数学分析讲义: 第十三章 Fourier分析引论

讲课教材:《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书:《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; **《数学分析》徐森林、薛春华** 编著, 共三册，清华大学出版社;《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Dec. 2017

数学分析讲义总目录

第一章 经典逻辑, 集合与映射. 第二章 实数与复数. 第三章 极限与级数. 第四章 连续函数类和其他函数类. 第五章 一元微分学. 第六章 一元函数的Riemann积分. 第七章 点集拓扑初步. 第八章 多元微分学. 第九章 可测空间与测度. 第十章 $\mathbb{R}^n$ 上的积分(I). 第十一章 曲面, $\mathbb{R}^n$上的积分(II). 第十二章 微分形式的积分, 场论初步.

第十三章 **Fourier** 分析引论

Fourier 分析由两块组成: Fourier级数和Fourier变换, 它们是数学各分支(基础、应用、计算、概率统计等)和物理、力学等自然科学中最重要的基本工具. 原因是: 研究中最难的部分是如何描述研究对象的震荡行为, 而Fourier级数和Fourier变换是描述震荡行为的最简单、最普适的有效工具. 虽然近二十几年发展起来的小波理论对Fourier级数和Fourier变换做了本质性的重要推广, 但理论和经验表明, 经典Fourier级数和Fourier 变换由于其简单、完美的结构, 仍然是最好用的分析工具.

由于学时限制也由于后面学习实变函数时会学到Fourier变换, 本章只讲Fourier级数. 二者的关系是"离散"与"连续"的关系. 当然一般是先学习"离散", 即Fourier级数.

传统教学一般是将Lebesgue 积分理论的学习放在在数学分析之后, 因此一般数学分析教材对Fourier级数这块就安排为先讲函数的周期性, 从周期函数出发引出正弦函数、余弦函数及其线性叠加, 然后学习如何将连续的周期函数展开成正弦、余弦函数的无穷级数, 即经典的三角函数级数, 最后才讲三角级数的平方平均收敛. 这个做法大体上合理, 但略有误导嫌疑：它可能使学生感到若所考虑的函数不是周期函数, 则无法使用三角级数. 实际上, 我们之所以考虑周期函数, 仅仅是因为$(-\pi,\pi)$上的正交函数系

$$e^{\mathrm{i}kx}=\cos(kx)+\mathrm{i}\sin(kx),\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

恰好也是2π-周期函数系. 但在有界闭区间上定义的任何函数都可以被延拓成周期函数, 因此总可以被放在三角级数范围内研究. 除了三角函数正交系, 还有哈尔函数正交系、小波函数正交系、勒让德多项式正交系、埃尔米特多项式正交系, 等等, 其中大多数都不是周期函数系. 换言之, 描述函数周期性变化只是Fourier级数或广义Fourier级数的小部分功能, 远非主要功能.

广义Fourier级数(简称为Fourier级数) 是一类常用的完备的内积空间(即Hilbert 空间)的主要研究对象. 下面我们就从内积空间和其上Fourier级数的概念开始.

需说明: 由于我们遇到的绝大部分内积空间都是完备的(即是Hilbert 空间)而且多为函数空间, 故我们对一般的内积空间也使用记号$\mathcal{H}$, 而用f,g等表示$\mathcal{H}$中的元素.

§13.1 内积空间和广义Fourier级数

【定义(内积空间)】设$\mathcal{H}$ 是实数域$\mathbb{R}$ 或复数域$\mathbb{C}$上的一个线性空间. 为了应用方便,我们直接考虑复数域的情形(实的情形更简单,只要在共轭运算中去掉共轭符号即可). 假设存在二元函数(叫做内积运算) $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 满足

(i) 正定性: $\langle f,f\rangle \ge 0 \quad \forall f\in\mathcal{H}; \quad \langle f,f\rangle = 0 \iff f=0.$

(ii) 共轭对称性: $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle} \quad \forall f,g\in\mathcal{H}.$

(iii) 对第一变元的线性:

$$\langle \alpha f+\beta g,h\rangle = \alpha\langle f,h\rangle + \beta\langle g,h\rangle \qquad \forall f,g,h\in\mathcal{H},\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

[这蕴含**对第二变元的共轭线性:**

$$\langle h,\alpha f+\beta g\rangle = \overline{\alpha}\langle h,f\rangle + \overline{\beta}\langle h,g\rangle \qquad \forall f,g,h\in\mathcal{H},\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$]

则称$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间. 在$\mathcal{H}$中, 称由$\|f\| := \sqrt{\langle f,f\rangle}$定义的$\|\cdot\|$是由$\mathcal{H}$的内积诱导的范数. 在$\mathcal{H}$ 中定义依范数收敛为

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \ \text{ in norm } \iff \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0.$$

进一步, 若$\mathcal{H}$ 还满足

(iv) 完备性: $\mathcal{H}$ 关于由内积诱导的范数$\|\cdot\|$是完备的, 即$\mathcal{H}$ 中的Cauchy列必在$\mathcal{H}$中收敛, 即若$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{H}$ 满足Cauchy 条件:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \text{for all } n,m\ge N$$

则存在$f\in\mathcal{H}$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$.

则称$\mathcal{H}$ 是一个**完备的内积空间**或**Hilbert空间.** □

【注】需要说明上述$\|\cdot\|$ 确实是$\mathcal{H}$上的一个范数. 我们把这概括到下列命题中.

【命题13.1(范数、内积的连续性)】设$(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间. 则

(a) 由$\|f\| := \sqrt{\langle f,f\rangle}$ 定义的$\|\cdot\|$ 确是$\mathcal{H}$上的一个范数, 即$\|\cdot\|$ 满足下列(i)-(iii):

(i) 正定性: $\|f\|\ge 0; \quad \|f\| = 0 \iff f=0.$

(ii) 正齐次性: $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|, \quad f\in\mathcal{H},\ \lambda\in\mathbb{C}.$

(iii) 三角不等式：$\|f+g\| \le \|f\|+\|g\|$.

此外有**Cauchy不等式**:

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\|g\|. \tag{1.1}$$

(b) 范数和内积的连续性:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,\ \lim_{n\to\infty} g_n = g \ \text{ in norm } \implies \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|,\ \ \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle = \langle f, g\rangle.$$

【证】(a): 正定性和正齐次性可由内积和范数的定义直接导出. 为证三角不等式需先证Cauchy不等式(1.1). 若$f=0$, 则$\langle f,g\rangle = \langle 0f, g\rangle = 0\langle f,g\rangle = 0$. 此时(1.1)成立. 设$f\neq 0$. 先设$\langle f,g\rangle$是实数. 此时有

$$0 \le \|tf+g\|^2 = t^2\|f\|^2 + 2t\langle f,g\rangle + \|g\|^2 \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

取$t=-\langle f,g\rangle/\|f\|^2$ 得到

$$0 \le \frac{\langle f,g\rangle^2}{\|f\|^4}\|f\|^2 - 2\frac{\langle f,g\rangle^2}{\|f\|^2} + \|g\|^2 = -\frac{\langle f,g\rangle^2}{\|f\|^2} + \|g\|^2$$

即$\langle f,g\rangle^2 \le \|f\|^2\|g\|^2$. 所以此时(1.1)成立.

转到对一般情形: 对复数$\langle f,g\rangle$, 存在$\theta\in[0,2\pi)$ 使得$\langle f,g\rangle = |\langle f,g\rangle|e^{\mathrm{i}\theta}$. 因此内积$\langle e^{-\mathrm{i}\theta}f, g\rangle = |\langle f,g\rangle|$ 是实数. 于是由实的情形的结果有

$$|\langle f,g\rangle| = \langle e^{-\mathrm{i}\theta}f, g\rangle \le \|e^{-\mathrm{i}\theta}f\|\|g\| = \|f\|\|g\|.$$

所以Cauchy不等式成立.

由内积运算和Cauchy不等式即得

$$\begin{aligned}&\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle f,g\rangle) + \|g\|^2\\ &\le \|f\|^2 + 2|\langle f,g\rangle| + \|g\|^2 \le \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\|+\|g\|)^2.\end{aligned}$$

所以$\|f+g\| \le \|f\|+\|g\|$.

(b): 由范数三角不等式易见

$$\Big|\|f\|-\|g\|\Big| \le \|f-g\|.$$

所以范数是连续的. 又由Cauchy不等式有

$$|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f,g\rangle| = |\langle f_n - f, g_n\rangle + \langle f, g_n - g\rangle| \le \|f_n - f\|\|g_n\| + \|f\|\|g_n - g\|$$

因此内积也是连续的. $\square$

【常用的Hilbert空间$L^2(E,\mu)$】 设$d\in\mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d,\mathcal{M},\mu)$是一个完备的测度空间. 设$E\in\mathcal{M}$ (即$E\subset\mathbb{R}^d$是一个可测集), 且$\mu(E)>0$. 在L^2-空间$L^2(E,\mu)$上定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_E f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x),\quad f,g\in L^2(E,\mu). \tag{1.2}$$

周知$L^2(E,\mu)$是复数域$\mathbb{C}$上的一个线性空间而$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 确是内积. 此外, 根据第十章**定理10.25(L^p空间的完备性)**知$L^2(E,\mu)$是完备的. 因此$\mathcal{H}=L^2(E,\mu)$ 是一个Hilbert空间. 因常用的L^2-空间$L^2(E,\mu)$ 都是无穷维的, 故(为减少琐碎的讨论)本章我们只考虑无穷维内积空间.

【注】关于相等"=": 由于$L^2(E,\mu)$中的元素f,g 等等本身是函数, 故同一记号相等"$f=g$"就有两种含义:

一种是按通常的函数的相等, 即它表示$f(x)=g(x)$ for all $x\in E$.

另一种是按内积空间$L^2(E,\mu)$中元素的相等, 此时由内积空间中范数$\|\cdot\|$的定义知

$$\|f-g\|=\Big(\int_E|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}\mu(x)\Big)^{1/2}.$$

因此在$L^2(E,\mu)$ 中, $f=g\iff\|f-g\|=0\iff f(x)=g(x)$ 对μ-几乎所有$x\in E$.

如果涉及点态行为, 例如讨论函数的连续性等, 我们会对相等的意义给出说明. 对其它情形, 如果未加说明, 就按内积空间中元素的相等来理解, 也即按"$f=g\iff\|f-g\|=0$"来理解, 这是最稳妥的.

【定义(规范正交系、广义Fourier 系数、广义Fourier级数)】

设$(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$为一内积空间. 设$\{e_k\}_{k=1}^\infty$为$\mathcal{H}$中的可列集, 满足

$$\langle e_j,e_k\rangle=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & \text{if}\quad j=k\\ 0 & \text{if}\quad j\neq k\end{cases}$$

则称$\{e_k\}_{k=1}^\infty$为$\mathcal{H}$中的一个**规范正交系** (orthonormal system), 简称**ON系**.

设$\{e_k\}_{k=1}^\infty$为$\mathcal{H}$中的一个ON 系, $f\in\mathcal{H}$. 则f在各个e_k方向上的投影, 即内积

$$\langle f,e_k\rangle,\quad k=1,2,3,...$$

称为f关于ON 系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的**广义Fourier系数**, 简称**Fourier系数**, 同时称形式级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k \tag{1.3}$$

为f关于ON 系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的**广义Fourier级数**, 简称**Fourier级数**. $\square$

【注】形式级数(1.3)之所以称为形式级数是因为它可能不收敛, 也即这级数的部分和可能不在$\mathcal{H}$中收敛. $\mathcal{H}$中的一个元素是否可以表示成收敛的(1.3)形式, 这是下面很快考虑的问题

【部分和算子及其投影性质】设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为内积空间$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$中的一个ON系. 对任意$n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{H}_n = \mathrm{span}\{e_1, e_2, ..., e_n\} = \Big\{\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \ \Big|\ c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}\Big\}.$$

我们称线性算子$S_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_n$,

$$S_n(f) := \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k, \quad f\in\mathcal{H} \tag{1.4}$$

为f的Fourier级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k$的前$n$ 部分和算子. 计算表明, 部分和算子S_n 是从$\mathcal{H}$到子空间$\mathcal{H}_n$的投影算子, 即

$$S_n(f) = f \qquad \forall\, f\in\mathcal{H}_n. \tag{1.5}$$

事实上对任意$f = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \in \mathcal{H}_n$, 有 (改换下标将$f$写作$f = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$)

$$\langle f, e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j\langle e_j, e_k\rangle = c_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

所以$f = \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k = S_n(f)$.

【命题13.2(最佳逼近、Bessel不等式)】

设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为内积空间$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$中的一个ON 系. 则对任意$f\in\mathcal{H}$ 和任意$n\in\mathbb{N}$, 部分和$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k$ 是$\mathcal{H}_n = \mathrm{span}\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ 对于f的唯一的最佳逼近元且成立勾股定理:

$$\min_{g\in\mathcal{H}_n}\|f-g\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle f, e_k\rangle|^2. \tag{1.6}$$

因此特别有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, e_k\rangle|^2 \le \|f\|^2 \qquad\qquad (\textbf{Bessel 不等式}).$$

【证】我们将使用几何语言. 例如回忆: 在$\mathcal{H}$中定义垂直关系“$\perp$”为

$$f \perp g \iff \langle f, g\rangle = 0.$$

等等. 由$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \|g\|^2$ 可知

$$f \perp g \quad \Longrightarrow \quad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \tag{1.7}$$

设$f \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}$. 如上, 计算表明$\langle f, e_k\rangle = \langle S_n(f), e_k\rangle$ 即$\langle f - S_n(f), e_k\rangle = 0$ 即

$$f - S_n(f) \perp e_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

这等价于$f - S_n(f) \perp \mathcal{H}_n$, 也即$f - S_n(f) \perp g$ for all $g \in \mathcal{H}_n$. 特别有(**给图示**, $\mathcal{H}_n$ 和$\mathcal{H}_n^{\perp}$为两个坐标轴...)

$$f - S_n(f) \perp S_n(f), \quad f - S_n(f) \perp g, \quad f - S_n(f) \perp S_n(f) - g, \quad g \in \mathcal{H}_n.$$

于是由(1.7)有

$$\|f\|^2 = \|f - S_n(f) + S_n(f)\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2,$$

$$\|f - g\|^2 = \|f - S_n(f) + S_n(f) - g\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f) - g\|^2.$$

这就证明了

$$\min_{g \in \mathcal{H}_n} \|f - g\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 \tag{1.8}$$

并且对于$g \in \mathcal{H}_n$ 有: 当且仅当$g = S_n(f)$ 时$\|f - g\| = \|f - S_n(f)\|$. 所以$S_n(f)$是$\mathcal{H}_n$ 对于f的唯一的最佳逼近元**.**

最后由$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是ON 系和$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$易见有

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2.$$

结合(1.8)及其非负性得到

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 \le \|f\|^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

令$n \to \infty$ 即得Bessel不等式. $\square$

【**定义(规范正交基)**】设$(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$为一内积空间, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$的一个ON系. 如果对每个$f\in\mathcal{H}$, f的Fourier级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k$ 都按范数收敛于f, 即有

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k=\lim_{n\to\infty}S_n(f)$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|=\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k\right\|=0$$

则称$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$的一个**规范正交基**(orthonormal basis), 简称**ON基**. □

下面定理是关于Hilbert空间中Fourier 级数的基本定理, 它给出了对于ON基的一些常用刻画(等价条件).

【**定理13.3(ON基的刻画)**】设$(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$为一Hilbert空间, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$的一个ON系. 则以下(1),(2),(3),(4) 彼此等价: 即

$$(\mathbf{1})\iff(\mathbf{2})\iff(\mathbf{3})\iff(\mathbf{4}).$$

(1)($\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是完全的) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的有限线性组合在$\mathcal{H}$中稠密, 即对任意$f\in\mathcal{H}$ 和任意$\varepsilon>0$ 存在有限多个常数$c_1,c_2,...,c_N\in\mathbb{C}$ 使得

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\right\|<\varepsilon.$$

(2) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$的ON基.

(3) 对任意$f\in\mathcal{H}$, 若$f\perp e_k$ 即若$\langle f,e_k\rangle=0$ for all $k=1,2,3,...$, 则$f=0$.

(4) **(Parseval 等式)** 对任意$f\in\mathcal{H}$ 成立

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2.$$

【证】来证明(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2): 任取$f\in\mathcal{H}$. 令$\mathcal{H}_n=\mathrm{span}\{e_1,e_2,...,e_n\}$. 对任意$\varepsilon>0$, 由假设知存在有限多个常数$c_1,c_2,...,c_N\in\mathbb{C}$ 使得$\|f-\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\|<\varepsilon$. 对任意$n\geq N$ 易见有$\mathcal{H}_N\subset\mathcal{H}_n$ 于是由**命题13.2(最佳逼近)**可知

$$\|f-S_n(f)\|=\min_{g\in\mathcal{H}_n}\|f-g\|\leq\min_{g\in\mathcal{H}_N}\|f-g\|\leq\left\|f-\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\right\|<\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|=0\qquad \text{i.e.}\qquad f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k.$$

所以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$的ON基.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$的ON基. 并设$\langle f,e_k\rangle=0$ for all $k=1,2,3,....$ 则有

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k=\sum_{k=1}^{\infty}0=0.$$

所以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$具有性质(3).

(3) $\Longrightarrow$ (4): 对任意$f\in\mathcal{H}$, 由e_k的正交性有

$$\|S_m(f)-S_n(f)\|^2=\Big\|\sum_{k=n+1}^{m}\langle f,e_k\rangle e_k\Big\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}|\langle f,e_k\rangle|^2,\quad m>n\ge 1.$$

而由Bessel不等式$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2\le\|f\|^2<+\infty$ 知正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2$ 收敛. 因此

$$\|S_m(f)-S_n(f)\|^2\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2\to 0\quad (m>n\to\infty).$$

这表明$\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ 是$\mathcal{H}$中的一个Cauchy列. 因$\mathcal{H}$是Hilbert空间(即$\mathcal{H}$是完备的), 故按范数收敛的极限元素

$$g:=\lim_{n\to\infty}S_n(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k\quad \text{属于 }\mathcal{H}.$$

来计算g的Fourier系数: 由**命题13.1**(内积的连续性) 对任意$k\in\mathbb{N}$有

$$\langle g,e_k\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle S_n(f),e_k\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle f,e_j\rangle\langle e_j,e_k\rangle=\langle f,e_k\rangle$$

即

$$\langle g-f,e_k\rangle=0,\quad k=1,2,3,\dots.$$

现在设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$具有性质(3). 则由$g-f\in\mathcal{H}$ 和上式知$g-f=0$. 因此

$$f=g=\lim_{n\to\infty}S_n(f)\qquad \text{in norm}.$$

于是由**命题13.2** 即得

$$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle f,e_k\rangle|^2=\|f-S_n(f)\|^2\to 0\quad (n\to\infty)$$

此即

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle f, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, e_k\rangle|^2.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): 设Parseval 等式成立. 则对任意$f \in \mathcal{H}$ 和任意$\varepsilon > 0$, 由

$$\Big\|f - \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k\Big\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle f, e_k\rangle|^2 \to 0 \quad (n\to\infty)$$

知存在$N \in \mathbb{N}$使得

$$\Big\|f - \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k\Big\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N}|\langle f, e_k\rangle|^2} < \varepsilon.$$

所以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的有限线性组合在$\mathcal{H}$中稠密. □

在构造ON基时, 一般多使用上述定理中的第(1)条, 因为它很灵活好用. 我们在下节就会看到这点.

