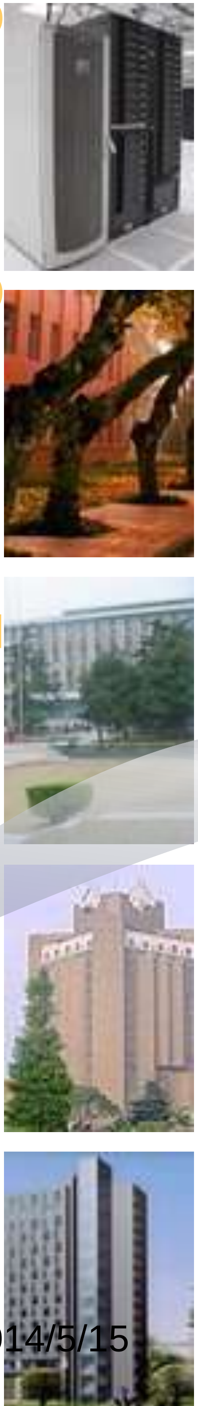
Computer Science and Technology



运 筹 学

中国科学技术大学
1958—2008

存储论

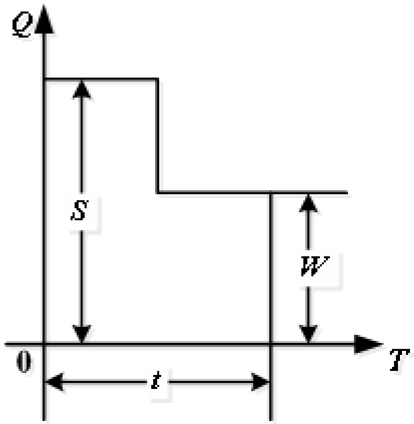
Inventory

13.1 存储论的基本概念

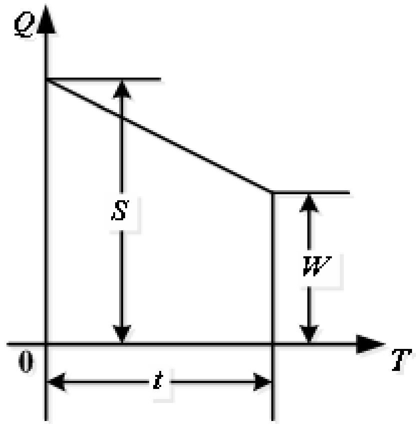
- 存储问题的提出
  - 人们在生产和日常生活活动中往往将所需的物资、用品和食物暂时的贮存起来，以备将来使用或消费。这种现象是为了解决供应（生产）与需求（消费）之间的不协调的一种措施，这种不协调性一般表现为供应量与需求量和供应时期与需求时期的不一致上，出现供不应求或供过于求。在供应与需求这两个环节之间加入贮存这个环节，可以缓解供应与需求之间的不协调。
  - 对这类有关存储问题进行研究的科学构成运筹学的一个分支，称为存储论。
- 存储论的基本概念
  - 工厂为了生产，必须贮存一些原料；商店必须贮存一些货物，把这些贮存物简称为存储。一般的说，存储量因需求而减少，因补充而增加。

13.1 存储论的基本概念(cont.)

- 需求
  - 对存储来说，由于需求，从存储中取出一定的数量，使存储量减少，这就是存储的输出。有的需求是间断式的，有的需求是连续均匀的。



间断式



连续式

  - 有的需求是确定性的，有的需求是随机性的。对于随机性的需求，经过大量的统计之后，可能会发现统计规律，称之为有一定的随机分布的需求。
- 补充（订货或生产）
  - 存储由于需求而不断减少，必须加以补充，否则最终将无法满足需求。补充就是存储的输入。

13.1 存储论的基本概念(cont.)

- 补充的方法可能是向其他工厂购买，从订货到货物进入“存储”往往需要一段时间，称为拖后时间；从另一个角度看，为了在某一时刻能补充存储，必须提前订货，那么这段时间也可称之为提前时间（或称备货时间）。拖后时间可能很长，也可能很短；可能是随机性的，也可以是确定性的。
- 决定多少时间补充一次以及每次补充数量的策略称为存储策略。

– 费用
  - 存储费：包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用；
  - 订货费： C_3+KQ

    ——订购费用 C_3：固定费用，与订货次数有关而与订货数量无关；

    ——成本费用：可变费用，与订货数量K以及货物本身的单位价格和运费Q有关。
  - 生产费：补充存储时，若不需向外厂定购而由本厂自行生产，则包括

    ——装配费用（或称准备、结束费用）：固定费用

    ——与生产产品的数量有关的费用：可变费用，与生产产品的数量和每件产品的单价有关，如生产材料、加工费用等。

13.1 存储论的基本概念(cont.)

- 缺货费：当存储供不应求时所引起的损失。在不允许缺货的情况下，在费用上处理的方式是缺货费为无穷大。

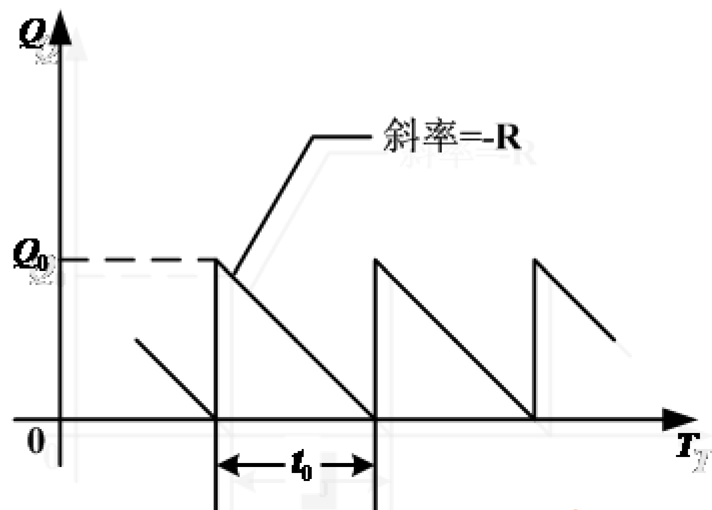
– 存储策略
  - t_0-循环策略：每隔t_0时间补充存储量Q；
  - (s,S)策略：每当存储量x>s时不补充，当x≤s时补充存储，补充量Q=S-x；
  - (t,s,S)混合策略：每经过t时间检查存储量x，当x>s时不补充，当x≤s时补充存储，补充量Q=S-x。

– 存储模型
  - 确定性模型：模型中的数据皆为确定的数值；
  - 随机性模型：模型中含有随机变量，而不是确定的数值。

- 一个好的存储策略，既可以使总费用最小，又可避免因缺货而影响生产（或对顾客失去信用）。

13.2 确定性存储模型

- 模型一：不允许缺货，生产时间很短
  - 做如下假设：
    - 缺货费用无穷大；
    - 当存储降至零时，可以立即得到补充（即生产时间或拖后时间很短，可以近似看作为零）；
    - 需求是连续的、均匀的，设需求速度**R**（单位时间的需求量）为常数，则**t**时间的需求量为**Rt**；
    - 每次订货量不变，订购费不变（每次生产量不变，装配费不变）；
    - 单位存储费不变。



存储量变化情况

– 费用函数

- 假设每隔t时间补充一次存贮，那么订货量必须满足t时间的需求Rt，记订货量为Q，$Q = Rt$，订购费为C_3，货物单价为K，则订货费为$C_3 + KRt$。t时间的平均订货费为$C_3 / t + KR$，t时间内的平均存贮量为：

$$\frac{1}{t}\int_0^t RTdT = \frac{1}{2}Rt$$

单位存贮费用为C_1，t时间内所需平均存贮费 用为$\frac{1}{2}RtC_1$。

t时间内总的平均费用：

$$C(t) = C_3 / t + KR + \frac{1}{2}C_1Rt \qquad (13.1)$$

为使费用最小，令$\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{C_3}{t^2} + \frac{1}{2}C_1R = 0$，得

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} \qquad (13.2)$$

即每隔t_0时间订货一次可使$C(t)$最小。

13.2 确定性存储模型(cont.)

$$C(t)=\frac{C_3}{t}+\frac{1}{2}C_1Rt \quad (13.4)$$

- 公式(13.3)即为存储论中著名的经济订购批量(Economic ordering quantity)公式，简称E.O.Q公式，也称平方根公式，或经济批量(Economic lot size)公式。
- 因Q_0、t_0皆与K无关，所以在费用函数中略去KR这笔费用，如无特殊需要不再考虑。公式(13.1)改为：

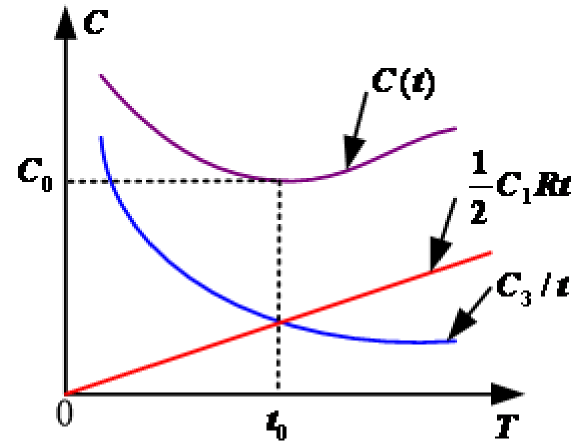
$$C(t)=\frac{C_3}{t}+\frac{1}{2}C_1Rt \quad (13.4)$$

将t_0代入(13.4)得出最佳费用：

$$C_0=C(t_0)=C_3\sqrt{\frac{C_1R}{2C_3}}+\frac{1}{2}C_1R\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}=\sqrt{2C_1C_3R}$$

$$C_0=\min C(t) \quad (13.5)$$

13.2 确定性存储模型(cont.)



