测度与积分 教学讲义

讲课教材: **Real Analysis**, E.M.Stein & R. Shakarchi 编著, 普林斯顿大学出版2005.

参考书: 《实变函数论》和《实变函数解题指南》周民强, 北大出版社;

《实分析与复分析》[美] W.Rudin, 有中译本.

清华大学数学科学系本科教学　卢旭光　Feb. 2018

讲义目录

引言

我们在数学分析课程中已对Riemann积分与Lebesgue 积分的共性和各自的特点做了简要说明, 那里已揭示了现代积分的某些一般性, 为教学需要这里我们再重复一下: 以重积分和有界函数为例。设$E\subset\mathbb{R}^d$是一个有界区域, 函数$f(x)$在E上有定义且有界.

Riemann 积分: 作E的分划和E上的**Riemann 和**:

$$E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k,\quad E_k\text{是小区域, 互不重叠},$$

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)m(E_k),\quad \xi_k\in E_k;\quad \text{这里}\, m(E_k)=E_k\text{的}d\text{维体积}.$$

函数f在E上Riemann 可积是说: 存在一个数, 记作$\int_E f(x)\mathrm{d}x$, 使得

$$\text{当}\quad \lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n}\mathrm{diam}(E_k)=0\ \text{时}\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le n}\Big|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)m(E_k)-\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|=0.$$

根据这个定义, 我们知道这等价于

$$\text{当}\quad \lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n}\mathrm{diam}(E_k)=0\ \text{时}\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le n}\sum_{k=1}^{n}\omega(f,E_k)m(E_k)=0$$

其中$\omega(f,E_k)$是f在E_k上的振幅:

$$\omega(f,E_k)=\sup_{x,y\in E_k}|f(x)-f(y)|,\quad k=1,2,...,n.$$

于是可见：有界函数f在E上Riemann 可积, 当且仅当f在E上**“几乎处处”连续**.

Lebesgue 积分: 按f的函数值的分布对E作分划: 设$a \le f(x) < b, x \in E$,

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad E_k = \{x \in E \,|\, a + (k-1)\frac{b-a}{n} \le f(x) < a + k\frac{b-a}{n}\}.$$

令

$$\underline{L}_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\Big) m(E_k), \quad \overline{L}_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) m(E_k)$$

则有

$$0 \le \overline{L}_n(f) - \underline{L}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \frac{b-a}{n} m(E) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

这里用到可加性质

$$\sum_{k=1}^{n} m(E_k) = m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) = m(E).$$

于是可见存在实数, 记作$\int_E f(x)\mathrm{d}x$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \overline{L}_n(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{L}_n(f) = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

由此可见

$$\sup_{a+(k-1)\frac{b-a}{n} \le y_k < a+k\frac{b-a}{n}} \Big| \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) - \int_E f(x)\mathrm{d}x \Big| \le \frac{b-a}{n} m(E) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此f在E上可积, 其积分近似值为**Lebesgue 和**: $\sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$. 在这个推导中我们唯一要求的是$f$能使诸集合$E_1, E_2, ..., E_n$ 具有可加性.

....

事实上经典的Lebesgue 测度与积分已包含了现代测度与积分的主要思想和理论框架。同学们在一年后会看到很多数学分支如泛函分析、动力系统、PDE、几何分析、分形理论，尤其概率论随机过程都广泛使用现代测度与积分。将来学习随机过程时大家更将看到, 所有问题所有理论都是测度论的, 且多涉及更复杂的测度包括无穷维空间上的测度。甚至在数论研究中也用到测度论。为什么测度论的应用如此广泛? 我想主要是因为以下三点:

• 在现代测度论中“几乎所有”集合都是可测的, 并且测度空间都是完备的或都是容易完备化的, 这使得其中“几乎所有”极限运算都是封闭的。事实上上世纪七十年代数学家索罗威证明了不可测集的存在(差不多)等价于选择公理。[此处顺便说一句, 积分也可看成是测度。]

• 现代测度论是一种柔性技术, 即它可以研究结构很坏的集合, 能渗透到一些重要细节中。这归功于它的普适性和一些强大的定理, 而古典积分则要么无法研究很差的集合，要么只能做形式运算而无法用于严格证明。

• 测度与积分主要用于处理平均行为和大范围性质, 自然界和科学中的问题也往往与个体的群体行为有关, 包括微观大宏观小的介观问题。一方面, 在我们还没有足够的精准技术去跟踪和研究个体问题时, 先研究群体行为就是自然的可行的，另一方面, 即便每个个体行为清楚了，也远不能代替对它们的群体行为的研究，即仍需要研究群体行为。例如按照牛顿力学，单个质点的运动服从牛顿定律, 是可逆的, 即可以沿反向回到初态，但一般来说质点群体的运动行为就不可逆了。

现代测度与积分已构成了一个完整体系, 操作方式都是有章可循的, 也是比较直观的, 我们的学生在学习上一般没有大的障碍, 只是开始不习惯一些集合运算, 包括对积分区域的适当分解等, 同学们务必多动手演练。

教材和参考书：

教材：**Real Analysis**, E.M.Stein & R. Shakarchi 编著, 普林斯顿大学出版2005

参考书:

[1] 周民强《实变函数》, 北京大学出版社。此书主要讲经典 Lebesgue 测度和积分, 习题丰富有趣 (90 年代以后的各版本有部分习题解答), 适于作本科生实分析教材。

[2] W. Rudin *Real and Complex Analysis* (《实分析与复分析》)有中译本, 人民教育出版社,1981. 此书为名著,其实分析部分包括了现代测度与积分的主要方法和结果, 适于数学系高年级学生和研究生学习。

[3] Gerald B. Folland *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Jon Wiley & Sons, Inc. , 1984. 该书比较浓缩但是非常清晰地展示了现代测度和积分的基本知识, 使读者能较快地领略并掌握这门学科的主干和应用方法。

[4] 严加安《测度论讲义》(第二版), 科学出版社, 2004. 此书较全面也较浓缩, 是研究测度论和概率论学者的必读教材。

[5] A. Mukherjea and K. Pothoven, *Real and Functional Analysis, Part A: Real Analysis,* Second Edition, 1984, Plenum Press, New York. 此书技术含量较高。

第一章 $\mathbb{R}^d$上的测度论

§1.1. 集合与映射, 集合的特征函数

• 集合的运算.

以下出现的大写字母 A, B, C, A_i, X 等都表示集合.

1° **子集**：若 A 的元素都在 B 中, 则称 A 是 B 的一个子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 因此

$$\Big(A \subset B\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longrightarrow x \in B\Big).$$

2° **相等**：A 与 B 相等的定义为

$$\Big(A = B\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longleftrightarrow x \in B\Big) \Longleftrightarrow \Big(A \subset B \quad \text{and} \quad B \subset A\Big).$$

若 A, B 不相等, 则记为 $A \neq B$.

注意：等号 (不等号) 两边的东西是地位相等的, 即

$$A = B \Longleftrightarrow B = A, \qquad A \neq B \Longleftrightarrow B \neq A.$$

3° **并集**：由 A, B 两集合的元素的全体组成的集合记作 $A \cup B$, 称为 A 与 B 的并集. 即

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \quad \text{或} \quad x \in B\}. \qquad \text{显然} \quad A \cup B = B \cup A.$$

一般地任意多个集合 $A_\alpha (\alpha \in I)$ 的, 元素的全体组成的集合记作 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 称为诸 A_α 的并集, 即

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x \mid \exists \, \alpha \in I \ \text{ s.t. } \ x \in A_\alpha\}.$$

4° **交集**：由 A, B 两集合的公共元素的全体组成的集合记作 $A \cap B$, 称为 A 与 B 的交集. 即

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \quad \text{且} \quad x \in B\}. \qquad \text{易见} \quad A \cap B = B \cap A.$$

一般地任意多个集合 $A_\alpha (\alpha \in I)$ 的公共元素的全体组成的集合记作 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, 称为诸 A_α 的交集, 即

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x \mid \forall \ \alpha \in I \,,\, x \in A_\alpha\}.$$

5° **并、交运算的结合律和交换律：**

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\,,\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\,.$$

【证】略.

6° **并、交运算的两个分配律：**

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\,,\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\,.$$

一般地

$$A\cap\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}A\cap B_\alpha\,,\quad A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

【证】只证明最后两个等式.

$$x\in A\cap\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\Longleftrightarrow x\in A\text{ and }x\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\Longleftrightarrow x\in A\text{ and }\exists\alpha\in I\ \text{ s.t. }\ x\in B_\alpha$$
$$\Longleftrightarrow\exists\alpha\in I\ \text{ s.t. }\ x\in A\cup B_\alpha\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I}A\cap B_\alpha\,.$$

所以两集合相等. 对最后那个等式, 我们有

$$\forall\alpha\in I\,,\ A\subset A\cup B_\alpha\Longrightarrow A\subset\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

而显然

$$\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

所以

$$A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

反之, 设 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha$. 若 $x\in A$, 则自然 $x\in A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$. 若 $x\notin A$, 则由交集定义, 对任意 $\alpha\in I$ 有 $x\in A\cup B_\alpha$ 从而有$x\in B_\alpha$. 因此 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$. 所以仍有 $x\in A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$. 因此

$$\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\subset A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\,.$$

因此两集合相等. □

7° **差集：**把 A 中属于 B 的元素去掉, 剩下的元素构成的集合称为 A 减 B 后的差集, 记作 $A\setminus B$, 即

$$A\setminus B:=\{x\in A\,|\,x\notin B\}\,.$$

8° **余集 (或补集)：**设X是我们所考虑的一个大集合. 对任意 $A \subset X$, 我们把差集 $X \setminus A$ 叫做 A 关于 X 的补集或余集, 记作

$$A^c := X \setminus A\,.$$

这里上标 c 提示“补”或“余”(complement). 易见当 $A, B \subset X$ 时 有

$$(A^c)^c = A\,, \qquad A = B \Longleftrightarrow A^c = B^c\,.$$

9° **用补集表示差集：**设 $A, B \subset X$. 则

$$A \setminus B = A \cap B^c = B^c \cap A\,.$$

【证】由 $A, B \subset X$ 和交集运算交换律有

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \in X \setminus B\} = A \cap (X \setminus B) = A \cap B^c = B^c \cap A\,.$$

10° **de Morgan 对偶原理**: 设 A, B 为 X 的子集. 则

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c\,.$$

一般地, 设 $A_\alpha \subset X$ $(\forall\, \alpha \in I)$. 则

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,, \quad \Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,.$$

也即“并的补等于补的交”,“交的补等于补的并”. 用差集表示则写成

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)\,, \quad X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)\,.$$

【证】

$$\begin{aligned} & x \in \Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c \Longleftrightarrow x \in X \text{ and } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow x \in X \text{ and } \forall\, \alpha \in I\,,\ x \notin A_\alpha \\ & \Longleftrightarrow \forall\, \alpha \in I\,,\ x \in X \setminus A_\alpha \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,. \end{aligned}$$

所以第一个恒等式成立. 利用这一恒等式得到

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c\Big)^c = \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha^c)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\,. \qquad \text{因此} \quad \Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,.$$

□

• **集合的乘积 (笛卡尔积或直积)**.　设 X, Y 为任意两个集合. 定义新的集合

$$X \times Y := \{(x,y)\,|\, x \in X,\ \ y \in Y\}\,.$$

在 $X \times Y$ 中规定两元素相等为

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2\,, \quad y_1 = y_2\,.$$

称　$X \times Y$　为集合 X, Y 的乘积, 也称为笛卡尔积或直积.

一般地, 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为任意 n 个集合. 定义它们的乘积 (笛卡尔积) 为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n)\,|\, x_i \in X_i\,,\ \ i = 1, 2, ..., n\}\,.$$

在 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 中规定两元素相等为

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad x_i = y_i\,, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

当 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ 时简记

$$\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n} = X^n\,.$$

例如

$$X^2 = X \times X, \quad \mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \text{等等.}$$

乘积的结合律: 对于 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 中的元素我们规定括号运算: 例如

$$((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) = (x_1, (x_2, x_3, \cdots, x_n)) = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$((x_1, x_2, \cdots, x_k), x_{k+1}, ..., x_n) = \cdots = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-k}, (x_{n-k+1}, ..., x_n)) = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

等等, 其中括号内的元素组自然看成是相应的部分乘积集的元素. 于是有结合律:

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n = X_1 \times (X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n,$$

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1} \times \cdots \times X_n = \cdots$$
$$= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-k} \times (X_{n-k+1} \times \cdots \times X_n) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n.$$

等等. 这个结合律的主要作用之一在于人们可以对集合 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的个数 n 运用数学归纳法来证明乘积集合 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$的某些性质.

• **乘积集合的本质**. 以 $X\times Y$ 为例. $X\times Y$ 的元素 (x,y) 的分量 x 和 y, 除了它们的顺序 (x 为第一分量,y 为第二分量) 被人为规定外, 是**彼此独立**的, 即一方的变化范围和属性与另一方无关. 至于 x,y 的顺序要求, 则完全是为了明确分量的位置和身份. 当然, 由于这种顺序的缘故, x与y 的地位就不是对称的: x在第一位置, y在第二位置.

很多时候, 顺序也是不得已而为之的, 也即我们无法做到全面均衡或对称. 例如为了给同等级别的嘉宾安排座位, 可以采用圆桌排位, 但在书写或宣布嘉宾名字的时候, 就不得不有先后之分(通常采用以姓氏为序的天然顺序). 这也说明了我们的空间和时间在很多情况下不得不是有区别的、有序的.

乘积集合的“乘积”这个叫法来自于矩形面积和长方体的体积的计算方式. 例如

矩形(二维乘积集合)

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\in[a,b]\,,\ b\in[c,d]\}$$

的面积S即为相邻边长的乘积：$S=(b-a)(d-c)$.

长方体(三维乘积集合)

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_i\in[a_i,b_i]\,,\,i=1,2,3.\}$$

的体积V即为相邻棱长的乘积：$V=(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$.

当然, 由乘积集合的定义易见很多集合不是乘积型的.

• **函数与映射**

映射的概念：设 X,Y 为两个集合. 如果按照某个确定规律 f, 对每个 $x\in X$, 存在唯一的元素 $y\in Y$ 与x对应, 则说 f 是定义在 X 上而在 Y 中取值的映射. 这时我们称集合 X 为映射 f 的定义域或出发域, 它的一般元素 x 称为映射 f 的变元或自变量, 而由x通过f对应的元素y记作$f(x)$, 即 $y=f(x)$, 并称 $y=f(x)$ 是f 的因变量. 我们把此事记作

$$f:X\to Y,\quad x\mapsto f(x)\,.$$

于是记号 $f:X\to Y$（读作 f 是从 X 到 Y 的映射或 f 把 X 映入 Y) 就表示：

(1) $x\in X\Longrightarrow f(x)\in Y$.

(2) $x_1 = x_2 \in X \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

此时我们称集合

$$f(X) := \{y \in Y \,|\, \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in X\}$$

为映射 f 的值域, 或到达域, 或象集. 当 Y 为数集时, 如 Y 是实数集合或复数集合的子集, 也称映射 f 为函数. 现代数学中无论 Y 是否为数集, 人们有时也把映射叫做函数.

设 $f: X \to Y$, $g: X \to Y$. 若 $x \in X \Longrightarrow f(x) = g(x)$, 则成 f 与 g 相等, 或称 f,g 为同一个映射. $\square$

纵观整个数学领域, 可以说

最基本最常用最重要的东西就是映射(函数、变换)及其表示.

映射的例子: 随堂给出......

• **映射的象集和逆象集**. 设 $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. 称

$$f(A) := \{y \in Y \,|\, \exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

为A 在 f 下的象集；而称

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$$

为B 在 f 下的原象集或逆象集. 对于空集 $\emptyset$, 显然有 $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

易见下列包含关系成立:

$$A_1 \subset A_2 \subset X \quad \Longrightarrow \quad f(A_1) \subset f(A_2) \subset Y,$$

$$B_1 \subset B_2 \subset Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \subset X.$$

此外, 由映射的定义还易见下面包含关系成立：

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

【**例**】设$f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. 则

$$f([0,\pi]) = [0,1], \quad f^{-1}([0,\infty)) = f^{-1}([0,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

这里$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合, $\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合.

下面命题给出了映射的象集和逆象集的常用的基本关系式.

【命题1.1.1】对任一映射$f: X \to Y$, 设一切$A_\alpha \subset X$, 一切$B_\alpha \subset Y$. 则有

$$f\Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha),$$

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \qquad (\text{当}f\text{ 为单射时等号成立}),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha).$$

【证】只证第三个. 对任意$x \in X$ 我们有

$x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha) \iff f(x) \in \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha \iff$存在$\beta \in J$使得$f(x) \in B_\beta \iff$存在$\beta \in J$使得$x \in f^{-1}(B_\beta) \iff x \in \bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$. 因此两个集合相等. □

• **可数集与不可数集**.

【定义】若集合 X 与自然数集合 $\mathbb{N}$ 一一对应, 则称 X 是一个可数无限集. 空集、有限集和可数无限集统称为可数集。(为什么用“可数”这个名称？) 若集合 X 不是可数集, 则称 X 是不可数集, 或称X不可数. □

在关于可数集的所有性质中, 下面命题中的性质是最常用也是最好用的. 我们将使用序列的概念

【序列的定义】. 设 X 是任意集合. 则任何映射 $f: \mathbb{N} \to X$, $n \mapsto f(n)$ 都叫做一个序列. 习惯上记这一序列为

$$a_n = f(n)\,(n \in \mathbb{N}) \quad \text{或} \quad \{a_n\} \quad \text{或} \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{或} \quad \{a_n\}_{n=1}^\infty,$$

$$\text{或 } x_n = f(n)\,(n \in \mathbb{N}) \quad \text{或} \quad \{x_n\} \quad \text{或} \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{或} \quad \{x_n\}_{n=1}^\infty, \quad \text{等等}.$$

同时也称 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个序列, 并称 a_n 是此序列的第 n 项. □

【命题1.1.0】(1) 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为任一序列. 则 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 必然属于以下两种情形之一：

(I) 存在 $N \in \mathbb{N}$ 和自然数 $1 = n_1 < n_2 < ... < n_N$, 使得 $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_N}$ 互不相同, 而序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 中的每一项 x_n 都属于 $\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_N}\}$, 从而有 $\{x_n\}_{n=1}^\infty = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_N}\}$. 换言之, 此时序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 作为集合是有限集.

(II) 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 其中 x_{n_k} 互不相同 (i.e. $i \neq j \Longrightarrow x_{n_i} \neq x_{n_j}$) 使得序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的每一项 x_n 都属于 $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$, 从而有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., \}$. 换言之, 此时序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为集合是可数无限集.

(2) 若集合 X 的所有元素可以编号成一序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则 X 是可数集. 【注意: x_n 不必互不相同.】

【证】易见(1)蕴含(2). 故只需证明(1). 假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不属于情形 (I). 我们来证明它必属于情形 (II). 注意在这个假设下, 下面出现的自然数的子集均非空, 从而都有最小元. 依次考虑最小元:

$$
\begin{aligned}
&n_1 = 1, \\
&n_2 = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \neq x_{n_1}\}, \\
&n_3 = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}\}\}, \\
&n_4 = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}\}\}, \\
&........ \\
&n_{k+1} = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}\}, \\
&........ .
\end{aligned}
$$

根据操作程序的归纳法原理, 上述程序对每个自然数 $k \in \mathbb{N}$ 都可施行.

易见上述集合有包含关系：

$$\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \neq x_{n_1}\} \supset \{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}\}\} \supset \{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}\}\} \supset \cdots.$$

故$1 = n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq \cdots$. 但显然 x_{n_k} 互不相同从而 n_k 互不相同, 因此必有

$$1 = n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots .$$

这表明 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列并且 x_{n_k} 互不相同. 注意 $n_k \geq k$ $(k = 1, 2, ...)$. 任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一项 x_m. 取 $k > m - 1$. 则 $m < k + 1 \leq n_{k+1}$. 断言: $x_m \in \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$. 否则, $x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$, 则由 n_{k+1} 的定义应有 $n_{k+1} \leq m$, 这矛盾于 $m < n_{k+1}$. 这就证明了 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都属于 $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$. 因此作为集合我们有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$. 因后者是可数无限集, 故$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为集合是可数无限集. $\square$

【可数集的基本性质】

(1) 非空集合 X 是可数集当且仅当 X 的元素可以被编号：即

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \qquad \text{当}X\text{是可数无限集时;}$$
$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \qquad \text{当}X\text{是有限集时.}$$

(注意, 以上括号中的元素 x_k 互不相同, 即当 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$.)

(2) 可数集的子集还是可数集.

(3) 可数个可数集的并还是可数集, 即若A_n 是可数集, $n = 1, 2, 3, ..., N$ 或$n \in \mathbb{N}$, 则$\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ 和相应地$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 都是可数集.

(4) 有限多个可数集的乘积集还是可数集, 即若$X_1, X_2, ..., X_N$都是可数集, 则$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ 也是可数集.

【证】(1) 是明显的.

(2): 设 X 是可数集, $A \subset X$. 若 A 是有限集, 则 A 当然是可数集. 设 A 是无限集. 则由命题 1 (利用反证法) 知 X 也是无限集从而 X 是可数无限集. 因此可写 $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. 令

$$\mathbb{N}_0 = \{k \in \mathbb{N} \,|\, x_k \in A\}.$$

则 $\mathbb{N}_0$ 是 $\mathbb{N}$ 的无限子集. 将 $\mathbb{N}_0$ 的元素按大小排列为 $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. 则有 $A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$. 于是由 (1) 知 A 是可数集.

(3): 先假设有可数无限多个A_n 且每个A_n都是可数无限集. 写

$$A_1 = \{a_{11},\, a_{12},\, a_{13},\, a_{14},\, ...\},$$
$$A_2 = \{a_{21},\, a_{22},\, a_{23},\, a_{24},\, ...\},$$
$$A_3 = \{a_{31},\, a_{32},\, a_{33},\, a_{34},\, ...\},$$
$$A_4 = \{a_{41},\, a_{42},\, a_{43},\, a_{44},\, ...\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

按45° 度角的斜线排法(给图示), 可以将所以元素a_{ij} 排成一列：

$$a_{11}, \quad a_{12}, a_{21}, \quad a_{13}, a_{22}, a_{31}, \quad \ldots \quad a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{i(n-i)}, ..., a_{n1}, \quad \ldots .$$

于是可将$\bigcup_{n=1}^\infty A_n$的所有元素排成一个序列:

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n=\{a_n^*\}_{n=1}^\infty\qquad(\text{右边的元素中可能有重合者}).$$

据本节命题4知$\bigcup_{n=1}^\infty A_n$是可数集.

对于其他情形, 若只有有限多个集合A_n, 则可以添加可数无限多个单点集使成为可数无限多个集合的情形; 而对于某个A_n为有限集的情形, 添加可数无限多个元素于A_n使其成为可数无限集. 因原来的集合的并集是改造后的集合的并集的子集, 故由上面结果知原来的并集也是可数集.

(4): 应用(有界)归纳法原理, 只需证$N=2$的情形. 设X,Y都是可数集. 先设X,Y都是可数无限集: $X=\{x_1,x_2,x_3,...\},Y=\{y_1,y_2,y_3,...\}$. 令

$$A_k=\{(x_k,y_1),(x_k,y_2),(x_k,y_3),...\},\quad k=1,2,3....$$

则每个A_k都与Y一一对应因而是可数无限集. 易见

$$X\times Y=\bigcup_{k=1}^\infty A_k$$

于是由刚证的性质(3) 知$X\times Y$是可数无限集(无限是显然的).

同理可证当X,Y中一个为可数无限集, 另一个为有限集, 以及两个均为有限集时, $X\times Y$ 也都是可数集. $\square$

【例】有理数集$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\,|\,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$ 是可数集. 实数集$\mathbb{R}$ 是不可数集.

【证】令$-\mathbb{N}=\{-n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, 则易见$-\mathbb{N}$是可数集, 因此$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup(-\mathbb{N})$ 是可数集. 令

$$A_n=\Big\{\frac{m}{n}\ \Big|\ m\in\mathbb{Z}\Big\},\quad n=1,2,3,....$$

则每个A_n都与$\mathbb{Z}$ 对等从而都是可数集. 易见$\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$. 因此由可数集性质(3)知$\mathbb{Q}$是可数集.

对于“实数集$\mathbb{R}$是不可数集”的证明, 可以使用反证法和闭区间套定理等，参见周民强的《实变函数论》 $\square$

• **集合的特征函数**. 设 X,A 为集合且 $A\subset X$. 定义二值函数 $\mathbf{1}_A:X\to\{0,1\}$ 如下

$$\mathbf{1}_A(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad x\in A\,,\\ 0 & \text{if}\quad x\notin A\,.\end{cases}$$

注意: 当 $A=\emptyset$ 为空集时有 $\mathbf{1}_{\emptyset}(x)\equiv 0$. 一般地对任一性质 P, 也可定义

$$\mathbf{1}_{\{P\}}=\begin{cases}1 & \text{if } P \text{ is true,}\\ 0 & \text{if } P \text{ is not true.}\end{cases}$$

例如

$$\mathbf{1}_{\{a<b\}}=\begin{cases}1 & \text{if } a<b,\\ 0 & \text{if } a\ge b\,.\end{cases}$$

特征函数的基本性质:

(1) 设 X_i 为集合, $A_i\subset X_i\,, i=1,2,...,d$. 则

$$\mathbf{1}_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_d}(x_1,x_2,...,x_d)=\mathbf{1}_{A_1}(x_1)\mathbf{1}_{A_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{A_d}(x_d)\,,\quad x_i\in X_i\,.$$

(2) 设 X 为集合并设下面出现的集合皆为 X 的子集. 则有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{A^c}(x)=1-\mathbf{1}_A(x)\,,\\
&\mathbf{1}_{A\cup B}(x)=\mathbf{1}_A(x)+\mathbf{1}_B(x)-\mathbf{1}_{A\cap B}(x)\,,\\
&\mathbf{1}_{A\cup B}(x)=\mathbf{1}_A(x)+\mathbf{1}_B(x)\quad \text{if}\quad A\cap B=\emptyset\,,\\
&B\subset\bigcup_{i=1}^n A_i\implies \mathbf{1}_B(x)\le\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{A_i}(x)\,,\\
&\mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)\le\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{A_i}(x)\,,\\
&\mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{A_i}(x)\quad\text{if}\quad A_i\cap A_j=\emptyset\quad\forall\, i\ne j\,,\\
&\mathbf{1}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_d}(x)=\mathbf{1}_{A_1}(x)\mathbf{1}_{A_2}(x)\cdots\mathbf{1}_{A_d}(x)\,,\\
&\mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=1-\prod_{i=1}^n(1-\mathbf{1}_{A_i}(x))\,,\\
&\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{A_i}(x)\ge k\iff x\in A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\ \text{ for some }\ i_1,i_2,...,i_k\,.
\end{aligned}$$

倒数第二个等式的推导如下: 考虑补集!! 我们有

$$1-\mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=\mathbf{1}_{(\cup_{i=1}^n A_i)^c}(x)=\mathbf{1}_{\cap_{i=1}^n A_i^c}(x)=\prod_{i=1}^n\mathbf{1}_{A_i^c}(x)=\prod_{i=1}^n(1-\mathbf{1}_{A_i}(x)).$$

移项即得所证等式。当然你还可以进一步把右边展开... 。

【集合与数的乘积公式】

【命题1.1.2(乘积公式).】

(a) 设$E_{i,j}$ 为一些集合, $j=1,2,...,n_i$; $i=1,2,...,d$. 则有

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{n_1}E_{1,j}\Big)\times\Big(\bigcup_{j=1}^{n_2}E_{2,j}\Big)\times\cdots\times\Big(\bigcup_{j=1}^{n_d}E_{d,j}\Big)=\bigcup_{j_1=1}^{n_1}\bigcup_{j_2=1}^{n_2}\cdots\bigcup_{j_d=1}^{n_d}E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{d,j_d}. \tag{1.1.1}$$

(b) 设$a_{i,j}$ 为一些数, $j=1,2,...,n_i$; $i=1,2,...,d$. 则有

$$\Big(\sum_{j=1}^{n_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{n_d}a_{d,j}\Big)=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}\,. \tag{1.1.2}$$

【证】(1.1.1)可从集合相等的定义直接导出. 下证(1.1.2). 对$a_{i,j}$的第一个下标i的个数d 用归纳法. 当$d=1$ 时, (1.1.2) 自动成立. 假设在下标i的个数为d时(1.1.2)成立, 则在下标i的个数为$d+1$时, 令

$$A=\sum_{j=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j}=\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j_{d+1}}.$$

则有

$$a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}A=a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j_{d+1}}=\sum_{j_{d+1}=1}^{m_{d+1}}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}a_{d+1,j_{d+1}}.$$

由归纳假设便有

$$\Big(\sum_{j=1}^{n_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j}\Big)=\Big(\sum_{j=1}^{n_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{n_d}a_{d,j}\Big)A$$
$$=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}A$$
$$=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}\left(\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{i,j_1}a_{i,j_2}\cdots a_{i,j_{d+1}}\right)=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{i,j_1}a_{i,j_2}\cdots a_{i,j_{d+1}}.$$

所以(1.1.2) 成立. □

§1.2. $\mathbb{R}^d$中开集的结构

【$\mathbb{R}^d$中的区间】 回忆: $\mathbb{R}^d$ 中的d维有界区间I 是d 个一维有界区间的乘积, 即

$$I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d]=\prod_{i=1}^d[a_i,b_i]\qquad(\text{有界闭区间}),$$

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_d,b_d)=\prod_{i=1}^d(a_i,b_i)\qquad(\text{有界开区间}),$$

$$I=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots\times[a_d,b_d)=\prod_{i=1}^d[a_i,b_i)\qquad(\text{左闭右开的有界区间})$$

$$I=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_d,b_d]=\prod_{i=1}^d(a_i,b_i]\qquad(\text{左开右闭的有界区间})$$

等等. 每个一维区间$[a_i,b_i],(a_i,b_i),[a_i,b_i),(a_i,b_i]$ 称为区间I 的边或棱. 由I 的边的左、右端点构成的向量$(a_1,a_2,...,a_d),(b_1,b_2,...,b_d)$ 称为区间I 的左、右端点.

定义I 的面积或体积为I 的各棱长的乘积, 即 (无论各条棱是否为闭区间)

$$|I|=|I^\circ|=|\overline{I}|=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_d-a_d)=\prod_{i=1}^d(b_i-a_i)\,.$$

注意: $\mathbb{R}^d$中的区间要求是非退化的, 即I的各棱长必须大于零! 因此总有$|I|>0$. □

• **区间的内部, 闭包和边界.** 设$d(\ge 2)$维有界区间I 的左、右端点为$(a_1,a_2,...,a_d)$, $(b_1,b_2,...,b_d)$. 则易见

$$I^\circ=\prod_{i=1}^d(a_i,b_i),\quad \overline{I}=\prod_{i=1}^d[a_i,b_i]$$

因此I的边界为

$$\partial I=\overline{I}\setminus I^\circ=\bigcup_{k=1}^d\left(\prod_{i=1}^d[a_i,b_i]\Big|_{\text{其中}[a_k,b_k]\text{被换成二元素集}\{a_k,b_k\}}\right).\qquad(1.2.1)$$

它说明边界∂I是由$2d$个$d-1$维有界闭区间组成的. 建议用$d=2,3$的情形(即平面矩形和三维长方体)检验一下.

• **区间的直径.** 不难看出d维有界区间I 的直径等于I 的左、右端点$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_d)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_d)$ 的距离, 也即等于I 的对角线之长:

$$\mathrm{diam}(I)=\mathrm{diam}(I^\circ)=\mathrm{diam}(\overline{I})=\Big(\sum_{i=1}^d(b_i-a_i)^2\Big)^{1/2}=|\mathbf{b}-\mathbf{a}|.$$

由此得到常用的估计式

$$\mathrm{diam}(I) \le \sqrt{d} \max_{1\le i\le d}(b_i - a_i).$$

• **区间的分划.** 设I 是以$(a_1, a_2, ..., a_d), (b_1, b_2, ..., b_d)$ 为左、右端点的有界区间. 给定任意$\delta > 0$ 我们对每个一维区间$[a_i, b_i]$ 做分划:

$$a_i = a_{i,0} < a_{i,1} < a_{i,2} < \cdots < a_{i,n_i} = b_i \quad 满足 \quad a_{i,j} - a_{i,j-1} < \frac{\delta}{\sqrt{d}},\ j = 1, 2, ..., n_i\,.$$

则有

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j=1}^{n_i} [a_{i,j-1},\ a_{i,j}]\,, \quad [a_i, b_i) = \bigcup_{j=1}^{n_i} [a_{i,j-1},\ a_{i,j})\,, \quad \text{etc.}$$

从而由并集的乘积公式得到I 的一个分划:

$$I = \bigcup_{j_1=1}^{n_1} \bigcup_{j_2=1}^{n_2} \cdots \bigcup_{j_d=1}^{n_d} I_{j_1,j_2,...,j_d} \tag{1.2.2}$$

其中

$$I_{j_1,j_2,...,j_d} = \prod_{i=1}^{d} [a_{i,j_i-1},\ a_{i,j_i}] \quad 或 \quad = \prod_{i=1}^{d} [a_{i,j_i-1},\ a_{i,j_i}) \qquad \text{etc.}$$

同时由数值和的乘积公式(1.1.2) 得到

$$|I| = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) = \prod_{i=1}^{d}\Big(\sum_{j=1}^{n_i}(a_{i,j} - a_{i,j-1})\Big) = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}\prod_{i=1}^{d}(a_{i,j_i} - a_{i,j_i-1})$$

即

$$|I| = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d} |I_{j_1,j_2,...,j_d}|\,. \tag{1.2.3}$$

由于$I_{j_1,j_2,...,j_d}$的每条棱的长度$< \delta/\sqrt{d}$, 故有

$$\mathrm{diam}(I_{j_1,j_2,...,j_d}) < \sqrt{d}\frac{\delta}{\sqrt{d}} = \delta.$$

这表明I 可以被分解成有限多个直径$< \delta$的区间的并.

此外易见当I 左闭右开时, 相应的子区间$I_{j_1,j_2,...,j_d}$(左闭右开) 是互不相交的. 对于一般情形, 诸子区间$I_{j_1,j_2,...,j_d}$ 的内部总是互不相交的, **也即$I_{j_1,j_2,...,j_d}$是互不重叠的.**

• **区间的平移、展缩、反射还是区间.**

设$E \subset \mathbb{R}^d$ 为任一集合. 对任意$h \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0$, 我们定义

$$E + h = h + E = \{x + h \,|\, x \in E\} \qquad (\ E的平移\,),$$

$$\lambda E = \{\lambda x \,|\, x \in E\} \qquad (E\ 的展缩\,),$$

$$-E = (-1)E = \{-x \,|\, x \in E\} \qquad (E\ 的反射\,).$$

一般地定义

$$\lambda E+h=\{\lambda x+h\,|\,x\in E\},\quad h\in\mathbb{R}^d,\ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{1.2.4}$$

现在设$E=I$是一个d维有界区间. 例如设$I=\prod_{i=1}^d[a_i,b_i)$ 是左闭右开的. 则对任意$h=(h_1,h_2,...,h_d)\in\mathbb{R}^d$ 和任意$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 有

$$\lambda I+h=\prod_{i=1}^d[\lambda a_i+h_i,\,\lambda b_i+h_i)\qquad \text{if } \lambda>0,$$

$$\lambda I+h=\prod_{i=1}^d(\lambda b_i+h_i,\,\lambda a_i+h_i]\qquad \text{if } \lambda<0.$$

这表明d维有界区间的平移、展缩、反射还是d维有界区间.

