《微分方程1》第十一讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年12月06日

Floquet乘子的乘积公式

Theorem

Floquet系统$y' = A(x)y$ 的Floquet乘子$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 乘积可表为

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = e^{\int_0^\omega trA(s)ds}. \qquad (*)$$

其中ω 为系统的周期.

注: 虽然F 乘子一般是未知的, 但是它们的乘积却有一个显式表示(*). 在某些情形下, 例如对于Hill 方程, 公式(*)很有用.

Proof.

设$\Phi(x)$ 是系统$y' = A(x)y$ 的基本解矩阵，且满足$\Phi(0) = E$，则$\Phi(x)$ 所确定的转移矩阵为$C = \Phi(\omega)$. 其n 个特征值就是乘子$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 于是它们得乘积为$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det\Phi(\omega)$. 根据Liouville 公式得

$$\det\Phi(x) = \det\Phi(0)e^{\int_0^x trA(s)ds} = e^{\int_0^x trA(s)ds}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

于上式令$x = \omega$ 得公式(*). 命题得证. □

常微分方程(组)解的稳定性有各种不同的定义，例如Lyapunov 稳定性，Poisson 稳定性等．这些稳定性概念之间有联系，也有区别．稳定性研究是常微理论的一个很大的研究领域．这里仅考虑比较简单的线性方程组$y' = A(x)y + b(x)$ 解的稳定性．以及稳定性判据，其中$A(x)$, $b(x)$ 假设在$[0, +\infty)$ 上的连续函数．记$\phi(x, y_0)$ 为系统满足初值条件$y(0) = y_0$ 的唯一解．

Definition

考虑线性系统$y' = A(x)y + b(x)$，其中$A(x)$，$b(x)$ 在$[0, +\infty)$上的连续．记$\phi(x, y_0)$ 为满足初值条件$y(0) = y_0$ 的唯一解．

(i) 称解$\phi(x, y_0)$ 稳定(stable)，如果对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$\|y_1 - y_0\| < \delta$ 时，$\|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_0)\| < \varepsilon$，$\forall x \geq 0$;

(ii) 称解$\phi(x, y_0)$ 不稳定的(unstable)，如果解$\phi(x, y_0)$ 在(i)意义下不是稳定的．

Definition

(iii) 称解 $\phi(x, y_0)$ 是局部渐近稳定的(locally asymptotically stable)，如果存在$\delta > 0$，使得当$\|y_1 - y_0\| < \delta$ 时，$\lim_{x\to+\infty}[\phi(x, y_1) - \phi(x, y_0)] = 0$.

(iv) 称解 $\phi(x, y_0)$ 是全局渐近稳定的(globally asymptotically stable)，如果 $\lim_{x\to+\infty}[\phi(x, y_1) - \phi(x, y_0)] = 0$, $\forall y_1 \in \mathbb{R}^n$.

Theorem

线性系统 $y' = A(x)y + b(x)$ 的每个解$\phi(x, y_0)$ 是稳定的(不稳定的，局部或全局渐近稳定的)，当且仅当齐次系统$y' = A(x)y$ 零解是稳定的(不稳定的，局部或全局渐近稳定的).

Proof.

由于任意两个解$\phi(x, y_0)$，$\phi(x, y_1)$ 的差$\phi(x, y_1) - \phi(x, y_0)$ 是齐次系统 $y' = A(x)y$ 的解. 故定理得证. □

注：因此线性系统$y' = A(x)y + b(x)$ 任意解$\phi(x, y_0)$ 的稳定性与对应齐次系统$y' = A(x)y$ 零的稳定性相同，与自由项$b(x)$ 无关.

Definition

考虑齐次线性系统$y' = A(x)y$，其中$A(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上连续.

记$\phi(x, y_0)$ 为系统满足初值条件$y(0) = y_0$ 的唯一解.

(i) 称零解稳定(stable)，如果对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$\|y_0\| < \delta$ 时，$\|\phi(x, y_0)\| < \varepsilon$, $\forall x \geq 0$;

(ii) 称零解全局渐近稳定(globally asymptotically stable)，如果$\lim_{x\to+\infty} \phi(x, y_0) = 0$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$;

(iii) 称零解不稳定(unstable)，如果零解按定义(i)的意义不是稳定的.

