《微分方程1》第十二讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年12月13日

Definition

<u>定义</u>: 设$\mathbf{X}$ 是一个集合, ρ: $\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathrm{IR}^{+}:=[0,+\infty)$ 是一个函数. 若ρ 满足

(i) (非负性) $\rho(x,y)\geq 0$, $\forall x,y\in\mathbf{X}$, 并且$\rho(x,y)=0$ 当且仅当$x=y$;

(ii) (对称性) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, $\forall x,y\in\mathbf{X}$;

(iii) (三角不等式) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,x)$, $\forall x,y,z\in\mathbf{X}$,

则称函数$\rho(\cdot,\cdot)$ 是$\mathbf{X}$ 上的一个距离(或度量), 称二元组$(\mathbf{X},\rho)$ 为一个距离空间(或度量空间).

例子

Example (1)

例一: 对任意两点$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_1^n(x_i-y_i)^2}$, 则不难验证$\rho$ 是$\mathbb{R}^n$ 的一个距离(这个距离称为欧氏距离), 从而$(\mathbb{R}^n,\rho)$ 为一个距离空间.

Example (2)

例二: 对任意两个连续函数$y(\cdot)$, $z(\cdot)\in C[a,b]$, 定义$\rho(y,z)=\max\{|y(x)-z(x)|, x\in[a,b]\}$, 则不难验证$\rho$ 是$C[a,b]$ 上的一个距离, 从而$(C[a,b],\rho)$ 是一个距离空间.

Definition

定义：设(X,ρ) 为一个距离空间，$\{x_n\}\subset X$ 为一个点列. 若存在一点$x^*\in X$，使得$\rho(x_n,x^*)\to 0$, $n\to+\infty$，则点列$\{x_n\}$ 收敛于点x^*，则点x^* 称为点列$\{x_n\}$ 的极限，并记作$x_n\to x^*$，或$\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

Example

例：设$y_n(x)$ 是连续函数空间$C[a,b]$ 的一个函数列，$\rho(\cdot,\cdot)$ 是之前例二中定义的距离. 序列$\{y_n(\cdot)\}$ 在距离空间$(C[a,b],\rho)$ 收敛于$y^*(\cdot)\in C[a,b]$，实际上就是函数列在有界闭区间$[a,b]$ 上一致收敛于$y^*(x)$.

Definition

定义：设(X,ρ) 为一个距离空间. (i) 称点列$\{x_n\}\subset X$ 为一个Cauchy序列，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$, $\forall m,n\geq N$. (ii) 一个距离空间(X,ρ) 称为是完备的(complete)，如果它的每个Cauchy 序列都收敛于X 中的某个点.

Example

不难证明，之前例一和例二中的距离空间$(\mathbb{R}^n,\rho)$ 和$(C[a,b],\rho)$ 都是完备的.

Definition

定义: 设$(\mathbf{X},\rho)$ 为一个距离空间, $\mathbf{T}: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ 是从$\mathbf{X}$ 到其自身的一个映射. 若存在$\alpha \in (0,1)$, 使得$\rho(\mathbf{Tx},\mathbf{Ty}) \le \alpha\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, 则称$\mathbf{T}$ 是一个压缩映射, α 称为压缩常数.

Theorem

设$(\mathbf{X},\rho)$ 为一个完备的距离空间, $\mathbf{T}: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ 是一个压缩映射, 则映射$\mathbf{T}$ 有唯一一个不动点, 即存在唯一一点$\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$, 使得 $\mathbf{Tx}^* = \mathbf{x}^*$.

证: 任意取定一点$x_0 \in X$, 作迭代$x_1 := Tx_0$, $x_{n+1} := Tx_n$, $\forall n \geq 1$. 以下证明

(i) 迭代序列$\{x_n\}$ 是Cauchy列, 故收敛, 因为(X, ρ) 完备.

(ii) 序列$\{x_n\}$ 的极限就是T 的不动点;

(iii) 不动点唯一.

证(i): 由于$\rho(x_2, x_1) = \rho(Tx_1, Tx_0) \leq \alpha\rho(x_1, x_0)$,

$\rho(x_3, x_2) = \rho(Tx_2, Tx_1) \leq \alpha\rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2\rho(x_1, x_0)$.

由归纳法易证, $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n\rho(x_1, x_0)$, $\forall n \geq 1$.

证明续1

对任意两个正整数$n > m \geq 1$,

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots +$$

$$\rho(x_{m+1}, x_m) \leq (\alpha^{n-1} + \cdots + \alpha^m)\rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha}.$$

由此不难看出迭代序列$\{x_n\}$ 是Cauchy列，因为$\alpha < 1$，所以α^m 可以任意小.

