抽象代数字 设尺是一个环, aER, 由a生成的子环 $\langle \alpha \rangle = \{b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \dots + b_m \alpha^m | b_i \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \}$ 由《生成的理想 $(a) = \left\{ x_i a y_i + \dots + x_m a y_m + x a + a y + n a \middle| x_i, y_i, x_i, y \in \mathbb{R}, \right\}$ 这种理想称为主理想 (principal ideal) 若R是含么交换环则(a)= $\{ra/r\epsilon R\}$ 定义若R是一个整环,且每个理想均是主理想,则R称 为主理想整环(principal ideal domain,简称PID) 若尺是整区且满足定义条件,则尺是主理想整区 例卫是一个主理想整区 证明:设工是区的一个理想,若I={0}则I=(0) 若I+{0},存在最小正整数a∈I.则(a)⊆I ∀b∈I 由带金除法,b=9a+r, $9,r\in\mathbb{Z}$, $0\leq r< a$ 则 □=b-2a∈I,这与条件:α是I中最小正整数可得下=0 b E (a) 因此 I=(a). 例2一个域下是一个主理想整区,它的理想只有(0),(1)

例3 若下是一个域,则下(x)是一个主理想整区、产2 证明、设工是F(x)的个理想且I+(0),设户(x)任工 满足对于 \ \ \(2(x) \ + 0 \ \ \ | deg P(x) \ \ deg \ \(2(x)\) 正如例1, 由带介除法,Q(x) = P(x)t(x) + r(x), $0 \le \deg r(x) < \deg P(x)$ 但是 $r(x) \in I$,则r(x)=0 $q(x) \in (p(x)) \Rightarrow I=(p(x))$ 注: Z[x]不是一个PID. 例如(2,x)不是一个主理想, 否则 $(2,x)=(p(x)) \Rightarrow 2=p(x) \cdot P(x) \Rightarrow p(x)=\pm 1$ 或士2. (2)设R是一个整区、R区J是一个主理想整环《A是个域 定理 主理想整区是唯一分解整环. 我们分解如下几步证明这个定理 到理1设R是一个主理想整区,QER是不可约之会 (a) +(0), (a) 是极大理想,即若工是尺的理想, (a) ⊊I,则 I=R 证明:">" 设AER不好,则(a) +(0).若工是R后为 理想,且(a)军I,因为R是一个PID,则 I=(b), (a)军(b) $\exists CER, a=bc, 由a不可约,且(a) {(b) 则b可能$ "烂"设(a) ‡0, (a) 极大,设 a=bc,则(a) C/1、

■為■ ・ 由 扫描全能王 扫描创建 由极大性,(b)=(a)或(b)=R.若(b)=(a)则 $a\sim b$ $\Rightarrow c 可造.$

引理2.股尺是主理想整区,则它的不可约定是素礼.证明:设 $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ 是不可约元,且 $a \mid bc$,若 $a \nmid b$ 则 $b \notin (a) \Rightarrow (a) \notin (a,b)$,由 (a) 的 $b \notin (a,b) = \mathbb{R}$ 别 $b \notin (a) \Rightarrow (a) \notin (a,b)$,由 (a) 的 $b \notin (a) \Rightarrow (a) \notin (a,b) = \mathbb{R}$ 到 $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ 是 $a \neq 0 \in \mathbb{R$

引理3.设尺是主理想整区,则它满足因子链条件,即 ∀a≠0 ∈R a不可逆,则a可写成有限个不可约亡乘积 证明:设 0+0 ER且非单位. 若 a 不够匀,则已得结论。 岩。可约、设。a=a,a'。a,a',均非单位,(a) $\xi(a_1)$ 继续上述讨论,若。可约, $a_1=a_2a_2$,若。 a_2,a_2 均不可约, (a1)年(a2),若a不能写成有限个不可约之乘积,则得 到无穷抢连。(a)军(a)军(a2)军… $\chi \in (a_i), y \in (a_j) \Rightarrow \chi, y \in (a_j) \Rightarrow I 关于加法、乘法针闭.$ $\forall \gamma \in \mathbb{R}, \chi \in \mathbb{I} \quad \exists k, \chi \in (a_k) \Rightarrow \gamma \chi \in \mathbb{I}$ 由于尺是PID, $\exists b \in \mathbb{R}$, I = (b), $b \in I \Rightarrow \exists l$, $b \in (a^l)$

由 扫描全能王 扫描创建

即 $(b) \in (a^l) \Rightarrow (a^l) = (a^{l+l}) = \cdots$ 与 a 不能写成有限个不可约 2 乘积矛盾.

