第六章（插值法）习题

1、设 x_j 为互异节点 $(j=0,1,\cdots,n)$，求证

- $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k,\ \ k=0,1,\cdots,n;$
- $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0,\ \ k=1,\cdots,n.$

其中 $l_j(x) = \dfrac{w_{n+1}(x)}{(x-x_j)w'_{n+1}(x_j)}$ 为 Lagrange 插值基函数，$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$。

2、设 $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$, 证明：

- $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \prod_{j=0}^{n}\left(\dfrac{1}{a-x_j}\right)$; (提示：用归纳法)
- $\dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{a-x_0} + \dfrac{x-x_0}{(a-x_0)(a-x_1)} + \cdots + \dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(a-x_0)\cdots(a-x_n)} + \dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(a-x_0)\cdots(a-x_n)(a-x)}$
  (提示：用Newton型插值公式).

3、设 $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$，求 $f[2^0, 2^1, \cdots, 2^7]$ 及 $f[2^0, 2^1, \cdots, 2^8]$.

4、求一个不高于 4 次的多项式 $p(x)$，满足 $p(0) = p'(0) = 0$，$p(1) = p'(1) = 1$，$p(2) = 1$.

5、在区间[0,2]上的三次样条函数 $S(x)$ 定义为

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3, & x \in [0,1], \\ 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

若要求 $S''(0) = S''(2) = 0$，试求出 b, c, d 的值。