图论: Homework

Finish on October 25, 2017

Jiqiang Chen

1 第一章 42

若G是单图,$\varepsilon > \binom{v-1}{2}$,则G是连通图。

Solution
反证法：
假如G不连通，将G分为ω个连通片。
假设每个连通片内都为边数最多的情况：
则$\varepsilon_i(1 \leq i \leq \omega) = \binom{v_i}{2}$

$$\begin{aligned}\varepsilon = \sum_{i=1}^{\omega} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{\omega} \binom{v_i}{2} \\ = \frac{(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_\omega^2) - (v_1 + v_2 + \cdots + v_\omega)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{v-1}{2} = \frac{(v-1)(v-2)}{2} = \frac{v^2 - 3v + 2}{2} \\ = \frac{(v_1 + v_2 + \cdots + v_\omega)^2 - 3(v_1 + v_2 + \cdots + v_\omega) + 2}{2}\end{aligned}$$

比较可得：$\binom{v-1}{2} > \varepsilon$，矛盾
得证：G为连通图。

2 第一章 47

证明：连通图若有两条最长轨，则二最长轨有公共顶点。

Solution
反证法：
假设二最长轨$p_1(a_1, a_2, \cdots, a_n), p_2(b_1, b_2, \cdots, b_m)$无公共顶点。
由于G连通图，则必存在两点分别属于p_1, p_2，且相连。设为a_i, b_j。
这时由$max\{i, n-i\} + 1 + max\{j, m-j\}$可以拼接出新轨$p_3$，且长度大于$p_1, p_2$。
与题设矛盾，得证：二最长轨有公共顶点。

3 第一章 58

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$是6个城市，下面矩阵的(i,j)号元素是$v_i$到$v_j$的机票票价，
试为一个旅行者制作一张由v_1到各城去旅游的最便宜的航行路线图。

Solution
具体过程参考章节1.5：Dijkstra算法。

解不唯一。下面给出一组解：
$v_1 - -v_6$
$v_1 - -v_5$

	V2	V3	V4	V5	V6
P1	50	∞	40	25	10
P2	35	∞	35	25	
P3	35	45	35		
P4	35	45			
P5		45			

Figure 1: 58题

$v_1 - -v_6 - -v_2$
$v_1 - -v_6 - -v_4$
$v_1 - -v_5 - -v_3$

4 第二章 1

至少两个顶的树其最长轨的起止顶皆是叶，试证明之。

Solution
反证法：
设最长轨$P(v_1, v_2, \cdots, v_n)$。
假设v_1, v_n中至少有一个不是叶，设v_1不为叶。
由于图为树，所以v_1必与其他非轨顶点相连，设为v_0。
则P不为最长轨，矛盾。
得证：起止顶点皆为叶。

5 第二章 2

如果一棵树仅有两个叶，则此树就是一条轨。

Solution
根据树的定义：$\varepsilon = v - 1$
则$d(v) = 2\varepsilon = 2(v-1)$
根据树性质可知，除去两叶顶点，度数为1。
其它顶点至少度数为2。

若其它顶点存在度数大于2的点，则：
$d(v) > 2 + 2(v-2) = 2(v-1)$， 矛盾
所以其它顶点度数均为2，此树为一条轨。

6 第二章 3

证明：如果T为树，且$\Delta(T) \geq n$，则T至少有n个叶。

Solution
设v_0为次数最大的顶点。
v_0与$(v_1, v_2, \cdots, v_\Delta)$相连。
根据树的性质：无圈
则任意的$v_i, v_j (1 \leq i, j \leq \Delta)$两顶点必不存在其它轨相连。
所以由v_0沿$v_1, v_2, \cdots, v_\Delta$出发，必可到达Δ个不同叶节点。

7 第二章 5

证明：树有一个中心或两个中心，但有两个中心时，此二中心是邻顶。

Solution
查看定义1.6:周长，直径，中心

(1)先证：将树G中所有叶子删去后，新树G'中心不变

因为对于G中任意一点w,当$d(w, v)\ (v \in G)$取最大值,v只能为叶子。
则满足,删去所有叶子后：
$max\ d(w, v')\ (v' \in G') = max\ d(w, v) - 1\ (v \in G)$
所以G'与G有相同的中心。
(2)不断重复上述过程。
则最终会产生一个顶或两个相邻顶的情况，为原树G的中心.

