# 数学分析教学讲义 第二章

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; 《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Sept. 2016

**数学分析讲义总目录**

# 第二章 实数与复数

## §2.1 数域的定义, 四则运算

**【数域的定义】**一个数域是一个三元组$(\mathbb{F},+,\cdot)$, 其中$\mathbb{F}$ 是一个至少含有两个元素的集合, "$+$"和"$\cdot$"是$\mathbb{F}$上的加法和乘法运算, 即是从$\mathbb{F}\times\mathbb{F}$ 到$\mathbb{F}$的两个映射:

$$(x,y)\mapsto x+y,\qquad (x,y)\mapsto x\cdot y=xy$$

它们具有下列九条性质$(\mathbf{P1})-(\mathbf{P9})$:

$(\mathbf{P1})$ 加法结合律: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$ 有$x+(y+z)=(x+y)+z$.

$(\mathbf{P2})$ 存在零元: 存在$0\in\mathbb{F}$, 称为零元, 满足$\forall x\in\mathbb{F}$ 有$x+0=0=0+x$.

$(\mathbf{P3})$ 每个元素有负元: $\forall x\in\mathbb{F}$ 存在$-x\in\mathbb{F}$ 使得$x+(-x)=0=(-x)+x$.

$(\mathbf{P4})$ 加法交换律: $\forall x,y\in\mathbb{F}$ 有$x+y=y+x$.

$(\mathbf{P5})$ 乘法结合律: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$ 有$x(yz)=(xy)z$.

$(\mathbf{P6})$ 存在单位元: 存在$1\in\mathbb{F}$, 称为单位元, 满足$\forall x\in\mathbb{F}$ 有$x\cdot 1=1\cdot x=x$.

$(\mathbf{P7})$ 每个非零元有逆元: $\forall x\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$ 存在$x^{-1}\in\mathbb{F}$ 使得$xx^{-1}=x^{-1}x=1$.

$(\mathbf{P8})$ 乘法交换律: $\forall x,y\in\mathbb{F}$ 有$xy=yx$.

$(\mathbf{P9})$ 加法与乘法的分配律: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$ 有$(x+y)z=xz+yz$.

当三元组$(\mathbb{F},+,\cdot)$ 是一个数域时, 就简记$\mathbb{F}=(\mathbb{F},+,\cdot)$ 并称$\mathbb{F}$是一个数域. □

**记号约定**:

$$x-y=x+(-y),\quad -y+x=(-y)+x.$$

对任意$x\in\mathbb{R}$ 和$n\in\mathbb{N}$, 记

$$x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}_{n},\qquad x^0=1\,.$$

对于两个实数$x,y$且$y\neq 0$, 我们写

$$\frac{1}{y}=1/y=y^{-1},\qquad \frac{x}{y}=x\frac{1}{y}=xy^{-1}.$$

称之为除法运算, 后者读作"$x$除以$y$"或"$y$分之$x$", 与中学所学一样.

**【命题(数域的基本性质)】**设$\mathbb{F}=(\mathbb{F},+,\cdot)$是一个数域, $x,y,z\in\mathbb{F}$. 则有

**(1)** 加法消去律: $x+y=x+z\Longrightarrow x=y$.

**(2)** 乘法消去律: $x\neq 0$且$xy=xz \implies y=z$.

**(3)** $xy=0 \iff x=0$ 或$y=0$. 特别有$1\neq 0$.

**(4)** $-(-x)=x,\ (-x)y=-xy,\ (-x)(-y)=xy$.

**(5)** 减法和乘法的分配律: $(x-y)z=xz-yz$.

【证】见陈书第一册pp 40-41. $\square$

我们在第一章已讲了自然数集$\mathbb{N}$, 整数集$\mathbb{Z}$, 并建立了有理数集$\mathbb{Q}$, 进而通过戴德金分割法建立的实数集$\mathbb{R}$. 容易验证有理数集$\mathbb{Q}$ 和实数集$\mathbb{R}$都是数域(具有相同得到加法和乘法运算). 于是我们也可以称$\mathbb{Q}$为**有理数域**, 称$\mathbb{R}$为**实数域**. 后面将说明复数集$\mathbb{C}=\{x+\mathrm{i}y\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ 也是数域.

### §2.2 实数的大小顺序

我们已在自然数集$\mathbb{N}$, 整数集$\mathbb{Z}$, 有理数集$\mathbb{Q}$中定义了元素的大小顺序“$<$”. 从实数集的建立过程中我们看到这个序在实数域$\mathbb{R}$ 中也是保持的, 即

$$x < y \iff \exists\, h > 0 \ \text{ s.t. } \quad x + h = y.$$

如前我们用$x \le y$ 表示$x < y$ 或$x = y$. 有时也常用$y > x$ 表示$x < y$, 等等.

**三歧性**在实数域$\mathbb{R}$中也成立, 即

对任意$x, y \in \mathbb{R}$, 三者$x < y$, $x = y$, $x > y$ 中有且只有一个出现.

因此实数域$\mathbb{R}$也是**全序集**.

**【命题(序“$<$”的基本性质)】**设$x, y, z \in \mathbb{R}$. 则有

**(1)** $x < y \iff x + z < y + z$.

**(2)** 设$z > 0$. 则$x < y \iff xz < yz$.

**(3)** 对任意$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 有$x^2 > 0$. 特别有 $1 > 0$.

**(4)** $x > 0 \implies 1/x > 0$.

**(5)** 定义$x$的绝对值$|x|$ 如下: $|x| = x$当$x \ge 0$ 时; $|x| = -x$ 当$x \le 0$ 时. 则有

$$|-x| = |x|, \qquad |x + y| \le |x| + |y|, \qquad \Big||x| - |y|\Big| \le |x - y|\,.$$

【证】见陈书第一册pp 42-44. □

## §2.3 实数域的完备性

**【定义(最大元、最小元)】**设 $A \subset \mathbb{R}$.

若存在 $x_0 \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \le x_0$ 则称 $x_0$ 为 $A$ 的最大元, 记作 $x_0 = \max A$.

若存在 $x_0 \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \ge x_0$ 则称 $x_0$ 为 $A$ 的最小元, 记作 $x_0 = \min A$. $\square$

**【注】**易见实数集合的最大元或最小元, 如果存在, 则是唯一的.

**【例】**令

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

则$A$ 没有最小元, 但有最大元: $\max A = 1$. $\square$

**【数集的上界, 下界; 有界集, 无界集】**设$A \subset \mathbb{R}$.

若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \le M$, 则称 $M$ 为 $A$ 的一个上界. 此时也称$A$ 有上界或上方有界.

因此$A$无上界或$A$上方无界就是指: 对任意$M \in \mathbb{R}$ 存在$x \in A$ 使得$x > M$.

若存在 $m \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \ge m$, 则称 $m$ 为 $A$ 的一个下界. 此时也称$A$ 有下界或下方有界.

因此$A$无下界或$A$下方无界就是指: 对任意$m \in \mathbb{R}$ 存在$x \in A$ 使得$x < m$.

若 $A$ 既有上界又有下界, 则称 $A$ 有界, 或称$A$为一个有界集.

若 $A$无上界或者无下界, 则称 $A$ 有界, 或称$A$是一个无界集.

规定: 空集是有界集. $\square$

**【有界区间】**对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a < b$, 定义以$a, b$ 为左右端点的有界开区间, 有界半开半闭区间, 有界闭区间为

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \le b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x \le b\}.$$

设$A \subset \mathbb{R}$. 易见 $A$ 有界当且仅当存在 $R > 0$ 使得 $|x| \le R$ 对所有 $x \in A$ 成立, 即 $A \subset [-R, R]$.

事实上设 $a,b$ 为 $A$ 的下界和上界, 则 $A \subset [a,b]$. 取 $R = \max\{|a|,|b|\}$. 则有 $A \subset [a,b] \subset [-|a|,|b|\,] \subset [-R,R]$.

**【数集的上确界的定义】**: 设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空.

若存在实数$\beta \in \mathbb{R}$ 使得 $\beta$ 是 $A$ 的一个上界, 并且 $\beta$ 作为上界不能再小, 也即对任意 $\alpha < \beta$, 都有$\alpha$不是$A$的上界, 即存在 $x_\alpha \in A$ 使得 $x_\alpha > \alpha$, 则称 $\beta$ 是 $A$ 的上确界或$A$的最小上界, 记作 $\beta = \sup A$. 此时也称 $A$ 有上确界.

换言之, 我们称实数$\beta$ 是$A$的上确界, 记作$\beta = \sup A$, 如果$\beta$ 满足

**(i)** $\forall x \in A$ 有$x \le \beta$.

**(ii)** $\forall \varepsilon > 0$, 存在$x_\varepsilon \in A$ 使得$x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$. $\Box$

**【数集的下确界的定义】**设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空.

若存在实数$\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha$ 是 $A$ 的一个下界, 并且 $\alpha$ 作为上界不能再大, 也即对任意 $\beta > \alpha$, 都有$\beta$不是$A$的下界, 即存在 $x_\beta \in A$ 使得 $x_\beta < \beta$, 则称 $\alpha$ 是 $A$ 的下确界或$A$的最大下界, 记作 $\alpha = \inf A$. 此时也称 $A$ 有下确界.

换言之, 我们称实数$\alpha$ 是$A$的下确界, 记作$\alpha = \inf A$, 如果$\alpha$ 满足

**(i)** $\forall x \in A$ 有$x \ge \alpha$.

**(ii)** $\forall \varepsilon > 0$, 存在$x_\varepsilon \in A$ 使得$x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$. $\Box$

**【注1】**由定义易见(当确界存在时)

$$\sup A = \min\{y \in \mathbb{R} \,|\, y\text{ 是}A\text{的一个上界}\},$$

$$\inf A = \max\{y \in \mathbb{R} \,|\, y\text{ 是}A\text{的一个下界}\}.$$

所以我们也称 $\sup A$ 为 $A$ 的最小上界, $\inf A$ 为 $A$ 的最大下界. 此外易见恒有

$$\inf A \le \sup A.$$

此外由最小元、最大元的唯一性可知若 $\sup A, \inf A$ 存在, 则必是唯一的.

**【注2】**易见

$A$ 有最大元 $\iff \sup A \in A$.　　此时有 $\max A = \sup A$;

$A$ 有最小元 $\iff \inf A \in X$.　　此时有 $\min A = \inf A$.

**【例】**(1) 集合$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq (n^2+1)/4\} = \{1, 2, 3\}$ 有最大最小元：

$$\sup A = \max A = 3, \quad \inf A = \min A = 1.$$

(2) 区间 $[0, 1)$ 有最小元、有上确界, 但无最大元, 即

$$\inf[0, 1) = \min[0, 1) = 0, \qquad \sup[0, 1) = 1 \notin [0, 1).$$

事实上对任意 $x \in [0, 1)$ 都有 $x < 1$, 故 1 是 $[0, 1)$ 的一个上界. 又对任意 $\alpha < 1$, 取 $x_\alpha = \frac{1}{2}(\max\{1/2, \alpha\} + 1)$ 则 $x_\alpha \in [0, 1)$ 且 $x_\alpha > \alpha$. 故 1 是 $[0, 1)$ 的上确界. □

**【实数域$\mathbb{R}$的完备性公理】**$\mathbb{R}$中任何非空的有上界的集合都有上确界. □

**【注】**实数域的完备性公理也称为连续性公理, 因为它是几何直线的无空隙, 无间断性质的反映. 为了理解连续性公理, 我们取一条水平直线（这意味着线性序和连续性), 在其上确定一点记做 $O$, 让它与实数 0 对应. 则 $O$ 的右侧的每一点 $X$ 到 $O$ 的距离为一个正实数 $x$. 反之对每个正实数 $x$, 让直线上的动点$P$ 从 $O$ 出发向右侧连续滑动至很远, 则由直线的连续性, 其间必然经过一点 $X$ 使 $X$ 到 $O$ 的距离刚好等于 $x$.

让我们再从反面来理解上确界形式的实数公理所反映的实数的“无空隙”性质. 考虑有理数的子集$A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$. 易见$A$ 非空且有上界(例如$0 \in A$ 且2 是$A$的一个上界). 我们在下一节将证明方程$x^2 = 2$的正根$\sqrt{2}$ 存在. 不难证明$\sup A = \sqrt{2}$ (详见下一节). 但我们在教学讲义第一章里已证明$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (即$\sqrt{2}$不是有理数), 这就说明有理数域$\mathbb{Q}$ 是有空隙的, $\sqrt{2}$就落在中这些空隙中. 这同时说明实数域的完备性公理对于有理数域不成立.

完备性很重要, 许多事实的成立是以它为保证的, 例如方程的根的存在性, 数列的收敛性, 某些无限多个集合的交集的非空性, 等等都是因为实数域是完备的. □

为了便于分析, 我们引进

**【集合的反射与平移】**对任意集合 $E \subset \mathbb{R}$ 和实数 $h \in \mathbb{R}$, 定义$E$ 的反射$-E$ 和平移$E+h$如下:

$$-E = \{-x \,|\, x \in E\} = \{x \mid -x \in E\},$$

$$E+h = \{x+h \,|\, x \in E\}, \quad E-h = E+(-h).$$

**【完备性公理的推论】**$\mathbb{R}$中任何非空的有下界的集合都有下确界.

【证】设$E \subset \mathbb{R}$ 非空且有下界. 设$m$为$E$的一个下界, 令$A=-E$. 则$A$非空且$M=-m$ 是$A$的一个上界. 因此$A$非空且有上界. 据实数域的完备性公理知上确界$\beta=\sup A$ 存在(注意这首先意味着$\beta$是一个实数!). 令$\alpha=-\beta$. 来证明$\alpha$ 就是$E$的下确界.

(i) 对任意$x \in E$ 有$-x \in A$ 因此$-x \le \beta$, 即$x \ge -\beta = \alpha$.

(ii) 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$b_\varepsilon \in A$ 使得$b_\varepsilon > \beta - \varepsilon$, 也即$-b_\varepsilon < -\beta + \varepsilon = \alpha + \varepsilon$. 令$x_\varepsilon = -b_\varepsilon$, 则$x_\varepsilon \in E$ 且$x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

据下确界的定义知$\alpha$ 是$E$的下确界, 即$\alpha = \inf E$. 所以$E$有下确界. $\Box$

由集合的反射集的定义易见

$E$有上(下)界$\Longleftrightarrow$ $-E$ 有下(上)界; $E$无上(下)界$\Longleftrightarrow$ $-E$ 无下(上)界.

而从上面的证明中还易见有上下确界的反号关系(只要其中有一个确界存在):

$$\inf E = -\sup(-E) \qquad \text{即} \qquad \sup(-E) = -\inf E.$$

**【常用命题】**整数集$\mathbb{Z}$中的非空的有上(下)界的子集必有最大(小)元.

【证】设$E \subset \mathbb{Z}$ 非空且有上界. 由实数完备性公理知$\beta = \sup E$ 存在. 来证明$\beta \in E$ 从而$\beta$ 是$E$的最大元, 即$\beta = \max E$. 由上确界的定义知存在$n_1 \in E$ 使得$\beta - 1/2 < n_1 \le \beta$. 断言: $n_1 = \beta$. 否则$n_1 < \beta$, 则再由上确界的定义知存在$n_2 \in E$ 使得$n_1 < n_2 \le \beta$. 于是得到不等式

$$\beta - 1/2 < n_1 < n_2 \le \beta.$$

因$n_1, n_2$ 是整数, 这就导出矛盾：$1 \le n_2 - n_1 \le 1/2 < 1$. 因此必有$n_1 = \beta$. 所以$\beta = n_1 \in E$ 是$E$的最大元.

同理可证若$E \subset \mathbb{Z}$ 非空且有下界, 则$E$有最小元. $\Box$

由实数完备性公理我们还可立即得到非常重要且基本的阿基米德原理:

**【阿基米德(Archimedes)原理】**自然数集$\mathbb{N}$ 无上界.

即对任意实数$M > 0$, 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$n > M$.

【证】反证法, 假设$\mathbb{N}$ 有上界. 则由上一命题知$\mathbb{N}$有最大元. 设$m = \max \mathbb{N}$为$\mathbb{N}$的最大元, 则由于$m + 1 \in \mathbb{N}$, 故应有$m + 1 \le \max \mathbb{N} = m < m + 1$矛盾. 这矛盾证明了$\mathbb{N}$无上界. $\square$

**【无界区间】**由阿基米德原理可知整数集$\mathbb{Z}$从而实数集$\mathbb{R}$都既无上界也无下界. 设$a \in \mathbb{R}$, 定义以$a$为一个端点的无界开区间, 无界闭区间分别为

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\},$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \le a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \ge a\}.$$

我们也将$\mathbb{R}$ 写作 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

**【由阿基米德原理导出的常用性质】**

**(1)** 对任意$\varepsilon > 0$ 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$1/n < \varepsilon$.

**(2)** ($\varepsilon$-**摄动法**) 设$a, b \in \mathbb{R}$, $C > 0, \delta > 0$. 则有

$$a \le b \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \delta) \quad \text{都有} \quad a < b + C\varepsilon\,,$$

$$a = b \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \delta) \quad \text{都有} \quad |a - b| < C\varepsilon\,.$$

【证】(1) 由阿基米德原理, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$n > 1/\varepsilon$, 此即$1/n < \varepsilon$.

(2) 只需证方向"$\Longleftarrow$": 先证第一蕴含关系. 反证法, 假设$a > b$, 则$b - a > 0$. 取

$$\varepsilon = \min\Big\{\frac{b-a}{C}, \frac{\delta}{2}\Big\}$$

则$0 < \varepsilon < \delta$ 且$C\varepsilon \le b - a$, 从而$b \ge a + C\varepsilon$, 这与假设条件矛盾. 因此必有$a \le b$.

对于第二个蕴含关系, 将第一个结果应用于$|a - b|$ 和$0$ 可知$|a - b| \le 0$. 因此$|a - b| = 0$ 即$a = b$. $\square$

## §2.4. 实数的一些表示, 分数幂

**1° 实数的整数部分和小数部分及基本性质**

对每个实数$x\in\mathbb{R}$, 称不超过$x$的最大整数为$x$的整数部分, 记作$[x]$, 也即

$$[x]:=\max\{k\in\mathbb{Z}\,|\,k\le x\}\,.$$

相应地, 称$x-[x]$ 为$x$的小数部分.

**【例】** $[1.2]=1,\quad [10\pi]=31,\quad [-0.3]=-1,\quad [-18.7]=-19.$

**【$[x]$, $x-[x]$ 的基本性质 】**

(1) $x-1<[x]\le x$ i.e. $[x]\le x<[x]+1$. 因此$0\le x-[x]<1$.

(2) $x\le y\Longrightarrow [x]\le [y]\,.$

(3) $[x+1]=[x]+1\,,\,[x+k]=[x]+k\,,k\in\mathbb{Z}\,.$

(4) $x+k-[x+k]=x-[x],\quad k\in\mathbb{Z}.$ 也即$x\mapsto x-[x]$ 是周期函数且周期为1.

【证】留为练习. 注意使用不等式: $[x]>[y]\Longrightarrow [x]\ge [y]+1>y$. 此外利用性质: 若整数$p,q$ 满足$p,q\in(x-1,x]$, 则$p=q$. $\square$

**2° 阿基米德原理(另一形式)** 对于任意给定的实数$h>0$, 每个实数$x$必属于唯一的区间$[kh,(k+1)h)$ 其中$k\in\mathbb{Z}$, 意即

$$\forall\,x\in\mathbb{R}\quad \exists!\,k\in\mathbb{Z}\quad \text{s.t.}\quad kh\le x<(k+1)h\,.$$

事实上$k=[x/h]$.