• **$\mathbb{R}^d$中开集的结构**

为了定义和计算一个集合的测度(长度、面积、体积等等), 我们需要知道最基本的集合—— 开集—— 的结构。

当$d=1$时, 由于$\mathbb{R}$ 是有序集, 我们在数学分析中已证明了$\mathbb{R}$ 中的开集可以被唯一地表示成可数个互不相交的开区间的并, 即

$$\text{若 } \mathcal{O}\subset\mathbb{R} \text{ 是开集, 则 } \mathcal{O}=\bigcup_{k\geq 1}(a_k,b_k),\quad \text{其中}(a_k,b_k)\text{是}\textbf{互不相交的}\text{开区间}.$$

因此这开集的长度可以被定义为等于这些开区间的长度之和(对于无界的开区间, 定义其长度为$+\infty$)。

当$d\geq 2$ 时, 由于$\mathbb{R}^d$是无序集, 向量的方向有无限多个, 因此关于$\mathbb{R}^d$中的开集的表示就没有统一结果。但是我们将证明$\mathbb{R}^d$ 中的开集可以被表示成可数无限多个左闭右开的正方形或方体的并, 而且可以要求这些正方形或方体是2-进正方形或2-进方体。于是开集的面积(或体积)就等于这些正方形(或方体)的面积(体积)之和。而对$\mathbb{R}^d$中其他类型的集合, 可以用开集逼近之, 其面积(或体积) 也就定义为这些开集的面积(或体积)的极限。由此可见弄清开集的结构是件很基本的事情。

• **2-进方体.** 形如

$$\prod_{i=1}^d\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big],\quad \prod_{i=1}^d\Big(\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big),\quad \prod_{i=1}^d\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big),\quad \prod_{i=1}^d\Big(\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big]$$

(其中$k, p_i \in \mathbb{Z}$)的d 维2-进区间分别称为2-进闭方体, 2-进开方体, 左闭右开的2-进方体和左开右闭的2-进方体。统称它们为2-进方体。如用Q 表示任意2-进方体, 用$l(Q)$ 表示Q 的边长, 则易见

$$l(Q) = 2^{-k}, \qquad |Q| = [l(Q)]^d, \qquad \mathrm{diam}(Q) = \sqrt{d}\, l(Q).$$

当$k = 0$, $p_i = 0\,(i = 1, 2, ..., n)$ 时, Q 即为单位方体, 即$Q = [0,1]^d, (0,1)^d, [0,1)^d, (0,1]^d$.

如上, 不难看出$\mathbb{R}^d$ 中只有可数无限多个2-进方体。事实上, 以左闭右开的2-进方体为例, 令$\mathscr{Q}^d$ 表示$\mathbb{R}^d$中的左闭右开的2-进方体的全体, 则对应关系

$$(k, p_1, p_2, ..., p_d) \mapsto Q = \prod_{i=1}^{d} \Big[\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\Big)$$

给出 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 到$\mathscr{Q}^d$ 到的$1-1$ 对应。因为$\mathbb{Z}^{d+1}$ 是可数集, 所以$\mathscr{Q}^d$ 是可数集。

【命题1.2.1(2-进方体的特性).】设$d \in \mathbb{N}$, Q_1, Q_2 为$\mathbb{R}^d$ 中任意两个左闭右开的2-进方体。则只有下列三种情形之一出现:

$$\text{或者} \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \quad \text{或者} \quad Q_1 \subset Q_2 \quad \text{或者} \quad Q_2 \subset Q_1.$$

进一步, 假设$Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, 则有以下关系:

$$l(Q_1) \le l(Q_2) \iff Q_1 \subset Q_2 \iff \overline{Q}_1 \subset \overline{Q}_2, \tag{1.2.5}$$

$$l(Q_1) = l(Q_2) \iff Q_1 = Q_2 \iff \overline{Q}_1 = \overline{Q}_2. \tag{1.2.6}$$

特别可知, 若$l(Q_1) = l(Q_2)$, 则有: $Q_1 \neq Q_2 \iff Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

【证】写

$$Q_1 = \prod_{i=1}^{d} \Big[\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\Big), \quad Q_2 = \prod_{i=1}^{d} \Big[\frac{q_i}{2^m}, \frac{q_i + 1}{2^m}\Big).$$

假设$Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ 且$l(Q_1) \le l(Q_2)$. 取一点$c = (c_1, c_2, ..., c_d) \in Q_1 \cap Q_2$, 则有

$$\frac{p_i}{2^k} \le c_i < \frac{p_i + 1}{2^k}, \quad \frac{q_i}{2^m} \le c_i < \frac{q_i + 1}{2^m}, \quad i = 1, 2, ..., d.$$

借助公共数c_i 传递不等式, 得到

$$\frac{p_i}{2^k} < \frac{q_i + 1}{2^m}, \quad \frac{q_i}{2^m} < \frac{p_i + 1}{2^k}, \quad i = 1, 2, ..., d$$

即

$$p_i < 2^{k-m}(q_i+1)\,, \qquad 2^{k-m}q_i < p_i+1\,, \quad i=1,2,...,d\,.$$

因$l(Q_1)\le l(Q_2)$ 即$2^{-k}\le 2^{-m}$ 也即$k\ge m$, 故2^{k-m}, p_i, q_i 皆为整数. 因此

$$p_i+1\le 2^{k-m}(q_i+1)\,, \qquad 2^{k-m}q_i\le p_i\,, \quad i=1,2,...,d$$

即

$$\frac{q_i}{2^m}\le\frac{p_i}{2^k}<\frac{p_i+1}{2^k}\le\frac{q_i+1}{2^m}\,, \qquad j=1,2,...,d\,. \tag{1.2.7}$$

因此$Q_1\subset Q_2$ 从而$\overline{Q}_1\subset\overline{Q}_2$.

反之假设$\overline{Q}_1\subset\overline{Q}_2$ 即

$$\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big]\subset\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{q_i}{2^m},\frac{q_i+1}{2^m}\Big]$$

则由乘积集合的包含关系有

$$\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big]\subset\Big[\frac{q_i}{2^m},\frac{q_i+1}{2^m}\Big], \quad i=1,2,...,d$$

这蕴含(1.2.7) 成立. 于是有$Q_1\subset Q_2$. 这就证明了(1.2.5). 由(1.2.5) 即得(1.2.6). □

根据实数的阿基米德原理知对任意$k\in\mathbb{Z}$, 实数轴$\mathbb{R}$ 可以被分解成互不相交的左闭右开的2-进区间$[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k})$ 的并:

$$\mathbb{R}=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\Big[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k}\Big)=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\Big[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k}\Big].$$

因$\mathbb{R}^d=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (d个)是$\mathbb{R}$的d次笛卡尔积, 故得到$\mathbb{R}^d$的2进方体分解:

$$\mathbb{R}^d=\bigcup_{(p_1,p_2,...,p_d)\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big)=\bigcup_{(p_1,p_2,...,p_d)\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big]. \tag{1.2.8}$$

由此易见, 对于$\mathbb{R}^d$ 中的任意点x的任意邻域$U(x)$, 只要$k\in\mathbb{N}$ 充分大, 就存在一个2 进闭方体$\prod_{i=1}^d[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}]\subset U(x)$ 使得$x\in\prod_{i=1}^d[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k})$. 根据这一性质容易相信, $\mathbb{R}^d$ 中任一非空开集Ω可以被分解成可数个互不相交的左闭右开的2-进方体的并, 而且可以要求这些方体的闭包也含于Ω 中. 详细来说我们有下列定理:

【定理1.2.2(开集的方体分解)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为任一非空开集, M 为一整数. 则存在一列**互不相交的** 左闭右开的2-进方体$\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足边长$l(Q_k)\le 2^{-M}$, 使得

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{Q}_k\,. \tag{1.2.9}$$

(对$d=2$的情形给出图示和解释.)

【证】令$\mathcal{Q}^{(k)}$ 表示棱长等于2^{-k} 的所有左闭右开2-进方体的集合, 即

$$\mathcal{Q}^{(k)}=\Big\{\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big)\;\Big|\;p_i\in\mathbb{Z}\,,i=1,2,...,d\Big\}.$$

我们把所有其闭包含于Ω 内的满足棱长$\le 2^{-M}$ 的最大的左闭右开的2-进方体做成一个集合$\mathcal{C}$, 即

$$\mathcal{C}=\Big\{Q^*\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}\;\Big|\;\overline{Q^*}\subset\Omega\text{ 且满足: 若 }Q\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}\text{ 且 }Q^*\subset\overline{Q}\subset\Omega,\text{ 则 }Q^*=Q\Big\}.$$

来证明

$$\mathcal{C}\text{ 中不同的元素不相交, 即若 }Q_1^*,Q_2^*\in\mathcal{C}\text{ 且 }Q_1^*\ne Q_2^*,\text{ 则 }Q_1^*\cap Q_2^*=\emptyset.\tag{1.2.10}$$

$$\Omega=\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*=\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}\overline{Q^*}\,.\tag{1.2.11}$$

(1.2.10) 的证明: 设$Q_1^*,Q_2^*\in\mathcal{C}$ 且$Q_1^*\ne Q_2^*$. 假如$Q_1^*\cap Q_2^*\ne\emptyset$, 则由**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 知二者有包含关系: 例如$Q_1^*\subset Q_2^*$, 从而有$Q_1^*\subset\overline{Q_2^*}\subset\Omega$. 而由$\mathcal{C}$的定义知这蕴含$Q_1^*=Q_2^*$, 矛盾于$Q_1^*\ne Q_2^*$. 因此必有$Q_1^*\cap Q_2^*=\emptyset$. 这证明了(1.2.10) 成立.

(1.2.11) 的证明: 显然有$\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*\subset\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}\overline{Q^*}\subset\Omega$. 为证(1.2.11), 只需证明$\Omega\subset\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 任取一点$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in\Omega$. 因$\Omega$ 是开集, 故存在$\delta>0$ 使得$B(x,\delta)\subset\Omega$. 选取$k_0\in\mathbb{Z}$ 充分大, 使得$k_0\ge M$且$\sqrt{d}\,2^{-k_0}<\delta$. 令$p_i=[2^{k_0}x^i]\,(=2^{k_0}x_i$ 的整数部分). 则有

$$p_i\le 2^{k_0}x_i<p_i+1\qquad\text{即}\qquad\frac{p_i}{2^{k_0}}\le x_i<\frac{p_i+1}{2^{k_0}}\,,\quad i=1,2,...,d\,.$$

因此

$$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in Q_0:=\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^{k_0}},\,\frac{p_i+1}{2^{k_0}}\Big)\,,\quad Q_0\in\mathcal{Q}^{(k_0)}\,.$$

因$\forall\,y\in\overline{Q}_0\implies|y-x|\le\mathrm{diam}(\overline{Q}_0)=\sqrt{d}\,2^{-k_0}<\delta\implies y\in B(x,\delta)$, 故$\overline{Q}_0\subset B(x,\delta)\subset\Omega$. 现在我们考虑整数子集

$$\mathbb{Z}_0=\{k\in\mathbb{Z}\mid k\ge M\text{ 且存在 }Q\in\mathcal{Q}^{(k)}\text{ 使得 }Q_0\subset\overline{Q}\subset\Omega\}\,.$$

由$k_0\ge M$ 和$\overline{Q}_0\subset\Omega$ 可知$k_0\in\mathbb{Z}_0$, 因此$\mathbb{Z}_0\ne\emptyset$. 又因$\mathbb{Z}_0$ 有下界M, 故$\mathbb{Z}_0$的最小数$m=\min\mathbb{Z}_0$ 存在且$m\ge M$. 于是存在$Q^*\in\mathcal{Q}^{(m)}$ 使得$Q_0\subset\overline{Q^*}\subset\Omega$. 由于$Q_0,Q^*$ 都是左闭右开的2-进方体, 故$Q_0\subset Q^*$. 我们断言 $Q^*\in\mathcal{C}$. 事实上首先我们

有$Q^* \in \bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 且$\overline{Q^*}\subset\Omega$. 其次任取 $Q\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 满足 $Q^*\subset\overline{Q}\subset\Omega$. 我们来证明$Q^*=Q$. 由$Q\in\bigcup\limits_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 知存在$k\ge M$ 使得 $Q\in\mathcal{Q}^{(k)}$. 根据$\mathbb{Z}_0$ 的定义易见$k\in\mathbb{Z}_0$. 因此$m\le k$. 另一方面, 由**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 知$Q^*\subset\overline{Q}$ 蕴涵$Q^*\subset Q$ 从而有$l(Q^*)\le l(Q)$, 即$2^{-m}\le 2^{-k}$. 所以$m\ge k$ 从而$m=k$. 因此$l(Q^*)=l(Q)$. 再由**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 即得$Q^*=Q$. 据$\mathcal{C}$的定义, 这就证明了$Q^*\in\mathcal{C}$. 于是由$x\in Q_0\subset Q^*$ 和$Q^*\in\mathcal{C}$ 即知$x\in\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 所以$\Omega\subset\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 所以(1.2.11)成立.
最后证明$\mathcal{C}$ 是可数无限集. 因$\mathbb{R}^d$ 中只有可数无限多个2-进方体, 故$\mathcal{C}$ 是可数集. 假设$\mathcal{C}$ 是有限集:

$$\mathcal{C}=\Big\{\prod_{i=1}^d[a_{i,k}\,,\,b_{i,k})\;\Big|\;k=1,2,...,N\Big\},\quad N\in\mathbb{N}.$$

考虑$\mathcal{C}$ 中诸方体各条棱的最小左端点(它的存在性由“有限”保证)：

$$a_{k_0}^{i_0}=\min\{a_{i,k}\mid 1\le i\le n,\,1\le k\le N\}.$$

对于这个k_0 我们有

$$x_0:=(a_{1,k_0},a_{2,k_0},...,a_{d,k_0})\in\prod_{i=1}^d[a_{i,k_0}\,,\,b_{i,k_0})\subset\Omega$$

因此存在$\delta>0$ 使得$B(x_0,\delta)\subset\Omega$. 如取$\varepsilon$ 满足$0<\varepsilon<\delta/\sqrt{d}$, 则有

$$(a_{1,k_0}-\varepsilon,a_{2,k_0}-\varepsilon,...,a_{d,k_0}-\varepsilon)\in B(x_0,\delta)\subset\Omega=\bigcup_{k=1}^N\prod_{i=1}^d[a_k^i\,,\,b_k^i).$$

于是对某个$k_1\in\{1,2,...,N\}$ 有$(a_{1,k_0}-\varepsilon,a_{2,k_0}-\varepsilon,...,a_{d,k_0}-\varepsilon)\in\prod_{i=1}^d[a_{i,k_1}\,,\,b_{i,k_1})$ 从而有$a_{i_0,k_0}-\varepsilon\in[a_{i_0,k_1}\,,\,b_{i_0,k_1})$ 这导致$a_{i_0,k_1}\le a_{i_0,k_0}-\varepsilon<a_{i_0,k_0}$, 它与$a_{i_0,k_0}$ 的最小性矛盾. 因此$\mathcal{C}$ 必是可数无限集. 将$\mathcal{C}$ 表为$\mathcal{C}=\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ 并代入(1.2.11) 即得(1.2.9) 并由(1.2.10) 知Q_k 互不相交. 命题证毕. $\square$

最后说明: 本讲义将用$\mathrm{dist}(x,y)=|x-y|$ 表示欧空间$(\mathbb{R}^d,|\cdot|)$上的距离函数, 因此对任意$x\in\mathbb{R}^d$和$A,B\subset\mathbb{R}^d$有

$$\mathrm{dist}(x,A)=\inf_{y\in A}|x-y|,\quad \mathrm{dist}(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}|x-y|.$$

其中对于空集$\emptyset$的情形, 定义$\mathrm{dist}(x,\emptyset)=+\infty,\mathrm{dist}(A,\emptyset)=\mathrm{dist}(\emptyset,B)=+\infty$.

【注】把上述**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 和**定理1.2.2(开集的方体分解)**中的“左闭右开”换成“左开右闭”, 照搬相同的论证可知结论照样成立。

• **看特征函数的一个典型应用——**

【命题1.2.3(区间的估计)】设I, I_k为$\mathbb{R}^d$中的有界区间, $k = 1, 2, ..., n$. 则有蕴含关系:

$$\text{若}\quad I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \text{则} \quad |I| \le \sum_{k=1}^{n} |I_k|.$$

$$\text{若}I_k\text{互不重叠且}\quad \bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset I \quad \text{则} \quad \sum_{k=1}^{n} |I_k| \le |I|.$$

$$\text{特别, 若}I_k\text{互不重叠且}\quad I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \text{则} \quad |I| = \sum_{k=1}^{n} |I_k|.$$

【证】我们将利用集合的特征函数和一元黎曼积分的基本性质. 我们先看$d = 1$ (一维)的情形. 取实数$\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ 使得$I, I_k \subset [\alpha, \beta], k = 1, 2, ..., n$. 不妨设$I, I_k$都是闭区间:

$$I = [a, b], \quad I_k = [a_k, b_k].$$

假设$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$. 来证明

$$b - a \le \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

由特征函数的性质易见

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x) \le \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[a_k,b_k]}(x), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

易见这些特征函数都在$[\alpha, \beta]$上黎曼可积(每个只有两个间断点). 因此对上述不等式两边取黎曼积分即得(根据积分的单调性、线性性等)

$$b - a = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x \le \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[a_k,b_k]}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{1}_{[a_k,b_k]}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

对于第二个不等式, 假设$[a_k, b_k]$ 互不重叠且$\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \subset [a, b]$. 来证明

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \le b - a.$$

事实上由(a_k, b_k) 互不相交且$\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset [a, b]$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(a_k,b_k)}(x) \le \mathbf{1}_{[a,b]}(x), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

两边去积分即得

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{1}_{(a_k,b_k)}(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(a_k,b_k)}(x)\mathrm{d}x \le \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x = b - a.$$

下面证明一般情形(维数$d \geq 1$). 取$0 < R < \infty$ 充分大使得

$$I, I_k \subset [-R, R]^d, \quad k = 1, 2, ..., d.$$

由d维区间的定义可写

$$I = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_d, \quad I_k = J_{1,k} \times J_{2,k} \times \cdots \times J_{d,k}$$

其中$I_i, J_{i,k}$ 分别是含于$[-R, R]$ 中的闭区间和开区间($i = 1, 2, ..., d$).

假设$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. 则由特征函数的性质有

$$\mathbf{1}_I(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{I_k}(x), \quad x \in [-R, R]^d.$$

而由 乘积集合的特征函数等于特征函数的乘积 知

$$\mathbf{1}_I(x) = \mathbf{1}_{J_1}(x_1)\mathbf{1}_{J_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d), \quad \mathbf{1}_{I_k}(x) = \mathbf{1}_{J_{1,k}}(x_1)\mathbf{1}_{J_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}}(x_d)$$

其中$x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in [-R, R]^d$, 因此上面不等式可写成

$$\mathbf{1}_{J_1}(x_1)\mathbf{1}_{J_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{J_{1,k}}(x_1)\mathbf{1}_{J_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}}(x_d). \tag{1.2.12}$$

固定任意$(x_2, x_3, ..., x_d) \in [-R, R]^{d-1}$, 不等式(1.2.12) 两边都是变量$x_1 \in [-R, R]$ 的Riemann 可积函数(因为$\mathbb{R}$中有界区间的特征函数在$\mathbb{R}$中任何有界闭区间上都是Riemann 可积的), 因此对不等式(1.2.12) 两边关于x_1 在$[-R, R]$ 上取Riemann 积分并注意

$$|I_1| = \int_{-R}^{R} \mathbf{1}_{J_1}(x_1)\mathrm{d}x_1, \quad |J_{1,k}| = \int_{-R}^{R} \mathbf{1}_{J_{1,k}}(x_1)\mathrm{d}x_1$$

得到

$$\begin{aligned}
&|J_1|\mathbf{1}_{J_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d) = \int_{-R}^{R} \mathbf{1}_{J_1}(x_1)\mathrm{d}x_1 \mathbf{1}_{J_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d) \\
&= \int_{-R}^{R} \mathbf{1}_{J_1}(x_1)\mathbf{1}_{J_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d)\mathrm{d}x_1 \leq \int_{-R}^{R} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{J_{1,k}}(x_1)\mathbf{1}_{J_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}}(x_d)\mathrm{d}x_1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{-R}^{R} \mathbf{1}_{J_{1,k}}(x_1)\mathrm{d}x_1 \right) \mathbf{1}_{J_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}}(x_d) = \sum_{k=1}^{n} |J_{1,k}|\mathbf{1}_{J_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}}(x_d).
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

同理固定任意$(x_3, ..., x_d) \in [-R, R]^{d-2}$, 对不等式(1.2.13)两边关于$x_2$ 在$[-R, R]$ 上取积分得到

$$|J_1||J_2|\mathbf{1}_{J_3}(x_3)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d) \leq \sum_{k=1}^{d} |J_{1,k}||J_{2,k}|\mathbf{1}_{J_{3,k}}(x_3)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}}(x_d).$$

如此操作下去(用归纳法原理), 在第d 步得到

$$|J_1||J_2|\cdots|J_d|\le\sum_{k=1}^n|J_{1,k}||J_{2,k}|\cdots|J_{d,k}|\qquad \text{即}\quad |I|\le\sum_{k=1}^n|I_k|.$$

所以命题中的第一个不等式成立.

最后设I_k互不重叠且$\bigcup_{k=1}^n I_k\subset I$. 则$I_k^\circ$互不相交且$\bigcup_{k=1}^n I_k^\circ\subset I$ 从而有

$$\sum_{k=1}^n\mathbf{1}_{I_k^\circ}(x)\le\mathbf{1}_I(x),\quad x\in[-R,R]^d.$$

注意

$$I_k^\circ=J_{1,k}^\circ\times J_{2,k}^\circ\times\cdots\times J_{d,k}^\circ$$

因此

$$\sum_{k=1}^n\mathbf{1}_{J_{1,k}^\circ}(x_1)\mathbf{1}_{J_{2,k}^\circ}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}^\circ}(x_d)\le\mathbf{1}_{J_1}(x_1)\mathbf{1}_{J_1}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d)$$

$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in[-R,R]^d$. 两边对$x_1\in[-R,R]$ 取积分有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n|J_{1,k}^\circ|\mathbf{1}_{J_{2,k}^\circ}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}^\circ}(x_d)=\sum_{k=1}^n\int_{-R}^R\mathbf{1}_{J_{1,k}^\circ}(x_1)\mathrm{d}x_1\mathbf{1}_{J_{2,k}^\circ}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}^\circ}(x_d)\\&\le\int_{-R}^R\mathbf{1}_{J_1}(x_1)\mathrm{d}x_1\mathbf{1}_{J_1}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d)=|J_1|\mathbf{1}_{J_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d).\end{aligned}$$

再对$x_2\in[-R,R]$取积分得到

$$\sum_{k=1}^n|J_{1,k}^\circ||J_{2,k}^\circ|\mathbf{1}_{J_{3,k}^\circ}(x_3)\cdots\mathbf{1}_{J_{d,k}^\circ}(x_d)\le|J_1||J_2|\mathbf{1}_{J_3}(x_3)\cdots\mathbf{1}_{J_d}(x_d).$$

据归纳法得到

$$\sum_{k=1}^n|J_{1,k}^\circ||J_{2,k}^\circ|\cdots|J_{d,k}^\circ|\le|J_1||J_2|\cdots|J_d|.$$

最后注意

$$|J_{1,k}^\circ||J_{2,k}^\circ|\cdots|J_{d,k}^\circ|=|J_{1,k}||J_{2,k}|\cdots|J_{d,k}|=|J_{1,k}\times J_{2,k}\times\cdots\times J_{d,k}|=|I_k|$$

即完成了证明. □

【**注**】我在课上只给出$d=1,2$的证明, 一般情形的证明留为作业。

作业题(2018.3.2)

1. 周民强《实变函数论》(2001年版, 北大出版社)P8: 1,2,3 (集合习题), P12: 1,2 (集合与函数), P16: 6,7 (集合与映射), P65: 8 (关于可数集) 【注：原来留的第6题是错的(感谢汪圣同学指出错误), 现改为该页第8题。】, P66:18 (关于紧集), P68: 29 (关于覆盖).

2. Stein 和Shakarchi 的实分析第一章第12 题(可以考虑闭包...).

3. 完成课上给出的命题(区间估计)的证明。

周民强的书因各版页码可能不同, 故将上面留的题目抄录如下:

周P8: 1,2,3 (集合习题) 证明下列命题:

1. 设A, B, E是全集X的子集, 则

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \iff B^c = E.$$

2. 设$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$, 则

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B_n.$$

3. 设$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$, 则

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n).$$

周P12: 1,2 (集合与函数) 试证明下列命题:

1. 设

$$A_n = \Big\{ \frac{m}{n} \ \Big|\ m \in \mathbb{Z} \Big\}, \quad B_n = \Big(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\Big), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n = (0, 1].$$

2. 设$f_n(x), f(x)$ 都是定义在$\mathbb{R}$上的实值函数且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

则对任意$t \in \mathbb{R}$ 有

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \Big\{ x \in \mathbb{R} \ \Big|\ f_n(x) < t + \frac{1}{k} \Big\}.$$

周P16: 6,7 (集合与映射) 试证明下列命题:

6. 设E是由10个两位数字的数形成的集合, 则E中必有两个不相交的子集, 其元素个数相同. (此题可能抄错了.)

7. 设$f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 满足

$$g(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in X.$$

则f是单射, g是满射.

周P65: 8 (关于可数集)

8. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的实值函数。假设$\mathbb{R}$中每一点都是f的局部极小值 (即对任意$x_0 \in \mathbb{R}$存在$\delta > 0$ 使得$f(x) \geq f(x_0)$ for all $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$). 证明f的值域是可数集, 即$f(\mathbb{R})$ 是可数集。【本题或许用选择公理能较快获证.】

周P66:18 (关于紧集, 注意连续映射把紧集映为紧集)

18. 设映射$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 连续, $E_k \subset \mathbb{R}^d$ 是非空紧集且递减: $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. 证明

$$f\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(E_k).$$

周P68: 29 (关于覆盖).

29. 设$K \subset \mathbb{R}^d$是有界闭集, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是K的开球覆盖(即每个B_α是$\mathbb{R}^d$中的开球且$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$). 试证明存在$\delta > 0$ 使得对每个$x \in K$ 都存在$\alpha \in A$使得$B(x, \varepsilon) \subset B_\alpha$.

这里$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d \,|\, |y - x| < \varepsilon\}$ (即是以x为中心、ε为半径的开球）.

§1.3. 广义实数运算

把正负无穷大$\pm\infty$ 加入实数集$\mathbb{R}$中, 我们称

$$\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=[-\infty,+\infty]$$

为广义实数集。在测度和积分论中, 不可避免地要与无穷大 $\pm\infty$ 打交道。例如无界直线的长度为正无穷大, 一些变量的极限是正(负)无穷大, 等等。

广义实数集中算术运算法则是在常义实数集的运算法则基础增加以下约定 (对于 $x\in\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
&-\infty<+\infty,\quad -(-\infty)=+\infty,\quad |\pm\infty|=+\infty,\\
&+\infty+(+\infty)=+\infty-(-\infty)=-(-\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad -\infty-(+\infty)=-\infty\,,\\
&(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,\qquad (+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty\,,\\
&x+\infty=+\infty+x=+\infty,\qquad x-\infty=-\infty+x=-\infty\,,\quad x\in\mathbb{R};\\
&x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=+\infty,\quad x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=-\infty\quad \text{if}\qquad x>0\,,\\
&x\cdot(+\infty=(+\infty)\cdot x=-\infty,\quad x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=+\infty\qquad \text{if}\qquad x<0\,,\\
&0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0\,.
\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

但**下列运算无定义：**

$$\text{“}+\infty-(+\infty)\text{”},\qquad \text{“}-\infty+(+\infty)\text{”},\qquad \text{“}\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{”}$$

注意以上约定与极限论 L’ Hospital 法则中的不定型问题有区别. 最大的区别是: 在广义实数运算约定中, $0\cdot(\pm\infty)=0$ 中的 0 是常数 0, 而不是无穷小变量!

对于$\frac{1}{0},\frac{1}{\pm\infty}$, 则根据具体问题来定义其值. 例如若所考虑的集合是非负实数的子集, 而0是这集合中的最小数, 则定义$\frac{1}{0}=\frac{1}{0+}=+\infty$. 又例如若$\frac{1}{\pm\infty}$不与无穷大做乘法运算, 则可定义$\frac{1}{\pm\infty}=0$.

【注】当上下文清楚时, 常用∞ 代表$+\infty$, 例如$a<\infty$ 只可能是表示$a<+\infty$, 又例如若n 是自然数, 则$n\to\infty$ 当然表示$n\to+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}$ 当然表示$\sum_{n=1}^{+\infty}$, 等等.

• **广义非负实数和上确界:** 设 $A\subset[0,+\infty]$ 非空. 若 $+\infty\in A$ 或 $A\subset[0,+\infty)$ 无上界, 则我们定义 $\sup A=+\infty$.

关于广义非负实数, 常用的一个性质是：单调增加的数列总有极限:

若 $0\le b_1\le b_2\le b_3\le\dots$, $b_n\in[0,+\infty]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\sup\limits_{n\ge1} b_n$.

事实上当一切 $b_n\in[0,+\infty)$ 时, 这归结为常义极限问题. 若存在 N 使得 $b_N=+\infty$, 则 $b_n=+\infty\ \forall\, n\ge N$. 此时当然有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty=\sup\limits_{n\ge1} b_n$.

对于广义非负实数, 加法永远有定义. 在测度与积分中经常用到广义正项级数, 其定义与常义正项级数相同, 即为部分和的极限：

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\,,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}:=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\,,\quad a_k,\,a_{i,j}\in[0,+\infty]\,.$$

易见当 $a_k\in[0,+\infty]\,(k=1,2,\dots)$ 中有一项为 $+\infty$ 时, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty$.

【命题1.3.1(广义正项级数的求和及换序不变性)】设$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ 为广义非负实数列. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\sigma(k)}\,,\qquad \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j})=\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j})=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}$$

这里 $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}=\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的任一排列. 让一些 a_k 和 $a_{i,j}$ 等于 0, 上式包括了任意有限求和的情形.

【证】第一个等式的证明与常义正项级数的情形相同. 下证第二个等式. 由通项非负易见若某一项 $a_{i,j}=+\infty$, 则所有求和都等于 $+\infty$, 这时所证等式成立. 以下假设 $0\le a_{i,j}<\infty\ \forall\, i,j\ge1$. 计算

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\,.$$

注意一切 $a_{i,j}\ge0$, 得到

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\Big)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\,.$$

再令 $n\to\infty$ 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\,.$$

同理由

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\Big)\le\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big)$$

得到反向不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}=\lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\le\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}$. 同理可证 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{i,j})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}$. □

• **广义实数集的上下确界和上下极限:** 对于任一非空广义实数集合 $A\subset[-\infty,+\infty]$, 若 $\infty\in A$, 或 $A\subset[-\infty,+\infty)$ 但 A 没有有限的上界, 则定义 $\sup A=+\infty$; 若 $-\infty\in A$, 或 $A\subset(-\infty,+\infty]$ 但 A 没有有限的下界, 则定义 $\inf A=-\infty$.

对任一数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[-\infty,+\infty]$, 部分序列 $n\mapsto\{a_k\}_{k\ge n}$ 是单调的：

$$\{a_k\}_{k\ge n+1}\subset\{a_k\}_{k\ge n}\,,\quad n=1,2,3,...$$

因此

$$\sup_{k\ge n+1}a_k\le\sup_{k\ge n}a_k\,,\quad \inf_{k\ge n+1}a_k\ge\inf_{k\ge n}a_k\,,\quad n=1,2,3,....$$

我们称

$$\limsup_{n\to\infty}a_n:=\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{k\ge n}a_k\Big),\qquad \liminf_{n\to\infty}a_n:=\lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{k\ge n}a_k\Big)$$

分别为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限和下极限.

与实数集性质相同, 我们称广义实数列 $\{a_n\}$ 有极限如果

$$\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n\,.$$

这时这个公共值即定义为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限, 记做 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n:=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$.

• **函数列的情形:** 设$f_k:E\to[-\infty,+\infty]$ 是 E 上一列广义实值函数. 对每一固定的 $x\in E$, $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 就是一个广义实数列. 我们说 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛, 如果

$$\limsup_{k\to\infty}f_k(x)=\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\qquad\forall\,x\in E\,.$$

此时我们称这个公共极限

$$f(x):=\lim_{k\to\infty}f_k(x):=\limsup_{k\to\infty}f_k(x)=\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\qquad\forall\,x\in E\,.$$

为 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上的极限函数. 这里有两种情形：一种是利用函数列来构作函数, 即这函数是函数列的极限函数, 另一种刚好相反：对于已知函数, 构作满足一定条件的

函数列使得此函数列处处收敛于这个已知函数. 无论哪种情形, 说 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛于 f 是指 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \varphi(x) \qquad \forall\, x \in E\,.$$

注意这里 "收敛" 只是习惯说法, 事实上它包括了在某些点 x 处的极限等于 $+\infty, -\infty$ 的情形.

【例】

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\cos(\pi x)|^k}{1-|\cos(\pi x)|^k} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \\ +\infty & \text{if} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

在这个例子中我们已定义$\frac{1}{0} = \frac{1}{0+} = +\infty$, 这是因为$1-|\cos(\pi x)|^k \ge 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

§1.4. Lebesgue 外测度和测度

Lebesgue测度论是古典几何体的长度、面积、体积等丈量法的推广: 对欧空间中大量的一般点集也可以赋予测度。测度的主要特征是可加性, 即整体的测度等于部分测度之和。由于并非每个点集的子集之间具有可加性(见后面不可测集的例子), 因此必须对点集进行挑选，使得挑选后的点集类具有可加性。做这件事通常分两步: 第一步先对任意点集建立外测度, 第二步：在外测度的基础上增加一个限制(例如通常的**Carathéodory 条件** 或本教材中考虑的**开集逼近** (二者是等价的)), 使得由满足这个限制的点集组成的类具有可加性.

以下我们用$\bigcup_{k\ge1}, \sum_{k\ge1}$ 表示**可数并、可数和**, 即

$$\bigcup_{k\ge1} = \bigcup_{k=1}^{n} \text{ 或 } = \bigcup_{k=1}^{\infty}; \qquad \sum_{k\ge1} = \sum_{k=1}^{n} \text{ 或 } = \sum_{k=1}^{\infty}.$$

【定义($\mathbb{R}^d$上的Lebesgue 外测度)】设$E\subset\mathbb{R}^d$. 称广义非负实数

$$m^*(E) = \inf\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k| \;\Big|\; I_k\subset\mathbb{R}^d \text{ 是有界区间且 } \bigcup_{k\ge1} I_k\supset E\Big\}$$

为集合E的d维Lebesgue 外测度, 简称外测度. □

为了应用方便我们先给出

【命题1.4.1(外测度的等价定义)】设$E\subset\mathbb{R}^d, \delta>0$. 令

$$m^*_{\rm open}(E) = \inf\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k| \;\Big|\; I_k\subset\mathbb{R}^d \text{ 是有界开区间且 } \bigcup_{k\ge1} I_k\supset E\Big\},$$
$$m^*_{\delta}(E) = \inf\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k| \;\Big|\; I_k\subset\mathbb{R}^d \text{ 是有界区间且}{\rm diam}(I_k)<\delta,\ \bigcup_{k\ge1} I_k\supset E\Big\},$$
$$m^*_{Q}(E) = \inf\Big\{\sum_{k\ge1}|Q_k| \;\Big|\; Q_k\subset\mathbb{R}^d \text{ 是有界闭方体且 } \bigcup_{k\ge1} Q_k\supset E\Big\}.$$

则有

$$m^*(E) = m^*_{\rm open}(E) = m^*_{\delta}(E) = m^*_{Q}(E).$$

为证这一命题, 先证一个引理.

【引理1.4.2(乘积的连续性)】设a_i, b_i 为实数或复数$(i=1,2,...,d)$. 则

$$\Big|\prod_{i=1}^{d} a_i - \prod_{i=1}^{d} b_i\Big| \le M^{d-1}\sum_{i=1}^{d}|a_i-b_i| \tag{1.4.1}$$

其中$M=\max\limits_{1\le i\le d}\{|a_i|\,,|b_i|\}$.