证(ii)：序列$\{x_n\}$ 的极限就是T 的不动点. 由于空间(X, ρ) 完备，故Cauchy 列$\{x_n\}$ 收敛. 设$x_n \to x^*$. 我们来证$Tx^* = x^*$.

由于

$$\rho(x^*, Tx^*) \le \rho(x^*, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, Tx^*)$$

$$\le \rho(x^*, x_{n+1}) + \alpha\rho(x_n, x^*) \to 0, \text{ as } n \to +\infty,$$

这表明$\rho(x^*, Tx^*) = 0$. 由此得$Tx^* = x^*$.

证(iii)：不动点的唯一性. 设T 还有一个不动点$y^* \in X$,

即$Ty^* = y^*$, 则

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Tx^*, Ty^*) \le \alpha\rho(x^*, y^*).$$

因$\alpha \in (0, 1)$, 故必有$\rho(x^*, y^*) = 0$, 即$y^* = x^*$. 定理证毕. □

Corollary

推论：记号与假设同上，则由初始点x_0 所产生的第m 次迭代x_m 与不动点x^* 有误差估计

$$\rho(x_m, x^*) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0), \quad \forall m \ge 1. \quad (*)$$

Proof.

证: 在上述定理证明中, 我们证明了如下结论, 对任意两个正整数$n > m \geq 1$,

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0).$$

于是

$$\rho(x_m, x^*) \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) + \rho(x_n, x^*).$$

于上式中令$n \to +\infty$ 即得不等式(*). 证毕. $\square$

Theorem

考虑一阶方程$y' = f(x, y)$，其中函数f 以及偏导数f_y 在平面开域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，则对任意点$(x_0, y_0) \in \Omega$，

(i) (存在性) Cauchy问题$y' = f(x, y)$，$y(x_0) = y_0$ 有解$\phi(x)$，$x \in J_1$，其中J_1 是包含x_0 的一个开区间.

(ii) (唯一性) 若还有其他解$\psi(x)$，$x \in J_2$，其中J_2 是包含x_0 的一个开区间，则$\psi(x) \equiv \phi(x)$，$\forall x \in J_1 \cap J_2$.

Lipschitz条件，局部Lipschitz条件

Definition

(i) 称二元函数$f(x,y)$ 在其定义域闭矩形$R_{a,b}(x_0,y_0)$:

$|x-x_0|\le a$, $|y-y_0|\le b$ 上关于变量y 满足Lipschitz 条件，如果存在一个常数$L>0$ (L称作Lipschitz常数)，使得下式成立

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|, \forall (x,y_1),(x,y_2)\in R_{a,b}(x_0,y_0)$

(ii) 称二元函数$g(x,y)$ 在其定义域开区域$\Omega\subset \mathbb{R}^2$ 上满足局部Lipschitz 条件，如果对任意一点$(x_0,y_0)\in\Omega$，存在闭矩形$R_{a,b}(x_0,y_0)\subset\Omega$，使得$g(x,y)$ 在矩形$R_{a,b}(x_0,y_0)$ 上关于变量y 满足Lipschitz 条件.

Lemma

设二元函数$f(x,y)$在平面开域$\Omega\subset\mathbb{R}^2$上连续，并且其偏导数$f_y(x,y)$在$\Omega$上连续，则$f(x,y)$在$\Omega$上关于$y$满足局部Lipschitz条件.

Proof.

证明留作习题. □

证明思想:

(I). 先证明解的局部存在唯一性，即对任意点$(x_0, y_0) \in \Omega$，存在$h > 0$，Cauchy 问题(*) $y' = f(x, y)$，$y(x_0) = y_0$，在开区间$(x_0 - h, x_0 + h)$ 上存在唯一.

(II). 再证明Cauchy 问题(*)解的整体唯一性．也就是说，若Cauchy 问题有两个解$\phi(x)$ 和$\psi(x)$，它们分别定义在包含点x_0 的开区间J_1 和J_2，则$\psi(x) \equiv \phi(x)$，$\forall x \in J_1 \cap J_2$.

第一步: 由上述引理知, $f(x,y)$ 在Ω 上关于y 满足局部Lipschitz 条件. 因此, 对任意给点$(x_0,y_0)\in\Omega$, 存在闭矩形

$$R_{a,b}(x_0,y_0):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\subset\Omega,$$

使得$f(x,y)$ 在其上满足Lipschitz 条件, 即存在一个正常数$L>0$, 使得

$$|f(x,y)-f(x,z)|\le L|y-z|,\ \forall(x,y),(x,z)\in R_{a,b}(x_0,y_0).$$

Lemma

设$0 < h \le a$，并记$J_h = [x_0 - h, x_0 + h]$，并设$y = \phi(x)$ 是闭区间J_h 上的连续函数，则$\phi(x)$ 满足积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds, \quad x \in J_h,$$

当且仅当$y = \phi(x)$ 是Cauchy 问题$y' = f(x, y)$，$y(x_0) = y_0$ 在开区间$J_h^0 = (x_0 - h, x_0 + h)$ 上的解.