【证】设$x\in\mathbb{R}$, $k=[x/h]$. 则由实数的整数部分的性质有$k\le x/h<k+1$, 即$kh\le x<(k+1)h$. 来证$k$的唯一性: 假设还有$m\in\mathbb{Z}$使得$mh\le x<(m+1)h$. 则借助公共元素$x$传递, 分别得有$mh<(k+1)h, kh<(m+1)h$. 也即分别有$m<k+1,k<m+1$. 这蕴含$m\le k,k\le m$. 所以$m=k$. $\square$

**3° 整数的带余除法** 设$m,n\in\mathbb{N}$ 且$m>n$. 则存在唯一的$k\in\mathbb{N}$ 和唯一的$r\in\{0,1,...,n-1\}$ 使得$m=kn+r$.

【证】考虑$k=[\frac{m}{n}]$. 易见$k\geq 1$ 且$k\leq\frac{m}{n}<k+1$, 即$nk\leq m<kn+n$. 令$r=m-kn$. 则$r\in\{0,1,...,n-1\}$ 且$m=kn+r$. 而由阿基米德原理知$k$是唯一的, 因此$r$也是唯一的. □

**4° 实数的带余除法** 对任意实数$x>y>0$, 存在唯一的$k\in\mathbb{N}$ 和唯一的$r\in[0,y)$, 使得$x=ky+r$.

【证】取$k=[\frac{x}{y}]$. 则$k\geq 1$ 且$k\leq\frac{x}{y}<k+1$. 即$ky\leq x<(k+1)y$. 于是$0\leq r:=x-ky<y$ 且$x=ky+r$. 而由阿基米德原理知$k$是唯一的, 因此$r$也是唯一的. □

**5° 有理数集$\mathbb{Q}$在实数集$\mathbb{R}$中稠密**

意即对于任意$x\in\mathbb{R}$ 和任意$\varepsilon>0$, 区间$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$中都由有理数. 也即等价地, 对任意实数$a<b$, 都存在有理数$\frac{p}{q}$ 使得$a<\frac{p}{q}<b$.

【证】设$a<b$. 由阿基米德原理, 存在$q\in\mathbb{N}$ 使得$q>\frac{1}{b-a}$, 即$a+\frac{1}{q}<b$. 而由另一形式的阿基米德原理, 存在$k\in\mathbb{Z}$ 使得$\frac{k}{q}\leq a<\frac{k+1}{q}$. 令$p=k+1$, 则有$\frac{p-1}{q}\leq a<\frac{p}{q}$. 于是有

$$a<\frac{p}{q}=\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}\leq a+\frac{1}{q}<b\,.$$

所以每个区间$(a,b)$内都有有理数. □

**【作业题】**证明无理数集$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$也在$\mathbb{R}$中稠密, 即每个区间$(a,b)$内都有无理数.

[利用有理数集$\mathbb{Q}$的稠密性, $\sqrt{2}$是无理数, 以及$\sqrt{2}/n$ 可以任意小(阿基米德原理). ]

**6° 实数的开方** 设$a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N},n\geq 2$. 考察方程$x^n=a$, $x\in\mathbb{R}$.

(1) 若$n$为偶数, 则当$a<0$时, 方程$x^n=a$在$x\in\mathbb{R}$ 无解(即方程无实根);

当$a>0$时, 方程$x^n=a$ 恰有两个实根, 一个为正根, 一个为负根, 分别记作$a^{1/n}$, $-a^{1/n}$.

当$a=0$时, $x^n=0$只有一个实根; 且根仍为0, 即$0^{1/n}=0$.

(2) 若$n$为奇数, 则对任意实数$a$, 方程$x^n=a$ 存在唯一实根, 记作$a^{1/n}$. 此外有

$$a<0\Longrightarrow a^{1/n}<0;\quad a>0\Longrightarrow a^{1/n}>0;\quad 0^{1/n}=0.$$

(3) 因此对任意$n\in\mathbb{N}$ 和$a>0$, 方程$x^n=a$ 存在唯一的正实根$a^{1/n}$.

【证】不难看出,上述诸性质中的本质部分是关于正根$a^{1/n}\,(a>0)$的存在唯一性, 其它性质都可由此导出.

例如当$n=2k+1$为奇数时, 易见函数$x\mapsto x^{2k+1}$在$\mathbb{R}$上是单射(参见下面的证明), 因此方程$x^{2k+1}=a$只能有一个根. 当$a>0$时, $a^{\frac{1}{2k+1}}$便是该方程的唯一根; 而当$a<0$时, 容易验证$-(-a)^{\frac{1}{2k+1}}$ 是方程$x^{2k+1}=a$的唯一根. 最后由根的定义和唯一性还得到关系

$$-(-a)^{\frac{1}{2k+1}}=a^{\frac{1}{2k+1}}.$$

下面证明方程 $x^n=a$ 的正根$a^{1/n}$的存在唯一性, 其中$a>0$.

首先证明正根的唯一性. 事实上函数$x\mapsto x^n$ 在$[0,+\infty)$严格单调增加: 若$0\le x_1<x_2$, 则有$x_1^n<x_2^n$. 所以方程$x^n=a$只能有一个正根.

下证正根的存在性. 取定一实数 $K>\max\{a,1/a\}\,(\ge 1)$. 则有

$$(1/K)^n\le 1/K<a<K\le K^n\,.$$

作集合

$$A=\{x>0\mid x^n\le a\}.$$

则有$1/K\in A$ 因而$A$非空, 并由$a<K^n$ 易见$K$ 是 $A$ 的一个上界. 记

$$b=\sup A.$$

来证明 $b^n=a$. 首先易见 $b\,(\ge 1/K)>0$. 令$\delta=\min\{b,1\}$. 由上确界的定义, 对任意$\varepsilon\in(0,\delta)$, 存在$x_\varepsilon\in A$ 使得$x_\varepsilon>b-\varepsilon\ (>0)$. 因$x_\varepsilon^n\le a$ 故$(b-\varepsilon)^n<x_\varepsilon^n\le a$. 另一方面我们有$b+\varepsilon\notin A$, 因此$(b+\varepsilon)^n>a$. 于是得到不等式组:

$$(b-\varepsilon)^n<a<(b+\varepsilon)^n,\quad (b-\varepsilon)^n<b^n<(b+\varepsilon)^n.$$

由此和二项式展开式以及$0<\varepsilon<\delta\le 1$有

$$|a-b^n|<(b+\varepsilon)^n-(b-\varepsilon)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}\varepsilon^k(1-(-1)^k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}\varepsilon^k(1-(-1)^k)\le 2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}\varepsilon<2(1+b)^n\varepsilon.$$

因$\varepsilon\in(0,\delta)$ 可以任意小, 故必有$|a-b^n|=0$ 即$b^n=a$. 所以方程$x^n=a$的正根$b=a^{1/n}$存在. $\square$

【**例**】对于集合$A=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,x^2<2\}$ 有

$$\sup A=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}.$$

因此$\mathbb{Q}$中的非空且有上界的集合$A$在$\mathbb{Q}$中没有上确界. 这说明有理数域$\mathbb{Q}$ 有"空隙", 不完备.

【证】显然$0\in A$且2是$A$的一个上界. 因此$A$非空且有上界. 下证$\sup A=\sqrt{2}$. 对任意$x\in A$ 有$|x|^2=x^2<2=(\sqrt{2})^2$ 即$|x|<\sqrt{2}$ 从而有$x<\sqrt{2}$. 这表明$\sqrt{2}$是$A$的一个上界. 在教学讲义第一章中我们已证明了$\sqrt{2}$ 不是有理数. 对任意$\varepsilon>0$, 不妨设$\varepsilon<\sqrt{2}$ (否则以$\varepsilon_1=\min\{\varepsilon,\sqrt{2}/2\}$ 代替$\varepsilon$), 则由有理数的稠密性, 存在$\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ 使得$\sqrt{2}-\varepsilon<\frac{p}{q}<\sqrt{2}$. 这蕴含$\frac{p}{q}\in A$. 因此据上确界的定义知$\sqrt{2}=\sup A$. 最后为证明$A$在$\mathbb{Q}$中没有上确界, 我们用反证法. 假设$A$在$\mathbb{Q}$中有上确界, 则由确界的定义可知这蕴含$A$在$\mathbb{R}$中有上确界且$\sup A\in\mathbb{Q}$. 但这与$\sup A=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$矛盾. 所以$A$在$\mathbb{Q}$中没有上确界. $\square$

**7° 关于正实数的分数幂$a^{\frac{m}{n}}$的运算性质**

设$a>0$, $n\in\mathbb{N}$. 定义

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\qquad a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}},\qquad a^0=1.$$

则对任意$m\in\mathbb{Z}$有

$$(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}=:a^{\frac{m}{n}}.$$

进而一般地对任意$(m,n),(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ 有

$$a^{\frac{m_1}{n_1}}a^{\frac{m_2}{n_2}}=a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}},\qquad (a^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}}=a^{\frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2}}.$$

【证】首先用归纳法易证对任意$\alpha>0,\beta>0$ 和$p,q\in\mathbb{Z}$ 有

$$(\alpha\beta)^p=\alpha^p\beta^p,\quad (\alpha^p)^q=\alpha^{pq}.$$

设$n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}$. 记$x_0=a^{\frac{1}{n}}$, $b_0=(a^m)^{\frac{1}{n}}$. 则有

$$(x_0^m)^n=(x_0^n)^m=a^m=b_0^n\,.$$

由正根的唯一性知$x_0^m=b_0$ 即$(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}$. 由这一等式有

$$(a^{\frac{m_1}{n_1}}a^{\frac{m_2}{n_2}})^{n_1n_2}=(a^{\frac{m_1}{n_1}})^{n_1n_2}(a^{\frac{m_2}{n_2}})^{n_1n_2}=a^{m_1n_2}a^{m_2n_1}=a^{m_1n_2+m_2n_1}$$

从而由正根的唯一性有

$$a^{\frac{m_1}{n_1}}a^{\frac{m_2}{n_2}}=a^{\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}}=a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}.$$

为证最后等式, 先证明对任意$\alpha>0$, $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ 有

$$(\alpha^{\frac{1}{n_1}})^{\frac{1}{n_2}}=\alpha^{\frac{1}{n_1n_2}}.$$

事实上

$$((\alpha^{\frac{1}{n_1}})^{\frac{1}{n_2}})^{n_1n_2}=(((\alpha^{\frac{1}{n_1}})^{\frac{1}{n_2}})^{n_2})^{n_1}=((\alpha^{\frac{1}{n_1}})^{1})^{n_1}=(\alpha^{\frac{1}{n_1}})^{n_1}=\alpha$$

因此由正根的唯一性知$(\alpha^{\frac{1}{n_1}})^{\frac{1}{n_2}}=\alpha^{\frac{1}{n_1n_2}}$.

利用这一等式和上面结果我们计算

$$(a^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}}=(((a^{m_1})^{\frac{1}{n_1}})^{\frac{1}{n_2}})^{m_2}=((a^{m_1})^{\frac{1}{n_1n_2}})^{m_2}=((a^{\frac{1}{n_1n_2}})^{m_1})^{m_2}=(a^{\frac{1}{n_1n_2}})^{m_1m_2}=a^{\frac{m_1m_2}{n_1n_2}}.$$

□

## §2.5 数列的极限, 与实数集完备性有关的基本定理

本节较长. 为了集中讲授实数域的几个重要且常用的原理, 需要提前介绍序列和极限概念.

**【序列的定义】**. 设 $X$ 是任意集合. 则任何映射 $f:\mathbb{N}\to X$, $n\mapsto f(n)$ 都叫做一个序列. 习惯上记这一序列为

$$a_n=f(n)\,(n\in\mathbb{N})\quad\text{或}\quad\{a_n\}\quad\text{或}\quad\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\quad\text{或}\quad\{a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{或 } x_n=f(n)\,(n\in\mathbb{N})\quad\text{或}\quad\{x_n\}\quad\text{或}\quad\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\quad\text{或}\quad\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\quad\text{等等.}$$

同时也称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个序列, 并称 $a_n$ 是此序列的第 $n$ 项. $\square$

由定义可见两个序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 相等（记作 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$）当且仅当

$$a_n=b_n,\quad n=1,2,3,\dots.$$

注意对于一个可数无限集 $E$, 我们通常也将它写成序列的形式：$E=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 但它与序列的区别是：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为集合, 不在乎 $x_n$ 出现的顺序, 也即改变 $x_n$ 的排列顺序并不改变集合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 本身. 但若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 被当做序列, 则改变 $x_n$ 的排列顺序就必定改变原序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 也即产生了不同的序列.

因此对于序列, 第一重要的是通项 $x_n$ 的下标 $n$ 而不是 $x_n$ 本身. 此外, 对于序列而言, 其通项 $x_n$ 不要求互不相同.

当所有 $x_n$ 为实数 (有理数, 复数, etc）时也称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个实数列 (有理数列, 复数列, etc）.

**【例】**数列 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 的通项只取值 $-1,1$, 因此若把这个序列当做集合, 则此集合只有两个元素, 但与任何序列一样, 序列 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由**无限多项**组成的. 此外注意, 由序列的定义可知作为序列有 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}\neq\{(-1)^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

**【子序列的定义(very important)】**设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个序列. 若无限多个自然数 $n_k\in\mathbb{N},k=1,2,3,...$ 满足

$$n_1<n_2<n_3<\cdots.$$

也即 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是严格递增的自然数数列, 则称 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是原序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子序列或子列.

换言之, 子序列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是从原序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中沿着下标增加的方向依次抽取无限多项构成的序列, 也即被抽取的项之间的先后顺序与它们在原序列中的先后顺序相同. $\Box$

例如 $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_{3^k}\}_{k=1}^{\infty}$ 都是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列.

**【有界数列与无界数列】** 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个实数列.

称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 如果存在 $b \in \mathbb{R}$ 使不等式 $a_n \le b$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立 (此时也称 $b$ 为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个上界). 否则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无上界.

称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界, 如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 使不等式 $a_n \ge a$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立（此时也称 $a$ 为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个下界）. 否则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无下界.

称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界如果 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 既有上界又有下界. 否则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界. $\Box$

由不等式关系

$$a \le x \le b \Longrightarrow |x| \le \max\{|a|, |b|\}; \qquad |x| \le M \Longleftrightarrow -M \le x \le M$$

易见 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界当且仅当 $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界.

**【单调数列】** 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个实数列. 若

$$a_n \le a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调增加的数列.

若

$$a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为严格单调增加的数列.

同理可定义单调减少的数列和严格单调减少的数列. $\Box$

既然有了阿基米德原理(即下面的“$n \to \infty$”有意义), 我们可以定义数列的极限.

**【数列的极限】** 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个实数列.

**(1)** 若存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n \ge N \ \text{都有} \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个收敛数列并且收敛于$A$. 此事记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{或} \quad a_n \to A \quad (n \to \infty).$$

进一步, 若 $A=0$, 即 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 0, 则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个无穷小数列.

**(2)** 若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\forall M>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n\geq N \ \text{都有} \quad a_n > M$$

则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于正无穷$+\infty$, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{或} \quad a_n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\forall M>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n\geq N \ \text{都有} \quad a_n < -M$$

则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于负无穷$-\infty$, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{或} \quad a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)\,.$$

**(3)** 若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$满足(1)或(2), 则称$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限, 而对情形(1), 即收敛情形, 也称$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有**有限的**极限; 对情形(2), 称$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$有**无限的**极限. 此外若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限值是$A$, 则也称$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于$A$.

若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$不收敛, 则称$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$发散. □

注意

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

故若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无穷小数列, 则 $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是无穷小数列. 反之亦然.

由此定义和

$$\Big||a_n - A| - 0\Big| = |a_n - A|$$

易见 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $A \Longleftrightarrow \{|a_n - A|\}_{n=1}^{\infty}$ 为无穷小数列. 也即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0.$$

【**例**】数列 $\{1/n\}_{n=1}^{\infty},\{-3/n\}_{n=1}^{\infty}$ 都是无穷小数列. 这是阿基米德原理的另一说法.

【**命题1(极限的唯一性)**】若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于$A$ 且趋于$B$, 则 $A=B$.

【证】先设$A\in\mathbb{R}$ (即$A$ 不是$\pm\infty$). 易见此时也有$B\in\mathbb{R}$. 我们将利用不等式

$$|A-B|\le|A-a_n|+|a_n-B|.$$

任取 $\varepsilon>0$. 由假设, 对 $\varepsilon/2>0$, 存在 $N'\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N'$ 时 $|a_n-A|<\varepsilon/2$. 同时存在 $N''\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N''$ 时 $|a_n-A|<\varepsilon/2$. 取 $n\ge\max\{N',N''\}$. 则同时有 $|a_n-A|<\varepsilon/2,|a_n-B|<\varepsilon/2$. 于是由上面不等式得到 $|A-B|<\varepsilon$. 因 $|A-B|$ 与 $\varepsilon$ 无关, 故由 $\varepsilon$ 的任意性即得 $|A-B|=0$ (否则, $|A-B|>0$, 则事先取 $\varepsilon=|A-B|$ 即得矛盾 $|A-B|<|A-B|$). 所以 $A=B$.

其次设例如$A=+\infty$. 此时利用反证法易证$B\notin\mathbb{R}$ (否则$A$也是有限数) 且$B\neq-\infty$ (否则将导致$A<0$) 从而只能有$B=+\infty$. 所以仍有$A=B$. □

【**命题2(极限与有限项无关)**】数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是否有极限与该数列中的前有限项无关, 也即对任意 $m\in\mathbb{N}$,

$$\text{数列 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 有极限} \iff \text{数列 } \{a_n\}_{n=m+1}^{\infty} (=\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}\ ) \text{ 有极限.}$$

此外当 两边之一成立时, 两者的极限相同.

【证】任取$m\in\mathbb{N}$. 先考虑收敛的情形. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 令$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 由定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N$ 时 $|a_n-A|<\varepsilon$. 取 $N'=N+m$. 则当 $n\ge N'$ 时有 $|a_n-A|<\varepsilon$. 也即当 $n\ge N$ 时 $|a_{n+m}-A|<\varepsilon$. 因此数列 $\{a_n\}_{n=m+1}^{\infty}=\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$ 也收敛且收敛于 $A$. 同理可证若数列 $\{a_n\}_{n=m+1}^{\infty}$ 收敛且收敛于 $A$, 则 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也收敛且也收敛于 $A$.

其次如上可证$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于$+\infty$ (或$=-\infty$) 当且仅当$\{a_n\}_{n=m+1}^{\infty}$趋于$+\infty$ (或$=-\infty$).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无极限当且仅当$\{a_n\}_{n=m+1}^{\infty}$ 无极限. □

【注】极限符号 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 中的记号"$n\to\infty$"源于阿基米德性质: 自然数无上界. 此外记号"$n\to\infty$"还表明: $a_n$ 的任何前有限项 $a_1,a_2,...,a_m$ 在 $n\to\infty$ 的过程中最终都不起作用. 明白这一点, 对于理解极限的实质及其运算都很有帮助. 当然在具体数

值计算时, 总要在某一项停止, 但这与极限理论本身没有矛盾.

**【命题3(子序列的极限)】** 有极限的数列的任何子列也有极限且其极限与原数列的极限相同.

详细：设数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限. 则它的任意子列$\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$也有极限且

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

【证】以收敛的情形为例进行证明. 由子列的定义有

$$1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots \Longrightarrow n_k \ge k, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

令 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge N$ 时 $|a_n - A| < \varepsilon$. 于是当 $k \ge N$ 时有 $n_k \ge k \ge N$ 从而有 $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. 所以 $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.
$\square$

**【命题4(极限的保序性)】**.

(1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一常值数列, 即 $a_n = A, n = 1, 2, 3, ....$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

(2) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为两个收敛的数列. 若存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall\, n \ge n_0 \quad 有 \quad a_n \le b_n\,.$$

则

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

特别有：

若 $A \le b_n, n = 1, 2, 3, ...,$ 则 $A \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

若 $a_n \le B, n = 1, 2, 3, ...,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le B$.

(3) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 皆收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge n_0$ 时恒有 $a_n < b_n$.

【证】(1) 是显然的.