8 第二章 10

求$K_{2,3}$生成树的个数。

Solution
查看章节2.3 生成树算法。

9 第五章 2

给出求二分图正常Δ边着色的算法。

Solution
教材P_8给出了正则图，δ, Δ的定义。
查看5.1图的边着色。

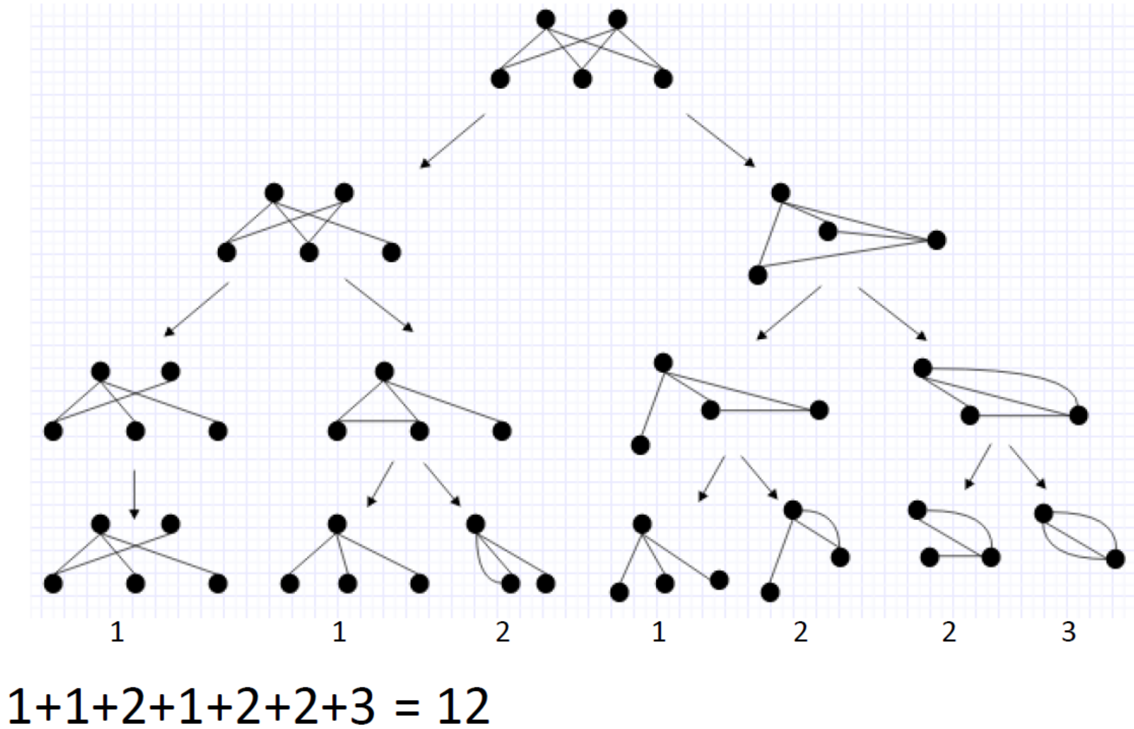

Figure 2: 10题

查看4.2正则2分图的完备匹配方法。

对于二分图$G = (X, Y, E)$，设$|X| > |Y|$，则在Y中添加若干顶点，以及E中添加若干边，
使得图G为Δ阶正则二分图,记为G'。
利用匈牙利算法逐次求其完备匹配，直至求出G'的Δ个边不重复的完备匹配，
每一个完备匹配着一种颜色即可。最后去掉扩充的顶及边即可。

10 第五章 3

证明：若二分图的顶之最小次数为$\delta > 0$,则对此图边进行δ着色时，
能使每顶所关联的边中皆出现δ种颜色。

Solution
查看引理5.2

反证法：
若结论不成立，则存在最佳δ边着色，
则必存在一顶点v，又存在两种颜色i,j。
i在v顶不出现，而j在v顶出现了两次。
根据引理5.2，存在奇圈，与二分图矛盾。
得证。

11 第五章 5

证明：若G是奇数个顶的有边正则图，则G是第二类图。

Solution
查看定理5.2
教材P_{88}给出了第一类图与第二类图的定义。

设为k次正则图。
若G为第一类图，则存在正常k着色。
则每种颜色在每顶都出现一次。
k种颜色出现次数相同，为：$\frac{1}{k} \cdot \frac{nk}{2} = \frac{n}{2}$
由题设知n为奇数，$\frac{n}{2}$不为整数，矛盾。
则G是第二类图。