证明已留作上次习题. 由Lemma 可知，$\phi(x)$ 是Cauchy 问题在区间J_h^0 的唯一解，当且仅当$\phi(x)$ 是积分方程在J_h 的唯一解.

第三步：利用压缩映像原理证明，适当选取$h>0$，可使积分方程在区间J_h 存在唯一解. 为此定义函数空间

$$C_b[J_h]=\Big\{y(\cdot)\in C[J_h], |y(x)-y_0|\le b, x\in J_h\Big\}.$$

在$C_b[J_h]$ 上定义距离ρ 如下：

$$\rho(y,z)=\max\Big\{|y(x)-z(x)|, x\in J_h\Big\}.$$

于是$(C_b[J_h],\rho)$ 成为一个完备的距离空间.

再记 $M = \max\left\{|f(x,y)|, (x,y) \in R_{a,b}(x_0,y_0)\right\}$, 则对任意连续函数 $y(\cdot) \in C_b[J_h]$,

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds\right| \leq M|x-x_0| \leq Mh, \quad x \in J_h.$$

于是若取 $h > 0$ 充分小, 可使得 $Mh \leq b$, 即 $h \leq \frac{b}{M}$. 令

$$Ty(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds, \quad x \in J_h,$$

则定义了一个映射 $T : C_b[J_h] \to C_b[J_h]$. 以下说明, 当 $h > 0$ 充分小时, 映射 T 是压缩的.

对于任意$y(\cdot)$, $z(\cdot)\in C_b[J_h]$,

$$|Ty(x)-Tz(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,y(s))-f(s,z(s))|ds\right|\leq$$

$$\leq L\left|\int_{x_0}^{x}|y(s)-z(s)|ds\right|\leq L\rho(y,z)|x-x_0|\leq Lh\rho(y,z).$$

由此得

$$\rho(Ty,Tz)\leq Lh\rho(y,z),\ \forall y(\cdot),z(\cdot)\in C_b[I_h]$$

因此若取$h>0$ 充分小, 使得$Lh<1$, 则映射T 是压缩映射.

综上分析，当$h > 0$ 满足

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\right\},$$

时，T 是压缩映射．(上式中$\frac{1}{2L}$ 可用$\frac{\alpha}{L}$ 代替，这里$\alpha \in (0,1)$)．因此T 在$C_b[J_h]$ 上有唯一一个不动点$\phi^*(x)$，即$\phi^*(x)$ 是积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds, \quad x \in J_h,$$

在J_h 上的唯一解．由此可知$\phi^*(x)$ 是Cauchy 问题$y' = f(x, y)$，$y(x_0) = y_0$ 在开区间$J_h^0 = (x_0 - h, x_0 + h)$ 上有唯一解．至此Cauchy 问题的解局部存在唯一性得证．

第四步: 最后证解的整体唯一性. 设Cauchy 问题 $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 有两个解$\phi(x)$ 和$\psi(x)$, 它们分别定义在包含点x_0 的开区间J_1 和J_2. 要证$\psi(x) \equiv \phi(x)$, $\forall x \in J_1 \cap J_2$. 反证. 若不然, 则存在点$x_1 \in J_1 \cap J_2$, 使得$\phi(x_1) \neq \psi(x_1)$. 不妨设$x_1 > x_0$, 且$\phi(x_1) > \psi(x_1)$. 定义

$$x_2 := \inf\{x^*, \phi(x) > \psi(x), \forall x \in (x^*, x_1]\},$$

则$\phi(x_2) = \psi(x_2)$, 且$\phi(x) > \psi(x)$, $\forall x \in (x_2, x_1)$. 于点(x_2, y_2) 处应用解的局部存在唯一性立刻导出矛盾. 整体唯一性得证.

至此 Picard 定理得证. $\square$

Definition

<u>定义</u>: 对Cauchy 问题$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, 称如下定义的函数序列$\{\phi_n(x)\}$ 为Picard 序列

$$\phi_0(x) := y_0, \quad \phi_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_n(s))ds,$$

称$\phi_n(x)$ 为第n 次Picard 迭代.

<u>注</u>: 根据压缩映射原理的证明可知, Picard 序列$\{\phi_n(x)\}$ 在区间J_h 上一致收敛于唯一解$\phi^*(x)$.

Corollary

第n 次Picard 迭代$\phi_n(x)$ 与解$\phi^*(x)$ 在区间J_h 上有如下误差估计

$$|\phi_n(x)-\phi^*(x)|\leq\frac{(Lh)^n}{1-Lh}Mh,\quad\forall x\in J_h.$$

Proof.