- 从费用曲线也可以求出Q_0、t_0、C_0

  存贮费用曲线 $\frac{1}{2}C_1Rt$

  订购费用曲线 $\frac{C_3}{t}$

  总费用曲线 $C(t)=\frac{C_3}{t}+\frac{1}{2}C_1Rt$

- C(t)曲线的最低点minC(t)的横坐标t_0与存储费用曲线、订购费用曲线交点横坐标相同，即： $\frac{C_3}{t_0}=\frac{1}{2}C_1Rt_0$

- 解得： $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$ (13.2′) $Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$ (13.3′)

  $$C_0=\frac{C_3}{t_0}+\frac{1}{2}C_1Rt_0=\sqrt{2C_1C_3R} \quad (13.4')$$

- 从图中可以看出$C(t)$在t_0附近变化平稳，t有变化时$C(t)$变化不大。利用数学分析方法可以证明当t在t_0点有增量Δt时，总费用的增量 $\Delta C(t_0)\approx\frac{C_3}{t_0^3}(\Delta t)^2$，即当$\Delta t\to 0$时，$\Delta C$是$\Delta t$的高阶无穷小量。

13.2 确定性存储模型(cont.)

– 应用举例

- 例：某厂按合同每年需提供D个产品，不许缺货。假设每一周期工厂需装配费C3元，存储费每年每单位产品为C1元，问全年应分几批供货才能使装配费、存储费两者之和最少。
- 分析：

设全年分n批供货，每批生产量$Q=D/n$，周期为$1/n$年。

每个周期内平均存贮量为$\frac{1}{2}Q$；每个周期内的平均存贮费用为$C_1\cdot\frac{1}{2}Q\cdot\frac{1}{n}=\frac{C_1Q}{2n}$；

全年所需存贮费用$\frac{C_1Q}{2n}\cdot n=\frac{C_1Q}{2}$；全年所需装配费用$C_3n=C_3\cdot\frac{D}{Q}$；

全年总费用（以年为单位的平均费用）：$C(Q)=\frac{C_1Q}{2}+\frac{C_3D}{Q}$；

求最小费用，使$\frac{dC(Q)}{dQ}=\frac{C_1}{2}-\frac{C_3D}{Q^2}=0\Rightarrow Q_0=\sqrt{\frac{2C_3D}{C_1}}$

即$\min C(Q)=C(Q_0)$

最佳批次$n_0=\frac{D}{Q_0}=\sqrt{\frac{C_1D}{2C_3}}$（取近似整数），全年分$n_0$次供货可使费用最小。

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 例：某轧钢厂每月按计划需产角钢**3000**吨，每吨每月需存储费**5.3**元，每次生产需调整机器设备等，共需装配费**2500**元。
- 分析：每月需总费用$:5.3\times\frac{1}{2}\times 3000+2500=10450(元/月)$

$$全年需费用:10450\times 12=125400(元/年)$$

按$E.O.Q.$公式计算每次生产批量

$$Q_0=\sqrt{\frac{2\times C_3(装配费)\times D(需求速度)}{C_1(存贮费)}}=\sqrt{\frac{2\times 2500\times 3000}{5.3}}=1682(吨)$$

$$全年生产批次n_0=\frac{D}{Q_0}=\frac{3000\times 12}{Q_0}\approx 21.4(次)$$

$$两次生产相隔时间t_0=\frac{365}{21.4}\approx 17(天)$$

17天的单位存贮费$\frac{5.3}{30}\times 17=3.00(元/吨)$，共需费用$\frac{1}{2}\times\frac{5.3}{30}\times 17\times 1682+2500\approx 5021(元)$

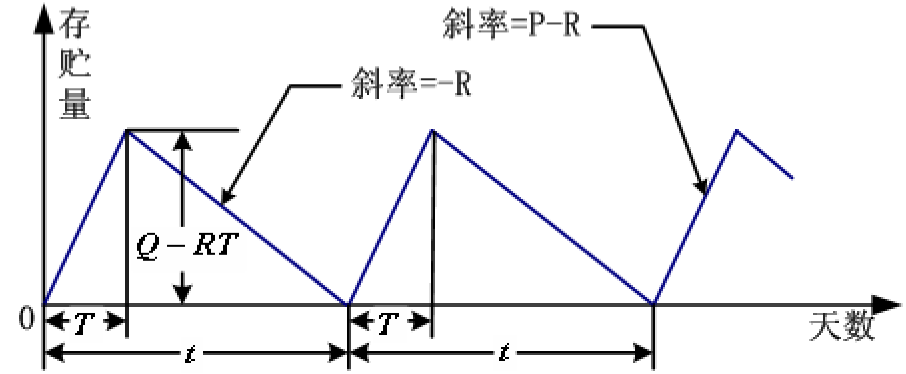
按全年生产21.5次$(两年共43次)$计算，全年共需费用$5025\times 21.5=108037(元)$

两者相比，该厂在利用$E.O.Q.$公式求出的经济批量进行生产后可节省

$$125400-108037=17363(元)$$

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 模型二：不允许缺货，生产需一定时间
  - 做如下假设：
    - 除生产需要一定时间条件外，其余皆与模型一相同；
    - 设生产批量为Q，所需生产时间为T，则生产速度为P=Q/T；
    - 已知需求速度R（R<P），生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存储，存储变化如图所示。



    - 在[0,T]区间内，存储以(P-R)速度增加，在[T,t]区间内以速度R减少。T与t皆为待定数。从上图可知(P-R)T=R(t-T)，即PT=Rt，表示以速度P生产T时间的产品等于t时间内的需求。T=Rt/P。

13.2 确定性存储模型(cont.)

- t时间内的平均存贮量为 $\frac{1}{2}(P-R)T$

  t时间内所需存贮费为 $\frac{1}{2}C_1(P-R)Tt$

  t时间内所需装配费为 C_3

  单位时间总费用(平均费用):

  $$C(t)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)Tt+C_3\right]=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{Rt^2}{P}+C_3\right]$$

  设 $\min C(t)=C(t_0)$，令 $\frac{dC(t)}{dt}=0$ 可得最佳周期 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$ (13.6)

  相应的生产批量 $Q_0=E.O.Q.=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$ (13.7)

  $\min C(t)=C(t_0)=\sqrt{2C_1C_3R\frac{(P-R)}{P}}$ (13.8)

  最佳生产时间 $T_0=\frac{Rt_0}{P}=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1P(P-R)}}$

13.2 确定性存储模型(cont.)

– 两种模型的对比

- 模型一

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

$$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$$

模型二

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$$

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$$

- 可见它们之间只差一个因子$\sqrt{\frac{P}{P-R}}$。当P相当大时$\frac{P}{P-R}$趋近于1,

  则两组公式就相同了。

- 进入存贮的最高数量

$$S_0=Q_0-RT_0=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}-R\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1P(P-R)}}=\sqrt{\frac{2C_3R(P-R)}{C_1P}} \quad (13.9)$$

– 应用举例

- 例：某厂每月需甲产品100件，每月生产率为500件，每批装配费为5元，每月每件产品存储费为0.4元，求E.O.Q.及最低费用。
- 分析：

  可知$C_3=5$，$C_1=0.4$，$P=500$，$R=100$，代入公式(13.7)(13.8)得：

13.2 确定性存储模型(cont.)

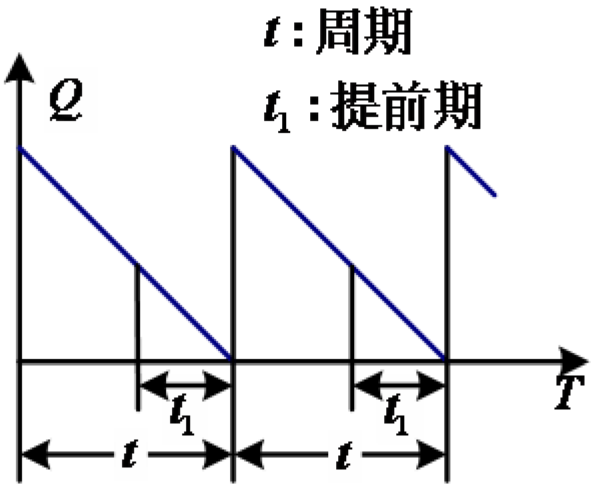
$$E.O.Q.=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}=56件$$

$$C_0=\sqrt{2C_1C_3R\frac{(P-R)}{P}}=17.89元$$

即每次生产批量为56件，每次生产所需装配费及存贮费最低为17.89元。

- 例：某商店经售甲商品，成本单价500元，年存储费用为成本的20%，年需求量365件，需求速度为常数，甲商品的订购费用为20元，提前期为10天，求E.O.Q.及最低费用。
- 分析：

此例题从表面分析似乎应按模型二处理，因为提前期似乎与生产时间意义类似。其实不然，将本题存储变化情况用图像表示如图，发现与模型一完全相同。本题只需在存储降低至0时提前10天订货即可保证需求，即存储降低至10时就要订货。



13.2 确定性存储模型(cont.)