12 第五章 8

有7名老师，12个班。矩阵中代表上课节数。
计算：一天应分几节课？若每天8节课，需用几间教室？

Solution
$\varepsilon(G) = 240; \Delta = 35$
言之有理即可。

13 第六章 16

若G是二分图，但其二分图顶划分X与Y不均匀，即$|X| \neq |Y|$，问G是否为Hamilton图，为什么？

Solution
查看章节6.3 Hamilton图的定义

设$|X| \leq |Y|$，且是Hamilton图。
Hamilton图中必存在Hamilton圈。
根据二分图的定义，X或Y顶点集内均没有边，只有X与Y顶点集间有边存在。
我们首先构造Hamilton轨，必然是X与Y顶点交替出现。
当X中顶点都位于轨上时，Y中最多有$|X| + 1$个顶位于轨上，且轨的两端都为Y中顶点。
这时，由于Y顶点集内没有边存在，轨的两端无法再扩展，或者互相连接组成圈。
所以不存在Hamilton圈,不是Hamilton图。

14 第六章 17

证明：若$u, v \in V(G)$，u与v不相邻，且$d(u)+d(v) \geq |V(G)|$，
则G为Hamilton图的充分必要条件是$G+uv$是Hamilton图。

Solution
必要性： 显然若G为Hamilton图，则$G+uv$是Hamilton图。

充分性： 设$|V(G)|=n$
反证法，若$G+uv$是Hamilton图，且G不为Hamilton图。
则uv必然在图$G+uv$的Hamilton圈上。
所以在图G中，我们可以构造从u到v的Hamilton轨:
$u\ v_2\ v_3\ \cdots\ v_{n-1}\ v$
对于顶点$v_i(2 \leq i \leq n-1)$，若$uv_i \in E(G)$,则必然$v_{i-1}v \notin E(G)$
否则：$u\ v_2\ v_3\ \cdots\ v_{i-1}\ v\ v_{n-1}\ v_{n-2}\ v_i\ u$ 构成Hamilton圈。
因此$d(v) \leq n-1-d(u), d(u)+d(v) \leq n-1$。
与已知$d(u)+d(v) \geq n$，矛盾。
则原命题成立。

15 第九章 2

证明：v是图G的割顶的充分必要条件是存在$V(G)-\{v\}$的一个划分，即$V-\{v\}=V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
使得对任取得$u \in V_1$和任取的$w \in V_2$，v在每条由u到w的轨上。

Solution
必要性： 若v是图G的割顶，则将v删掉，G分为n个连通片。
设第一个连通片的顶点集为V_1，其他连通片顶点集为V_2。
满足$V-\{v\}=V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$。
且对任取得$u \in V_1$和任取的$w \in V_2$，v在每条由u到w的轨上。

充分性： 若对任取得$u \in V_1$和任取的$w \in V_2$，v在每条由u到w的轨上。
则删掉v，V_1, V_2不连通。
图G由连通变为不连通，所以v是割顶。

16 第十章 12

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, A^k = ?$$

Solution

$$A^k = \begin{cases} A & \text{(k为奇数)} \\ I & \text{(k为偶数)} \end{cases}$$

17 第十章 18

设无向图G的基本关联矩阵为

$$B_f = \left\{\begin{matrix} 1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\}$$

求G的一切生成树，且画图示。

查看定理10.7

Solution

$B_f(G)=$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	0	1	0	0
v_2	1	1	0	1	0
v_3	0	0	0	1	1