定理是引理1,2,3的自然推论

欧氏整环 (Euclidean domain)

定义设尺是一个整区且存在从 $R^*=R\setminus\{0\}$ 到N(非)整数的一个映射 $8: R^*\longrightarrow N=\{0,1,2,\cdots\}$ 满足

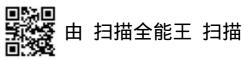
(1) 若 $a,b \in R$ 且 $b \neq 0$,则存在 $2,r \in R$,a = b 2 + r, r = 0或s(r) < s(b);

(2) $\forall a,b+0\in \mathbb{R}$,有 $S(ab) \geq S(a)$.则 \mathbb{R} 积为 欧氏整环

换句话说,我们赋予尺中非零之一个"长度",可以比较大小,从而使用带全除法.

例. Z, F(x) (下是一个域)均有带邻弦 \Rightarrow 它们是欧氏整环,其中 S(n)=|n|, $S(f(x))=\deg f(x)$.

例 $Z[\sqrt{-1}]$ 是欧氏整环, $\forall a \in Z[\sqrt{-1}]$ $a = x + y \sqrt{-1}$, $S(a) = x^2 + y^2 \in \mathbb{N}$. $\forall a, b \neq 0 \in Z[\sqrt{-1}]$, $a = x_1 + y_1 \sqrt{-1}$, $b = x_2 + y_2 \sqrt{-1}$, 显然 $S(ab) \geq S(a)$. 以下展示定义中(1) 成立. 公求 $Q, r \Leftrightarrow ab' = Q + rb'$ 即给定 $Q(i) 中 - 元素²¹ 找 <math>Z[\sqrt{-1}]$ 中 - 元素 0,使得u, v 對可能"接致"

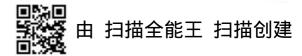


 $= S(b)[(A-c)^2 + (B-D)^2] \leq S(b)[(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2] \leq S(b)$ (这里 S被扩充为 $S: Q(i) = \{a+bi \mid a,b \in Q\} \longrightarrow Q_{>o}$) 定理 欧氏整环是 PID.

推论 欧氏整环是唯一分解整环.

注:存在主理想整环。不是欧氏整环例 $P = \{a+b(\frac{1+\sqrt{19}}{2})|a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是PID,不是欧氏整环.

作业: Page 105, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.



二次代数整数环

定义一个二次环是Z[V]其中V是x²+ax+b EZ[X]的根。若V是实根,则Z[V]是实二次环,否则是虚二次环(imaginary quadratic ring)

例如: $\mathbb{Z[N-1]}$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

因为 $\gamma^2 = -a\gamma - b \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\gamma \Rightarrow \mathbb{Z}[\gamma] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}[\gamma]$

ン的共轭 (conjugate) 是 リ=-a-y(x²+ax+b=0的另根)

∀x+yv∈Z[V] 共轭是x+y)=(x-ay)-yV

 $(1) S(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \qquad (2) S(\lambda \beta) = S(\lambda) S(\beta)$

例 $y=\sqrt{z}$ $S(x+yy)=x^2-2y^2$ $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $S(x+yy)=x^2+xy-y^2$

定理 区(以)中单位是范数=±1的记案

证明: 说以 $\in \mathbb{Z}[V]$ 是单位 $\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{Z}[V]$, $\forall \beta = 1 \Rightarrow \delta(\alpha) \cdot S(\beta) = 1 \Rightarrow \delta(\alpha) = \pm 1$,反之 $\delta(\alpha) = \pm 1 \Rightarrow \forall \alpha = \pm 1 \Rightarrow \forall \beta = 1$

例 $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ $\delta(x+yy)=\chi^2-3y^2$

 $\delta(\alpha)=\pm 1 \implies \alpha=\pm 1,\pm 2\pm \sqrt{3}$

定理令多一一一点,卫马是唯一分解整环 证明。我们展示它是欧氏整环,定义区约一分及。 $\delta(a+b3) = a^2 - ab + b^2$ (因为多满足 $2^2 + x + 1 = 0$) 这可扩充为 Q1约一一及10 $\forall \alpha, \beta \neq 0$ = $\alpha + b \leq \beta$, $\alpha, b \in \mathbb{Q}$, α, b 取整得 a = a' + x, b = b' + y $\bowtie 0 \le x, y < 1, a', b' \in \mathbb{Z}$ $S(r) = S(\beta)S(x+y\xi) = S(\beta)(x^2-xy+y^2) < S(\beta)$ $(i\hat{x}: \chi^2 - \chi y + y^2 = (\chi - y)^2 + \chi y < (\chi - y)^2 + y^2 < \chi^2 < 1)$ 同杂性质。(1)单位。土1、土益、土益。土土(1+益) $(2) | - 3 | a + b = 3 | a + b = a, b \in \mathbb{Z}$ $(3) \ \ |-3| + a + b = \Rightarrow (a + b = 3)^3 = \pm 1 \pmod{9}$ (4) 若 8(x)=P素数,则以是一个不可约定(也是素元) 因此1-3是一个素礼.