第四讲选作题解答 杨利军 2017年10月25日

问题： 设函数 $f(t)$ 在实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界, $|f(t)|\leq m$, $\forall t\in(-\infty,+\infty)$. 设 $\lambda_2<\lambda_1<0$ 为二阶线性齐次方程 $x''+ax'+bx=0$ 的两个特征根, 其中 a 和 b 均为实常数.

1) 证明非齐次方程 $x''+ax'+bx=f(t)$ 有且仅有一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界解, 并求出这个有界解. 以下记这个有界解为 $x^*(t)$.

2) 证明方程 $x''+ax'+bx=f(t)$ 的任何解 $x(t)$ 均满足 $\lim_{t\to+\infty}[x(t)-x^*(t)]=0$.

3) 当 $f(t)$ 为 ω 周期函数时, 有界解 $x^*(t)$ 也是 ω 周期的.

注：这道选作题是菲利波夫习题 629 的重新表述. 这题可与菲利波夫习题 181 作比较. 菲利波夫关于题 629 给了一个提示. 我体会这个提示的意思是： 利用一般非齐次二阶线性方程解的通解作讨论, 而不是利用常数变易法再推导一遍.

证明： 根据假设知齐次方程 $x''+ax'+bx=0$ 有基本解组 $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$, 对应的 Wronsky 行列式为

$$w(t)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t},$$

以及函数 $w(t,s)$ 为

$$w(t,s)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 s} & e^{\lambda_2 s} \\ e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=e^{\lambda_2 t+\lambda_1 s}-e^{\lambda_1 t+\lambda_2 s}.$$

于是齐次方程 $x''+ax'+bx=0$ 的 Cauchy 函数为

$$H(t,s)=\frac{w(t,s)}{w(s)}=\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

于是非齐次方程 $x''+ax'+bx=f(t)$ 的通解为

$$x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+x_p(t), \tag{1}$$

其中特解 $x_p(t)$ 由下式给出

$$x_p(t):=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t[e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}]f(s)ds.$$

以下我们来考查一般解 $x(t)$ 在实轴上的有界性.

注意解 $x(t)$ 的齐次解部分 $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$ 对于任何常数 c_1, c_2, 在区间 $[0,+\infty)$ 上均有界. 因为 $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}\to 0$, 当 $t\to+\infty$. 我们再来考虑特解 $x_p(t)$. 将 $x_p(t)$ 表达式改写如下

$$x_p(t)=\frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}f(s)ds-\frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t e^{-\lambda_2 s}f(s)ds.$$

由于

$$\left|e^{\lambda_1 t}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}f(s)ds\right|\le me^{\lambda_1 t}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}ds=\frac{m}{|\lambda_1|}(1-e^{\lambda_1 t})\le\frac{m}{|\lambda_1|},\quad\forall t\ge 0.$$

同理有

$$\left|e^{\lambda_2 t}\int_0^t e^{-\lambda_2 s}f(s)ds\right|\le\frac{m}{|\lambda_2|},\quad\forall t\ge 0.$$

这表明方程的每个解在区间 $[0,\infty)$ 上均有界.

以下考虑解 $x(t)$ 在 $(-\infty,0]$ 上的有界性. 我们将通解式 (1) 改写如下

$$x(t)=e^{\lambda_1 t}\left(c_1+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}f(s)ds\right)+e^{\lambda_2 t}\left(c_2-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t e^{-\lambda_2 s}f(s)ds\right).\tag{2}$$

由于 $\lambda_2<\lambda_1<0$, 故 $e^{\lambda_i t}\to+\infty$, 当 $t\to-\infty$ 时, $i=1,2$. 因此解 $x(t)$ 在 $(-\infty,0]$ 上有界的必要条件是对 $i=1,2$

$$c_i+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t e^{-\lambda_i s}f(s)ds\to 0,\quad t\to-\infty,\quad i=1,2.$$

也就是说, 只有当常数 c_1, c_2 取如下特殊值时

$$c_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_i s}f(s)ds,\quad c_2=\frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_2 s}f(s)ds,\tag{3}$$

对应的解才可能在 $(-\infty,0]$ 上有界. 将由式 (3) 定义的常数 c_1, c_2 代入式 (2) 得到一个特解

$$x^*(t):=\frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 s}f(s)ds-\frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_2 s}f(s)ds\tag{4}$$

将上式的两个积分和在一起, 并且做一个变量替换, 则可得到特解 $x_0(t)$ 的一个更紧凑的形式

$$x^*(t)=\int_{-\infty}^t\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)ds=\int_0^{+\infty}\frac{e^{\lambda_1 u}-e^{\lambda_2 u}}{\lambda_1-\lambda_2}f(t-u)du.\tag{5}$$

由式 (5) 可以看出解 $x^*(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 由前所述, 这样的有界解最多只有一个. 至此, 结论 1) 得证.

证2): 由于非齐次方程 $x'' + ax' + bx = f(t)$ 的任何解 $x(t)$ 可以表为

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} + x^*(t),$$

其中a, b 为两个常数. 因此 $x(t) - x^*(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} \to 0$, 当 $t \to +\infty$ 时. 结论 2) 得证.

证3): 当 $f(t)$ 为 ω 周期函数时, 根据式 (5) 立刻可以看出, 有界解 $x^*(t)$ 也是 ω 周期的. 证毕.