Figure 3: 图G基本关联矩阵

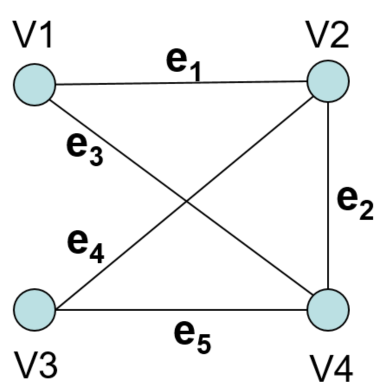

Figure 4: 作出对应无向图G

根据定理10.7，分别计算3阶子方阵的秩：

一共有8个生成树,$\tau(G) = 8$。

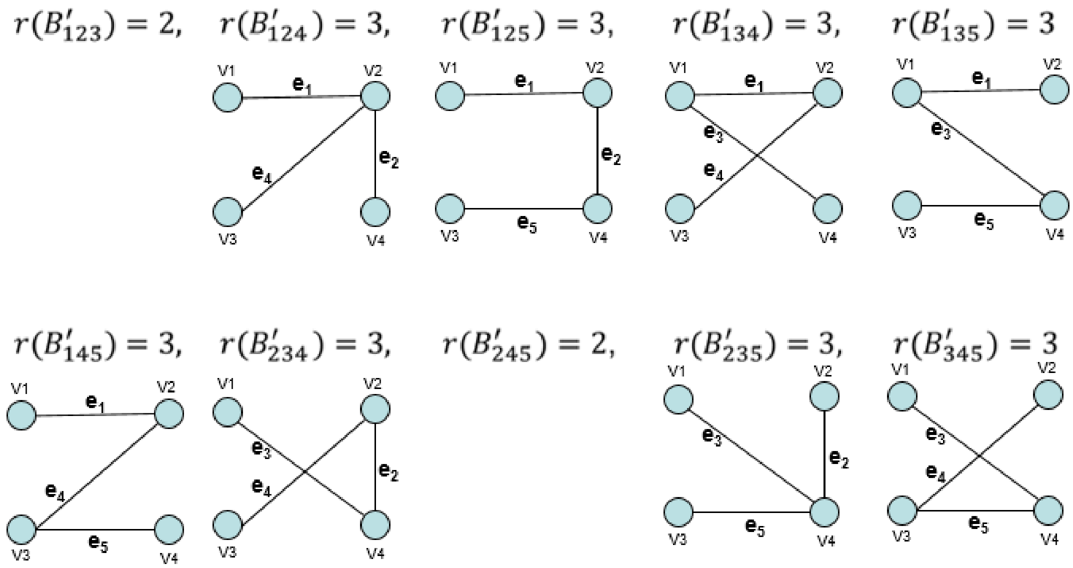

Figure 5: 子方阵及生成树

18 第十章 20

已知有向图G的基本关联矩阵为

$$B_f = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 & 1\ \ 0 & 0\ \ 0 \\ -1\,0 & 0\ -1 & 0\ \ 1 \\ 0\,0 & -1\ \ 0 & -1\ -1 \end{matrix} \right\}$$

求$C_f(G)$与$S_f(G)$。

查看课本192页最后三行，对于有向图的讲解
查看定理10.11与10.12。
下面利用图的方法证明（课本193页）。

Solution

$B_f(G)=$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	1	0	0	0
v_2	-1	0	0	-1	0	1
v_3	0	0	-1	0	-1	-1

Figure 6: 图G基本关联矩阵

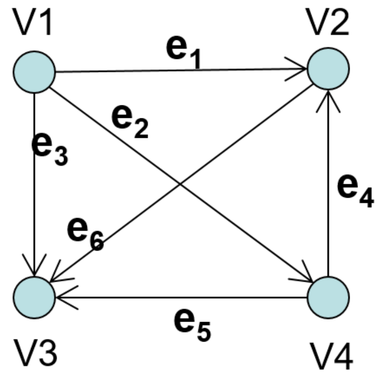

Figure 7: 作出对应有向图G

很明显我们可以确定其中的生成树T：由e_1, e_2, e_3构成，则余树边为e_4, e_5, e_6。
对于圈矩阵。
（恰含生成树T的一条余树边的圈，对应在圈矩阵中的行向量，构成有向图G的基本圈矩阵。）
这里规定圈中取逆时针方向为正。
则分别包含余树边e_4, e_5, e_6的圈对应在圈矩阵中的行向量为：
$C_4 = (-1, 1, 0, 1, 0, 0)$
$C_5 = (0, -1, 1, 0, -1, 0)$
$C_6 = (-1, 0, 1, 0, 0, -1)$
则组成基本圈矩阵为：

$$C_f(G) = \left\{ \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\}$$

对于割集矩阵
（恰含生成树T的一条树边的割集，对应在割集矩阵中的行向量，构成有向图G的基本割集矩阵。）
（或者表述为分别分割一个顶点的割集，对应在割集矩阵中的行向量，构成有向图G的基本割集矩阵。）

则分别割掉顶点v_2, v_3, v_4的割集对应在割集矩阵中的行向量为：
这里取指向割去顶点集的边为正向边。
$S_2 = (1, 0, 0, 1, 0, -1)$
$S_3 = (0, 1, 0, -1, -1, 0)$
$S_4 = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$
则组成基本割集矩阵为：

$$S_f(G) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

19 第九章 补充题

证明：若G是简单图，且$\delta \geq v-2$,则$k=\delta$。

Solution
查看定义9.1与9.2。

若$\delta = v-1$,则G为完全图，则顶连通度$k(G)=|V(G)|-1=v-1=\delta$
若$\delta = v-2$，设$d(v_0)=\delta$,则存在$v_i, st.\ d(v_i)=\delta$
因为$\delta = v-2$，对于v_0，只与v_i不相邻，与剩余其他顶点都相邻。
对于v_i，只与v_0不相邻，与剩余其他顶点都相邻。
而剩余其他顶点v：或者$d(v)=v-1$,与其他顶都相邻；或者情况与v_0相同,只与一点不相邻。
则$n(v_0,v_i)=v-2$,且$min\{n(u,v)\}=v-2.$
则$k(G)=min\{n(u,v)\}=v-2=\delta$
得证。