本节最后证明的性质是关于Fourier级数的唯一性.

【定理13.4】 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的一个ON基. 则

(a)(Fourier级数的唯一性) 设$f \in \mathcal{H}$ 且有数列$\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$使得按范数收敛有

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

则$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$必为$f$的Fourier级数, 即必有$c_k = \langle f, e_k\rangle,\ k = 1, 2, 3, \dots$.

(b)(Fourier系数的决定作用) 设$f, g \in \mathcal{H}$ 且有下面关系:

$$\text{若 } \langle f, e_k\rangle = \langle g, e_k\rangle \text{ 对所有 } k = 1, 2, 3, \dots \text{成立, 则必有 } f = g.$$

【证】 (a): 令$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$. 则由假设知$\|f_n - f\| \to 0\,(n\to\infty)$. 于是对任意$k \in \mathbb{N}$, 当$n \ge k$ 时有

$$c_k = \langle f_n, e_k\rangle \to \langle f, e_k\rangle \quad (n\to\infty).$$

所以$c_k = \langle f, e_k\rangle,\ k = 1, 2, 3, \dots$.

(b): 我们有$\langle f - g, e_k\rangle = 0, k = 1, 2, 3, \dots$. 因$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基, 故由**定理13.3** 知$f - g = 0$, 即$f = g$. □

作业题

1. (a) 在概率论和函数论中会遇到拉德马赫函数系$\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 其中

$$\psi_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin(2^{n+1}\pi x)), \quad x \in [0,1], \quad n = 0,1,2,\dots .$$

证明$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$是$L^2[0,1]$中的ON系.

(b) 著名的哈尔函数系$\{\psi_{n,k}(x) \,|\, k = 1,2,...,2^n,\, n = 0,1,2,\dots\}$ 由下式给出:

$$\psi_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{2k-2}{2^{n+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -1 & \text{if } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < x < \frac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{for other } x \in [0,1]. \end{cases}$$

证明$\{\psi_{n,k} \,|\, k = 1,2,...,2^n,\, n = 0,1,2,\dots\}$ 是$L^2[0,1]$中的ON系.

2. 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间$\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的一个ON系但不是ON基. 证明存在$e_0 \in \mathcal{H}$使得$\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ 仍是$\mathcal{H}$ 中的一个ON系.

3. 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$的一个ON基. 设$\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$是$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的任意重排. 证明$\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 也是$\mathcal{H}$的ON基.

4. 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间$\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的一个ON系. 证明

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ 是ON基} \iff \text{成立内积等式}: \langle f,g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,e_k\rangle \overline{\langle g,e_k\rangle} \qquad \forall\, f,g \in \mathcal{H}.$$

5. 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的两个ON系, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - \widetilde{e}_k\|^2 < 1.$$

证明: $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是ON 基$\iff$ $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基.

6*. 将上题中的“<1”减弱成“$<\infty$”, 结论仍成立. 也即证明**巴里定理**[1]:

设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的两个ON系, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - \widetilde{e}_k\|^2 < \infty.$$

则$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是ON基$\iff$ $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基.

[1]巴里是俄罗斯女数学家. 我在清华教全校研究生选修课程《基础泛函分析》时把上面第5题留为作业. 有一届电子系的一个博士生在证明该题时绕了较大的弯子, 没有用到“<1”这个条件而只需要“$<\infty$”, 因此实际上证明了巴里定理. 他得知自己无意中证明了一条著名定理时, 士气大振信心大增.

§13.2 经典Fourier级数

对于$-\infty < a < b < +\infty$, 考虑关于一维Lebesgue测度的$L^2$-空间$L^2(a,b)$. 在$L^2(a,b)$上定义内积

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

易见在尺度变换

$$x = a + \frac{b-a}{2\pi}(t+\pi), \quad t = -\pi + \frac{b-a}{2\pi}(x-a)$$

之下有$f \in L^2(a,b) \iff F \in L^2(-\pi,\pi)$ 其中

$$F(t) = \sqrt{\frac{b-a}{2\pi}} f(a + \frac{b-a}{2\pi}(t+\pi))$$

并且当$f,g \in L^2(a,b)$ 时有

$$\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\overline{G(t)}\,\mathrm{d}t.$$

因此不失一般性只需考虑特殊情形$(a,b) = (-\pi,\pi)$, 也即只需学习**Hilbert 空间$L^2(-\pi,\pi)$的分析性质** 其中内积和范数为

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x, \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x}. \tag{2.1}$$

我们将证明：Hilbert空间$L^2(-\pi,\pi)$ 中最常用的函数系

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\Big\}_{k\in\mathbb{Z}} \qquad \text{是ON基} \qquad (\text{其中 } \mathrm{i} = \sqrt{-1}\,). \tag{2.2}$$

由它构成的Fourier级数就是传统的经典的Fourier级数.

首先易见$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是$L^2(-\pi,\pi)$中的一个ON系: 对任意$j,k \in \mathbb{Z}$有

$$\Big\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}j\cdot}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}k\cdot}\Big\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}jx}e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(j-k)x}\mathrm{d}x = \delta_{jk}.$$

所以$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是ON系.

为证$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是ON基, 根据**定理13.3(ON基的刻画)**, 只需证明$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的有限线性组合在$L^2(-\pi,\pi)$ 稠密. 为便于分析, 我们先引进函数的周期化.

【函数的周期化】对$(-\pi,\pi)$上的任一函数$f(x)$做2π周期化延拓如下: 首先定义$f(x)$在端点$\pm\pi$处的值使满足$f(-\pi) = f(\pi)$. 然后将$f(x)$ 按下面方式延拓到每个区间$[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi]$上(延拓后的函数仍记作f):

$$f(x) = f(x-2k\pi) \qquad \text{当 } x \in [(2k-1)\pi,(2k+1)\pi] \text{ 时}$$

$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. 易见延拓后的f 是以2π为周期的周期函数. 不难看出, 如果f原来就是$\mathbb{R}$上的以2π 为周期的周期函数, 则f的上述延拓就等于f自身. 换言之上述周期化保持周期函数不变. 此外易见如果$f\in L^2(-\pi,\pi)$, 则延拓后的f在$\mathbb{R}$上可测且在任何有界区间上平方可积. 事实上f在$\mathbb{R}$上的可测性是显然的, 而由$f\in L^2(-\pi,\pi)$ 和周期性, 对任意有界区间(a,b), 取$N\in\mathbb{N}$充分大使得$(a,b)\subset(-(2N+1)\pi,(2N+1)\pi)$, 则有

$$\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{k=-N}^{N}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+2k\pi)|^2\mathrm{d}x=(2N+1)\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x<+\infty.$$

据此和Cauchy-Schwartz不等式还知f 任意有界区间$[a,b]$上可积:

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x}<+\infty.$$

以上表明**任一函数都可以被2π 周期化**. 于是在实际操作中, 可以自动假设所考虑的函数已被2π周期化了！

引进记号: 对于$f\in L^2(-\pi,\pi)$, 令

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots;\tag{2.3}$$

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx},\quad n=0,1,2,\ldots.\tag{2.4}$$

按习惯我们把$\widehat{f}(k)$叫做f 关于$e^{\mathrm{i}k\cdot}$ 的Fourier 系数. 由$\widehat{f}(k)$的定义易见

$$\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}=\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}k\cdot}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}.$$

因此$S_n(f)$ 是f的Fourier级数的前n 部分和, 即

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}k\cdot}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

也称$f\mapsto S_n(f)$ 为Fourier级数的前n 部分和算子.

【部分和算子$S_n(f)$的积分表示】 由积分运算的基本性质我们有

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}te^{\mathrm{i}kx}=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{\mathrm{i}k(x-t)}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n}e^{\mathrm{i}k(x-t)}\right)\mathrm{d}t.$$

记$\theta=x-t, q=e^{\mathrm{i}\theta}$, 则当$q\neq 1$时, 即当$\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}k(x-t)} &= \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}k\theta} = \sum_{k=-n}^{n} q^k = q^{-n}\sum_{k=-n}^{n} q^{n+k} = q^{-n}\sum_{k=0}^{2n} q^k \\
&= q^{-n}\frac{q^{2n+1}-1}{q-1} = q^{1/2}\frac{q^{n+1/2}-q^{-(n+1/2)}}{q-1} = \frac{q^{n+1/2}-q^{-(n+1/2)}}{q^{1/2}-q^{-1/2}} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)\theta}-e^{-\mathrm{i}(n+1/2)\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta/2}-e^{-\mathrm{i}\theta/2}} = \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)} = \frac{\sin((2n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.
\end{aligned}
$$

而当$q=1$时, 即当$\theta=x-t\in 2\pi\mathbb{Z}$ 时, 有$\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}k(x-t)}=2n+1$. 令

$$
D_n(t)=\frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}, \qquad t\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \tag{2.5}
$$

这里当$\sin(t/2)=0$时, 定义$D_n(t)=2n+1$. 称$D_n(t)$为Dirichlet 核. 于是有

$$
S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t. \tag{2.6}
$$

当然对于$n=0$ 有

$$
S_0(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t.
$$

现在设$f\in L^2(-\pi,\pi)$. 作积分换元$t=x+\theta$并注意$D_n(-\theta)=D_n(\theta)$且函数$\theta\mapsto f(x+\theta)D_n(\theta)$ 以2π为周期, 我们有

$$
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\theta)D_n(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta)D_n(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{2.7}
$$

将(2.7)代入(2.6) 并将θ换成t 我们得到部分和算子$f\mapsto S_n(f)$的紧凑表式

$$
S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.8}
$$

再利用Dirichlet 核的偶性$D_n(-t)=D_n(t)$ 还得到$S_n(f)(x)$的另一常用表式

$$
S_n(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}D_n(t)\mathrm{d}t, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.9}
$$

【Fejér 的观察: $S_n(f)$的算数平均是个好东西】

匈牙利数学家L.Fejér 观察到: $S_n(f)$的算数平均

$$
\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) \qquad (\text{称为}f\text{的}\textbf{Fejé算子}) \tag{2.10}
$$

可以表示成具有正核的积分算子:

$$
\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)\mathrm{d}t, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.11}
$$

其中

$$F_n(t)=\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2,\quad t\in\mathbb{R}\qquad\text{(称为Fejé 核)}$$

事实上由$D_n(t)$的定义(2.5)和三角函数初等运算

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

我们有

$$\sum_{k=0}^{n}D_k(t)=\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+1/2)t)$$
$$=\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}\cdot\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kt)-\cos((k+1)t)}{2}=\frac{1-\cos((n+1)t)}{2\sin^2(\frac{t}{2})}$$
$$=\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{t}{2})}=\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2.$$

由此和$S_k(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_k(t)\mathrm{d}t$ 以及(2.10) 即得(2.11).

由部分和算子$S_k(f)$和Fejér算子$\sigma_n(f)$的定义可知$\sigma_n(f)$仍是$2n+1$个正交函数$\{e^{\mathrm{i}kx}\}_{|k|\le n}$的线性组合. 事实上我们还有$\sigma_n(f)$的另一表示:

$$\sigma_n(f)(x)=\sum_{|k|\le n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}.\tag{2.12}$$

这是直接计算的结果: 利用特征函数和有限二重求和可换序, 我们有

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}S_m(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\Big(\sum_{|k|\le m}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\Big)$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\Big(\sum_{|k|\le n}\mathbf{1}_{\{|k|\le m\}}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\Big)=\frac{1}{n+1}\sum_{|k|\le n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\Big(\sum_{m=0}^{n}\mathbf{1}_{\{|k|\le m\}}\Big)$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{|k|\le n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\Big(\sum_{m=|k|}^{n}1\Big)=\frac{1}{n+1}\sum_{|k|\le n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\Big(n+1-|k|\Big)$$

这正是(2.12)式.

Fejé算子$\sigma_n(f)$的优点体现在下面**引理13.5**中, 其作用将在后面定理的证明中看到.

【引理13.5】对于Fejér核$F_n(t)=\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2$ 有: F_n非负且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\mathrm{d}=1,\qquad n=0,1,2,...\tag{2.13}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|F_n(t)\mathrm{d}t\le 3\pi\frac{\log n}{n},\quad n\ge 3.\tag{2.14}$$

【证】因常值函数1 与一切$e^{\mathrm{i}kx}\,(k\neq 0)$正交, 故由Fourier部分和算子$S_n(f)$的定义知

$$S_n(1)(x)\equiv 1\qquad \forall\, n=0,1,2,\dots.$$

于是由Fejér算子$\sigma_n(f)$的定义可知

$$\sigma_n(1)(x)\equiv 1\qquad \text{即}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\mathrm{d}t=1.$$

为证第二个估计式, 我们做分解(注意$F_n(t)$是偶函数)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|F_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}tF_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}tF_n(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}tF_n(t)\mathrm{d}t.$$

对于右边第一项, 由(2.13)有

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}tF_n(t)\mathrm{d}t\le\frac{\pi}{n+1}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}F_n(t)\mathrm{d}t\le\frac{\pi}{n+1}.$$

对于第二项, 由$|\sin(\frac{n+1}{2}t)|\le 1$ 和Jordan不等式$\sin(\frac{t}{2})\ge\frac{t}{\pi}$ 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}tF_n(t)\mathrm{d}t\le\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}t\left(\frac{1}{\frac{t}{\pi}}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{n+1}\log(n+1).$$

合起来可知当$n\ge 3$ 时有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|F_n(t)\mathrm{d}t\le\frac{\pi}{n+1}\Big(1+\log(n+1)\Big)<3\pi\frac{\log n}{n}.$$

所以(2.14)成立. □

为证明本节主要结果, 我们还需要使用一个基本性质—— 积分的平均连续性:

【命题13.6 (L^p-连续性)】设$1\le p<+\infty,-\infty\le A<a<b<B\le+\infty$, $f\in L^p(A,B)$. 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

【证】令$0<\varepsilon<\min\{a-A,B-b\}$. 则有

$$\{x+h\,|\,x\in(a,b),|h|<\varepsilon\}\subset(A,B).$$

因此由**第十章习题课习题**知本命题成立. □

有了以上准备现在可以证明经典Fourier 级数的一个主要定理:

【**定理13.7**】函数系$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是Hilbert空间$L^2(-\pi,\pi)$中的一个ON基. 因此对任意$f\in L^2(-\pi,\pi)$都有

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\qquad \text{按}L^2\text{收敛} \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2 \qquad (\textbf{Parseval 等式}) \tag{2.16}$$

其中

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.$$

【证】首先须说明级数关系式(2.15)的定义: 它同时包含两种定义. 第一种定义如前, (2.15) 中的变元x可以理解为哑元, 即(2.15) 表示在按范数收敛意义下的函数关系等式, 也即(2.15) 可以被理解为

$$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}k\cdot}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}k\cdot}\quad \text{in norm}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|f-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}k\cdot}\Big\|=0.$$

第二种定义就是普通的数值级数收敛的定义: 精确地说是: 对几乎所有的$x\in(-\pi,\pi)$, 级数(2.15) 都收敛且收敛到$f(x)$, 即

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\qquad \text{a.e.}\quad x\in(-\pi,\pi). \tag{2.17}$$

换言之即是Fourier级数的完整的部分和序列$\{S_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$(而**不是**$\{S_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ **的某个子序列**) 在$(-\pi,\pi)$上几乎处处收敛到f. 这个几乎处处收敛的结果是瑞典著名数学家L. Carleson 在1966年证明的. 他的证明极为精细艰深, 无法纳入本科教材中.

下面我们只按第一种定义证明(2.15), 也即只需证明$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$是ON基. 而根据**定理13.3(ON基的刻画)**知, 只需证明$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$的有限线性组合在$L^2(-\pi,\pi)$中稠密.

任取$f\in L^2(-\pi,\pi)$, 如上所说, 为便于分析, 我们将f作2π周期化并仍用f表示f的周期化. 由$\sigma_n(f)$的表式(2.12)知$\sigma_n(f)$是$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$的有限线性组合, 故为证稠密性只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|=0. \tag{2.18}$$

由$\sigma_n(f)$的积分表示和**引理13.5**中的第一个等式有

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x+t) - f(x)\Big)F_n(t)\mathrm{d}t \tag{2.18*}$$

从而由Cauchy-Schwartz不等式有

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)\mathrm{d}t \\ &\le \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2F_n(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2F_n(t)\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

从而有

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2F_n(t)\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R},$$

对x积分并由Fubini定理有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n(f)(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2\mathrm{d}x\right)F_n(t)\mathrm{d}t. \tag{2.19}$$

因(例如) $f \in L^2(-2\pi, 2\pi)$, 故由**命题13.6** 知

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2\mathrm{d}x = 0.$$

因此对任意$\varepsilon > 0$ 存在$0 < \delta < \pi$ 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, |t| < \delta.$$

而对任意$t \in (-\pi, \pi)$ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2\mathrm{d}x \le 2\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|^2\mathrm{d}x + 2\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = 4\|f\|^2.$$

于是**讨论**$|t| < \delta$ **和**$|t| \ge \delta$ 我们得到估计

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|^2\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + 4\|f\|^2\frac{|t|}{\delta} \qquad \forall\, t \in (-\pi, \pi).$$

将此代入上面不等式(2.19)并利用**引理13.5**得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n(f)(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{4\|f\|^2}{\delta}|t|\right)F_n(t)\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4\|f\|^2}{\delta}3\pi\frac{\log n}{n}, \quad n \ge 3.\end{aligned}$$

于是存在$N \in \mathbb{N}$使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f)(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N.$$

这证明了(2.18). 因此$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$是$L^2(-\pi,\pi)$ 的ON基.

最后根据**定理13.3(ON基的刻画)**中的Parseval等式和$\widehat{f}(k)$ 的定义便得到本定理中的Parseval 等式:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mathrm{i}k\cdot} \right\rangle \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |\widehat{f}(k)|^2. \qquad \square$$

【例】将函数$f(x) = x$, $x \in (-\pi,\pi)$, 展开成以2π为周期的经典Fourier级数并计算相应的Parseval等式.