Theorem

对于常系数齐次线性系统$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$,

(i) 零解稳定, 当且仅当矩阵$\mathbf{A}$ 满足如下特征值条件**(EC)**: 每个特征值的实部≤ 0, 并且对于实部为零的特征值, 其几何重数等于其代数重数.

(ii) 零解全局渐近稳定, 当且仅当矩阵$\mathbf{A}$ 每个特征值有负实部.

(iii) 零解不稳定, 当且仅当矩阵$\mathbf{A}$ 不满足特征值条件**(EC)**, 即$\mathbf{A}$ 存在某个特征值有正实部, 或者$\mathbf{A}$ 存在某个实部为零的特征值, 其几何重数小于其代数重数.

Example (1)

例一：设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

简单计算表明$\mathbf{A}$ 的两个特征值为$\pm\mathbf{i}$, 它们的几何重数与代数重数相等(均为1). 由定理知齐次系统$\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ 的零解稳定.

Example (2)

例二：设

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

显然矩阵A 有一个特征值为$\lambda=1>0$. 故由定理可知齐次系统$y'=Ay$ 的零解不稳定.

Example (3)

例三：设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

简单计算表明矩阵$\mathbf{A}$ 的两个特征值为$-1\pm\mathbf{i}$, 每个特征值均有负实部. 故齐次系统$\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ 的零解全局渐近稳定.

<u>证明大意</u>: 结论(iii)直接由结论(i)得到. 故只需证结论(i)和(ii).

注意齐次系统$y' = Ay$ 满足初值条件$y(0) = y_0$ 的解为$e^{Ax}y_0$.

证(i) $\Rightarrow$. 假设零解稳定. 依定义知对$\forall \varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当$\|y_0\| < \delta$ 时, $\|e^{Ax}y_0\| < \varepsilon$, $\forall x \geq 0$. 由此可见矩阵范数$\|e^{Ax}\|$ 在$[0, +\infty)$ 上有界, 即存在$M > 0$, 使得$\|e^{Ax}\| \leq M$, $\forall x \geq 0$. 设$A = PJP^{-1}$, 其中P 为非奇矩阵, J 为A 的Jordan 标准形, 即

证明续1

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}, \quad J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix},$$

这里λ_j 是矩阵A 的特征值. 于是

$$e^{Ax} = P \begin{bmatrix} e^{J_1 x} & & & \\ & e^{J_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r x} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$e^{J_j x} = e^{\lambda_j x}\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{m_j\times m_j}.$$

显然$\|e^{Ax}\|$ 有界$\Longleftrightarrow$ $\|e^{Jx}\|$ 有界$\Longleftrightarrow$ $\|e^{J_j x}\|$ 有界，对每个$j=1,\cdots,r$; $\Longleftrightarrow$ λ_j 有负实部，或当λ_j 有零部时，阶数$m_j=1$，对每个$j=1,\cdots,r$; $\Longleftrightarrow$ 矩阵A 满足特征值条件(EC).

证(i) $\Leftarrow$. 设矩阵A 满足特征值条件(EC), 则有上述证明可知矩阵范数$\|e^{Ax}\|$ 在$[0,+\infty)$ 有界, 即存在$M>0$, 使得$\|e^{Ax}\|\le M$, $\forall x\ge 0$. 于是对$\forall\varepsilon>0$, 存在$\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$, 当$\|y_0\|<\delta$ 时,
$\|e^{Ax}y_0\|\le\|e^{Ax}\|\|y_0\|<M\delta=\varepsilon$, $\forall x\ge 0$. 此即零解稳定.

证(ii) $\Leftarrow$. 要证矩阵A 每个特征值有负实部时, 零解全局渐近稳定. 已证齐次系统$y'=Ay$ 的每个解$y(x)$ 满足$y(x)\to 0$, $x\to+\infty$. 见讲义Nov29wx第一页. 此即零解全局渐近稳定.