- 解：$C_1 = 500 \times 20\% = 100$

$$C_3 = 20$$

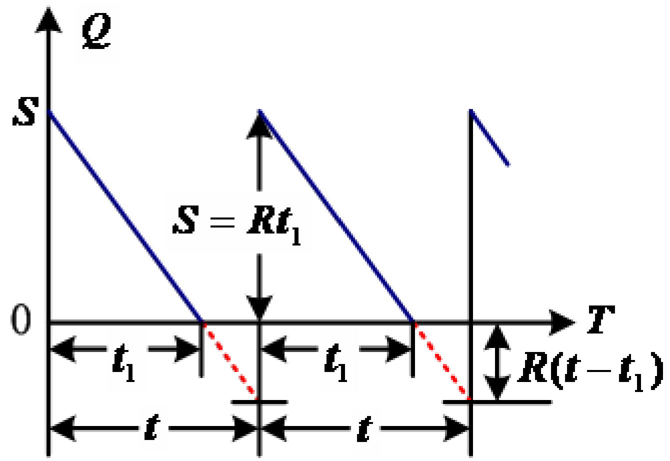
$$E.O.Q = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 365}{100}} = \sqrt{146} \approx 12$$

$$C_0 = \sqrt{2C_1C_3R} = \sqrt{2 \times 20 \times 365 \times 100} \approx 1208$$

  – 一般设t_1为提前期，R为需求速度，当存储降至$L=Rt_1$的时候即订货，L称为“订购点”（或称“订货点”）。
  – 不考虑t_0，只要存储降至L即订货，订货量为Q_0，称这种存储策略为“定点订货”；相对的，每隔t_0时间订货一次为“定时订货”，每次订货量不变则称为“定量订货”。

- 模型三：允许缺货（缺货需补足），生产时间很短
  - 假设：
    - 除允许缺货外，其余条件皆与模型一相同；
    - 设单位存储费用为C_1，
      每次定购费为C_3，
      缺货费为C_2（单位缺货损失），
      R为需求速度。

存储变化如图所示：



13.2 确定性存储模型(cont.)

- 假设最初存贮量为S，可以满足时间t_1的需求，

  t_1时间的平均存贮量为$\frac{1}{2}S$，在$(t-t_1)$时间的存贮为零，

  平均缺货量为$\frac{1}{2}R(t-t_1)$。

  由于S仅能满足时间t_1的需求$S=Rt_1$，有$t_1=S/R$

  在t时间内所需存贮费：$C_1\cdot\frac{1}{2}St_1=\frac{C_1S^2}{2R}$

  在t时间内的缺货费：$C_2\cdot\frac{1}{2}R(t-t_1)^2=\frac{C_2(Rt-S)^2}{2R}$

  订购费为C_3

  平均总费用：$C(t,S)=\frac{1}{t}\left[\frac{C_1S^2}{2R}+\frac{C_2(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]$

  利用多元函数求极值的方法求$C(t,S)$的最小值：

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial C}{\partial S}=\frac{1}{t}\left[\frac{C_1S}{R}-\frac{C_2(Rt-S)}{R}\right]=0\\ R\neq 0,t\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow S=\frac{C_2Rt}{C_1+C_2} \qquad (13.10)$$

13.2 确定性存储模型(cont.)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial C}{\partial t}=-\dfrac{1}{t^2}\left[\dfrac{C_1 S^2}{2R}+\dfrac{C_2(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]+\dfrac{1}{t}\left[C_2(Rt-S)\right]=0\\ R\neq 0, t\neq 0\end{array}\right\}\\ S=\dfrac{C_2 Rt}{C_1+C_2} \qquad (13.10)\end{array}\right\}\Rightarrow t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1 R C_2}} \qquad (13.11)$$

将(13.11)代入(13.10)得：$S_0=\sqrt{\dfrac{2C_2 C_3 R}{C_1(C_1+C_2)}}$ (13.12)

$$\min C(t,S)=\sqrt{\frac{2C_1 C_2 C_3 R}{C_1+C_2}} \qquad (13.13)$$

当C_2很大时意味着不许缺货：

$$C_2\to\infty\Rightarrow\frac{C_2}{C_1+C_2}\to 1\Rightarrow t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}},\ S_0=\sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}},\ C_0=\sqrt{2C_1 C_3 R}$$

与前面模型一求得的相同。

- 模型三中由于允许缺货周期t_0为不允许缺货周期t的$\sqrt{\dfrac{C_2+C_1}{C_2}}$倍，

又由于$\dfrac{C_2+C_1}{C_2}>1$，所以两次订货间隔时间延长了。

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 在不允许缺货情况下，为满足t_0时间内的需求，订货量$Q_0 = Rt_0$

  即$Q_0 = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1} \cdot \frac{(C_1 + C_2)}{C_2}}$(13.14)

  在允许缺货的情况下，存储量只需达到S_0即可，$S_0 = \sqrt{\frac{2RC_3C_2}{C_1(C_1 + C_2)}}$

  显然$Q_0 > S_0$，它们的差值

  $Q_0 - S_0 = \sqrt{\frac{2RC_3C_1}{C_2(C_1 + C_2)}}$表示在$t_0$时间内的最大缺货量。

  在允许缺货的条件下，经过研究而得出的存贮策略是隔t_0时间订货一次，订货量为Q_0，用Q_0中的一部分补足所缺货物，剩余部分S_0进入存贮。

- 显然，在相同的时间段里，允许缺货的订货次数比不允许缺货时订货次数减少了。

– 应用举例

  - 例：已知需求速度R=100件，C_1=0.40元，C_2=0.15元，C_3=5元，求S_0以及C_0。

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 分析：利用公式可以直接计算

$$S_0=\sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}=\sqrt{\frac{2\times 100\times 0.15\times 5}{0.4\times(0.4+0.15)}}=26\text{件}$$

$$C_0=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}=\sqrt{\frac{2\times 0.4\times 0.15\times 5\times 100}{0.4+0.15}}=10.46\text{元}$$

– 模型一、二、三之间的关系

一：不允许缺货、生产时间很短

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$$

$$S_0=Q_0$$

二：不允许缺货、生产需要一定时间

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$S_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

13.2 确定性存储模型(cont.)

三：允许缺货、生产时间很短

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

- 可以看出模型二、三是以模型一的存储策略乘以相应的因子，另：

模型一中：$\frac{1}{2} Q_0 t_0 = \frac{1}{2} S_0 t_0 = \frac{C_3}{C_1}$

模型二中：$\frac{1}{2} S_0 t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{P-R}{P}} \cdot \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-R}} = \frac{C_3}{C_1}$

模型三中：$\frac{1}{2} S_0 t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \cdot \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} = \frac{C_3}{C_1}$

- 上面三个是同一个数值，这样就得出它们的差别与内在联系。

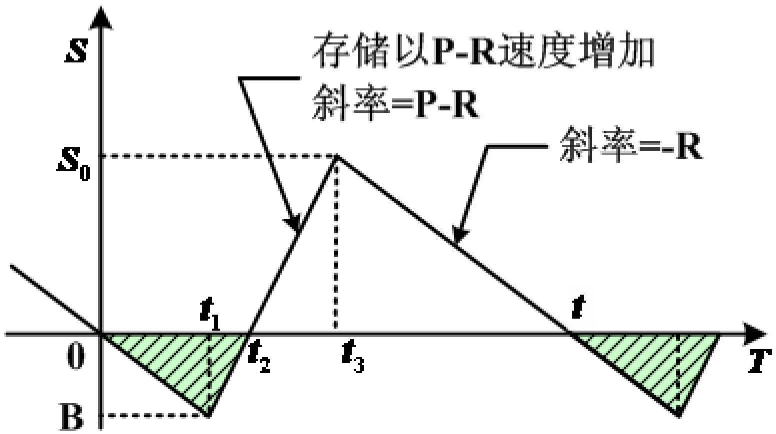
13.2 确定性存储模型(cont.)

- 对于允许缺货（缺货需补足）生产需要一定时间的模型：
    - 根据上面三种模型之间的差别与内在联系，可以推断出它的存储策略是：

在模型一的存贮策略上乘上$\sqrt{\dfrac{P}{P-R}}$和$\sqrt{\dfrac{C_1+C_2}{C_2}}$两个因子

同样的，它也有$\dfrac{1}{2}S_0t_0=\dfrac{C_3}{C_1}$

- 模型四：允许缺货（需补足缺货）、生产需一定时间
    - 假设条件除允许缺货生产需一定时间外，其余条件皆与模型一相同。
    - 存储变化如图：



13.2 确定性存储模型(cont.)