证：根据压缩映射原理的推论，立刻得到上述估计. □

L为f关于y的Lipschitz常数，M为R_{a,b}上 f 最大值，h为区间长度的一半(h ≤a, lx-x_0l ≤h, ly-y_0l ≤b) h=min{a,b/M}

Picard 迭代序列一致收敛性的直接证明

以下给出Picard迭代序列一致收敛性的直接证明，无需借助压缩映射原理．直接证明方法的优点：存在区间更大，误差估计更小．由之前引理知$f(x,y)$ 在开区域Ω 上满足局部Lipschitz 条件，即存在一个正常数$L>0$，使得

$$|f(x,y)-f(x,z)|\le L|y-z|,\ \forall (x,y),(x,z)\in R_{a,b}(x_0,y_0).$$

以下开始直接证明．也分若干步骤．

证明

第一步：构造Picard 迭代序列$\phi_n(x)$ 如下：$\phi_0(x) := y_0$，

$$\phi_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_n(s))ds, \quad x \in J_h$$

这里$J_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. 往下将证明，对于这样的$h > 0$，可使每个$\phi_n(x)$ 在J_h 上连续，且其图像Γ_{ϕ_n}:
$(x, \phi_n(x)), x \in J_h$ 完全包含在闭矩形$R_{a,b}(x_0, y_0)$ 之中. 显然$n = 0$ 时，结论成立. 考虑$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds$. 显然$\phi_1(x)$ 在J_h 上连续. 由于

$|\phi_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$,

故$\phi_1(x)$ 的图像Γ_{ϕ_1} 包含在$R_{a,b}(x_0, y_0)$ 之中. 假设结论对n 成立, 考虑$n+1$ 情形. 显然 $\phi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_n(s))ds$ 在J_h 上连续, 且$|\phi_{n+1}(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(s, \phi_n(s))ds| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$. 这表明图像$\Gamma_{\phi_{n+1}}$ 也包含在$R_{a,b}(x_0, y_0)$ 之中. 结论对$n+1$ 也成立.

第二步: 证明序列$\phi_n(x)$ 在闭区间J_h 上一致收敛. 为此只要证明函数项级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)]$$

在闭区间J_h 上一致收敛即可.

现作估计如下. 由等式 $\phi_1(x)-\phi_0(x)=\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds$ 可知 $|\phi_1(x)-\phi_0(x)|=|\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds|\le M|x-x_0|$. 再由等式 $\phi_2(x)-\phi_1(x)=\int_{x_0}^{x}[f(s,\phi_1)-f(s,\phi_0(s)]ds$ 知

$$|\phi_2(x)-\phi_1(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,\phi_1(x))-f(s,\phi_0(s))|ds\right|$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x}|\phi_1(s)-\phi_0(s)|ds\le L\right|\int_{x_0}^{x}M|s-x_0|ds\bigg|$$

$$\le\frac{1}{2}LM|x-x_0|^2,\quad x\in J_h.$$

由归纳法可证

$$|\phi_{n+1}(x)-\phi_n(x)|\leq\frac{ML^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

$$\leq\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1},\quad x\in J_h.$$

熟知常数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$$

收敛，故函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[\phi_{n+1}(x)-\phi_n(x)],$$

从而函数列$\phi_n(x)$ 在闭区间J_h 上一致收敛. 设$\phi_n(x)\rightrightarrows\phi^*(x)$.

第三步: 证函数$\phi^*(x)$ 是积分方程的解, 从而也是Cauchy 问题的解. 根据函数一致收敛的性质可知极限函数$\phi^*(x)$ 在闭区间J_h 上连续(连续性守恒定理). 再在定义式

$$\phi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_n(s))ds, \quad x \in J_h$$

两边取极限, 令$n \to +\infty$ 可得

$$\phi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi^*(s))ds, \quad x \in J_h.$$

这就证明了$\phi^*(x)$ 是积分方程的解, 从而也是Cauchy 问题$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的解.

第四步: 证明解的局部唯一性. 即要Cauchy 问题在开区间$J_h^0 = (x_0 - h, x_0 + h)$ 上的解唯一. 为此只要证上述积分方程在区间J_h 的解为即可. 假设$\phi(x)$ 和$\psi(x)$ 均为积分方程的解, 即

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds, \quad x \in J_h,$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds, \quad x \in J_h.$$

两式相减得

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s)]ds, \quad x \in J_h.$$

由此得

$$|\phi(x)-\psi(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s)|ds\right|$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |\phi(s))-\psi(s)|ds\right|, \quad x\in J_h.$$

回忆讲义Nov15wx里介绍了ODE 的基本引理，即Gronwall 不等式. 下面是Gronwall 不等式的另一个推广.