【解】显然$f \in L^2(-\pi,\pi)$. 计算f的Fourier系数: 当$k=0$时,

$$f\text{ 是奇函数} \implies \widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

当$k \neq 0$时,

$$\begin{aligned}
2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{e^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k} x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{-\mathrm{i}k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{-\mathrm{i}k}(e^{-\mathrm{i}k\pi}\pi + e^{\mathrm{i}k\pi}\pi) - 0 = \frac{\pi 2(-1)^k}{-\mathrm{i}k} = \frac{2\pi}{\mathrm{i}k}(-1)^{k-1}, \\
&\implies \widehat{f}(k) = \frac{1}{\mathrm{i}k}(-1)^{k-1}.
\end{aligned}$$

据**定理13.7** 有

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{k-1}}{\mathrm{i}k} e^{\mathrm{i}kx}, \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

另一方面

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}.$$

所以相应的Parseval等式的数值结果为

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \text{即} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.21}$$

$\square$

【**注**】在Fourier级数理论之前, (2.21)的证明需要高超技巧且篇幅较长. 现在它只是一个套用公式的结果. 这就是解放生产力!

【**Fourier级数的三角函数表示**】由函数系$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是$L^2(-\pi,\pi)$中的一个ON基容易导出三角函数系

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\Big\}_{k=1}^{\infty} \tag{2.22}$$

也是$L^2(-\pi,\pi)$中的一个ON基. 首先容易验证(2.22)是$L^2(-\pi,\pi)$中的一个ON系.

其次, 对每个$f\in L^2(-\pi,\pi)$, 令

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

则由

$$e^{-\mathrm{i}kt}=\cos(kt)-\mathrm{i}\sin(kt),\quad \cos(kt)=\frac{e^{\mathrm{i}kt}+e^{-\mathrm{i}kt}}{2},\quad \sin(kt)=\frac{e^{\mathrm{i}kt}-e^{-\mathrm{i}kt}}{2\mathrm{i}},$$

有

$$\widehat{f}(k)=\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2},\quad a_k=\widehat{f}(k)+\widehat{f}(-k),\quad b_k=\mathrm{i}(\widehat{f}(k)-\widehat{f}(-k)). \tag{2.23}$$

由Parseval 等式(2.16) 和$|a_k|^2+|b_k|^2\le 4|\widehat{f}(k)|^2+4|\widehat{f}(-k)|^2$ 容易导出级数收敛性:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2|a_k||b_k|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)\le 8\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2<+\infty.$$

因此下面出现的无穷级数都是绝对收敛的.

进一步计算

$$\begin{aligned}&\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}te^{\mathrm{i}kx}=\frac{1}{2}(a_k-\mathrm{i}b_k)e^{\mathrm{i}kx}\\&=\frac{1}{2}(a_k-\mathrm{i}b_k)\Big(\cos(kx)+\mathrm{i}\sin(kx)\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)+\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(a_k\sin(kx)-b_k\cos(kx)\Big).\end{aligned}$$

注意到

$$k\mapsto a_k\cos(kx),\quad k\mapsto b_k\sin(kx)\quad \text{均为偶函数}$$

$$k\mapsto a_k\sin(kx),\quad k\mapsto b_k\cos(kx)\quad \text{均为奇函数}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=-n}^{n}\Big(a_k\sin(kx)-b_k\cos(kx)\Big)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)\end{aligned}$$

其中用到

$$\sum_{k=-n}^{n}\Big(a_k\sin(kx)-b_k\cos(kx)\Big)\equiv 0.$$

于是我们得到部分和算子的两种表示:

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big).\tag{2.24}$$

进而得到f的三角级数展开

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big),\qquad x\in(-\pi,\pi)\tag{2.25}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,...;\qquad \textbf{(余弦系数)}\tag{2.26}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,3,....\qquad \textbf{(正弦系数)}.\tag{2.27}$$

回忆: 展开式(2.25) 表示部分和按范数收敛:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|=0.\tag{2.28}$$

由此和$f\in L^2(-\pi,\pi)$的任意性可知三角函数系(2.22) 是$L^2(-\pi,\pi)$中的ON基.

下面导出相应的Parseval 等式: 计算

$$|\widehat{f}(k)|^2=\Big|\frac{1}{2}(a_k-\mathrm{i}b_k)\Big|^2=\frac{1}{4}\Big(|a_k|^2+|b_k|^2+\mathrm{i}a_k\overline{b_k}-\mathrm{i}\overline{a_k}b_k\Big).$$

注意$k\mapsto|a_k|^2, k\mapsto|b_k|^2$都是偶的, $k\mapsto a_k\overline{b_k}, k\mapsto\overline{a_k}b_k$都是奇的, 且$b_0=0$, 我们得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\overline{b_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\overline{b_k}+a_{-k}\overline{b_{-k}}\Big)=0,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{a_k}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\overline{a_k}b_k+\overline{a_{-k}}b_{-k}\Big)=0$$

从而有

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2=\frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)=\frac{1}{4}|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2).$$

它通常写成

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}|a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2). \qquad (\textbf{Parseval等式}) \tag{2.29}$$

如用Parseval等式的统一的写法, 上式可写成

$$\|f\|^2=\Big|\Big\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\rangle\Big|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Big|\Big\langle f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\cdot)\Big\rangle\Big|^2+\Big|\Big\langle f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\cdot)\Big\rangle\Big|^2\Big).$$

【奇、偶函数的Fourier级数】设$f\in L^2(-\pi,\pi)$.

奇函数的Fourier级数— 正弦级数: 若f是奇函数, 则

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,...,$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx),\qquad x\in(-\pi,\pi).$$

相应的部分和为

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k\sin(kx),\quad n=1,2,3,\dots.$$

偶函数的Fourier级数— 余弦级数: 若f是偶函数, 则

$$b_n=0,\quad n=1,2,3,...,$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx),\qquad x\in(-\pi,\pi).$$

相应的部分和为

$$S_n(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos(kx),\quad n=1,2,3,\dots.$$

【说明】以上和下节所有结果对于(例如) Hilbert 空间$L^2(0,2\pi)$也成立, 也即把区间$(-\pi,\pi)$换成$(0,2\pi)$, 相应的结论同样成立. 因为只需对平移$\widetilde{f}(x)=f(\pi+x),x\in(-\pi,\pi)$, 应用$L^2(-\pi,\pi)$的结果便可得到关于$L^2(0,2\pi)$的结果. 选择对称区间$(-\pi,\pi)$的唯一好处是方便讨论奇、偶函数的Fourier级数.

作业题

1. 设(a,b)为有界区间.

(1) 设$f, f_n \in L^2(a,b), n=1,2,3,....$ 证明蕴含关系

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x \to 0 \quad (n\to\infty) \implies \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad (n\to\infty).$$

(2)试构造函数列$f, f_n \in L^2(a,b), n=1,2,3,....$ 满足

$$\sup_{n\ge 1}\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x < \infty, \quad \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad (n\to\infty),$$

但

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x \not\to 0 \quad (n\to\infty).$$

[考虑$f_n(x)=\sqrt{n(\frac{x-a}{b-a})^{n-1}}, x\in(a,b); f(x)\equiv 0.$]

2. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 为2π-周期函数且在$(-\pi,\pi)$上Lebesgue 可积. 证明f在每个有界区间上Lebesgue可积且成立平移不变性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+h)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t \qquad \forall\, h\in\mathbb{R}.$$

3. 设$f,g\in L^2(-\pi,\pi)$. 令a_n, b_n为f的余弦系数和正弦系数, α_n, β_n为g的余弦系数和正弦系数. 试从Parseval 等式(2.29)导出内积等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\overline{\alpha_n} + b_n\overline{\beta_n}). \tag{2.30}$$

4. 设$f\in L^2(-\pi,\pi)$, b_n是f的正弦系数. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)x\mathrm{d}x.$$

5. 利用第**3**题证明: 对平方可积函数的Fourier级数总可以逐项积分, 即若$f\in L^2(-\pi,\pi)$ 而

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

是f的Fourier级数, 则对任何Lebesgue可测集$E\subset[-\pi,\pi]$ 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_E \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_E (a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\mathrm{d}x.$$

利用这方法求函数$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(x\in[-\pi,\pi])$ 的Fourier级数展开, 其中假定$a_0=0$ (注: 需证明当f为2π-周期函数且属于$L^2(-\pi,\pi)$且满足$a_0=0$时, $x\mapsto\int_{-\pi}^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是周期函数且周期为2π).

6. 设复数列$c_k\in\mathbb{C}$ 满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.$$

证明方程组

$$\widehat{f}(k)=\frac{c_k}{\sqrt{2\pi}},\qquad k=0,\pm1,\pm2,...$$

在$L^2(-\pi,\pi)$中存在唯一解.

[提示: 存在性要用到$L^2(-\pi,\pi)$ 是Hilbert空间, 即Cauchy列必按范数在其中收敛.]

7. 是否存在$f\in L^2(-\pi,\pi)$ 使得在$L^2(-\pi,\pi)$-范数收敛的意义下有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\ ?$$

为什么?

8. 设函数f在$(0,\pi)$上有定义. 作f的奇延拓、偶延拓如下:

奇延拓:

$$f_{\mathrm{odd}}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if}\quad x\in(0,\pi)\\ -f(-x) & \text{if}\quad x\in(-\pi,0)\\ 0 & \text{if}\quad x=-\pi,0,\pi\end{cases}$$

然后将f作2π-周期化延拓到$\mathbb{R}$.

偶延拓:

$$f_{\mathrm{even}}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if}\quad x\in(0,\pi)\\ f(-x) & \text{if}\quad x\in(-\pi,0)\\ \text{A (随意指定的值)} & \text{if}\quad x=0\\ \text{B (随意指定的值)} & \text{if}\quad x=-\pi,\pi\end{cases}$$

然后将f作2π-周期化延拓到$\mathbb{R}$.

设$f\in L^2(0,\pi)$. 利用上述奇延拓、偶延拓证明f可以在按$L^2(0,\pi)$-范数收敛的意义下同时展开成正弦级数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ 和余弦级数$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$.

§13.3 经典Fourier级数的逐点收敛和一致收敛

本节我们将看到, 在很弱的条件下, 一个函数的Fourier 级数就会处处收敛其收敛到该函数自己, 并且这收敛还可以是一致的. 在本节结尾我们将函数的Fourier 级数与函数的Taylor 级数作对比, 并解释为什么前者试用面极为广泛. 首先学习著名的

【Riemann-Lebesgue 引理】 设$-\infty \le a < b \le +\infty$, $f \in L^1(a,b)$. 则有

$$\lim_{\lambda\in\mathbb{R},\,|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = 0.$$

从而有

$$\lim_{\lambda\in\mathbb{R},\,|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\in\mathbb{R},\,|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.$$

【证】将f做零延拓, 即以$f(x)\mathbf{1}_{(a,b)}(x)$ 代替f, 我们可以假设$(a,b)=\mathbb{R}$, 即$f\in L^1(\mathbb{R})$. 对任意$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 由积分的平移不变性和$e^{\mathrm{i}\pi}=-1$ 我们有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda(x+\frac{\pi}{\lambda})}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

从而有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\Big(f(x)-f(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\Big|f(x)-f(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big|\mathrm{d}x \to 0 \quad (|\lambda|\to+\infty)$$

这里用到可积函数的平均连续性(见第十一章习题课): 若$f\in L^1(\mathbb{R})$ 则有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x)-f(x+h)|\mathrm{d}x = 0.$$

最后由

$$\cos(\lambda x)=\frac{e^{\mathrm{i}\lambda x}+e^{-\mathrm{i}\lambda x}}{2},\quad \sin(\lambda x)=\frac{e^{\mathrm{i}\lambda x}-e^{-\mathrm{i}\lambda x}}{2\mathrm{i}}$$

即得引理中的另外两个零极限. $\square$

如果$f\in L^2(-\pi,\pi)$ 且λ沿整数趋于无穷, 例如$\lambda=-k$为整数, 则由Parseval 等式$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2=\frac{1}{2\pi}\|f\|^2<+\infty$ 和级数收敛的一个必要条件是通项趋于零, 得出

$$\lim_{|k|\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 2\pi\lim_{|k|\to\infty}\widehat{f}(k)=0.$$

但当λ沿非整数趋于无穷时, 就需要使用Rieman-Lebesgue 引理.

【Dini条件】设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$在$\mathbb{R}$上Lebesgue可测. 若一点$x\in\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{t\to 0+} f(x+t) =: f(x+),\quad \lim_{t\to 0+} f(x-t) =: f(x-)\quad \text{都存在有限}$$

$$\text{且存在}\delta>0\text{ 使得}\quad \int_0^\delta \Big|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty$$

则称f在点x满足Dini条件. □

当x是f的连续点时, Dini条件即为

$$\text{存在}\delta>0\text{ 使得}\quad \int_0^\delta \Big|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\Big|\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty.$$

【命题13.8】设f在$(-\pi,\pi)$内是Hölder连续的, 即存在常数$0<\alpha\le 1, 0<L<\infty$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|^\alpha\qquad \forall\, x,y\in(-\pi,\pi).$$

[这里典型的情形是f在$(-\pi,\pi)$内可导且导函数$f'(x)$在$(-\pi,\pi)$内有界: $|f'(x)|\le L$ for all $x\in(-\pi,\pi)$, 则f在$(-\pi,\pi)$内是Lipschitz连续的(即Hölder指数$\alpha=1$情形):

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|\qquad \forall\, x,y\in(-\pi,\pi).\qquad]$$

那么将f作2π-周期化延拓到$\mathbb{R}$并仍以f表示这个延拓, 则f 在$\mathbb{R}$上处处满足Dini条件. 特别延拓后的f在两个端点$x=-\pi,\pi$处都满足Dini条件并且(由f的周期性)

$$f(\pi+)=f(-\pi+),\quad f(-\pi-)=f(\pi-) \tag{3.1}$$

从而有

$$\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}, \tag{3.2}$$

$$\frac{f(-\pi+)+f(-\pi-)}{2}=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}. \tag{3.3}$$

【证】如上所说, 我们仍用记号f表示f的2π-周期延拓. 由周期性易见只需证明对每一点$x\in[-\pi,\pi]$, f在x满足Dini条件.

先设$x\in(-\pi,\pi)$. 此时对于$\delta=\min\{\pi-x,\pi+x\}>0$有：当$0<t<\delta$时

$$\Big|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\Big|\le\frac{|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|}{2}\le Lt^\alpha$$

从而有

$$\int_0^\delta \Big|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\Big|\frac{\mathrm{d}t}{t}\le L\int_0^\delta t^{\alpha-1}\mathrm{d}t=L\frac{\delta^\alpha}{\alpha}<\infty.$$

其次设x位于端点$-\pi,\pi$. 由于f在$(-\pi,\pi)$内的Hölder 连续性知f在$(-\pi,\pi)$内一致连续, 因此f在端点处的单侧极限$f(-\pi+),f(\pi-)$都存在有限. 若$x=\pi$, 则由周期性有$f(\pi+t)=f(-\pi+t)$,

$$f(\pi+)=\lim_{t\to+}f(\pi+t)=\lim_{t\to0+}f(-\pi+t)=f(-\pi+)$$

从而有

$$\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}.$$

若$x=-\pi$, 同理有$f(-\pi-)=f(\pi-)$, 因此

$$\frac{f(-\pi+)+f(-\pi-)}{2}=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}.$$

设$x=\pi$. 则对任意$0<t<\pi$ 有

$$|f(-\pi+t)-f(-\pi+)|=\lim_{s\to0+}|f(-\pi+t)-f(-\pi+s)|\le\lim_{s\to0+}L|t-s|^\alpha=Lt^\alpha,$$

$$|f(\pi-t)-f(\pi-)|=\lim_{s\to0+}|f(\pi-t)-f(\pi-s)|\le\lim_{s\to0+}L|t-s|^\alpha=Lt^\alpha$$

因此有

$$\Big|\frac{f(\pi+t)+f(\pi-t)}{2}-\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}\Big|=\Big|\frac{f(-\pi+t)+f(\pi-t)}{2}-\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}\Big|$$
$$\le\frac{|f(-\pi+t)-f(-\pi+)|+|f(\pi-t)-f(\pi-)|}{2}\le Lt^\alpha,\quad 0<t<\pi.$$

这就给出

$$\int_0^\pi\Big|\frac{f(\pi+t)+f(\pi-t)}{2}-\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}t}{t}\le L\frac{\pi^\alpha}{\alpha}<+\infty.$$

所以f在$x=\pi$满足Dini条件. 同理f在$x=-\pi$处也满足Dini条件. □

【定理13.9】设$f\in L^2(-\pi,\pi)$. 将f作2π-周期延拓到$\mathbb{R}$并仍以f表示这个延拓. 假设延拓后的f在点$x\in\mathbb{R}$满足Dini条件, 则f的Fourier 级数在x 收敛于$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, 即

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big)\tag{3.4}$$

其中a_n,b_n为f的余弦系数和正弦系数.

特别若x还是f的连续点, 则有

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big).$$

【证】根据级数收敛的定义和$S_n(f)$ 的两种表示(2.24), 这就是要证明Fourier级数的部分和$S_n(f)(x)$收敛于$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, 即证明

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f)(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}. \tag{3.5}$$

由$S_n(f)$的积分表示(2.9) 和

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)\mathrm{d}t=S_n(1)=1$$

有

$$\begin{aligned}
&S_n(f)(x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\Big)D_n(t)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-(f(x+)+f(x-))}{2\pi\sin(\frac{t}{2})}\sin((n+1/2)t)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}g(t)\sin(\lambda_n t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

其中

$$g(t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)-(f(x+)+f(x-))}{2\pi\sin(t/2)},\quad \lambda_n=n+1/2.$$

由f在点$x\in\mathbb{R}$满足Dini条件易见$g\in L^1(0,\pi)$. 事实上由Dini提件和$\sin(t/2)\ge t/\pi$ 有(不妨设Dini条件中的$\delta>0$小于1)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}|g(t)|\mathrm{d}t\le\int_0^{\pi}\Big|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&\le\int_0^{\delta}\Big|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{2\delta}\int_{\delta}^{\pi}(|f(x+t)|+|f(x-t)|+|f(x+)+f(x-)|)\mathrm{d}t\\
&<+\infty.
\end{aligned}$$

这里除了用Dini条件外还用了f的可积性: $f\in L^2(-\pi,\pi)\subset L^1(-\pi,\pi)$ 以及f的周期性蕴含

$$\int_{\delta}^{\pi}(|f(x+t)|+|f(x-t)|)\mathrm{d}t\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty.$$

所以$g\in L^1(0,\pi)$. 于是由**Riemann-Lebesgue 引理** 便有

$$\lim_{n\to\infty}\Big(S_n(f)(x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\Big)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi g(t)\sin(\lambda_n t)\mathrm{d}t=0.$$

这证明了(3.5). □

【注】 如果f在$(-\pi,\pi)$ 内是Hölder连续的, 则由**命题13.8** 可知2π-周期延拓后的f在$\mathbb{R}$上处处满足Dini 条件, 特别在两个端点$x=\pm\pi$处满足Dini条件. 于是在端点$x=\pm\pi$ 处, 由(3.2),(3.3)有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)(-1)^k=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}. \tag{3.6}$$

【例】在$(-\pi,\pi)$上分别将函数(1) $f(x)=x$,(2) $f(x)=|x|$ 展开成以2π为周期的经典Fourier级数, 并对(1),(2)分别给出$x=\frac{\pi}{2}$和$x=0$时对应的数值级数.