【证】我们对乘积因子个数d用归纳法. 当$d=1$ 时不等式(1.4.1) 是显然的, 其中规定$0^0=1$. 假设不等式(1.4.1) 对于因子个数$=d$ 时成立. 记$M_k=\max\limits_{1\le i\le k}\{|a_i|\,,|b_i|\}$. 做分拆

$$\prod_{i=1}^{d+1}a_i-\prod_{i=1}^{d+1}b_i=\Big(\prod_{i=1}^{d}a_i-\prod_{i=1}^{d}b_i\Big)a_{d+1}+\Big(\prod_{i=1}^{d}b_i\Big)(a_{d+1}-b_{d+1})$$

则由归纳假设得到

$$\begin{aligned}\Big|\prod_{i=1}^{d+1}a_i-\prod_{i=1}^{d+1}b_i\Big|&\le(M_d)^{d-1}\Big(\sum_{i=1}^{d}|a_i-b_i|\Big)|a_{d+1}|+(M_d)^d|a_{d+1}-b_{d+1}|\\&\le(M_{d+1})^d\Big(\sum_{i=1}^{d}|a_i-b_i|+|a_{d+1}-b_{d+1}|\Big)=(M_{d+1})^d\sum_{i=1}^{d+1}|a_i-b_i|\,.\end{aligned}$$

由归纳法原理, (1.4.1) 普遍成立. □

【外测度定义等价性的证明】首先由下确界的定义(集合越小其下确界越大)有

$$m^*(E)\le m^*_{\rm open}(E),\quad m^*(E)\le m^*_\delta(E),\quad m^*(E)\le m^*_Q(E).$$

下证反向不等式也成立:

$$m^*_{\rm open}(E)\le m^*(E),\quad m^*_\delta(E)\le m^*(E),\quad m^*_Q(E)\le m^*(E).$$

任取$E\subset\mathbb{R}^d$. 若$m^*(E)=+\infty$, 则反向不等式显然成立。设$m^*(E)<\infty$. 由$m^*(E)$ 的定义, 对任意$\varepsilon>0$ (可设$\varepsilon<1$), 存在E 的一个有界区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

写$\overline{I_k}=\prod_{i=1}^d[a_{k,i},b_{k,i}]$. 考虑包含$I_k$ 的开区间J_k:

$$J_k=\prod_{i=1}^d(a_{k,i}-\delta_k,\,b_{k,i}+\delta_k)\,,\quad \delta_k=\frac{1}{[\max_{1\le i\le d}(b_{k,i}-a_{k,i}+1)]^{d-1}}\cdot\frac{\varepsilon}{d\cdot2^{k+1}}\,,\quad k\ge1\,.$$

则$\{J_k\}_{k\ge1}$ 是E 的一个有界开区间覆盖。而由**引理1.4.2(乘积的连续性)** 有

$$\begin{aligned}&|J_k|-|I_k|=\prod_{i=1}^d(b_{k,i}-a_{k,i}+2\delta_k)-\prod_{i=1}^d(b_{k,i}-a_{k,i})\\&\le[\max_{1\le i\le d}(b_{k,i}-a_{k,i}+1)]^{d-1}\cdot d\cdot2\delta_k=\frac{\varepsilon}{2^k}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$m^*_{\text{open}}(E) \le \sum_{k\ge1}|J_k| \le \sum_{k\ge1}|I_k| + \sum_{k\ge1}\frac{\varepsilon}{2^k} < m^*(E)+\varepsilon+\varepsilon = m^*(E)+2\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$的任意性, 令$\varepsilon\to0+$知$m^*_{\text{open}}(E)\le m^*(E)$。

又对每个区间I_k, 根据上节中的**区间的分划**知, 存在正整数N_k使得I_k 被分割成N_k个互不重叠的子区间的并: $I_k=\bigcup_{j=1}^{N_k}I_{k,j}$, $|I_k|=\sum_{j=1}^{N_k}|I_{k,j}|$ 且满足$\text{diam}(I_{k,j})<\delta, j=1,2,...,N_k$. 易见$\{I_{k,j}\,|\,k\ge1, j=1,2,...,N_k\}$是$E$的可数覆盖: $\bigcup_{k\ge1}\bigcup_{j=1}^{N_k}I_{k,j}=\bigcup_{k\ge1}I_k\supset E$. 于是有

$$m^*_\delta(E)\le\sum_{k\ge1}\sum_{j=1}^{N_k}|I_{k,j}|=\sum_{k\ge1}\Big(\sum_{j=1}^{N_k}|I_{k,j}|\Big)=\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

再由$\varepsilon>0$的任意性即知$m^*_\delta(E)\le m^*(E)$. 以上证明了$m^*(E)=m^*_{\text{open}}(E)=m^*_\delta(E)$.

最后证明$m^*_Q(E)\le m^*(E)$。我们将提前使用下面将证明的**可加性**和**外测度保持区间体积**的性质。不难看到这样做是安全的因为在后面的证明中我们将只用到已证明的性质, 不会有逻辑循环。

对任意$\varepsilon>0$, 由$m^*(E)=m^*_{\text{open}}(E)$ 知存在E的有界开区间覆盖$\bigcup_{k\ge1}I_k\supset E$使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

对于开集$\bigcup_{k\ge1}I_k$, 由**定理1.2.2(开集的方体分解)** 知存在可数多个互不重叠的2-进闭方体Q_j 使得$\bigcup_{k\ge1}I_k=\bigcup_{j=1}^\infty Q_j$. 于是由$Q_j$的可测性和互不重叠以及$m^*(Q_j)=|Q_j|$和$m^*_Q(E)$的定义得到

$$\begin{aligned}m^*_Q(E)&\le\sum_{j=1}^\infty|Q_j|=\sum_{j=1}^\infty m^*(Q_j)=m^*\Big(\bigcup_{j=1}^\infty Q_j\Big)\\&=m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}I_k\Big)\le\sum_{k\ge1}m^*(I_k)=\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.\end{aligned}$$

再由$\varepsilon>0$的任意性即得$m^*_Q(E)\le m^*(E)$. $\square$

【命题1.4.3(Lebesgue 外测度的基本性质)】

(a) $m^*(\emptyset)=0$, 即空集的外测度为零.

(b) 单调性:

$$\text{若}A\subset B,\ \text{则}\quad m^*(A)\le m^*(B).$$

(c) 次可加性: 对任意可数多个$E_k\subset\mathbb{R}^d$ 有

$$m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}E_k\Big)\le\sum_{k\ge1}m^*(E_k).$$

(d) 隔离可加性: 对任意$A,B\subset\mathbb{R}^d$,

$$\text{若}\quad \mathrm{dist}(A,B)>0,\quad \text{则}\quad m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

(e) 保持区间体积:

$$\text{对任意有界区间}\ I\subset\mathbb{R}^d\ \text{都有}\quad m^*(I)=|I|.$$

【证】先证(b),(c). 设$B\supset A$. 则有

$$\begin{aligned}&\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\ \Big|\ I_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界区间且}\ \bigcup_{k\ge1}I_k\supset B\Big\}\\ \subset&\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\ \Big|\ I_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界区间且}\ \bigcup_{k\ge1}I_k\supset A\Big\}\end{aligned}$$

因此由下确界的性质知

$$m^*(B)\ge m^*(A).$$

为证次可加性不等式, 可以假设$\sum_{k\ge1}m^*(E_k)<\infty$, 否则不等式显然成立。对任意$\varepsilon>0$ 和任意$k\ge1$, 由$m^*(E_k)$和下确界的定义, 存在可数多个有界区间$\{I_{k,j}\}_{j\ge1}$ 满足$\bigcup\limits_{j\ge1}I_{k,j}\supset E_k$ 使得

$$\sum_{j\ge1}|I_{k,j}|<m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

易见$\{I_{k,j}\}_{k\ge1,j\ge1}$覆盖了$E$, 即

$$\bigcup_{k\ge1,j\ge1}I_{k,j}=\bigcup_{k\ge1}\bigcup_{j\ge1}I_{k,j}\supset\bigcup_{k\ge1}E_k.$$

因此由m^*的定义有

$$m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}E_k\Big)\le\sum_{k\ge1,j\ge1}|I_{j,k}|=\sum_{k\ge1}\Big(\sum_{j\ge1}|I_{k,j}|\Big)<\sum_{k\ge1}\Big(m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\Big)\le\sum_{k\ge1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon.$$

以上用到非负二重级数求和的累次求和可换序的性质. 据$\varepsilon > 0$的任意性知$m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

来证(a). 因空集$\emptyset$是任何集合的子集, 故对任一点$x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0d}) \in \mathbb{R}^d$ 都有$\emptyset \subset \{x_0\}$ 后者为单点集. 于是由m^*的单调性有$m^*(\emptyset) \le m^*(\{x_0\})$. 于是只需证明$m^*(\{x_0\}) = 0$. 而这是显然的：对任意$\varepsilon > 0$ 有

$$\{x_0\} \subset \prod_{i=1}^{d}(x_{0i} - \varepsilon, x_{0i} + \varepsilon)$$

据外测度的定义得

$$m^*(\{x_0\}) \le \Big|\prod_{i=1}^{d}(x_{0i} - \varepsilon, x_{0i} + \varepsilon)\Big| = (2\varepsilon)^d.$$

令$\varepsilon \to 0+$ 即知$m^*(\{x_0\}) = 0$.

下证(c)(隔离可加性): 设$A, B \subset \mathbb{R}^d$满足$\mathrm{dist}(A, B) > 0$. 由次可加性有$m^*(A \cup B) \le m^*(A) + m^*(B)$. 为证反向不等式$m^*(A) + m^*(B) \le m^*(A \cup B)$ 可以假定A, B 皆非空且$m^*(A \cup B) < \infty$ (否则显然成立).

取$0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$. 对任意$\varepsilon > 0$, 由$m^* = m^*_\delta$ 知存在$A \cup B$ 的一个区间可数覆盖$\{I_k\}_{k\ge 1}$ 满足$\mathrm{diam}(I_k) < \delta$ 使得

$$\sum_{k\ge 1} |I_k| < m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

令

$$\mathbb{N}_A = \{k \mid I_k \cap A \ne \emptyset\}, \quad \mathbb{N}_B = \{k \mid I_k \cap B \ne \emptyset\}.$$

则由$0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$ 和$\mathrm{diam}(I_k) < \delta$ 易证

$$\mathbb{N}_A \cap \mathbb{N}_B = \emptyset \qquad \text{从而有} \quad A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}_A} I_k, \quad B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}_B} I_k.$$

[自补证明, 反证法.] 于是得到

$$m^*(A) + m^*(B) \le \sum_{k\in\mathbb{N}_A} |I_k| + \sum_{k\in\mathbb{N}_B} |I_k| \le \sum_{k\ge 1} |I_k| < m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

令$\varepsilon \to 0$ 即得反向不等式$m^*(A) + m^*(B) \le m^*(A \cup B)$. 所以$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

最后证(e) (保持区间体积): 设$I \subset \mathbb{R}^d$为任一有界区间. 因区间I 覆盖了I自己, 故由Lebesgue外测度的定义知$m^*(I) \le |I|$. 为证反向不等式, 先设I是闭区间. 对任意$\varepsilon > 0$, 由$m^* = m^*_{\mathrm{open}}$知存在$I$的有界开区间可数覆盖$\{I_k\}_{k\ge 1}$使得

$$\sum_{k\ge 1} |I_k| < m^*(I) + \varepsilon.$$

因I是紧集(因I是有界闭区间), 故由紧集的有限覆盖定理知存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k.$$

于是据**命题1.2.3(区间的估计)** 有

$$|I| \le \sum_{k=1}^{N} |I_k| \le \sum_{k\ge 1} |I_k| < m^*(I) + \varepsilon.$$

据$\varepsilon > 0$的任意性即得$|I| \le m^*(I)$. 对于一般情形, 将I 表为$I = \prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i)$或$\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i)$ 等等. 考虑I的内闭逼近:

$$I_n = \prod_{i=1}^{d}\Big[a_i + \frac{1}{2n}, b_i - \frac{1}{2n}\Big], \quad \frac{1}{n} < \max_{1\le i\le d}(b_i - a_i).$$

则由闭区间的结果和m^*的单调性有

$$\prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i - \frac{1}{n}) = |I_n| \le m^*(I_n) \le m^*(I).$$

令$n \to \infty$即得

$$|I| = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) = \lim_{n\to\infty} |I_n| \le m^*(I).$$

因此反向不等式$|I| \le m^*(I)$也成立。 $\square$

【注】由Lebesgue外测度m^*保持区间体积 易证两个常用性质(学生自证):

(1) 若E有内点, 即$E^\circ \ne \emptyset$, 则$m^*(E) > 0$.

(2) 若E有界, 则$m^*(E) < \infty$.

- **Lebesgue 可测集和测度**

为了兼顾一般测度论的学习, 我们对可测集给出**两个等价的定义**。

【可测集和测度的定义】设$E \subset \mathbb{R}^d$.

定义1 —— 开集逼近: 若对任意$\varepsilon > 0$ 存在开集$\mathcal{O} \supset E$使得

$$m^*(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon$$

则称E 是一个d维Lebesgue 可测集, 简称为d维L-可测集或L-可测集。

定义2 —— Carathéodory 条件: 设$E \subset \mathbb{R}^d$. 若E 满足Carathéodory 条件, 即

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \qquad \forall T \subset \mathbb{R}^d \tag{C}$$

则称E是一个d维Lebesgue 可测集, 简称为d维L-可测集或L-可测集。 条件(C)中的集合T称为检验集(testing set)。

$\mathbb{R}^d$中的Lebesgue 可测集的全体记作$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 外测度$m^*$在$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上的限制$m = m^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$, 即

$$m(E) = m^*(E), \qquad E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

称为$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上的Lebesgue 测度, 简称为$d$维Lebesgue 测度 或 $\mathbb{R}^d$上的L-测度 $\square$

定义1 给出了可测集的结构: 可测集是开集的极限; 而定义2则迫使可测集具有可加性, 预示了可测集类具有可加性。下面证明这两个定义是等价的。先证一个引理:

【引理1.4.6】设集合$E_k \subset \mathbb{R}^d$ 和$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 满足

$$E_k \subset E_{k+1}, \quad \mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) > 0, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

则有

$$m^*(E) = \lim_{k \to \infty} m^*(E_k).$$

【证】首先由$E_k \nearrow$和外测度的单调性有

$$m^*(E_k) \le m^*(E_{k+1}) \le m^*(E), \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

因此极限$\lim\limits_{k \to \infty} m^*(E_k)$存在且$\le m^*(E)$.

若$\lim\limits_{k \to \infty} m^*(E_k) = +\infty$, 则这蕴含$m^*(E) = +\infty$ 从而有$\lim\limits_{k \to \infty} m^*(E_k) = +\infty = m^*(E)$.

下设$\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) < \infty$. 由外测度的单调性知$m^*(E_k) \le \lim\limits_{j\to\infty} m^*(E_j) < \infty, k = 1,2,3,....$ 因此在下面推导中没有$+\infty$ 参与运算. 令

$$E_0 = \emptyset, \quad A_k = E_k \setminus E_{k-1}, \quad k = 1,2,3,\dots.$$

则由$E_k \nearrow$ 易见有

$$E = E_k \cup \bigcup_{j=k+1}^{\infty} A_j$$

从而由外测度的次可加性有

$$m^*(E) \le m^*(E_k) + \sum_{j=k+1}^{\infty} m^*(A_j), \quad k = 1,2,3,\dots.$$

下面我们将证明正项级数$\sum\limits_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < \infty$ (即级数收敛). 如果此事成立, 则由级数收敛蕴含其尾巴趋于零: $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} m^*(A_j) = 0$, 得到

$$m^*(E) \le \lim_{k\to\infty} m^*(E_k) + \lim_{k\to\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} m^*(A_j) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k).$$

即反向不等式也成立. 于是等式$m^*(E) = \lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)$成立.

下证$\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$收敛. 因$A_k \subset E_k, A_{k+2} \subset E \setminus E_{k+1}$, 故由引理假设有

$$\mathrm{dist}(A_k, A_{k+2}) \ge \mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) > 0.$$

于是由m^*的隔离可加性有

$$m^*(A_k \cup A_{k+2}) = m^*(A_k) + m^*(A_{k+2}), \quad k = 1,2,3,\dots.$$

这给出

$$m^*(A_{2k-1} \cup A_{2k+1}) = m^*(A_{2k-1}) + m^*(A_{2k+1}), \quad k = 1,2,3,\dots,$$

$$m^*(A_{2k} \cup A_{2k+2}) = m^*(A_{2k}) + m^*(A_{2k+2}), \quad k = 1,2,3,\dots.$$

假设对于$n \in \mathbb{N}$ 已有

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1}\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k-1}), \qquad m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k}). \tag{1.4.2}$$

则由

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1} \subset E_{2n-1}, \quad A_{2n+1} \subset E \setminus E_{2n},$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k} \subset E_{2n}, \quad A_{2n+2} \subset E \setminus E_{2n+1}$$

知

$$\operatorname{dist}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1},\, A_{2n+1}\Big) \ge \operatorname{dist}(E_{2n-1}, E \setminus E_{2n}) > 0,$$

$$\operatorname{dist}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k},\, A_{2n+2}\Big) \ge \operatorname{dist}(E_{2n}, E \setminus E_{2n+1}) > 0,$$

于是由m^*的隔离可加性和归纳假设有

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_{2k-1}\Big) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1}\Big) + m^*(A_{2n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(A_{2k-1}),$$

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_{2k}\Big) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}\Big) + m^*(A_{2n+2}) = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(A_{2k}).$$

据归纳法原理, (1.4.2)对所有$n \in \mathbb{N}$成立.

由(1.4.2)和外测度的单调性有

$$\sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k-1}) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1}\Big) \le m^*(E_{2n-1}) \le \lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k}) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}\Big) \le m^*(E_{2n}) \le \lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) \le 2 \lim_{k\to\infty} m^*(E_k) < \infty.$$

这证明了级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$收敛. $\square$

【可测集两个定义的等价性的证明:】

先证明开集满足Carathéodory 条件(C). 任取开集$\mathcal{O} \in \mathbb{R}^d$。令$F = \mathcal{O}^c = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$. 则$F$是$\mathbb{R}^d$中的闭集。对任意$T \subset \mathbb{R}^d$, 令[1]

$$E = T \setminus F, \quad E_k = \{x \in E \mid \operatorname{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k}\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

则有

$$E_k \subset E_{k+1},\ \ k = 1, 2, 3, ...; \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

[1] **当**$F = \emptyset$**(空集)时，我们定义**$\operatorname{dist}(x, \emptyset) = +\infty$

事实上显然有$E_k \subset E_{k+1} \subset E$, $k = 1,2,3,\ldots$. 这蕴含$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset E$. 而对任意$x \in E$有$x \notin F$. 因$F$ 是闭集, 故有$\mathrm{dist}(x,F) > 0$ 从而对于自然数$k > \frac{1}{\mathrm{dist}(x,F)}$ 有$\mathrm{dist}(x,F) > \frac{1}{k}$, 因此$x \in E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 所以$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 所以$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

对任意$x \in E_k, y \in E \setminus E_{k+1}$, 由定义有$\mathrm{dist}(x,F) \ge \frac{1}{k}, \mathrm{dist}(y,F) < \frac{1}{k+1}$. 因此

$$|x-y| \ge |\mathrm{dist}(x,F) - \mathrm{dist}(y,F)| \ge \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

因此

$$\mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) = \inf_{x \in E_k, y \in E \setminus E_{k+1}} |x-y| \ge \frac{1}{k(k+1)} > 0.$$

据引理1.4.6 知

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

又因

$$\mathrm{dist}(E_k, T \cap F) = \inf_{x \in E_k} \mathrm{dist}(x, T \cap F) \ge \inf_{x \in E_k} \mathrm{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k} > 0$$

故由m^*的隔离可加性有

$$m^*(E_k \cup (T \cap F)) = m^*(E_k) + m^*(T \cap F).$$

注意到$E_k \cup (T \cap F) \subset T$, 因此

$$m^*(T) \ge m^*(E_k) + m^*(T \cap F) \to m^*(E) + m^*(T \cap F) \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

因此再由$E = T \setminus F = T \cap \mathcal{O}$, $T \cap F = T \cap \mathcal{O}^c$ 得到

$$m^*(T) \ge m^*(T \cap \mathcal{O}) + m^*(T \cap \mathcal{O}^c) \ge m^*(T).$$

所以$m^*(T \cap \mathcal{O}) + m^*(T \cap \mathcal{O}^c) = m^*(T)$, 即$\mathcal{O}$满足条件(C).

现在设$E \subset \mathbb{R}^d$ 满足定义1, 即E可被开集逼近. 来证E 满足条件(C). 任取$T \subset \mathbb{R}^d$, 由

$$T = (T \cap E) \cup (T \cap E^c)$$

和外测度的次可加性有$m^*(T) \le m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$. 来证反向不等式也成立:

$$m^*(T) \ge m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

取开集序列$\mathcal{O}_n \supset E$ 使得

$$\mathcal{O}_n \supset E, \quad m^*(\mathcal{O}_n \setminus E) < \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

因$\mathcal{O}_n$满足条件(C), 故有

$$m^*(T) = m^*(T\cap\mathcal{O}_n) + m^*(T\cap\mathcal{O}_n^c) \ge m^*(T\cap E) + m^*(T\cap\mathcal{O}_n^c).$$

易见

$$T\cap E^c \subset (T\cap\mathcal{O}_n^c)\cup(\mathcal{O}_c\setminus E) \quad 即 \quad T\setminus E\subset (T\setminus\mathcal{O}_n)\cup(\mathcal{O}_c\setminus E)$$

因此

$$m^*(T\cap E^c) \le m^*(T\cap\mathcal{O}_n^c) + m^*(\mathcal{O}_c\setminus E) < m^*(T\cap\mathcal{O}_n^c) + \frac{1}{n}$$

于是得到

$$m^*(T) \ge m^*(T\cap E) + m^*(T\cap E^c) - \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,3,\dots.$$

令$n\to\infty$即得反向不等式. 所以E满足条件(C).

反之设E满足条件(C), 来证E可被开集逼近. 先设$m^*(E)<\infty$. 对任意$\varepsilon>0$, 存在有界开区间覆盖$\bigcup_{k\ge1} I_k \supset E$ 使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k| < m^*(E)+\varepsilon.$$

令$\mathcal{O}=\bigcup_{k\ge1} I_k$, 则$\mathcal{O}$是开集且$\mathcal{O}\supset E$. 取检验集$T=\mathcal{O}$, 则有

$$m^*(\mathcal{O}) = m^*(\mathcal{O}\cap E) + m^*(\mathcal{O}\cap E^c) = m^*(E) + m^*(\mathcal{O}\setminus E)$$

因此

$$m^*(\mathcal{O}\setminus E) = m^*(\mathcal{O}) - m^*(E) \le \sum_{k\ge1} m^*(I_k) - m^*(E) = \sum_{k\ge1}|I_k| - m^*(E) < \varepsilon.$$

这证明了E可被开集逼近。其次设E无界. 考虑有界子集$E_n = E\cap[-n,n]^d$. 对任意$\varepsilon>0$, 如上, 存在开集$\mathcal{O}_n := \bigcup_{k\ge1} I_{n,k}\supset E_n$ 使得

$$\sum_{k\ge1}|I_{n,k}| < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

取检验集$T=\mathcal{O}_n$ 便有

$$m^*(\mathcal{O}_n) = m^*(\mathcal{O}_n\cap E) + m^*(\mathcal{O}_n\setminus E) \ge m^*(E_n) + m^*(\mathcal{O}_n\setminus E)$$

从而有

$$m^*(\mathcal{O}_n\setminus E) \le m^*(\mathcal{O}_n) - m^*(E_n) \le \sum_{k\ge1} m^*(I_{n,k}) - m^*(E_n)$$
$$= \sum_{k\ge1}|I_{n,k}| - m^*(E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

令$\mathcal{O}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$, 则$\mathcal{O}$是开集且包含了$E$: $\mathcal{O}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$. 又显然有

$$\mathcal{O}\setminus E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathcal{O}_n\setminus E)$$

于是有

$$m^*(\mathcal{O}\setminus E)\le\sum_{n=1}^{\infty}m^*(\mathcal{O}_n\setminus E)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

所以E可以被开集逼近. 这就证明了上述两个定义的等价性。 □

【定义(零测集)】若$E\subset\mathbb{R}^d$ 且$m^*(E)=0$, 则称E是一个d维Lebesgue零测集(set of measure zero) 或零集(null set). □

零测集在测度论研究中具有重要作用。下面命题给出零测集的基本性质。

【命题1.4.7(Lebesgue零测集的基本性质)】

(**a**) 可数个(d维)零测集的并集还是(d维)零测集.

(**b**) 可数集是零测集. 特别, $\mathbb{Q}^d$(有理点集) 是零测集.

(**c**) 设p,q 为正整数, $d=p+q$. 假设Z_p,Z_q 分别是$\mathbb{R}^p$ 中的p维零测集和$\mathbb{R}^q$ 中的q维零测集, 则$Z_p\times\mathbb{R}^q$ 和$\mathbb{R}^p\times Z_q$ 都是$\mathbb{R}^d$ 中的d维零测集.

因此对任意$A\subset\mathbb{R}^p, B\subset\mathbb{R}^q$, 集合$A\times Z_q$ 和$Z_p\times B$ 都是$\mathbb{R}^d$ 中的d维零测集.

(**d**) 若$d\ge 2$, 则$\mathbb{R}^d$ 中维数$<d$的线性子空间及其平移都是d 维零测集.

【证】(a): 设Z_k是零测集, $m^*(Z_k)=0$. 则由次可加性有

$$0\le m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}Z_k\Big)\le\sum_{k\ge1}m^*(Z_k)=0.$$

(b): 设$Z=\{x_k\}_{k\ge1}$ 是一个可数集。我们前面已证明了单点集是零测集, 故有$m^*(\{x_k\})=0$. 把Z写成单点集的并: $Z=\bigcup_{k\ge1}\{x_k\}$ 即知Z是零测集。

(c): 先证明若$J\subset\mathbb{R}^q$ 是任意有界区间, 例如$J=[-R,R]^q$, 则$Z_p\times J$是d维零测集.

事实上对任意$\varepsilon>0$, 由Z_p 是$\mathbb{R}^p$ 中的p维零测集, 存在Z_p 的区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得$\sum_{k\ge1}|I_k|<\varepsilon$. 因区间的乘积还是区间, 故$\{I_k\times J\}_{k\ge1}$ 是$Z_p\times J$ 的有界区间覆盖, 从而有

$$m^*(Z_p\times J)\le\sum_{k\ge1}|I_k\times J|=\sum_{k\ge1}|I_k||J|=\Big(\sum_{k\ge1}|I_k|\Big)|J|<\varepsilon|J|.$$

令$\varepsilon \to 0$ 即得$m^*(Z_p \times J) = 0$. 因此$Z_p \times J$是d维零测集.

现在令$J_k = [-k,k]^q\,, k \in \mathbb{N}$, 则$Z_p \times J_k$ 是d维零测集且

$$Z_p \times \mathbb{R}^q \ = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_p \times J_k\,.$$

上式表明$Z_p \times \mathbb{R}^q$等于可数多个d维零测集的并集, 因此$Z_p \times \mathbb{R}^q$ 是d维零测集. 同法可证$\mathbb{R}^p \times Z_q$ 是d维L-零测集.

(d): 这个证明将在**定理1.5.3(平移和线性变换下Lebesgue测度的计算公式)**之后完成, 其间没有循环论证. □

【**例**】任何区间$I \subset \mathbb{R}^d$ 的边界∂I 是d维零测集即$m^*(\partial I) = 0$.

事实上由区间的定义知边界∂I 是d个形如$A \times I\,, I_1 \times B \times I_2,\ I \times C$ 的集合的并集, 其中A, B, C 是$\mathbb{R}$中只含两元素的有限集, I是$\mathbb{R}^{d-1}$ 中的区间, 而当$d \ge 3$时, I_1, I_2分别是$\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ 中的区间其中$p + q = d - 1$. 由上述**命题1.4.7(Lebesgue 零测集的基本性质)(c)** 知$A \times I\,, I \times C$ 都是d维零测集. 同理$I_1 \times B$是$p+1$维零测集, 于是再由上述命题知$I_1 \times B \times I_2 = (I_1 \times B) \times I_2$是$d$维零测集. 所以$\partial I$ 是d维零测集. □

【**定理1.4.8(Lebesgue可测集和测度的基本性质)**】设$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$是$\mathbb{R}^d$中的Lebesgue 可测集的全体, $m = m^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ 是$\mathbb{R}^d$上的d维Lebesgue 测度。则有

(a) $\mathbb{R}^d$中的每个开集属于$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 特别有$\mathbb{R}^d \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(b) 若$E \subset \mathbb{R}^d$ 且$m^*(E) = 0$, 则$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 即零测集是可测集。特别有$\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(c) 若$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则$E^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(d) 若$E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), k = 1, 2, ..., n$ 或$k = 1, 2, 3, ...$, 则$\bigcup_{k\ge1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

若进一步假设E_k互不相交, 则成立**可加性**:

$$m\Big(\bigcup_{k\ge1} E_k\Big) = \sum_{k\ge1} m(E_k).$$

(e) 次可加性: 对任意$E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), k = 1, 2, ..., n$ 或$k = 1, 2, 3, ...$, 有

$$m\Big(\bigcup_{k\ge1} E_k\Big) \le \sum_{k\ge1} m(E_k).$$

(f) 减法运算: 若$m(A \cap B) < \infty$ 则

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A \cap B), \qquad m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)\,.$$

特别

$$\text{当}A \subset B\text{且}m(A) < \infty\text{时有} \quad m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

(g) 单调极限： 设$E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), k = 1, 2, 3, \dots$.

$$\text{若 } E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots, \quad \text{则} \quad m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

$$\text{若 } E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \text{ 且 } m(E_1) < \infty, \quad \text{则} \quad m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

【证】我们将使用可测集的Carathéodory 定义(即条件(C)).

(a): 我们在**可测集的两个定义的等价性的证明**中已证明了每个开集满足Carathéodory 条件(C). 所以开集是可测集。

(b): 设$E \subset \mathbb{R}^d$ 且$m^*(E) = 0$, 则对任意$T \subset \mathbb{R}^d$ 有$m^*(T \cap E) \le m^*(E) = 0$ 从而有

$$m^*(T) \ge m^*(T \cap E^c) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \ge m^*(T)$$

即$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$, 所以$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(c): 由 $(E^c)^c = E$ 可知Carathéodory 条件(C)中E与E^c的地位是对称的. 因此有 $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \iff E^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(d): 先证明若$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 且$A \cap B = \emptyset$, 则有$A \cup B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

考虑“不交并”分解(此处给出文图)：

$$\mathbb{R}^d = (A \cup B) \cup (A \cup B)^c,$$

$$A \cup B = [A \cap B] \cup [A \cap B^c] \cup [A^c \cap B].$$

由此, 对任意$T \subset \mathbb{R}^d$有

$$\begin{aligned}
&T = [T \cap (A \cup B)] \cup [T \cap (A \cup B)^c]\,, \\
&T \cap (A \cup B) = [T \cap A \cap B] \cup [T \cap A \cap B^c] \cup [T \cap A^c \cap B]\,, \\
&T \cap (A \cup B)^c = T \cap A^c \cap B^c\,.
\end{aligned}$$

由次可加性和$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 有

$$m^*(T \cap (A \cup B)) + m^*(T \cap (A \cup B)^c)$$

$$\leq m^*(T\cap A\cap B)+m^*(T\cap A\cap B^c)$$
$$+m^*(T\cap A^c\cap B)+m^*(T\cap A^c\cap B^c)$$
$$=m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c)=m^*(T)\qquad \forall T\subset\mathbb{R}^d\,.$$

这蕴含$A\cup B$ 满足条件(C). 因此$A\cup B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

注意, 由(c)还知$(A\cup B)^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 这是一个一般结论。于是我们相继得到$A\cap B=[A^c\cup B^c]^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $A\setminus B=A\cap B^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 这个性质将在下面用到.

由$\bigcup_{k=1}^n E_k=(\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k)\cup E_n$和归纳法易证：若$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $k=1,2,...,n$, 则$\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

推广到可数并：首先说明, 如果给定的可测集只有有限多个：$E_1,E_2,...,E_n$, 那么补充空集, 即令$E_k=\emptyset$, $k=n+1,n+2,n+3,...$, 则有

$$\bigcup_{k=1}^n E_k=\bigcup_{k=1}^\infty E_k\quad \text{且}\quad \sum_{k=1}^n m(E_k)=\sum_{k=1}^\infty m(E_k).$$

并且若$E_1,E_2,...,E_n$互不相交, 则$E_1,E_2,E_3,...$, 也互不相交。因此不失一般性我们可以只考虑有可数无限多个E_k的情形。

设$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $k=1,2,3,...,$. 先假设E_k 互不相交. 令$S_n=\bigcup_{k=1}^n E_k$. 来证明对任意$T\subset\mathbb{R}^d$ 有

$$m^*(T\cap S_n)=\sum_{k=1}^n m^*(T\cap E_k)\,,\quad n=1,2,\dots\,. \tag{1.4.3}$$

当$n=1$时(1.4.3) 成立. 假设(1.4.3)对于n 成立, 则对于$n+1$, 由$E_{n+1}\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$和$S_{n+1}\cap(E_{n+1})^c=S_n$ 有

$$m^*(T\cap S_{n+1})=m^*(T\cap S_{n+1}\cap E_{n+1})+m^*(T\cap S_{n+1}\cap(E_{n+1})^c)$$
$$=m^*(T\cap E_{n+1})+m^*(T\cap S_n)=\sum_{k=1}^{n+1}m^*(T\cap E_k)\,.$$

据归纳法原理知(1.4.3)对任意$n\in\mathbb{N}$成立.

令$S=\bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 则由(1.4.3) 和$S_n\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 得到

$$m^*(T)=m^*(T\cap S_n)+m^*(T\cap(S_n)^c)=\sum_{k=1}^n m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap(S_n)^c)$$
$$\geq\sum_{k=1}^n m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap S^c)\quad(\text{因为 }(S_n)^c\supset S^c\,)\,.$$

令$n\to\infty$, 则每一项$m^*(T\cap E_k)$ 都被加进来了:

$$\begin{aligned} m^*(T) &\ge \sum_{k=1}^{\infty} m^*(T\cap E_k) + m^*(T\cap S^c) \\ &\ge m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} T\cap E_k) + m^*(T\cap S^c) = m^*(T\cap S) + m^*(T\cap S^c) \ge m^*(T)\,. \end{aligned}$$

以上用到了次可加性. 因此$\forall T\subset\mathbb{R}^d$ 有

$$m^*(T) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(T\cap E_k) + m^*(T\cap S^c) = m^*(T\cap S) + m^*(T\cap S^c)\,.$$

这证明了$S\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 即$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 同时取$T=S$, 我们还证明了$m^*$在$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上具有可数可加性(因$S\cap S^c=\emptyset$ 且$m^*(\emptyset)=0$), 即

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)\,.$$

其次转到一般情形：E_k不必互不相交. 如前面作法,令

$$\widetilde{E}_1 = E_1\,,\quad \widetilde{E}_2 = E_2\setminus E_1\,,\quad \widetilde{E}_k = E_k\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}E_j\,,\quad k=2,3,\dots\,.$$

则$\widetilde{E}_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\,(k=1,2,...)$ 且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\,,\quad \widetilde{E}_i\cap\widetilde{E}_j=\emptyset\,,\quad i\ne j\,.$$

因此$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(e): 这是外测度的次可加性的特殊情形：每个E_k是可测集. 此时有$m^*(E_k)=m(E_k)$.