证明续4

证(ii) $\Rightarrow$. 假设系统$y' = Ay$ 的零解全局渐近稳定，则基本解矩阵e^{Ax} 的每个列向量都是解，故均趋向于零，当$x \to +\infty$. 因此$e^{Ax} \to 0$, $x \to +\infty$. 由此可见对每个$e^{Jx} = P^{-1}e^{Ax}P \to 0$, $j = 1, \cdots, r$. 注意$e^{Jx} = \mathrm{diang}(e^{J_1 x}, \cdots, e^{J_r x})$. 因此对每个$j = 1, \cdots, r$, $e^{J_j x} \to 0$, 当$x \to +\infty$.

观察

$$e^{J_j x} = e^{\lambda_j x}\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \to 0,$$

可知λ_j 有负实部, $j = 1, \cdots, r$. 定理得证. $\square$

考虑Floquet系统$y' = A(x)y + b(x)$ 解的稳定性，这里$A(x)$和$b(x)$ 都是ω 周期连续的．为此只需考虑对应齐次系统$y' = A(x)y$ 零解的稳定性．我们将看到，系统的Floquet 乘子和指数可用来作为稳定性的判据．

<u>定理</u>: 考虑齐次Floquet 系统$y' = A(x)y$, 其中$A(x)$ 是ω 周期连续的矩阵函数. 记系统的n 个F-指数为$\mu_1, \cdots, \mu_n$, 对应的n 个F-乘子为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 即$\lambda_j = e^{\omega\mu_j}$, 则

(i) 零解稳定$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(\mu_j) \le 0$, 并且对于$\mathrm{Re}(\mu_j) = 0$ 的指数μ_j, 其特征值的几何重数和代数重数相等$\Leftrightarrow$ $|\lambda_j| \le 1$, 并且对于$|\lambda_j| = 1$ 的乘子λ_j, 其特征值的几何重数和代数重数相等;

(ii) 零解全局渐近稳定$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(\mu_j) < 0, \forall j$, $\Leftrightarrow$ $|\lambda_j| < 1, \forall j$.

(iii) 零解不稳定$\Leftrightarrow$ 存在j_0, 使得$\mathrm{Re}(\mu_{j_0}) > 0$, 或者存在$j_0$, 使得$\mathrm{Re}(\mu_{j_0}) = 0$, 并且$\mu_{j_0}$ 作为特征值的几何重数小于代数重数;
$\Leftrightarrow$ 存在j_0, 使得$|\lambda_{j_0}| > 1$, 或者存在j_0, $|\lambda_{j_0}| = 1$, F-乘子λ_{j_0} 作为特征值, 其几何重数小于代数重数相等.

证：根据Floquet约化定理可知，Floquet 系统$y' = A(x)y$ 与常系数系统$z' = Bz$ 的解有关系$y = P(x)z$，这里$P(x)$ 为ω 周期的，连续可微的可逆的矩阵．因此系统$y' = A(x)y$ 零解的三种稳定性(稳定，全局渐近稳定，不稳定) 等价于常系数系统$z' = Bz$ 零解的三种稳定性．而后者的三种稳定性等价于常数矩阵B 分别满足的三组特征值条件，这正是F-指数满足三组条件．这也等价于F-乘子满足三组条件．细节略去． □

Theorem

考虑Floquet 系统$y' = A(x)y$, 其中$A(x)$ 是ω 周期连续的矩阵函数. 以下四个结论成立.

(i) 复数λ_0 是F-乘子$\Longleftrightarrow$ 系统存在一个非零解$y(x)$ 满足$y(x+\omega) = \lambda_0 y(x), \forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) 复数μ_0 是F-指数$\Longleftrightarrow$ 系统存在一个非零解$y(x)$ 可表为$y(x) = e^{\mu_0 x}p(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 其中$p(x)$ 是ω-周期向量值函数;

(iii) $\lambda = 1$ 是F-乘子$\Longleftrightarrow$ 系统存在一个非平凡的ω-周期解;

(iv) $\lambda = -1$ 是F-乘子$\Longleftrightarrow$ 系统存在一个非平凡的2ω-周期解, 但不是ω-周期解.