Lemma (Gronwall不等式的再推广)

设$u(x)$, $v(x)$ 在区间$J_h = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上非负连续，并且$u(x)$ 满足积分不等式

$$u(x) \leq c + \left| \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)ds \right|, \quad x \in J_h,$$

其中c 是一个非负常数，则

有时取C=0

$$u(x) \leq ce^{\left| \int_{x_0}^{x} v(s)ds \right|}, \; x \in J_h.$$

证明留作习题. 根据上述引理可知$|\phi(x) - \psi(x)| = 0$, 即$\phi(x) = \psi(x)$, $x \in J_h$. 这证明了解的局部唯一性.

Corollary

第n 次Picard 迭代逼近$\phi_n(x)$ 与解$\phi(x)$ 有如下误差估计

$$|\phi_n(x) - \phi^*(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}, \quad \forall x \in J_h.$$

比较：根据压缩映射原理所得Picard 迭代逼近$\phi_n(x)$ 的误差估计为

$$|\phi_n(x) - \phi^*(x)| \le \frac{(Lh)^n}{1 - Lh}Mh, \quad \forall x \in J_h,$$

这里$h \le \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{\alpha}{L}\}$.

证: 注意$\phi^*(x)$ 分别满足

$$\phi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi^*(s))ds, \quad x \in J_h,$$

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_{n-1}(s))ds, \quad x \in J_h.$$

两式相减得

$$\phi_n(x) - \phi^*(x) = \int_{x_0}^{x} [f(s, \phi_{n-1}(s)) - f(s, \phi^*(s))]ds,$$

$$|\phi_n(x) - \phi^*(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \phi_{n-1}(s)) - f(s, \phi^*(s))| ds \right|$$

$$\le L \left| \int_{x_0}^{x} |\phi_{n-1}(s) - \phi^*(s)| ds \right|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

简单计算得

$$|\phi_0(x) - \phi^*(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)ds\right| \le M|x - x_0|,$$

$$|\phi_1(x) - \phi^*(x)| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |\phi_0(s) - \phi^*(s)ds\right|$$

$$\le ML\left|\int_{x_0}^{x} |s - x_0|ds\right| \le \frac{ML}{2}|x - x_0|^2,\ x \in J_h.$$

由归纳法不难证明

$$|\phi_n(x) - \phi^*(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}, \quad \forall x \in J_h.$$

推论得证.

例子

Example

考虑Cauchy问题$y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0$. (i). 估计解的存在区间，尽可能的大; (ii). 求Picard 迭代逼近解$\phi_n(x)$，使得误差估计$\leq 5\%$.

解: 记$f(x, y) = x^2 + y^2$，则$f_y = 2y$. 函数$f(x, y)$ 及其偏导数$f_y(x, y)$ 在全平面$\mathbb{R}^2$ 上连续. 因此上述Cauchy 问题的解存在唯一. 记唯一解为$\phi(x)$. 对于任意正数$a, b > 0$，作闭矩形$R_{a,b} : |x| \leq a,\ |y| \leq b$，则根据Picard 定理知解$\phi(x)$ 至少在开区间$(-h, h)$ 上存在,

这里$h=h(a,b)=\min\{a,\frac{b}{M}\}$, M 为$f(x,y)=x^2+y^2$ 在闭矩形$R_{a,b}$ 上的绝对值的最大值. 易见$M=a^2+b^2$. 要使是解的存在区间尽可能的大, 即要取$a,b>0$, 使得$h(a,b)$ 尽可能的大.

Lemma

函数$h(a,b)=\min\{a,\frac{b}{a^2+b^2}\}$ 在开区域$a,b>0$ 上存在最大值, 其最大值为$\frac{1}{\sqrt{2}}$; 并且最大值在点$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处取得.

证明留作习题. 根据上述引理可知, 所考虑的Cauchy 问题的唯一解$\phi(x)$ 至少在开区间$(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 上存在. 问题(i)解答完毕.