(f): 将(c),(d)中的结果用于两个可测集: 设$A,B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则由$A^c,B^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$知$A^c\cup B^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 从而有$A\cap B=(A^c\cup B^c)^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $A\setminus B=A\cap B^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 于是由$A\cup B=A\cup(B\setminus A)$ 和可加性有

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B\setminus A).$$

同时由$B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$ 有

$$m(B)=m(B\setminus A)+m(A\cap B).$$

因此当$m(A\cap B)<\infty$时有

$$m(B\setminus A)=m(B)-m(A\cap B)$$

从而有

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B).$$

(g): 先设E_k单调增加：$E_1\subset E_2\subset E_3\subset \ldots$. 为证明极限等式, 可以假定对所有$k$ 都有$m(E_k)<\infty$ (否则由单调性知极限等式两边都等于$+\infty$). 这时我们对可加性公式可以做减法运算:

$$m(E_k\setminus E_{k-1})=m(E_k)-m(E_{k-1})\,,\quad k=1,2,3,\,\ldots\,;\quad E_0:=\emptyset\,.$$

另一方面由E_k 单调增加我们有“不交并”分解：

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\setminus E_{k-1})\,.$$

根据可数可加性和正项级数的定义得到

$$\begin{aligned}m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)&=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k\setminus E_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}m(E_k\setminus E_{k-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(m(E_k)-m(E_{k-1})\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(m(E_n)-m(E_0)\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}m(E_n)\,.\qquad(\text{因}E_0=\emptyset)\end{aligned}$$

最后设E_k 单调下降：$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$, 并设$m(E_1)<\infty$. 则有

$$E_1\setminus E_2\subset E_1\setminus E_3\subset E_1\setminus E_4\subset\ldots;\quad E_1\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_1\setminus E_k)\,.$$

因此

$$m(E_1\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_1\setminus E_k)\,.$$

注意$m(E_k)\le m(E_1)<\infty$, 这就给出

$$m(E_1)-m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)=m(E_1)-\lim_{k\to\infty}m(E_k)\,.$$

注意$m(E_1)<\infty$, 消去$m(E_1)$即得极限等式.　　□

这就完成了定理的证明.　□

【命题1.4.9(互不重叠的可加性)】设$E_1,E_2,E_3,\ldots$为$\mathbb{R}^d$中互不重叠的可测集, 其中互不重叠是指

$$\text{当}i\neq j\text{时}\quad m(E_i\cap E_j)=0.$$

则成立可加性:

$$m\Big(\bigcup_{k\ge1}E_k\Big)=\sum_{k\ge1}m(E_k).$$

【证】令

$$Z=\bigcup_{i,j\ge1,i\ne j}E_i\cap E_j.$$

则

$$m(Z)\le\sum_{i,j\ge1,\,i\ne j}m(E_i\cap E_j)=0.$$

即Z是零测集. 易见$E_1\setminus Z,\ E_2\setminus Z,\ E_3\setminus Z,...$ 互不相交且

$$\bigcup_{k\ge1}E_k=Z\cup\bigcup_{k\ge1}(E_k\setminus Z).$$

于是由$m(Z)=0$和可加性得到

$$m\Big(\bigcup_{k\ge1}E_k\Big)=m\Big(\bigcup_{k\ge1}(E_k\setminus Z)\Big)=\sum_{k\ge1}m(E_k\setminus Z)=\sum_{k\ge1}m(E_k).\qquad\Box$$

【例】设$I_1,I_2,I_3,...$是$\mathbb{R}^d$中的有界区间且内部互不相交, 即$I_i^\circ\cap I_j^\circ=\emptyset$ for all $i\ne j$. 则$I_1,I_2,I_3,...$ 互不重叠从而成立可加性

$$m\Big(\bigcup_{k\ge1}I_k\Big)=\sum_{k\ge1}m(I_k)=\sum_{k\ge1}|I_k|.$$

事实上当$i\ne j$时有$I_i\cap I_j\subset\partial I_i\cup\partial I_j$. 由前面例题知$m(\partial I_i)=m(\partial I_j)=0$, 因此$m(I_i\cap I_j)=0$. 所以$I_1,I_2,I_3,...$ 互不重叠。 $\Box$

【定义(σ-代数、可测集与可测空间)】设X是一个集合, $\mathcal{A}$ 是X的一个子集族, 即$\mathcal{A}$是由X的一些子集组成的集合族。如果$\mathcal{A}$ 具有下列性质

(i) $X\in\mathcal{A}$

(ii) 补集封闭：若$E\in\mathcal{A}$, 则补集$E^c:=X\setminus E\in\mathcal{A}$

(iii) 可数并封闭：若$E_k\in\mathcal{A}$, $k=1,2,...,$, 则$\bigcup_{k=1}^\infty E_k\in\mathcal{A}$

则称$\mathcal{A}$ 为X上的一个σ-代数, 并称$(X,\mathcal{A})$ 为一个可测空间, $\mathcal{A}$ 中的元素称为可测集。 $\Box$

从这个定义我们容易得到

【定义的推论】

(1) 空集$\emptyset=(\mathbb{R}^d)^c\in\mathcal{A}$.

(2) 有限并封闭：若$E_k\in\mathcal{A}$, $k=1,2,...,n$, 则$\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal{A}$.

事实上在(iii)中取$E_{n+1}=E_{n+2}=\cdots=\emptyset$, 则$\bigcup_{k=1}^n E_k=\bigcup_{k=1}^\infty E_k\in\mathcal{A}$.

(3) 可数交封闭：若$E_k\in\mathcal{A}$, $k=1,2,...$, 则$\bigcap_{k=1}^\infty E_k=(\bigcup_{k=1}^\infty E_k^c)^c\in\mathcal{A}$.

(4)有限交封闭：若$E_k\in\mathcal{A}$, $k=1,2,...,n$, 则$\bigcap_{k=1}^n E_k=(\bigcup_{k=1}^n E_k^c)^c\in\mathcal{A}$;

(5) 差集封闭：若$E_1,E_2\in\mathcal{A}$, 则$E_1\setminus E_2=E_1\bigcap E_2^c\in\mathcal{A}$. □

这些性质说明σ-代数$\mathcal{A}$ 就是这样一个集合类: $\mathcal{A}$ 中有限多个或可数多个元素经过有限次或可数次集合运算—— 交、并、差、补—— 所得结果仍在$\mathcal{A}$ 中.

【**注1**】如果在可测集定义中把“可数并封闭”换为“有限并封闭”则相应的$\mathcal{A}$ 称为X上的一个代数。

【**注2**】“σ-代数”的前缀σ是求和符号Σ 的小写(早年间, Σ 也表示求并), 在这里用于提示可数并：$\sigma=\bigcup_{k=1}^\infty$. “可数并封闭”意味着容纳了更多的可测集; 而相应的可数可加性也为很多收敛问题的研究奠定了宽阔稳定的基础。

【**注3**】**σ-代数的存在性:** 令2^X是由X的所有子集组成的集合族。则显然2^X是X上的一个σ-代数并且是X上的最大的σ-代数, 即X上的任何σ-代数都是2^X的子集。而两个元素的集合$\{X,\emptyset\}$ 也是X 的一个σ-代数, 它是X上的最小的σ-代数, 即X上的任何σ-代数都包含$\{X,\emptyset\}$. 但这两个极端的σ-代数用处不大。通常我们需要这样的σ-代数: 它是包含了我们感兴趣的X的某类子集族的最小的σ-代数. 例如对于$X=\mathbb{R}^d$的情形, $\mathbb{R}^d$上最常用的σ-代数是Borel σ-代数, 它是由$\mathbb{R}^d$中所有开集生成的σ-代数, 具体见下面。

【**由给定的集合族生成的σ-代数**】

从测度和积分角度看, 可测空间过大就可能产生较多的奇异现象。下面的命题告诉我们如何使可测空间不过大且好包含了我们感兴趣的集合类。这就是所谓“最小”或“生成”的概念:

【**命题1.4.9**】设$\mathcal{G}$是X的一个子集族, 令$\sum(\mathcal{G})$ 是X 上的所有包含$\mathcal{G}$ 的σ- 代数的全体。则交集

$$\mathcal{B}=\bigcap_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})}\mathcal{A}$$

仍是X 上的一个σ-代数且$\mathcal{B} \supset \mathcal{G}$, 即$\mathcal{B} \in \sum(\mathcal{G})$。换言之, $\mathcal{B}$ 是X 上包含$\mathcal{G}$的最小σ-代数。我们也称$\mathcal{B}$是X上的由$\mathcal{G}$ 生成的σ-代数。

【证】因对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$都有$\mathcal{A} \supset \mathcal{G}$, 故也有$\mathcal{B} \supset \mathcal{G}$. 下面验证$\mathcal{B}$ 满足σ-代数的三个规定性质.

(i) 对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$, 因$\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}^d$上的σ-代数, 故$\mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$. 因此$\mathbb{R}^d \in \bigcap\limits_{\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})} \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(ii) 设$E \in \mathcal{B}$. 则对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$有$E \in \mathcal{A}$. 因$\mathcal{A}$ 是σ-代数, 故$E^c \in \mathcal{A}$. 因此$E^c \in \bigcap\limits_{\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})} \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(iii) 设$E_k \in \mathcal{B}, k = 1, 2, 3, ...,$. 则对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$ 有$E_k \in \mathcal{A}, k = 1, 2, 3, ...,$. 因$\mathcal{A}$是$\sigma$-代数, 故$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$. 因此$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \bigcap\limits_{\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})} \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

这证明了$\mathcal{B}$ 是X 上的σ-代数。 □

下面我们只考虑$X = \mathbb{R}^d$ 的情形。

$\mathbb{R}^d$上最常用的σ-代数是所谓Borel σ-代数, 它是由$\mathbb{R}^d$的开集族生成的σ-代数。

【定义(Borel σ-代数和Borel集)】设$\mathcal{G}$ 为$\mathbb{R}^d$ 的开集的全体, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 是$\mathbb{R}^d$上由$\mathcal{G}$生成的σ- 代数。则称$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 是$\mathbb{R}^d$上的 Borel σ- 代数, 并称$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 中的元素称为Borel集。 □

由σ-代数的定义和Borel集的定义立刻得知:

$\mathbb{R}^d$中的所有开集,闭集都是Borel 集, 并且由开集, 闭集经过可数次集合运算(交、并、差、补) 所得到的集合也都是Borel集。

两个常用的Borel集类: **G_δ-型集** 和**F_σ-型集**。

G_δ-型集: $E \subset \mathbb{R}^d$称为是一个G_δ-型集如果E可以表示成可数多个开集的交。

F_σ-型集: $E \subset \mathbb{R}^d$称为是一个F_σ-型集如果E可以表示成可数多个闭集的并。

由此定义和DeMorgen 对偶律可知, 集合E是一个G_δ-型集当且仅当其补集E^c是一个F_σ-型集。

【例】$\mathbb{R}^d$中每个开集都是F_σ-型集且可表示成一列递增的紧集的并. 具体来说, 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$为任一开集. 若$\Omega = \mathbb{R}^d$ 或$\Omega = \emptyset$, 则结论是显然的. 设$\emptyset \neq \Omega \neq \mathbb{R}^d$. 此时有

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathrm{dist}(x, \Omega^c) > 0\}.$$

据此我们考虑集合

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \ge \frac{1}{n},\, |x| \le n\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

易见K_n是紧集且

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots; \quad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n. \qquad \Box$$

【命题1.4.10】(a) $\mathbb{R}^d$中的Lebesgue 可测集的全体$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$是$\mathbb{R}^d$上的一个$\sigma$- 代数并且$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, 即$\mathbb{R}^d$中的Borel 集都是Lebesgue 可测集。

(b) (可测集的正则性) 若$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则对任意$\varepsilon > 0$ 存在开集$\Omega \supset E$ 和闭集$F \subset E$ 使得$m(\Omega \setminus E) < \varepsilon, m(E \setminus F) < \varepsilon$.

(c) (可测集的结构) 若$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则存在一个$G_\delta$-型集$H \supset E$ 和一个零测集Z 使得$E = H \setminus Z$, 同时存在一个F_σ-型集$F \subset E$ 和另一个零测集Z 使得$E = F \cup Z$.

进一步, 这个G_δ-型集H 可以表示成一列递降的开集的交:

$$H = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j, \quad G_j\text{是开集且 } G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots.$$

同时这个F_σ-型集F 可以表示成一列递增的紧集的并:

$$F = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j, \quad K_j\text{是紧集且 } K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots.$$

【证】(a): 这是**定理1.4.8(Lebesgue可测集和测度的基本性质)**、σ-代数的定义和Borel集的定义的直接推论。

(b): 上述开集$\mathcal{O}$的存在是可测集的定义(回忆L-可测集的两个等价定义). 由于$E^c = \mathbb{R}^d \setminus E$ 也是可测集, 故存在$\mathcal{O} \supset E^c$ 使得$m(\mathcal{O} \setminus E^c) < \varepsilon$. 令$F = \mathcal{O}^c$, 则$F$是开集且$F \subset E$. 于是有$E \setminus F = E \cap F^c = F^c \cap E = \mathcal{O} \cap (E^c)^c = \mathcal{O} \setminus E^c$, 所以$m(E \setminus F) = m(\mathcal{O} \setminus E^c) < \varepsilon$.

(c): 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 则对每个$k \in \mathbb{N}$, 存在开集$\mathcal{O}_k \supset E$ 使得$m(\mathcal{O}_k \setminus E) < \frac{1}{k}$. 令

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k, \quad Z = H \setminus E$$

则H是一个G_δ-型集且$H \supset E$ 且$E = H \setminus Z$ 并有

$$m(Z) = m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k \setminus E\Big) \le m(\mathcal{O}_n \setminus E) < \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此$m(Z)=0$. 令

$$G_j=\bigcap_{k=1}^{j}\mathcal{O}_k,\quad j=1,2,3,\dots.$$

则G_j 是开集(有限多个开集的交是开集) 且

$$G_1\supset G_2\supset G_3\supset\cdots,\qquad H=\bigcap_{j=1}^{\infty}G_j.$$

将这一结果应用于$E^c=\mathbb{R}^d\setminus E$, 则存在开集列$\mathcal{O}_k\supset E^c$ 和零测集Z 使得

$$E^c=\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{O}_k\Big)\setminus Z=\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{O}_k\Big)\cap Z^c.$$

取补集并令$F_k=\mathcal{O}_k^c, F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 得到

$$E=(E^c)^c=\bigg(\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{O}_k\Big)\cap Z^c\bigg)^c=\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{O}_k\Big)^c\cup Z=\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\Big)\cup Z=F\cup Z.$$

将F_k写成可数个紧集的并: $F_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_k\cap[-n,n]^d$. 则有

$$F=\bigcup_{k\ge1}\bigcup_{n=1}^{\infty}F_k\cap[-n,n]^d.$$

令

$$K_j=\bigcup_{k\ge1,n\ge1,k+n\le j+1}F_k\cap[-n,n]^d,\qquad j=1,2,3,...$$

则每个K_j是紧集(有限多个紧集的并是紧集) 且有

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots,\qquad F=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j.\qquad\square$$

作业题(2018.3.7)

1. 自学上面讲义, 有些内容课上没时间讲, 但后面常用。

2. 周民强《实变函数论》(2001年版, 北大出版社)P85: 1, 2, 3; P94: 1, 4 ; P100: 1,3.

3. Stein 和Shakarchi 的《实分析》第1章第6节习题5, 11 (周书里有类似题解法), 14, 16 (其中注意记号$\limsup\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$), 25, 26, 27, 28; 第7节习题5.

周民强的书因各版页码可能不同, 故将上面留的题目抄录如下:

周书P85: 1,2,3 解答下列问题:

1. 设$A\subset\mathbb{R}^d$ 且$m^*(A)=0$, 试证明对任意$B\subset\mathbb{R}^d$ 有

$$m^*(A\cup B)=m^*(B)=m^*(B\setminus A).$$

(换言之, 对B 加上或减去一个零测集, 不改变B的外测度。)

2. (i) 设$A,B\subset\mathbb{R}^d$ 且$m^*(A)<\infty, m^*(B)<\infty$, 试证明

$$|m^*(A)-m^*(B)|\le m^*(A\Delta B)$$

这里和下面,

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A),\qquad \text{称之为}A,B\text{的对称差}.$$

(ii) 设$A,B,C\subset\mathbb{R}^d$ 且有

$$m^*(A\Delta B)=0,\quad m^*(B\Delta C)=0.$$

证明$m^*(A\Delta C)=0$.

3. 设$E\subset\mathbb{R}^d$. 若对任意$x\in E$, 存在开球$B(x,\delta_x)$ 使得$m^*(E\cap B(x,\delta_x))=0$, 试证明$m^*(E)=0$. [可数覆盖]

周书P94: 1, 4 解答下列问题:

1. 设$E\subset[0,1]^d$. 试证明

若$m^*(E)=1$, 则$\overline{E}=[0,1]^d$.　　若$m^*(E)=0$, 则$E^\circ=\emptyset$.

这里$\overline{E},E^\circ$ 分别表示E的闭包和内部。

4. 设$B\subset\mathbb{R}^d$ 满足对任意$\varepsilon>0$ 存在可测集$A\subset\mathbb{R}^d$ 使得$m^*(A\Delta B)<\varepsilon$, 证明$B$是可测集。

周书P100: 1,3 解答下列问题:

1. 设$E\subset\mathbb{R}^d$ 且$m^*(E)<\infty$. 若有

$$m^*(E)=\sup\{m(K)\mid K\text{ 是紧集且 }K\subset E\}.$$

试证明E是可测集。

3. 设$A,B\subset\mathbb{R}^d$. 试证明

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)\le m^*(A)+m^*(B).$$

[建议先证明集合的等测包的存在性: 对于任一集合$E \subset \mathbb{R}^d$, 由外测度的定义和性质易见存在一列开集$\mathcal{O}_n \supset E, n = 1, 2, 3, ...$ 使得集合$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$满足$m(H) = m^*(E)$. 称这样的$H$为$E$的一个等测包.]

§1.5. 连续变换下集合的可测性和测度估计

问题: 连续映射是否把可测集映为可测集?

举例(见周民强实变函数论中的关于Cantor 三分集): Cantor 集C:

$$C=\{x\in[0,1]\mid x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k},\ a_k\in\{0,2\}\}.$$

[注: 对于$2\le p\in\mathbb{N}$, 今后在小数的p-进制表示

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k},\quad a_k\in\{0,1,...,p-1\}$$

中, 对于p-进有理数只取0出现最多的那种表示, 即例如

$$\text{对于两种表示}\quad x=0.00(p-1)(p-1)(p-1)\cdots=0.0p000\cdots,\quad\text{取第二种表示.}$$

在这个约定下, 小数的p-进制表示中的a_k 就是唯一的。]

周知C是零测集。令

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}a_k}{2^k}\quad\text{if}\quad x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\in C.$$

将φ延拓到$[0,1]$上:

$$\Phi(x)=\sup_{C\ni y\le x}\varphi(y),\quad x\in[0,1].$$

则Φ在$[0,1]$上单调不减且连续, 其中连续性是因为$\Phi([0,1])=[0,1]$. 这个Φ称为$[0,1]$上的Cantor 函数. (**给出几何图像.**) 由于$\Phi(C)=\varphi(C)=[0,1]$, 而$m(C)=0$, 故这说明Φ把某个零测集映为正测度集合. 这就蕴含Φ 把一些可测集映成了不可测集(见下面引理)。

【引理1.5.1】设E_0为L-可测集(即$E_0\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$), $\varphi:E_0\to\mathbb{R}^d$ 连续。则

$$\varphi\ \text{把}E_0\text{中的}L\text{-可测集映为}L\text{-可测集}\iff\varphi\ \text{把}E_0\text{中的}L\text{-零测集映为}L\text{-零测集。}$$

【证】"$\Longrightarrow$": 设φ 把E_0中的L-可测集映为L-可测集. 设$Z\subset E_0$为L-零测集. 因L-零测集是L-可测集, 故$\varphi(Z)$是L-可测集。若$m(\varphi(Z))>0$, 则由后面讲的关于不可测集的存在性结果知$\varphi(Z)$含有一个不可测集W. 令

$$Z_0=\{x\in Z\,|\,\varphi(x)\in W\}$$

则易见$\varphi(Z_0)=W$. 因L-零测集的子集还是L-零测集从而是L-可测集, 因此Z_0是L-可测集(含于E_0中). 这就与假设矛盾. 因此必须有$m(\varphi(Z))>0$.

“$\Longleftarrow$”：设φ 把E_0中的L-零测集映为L-零测集。任取可测集$E\subset E_0$, 由可测集的结构定理(**命题1.4.10**)知存在紧集列$K_j\,(j=1,2,3,...)$ 和零测集Z 使得

$$E=Z\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j.\quad \text{这给出}\quad \varphi(E)=\varphi(Z)\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}\varphi(K_j).$$

因φ连续而K_j是紧集, 故$\varphi(K_j)$是紧集. 又Z是零测集, 故由假设知$\varphi(Z)$是零测集从而是可测集. 所以$\varphi(E)$是可测集。 □

下面命题说明, 如果映射是Lipschitz 连续的(即满足局部或整体Lipschitz条件), 则这映射就把可测集映为可测集。

【定理1.5.2】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为开集, 映射$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$. 假设$\varphi$属于$C^1$类, 或更一般些, 假设$\varphi$满足局部Lipschitz条件(即对任意$x_0\in\Omega$, 存在$\delta>0$ 和$0<L<\infty$ 使得$B(x_0,\delta)\subset\Omega$ 且$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$ for all $x,y\in B(x_0,\delta)$). 则φ 把Ω 中的零测集映为零测集, 从而把Ω中的可测集映为可测集.

【证】设φ在Ω内满足局部Lipschitz条件。由**引理1.5.1**, 只需证明φ把Ω 中的零测集映为零测集。据**定理1.2.2(开集的方体分解)**, 存在可数个互不重叠的闭方体I_j 使得$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$. 设$Z\subset\Omega$是一个零测集. 则有$Z=\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\cap Z$,

$$\varphi(Z)=\bigcup_{j=1}^{\infty}\varphi(I_j\cap Z),\quad m^*(\varphi(Z))\le\sum_{j=1}^{\infty}m^*(\varphi(I_j\cap Z)).$$

为证$m^*(\varphi(Z))=0$ 只需证明对每个j 都有$m^*(\varphi(I_j\cap Z))=0$. 任取$j\in\mathbb{N}$, 为记号简便, 记$I:=I_j$. 因$I$是$\Omega$中的紧集, 故由数学分析知$\varphi$在$I$上满足Lipschitz条件, 即存在$0<L<\infty$ 使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|\qquad\forall\,x,y\in I.$$

来证明$m^*(\varphi(I\cap Z))=0$. 以$I\cap Z$代替Z 可设$Z\subset I$. 于是只需证明$m^*(\varphi(Z))=0$. 因$m(Z)=0$, 故对任意$\varepsilon>0$ 存在开集$\mathcal{O}\supset Z$ 使得$m(\mathcal{O})<\varepsilon$. 对$\mathcal{O}$, 再由**定理1.2.2(开集的方体分解)**, 存在可数个互不重叠的闭方体Q_k 使得$\mathcal{O}=\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k$. 这给出

$$Z=\bigcup_{k=1}^{\infty}Z\cap Q_k,\quad \varphi(Z)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varphi(Z\cap Q_k),$$

$$m^*(\varphi(Z))\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(\varphi(Z\cap Q_k)).\tag{1.5.1}$$

来证明

$$m^*(\varphi(Z\cap Q_k))\le Cm(Q_k),\quad k=1,2,3,... \tag{1.5.2}$$

其中$C=(2L\sqrt{d})^d$. 固定$k\in\mathbb{N}$, 为证(1.5.2), 可设$Z\cap Q_k\ne\emptyset$. 取$a_k\in Z\cap Q_k$, 令$l_k=l(Q_k)$为Q_k的棱长。写$\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_d(x))$, 则对任意$x\in Z\cap Q_k$ 有

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_i(x)-\varphi_i(a_k)|\le|\varphi(x)-\varphi(a_k)|\le L|x-a_k|\le L\mathrm{diam}(Q_k)=L\sqrt{d}l_k,\quad i=1,2,...,d;\\
&\Longrightarrow\ \varphi_i(x)\in[\varphi_i(a_k)-L\sqrt{d}\,l_k,\,\varphi_i(a_k)+L\sqrt{d}\,l_k],\quad i=1,2,...,d;\\
&\Longrightarrow\ \varphi(x)\in\prod_{i=1}^{d}[\varphi_i(a_k)-L\sqrt{d}\,l_k,\varphi_i(a_k)+L\sqrt{d}\,l_k]=:\widetilde{Q}_k\\
&\Longrightarrow\ \varphi(Z\cap Q_k)\subset\widetilde{Q}_k\\
&\Longrightarrow\ m^*(\varphi(Z\cap Q_k))\le m(\widetilde{Q}_k)=(2L\sqrt{d}l_k)^d=C(l_k)^d=Cm(Q_k)\,.
\end{aligned}
$$

这证明了(1.5.2)成立. 由(1.5.1),(1.5.2) 得到

$$m^*(\varphi(Z))\le C\sum_{k=1}^{\infty}m(Q_k)=Cm(\mathcal{O})<C\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$的任意性即知$m^*(\varphi(Z))=0$. 所以$\varphi(Z)$ 是L-零测集。 □

下面学习**平移, 展缩, 和一般线性变换**下Lebesgue测度的计算公式.

回忆记号: 设$E\subset\mathbb{R}^d$ 为任一集合. 对任意$h\in\mathbb{R}^d,\lambda\in\mathbb{R}$ 和方阵$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{d\times d}$, 我们定义

$$
\begin{aligned}
&E\text{的平移：}\quad E+h=h+E=\{x+h\,|\,x\in E\},\\
&E\text{ 的展缩：}\quad \lambda E=\{\lambda x\,|\,x\in E\},\\
&E\text{ 的反射：}\quad -E=(-1)E=\{-x\,|\,x\in E\},\\
&E\text{ 的一般线性变换：}\quad \mathrm{A}(E)=\{\mathrm{A}x\mid x\in E\}.
\end{aligned}
$$

综合情形

$$E\text{ 的一般仿线性变换：}\quad \lambda\mathrm{A}(E)+h=\{\lambda\mathrm{A}x+h\mid x\in E\}.$$

【注】按数学表达的约定, 当向量右乘矩阵时, 这向量是列向量.

【定理1.5.3(平移和线性变换下Lebesgue测度的计算公式)】

设$E \subset \mathbb{R}^d$为L-可测集。则有

(a) 平移不变性:

$$m(E+h) = m(E) \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^d.$$

(b) 展缩变换:

$$m(\lambda E) = |\lambda|^d m(E) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) 一般线性变换:

$$m(\mathrm{A}(E)) = |\mathrm{detA}| m(E) \qquad \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

一般地, 对任一集合$E \subset \mathbb{R}^d$, 把m 换成外测度m^*, 上述等式仍成立。

【注】上面用到广义实数乘法的约定$0\cdot\infty = 0$. 当$\lambda = 0, m(E) = \infty$ 时或者当$\mathrm{detA} = 0, m(E) = \infty$时, 有

$$|\lambda|^d m(E) = 0\cdot\infty = 0, \quad |\mathrm{detA}| m(E) = 0\cdot\infty = 0.$$

【定理的证明】首先由$x \mapsto \lambda x + h$, $x \mapsto \mathrm{A}x$ 是$\mathbb{R}^d$ 到$\mathbb{R}^d$ 的光滑映射和**定理1.5.2** 知它们把零测集映为零测集从而把可测集映为可测集. 定理的证明分为几步.

Step 1. 证明(a),(b). 一般地我们证明(a),(b) 对于任一集合的外测度也成立, 即对任意$E \subset \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$ 和$\lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$m^*(\lambda E + h) = |\lambda|^d m^*(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^d. \tag{1.5.3}$$

首先回忆, 当$\lambda \neq 0$时, 区间的平移和展缩还是区间：设I是一个d维有界区间, 例如设$I = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i)$ 是左闭右开的. 则对任意$h = (h_1, h_2, ..., h_d) \in \mathbb{R}^d$ 和任意$\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 有

$$\lambda I + h = \prod_{i=1}^d [\lambda a_i + h_i,\, \lambda b_i + h_i) \qquad \text{if } \lambda > 0,$$

$$\lambda I + h = \prod_{i=1}^d (\lambda b_i + h_i,\, \lambda a_i + h_i] \qquad \text{if } \lambda < 0.$$

若$\lambda = 0$, 则$\lambda E + h = \{h\}$ 是单点集因而是L-零测集. 此时(1.5.3) 成立.

设$\lambda\neq 0$, $\{I_k\}_{k\ge 1}$ 是E 的任意有界区间覆盖: $E\subset\bigcup_{k\ge1}I_k$. 则$\lambda E+h\subset\bigcup_{k\ge1}(\lambda I_k+h)$. 因$\lambda I_k+h$ 也是有界区间且$|\lambda I_k+h|=|\lambda|^d|I_k|$, 故

$$m^*(\lambda E+h)\le\sum_{k\ge1}|\lambda I_k+h|=|\lambda|^d\sum_{k\ge1}|I_k|.$$

这给出

$$\frac{1}{|\lambda|^d}m^*(\lambda E+h)\le\sum_{k\ge1}|I_k|.$$

由$\{I_k\}_{k\ge1}$ 的任意性知

$$\frac{1}{|\lambda|^d}m^*(\lambda E+h)\le m^*(E)\quad\text{即}\quad m^*(\lambda E+h)\le|\lambda|^d m^*(E).$$

将这个一般不等式应用于

$$E=\lambda^{-1}(\lambda E+h)-\lambda^{-1}h$$

有

$$m^*(E)\le|\lambda^{-1}|^d m^*(\lambda E+h)=\frac{1}{|\lambda|^d}m^*(\lambda E+h)$$

即

$$|\lambda|^d m^*(E)\le m^*(\lambda E+h).$$

所以(1.5.3) 成立.

Step 2. 对于任意矩阵$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 令

$$\Delta(\mathrm{A})=m(\mathrm{A}([0,1)^d))\,.$$

来证明当A 可逆时

$$m(\mathrm{A}(E))=\Delta(\mathrm{A})m(E)\qquad\forall\,E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d).\tag{1.5.4}$$

先证明等式(1.5.4) 对于任何左闭右开的方体Q 成立. 写$Q=\prod_{i=1}^d[h_i,h_i+\lambda)$, $\lambda>0$. 由集合的平移、展缩的定义和$x\mapsto \mathrm{A}x$ 是线性变换, 易见

$$Q=[0,\lambda)^d+h=\lambda[0,1)^d+h,\quad \mathrm{A}(Q)=\lambda\mathrm{A}([0,1)^d)+\mathrm{A}h.$$

因此由(1.5.3) 和$m(Q)=\lambda^d$ 有

$$m(\mathrm{A}(Q))=\lambda^d m(\mathrm{A}([0,1)^d)))=\Delta(\mathrm{A})m(Q)\,.$$

其次证明(1.5.4) 对任意开集成立. 任取开集$\Omega\subset\mathbb{R}^d$, 根据**定理1.2.2(开集的方体分解)** 可表$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k$, 其中$Q_k$ 是互不相交的左闭右开的2-进方体. 注意$x\mapsto \mathrm{A}x$ 是单射(因A可逆), 故$\mathrm{A}(Q_k)$ 也互不相交. 于是由$\mathrm{A}(\Omega)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}(Q_k)$ 有

$$m(\mathrm{A}(\Omega))=\sum_{k=1}^{\infty}m(\mathrm{A}(Q_k))=\Delta(\mathrm{A})\sum_{k=1}^{\infty}m(Q_k)=\Delta(\mathrm{A})m(\Omega)\,.$$

利用这一结果来证明(1.5.4) 对任意紧集成立. 任取紧集$K\subset\mathbb{R}^d$. 取一个有界开集$\Omega\supset K$. 则有$K=\Omega\setminus(\Omega\setminus K)$. 因$\Omega\setminus K$ 也是开集, 故由开集的结果和$\mathrm{A}(K)=\mathrm{A}(\Omega)\setminus\mathrm{A}(\Omega\setminus K)$ 有(注意这些集合皆有界因而测度有限)

$$m(\mathrm{A}(K))=m(\mathrm{A}(\Omega))-m(\mathrm{A}(\Omega\setminus K))=\Delta(\mathrm{A})\Big(m(\Omega)-m(\Omega\setminus K)\Big)=\Delta(\mathrm{A})m(K).$$

最后对任意$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 由Lebesgue可测集的结构定理(**命题1.4.10**), 存在一列递增的紧集$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots$ 和一零测集Z 使得$E=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\cup Z$. 因

$$\mathrm{A}(E)=\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{A}(K_j)\cup\mathrm{A}(Z),\ \ \mathrm{A}(K_1)\subset\mathrm{A}(K_2)\subset\mathrm{A}(K_3)\subset\cdots,\ \text{且}\ \mathrm{A}(Z)\ \text{也是}L\text{-零测集}$$

故由上面结果和测度的单调极限定理得到

$$\begin{aligned}m(\mathrm{A}(E))&=m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{A}(K_j)\Big)=\lim_{j\to\infty}m(\mathrm{A}(K_j))=\Delta(\mathrm{A})\lim_{j\to\infty}m(K_j)\\&=\Delta(\mathrm{A})m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)=\Delta(\mathrm{A})m(E).\end{aligned}$$

Step 3. 证明对任意可逆矩阵$\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 有

$$\Delta(\mathrm{AB})=\Delta(\mathrm{A})\Delta(\mathrm{B}).\tag{1.5.5}$$

事实上有$\Delta(\cdot)$的定义并在恒等式(1.5.4) 中取$E=\mathrm{B}([0,1)^d)$ 便有

$$\Delta(\mathrm{AB})=m(\mathrm{AB}([0,1)^d))=\Delta(\mathrm{A})m(\mathrm{B}([0,1)^d))=\Delta(\mathrm{A})\Delta(\mathrm{B}).$$

Step 4. 证明

$$\Delta(\mathrm{A})=|\mathrm{detA}|\qquad\forall\,\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{d\times d}\,.\tag{1.5.6}$$

当$\mathrm{A}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_d\}$ 为正对角阵时($\lambda_i>0,i=1,2,...,d$), 易见$\mathrm{A}([0,1)^d)=\prod_{i=1}^{d}[0,\lambda_i)$ 从而

$$\Delta(\mathrm{A})=m(\mathrm{A}([0,1)^d))=m\Big(\prod_{i=1}^{d}[0,\lambda_i)\Big)=\Big|\prod_{i=1}^{d}[0,\lambda_i)\Big|=\prod_{i=1}^{d}\lambda_i=\mathrm{detA}\quad(>0).$$

当A 为正交阵时, 取$E=\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|x|\le 1\}$ (单位球), 则由$|\mathrm{A}x|\equiv|x|$ 知$\mathrm{A}(E)=E$ 且显然$0<m(E)<\infty$. 于是由(1.5.4) 得到$\Delta(\mathrm{A})=1=|\mathrm{detA}|$.

设A 为一般可逆阵. 由线代数知对于正定阵$\mathrm{A}^\tau\mathrm{A}$, 存在正交阵T 使得$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}^\tau\mathrm{AT}=\mathrm{D}^2$为对角阵, 其中$\mathrm{D}=\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}\,,\sqrt{\lambda_2}\,,...,\sqrt{\lambda_d}\,\}\,,\lambda_i>0\,,i=1,2,...,d.$ 令$\mathrm{T}_1=\mathrm{ATD}^{-1}$. 则$\mathrm{T}_1$ 是正交阵且$\mathrm{T}_1\mathrm{D}=\mathrm{AT}$, $|\mathrm{detA}|$. 因D 是正对角阵, 故如上有

$$\Delta(\mathrm{D})=\prod_{i=1}^{d}\sqrt{\lambda_i}=\mathrm{detD}=|\mathrm{detA}|.$$

因$\Delta(\mathrm{T})=\Delta(\mathrm{T}_1)=1$, 故应用公式(1.5.5) 即得

$$\Delta(\mathrm{A})=\Delta(\mathrm{AT})=\Delta(\mathrm{T}_1\mathrm{D})=\Delta(\mathrm{D})=|\mathrm{detA}|\,.$$

最后设A 不可逆, 即$\mathrm{detA}=0$. 此时为证$\Delta(\mathrm{A})=0$, 我们直接证明最大集合$\mathrm{A}(\mathbb{R}^d)$为L-零测集, 也即证明

$$\text{当 detA}=0\text{ 时},\quad m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^d))=0. \tag{1.5.7}$$

当$\mathrm{rank(A)}=0$ 时(它等价于$\mathrm{A}=0$), 上式显然成立. 设$\mathrm{rank(A)}=r\in\{1,2,,...,d-1\}$. 则由线性代数, 存在可逆方阵$P,Q$ 使得

$$\mathrm{A}=\mathrm{PDQ},\quad \mathrm{D}=\mathrm{diag}\{1,...,1,0,...,0\}\ (\text{对角阵})\,.$$

由P, Q 可逆有

$$\mathrm{Q}(\mathbb{R}^d)=\mathbb{R}^d,\quad \mathrm{A}(\mathbb{R}^d)=\mathrm{PD}(\mathbb{R}^d),\quad m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^d))=|\mathrm{detP}|m(\mathrm{D}(\mathbb{R}^d)).$$

故为证(1.5.7), 只需证明$m(\mathrm{D}(\mathbb{R}^d))=0$. 考虑分解

$$\mathbb{R}^d=\bigcup_{k=1}^{\infty}[-k,k]^d,\quad \mathrm{D}(\mathbb{R}^d)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{D}([-k,k]^d).$$

我们有

$$\mathrm{D}([-k,k]^d)=[-k,k]^r\times\{(0,...,0)\},\quad m(\mathrm{D}([-k,k]^d)=0,\quad k=1,2,3,...\,.$$

因此由测度的次可加性即得$m(\mathrm{D}(\mathbb{R}^d))=0$. 所以(1.5.7)成立.