(2). 令 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 对 $\varepsilon/2 > 0$, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge N_1$ 时 $A - \varepsilon/2 < a_n$; 当 $n \ge N_2$ 时 $b_n < B + \varepsilon/2$. 取 $N = \max\{N_1, N_2, n_0\}$. 则

当 $n \geq N$ 时有

$$A - \varepsilon/2 \leq a_n \leq b_n \leq B + \varepsilon/2$$

从而得到

$$A < B + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

因 $A, B$ 与 $\varepsilon$ 无关且 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 这就得出 $A \leq B$.

(3) 令 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 据假设有 $A < B$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}(B - A) > 0$. 如上, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N_1$ 时 $a_n < A + \varepsilon$; 当 $n \geq N_2$ 时 $B - \varepsilon < b_n$. 令 $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$. 则有

$$\text{当} n \geq n_0 \text{ 时 } \ a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < b_n. \qquad \square$$

**【命题5(两边夹(Sandwich)原理)】**. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足：存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{有} \quad a_n \leq c_n \leq b_n$$

且极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \quad \text{存在.}$$

则中间数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也有极限且

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A.$$

【证】先设$A$有限, 即$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N_1$ 时 $A - \varepsilon < a_n$; 当 $n \geq N_2$ 时 $b_n < A + \varepsilon$. 令 $N = \max\{N_1, N_2, n_0\}$. 则由假设知当 $n \geq N$ 时

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon.$$

因此

$$|c_n - A| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

这证明了 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

其次设$A = +\infty$. 则由$c_n \geq a_n$ 和$a_n \to +\infty$ 易见$c_n \to +\infty\,(n \to \infty)$. 详细论证: 对任意$M > 0$, 因$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 故存在$N \in \mathbb{N}$ 使得当$n \geq N$ 时$a_n > M$. 于是当$n \geq N$ 时$c_n \geq a_n > M$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

最后对于$A=-\infty$, 由$c_n\le b_n$ 和$b_n\to-\infty$易见$c_n\to-\infty\,(n\to\infty)$. $\Box$

【**约定**】若实数子集$A\subset\mathbb{R}$ 无上界, 则定义其上确界为正无穷$+\infty$, 即

$$A\text{ 无上界 }\iff \sup A=+\infty.$$

若实数子集$A\subset\mathbb{R}$ 无下界, 则定义其下确界为负无穷$-\infty$, 即

$$A\text{ 无下界 }\iff \inf A=-\infty.$$

根据这一约定, 任何实数子集$A$都有上下确界, 只是这确界可能有限也可能无限. 当且仅当$A$有上(下)界时, $A$有有限的上(下)确界. $\Box$

【例】

$$\inf\{x^3+2x^2+3\,|\,x\in\mathbb{R}\}=-\infty,\quad \sup\{x^3+2x^2+3\,|\,x\in\mathbb{R}\}=+\infty,$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}n^{(-1)^n}=0,\qquad \sup_{n\in\mathbb{N}}n^{(-1)^n}=+\infty\,.$$

【**定理1(单调数列恒有极限)**】设$\{a_n\}_{n=1}^\infty$为一个单调数列. 则有

**(a) 单调有界收敛定理:**

若 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 单调增加且有上界, 则$\{a_n\}_{n=1}^\infty$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup\limits_{n\ge1}a_n\in\mathbb{R}$.

若 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 单调减少且有下界, 则$\{a_n\}_{n=1}^\infty$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf\limits_{n\ge1}a_n\in\mathbb{R}$.

**(b) 单调无界必趋于无穷:**

若 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 单调增加且无上界, 则$\{a_n\}_{n=1}^\infty$有极限且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup\limits_{n\ge1}a_n=+\infty$.

若 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 单调减少且无下界, 则$\{a_n\}_{n=1}^\infty$有极限且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf\limits_{n\ge1}a_n=-\infty$.

【证】设 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 单调增加. 先设$\{a_n\}_{n=1}^\infty$有上界. 此时由实数完备公理知$\{a_n\}_{n=1}^\infty$有有限的上确界, 即$A=\sup\limits_{n\ge1}a_n$存在属于$\mathbb{R}$. 据上确界的定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $a_N$ 使得 $A-\varepsilon<a_N\le A$. 再由 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 单调增加和 $A$ 为 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 的上确界可知

$$\text{当}n\ge N\text{ 时}\quad A-\varepsilon<a_N\le a_n\le A$$

从而当 $n \geq N$ 时有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

其次设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$无上界. 则由数学约定知$\sup\limits_{n\geq 1} a_n = +\infty$. 而由$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$无上界知对任意$M \in \mathbb{R}$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得$a_N > M$. 于是由 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调增加可知

$$当 n \geq N \text{ 时} \quad a_n \geq a_N > M$$

这证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

同理可证单调减少的情形. 或者如下证明：设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少. 则 $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调增加. 于是由单增情形的结果知 $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限. 由此易知 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\sup_{n\geq 1}(-a_n) = \inf_{n\geq 1} a_n. \qquad \square$$

**【例】**设

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

则$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$都是单调增加的. 看它们是否有上界: 对任意$n \in \mathbb{N}$, 计算

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1} < 2.$$

这说明$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$有上界. 因$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$单增, 故$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛.

对于第二个, 有

$$b_{2n} - b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

由此得到

$$b_{2^n} - b_1 = \sum_{k=1}^{n} (b_{2^k} - b_{2^{k-1}}) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

从而有

$$b_{2^n} \geq b_1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

这蕴含$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$无上界. 因$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$单增, 故$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. $\square$

以下几个重要命题是上述单调有界收敛定理的相继应用.

**【定理2(闭区间套原理)】**设 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一串下降的有界闭区间套：即 $[a_n, b_n]$ 满足

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

也即

$$-\infty < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n < b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1 < +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

此外假设区间长 $b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$. 那么诸区间 $[a_n, b_n]$ 必有唯一公共点, 即交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$ 是单点集.

【证】由

$$a_1 \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le b_1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

知$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是单调增加和单调减少的有界数列. 令 $a = \sup\limits_{n\ge1} a_n$, $b = \inf\limits_{n\ge1} b_n$. 则由 $a_n < b_n$、单调有界收敛定理、和极限保序原理知

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

再由上下确界的定义、极限保序原理、以及 $b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$ 得

$$0 \le b - a \le b_n - a_n, \qquad 0 \le b - a \le \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

所以 $a = b$. 记 $c = a = b$, 则再由上下确界的定义得

$$a_n \le c \le b_n \quad \text{i.e.} \quad c \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

所以 $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 假如还有 $c' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 则从 $a_n \le c, c' \le b_n$ 得到 $|c - c'| \le b_n - a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ 因此

$$|c - c'| \le \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

所以 $|c - c'| = 0$ 即 $c' = c$. 这证明了 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$ 是单点集. $\square$

**作业题1**. 设 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一串**严格**下降的有界区间套. 即

$$(a_n, b_n) \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

假设区间长 $b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$. 证明所有开区间 $(a_n, b_n)$ 有唯一公共点, 即交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) = \{c\}$ 是单点集.

**作业题2(陈书习题2.3.1)**. 设 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一串下降的有界闭区间套. 令$a=\sup\limits_{n\ge1}a_n$, $b=\inf\limits_{n\ge1}b_n$. 证明$a\le b$ 且$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=[a,b]$.

**【定理3(Weierstrass 极限点原理)】**(最常用). 每个有界数列都有收敛子列.

详细: 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为$\mathbb{R}$中的有界数列. 则存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_0\in\mathbb{R}$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$.

**注:** 这样的$x_0$ 称为数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的一个极限点.

【证】由$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有界知存在有界闭区间$[a,b]$ 使得$x_n\in[a,b], n=1,2,3,\dots$.

将$[a,b]$ 二等分$[a,b]=[a,(a+b)/2]\cup[(a+b)/2,b]$. 则这两个子区中至少有一个, 记作$[a_1,b_1]$, 它含有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的无限多项. 取定一项$x_{n_1}\in[a_1,b_1]$.

再将$[a_1,b_1]$ 二等分$[a_1,b_1]=[a_1,(a_1+b_1)/2]\cup[(a_1+b_1)/2,b_1]$. 则这两个子区中至少有一个, 记作$[a_2,b_2]$, 它含有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的无限多项. 取自然数$n_2>n_1$使得$x_{n_2}\in[a_2,b_2]$. 假设进行至第$m$步得到闭子区间$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_{n_m},b_{n_m}]$, 和$x_{n_1},x_{n_2},...,x_{n_m}$ 满足$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}, x_{n_k}\in[a_k,b_k], k=1,2,...,m$ 以及$n_1<n_2<\cdots<n_m$. 则再将$[a_m,b_m]$ 二等分$[a_m,b_m]=[a_m,(a_m+b_m)/2]\cup[(a_m+b_m)/2,b_m]$, 这两个子区中至少有一个, 记作$[a_{m+1},b_{m+1}]$, 它含有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的无限多项. 因此可取到自然数$n_{m+1}>n_m$使得$x_{n_{m+1}}\in[a_{m+1},b_{m+1}]$. 据操作程序归纳法原理, 以上手续对每个自然数$m$ 均可施行. 于是我们得到一串下降的闭区间套

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots$$

和$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $(n_1<n_2<n_3<\cdots)$, 满足

$$x_{n_k}\in[a_k,b_k],\quad b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k},\quad k=1,2,3,\dots.$$

由闭区间套原理, 诸区间 $[a_k,b_k]$ 有公共点: 存在$x_0\in\mathbb{R}$使得$a_k\le x_0\le b_k, k=1,2,3,\dots$. 由$x_0,x_{n_k}\in[a_k,b_k]$ 我们有

$$|x_{n_k}-x_0|\le b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}\to0\quad(k\to\infty)$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$. 这就证明了$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列. □

**【定义 (Cauchy 序列)】**我们称一个数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足下列 Cauchy 条件:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ 使得不等式 $|x_n-x_m|<\varepsilon$ 对所有 $m,n\ge N$ 成立. □

【**Cauchy 列的作用**】如果你能猜出数列$x_n$收敛于某数$A$,那么就设法证$|x_n-A|$趋于零好了. 但通常没有这个运气. 这时Cauchy 告诉你, 你只要检查这个数列是否为Cauchy列即可, 而这是可以做到的因为Cauchy列只用到该数列自身的信息, 不用其他信息. 这是Cauchy列的本质. 事实上, 数学上是反过来用Cauchy 列的收敛来确定极限值的, 而不必用个别技巧猜出极限值.... 这个观点很重要, 也是任何分析学的重要基础之一. 而当证明了数列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$收敛后, 其极限便可通过计算得到, 例如当$n>>1$时, $x_n$ 便近似等于该数列的极限.

【**定理4(Cauchy 收敛准则, $\mathbb{R}$完备性的另一说法)**】

$$数列\ \{x_n\}_{n=1}^\infty\ 收敛\ \Longleftrightarrow\ \{x_n\}_{n=1}^\infty\ 是\ \text{Cauchy}\ 列.$$

【证】"$\Longrightarrow$": 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛. 记 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 对 $\varepsilon/2>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得不等式 $|x_n-A|<\varepsilon/2$ 对所有 $n\ge N$ 成立. 由此可知对所有 $m,n\in\mathbb{N}$ 满足 $m,n\ge N$ 我们有

$$|x_m-x_n|\le|x_m-A|+|A-x_n|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

因此 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列.

"$\Longleftarrow$": 假设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个 Cauchy 列. 先证明 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有界. 取 $\varepsilon=1$. 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_m-x_n|<1$ 对所有 $m,n\ge N$ 成立. 特别取 $m=N$ 得到 $|x_N-x_n|<1$ 对所有 $n\ge N$ 成立. 这蕴含 $|x_n|<|x_N|+1$ 对一切 $n\ge N$ 成立. 令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,...,|x_N|,|x_N|+1\}$. 则有

$$|x_n|\le M,\quad n=1,2,3,\dots.$$

这证明了 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有界. 据 Weierstrass 极限点原理, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有一个收敛子列, 记之为 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. 令 $A=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$. 来证明 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛且收敛于 $A$.
回忆子列的定义, 我们有

$$n_k\ge k,\quad k=1,2,3,\dots.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 对 $\varepsilon/2>0$ 存在 $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ 使得

$$|x_{n_k}-A|<\varepsilon/2\quad\forall\,k\ge N_1;\quad |x_m-x_n|<\varepsilon/2\quad\forall\,m,n\ge N_2.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 则当 $k\ge N$ 时有 $n_k\ge k\ge N$ 从而有

$$|x_k-A|\le|x_k-x_{n_k}|+|x_{n_k}-A|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

据收敛的定义知 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛. 如将记号 $k$ 换成 $n$ 即知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. $\square$

**【命题6】**(判断数列为 Cauchy 列的常用方法 1).

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 是一个Cauchy 列} \iff \lim_{n\to\infty}\sup_{p\in\mathbb{N}}|x_{n+p}-x_n|=0.$$

【证】留作练习(也见下面). $\square$

**【命题7】**(判断数列为 Cauchy 列的常用方法 2).

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列 $\iff$ 存在非负数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 使得

$$|x_{n+p}-x_n|\le\alpha_n \qquad \forall\, n,p\in\mathbb{N}.$$

【证】"$\Longrightarrow$"：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列. 令$\alpha_n=\sup\limits_{p\in\mathbb{N}}|x_{n+p}-x_n|$. 则显然有

$$|x_{n+p}-x_n|\le\alpha_n \qquad \forall\, n,p\in\mathbb{N}.$$

下面只需证明$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 对任意$\varepsilon>0$, 对$\varepsilon/2>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$使得

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon/2 \qquad \forall\, n\ge N\ \ \forall\, p\in\mathbb{N}.$$

这表明对每个$n\ge N$, 数列$\{|x_{n+p}-x_n|\}_{p=1}^{\infty}$有上界$\varepsilon/2$. 于是有

$$\alpha_n=\sup_{p\in\mathbb{N}}|x_{n+p}-x_n|\le\varepsilon/2<\varepsilon \qquad \forall\, n\ge N.$$

这证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

"$\Longleftarrow$"：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足上述条件. 由 $\alpha_n\to 0\,(n\to\infty)$ 有：对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N$ 时 $\alpha_n<\varepsilon$. 于是对任意 $n,m\ge N$, 不妨设 $m\ge n$. 若 $m=n$ 则 $|x_m-x_n|=0$; 若 $m>n$, 则令 $p=m-n$. 据假设条件得

$$|x_m-x_n|=|x_{n+p}-x_n|\le\alpha_n<\varepsilon.$$

这证明了

$$|x_m-x_n|<\varepsilon \qquad \forall\, m,n\ge N.$$

因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. $\square$

【**注**】Cauchy条件一般**不能**减弱成

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0 \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

看下面例子:

【**例**】考虑数列

$$x_n = \cos(\pi\sqrt{n}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

利用不等式$|\cos\alpha - \cos\beta| \le |\alpha - \beta|$ ( 其证明在后面章节给出) 有: 对任意$p \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+p} - x_n| \le \pi|\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{\pi p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

这说明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足条件$(*)$. 但$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 显然不收敛, 因为它有一个不收敛的子列$\{x_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$：

$$x_{k^2} = \cos(\pi k) = (-1)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

这说明Cauchy条件一般不能减弱成$(*)$. $\quad\Box$

虽然上面例子说明Cauchy条件一般不能减弱为$(*)$, 但是当$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的相邻两项的距离$|x_{n+1} - x_n|$能以较快的速度趋于零时, 则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可以收敛的.

【**例**】假设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$必收敛.

【**证**】由假设对任意$n, p \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}
&|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_n| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\le \frac{1}{(n+p-1)^2} + \frac{1}{(n+p-2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) \\
&= \frac{2}{n} - \frac{2}{n+p-1} < \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

也即我们证明了

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{2}{n} \qquad \forall\, n, p \in \mathbb{N}.$$

因此由上面命题7即知数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛. $\square$

**【定理5(有限覆盖原理)】**设有界闭区间 $[a,b]$ 被一族非空开区间 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 所覆盖, 即

$$[a,b]\subset\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha,\qquad I_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha).$$

则在$\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$中存在有限个开区间 $I_{\alpha_1},I_{\alpha_2},...,I_{\alpha_N}$ 使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{N}I_{\alpha_k}.$$

【证】**证法一**: 利用闭区间套原理. 我们将采用反证法，其间我们被自然地引领到闭区间套原理和归纳操作程序. 假设命题不真. 将 $[a,b]$ 做如下对分

$$[a,b]=[a,\frac{a+b}{2}]\cup[\frac{a+b}{2},b].$$

则这两个子区间至少有一个不能被 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有限覆盖, 否则, 即两个都能被有限覆盖, 设 $[a,\frac{a+b}{2}]\subset\bigcup_{i=1}^{p}I_{\beta_i}$, $[\frac{a+b}{2},b]\subset\bigcup_{j=1}^{q}I_{\gamma_j}$ $(p,q\in\mathbb{N})$. 则

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{p}I_{\beta_i}\cup\bigcup_{j=1}^{q}I_{\gamma_j}.$$

将 $I_{\beta_1},I_{\beta_2},...,I_{\beta_p},I_{\gamma_1},I_{\gamma_2},...,I_{\gamma_q}$ 重新编号（去掉重复的）成为 $I_{\alpha_1},I_{\alpha_2},...,I_{\alpha_N}$ 则得

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{p}I_{\beta_i}\cup\bigcup_{j=1}^{q}I_{\gamma_j}=\bigcup_{k=1}^{N}I_{\alpha_k}.$$

这矛盾于对 $[a,b]$ 的反证法假设.

将两个对分区间 $[a,\frac{a+b}{2}],[\frac{a+b}{2},b]$ 中不能被有限覆盖的那个区间记作 $[a_1,b_1]$. 若两者都不能被有限覆盖, 则随意取其中一个记作 $[a_1,b_1]$. 我们有 $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$. 因 $[a_1,b_1]$ 不能被 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有限覆盖, 故如上分析可知, $[a_1,b_1]$ 的两个对分区间中有一个, 记作 $[a_2,b_2]$, 它不能被 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有限覆盖. 假设已得到闭子区间

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n],\quad b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k},\quad k=1,2,...,n$$

满足每个 $[a_k,b_k]$ 均不能被 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有限覆盖. 则再将 $[a_n,b_n]$ 对分, 如上分析, 两个对分区间中有一个, 记作 $[a_{n+1},b_{n+1}]$, 不能被 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有限覆盖. 此时有 $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$.

根据操作程序的归纳法原理, 以上手续对所有自然数均可施行. 于是我们得到闭区间套

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset,\quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n},\quad n=1,2,3,...$$

满足每个 $[a_n,b_n]$ 均不能被 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有限覆盖.

另一方面由闭区间套原理, 存在 (唯一的)$c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 即

$$a_n\le c\le b_n,\quad n=1,2,3,\dots.$$

因 $c\in[a,b]$ 故存在 $I_{\alpha_0}=(a_{\alpha_0},b_{\alpha_0})$ 使得 $c\in I_\alpha$, 即

$$a_{\alpha_0}<c<b_{\alpha_0}.$$

因 $\frac{b-a}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$, 故可取一个 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{b-a}{2^N}<\min\{c-a_{\alpha_0},\,b_{\alpha_0}-c\}.$$

我们于是得到

$$a_{\alpha_0}<c-\frac{b-a}{2^N}\le b_N-\frac{b-a}{2^N}=a_N<b_N=a_N+\frac{b-a}{2^N}\le c+\frac{b-a}{2^N}<b_{\alpha_0}.$$

因而

$$[a_N,b_N]\subset(a_{\alpha_0},\,b_{\alpha_0})=I_{\alpha_0}$$

即 $[a_N,b_N]$ 可以被一个开区间 $I_{\alpha_0}$ 覆盖. 这矛盾于每个 $[a_n,b_n]$ 都不能被 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有限覆盖. 这个矛盾证明了命题成立.

**证法二(接近直观)**: 先证明存在$\varepsilon>0$ 它具有如下性质:

$$\forall\, x\in[a,b]\quad\exists\,\alpha=\alpha_x\in A\quad\text{s.t.}\quad(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset I_\alpha.$$

这个数$\varepsilon$ 称为$\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖$[a,b]$ 的Lebesgue 数.