考虑问题(ii). 回忆误差估计公式

$$|\phi_n(x)-\phi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}, \quad \forall x \in (-h, h),$$

这里$h=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$M=\max\{|f(x,y)|, |x|, |y| \le h\} = 1,$$

$$L=\max\{|f_y(x,y)|, |x|, |y| \le h\} = \sqrt{2}.$$

于是当$\forall x \in (-h, h)$ 时,

$$|\phi_n(x)-\phi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\sqrt{2}}.$$

例子续3

于是对任意$x \in [-h, h]$,

$$|\phi_1(x) - \phi(x)| \le \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$|\phi_2(x) - \phi(x)| \le \frac{1}{3!\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}};$$

$$|\phi_3(x) - \phi(x)| \le \frac{1}{4!\sqrt{2}} = \frac{1}{24\sqrt{2}} < \frac{5}{100}.$$

这说明第三次Picard 逼近解$\phi_3(x)$ 满足要求. 以下求之.

$$\phi_0(x) = 0;$$

$$\phi_1(x) = \int_0^x (s^2 + 0^2)ds = \frac{x^3}{3};$$

$$\phi_2(x) = \int_0^x \left[s^2 + \frac{s^3}{3}\right]ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

$$\phi_3(x) = \int_0^x \left[s^2 + \phi_2(s)^2\right]ds = \cdots$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59353}.$$

解答完毕.

Theorem

<u>定理</u>: 假设$f:\Omega\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 及其偏导数f_y 在开区域Ω上连续，则对于任意点$(x_0,y_0)\in\Omega$, (i) (存在性) Cauchy 问题$y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ 有解$y=\phi(x)$, $x\in J_1$, 其中J_1 是一个包含x_0 的开区间; (ii) (唯一性) 若问题还有其他解$y=\psi(x)$, $x\in J_2$, 则$\psi(x)\equiv\phi(x)$, $\forall x\in J_1\cap J_2$.

Proof.

证明基本同一维情形，只需要将绝对值的地方换成向量的范数即可. 细节略. □

解的延拓，标准假设

Definition

考虑方程组$y' = f(x, y)$，这里$f : \Omega \subseteq \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}^n$ 及其偏导数f_y 在开区域Ω 上连续．设$\phi_1(x)$ 是方程的一个解，其定义区间为J_1．称方程的另一个解$\phi_2(x)$，其定义区间为J_2，是解$\phi_1(x)$ 的一个延拓(continuation)，若(i) $J_1 \subsetneq J_2$，(ii) $\phi_2(x) \equiv \phi_1(x)$，$\forall x \in J_1$．

约定：以下为方便计，当映射$f : \Omega \subseteq \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}^n$ 及其偏导数f_y 假设在开区域Ω 上连续时，称$f(x, y)$ 在开区域Ω 上满足**标准假设**．

饱和解，解的最大存在区间

Definition

称$y=\phi(x)$, $x\in J$ 是方程$y'=f(x,y)$ 的一个饱和解，如果它不存在延拓．换言之，解$y=\phi(x)$ 的定义区间不能进一步扩大．此时也称区间J 是解$y=\phi(x)$ 的最大存在区间．

Example

例如$\phi(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in J_1=(-1,1)$ 是方程$y'=y^2$ 的一个解，但不是饱和解．因为$\phi(x)$ 的定义区间$(-1,1)$ 可以扩大．$\psi(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in J_2=(-\infty,1)$ 则是饱和解，它的定义区间不能再扩大了．

Theorem

定理: 考虑方程组$y' = f(x,y)$, 其中$f(x,y)$ 在开区域Ω 上满足标准假设, 则对$\forall(x_0, y_0) \in \Omega$, Cauchy 问题$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ 的饱和解存在唯一, 并且它的最大存在区间是开间.

Proof.

记$\mathcal{S}$ 为上述Cauchy 问题的解的全体，其定义域为开区间.

对$\phi(x) \in \mathcal{S}$，记其定义域为J_ϕ. 定义$(\alpha, \beta) := \bigcup_{\phi \in \mathcal{S}} (\alpha_\phi, \beta_\phi)$，或等价地定义

$$\beta := \sup\left\{\beta_\phi, \phi \in \mathcal{S}\right\}, \ \alpha := \inf\left\{\alpha_\phi, \phi \in \mathcal{S}\right\}.$$

在开区间(α, β) 上定义函数$\phi^*(x)$ 如下. 对任意$x \in (\alpha, \beta)$，必存在$\phi \in \mathcal{S}$，使得$x \in (\alpha_\phi, \beta_\phi)$，则定义$\phi^*(x) := \phi(x)$. 不难看出，这样定义的$\phi^*(x)$ 是Cauchy 问题的饱和解，且唯一. 定理得证. $\square$

饱和解特征

Theorem

考虑方程组$y' = f(x, y)$，其中$f(x, y)$ 在开区域Ω 上满足标准假设。设$y = \phi(x)$ 是一个饱和解，其最大存在区间为(α, β)，则对开域Ω 中的任意紧集$\Omega_1 \subset \Omega$，存在$\alpha_1, \beta_1 \in (\alpha, \beta)$，使得

$$(x, \phi(x)) \notin \Omega_1, \quad \forall x \in (\alpha, \alpha_1) \cup (\beta_1, \beta).$$

注1: 由于定理中的紧集Ω_1 可以任意给定，故饱和解曲线可以任意逼近开域Ω 的边界.