这就对可测集完成了线性变换公式(c)的证明。

最后证明对任意集合$E \subset \mathbb{R}^d$, 线性变换公式(c)对于外测度m^*也成立。任取$E \subset \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. 若$\det\mathrm{A} = 0$, 则由(1.5.6)有

$$m^*(\mathrm{A}(E)) \le m^*(\mathrm{A}(\mathbb{R}^d)) = m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^d)) = 0, \quad 因此 \quad m^*(\mathrm{A}(E)) = 0 = |\det A|m^*(E).$$

设$\det\mathrm{A} \neq 0$. 对每个$j \in \mathbb{N}$ 选取E的区间覆盖$\{I_{k,j}\}_{k\ge1}$ 使得$\sum\limits_{k\ge1} |I_{k,j}| \le m^*(E) + 1/j$. 令$G_j = \bigcup_{k\ge1} I_{k,j}$. 则$G_j$ 是L-可测集且$G_j \supset E$,

$$m^*(E) \le m(G_j) \le \sum_{k\ge1} m(I_{k,j}) = \sum_{k\ge1} |I_{k,j}| \le m^*(E) + 1/j \to m^*(E) \quad (j \to \infty)$$

因此

$$\lim_{j\to\infty} m(G_j) = m^*(E).$$

于是由$\mathrm{A}(E) \subset \mathrm{A}(G_j)$得到

$$m^*(\mathrm{A}(E)) \le m(\mathrm{A}(G_j)) = |\det\mathrm{A}|m(G_j) \to |\det\mathrm{A}|m^*(E) \quad (j \to \infty).$$

因此

$$m^*(\mathrm{A}(E)) \le |\det\mathrm{A}|m^*(E).$$

将这一不等式应用于A^{-1} 和$\mathrm{A}(E)$ 有

$$m^*(E) = m^*(\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{A}(E))) \le |\det(\mathrm{A}^{-1})|m^*(\mathrm{A}(E)) = \frac{1}{|\det\mathrm{A}|}m^*(\mathrm{A}(E)).$$

因此反向不等式也成立:

$$|\det\mathrm{A}|m^*(E) \le m^*(\mathrm{A}(E)).$$

所以等式$m^*(\mathrm{A}(E)) = |\det\mathrm{A}|m^*(E)$成立。 定理证毕。 □

有了一般线性变换公式, 现在可以完成

【命题1.4.7(Lebesgue零测集的基本性质)之(d)的证明】

设$d \ge 2$, $X \subset \mathbb{R}^d$是$\mathbb{R}^d$的线性子空间且$\dim(X) < d$. 则存在$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$使得$X = \mathrm{A}(\mathbb{R}^d)$且$\det\mathrm{A} = 0$. 对任意$h \in \mathbb{R}^d$, 由平移不变性和$\det\mathrm{A} = 0$ 有

$$m(X + h) = m(X) = m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^d)) = |\det\mathrm{A}|m(\mathbb{R}^d) = 0 \cdot \infty = 0. \qquad \square$$

【注】上面用到了约定：$0 \cdot \infty = 0$. 如果不习惯这种证明, 则可考虑下面的证明, 它顺便解释了为什么约定$0 \cdot \infty = 0$ 是合理的. 事实上如果考虑有限区间$I_k = [-k, k]^d$ 就可避免出现$0 \cdot \infty$：由线性变换公式有

$$m(\mathrm{A}(I_k)) = |\det\mathrm{A}|m(I_k) = 0 \cdot m(I_k) = 0\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

因$\mathrm{A}(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}(I_k)$, 故$\mathrm{A}(\mathbb{R}^d)$ 是可数个零测的并, 所以$\mathrm{A}(\mathbb{R}^d)$是L-零测集. 这里的关键是：0 是绝对常数0, 而不是不定型极限中变化着的无穷小! 其它类似现象都可以按此解释.

§1.6. 不可测集的存在性

不可测集的存在性的证明一定是非构造性的, 或者是抽象“构造”的, 因为至少直观上看, 任何具体造出的集合都是Borel 集合从而是可测集。不可测集的抽象“构造”依靠选择公理, 所以我们先回忆选择公理。

【选择公理】设$\{X\}$ 是由一些(有限多个或无限多个)互不相交的非空集合X组成的集合族。则存在一个子集$C \subset \bigcup X$ 使得对每个X, 交集$C \cap X = \{x\}$是单点集，这个单点集中的元素x称为它所在集合X的代表元, 而代表元的集合C称为代表团。 □

注意, 在选择公理的这个表述中, “互不相交”是重要条件, 不能去掉, 否则容易造出反例。此外注意, 对任意一个非空集合X, 将这个选择公理用于这个集合X上, 则这个选择公理是说, 即便无法给出或无法描述选取元素的方法, 仍可以从X中取出一个元素来做事情。

注意在这个选择公理中, 所考虑的集合族中的集合是没有编号(没有下标的), 这是因为在某些情况下, 对集合编号是很难实现的。

但是若所考虑的集合族中的集合是可编号的(有下标的), 则应用上述选择公理我们可以得到另一版本的选择公理, 其中不要求集合之间“互不相交”, 从而更加体现了“选择”的作用!

【命题(选择公理的另一版本)】设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是由一些非空集合组成的集合族。则存在一个选择映射$\varphi : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ 使得对任意$\alpha \in A$ 有$\varphi(\alpha) \in X_\alpha$.

[于是$x_\alpha := \varphi(\alpha)$ 即为X_α的代表元, $C := \{x_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ 即为代表团.]

【证】令

$$\widetilde{X}_\alpha = \{(x, \alpha) \mid x \in X_\alpha\}, \quad \alpha \in A.$$

则易见$\widetilde{X}_\alpha$互不相交: 当$\alpha, \beta \in A$ 且$\alpha \neq \beta$时, $\widetilde{X}_\alpha \cap \widetilde{X}_\beta = \emptyset$. 将上述选择公理用于集合族$\{\widetilde{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 则存在一个子集$\widetilde{C} \subset \bigcup_{\alpha\in A} \widetilde{X}_\alpha$ 使得对每个$\alpha \in A$, 交集$\widetilde{C} \cap \widetilde{X}_\alpha = \{(\alpha, x_\alpha)\}$是单点集. 定义映射$\varphi : A \mapsto \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ 如下: 对任意$\alpha \in A$, 定义$\varphi(\alpha) = x_\alpha$. 要证明这个$\varphi$是个映射(也即$\varphi$是被良好定义的), 也即须且只需证明当$\alpha = \beta \in$

A时$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$. 事实上若$\alpha=\beta\in A$, 则$\widetilde{X}_\alpha=\widetilde{X}_\beta$ 从而有$\widetilde{C}\cap\widetilde{X}_\alpha=\widetilde{C}\cap\widetilde{X}_\beta$. 这蕴含$(\alpha,x_\alpha)=(\beta,x_\beta)$. 因此$x_\alpha=x_\beta$ 所以$\varphi(\alpha)=x_\alpha=x_\beta=\varphi(\beta)$. $\square$

【命题1.6.1(不可测集的存在性)】$\mathbb{R}^d$中每个L-测度大于零的L-可测集都含有一个L-不可测集。因此若一个L-可测集的每个子集都是L-可测集, 则此集合必是L-零测集。

【证(by Sierpinski)】设$E\subset\mathbb{R}^d$ 为L-可测集且$m(E)>0$. 来证明E 含有一个L-不可测集。由测度的单调极限性质有

$$m(E)=\lim_{k\to+\infty}m(E\cap[-k,k]^d)\,.$$

因此存在$R\in\mathbb{N}$ 使得$m(E\cap[-R,R]^d)>0$. 所以不失一般性我们可以假定$E\subset[-R,R]^d$ 且$m(E)>0$.

我们对E 中的点做等价分类:

$$\text{对任意}x,y\in E,\ \text{定义}\quad x\sim y\iff x-y\in\mathbb{Q}^d.$$

由有理点集$\mathbb{Q}^d$ 关于向量加减法运算封闭易见"$\sim$ " 确是E 上的一个等价关系, 即下面三个规定性质成立:

$$x\sim x\,;\quad x\sim y\Longrightarrow y\sim x;\quad x\sim y\ \text{且}\ y\sim z\Longrightarrow x\sim z.\qquad (x,y,z\in E\ )$$

设$[x]$ 为E 中的点x 所属的等价类, 即$[x]=\{z\in E\,|\,z\sim x\}$. 由等价关系的定义我们有

$$[x]\cap[y]\neq\emptyset\Longleftrightarrow x\sim y\Longleftrightarrow[x]=[y].\ \text{也即}[x]\cap[y]=\emptyset\Longleftrightarrow[x]\neq[y].$$

设$\{[x]\}$ 是E 中所有互不相同的等价类的全体。因为这些等价类互不相交, 据选择公理, 存在集合$W\subset\bigcup[x]$ 使得W 与每个等价类$[x]$ 的交集$W\cap[x]$ 为单点集, 换言之W 是由从每个等价类中取出一个代表元组成的代表团。设$\{r_k\}_{k=1}^\infty=\mathbb{Q}^d\cap[-2R,2R]^d$, 其中$r_k$ 互不相同。令$W_k=W+r_k$ (平移)。来证明

$$W_k\ \text{互不相交且}\ E\subset\textstyle\bigcup_{k=1}^\infty W_k\subset[-3R,3R]^d.$$

假设存在$k\neq j$ 使$W_k\cap W_j\neq\emptyset$. 取$x\in W_k\cap W_j$, 则存在$x_k,x_j\in W$ 使得$x=x_k+r_k=x_j+r_j$ 从而$x_k\sim x_j$, $[x_k]=[x_j]$. 于是$x_k,x_j\in W\cap[x_j]\Longrightarrow x_k=x_j\Longrightarrow r_k=r_j\Longrightarrow k=j$. 矛盾。所以$W_k$ 互不相交。对任意$x\in E\Longrightarrow W\cap[x]=\{y\}$(单点集) $\Longrightarrow x\sim y\Longrightarrow x-y\in\mathbb{Q}^d$. 因$x,y\in E\subset[-R,R]^d\Longrightarrow x-y\in[-2R,2R]^d$ 故$x-y\in\mathbb{Q}^d\cap[-2R,2R]^d$. 于是存在$k\in\mathbb{N}$ 使得$x-y=r_k$. 所以$x=y+r_k\in W+r_k=W_k$. 这证

明了$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$. 又由$W \subset E \subset [-R,R]^d$ 和$r_k \in [-2R,2R]^d$ 有$W+r_k \subset [-3R,3R]^d$, 因此一切$W_k = W + r_k \subset [-3R,3R]^d$, 即 $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \subset [-3R,3R]^d$.

由上面证明的包含关系得到

$$0 < m(E) = m^*(E) \le m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) \le m^*([-3R,3R]^d) = m([-3R,3R]^d) < \infty\,.$$

同时由外测度的次可加性和平移不变性$m^*(W_k) = m^*(W)$ 有

$$0 < m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(W_k) = m^*(W) + m^*(W) + m^*(W) + \cdots\,.$$

这蕴涵$m^*(W) > 0$ 于是上式右端$= +\infty$. 但$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) < \infty$, 这就给出外测度次可加的严格不等式:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) < \sum_{k=1}^{\infty} m^*(W_k)\,. \tag{1.6.1}$$

由这个严格的次可加不等式易见W (代表团)不是可测集。否则, W是可测集$\Longrightarrow$ 平移$W_k = W + r_k$ 是可测集 $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. 因W_k 互不相交, 故由可测集类的可数可加性知不等式(1.6.1) 应该是等式, 矛盾。所以W 不是可测集。因$W \subset E$, 这就证明了E含有一个不可测集。 $\square$

作业题(2018.3.14)

- 周民强《实变函数论》(第2版2008年, 北大出版社) P102 思考题1，P110 第一组2,3,4,5,6,8,9,14; 第二组1,4,5,9 (其中第9题也是Stein 和Shakarchi 的《实分析第1章第7节的习题1).

- Stein和Shakarchi的《实分析》第1章第6节习题 11 (周书中有类似解法), 13(a).

作业题(2018.3.16)

- 周民强《实变函数论》(第2版2008年, 北大出版社) P102 思考题1，P110 第一组中的15,16; 第二组中的8,13.

- Stein和Shakarchi的《实分析》第1章第6节习题 6,7.

§1.7. Vitali 覆盖引理

本节学习Vitali 覆盖引理, 它是研究集合的性质、函数局部性质以及Hausdorff 测度与积分等等的有力工具。【数学教科书中, 带人名的定理、引理都是好用的有力的工具!】

【强调】除非特别说明, 我们总要求开球、闭球的半径大于零, 开方体、闭方体的棱长大于零, 且它们是有界的, 也即总是指非退化的直径有限的球体和方体.

【定义(Vitali 覆盖)】设$E\subset\mathbb{R}^d$. 若$\mathcal{V}$ 是由$\mathbb{R}^d$中的一些(可以是不可数多个)闭球或闭方体组成的集合族, 满足: 对任意$x\in E$ 和任意$\varepsilon>0$, 存在$B\in\mathcal{V}$ 使得$x\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\varepsilon$, 则称$\mathcal{V}$ 是E的一个Vitali 覆盖. □

【例】(1) 设$E\subset\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}=\{\prod_{i=1}^d[x_i,x_i+\delta]\mid x=(x_1,x_2,...,x_d)\in E,\,0<\delta\le 1\}$. 则$\mathcal{V}$是$E$的一个Vitali 覆盖. 这是因为$\mathcal{V}$中闭方体的直径$\sqrt{d}\,\delta\in(0,\sqrt{d}]$ 可以任意小.

(2) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为开集. 则对任意$\delta>0$, 闭球族$\mathcal{V}=\{\overline{B}(x,r)\,|\,0<r\le\delta,\,\overline{B}(x,r)\subset\Omega\}$. 都是$\Omega$的一个Vitali 覆盖. 事实上对任意$x\in\Omega$, 对任意$\varepsilon>0$, 因$\Omega$ 是开集, 故存在$0<r<\min\{\delta,\varepsilon/2\}$ 使得$\overline{B}(x,r)\subset\Omega$. 由$r<\delta$ 知$\overline{B}(x,r)\in\mathcal{V}$, 而由$\mathrm{diam}(\overline{B}(x,r))=2r<\varepsilon$ 知$\mathcal{V}$是Ω的一个Vitali 覆盖. □

【保持中心不动的展缩】设B为一个有界闭球和有界闭方体, $a=(a_1,a_2,...,a_d)$是它的中心, 即

$$B=\overline{B}(a,r)\quad\text{或}\quad B=\prod_{i=1}^d\Big[a_i-\frac{l}{2},\,a_i+\frac{l}{2}\Big].$$

用平移和展缩, 二者也可写成

$$B=r\mathbb{B}^d+a\quad\text{或}\quad B=l\Big[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\Big]^d+a.$$

这里$\mathbb{B}^d=\{x\in\mathbb{R}^d\mid |x|\le 1\}$ 是闭单位球.

对任意$\lambda>0$, 令λB 表示与B 有相同的中心、直径扩大或缩小了λ倍的同类集合, 即

$$\lambda B=\overline{B}(a,\lambda r)=\lambda r\mathbb{B}^d+a\quad\text{或}\quad\lambda B=\prod_{i=1}^d\Big[a_i-\frac{\lambda l}{2},\,a_i+\frac{\lambda l}{2}\Big]=\lambda l\Big[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\Big]^d+a.$$

此时易见有

$$\mathrm{diam}(\lambda B)=\lambda\mathrm{diam}(B),\quad m(\lambda B)=\lambda^d m(B),\quad m(B)=C_d[\mathrm{diam}(B)]^d$$

其中$C_d=2^{-d}m(\mathbb{B}^d)$ 当B是闭球时; $C_d=(1/\sqrt{d})^d$当B是闭方体时.

【**Vitali覆盖引理**】设$E\subset\mathbb{R}^d$, $\mathcal{V}$是E的一个Vitali 覆盖。则存在可数子集$\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\subset\mathcal{V}$, 其中$B_k$ 互不相交, $\mathbb{N}_0=\{1,2,...,N\}\,(N\in\mathbb{N})$ 或$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$, 使得

$$m^*\Big(E\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k\Big)=0.$$

【证】**(I)** 先设$E\subset\Omega$ 其中Ω是一有界开集. 此时我们证明Vitali覆盖引理中的成员$B_k\in\mathcal{V}$还可以都含于Ω内. 证明分为三步:

Step 1. 公共准备. 若$F\subset\mathbb{R}^d$为闭集, $x\in\mathbb{R}^d\setminus F$, $B\in\mathcal{V}$, 满足$x\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x,F)$, 则必有$B\cap F=\emptyset$.

这是因为若$B\cap F\neq\emptyset$, 则取一点$y\in B\cap F$ 便得到矛盾:

$$\mathrm{dist}(x,F)\le|x-y|\le\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x,F).$$

Step 2. 令$\widetilde{\mathcal{V}}=\{B\in\mathcal{V}\,|\,B\subset\Omega\}$. 则$\widetilde{\mathcal{V}}$ 也是E的Vitali 覆盖. 事实上, 对任意$x\in E$和任意$\varepsilon>0$, 因Ω 是包含E的开集, 故有$x\in\Omega$ 从而有$\mathrm{dist}(x,\Omega^c)>0$. 而由$\mathcal{V}$ 是E的Vitali覆盖知存在$B\in\mathcal{V}$使得$x\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\min\{\varepsilon,\mathrm{dist}(x,\Omega^c)\}$. 由**Step 1** 知这蕴含$B\cap\Omega^c=\emptyset$, 即$B\subset\Omega$, 因此$B\in\widetilde{\mathcal{V}}$ 且$\mathrm{diam}(B)<\varepsilon$. 所以$\widetilde{\mathcal{V}}$ 也是E的Vitali 覆盖.

如果存在$N\in\mathbb{N}$ 和$\widetilde{\mathcal{V}}$中N个互不相交的集合$B_1,B_2,...,B_N$ 使得$E\setminus\bigcup_{k=1}^N B_k=\emptyset$, 则**(I)**的证明已完成。以下假设对任意$n\in\mathbb{N}$ 和$\widetilde{\mathcal{V}}$中任何n个互不相交的集合$B_1,B_2,...,B_n$ 都有

$$E\setminus\bigcup_{k=1}^n B_k\neq\emptyset.$$

我们将用归纳操作程序证明Vitali 覆盖引理。

第1步: 取定一个$B_1\in\widetilde{\mathcal{V}}$. 因$E\setminus B_1\neq\emptyset$, 故取一点$x_0\in E\setminus B_1$. 由$B_1$ 是闭集知$\mathrm{dist}(x_0,B_1)>0$, 因此存在$B\in\widetilde{\mathcal{V}}$ 使得$x_0\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x_0,B_1)$. 由**Step 1**知这蕴含$B\cap B_1=\emptyset$. 这表明集合$\{B\in\widetilde{\mathcal{V}}\,|\,B\cap B_1=\emptyset\}$非空. 令

$$d_1=\sup_{B\in\widetilde{\mathcal{V}},B\cap B_1=\emptyset}\mathrm{diam}(B).$$

则存在$B_2\in\widetilde{\mathcal{V}}$使得

$$B_2\cap B_1=\emptyset,\quad \mathrm{diam}(B_2)>\frac{d_1}{2}.$$

第2步: 因$E\setminus(B_1\cup B_2)\neq\emptyset$, 故取一点$x_0\in E\setminus(B_1\cup B_2)$. 由$B_1\cup B_2$ 是闭集知$\mathrm{dist}(x_0,B_1\cup B_2)>0$ 因此存在$B\in\widetilde{\mathcal{V}}$ 使得$x_0\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x_0,B_1\cup B_2)$.

由**Step 1**知这蕴含$B\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset$. 这表明集合$\{B\in\widetilde{\mathcal{V}}\,|\,B\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset\}$ 非空令

$$d_2=\sup_{B\in\widetilde{\mathcal{V}},\,B\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset}\mathrm{diam}(B).$$

则存在$B_3\in\widetilde{\mathcal{V}}$使得

$$B_3\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset,\quad \mathrm{d}(B_3)>\frac{d_2}{2}.$$

假设在第n步得到了$\widetilde{\mathcal{V}}$中的互不相交的集合$B_1,B_2,...,B_{n+1}$ 满足

$\{B\in\widetilde{\mathcal{V}}\,|\,B\cap\bigcup_{j=1}^{k}B_j=\emptyset\}$ 非空,

$$\mathrm{diam}(B_{k+1})>\frac{1}{2}d_k,\qquad d_k=\sup_{B\in\widetilde{\mathcal{V}},\,B\cap\bigcup_{j=1}^{k}B_j=\emptyset}\mathrm{diam}(B)\tag{1.7.1}$$

$k=1,2,...,n$. 则在第$n+1$步, 由$E\setminus\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k\neq\emptyset$, 可取一点$x_0\in E\setminus\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k$. 由$\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k$ 是闭集知$\mathrm{dist}(x_0,\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k)>0$, 因此存在$B\in\widetilde{\mathcal{V}}$ 使得$x_0\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x_0,\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k)$. 由**Step 1**知这蕴含$B\cap\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k=\emptyset$. 这表明$\{B\in\widetilde{\mathcal{V}}\,|\,B\cap\bigcup_{j=1}^{n+1}B_j=\emptyset\}$ 非空. 于是对于

$$d_{n+1}=\sup_{B\in\widetilde{\mathcal{V}},\,B\cap\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k=\emptyset}\mathrm{diam}(B)$$

存在$B_{n+2}\in\widetilde{\mathcal{V}}$使得

$$B_{n+2}\cap\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k=\emptyset,\quad \mathrm{diam}(B_{n+2})>\frac{d_{n+1}}{2}.$$

由归纳操作原理知以上手续对每个自然数n 均可施行, 从而得到$\widetilde{\mathcal{V}}$中的互不相交的集合列$\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和正数列$\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, 它们具有上述性质.

下面证明$m^*(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=0$. 首先由$B_k\subset\Omega$ 和B_k 互不相交有

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(B_k)=m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\Big)\le m(\Omega)<\infty.\tag{1.7.2}$$

这蕴含$\lim\limits_{k\to\infty}m(B_k)=0$. 令$\underline{C}_d=\min\{2^{-d}m(\mathbb{B}^d),\,(1/\sqrt{d})^d\}$. 则有

$$m(B_k)\ge\underline{C}_d[\mathrm{diam}(B_k)]^d.\quad 因此\quad \lim_{k\to\infty}\mathrm{diam}(B_k)=0.$$

令$\lambda=5\sqrt{d}$ 并令λB_k 表示与B_k 有相同的中心、直径扩大了λ倍的同类集合。来证明

$$E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}B_k\subset\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\lambda B_k,\qquad n=1,2,3,\dots.\tag{1.7.3}$$

对任意$n\in\mathbb{N}$ 和任意$x\in E\setminus\bigcup_{k=1}^n B_k$, 因$\bigcup_{k=1}^n B_k$ 是闭集, 故$\mathrm{dist}(x,\bigcup_{k=1}^n B_k)>0$, 因此存在$B\in\widetilde{\mathcal{V}}$ 使得$x\in B$ 且$|B|<\mathrm{dist}(x,\bigcup_{k=1}^n B_k)$. 由**Step 1**知这蕴含$B\cap\bigcup_{k=1}^n B_k=\emptyset$. 易见

$$\text{集合 }\{k\in\mathbb{N}\mid k\ge n+1,\ \ B\cap B_k\neq\emptyset\}\text{ 非空.}$$

否则, 这集合为空集, 则由$B\cap\bigcup_{k=1}^n B_k=\emptyset$ 有$B\cap B_k=\emptyset$ for all $k=1,2,3,\dots$. 于是由d_k的定义以及$\mathrm{diam}(B_{k+1})$与d_k的关系(1.7.1) 有

$$\mathrm{diam}(B_{k+1})>\frac{1}{2}d_k\ge\frac{1}{2}\mathrm{diam}(B)\quad\text{for all }\ k=1,2,3,\dots.$$

这与$\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{diam}(B_k)=0$ 矛盾。令

$$j=\min\{k\in\mathbb{N}\mid k\ge n+1,\ \ B\cap B_k\neq\emptyset\}.$$

则$j\ge n+1$, $B\cap B_j\neq\emptyset$ 且$B\cap\bigcup_{k=1}^{j-1}B_k=\emptyset$. 这蕴含

$$\mathrm{diam}(B)\le d_{j-1}<2\mathrm{diam}(B_j).$$

设$a_j=(a_{j1},a_{j2},...,a_{jd})$为$B_j$的中心. 则借助一点$y\in B\cap B_j$ 我们有 (注意$x\in B$)

$$|x-a_j|\le|x-y|+|y-a_j|\le\mathrm{diam}(B)+\frac{1}{2}\mathrm{diam}(B_j)\le\frac{5}{2}\mathrm{diam}(B_j).$$

若$B_j=\overline{B}(a_j,r_j)$是闭球, 则$\frac{5}{2}\mathrm{diam}(B_j)=5r_j$ 从而有$x\in\overline{B}(a_j,5r_j)=5\overline{B}(a_j,r_j)=5B_j\subset\lambda B_j$. 若$B_j=\prod_{i=1}^d[a_{ji}-\frac{1}{2}l_j,a_{ji}+\frac{1}{2}l_j]$ 是闭方体, 则$\frac{5}{2}\mathrm{diam}(B_j)=5\sqrt{d}\,\frac{1}{2}l_j=\lambda\frac{1}{2}l_j$ 从而有$x\in\prod_{i=1}^d[a_{ji}-\lambda\frac{1}{2}l_j,a_{ji}+\lambda\frac{1}{2}l_j]=\lambda B_j$. 总之有$x\in\lambda B_j$. 于是再由$j\ge n+1$ 知$x\in\bigcup_{k=n+1}^\infty\lambda B_k$. 所以(1.7.3) 成立.

最后由(1.7.3) 有

$$E\setminus\bigcup_{k=1}^\infty B_k\subset E\setminus\bigcup_{k=1}^n B_k\subset\bigcup_{k=n+1}^\infty\lambda B_k,\qquad n=1,2,3,...$$

于是结合$m(\lambda B_k)=\lambda^d m(B_k)$和收敛性(1.7.2)得到

$$m^*\Big(E\setminus\bigcup_{k=1}^\infty B_k\Big)\le\sum_{k=n+1}^\infty m(\lambda B_k)=\lambda^d\sum_{k=n+1}^\infty m(B_k)\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以$m^*(E\setminus\bigcup_{k=1}^\infty B_k)=0$.

(**II**) 对一般情形, 令$E_{\mathbf{p}}=E\cap Q_{\mathbf{p}}$ 其中$Q_{\mathbf{p}}=\prod_{i=1}^d(p_i,p_i+1)$ 是开方体, $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_d)\in\mathbb{Z}^d$. 因闭方体$\overline{Q}_{\mathbf{p}}$的全体覆盖了$\mathbb{R}^d$ 而$Q_{\mathbf{p}}$的边界是零测集, 故

$$E=Z\cup\bigcup_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}_0^d}E_{\mathbf{p}}\quad\text{其中}Z\text{是零测集, }\mathbb{Z}_0^d=\{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\mid E_{\mathbf{p}}\neq\emptyset\}.$$

由Vitali 覆盖的定义知$\mathcal{V}$ 也是E的子集$E_{\mathbf{p}}$的Vitali覆盖。因$E_{\mathbf{p}}\subset Q_{\mathbf{p}}$ 且$Q_{\mathbf{p}}$ 是有界开集, 故由(**I**)的结果知存在可数子集$\{B_{\mathbf{p},k}\}_{k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}}\subset\mathcal{V}$, 其中$B_{\mathbf{p},k}$互不相交且均含于$Q_{\mathbf{p}}$内, 使得差集$E_{\mathbf{p}}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}}B_{\mathbf{p},k}$ 是零测集。这蕴含

$$E\setminus\bigcup_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}_0^d,\,k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}}B_{\mathbf{p},k}\subset Z\cup\bigcup_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}_0^d}\Big(E_{\mathbf{p}}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}}B_{\mathbf{p},k}\Big)\quad\text{是零测集.}$$

由于$Q_{\mathbf{p}}$互不相交, 故$B_{\mathbf{p},k}$ 也互不相交, 即当$\mathbf{p}\neq\mathbf{q}$时对任意$k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}$ 和任意$j\in\mathbb{N}_{\mathbf{q}}$ 有$B_{\mathbf{p},k}\cap B_{\mathbf{q},j}=\emptyset$; 当$\mathbf{p}=\mathbf{q}$时, 对任意$k,j\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}},k\neq j$, 有$B_{\mathbf{p},k}\cap B_{\mathbf{p},j}=\emptyset$. 将可数集$\{B_{\mathbf{p},k}\}_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}_0^d,k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}}$ 排成一列$\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 其中$\mathbb{N}_0=\{1,2,...,N\}\,(N\in\mathbb{N})$或$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$, 则$B_k\in\mathcal{V}$互不相交且$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k=\bigcup_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}_0^d,\,k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}}B_{\mathbf{p},k}$, 因此

$$m^*\Big(E\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k\Big)=m^*\Big(E\setminus\bigcup_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}_0^d,\,k\in\mathbb{N}_{\mathbf{p}}}B_{\mathbf{p},k}\Big)=0.\qquad\Box$$

Vitali覆盖引理 有很多应用. 下面列出典型的几个.

【Vitali覆盖引理的应用1】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为一非空开集. 则对任意$\delta>0$ 存在一列直径$\le\delta$的互不相交的闭球$B_k\subset\Omega,k=1,2,3,...$, 使得

$$m\Big(\Omega\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\Big)=0.$$

【证】前面例子中已说明闭球族$\mathcal{V}=\{\overline{B}(x,r)\,|\,0<r\le\delta,\,\overline{B}(x,r)\subset\Omega\}$ 是Ω的一个Vitali 覆盖. 由**Vitali覆盖引理**, 存在可数多个互不相交的闭球$B_k\in\mathcal{V},k\in\mathbb{N}_0$, 使得$m(\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k)=0$, 其中$\mathbb{N}_0$ 是有限集或$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$. 若$\mathbb{N}_0$是有限集, 则$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k$ 是闭集从而$\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k$ 是开集. 于是由$m(\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k)=0$ 知$\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k=\emptyset$. 因一切$B_k\subset\Omega$, 故得到$\Omega=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k$ 从而Ω 既开又闭. 这蕴含$\Omega=\mathbb{R}^d$, 与$m(\Omega)<\infty$ 矛盾. 因此只能是$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$. 所以$m(\Omega\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=0$. $\Box$

【例】从直观上看, **Vitali覆盖引理的应用1**有些意外。例如对于平面闭矩形$[0,1]\times[0,1]$, 可以证明$[0,1]\times[0,1]$不能表示成互不重叠的非退化的闭圆盘的并。但**Vitali覆盖引理的应用1**表明: 开矩形$(0,1)\times(0,1)$ 可以表示成可数多个互不相交的闭球B_k的并外加一个2维零测集: $(0,1)\times(0,1)=Z_0\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}B_j$, $m(Z_0)=0$. 令$Z=Z_0\cup\partial((0,1)\times(0,1))$, 则$m(Z)=0$ 且$[0,1]\times[0,1]=Z\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$. 这表明：$[0,1]\times[0,1]$可以表示成可数多个互不相交的闭圆盘的并外加一个2维零测集。如果同学们用手在方块$[0,1]\times[0,1]$内画出一个一个互不相交的小圆盘$B_1,B_2,B_3,...$, 估计很多人不相信

剩余集$[0,1]\times[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$可以是一个2维零测集。但是Vitali证明了这是可能的。所以不仅要有直观, 还要用严格论证来检验直观和纠正直观。这个例子就说明了这个道理: 直观与事实不一定总一致。 □

【Vitali覆盖引理的应用2】$\mathbb{R}^d$中的任意多个闭球或闭方体的并集是L-可测集. 详细来说, 设$\mathcal{K}$是由$\mathbb{R}^d$中的若干个(包括不可数多个) 闭球或闭方体K 组成的集合, 则并集

$$D:=\bigcup_{K\in\mathcal{K}}K\quad \text{是}L\text{-可测集.}$$

进一步: 当$d=1$时(此时每个B都是闭区间), D实际上是F_σ-型集。但$d\ge 2$时, 存在不可数多个闭球, 它们的并集不是Borel 集。

【证】先看$d=1$的情形[此处特别感谢**2016级杜信廷同学**告知这一结果和其他一般结果.] 令K°为K的内部, 则由K是闭区间知K°是开区间. 令$G=\bigcup\limits_{K\in\mathcal{K}}K^\circ$. 则$G$是$\mathbb{R}$中的开集, 因此由$\mathbb{R}$中开集的结构定理知

$$G=\bigcup_{j\in\mathbb{N}_0}(a_j,b_j),\quad \text{其中}(a_j,b_j)\text{是互不相交的有界或无界的开区间}$$

$\mathbb{N}_0=\{1,2,...,N\}\,(N\in\mathbb{N})$ 或$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$. 令

$$Z=D\cap\{a_j,b_j\mid j\in\mathbb{N}_0\}.$$

易见Z是可数集. 来证明

$$D=G\cup Z.$$

显然有$G\cup Z\subset D$. 为证反向包含, 先证明对任意$K\in\mathcal{K}$, 存在$j\in\mathbb{N}_0$使得$K^\circ\subset(a_j,b_j)$从而有

$$K=\overline{K^\circ}\subset\overline{(a_j,b_j)}=\begin{cases}(-\infty,b_j] & \text{if}\quad -\infty=a_j<b_j<\infty\\ [a_j,\,b_j] & \text{if}\quad -\infty<a_j<b_j<\infty\\ [a_j,+\infty) & \text{if}\quad -\infty<a_j<b_j=+\infty\end{cases}$$

事实上由G的定义和上面的分解式知

$$K^\circ=\bigcup_{j\in\mathbb{N}_0}K^\circ\cap(a_j,b_j).$$

注意$K^\circ\cap(a_j,b_j)$也是互不相交的开集. 因K°是连通开集(开区间!), 故由连通开集的性质知这些互不相交的开集$K^\circ\cap(a_j,b_j)$中只有一个是非空的. 所以存在$j\in\mathbb{N}_0$使

得$K^\circ = K^\circ \cap (a_j, b_j) \subset (a_j, b_j)$. 现在任取$x \in D$, 则存在$K \in \mathcal{K}$ 使得$x \in K$. 对这个K, 在$j \in \mathbb{N}_0$使得$K^\circ \subset (a_j, b_j)$ 从而有$x \in K \subset \overline{(a_j, b_j)}$. 若$x \in (a_j, b_j)$, 则$x \in G$; 若$x \notin (a_j, b_j)$, 则必有$x \in \{a_j, b_j\}$ 从而有$x \in Z$. 这证明了$x \in G \cup Z$. 所以$D \subset G \cup Z$. 所以$D = G \cup Z$. 最后由开集和可数集都是F_σ-型集以及可数个F_σ-型集的并也是F_σ-型集可知$D = G \cup Z$是F_σ-型集。

下面对于$d \geq 2$的情形证明D是L-可测集. 令

$$G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K^\circ, \quad E = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \partial K.$$

则G是开集且

$$D = G \cup E.$$

来做E的一个Vilati 覆盖. 任取$K \in \mathcal{K}$. 先设$K = \overline{B}(a, r)$ 是闭球. 对任意$x \in \partial K$ 和任意$0 < \delta < r$, 令$\theta = \delta / r, b = (1 - \theta)x + \theta a$, 则有$x \in \overline{B}(b, \delta) \subset K$.