证: 显然结论(iii) 和(iv) 是结论(i) 的直接推论. 以下只需证明(i)和(ii). 设$\Phi(x)$ 是Floquet系统$y' = A(x)y$ 的基本主解阵且满足$\Phi(0) = E$, 则$\Phi(x)$ 所确定的转移矩阵为$C = \Phi(\omega)$, 系统满足初值条件$y(0) = y_0$ 的解可表为$y(x) = \Phi(x)y_0$.

证(i): 复数λ_0 是一个F-乘子

$\Longleftrightarrow$ 存在非零向量y_0, 使得$(\Phi(\omega) - \lambda_0 E)y_0 = 0$

$\Longleftrightarrow$ 非零解$y(x) = \Phi(x)y_0$ 满足$y(x+\omega) = \lambda_0 y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

这是因为$y(x+\omega) = \Phi(x+\omega)y_0 = \Phi(x)\Phi(\omega)y_0 = \Phi(x)\lambda_0 y_0$

$= \lambda_0\Phi(x)y_0 = \lambda_0 y(x)$.

证(ii): 复数μ_0 是F-指数$\Longleftrightarrow$ 存在F-乘子$\lambda_0 = e^{\omega\mu_0}$ $\Longleftrightarrow$ 存在非零解$y(x)$ 满足$y(x+\omega) = e^{\omega\mu_0}y(x), \forall x \in \mathbb{R}$. 不难证明这个非零解$y(x)$ 可表为$y(x) = e^{\mu_0 x}p(x), \forall x \in \mathbb{R}$. 这里$p(x) := e^{-\mu_0 x}y(x)$. 不难证明$p(x)$ 是ω-周期的，因为

$p(x+\omega) = e^{-\mu_0(x+\omega)}y(x+\omega) = e^{-\mu_0 x}e^{-\mu_0\omega}e^{\mu_0\omega}y(x)$

$= e^{-\mu_0 x}y(x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

证毕. $\square$

Hill 方程

考虑二阶线性齐次方程$x'' + p(t)x = 0$, 其中$p(t)$ 是以π 为周期的连续函数. 这个方程文献中常称作Hill 方程. 与Hill方程等价的二维线性 Floquet 系统为$y' = A(t)y$, 其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}.$$

上述线性系统可称为Hill 线性系统. 为了描述Hill 系统解的性质. 需要引入Poisson 稳定性概念.

Poisson 稳定性

Definition

考虑齐次线性系统$y' = A(t)y$，其中$A(t)$ 在$\mathbb{R}$ 上的连续矩阵函数．称系统是Poisson 稳定的，如果系统的每个解$y(t)$ 在$\mathbb{R}$ 均有界，即对于任意解$y(t)$，存在正数$M > 0$，使得$\|y(t)\| \leq M$，$\forall t \in \mathbb{R}$，这里$\|\cdot\|$ 是任何一种向量范数．

设$\Phi(t)$ 为Hill 系统的基本解矩阵，且满足初值条件$\Phi(0)=E$. 故它所对应的转移矩阵为$C=\Phi(\pi)$. 记矩阵C 的两个特征值，即系统的Floquet乘子为λ_1, λ_2. 将基本解矩阵$\Phi(t)$ 写作

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix}.$$

则$x_1(t)$ 和$x_2(t)$ 分别是如下两个Cauchy 问题的解

$$\begin{cases} x_1''+p(t)x_1=0, \\ x_1(0)=1, x_1'(0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2''+p(t)x_2=0, \\ x_2(0)=0, x_2'(0)=1. \end{cases}$$

回忆两个F-乘子λ_1，λ_2 是转移矩阵$\Phi(\pi)$ 的特征值，并注意到$\det\Phi(\pi)=1$，故λ_1，λ_2 为一元二次方程$\det[\lambda E-\Phi(\pi)]$ $=\lambda^2-a\lambda+1=0$ 的两个根，且$\lambda_1\lambda_2=1$，这里$a=x_1(\pi)$ $+x_2'(\pi)$. 因此F-乘子λ_1，λ_2 可以表示为

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4}\right),\quad \lambda_2=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4}\right).$$

对应的特征指数为

$$\mu_1=\frac{1}{\pi}\ln\lambda_1,\quad \mu_2=\frac{1}{\pi}\ln\lambda_2.$$

根据a 的不同取值情况，如下讨论.