注2:如果将独立变量x 理解为时间变量的话，定理的意思是，对于开域Ω 中的任意紧集$\Omega_1 \subset \Omega$，在过去的某个时刻α_1 之前，以及在将来的某个时刻β_1 之后，饱和解曲线将逃离紧集Ω_1.

Lemma (1)

记号与假设同上述定理，则对任意$(x_0, y_0) \in \Omega$，存在$\delta, h > 0$，使得对任意$(\xi, \eta) \in \mathcal{R}_\delta(x_0, y_0)$，Cauchy 问题 $y' = f(x, y)$，$y(\xi) = \eta$ 的解$\phi(x, \xi, \eta)$ 至少在区间$(\xi - h, \xi + h)$ 上存在，这里 $R_\delta(x_0, y_0)$ 记闭矩形 $|x - x_0| \le \delta, |y - y_0| \le \delta$.

注：引理中的常数 $h > 0$ 与初值点 (ξ, η) 无关，Piacrd 存在唯一性定理中的h 与初始点有关.

约定：为了强调解关于初值的依赖关系在，往下将记Cauchy 问题 $y' = f(x, y)$，$y(\xi) = \eta$ 的饱和解为$\phi(x, \xi, \eta)$.

证：由于Ω 为开区域，点$(x_0, y_0) \in \Omega$ 是内点，故存在$\delta > 0$，使得闭矩形$R_{2\delta}(x_0, y_0)$: $|x - x_0| \leq 2\delta, |y - y_0| \leq 2\delta$ 包含在开域Ω 之中. 记$M := \max\{|f(x, y)|, (x, y) \in R_{2\delta}(x_0, y_0)\}$. 定义

$$h := \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\}.$$

现断言上述定义的$\delta > 0$ 和$h > 0$ 满足Lemma 1 中的要求，即对任意$(\xi, \eta) \in R_\delta(x_0, y_0)$，解$\phi(x, \xi, \eta)$ 至少在$(\xi - h, \xi + h)$ 上存在.

断言之证明：对任意$(\xi,\eta)\in R_\delta(x_0,y_0)$，

$$R_\delta(\xi,\eta)=\{(x,y),|x-\xi|\le\delta,|y-\eta|\le\delta\}\subset R_{2\delta}(x_0,y_0).$$

由Picard 定理知解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在$\Big(\xi-h(\xi,\eta),\xi+h(\xi,\eta)\Big)$上存在，这里

$$h(\xi,\eta):=\min\left\{\delta,\frac{\delta}{M(\xi,\eta)}\right\},$$

$$M(\xi,\eta):=\max\{|f(x,y)|,(x,y)\in R_\delta(\xi,\eta)\}.$$

显然$\mathsf{M}(\xi,\eta)\le \mathsf{M}$. 由此得到$\mathsf{h}(\xi,\eta)\ge \mathsf{h}$. 因此对任意$(\xi,\eta)$ $\in \mathsf{R}_\delta(\mathsf{x}_0,\mathsf{y}_0)$, 解$\phi(\mathsf{x},\xi,\eta)$ 至少在区间$(\xi-\mathsf{h},\xi+\mathsf{h})$ 上存在.

Lemma 1 得证. □

Lemma (2)

记号与假设同上述定理, 对任意给定的紧集$\Omega_1 \subset \Omega$, 存在$\mathbf{h} > \mathbf{0}$, 使得对任意$(\xi, \eta) \in \Omega_1$, 解$\phi(\mathbf{x}, \xi, \eta)$ 至少在$(\xi - \mathbf{h}, \xi + \mathbf{h})$ 上存在, 这里$\mathbf{h} > \mathbf{0}$ 与初始点(ξ, η) 无关, 仅与紧集Ω_1 有关.

证: 由Lemma 1 知对$\forall (x_0, y_0) \in \Omega_1$, 存在$\delta = \delta(x_0, y_0) > 0$, $h = h(x_0, y_0) > 0$, 使得对任意$(\xi, \eta) \in R_\delta(x_0, y_0)$, 解$\phi(x, \xi, \eta)$ 至少在$(\xi - h, \xi + h)$ 上存在. 记$R^0_\delta(x_0, y_0)$ 为$R_\delta(x_0, y_0)$ 的内部, 即$R^0_\delta(x_0, y_0)$: $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$. 显然开集族

$$\left\{ R^0_\delta(x_0, y_0), (x_0, y_0) \in \Omega_1 \right\}$$

是紧集Ω_1 的一个开覆盖. 根据有限覆盖定理可知Ω_1 存在有限的开覆盖

$$\Omega_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m} R^0_{\delta_j}(x_j, y_j),$$

令$h=\min\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$，则$h$ 满足Lemma 2 中的要求，这里$h_k=h(x_k,y_k)>0$ 记开矩形$R^0_{\delta_k}(x_k,y_k)$ 中的公共存在半径$h>0$. 因为对任意$(\xi,\eta)\in\Omega_1$，存在k，$1\le k\le m$，使得$(\xi,\eta)\in R^0_{\delta_k}(x_k,y_k)$，于是解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在$(\xi-h_k,\xi+h_k)$ 上存在，从而至少在$(\xi-h,\xi+h)$ 上存在. Lemma 2 得证. □

证: 只证β_1 的存在性. 关于α_1 的存在性完全类似.

