记x-轴与位置向量$\vec{r}$ 的夹角，$\vec{i} = (1,0)$ 和$\vec{j} = (0,1)$．于是运动质点m 的位置向量$\vec{r}$ 可写作$\vec{r} = r\vec{u}_r$，其中$r = |\vec{r}|$．定义

$$\vec{u}_\theta := -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta,$$

则两个单位向量$\vec{u}_r$ 和$\vec{u}_\theta$ 构成一个活动的右手坐标系的基本向量．

运动质点的速度表示

易证活动向量$\vec{u}_r$ 和$\vec{u}_\theta$ 满足如下关系

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta, \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r. \qquad (*)$$

于是运动质点m 的速度可表为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt}$$

$$= r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\vec{u}_r.$$

即

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\vec{u}_r.$$

进一步，运动质点m 的加速度可表为

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\vec{u}_r\right) =$$

$$= \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}u_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

利用关系式(*)，并稍作整理得

$$\vec{a} = \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2\right)\vec{u}_r.$$

设质点m 受到外力$\vec{F}$ 可写作$\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta$ 的作用，则根据Newton 第二运动定律$m\vec{a} = \vec{F}$，即得到运动质点m 所满足的微分方程

$$\begin{cases} m\left(r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta, \\ m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left[\dfrac{d\theta}{dt}\right]^2\right) = F_r. \end{cases}$$

Definition

一个力称$\vec{F}$ 为中心力(central force)，如果适当选择坐标系，使得$\vec{F}$ 可表示$\vec{F} = F_r \vec{u}_r$. 也就是说，力$\vec{F}$ 在方向$\vec{u}_\theta$ 的分量$F_\theta = 0$.

现考虑质点(行星) m 所受到的力$\vec{F}$ 为中心力，即$F_\theta = 0$. 根据质点所满足的微分方程得

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

上式两边同乘以r 得

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

此即

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \quad \text{或} \quad r^2\frac{d\theta}{dt}=h.$$

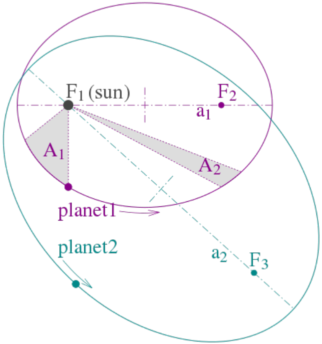
回忆平面曲线有极坐标$r=r(\theta)$ 给出. 那么由曲线和射线$\theta=\theta_0$ 和$\theta=\theta$ 所围面积，即由向量$\vec{r}$ 从$\theta=\theta_0$ 到$\theta=\theta$ 所扫过的面积为

$$A(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{2}r(s)^2 d\theta.$$

由此可知面积微分为

$$dA(\theta)=\frac{1}{2}r(\theta)^2 d\theta=\frac{1}{2}r(\theta)^2\frac{d\theta}{dt}dt=\frac{1}{2}hdt.$$

这就证明了Kepler 第二行星运动定律：行星与太阳连线在相同时间间隔所扫过的面积相等.



接着继续讨论. 进一步假设质点(行星) m 所受的中心力为固定质点(太阳) M 施加的万有引力, 即

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u_r},$$

这里G 为引力常数. 于是根据运动质点所满足的微分方程得

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2\right) = F_r = -\frac{GMm}{r^2}.$$

约去m, 并记$k := GM$ 得

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 = -\frac{k}{r^2}. \qquad (*)$$

根据之前结论$r^2\frac{d\theta}{dt}=h$ 我们得$\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}$. 将其带入方程(*) 得到r 所满足的微分方程

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{k}{r^2}.$$

为求解上式方程，作变换$r=\frac{1}{z}$, z 为新的未知函数. 于是

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{z}\right]=\frac{-1}{z^2}\frac{dz}{dt}=-r^2\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{dz}{d\theta},$$

最后一个等式成立是因为$r^2\frac{d\theta}{dt}=h$.

再次求导得

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\right]=\frac{d}{dt}\left[-h\frac{dz}{d\theta}\right]=$$

$$-h\frac{d^2z}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2z}{d\theta^2}=-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

将

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2},\qquad r=\frac{1}{z}$$

代入方程

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{k}{r^2}$$

中心引力与Kepler第一定律，续3

得到关于新的未知函数z 的微分方程

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}.$$

显然上述方程有一个常数解$z = \frac{k}{h^2}$，从而有如下一般解

$$z = A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2}. \qquad (*)$$

为了简化方程，我们假定x 轴(极轴)通过质点m 距离原点最近的点，即r(t) 的最小值点．这等价于z 的最大值点．由此得初值条件$z'(0) = 0$, $z''(0) < 0$. 对方程(*) 求导得