暂且承认这个Lebesgue 数$\varepsilon$的存在. 令$N=[(b-a)/\varepsilon]+1$ 并将区间$[a,b]$做$N$ 等分:

$$[a,b]=\bigcup_{k=1}^{N}[c_{k-1},c_k],\quad c_k=a+\frac{k}{N}(b-a),\quad k=0,1,...,N.$$

据Lebesgue 数$\varepsilon$ 的性质知存在$\alpha_k\in A$使得

$$(c_k-\varepsilon,c_k+\varepsilon)\subset I_{\alpha_k},\quad k=1,2,...,N.$$

而由$c_k - c_{k-1} = (b-a)/N < \varepsilon$ 易见$[c_{k-1}, c_k] \subset (c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon)$. 因此

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{N}[c_{k-1}, c_k] \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_{\alpha_k}.$$

这表明$[a,b]$可被$\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$中的有限个成员$I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, ..., I_{\alpha_N}$ 覆盖.

下证Lebesgue 数$\varepsilon$的存在性. 采用反证法. 假设Lebesgue 数$\varepsilon$ 不存在, 那么对每个$n \in \mathbb{N}$, $1/n$ 都不是Lebesgue 数, 也即存在$x_n \in [a,b]$ 使得对每个$\alpha \in A$都有$(x_n - 1/n, x_n + 1/n) \not\subset I_\alpha$. 另一方面由$a \le x_n \le b\,(n = 1,2,3,...)$ 和Weierstrass 极限点原理知存在收敛子列$x_{n_k} \to x_0\,(k\to\infty)$. 而由极限的保号性知$a \le x_0 \le b$, 即$x_0 \in [a,b]$ (**这正是闭区间的作用!**). 因$[a,b] \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$, 故存在$\alpha_0 \in A$ 使得$x_0 \in I_{\alpha_0} := (\alpha, \beta)$. 取$0 < \delta < \min\{x_0 - \alpha, \beta - x_0\}$, 则有$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I_{\alpha_0}$. 而由$1/n_k \to 0$ 可知$x_{n_k} \pm 1/n_k \to x_0\,(k\to\infty)$. 因此存在$k >> 1$ 使得

$$x_0 - \delta < x_{n_k} - 1/n_k, \quad x_{n_k} + 1/n_k < x_0 + \delta.$$

于是有$(x_{n_k} - 1/n_k, x_{n_k} + 1/n_k) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I_{\alpha_0}$. 但这与每个$(x_n - 1/n, x_n + 1/n)$都不含于任何$I_\alpha$ 中矛盾. 这矛盾证明了Lebesgue 数$\varepsilon$的存在性. 命题遂证毕. □

**【定义(邻域, 聚点, 孤立点)】**设$E \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) 若$\varepsilon > 0$, 则称区间$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$为$x_0$的一个$\varepsilon$-邻域.

(ii) 我们称$x_0$是$E$的一个聚点, 如果对任何 $\varepsilon > 0$, $x_0$的$\varepsilon$-邻域$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 中都含有 $E$ 中的无限多个元素, 即 $E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$总是无限集. [注意, 这里$x_0$可能属于$E$也可能不属于$E$.]

(iii) 若$x_0 \in E$ 且$x_0$ 不是$E$的聚点, 则称$x_0$是$E$的一个孤立点. □

**对聚点的直观认识**: 集合 $E$ 的一个聚点, 简单说就是粘在集合 $E$上的点, 它可能属于$E$ 也可能不属于$E$, 使得这个点几乎是零距离地吸住了 $E$ 的无限多个点.

聚点概念是重要概念, 以后将多次使用. 为了进一步理解, 下面给出聚点概念的等价刻画: 利用$\varepsilon > 0$的任意性, 我们能够把聚点原义中的“无限”等价地转化成“非空”.

**【命题8(聚点和孤立点的等价定义)】**设$E \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. 则有:

**(1)** $x_0$ 是$E$的一个聚点

$\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, $x_0$的$\varepsilon$-邻域$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$内总有$E$中的异于$x_0$的点

$\Longleftrightarrow$ 存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, 其中$x_n$ **互不相同**, 使得$x_n \to x_0\,(n \to \infty)$.

**(2)** $x_0$ 是$E$的一个孤立点 $\Longleftrightarrow$ $x_0 \in E$且存在$\varepsilon > 0$ 使得$E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0\}$ (单点集).

【证】只需证**(1)**, 为此只需证明上述三个性质的转圈蕴含关系成立.

假设第一个性质成立, 即设$x_0$ 是$E$的一个聚点. 则由聚点的定义可知第二个性质成立，即对任意 $\varepsilon > 0$, $x_0$的$\varepsilon$-邻域$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$内总有$E$ 中的异于$x_0$的点.

假设第二个性质成立. 令

$$\breve{U}_E^{\varepsilon}(x_0) := \{x \in E \mid 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

对$\varepsilon_1 = 1$, 取$x_1 \in \breve{U}_E^{\varepsilon_1}(x_0)$,

对$\varepsilon_2 = \min\{1/2, |x_1 - x_0|/2\} > 0$, 取$x_2 \in \breve{U}_E^{\varepsilon_2}(x_0)$,

对$\varepsilon_3 = \min\{1/3, |x_2 - x_0|/2\} > 0$, 取$x_3 \in \breve{U}_E^{\varepsilon_3}(x_0)$,

如此操作我们得到序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 满足

$$|x_1 - x_0| > |x_2 - x_0| > |x_3 - x_0| > \cdots; \qquad |x_n - x_0| < 1/n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

于是$x_n$ 互不相同且收敛于$x_0$. 这证明了第二个性质蕴含第三个性质.

假设第三个性质成立, 即存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, 其中$x_n$ **互不相同**, 使得$x_n \to x_0\,(n \to \infty)$. 则对任意$\varepsilon > 0$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对所有$n \geq N$ 有$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. 这蕴含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 是无限集, 从而$E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$是无限集. 因此$x_0$ 是$E$的一个聚点. $\square$

【**例**】(1). 设 $a < b$. 则闭区间$[a, b]$ 中每一点都是 $[a, b]$ 的聚点. 开区间$(a, b)$ 中每一点和两个端点$a, b$都是 $(a, b)$ 的聚点, 但两个端点 $a, b$不属于$(a, b)$.

(2). 设 $E = \{1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...\}$. 则$E$中每一点都是$E$的孤立点. 但$E$有一个聚点, 它就是0, 而且$E$只有这一个聚点. 当然 $0 \notin E$.

【**定理6(Weierastrass 聚点原理)**】$\mathbb{R}$ 中任何有界无限集都至少有一个聚点.

【证】方法一 (转向点列)：设 $E \subset \mathbb{R}$ 为一有界无限集. 据已证命题: 任何无限集都含有一个可数无限子集. 故可取 $E$ 的一个无限可数集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中$x_n$ **互不相同**. 把 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 看成数列, 据 Weierastrass 极限点原理, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. 令 $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. 则 $x_0 \in \mathbb{R}$. 由收敛的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得不等式 $|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon$ 对一切 $k \geq N$ 成立. 也即

$$x_{n_k} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad k = N, N+1, N+2, \dots .$$

于是

$$E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \supset \{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty}.$$

但 $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty}$ 是无限集, 故 $E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 是无限集. 再据 $\varepsilon > 0$ 的任意性即知 $x_0$ 是 $E$ 的一个聚点.

方法二 (闭区间套): 因 $E$ 有界, 故存在有界闭区间 $[a, b]$ 使得 $E \subset [a, b]$. 做对分：

$$[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b].$$

得

$$E = E \cap [a, \frac{a+b}{2}] \cup E \cap [\frac{a+b}{2}, b].$$

因 $E$ 是无限集, 故 $E \cap [a, \frac{a+b}{2}]$, $E \cap [\frac{a+b}{2}, b]$ 至少有一个是无限集. 记 $[a_1, b_1]$ 是这两个对分区间中的一个, 使得 $E \cap [a_1, b_1]$ 是无限集. 此时有 $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

再将 $[a_1, b_1]$ 对分

$$[a_1, b_1] = [a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}] \cup [\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1]$$

则有

$$E \cap [a_1, b_1] = E \cap [a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}] \cup E \cap [\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1].$$

因 $E \cap [a_1, b_1]$ 是无限集, 故 $E \cap [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $E \cap [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ 中至少有一个是无限集. 记 $[a_2, b_2]$ 是这两个对分区间中的一个, 使得 $E \cap [a_2, b_2]$ 是无限集. 此时有 $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$.

假设已得到闭子区间

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n], \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad k = 1, 2, ..., n$$

满足每个 $E \cap [a_k, b_k]$ 均为无限集. 则再将 $[a_n, b_n]$ 对分,

$$[a_n, b_n] = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \cup [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

则有

$$E\cap[a_n,b_n]=E\cap[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]\cup E\cap[\frac{a_n+b_n}{2},b_n].$$

因 $E\cap[a_n,b_n]$ 是无限集, 故 $E\cap[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$, $E\cap[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$ 中至少有一个是无限集. 记 $[a_{n+1},b_{n+1}]$ 是这两个对分区间中的一个, 使得 $E\cap[a_{n+1},b_{n+1}]$ 是无限集. 此时有 $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$.

根据操作程序的归纳法原理, 以上续对所有自然数均可施行. 于是我们得到闭区间套

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset,\quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n},\quad n=1,2,3,...$$

满足每个 $[a_n,b_n]$ 均使 $E\cap[a_n,b_n]$ 为无限集.

由闭区间套原理, 存在唯一的 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 即

$$a_n\le x_0\le b_n,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N$ 充分大使得 $\frac{b-a}{2^N}<\varepsilon$. 则有

$$x_0-\varepsilon<b_N-\frac{b-a}{2^N}=a_N<b_N=a_N+\frac{b-a}{2^N}<x_0+\varepsilon.$$

这表明

$$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\supset[a_N,b_N].$$

于是

$$E\cap(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\supset E\cap[a_N,b_N].$$

因 $E\cap[a_N,b_N]$ 是无限极, 故 $E\cap(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 是无限集. 据 $\varepsilon>0$ 的任意性即知 $x_0$ 是 $E$ 的一个聚点. □

下面证明在阿基米德原理成立的情况下, 以上几个定理与实数完备公理等价.

**【命题9(基本定理与实数完备性公理的互相等价)】**

假设阿基米德原理成立(即自然数集ℕ无上界). 则以下

实数完备性公理,

单调有界收敛定理,

闭区间套原理,

有限覆盖原理,

Weierstrass 极限点原理,

Weierstrass 聚点原理,

Cauchy 收敛准则

互相等价, 即任何两个可以互推.

【证】首先说明, 由于假定阿基米德原理成立, 因此我们可以使用极限概念, 即"$n \to \infty$"有意义且$2^{-n} \to 0\,(n \to \infty)$ 等等.

同学们将看到, 由于假定阿基米德原理成立, 闭区间套原理便成为沟通其他所有原理的中枢. 我们采用如下路线进行证明(分三组):

闭区间套原理$\Longrightarrow$ 实数完备性公理$\Longrightarrow$ 单调有界收敛定理$\Longrightarrow$闭区间套原理;

闭区间套原理$\Longrightarrow$ Weierstrass 极限点原理$\Longleftrightarrow$ Weierstrass 聚点原理

$\Longrightarrow$ Cauchy 收敛准则$\Longrightarrow$ 闭区间套原理;

闭区间套原理$\Longleftrightarrow$ 有限覆盖原理.

以上蕴含关系中有些已在前面证明了. 下面只需证明新出现的蕴含关系.

对第一组, 只需证 闭区间套原理$\Longrightarrow$ 实数完备性公理:

设集合$A \subset \mathbb{R}$ 非空且上方有界. 设$b \in \mathbb{R}$为$A$的一个上界. 取$a \in A$. 若$a = b$, 则$A = \{a\}$是单点集从而有上确界. 以下设$a < b$.

已有$A \cap [a, b] \neq \emptyset$ 且$b$是$A$的一个上界. 将$[a, b]$ 二等分$[a, b] = [a, (a+b)/2] \cup [(a+b)/2, b]$. 若$(a+b)/2$ 是$A$ 的一个上界, 则令$[a, (a+b)/2] = [a_1, b_1]$; 若$(a+b)/2$不是$A$的上界, 则存在$x_0 \in A$ 使得$(a+b)/2 \le x_0 \le b$. 此时令$[(a+b)/2, b] = [a_1, b_1]$. 无论哪种情况，都有$A \cap [a_1, b_1] \neq \emptyset$, $b_1$ 是$A$的一个上界, 且$b_1 - a_1 = (b-a)/2$.

继续用同样操作可得闭子区间$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ 满足$A \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$, $b_2$ 是$A$的一个上界, 且$b_2 - a_2 = (b_1 - a_2)/2 = (b-a)/4$.

将这一操作无限进行下去(用归纳操作程序原理) 我们得到一串下降的闭区间套

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$$

满足

$$A \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset, \quad b_n \text{ 是}A\text{ 的上界}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

由闭区间套原理, 诸区间 $[a_n, b_n]$ 有公共点: 存在$\beta \in \mathbb{R}$使得$a_n \le \beta \le b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$. 这蕴含

$$|a_n - \beta| \le b_n - a_n \to 0, \quad |b_n - \beta| \le b_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

来证明$\beta$ 就是$A$的上确界.

对于第二组, 前面我们已证明了闭区间套原理$\Longrightarrow$ Weierstrass 极限点原理$\Longrightarrow$ Weierstrass 聚点原理, 和Weierstrass 极限点原理$\Longrightarrow$ Cauchy 收敛准则. 下证其余两个蕴含关系.

Weierstrass 聚点原理$\Longrightarrow$ Weierstrass 极限点原理的证明：

设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为任一有界数列. 由第一章教学讲义最后一节的命题4 知$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必然属于以下两种情形之一：

(1) 存在 $N \in \mathbb{N}$ 和自然数 $1 = n_1 < n_2 < ... < n_N$, 使得作为集合有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_N}\}$ 后者中的元素互不相同. 易见在$\{n_1, n_2, ..., n_N\}$中存在一元素, 不妨是$n_1$, 使得$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中有无限多项等于$x_{n_1}$. 这等于说存在子列$\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$x_{m_k} = x_{n_1}, k = 1, 2, 3, \ldots$. 于是$\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 便是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的一个收敛子列.

(2) 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 其中 $x_{n_j}$ **互不相同**, 使得作为集合有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\} = \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$. 因$\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$是一个无限集且有界, 故由Weierstrass 聚点原理, 它有一个聚点, 设为$x_0$. 由聚点的定义, 对任意$\varepsilon > 0$, 交集$\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$都是无穷集. 这蕴含对任意$\varepsilon > 0$, 对任意$N \in \mathbb{N}$, 交集$\{x_{n_j}\}_{j=N}^{\infty} \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 都是无穷集从而非空. 于是依次取$\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, ..., 1/k, ...$ 可得下标序列$1 \le j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ 使得

$$x_{n_{j_k}} \in (x_0 - 1/k, x_0 + 1/k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

如记$m_k = n_{j_k}, k = 1, 2, 3, ...$ 则$\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列且$x_{m_k} \to x_0\,(k \to \infty)$. 因此$x_0$ 是$E$的一个极限点.

Cauchy 收敛准则$\Longrightarrow$ 闭区间套原理的证明：

设$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一串下降的有界闭区间套且$b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$. 对每个$n \in \mathbb{N}$, 取$x_n \in [a_n, b_n]$. 则对任意$n, p \in \mathbb{N}$ 有$x_{n+p}, x_n \in [a_n, b_n]$ 从而有

$$|x_{n+p} - x_n| \le b_n - a_n \qquad \forall\, n, p \in \mathbb{N}.$$

因$b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$, 故这表明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个Cauchy列. 由假设知$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 即存在$x_0 \in \mathbb{R}$ 使得$x_n \to x_0\,(n \to \infty)$. 来证$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x_0\}$. 对每个$k \in \mathbb{N}$, 当$n \ge k$ 时有$a_k \le a_n \le x_n \le b_n \le b_k$ 从而有

$$a_k \le x_n \le b_k, \quad n = k, k+1, k+2, \dots .$$

令$n \to \infty$ 得知

$$a_k \le x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \le b_k.$$

这证明了$x_0$ 属于每个$[a_k, b_k]$. 所以$\{x_0\} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$. 反之对每个$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$ 有$x, x_0 \in [a_k, b_k], k = 1, 2, 3, \ldots$ 因而$|x - x_0| \le b_k - a_k \to 0\,(k \to \infty)$. 因此必有$x = x_0$. 这表明$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] \subset \{x_0\}$. 所以$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] = \{x_0\}$ 即闭区间套原理成立.

对于第三组, 前面我们已证明了闭区间套原理$\Longrightarrow$ 有限覆盖原理. 下面给出

有限覆盖原理$\Longrightarrow$闭区间套原理的证明：设$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一串下降的有界闭区间套且$b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$. 因区间的边长趋于零, 故为证$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ 是单点集, 如刚才的论证, 只需证明$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \ne \emptyset$.

取实数$a, b$ 满足$a < a_1, b > b_1$. 则$[a_1, b_1] \subset (a, b)$. 由de Morgan 对偶律有

$$(a,b) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty}((a,b) \setminus [a_n, b_n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, a_n) \cup (b_n, b).$$

反证法: 假设$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \emptyset$. 则从上面得到

$$[a_1, b_1] \subset (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, a_n) \cup (b_n, b).$$

这表明有界闭区间$[a_1, b_1]$ 被开区间族$\{(a, a_n), (b_n, b)\}_{n=1}^{\infty}$所覆盖. 由假设知存在有限个$n_1, n_2, ..., n_p, m_1, m_2, ..., m_q$ 使得

$$[a_1, b_1] \subset \bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q}(a, a_{n_i}) \cup (b_{m_j}, b).$$

取自然数$N$ 充分大使得$N$ 大于所有$n_i, m_j$. 则由$a_n$ 递增, $b_n$ 递减便有$a_{n_i} \le a_N, b_N \le b_{m_j}$ 从而有

$$[a_1, b_1] \subset (a, a_N) \cup (b_N, b) = (a, b) \setminus [a_N, b_N].$$

但$[a_N, b_N] \subset [a_1, b_1]$, 故得到$[a_N, b_N] \subset (a, b) \setminus [a_N, b_N]$ 它蕴含$[a_N, b_N]$ 是空集, 但显然$[a_N, b_N]$ 非空. 这矛盾证明了$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \ne \emptyset$. $\square$

**下面这个命题联系着单侧聚点、确界、和单调收敛三方面, 以后经常用到.**

**【命题10(单侧聚点, 单侧极限)】**设 $E \subset \mathbb{R}$ 非空.

**(a)** 设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$, 区间 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 内总含有 $E$ 中的点, 即 $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cap E$ 非空. 则 $x_0$ 是 $E$ 的一个聚点 (**称为左聚点**) 从而存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$x_n < x_{n+1} < x_0,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

**(b)** 设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$, 区间 $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ 内总含有 $E$ 中的点, 即 $(x_0, x_0+\varepsilon) \cap E$ 非空. 则 $x_0$ 是 $E$ 的一个聚点 (**称为右聚点**) 从而存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$x_n > x_{n+1} > x_0,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

**(c)** 假设 $E$ 有上界. 则存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$x_n \le x_{n+1} \le \sup E,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sup E.$$

进一步, 若 $\sup E$ 是 $E$ 的一个聚点 [注意: 这包括了 $\sup E \in E$ 和 $\sup E \notin E$ 的两种情形] , 则上述数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 还可以选择成为严格单调增加的, 也即存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$x_n < x_{n+1} < \sup E,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sup E.$$

[ 注: 这严格递增性还说明$\sup E$ 是$E$的一个左聚点.]

**(d)** 假设 $E$ 有下界. 则存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$x_n \ge x_{n+1} \ge \inf E,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \inf E.$$

进一步, 若 $\inf E$ 是 $E$ 的一个聚点 [注意: 这包括了 $\inf E \in E$ 和 $\inf E \notin E$ 的两种情形], 则上述数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 还可以选择成为严格单调减少的, 也即存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$x_n > x_{n+1} > \inf E,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \inf E.$$

[ 注: 这严格递减性还说明$\inf E$ 是$E$的一个右聚点.]