- 取$[0,t]$为一个周期，设t_1时刻开始生产。
  $[0,t_2]$时间内存贮为零，B表示最大缺货量；
  $[t_1,t_2]$时间内除满足需求外，补足$[0,t_1]$时间内的缺货；
  $[t_2,t_3]$时间内满足需求后的产品进入存贮，存贮量以$(P-R)$速度增加，
  S表示存贮量，t_3时刻存贮量达到最大，t_3时刻停止生产；
  $[t_3,t]$时间存贮量以需求速度R减少。

由上图可知：最大缺货量$B=Rt_1=(P-R)(t_2-t_1)$，得$t_1=\dfrac{(P-R)}{P}t_2$ (13.15)

最大存贮量$S=(P-R)(t_3-t_2)=R(t-t_3)$，得$t_3-t_2=\dfrac{R}{P}(t-t_2)$ (13.16)

在$[0,t]$时间内所需费用：

存贮费：$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}C_1(P-R)(t_3-t_2)(t-t_2)\\ \text{将(13.16)代入}\end{array}\right\}=\dfrac{1}{2}C_1(P-R)\dfrac{R}{P}(t-t_2)^2$

缺货费：$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}C_2Rt_1t_2\\ \text{将(13.15)代入}\end{array}\right\}=\dfrac{1}{2}C_2R\dfrac{(P-R)}{P}t_2^2$

装配费：C_3

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 在[0,t]时间内总平均费用为：

$$C(t_1,t_2)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{R}{P}(t-t_2)^2+\frac{1}{2}C_2R\frac{(P-R)}{P}t_2^2+C_3\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1t-2C_1t_2+(C_1+C_2)\frac{t_2^2}{t}\right]+\frac{C_3}{t}$$

$$\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1+(C_1+C_2)t_2^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]-\frac{C_3}{t^2}\quad(13.17)$$

$$\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t_2}=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[-2C_1+2(C_1+C_2)t_2\cdot\frac{1}{t}\right]\quad(13.18)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[-2C_1+2(C_1+C_2)t_2\cdot\frac{1}{t}\right]=0\Rightarrow t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t\quad(13.19)\\&\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t_2}=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1+(C_1+C_2)t_2^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]-\frac{C_3}{t^2}=0\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1-(C_1+C_2)\frac{C_1^2}{(C_1+C_2)^2}\right]-\frac{C_3}{t^2}=0\Rightarrow \boxed{t=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}},}$$ 记作t_0

13.2 确定性存储模型(cont.)

由(13.19)得$t_2=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}t_0=C_1\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\dfrac{C_2}{(C_1+C_2)C_2}}\cdot\sqrt{\dfrac{P}{P-R}}$

即$C(t,t_2)$在$t=t_0$，$t_2=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}t_0$时有最小值。

相应的得到：

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$Q_0=R\cdot t_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}\qquad(13.21)$$

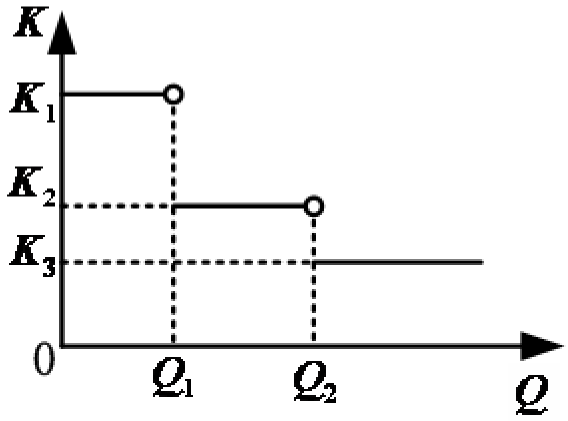
$$S_0(\text{最大存贮量})=R(t_0-t_3)=R\left(t_0-\frac{R}{P}t_0-\frac{P-R}{P}t_2\right)=R\left(t_0-\frac{R}{P}t_0-\frac{(P-R)}{P}\cdot\frac{C_1}{(C_1+C_2)}t_0\right)$$

$$=R\cdot\frac{(P-R)}{P}\cdot\frac{C_2}{(C_1+C_2)}\cdot t_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}\qquad(13.22)$$

$$B_0(\text{最大缺货量})=R\cdot t_1=\frac{R(P-R)}{P}\cdot t_2=\sqrt{\frac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}\qquad(13.23)$$

$$\min C(t_0,t_2)=C_0=\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}\qquad(13.24)$$

- 价格有折扣的存储问题
  - 货物单价随订购（或生产）数量而变化的存储策略。一种商品有零售价、批发价和出厂价。一般情况下购买数量越多，商品单价就越低，在少数情况下，某种商品限额供应，超过限额部分的商品单价要提高。其余条件皆与模型一相同。
  - 设货物单价为K(Q)，按三个数量等级变化如图：



$$K(Q)=\begin{cases} K_1 & 0 \le Q < Q_1 \\ K_2 & Q_1 \le Q < Q_2 \\ K_3 & Q_2 \le Q \end{cases}$$

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 当订购量为Q时，一个周期内所需费用为：

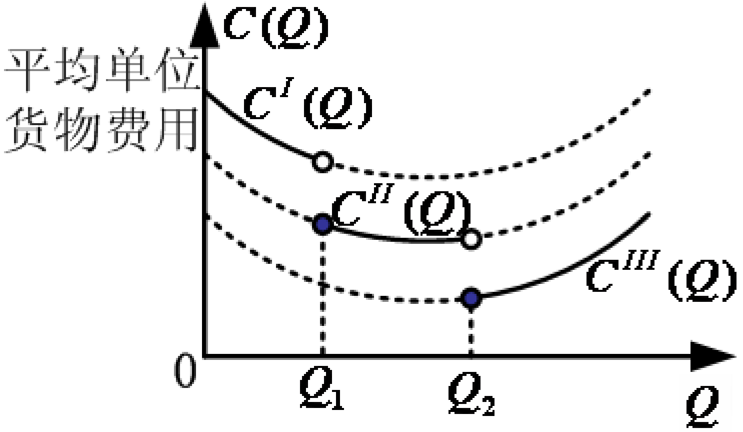
$$\frac{1}{2}C_1 Q\frac{Q}{R}+C_3+K(Q)Q$$

$$Q\in[0,Q_1):\frac{1}{2}C_1 Q\frac{Q}{R}+C_3+K_1 Q$$

$$Q\in[Q_1,Q_2):\frac{1}{2}C_1 Q\frac{Q}{R}+C_3+K_2 Q$$

$$Q\geq Q_2:\frac{1}{2}C_1 Q\frac{Q}{R}+C_3+K_3 Q$$

- 平均每单位货物所需费用如图：



$$Q\in[0,Q_1):\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_1$$

$$Q\in[Q_1,Q_2):\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_2$$

$$Q\geq Q_2:\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_3$$

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 若不考虑$C^{I}(Q)$、$C^{II}(Q)$、$C^{III}(Q)$的定义域，则它们之间只差一个常数，因此它们的导函数相同，无法判断求得的Q_0落在哪个区间。
- 步骤如下：(1)对$C^{I}(Q)$(不考虑定义域)求得极值点为Q_0;

  (2)若$Q_0 < Q_1$,计算$C^{I}(Q_0) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_1$,

  $$C^{II}(Q_1) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2, \quad C^{III}(Q_2) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_2}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_3$$

  由$\min\{C^{I}(Q_0), C^{II}(Q_1), C^{III}(Q_2)\}$得到单位货物最小费用的订购批量$Q^*$。

  (3)若$Q_1 \le Q_0 < Q_2$，计算$C^{II}(Q_0)$、$C^{III}(Q_2)$，由$\min\{C^{II}(Q_0), C^{III}(Q_2)\}$决定$Q^*$。

  (4)若$Q_2 \le Q_0$，取$Q^* = Q_0$。
- 以上步骤可以推广到单价折扣分m个等级的情况，订购量为Q，单价为K(Q)：

$$K(Q) = \begin{cases} K_1 & 0 \le Q < Q_1 \\ K_2 & Q_1 \le Q < Q_2 \\ \vdots & \\ K_j & Q_{j-1} \le Q < Q_j \\ \vdots & \\ K_m & Q_{m-1} \le Q \end{cases}$$

13.2 确定性存储模型(cont.)