【解】这两个函数显然在$(-\pi,\pi)$ 上平方可积.

(1) 对奇函数$f(x)=x$ 计算正弦系数: 注意$x\mapsto x\sin(nx)$是偶函数, 有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{-\cos(nx)}{n}x\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{1}{n}\int_0^\pi\cos(nx)\mathrm{d}x\Big)=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

因函数$f(x)=x$ 在$(-\pi,\pi)$上Lipschitz连续, 故由**命题13.8**知f在2π-周期化后在$\mathbb{R}$上处处满足Dini 条件. 故由**定理13.9** 知

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\sin(nx)\qquad\forall\,x\in(-\pi,\pi).$$

取$x=\frac{\pi}{2}$, 计算

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\sin(\frac{n}{2}\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin(\frac{2n-1}{2}\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(-1)^{n-1}$$

即

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{2}\qquad\text{i.e.}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

这个数值结果与我们以前用Taylor展开计算的结果相同. 这也同时验证了x的上述Fourier 级数展开式是正确的.

(2) 对偶函数$f(x)=|x|$ 计算余弦系数:

$$\begin{aligned}&a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x=\pi,\\&a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\sin(nx)}{n}x\Big|_{x=0}^{x=\pi}-\frac{1}{n}\int_0^\pi\sin(nx)\mathrm{d}x\Big)\\&=\frac{-2}{\pi n}\Big(\frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi}\Big)=\frac{-2}{\pi n^2}(1-(-1)^n).\end{aligned}$$

易见函数$f(x) = |x|$在闭区间$[-\pi,\pi]$上Lipschitz连续且$f(-\pi) = f(\pi)$. 因此由**命题13.8** 知f的2π-周期延拓(仍记作f)在$\mathbb{R}$上处处满足Dini条件其处处连续. 于是由**定理13.9** 有

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\cos(nx) \qquad \forall\, x \in [-\pi,\pi].$$

即

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) \qquad \forall\, x \in [-\pi,\pi].$$

取$x=0$ 导出

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \qquad \text{即} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

这个结果也可由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 得到. 这同时验证了函数$f(x) = |x|$的上述Fourier 级数展开式是正确的. $\square$

下面学习连续函数的Fourier 级数的一致收敛性. 为什么只对连续函数考虑其Fourier级数的一致收敛性? 这是因为Fourier 级数的通项是连续函数(三角函数), 故若Fourier级数在$\mathbb{R}$上一致收敛, 则其和函数必定在$\mathbb{R}$上连续. 首先回忆函数列和函数级数的一致收敛的概念(我们在第四章讲过):

【定义(一致收敛和一致Cauchy 列)】

设$d \in \mathbb{N}, E \subset \mathbb{R}^d$. 令$B(E)$为$E$上有界的复值函数的全体, 即

$$B(E) = \{f : E \to \mathbb{C} \mid \sup_{x\in E}|f(x)| < +\infty\}, \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in E}|f(x)|, \quad f \in B(E).$$

易见$B(E)$是$\mathbb{C}$上的一个线性空间, $\|\cdot\|_\infty$ 是$B(E)$上的一个范数(即$\|\cdot\|_\infty$ 满足正定性、正齐次性、三角不等式).

• 我们称函数列$f_n : E \to \mathbb{C}\,(n = 1,2,3,...)$ 在E上一致收敛于某函数$f : E \to \mathbb{C}$, 如果每个$f_n - f$都在E上有界(即$f_n - f \in B(E)$)且

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0.$$

• 我们称函数列$f_n : E \to \mathbb{C}\,(n = 1,2,3,...)$是$E$上的一致Cauchy列如果每个$f_m - f_n$都在$E$上有界(即$f_m - f_n \in B(E)$) 且

$$\lim_{m>n\to\infty}\|f_m - f_n\|_\infty = 0.$$

• 设$u_k : E \to \mathbb{C}\,(k=1,2,3,...)$. 我们称函数级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$E$上一致收敛于$E$上某函数$S(x)$, 如果这个级数的部分和序列$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,(n=1,2,3,...)$ 在E上一致收敛于函数$S(x)$. 此时我们也称函数级数

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x\in E$$

在E上一致收敛. □

【**命题13.10**】设$d\in\mathbb{N}, E\subset\mathbb{R}^d$, 并定义$\|\cdot\|_\infty$如上.

(a) 设f_n是E上一列函数. 则f_n在E上一致收敛于E上某函数f的充分必要条件是: f_n是E上的一致Cauchy列.

(b) 若E上连续函数列f_n 一致收敛于E上函数f, 则f也在E上连续.

(c) 若u_k是E上一列连续函数且函数级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$E$上一致收敛于函数$S(x)$, 则$S(x)$也在$E$上连续.

(d) **(Weierstrass 优级数判别法)** 设u_k是E上一列有界函数满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\|_\infty<+\infty.$$

则函数级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$E$上一致收敛于某函数$S(x)$.

【证】(a): 设f_n 在E上一致收敛于E上某f. 则对任意$\varepsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$, 当$n\ge N$时$\|f_n-f\|_\infty<\varepsilon/2$. 于是当$m>n\ge N$ 时

$$\|f_m-f_n\|_\infty=\|f_m-f+f-f_n\|_\infty\le\|f_m-f\|_\infty+\|f-f_n\|_\infty<\varepsilon.$$

所以f_n 是E上的一致Cauchy列.

反之设f_n 是E上的一致Cauchy列. 则对每个$x\in E$, 数列$f_n(x)$是一个Cauchy数列从而收敛. 因此极限函数$f(x):=\lim_{n\to\infty} f_n(x)\in\mathbb{C}$ 在E上处处有定义. 来证明f_n 在E上一致收敛于f. 对任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$使得当$m>n\ge N$ 时$\|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$. 于是对任意$n\ge N$ 和任意$x\in E$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|=\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\le\varepsilon.$$

由$n\ge N$和$x\in E$的任意性知f_n-f在E上有界且

$$\|f_n-f\|_\infty\le\varepsilon \qquad \forall\, n\ge N.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$ 即f_n 在E上一致收敛于f.

(b): 要证明f在E上处处连续. 任取$x_0\in E$, 来证明f在x_0连续. 对任意$\varepsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$使得$\|f_N-f\|_\infty<\varepsilon/3$. 而由$f_N$在$E$上连续知存在$\delta>0$ 使得当$x\in B(x_0,\delta)\cap E$ 时$|f_N(x)-f_N(x_0)|<\varepsilon/3$. 于是当$x\in B(x_0,\delta)\cap E$ 时

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|\\&\le 2\|f-f_N\|_\infty+|f_N(x)-f_N(x_0)|<2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以f在x_0连续.

(c): 令$S_n(x)=\sum_{k=1}^n u_k(x)$. 则由假设知$S_n(x)$在$E$上连续且在$E$上一致收敛于$S(x)$. 由(b) 即知$S(x)$在$E$上连续.

(d): 如上, 令$S_n(x)=\sum_{k=1}^n u_k(x)$. 因$\sum_{k=1}^\infty\|u_k\|_\infty<+\infty$ 故当$n\to\infty$时$\sum_{k=n+1}^\infty\|u_k\|_\infty\to 0$. 于是有

$$\|S_m-S_n\|_\infty\le\sum_{k=n+1}^m\|u_k\|_\infty\le\sum_{k=n+1}^\infty\|u_k\|_\infty\to 0\quad(m>n\to\infty).$$

这表明S_n 是E上的一致Cauchy 列. 因此由(a) 知S_n 在E上一致收敛于E上某函数S. 再由函数级数一致收敛的定义即知函数级数$\sum_{k=1}^\infty u_k$在E上一致收敛于函数S. □

现在集中考虑$\mathbb{R}$上2π-周期连续函数. 令

$$C_{2\pi}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\mid f\text{在}\mathbb{R}\text{上连续且是以}2\pi\text{为周期的周函数}\},$$

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=\max_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|,\quad f\in C_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

这里最后那个等号是由于$f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, 它蕴含$x\mapsto|f(x)|$ 也是连续的2π- 周期函数.

【命题13.11】设$f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $S_n(f),\sigma_n(f)$ 分别是f的经典Fourier 级数的部分和及其算数平均, 即

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^n\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big),\tag{3.7}$$

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n S_k(f)(x),\quad x\in\mathbb{R},\quad n=0,1,2,\dots.\tag{3.8}$$

则有一致估计

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty \le B\omega\Big(f,\frac{\log n}{n}\Big),\quad n\ge 3 \tag{3.9}$$

$$\|S_n(f)-f\|_\infty \le C(\log n)\omega\Big(f,\frac{\log n}{n}\Big),\quad n\ge 3 \tag{3.10}$$

其中$B,C>0$ 是绝对常数($B<11, C<44$), $\omega(f,\delta)$ 是f在$\mathbb{R}$上(等价地$[-2\pi,2\pi]$上)的连续模, 即

$$\omega(f,\delta)=\sup_{x,y\in\mathbb{R},\,|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|=\max_{x,y\in[-2\pi,2\pi],\,|x-y|\le\delta,}|f(x)-f(y)|,\quad \delta>0. \tag{3.11}$$

【证】首先说明(3.11)中的第二个等号是由于$f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

我们在学习连续函数性质时已证明了连续模$\delta\mapsto\omega(f,\delta)$ 的基本性质: $\delta\mapsto\omega(f,\delta)$ 单调不减且$\omega(f,n\delta)\le n\omega(f,\delta), n=1,2,3,\dots$. 根据这些性质, 对任意$t\ge 0,\delta>0$ 有

$$\omega(f,t)=\omega(f,\frac{t}{\delta}\delta)\le\omega(f,(1+[\frac{t}{\delta}])\delta)\le(1+[\frac{t}{\delta}])\omega(f,\delta)$$

其中$[x]$ 表示x的整数部分. 于是得到

$$|f(x+t)-f(x)|\le\omega(f,|t|)\le(1+\frac{|t|}{\delta})\omega(f,\delta)\qquad\forall\,x,t\in\mathbb{R},\delta>0. \tag{3.12}$$

回忆(2.18∗):

$$\sigma_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))F_n(t)\mathrm{d}t.$$

由此有: 对任意$n\ge 3,\delta>0$ 有

$$\begin{aligned}&|\sigma_n(f)(x)-f(x)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|F_n(t)\mathrm{d}t\\&\le\omega(f,\delta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\frac{|t|}{\delta})F_n(t)\mathrm{d}t\le\omega(f,\delta)\Big(1+\frac{1}{\delta}3\pi\frac{\log n}{n}\Big)\qquad\forall\,x\in[-\pi,\pi].\end{aligned}$$

因此

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\le\omega(f,\delta)\Big(1+\frac{1}{\delta}3\pi\frac{\log n}{n}\Big).$$

取$\delta=\frac{\log n}{n}$ 即得

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\le(1+3\pi)\omega\Big(f,\frac{\log n}{n}\Big),\quad n\ge 3. \tag{3.13}$$

这证明了估计式(3.9)对于$B=1+3\pi$成立.

为证第二个估计式(3.10), 我们先证明当$n\ge 3$时

$$\|S_n(f)\|_\infty\le 3(\log n)\|f\|_\infty\qquad\forall\,f\in C_{2\pi}(\mathbb{R}). \tag{3.14}$$

由$S_n(f)$的积分表示(2.9)有

$$|S_n(f)(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\Big||D_n(t)|\mathrm{d}t \le \|f\|_\infty \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

因此

$$\|S_n(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

来估计: 由不等式$|\sin(k\theta)| \le k|\sin\theta|\,(k\in\mathbb{N})$和$\sin(\frac{t}{2}) \ge \frac{1}{\pi}t\,(t\in[0,\pi])$ 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin((2n+1)\frac{t}{2})|}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{|\sin((2n+1)\frac{t}{2})|}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^\pi \frac{|\sin((2n+1)\frac{t}{2})|}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t\\
&\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} (2n+1)\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^\pi \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 1+\log(2n+1) \le 3\log n
\end{aligned}$$

当$n\ge 3$ 时. 这证明了(3.14).

最后对任意$f\in C_{2\pi}(\mathbb{R}), n\ge 3$, 有

$$\sigma_n(f) \in \mathcal{H}_n = \Big\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx}\ \Big|\ c_k\in\mathbb{C}\Big\}.$$

由部分和算子$S_n(\cdot)$的投影性质(见第1节) 知按L^2-距离有$S_n(\sigma_n(f)) = \sigma_n(f)$ 即$S_n(\sigma_n(f))(x) = \sigma_n(f)(x)$ a.e. $x\in[-\pi,\pi]$. 因$S_n(\sigma_n(f)), \sigma_n(f)$ 皆连续且为2π-周期函数, 故$S_n(\sigma_n(f))(x) \equiv \sigma_n(f)(x), x\in\mathbb{R}$. 由此和$S_n$的线性性我们得到分解:

$$S_n(f)-f = S_n(f)-S_n(\sigma_n(f))+\sigma_n(f)-f = S_n(f-\sigma_n(f))+\sigma_n(f)-f$$

从而由(3.14), (3.9)得到估计

$$\begin{aligned}
&\|S_n(f)-f\|_\infty \le \|S_n(f-\sigma_n(f))\|_\infty + \|\sigma_n(f)-f\|_\infty\\
&\le 3(\log n)\|\sigma_n(f)-f\|_\infty + \|\sigma_n(f)-f\|_\infty \le 4(\log n)\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\\
&\le 4(1+3\pi)(\log n)\omega\Big(f, \frac{\log n}{n}\Big).
\end{aligned}$$

这证明了不等式(3.10)对于$C=4(1+3\pi)$成立. □

由上述命题我们立即得到下列两个重要定理:

【Weierstrass三角多项式一致逼近定理】

对任意$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, 存在一列三角多项式$T_n(x) = \sum\limits_{|k|\le n} c_k e^{\mathrm{i}kx}$ 它在$\mathbb{R}$上一致收敛于f, 即

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - f\|_\infty = 0.$$

【证】取$T_n(x) = \sigma_n(f)(x)$. 则T_n 是三角多项式序列且由**命题13.11**有

$$\|T_n - f\|_\infty \le B\omega\Big(f, \frac{\log n}{n}\Big) \to 0 \quad (n\to\infty). \qquad \square$$

【定理13.12(Hölder连续的函数的Fourier级数一致收敛)】

设$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$是Hölder连续的, 即存在常数$0<\alpha\le 1$ 和$0<L<\infty$ 使得

$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y|^\alpha \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

则f处处可以展开成经典Fourier级数:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big) \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \tag{3.15}$$

并且这两个Fourier级数都在$\mathbb{R}$上一致收敛.

【证】由假设易见

$$\omega(f,\delta) \le L\delta^\alpha \qquad \forall\,\delta > 0.$$

于是由**命题13.11** 有

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \le C(\log n)\omega\Big(f, \frac{\log n}{n}\Big) \le CL\frac{(\log n)^{1+\alpha}}{n^\alpha} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

再由部分和$S_n(f)$的表示(3.7)即知f上述两个Fourier级数都在$\mathbb{R}$上一致收敛于f. $\square$

【注】上述一致收敛的结果不能推广到任意连续函数$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. 事实上在学习泛函分析时将看到, 存在连续函数$f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ 使得$\limsup\limits_{n\to\infty} |S_n(f)(0)| = +\infty$. 这说明, 这个$f$的Fourier级数不但不能一致收敛而且不能处处收敛.

大家知道, Hölder指数$\alpha = 1$ 时的Hölder连续性就是Lipschitz 连续性, 它可以被函数导数的有界性来刻画。为了配合上述定理的应用, 我们介绍一个这类命题.

【命题13.13(Lipschitz 连续性的导数判别)】

设函数$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ 和常数$0<L<\infty$ 满足

(i) f在$(-\pi,\pi)$ 内处处有左右导数, 在端点$\pm\pi$有单侧导数且

$$|f'_\pm(x)|\le L\quad\forall\, x\in(-\pi,\pi);\quad |f'_+(-\pi)|\le L,\ |f'_-(\pi)|\le L.$$

(ii) $f(-\pi)=f(\pi)$.

将f作2π周期化延拓到$\mathbb{R}$, 延拓后的函数仍记作f. 则f在$\mathbb{R}$上是Lipschitz 连续的且Lipschitz 常数为L, 即

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|\qquad\forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

【证】先证明

$$|f'_\pm(x)|\le L\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

我们有

$$\mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}((2k-1)\pi,(2k+1)\pi].$$

对任意$x\in\mathbb{R}$ 存在唯一的$k\in\mathbb{Z}$ 使得$x\in[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$. 令$y=x-2k\pi$, 则$y\in[-\pi,\pi)$ 且对于所有$0<h<(2k+1)\pi-x=\pi-y$ 有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x-2k\pi+h)-f(x-2k\pi)}{h}=\frac{f(y+h)-f(y)}{h}\\&\Longrightarrow\ f'_+(x)=\lim_{h\to0+}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}=f'_+(y)\\&\Longrightarrow\ |f'_+(x)|=|f'_+(y)|\le L.\end{aligned}$$

同样存在唯一的$m\in\mathbb{Z}$ 使得$x\in((2m-1)\pi,(2m+1)\pi]$. 令$y=x-2m\pi$, 则$y\in(-\pi,\pi]$ 且对于所有$0<h<x-(2m-1)\pi=y+\pi$ 有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=\frac{f(x-2m\pi-h)-f(x-2m\pi)}{-h}=\frac{f(y-h)-f(y)}{-h}\\&\Longrightarrow\ f'_-(x)=\lim_{h\to0+}\frac{f(y-h)-f(y)}{-h}=f'_-(y)\\&\Longrightarrow\ |f'_-(x)|=|f'_-(y)|\le L.\end{aligned}$$

其次证明f在$\mathbb{R}$上满足Lipschitz条件且Lipschitz 常数为L. 反证法: 设不然, 则存在$a,b\in\mathbb{R}$ 使得

$$|f(b)-f(a)|>L|b-a|.$$

不妨设$a<b$. 取$\varepsilon=\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|}-L$, 则$\varepsilon>0$且

$$(L+\varepsilon)(b-a)=|f(b)-f(a)|.$$

由此有

$$(L+\varepsilon)(b-a)\le|f(b)-f(\frac{a+b}{2})|+|f(\frac{a+b}{2})-f(a)|.$$

这蕴含对于$[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]$ 或$[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]$ 有

$$(L+\varepsilon)(b_1-a_1)\le|f(b_1)-f(a_1)|.$$

同样操作知对于$[a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ 或$[a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ 有

$$(L+\varepsilon)(b_2-a_2)\le|f(b_2)-f(a_2)|.$$

用归纳法原理我们得到一串闭区间

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots$$

满足

$$(L+\varepsilon)(b_k-a_k)\le|f(b_k)-f(a_k)|,\quad b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k},\ k=1,2,3,\dots.$$

由闭区间套原理, 存在$x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$ 且$a_k\to x_0, b_k\to x_0\ (k\to\infty)$. 另一方面, 由单侧导数$f'_{\pm}(x_0)$存在且