**【证】**(a)-(b): 设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$, 区间 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 内总含有 $E$ 中的点.

取 $\varepsilon_1 = 1$, 则存在 $x_1 \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_0$.

取 $\varepsilon_2 = \min\{1/2, x_0 - x_1\} > 0$, 则存在 $x_2 \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_2 < x_2 < x_0$.

取 $\varepsilon_3 = \min\{1/3, x_0 - x_2\} > 0$, 存在 $x_3 \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_3 < x_3 < x_0$.

易见 $x_1 < x_2 < x_3 < x_0$ 且 $0 < x_0 - x_k < 1/k, k = 1, 2, 3$.

假设已得到

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_0, \quad x_k \in E, \quad 0 < x_0 - x_k < 1/k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

那么取 $\varepsilon_{n+1} = \min\{\frac{1}{n+1}, x_0 - x_n\}$. 则同理存在 $x_{n+1} \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_{n+1} < x_{n+1} < x_0$. 易见 $x_n < x_{n+1}, 0 < x_0 - x_{n+1} < \frac{1}{n+1}$.

根据归纳原理, 我们得到序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 满足 $x_n < x_{n+1} < x_0, n = 1, 2, 3, ...$; $0 < x_0 - x_n < 1/n, n = 1, 2, 3, ....$ 因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格单调增加且趋于 $x_0$.

于是对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0$. 也即 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset (x_0 - \varepsilon, x_0)$. 因 $x_n$ 互不相同, 这就证明了 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 内含有 $E$ 的无限多个点. 据 $\varepsilon > 0$ 的任意性即知 $x_0$ 是 $E$ 的一个左聚点.

同法可证 (b) 中的结论.

(c)-(d): 由 $\inf E = -\sup(-E)$ 可知我们只需证明 (c).

令 $x_0 = \sup E$. 我们先考虑 $x_0$ 是 $E$ 的聚点的情形. 设 $x_0$ 是 $E$ 的聚点. 由聚点的定义知对任意 $\varepsilon > 0$, 区间 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 内含有 $E$ 的无限多个点. 这蕴含 $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ 中含有 $E$ 的点. 但 $x_0$ 是 $E$ 的上确界, 故 $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ 内没有 $E$ 中的点, 因此必是 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 内含有 $E$ 的点. 于是根据 (a) 即得所证结论.

其次我们证明若 $x_0$ 不属于 $E$, 则 $x_0$ 必是 $E$ 的一个聚点. 事实上由上确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $x' \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon < x' \leq x_0$. 但 $x_0 \notin E$ 故必是 $x_0 - \varepsilon < x' < x_0$. 这证明了对任意 $\varepsilon > 0$, 交集 $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cap E$ 非空. 于是根据 (a) 即知 $x_0$ 为 $E$ 的一个聚点 (实为左聚点).

最后设 $x_0$ 不是 $E$ 的聚点. 则由上面结果知 $x_0 \in E$. 于是我们可以取 $x_n = x_0, n = 1, 2, 3, ....$ 这个常值数列当然是单调趋于 $x_0$ 的. $\square$

最后讲一个与上一命题类似的性质, 它也较为常用.

**【命题11】** 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为实数列.

(a) 令$A=\sup\limits_{n\ge 1} a_n$ (包括$A=+\infty$的情形) 并设

$$a_n<A,\quad n=1,2,3,\dots.$$

则对任意实数$a<A$, 存在子列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$a\le a_{n_1}<a_{n_2}<a_{n_3}<\cdots;\qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k}=A.$$

(a) 令$A=\inf\limits_{n\ge 1} a_n$ (包括$A=-\infty$的情形) 并设

$$a_n>A,\quad n=1,2,3,\dots.$$

则对任意实数$a>A$, 存在子列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$a\ge a_{n_1}>a_{n_2}>a_{n_3}>\cdots;\qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k}=A.$$

【证】由反射变换$\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 易见(a)与(b)等价. 因此只需证明(a).

设$a<A$. 考虑

$$A_n=\max\{a,\max_{1\le k\le n} a_k\},\quad n=1,2,3,\dots.$$

易见$A_n$ 单调不减; 又因对每个$n\in\mathbb{N}$ 都有$a_n<A$, 于是有

$$A_n\le A_{n+1}<A,\quad n=1,2,3,\dots.$$

由上确界的定义易证$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$ (包括$A=+\infty$的情形).

对于$A_1<A$, 由上确界的定义, 存在$n_1\in\mathbb{N}$ 使得$A_1<a_{n_1}<A$.

对于$A_{n_1}<A$, 由上确界的定义, 存在$n_2\in\mathbb{N}$ 使得$A_{n_1}<a_{n_2}<A$.

设在第$k\,(\ge 2)$步, 对于$A_{n_{k-1}}<A$, 存在$n_k\in\mathbb{N}$ 使得$A_{n_{k-1}}<a_{n_k}<A$.

则对于$A_{n_k}<A$, 由上确界的定义, 存在$n_{k+1}\in\mathbb{N}$ 使得$A_{n_k}<a_{n_{k+1}}<A$.

据归纳法原理, 上述手续对所有自然数$k$ 均可施行. 于是我们得到自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$A_{n_k}<a_{n_{k+1}}<A,\quad k=1,2,3,\dots. \tag{$*$}$$

由$(*)$和$A_n$的定义易见$n_{k+1}\notin\{1,2,...,n_k\}$. 因此$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 严格单调增加:

$$n_1<n_2<n_3<\cdots.$$

因此**根据子序列的定义**, $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 分别是$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列. 此外由$(*)$ 易见$a \le a_{n_k} < a_{n_{k+1}}, k = 1, 2, 3, \ldots$. 最后再由$(*)$和两边夹法则还知$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. □

**【例】**设$\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ 是一个整数序列, 无上界. 则由上述命题, 从$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中可以抽取一个严格单调增加的子列$\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, 从而有$1 \le p_{n_k} \nearrow +\infty \ (k \to \infty)$. □

## §2.6 排序和常用不等式

为了逻辑线路清晰, 本节给出有限实数的排序一些常用不等式. 先介绍整数之间的置换.

**【置换】**设 $n$ 是一个自然数. 若映射 $\sigma : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ 是单满射, 则称 $\sigma$ 是 $(1,2,...,n)$ 的一个置换或置换映射, 也称 $(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))$ 是 $(1,2,...,n)$ 的一个置换. □

例如 $(2,1,3)$ 是 $(1,2,3)$ 的一个置换; $(1,4,3,2)$ 是 $(1,2,3,4)$ 的一个置换.

**【命题】**设 $a_1,a_2,...,a_n$ 是 $n$ 个已编号的实数, 不必互不相同. 则可以将这些数重新编号使得重新编号后, 它们按大小排列, 也即存在 $(1,2,...,n)$ 的一个置换 $(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))$ 使得

$$a_{\sigma(1)} \le a_{\sigma(2)} \le ... \le a_{\sigma(n)}.$$

【证】我们对项数 $n$ 用归纳法. 当 $n=1,2$ 时显然成立. 假设所证对于 $n-1 \ge 2$ 成立. 则对于 $a_1,a_2,...,a_n$ 的前 $n-1$ 项 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$, 由归纳假设, 存在 $(1,2,...,n-1)$ 的一个置换 $\tau$, 使得

$$a_{\tau(1)} \le a_{\tau(2)} \le ... \le a_{\tau(n-1)}.$$

以下讨论两种情形：

**情形1：**$a_{\tau(n-1)} \le a_n$. 此时定义 $\sigma(k)=\tau(k), k=2,3,...,n-1; \sigma(n)=n$. 则 $\sigma$ 是 $(1,2,...,n)$ 的一个置换且 $a_{\sigma(1)} \le a_{\sigma(2)} \le ... \le a_{\sigma(n)}$.

**情形2：**$a_n < a_{\tau(n-1)}$. 此时令 (注意下面的整数集合非空)

$$s = \min\{k \in \{1,2,...,n-1\} \,|\, a_n < a_{\tau(k)}\}.$$

则 $a_n < a_{\tau(s)}$.

若 $s=1$, 则$a_n < a_{\tau(1)}$. 此时我们定义 $\sigma(1)=n, \sigma(k)=\tau(k-1), k=2,3,...,n$. 则 $\sigma$ 是 $(1,2,...,n)$ 的一个置换且 $a_{\sigma(1)} \le a_{\sigma(2)} \le ... \le a_{\sigma(n)}$.

若 $s \ge 2$, 则由 $s$ 的定义有 $a_{\tau(s-1)} \le a_n < a_{\tau(s)}$. 此时我们定义 $\sigma(k)=\tau(k), k=1,2,...,s-1$; $\sigma(s)=n$; $\sigma(k)=\tau(k-1), k=s+1,s+2,...,n$. 易见 $\sigma$ 是 $(1,2,...,n)$ 的一个置换且 $a_{\sigma(1)} \le a_{\sigma(2)} \le ... \le a_{\sigma(n)}$.

据归纳法原理, 所证明命题成立. $\square$

【**命题**】设$A \subset \mathbb{R}$为一非空的有限集. 则 $A$ 的所有元素可以按大小排列, 即

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n\},\quad a_1<a_2<\cdots<a_n.$$

由此特别可知$\mathbb{R}$中的任何非空有限集合都有最小元和最大元.

【**证**】设 $n=\mathrm{card}A$. 由定义, 存在一一对应 $f:\{1,2,...,n\}\to A$. 因此 $A=\{f(1),f(2),...,f(n)\}$. 而由上一命题, 存在 $(1,2,...,n)$ 的一个置换 $\sigma$ 使得

$$f(\sigma(1))<f(\sigma(2))<...<f(\sigma(n))$$

以上严格不等号是因为 $f(1),f(2),...,f(n)$ 互不相同. 令 $a_k=f(\sigma(k)), k=1,2,...,n$ 即得所证. $\square$

**为什么这些显然的事实需要证明?—— 想想看如果$A$的元素个数为$n=10^{100}$!**

以下我们利用有限实数排序来研究单调有限数列的重排不等式. 这些不等式在研究级数的收敛性, 最佳估值和优化问题时很有用.

【**例**】设$a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}, n\ge 2$. 设$\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$为$a_k$的递增排序置换:

$$a_{\sigma(1)}\le a_{\sigma(2)}\le\cdots\le a_{\sigma(n)}.$$

则有

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\ge a_{\sigma(1)}+a_{\sigma(2)}+\cdots+a_{\sigma(k)},\qquad k=1,2,...,n;$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{\sigma(1)}+a_{\sigma(2)}+\cdots+a_{\sigma(n)}.$$

又若所有$a_k$均非负, 则还有

$$a_1a_2\cdots a_k\ge a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(k)},\qquad k=1,2,...,n;$$

$$a_1a_2\cdots a_n=a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(n)}.$$

类似地, 若$\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$为$a_k$的递减排序置换: $a_{\sigma(1)}\ge a_{\sigma(2)}\ge\cdots\ge a_{\sigma(n)}$ 则反向不等式成立, 即可将上面不等号"$\ge$" 换成"$\le$".

【证】本题中的两个等式是前面命题的结论. 因此只需证明不等式. 当$n = 2$时命题显然成立. 下设$n \geq 3$. 任取定$k \leq n-1$. 取$a_1, a_2, ..., a_k$的递增排序置换$\tau : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., k\}$:

$$a_{\tau(1)} \leq a_{\tau(2)} \leq \cdots a_{\tau(k)}.$$

由前面命题有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + \cdots + a_{\tau(k)},$$

$$a_1 a_2 \cdots a_k = a_{\tau(1)} a_{\tau(2)} \cdots a_{\tau(k)}.$$

于是为证本题中的不等式, 只需证明

$$a_{\tau(j)} \geq a_{\sigma(j)}, \quad j = 1, 2, ..., k. \tag{$*$}$$

由$a_{\sigma(1)}$ 是最小数可知$a_{\tau(1)} \geq a_{\sigma(1)}$. 因此可设$k \geq 2$. 任取$j \in \{2, 3, ..., k\}$. 易见

$$\{\tau(1), \tau(2), ..., \tau(j)\} \not\subset \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(j-1)\}.$$

因此存在$p \in \{1, 2, ..., j\}$ 使得$\tau(p) \notin \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(j-1)\}$. 写$\tau(p) = \sigma(q), q \in \{1, 2, ..., n\}$. 则必有$q \geq j$. 于是由排序的单调性有

$$a_{\tau(j)} \geq a_{\tau(p)} = a_{\sigma(q)} \geq a_{\sigma(j)}.$$

因此$(*)$ 成立.

同理可证关于递减排序的不等式. □

【**例**】(a) 设

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, \quad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

或者

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n.$$

则对于任意置换$\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ 有

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \tag{$*$}$$

特别有

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

(b) 设

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n, \quad b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$$

或者

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n, \quad b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n.$$

则对任意置换$\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ 有

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \ge a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

特别有

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \ge a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

【证】考虑$-a_k$ 可知(a) 蕴含(b). 因此只需证(a). 又由$(-a_k)(-b_k) = a_k b_k$ 可知只需证明(a)中的第一种情形, 也即$a_k, b_k$ 都是单调增加(不减)的. 为此我们将对项数$n$ 用数学归纳法.

$n = 1$时是平凡的. 设$n = 2$. 此时$(\sigma(1), \sigma(2)) = (1, 2)$ 或$(\sigma(1), \sigma(2)) = (2, 1)$. 于是由同向单调性

$$0 \le (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1$$

便有

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \le a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

因此$(*)$ 对$n = 2$也成立.

假设不等式$(*)$ 对于$n - 1 (\ge 2)$ 成立. 任给$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n; b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ 并任取置换$\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$.

若$\sigma(n) = n$, 则$\tau := \sigma|_{\{1,2,...,n-1\}}$ 是从$\{1, 2, ..., n-1\}$ 到$\{1, 2, ..., n-1\}$的一个置换. 因此由归纳假设有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{\sigma(k)} + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{\tau(k)} + a_n b_n \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

以下假设$\sigma(n) < n$. 取$m \in \{1, 2, ..., n\}$ 使得$n = \sigma(m)$. 则$m < n$. 因此由同向单调性

$$0 \le (a_n - a_m)(b_n - b_{\sigma(n)}) = a_n b_n + a_m b_{\sigma(n)} - a_n b_{\sigma(n)} - a_m b_n$$

得到

$$a_m b_n + a_n b_{\sigma(n)} \le a_m b_{\sigma(n)} + a_n b_n.$$

也即

$$a_m b_{\sigma(m)} + a_n b_{\sigma(n)} \le a_m b_{\sigma(n)} + a_n b_n.$$

由此我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)} &= \sum_{k\in\{1,2,...,n\},k\neq m,n}^{n} a_k b_{\sigma(k)} + a_m b_{\sigma(m)} + a_n b_{\sigma(n)} \\ &\le \sum_{k\in\{1,2,...,n\},k\neq m,n}^{n} a_k b_{\sigma(k)} + a_m b_{\sigma(n)} + a_n b_n.\end{aligned}$$

进一步分析: 若$m = 1$, 则定义$\tau(1) = \sigma(n)$, $\tau(k) = \sigma(k+1), k = 2, 3, , ..., n-1$. 则$\tau : \{1, 2, ..., n-1\} \to \{1, 2, ..., n-1\}$ 是一个置换. 因此据归纳假设有

$$\sum_{k\in\{1,2,...,n\},k\neq 1,n}^{n} a_k b_{\sigma(k)} + a_1 b_{\sigma(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{\tau(k)} \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k.$$

若$m = n-1$, 则定义$\tau(k) = \sigma(k)$, $k = 1, 2, ..., n-2$; $\tau(n-1) = \sigma(n)$. 则$\tau : \{1, 2, ..., n-1\} \to \{1, 2, ..., n-1\}$ 是一个置换. 因此据归纳假设有

$$\sum_{k\in\{1,2,...,n\},k\neq n-1,n}^{n} a_k b_{\sigma(k)} + a_{n-1} b_{\sigma(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{\tau(k)} \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k.$$

最后若$2 \le m \le n-2$ （这蕴含$n \ge 4$), 那么定义$\tau(k) = \sigma(k)$ for $k = 1, 2, ..., m-1$; $\tau(m) = \sigma(n)$; $\tau(k) = \sigma(k+1), k = m+1, m+2, , ..., n-1$. 则$\tau : \{1, 2, ..., n-1\} \to \{1, 2, ..., n-1\}$ 是一个置换. 因此据归纳假设有

$$\sum_{k\in\{1,2,...,n\},k\neq m,n}^{n} a_k b_{\sigma(k)} + a_m b_{\sigma(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{\tau(k)} \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k.$$

综上我们证明了, 在任何情况下都有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)} \le \sum_{k\in\{1,2,...,n\},k\neq m,n}^{n} a_k b_{\sigma(k)} + a_m b_{\sigma(n)} + a_n b_n \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

据归纳法原理，不等式$(*)$ 对任何项数$n \in \mathbb{N}$成立. □

为了后面学习极限,连续,微分等基本知识, 我们需要证明某些基本不等式. 这些不等式将来也可以用微分学的方法给予证明, 但为了避免循环论证, 我们目前只能使用已证明的命题或原理.

**【几何平均值小于等于算术平均值】**. 若 $a_k \ge 0\,, k = 1, 2, ..., n$ 则

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

此外, 等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

【证】[**经验之谈**: 在证明一些不等式时, 将变元重新排列, 可能有利于证明.]

我们先证明“几何平均值小于等于算术平均值”的特殊情形：

$$b_k \geq 0\ (k = 1, 2, ..., n)\ \text{且}\ b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n \implies b_1 b_2 \cdots b_n \leq 1.$$

此外, 等号成立当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$.

对 $n$ 用归纳法. 当 $n = 1$ 时显然成立. 对于 $n = 2$, 设 $b_1 + b_2 = 2$. 在恒等式

$$ab = (1-a)(1-b) + a + b - 1 \tag{$*$}$$

中取 $a = b_1, b = b_2$ 并注意 $1 - b_2 = b_1 - 1$ 得到

$$b_1 b_2 = (1 - b_1)(1 - b_2) + 1 = -(1 - b_1)^2 + 1 \leq 1.$$

显然等号“$= 1$”成立当且仅当 $b_1 = 1 = b_2$. [由于 $n = 2$, 我们并不需要 $b_1, b_2$ 的非负性.]

假设所证不等式对于 $n \geq 2$ 成立. 看 $n + 1$ 时: 设

$$b_k \geq 0,\ k = 1, 2, ..., n+1; \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1} = n + 1.$$

若 $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n+1} = 1$, 则所证不等式的等号成立. 设 $b_k$ 不全等于 1. 来证明$b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} < 1$. 若 $b_1, b_2, ..., b_{n+1}$ 中有一项为零, 则所证不等式的不等号成立. 因此可设一切 $b_k > 0$. 根据上面介绍的性质: 重排不改变求和与乘积, 我们可以假定

$$b_n = \min\{b_1, b_2, ..., b_{n+1}\}, \quad b_{n+1} = \max\{b_1, b_2, ..., b_{n+1}\}.$$

则易见有 $0 < b_n < 1 < b_{n+1}$. 由

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n + b_{n+1} - 1 = n$$

和归纳假设有

$$b_1 b_2 \cdots b_{n-1}(b_n + b_{n+1} - 1) \leq 1.$$

而由等式 $(*)$ 和 $(1 - b_n)(1 - b_{n+1}) < 0$ 我们有严格不等式:

$$b_n b_{n+1} = (1 - b_n)(1 - b_{n+1}) + b_n + b_{n+1} - 1 < b_n + b_{n+1} - 1$$

于是得到

$$b_1b_2\cdots b_{n-1}b_nb_{n+1} < b_1b_2\cdots b_{n-1}(b_n+b_{n+1}-1) \le 1.$$

据归纳法原理, 上述特殊不等式成立.