$z'(\theta) = A\cos\theta - B\sin\theta$. 条件$z'(0) = 0$ 和$z''(0) < 0$ 意味着$A = 0$ 且$B > 0$. 于是质点(行星) m 的运动轨迹为

$$z = B\cos\theta + \frac{k}{h^2} \quad \text{即} \quad r = \frac{1}{\frac{k}{h^2} + B\cos\theta}.$$

记$e := \frac{Bh^2}{k}$, $p := \frac{h^2}{k}$, 则上述第二个轨迹方程可写成极坐标下的圆锥截线方程

$$r = \frac{pe}{1 + e\cos\theta}.$$

如图，F 为焦点(focus)，直线d 为准线(directrix)，e 为离心率(eccentricity).

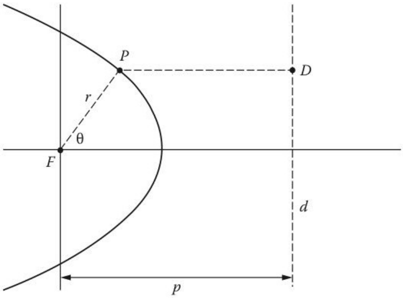


FIGURE 30

回忆离心率e 的意义：

$e < 1$，圆锥截线为椭圆；

$e = 1$，圆锥截线为抛物线；

$e > 1$，圆锥截线为双曲线.

由于行星轨道保持有界，故可断言圆锥曲线$r = \frac{pe}{1+e\cos\theta}$ 为椭圆. 这就证明了Kepler关于行星运动的第一定律：每个行星的运行轨道是一个椭圆，且太阳位于椭圆的一个焦点位置.

设行星运动的椭圆轨道方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中a, b 分别记椭圆的长半轴(the semi-major axis)和短半轴(the semi-minor axis) 的长. 根据解析几何知识可知, 离心率$e=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{a^2-b2}$. 如图.

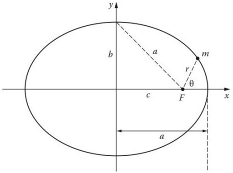


FIGURE 31

长半轴的长a 具有天文学意义：a 代表行星距焦点最大距离和最小距离的平均值，即

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2/k}{1+e}+\frac{h^2/k}{1-e}\right)=\frac{h^2}{k(1-e^2)}=\frac{h^2a^2}{kb}.$$

由此得

$$b^2=\frac{h^2a}{k}.$$

记T 为行星围绕椭圆轨道运动的一个周期，则行星位置向量在一个周期T 里所扫过的面积即为椭圆的面积.

于是根据Kepler第二定律得

$$\pi ab = \int_0^T \frac{1}{2} r^2(\theta)\theta'(t)dt = \int_0^T \frac{h}{2} dt = \frac{hT}{2}. \qquad (*)$$

由此得$T = \frac{2\pi ab}{h}$. 再利用关系式(*)，我们进一步得到

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^2 \cdot \frac{h^2 a}{k}}{h^2} = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

这就证明了Kepler 关于行星运动的第三定律：行星运动周期的平方正比于椭圆长半轴之长的立方.

课本习题：

page 135–136, problems 1, 2, 3(a)(b), 4(a)(b), 5, 6(a)(b).

page 1445, problem 1.

page 154–155, problem 3.

菲利波夫习题：菲利波夫习题534, 535, 537, 538, 539, 540.

注：为了方便求解上述习题，建议大家仔细阅读一下菲氏习题集第§11 小节的开始部分，即第42页至46页之间的那部分内容．在这里菲氏关于常系数高阶线性方程求解提供了很好的总结和例题．

作业续1

<u>选作习题</u>：设函数$f(t)$ 在实轴$(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界，$|f(t)|\le m$, $\forall t\in(-\infty,+\infty)$. 设$\lambda_2<\lambda_1<0$ 为二阶线性齐次方程$x''+ax'+bx=0$ 的两个特征根，其中a 和b 均为实数.

1) 证明非齐次方程$x''+ax'+bx=f(t)$ 有且仅有一个在$(-\infty,+\infty)$ 上有界解，并求出这个有界解. 以下记这个有界解为$x^*(t)$.

2) 证明方程$x''+ax'+bx=f(t)$ 的任何解$x(t)$ 均满足$\lim_{t\to+\infty}[x(t)-x^*(t)]=0$.

3) 当$f(t)$ 为ω 周期函数时，有界解$x^*(t)$ 也是ω 周期的.

注：这道选作题是菲利波夫习题629 的重新表述. 这题可与菲利波夫习题181 作比较. 菲利波夫关于题629 给了一个提示. 我体会这个提示的意思是：利用一般非齐次二阶线性方程解的通解作讨论，而不是利用常数变易法再推导一遍.