[详细: 我们有$|x - b| = \theta|a - x| = \theta r = \delta$ 因此$x \in \partial B(b, \delta) \subset \overline{B}(b, \delta)$. 而对任意$y \in \overline{B}(b, \delta)$ 有$|y - a| \leq |y - b| + |b - a| \leq \delta + (1 - \theta)|x - a| = \delta + (1 - \theta)r = \theta r + (1 - \theta)r = r$. 所以$y \in K$, 所以$\overline{B}(b, \delta) \subset K$.]

其次设$K = \prod_{i=1}^d [a_i, a_i + l]$闭方体. 对任意$x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \partial K$ 和任意$0 < \delta < l/2$, 对每个$i \in \{1, 2, ..., d\}$ 令

$b_i = x_i$ 当$a_i \leq x_i < a_i + l/2$; $b_i = x_i - \delta$ 当$a_i + l/2 \leq x_i \leq a_i + l$.

则$x \in \prod_{i=1}^d [b_i, b_i + \delta] \subset K$.

将所有这样做成的闭球$\overline{B}(b, \delta)$和或闭方体$\prod_{i=1}^d [b_i, b_i + \delta]$ 做成一个集合$\mathcal{V}$. 来证明$\mathcal{V}$是E的一个Vilati 覆盖且$\mathcal{V}$中每个成员是$\mathcal{K}$中某个成员的子集.

事实上对任意$x \in E$, 存在$K \in \mathcal{K}$使得$x \in \partial K$. 对任意$\varepsilon > 0$, 由上面做法知存在$B \in \mathcal{V}$ 使得$x \in B \subset K$ 且$\mathrm{diam}(B) < \varepsilon$. 所以$\mathcal{V}$是$E$的一个Vilati 覆盖且具有所说的性质。

据Vilati覆盖引理, 存在可数子集$\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{V}$, 其中$B_j$ 互不相交, $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, ..., N\}$ $(N \in \mathbb{N})$ 或$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$, 使得$m^*(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} B_j) = 0$. 令$Z_1 = E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} B_j$, 则$m(Z_1) = 0$ 且

$$E = Z_1 \cup \Big(E \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} B_j\Big) = Z_1 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} E \cap B_j.$$

令

$$Z_2 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} E \cap \partial B_j.$$

则由于d 维闭球和闭方体的边界都是d 维零测集, 故Z_2是零测集. 易见

$$E = Z_1 \cup Z_2 \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} E \cap B_j^\circ.$$

由$\mathcal{V}$的做法可知, 对每个B_j, 存在$K \in \mathcal{K}$ 使得$B_j \subset K$, 从而有$B_j^\circ \subset K^\circ \subset G$. 这表明, 对每个$j \in \mathbb{N}_0$ 都有$B_j^\circ \subset G$. 于是得到$\bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} B_j^\circ \subset G$ 从而有

$$E \subset Z_1 \cup Z_2 \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} B_j^\circ \subset Z_1 \cup Z_2 \cup G.$$

由此和$Z_1 \cup Z_2 \subset E$ 得到

$$D = G \cup E \subset G \cup Z_1 \cup Z_2 \subset G \cup E = D$$

所以

$$D = G \cup Z_1 \cup Z_2.$$

因G是开集从而是L-可测集, $Z_1 \cup Z_2$是L-零测集从而是L-可测集, 故D是L-可测集。

最后对于$d \geq 2$ 来做出不可数多个闭球使得它们的并集不是Borel 集.

设W是$\mathbb{R}^{d-1}$中的一个Lebesgue 不可测集. 则W 当然不是Borel 集. 考虑以$W \times \{0\}$ 正的点为中心的闭单位球的并:

$$D = \bigcup_{a\in W\times\{0\}} \overline{B}(a,1).$$

则易见

$$(\mathbb{R}^{d-1} \times \{1\}) \cap D = W \times \{1\}.$$

若D是Borel 集, 则由两个Borel集的交还是Borel 集知$W \times \{1\}$应是Borel 集。因$x \mapsto f(x) = (x,1)$ 是$\mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^{d-1} \times \{1\}$的同胚, 故由$f(W) = W \times \{1\}$是Borel 集知$W$也应是Borel 集, 这就产生矛盾。所以并集$D$不是Borel集。 $\square$

【Vitali覆盖引理的应用3】见第三章第1节关于Lebesgue微分定理的证明.

习题课(2018-3-23)

1. (可数覆盖) 设集合$E \subset \mathbb{R}^d$被$\mathbb{R}^d$ 的开集族$\mathcal{G}$ 覆盖. 则存在可数子族$\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{G}$ 使得$\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$仍然覆盖$E$, 这里$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, ..., N\}$ $(N \in \mathbb{N})$ 或$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$.

【证】由假设有$E \subset \bigcup_{U\in\mathcal{G}} U$. 应用开集的方体分解定理知$\bigcup_{U\in\mathcal{G}} U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ 其中Q_k是互不相交的左闭右开的方体。对每个$k \in \mathbb{N}$, 易知存在$U_k \in \mathcal{G}$ 使得$Q_k \cap U_k \neq \emptyset$. 于是有$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. 对序列$\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$, 由**命题1.1.0**知存在$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ 如上使得U_{k_j} $(j \in \mathbb{N}_0)$ 互不相同且对任意$k \in \mathbb{N}$ 有$U_k \in \{U_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}_0}$. 这给出$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} U_{k_j}$. 调整记号: 将$U_{k_j}$记作$U_j$ 即得$E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} U_j$. □

2. 设$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$为$\mathbb{R}^d$中$L$-可测集的全体, 集合$A, B \subset \mathbb{R}^d$满足

$$A \cup B \in \mathcal{M}, \quad m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) < \infty. \tag{1}$$

证明$A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M}$ 且$m(A \cap B) = 0$.

【证】首先证明若$A, B \in \mathcal{M}$(从而$A \cap B \in \mathcal{M}$), 则有$m(A \cap B) = 0$. 事实上若$A, B \in \mathcal{M}$, 则由关于可测集的等式

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

和$m(A) = m^*(A), m(B) = m^*(B)$ 以及(1)得到

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A \cup B) < \infty.$$

因此$m(A \cap B) = 0$.

下证$A, B \in \mathcal{M}$. 由集合外测度的等价定义$m^* = m^*_{\rm open}$ 易见存在G_δ-型集合$H_A \supset A$ 和$H_B \supset B$ 使得$m(H_A) = m^*(A), m(H_B) = m^*(B)$ (这只是说明等测包存在)。

结合假设(1)有

$$m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) = m(H_A) + m(H_B)$$

$$= m(H_A \cup H_B) + m(H_A \cap H_B) \geq m(A \cup B) + m(H_A \cap H_B) \tag{2}$$

因$m(A \cup B) < \infty$ 故这蕴含$m(H_A \cap H_B) = 0$. 于是再由(2)得知

$$m(A \cup B) = m(H_A \cup H_B).$$

但$H_A\cup H_B\supset A\cup B$, 故再由$m(A\cup B)<\infty$得到

$$m((H_A\cup H_B)\setminus(A\cup B))=m(H_A\cup H_B)-m(A\cup B)=0.$$

以上证明了

$$m(H_A\cap H_B)=0,\quad m((H_A\cup H_B)\setminus(A\cup B))=0.$$

下证

$$H_A\setminus A\subset[(H_A\cup H_B)\setminus(A\cup B)]\cup[H_A\cap H_B]. \tag{3}$$

对任意$x\in H_A\setminus A$, 有$x\in H_A, x\notin A$. 若$x\notin H_A\cap H_B$ 则必有$x\notin H_B$ 从而有$x\notin B$ 这蕴含$x\notin A\cup B$ 从而$x\in(H_A\cup H_B)\setminus(A\cup B)$. 所以(3) 成立. 因(3)式右边是$L$-零测集, 故$H_A\setminus A\in\mathcal{M}$ 也是L-零测集从而属于$\mathcal{M}$. 于是由$A=H_A\setminus(H_A\setminus A)$ 即知$A\in\mathcal{M}$. 同理可证$B\in\mathcal{M}$. $\square$

3.【一维Vitali覆盖引理】(这是上面**Vitali覆盖引理**之前的版本, 证法相同.)

4. 本题学习Lebesgue 测度的平移不变性的应用和一类可测集之间的独立性。对$[0,1)$中的每个子集S, 令$S_{\rm ir}$为S中的无理数的全体, 即$S_{\rm ir}=S\setminus\mathbb{Q}$. 设

$$A_k=\bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}\Big[\frac{2j-2}{2^k},\frac{2j-1}{2^k}\Big)_{\rm ir},\quad B_k=\bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}\Big[\frac{2j-1}{2^k},\frac{2j}{2^k}\Big)_{\rm ir},\quad k=1,2,3,\dots.$$

对每个$k\in\mathbb{N}$ 随意取定$E_k\in\{A_k,\,B_k\}$.

证明：这样取定的集合列$\{E_k\}_{k=1}^\infty$ 具有下列性质:

$$m(E_k)=\frac{1}{2},\quad k=1,2,3,\dots;$$

对任意$n\in\mathbb{N}$ 和任意正整数$1\le k_1<k_2<\cdots<k_n$ 都有

$$m\Big(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\Big)=m(E_{k_1})m(E_{k_2})\cdots m(E_{k_n})=\Big(\frac{1}{2}\Big)^n.$$

(用概率论的语言来说, $E_1,E_2,E_3,\dots$是$[0,1)$中互相独立的事件。这个例子有助于消除概率论中的重要概念—— 相互独立—— 的“神秘性”。)

此外证明对任意任意正整数子列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$ 有

$$m\Big(\bigcap_{n=1}^\infty E_{k_n}\Big)=0,\quad m\Big(\bigcap_{j=1}^\infty\bigcup_{n=j}^\infty E_{k_n}\Big)=1.$$

【证】由A_k,B_k的定义易见

$$[0,1)_{\rm ir}=A_k\cup B_k,\quad A_k\cap B_k=\emptyset,\quad A_k+\frac{1}{2^k}=B_k$$

因此由无理数集是满测度集和平移不变性有

$$1=m([0,1)_{\rm ir})=m(A_k)+m(B_k)=2m(A_k)=2m(B_k)$$

所以

$$m(A_k)=m(B_k)=\frac{1}{2}.\quad \text{因此}\quad m(E_k)=\frac{1}{2}\quad \forall\, E_k\in\{A_k,\,B_k\}.$$

由小数的2-进表示易见

$$A_k=\{x\in[0,1)_{\rm ir}\,|\,x\text{的2-进制表示}x=0.a_1a_2a_3...=\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}\text{ 中的第}k\text{ 位数字}a_k=0\},$$

$$B_k=\{x\in[0,1)_{\rm ir}\,|\,x\text{的2-进制表示}x=0.a_1a_2a_3...=\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}\text{ 中的第}k\text{ 位数字}a_k=1\}.$$

这里需要回顾事实: 无理数的2-进制表示是唯一的, 即若$x\in[0,1)_{\rm ir}$, 则它的2-进制表示$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$ 中的所有$a_1,a_2,a_3,...\in\{0,1\}$ 由x唯一确定。

对任意$E_k\in\{A_k,\,B_k\}$, 令$a_k(E_k)$为E_k中的小数的2-进表示中的第k位数字, 即

$$a_k(E_k)=\begin{cases}0 & \text{if }\ E_k=A_k\\ 1 & \text{if }\ E_k=B_k.\end{cases}$$

令

$$E_k^c=[0,1)_{\rm ir}\setminus E_k.$$

则易见$E_k^c\in\{A_k,\,B_k\}$ 且

$$a_k(E_k^c)=1-a_k(E_k).$$

对任意$n\in\mathbb{N}$, 任意互不相同的自然数$1\le k_1<k_2<\cdots<k_n$ 和任意选择

$E_{k_1}\in\{A_{k_1},\,B_{k_1}\},E_{k_2}\in\{A_{k_2},\,B_{k_2}\},...,E_{k_n}\in\{A_{k_n},\,B_{k_n}\}$, 成立平移关系:

$$E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}=A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_n}+h_n \tag{6}$$

其中

$$h_n=\frac{a_{k_1}(E_{k_1})}{2^{k_1}}+\frac{a_{k_2}(E_{k_2})}{2^{k_2}}+\cdots+\frac{a_{k_n}(E_{k_n})}{2^{k_n}}.$$

事实上 $x\in E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\iff x$的2-进制表示中的第$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 位的数字分别是$a_{k_1}(E_{k_1}),a_{k_2}(E_{k_2}),...,a_{k_n}(E_{k_n})$ (这蕴含$x-h_n\ge 0$) $\iff x-h_n$的2-进制表示中的第$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 位都是0 $\iff x-h_n\in A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_n}\iff x\in A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_n}+h_n$. 所以(6)成立。

由这一平移关系得到

$$m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n})=m(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_n}).$$

据此不难证明

$$m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n})=\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\qquad\forall\, 1\le k_1<k_2<\cdots<k_n.$$

事实上当集合的个数$n=1$时, 这等式成立。假设在集合的个数为n时成立, 看集合个数为$n+1$时: 注意$[0,1)_{\rm ir}=E_{k_{n+1}}\cup E_{k_{n+1}}^c$ (不交并) 有

$$E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}=\Big(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}}\Big)\cup\Big(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}}^c\Big).$$

同时有

$$\begin{aligned}&m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}})=m(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_{n+1}})\\&=m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}}^c).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n})=m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}})\\&+m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}}^c)=2m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}})\end{aligned}$$

所以

$$m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n}\cap E_{k_{n+1}})=\frac{1}{2}m(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_n})=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}.$$

由归纳法原理, 所证等式成立。

最后对每个$k\in\mathbb{N}$ 随意取定$E_k\in\{A_k,\,B_k\}$. 对任意任意正整数子列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$, 由上面证明的结果有

$$m\Big(\bigcap_{n=j}^{\infty}E_{k_n}\Big)=\lim_{N\to\infty}m\Big(\bigcap_{n=j}^{j+N}E_{k_n}\Big)=0,\quad j=1,2,3,\dots.$$

因E_k^c与E_k地位相同, 故也有

$$m\Big(\bigcap_{n=j}^{\infty}E_{k_n}^c\Big)=0,\quad j=1,2,3,\dots.$$

于是

$$[0,1)_{\rm ir}\setminus\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}E_{k_n}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}E_{k_n}^c=\text{等于可数个零测集的并}$$

因此

$$m\Big([0,1)_{\mathrm{ir}}\setminus\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}E_{k_n}\Big)=0\qquad\text{所以}\quad m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}E_{k_n}\Big)=1.$$

□

5. 设$E_k\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\,(k=1,2,3,...)$ 和$\varepsilon>0$ 满足

$$m(E_k)\ge\varepsilon,\quad k=1,2,3,...;\qquad m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)<\infty.$$

证明

$$m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)\ge\varepsilon>0.$$

因此特别可知存在子列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$ 使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{k_n}\ne\emptyset.$$

但是**可以**出现这样的情形:

对于严格递增的任意正整数列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$, 都有$m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{k_n})=0$.

【证】我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\supset\bigcup_{k=2}^{\infty}E_k\supset\bigcup_{k=3}^{\infty}E_k\supset\cdots,\qquad m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)<\infty.$$

因

$$m\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)\ge m(E_j)\ge\varepsilon,\quad j=1,2,3,...$$

故由测度的单调极限定理即得

$$m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)=\lim_{j\to\infty}m\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)\ge\varepsilon>0.$$

这个测度>0蕴含$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\ne\emptyset$. 取$x_0\in\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k$.

则对于$j=1$ 有$x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, 因此存在$k_1\ge1$ 使得$x_0\in E_{k_1}$.

对于$j=k_1+1$ 有$x_0\in\bigcup_{k=k_1+1}^{\infty}E_k$, 因此存在$k_2\ge k_1+1$ 使得$x_0\in E_{k_2}$.

对于$j=k_2+1$ 有$x_0\in\bigcup_{k=k_2+1}^{\infty}E_k$, 因此存在$k_3\ge k_2+1$ 使得$x_0\in E_{k_3}$.

如此操作下去, 用归纳法, 我们得到严格递增的自然数列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$ 使得$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{k_n}$. 所以$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{k_n}\ne\emptyset$.

最后我们来构造一个使得任何交集$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}$皆为零测集的$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$的例子.

可以假设$d \ge 2$ (此时的证明过程已包含了对$d=1$时的证明, 或者对$d=1$的情形直接用第**3**题的结果)。令$A_k \subset [0,1)$为第**3**题中的集合, 即$A_k = \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k}\right)_{\mathrm{ir}}$, 令

$$E_k = A_k \times [0,1)^{d-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

则有

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k}\right)_{\mathrm{ir}} \times [0,1)^{d-1} = \Big(\bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k}\right) \times [0,1)^{d-1}\Big) \setminus Z$$

其中$Z \subset \mathbb{Q} \times [0,1)^{d-1}$ 因而Z是d维零测集。于是由可加性和L-测度保持区间体积有

$$m(E_k) = \sum_{j=1}^{2^{k-1}} m\Big(\left[\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k}\right) \times [0,1)^{d-1}\Big) = 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

同时由

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset [0,1)^d \qquad \text{有} \quad m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \le 1 < \infty.$$

易见对任意子列$1 \le k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ 有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_{k_n} \times [0,1)^{d-1}) = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) \times [0,1)^{d-1}.$$

因$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$是一维零测集(这是第**3**题结果), 故由零测集性质知$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}$是$d$维零测集, 即$m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}) = 0$. 【当然, 据本题前半部分的结果知**存在** 严格递增的自然数列$1 \le k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ 使得$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n} \neq \emptyset$. 事实上取定一个$t_0 \in [0,1)_{\mathrm{ir}}$, 即$t_0$是$[0,1)$中的无理数. 做2-进展开$t_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, a_k \in \{0,1\}$. 令$\mathbb{N}_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k = 0\}$. 则$\mathbb{N}_1$是无限集(否则将导致$t_0$是有理数, 矛盾)。将$\mathbb{N}_1$中元素按递增排成一列：$\mathbb{N}_1 = \{k_1, k_2, k_3, ...\}, 1 \le k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$. 则有$t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. 于是有$(t_0, 0, ..., 0) \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}) \times [0,1)^{d-1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}$.】 $\square$

6. 设$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r\}$ (=以原点为中心以$r > 0$为半径的开圆盘), $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$为一个旋转变换(正交矩阵), $E \subset B_r(0)$为一L-可测集, n 为正整数。假设对每个$x \in B_r(0)$, 存在$k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ 使得$\mathrm{A}^k x \in E$. 证明

$$m(E) \ge \frac{\pi r^2}{n+1}.$$

这里可以承认事实$m(B_r(0)) = \pi r^2$.

【证】(**建议先让学生考虑几分钟**) 由假设和 $\mathrm{A}^k x\in E \iff x\in \mathrm{A}^{-k}(E)$ 有

$$B_r(0)\subset\bigcup_{k=0}^{n}\mathrm{A}^{-k}(E).$$

因此

$$\pi r^2=m(B_r(0))\le\sum_{k=0}^{n}m(\mathrm{A}^{-k}(E))=\sum_{k=0}^{n}|\det(\mathrm{A}^{-k})|m(E)=(n+1)m(E)$$

所以$m(E)\ge\frac{\pi r^2}{n+1}$. 这里用到事实: 逆矩阵$\mathrm{A}^{-k}$也是正交阵从而有$|\det(\mathrm{A}^{-k})|=1$. $\square$

§1.8. 可测函数和简单函数逼近

有了可测集和测度, 还需要建立可测函数类, 它将用于定义和研究函数的积分—— 因为不可能对所有函数都能定义积分。

【记号】在分析学和概率论中, 广义实值函数$f : E \to [-\infty, +\infty]$ 在集合$B \subset [-\infty, +\infty]$ 下的逆象集$f^{-1}(B)$ 也常被写成直观的形式:

$$f^{-1}(B) = E(f \in B) := \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

注意, 记号$f^{-1}(B)$没有显示f的定义域, 而记号$E(f \in B)$给出了f的定义域E.

例

$$E(f > t) = E(f \in [t, +\infty]) = f^{-1}((t, +\infty]) = \{x \in E \,|\, f(x) > t\},$$

$$E(f < t) = E(f \in [-\infty, t)) = f^{-1}([-\infty, t)) = \{x \in E \,|\, f(x) < t\},$$

$$E(a \le f < b) = E(f \in [a, b)) = f^{-1}([a, b)) = \{x \in E \,|\, a \le f(x) < b\},$$

$$E(f > g) = \{x \in E \mid f(x) > g(x)\}, \quad E(f \ne g) = \{x \in E \mid f(x) \ne g(x)\}, \quad \text{etc.}$$

可测函数的定义有几个等价的版本, 我们采用下面这个比较广泛使用的版本:

【定义(广义实值可测函数)】

设$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$为$\mathbb{R}^d$中$L$-可测集的全体, $E \in \mathcal{M}$, $f : E \to [-\infty, +\infty]$. 如果

$$E(f > t) \ \in \mathcal{M} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

则称f 是E上的一个广义实值L-可测函数, 也称f 在E上L-可测。若f 是E 上的广义实值L-可测函数且f 的值域含于$\mathbb{R}$, 则称f 是E上的实值L- 可测函数。当上下文清楚时, L-可测函数也简称为可测函数。此外我们规定：任何函数都在空集上可测。 □

【注】上述定义及其导出的结果(见下面)体现了测度论的一大特点：很多情况下, 问题的处理是从函数的值域着手, 从值域上设定的性质来确定定义域应提供的性质。

在学习可测函数基本性质之前, 先看可测函数的典型例子.

【例】设$E \subset \mathbb{R}^d$是L-可测集, $f : E \to \mathbb{R}$ 连续. 则f是E上的可测函数.

【证】任取$t \in \mathbb{R}$, 要证明$E(f > t)$是可测集. 为此我们证明更强的结果: 存在开集$U_t \subset \mathbb{R}^d$使得

$$E(f > t) = U_t \cap E. \tag{1.8.1}$$

因开集是可测集、可数个可测集的交是可测集, 故$E(f>t)=U_t\cap E$是可测集, 因此f在E上可测.

为证(1.8.1), 任取$x\in E(f>t)$, 即$x\in E, f(x)>t$. 因f连续, 故对于$f(x)-t>0$, 存在$\delta_x=\delta_{x,t}>0$ 使得当$y\in B(x,\delta_x)\cap E$时$|f(y)-f(x)|<f(x)-t$. 这蕴含$f(y)>t$, 即$y\in E(f>t)$. 因此$B(x,\delta_x)\cap E\subset E(f>t)$. 由此我们得到

$$E(f>t)\subset\bigcup_{x\in E(f>t)}B(x,\delta_x)\cap E\ \subset\ E(f>t).$$

令

$$U_t=\bigcup_{x\in E(f>t)}B(x,\delta_x)$$

则U_t是开集且$E(f>t)=U_t\cap E$. □

【命题1.8.1】设$\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), E\in\mathcal{M},\ f:E\to[-\infty,+\infty]$. 则

(a) 以下(1),(2),(3),(4) 四类可测性彼此等价, 因此其中任何一个都可作为可测函数的定义：

(1) $E(f>t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}.$ (2) $E(f\ge t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}.$

(3) $E(f<t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}.$ (4) $E(f\le t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}.$

(b) 设f 可测。则(由**(a)**)

$E(f=t)=E(f\le t)\cap E(f\ge t)\in\mathcal{M}$,

$E(f<\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f<k)\in\mathcal{M}$,

$E(f>-\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>-k)\in\mathcal{M}$,

$E(|f|<\infty)=E(f<\infty)\cap E(f>-\infty)\in\mathcal{M}$,

$E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>k)\in\mathcal{M}$,

$E(f=-\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f\le -k)\in\mathcal{M}$.

(c) 设f 可测, 则对任意Borel 集$B\subset\mathbb{R}$ 有$E(f\in B)\in\mathcal{M}$.

【证】只需证(a) 和(c). 对于(a) 我们有

$$x\in E(f>t)\Longleftrightarrow x\in E\ \text{且}\ f(x)>t\ \Longleftrightarrow x\in E\ \text{且}\ \exists\, k\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ f(x)\ge t+1/k$$
$$\Longleftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ x\in E(f\ge t+1/k)\ \Longleftrightarrow\ x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\ge t+1/k)\,.$$

同理有

$$x \in E(f \geq t) \Longleftrightarrow x \in E \text{ 且 } f(x) \geq t \Longleftrightarrow x \in E \text{ 且 } f(x) > t - 1/k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\Longleftrightarrow x \in E(f > t - 1/k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > t - 1/k).$$

所以

$$E(f > t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f \geq t + 1/k), \quad E(f \geq t) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > t - 1/k).$$

因此 (1) 与(2) 等价.

同法可证对任意$t \in \mathbb{R}$ 有

$$E(f < t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f \leq t - 1/k), \quad E(f \leq t) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < t + 1/k).$$

因此(3) 与(4) 等价. 而由$E \in \mathcal{M}$ 和

$$E(f \geq t) = E \setminus E(f < t), \quad E(f < t) = E \setminus E(f \geq t)$$

可见 (2) 与(3) 等价. 这证明了蕴涵关系 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) 成立.

下证(c). 令

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid E(f \in B) \in \mathcal{M}\}.$$

则要证明的是$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 为此只需证明$\mathcal{A}$ 是一个$\sigma-$代数并且$\mathcal{A}$ 包含了$\mathbb{R}$中所有开集。如果这件事成立, 则由Borel σ-代数的定义—— 包含所有开集的最小σ-代数——可知$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 但已有$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 所以$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

我们有

$$E(f \in \mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E(f > -n) \cap E(f < n)) \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A},$$
$$B \in \mathcal{A} \Longrightarrow E(f \in B^c) = E(f \in \mathbb{R}) \setminus E(f \in B) \in \mathcal{M} \Longrightarrow B^c \in \mathcal{A},$$
$$B_k \in \mathcal{A},\ k = 1, 2, ..., \Longrightarrow E(f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f \in B_k) \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}.$$

所以$\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}$上的一个σ-代数. 进一步, 对任何有界或无界开区间$(a, b) \subset \mathbb{R}$有

$$E(f \in (a, b)) = E(f > a) \cap E(f < b) \in \mathcal{M} \Longrightarrow (a, b) \in \mathcal{A}.$$

最后对任意开集$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, 由一维开集的结构定理知存在可数多个(互不相交的)开区间(a_k, b_k) 使得

$$\mathcal{O} = \bigcup_{k \geq 1} (a_k, b_k).$$

于是有

$$E(f \in \mathcal{O}) = \bigcup_{k \geq 1} E(f \in (a_k, b_k)) \in \mathcal{M} \implies \mathcal{O} \in \mathcal{A}.$$

所以$\mathcal{A}$包含了$\mathbb{R}$中的所有开集. 因此如上所说这就证明了$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

【例】设$E \in \mathcal{M}$, $f : E \to [-\infty, +\infty]$ 为$\mathcal{M}$-可测. 则取开集$B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 可知

$$E(0 < |f| < \infty) = E(f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \in \mathcal{M}.$$

$\square$

【例】设$A \subset \mathbb{R}^d$. 则有

$$A\text{是可测集} \iff \text{特征函数}\mathbf{1}_A(x)\text{是}\mathbb{R}^d\text{上的可测函数。}$$

这是由于下面等式：对任意$t \in \mathbb{R}$ 有

$$\mathbb{R}^d(\mathbf{1}_A > t) = \begin{cases} \mathbb{R}^d & \text{if } t \leq 0 \\ A & \text{if } 0 < t < 1 \\ \emptyset & \text{if } t \geq 1. \end{cases}$$

$\square$

【定义(几乎处处)】设$E \subset \mathbb{R}^d$, $P(x)$ 是一个与x 有关的性质。若集合

$$Z := \{x \in E \mid P(x) \text{ 不成立}\} \text{ 满足 } m(Z) = 0$$

(**注意这等价于**$m^*(Z) = 0$), 则称$P(x)$ 在E 上m-几乎处处成立, 简称为几乎处处成立, 也简记为$P(x)$ a.e. $x \in E$ 或 P a.e. 于E 或 P a.e.. 这里 a.e. = almost everywhere. $\square$

【强调】以后学习其他测度时同学们会明白“几乎处处”是由所考虑的测度决定的。例如对于$\mathbb{R}^d$上的两个测度m, m, 性质$P(x)$关于测度m 几乎处处成立, 但关于测度m 就未必几乎处处成立。目前我们只涉及Lebesgue 测度m, 所以(除非特别说明)下面说到的“几乎处处”都是关于L-测度m的。

常用的几个“几乎处处”如下: [**再次提醒:** $m(Z) = 0 \iff m^*(Z) = 0.$]

- **几乎处处有限:** 设$f : E \subset \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$. 若

$$m(E(|f| = +\infty)) = 0$$

则称f 在E 上几乎处处有限, 记为$|f| < \infty$ a.e. 于E.

- **几乎处处相等:** 设$f, g : E \subset \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$. 若

$$m(E(f \neq g)) = 0$$

则称f 与g 在E 上几乎处处相等, 记为$f = g$ a.e. 于E.

- **几乎处处收敛:** 设f_k, f 是$E \subset \mathbb{R}^d$ 上的广义实值函数$(k = 1, 2, 3, ...)$. 若

$$m(E(f_k \not\to f)) = 0$$

其中$E(f_k \not\to f) = \{x \in E \mid f_k(x) \not\to f(x)\ (k \to \infty)\}$, 则称$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在E 上几乎处处收敛于f, 记做

$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ a.e. $x \in E$ 或 $f_k \to f\ (k \to \infty)$ a.e. 于E.

- **几乎处处连续:** 设$E \subset \mathbb{R}^d$, 映射$\varphi : E \to \mathbb{R}^k$ 满足

$$m(\{x \in E \mid \varphi\text{在}x\text{不连续}\}) = 0$$

则称φ在E上几乎处处连续.

- **几乎处处可微:** 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$为开集, 映射$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ 满足

$$m(\{x \in \Omega \mid \varphi\text{在}x\text{不可微}\}) = 0$$

则称φ在Ω上几乎处处可微.

【注】若E本身是零测集, 则因零测集的任何子集都是零测集, 任何性质在零测集上都是“几乎处处成立”的。因此为使问题真正有意义, 应用时就要看前提集合E 是否具有正测度, 即是否有$m(E) > 0$.

【命题1.8.2(可测函数基本性质)】设$E \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(a) 若$m(E) = 0$, 则E上的任何函数都是可测函数。

(b) 若f 在E 上可测, $A \subset E$ 是可测子集, 则f 在A 上可测。

(c) 若$Z \subset E$ 是零测集, f 在$E \setminus Z$ 上可测, 则无论f在Z上是否有定义, 在Z上任意定义f的值后, f都在E上可测。

(d) 设$E_k \in \mathcal{M}$, $f : E = \bigcup_{k\geq 1} E_k \to [-\infty, +\infty]$. 则

$$f \text{ 在} E \text{ 上可测} \iff f \text{ 在每个} E_k \text{ 上可测。}$$

(e) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$在$E$上几乎处处相等, 则有

$$f \text{ 在} E \text{ 上可测} \iff g \text{ 在} E \text{ 上可测。}$$

特别若f在E上可测, 则在E的任何零测子集上修改f的值不改变f在E上的可测性。

(f) 设I, J为$\mathbb{R}$中的开集, $\Phi : I \times J \to \mathbb{R}$ 连续。设$f : E \to I, g : E \to J$都可测, 则$x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$在$E$上可测。

特别分别取$\Phi(u, v) = \alpha u + \beta v, |u|, uv, u/v$ 和$I = \mathbb{R}, J = \mathbb{R}$ 以及$J = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 其中$\alpha, \beta$ 为常数, 则可知当$f, g : E \to \mathbb{R}$可测时, $\alpha f + \beta g, |f|, fg$都在$E$上可测。又若$g : E \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 可测, 则f/g 在E 上可测。

(g) 若$f(x) = c \in [-\infty, +\infty]$ (广义常数), 则f 在E 上可测。

(h) 若$f, g : E \to [0, +\infty]$ 可测, 则$f + g$ 在E 上可测。

一般地, 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ 可测且$E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)$ 和

$E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty)$ 都是零测集, 则$f + g$ 在E 上可测。

(i) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ 可测, 则乘积fg 在E 上可测。

(j) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ 且$0 < |g(x)| < \infty$ a.e. 于$x \in E$, 则f/g 在E 上可测。

(k) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ 为可测函数, 则$E(f > g) \in \mathcal{M}$, $E(f \neq g) \in \mathcal{M}$.

【证】以下证明中多次用到零测集是L-可测集(即属于$\mathcal{M}$), 零测集的子集是零测集.

(a): 这是因为对任意$t \in \mathbb{R}$, $E(f > t)$ 都是零测集从而是可测集。

(b): 这是因为$A(f > t) = E(f > t) \cap A$.

(c): 若f在Z上无定义, 则随意定义其值, 例如定义$f(x) = 0, x \in Z$. 则对任意$t \in \mathbb{R}$, $Z(f > t)$ 都是零测集从而是可测集, 因此$E(f > t) = (E \setminus Z)(f > t) \cup Z(f > t)$ 是可测集。

(d): 这是下面等式的推论:

$$E_k(f > t) = E(f > t) \cap E_k, \qquad E(f > t) = \bigcup_{k\geq 1} E_k(f > t).$$

(e): 令$E_1 = E(f \neq g), E_2 = E \setminus E_1 = E(fg)$. 则$E_1$ 是零测集从而是可测集, 因而E_2 是可测集。f, g 当然都在零测集E_1上可测。于是结合$f|_{E_2} = g|_{E_2}$即知：f在E上可测$\iff f$在E_2上可测$\iff g$在E_2上可测$\iff g$在E上可测。

(f): 对任意$t \in \mathbb{R}$, 若$E(\Phi(f,g) > t)$为空集, 则$E(\Phi(f,g) > t)$可测。设$E(\Phi(f,g) > t)$非空。则由$\Phi : I \times J \to \mathbb{R}$ 连续和$I \times J$是开集　知$(I \times J)(\Phi > t) = \Phi^{-1}((t, +\infty))$ 是$\mathbb{R}^2$的非空开集。据开集的方体分解有

$$\{(u,v) \in I \times J \mid \Phi(u,v) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k) \times [c_k, d_k).$$

易见对任意$x \in E$ 有:

$$\begin{aligned}
&\Phi(f(x), g(x)) > t \iff (f(x), g(x)) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k) \times [c_k, d_k) \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } f(x) \in [a_k, b_k),\ g(x) \in [c_k, d_k) \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in E(f \in [a_k, b_k)) \cap E(g \in [c_k, d_k)) \\
&\iff x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f \in [a_k, b_k)) \cap E(g \in [c_k, d_k)).
\end{aligned}$$

这就证明了

$$E(\Phi(f,g) > t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f \in [a_k, b_k)) \cap E(g \in [c_k, d_k)).$$

因$E(f \in [a_k, b_k)), E(g \in [c_k, d_k))$都是可测集, 所以$E(\Phi(f,g) > t)$是可测集. 所以$x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$在$E$上可测.