转到一般情形. 设 $a_k \ge 0\,, k=1,2,...,n$. 显然当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时所证不等式的等号成立. 特别若 $a_1,a_2,...,a_n$ 全为零, 则等号成立. 假设 $a_1,a_2,...,a_n$ 不全为零. 令

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \quad b_k=\frac{a_k}{A}, \quad k=1,2,...,n.$$

则 $A>0$且$a_k=Ab_k$, $k=1,2,...,n$; $b_1+b_2+\cdots+b_n=n$. 由上述特殊不等式有

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=A(b_1b_2\cdots b_n)^{1/n}\le A.$$

此外, 若 "$=A$" 成立, 则有 $(b_1b_2\cdots b_n)^{1/n}=1$ 从而有 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$ 即

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=A. \qquad \square$$

**【Cauchy 不等式】**. 设$a_k,b_k\in\mathbb{R}, k=1,2,...,n$. 则

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

也可写成紧凑形式:

$$\Big|\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big|\le\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

此外, 假设例如$b_1,b_2,...,b_n$ 不全为零, 则上述不等式的等号成立 $\Longleftrightarrow$ 存在常数$c$ 使得$a_k=cb_k, k=1,2,...,n$.

【证】对于Cauchy不等式的证明, 我们采用两种方法, 其中第二种方法包括了证明等号成立情形的证明.

**方法一**: 我们对$(a_k,b_k)$的个数$n$ 用归纳法. 当$n=1$ 时显然成立. 设Cauchy不等式对于某个$n\ge 1$成立. 看$n+1$时. 由归纳假设有

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+1} a_kb_k\Big|\le\Big|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\Big|+|a_{n+1}||b_{n+1}|\le\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}+|a_{n+1}||b_{n+1}|.$$

往下我们只需证明

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}+|a_{n+1}||b_{n+1}|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2}. \qquad (*)$$

为此令$A_n=\sum_{k=1}^n a_k^2$, $B_n=\sum_{k=1}^n b_k^2$. 则不等式$(*)$写为

$$\sqrt{A_n}\sqrt{B_n}+|a_{n+1}||b_{n+1}|\le\sqrt{A_n+a_{n+1}^2}\sqrt{B_n+b_{n+1}^2}. \tag{$**$}$$

将不等式$(**)$ 两边平方我们看到$(**)$等价于

$$2\sqrt{A_n}\sqrt{B_n}|a_{n+1}||b_{n+1}|\le A_nb_{n+1}^2+a_{n+1}^2|B_n|.$$

而这个不等式显然成立(利用熟知的不等式$2ab\le a^2+b^2$). 所以Cauchy不等式对于$(a_k,b_k)$的个数$n+1$也成立. 据归纳法原理, 这就证明了Cauchy不等式普遍成立.

**方法二**: 直接计算. 考虑Cauchy不等式两边各自的平方:

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2=\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)\Big(\sum_{j=1}^n a_jb_j\Big)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n a_kb_ka_jb_j,$$

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)=\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n b_j^2\Big)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n a_k^2b_j^2=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n(a_kb_j)^2.$$

改换下标记号我们有

$$\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n(a_kb_j)^2=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n(a_jb_k)^2=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{(a_kb_j)^2+(a_jb_k)^2}{2}.$$

所以

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{(a_kb_j)^2+(a_jb_k)^2}{2}.$$

于是对初等关系式

$$a_kb_ka_jb_j+\frac{(a_kb_j-a_jb_k)^2}{2}=\frac{(a_kb_j)^2+(a_jb_k)^2}{2}$$

两边取和$\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n$即得

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2+\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{(a_kb_j-a_jb_k)^2}{2}=\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)$$

从而可知Cauchy不等式成立. 由此还看出:

$$\text{Cauchy不等式中的等号成立}\iff a_kb_j-a_jb_k=0,\ k,j=1,2,...,n.$$

现在假设$b_1,b_2,...,b_n$ 不全为零使得Cauchy不等式中的等号成立. 设$b_{j_0}\ne0$. 则有

$$a_k=\frac{a_{j_0}}{b_{j_0}}b_k,\quad k=1,2,...,n.$$

因此存在常数$c$ 使得$a_k = cb_k, k = 1,2,...,n$. 反之若存在常数$c$ 使得$a_k = cb_k, k = 1,2,...,n$, 则易见Cauchy不等式中的等号成立. $\square$

**【三角不等式】**. 设$a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1,2,...,n$. 则

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

或写成紧凑形式

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.$$

此外, 假设例如$b_1, b_2, ..., b_n$ 不全为零, 则上述不等式的等号成立 $\iff$ 存在常数$c \ge 0$ 使得$a_k = cb_k, k = 1,2,...,n$.

【证】将三角不等式两边各自平方后我们看到: 三角不等式等价于Cauchy 不等式:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.$$

因此所证三角不等式成立.

现在假设$b_1, b_2, ..., b_n$ 不全为零使得三角不等式中的等号成立. 则上面的Cauchy 不等式成为等式. 于是根据Cauchy 不等式中等号成立的充分必要条件知存在常数$c$ 使得$a_k = cb_k, k = 1,2,...,n$. 将此关系代入三角不等式中的等式得到$|c+1| = |c|+1$ 从而有$c = |c| \ge 0$. 反之若存在常数$c \ge 0$ 使得$a_k = cb_k, k = 1,2,...,n$, 则易见三角不等式中的等号成立. $\square$

## §2.7 复数域, 复数列的收敛

开头语: 方程$x^2-2=0$ 在有理数域$\mathbb{Q}$中无根而在实数域中有根, 其中一个根为正根, 记作$\sqrt{2}$. 让我们把$\sqrt{2}$按下面方式添加到$\mathbb{Q}$中：考虑形如$x+\sqrt{2}\,y$ 的数, 其中$x,y\in\mathbb{Q}$, 意即扩充后的集合为$\mathbb{Q}(\sqrt{2}):=\{x+\sqrt{2}\,y\,|\,x,y\in\mathbb{Q}\}$. 不难验证, 按同样的加法和乘法运算, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 仍是一个数域. 因$\pm\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 故方程$x^2-2=0$在$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$中有根且所有根都属于$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

一般我们的希望是: 多项式方程$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 在系数$a_i$所在的数域$\mathbb{F}$中有根, 且所有根都属于$\mathbb{F}$; 而如果这点做不到, 就将该方程的(形式上)的所有根按上述类似方式添加到$\mathbb{F}$中. 对于实数域的情形, 即$\mathbb{F}=\mathbb{R}$的情形, 伟大的数学家Gauss 证明了, 为使在新扩充的数域(记之为)$\mathbb{C}$中, 系数$a_i$都属于$\mathbb{C}$的任意$n$次的方程$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 在$\mathbb{C}$中都有根, 且根都属于$\mathbb{C}$ (称此性质为**封闭性**), 只需考虑$n=2$和标准的二次方程$x^2+1=0$的情形. 这个二次方程在$\mathbb{R}$中无根. 于是硬是令$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 表示$x^2+1=0$的一个根, **即字母**i **被规定为满足方程**$\mathrm{i}^2+1=0$, 将i按上述方式添加到$\mathbb{R}$中, 那么具有上述封闭性质的新扩充的数域$\mathbb{C}$ 便可取为

$$\mathbb{C}=\{z=x+\mathrm{i}y\mid x,y\in\mathbb{R}\},\qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

利用关系式

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2\iff x_1=x_2,\ y_1=y_2,\qquad x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$$

不难验证按照与前面相同的加法和乘法运算, $\mathbb{C}$ 是一个数域, 称之为复数域, 其元素称为复数. 具体来看, 加法和乘法运算结果为

$$x_1+\mathrm{i}y_1+x_2+\mathrm{i}y_2=x_1+x_2+\mathrm{i}(y_1+y_2),$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=x_1x_2-y_1y_2+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).$$

进一步, 称$x$为$z=x+\mathrm{i}y$的实部, $y$为$z=x+\mathrm{i}y$的虚部, 记作

$$\mathrm{Re}(z)=x,\quad \mathrm{Im}(z)=y\qquad \text{当 } z=x+\mathrm{i}y,\ x,y\in\mathbb{R}\text{ 时}.$$

由于复数的实部和虚部各自独立变化, 故复数的行为与平面$\mathbb{R}^2$中的向量相同. 因此复数之间没有大小比较, 但复数之间可以建立距离: 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$. 则 $z_1,z_2$ 间的距离定义为

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

由此再次看到: 两个复数相等当且仅当它们的实部、虚部分别相等, 即

$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.

复数的共轭:

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y \qquad \text{当 } z = x + \mathrm{i}y \text{ 时}.$$

我们有

$$z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 也称为复数 $z$ 的模、或 $z$(作为向量) 的长度、或 $z$ 到原点 0 的距离.

关于复数的模或距离, 我们有最基本最常用的三角不等式:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{$*$}$$

事实上令 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. 则由上节证明的三角不等式有

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1| + |z_2|.$$

利用归纳法, 三角不等式 $(*)$ 可以推广到多角不等式:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|, \qquad z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}. \tag{$**$}$$

由此可见, 实数序列的收敛等概念和一些基本结果可以平行推广到复数序列中.

例如

**【定义(复数列的收敛)】**设$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个复数序列. 若存在复数$z_0 \in \mathbb{C}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$$

则称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 同时称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于$z_0$. 记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{或} \quad z_n \to z_0 \quad (n \to \infty). \qquad \Box$$

如写

$$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, \quad x_n, y_n \in \mathbb{R}; \qquad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

则从不等式

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

有

$$|x_n - x_0|, |y_n - y_0| \le |z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

换言之, 我们证明了

**【命题】**复数列$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ 实部$x_n$ 和虚部$y_n$都收敛.

当两边之一(从而两边都)成立时有

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} y_n. \qquad \square$$

与实数情形一样, Cauchy收敛准则对复数序列也成立:

**【Cauchy收敛准则】**一个复数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛$\Longleftrightarrow$ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足Cauchy 条件, 即

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ |z_m - z_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \ge N.$$

【证】写$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n,\ x_n, y_n \in \mathbb{R}$. 则有

$$|x_m - x_n|, |y_m - y_n| \le |z_m - z_n| \le |x_m - x_n| + |y_m - y_n|.$$

由此可见, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足Cauchy 条件$\Longleftrightarrow$ 实部数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和虚部数列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$都满足Cauchy 条件. 于是有：$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足Cauchy 条件$\Longleftrightarrow$实部数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和虚部数列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$都满足Cauchy 条件$\Longleftrightarrow$实部数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和虚部数列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$都收敛$\Longleftrightarrow$ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. $\square$

**关于实/复数列的极限/收敛以及及无穷级数等我们在会下一章系统展开.**

**【注1】**与实数列的情形不同, 对于复数列, 为明确起见, 我们**说复数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛而不说复数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$有极限**. 这是因为一般来说对于复数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, 由于没有大小顺序, 写法"$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$"**便无意义**.

但对于$|z_n| \to +\infty\,(n \to \infty)$的情形, 我们称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于无穷远点$\infty$, 记作$z_n \to \infty\,(n \to \infty)$. 这一说法可以从球极投影看得明白. 课上给图示.

**【注2】**复数域$\mathbb{C}$的很多基本概念和性质与平面$\mathbb{R}^2$完全相同！因此一般维数的欧几里德空间$\mathbb{R}^n$上的所有基本概念(如距离, 开集, 闭集, 紧集, 收敛, 集合的连通性等等) 和

基本性质/原理(如有界点列必有收敛子列, 紧集套原理, 有限覆盖原理, Cauchy收敛准则, 开集按连通分支分解等等）对于$\mathbb{C}$自然就都成立. 因此我们在后面学习了$\mathbb{R}^n$的上述性质后, 即可将其直接用到复数域$\mathbb{C}$上. 如果渴望直接学习这些性质, 陈书第二章中的习题和附加习题可以解渴.

**【复数的极坐标表示】**

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\theta}, \qquad r = |z|,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

余下部分见陈书第一册第二章§2.4.

**§2.8 求和运算和换序, 差和公式及其应用.**

让我们回忆有限多个实数或复数的求和$\sum_{k=1}^n a_k$, 其定义为(设$n\geq 2$)

$$\sum_{k=1}^n a_k := \Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big) + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

易见求和是线性的, 即

$$\sum_{k=1}^n (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \qquad \sum_{k=1}^n ca_k = c\sum_{k=1}^n a_k.$$

对于有双下标的数$a_{i,j}$, 我们有相应的求和定义(by 累次求和) 并成立换序公式:

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{i,j} := \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\Big) = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^m a_{i,j}\Big).$$

这里第二个等式(即换序)的证明如下: 对第一下标$i$的个数用归纳法: 当第一下标的个数$=1$ 时等式自然成立. 设当第一下标的个数$=m$ 时等式成立, 则当第一下标的个数$=m+1$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{m+1}\Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\Big) + \sum_{j=1}^n a_{m+1,j} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m-1} a_{i,j}\Big) + \sum_{j=1}^n a_{m+1,j}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} + a_{m+1,j}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m+1} a_{i,j}\Big).$$

下面的直观证明有助于理解"换序"道理. 我们把$mn$个数$a_{i,j}$ 排成长方阵:

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots\cdots & a_{2,n} \\ \multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots\cdots & a_{m,n}. \end{array}$$

如果将这个长方阵中的元素先按行相加, 即分别对第1行求和, 第2行求和,..., 第$m$行求和, 然后再相加则得到

$$\sum_{j=1}^n a_{1,j} + \sum_{j=1}^n a_{2,j} + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{m,j} = \sum_{i=1}^m\Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\Big).$$

而如果将这个长方阵中的元素先按列相加, 即分别对第1列求和, 第2列求和,..., 第$n$列求和, 然后再相加则得到

$$\sum_{i=1}^m a_{i,1} + \sum_{i=1}^m a_{i,2} + \cdots + \sum_{i=1}^m a_{i,n} = \sum_{j=1}^n\Big(\sum_{i=1}^m a_{i,j}\Big).$$

因这两种加法的每一种都把所有元素加进来了且无重复计算, 故二者所得的结果应相等.

一般地, 不难证明: 对于数组$a_{i,j}$ $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$ 的任意排列$a_{i_1,j_1}, a_{i_2,j_2}, ..., a_{i_{mn},j_{mn}}$ 都有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=a_{i_1,j_1}+a_{i_2,j_2}+\cdots+a_{i_{mn},j_{mn}}=\sum_{k=1}^{mn}a_{i_k,j_k}.$$

二重求和可以推广到多重求和: 以三重求和为例,

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{i,j,k}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{i,j,k}\Big)=\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{i,j,k}\Big)$$

等等. 且成立换序公式. 例如

$$\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{i,j,k}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}a_{i,j,k}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{l}a_{i,j,k}\Big)$$

等等.

**【特征函数的作用】**利用特征函数, 我们可以定义非矩形的求和并证明累次求和可以换序. 我们以三角形求和为例. 定义

$$\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1_{\{i\le j\}}a_{ij}.$$

来证明累次求和可以换序:

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{j}a_{ij}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\Big)=\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}.$$

【证】由特征函数的作用和矩形求和可换序有

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{j}a_{ij}\Big)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}1_{\{i\le j\}}a_{ij}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}1_{\{i\le j\}}a_{ij}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\Big)$$

而后者等于$\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}$ 因为中间的两个等于$\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}$. □

- **差和公式及其应用.**

对于有限多个数$a_k$我们有"先做差再求和"的差和公式:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1,\qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0.$$

一般地设整数 $p<q$, 则有

$$\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}-a_k)=a_{q+1}-a_p, \qquad \sum_{k=p}^{q}(a_k-a_{k-1})=a_q-a_{p-1}.$$

等等.

以后我们将看到, 这个朴素的差和公式不仅十分有用, 也是微积分基本定理的主要思想: 把整体分解为部分; 所有部分之和即为整体. 差和公式将被多次用到, 这里仅举一列:

【例】利用差和公式求$\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, ..., $\sum_{k=1}^n k^m$ (只需给出递推公式).

【解】由差和公式, 二项式定理以及求和换序性质有

$$(n+1)^{m+1}-1=\sum_{k=1}^{n}((k+1)^{m+1}-k^{m+1})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}k^j$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^j\Big)=\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^j\Big)+(m+1)\sum_{k=1}^{n}k^m$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=\frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1}-1-\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^j\Big)\right).$$

由此可知当$m=1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\Big((n+1)^2-1-n\Big)=\frac{(n+1)n}{2}.$$

当$m=2$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\Big((n+1)^3-1-\frac{3}{2}(n+1)n-n\Big)=\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

由上述递推关系还易见$\sum_{k=1}^n k^m$ 是$n$的$m+1$次多项式, 最高项$n^{m+1}$的系数为$\frac{1}{m+1}$.
□

**【等权求和、等幂乘积的重排不变性】**

设 $a_1,a_2,...,a_n$ 是 $n$ 个已编号的实数或复数. 则对任意置换$\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ 有

$$a_{\sigma(1)}+a_{\sigma(2)}+\cdots+a_{\sigma(n)}=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(n)} = a_1a_2\cdots a_n.$$

换言之, 对有限多个元素而言, 求和与求积的运算结果与元素排列的顺序无关.

【证】对$a_k$的项数$n$ 用归纳法. 当$n=1,2$时命题显然成立. 假设命题对于某个$n\geq 2$成立. 任取$a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1}\in\mathbb{C}$和置换$\sigma:\{1,2,...,n,n+1\}\to\{1,2,...,n,n+1\}$.

写$n+1=\sigma(m)$, $m\in\{1,2,...,n+1\}$. 则有$\sigma(k)\leq n, k\in\{1,2,...,n+1\}\setminus\{m\}$.

当$m=n+1$时, 则有$\sigma(k)\leq n, k=1,2,...,n$. 因此限制在$\{1,2,...,n\}$ 上, $\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ 仍是置换. 故由归纳假设有

$$\sum_{k=1}^{n+1}a_{\sigma(k)} = \Big(\sum_{k=1}^{n}a_{\sigma(k)}\Big)+a_{n+1} = \Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)+a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}a_k,$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}a_{\sigma(k)} = \Big(\prod_{k=1}^{n}a_{\sigma(k)}\Big)a_{n+1} = \Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}a_k.$$

设$m\leq n$. 若$m\geq 2$, 则令

$$\tau(k)=\sigma(k),\quad k=1,2,...,m-1;\qquad \tau(k)=\sigma(k+1),\quad k=m,m+1,...,n.$$

则$\tau:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ 是置换. 因此做适当的分解并利用归纳假设有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}a_{\sigma(k)} &= \Big(\sum_{k=1}^{m-1}a_{\sigma(k)}\Big)+a_{n+1}+\sum_{k=m+1}^{n+1}a_{\sigma(k)}\\
&= \Big(\sum_{k=1}^{m-1}a_{\tau(k)}\Big)+a_{n+1}+\sum_{k=m}^{n}a_{\sigma(k+1)}\\
&= \Big(\sum_{k=1}^{m-1}a_{\tau(k)}\Big)+a_{n+1}+\sum_{k=m}^{n}a_{\tau(k)}\\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n}a_{\tau(k)}\Big)+a_{n+1} = \Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)+a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}a_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}a_{\sigma(k)} &= \Big(\prod_{k=1}^{m-1}a_{\sigma(k)}\Big)a_{n+1}\Big(\prod_{k=m+1}^{n+1}a_{\sigma(k)}\Big)\\
&= \Big(\prod_{k=1}^{m-1}a_{\tau(k)}\Big)a_{n+1}\Big(\prod_{k=m}^{n}a_{\sigma(k+1)}\Big) = \Big(\prod_{k=1}^{m-1}a_{\tau(k)}\Big)a_{n+1}\Big(\prod_{k=m}^{n}a_{\tau(k)}\Big)\\
&= \Big(\prod_{k=1}^{n}a_{\tau(k)}\Big)a_{n+1} = \Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}a_k.
\end{aligned}$$

若$m=1$, 则令

$$\tau(k)=\sigma(k+1), \quad k=1,2,...,n.$$

则$\tau:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ 是置换. 仿上仍可证明所证等式对于$n+1$仍成立.