情形一: $\beta = +\infty$. 由于紧集Ω_1 有界, 故存在$A > 0$, $B > 0$, 使得Ω_1 包含在开矩形$|x| < A$, $|y| < B$ 之中. 取$\beta_1 = A + 1$ 即可使得$(x, \phi(x)) \notin \Omega_1$, $\forall x \in (\beta_1, +\infty)$. 结论成立.

情形二: $\beta < +\infty$. 由Lemma 2 知对紧集Ω_1 存在$h > 0$, 使得对任意$(\xi, \eta) \in \Omega_1$, 解$\phi(x, \xi, \eta)$ 至少在$(\xi - h, \xi + h)$ 上存在. 取$\beta_1 = \beta - h$, 则可断言$(x, \phi(x)) \notin \Omega_1$, $\forall x \in (\beta_1, \beta)$.

反证. 若不然, 则存在$x_1 \in (\beta_1, \beta)$, 使得$(x_1, \phi(x_1)) \in \Omega_1$. 根据Lemma 2 知解$\phi(x, x_1, y_1)$, 至少在$(x_1 - h, x_1 + h)$ 上存在, 这里$y_1 = \phi(x_1)$. 定义

$$\phi^*(x) := \begin{cases} \phi(x), & x \in (\alpha, x_1) \\ \phi(x, x_1, y_1), & x \in [x_1, x_1 + h). \end{cases}$$

不难看出$\phi^*(x)$ 是解, 并且是解$\phi(x)$ 的一个延拓. 因为$\phi^*(x)$ 的定义区间为$(\alpha, x_1 + h) \supsetneq (\alpha, \beta)$, 此与$\phi(x)$ 为饱和解的假设矛盾. 定理得证. □

习题一. 考虑Cauchy 问题$y' = 1 + x + y$, $y(0) = 0$. (i) 求相应的Picard 迭代序列，初始函数可取为$\phi_0(x) = 0$; (ii) 求Picard 迭代序列的极限; (iii) 验证极限是Cauchy 问题的解.

习题二: 证明推广的Gronwall不等式. 设$u(x)$, $v(x)$ 在区间J_h 上的非负连续函数，这里$J_h = [x_0 - h, x_0 + h]$. 假设$u(x)$ 满足积分不等式

$$u(x) \le c + \left| \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)ds \right|, \quad x \in J_h,$$

其中c 是一个非负常数，则

$$u(x) \le ce^{\left| \int_{x_0}^{x} v(s)ds \right|}, \; x \in J_h.$$

作业续1

习题三：证明函数$h(a,b)=\min\{a,\frac{b}{a^2+b^2}\}$ 在a,b 平面的第一象限$a,b>0$存在最大值，其最大值为$\frac{1}{\sqrt{2}}$；并且最大值在点$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处取得. (注：果然存在一句话的证明. 这句话是课后一位同学告诉我的. 下次上课再转告这句话. 下一个题目同样会遇到求极大极小问题. 看看能否类似处理).

习题四：考虑Cauchy 问题$y'=x-y^2$, $y(0)=0$. (i). 估计解的存在区间，尽可能的大；(ii). 求Picard 迭代逼近解$\phi_n(x)$，使得误差估计$\leq 5\%$.

习题五：求解积分方程

$$y(x) = 1 + \int_0^x [p(s)y(s) + q(s)y(s)^2]ds,$$

这里$p(x)$, $q(x)$ 为实轴$\mathbb{R}$ 上的连续函数.

习题六：设函数$f(x, y)$ 在条域$\Omega := (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^1$ 上满足标准假设，$\phi(x)$ 是方程$y' = f(x, y)$ 的一个饱和解，其最大存在区间为$(a, b) \subset (\alpha, \beta)$. 证明

(i) 若$b < \beta$, 则$\lim_{x \to b^-} \phi(x) = +\infty$ 或$\lim_{x \to b^-} \phi(x) = -\infty$;

(ii) 若$a > \alpha$, 则$\lim_{x \to a^+} \phi(x) = +\infty$ 或$\lim_{x \to a^+} \phi(x) = -\infty$.

菲氏习题. 221(1)(3).