情形一: $a > 2$. 此时两个乘子满足$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. 由前述定理可知方程有两个解$y_1(t) = p_1(t)e^{\mu_1 t}$, $y_2(t) = p_2(t)e^{\mu_2 t}$, 其中$p_1(t)$, $p_2(t)$ 为π 周期的, $\mu_1 < 0 < \mu_2$. 不难证明这两个解线性无关. 因此它们构成了方程组的基本解组. 由于$e^{\mu_2 t}$ 在$(0, +\infty)$ 上无界, $e^{\mu_1 t}$ 在$(-\infty, 0)$ 上无界, 故Hill 方程的每个非平凡解在$(-\infty, +\infty)$ 上无界. Hill 方程非Poisson 稳定的.

情形二: $a < -2$. 这个情形的讨论与情形一类似. 此时两个乘子满足$\lambda_2 < -1 < \lambda_1 < 0$, 对应的特征指数为

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\ln|\lambda_1| + i, \quad \mu_2 = \frac{1}{\pi}\ln|\lambda_2| + i.$$

于是方程有两个解

$$y_1(t) = p_1(t)e^{\mu_1 t}, \quad y_2(t) = p_2(t)e^{\mu_2 t},$$

其中$p_1(t)$, $p_2(t)$ 为π 周期的. 不难证明这两个解线性无关. 因此它们构成了方程组的基本解组. 故Hill 方程的每个非平凡解在$(-\infty, +\infty)$ 上无界. 因此Hill 方程不是Poisson 稳定的.

情形三: $|a| < 2$

<u>情形三</u>: $|a| < 2$. 此时方程的两个乘子为一对共轭复数

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm i\sqrt{4 - a^2}\right),$$

并且$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. 不妨设$\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$. 对应的两个Floquet指数可取为$\mu_1 = \frac{i\theta}{\pi}$, $\mu_2 = \frac{-i\theta}{\pi}$. 于是方程有两个线性无关的解$y_1(t) = p_1(t)e^{\frac{i\theta t}{\pi}}$, $y_2(t) = p_2(t)e^{\frac{-i\theta t}{\pi}}$, 其中函数$p_1(t)$, $p_2(t)$ 为π 周期的. 由于函数$e^{\frac{\pm i\theta t}{\pi}}$ 有界, 故这两个解在$\mathbb{R}$ 上有界. 因此Hill 方程是Poisson 稳定的.

情形四: $a=2$. 此时方程的两个乘子为$\lambda_1=\lambda_2=1$. 然而此时Hill解的性质这个情形下还依赖于转移矩阵$\Phi(\pi)$ 的Jordan结构. 需要做更细致的讨论.

(i). 转移矩阵$\Phi(\pi)$ 的Jordan 标准型为单位矩阵, 即

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

换言之, 临界F-乘子$\lambda=1$ 的几何重数与代数重数相等. 此时$\Phi(\pi)=E=\Phi(0)$. 这表明基本解矩阵$\Phi(t)$ 是π 周期的, 从而Hill 方程每个解都是π 周期的. 故方程是Poisson 稳定的.