据归纳法原理, 所证命题对一切$n\in\mathbb{N}$成立. $\square$

## §2.9 补充内容: 辗转相除法、实数的$q$进制表示、一类无理数的稠密性

首先说两句:

**1**. 特别注意: 数学归纳法原理中的表述“对任意$n \in \mathbb{N}$, 假设$P(n)$ 成立, 则$P(n+1)$也成立”可以换成“假设$P(n)$对某个$n \in \mathbb{N}$ 成立, 则$P(n+1)$也成立”. (可用最小数原理证明.)

但是“假设对任意$n \in \mathbb{N}$都有$P(n)$ 成立, 则$P(n+1)$也成立”和“假设$P(n)$对任意$n \in \mathbb{N}$成立, 则$P(n+1)$也成立”都是错误且荒唐的表述.

**2**. 本科讲义里收集的内容和性质都是今后较常使用的.

**【命题1 (辗转相除法, 最大公约数)】**

设$m, n \in \mathbb{N}$. 若$c \in \mathbb{N}$满足$c|m, c|n$ (即$c$同时整除$m$ 和$n$), 则称$c$是$m, n$的一个公约数. 我们把$m, n$的最大公约数(**最高公约数**)记作$\mathrm{HCF}(m, n)$. 则有

**(a)** 最大公约数$\mathrm{HCF}(m, n)$可以通过辗转相除法经有限步得到.

**(b)** 设$d \in \mathbb{N}$. 则

$$d = \mathrm{HCF}(m, n) \iff d|m,\ d|n \text{ 且存在} p, q \in \mathbb{Z} \text{使得 } d = pm + qn.$$

[当$\mathrm{HCF}(m, n) = 1$ 时, 称$m, n$互素.]

【证】(a) 当$m = n$时, 显然$\mathrm{HCF}(m, m) = m$. 设$m > n$. 利用整数的带余除法, 我们做下列程序, 称为欧几里德辗转相除法, 其中自然约定: 当余数为零时, 操作停止. 以下$q_i$为正整数, $r_j$为非负整数.

第1步　$m = q_1 n + r_1, \quad 0 \le r_1 < n,$

第2步　$n = q_2 r_1 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1 \qquad$ (如果$r_1 > 0$),

第3步　$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2 \qquad$ (如果$r_2 > 0$),

第4步　$r_2 = q_4 r_3 + r_4, \quad 0 \le r_4 < r_3 \qquad$ (如果$r_3 > 0$),

........................

第$k-1$步　$r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \quad 0 \le r_{k-1} < r_{k-2} \qquad$ (如果$r_{k-2} > 0$),

第$k$步　$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, \quad 0 \le r_k < r_{k-1} \qquad$ (如果$r_{k-1} > 0$),

第$k+1$步　$r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0, \quad r_{k+1} = 0 < r_k \qquad$ (如果$r_k > 0$).

这里$r_{k+1}=0$的理由如下: 因为余数$r_1>r_2>\cdots r_j>\cdots>0$, 而有界自然数子集是有限集, 故根据操作程序的归纳法原理II可知上述辗转相除法必在有限步完成. 所以存在最小的$k\in\mathbb{N}$ 使得在第$k+1$步余数$r_{k+1}$为零.

来证明$r_k=\mathrm{HCF}(m,n)$.

先证明$r_k$ 是$m,n$的一个公约数, 即$r_k|m$ 且$r_k|n$. 当$k\le 2$ 时易见此事成立. 设$k\ge 3$. 由$r_{k-1}=q_{k+1}r_k$ 知$r_k|r_{k-1}$. 假设对于$2\le s\le k-1$ 有$r_k|r_j$, $j=s,s+1,...,k-1$. 则特别有$r_k|r_s$, $r_k|r_{s+1}$ 从而由

$$r_{s-1}=q_{s+1}r_s+r_{s+1}$$

可知$r_k|r_{s-1}$. 据归纳法原理知$r_k|r_j$ 对所有$j=1,2,...,k-1$成立. 特别有$r_k|r_1,r_k|r_2$. 于是得到

$$n=q_2r_1+r_2=n'r_k,\quad m=q_1n+r_1=m'r_k.$$

所以$r_k$ 是$m,n$的一个公约数.

其次证明$r_k$ 是$m,n$的整系数线性组合, 即

$$\text{存在 } p,q\in\mathbb{Z} \text{ 使得 } r_k=pm+qn.$$

事实上我们将证明每个$r_j$ 都是$m,n$的整系数线性组合, $j=1,2,...,k$.

仍用归纳法. 首先由

$$r_1=m-q_1n,\quad r_2=n-q_2r_1=-q_2m+(1+q_2q_1)n$$

知$r_1,r_2$ 是$m,n$的整系数线性组合. 假设对于$2\le s\le k-1$, 每个$r_j$都是$m,n$的整系数线性组合, $j=1,2,...,s$. 则特别有$r_{s-1},r_s$都是$m,n$的整系数线性组合. 于是由$r_{s+1}=r_{s-1}-q_{s+1}r_s$ 可知$r_{s+1}$ 也是$m,n$的整系数线性组合. 这就证明了每个$r_j$ 都是$m,n$的整系数线性组合, $j=1,2,...,k$. 特别得知$r_k$ 是$m,n$的整系数线性组合.

最后证明$r_k=\mathrm{HCF}(m,n)$. 设$c\in\mathbb{N}$ 是$m,n$的任一公约数. 则可写$m=m'c,n=n'c$ 从而有

$$r_k=pm+qn=(pm'+qn')c\ge c.$$

所以$r_k$是$m,n$的最大公约数. 这里用到事实: $pm'+qn'$ 是正整数因而$\ge 1$.

(b) 在(a)的证明中我们已证明了最大公约数$r_k=\mathrm{HCF}(m,n)$是$m,n$的整系数线性组合.

反之设$d \in \mathbb{N}$ 是$m, n$的一个公约数且$d$ 是$m, n$的整系数线性组合: $d = pm + qn$. 设$c$是$m, n$的任一公约数. 则可写$m = m'c, n = n'c$ 从而有$d = pm + qn = (pm' + qn')c \ge c$. 所以$d$是$m, n$的最大公约数. $\square$

**【实数的 $q$ 进制表示】**只需着重研究非负实数.

**【命题2】**设$q \ge 2$ 为自然数.

**(a)** 假设整数$k \ge 0$ 和整数$\gamma_i$ 满足$|\gamma_i| \in \{0, 1, ..., q-1\}, i = 0, 1, ..., k,$ 使得

$$\gamma_0 + \gamma_1 q + \gamma_2 q^2 + \cdots + \gamma_k q^k = 0.$$

则必有$\gamma_i = 0,\ i = 0, 1, ..., k.$

**(b)** 假设整数$k \ge 0$ 和$\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1, ..., q-1\}, i = 0, 1, ..., k$ 满足

$$\alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \cdots + \alpha_k q^k = \beta_0 + \beta_1 q + \beta_2 q^2 + \cdots + \beta_k q^k.$$

则必有$\alpha_i = \beta_i,\ i = 0, 1, ..., k.$

**(c)** 假设整数$k \ge 0, s \ge 0$ 和$\alpha_i, \beta_j \in \{0, 1, ..., q-1\}, i = 0, 1, ..., k; j = 0, 1, 2, ..., s$满足$\alpha_k \ge 1, \beta_s \ge 1$ 和

$$\alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \cdots + \alpha_k q^k = \beta_0 + \beta_1 q + \beta_2 q^2 + \cdots + \beta_s q^s.$$

则必有$k = s$ 以及$\alpha_i = \beta_i,\ i = 0, 1, ..., k.$

【证】(a): 我们对$k$用归纳法. 当$k = 0$时, (a)自动成立. 设$k = 1$. 此时有$|\gamma_0| = q|\gamma_1|$. 因整数$|\gamma_0| < q$, 这迫使整数$|\gamma_1| = 0$, 从而$\gamma_0 = 0$. 假设(a)对于某个$k \in \mathbb{N}$成立. 看$k+1$时. 如上, 此时有$|\gamma_0| = qL$ 其中$L$为**非负整数**. 因整数$|\gamma_0| < q$, 故必有$L = 0$, 从而有$\gamma_0 = 0$. 于是方程化为$0 = \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i q^i = q \sum_{i=0}^{k} \gamma_{i+1} q^i$, 即$\sum_{i=0}^{k} \gamma_{i+1} q^i = 0$. 据归纳假设便有$\gamma_{i+1} = 0, i = 0, 1, ..., k$. 所以$\gamma_i = 0, i = 0, 1, 2, ..., k+1$. 根据归纳法原理, (a)得证.

(b): 由假设有

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i - \beta_i) q^i = 0$$

且$|\alpha_i - \beta_i| \in \{0, 1, ..., q-1\}, i = 0, 1, ..., k$. 因此由(a)得知$\alpha_i - \beta_i = 0,\ i = 0, 1, ..., k.$

(c): 不妨设$k \geq s$. 假如$k > s$, 则有

$$\sum_{i=0}^{s}(\alpha_i - \beta_i)q^i + \sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i q^i = 0.$$

据(a) 知$\alpha_i - \beta_i = 0, i = 0, 1, ..., s$; $\alpha_i = 0, i = s+1, ..., k$. 特别有$\alpha_k = 0$. 这与$\alpha_k \geq 1$矛盾. 因此情况"$k > s$"不出现.

所以必有$k = s$. 此时由(b)便得$\alpha_i = \beta_i, i = 0, 1, ..., k$. □

**【命题3(实数的$q$进制表示)】**. 设$q \geq 2$为自然数. 则每个非负实数有唯一的$q$进制有限表示. 具体如下:

**(a)** 对任意自然数$m$, 存在**唯**一的整数$k \geq 0$ 和**唯**一一组整数$\alpha_i \in \{0, 1, ..., q-1\}, i = 0, 1, 2, ..., k$, 使得第$k$项$\alpha_k \geq 1$ 且

$$m = \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \cdots + \alpha_1 q + \alpha_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i q^i\,.$$

**(b)** 对任意实数$0 \leq x < 1$ , 存在**唯**一的整数列$\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{0, 1, ..., q-1\}$ 使得对任意$n \in \mathbb{N}$ 有

$$x = \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \cdots + \frac{a_n}{q^n} + \frac{\varepsilon_n(x)}{q^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{q^j} + \frac{\varepsilon_n(x)}{q^n}$$

其中$0 \leq \varepsilon_n(x) < 1$.

**(c)** 对任意实数$x \geq 1$, 存在唯一的非负整数$k$ 和**唯**一的一组整数$\alpha_i \in \{0, 1, ..., q-1\}, i = 0, 1, ..., k$ 满足第$k$项$\alpha_k \geq 1$, 以及存在**唯**一的整数列$\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in \{0, 1, ..., q-1\}$, 使得对任意$n \in \mathbb{N}$ 有

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i q^i + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{q^j} + \frac{\varepsilon_n(x)}{q^n}$$

其中$0 \leq \varepsilon_n(x) < 1$.

【证】(a): 先证$m$的$q$进制有限表示的存在性. 我们对$m$用归纳法. 当$m \in \{1, 2, ..., q-1\}$时, 可以取$\alpha_0 = m$. 假设当$m \in \{1, 2, ..., n\}$时, $m$有$q$进制有限表示, 这里$n \geq q-1$. 看$m = n+1$时. 由带余除法,有$n+1 = lq + \alpha_0$, 其中$l \in \mathbb{N}$, $\alpha_0 \in \{0, 1, ..., q-1\}$. 由$q \geq 2$易见$1 \leq l \leq n$. 据归纳假设, 对于$l$, 存在$k \in \mathbb{N}$ 和$\widetilde{\alpha}_i \in \{0, 1, ..., q-1\}, i = 0, 1, ..., k-1$, 使得$\widetilde{\alpha}_{k-1} \geq 1$, 且

$$l = \sum_{i=0}^{k-1} \widetilde{\alpha}_i q^i\,.$$

由此得到

$$n+1=lq+\alpha_0=\sum_{i=0}^{k-1}\widetilde{\alpha}_i q^{i+1}+\alpha_0=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i q^i$$

其中$\alpha_i=\widetilde{\alpha}_{i-1}, i=1,2,...,k$. 特别有$\alpha_k=\widetilde{\alpha}_{k-1}\geq 1$. 据归纳法原理, 这证明了任意自然数的$q$进制有限表示的存在性.

下证唯一性: 设$m$ 有两个上述$q$进制有限表示:

$$m=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i q^i=\sum_{i=0}^{s}\beta_i q^i.$$

则据上面命2(c)得知$k=s$ 且$\alpha_i=\beta_i, i=0,1,...,k$.

(b): 任取定$0\leq x<1$. 令$a_1=[xq], x_1=xq-a_1$. 则由$0\leq a_1\leq xq<q$ 有

$$x=\frac{a_1}{q}+\frac{x_1}{q}, \quad a_1\in\{0,1,...,q-1\}, \quad 0\leq x_1<1.$$

假设第$n$步已得到整数$a_i\in\{0,1,...,q-1\}, i=1,2,...,n$ 和$0\leq x_n<1$ 使得

$$x=\frac{a_1}{q}+\frac{a_2}{q^2}+\cdots+\frac{a_n}{q^n}+\frac{x_n}{q^n}. \tag{$*$}$$

则对$x_n$ 用样方法得到：存在$a_{n+1}\in\{0,1,,...,q-1\}$ 和$0\leq x_{n+1}<1$ 使得

$$x_n=\frac{a_{n+1}}{q}+\frac{x_{n+1}}{q}$$

从而代入上式有

$$x=\frac{a_1}{q}+\frac{a_2}{q^2}+\cdots+\frac{a_n}{q^n}+\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}+\frac{x_{n+1}}{q^{n+1}}.$$

据操作程序的归纳法原理知以上手续对每个$n$ 均可施行. 于是我们得到了整数列$\{a_j\}_{j=1}^{\infty}\in\{0,1,...,q-1\}$ 和数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1)$, 使得$x$的上面表示$(*)$对每个$n\in\mathbb{N}$ 成立. 下证$\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$的唯一性. 假设还有整数列$\{b_j\}_{j=1}^{\infty}\in\{0,1,...,q-1\}$ 和数列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1)$, 也满足对每个$n\in\mathbb{N}$ 有

$$x=\frac{b_1}{q}+\frac{b_2}{q^2}+\cdots+\frac{b_n}{q^n}+\frac{y_n}{q^n}.$$

则对任意$n\in\mathbb{N}$ 有

$$a_1q^{n-1}+a_2q^{n-2}+\cdots+a_n+x_n=q^n x=b_1q^{n-1}+b_2q^{n-2}+\cdots+b_n+y_n$$

从而有

$$(b_1-a_1)q^{n-1}+(b_2-a_2)q^{n-2}+\cdots+b_n-a_n=x_n-y_n$$

因这等式左边是整数而$|x_n - y_n| < 1$, 故必有$x_n - y_n = 0$. 于是得到

$$b_1 q^{n-1} + b_2 q^{n-2} + \cdots + b_n = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \cdots + a_n.$$

由命题2 知$b_i = a_i, i = 1, 2, ..., n$. 因$n \in \mathbb{N}$是任意的, 这就证明了$b_i = a_i$对所有$i = 1, 2, 3, ...$ 成立. 至此我们证明了整数列$\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in \{0, 1, ..., q-1\}$ 和数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1)$都由$x$唯一确定. 于是在$(*)$中将$x_n$记作$x_n = \varepsilon_n(x)$ 即完成了(b)的证明.

(c): 设$x \geq 1$. 令$m = [x]$, $x_* = x - m$. 则$m \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_* < 1$ 且$x = m + x_*$. 对$m, x_*$分别应用(a),(b)并应用命题2以及"若一整数的绝对值$< 1$ 则该整数必为0"即知(c) 成立(具体演算是容易的, 从略). $\square$

**【例】**自然数的10-进制表示:

$$a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0 := a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0\,, \quad a_i \in \{0, 1, ..., 9\}.$$

如果最高项系数$a_{k-1} \geq 1$, 则这些数恰是$k$位10-进制自然数, 它们的最大者为$10^k - 1$, 即

$$\max\{a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0 \,|\, a_i = 0, 1, ..., 9;\ a_{k-1} \geq 1\} = \underbrace{99...9}_{k\text{个}} = 10^k - 1$$

这是因为

$$\underbrace{99...9}_{k\text{个}} = 9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10 + 9 = 9(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}) = 9\frac{10^k - 1}{9}\,.$$

**【例】**自然数的2-进制表示:

$$b_{n-1}b_{n-2}...b_1b_0 := b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \cdots + b_1 2 + b_0\,, \quad b_i \in \{0, 1\}\,.$$

如果最高项系数$b_{n-1} = 1$, 则这些数恰是$n$位2-进制自然数, 它们的最大者为$2^n - 1$, 即

$$\max\{b_{n-1}b_{n-2}...b_1b_0 \,|\, b_i = 0, 1;\ b_{n-1} = 1\} = \underbrace{11...1}_{n\text{个}} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1.$$

• **10-进制数码的长度与2-进制数码的长度之间的估计.**

令$k, n \in \mathbb{N}$. 设$A_k$是长度为$k$的10-进制数码的集合, $B_n$是长度为$n$的2-进制数码的集合, 即

$$A_k = \{a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0 \mid a_i \in \{0, 1, ..., 9\},\ \ i = 0, 1, ..., k-1\},$$

$$B_n = \{b_{n-1}b_{n-2}...b_1b_0 \mid b_i \in \{0,1\},\;\; i = 0,1,...,n-1\}.$$

注意, $A_k, B_n$都包含了最高位的系数$= 0$的数码. 例如$A_k$中包含数码

$$00a_{k-3}...a_1a_0 = a_{k-3}...a_1a_0, \quad 00...0a_1a_0 = a_1a_0, \quad \text{etc.}$$

我们有

$$\min A_k = \underbrace{00...0}_{k\text{个}} = 0\,, \quad \max A_k = \underbrace{99...9}_{k\text{个}} = 10^k - 1,$$
$$\min B_n = \underbrace{00...0}_{n\text{个}} = 0\,, \quad \max B_n = \underbrace{11...1}_{n\text{个}} = 2^n - 1.$$

由此可知, 将数码写成整数后, 有

$$A_k = \{0,1,2,3,...,10^k - 1\}, \qquad B_n = \{0,1,2,3,...,2^n - 1\},$$

$$\text{card}A_k = 10^k, \quad \text{card}B_n = 2^n.$$

让我们通过$10^k \approx 2^n$ 来确定$k, n$的关系.[1] 考虑两类估计: $2^{n-1} < 10^k < 2^n$ 与$10^{k-1} < 2^n < 10^k$. 注意到区间族$\{[2^{n-1}, 2^n)\}_{n=1}^{\infty}$比区间族$\{[10^{k-1}, 10^k)\}_{k=1}^{\infty}$把$\mathbb{N}$ 划分得更细, 所以使用第一类估计式$2^{n-1} < 10^k < 2^n$才是合适的. 事实上满足$10^{k-1} < 2^n < 10^k$ 的$2^n$一般不止一个, 例如$10 < 2^4 < 2^5 < 2^6 < 10^2$. 容易证明

$$2^{n-1} < 10^k < 2^n \iff n-1 < ck < n \iff n = [ck] + 1; \quad c = \frac{\log 10}{\log 2} = 3.32\ldots.$$

由这一估计得知

$$B_{n-1} \subset_{\neq} A_k \subset_{\neq} B_n.$$

也即

$$\{0,1,2,3,...,2^{n-1} - 1\} \subset_{\neq} \{0,1,2,3,...,10^k - 1\} \subset_{\neq} \{0,1,2,3,...,2^n - 1\} \qquad (*)$$

其中$n = [ck] + 1$. 在最一般的情况下(也即如果没有特殊要求), 这就是最好的估计. 作为一个应用, 我们研究

• **最少判断次数问题**: 给定$k \in \mathbb{N}$. 设$A_k$是长度为$k$的10-进制数码的集合. 问题: 为了确定$A_k$中任一给定的数码$a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0$, 一般来说最少需要多少次“是/否”判断?