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{x-x_0}=|f'_+(x_0)|\le L,\quad \lim_{x\to x_0-}\frac{|f(x_0)-f(x)|}{x_0-x}=|f'_-(x_0)|\le L$$

知存在$\delta>0$使得

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{x-x_0}\le L+\frac{\varepsilon}{2}\qquad\forall\,x\in(x_0,x_0+\delta),$$
$$\frac{|f(x_0)-f(x)|}{x_0-x}\le L+\frac{\varepsilon}{2}\qquad\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0).$$

这给出

$$|f(x)-f(x_0)|\le(L+\frac{\varepsilon}{2})(x-x_0)\qquad\forall\,x\in[x_0,x_0+\delta),$$
$$|f(x_0)-f(x)|\le(L+\frac{\varepsilon}{2})(x_0-x)\qquad\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0].$$

由此得到

$$|f(y)-f(x)|\le|f(y)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x)|\le(L+\frac{\varepsilon}{2})(y-x_0+x_0-x)$$
$$=(L+\frac{\varepsilon}{2})(y-x)\quad\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0]\ \ \forall\,y\in[x_0,x_0+\delta).$$

于是得到

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{y-x}\le L+\frac{\varepsilon}{2}\qquad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0]\ \ \forall\, y\in[x_0,x_0+\delta)\ \ \text{s.t. } x<y.$$

取$k>>1$ 使得$x_0-\delta<a_k\le x_0\le b_k<x_0+\delta$. 则得到矛盾:

$$L+\varepsilon\le\frac{|f(b_k)-f(a_k)|}{b_k-a_k}\le L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

这矛盾证明了f在$\mathbb{R}$上满足Lipschitz条件且Lipschitz 常数为L. $\square$

作为这一命题和上一定理的推论我们有

【命题13.14】设函数$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ 和常数$0<L<\infty$ 满足**命题13.13**中的条件并将f以2π周期化地延拓到$\mathbb{R}$, 延拓后的函数仍记作f. 则f在$\mathbb{R}$上满足Lipschitz条件且Lipschitz 常数为L. 因此f处处可以展开成经典Fourier级数:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}$$

并且这两个Fourier级数都在$\mathbb{R}$上一致收敛. $\square$

【例】(a) 设$0<a<1$. 试通过将函数$f(x)=\cos(ax)$在$[-\pi,\pi]$上展开成Fourier 级数证明

$$\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2a}{n^2-a^2}=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}.\tag{3.16}$$

(b) 设 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ 为Gamma 函数$(s>0)$. 证明

【余元公式】

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}\qquad\forall\, 0<a<1.\tag{3.17}$$

(c) 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\frac{\pi}{p\sin(\frac{\pi}{p})}\qquad\forall\, p>1.\tag{3.18}$$

【证】(a): 函数$f(x)=\cos(ax)$在$[-\pi,\pi]$上显然满足**命题13.14**的条件其中可取$L=a$. 将f以2π周期化地延拓到$\mathbb{R}$, 延拓后的函数仍记作f. 则f处处可以展开成一致收敛的Fourier级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big)\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}$$

特别取$x=0$ 有

$$1=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

计算

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ax)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(a\pi)}{a},$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2\cos(ax)\cos(nx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos((n-a)x)+\cos((n+a)x)\Big)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((n-a)x)}{n-a}\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{\sin((n+a)x)}{n+a}\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((n-a)\pi)}{n-a}+\frac{\sin((n+a)\pi)}{n+a}\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}\sin(a\pi)}{n-a}+\frac{(-1)^{n}\sin(a\pi)}{n+a}\right)\\
&=\frac{\sin(a\pi)}{\pi}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n-a}-\frac{1}{n+a}\right)=\frac{\sin(a\pi)}{\pi}(-1)^{n-1}\frac{2a}{n^2-a^2}.
\end{aligned}$$

所以

$$1=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2a}{n^2-a^2}\right)$$

即

$$\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2a}{n^2-a^2}=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

为证(b),(c), 我们先证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}\qquad\forall\,0<a<1.\tag{3.19}$$

也即, 由(a), 只需证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2a}{n^2-a^2}.\tag{3.20}$$

这无穷级数提示我们考虑幂级数的逐项积分. 因此先把积分$\int_0^{\infty}$ 转换成$\int_0^1$. 计算

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x\quad(x=\frac{1}{y})\quad=\int_0^1\frac{y^{1-a}}{1+\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y^{-a}}{1+y}\mathrm{d}y$$

这给出

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1+\int_1^{\infty}=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

由等比级数有

$$0 < x < 1 \implies \frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+a-1}.$$

令

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+a-1} = x^{a-1}\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}, \quad 0 < x < 1.$$

则有

$$0 \le f_N(x) \le 2\frac{x^{a-1}}{1+x}, \quad \lim_{N\to\infty} f_N(x) = \frac{x^{a-1}}{1+x} \qquad \forall\, x \in (0,1).$$

易见$x \mapsto 2\frac{x^{a-1}}{1+x}$在$(0,1)$上$L$ -可积. 因此由LDC 有

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_0^1 f_N(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{n+a-1}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{1}{n+a} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+a}. \quad (\text{由交错级数判别法知这级数收敛})$$

把a换成$1-a$ 同样有

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1-a}.$$

于是得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+a} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1-a}$$
$$= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-a}$$
$$= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{n-a} - \frac{1}{n+a}\Big) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2a}{n^2-a^2}.$$

下证(b): 回忆Gamma 函数与Beta 函数的关系:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p,q), \quad p,q > 0.$$

由这一关系式和$\Gamma(1) = 1$ 以及(3.19) 得

$$\Gamma(1-a)\Gamma(a) = \Gamma(1)B(1-a,a) = B(1-a,a) = \int_0^1 t^{-a}(1-t)^{a-1}\mathrm{d}t \quad (t = \frac{1}{1+x})$$
$$= \int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{-a}\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^{a-1}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

下证(c): 作换元$x = t^{\frac{1}{p}}$ 并由(3.19) 其中取$a = \frac{1}{p}$ 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{p}-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{p\sin(\frac{\pi}{p})}. \qquad \square$$

由积分公式(3.17),(3.18)有

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})}} = \sqrt{\pi}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{4\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \qquad \text{等等.}$$

【小结】对于$(-\pi,\pi)$上或$(0,\pi)$上给定的函数f, 若想应用Fourier 级数(的部分和)来展开(或逼近)f, 则一般需要如下操作：

Step 1: 若f在$(-\pi,\pi)$上有定义, 则适当定义$f(\pi) = f(-\pi)$(尽可能保持f的连续性), 然后将f作2π-周期化延拓至$\mathbb{R}$. 若f只在$(0,\pi)$上有定义, 则可先将f偶延拓到$[-\pi,\pi]$ (尽可能保持f的连续性), 然后再将f作2π-周期化延拓至$\mathbb{R}$. 也可以先将f奇延拓到$[-\pi,\pi]$ (注意此时有$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$), 然后再将$f$作$2\pi$-周期化延拓至$\mathbb{R}$.

Step 2: 检查f在$[-\pi,\pi]$上的连续程度(如是否满足Lipschitz 条件等等). 如果连续程度不差, 则可以应用上面给出的各种关于Fourier 级数点态收敛(包括一致收敛)的定理、命题, 定性地知道f的Fourier 级数的收敛性。如果f的连续程度差, 但仍有$f \in L^2(-\pi,\pi)$, 则至少可以在$L^2(-\pi,\pi)$-收敛的意义下得知f可以展开成Fourier 级数。如果$f \notin L^2(-\pi,\pi)$, 则放弃, 此时Fourier 级数无法描述f的行为.

Step 3: 如果$f \in L^2(-\pi,\pi)$, 则计算f的Fourier余弦系数$a_n, n = 0,1,2,...$,和正弦系数$b_n, n = 1,2,3,\dots$. $\square$

本章最后我们来尝试回答下面问题:

为什么Fourier 级数比Taylor 级数适用范围大且收敛性好? —— 至少有两个原因:

1. 构成函数f的Fourier级数的是f的积分而不是f的导数,因此对f的要求很低, 只需要可积性.

2. Fourier级数是由彼此正交的函数构成的, 它的部分和$S_n(f)$就是f 向有限维内积空间中的投影[即向量的正交分解$f = S_n(f) + (f - S_n(f))$], 因此是对f的最佳逼近(按内积空间中的度量). 此外, 正交函数系具有震荡行为, 而以后在学习**数值分析**时会知道, 函数列在被逼近函数附近有小涨落、小震荡蕴含这函数列是好的或较好的逼近。

作业题

1. 设$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = e^{ax}, x \in (-\pi, \pi)$. 试应用**命题13.8** 和**定理13.9** 将2π-周期化延拓后的$f(x)$在每一点$x \in [-\pi, \pi]$处展开成Fourier级数. 此外通过证明(利用(3.6))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$$

来验证你的Fourier展开式的正确性. (提醒: 计算时可统一成指数函数$t \mapsto e^{\lambda t}$的积分.)

2. 证明对任意$x \in \mathbb{R}$ 有

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} \cos(2nx),$$
$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(2nx).$$

3. (1) 设$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha - |x| & \text{if} \quad |x| \le 2\alpha, \\ 0 & \text{if} \quad 2\alpha \le |x| \le \pi. \end{cases}$$

将f作2π-周期化延拓到$\mathbb{R}$，仍以f表示这个延拓. 证明f的Fourier 级数在$\mathbb{R}$上一致收敛于f, 并写出这个Fourier 级数的具体表达式.

(2) 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = ? \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2} = ?$$

4. 用两种方法证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. 设f是$(-\pi, \pi)$上的有界可测函数且在点$x_0 \in (-\pi, \pi)$连续. 证明

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f)(x_0) = f(x_0)$$

其中$\sigma_n(f)(x)$ 是(2.10)定义的Fourier级数的部分和的**算数平均**.

[利用**引理13.5** 和(2.18$*$). 可先证明

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\delta \le |t| \le \pi} F_n(t) \mathrm{d}t = 0 \qquad \forall\, 0 < \delta < \pi. \qquad]$$

6. 利用上题证明若$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$的Fourier级数

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ 在某点$x = x_0$收敛于$A \in \mathbb{C}$,

则必有$A = f(x_0)$.

7. 证明: $[0,\pi]$上的光滑函数的余弦级数的收敛性一般比它的正弦级数的收敛性好. 意即: 假设$f \in C^1([0,\pi])$, 则有

(1) f的余弦级数$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ 在$[0,\pi]$上一致收敛于$f(x)$.

(2) 当且仅当$f(0) = f(\pi) = 0$时f的正弦级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ 在$[0,\pi]$上一致收敛于$f(x)$.

[回忆: 函数级数的一致收敛就是该函数级数的部分和序列一致收敛.]

8. 已知$p > 1, b > a > 0$. 求

$$\int_0^1 (1-x^p)^{-\frac{1}{p}} \mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} \mathrm{d}x = ?$$

习题课

1. 设$n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 是多重指标, 记$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 令

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

$$P(x)=\sum_{|\alpha|\leq N}c_\alpha x^\alpha,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

其中$N\in\mathbb{N}, c_\alpha\in\mathbb{C}$是常数, 即$P(x)$是一个次数$\leq N$的$n$元多项式.

证明: 若$P(x)\not\equiv 0$, 也即若P的系数c_α不全为零, 则必有

$$m(\{x\in\mathbb{R}^n\mid P(x)=0\})=0.$$

【证】本题是讲义第十章Fubini 定理那一节的后面的作业题**17** (那里对上述一般情形的叙述有印刷错误). 请助教给出一个证明。先说明: 通过考虑$c_\alpha=c_{1\alpha}+\mathrm{i}c_{2\alpha}$ 的实部$c_{1\alpha}$ 和虚部$c_{2\alpha}$, 有

$$P(x)=P_1(x)+\mathrm{i}P_2(x)$$

其中

$$P_1(x)=\sum_{|\alpha|\leq N}c_{1\alpha}x^\alpha,\qquad P_2(x)=\sum_{|\alpha|\leq N}c_{2\alpha}x^\alpha.$$

因$c_\alpha=c_{1\alpha}+\mathrm{i}c_{2\alpha}$ 不全为零, 故P_1 或P_2 至少有一个不恒为零. 于是可以假设系数c_α均为实数。 $\square$

2. 设$n\in\mathbb{N}, E\subset\mathbb{R}^n$是Lebesgue 可测集且$m(E)>0$. 证明对任意$N\in\mathbb{N}$, 在$L^2(E)$中存在由$N$个$C^\infty$-光滑的函数组成的ON系$\{\psi_1,\psi_2,...,\psi_N\}$.

【证】设$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$是多重指标, 记$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 考虑函数

$$\varphi_\alpha(x)=x^\alpha e^{-|x|^2/2},\quad \alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$$

其中

$$x=(x_1,x_2,...,x_n),\quad x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

易见

$$|x^\alpha|=|x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}\cdots|x_n|^{\alpha_n}\leq|x|^{\alpha_1}|x|^{\alpha_2}\cdots|x|^{\alpha_n}=|x|^{|\alpha|}.$$

因此

$$\int_E |\varphi_\alpha(x)|^2 \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\alpha(x)|^2 \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2|\alpha|} e^{-|x|^2} \mathrm{d}x$$
$$= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^{+\infty} r^{2|\alpha|+n-1} e^{-r^2} \mathrm{d}r < \infty.$$

这说明$\varphi_\alpha \in L^2(E)$.

给定任意$N \in \mathbb{N}$. 来证明函数组$\{\varphi_\alpha\}_{|\alpha|\le N}$ 在$L^2(E)$中线性无关, 即

$$\text{若} \quad \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha \varphi_\alpha = 0 \quad \text{于} \quad L^2(E), \quad \text{则} \quad c_\alpha = 0 \quad \forall\, |\alpha| \le N.$$

这里c_α是常数.

事实上令

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

则$P(x)$是一个次数$\le N$的n元多项式且

$$\sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha \varphi_\alpha(x) = P(x) e^{-|x|^2/2}.$$

令

$$\int_E \Big| \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha \varphi_\alpha(x) \Big|^2 \mathrm{d}x = 0$$

即

$$\int_E |P(x)|^2 e^{-|x|^2} \mathrm{d}x = 0.$$

则

$$|P(x)|^2 e^{-|x|^2} = 0 \qquad \text{a.e.} \quad x \in E.$$

即

$$P(x) = 0 \qquad \text{a.e.} \quad x \in E.$$

因P连续, 故这蕴含

$$P(x) = 0 \qquad \forall\, x \in E.$$

由此有

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\} \supset E$$

从而有

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\}) \ge m(E) > 0.$$

因此由第**1**题知$P(x) \equiv 0$ 于$\mathbb{R}^n$. 这等价于P的系数全为零, 即一切$c_\alpha = 0, |\alpha| \le N$. 这就证明了函数组$\{\varphi_\alpha\}_{|\alpha|\le N}$ 在$L^2(E)$中线性无关.

将函数组$\{\varphi_\alpha\}_{|\alpha|\le N}$编号成$\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, ..., \widetilde{\varphi}_M$ 其中

$$M = \sum_{|\alpha|\le N} 1 > N.$$

则由于这些函数$\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, ..., \widetilde{\varphi}_M$在内积空间$L^2(E)$中线性无关, 故利用**格拉姆-施密特**正交化过程得到$L^2(E)$中的一个有限ON系$\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_M\}$ 其中每个ψ_k 都是$\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, ..., \widetilde{\varphi}_k$的线性组合因此每个$\psi_k$ 都是C^∞-光滑函数. 最后注意$M > N$ 即得证。 $\Box$.

【注】从本题的证明易见当$m(E) > 0$时, 对任意$1 \le p < \infty$, 线性空间$L^p(E)$是无限维的.

3. 设$E \subset \mathbb{R}^n$为Lebesgue 可测集且$0 < m(E) < \infty$, 设$\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(E)$ 是$L^2(E)$的一个ON系且满足

$$\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \text{ 一致有界, 即存在 } 0 < M < \infty \text{ 使得 } \quad |\psi_k(x)| \le M \quad \forall x \in E, k \in \mathbb{N}.$$

令

$$A = \{x \in E \mid \text{极限 } \lim_{k\to\infty} \psi_k(x) \text{ 存在}\}.$$

证明

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = 0 \qquad \text{a.e.} \quad x \in A.$$

【证】由数列收敛的Cauchy 准则易证

$$A = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{p=N}^\infty \bigcap_{q=N}^\infty \{x \in E \mid |\psi_p(x) - \psi_q(x)| \le \frac{1}{k}\}.$$

因此A是可测集. 于是函数$x \mapsto \lim_{k\to\infty} \psi_k(x)$ 。是A上的可测函数. 令

$$f(x) = 1_A(x) \lim_{k\to\infty} \psi_k(x), \quad x \in E.$$

由$0 < m(E) < \infty$ 和$\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ 一致有界知可以对$|\psi_k|^2, |f|^2$ 使用LDC, 从而有

$$\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_A |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_A |\psi_k(x)|^2 \mathrm{d}x \le 1 < \infty.$$

这说明$f \in L^2(E)$. 于是由Bessel 不等式有

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle f, \psi_k \rangle|^2 \le \|f\|^2 < \infty$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\langle f,\psi_k\rangle=0 \quad 即 \quad \lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x=0.$$

再由$\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 一致有界和LDC 有

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_A f(x)\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x=\int_E f(x)\overline{\lim_{k\to\infty}\psi_k(x)}\mathrm{d}x=\int_A |f(x)|^2\mathrm{d}x$$

所以$f(x)=0$ a.e. $x\in A$. 也即$\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(x)=0$ a.e. $x\in A$. □

4. 设$E\subset\mathbb{R}^n$是一个具有正测度的Lebesgue 可测集, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset L^2(E)$ 是$L^2(E)$的一个ON基. 证明

(1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_A|\psi_k(x)|^2\mathrm{d}x\geq 1 \qquad \forall\,可测集\,A\subset E\ \text{ s.t. }\ 0<m(A)<\infty.$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k(x)|^2=+\infty \qquad \text{a.e.} \qquad x\in E.$$

【证】(1) 考虑特征函数$1_A(x)$ 其中$A\subset E$ 可测且$m(A)<\infty$. 易见$1_A\in L^2(E)$. 由$\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基知成立Parseval 等式:

$$m(A)=\|1_A\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle 1_A,\psi_k\rangle|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_A\psi_k(x)\mathrm{d}x\Big|^2\leq\sum_{k=1}^{\infty}m(A)\int_A|\psi_k(x)|^2\mathrm{d}x.$$

当$m(A)>0$时便得到

$$1\leq\sum_{k=1}^{\infty}\int_A|\psi_k(x)|^2\mathrm{d}x.$$

(2): 令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k(x)|^2,\quad x\in E.$$

要证$f=\infty$ a.e. $x\in E$. 即证明

$$Z:=\{x\in E\mid f(x)<\infty\}\quad 是零测集.$$

作分解

$$Z=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}Z_{j,k},\quad Z_{j,k}=(-j,j)^n\cap\{x\in E\mid f(x)\leq k\}.$$

则有

$$m(Z)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}m(Z_{j,k}).$$

来证明每个$Z_{j,k}$ 都零测集, 即$m(Z_{j,k})=0$. 固定$j,k\in\mathbb{N}$, 令$E_0=Z_{j,k}$. 则有

$$\int_{E_0} f(x)\mathrm{d}x \le k\cdot m(E_0)\le k\cdot(2j)^n<\infty.$$

这说明$f\in L^1(E_0)$. 因此由可积函数的积分的绝对连续性知存在$\delta>0$ 使得

$$\text{对任意可测集}A\subset E_0\text{ 满足}m(A)\le\delta\text{ 有 }\int_A f(x)\mathrm{d}<1.$$

若$m(E_0)>0$, 则对于$0<\min\{\delta,m(E_0)\}\le m(E_0)$, 由**测度的介值定理** (见以前习题中对一维时的的证法, 高维时至少对有界可测集是容易证的) 知存在可测集$A\subset E_0$ 使得

$$m(A)=\min\{\delta,m(E_0)\}.$$

从而有$0<m(A)\le\delta$. 于是由逐项积分和(1) 有

$$1>\int_A f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_A|\psi_k(x)|^2\mathrm{d}x\ge 1,\quad \text{矛盾}.$$

这矛盾证明了$m(E_0)=0$. 所以每个$Z_{j,k}$ 都零测集。 □

5. 设$n\in\mathbb{N}$,

$$T_n(x)=\sum_{|k|\le n}c_ke^{\mathrm{i}kx},\quad x\in\mathbb{R}$$

令$T_n'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_n(x)$. 证明

$$\|T_n'\|_\infty\le C_n\|T_n\|_\infty$$

其中

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,$$

C_n是只依赖于n的常数. 尝试不同方法给出C_n的较好估值. 例如我们将用粗细不同的估计证明

$$C_n\le n(n+1),\qquad C_n\le\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}.$$

将来学习数值分析时将证明$C_n=n$, 目前我们做不到这点.