(ii): 转移矩阵$\Phi(\pi)$ 的Jordan 标准型为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

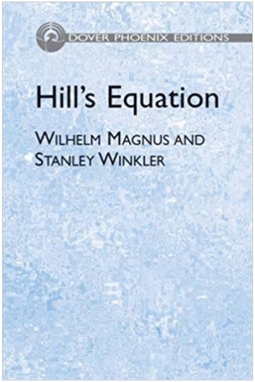
换言之，临界F-乘子$\lambda = 1$ 的几何重数与代数重数不等．故Hill 系统的零解不稳定．系统存在F-乘子1 说明方程存在非平凡π 周期解．不难证明此时方程存在解在$[0, +\infty)$ 无界．因此Hill 方程不是Poisson 稳定的．

情形五: $a=-2$. 此时方程的两个乘子为$\lambda_1=\lambda_2=-1$. 同情形四$a=2$ 的讨论类似, 当转移矩阵$\Phi(\pi)=-E$ 时, Hill 方程的每个解都是2π 周期解; 而当$\Phi(\pi)$ 的Jordan 标准性为

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

时, 同理可证Hill 方程存在无界解, 故此时Hill方程非Poisson稳定的. 讨论完毕.

关于Hill方程的专著



Lyapunov稳定性准则

Theorem

考虑Hill 方程$x'' + p(t)x = 0$，其中$p(t)$ 是π 周期的连续函数.

还假设$p(t)$ 是非负的，不恒为零，且满足不等式

$$\pi \int_0^{\pi} p(t)dt \leq 4, \qquad (*)$$

则Hill 方程Poisson 稳定，即方程的每个解在实轴$\mathbb{R}$ 均有界.

证: 根据上述讨论知, 只要证明在假设(*)下, Hill 方程的两个Floquet 乘子是一对共轭复数, 从而Hill 具有 Poisson 稳定性. 以下证明方程的两个Floquet 乘子非实数. 反证. 假设方程有实数Floquet 乘子(此时两个都是) $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. 由前述定理知方程存在非零解$x(t)$ 满足$x(t+\pi) = \lambda_1 x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 由此可见解$x(t)$ 在实轴$\mathbb{R}$ 上或者没有零点, 或者有无穷多个零点, 并且两个相邻的零点间距不超过π. 以下就这两种情况分别做如下讨论.

情形一: 解$x(t)$ 在$\mathbb{R}$ 上没有零点. 于方程$x''(t)+p(t)x(t)=0$ 两边同除以$x(t)$ 得

$$\frac{x''(t)}{x(t)}+p(t)=0, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

对上式从0 到π 作积分得

$$\int_0^\pi \frac{x''(t)}{x(t)}dt+\int_0^\pi p(t)dt=0.$$

对上式第一个积分作分布积分得

$$\left.\frac{x'(t)}{x(t)}\right|_0^\pi+\int_0^\pi\left[\frac{x'(t)}{x(t)}\right]^2dt+\int_0^\pi p(t)dt=0.$$

由于解$x(t)$满足$x(t+\pi)=\lambda_1 x(t)$，故$x'(t+\pi)=\lambda_1 x'(t)$. 由此得

$$\left.\frac{x'(t)}{x(t)}\right|_0^\pi=0.$$

于是

$$\int_0^\pi\left[\frac{x'(t)}{x(t)}\right]^2dt+\int_0^\pi p(t)dt=0.$$

再注意到假设$p(t)$非负连续且不恒为零. 故上式不可能成立.

因此情形一不可能发生.

证明续3

情形二: 解 $x(t)$ 有零点. 由关系式 $x(t+\pi)=\lambda_1 x(t)$ 知解 $x(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有无穷多个零点, 并且两个相邻的零点间距不超过π.

设a,b 是解$x(t)$ 两个相邻的零点, 且$a<b$, 则 $x(t)\neq 0$, $\forall t\in(a,b)$. 不妨设 $x(t)>0$, $\forall t\in(a,b)$. 注意在区间$[a,b]$ 上, $-x''(t)=p(t)x(t)\geq 0$, 故有

$$\int_a^b p(t)dt=\int_a^b \frac{|x''(t)|}{x(t)}dt.$$

由假设(*)知

$$\frac{4}{\pi}\geq\int_0^{\pi}p(t)dt=\int_a^{a+\pi}p(t)dt\geq\int_a^b p(t)dt=\int_a^b\frac{|x''(t)|}{x(t)}dt.$$