- 对应的平均单位货物所需费用为:

$$C^j(Q)=\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_j,\ \ j=1,2,\cdots,m$$

- 对$C^I(Q)$求得极值点为Q_0。若$Q_{j-1}\le Q_0<Q_j$，计算

$\min\left\{C^j(Q_0),C^{j+1}(Q_j),\cdots,C^m(Q_{m-1})\right\}$决定$Q^*$。

– 应用举例

  - 例：某厂每年需某种元件5000个，每次订购费C_3=50元，保管费每件每年C_1=1元，不允许缺货。元件单价K随采购数量不同而有变化。

$$K(Q)=\begin{cases}2.0元 & Q<1500\\ 1.9元 & Q\ge 1500\end{cases}$$

  - 分析：利用E.O.Q.公式计算：$Q_0=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\dfrac{2\times 50\times 5000}{1}}=707$个

分别计算每次订购707个和1500个元件平均单位元件所需费用：

$$\left.\begin{aligned}C(707)&=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{707}{5000}+\frac{50}{707}+2=2.1414元/个\\ C(1500)&=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1500}{5000}+\frac{50}{1500}+1.9=2.0833元/个\end{aligned}\right\}\Rightarrow C(707)>C(1500)，因此最佳定购量Q=1500$$

13.3 随机性存储模型

- 特点：
  - 需求为随机的，其概率或分布为已知；
  - 不允许缺货的条件只能从概率的意义方面理解；
  - 存储策略的优劣通常以赢利的期望值的大小作为衡量的标准。
- 可供选择的策略：
  - 定期订货法：定期订货，但订货数量需要根据上一个周期末剩下货物的数量决定订货量。剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多，可以少订或不定货。
  - 定点订货法：存储降到某一确定的数量时即订货，不再考虑间隔的时间，这一数量称为订货点，每次订货的数量不变。
  - (s,S)存储策略：把定期订货与定点订货综合起来的方法，隔一定时间检查一次存储，若存储数量高于一个数值s，则不定货；小于s时则订货补充存储，订货量要使存储量达到S。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 例：某商店拟在新年期间出售一批日历画片，每售出一千张可赢利700元，若在新年期间不能售出，必须削价处理，作为画片出售。由于削价，一定可以售完，此时每千张赔损400元。根据以往的经验，市场需求的概率见下表，问每年只订货一次，问应订购日历画片多少才能使获利的期望值最大？

需求量 r（单位千张）	0	1	2	3	4	5
概率 P(r)（$\sum_{r=0}^{5} P(r)=1$）	0.05	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10

- 分析：若该店订购4千张，计算获利的可能值如下：

当市场需求为0时获利为：－400×4＝－1600元

当市场需求为1时获利为：－400×3＋700＝－500元

当市场需求为2时获利为：－400×2＋700×2＝600元

当市场需求为3时获利为：－400×1＋700×3＝1700元

当市场需求为4时获利为：－400×0＋700×4＝2800元

当市场需求为5时获利为：－400×0＋700×4＝2800元

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 订购量为4千张时获利的期望值：

E[C(4)]=(-1600)×0.05+(-500)×0.10+600×0.25+1700×0.35
+2800×0.15+2800×0.10=1315元

- 按上述算法列出下表：（单位：百元）

获利		需求量 0	1	2	3	4	5	获利的期望值
订货量	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	−4	7	7	7	7	7	6.45
	2	−8	3	14	14	14	14	11.80
	3	−12	−1	10	21	21	21	14.40
	4	−16	−5	6	17	28	28	13.15
	5	−20	−9	2	13	24	35	10.25

- 获利期望值最大者为1440元，即订购3千张日历画片获利期望值最大。
- 本例还可以从相反的角度考虑求解，当订货量为Q时，可能发生滞销赔损或因缺货而失去销售机会的损失，把这两种损失合起来考虑取损失期望值最小者所对应的Q值即可。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 当该店订购量为2千张时，计算其损失可能：

  1.供货大于需求时的滞销赔损：

当市场需求为0时滞销损失为：－400×2＝－800元

当市场需求为1时滞销损失为：－400×1＝－400元

当市场需求为2时滞销损失为：0元

  2.供货小于需求时失去销售机会而少获利的损失：

当市场需求为3时缺货损失为：－700×1＝－700元

当市场需求为4时缺货损失为：－700×2＝－1400元

当市场需求为5时缺货损失为：－700×3＝－2100元

  损失期望值为：

E[C(2)]=(-800)×0.05+(-400)×0.10+0×0.25+(-700)×0.35+(-1400)×0.15+(-2100)×0.10=1315元

订货量（单位：千张）	0	1	2	3	4	5
损失的期望值	-19.25	-12.8	-7.45	-4.85	-6.1	-9

其中-4.85为最小的损失期望值，因此和第一种方法求得结果一样，订货3千张获利最大。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 模型五：需求是随机离散的
  - 报童问题：报童每天售报数是一个随机变量，报童每售出一份报纸赚k元，如报纸未能售出每份赔h元。每日售出报纸份数r的概率P(r)根据以往经验是已知的，问报童每日最好准备多少份报纸?
    - 分析：用计算损失期望值最小的方法求解

设售出报纸数量为r，其概率$P(r)$为已知，$\sum_{r=0}^{\infty} P(r)=1$。

设报童订购报纸数量为Q：

供过于求时($r \le Q$)，这时报纸因不能出售而承担的损失期望值为$\sum_{r=0}^{Q} h(Q-r)P(r)$

供不应求时($r > Q$)，这时因缺货而少赚钱的损失期望值为$\sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$

综合上述两种情况，当订货量为Q时，损失的期望值为：

$$C(Q)=\sum_{r=0}^{Q} h(Q-r)P(r)+\sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 由于报童订购报纸的份数只能取整数，r是离散变量，设报童每日订购报纸份数最佳为Q，其损失期望值满足：

$$(1)C(Q)\le C(Q+1)$$

$$(2)C(Q)\le C(Q-1)$$

- 从(1)推导：

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)\le h\sum_{r=0}^{Q+1}(Q+1-r)P(r)+k\sum_{r=Q+2}^{\infty}(r-Q-1)P(r)$$

$$\Rightarrow (k+h)\sum_{r=0}^{Q}P(r)-k\ge 0\Rightarrow \sum_{r=0}^{Q}P(r)\ge\frac{k}{k+h}$$

- 从(2)推导：

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)\le h\sum_{r=0}^{Q-1}(Q-1-r)P(r)+k\sum_{r=Q}^{\infty}(r-Q+1)P(r)$$

$$\Rightarrow (k+h)\sum_{r=0}^{Q-1}P(r)-k\le 0\Rightarrow \sum_{r=0}^{Q-1}P(r)\le\frac{k}{k+h}$$

- 报童应准备的报纸量最佳数量Q应按照下列不等式确定：

$$\sum_{r=0}^{Q-1}P(r)<\frac{k}{k+h}\le\sum_{r=0}^{Q}P(r)\quad(13.25)$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 用赢利期望值最大的方法求解：

  设售出报纸数量为r，其概率$P(r)$为已知，$\sum_{r=0}^{\infty} P(r)=1$。

  设报童订购报纸数量为Q：

  供过于求时$(r \le Q)$，这时报童只能卖出r份报纸，获利kr元，

  未售出的报纸损失$h(Q-r)$元，赢利期望值为$\sum_{r=0}^{Q}[kr-h(Q-r)]P(r)$

  供不应求时$(r > Q)$，这时报童只有Q份报纸可以销售，无滞销损失。

  赢利期望值为 $\sum_{r=Q+1}^{\infty} kQP(r)$

  综合上述两种情况，当订货量为Q时，赢利的期望值为：

  $$C(Q)=\sum_{r=0}^{Q}[kr-h(Q-r)]P(r)+\sum_{r=Q+1}^{\infty} kQP(r)$$

- 为使订购Q赢利期望值最大，应满足：

$$(1)C(Q) \ge C(Q+1)$$

$$(2)C(Q) \ge C(Q-1)$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 从(1)推导得:

$$\sum_{r=0}^{Q}[kr-h(Q-r)]P(r)+\sum_{r=Q+1}^{\infty}kQP(r)\geq\sum_{r=0}^{Q+1}[kr-h(Q+1-r)]P(r)+\sum_{r=Q+2}^{\infty}k(Q+1)P(r)$$

$$\Rightarrow kP(Q+1)-h\sum_{r=0}^{Q}P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}P(r)\leq 0\Rightarrow\sum_{r=0}^{Q}P(r)\geq\frac{k}{k+h}$$

- 同理从(2)推导得: $\sum_{r=0}^{Q-1}P(r)\leq\frac{k}{k+h}$
- 即用不等式 $\sum_{r=0}^{Q-1}P(r)<\frac{k}{k+h}\leq\sum_{r=0}^{Q}P(r)$

确定Q的值。该公式与前面用损失期望值最小的方法求出的(13.25)式相同。

– 应用举例

- 例:利用公式(13.25)求解上述商店购买日历画片问题:

已知: $k=700, h=400, \frac{k}{k+h}=0.637, P(0)=0.05, P(1)=0.10, P(2)=0.25, P(3)=0.35,$

$\sum_{r=0}^{2}P(r)=0.40<0.637<\sum_{r=0}^{3}P(r)=0.75$。即,应该订购3千张日历画片。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 例：某店拟出售甲商品，每单位甲商品成本50元，售价70元。如不能售出必须减价为40元，减价后一定可以售出。已知售货量r的概率服从泊松分布：

$$P(r)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}(\lambda\text{为平均售出数})$$

根据以往经验，平均售出数为6单位（λ=6），问该店订购量应为多少单位?