【解】令

$$\mathcal{H}_n=\Big\{\sum_{|k|\le n}c_ke^{\mathrm{i}k\cdot}\ \Big|\ c_k\in\mathbb{C}\Big\}$$

则$\mathcal{H}_n\subset L^2(-\pi,\pi)$是$L^2(-\pi,\pi)$ 的$2n+1$维子空间。如令

$$S_n(f)(x)=\sum_{|k|\le n}\Big\langle f,\frac{e^{\mathrm{i}k\cdot}}{\sqrt{2\pi}}\Big\rangle\frac{e^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}},\qquad f\in L^2(-\pi,\pi).$$

则$S_n(f)\in\mathcal{H}_n$ 且

$$S_n(f)(x)=f(x)\qquad \forall\, x\in\mathbb{R},\quad \forall\, f\in\mathcal{H}_n.$$

我们在讲义中已证明了$S_n(f)(x)$的积分表示:

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}$$

其中$D_n(t)$ 是Dini 核:

$$D_n(t)=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}=\sum_{k=-n}^{n}e^{\mathrm{i}kt}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt),\quad t\in\mathbb{R}.$$

由f 和$D_n(t)$ 都是周期2π 函数有

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t=\quad (x+t=\theta\,)\quad=\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(\theta)D_n(\theta-x)\mathrm{d}\theta\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)D_n(\theta-x)\mathrm{d}\theta\qquad (\text{这是因为被积函数周期}2\pi\,)\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)D_n(x-\theta)\mathrm{d}\theta\quad (\text{这是因为}D_n\text{是偶函数}).\end{aligned}$$

于是得到

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R};\quad f\in L^2(-\pi,\pi).$$

特别取$f(x)=T_n(x)$ 有

$$T_n(x)=S_n(T_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}.$$

易见可以使用积分号下求导定理, 因此有

$$T_n'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t)D_n'(x-t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}.$$

而

$$\begin{aligned}&D_n'(t)=2(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt))'=2\sum_{k=1}^{n}-\sin(kt)k\,,\\ &|D_n'(t)|\le 2\sum_{k=1}^{n}|\sin(kt)|k\le 2\sum_{k=1}^{n}k=n(n+1)\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

代入上式得到

$$|T_n'(x)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(t)||D_n'(x-t)|\mathrm{d}t\le n(n+1)\|T_n\|_\infty\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

所以$\|T_n'\|_\infty \leq n(n+1)\|T_n\|_\infty$. 这给出估值: $C_n \leq n(n+1)$.

另法: 由Cauchy-Schwartz 不等式有

$$
\begin{aligned}
|T_n'(x)| &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n'(x-t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\leq \|T_n\|_\infty\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n'(x-t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

注意

$$
|D_n'(t)| = 2\Big|\sum_{k=1}^{n}k\sin(kt)\Big|
$$

是偶函数且周期2π 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}|D_n'(x-t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}|D_n'(t-x)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}|D_n'(t)|^2\mathrm{d}t \\
&= 4\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}kj\sin(kt)\sin(jt)\mathrm{d}t \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}kj\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\sin(jt)\mathrm{d}t \quad \text{（由正交性, 演示一下！）} \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kt)\mathrm{d}t = 4\sum_{k=1}^{n}k^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2kt)}{2}\mathrm{d}t \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^2\pi = 4\pi\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2\pi\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n'(x-t)|^2\mathrm{d}t = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}
$$

从而有

$$
|T_n'(x)| \leq \|T_n\|_\infty\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.
$$

因此

$$
\|T_n'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}\,\|T_n\|_\infty.
$$

这蕴含

$$
C_n \leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}.
$$

□

习题课

1. 证明巴里定理: 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间$(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的两个ON系, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-\widetilde{e}_k\|^2<\infty.$$

则$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是ON基 $\iff$ $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基.

【证】我们将使用如下

【引理】设X,Y是数域$\mathbb{K}$上的两个线性空间, $T:X\to Y$ 是一个线性映射且是单射. 则有

$$\mathrm{dim}X=\mathrm{dim}T(X)\le\mathrm{dim}Y.$$

[**引理的证明:**] 首先回忆: 若线性空间X不是有限维的, 则称X是无限维的并定义$\mathrm{dim}X=\infty$. 周知

$$T(X)=\{T(x)\,|\,x\in X\}$$

是线性空间且$T(X)\subset Y$. 这蕴含$\mathrm{dim}T(X)\le\mathrm{dim}Y$. 可以假设$X\ne\{0\}$ 即$\mathrm{dim}X\ge 1$ (否则所证显然成立). 设$x_1,x_2,...,x_n$ 是X 中的一组线性无关的向量. 则由T是单射易见$T(x_1),T(x_2),...,T(x_n)$也是线性无关的. 这蕴含$\mathrm{dim}T(X)\ge n$. 由此可知若X是无限维的, 则$T(X)$也是无限维的从而有$\mathrm{dim}X=\infty=\mathrm{dim}T(X)$. 下设$X$是有限维的. 令$n:=\mathrm{dim}X$ (≥ 1). 设$\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 是X的一个基底. 令$y_k=T(x_k),k=1,2,...,n$, 则如上由T是单射易见$y_1,y_2,...,y_n$也是线性无关的. 来证$\{y_1,y_2,...,y_n\}$ 是$T(X)$的一个基底. 对任意$y\in T(X)$, 写$y=T(x),x\in X$. 则存在系数$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$ 使得

$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\quad\text{从而有}\quad y=T(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k T(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k.$$

这表明$\{y_1,y_2,...,y_n\}$ 是X的一个基底. 于是得到

$$\mathrm{dim}X=n=\mathrm{dim}T(X)\le\mathrm{dim}Y.\qquad\Box$$

回到巴里定理的证明: 因$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 与$\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 地位相同, 故只需证明若$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$的ON基, 则$\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 也是.

设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$的ON基. 由假设知存在$N\in\mathbb{N}$使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\|e_k-\widetilde{e}_k\|^2<\frac{1}{2}.\tag{$*$}$$

令

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_N = \mathrm{span}\{e_1, e_2, ..., e_N\} = \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \;\Big|\; \lambda_k \in \mathbb{C},\, k = 1, 2, ..., N \Big\},\\
&\widetilde{\mathcal{H}}_N = \mathrm{span}\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_N\} = \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \widetilde{e}_k \;\Big|\; \lambda_k \in \mathbb{C},\, k = 1, 2, ..., N \Big\},\\
&X = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, \widetilde{e}_k\rangle = 0 \quad \forall\, k \ge N+1\}.
\end{aligned}
$$

易见$\mathcal{H}_N, \widetilde{\mathcal{H}}_N$ 都是N维线性空间且$\{e_1, e_2, ..., e_N\}, \{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_N\}$分别是它们的ON基. 再由$\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是$\mathcal{H}$的ON系易见

$$\widetilde{\mathcal{H}}_N \subset X.$$

来证明

$$X = \widetilde{\mathcal{H}}_N. \tag{$**$}$$

如果此事成立, 则对于任一满足$\langle x, \widetilde{e}_k\rangle = 0\ \forall\, k = 1, 2, 3, ...$ 的$x \in \mathcal{H}$ 有$x \in X$, 再由$X = \widetilde{\mathcal{H}}_N$知存在$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N \in \mathbb{C}$ 使得$x = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \widetilde{e}_k$ 从而有$\lambda_k = \langle x, \widetilde{e}_k\rangle = 0, k = 1, 2, ..., N$ 因此$x = 0$. 据Hilbert 空间中的ON基的刻画定理即知$\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基.

为证($**$), 考虑线性映射

$$T : X \to \mathcal{H}_N, \quad T(x) = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k, \quad x \in X.$$

易见T确实是线性的. 来证明T是单射.

设$x \in X$. 由$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基、X的定义和($*$) 有

$$
\begin{aligned}
&\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2\\
&= \Big\| \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k \Big\|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle x, e_k - \widetilde{e}_k\rangle|^2\\
&\le \|T(x)\|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \|x\|^2 \|e_k - \widetilde{e}_k\|^2 = \|T(x)\|^2 + \|x\|^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \|e_k - \widetilde{e}_k\|^2\\
&\le \|T(x)\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$\|x\| \le \sqrt{2}\|T(x)\| \qquad \forall\, x \in X.$$

因T是线性的, 故这不等式蕴含T是单射. 于是由上面引理知X是有限维的且

$$\mathrm{dim} X = \mathrm{dim} T(X) \le \mathrm{dim} \mathcal{H}_N = N.$$

因$\widetilde{\mathcal{H}}_N \subset X$且$\dim\widetilde{\mathcal{H}}_N = N$, 故得$\dim X = N = \dim\widetilde{\mathcal{H}}_N$ 从而有$X = \widetilde{\mathcal{H}}_N$. 所以$(**)$成立。 $\square$

• **复习Fourier 级数的部分和:** 设$f \in L^2(-\pi,\pi)$. 将f 作2π-周期化延拓到$\mathbb{R}$, 设

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_n(f)(x) = \sum_{|k|\le n} \widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\Big(S_0(f)(x) + S_1(f)(x) + \cdots + S_n(f)(x)\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

则我们在讲义中已证明

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{|k|\le n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中$F_n(t)$ 是Fejér 核:

$$F_n(t) = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 \ge 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d} = 1.$$

令a_k, b_k 分别是f的Fourier 余弦系数和正弦系数即

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

来证明:

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

这是计算的结果:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{|k|\le n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{|k|\le n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)(a_k - \mathrm{i}b_k)\Big(\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{|k|\le n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{|k|\le n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\Big(a_k\sin(kx) - b_k\cos(kx)\Big).$$

注意$k\mapsto a_k\sin(kx), k\mapsto b_k\cos(kx)$ 都是奇函数，故有

$$\sum_{|k|\le n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)a_k\sin(kx)=\sum_{|k|\le n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)b_k\cos(kx)=0$$

因此(同样由偶函数的性质)

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x)&=\frac{1}{2}\sum_{|k|\le n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)\\&=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{1\le|k|\le n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)\\&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big).\end{aligned}$$

2. 利用Fourier 级数理论证明对任意$n\in\mathbb{N}$ 有

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\Big|<1+\frac{\pi}{2}\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

【证】考虑函数$f(x)=x,\ x\in(-\pi,\pi),$ 的Fourier 级数的部分和. 将f 作2π-周期化延拓到$\mathbb{R}$. 则由上面公式并注意f在$(-\pi,\pi)$上是奇函数, 有

$$\sigma_n(f)(x)=\sum_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)b_k\sin(kx),\quad x\in\mathbb{R}.$$

计算

$$\begin{aligned}&b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(kx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(kx)\mathrm{d}=\frac{2}{\pi}\Big(x\frac{-\cos(kx)}{k}\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x\Big)\\&=\frac{2}{k}(-1)^{k-1},\quad k=1,2,3,\dots.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\sigma_n(f)(x)=\sum_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\frac{2}{k}(-1)^{k-1}\sin(kx),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}(-1)^k\sin(kx)=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin(kx)-\sigma_n(f)(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

注意f是2π-周期函数且当$x\in(-\pi,\pi)$时$|f(x)|=|x|\le\pi$ 且$f(\pm\pi)=0$, 故有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|=\pi.$$

于是有

$$|\sigma_n(f)(x)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|F_n(t)\mathrm{d}t\le\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\mathrm{d}t=\pi\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

$\Longrightarrow$

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}(-1)^k\sin(kx)\Big|\le\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}|\sin(kx)|+|\sigma_n(f)(x)|$$
$$\le\frac{2n}{n+1}+\pi<2+\pi\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

因此

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^k\sin(kx)\Big|<1+\frac{\pi}{2}\qquad x\in\mathbb{R}.$$

对任意$x\in\mathbb{R}$, 令$y=\pi+x$. 则有

$$\sin(ky)=\sin(k\pi+kx)=\cos(k\pi)\sin(kx)=(-1)^k\sin(kx).$$

$\Longrightarrow$

$$(-1)^k\sin(ky)=\sin(kx).$$

$\Longrightarrow$

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^k\sin(ky)\Big|<1+\frac{\pi}{2}.$$

□

注: 不知道最佳估值是多少. 如果不计较最佳与否, **2016级刘天乐同学** 利用Abel分部求和公式和简单的优化分析直接得到下面估值(比$1+\frac{\pi}{2}$稍大一点)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\Big|\le\sqrt{8/3}\,.$$

另一方面取$x=\frac{\pi}{2n}$ 易证

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\Big|\ge 1.$$

3. 设正数列$b_n>0$ 满足$n\mapsto nb_n$单调不增且$nb_n\to 0\,(n\to\infty)$. 证明正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$$

在$\mathbb{R}$上一致收敛.

【证】令

$$a_n=nb_n.$$

则$a_n>0$ 且单调不增且$a_n\to 0\,(n\to\infty)$. 考虑部分和:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k\sin(kx)=\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin(kx)}{k},\quad x\in\mathbb{R},\,n\in\mathbb{N}.$$

对任意$m>n\geq 1$, 由Abel 分部求和公式有

$$\begin{aligned}S_m(x)-S_n(x)&=\sum_{k=n+1}^{m}a_k\frac{\sin(kx)}{k}\\&=\sum_{k=n+1}^{m-1}\Big(\sum_{j=n+1}^{k}\frac{\sin(jx)}{j}\Big)(a_k-a_{k+1})+a_m\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin(kx)}{k}.\\&\leq\sum_{k=n+1}^{m-1}\Big|\sum_{j=n+1}^{k}\frac{\sin(jx)}{j}\Big|(a_k-a_{k+1})+a_m\Big|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin(kx)}{k}\Big|.\end{aligned}$$

由上题知

$$\Big|\sum_{j=n+1}^{k}\frac{\sin(jx)}{j}\Big|=\Big|\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin(jx)}{j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(jx)}{j}\Big|\leq 2+\pi,\quad k=n+1,n+2,...,m.$$

于是得到

$$|S_m(x)-S_n(x)|\leq(2+\pi)\Big(\sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k-a_{k+1})+a_m\Big)=(2+\pi)a_{n+1}.$$

$\Longrightarrow$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|S_m(x)-S_n(x)|\leq(2+\pi)a_{n+1}\to 0\quad\text{as}\quad m>n\to\infty.$$

因此$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$在$\mathbb{R}$上是一致Cauchy 列. 据一致收敛的Cauchy 收敛准则知$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$在$\mathbb{R}$上一致收敛, 而这就是“函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛”的定义. □

4. 设$f\in C^1([\pi,\pi])$满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

且等号成立当且仅当$f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$, 其中$\alpha,\beta$ 为复值常数.

【证】我们将应用$L^2(-\pi,\pi)$上的Fourier 级数理论. 将f 作2π-周期化延拓到$\mathbb{R}$并仍用f表示这个延拓. 由假设知f在$\mathbb{R}$上连续且在$\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ 中每一点可微, 而f在$\pi\mathbb{Z}$中的每点处有单侧导数。由于零测集对积分无贡献, 故我们仍用$f'(x)$ 表示延拓后的f的导

函数. 则$f'(x)$也是以2π为周期的周期函数. 由$f'(x)$在紧集$[-\pi,\pi]$上连续从而有界可知$f'(x)$属于$L^2(-\pi,\pi)$.

于是我们可以对$f(x)$和$f'(x)$ 分别使用Parseval等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2,\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f'}(k)|^2$$

其中

$$\widehat{g}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.$$

计算Fourier 系数:

当$k=0$时

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=f(\pi)-f(-\pi)=0;$$

当$k\neq 0$时, 应用分部积分和$f(\pi)=f(-\pi)$有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=f(x)\frac{e^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}+\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$

$$\widehat{f}(0)=0,\quad \widehat{f'}(0)=0,\quad \widehat{f}(k)=\frac{1}{\mathrm{i}k}\widehat{f'}(k),\quad k\neq 0.$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2=\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|k|^2}|\widehat{f'}(k)|^2\le\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f'}(k)|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

假设等号成立, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

则由上面推导有

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}}\Big(1-\frac{1}{|k|^2}\Big)|\widehat{f'}(k)|^2=0.$$

这蕴含

$$|\widehat{f'}(k)|^2=0\qquad\forall\, k\in\mathbb{Z}\ \text{ s.t. }\ |k|\ge 2.$$

令

$$g(x)=f'(x)-\widehat{f'}(-1)e^{-\mathrm{i}x}-\widehat{f'}(1)e^{\mathrm{i}x}$$

则显然$g \in L^2(-\pi,\pi)$ 且

$$\widehat{g}(k) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

因此$g = 0$ 即

$$f'(x) = \widehat{f}'(-1)e^{-\mathrm{i}x} + \widehat{f}'(1)e^{\mathrm{i}x} \qquad \text{a.e.} \quad x \in [-\pi,\pi].$$

但$f'(x)$连续, 所以

$$f'(x) = \widehat{f}'(-1)e^{-\mathrm{i}x} + \widehat{f}'(1)e^{\mathrm{i}x} \qquad \forall\, x \in [-\pi,\pi].$$

这给出

$$f(x) = C + \widehat{f}'(-1)e^{-\mathrm{i}x} + \widehat{f}'(1)e^{\mathrm{i}x} = C + \alpha\cos x + \beta\sin x, \qquad x \in [-\pi,\pi]$$

其中C, α, β 为复值常数. 又因$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 故得$C = 0$ 从而有

$$f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x, \qquad x \in [-\pi,\pi].$$

反之, 设$f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x, \quad x \in [-\pi,\pi]$. 则有

$$\begin{aligned}
&|f(x)|^2 = (\alpha\cos x + \beta\sin x)(\overline{\alpha}\cos x + \overline{\beta}\sin x) \\
&= |\alpha|^2\cos^2(x) + |\beta|^2\sin^2(x) + (\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta)\cos(x)\sin(x) \\
&= |\alpha|^2\cos^2(x) + |\beta|^2\sin^2(x) + \gamma\sin(2x).
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \pi(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

另一方面有

$$f'(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x = \beta\cos x - \alpha\sin x, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

于是同理得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\mathrm{d}x = \pi(|\beta|^2 + |\alpha|^2).$$

所以有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\mathrm{d}x. \qquad \square$$

5. 设$-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C^1([a,b])$ 满足

$$f(a) = f(b), \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \le \Big(\frac{b-a}{2\pi}\Big)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

并且等号成立当且仅当$f(x) = \alpha\cos(\frac{2\pi}{b-a}x) + \beta\sin(\frac{2\pi}{b-a}x)$, 其中$\alpha, \beta$ 为复值常数.