再利用第八讲Nov08wx 中选作题的结论：设函数$u(t)$ 在有界闭区间$[a,b]$ 上连续，在开区间(a,b) 上二阶连续可导，且$u(a) = 0 = u(b)$，$u(t) > 0$，$\forall t \in (a,b)$，则

$$\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u(t)} dt > \frac{4}{b-a}.$$

由此得

$$\frac{4}{\pi} \geq \int_a^b \frac{|x''(t)|}{x(t)} dt > \frac{4}{b-a} \geq \frac{4}{\pi}.$$

上式是一个矛盾. 故情形二也不可能发生. 这就证明了Lyapunov 稳定性定理. $\square$

Definition

<u>定义</u>: 设$\mathbf{X}$ 是一个集合, ρ: $\mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathrm{I\!R}^+ := [0, +\infty)$ 是一个函数. 若ρ 满足

(i) (非负性) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbf{X}$, 并且$\rho(x, y) = 0$ 当且仅当$x = y$;

(ii) (对称性) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbf{X}$;

(iii) (三角不等式) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, x)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{X}$,

则称函数$\rho(\cdot, \cdot)$ 是$\mathbf{X}$ 上的一个距离(或度量), 称二元组$(\mathbf{X}, \rho)$ 为一个距离空间(或度量空间).

Example (1)

例一：对任意两点$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in \mathbb{R}^n$，定义$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_1^n(x_i-y_i)^2}$，则不难验证$\rho$ 是$\mathbb{R}^n$ 的一个距离(这个距离称为欧氏距离)，从而$(\mathbb{R}^n,\rho)$ 为一个距离空间.

Example (2)

例二：对任意两个连续函数$y(\cdot)$，$z(\cdot)\in C[a,b]$，定义$\rho(y,z)=\max\{|y(x)-z(x)|,x\in[a,b]\}$，则不难验证$\rho$ 是$C[a,b]$ 上的一个距离，从而$(C[a,b],\rho)$ 是一个距离空间.

Definition

定义：设(X,ρ) 为一个距离空间，$\{x_n\}\subset X$ 为一个点列。若存在一点$x^*\in X$，使得$\rho(x_n,x^*)\to 0$，$n\to+\infty$，则点列$\{x_n\}$ 收敛于点x^*，则点x^* 称为点列$\{x_n\}$ 的极限，并记作$x_n\to x^*$，或$\lim_{n\to+\infty}x_n=x^*$.

Example

例：设$y_n(x)$ 是连续函数空间$C[a,b]$ 的一个函数列，$\rho(\cdot,\cdot)$ 是之前例二中定义的距离。序列$\{y_n\}$ 在距离空间$(C[a,b],\rho)$ 收敛于$y^*(\cdot)\in C[a,b]$，实际上就是函数列在有界闭区间$[a,b]$ 上一致收敛于$y^*(x)$.

Definition

定义：设(X, ρ) 为一个距离空间. (i) 称点列$\{\mathrm{x}_\mathrm{n}\} \subset \mathrm{X}$ 为一个Cauchy序列，如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得$\rho(\mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{x}_\mathrm{m}) < \varepsilon$, $\forall \mathrm{m}, \mathrm{n} \geq \mathrm{N}$. (ii) 一个距离空间$(\mathrm{X}, \rho)$ 称为是完备的(complete)，如果它的每个Cauchy 序列都收敛于X 中的某个点.

Example

不难证明，之前例一和例二中的距离空间$(\mathrm{IR}^\mathrm{n}, \rho)$ 和$(\mathrm{C}[\mathrm{a}, \mathrm{b}], \rho)$ 都是完备的.

Definition

定义: 设$(\mathbf{X},\rho)$ 为一个距离空间, $\mathbf{T}: \mathbf{X}\to\mathbf{X}$ 是从$\mathbf{X}$ 到其自身的一个映射. 若存在$\alpha\in(0,1)$, 使得$\rho(\mathbf{Tx},\mathbf{Ty})\le\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{X}$, 则称$\mathbf{T}$ 是一个压缩映射, α 称为压缩常数.