分析: 如果是长度为$n$的2-进制数码$b_{n-1}b_{n-2}...b_1b_0$, 则只需依次问每个$b_i$是否为1即可(即不必问是否为0, 因为不是1便是0), 也即只需$n$次判断. 但对于10-进制数

[1] **注意, 由**$10^p = 2^p5^p$**易见**$10^p \neq 2^q$**, 其中**$p, q$**为任意非负整数, 不全为零**.

码$a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0$, 若按此方式, 则对每个$a_i$ 需要问9次, 例如问$a_i$ 是否为1, 是否为2,..., 是否为9(但不必问是否为0). 因此对长度为$k$的10-进制数码来说, 每个位数上要问9次, 因此总共要问$9+9+\cdots+9=k9$次, 也即需要$9k$次判断.

现在让我们利用(*) 事先把$A_k$中所有10-进制数码$a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0$翻译成$B_n$中的2-进制数码, 即做转换

$$a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0 = b_{n-1}b_{n-2}..._1b_0, \quad a_i \in \{0,1,...,9\}, \quad b_j \in \{0,1\}$$

其中$n=[ck]+1$. [ 这个转换是有规律的, 借助计算机容易做到, 且已建立了数码转换库.] 那么对于给定的10-进制数码$x=a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0$, 将其表示为2-进制数码$x=b_{n-1}b_{n-2}..._1b_0$ 后, 就只需(从左至右)依次问: $x$的2-进制表示中的第1位是否为1, 第2位是否为1, ..., 第$n$位是否为1即可, 也即只需问$n=[ck]+1$次, 它比指数量级$9k$实质性地减少了工作量. 实际上不难看出, 在10-进制方式的$9k$次判断中, 很多信息是重叠的, 浪费很大. 而2-制方式则几乎不出现信息重叠, 因此是最经济的. 几个数码长度较小的例子如下:

$k=4$: $n=[c4]+1=14$, $9\cdot 4=36$.

$k=7$: $n=[c7]+1=24$, $9\cdot 7=63$.

$k=8$: $n=[c8]+1=27$, $9\cdot 8=72$.

在上述对2-进制数码的判断中, 回答"是" 对应于1, 回答"否" 便对应于0. 例如对于一个长度为4的10-进制数码$a_3a_2a_1a_0$, 用2-进制方式确定之, 只需14次问答, 也即$a_3a_2a_1a_0=b_{13}b_{12}...b_1b_0$ 其中一切$b_i=0$ 或1. 例如若回答为

"否,否,是,是,否,否,是,否,是,是,否,是,是,否", 则它对应于"00110010110110". 借助整数换算即得

$$00110010110110 = 2^{11}+2^{10}+2^7+2^5+2^4+2^2+2 = 3244 = 3\cdot 10^3+2\cdot 10^2+4\cdot 10+4\cdot 1.$$

因此$a_3a_2a_1a_0=3244$. 又例如若回答为

"否,否,否,否,否,否,否,是,否,是,否,否,是,是", 则它对应于"00000001010011". 利用整数换算得到

$$00000001010011 = 2^6+2^4+2+1 = 83 = 0\cdot 10^3+0\cdot 10^2+8\cdot 10+3\cdot 1 = 0083.$$

因此$a_3a_2a_1a_0=0083$.

逻辑上看, 2-进制就是0-1 律, 即排中律. 而3-进制和更高进制就不是排中律, 它有中间状态, 导致复杂度很高. 这就是为什么计算机使用2-进制的根本原因. 当然, 0-1律(排中律)有些粗糙武断, 但只要把问题分得够细, 就能弥补这个不足.

**关于数集$\{p+q\alpha \mid p,q\in\mathbb{Z}\}$ 在$\mathbb{R}$中的稠密性, 这里$\alpha$ 是任一无理数.**

不失一般性我们考虑$\alpha>0$的情形.

**【命题4】**. 设$\alpha>0$ 为无理数. 则对任意自然数$M$, 存在$D_M>M$ 使得对任意自然数$N>D_M$ 都存在自然数$p,q$ 使得

$$0<|q\alpha-p|<\frac{1}{N}\quad \text{且}\quad M<q\le N.$$

【证】任给定自然数$M$, 令

$$E_M=\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid |q\alpha-p|\le M|\alpha-1|,\ q\le M\}.$$

由$(1,1)\in E_M$知$E_{M,\alpha}$非空, 且当$(p,q)\in E_M$ 时有

$$p\le |q\alpha-p|+q\alpha\le M(|\alpha-1|+\alpha).$$

因此

$$E_{M,\alpha}\subset\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid p\le M(|\alpha-1|+\alpha),\ q\le M\}.$$

因后者是有限集, 故$E_M$ 是有限集. 令

$$\delta_M=\min_{(p,q)\in E_M}|q\alpha-p|.$$

由$\alpha$ 是无理数知$\delta_M>0$. 令$D_M=\max\{\frac{1}{\delta_M},\ M,\ \frac{1}{M|\alpha-1|},\ \frac{1}{\alpha}\}$.

对任意自然数$N>D_M$, 考虑$N+1$个小数$\theta_k=k\alpha-[k\alpha]$, $k=0,1,2,...,N$. 因$\alpha$是无理数, 故$\theta_k$ **互不相同**. 又因

$$\theta_k\in[0,1)=\bigcup_{i=1}^{N}\Big[\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\Big),\quad k=0,1,2,...,N.$$

故由鸽笼原理, 存在$k,j\in\{0,1,2,...,N\}$, $k\ne j$, 和$i\in\{1,2,...,N\}$ 使得$\theta_k,\theta_j\in\Big[\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\Big)$. 于是有

$$0<|(j-k)\alpha-([j\alpha]-[k\alpha])|=|\theta_j-\theta_k|<\frac{1}{N}.$$

不妨设$k < j$. 则由$\alpha > 0$ 和函数$x \mapsto [x]$的单调不减性可知$[k\alpha] \le [j\alpha]$. 取$q = j-k, p = [j\alpha]-[k\alpha]$, 则有$q \in \{1,2,...,N\}, p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, 且

$$0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{N} < \min\{\delta_M,\, M|\alpha-1|,\, \alpha\}.$$

从这一不等式易见$p > 0$, 否则, $p = 0$, 则得出$q\alpha < \alpha$, 矛盾于$q \ge 1$. 因此$p \in \mathbb{N}$. 同时再由上述不等式和$E_M$, $\delta_M$的定义还知必有$q > M$. 否则, $q \le M$, 则有$(p,q) \in E_M$ 从而应有$|q\alpha - p| \ge \delta_M$, 它与$|q\alpha - p| < \delta_M$矛盾. $\square$

【**命题5**】设$\alpha > 0$ 为无理数. 则数集$\{n\alpha - [n\alpha]\}_{n=1}^{\infty}$ 在$[0,1]$ 中稠密. 进一步还有: 对任意$x \in [0,1]$, 存在严格递增的自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$\{[n_k\alpha]\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 也是严格递增的且

$$\lim_{k\to\infty}(n_k\alpha - [n_k\alpha]) = x.$$

【证】**Step 1**. 来证明, 若$n, m \in \mathbb{Z}$, 则有蕴含关系:

$$0 < n\alpha - m < 1 \quad\Longrightarrow\quad m = [n\alpha].$$

事实上由$0 < n\alpha - m < 1$有$n\alpha - 1 < m < n\alpha$. 将其与$n\alpha - 1 < [n\alpha] < n\alpha$比较可知$m = [n\alpha]$.

**Step 2**. 证明: 对任意$0 < x < 1$, 任意$\varepsilon > 0$ 和任意自然数$M$, 存在自然数$n$ 使得

$$|n\alpha - [n\alpha] - x| < \varepsilon \quad 且 \quad n > M.$$

设$D_M > M$ 是上面命题4 中给出的实数. 取自然数$N$ 满足

$$N > \max\Big\{D_M,\, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\Big\}.$$

由命题4, 存在自然数$p, q$ 使得

$$0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{N} \quad 且 \quad M < q \le N.$$

情形1: $q\alpha - p > 0$. 此时由$0 < q\alpha - p < \frac{1}{N} < x$ 知

$$k := \Big[\frac{x}{q\alpha - p}\Big] \ge 1.$$

令$r = \frac{x}{q\alpha - p} - k$. 则$0 \le r < 1$ 且$x - k(q\alpha - p) = r(q\alpha - p)$,

$$|k(q\alpha - p) - x| = r(q\alpha - p) < q\alpha - p < \frac{1}{N}.$$

同时有

$$1 > x \ge k(q\alpha - p) = x - r(q\alpha - p) > x - (q\alpha - p) > x - \frac{1}{N} > 0.$$

据Step 1 知$kp = [kq\alpha]$. 于是取$n = kq$ 便有

$$|n\alpha - [n\alpha] - x| = |k(q\alpha - p) - x| < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

情形2: $q\alpha - p < 0$. 此时由$0 < p - q\alpha < \frac{1}{N} < 1 - x$ 知

$$k := \left[\frac{1 - x}{p - q\alpha}\right] \ge 1.$$

令$r = \frac{1-x}{p-q\alpha} - k$. 则$0 \le r < 1$ 且$r(p - q\alpha) = 1 - x - k(p - q\alpha) = 1 - x + k(q\alpha - p)$,

$$|k(q\alpha - p) + 1 - x| = r(q\alpha - p) < q\alpha - p < \frac{1}{N}.$$

同时有

$$0 < x \le k(q\alpha - p) + 1 = x + r(p - q\alpha) < x + (p - q\alpha) < x + \frac{1}{N} < 1.$$

据Step 1 知$kp - 1 = [kq\alpha]$. 于是取$n = kq$, 则有

$$|n\alpha - [n\alpha] - x| = k(q\alpha - p) + 1 - x < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

注意在以上两种情形中, $n$都取作$n = kq$的形式, 其中$k \in \mathbb{N}$. 因此在两种情形中都有$n \ge q > M$.

**Step 3**. 证明: 对任意$x \in [0, 1]$, 任意$\varepsilon > 0$ 和任意自然数$M$, 存在自然数$n$ 使得

$$|n\alpha - [n\alpha] - x| < \varepsilon \quad 且 \quad n > M.$$

当$0 < x < 1$时, 这是Step 2 的结果. 设$x = 0$. 任给$\varepsilon > 0$. 可以要求$0 < \varepsilon < 1$ (否则以$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, 1/2\}$ 代替$\varepsilon$). 对小数$0 < \frac{\varepsilon}{2} < 1$, 由Step 2, 对任意自然数$M$, 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得

$$|n\alpha - [n\alpha] - \frac{\varepsilon}{2}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 且 \quad n > M$$

从而有

$$0 < n\alpha - [n\alpha] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad 且 \quad n > M.$$

最后设$x = 1$. 任给$\varepsilon > 0$, 可以要求$0 < \varepsilon < 1$. 对小数$0 < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$, 由Step 3, 对任意自然数$M$, 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得

$$|n\alpha - [n\alpha] - (1 - \frac{\varepsilon}{2})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 且 \quad n > M$$

从而有

$$|n\alpha - [n\alpha] - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad 且 \quad n > M.$$

**Step 4**. 任给$x \in [0, 1]$, 来证明命题中所说的收敛性.

对于任意给定的$x \in [0, 1]$, 在Step 3 中依次取$\varepsilon = \frac{1}{k}, M = k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, 我们得到自然数序列$\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$|m_k\alpha - [m_k\alpha] - x| < \frac{1}{k} \quad 且 \quad m_k > k, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

由$\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 趋于$+\infty$, 我们可以抽出一个严格递增的子列$\{m_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 即$1 < m_{k_1} < m_{k_2} < m_{k_3} < \cdots$. 又由$\alpha > 0$ 和$[m_{k_j}\alpha] > m_{k_j}\alpha - 1$ 可知$\{[m_{k_j}\alpha]\}_{j=1}^{\infty}$ 趋于$+\infty$. 因此可以从$\{[m_{k_j}\alpha]\}_{j=1}^{\infty}$抽出一个严格递增的子列$\{[n_i\alpha]\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, 其中$n_i = m_{k_{j_i}}, i = 1, 2, 3, \dots$. 于是$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}, \{[n_i\alpha]\}_{i=1}^{\infty}$ 都是严格递增的自然数序列且有

$$\lim_{i\to\infty}(n_i\alpha - [n_i\alpha]) = \lim_{k\to\infty}(m_k\alpha - [m_k\alpha]) = x.$$

命题证毕. $\square$

【**命题6**】设$\alpha > 0$ 为无理数. 则集合$\{n - m\alpha \mid n, m \in \mathbb{N}\}$在$\mathbb{R}$中稠密. 详细来说, 对任意$x \in \mathbb{R}$, 存在两个严格递增的自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}, \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}(n_k - m_k\alpha) = x.$$

【证】对于小数$r := -x - [-x] \in [0, 1)$, 由上面命题5, 存在严格递增的自然数序列$\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$\{[m_k\alpha]\}_{k=1}^{\infty}$也是严格递增的自然数序列且$|m_k\alpha - [m_k\alpha] - r| \to 0\,(k \to \infty)$. 令

$$n_k = [m_k\alpha] - [-x], \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

则有

$$|n_k - m_k\alpha - x| = |m_k\alpha - [m_k\alpha] - r| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

因$n_k = [m_k\alpha] - [-x] \to +\infty\,(k \to \infty)$, 故存在$N \in \mathbb{N}$ 使得当$k > N$时, $n_k \geq 1$. 于是$\{n_k\}_{k=N+1}^{\infty}$, $\{m_k\}_{k=N+1}^{\infty}$ 都是严格递增的自然数序列. 做下标平移并将$\{n_{k+N}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m_{k+N}\}_{k=1}^{\infty}$ 分别仍记作$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. 则$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都是严格递增的自然数序列且有$\lim\limits_{k\to\infty} |n_k - m_k\alpha - x| = 0$. 命题证毕. $\square$

**【例】**设$r > 0$ 为有理数. 则集合$\{nr - 2m\pi \mid n, m \in \mathbb{N}\}$在$\mathbb{R}$中稠密. 详细来说, 对任意$\theta \in \mathbb{R}$, 存在两个严格递增的自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}, \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}(n_k r - 2m_k\pi) = \theta.$$

**【证】**承认$\pi$是无理数(以后给证明). 因$r > 0$是有理数, 故$\alpha := \frac{2\pi}{r} > 0$ 是无理数. 对任意$\theta \in \mathbb{R}$, 对$\frac{\theta}{r}$, 由上面命题6 知存在两个严格递增的自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}, \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}(n_k - m_k\alpha) = \frac{\theta}{r}.$$

由此和$n_k r - 2m_k\pi = r(n_k - m_k\alpha)$ 即得

$$\lim_{k\to\infty}(n_k r - 2m_k\pi) = r\lim_{k\to\infty}(n_k - m_k\alpha) = \theta. \qquad \square$$

**【例】**集合$\{(\cos n, \sin n)\,|\, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$在单位圆周$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,|\, x^2 + y^2 = 1\}$上稠密, 即对任意$(x, y) \in \mathbb{S}^1$ 存在严格递增的自然数列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$使得

$$|(\cos n_k, \sin n_k) - (x, y)| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

本题的意思是说, 让圆周$\mathbb{S}^1$上的动点从$x$-轴$(1, 0)$处出发沿逆时针方向在圆周上跳跃, 每次跳动1 弧度的整数倍, 那么这动点可以跳到圆周上任意点的任意邻域中.

**【证】**我们将提前使用不等式$|\sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha - \beta|, |\cos\alpha - \cos\beta| \leq |\alpha - \beta|$, 其证明在后几章给出.

任取$(x, y) \in \mathbb{S}^1$, 存在$\theta \in [0, 2\pi]$使得$x = \cos\theta, y = \sin\theta$. 对任意$n, m \in \mathbb{N}$, 由三角函数以$2\pi$为周期得到

$$|(\cos n, \sin n) - (x, y)| = |(\cos n - \cos\theta, \sin n - \sin\theta)|$$

$$
\begin{aligned}
&\le |\cos n - \cos\theta| + |\sin n - \sin\theta| \\
&= |\cos(n-2\pi m) - \cos\theta| + |\sin(n-2\pi m) - \sin\theta| \\
&\le 2|(n-2\pi m) - \theta|.
\end{aligned}
$$

由上一例题知存在两个严格递增的自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}, \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty}(n_k - 2m_k\pi) = \theta$. 于是得到

$$
|(\cos n_k, \sin n_k) - (x,y)| \le 2|(n_k - 2\pi m_k) - \theta| \to 0 \quad (k\to\infty). \qquad \square
$$

**以下是2016-9-30习题课的题目**

【题1】

(1) 对于$n\in\mathbb{N}$, 设$\mathbb{P}_n$ 是有理系数$n$次多项式$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,(a_k\in\mathbb{Q})$ 的集合. 证明$\mathbb{P}_n$ 是可数集.

(2) 设$\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_n$ 是次数$\ge 1$的有理系数多项式的集合. 证明$\mathbb{P}$ 是可数集.

(3) 次数$n\ge 1$的有理系数多项式方程$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$的根(可能是复根) 称为代数数. 证明代数数的全体是一个可数集.

(4) 不是代数数的复数叫做超越数. 证明超越数的全体不是可数集, 且实际上它具有连续统, 即它与$\mathbb{R}$有相同基数.

【题2】设$E\subset\mathbb{R}, f: E\to\mathbb{R}$.

我们称$f$在$E$ 上有界如果象集$f(E) = \{f(x)\,|\,x\in E\}$ 是有界集. 易见 $f$ 在$E$ 上有界等价于: 存在$0 < M < +\infty$ 使得$|f(x)| \le M \quad \forall x\in E$.

我们称$f$在$E$上局部有界, 如果对每个$x\in E$, 存在$\delta > 0$ 使得$f$在$E\cap(x-\delta, x+\delta)$ 上有界.

现在设$E = [a,b]$ 为一个有界闭区间. 证明$f$在$[a,b]$ 上有界$\Longleftrightarrow$ $f$在$[a,b]$ 上局部有界.

【题3】任取实数$x \in \mathbb{R}$. 证明对任意$\varepsilon > 0$ 对任意$M > 0$ 存在$p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N}$, $(|p|, q) = 1$ (即$|p|, q$ 互质), 使得

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \varepsilon \quad 且 \quad \min\{|p|, q\} > M.$$

【题4(构造局部无界的函数)】设函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} \min\{|p|, q\} & \text{if } \ x = \frac{p}{q} \ \text{ with } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \ q \in \mathbb{N} \ \text{ and } \ (|p|, q) = 1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明$f$ 局部无界, 即对每个$x \in \mathbb{R}$ 和每个$\varepsilon > 0$ 都有$\sup\limits_{y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} f(y) = +\infty$.

【题5(有限$\varepsilon$-网)】设$E \subset \mathbb{R}$ 为一个有界集. 证明: 对任意$\varepsilon > 0$ 存在$n \in \mathbb{N}$ 和$x_1, x_2, ..., x_n \in E$ 使得$E \subset \bigcup_{k=1}^{n}(x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon)$.

【题6(可数覆盖)】设$\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一族开区间. 则存在可数集$\{\alpha_n\}_{n \geq 1} \subset A$ 使得

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = \bigcup_{n \geq 1} I_{\alpha_n}.$$

这里$\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$表示有限集$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\}$ 或可数无限集$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\}$, $\bigcup_{n \geq 1}$ 表示有限并$\bigcup_{n=1}^{N}$ 或可数无限并$\bigcup_{n=1}^{\infty}$.

【题7】

(1) (**重排的应用**) 设实数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足

$$|x_m - x_n| > \max\{1/n, 1/m\} \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N} \ \text{ with } \ n \neq m.$$

证明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$无界.

(2) **问题**: (1)中的max 能否改进为min ? 意即是否存在有界的实数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$|x_m - x_n| > \min\{1/n, 1/m\} \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N} \ \text{ with } \ n \neq m. \qquad ?$$