【证】这可由学生自己完成：考虑

$$F(t) = f\Big(a + \frac{b-a}{2\pi}(t+\pi)\Big), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

化为上题. $\square$

6. 证明等周不等式. 设$D \subset \mathbb{R}^2$是一个有界的单连通的光滑区域, 这里光滑是指D的边界∂D是一个光滑的无边的紧的一维流形(**给图示**). 令$m(D)$是D的面积, $l(\partial D)$为曲线∂D的长度. 则成立等周不等式:

$$m(D) \le \frac{1}{4\pi}[l(\partial D)]^2$$

且等号"="成立当且仅当D是一个圆盘.

【证】令$L = l(\partial D)$. 根据第十一章**曲线的自然参数—曲线的弧长** 可知我们可以将∂D表示成以弧长为参数的参数曲线:

$$\partial D: \quad (x,y) = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s)), \quad s \in [0,L]; \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(L).$$

其中$x(\cdot), y(\cdot) \in C^1([0,L])$ 且

$$|\mathbf{r}'(s)| = |\sqrt{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2} = 1 \qquad \forall\, s \in [0,L].$$

和往常一样, 我们规定s的增加的方向对应于∂D的逆时针方向. 由Green 公式有

$$m(D) = \frac{1}{2}\iint_D (1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L \Big(x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\Big)\mathrm{d}s.$$

令

$$f(s) = x(s) - x_0, \quad g(s) = y(s) - y_0, \quad s \in [0,L]$$

其中

$$x_0 = \frac{1}{L}\int_0^L x(s)\mathrm{d}s, \quad y_0 = \frac{1}{L}\int_0^L y(s)\mathrm{d}s.$$

则有$f, g \in C^1([0,L])$,

$$f(0) = f(L), \quad \int_0^L f(s)\mathrm{d}s = 0, \qquad g(0) = g(L), \quad \int_0^L g(s)\mathrm{d}s = 0.$$

代入这些关系计算:

$$\int_0^L \Big(x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\Big)\mathrm{d}s = \int_0^L \Big(f(s)g'(s) + x_0 g'(s) - g(s)f'(s) - y_0 f'(s)\Big)\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^L \Big(f(s)g'(s) - g(s)f'(s)\Big)\mathrm{d}s = \int_0^L \Big\langle (f(s), g(s)),\, (g'(s), -f'(s))\Big\rangle \mathrm{d}s$$
$$\le \int_0^L \sqrt{|f(s)|^2 + |g(s)|^2}\sqrt{|g'(s)|^2 + |f'(s)|^2}\mathrm{d}s$$
$$\le \Big(\int_0^L (|f(s)|^2 + |g(s)|^2)\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^L (|g'(s)|^2 + |f'(s)|^2)\mathrm{d}s\Big)^{1/2}.$$

而由第**5**题知

$$\int_0^L |f(s)|^2 \mathrm{d}s \le \Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2 \int_0^L |f'(s)|^2 \mathrm{d}s,$$
$$\int_0^L |g(s)|^2 \mathrm{d}s \le \Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2 \int_0^L |g'(s)|^2 \mathrm{d}s$$

所以

$$\int_0^L (|f(s)|^2 + |g(s)|^2) \mathrm{d}s \le \Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2 \int_0^L (|f'(s)|^2 + |g'(s)|^2) \mathrm{d}s.$$

所以

$$\int_0^L \Big(x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\Big) \mathrm{d}s \le \frac{L}{2\pi} \int_0^L (|f'(s)|^2 + |g'(s)|^2) \mathrm{d}s$$
$$= \frac{L}{2\pi} \int_0^L (|x'(s)|^2 + |y'(s)|^2) \mathrm{d}s = \frac{L^2}{2\pi}.$$

所以

$$m(D) \le \frac{L^2}{4\pi}.$$

假设等号成立, 即$m(D) = \frac{L^2}{4\pi}$. 则从上面推导我们看到此时必有

$$\int_0^L |f(s)|^2 \mathrm{d}s = \Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2 \int_0^L |f'(s)|^2 \mathrm{d}s, \qquad \int_0^L |g(s)|^2 \mathrm{d}s = \Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2 \int_0^L |g'(s)|^2 \mathrm{d}s$$

因此存在实常数$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 使得

$$f(s) = \alpha_1 \cos(\frac{2\pi}{L}s) + \beta_1 \sin(\frac{2\pi}{L}s),$$
$$g(s) = \alpha_2 \cos(\frac{2\pi}{L}s) + \beta_2 \sin(\frac{2\pi}{L}s).$$

记

$$\lambda = \frac{2\pi}{L}.$$

则有

$$x'(s) = f'(s) = -\alpha_1\lambda \sin(\lambda s) + \beta_1 \lambda \cos(\lambda s),$$
$$y'(s) = g'(s) = -\alpha_2\lambda \sin(\lambda s) + \beta_2 \lambda \cos(\lambda s)$$

$\Longrightarrow$

$$1 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = \alpha_1^2\lambda^2 \sin^2(\lambda s) + \beta_1^2 \lambda^2 \cos^2(\lambda s) - 2\alpha_1\beta_1\lambda^2 \sin(\lambda s)\cos(\lambda s)$$
$$+\alpha_2^2\lambda^2 \sin^2(\lambda s) + \beta_2^2 \lambda^2 \cos^2(\lambda s) - 2\alpha_2\beta_2\lambda^2 \sin(\lambda s)\cos(\lambda s)$$
$$= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\lambda^2 \sin^2(\lambda s) + (\beta_1^2 + \beta_2^2)\lambda^2 \cos^2(\lambda s) - 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\lambda^2 \sin(\lambda s)\cos(\lambda s)$$

$\forall\, s \in [0, L].$

这属于下列类型的恒等式:

$$a\cos^2(\theta)+b\sin^2(\theta)+c\sin(2\theta)=1\quad\forall\,\theta\in[0,2\pi].$$

其中a,b,c为常数. 这等价于

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos(2\theta)+c\sin(2\theta)=1\qquad\forall\,\theta\in[0,2\pi].$$

由于$1,\cos(k\theta),\sin(k\theta)$ 在$[0,2\pi]$上线性无关($k\in\mathbb{N}$), 故这蕴含$\frac{a+b}{2}=1,\frac{a-b}{2}=0,c=0$. 即$a=b=1,c=0$. 于是得到

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\lambda^2=(\beta_1^2+\beta_2^2)\lambda^2=1,\quad\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0.$$

由此得到

$$\begin{aligned}&(x(s)-x_0)^2+(y(s)-y_0)^2=(f(s))^2+(g(s))^2\\&=\Big(\alpha_1\cos(\lambda s)+\beta_1\sin(\lambda s)\Big)^2+\Big(\alpha_2\cos(\lambda s)+\beta_2\sin(\lambda s)\ \Big)^2\\&=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\cos^2(\lambda s)+(\beta_1^2+\beta_2^2)\sin^2(\lambda s)+2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\cos(\lambda s)\sin(\lambda s)\\&=\frac{1}{\lambda^2}\Big(\cos^2(\lambda s)+\sin^2(\lambda s)\Big)=\frac{1}{\lambda^2}\qquad\forall\,s\in[0,L].\end{aligned}$$

这表明∂D 是一条以(x_0,y_0)为中心、以$r=\frac{1}{\lambda}=\frac{L}{2\pi}$为半径的圆周, 也即$D$是一个$(x_0,y_0)$为中心、以$r=\frac{L}{2\pi}$为半径的圆盘.

反之若D是一个有界圆盘, 则显然等式$m(D)=\frac{1}{4\pi}[l(\partial D)]^2$ 成立. $\square$

第十二章第十三章部分习题

1. 设$n \geq 2$, 函数$F : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ 且属于C^2类, 其Hesse 矩阵$H_F(x)$ 处处正定, 且$F(0) = 0$, $F(x) \to +\infty \, (|x| \to \infty)$. 设$C > 0$ 为常数,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) < C\}.$$

证明

$$\sigma(\partial\Omega) = \int_\Omega \nabla \cdot \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \mathrm{d}x$$

其中$\sigma(\partial\Omega)$为$\partial\Omega$的面积，∇是梯度算符.

2. 设a_n, b_n为实数列或复数列, $0 < \delta < 1$为常数。

(1)设幂级数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在区间$(-1, 1)$内收敛且在$(-\delta, \delta)$内恒等于0. 问: 是否能推出一切$a_n = 0, n = 0, 1, 2, ...,$?

(2) 设三角函数级数

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big)$$

在区间$(-\pi, \pi)$内收敛且在$(-\delta, \delta)$内恒等于0. 问: 是否能推出一切$a_0 = a_n = 0, b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, ...,$?

3. 设a_n, b_n为实数列或复数列 并设三角函数级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big) \quad \text{在}\mathbb{R}\text{上一致收敛.}$$

问: 是否有

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|a_n| + |b_n|\Big) < +\infty\,?$$

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|a_n|^2 + |b_n|^2\Big) < +\infty\,?$$

4. 设Ω 为$\mathbb{R}^3$ 中的有界连通开集,边界$\partial\Omega$ 为C^2类曲面. 设实函数$u \in C^2(\overline{\Omega})$ 满足

$$u|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad \iiint_\Omega u \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0\,.$$

证明$u \equiv 0$ 于$\overline{\Omega}$.

5 设函数$u:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$属于$C^2$类且满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

计算三重积分

$$I=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

6. 设$f,g\in C([0,\pi])$. 下面命题

$$f(x)\equiv g(x) \text{ 于 } [0,\pi] \iff \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} g(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\dots.$$

是否正确?

7. 设I,J为$\mathbb{R}$中的有界区间. 设$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty},\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是$L^2(I)$ 和$L^2(J)$的ON基. 令

$$(\varphi_m\otimes\psi_n)(x,y):=\varphi_m(x)\psi_n(y), \quad (x,y)\in I\times J.$$

证明$\{\varphi_m\otimes\psi_n\}_{m,n=1}^{\infty}$ 是$L^2(I\times J)$的ON基.

8. 设$n\ge 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$为一个有界连通开集, 其边界$\partial\Omega$ 为一个C^2类的$n-1$维曲面. 设实函数$u\in C^2(\overline{\Omega}), f\in C^1(\overline{\Omega})$ 满足$u|_{\partial\Omega}=f|_{\partial\Omega}$ 且u在$\overline{\Omega}$上是调和的, 即$\Delta u=0$ 于$\overline{\Omega}$. 证明

$$\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

此外进一步证明: 当上述不等式的等号成立时必有 $u=f$ 于$\overline{\Omega}$. 这里Δ是Laplace算符, ∇是梯度算符.

9. 设

$$C_1([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{C}\ \mid\ f \text{ 在}[0,1] \text{ 上连续且} f(0)=f(1)\}.$$

证明：对任意$f\in C_1([0,1])$, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$m\in\mathbb{N}$ 和三角多项式

$$T(x)=\sum_{k=-m}^{m}c_k e^{\mathrm{i}2\pi kx}, \quad x\in\mathbb{R} \qquad (\mathrm{i}=\sqrt{-1})$$

使得

$$\|f-T\|_{\infty}<\varepsilon$$

其中$\|g\|_{\infty}=\sup\limits_{x\in[0,1]}|g(x)|$.

(考虑变换$F(t)=f(\frac{t+\pi}{2\pi})$, $t\in[-\pi,\pi]$; $f(x)=F(-\pi+2\pi x)$, $x\in[0,1]$.)

10. 设$\alpha>0$为无理数. 证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{\mathrm{i}2\pi k(n\alpha-[n\alpha])}=\int_0^1 e^{\mathrm{i}2\pi kx}\mathrm{d}x\quad(=\delta_{0,k}\,)\qquad\forall\, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n\alpha-[n\alpha])=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\qquad\forall\, f\in C_1([0,1]).$$

这里$[y]$表示实数y的整数部分, 即$\le y$的最大整数.

第十二章第十三章部分习题解答

1. 设$n\ge 2$, 函数$F:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ 且属于C^2类, 其Hesse 矩阵$H_F(x)$ 处处正定, 且$F(0)=0$, $F(x)\to+\infty\,(|x|\to\infty)$. 设$C>0$ 为常数,

$$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\mid F(x)<C\}.$$

证明

$$\sigma(\partial\Omega)=\int_\Omega\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x$$

其中$\sigma(\partial\Omega)$为$\partial\Omega$ 的面积，∇是梯度算符.

【证】易见F是严格凸函数, Ω是有界开凸集, 且

$$\partial\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\mid F(x)=C\}.$$

再由Hesse 矩阵$H_F(x)$ 处处正定知

$$\langle\nabla F(x)-\nabla F(y),\,x-y\rangle>0\quad\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n.$$

这蕴含$x\mapsto\nabla F(x)$ 是单射。易见$F(0)$是最小值, 因此$\nabla F(0)=0$ 从而由上式有

$$\langle\nabla F(x),\,x\rangle>0\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.\tag{$*$}$$

特别有$\nabla F(x)\neq 0\,\forall\, x\in\partial\Omega$. 于是由$F\in C^2$ 知$\partial\Omega$是C^2类的紧的光滑的封闭的定向超曲面, 因此$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$是一个紧的$C^2$类的$n$ 维流形. [事实上$\overline{\Omega}$与$\mathbb{B}^n$ 同胚.] 易见$0\in\Omega$. 因此由$(*)$ 可以确信$\partial\Omega$的朝外的单位法向量为 (**感谢吴雨宸和郭逸帆指出这点**)

$$\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|},\quad x\in\partial\Omega.$$

设$\delta > 0$充分小使得$\overline{B}_\delta(0) \subset \Omega$. 令

$$\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{B}_\delta(0),$$

令$\mathbf{n}(x)$是$\partial\Omega_\delta$的朝外的单位法向量. 则由Gauss 公式有

$$\int_{\partial\Omega_\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \mathbf{n}(x) \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\Omega_\delta} \nabla \cdot \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \mathrm{d}x.$$

而由

$$\partial\Omega_\delta = \partial\Omega \cup \partial B_\delta(0)$$

和定向积分的可加性有

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega_\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \mathbf{n} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\partial\Omega} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \mathbf{n}(x) \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) + \int_{\partial B_\delta(0)} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \mathbf{n}(x) \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) + \int_{|x|=\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{-x}{\delta} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\sigma(x) - \int_{|x|=\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{x}{\delta} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) = \sigma(\partial\Omega) - \int_{|x|=\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{x}{\delta} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x).
\end{aligned}$$

所以

$$\sigma(\partial\Omega) = \int_{|x|=\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{x}{\delta} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) + \int_{\Omega_\delta} \nabla \cdot \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \mathrm{d}x.$$

下面分别证明

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_{|x|=\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{x}{\delta} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) = 0,$$

$$\int_{\Omega} \Big| \nabla \cdot \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \Big| \mathrm{d}x < +\infty.$$

第一个是显然的:

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{|x|=\delta} \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{x}{\delta} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) \Big| \le \int_{|x|=\delta} \Big| \Big\langle \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}, \frac{x}{\delta} \Big\rangle \Big| \mathrm{d}\sigma(x) \\
&\le \int_{|x|=\delta} \mathrm{d}\sigma(x) = C_n \delta^{n-1} \to 0 \quad \text{as} \quad \delta \to 0+.
\end{aligned}$$

这里$C_n = \sigma(\mathbb{S}^{n-1})$.