Theorem

设$(\mathbf{X},\rho)$ 为一个完备的距离空间, $\mathbf{T}: \mathbf{X}\to\mathbf{X}$ 是一个压缩映射, 则映射$\mathbf{T}$ 有唯一一个不动点, 即存在唯一一点$\mathbf{x}^*\in\mathbf{X}$, 使得$\mathbf{Tx}^*=\mathbf{x}^*$.

Definition

(i) 称二元函数$f(x,y)$ 在其定义域闭矩形$R_{a,b}(x_0,y_0)$:

$|x-x_0|\le a$, $|y-y_0|\le b$ 上关于变量y 满足Lipschitz 条件，如果存在一个常数$L>0$ (L称作Lipschitz常数)，使得下式成立

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\ \forall (x,y_1),(x,y_2)\in R_{a,b}(x_0,y_0)$$

(ii) 称二元函数$g(x,y)$ 在其定义域开区域$\Omega\subset \mathbb{R}^2$ 上满足局部Lipschitz 条件，如果对任意一点$(x_0,y_0)\in\Omega$，存在闭矩形$R_{a,b}(x_0,y_0)\subset\Omega$，使得$g(x,y)$ 在矩形$R_{a,b}(x_0,y_0)$ 上关于变量y 满足Lipschitz 条件.

习题一. 求下列Floquet系统$y' = A(x)y$ 的F-乘子.

$$\text{(i)}\ A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sin^2 x \end{bmatrix}. \quad \text{(ii)}\ A(x) = \begin{bmatrix} -1+\cos x & 0 \\ \cos x & -1 \end{bmatrix}.$$

习题二. 考虑Hill方程$x'' + p(t)x = 0$, 其中$p(t)$ 是以π 为周期的连续函数. 假设方程有一个非平凡的$n\pi$ 周期解, $n > 2$, 并且方程没有非平凡的π 或2π 周期解. 证明方程所有的解均为$n\pi$ 周期解.

作业

习题三: 考虑Hill 方程$x''+p(t)x=0$, 其中函数$p(t)$ 的假设同上. 设$x_1(t)$, $x_2(t)$ 是方程的两个解, 分别满足条件

$$\begin{cases} x_1(0)=1, \\ x_1'(0)=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2(0)=0, \\ x_2'(0)=1. \end{cases}$$

假设$p(t)<0$, $\forall t\in \mathbb{R}$, 证明

(i) $x_1'(t)>0$, $x_2(t)>0$, $\forall t\in(0,+\infty)$;

(ii) $x_1(\pi)+x_2'(\pi)>2$;

(iii) 存在解在$[0,+\infty)$ 无界.

习题四. 考虑一维线性方程$x' = a(t)x$, 这里$a(t)$ 是$\omega > 0$ 为周期的连续函数. 证明方程的每个解都可以写作$x(t) = p(t)e^{rt}$, 其中$p(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 且$p(t)$连续可微, r 是函数$a(t)$ 在区间$[0, \omega]$ 上的平均值, 即$r = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega a(t)dt$. 进一步证明, 方程$x' = a(t)x$ 的所有解都是ω 周期的, 当且仅当$\int_0^\omega a(t)dt = 0$, 即$r = 0$.

习题五. 确定常系数线性齐次方程组$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 零解的稳定性，其中系数矩阵$\mathbf{A}$ 为

$$(\mathrm{i})\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad (\mathrm{ii})\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -7 & -10 \end{bmatrix};$$

$$(\mathrm{iii})\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

作业续3

<u>习题六</u>. 证明引理: 设二元函数$f(x,y)$ 及其偏导数$f_y(x,y)$ 在平面开域$\Omega\subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 则$f(x,y)$ 在Ω 上满足局部Lipschitz 条件(关于变量y).

<u>习题七</u>. 证明引理: 设$f(x,y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 上连续, $y=\phi(x)$ 是闭区间$J_h=[x_0-h,x_0+h]$ 上的连续函数, $h>0$. 证明$\phi(x)$ 满足积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds, \quad x\in J_h,$$

当且仅当$y=\phi(x)$ 是Cauchy 问题$y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ 在开区间(x_0-h,x_0+h) 上的解.