- 分析：

该店缺货损失即应该获得而没有获得的纯利润为k=70-50=20元，滞销损失为h=50-40=10元。

$$\frac{k}{k+h}=0.667$$

$$P(r)=\frac{e^{-6}6^{r}}{r!},\sum_{r=0}^{Q}P(r)\text{记作}F(Q)\text{，可查统计表得：}$$

$$F(6)=0.6063,F(7)=0.7440,\ \text{即}F(6)<\frac{k}{k+h}<F(7)$$

故订货量应为7个单位，此时损失的期望值最小。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 例：上例中若缺货损失为10元，滞销损失为20元，则：
- 分析：$\dfrac{k}{k+h}=0.333$，可查统计表得：

$$F(4)=0.2851<\frac{k}{k+h}<F(5)=0.44587$$

即订货量应为5个单位，此时损失的期望值最小。

- 模型五只解决一次订货问题，对报童问题实际上每日订货策略问题也应当认为解决了。
- 但模型中有一个严格的规定，即两次订货之间没有联系，都看作独立的一次订货。
- 模型五描述的这种存储策略称之为定期定量订货。

- 模型六：需求是连续的随机变量
  - 设货物单位成本为K，货物单位售价为P，单位存贮费为C_1，需求r是连续的随机变量，密度函数为$\phi(r)$，$\phi(r)dr$表示随机变量在r与$r+dr$之间的概率，其分布函数$F(a)=\int_0^a \phi(r)dr (a>0)$，生产或订购的数量为$Q$。
    - 分析：考虑当订购数量为Q时，实际销售量应该是min[r,Q]，也就是当需求r≤Q时，实际销售量为r；当r>Q时，实际销售量是Q。

$$需支付的存贮费用C_1(Q)=\begin{cases}C_1(Q-r), r\le Q\\ 0, r>Q\end{cases}$$

货物的成本为KQ，本阶段订购量为Q，赢利为W(Q)，赢利的期望值记作E[W(Q)]：

$$W(Q)=P\cdot\min[r,Q]-KQ-C_1(Q)$$

即：

（赢利）＝（实际销售货物的收入）－（货物成本）－（支付的存储费用）

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 赢利的期望值:

$$E[W(Q)]=\int_0^Q P\phi(r)rdr+\int_Q^\infty PQ\phi(r)dr-KQ-\int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)dr$$

$$=\int_0^\infty P\phi(r)rdr-\int_Q^\infty P\phi(r)rdr+\int_Q^\infty PQ\phi(r)dr-KQ-\int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)dr$$

$$=\underbrace{PE(r)}_{\text{常量(称为平均盈利)}}-\left\{\underbrace{P\int_Q^\infty (r-Q)\phi(r)dr}_{\text{因缺货失去销售机会损失的期望值}}+\underbrace{\int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)dr}_{\text{因滞销受到损失的期望值(只考虑了存贮费)}}+\underbrace{KQ}_{\text{常量}}\right\}$$

记: $E[C(Q)]=P\int_Q^\infty (r-Q)\phi(r)dr+C_1\int_0^Q (Q-r)\phi(r)dr+KQ$

- 为使赢利期望值极大化，有下列等式:

$$\max E[W(Q)]=PE(r)-\min E[C(Q)] \quad (13.26)$$

$$\max E[W(Q)]+\min E[C(Q)]=PE(r) \quad (13.27)$$

- (13.26)式表明了赢利最大与损失极小所得出的Q值相同；(13.27)式表明最大赢利期望值与损失极小期望值之和是常数。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 根据上面的分析，求赢利极大可以转化为求E[C(Q)]（损失期望值）极小，当Q可以连续取值时，E[C(Q)]是Q的连续函数，则：

$$\frac{dE[C(Q)]}{dQ}=\frac{d}{dQ}\left[P\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)dr+\int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)dr+KQ\right]$$

$$=C_1\int_0^Q\phi(r)dr-P\int_Q^{\infty}\phi(r)dr+K$$

令 $\frac{dE[C(Q)]}{dQ}=0$，记 $F(Q)=\int_0^Q\phi(r)dr$

即 $C_1F(Q)-P[1-F(Q)]+K=0\Rightarrow F(Q)=\frac{P-K}{C_1+P}$

解出Q，记作Q^*，Q^*为$E[C(Q)]$的驻点。又因 $\frac{d^2E[C(Q)]}{dQ^2}=C_1\phi(Q)+P\phi(r)>0$

可知Q^*为$E[C(Q)]$的极小值点。

- 式中只考虑了失去销售机会的损失，如果缺货时要付出的费用$C_2>P$时，应有

$$E[C(Q)]=C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)dr+C_1\int_0^Q(Q-r)\phi(r)dr+KQ \quad (13.28)$$

- 推导得：

$$F(Q)=\int_0^Q\phi(r)dr=\frac{C_2-K}{C_1+C_2}$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 模型五及模型六都是只解决一个阶段的问题。从一般情况考虑，上一个阶段未售出的货物可以在第二个阶段继续出售。此时定制的存储策略如下：
  - 分析：假设上一阶段未能售出的货物数量为I，作为本阶段初的存储，有：

$$\min E[C(Q)] = K(Q-I) + C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)dr + C_1\int_0^Q(Q-r)\phi(r)dr$$

$$= -KI + \min\underbrace{\left\{C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)dr + C_1\int_0^Q(Q-r)\phi(r)dr + KQ\right\}}_{\text{与(13.28)式相同}}$$

  - 利用$F(Q)=\int_0^Q\phi(r)dr=\dfrac{C_2-K}{C_1+C_2}$求出$Q^*$值，相应的存贮策略为：

    当$I \geq Q^*$时，本阶段不订货；

    当$I < Q^*$时，本阶段应订货，订货量为$Q=Q^*-I$，使本阶段的存贮达到Q^*，这时赢利期望值最大。

- 这种策略也可以称作定期订货，订货量不定的存储策略。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 模型七：(s,S)型存储策略
  - 需求为连续的随机变量
    - 设货物单位成本为K，货物单位售价为P，单位存贮费为C_1，单位缺货费为C_2，每次订购费为C_3，需求r是连续的随机变量，密度函数为$\phi(r), \int_0^\infty \phi(r)dr = 1$，其分布函数$F(a) = \int_0^a \phi(r)dr (a > 0)$，期初存贮为$I$，订购量为$Q$，此时期初存贮达到$S = I + Q$。
    - 分析：期初存储I在本阶段中为常量，本阶段需订货费C_3+KQ，本阶段需付存储费用的期望值为：$\int_0^{I+Q=S} C_1(S-r)\phi(r)dr$

      需付缺货费用的期望值为：$\int_{S=I+Q}^{\infty} C_2(r-S)\phi(r)dr$

      本阶段所需订货费、存储费以及缺货费期望值之和为：

$$C(I+Q) = C_3 + KQ + \int_0^S C_1(S-r)\phi(r)dr + \int_S^\infty C_2(r-S)\phi(r)dr$$

$$= C_3 + K(S-I) + \int_0^S C_1(S-r)\phi(r)dr + \int_S^\infty C_2(r-S)\phi(r)dr$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

- Q可以连续取值，C(S)是S的连续函数：

$$\frac{dC(S)}{dS}=K+C_1\int_0^S\phi(r)dr-C_2\int_S^{\infty}\phi(r)dr$$

$$令\frac{dC(S)}{dS}=0,\ 记F(S)=\int_0^S\phi(r)dr=\frac{C_2-K}{C_1+C_2}$$

$\frac{C_2-K}{C_1+C_2}$严格小于1，称为临界值，以N表示：$\frac{C_2-K}{C_1+C_2}=N$。

由$\int_0^S\phi(r)dr=N$确定S的值，订货量$Q=S-I$。

- 本模型中有订购费C_3，若本阶段不订货可以节省订购费C_3，考虑是否存在一个数值s(s≤S)使下面的不等式成立：

$$Ks+C_1\int_0^s(s-r)\phi(r)dr+C_2\int_s^{\infty}(r-s)\phi(r)dr\le C_3+KS+C_1\int_0^S(S-r)\phi(r)dr+C_2\int_S^{\infty}(r-S)\phi(r)dr$$

——当s=S时，不等式显然成立；

——当s<S时，不等式右端存储费用期望值大于左端存储费用期望值，右端缺货费用期望值小于左端缺货费用期望值；一增一减后仍然有可能使不等式成立。若有不只一个s的值使下列不等式成立，则选其中最小者作为本模型(s,S)存储策略的s。

13.3 随机性存储模型(cont.)

$$C_3 + K(S-s) + C_1\left[\int_0^S (S-r)\phi(r)dr - \int_0^s (s-r)\phi(r)dr\right] +$$

$$C_2\left[\int_S^\infty (r-S)\phi(r)dr - \int_s^\infty (r-s)\phi(r)dr\right] \geq 0$$

- 相应的存储策略是：每阶段初期检查存储，当库存I<s时，需订货，订货数量为Q=S-I。当库存I>s时，本阶段不订货。
- 这种存储策略是：定期订货但订货量不确定。订货量的多少视期末库存I来决定。
- 对于不易清点数量的存储，一般把存储分为两堆，堆A的数量为s，其余的放在另一堆B。平时从B堆中取用，当动用了堆A时，期末即订货；若未动用，期末则可不订货。这种方法俗称两堆法。