(g): 这是因为对任意$t \in \mathbb{R}$ 有

$$E(f > t) = \emptyset \in \mathcal{M} \text{ 当} t \geq c \text{时}, \quad E(f > t) = E \in \mathcal{M} \text{ 当} t < c \text{ 时}.$$

(h): 设$f, g : E \to [0, +\infty]$ 可测且$E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)$ 和$E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty)$ 都是零测集. 来证明$f + g$ 在E 上可测. 令

$$\begin{aligned}
&E_1 = [E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)] \cup [E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty)], \\
&E_2 = [E(f = +\infty) \cap E(-\infty < g \leq +\infty)] \cup [E(-\infty < f \leq +\infty) \cap E(g = +\infty)], \\
&E_3 = [E(f = -\infty) \cap E(-\infty \leq g < \infty)] \cup [E(-\infty \leq f < \infty) \cap E(g = -\infty)], \\
&E_4 = E(|f| < \infty) \cap E(|g| < \infty).
\end{aligned}$$

则$E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$ 且E_1,E_2,E_3,E_4 都是可测集, $m(E_1)=0$, 而$f+g$ 在E_2,E_3上分别是广义常数$+\infty$, $-\infty$, 因此$f+g$ 分别在E_2,E_3上可测. 又由(f) 知$f+g$在E_4上可测, 所以$f+g$ 分别在E_1,E_2,E_3,E_4上可测. 所以$f+g$在E上可测.

(i): 考虑分解$E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$ 其中

$$\begin{aligned}&E_1=E(fg=+\infty),\quad E_2=E(fg=-\infty),\quad E_3=E(fg=0)\\&E_4=E(0<|fg|<\infty)=E(0<|f|<\infty)\cap E(0<|g|<\infty).\end{aligned}$$

则E_1,E_2,E_3,E_4都是可测集, fg 在E_1,E_2,E_3 上分别是广义常数$+\infty$, $-\infty, 0$, 因此fg分别在E_1,E_2,E_3上可测. 又由(f) 知fg在E_4上可测, 所以fg 分别在E_1,E_2,E_3,E_4上可测. 所以fg在E上可测.

(j): 考虑分解$E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$ 其中

$$\begin{aligned}&E_1=E(g=0)\cup E(|g|=+\infty)\\&E_2=[E(f=+\infty)\cap E(0<g<\infty)]\cup[E(f=-\infty)\cap E(-\infty<g<0)],\\&E_3=[E(f=+\infty)\cap E(-\infty<g<0)]\cup[E(f=-\infty)\cap E(0<g<\infty)],\\&E_4=E(|f|<\infty)\cap E(0<|g|<\infty).\end{aligned}$$

则E_1,E_2,E_3,E_4都是可测集, $m(E_1)=0$, f/g 在E_2,E_3 上分别是广义常数$+\infty$, $-\infty$, 因此f/g 分别在E_2,E_3上可测. 又由(f) 知f/g在E_4上可测, 所以f/g 分别在E_1,E_2,E_3,E_4上可测. 所以f/g在E上可测.

(k): 写$\mathbb{Q}=\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ (全体有理数). 由有理数的稠密性易见

$$E(f>g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>r_k)\cap E(g<r_k)\in\mathcal{M}.$$

由此还知$E(f\neq g)=E(f>g)\cup E(g>f)\in\mathcal{M}$. □

- **极限函数的可测性**

【命题1.8.3】 $E\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是E 上的一列广义实值可测函数. 则

(a) 上极限函数 $\limsup\limits_{k\to\infty}f_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}(\sup\limits_{j\ge k}f_j(x))=\inf\limits_{k\ge1}(\sup\limits_{j\ge k}f_k(x))$, $x\in E$,

下极限函数 $\liminf\limits_{k\to\infty}f_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}(\inf\limits_{j\ge k}f_k(x))=\sup\limits_{k\ge1}(\inf\limits_{j\ge k}f_k(x))$, $x\in E$

都是E 上的可测函数.

(b) 若$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)\ \ \forall x\in E$, 则极限函数$f$ 在E 上可测.

(c) 若$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ a.e. $x\in E$, 则极限函数f 在E 上可测.

【证】(a): 令

$$F_k(x)=\sup_{j\ge k} f_j(x),\quad G_k(x)=\inf_{j\ge k} f_j(x).$$

容易验证对任意$t\in\mathbb{R}$

$$E(F_k\le t)=\bigcap_{j=k}^{\infty}E(f_j\le t)\in\mathcal{M},\quad E(G_k\ge t)=\bigcap_{j=k}^{\infty}E(f_j\ge t)\in\mathcal{M}.$$

因此F_k, G_k 都在E 上可测($k=1,2,3,\dots$). 于是对任意$t\in\mathbb{R}$有

$$E(\inf_{k\ge1}F_k\ge t)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(F_k\ge t)\in\mathcal{M},\quad E(\sup_{k\ge1}G_k\le t)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(G_k\le t)\in\mathcal{M}.$$

所以上极限函数$\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\inf\limits_{k\ge1}F_k(x)$ 和下极限函数$\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\sup\limits_{k\ge1}G_k(x)$ 都在E 上可测.

(b): 此时有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_k(x)=\limsup_{k\to\infty} f_k(x)=\liminf_{k\to\infty} f_k(x)\qquad\forall x\in E$$

所以f 在E 上可测.

(c): 令

$$Z=\{x\in E\mid f_k(x)\not\to f(x)\ (k\to\infty)\}.$$

则$m(Z)=0$ 因此Z 是可测集, 从而$E\setminus Z$ 是可测集. 因Z是零测集, 故f在Z上可测, 而由(b) 知f在$E\setminus Z$上可测. 所以f在$E=Z\cup(E\setminus Z)$上可测. □

- **连续函数和复合函数的可测性**

【命题1.8.4】设$E\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 则有:

(a) 若$f:E\to\mathbb{R}$ 几乎处处连续, 则f 在E上可测.

(b) 若$f:E\to\mathbb{R}$可测且$f(E)\subset I$ 其中I 是一个区间, 又设$g:I\to\mathbb{R}$ 连续, 则复合函数$x\mapsto g(f(x))$ 在E上可测.

【证】(a): 由假设知存在零测集$Z \subset E$使得$E \setminus Z$中每一点都是f在E上的连续点。这蕴含f在$E \setminus Z$上连续, 也即限制在$E \setminus Z$上, f在$E \setminus Z$上连续。[2] 据前面的例子知f在$E \setminus Z$上可测. 因零测集上的任何函数都是可测函数, 故f在Z上可测。因此f在$E = (E \setminus Z) \cup Z$上可测。

(b): 对任意$t \in \mathbb{R}$, 由g连续和前面例题知存在开集$U_t \subset \mathbb{R}$使得

$$B_t := I(g > t) = U_t \cap I.$$

因区间I和开集U_t都是Borel 集, 故它们的交集B_t也是Borel 集。于是由

$$E(g \circ f > t) = E(g \circ f \in (t, +\infty)) = E(f \in g^{-1}((t, +\infty))) = E(f \in B_t)$$

和可测函数性质(**命题1.8.1之(c)**) 知$E(g \circ f > t) = E(f \in B_t)$是可测集。所以复合函数$g \circ f$在$E$ 上可测。 $\square$

【命题1.8.5(C^1变换保持可测性)】设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 为C^1类的单射且$\det\varphi'(t) \neq 0$ for all $t \in \Omega$. 设$f : \varphi(\Omega) \to [-\infty, +\infty]$. 则有

$$y \mapsto f(y)\text{在}\varphi(\Omega)\text{上可测} \iff \text{复合函数}x \mapsto f(\varphi(x))\text{在}\Omega\text{上可测}.$$

【证】先证明对任意$t \in \mathbb{R}$ 有等式:

$$\varphi(\Omega)(f > t) = \varphi(\Omega(f \circ \varphi > t)), \quad \Omega(f \circ \varphi > t) = \varphi^{-1}(\varphi(\Omega)(f > t)). \tag{1.8.2}$$

事实上对任意$y \in \varphi(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned} & y \in \varphi(\Omega)(f > t) \iff t < f(y) = f \circ \varphi(\varphi^{-1}(y)) \iff \varphi^{-1}(y) \in \Omega(f \circ \varphi > t) \\ & \iff y = \varphi(\varphi^{-1}(y)) \in \varphi(\Omega(f \circ \varphi > t)). \end{aligned}$$

所以(1.8.2)中第一个等式成立. 又对任意$x \in \Omega$ 有

$$\begin{aligned} & x \in \Omega(f \circ \varphi > t) \iff f(\varphi(x)) > t \iff \varphi(x) \in \varphi(D(f > t)) \\ & \iff x \in \varphi^{-1}(\varphi(\Omega(f > t)). \end{aligned}$$

[2]**注意: 设$f : E \to \mathbb{R}$, $A \subset E$. 则“A中每一点都是f在E上的连续点”与“限制在A上f在A上连续”是两个不同的概念, 前者蕴含后者, 后者远非前者。例如设$f(x) = 1$ 当$x \in \mathbb{Q}$时, $f(x) \le 1/2$ 当$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$时。则限制在$\mathbb{Q}$上$f$为常数1, 因此限制在$\mathbb{Q}$上$f$在$\mathbb{Q}$上连续。但$\mathbb{Q}$中每一点都不是$f$在$\mathbb{R}$上的连续点 因为$f$在$\mathbb{R}$上没有连续点。**

所以(1.8.2)中第二个等式成立.

由假设条件和反函数定理知$\varphi(\Omega)$是$\mathbb{R}^d$的开集且逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(\Omega)\to\Omega$ 也是C^1的. 因此由**定理1.5.2**知, φ 把Ω中的可测集映为可测集, φ^{-1} 把$\varphi(\Omega)$中的可测集映为可测集. 于是由(1.8.2) 知对任意$t\in\mathbb{R}$ 有

$$\varphi(\Omega)(f>t)\text{ 可测 }\iff D(f\circ\varphi>t)\text{ 可测.}$$

所以f在$\varphi(\Omega)$上可测$\iff$ 复合函数$f\circ\varphi$在Ω上可测. $\Box$

【例】

(1). 设$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{d\times d}$为可逆矩阵, $h\in\mathbb{R}^d$. 则仿线性变换$x\mapsto \mathrm{A}x+h$ 是从$\mathbb{R}^d$到$\mathbb{R}^d$的光滑同胚, 因此对任一函数$f:\mathbb{R}^d\to[-\infty,+\infty]$有:

f在$\mathbb{R}^d$ 上可测 $\iff$ $x\mapsto f(\mathrm{A}x+h)$ 在$\mathbb{R}^d$ 上可测。

(2). 设$f:\mathbb{R}^{2d}=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to[-\infty,+\infty]$. 则有:

f 在$\mathbb{R}^{2d}$上可测 $\iff$ 函数$(x,y)\mapsto f(x-y,y)$ 在$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{2d}$ 上可测.

事实上如令$\mathrm{I}\in\mathbb{R}^{d\times d}$为单位阵, 并令

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & -\mathrm{I}\\ 0 & \mathrm{I}\end{pmatrix}$$

则按列向量表示$\mathbf{x}=(x,y)^\tau$ 有$\mathrm{A}\mathbf{x}=(x-y,y)^\tau$. 因此如果我们用行向量和列向量表示同一函数的自变量, 就有$f(x-y,y)=f(\mathrm{A}\mathbf{x})$. 因$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{2d\times 2d}$ 可逆, 故由本题(1)知：f在$\mathbb{R}^{2d}$ 上可测 $\iff$ $\mathbf{x}\mapsto f(\mathrm{A}\mathbf{x})$ 在$\mathbb{R}^{2d}$ 上可测。 $\Box$

- **可测函数的延拓**

把一个可测函数保持可测性地延拓至全空间$\mathbb{R}^d$ 有助于对问题的研究。由于可测性是最容易满足的要求, 保测延拓的方式几乎可以随心所欲。

设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f:E\subset\mathbb{R}^d\to[-\infty,+\infty]$ 是可测函数。任取可测函数$g:E^c\to\mathbb{R}$ (例如$g(x)\equiv 0$). 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\in E\\ g(x) & \text{if } x\in E^c(x).\end{cases}$$

则$F:\mathbb{R}^d\to[-\infty,+\infty]$ 在$\mathbb{R}^d$ 上可测。这是因为$\mathbb{R}^d=E\cup E^c$ 且F分别在E, E^c上可测, 所以F在$\mathbb{R}^d$上可测。

当我们取$g(x)\equiv 0$ 时, 相应的F称为f 的**零延拓**, 它可写成

$$F(x)=f(x)\mathbf{1}_E(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}^d\,.$$

【例】(1) 设$f(x)$在开区间(a,b)内处处可微, 则其导函数$f'(x)$ 在(a,b)上可测。

(2) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在Ω上可微. 则对任意$k\in\{1,2,...,d\}$, 偏导函数$\frac{\partial f}{\partial x_j}$都在$\Omega$ 上可测$(j=1,2,...,d)$.

【证】只需证(2). 因可微蕴含连续, 所以f在Ω上连续从而在Ω上可测. 将f 做零延拓: $f(x)=0, x\in\Omega^c$. 则延拓后的f在$\mathbb{R}^d$上可测. 因此对任意$h\in\mathbb{R}^d$, 平移$x\mapsto f(x+h)$ 在$\mathbb{R}^d$上可测. 取$h=\frac{1}{k}\mathbf{e}_i$, 令

$$f_k(x)=\frac{f(x+\frac{1}{k}\mathbf{e}_j)-f(x)}{\frac{1}{k}},\quad x\in\mathbb{R}^d,\ \ k\in\mathbb{N}$$

则f_k 在$\mathbb{R}^d$ 上可测(从而在Ω 上可测) 且有

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}=\lim_{k\to\infty}f_k(x),\quad x\in\Omega.$$

因可测函数列的极限函数还是可测函数, 故$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在Ω 上可测. $\square$

- **简单函数逼近**

简单函数主要用于研究可测函数的结构和建立积分。

【定义(简单函数)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 若可测函数$f:E\to\mathbb{R}$ 的值域$f(E)$ 是有限集, 则称f 是一个简单可测函数, 简称简单函数。 $\square$.

【命题1.8.6】设$E\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 则

(**a**) 函数$f:E\to\mathbb{R}$ 是简单函数的充分必要条件是 f 可表示为 E 的可测子集的特征函数的有限线性组合:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\qquad x\in E \tag{1.8.3}$$

其中 $E_k\in\mathcal{M}$, $E_k\subset E$; $c_k\in\mathbb{R}$ 为常数, $k=1,2,...,N$.

(**b**) 若 f, g 都是 E 上的简单函数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 为常数, 则 $\alpha f+\beta g$ 和 fg 都是 E 上的简单函数.

【证】(a): 设 f 为是 E 上的简单函数. 由定义, f 的值域 $f(E)=\{c_1, c_2, ..., c_N\}$ 为有限集, 其中 c_k 互不相同. 令 $E_k=E(f=c_k)$, $k=1,2,...,N$. 则得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\quad x\in E.$$

反之设 f 可表示为 (1.8.3) 的形式。则 f 是 E 上的可测函数并且 f 的值域含于由数 $c_1, c_2, ..., c_N$ 和这些数的每一组的和所组成的有限数集, 其互不相同的元素个数不超过 $\sum_{k=1}^{N} C_N^k=2^N-1$. 因此 f 的值域为有限集。所以 f 是 E 上的简单函数。

(b): 这是因为函数 $\alpha f+\beta g$ 和 fg 都是 E 上的可测函数且它们的值域 $(\alpha f+\beta g)(E)$ 和 $(fg)(E)$ 也都是有限集。 $\square$

下面学习如何用简单函数列逼近一般可测函数。这需要一个引理——

【引理1.8.7(恒等函数的阶梯函数逼近)】在广义区间 $[0,+\infty]$ 上做阶梯函数列如下:

$$\varphi_0(t)\equiv 0,$$
$$\varphi_k(t)=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}(t)+k\mathbf{1}_{[k,+\infty]}(t)\,,\quad t\in[0,+\infty]\,.\quad (k=1,2,3,\dots.)$$

则有

$$0=\varphi_0(t)\le\varphi_1(t)\le\varphi_2(t)\le\varphi_3(t)\le\cdots\le t\,;\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t)=t\qquad \forall\, t\in[0,+\infty]$$

并在$[0,+\infty)$有收敛速度估计:

$$|\varphi_k(t)-t|\le\frac{1}{2^k}\qquad \forall\, t\in[0,+\infty),\quad \forall\, k>t. \tag{1.8.4}$$

此外有级数表示:

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{I_k}(t)\,,\qquad t\in[0,+\infty] \tag{1.8.5}$$

其中 I_k 是 $(0,+\infty]$ 中的区间, $0<c_k<\infty$, $k=1,2,3,....$

【证】为证单调关系$\varphi_{k-1}\le\varphi_k$ 可设$k\ge 2$. 略去自变量只看函数关系, 可写

$$\varphi_k=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}+k\mathbf{1}_{[k,+\infty]}$$

$$= \sum_{j=1}^{(k-1)2^k} \frac{j-1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + \sum_{j=(k-1)2^k+1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + k\mathbf{1}_{[k,+\infty]}\,,$$

对右端第一项, 按 j为奇数和偶数求和, 并用特征函数性质

$$\mathbf{1}_{[\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k})} + \mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^k}, \frac{2j}{2^k})} = \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k-1}}, \frac{j}{2^{k-1}})}$$

有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{(k-1)2^k} \frac{j-1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} &= \sum_{j=1}^{(k-1)2^{k-1}} \frac{2j-2}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k})} + \sum_{j=1}^{(k-1)2^k} \frac{2j-1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^k}, \frac{2j}{2^k})} \\
&= \sum_{j=1}^{(k-1)2^{k-1}} \frac{j-1}{2^{k-1}} \mathbf{1}_{[\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k})} + \sum_{j=1}^{(k-1)2^{k-1}} \frac{j-1}{2^{k-1}} \mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^k}, \frac{2j}{2^k})} + \sum_{j=1}^{(k-1)2^{k-1}} \frac{1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^k}, \frac{2j}{2^k})} \\
&= \sum_{j=1}^{(k-1)2^{k-1}} \frac{j-1}{2^{k-1}} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k-1}}, \frac{j}{2^{k-1}})} + \sum_{j=1}^{(k-1)2^{k-1}} \frac{1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^k}, \frac{2j}{2^k})}\,.
\end{aligned}$$

对其余两项有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=(k-1)2^k+1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + k\mathbf{1}_{[k,+\infty]} \\
&= (k-1)\Big(\sum_{j=(k-1)2^k+1}^{k2^k} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + \mathbf{1}_{[k,+\infty]} \Big) + \sum_{j=(k-1)2^k+1}^{k2^k} \Big(\frac{j-1}{2^k} - (k-1) \Big) \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + \mathbf{1}_{[k,+\infty]} \\
&= (k-1)\mathbf{1}_{[k-1,+\infty]} + \sum_{j=(k-1)2^k+2}^{k2^k} \Big(\frac{j-1}{2^k} - (k-1) \Big) \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + \mathbf{1}_{[k,+\infty]}\,.
\end{aligned}$$

因此

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \sum_{j=1}^{(k-1)2^{k-1}} \frac{1}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^k}, \frac{2j}{2^k})} + \sum_{j=(k-1)2^k+2}^{k2^k} \frac{j-1-(k-1)2^k}{2^k} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + \mathbf{1}_{[k,+\infty]} \ \geq 0\,. \tag{1.8.6}$$

所以 φ_k 关于 k 是递增的.

证收敛性：$\forall\, t \in [0,+\infty]$, 若 $t < \infty$, 则当 $k > t$ 时存在唯一 $j \in \{1,2,...,k2^k\}$ 使得 $t \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$ 从而有$t \geq \varphi_k(t) = \frac{j-1}{2^k} > t - \frac{1}{2^k}$, 因此若$0 \leq t < \infty$ 则有

$$0 \leq t - \varphi_k(t) \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall\, k > t.$$

若 $t = +\infty$, 则 $\varphi_k(t) = k\ (k = 1,2,...)$. 总之有 $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t) = t \ \ \forall\, t \in [0,+\infty]$.

最后证明级数表示 (1.8.5). 注意$\varphi_0(t)\equiv 0$. 由收敛性和 $\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\ge 0$ (见 (1.8.6)) 以及正项级数定义得

$$t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t))=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t))\,,\quad t\in[0,+\infty]\,.$$

而由 (1.8.6)和$\varphi_0(t)\equiv 0$ 可写

$$\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)=\sum_{j=1}^{n_k}c_{k,j}\mathbf{1}_{I_{k,j}}(t)\,,\quad k=1,2,3,...$$

其中 $I_{k,j}$ 是 $(0,+\infty]$ 中的区间, $n_k\in\mathbb{N}, 0<c_{k,j}<\infty$. 将可数集 $\{c_{k,j}\mathbf{1}_{I_{k,j}}\,|\,j=1,2,...,N_k\,;k=0,1,2,...\}$ 排列成 $\{c_1\mathbf{1}_{I_1},c_2\mathbf{1}_{I_2},c_3\mathbf{1}_{I_3},...\}$ 并根据正项级数的和与求和顺序无关就得到 (1.8.5).　　□

【定理1.8.8(简单函数逼近和级数表示)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 则

(a) 对任一非负可测函数$f:E\to[0,+\infty]$, 存在一列非负简单函数 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le ...\le f(x)\,;\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\qquad \forall\,x\in E\,.$$

此外存在存在一列常数 $0<c_k<\infty$ 和可测集 $E_k\subset E$ $(k=1,2,3,...)$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x)\qquad \forall\,x\in E\,. \tag{1.8.7}$$

(b) 对任一可测函数$f:E\to[-\infty,+\infty]$, 存在一列简单函数 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$|f_k(x)|\le|f_{k+1}(x)|\le|f(x)|,\ k=1,2,3,...;\qquad \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\qquad \forall\,x\in E\,.$$

进一步, 若f还在E上有界, 则还可使得上述简单函数f_k在E上一致收敛于f, 即

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in E}|f_k(x)-f(x)|=0.$$

【证】(a): 令

$$E_{k,j}=E\Big(\frac{j-1}{2^k}\le f<\frac{j}{2^k}\Big),\quad j=1,2,...,k2^k;\quad E_k=E(f\ge k).$$

则有

$$\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}(f(x))=\mathbf{1}_{E_{k,j}}(x),\quad \mathbf{1}_{[k,+\infty]}(f(x))=\mathbf{1}_{E_k}(x).$$

于是在上述引理中取 $t=f(x)$ 便有

$$f_k(x):=\varphi_k(f(x))=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{E_{k,j}}(x)+k\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\quad x\in E\quad (k=1,2,3,...).$$

由 $\varphi_k(t)$ 的性质易见 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 满足 (a) 中的要求. 同样在 (1.8.4) 中取 $t=f(x)$ 得到

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{I_k}(f(x))=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\quad x\in E$$

其中 $E_k=E(f\in I_k)\in\mathcal{M}$. 【注：若 $f(x)\equiv 0$, 则一切 E_k 都是空集.】

(b): 设 $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 可测. 考虑 f 的正部 f^+和负部f^-, 即

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}=f(x)\mathbf{1}_{E(f\ge 0)}(x),$$
$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}=-f(x)\mathbf{1}_{E(f\le 0)}(x)\,.$$

则易见 f^+, f^- 都是 E 上非负可测函数, 且

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x)\,,\quad x\in E\,.$$

因 $f^+(x)\cdot f^-(x)\equiv 0$, 故这里不会出现 “$\infty-\infty$ ” 的情况. 设 $\{f_k^{(+)}\}_{k=1}^\infty$, $\{f_k^{(-)}\}_{k=1}^\infty$ 是 (a) 中构造的相应于 f^+, f^- 的非负简单函数列, 即

$$f_k^{(+)}(x)=\varphi_k(f^+(x)),\quad f_k^{(-)}(x)=\varphi_k(f^-(x)),\quad x\in E,\quad k=1,2,3,\dots.$$

则有

$$0\le f_k^{(\pm)}(x)\le f_{k+1}^{(\pm)}(x)\le f^\pm(x)\,;\qquad \lim_{k\to\infty}f_k^\pm(x)=f^\pm(x)\qquad \forall\, x\in E\,.$$

取 $f_k=f_k^{(+)}-f_k^{(-)}$, 则 f_k 是简单函数且

$$|f_k(x)|=f_k^{(+)}(x)+f_k^{(-)}(x)\le f_{k+1}^{(+)}(x)+f_{k+1}^{(-)}(x)=|f_{k+1}(x)|\le f^+(x)+f^-(x)=|f(x)|$$

$x\in E,\ \ k=1,2,3,...,$

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=\lim_{k\to\infty}f_k^{(+)}(x)-\lim_{k\to\infty}f_k^{(-)}(x)=f^+(x)-f^-(x)=f(x)\quad \forall\, x\in E\,.$$

最后设f在E上有界: 存在$0\le M<\infty$使得$|f(x)|\le M$ for all $x\in E$. 则由(1.8.4)有

$$|f_k^{(\pm)})(x)-f^\pm(x)|=|\varphi_k(f^\pm(x))-f^\pm(x)|\le\frac{1}{2^k}\quad \forall\, x\in E,\quad \forall\, k>M,$$
$$\Longrightarrow\ |f_k(x)-f(x)|\le\frac{2}{2^k}\qquad \forall\, x\in E,\quad \forall\, k>M.$$

所以

$$\sup_{x\in E}|f_k(x)-f(x)|\le\frac{2}{2^k}\to 0\quad(k\to\infty).\qquad\Box$$

【注】从上面结果我们可以导出小数$t\in[0,1)$的2-进级数表示(即$t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}$, $a_k\in\{0,1\}$) 的简单函数级数表示：限制在$[0,1)$上, 由函数$\varphi_k(t)$ 的定义知

$$\varphi_0(t)\equiv 0,\quad \varphi_k(t)=\sum_{j=1}^{2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\,\frac{j}{2^k})}(t)\,,\quad t\in[0,1)\,.$$

根据上面(1.8.4)有

$$0\le\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)=\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^{k-1}}\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^k},\,\frac{2j}{2^k})}(t)=\frac{1}{2^k}\mathbf{1}_{A_k}(t)$$

其中

$$A_k=\sum_{j=1}^{2^{k-1}}\Big[\frac{2j-1}{2^k},\,\frac{2j}{2^k}\Big),\quad k=1,2,3,\ldots.$$

这就给出

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\Big(\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\mathbf{1}_{A_k}(t)\,,\quad t\in[0,1)\,.\tag{1.8.8}$$

将这一表示应用于可测函数, 我们可以对有界可测函数得到较好的级数表示. 例如设$0\le f<1$ 于E. 则在(1.8.8)中取$t=f(x)$ 并令

$$E_k=E(f\in A_k)$$

便有

$$\mathbf{1}_{A_k}(f(x))=\mathbf{1}_{E_k}(x),\qquad x\in E$$

从而得到f 的级数表示：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\quad x\in E.\tag{1.8.9}$$

§1.9. 可测函数列的收敛和Lusin 定理

本节学习三种收敛: 依测度收敛、几乎处处收敛、一致收敛, 以及它们之间的关系。Lusin 定理则进一步说可测函数可以被连续函数依测度逼近。

• 依测度收敛与几乎处处收敛, Riesz 定理

【定义(依测度收敛)】 设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 若$f, f_k$都是$E$上几乎处处有限的可测函数且

$$\lim_{k\to\infty} m(E(|f_k-f|\ge\varepsilon))=0 \qquad \forall\,\varepsilon>0$$

则称f_k在E上依测度收敛于f. □

【注】 提醒记号:

$$E(|f_k-f|\ge\varepsilon)=\{x\in E\mid |f_k(x)-f(x)|\ge\varepsilon\}.$$

由于f, f_k都是几乎处处有限的, 即

$$Z:=E(|f|=\infty)\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}E(|f_k|=\infty)\quad \text{是零测集}$$

因此减法$f_k(x)-f(x)$在$E\setminus Z$上有意义。这同时说明, 在下面的命题和定理的证明中, 我们可以用$E\setminus Z$代替E, 也即不失一般性我们可以把“几乎处处”换成“处处”。这一点请同学们记住。

收敛序列联系着Cauchy 列:

【定义(依测度Cauchy列)】 设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是E上的几乎处处有限的可测函数列。若

$$\lim_{k\to\infty,n\to\infty} m(E(|f_k-f_n|\ge\varepsilon))=0 \qquad \forall\,\varepsilon>0$$

则称$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是E上的依测度Cauchy 列. □

【命题1.9.1(依测度收敛的Cauchy准则)】 设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是E上的可测函数列。则f_k在E上依测度收敛于某个可测函数f 的充分必要条件是: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是E上的依测度Cauchy 列。

【证】**必要性:** 设f_k在E上依测度收敛于某个可测函数f. 则由定义知f_k, f都在E上几乎处处有限且对任意$\varepsilon>0$ 对$\varepsilon/2>0$ 有

$$\lim_{k\to\infty} m(E(|f_k-f|\ge\varepsilon/2))=0.$$

由

$$|f_k(x)-f_n(x)|\le |f_k(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|$$

易见

$$E(|f_k-f_n|\ge\varepsilon)\subset E(|f_k-f|\ge\varepsilon/2)\cup E(|f_n-f|\ge\varepsilon/2)$$

因此

$$0\le m(E(|f_k-f_n|\ge\varepsilon))\le m(E(|f_k-f|\ge\varepsilon/2))+m(E(|f_n-f|\ge\varepsilon/2)).$$

所以(有极限的两边夹原理)

$$\lim_{k\to\infty,n\to\infty} m(E(|f_k-f_n|\ge\varepsilon))=\lim_{k\to\infty} m(E(|f_k-f|\ge\varepsilon/2))+\lim_{n\to\infty} m(E(|f_n-f|\ge\varepsilon/2))=0.$$

所以$\{f_k\}_{k=1}^\infty$是E上的依测度Cauchy 列。

充分性: 设$\{f_k\}_{k=1}^\infty$是E上的依测度Cauchy 列。则f_k都在E上几乎处处有限且

对$\varepsilon=\frac{1}{2}$, 存在正整数k_1 使得

$$m(E(|f_k-f_n|\ge\frac{1}{2}))<\frac{1}{2}\qquad \forall\, k,n\ge k_1.$$

对$\varepsilon=\frac{1}{4}$, 存在正整数$k_2>k_1$ 使得

$$m(E(|f_k-f_n|\ge\frac{1}{4}))<\frac{1}{4}\qquad \forall\, k,n\ge k_2.$$

归纳地(用归纳操作手续) 我们得到正整数列$k_1<k_2<k_3<\cdots$ 使得

$$m(E(|f_k-f_n|\ge\frac{1}{2^j}))<\frac{1}{2^j}\qquad \forall\, k,n\ge k_j,\quad j=1,2,3,\dots.$$

由此特别有

$$m(E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|\ge\frac{1}{2^j}))<\frac{1}{2^j},\qquad j=1,2,3,\dots. \tag{1.9.1}$$

由此得到

$$\sum_{j=1}^\infty m(E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|\ge\frac{1}{2^j}))\le\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{2^j}=1<\infty.$$

据**Borel-Cantelli 引理** (见Stein& Shakarchi的《实分析》第1章第6节习题16)知

$$Z:=\bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{j=n}^\infty E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|\ge\frac{1}{2^j})\quad \text{是零测集}\quad \text{i.e.}\quad m(Z)=0.$$

令

$$f(x)=f_{k_1}(x)+\sum_{j=1}^\infty\Big(f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x)\Big),\quad x\in E\setminus Z. \tag{1.9.2}$$

来证明这个函数级数在$E\setminus Z$上处处绝对收敛, 从而处处收敛于其和函数$f(x)$. 事实上由de Moregan 对偶律有

$$E\setminus Z=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{j=n}^{\infty}(E\setminus E_j)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{j=n}^{\infty}E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|<\frac{1}{2^j})$$

因此对任意$x\in E\setminus Z$ 存在$N=N_x\in\mathbb{N}$ 使得$x\in\bigcap_{j=N}^{\infty}E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|<\frac{1}{2^j})$ 即

$$|f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x)|<\frac{1}{2^j}\qquad\forall\, j\geq N$$

从而有

$$\begin{aligned}&|f_{k_1}(x)|+\sum_{j=1}^{\infty}|f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x)|\\&=|f_{k_1}(x)|+\sum_{j=1}^{N}|f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x)|+\sum_{j=N+1}^{\infty}|f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x)|\\&\leq|f_{k_1}(x)|+\sum_{j=1}^{N}|f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x)|+\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}<\infty.\end{aligned}$$

所以函数级数(1.9.2)在$E\setminus Z$上处处绝对收敛。由级数收敛的定义—— 部分和的极限—— 得到

$$f(x)=\lim_{j\to\infty}\left(f_{k_1}(x)+\sum_{j=1}^{n}\Big(f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x)\Big)\right)=\lim_{n\to\infty}f_{k_n}(x)\quad\forall\, x\in E\setminus Z.$$

补充定义$f(x)=0$当$x\in Z$, 则我们证明了函数子列$\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上几乎处处收敛于一个处处有限的可测函数$f(x)$.

对任意$\varepsilon>0$, 取$N\in\mathbb{N}$使得$\frac{1}{2^N}<\varepsilon/2$. 来证明当$n>N$时有

$$E(|f_{k_n}-f|\geq\varepsilon/2)\subset Z\cup\bigcup_{j=n}^{\infty}E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|\geq\frac{1}{2^j}).\tag{1.9.3}$$

等价地只需证明它们各自关于E的余集有反向包含关系, 即证明

$$E(|f_{k_n}-f|<\varepsilon/2)\supset(E\setminus Z)\cap\bigcap_{j=n}^{\infty}E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|<\frac{1}{2^j}).\tag{1.9.4}$$

事实上对任意$x\in(E\setminus Z)\cap\bigcap_{j=n}^{\infty}E(|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}|<\frac{1}{2^j})$ 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f_{k_1}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}(f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x))\\&=f_{k_1}(x)+\sum_{j=1}^{n-1}(f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x))+\sum_{j=n}^{\infty}(f_{k_{j+1}}(x)-f_{k_j}(x))\end{aligned}$$

$$= f_{k_n}(x) + \sum_{j=n}^{\infty}(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x))$$

$$\Longrightarrow\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \le \sum_{j=n}^{\infty}|f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)| \le \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}} \le \frac{1}{2^N} < \varepsilon/2$$

$\Longrightarrow\ x \in E(|f_{k_n} - f| < \varepsilon/2)$. 这就证明了包含关系(1.9.4). 因此(1.9.3) 成立.

于是当$n > N$时由(1.9.3) 和(1.9.1)有

$$m(E(|f_{k_n} - f| \ge \varepsilon/2)) \le \sum_{j=n}^{\infty} m(E(|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}| \ge \frac{1}{2^j})) < \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

这证明了当$n \to \infty$时$m(E(|f_{k_n} - f| \ge \varepsilon/2)) \to 0$.

最后由$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_{k_n}(x)| + |f_{k_n}(x) - f(x)|$ 有

$$E(|f_n - f| \ge \varepsilon) \subset E(|f_n - f_{k_n}| \ge \varepsilon/2) \cup E(|f_{k_n} - f| \ge \varepsilon/2)$$

从而有

$$m(E(|f_n - f| \ge \varepsilon)) \le m(E(|f_n - f_{k_n}| \ge \varepsilon/2)) + m(E(|f_{k_n} - f| \ge \varepsilon/2)) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

这就证明了f_n在E上依测度收敛于某个可测函数f. $\square$

【Riesz定理】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, f_k在E上依测度收敛于f. 则存在$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$使得$f_{k_j}$在$E$上几乎处处收敛于$f$, 即

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x) \qquad \text{a.e.} \quad x \in E.$$

【证】由假设和**命题1.9.1(依测度收敛的Cauchy准则)**知$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是E上的依测度Cauchy 列, 而在这个命题的充分性证明中我们已证明了存在$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$和$E$上的几乎处处有限的可测函数$g$ 使得f_{k_j}在E上几乎处处收敛于g, 同时f_k在E上依测度收敛于g. 于是对任意$\varepsilon > 0$ 有

$$E(|f - g| \ge \varepsilon) \subset E(|f - f_k| \ge \varepsilon/2) \cup E(|f_k - g| \ge \varepsilon/2)$$

从而有

$$m(E(|f - g| \ge \varepsilon)) \le m(E(|f - f_k| \ge \varepsilon/2)) + m(E(|f_k - g| \ge \varepsilon/2)), \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

令$k \to \infty$ 得到$m(E(|f - g| \ge \varepsilon)) = 0$. 因

$$E(|f - g| > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(|f - g| \ge 1/n)$$

故得到

$$m(E(|f-g|>0)) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(E(|f-g|\ge 1/n)) = 0.$$

所以$f=g$ a.e. 于E 从而f_{k_j}在E上几乎处处收敛于f. $\square$

- **几乎处处收敛与近一致收敛, Egorov定理**

【Egorov(叶果洛夫)定理】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 测度有限：$m(E)<\infty$. 设f_k, f 为E上的几乎处处有限的可测函数且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \text{a.e.} \quad x\in E.$$

则f_k在E 上**近一致收敛于**f, 即: 对任意$\varepsilon>0$ 存在可测集$E_\varepsilon\subset E$ 使得$m(E_\varepsilon)<\varepsilon$ 且f_k在$E\setminus E_\varepsilon$ 上一致收敛于f, 即

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in E\setminus E_\varepsilon} |f_k(x)-f(x)| = 0.$$

【证】令

$$Z = E(f_k \not\to f)\cup E(|f|=\infty)\cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f_k|=\infty).$$

则由假设知$m(Z)=0$. 以$E\setminus Z$ 代替E我们可以假设f_k, f 都在E上处处有限且$f_k(x)\to f(x)\,(k\to\infty)$ for all $x\in E$.