对于第二个, 来计算被积函数

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\big(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\big) (|\nabla F(x)|^2)^{-1/2} \Big) \\
&= \Big(\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} \Big) (|\nabla F(x)|^2)^{-1/2} + \big(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\big)\big(-\frac{1}{2}\big) (|\nabla F(x)|^2)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}\big)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2}\Big)(|\nabla F(x)|^2)^{-1/2} + (\frac{\partial F(x)}{\partial x_i})(-\frac{1}{2})(|\nabla F(x)|^2)^{-3/2}\sum_{j=1}^n 2(\frac{\partial F(x)}{\partial x_j})\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \Big(\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2}\Big)(|\nabla F(x)|^2)^{-1/2} - (|\nabla F(x)|^2)^{-3/2}\sum_{j=1}^n (\frac{\partial F(x)}{\partial x_i})(\frac{\partial F(x)}{\partial x_j})\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\Longrightarrow \\
&\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \\
&= \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2}\Big)(|\nabla F(x)|^2)^{-1/2} - (|\nabla F(x)|^2)^{-3/2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (\frac{\partial F(x)}{\partial x_i})(\frac{\partial F(x)}{\partial x_j})\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \frac{\Delta F(x)}{|\nabla F(x)|} - \frac{1}{|\nabla F(x)|^3}\nabla F(x) H_F(x)\nabla F(x)^\tau
\end{aligned}
$$

即

$$
\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} = \frac{\Delta F(x)}{|\nabla F(x)|} - \frac{1}{|\nabla F(x)|^3}\nabla F(x) H_F(x)\nabla F(x)^\tau, \quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.
$$

令

$$
M = \max_{x\in\overline{\Omega}}(\|H_F(x)\|_2 + |\Delta F(x)|),
$$

则$M<\infty$ 且

$$
\Big|\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\Big| \le \frac{M}{|\nabla F(x)|}, \quad x\in\Omega\setminus\{0\}.
$$

在$x=0$ 作微分展开有

$$
\nabla F(x) = \nabla F(0) + Ax + o(|x|) = Ax + o(|x|) \quad (|x|\to 0\,).
$$

这里$A=(\nabla F)'(0) = H_F(0)$是正定阵. 我们有

$$
|x| = |A^{-1}Ax| \le \|A^{-1}\|_2|Ax|, \quad |Ax| \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}|x|.
$$

取$r>0$ 充分小使得$\overline{B}_r(0)\subset\Omega$ 并且当$|x|\le r$时$|o(|x|)|\le \frac{1}{2\|A^{-1}\|_2}|x|$. 于是得到

$$
|\nabla F(x)| \ge |Ax| - |o(|x|)| \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}|x| - \frac{1}{2\|A^{-1}\|_2}|x| = \frac{1}{2\|A^{-1}\|_2}|x| \qquad \forall\, |x|\le r.
$$

令

$$
a = \min_{x\in\overline{\Omega}\setminus B_r(0)} |\nabla F(x)|.
$$

则$a>0$. 这给出

$$
\int_\Omega \Big|\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\Big|\mathrm{d}x = \int_{\Omega\setminus\{0\}} \Big|\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\Big|\mathrm{d}x \le \int_\Omega \frac{M}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{M}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x + \int_{B_r(0)} \frac{M}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{M}{a}\mathrm{d}x + \int_{B_r(0)} \frac{M2\|A^{-1}\|_2}{|x|}\mathrm{d}x \\
&= \frac{M}{a}m(\Omega\setminus B_r(0)) + 2M\|A^{-1}\|_2\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^r \rho^{n-2}\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{M}{a}m(\Omega\setminus B_r(0)) + 2M\|A^{-1}\|_2\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\frac{r^{n-1}}{n-1} < \infty.
\end{aligned}
$$

由这一可积性和积分的绝对连续性有

$$
\lim_{\delta\to 0+}\int_{\Omega_\delta}\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x.
$$

于是得到

$$
\sigma(\partial\Omega) = \lim_{\delta\to 0+}\Big(\int_{|x|=\delta}\Big\langle\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|},\frac{x}{\delta}\Big\rangle\mathrm{d}\sigma(x) + \int_{\Omega_\delta}\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x\Big) = \int_\Omega\nabla\cdot\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}\mathrm{d}x.
$$

□

2. 设a_n, b_n为实数列或复数列, $0<\delta<1$为常数。

(1)设幂级数

$$
S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
$$

在区间$(-1,1)$内收敛且在$(-\delta,\delta)$内恒等于0. 问: 是否能推出一切$a_n = 0, n = 0,1,2,...,$?

(2) 设三角函数级数

$$
S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)
$$

在区间$(-\pi,\pi)$内收敛且在$(-\delta,\delta)$内恒等于0. 问: 是否能推出一切$a_0 = a_n = 0, b_n = 0,\ n = 1,2,3,...,$?

【解】本题较简单. 问题(1)的答案是肯定的. 对于问题(2), 在以2π为周期的连续的折线函数(这蕴含任何一个这样的函数都是Lipschitz 连续的从而其Fourier 级数在$\mathbb{R}$上一致(从而处处)收敛于这函数本身)中, 构作偶函数$f(x)$ 使得$f(x)$ 在$[-\delta,\delta]$ 上处处为零, 而在$[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]$上处处大于零. **图示**. 因此问题(2)的答案是否定的.

3. 设a_n, b_n为实数列或复数列 并设三角函数级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big)\quad \text{在}\mathbb{R}\text{上一致收敛.}$$

问: 是否有

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n|+|b_n|\Big)<+\infty\,?$$

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n|^2+|b_n|^2\Big)<+\infty\,?$$

【解】第一个有反例

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,...;\qquad b_1=1,\quad b_n=\frac{1}{n\log n},\quad n\ge 2.$$

第二个成立：利用一致收敛的性质和正交函数性质. □

4. 设Ω 为$\mathbb{R}^3$ 中的有界连通开集,边界$\partial\Omega$ 为C^2类曲面. 设实函数$u\in C^2(\overline{\Omega})$ 满足

$$u|_{\partial\Omega}=0\,,\qquad \iiint_{\Omega}u\cdot\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\,.$$

证明$u\equiv 0$ 于$\overline{\Omega}$.

【证】回忆Gauss 散度公式（取$\partial\Omega$的定向为朝外方向):

$$\iint_{\partial\Omega}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint_{\Omega}\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz\,.$$

【注：如令$\mathbf{F}=(P,Q,R)$, $\mathrm{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$, $\mathbf{n}=\mathbf{n}(x,y,z)$ 为$\partial\Omega$在(x,y,z)处的单位外法向,$d\sigma$ 为面积元（即面测度),dV 为体积元,则Gauss公式写为$\iint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\mathbf{F}dV$. 】

利用梯度和Laplace算符$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 并取

$$P=u\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q=u\frac{\partial u}{\partial y}\,,\quad R=u\frac{\partial u}{\partial z}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial u}{\partial z})=|\nabla u|^2+u\Delta u\,.$$

于是由$u|_{\partial\Omega}=0$ 和$\iiint_{\Omega}u\Delta udxdydz=0$ 得到

$$\begin{aligned}0&=\iint_{\partial\Omega}u\Big(\frac{\partial u}{\partial x}dy\wedge dz+\frac{\partial u}{\partial y}dz\wedge dx+\frac{\partial u}{\partial z}dx\wedge dy\Big)\\&=\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2dxdydz+\iiint_{\Omega}u\Delta udxdydz=\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2dxdydz\,.\end{aligned}$$

据连续性$\Longrightarrow$ $|\nabla u| = 0$ 于Ω. 下证$u \equiv 0$ 于$\overline{\Omega}$. 而由u在$\overline{\Omega}$上的连续性和$u|_{\partial\Omega} = 0$易见,这只需证明$u \equiv$常数于Ω. 取定$a \in \Omega$. 令

$$A = \{x \in \Omega \,|\, u(x) = u(a)\}, \quad B = \{x \in \Omega \,|\, u(x) \neq u(a)\}.$$

则B 为开集而A非空(因$a \in A$) 且A,B不相交. 来证明A 也是开集.如果此性质成立, 则由Ω为连通开集可知必有$B = \emptyset$, 从而$A = \Omega$,即$u(x) \equiv u(a)$, $x \in \Omega$.

任取$x_0 \in A$. 因$A \subset \Omega$, 故存在$\delta > 0$使得开球$B_\delta(x_0) \in \Omega$. 注意$B_\delta(x_0)$为开凸集,故应用微分中值不等式和$\nabla u \equiv 0$得到$u(x) = u(x_0) = u(a)$ $\forall x \in B_\delta(x_0)$. 因此$B_\delta(x_0) \subset A$. 这证明了$A$的每一点都是$A$的内点,故$A$ 是开集. $\square$

5 设函数$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$属于$C^2$类且满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

计算三重积分

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【解】方法1. 回忆分部积分公式和Gauss 散度公式

$$\iiint_\Omega v\Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}\sigma - \iiint_\Omega \langle \nabla v, \nabla u \rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle,$$
$$\iint_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \nabla \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \Delta u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

取$\Omega = \overline{B_1}(0, 0, 0), v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ 有$\nabla v = (x, y, z)$,

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\overline{B_1}(0,0,0)} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \langle \nabla v, \nabla u \rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\sigma - \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2+z^2=1} \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\sigma - \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \Delta u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \Delta u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \Delta u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \Big(1 - (x^2 + y^2 + z^2)\Big) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{4\pi}{2} \int_0^1 r^2(1 - r^2) r \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 (r^3 - r^5) \, \mathrm{d}r = 2\pi \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\Big) = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

方法2. 将被积函数用梯度和内积表示并应用球坐标换元公式得

$$I=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\langle\nabla u(x,y,z),(x,y,z)\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\left(r^2\iint_{\mathbb{S}^2(1)}\langle\nabla u(r\omega),r\omega\rangle\mathrm{d}\sigma(\omega)\right)\mathrm{d}r.$$

对内层积分, 应用Gauss公式计算

$$\begin{aligned}
&r^2\iint_{\mathbb{S}^2(1)}\langle\nabla u(r\omega),r\omega\rangle\mathrm{d}\sigma(\omega)=r\iint_{\mathbb{S}^2(1)}\langle\nabla u(r\omega),\omega\rangle r^2\mathrm{d}\sigma(\omega)\\
&=r\iint_{\mathbb{S}^2(r)}\langle\nabla u(\omega),\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma(\omega)=r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}\langle\nabla u,\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma\\
&=r\iiint_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\nabla\cdot\nabla u(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=r\iiint_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\Delta u(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r\iiint_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=4\pi r\int_0^r\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=4\pi r\int_0^r\rho^3\mathrm{d}\rho=4\pi r\cdot\frac{r^4}{4}=\pi r^5.
\end{aligned}$$

因此

$$I=\pi\int_0^1 r^5\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.$$

【注】此类函数的存在性举例如下:

$$u(x,y,z)=\frac{1}{12}(x^2+y^2+z^2)^{3/2},\quad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3.$$

从下面的计算易见$u\in C^2(\mathbf{R}^3)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}=\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2x=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}x,\\
&\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}y,\\
&\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}z\,;\\
&\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}2x^2+\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}x\\
&=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}x^2+\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}x,\\
&\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}y^2+\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2},\\
&\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}z^2+\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\Big(x^2+y^2+z^2\Big)+\frac{3}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\\
&=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}+\frac{3}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}$$

此外还有

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\Big(x^2+y^2+z^2\Big)=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}.$$

于是直接计算：

$$\begin{aligned}&\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\frac{4\pi}{4}\int_0^1 r^2\cdot r^3\mathrm{d}r=\pi\int_0^1 r^5\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.\qquad\Box\end{aligned}$$

6. 设$f,g\in C([0,\pi])$. 下面命题

$$f(x)\equiv g(x)\ \text{于}\ [0,\pi]\iff\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\int_0^\pi g(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\dots.$$

是否正确?

【解】正确。利用偶延拓和已知的关于ON基的定理. $\Box$

7. 设I,J为$\mathbb{R}$中的有界区间. 设$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty,\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ 分别是$L^2(I)$ 和$L^2(J)$的ON基. 令

$$(\varphi_m\otimes\psi_n)(x,y):=\varphi_m(x)\psi_n(y),\quad (x,y)\in I\times J.$$

证明$\{\varphi_m\otimes\psi_n\}_{m,n=1}^\infty$ 是$L^2(I\times J)$的ON基.

【证】利用Fubini 定理易证$\{\varphi_m\otimes\psi_n\}_{m,n=1}^\infty$ 是ON系，再利用Fubini 定理和Parseval 等式可计算得

$$\iint_{I\times J}|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cdots=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\Big|\Big\langle f,\varphi_m\otimes\psi_n\Big\rangle\Big|^2.$$

所以$\{\varphi_m\otimes\psi_n\}_{m,n=1}^\infty$ 是ON基. **细节由学生自己给出，同时给出其他证法** $\Box$

8. 设$n\ge 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$为一个有界连通开集, 其边界$\partial\Omega$ 为一个C^2类的$n-1$维曲面. 设实函数$u\in C^2(\overline{\Omega}),f\in C^1(\overline{\Omega})$ 满足$u|_{\partial\Omega}=f|_{\partial\Omega}$ 且u在$\overline{\Omega}$上是调和的, 即$\Delta u=0$ 于$\overline{\Omega}$. 证明

$$\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_\Omega|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

此外进一步证明: 当上述不等式的等号成立时必有 $u=f$ 于$\overline{\Omega}$. 这里Δ是Laplace算符, ∇是梯度算符.

【证】我们将使用Green 第一公式:

$$\int_{\Omega}\varphi(x)\Delta u(x)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}\sigma(x)-\int_{\Omega}\langle\nabla\varphi(x),\nabla u(x)\rangle\mathrm{d}x$$

其中$\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$, $\mathbf{n}=\mathbf{n}(x)$是$\partial\Omega$的单位外法向量. 取$\varphi(x)=u(x)-f(x)$. 则由$u|_{\partial\Omega}=f|_{\partial\Omega}, \Delta u=0$, 可知$\varphi(x)\Delta u(x)\equiv 0$ 于Ω, $\varphi(x)\equiv 0$ 于$\partial\Omega$ 从而得到

$$0=0-\int_{\Omega}\langle\nabla u(x)-\nabla f(x),\nabla u(x)\rangle\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\Big(\langle\nabla u(x),\nabla u(x)\rangle-\langle\nabla f(x),\nabla u(x)\rangle\Big)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\langle\nabla f(x),\nabla u(x)\rangle\mathrm{d}x. \tag{1}$$

因

$$\langle\nabla f(x),\nabla u(x)\rangle\le|\nabla u(x)||\nabla f(x)|\le\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2+\frac{1}{2}|\nabla f(x)|^2$$

故

$$\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x$$

从而有

$$\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

现在设等号成立:

$$\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{2}$$

考虑

$$|\nabla u(x)-\nabla f(x)|^2=|\nabla u(x)|^2-2\langle\nabla u(x),\nabla f(x)\rangle+|\nabla f(x)|^2.$$

由(1),(2) 和$\langle\nabla u(x),\nabla f(x)\rangle=\langle\nabla f(x),\nabla u(x)\rangle$ (因u,f均为实值函数) 有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|\nabla u(x)-\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x&=\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x-2\int_{\Omega}\langle\nabla u(x),\nabla f(x)\rangle\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x\\&=2\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x-2\int_{\Omega}\langle\nabla f(x),\nabla u(x)\rangle\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

由连续性, 这蕴含$\nabla(u-f)\equiv 0$ 于Ω. 于是由Ω连通知$u-f=$常数于Ω 从而再由连续性知$u-f=$常数于$\overline{\Omega}$. 据假设$(u-f)|_{\partial\Omega}=0$. 所以此常数为零, 所以$u-f=0$ 于$\overline{\Omega}$, 即$u=f$ 于$\overline{\Omega}$.

【注】实际上由(1)和上面推导容易得到

$$\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla u(x)-\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

$\square$

9. 设

$$C_1([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ 在}[0,1] \text{ 上连续且} f(0) = f(1) \}.$$

证明：对任意$f \in C_1([0,1])$, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$m \in \mathbb{N}$ 和三角多项式

$$T(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{\mathrm{i}2\pi kx}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (\,\mathrm{i} = \sqrt{-1}\,)$$

使得

$$\|f - T\|_\infty < \varepsilon$$

其中$\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

(考虑变换$F(t) = f(\frac{t+\pi}{2\pi})$, $t \in [-\pi, \pi]$; $f(x) = F(-\pi + 2\pi x)$, $x \in [0,1]$.)

10. 设$\alpha > 0$为无理数. 证明

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{\mathrm{i}2\pi k(n\alpha-[n\alpha])} = \int_0^1 e^{\mathrm{i}2\pi kx} \mathrm{d}x \quad (= \delta_{0,k}\,) \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha - [n\alpha]) = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \qquad \forall\, f \in C_1([0,1]).$$

这里$[y]$表示实数y的整数部分, 即$\le y$的最大整数.

【证】易见

$$\int_0^1 e^{\mathrm{i}2\pi kx} \mathrm{d}x = \delta_{0,k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

计算：当$k = 0$时,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{\mathrm{i}2\pi k(n\alpha-[n\alpha])} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1 = 1 = \delta_{0,0}\,.$$

当$0 \ne k \in \mathbb{Z}$时,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{\mathrm{i}2\pi k(n\alpha-[n\alpha])} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{\mathrm{i}2\pi kn\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (e^{\mathrm{i}2\pi k\alpha})^n$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}2\pi k\alpha} - e^{\mathrm{i}2\pi k(N+1)\alpha}}{1 - e^{\mathrm{i}2\pi k\alpha}} \to 0 = \delta_{0,k} \quad (N \to \infty)$$

其中用到$e^{\mathrm{i}2\pi k\alpha} \ne 1$ 因为α是无理数. 所以第一个极限成立。

为证第二个极限, 先证明这极限对于f为三角多项式时成立, 即证明对任意三角多项式

$$T(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{\mathrm{i}2\pi kx}$$

有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])=\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x.$$

事实上由简单计算和单项式的结果有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-m}^{m}c_k e^{\mathrm{i}2\pi k(n\alpha-[n\alpha])}\\&=\sum_{k=-m}^{m}c_k\Big(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{\mathrm{i}2\pi k(n\alpha-[n\alpha])}\Big)\to\sum_{k=-m}^{m}c_k\delta_{0,k}=c_0\quad\text{as}\quad N\to\infty,\end{aligned}$$

而

$$\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=-m}^{m}c_k\int_0^1 e^{\mathrm{i}2\pi kx}\mathrm{d}x=\sum_{k=-m}^{m}c_k\delta_{0,k}=c_0.$$

所以第二个极限对三角多项式成立。

最后证一般情形: 设$f\in C_1([0,1])$. 对任意$\varepsilon>0$, 对$\varepsilon/3>0$, 由上题, 存在$m\in\mathbb{N}$ 和三角多项式$T(x)=\sum_{k=-m}^{m}c_k e^{\mathrm{i}2\pi kx}$使得$\|f-T\|_\infty<\varepsilon/3$. 来估计

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big|\\&\le|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n\alpha-[n\alpha])-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])\Big|\\&+\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x\Big|+\Big|\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big|\\&\le\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(n\alpha-[n\alpha])-T(n\alpha-[n\alpha])|+\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x\Big|\\&+\int_0^1|T(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&\le 2\|f-T\|_\infty+\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x\Big|\\&<\frac{2\varepsilon}{3}+\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x\Big|.\end{aligned}$$

因已证明了

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x\Big|\to 0\quad(N\to\infty)$$

故存在$N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ 使得当$N\ge N_\varepsilon$时

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 T(x)\mathrm{d}x\Big|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

联合起来即知当$N \geq N_\varepsilon$时

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\alpha-[n\alpha])-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big|<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\alpha-[n\alpha])=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x. \qquad \Box$$

期末考试复习重点：

1. 微分形式及其运算和外微分运算的基本性质, 微分形式最简表示的唯一性, 闭形式、恰当形式; 其他运算, 如光滑函数的偏导数可换序、积分号下求(偏)导, 等等; 相关作业题.

2. 第二型曲面积分的基本性质(如线性性、同向可加性), 积分中的曲面定向的确定, 积分的计算公式(换元公式), 曲面上的单位法向量; 相关作业题.

3. Stokes 公式, Gauss 散度定理(也称为Green 公式), 梯度、散度、旋度，**Green 第一公式(即分部积分公式)**, 积分与路径无关的条件; 利用Stokes 公式计算第二型曲面积分; 相关作业题.

4. Hilbert 空间、内积与范数, 特别注意$L^2[a,b]$是常用的Hilbert 空间(即完备的内积空间); 广义Fourier 级数和广义Fourier系数; ON系与ON基; 关于Hilbert 空间中ON 基的刻画定理; 相关作业题.

5. 经典Fourier 级数的基本性质, Fourier系数的计算公式, Fourier展开式的计算, 逐点收敛和**一致收敛**, Dini 条件和相关的充分条件如Lipschitz 条件; 函数满足Lipschitz 条件的充分条件(如函数的左右导数有界); 函数偶延拓后的余弦级数、奇延拓后的正弦级数; 相关作业题.