– 需求是离散的随机变量

- 设需求r取值为$r_0, r_1, \cdots, r_m, (r_i < r_{i+1})$

  其概率为$P(r_0), P(r_1), \cdots, P(r_m), \sum_{i=0}^{m} P(r_i) = 1$

  原有存贮量为I(在本阶段内为常量）。

  当本阶段开始时订货量为Q，存贮量达到$I+Q$。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 本阶段所需的各种费用：

  订货费：$C_3 + KQ$

  存贮费：当需求$r < I+Q$时，未能售出的存贮部分需付存贮费。

  $r \geq I+Q$时，不需要付存贮费，所需存贮费的期望值：$\sum_{r \leq I+Q} C_1(I+Q-r)P(r)$

  $(r = I+Q$时，不付存贮费及缺货 费$)$

  缺货费：当需求$r > I+Q$时$,(r-I-Q)$部分需付缺货费，缺货 费用的期望值：

  $\sum_{r > I+Q} C_2(r-I-Q)P(r)$

- 本阶段所需费用期望值之和：

  $$C(I+Q) = C_3 + KQ + \sum_{r \leq I+Q} C_1(I+Q-r)P(r) + \sum_{r > I+Q} C_2(r-I-Q)P(r)$$

  $I+Q$表示存贮所达到的水平，记$S = I+Q$，则上式可写为：

  $$C(S) = C_3 + K(S-I) + \sum_{r \leq S} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r-S)P(r)$$

- 求解使C(S)最小的S值：

1）将需求r的随机变量按大小顺序排列为：

$$r_0, r_1, \cdots, r_i, r_{i+1}, \cdots, r_m, \quad r_i < r_{i+1}, \quad r_i - r_{i+1} = \Delta r_i \neq 0, \quad i = 0,1,\cdots,m-1$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

2）S只从$r_0,r_1,\cdots,r_m$中取值，当S取值为r_i时，记作S_i:

$$\Delta S_i=S_{i+1}-S_i=r_{i+1}-r_i=\Delta r_i\neq 0,\ \ i=0,1,\cdots,m-1$$

3）求S的值使C(S)最小，有：

$$a)C(S_{i+1})-C(S_i)\geq 0$$

$$b)C(S_{i-1})-C(S_i)\geq 0$$

从a)推导得：

$$\Delta C(S_i)=C(S_{i+1})-C(S_i)=\left[C_3+K(S_{i+1}-I)+\sum_{r\leq S_{i+1}}C_1(S_{i+1}-r)P(r)+\sum_{r>S_{i+1}}C_2(r-S_{i+1})P(r)\right]$$

$$-\left[C_3+K(S_i-I)+\sum_{r\leq S_i}C_1(S_i-r)P(r)+\sum_{r>S_i}C_2(r-S_i)P(r)\right]$$

$$=K\Delta S_i+C_1\Delta S_i\sum_{r\leq S_i}P(r)-C_2\Delta S_i\left[1-\sum_{r\leq S_i}P(r)\right]$$

$$=K\Delta S_i+(C_1+C_2)\Delta S_i\sum_{r\leq S_i}P(r)-C_2\Delta S_i\geq 0$$

$$\because \Delta S_i\neq 0\ \therefore K+(C_1+C_2)\sum_{r\leq S_i}P(r)-C_2\geq 0\Rightarrow \sum_{r\leq S_i}P(r)\geq\frac{K-C_2}{C_1+C_2}=N$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

同理由b)可推导出：$\sum_{r\le S_{i-1}} P(r) \le \dfrac{K-C_2}{C_1+C_2} = N$

- 综合以上两式，得到确定S_i的不等式：

$$\sum_{r\le S_{i-1}} P(r) < N = \frac{C_2-K}{C_1+C_2} \le \sum_{r\le S_i} P(r) \quad (13.30)$$

取满足上式的S_i为S。本阶段订货量为Q=S-I

– 应用举例：

- 例：设某公司利用塑料做原料制成产品出售，已知每箱塑料购价为800元，订购费C_3=60元，存储费每箱C_1=40元，缺货费每箱C_2=1015元，原有存储量I=10箱，已知对原料需求的概率：P(r=30箱)=0.20，P(r=40箱)=0.20，P(r=50箱)=0.40，P(r=60箱)=0.20，求该公司订购原料的最佳订购量。
- 分析：计算临界值：$N = \dfrac{1015-800}{1015+40} = 0.204$

选择使不等式(13.30)成立的S_i最小值做S：

$$\left.\begin{aligned} P(30) &= 0.20 < 0.204 \\ P(30)+P(40) &= 0.40 > 0.204 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_i = 40$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

又原存储I=10箱，因此，应订货40-10=30箱。

- 验证：分别计算S=30/40/50所需订货费及存储费期望值、缺货费三者期望值之和。

S	I	$Q=S-I$	订货费 C_3+KQ	存贮费期望值 $C_1\sum_{r\le S}(S-r)P(r)$	缺货费期望值 $C_2\sum_{r>S}(r-S)P(r)$	总计
30	10	20	16060	0	16240	32300
40	10	30	24060	80	8120	$\boxed{32260}$
50	10	40	32060	240	2030	34330

- 比较可知S=40所需总费用最少，订购量Q=30，同上述计算结果一致。

– 本模型还有另一方面的问题：原存储量I达到什么水平可以不订货。

- 假设该水平为s，当I>s时可以不订货，当I≤s时要订货，使存储达到S，订货量Q=S-I。
- 考察下面的不等式：

$$Ks+\sum_{r\le s}C_1(s-r)P(r)+\sum_{r>s}C_2(r-s)P(r)$$

$$\le C_3+KS+\sum_{r\le S}C_1(S-r)P(r)+\sum_{r>S}C_2(r-S)P(r) \qquad (13.31)$$

- s只从$r_0,r_1,\cdots,r_m$中取值，使上式成立的r_i (r_i≤S)的值中最小者定为s，当s<S时，上式左端缺货费用的期望值会增加，订货费及存储费会减少，即不等式有可能成立。在最不利的情况下s=S时不等式成立(因$0<C_3$)。因此一定能找到s值。

– 应用举例

- 例：在上例基础上，计算s：
- 分析：因为已经算出S，所以s只能有两个值30和40，将30作为s值代入(13.31)式的左端得：

$$800\times30+1015\times[(40-30)\times0.2+(50-30)\times0.4+(60-30)\times0.2]=40240$$

将40作为S值代入(13.31)式右端得：

$$60+800\times40+40\times[(40-30)\times0.2]+1015\times[(50-40)\times0.4+(60-40)\times0.2]=40260$$

可见不等式成立，30是s可以取的最小值，因此s=30。上例的存储策略为每个阶段开始检查存储量I，I>30时不必补充存储，当I≤30时补充存储量到40。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 例：某厂对原料需求量的概率为：P(r=80)=0.1，P(r=90)=0.2，P(r=100)=0.3，P(r=110)=0.3， P(r=120)=0.1；订货费C_3=2825元，K=850元，存储费C_1=45元（在本阶段的费用），缺货费C_2=1250元（在本阶段的费用）。求该厂存储策略。
- 分析：

1）计算临界值：$N=\dfrac{1250-850}{1250+45}=0.309$

2）求出S值：$P(r=80)+P(r=90)=0.3<0.309$

$$P(r=80)+P(r=90)+P(r=100)=0.6>0.309$$

可知S=100

3）求出s值：S=100，取s=80，代入(13.31)得：

等式右端：

$$2825+850\times100+45\times\left[(100-80)\times0.1+(100-90)\times0.2\right]+1250\times\left[(110-100)\times0.3+(120-100)\times0.1\right]=94255$$

等式左端：

$$850\times80+1250\times\left[(90-80)\times0.2+(100-80)\times0.3+(110-80)\times0.3+(120-80)\times0.1\right]=94250$$

由于94250<94255，故s=80。该厂存储策略为每当库存不大于80时补充存储量达到100，当库存大于80时，不需订货补充库存。

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 例：某市石油公司，下设销售站，石油存放在该公司自己的油库中，需要补充时由油库送至各销售站。公司希望为其中销售量较多的一种柴油确定一种补充存储的策略，以确定应贮存的油量。经调查后知每月柴油出售量服从指数分布，平均销售量每月为一百万斤，其密度

$$f(r)=\begin{cases}0.000001e^{-0.000001\times r} & r\geq 0\\ 0 & r<0\end{cases}$$

柴油每斤0.20元，不需订购费。由于该公司自己掌管油库，因此油池灌满与未满时的管理费用实际上没有差别，故可以认为存储费用为零。如缺货就从邻市调用，缺货费0.30元/斤。求存储策略。

- 分析：从上述条件可知：$C_1=0$，$C_3=0$，$K=0.20$，$C_2=0.30$。计算临界值：

$$N=\frac{0.30-0.20}{0.30+0}=0.333$$

由于密度函数连续，利用积分求出S：

$$\int_0^S f(r)dr=\int_0^S 0.000001e^{-0.000001\times r}dr=0.333$$

$$\Rightarrow e^{-0.000001\times S}=0.667\Rightarrow S=405000$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

利用**(13.31)**式可以求出s，只需要把相应的求和部分利用积分计算即可：

$$0.2\times s+0.3\int_s^{\infty}(r-s)f(r)dr\le 0.2\times S+0.3\int_S^{\infty}(r-S)f(r)dr$$

观察可知，它有唯一解**s=S**，所以当库存柴油下降到**405000**斤以下时就需要订购使库存达到**405000**斤。

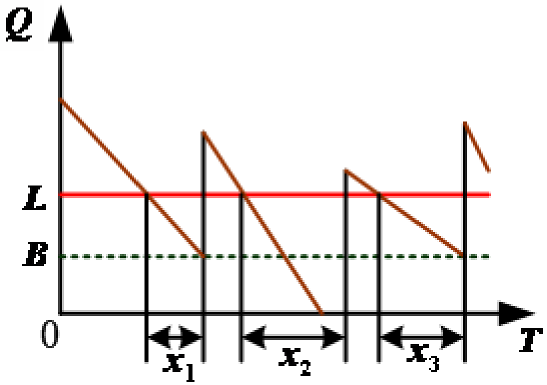
出现**s=S**的原因在于订购费为**0**，可以频繁订货，又存储费为**0**，存储量多一些也不会增加费用。

- 模型八：需求和拖后时间都是随机离散的
  - 若t时间内的需求量r是随机的，其概率$\varphi_t(r)$已知，单位时间内的平均需求ρ也是已知的，则t时间内的平均需求为ρt，拖后时间x是随机的，其概率$P(x)$已知。
    - 设单位货物年存贮费用为C_1，每阶段单位货物缺货费用为C_2，每次订购费用为C_3，年平均需求为D。

      由于需求、拖后时间都是随机的，应有缓冲(安全)存贮量B，以减少发生缺货现象。

      L：订货点，B：缓冲存贮量，$x_1,x_2,\cdots$：拖后时间。

13.3 随机性存储模型(cont.)



先按确定性模型求出E.O.Q.，以及最佳批次n_0:

$$Q_0 = E.O.Q. = \sqrt{\frac{2C_3 D}{C_1}}$$

$$n_0 = \frac{D}{Q_0}$$

存储策略全年分n_0次订货，每次订货量为Q_0。

订购点L的确定方法除应满足拖后时间内的平均需求D_L还要求维持缓冲存储量B，由于拖后时间是随机的，设平均拖后时间为μ。则：

$$L = D_L + B = \mu\rho + B$$

当存储量降至L时订货，由于拖后时间延长，或因需求增加而引起缺货的概率记作P_L：

$$P_L = \sum_x P(x) F_x(L)$$

其中：P(x)表示拖后时间为x天的概率，$F_x(L)$表示订货点为L（即存储量为L时）而在x天内需求r>L的概率。

$$F_x(L) = \sum_{r>L} \varphi_x(r)$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

- 记缺货的期望值为C_2P_L，n_0次缺货费的期望值为$n_0C_2P_L$，每年的存贮费用为$(\frac{1}{2}Q_0+B)C_1$。
- 由于Q_0是根据存储费用和订购费用权衡后得出的最佳值，因此只需要考虑维持缓冲存储量的存储费用以及缺货费用期望值两者之和最小。即令$n_0C_2P_L+C_1B$最小以确定L和B。

– 应用举例

- 例：某厂生产中需用钢材，t时间内需求的概率服从泊松分布：

$$\varphi_t(r)=\frac{e^{-\rho t}(\rho t)^r}{r!}$$

每天平均需求为1吨，ρ=1，年平均需求量D为365吨，则t时间内需求为r的概率：

$$\varphi_t(r)=\frac{e^{-t}t^r}{r!}$$

拖后时间为x天的概率服从正态分布：

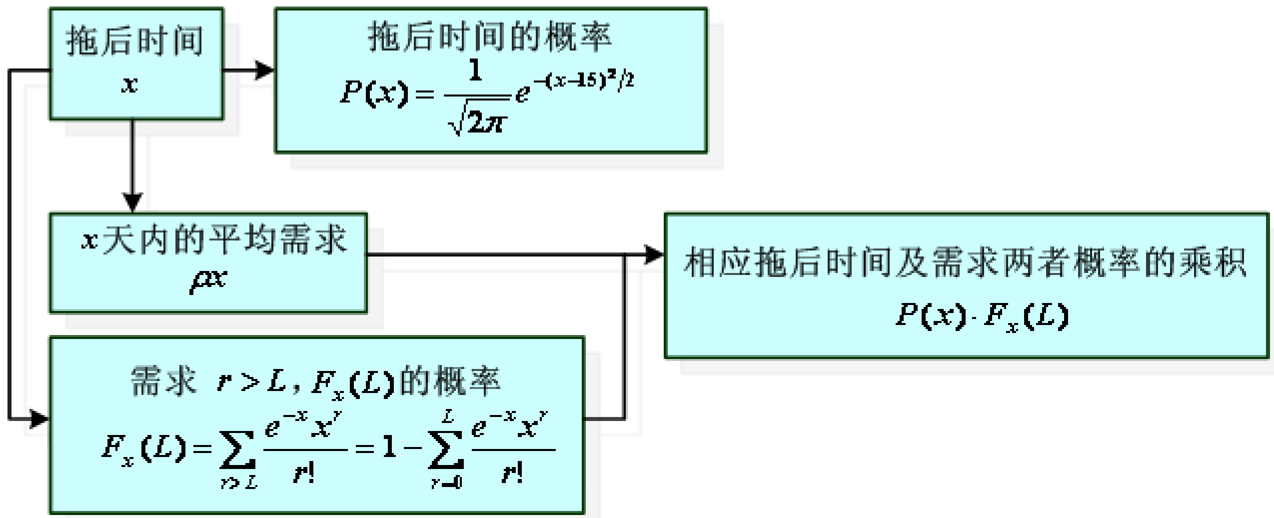
$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

13.3 随机性存储模型(cont.)

设平均拖后时间μ=15天，方差σ²=1，则： $P(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-15)^2/2}$

年存储费用每吨为50元，每次订购费为1500元，缺货费用每吨5000元，问每年应分多少批次？又订购量Q、缓冲存储量B、订货点L各为何值才使费用最少？

- 分析： $Q_0=\sqrt{\dfrac{2\times 365\times 15}{0.5}}=148$吨, $n_0=\dfrac{D}{Q_0}=2.5$次
- 计算L及B各步骤如下：（计算表略，见P374表13-5）



13.3 随机性存储模型(cont.)

- 书中取x=13~17，因为拖后时间大于18者或小于13者概率很小，故略去；
- L的选值可以多一些；若能保证可以选到最优值，L的选值也可以取少一些。
- 根据前面的计算表可以算出P_L、B和费用的各种数值：

L	L=15	L=21	L=22	L=23	L=24	L=25	L=26	L=31
P_L	0.423	0.056	0.036	0.021	0.012	0.007	0.004	0
B	0	6	7	8	9	10	11	16
费用	52.875	10.00	8.00	6.63	6.00	5.88	6.00	8.00

- 本例计算后可得当L=25，B=10时费用5.88为最小。即该厂的存储策略为：订购批量为148吨，订购点为25吨，每年订货2.5次（两年订货5次），缓冲存储量为10吨。

– 当清点存储困难时，常把存储物分成三堆存放：将缓冲存储量B放在III堆，平均拖后时间内的平均需求量D_L放在II堆，III+II即等于订货点L的大小，其余存储物放在I堆。平日从I堆取用，当I堆用完开始动用II堆时，立即订货；动用III堆时，即需采取措施以防缺货。

13.4 其他类型存储问题

- 库容有限制的存储问题
  - 例：已知仓库最大容量为A，原有存储量为I，要计划在m个周期内确定每一个周期的合理进货量与销售量，使总收入最多。已知第i个周期出售一个单位货物的收入为a_i，而订购一个单位货物的订货费为b_i，i=1,2,⋯,m。
  - 分析：

设x_i、y_i分别为第i个周期的进货量以及销售量，这时总收入为：$C=\sum_{i=1}^{m}(a_i y_i - b_i x_i)$

要求x_i、y_i使C达到最大值，但是x_i、y_i不能任意取值，受以下限制：

1）它们受到库容的限制，即进货量加上原有存储量不能超过A;

2）每个周期的售出量不能超过该周期的存储量;

3）进货量及售出量不能取负值。

即：$1) I+\sum_{i=1}^{s}(x_i - y_i) \le A(s=1,2,\cdots,m)$

$$2) y_s \le I+\sum_{i=1}^{s-1}(x_i - y_i)(s=1,2,\cdots,m)$$

$$3) x_i \ge 0, y_i \ge 0(i=1,2,\cdots,m)$$

可以看出，目标函数、约束条件都是线性的，利用线性规划问题可以求解。

本章完