对任意$\delta>0$, 令

$$E_k(\delta) = E(|f_k-f|\ge\delta) = \{x\in E \mid |f_k(x)-f(x)|\ge\delta\}.$$

来证明

$$\lim_{n\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta)\Big) = 0.$$

事实上我们有

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k(\delta)\Big) \le m(E) < \infty,$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k(\delta) \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} E_k(\delta) \supset \bigcup_{k=3}^{\infty} E_k(\delta) \supset \cdots, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta) = \emptyset$$

这里“$=\emptyset$”是因为$\lim\limits_{k\to\infty}|f_k(x)-f(x)|=0$ for all $x\in E$. 据测度的单调极限定理知

$$\lim_{n\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta)\Big) = m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta)\Big) = m(\emptyset) = 0.$$

由此有: 对任意$\varepsilon > 0$ 和$j \in \mathbb{N}$ 存在$n_j \in \mathbb{N}$使得

$$m\Big(\bigcup_{k=n_j}^{\infty} E_k(1/j)\Big) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

令

$$E_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=n_j}^{\infty} E_k(1/j).$$

则

$$m(E_\varepsilon) \le \sum_{j=1}^{\infty} m\Big(\bigcup_{k=n_j}^{\infty} E_k(1/j)\Big) < \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

来证明f_k在$E \setminus E_\varepsilon$ 上一致收敛于f. 因

$$E \setminus E_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=n_j}^{\infty}(E \setminus E_k(1/j)) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=n_j}^{\infty} E(|f_k - f| < 1/j)$$

故对任意$j \in \mathbb{N}$, 当$k \ge n_j$ 时, 对所有$x \in E \setminus E_\varepsilon$ 有$|f_k(x) - f(x)| < 1/j$. 因此

$$\sup_{x\in E\setminus E_\varepsilon} |f_k(x) - f(x)| \le 1/j \qquad \forall\, k \ge n_j.$$

所以, 先令$k \to \infty$ 再令$j \to \infty$ 即得

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in E\setminus E_\varepsilon} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

□

由**Egorov(叶果洛夫)定理** 立即得到下面常用性质:

【定理1.9.2】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 测度有限：$m(E) < \infty$. 设f_k, f 为E上的几乎处处有限的可测函数且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \text{a.e.} \quad x \in E.$$

则f_k在E上依测度收敛于f.

【证】对任意$\varepsilon > 0$, 由**Egorov(叶果洛夫)定理**, 存在可测集$E_\varepsilon \subset E$ 使得$m(E_\varepsilon) < \varepsilon$ 且f_k在$E \setminus E_\varepsilon$ 上一致收敛于f, 因此存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in E \setminus E_\varepsilon, \quad \forall\, k \ge N.$$

这蕴含当$k \ge N$时$E(|f_k - f| \ge \varepsilon) \subset E_\varepsilon$ 从而得到当$k \ge N$时

$$m(E(|f_k - f| \ge \varepsilon)) \le m(E_\varepsilon) < \varepsilon.$$

所以f_k在E上依测度收敛于f. $\square$

- **可测函数与连续函数, Lusin定理**

先回忆函数和映射的支集: 设$Y=[-\infty,+\infty]$或$\mathbb{C}$或$\mathbb{R}^l$, 对任一函数或映射$f:\mathbb{R}^d\to Y$, 称使得$f(x)\neq 0$的x的集合的闭包为f的承载集或支撑集, 简称支集, 记作supp$f$, 即

$$\mathrm{supp} f=\overline{\{x\in\mathbb{R}^d \mid f(x)\neq 0\}}.$$

一般地, 对任一集合$E\subset\mathbb{R}^d$ 和映射$f:E\to Y$, 称闭包$\mathrm{supp} f=\overline{\{x\in E \mid f(x)\neq 0\}}$为$f$在$E$上的支集.

注意：因闭包是闭集, 故f的支集supp$f$ 总是闭集. 因此当f 的定义域E为闭集时有$\mathrm{supp} f\subset E$.

【**Lusin定理**】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, f为E上的实值或复值可测函数。则对任意开集$\Omega\supset E$和任意$\varepsilon>0$ 存在$g\in C(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$m(E(f\neq g))<\varepsilon,\quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|g(x)|\le\sup_{x\in E}|f(x)|\quad 且\quad \mathrm{supp} g\subset\overline{\Omega}.$$

【证】(参照W. Rudin的Real and Complex Analysis) 任给定开集$\Omega\supset E$ 和$\varepsilon>0$. 分三步进行.

Step 1. 在这一步中假设f是实值的。首先设$0\le f<1$ 于E. 此时应用可测函数的级数表示(1.8.9), 存在可测集列$E_k\subset E$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\qquad x\in E\,.$$

根据Lebesgue 测度的正则性, 存在开集U_k, 闭集F_k 使得$F_k\subset E_k\subset U_k$ 且$m(U_k\setminus F_k)<2^{-k}\varepsilon$. 以开集$U_k\cap\Omega$ 代替U_k 我们可以假定$U_k\subset\Omega$. 作连续函数$h_k:\mathbb{R}^d\to[0,1]$满足 $h_k(x)=1\ \forall\, x\in F_k$ (当F_k 非空时); $h_k(x)=0\ \forall\, x\in U_k^c$.

例如可以取

$$h_k(x)=\frac{\mathrm{dist}(x,U_k^c)}{\mathrm{dist}(x,F_k)+\mathrm{dist}(x,U_k^c)},\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

[此处约定$\mathrm{dist}(x,\emptyset)=1$.]　定义

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}h_k(x)\,,\qquad x\in\mathbb{R}^d\,.$$

显然上式右端的连续项函数级数在$\mathbb{R}^d$ 上一致收敛, 因此其和函数g在$\mathbb{R}^d$上连续; 并且由于当$x \notin \Omega$ 时, 一切$h_k(x) = 0$, 从而$g(x) = 0$, 故g 的支集含于Ω的闭包中, 即$\operatorname{supp} g \subset \overline{\Omega}$. 不难验证

$$h_k(x) = \mathbf{1}_{E_k}(x) \qquad \forall\, x \notin U_k \setminus F_k \qquad (k = 1, 2, 3, ...)\,.$$

因此如令$S = \cup_{k=1}^{\infty}(U_k \setminus F_k)$, 则有

$$g(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in E \setminus S\,.$$

从而有$E(f \neq g) \subset S$,

$$m(E(f \neq g)) \le m(S) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k \setminus F_k) < \varepsilon\,.$$

从$g(x)$ 的定义还得到$g(x) < 1$ for all $x \in \mathbb{R}^d$. 事实上由$f(x) < 1$ 于E 易见$\cap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ 从而$\cap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$. 于是对任意$x \in \mathbb{R}^d$, 存在$k$ 使得$x \notin F_k$, 从而$h_k(x) < 1$. 这就蕴含$g(x) < 1$.

其次设$|f| < 1$. 令$f_1 = \frac{|f|+f}{2}, f_2 = \frac{|f|-f}{2}$. 则$0 \le f_1, f_2 < 1$. 于是对于$\varepsilon/2 > 0$, 存在$g_i \in C(\mathbb{R}^d)$满足$\operatorname{supp} g_i \subset \overline{\Omega}$ 使得$m(E(f_i \neq g_i)) < \varepsilon/2$ 且$0 \le g_i < 1$ 于$\mathbb{R}^d$ $\quad (i = 1, 2)$. 令$g = g_1 - g_2$. 则$g \in C(\mathbb{R}^d)$ 且易见$\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} g_1 \cup \operatorname{supp} g_2 \subset \overline{\Omega}$. 再由$f = f_1 - f_2$ 得到

$$E(f \neq g) \subset E(f_1 \neq g_1) \cup E(f_2 \neq g_2) \qquad \text{从而}$$

$$m(E(f \neq g)) \le m(E(f_1 \neq g_1)) + m(E(f_2 \neq g_2)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

此外由$0 \le g_1, g_2 < 1$ 易见有$|g(x)| = |g_1(x) - g_2(x)| < 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d$.

对于一般情形, 令

$$\widetilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(f(x))\,, \quad x \in E\,.$$

则$|\widetilde{f}| < 1$ 于$\mathbb{R}^d$. 故存在$\widetilde{g} \in C(\mathbb{R}^d)$ 满足$\operatorname{supp} \widetilde{g} \subset \overline{\Omega}$ 使得$m(E(\widetilde{f} \neq \widetilde{g})) < \varepsilon$ 且$|\widetilde{g}| < 1$ 于$\mathbb{R}^d$. 取

$$g(x) = \tan(\frac{\pi}{2}\widetilde{g}(x))\,.$$

则g 连续，且由$g(x) \neq 0 \Longleftrightarrow \widetilde{g}(x) \neq 0$ 知$\operatorname{supp} g = \operatorname{supp} \widetilde{g} \subset \overline{\Omega}$. 因$f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}\widetilde{f}(x))$ 故$E(f \neq g) = E(\widetilde{f} \neq \widetilde{g})$. 所以$m(E(f \neq g)) < \varepsilon$.

Step 2. 设f为复值的: $f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$ 其中f_1,f_2 为实值可测函数. 对$\varepsilon/2>0$, 由**Step 1**, 存在实值$g_1,g_2\in C(\mathbb{R}^d)$ 使得$m(E(f_1\neq g_1))<\varepsilon/2$, $m(E(f_2\neq g_2))<\varepsilon/2$ 且$\mathrm{supp} g_1, \mathrm{supp} g_1\subset\overline{\Omega}$. 令$g(x)=g_1(x)+\mathrm{i}g_2(x)$. 则$g\in C(\mathbb{R}^d)$ 且易见$\mathrm{supp} g\subset \mathrm{supp} g_1\cup \mathrm{supp} g_1\subset\overline{\Omega}$, $E(f\neq g)\subset E(f_1\neq g_1)\cup E(f_2\neq g_2)$, 因此

$$m(E(f\neq g))\le m(E(f_1\neq g_1))+m(E(f_2\neq g_2))<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Step 3. 设f为复值的, $g\in C(\mathbb{R}^d)$ 是**Step 2** 中对一般情形得到的复值连续函数. 记$M=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$. 若$M=\infty$, 则这个$g$ 即满足定理中的要求。下设$M<\infty$. 考虑复变函数$\Phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$,

$$\Phi(z)=z\quad\text{if}\quad |z|\le M\,;\quad \Phi(z)=M\frac{z}{|z|}\quad\text{if}\quad |z|>M\,.$$

易见Φ在$\mathbb{C}$上连续且$|\Phi(z)|\le M$ for all $z\in\mathbb{C}$. 由复合函数连续性知$\Phi\circ g\in C(\mathbb{R}^d)$. 显然$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}|\Phi(g(x))|\le M$. 因 $\Phi(g(x))\neq 0$ 蕴含$g(x)\neq 0$, 故有$\mathrm{supp}\,\Phi\circ g\subset \mathrm{supp}\, g\subset\overline{\Omega}$. 最后由$|f(x)|\le M$ 易见 $g(x)=f(x)$ 蕴含$\Phi(g(x))=f(x)$. 因此$E(f\neq\Phi\circ g)\subset E(f\neq g)$,

$$m(E(f\neq\Phi\circ g))\le m(E(f\neq g))<\varepsilon\,.$$

因此这个连续函数$\Phi\circ g$ 满足定理中的要求。 □

作业题(2018-3-21)

1. 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f : E \to [-\infty, +\infty]$. 证明：

f 在E 上可测 $\iff$ 对任意有理数r, $E(f > r) \in \mathcal{M}$.

提示：$\forall\, t \in \mathbb{R}$, 考虑有理数子集$\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = [t, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, 证明$E(f > t) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E(f > r_k)$.

2. 周民强《实变函数论》（第2版2008年）P127 思考题1,2,3,4；P147 思考题2，习题3 第一组3 (此题可以用习题课讲的Vitali 覆盖引理证明).

作业题(2018-3-23)

Stein和Shakarchi的《实分析》第1章第6节习题17.

作业题(2018-3-28)

周民强《实变函数论》(第2版2008 年, 北大出版社) P140 思考题1，2,4,5，P144 思考题1，P148 习题3 第一组习题4,5,6,7,8,11,12,14,15,16; 第二组习题9.

第二章 积分理论

§2.1. 非负可测函数的积分

就像从正项级数开始建立无穷级数理论一样, 积分的建立先从非负函数类开始是方便的, 本身也很重要, 最大好处是: 只涉及加法, 因此不会出现同号无穷大相减: "$\infty - \infty$".

我们手头已有的工具是集合的测度, 这使我们可以先对简单函数定义积分。首先建立

有限数集的求和 对任意数集$\{a_y \,|\, y \in A\}$ 满足$A_0 := \{y \in A \mid a_y \neq 0\}$ 是有限集或空集, 定义

$$\sum_{y\in A} a_y = \sum_{y\in A_0} a_y \tag{$*$}$$

其中对于A_0为空集的情形, 定义空集上的求和恒为零:

$$\sum_{y\in\emptyset} a_y = 0.$$

按此定义易知对任意集合B 满足$A_0 \subset B \subset A$ 都有

$$\sum_{y\in A} a_y = \sum_{y\in B} a_y = \sum_{y\in A_0} a_y.$$

事实上若集合B 满足$A_0 \subset B \subset A$, 则对于$B_0 := \{y \in B \mid a_y \neq 0\}$ 有$B_0 = A_0$. 这是因为若$y \in B_0$, 则$y \in B \subset A$ 且$a_y \neq 0$ 因此$y \in A_0$ 所以$B_0 \subset A_0$. 反之若$y \in A_0$ 则$a_y \neq 0$ 且由$A_0 \subset B$知$y \in B$, 所以$y \in B_0$. 所以$A_0 \subset B_0$, 所以$B_0 = A_0$. 于是由有限数集求和

的定义$(*)$得到

$$\sum_{y\in B} a_y=\sum_{y\in B_0} a_y=\sum_{y\in A_0} a_y=\sum_{y\in A} a_y.$$

【例】设f是$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上的非负简单函数. 由简单函数的定义知$f(E)$是有限集. 写$f(E)=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ 其中c_k互不相同。则有

$$\sum_{y\geq 0} ym(E(f=y))=\sum_{y\in f(E)} m(E(f=y))=\sum_{k=1}^{n} m(E(f=c_k))=m(E).$$

这里第一个等号用到值域$f(E)\subset[0,+\infty)$是有限集、空集的测度为零, 最后等号用到可加性: $E=\bigcup_{k=1}^n E(f=c_k)$, $E(f=c_k)$可测且互不相交. $\Box$

【定义(非负简单函数的积分)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 令$\mathcal{S}^+(E)$为$E$上非负简单函数的全体。对任意$f\in\mathcal{S}^+(E)$, 定义$f$在$E$上关于$L$-测度$m$的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{y\geq 0} ym(E(f=y))=\sum_{y\in f(E)} ym(E(f=y))$$

它是一个广义非负实数. 这里用到性质: 值域$f(E)$是有限集、空集的测度为零, 从而有$\{y\in[0,+\infty)\mid ym(E(f=y))\neq 0\}\subset f(E)\subset[0,+\infty)$. $\Box$

将这一定义应用于常值函数(如分别令$f(x)\equiv 1$ 于E 和$f(x)\equiv a$ 于E), 其中$a\geq 0$ 为常数, 则有

$$\int_E \mathrm{d}x:=\int_E 1\mathrm{d}x=m(E),\quad \int_E a\mathrm{d}x=am(E).$$

【命题2.1.1(非负简单函数的积分性质)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f,g\in\mathcal{S}^+(E)$. 则有

(**a**) 可加性**:** 若 A,B 是E的不相交的可测子集, 则

$$\int_{A\cup B} f(x)\mathrm{d}x=\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x\,.$$

一般地, 设 $E_k\subset E\,(k=1,2,...)$ 为可数个互不相交的可测集. 则

$$\int_{\bigcup_{k\geq 1} E_k} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k\geq 1}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(**b**) 线性: 对任意常数 $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ 有

$$\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}x\,.$$

(**c**) 单调性: 若 $f \le g$ 于 E, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \le \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(**d**) 子集与全集的积分关系: 对任意可测子集$A \subset E$ 有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_A(x) f(x)\mathrm{d}x.$$

特别有

$$m(A) = \int_E \mathbf{1}_A(x)\mathrm{d}x.$$

【证】(a): 直接证可数可加性：由$(\bigcup_{k\ge1} E_k)(f=y) = \bigcup_{k\ge1} E_k(f=y)$ 和E_k互不相交以及非负二重级数可以换序有

$$\int_{\bigcup_{k\ge1} E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{y\ge0} ym\Big((\bigcup_{k\ge1} E_k)(f=y)\Big) = \sum_{y\ge0} y\sum_{k\ge1} m(E_k(f=y))$$
$$= \sum_{k\ge1}\Big(\sum_{y\ge0} ym(E_k(f=y))\Big) = \sum_{k\ge1}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

(b): 只需证明

$$\int_E \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x, \quad \alpha\text{是非负常数}. \tag{2.1.1}$$

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x\,. \tag{2.1.2}$$

当$\alpha=0$时(2.1.1) 显然成立。设$\alpha>0$. 我们有

$$\int_E \alpha f(x)\mathrm{d}x = \sum_{y\ge0} ym(E(\alpha f=y)) = \alpha\sum_{y\ge0}\frac{y}{\alpha}m(E(f=\frac{y}{\alpha}))$$
$$= \alpha\sum_{y\ge0} ym(E(f=y)) = \alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

为证(2.1.2), 先证明当f为常数时等式成立。事实上设$f(x)=a$ for all $x\in E$, 其中a是非负常数, 则有

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E (a+g(x))\mathrm{d}x = \sum_{y\ge0} ym(E(a+g=y)) = \sum_{y\ge a} ym(E(g=y-a))$$
$$= \sum_{y\ge0}(a+y)m(E(g=y)) = a\sum_{y\ge0} m(E(g=y)) + \sum_{y\ge0} ym(E(g=y))$$
$$= am(E) + \int_E g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

对于一般情形, 设$f(E) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ 其中$a_k \ge 0$ 互不相同. 令$E_k = E(f = a_k)$, 则$E_1, E_2, ..., E_n$ 互不相交且$E = \bigcup_{k=1}^n E_k$. 注意f在每个E_k上是常数, 于是有可加性和f为常数时的结果有

$$\begin{aligned}
&\int_E (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} (f(x) + g(x))\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^n \Big(\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_k} g(x)\mathrm{d}x \Big) = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \int_{E_k} g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\bigcup_{k=1}^n E_k} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\bigcup_{k=1}^n E_k} g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(c): 设$f \le g$ 于E. 令$h(x) = g(x) - f(x)$, 则h是E上的非负简单函数且$g = f + h$. 于是由线性质和非负性有

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E h(x)\mathrm{d}x \ge \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(d): 设$A \subset E$为可测子集. 由可加性和

$\mathbf{1}_A(x)f(x) = f(x)$ for all $x \in A$ 和 $\mathbf{1}_A(x)f(x) = 0$ for all $x \in E \setminus A$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_E \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_A \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_{E\setminus A} \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_{E\setminus A} 0\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square
\end{aligned}$$

设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 我们知道$E$上的一个函数是简单函数当且仅当它是有限多个可测子集的特征函数的线性组合. 因此对任意可测子集$A_k \subset E$ 和任意非负常数$c_k, k = 1, 2, ..., n$, 应用积分的线性和子集与全集的积分关系有

$$\int_E \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{A_k}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n c_k \int_E \mathbf{1}_{A_k}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n c_k m(A_k). \tag{2.1.3}$$

【注】积分记号中的dx有时也写作d$m(x)$, 它称为测度元. 我们使用古典记号dx 是因为Lebesgue 测度保持区间体积: $m(I) = |I|$, 因此它保持Riemann积分的所有基本性质。测度元dx中的英文字母d表示difference(差或差分)的意思, 而dx表示是x的微分小的邻域的测度(长度、面积等). 例如对直线$\mathbb{R}$上的Lebesgue测度m 和$x > 0$, 由于包含x的微小区间$[x, x+\Delta x]$ 等于大区间$[0, x+\Delta x]$ 减去小区间$[0, x]$ 而其长度$\Delta x\,(> 0)$也是用差(difference)得到的, 即大区间的长度$m([0, x + \Delta x]) = x + \Delta x$减去小区间的长度$m([0, x]) = x$, 故数学上就用d$x = m([0, x + \Delta x]) - m([0, x]) = \Delta x$表示这个微小测

度. 当然在二维和高维的情形, x的邻域(小矩形,小方体等等)不一定总能写成两个大矩形、长方体的差, 但是只要保持差(difference)的上述意义, 即点x的微小邻域的测度(长度,面积,体积等), 数学上就仍沿用了一维时的记号, 即用$\mathrm{d}x$ 表示是在x的微小邻域的测度。

有了非负简单函数的积分, 借助简单函数逼近我们就可以对一般非负可测定义积分:

【定义(非负可测函数的积分)】 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则对任意非负广义实值可测函数$f : E \to [0, +\infty]$, 称非负广义实数

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x := \sup_{\varphi \in \mathcal{S}^+(E),\, \varphi \le f \text{ on } E} \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.4}$$

为 f 在 E 上的关于L-测度m的积分. 进一步, 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty$, 则称 f 在 E 上L-可积, 简称 f 在 E上可积. □

【注】 这个定义与非负简单函数积分的定义是相容的, 即当 $f \in \mathcal{S}^+(E)$ 时, 两个定义中的积分相等, 因为根据非负简单函数积分的单调性易见此时 (2.1.4) 中的上确界是最大值, 它在$\varphi = f$ 达到.

【定理2.1.2】 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 并设下面出现的集合和函数都是可测的。则有

(a) 子集与全集的积分关系: 若 $f \ge 0$ 于 E, $A \subset E$, 则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_A(x) f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(b) 单调性:

$$0 \le f \le g \ \text{于}\ \ E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f(x)\mathrm{d}x \le \int_E g(x)\mathrm{d}x\,.$$

(c) 单调性: 若 $f \ge 0$ 于 E, 则

$$A \subset B \subset E \quad \Longrightarrow \quad \int_A f(x)\mathrm{d}x \le \int_B f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(d) 线性: 若 $f, g \ge 0$ 于 E, $\alpha, \beta \in [0, +\infty]$ 为广义常数, 则

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_E f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_E g(x)\mathrm{d}x\,.$$

(e) (对测度的估计) 若 $f \ge 0$ 于 E, 则

$$m(E(f \ge t)) \le \frac{1}{t} \int_E f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\, t > 0\,.$$

(f) 若 $f \geq 0$ 在 E 上可积, 则 f 在 E 上几乎处处有限, 即 $m(E(f = +\infty)) = 0$, 也即

$$f \geq 0 \quad \text{and} \quad \int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty \Longrightarrow f(x) < \infty \ \text{ a.e. } \ x \in E\,.$$

(g) 如果 $f(x) \equiv 0$ 于 E, 则即使 $m(E) = +\infty$, 也有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0\,.$

(h) 如果 $m(E) = 0$, 则即使 $f(x) \equiv +\infty$, 也有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0\,.$

(i) 若 $f \geq 0$ 于 E 且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$$

则 $m(E(f > 0)) = 0$ 即 $f(x) = 0$ a.e. $x \in E\,.$

(j) 设 $f > 0$ 于 E. 则

$$m(E) > 0 \Longrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x > 0$$

即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow m(E) = 0.$$

【证】(a): 设 $A \subset E$. 对任意 $\varphi \in \mathcal{S}^+(A)$ 满足 $\varphi(x) \leq f(x), x \in A$. 令 $\Phi(x) = \varphi(x)$ 当 $x \in A$; $\Phi(x) = 0$ 当 $x \notin A$. 则 $\Phi \in \mathcal{S}^+(E)$ 且 $\mathbf{1}_A(x)\Phi(x) \leq \mathbf{1}_A(x)f(x)$, $x \in E$. 由非负简单函数积分的子集与全集的积分关系和积分的定义有

$$\int_A \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_A \Phi(x)\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_A(x)\Phi(x)\mathrm{d}x \leq \int_E \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

对如此的 φ 的积分取上确界即得

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x \leq \int_E \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面对任意 $\varphi \in \mathcal{S}^+(E)$ 满足 $\varphi \leq \mathbf{1}_A f$ 于 E, 由 $\varphi \geq 0$ 得到 $\varphi = \mathbf{1}_A\varphi$ 于 E. 同时有 $\varphi(x) \leq f(x)$, $x \in A$. 因此非负简单函数积分的子集积分与全集积分的关系有

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_A(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_A \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

对如此的 φ 的积分取上确界即得反向不等式

$$\int_E \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}x \leq \int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

(b): 设 $0 \leq f \leq g$ 于 E, 则

$$\left\{ \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{S}^+(E) \ \text{且} \ \varphi \leq f \ \text{ 于 } \ E \right\}$$

$$\subset \left\{ \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{S}^+(E) \text{ 且 } \varphi \le g \text{ 于 } E \right\}.$$

两边取上确界即得积分不等式.

(c): 由 (a), (b) 有

$$A \subset B \text{ 且} f \ge 0 \text{ 于 } B \implies \int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_B \mathbf{1}_A(x) f(x)\mathrm{d}x \le \int_B f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(d): 此刻我们先跳到下面的**Levi 单调收敛定理**并完成该定理的证明, 注意在该定理的证明中我们只用到上面已证的(a),(b),(c) 和**命题2.1.1(非负简单函数的积分性质)**. 在证明了**Levi 单调收敛定理**之后我们来证明线性质:

先设α, β 有限, 即$\alpha, \beta \in [0, +\infty)$. 由简单函数逼近定理, 存在 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}^+(E)$ 使得

$$f_k(x) \nearrow f(x)\,, \quad g_k(x) \nearrow g(x) \quad (k \to \infty) \quad \forall\, x \in E$$

从而有

$$\alpha f_k(x) + \beta g_k(x) \nearrow \alpha f(x) + \beta g(x) \;(k \to \infty) \quad \forall\, x \in E.$$

于是应用**Levi 单调收敛定理**和非负简单函数积分的线性质得到

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E (\alpha f_k + \beta g_k)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \Big(\alpha \int_E f_k \mathrm{d}x + \beta \int_E g_k \mathrm{d}x\Big)$$

$$= \alpha \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}x + \beta \lim_{k\to\infty} \int_E g_k \mathrm{d}x = \alpha \int_E f\mathrm{d}x + \beta \int_E g\mathrm{d}x\,.$$

其次设$\alpha = +\infty$ 或$\beta = +\infty$. 此时只需证明

$$\int_E (+\infty) f(x)\mathrm{d}x = (+\infty) \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

事实上将 Levi 单调收敛定理用于函数列$f_k(x) = kf(x)$ 就有

$$\int_E (+\infty) f\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} kf\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E kf\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} k \int_E f\mathrm{d}x = (+\infty) \int_E f\mathrm{d}x.$$

(e): 设 $f \ge 0$. 因当 $x \in E(f \ge t)$ 时 $f(x) \ge t$, 应用上面已证的性质有

$$m(E(f \ge t)) = \int_{E(f\ge t)} \frac{1}{t} t\mathrm{d}x = \frac{1}{t} \int_{E(f\ge t)} t\mathrm{d}x \le \frac{1}{t} \int_{E(f\ge t)} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{t} \int_E f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(f): 令

$$E_\infty = E(f = +\infty), \quad E_k = E(f > k)\,.$$

则 $E_\infty \subset E_k$ $(k=1,2,3,...)$, 且由 (e) 有

$$m(E_\infty) \le m(E_k) \le \frac{1}{k}\int_E f(x)\mathrm{d}x \to 0 \ (k\to\infty)\,.$$

所以 $m(E_\infty)=0$.

(g)：设 $f(x)\equiv 0$ 于 E. 则由线性质和$0\cdot\infty=0$ 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E 0\mathrm{d}x = 0\int_E \mathrm{d}x = 0\,.$$

(h)：设 $m(E)=0$. 则由非负简单函数积分定义有 $\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x = 0\ \forall \varphi\in\mathcal{S}^+(E)$. 因此 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

(i)：设 $f\ge 0$ 于 E 且 $\int_E f\mathrm{d}x=0$. 则由 (e) 有

$$m(E(f\ge 1/k)) \le k\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$$

因此 $m(E(f\ge 1/k))=0\,,\ k=1,2,3,...$. 注意到单调增加性

$$E(f\ge 1)\subset E(f\ge 1/2)\subset E(f\ge 1/3)\subset\cdots,\quad E(f>0)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\ge 1/k)$$

应用测度的单调收敛有

$$m(E(f>0)) = \lim_{k\to\infty} m(E(f\ge 1/k)) = 0\,.$$

所以 $f=0$ a.e. 于 E.

(j)：假设 $f>0$ 于 E 且 $m(E)>0$. 若此时竟然有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$, 则由结论(i) $\Longrightarrow m(E(f>0))=0$. 但 $E=E(f>0)$, 这便导出矛盾：$m(E)=0$.

也可用正证法: 如上有 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E(f\ge 1/k)) = m(E(f>0)) = m(E)>0$, 因此存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $m(E(f\ge 1/k))>0$, 从而由 (e) 得到

$$0<m(E(f\ge 1/k))\le k\int_E f(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x>0\,. \qquad \square$$

在经典理论中要注意带人名的定理, 因为这些定理一劳永逸地吸收了难点, 也是证明其它定理的基础.

【Levi 单调收敛定理】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是 E 上非负可测函数列满足

$$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le ...,\quad \lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)\quad \forall\, x\in E\,.$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】根据可测函数性质知极限函数 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$ 在 E 上可测. 又由 $f_k(x)\le f_{k+1}(x)\le f(x)$ 和积分的单调性有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\le\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\mathrm{d}x,\quad k=1,2,\dots\,.$$

因此数列$\{\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\}_{k=1}^{\infty}$的极限存在并且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\mathrm{d}x\,.$$

下证反向不等式:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\ge\int_E f(x)\mathrm{d}x\,.\tag{2.1.5}$$

若 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=+\infty$, 则反向不等式自动成立. 以下假设

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x<\infty\,.$$

注意, 这条件避免了 ∞ 参与运算！我们将利用积分的定义, 即从简单函数过渡. 任取 $\varphi\in\mathcal{S}^+(E)$ 满足 $\varphi\le f$ 于 E. 将 φ 表式为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{A_i}(x),\quad a_i\ge 0,\quad A_i\subset E.$$

任取 $0<\lambda<1$, 考虑集合 $E_k=E(f_k\ge\lambda\varphi)$, $k=1,2,\dots$. 由 $f_k(x)\le f_{k+1}(x)$ 和 $f_k(x)\to f(x)\,(k\to\infty)$ 易见

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots,\qquad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\,.\tag{2.1.6}$$

事实上 $\forall x\in E$, 若 $\varphi(x)>0$, 则 $f_k(x)\to f(x)\ge\varphi(x)>\lambda\varphi(x)$, 因此存在 k 使得 $f_k(x)\ge\lambda\varphi(x)$ 即 $x\in E_k$；若 $\varphi(x)=0$, 则显然对任意k有 $f_k(x)\ge 0=\lambda\varphi(x)$ 即$x\in E_k$. 所以 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 注意到

$$\mathbf{1}_{E_k}(x)\varphi(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{E_k}(x)\mathbf{1}_{A_i}(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{E_k\cap A_i}(x)$$

据非负简单函数的积分公式(2.1.3)有

$$\int_{E_k}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_E\mathbf{1}_{E_k}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}a_i m(E_k\cap A_i\cap),\quad k=1,2,3,\dots\,.$$

对每个固定的 $i \in \{1, 2, ..., p\}$, 由(2.1.6)有

$$A_i \cap E_1 \cap A_i \subset E_2 \cap A_i \subset E_3 \cap A_i \subset \cdots, \quad A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \cap A_i\,.$$

据测度的单调极限定理得到

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_i) = m(A_i)\,, \quad i = 1, 2, ..., p\,.$$

从而有 (再次使用(2.1.3))

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p} a_i \lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i) = \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

又由$f_k \ge 0$, $E_k = E(f_k \ge \lambda\varphi)$ 和单调性有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \ge \int_{E_k} f_k(x)\mathrm{d}x \ge \int_{E_k} \lambda\varphi(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_{E_k} \varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

取极限得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \ge \lambda \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

再令 $\lambda \to 1$ 即得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \ge \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

最后由 φ的任意性和积分的定义, 这就证明了反向不等式 (2.1.5). $\square$

【**注**】Levi 单调收敛定理中的 “收敛”只是习惯说法, 实际上这个定理还包括了趋于无穷的情形. 例如取 $f_k(x) \equiv k\,, x \in E$ 而 $m(E) > 0$, 则有$\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} km(E) = +\infty$. 由于这个缘故, 也可称 Levi 单调收敛定理为 Levi 单调极限定理. 但数学文献上一直称之为Levi 单调收敛定理(Levi's monotone convergence theorem).

Levi 单调收敛定理假定了函数列的逐点单调性, 但由于不要求其它条件, 在应用上, 特别是在导出积分的其它基本性质时, 还是方便有力的。

【**定理2.1.3**】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f, g, f_k\,(k = 1, 2, ..., n)$ 为 E 上非负可测函数. 则

(a)

$$\int_E \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,.$$

(b) 若 $E = A \cup B\,, A, B$ 可测且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_B f(x)\mathrm{d}x\,.$$

一般地, 若 $E=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$, 其中 E_k 可测且互不相交, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(c) 若 $f(x)=g(x)$ a.e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】(a): 对函数 f_k 的个数n应用归纳法并应用积分的线性质易证 (a) 成立.

(b): 设 $E=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$, 其中E_k 可测且互不相交. 由(a)和子集与全集的积分关系有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E \Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{E_k}f(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_E \mathbf{1}_{E_k}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

(c): 设 $f=g$ a.e. 于 E, 即 $E(f\neq g)$ 为零测集. 由性质 (b) 和零测集上的积分等于零, 有

$$\int_E f\mathrm{d}x=\int_{E(f=g)} f\mathrm{d}x+\int_{E(f\neq g)} f\mathrm{d}x=\int_{E(f=g)} g\mathrm{d}x+\int_{E(f\neq g)} g\mathrm{d}x=\int_E g\mathrm{d}x\,. \qquad \Box$$

【定理2.1.4(逐项积分)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 上非负可测函数列。则成立逐项积分：

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】由 f_k 非负, 令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,,\ S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, 则有

$$0\le S_n(x)\le S_{n+1}(x)\,,\ n=1,2,3,...,\quad \lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)\qquad \forall\, x\in E\,.$$

因 S_n 非负可测, 故其极限函数 S 非负可测. 应用 Levi 单调收敛定理, 积分的线性质, 和广义非负项级数的定义得到

$$\int_E S(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E S_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,. \quad \Box$$

【定理2.1.5(可数可加性)】设$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\,(k=1,2,3,...)$ 是一列可测集且互不相交(或稍一般些: 互不重叠, 即若$i\neq j$ 则$m(E_i\cap E_j)=0$). 设f 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上非负可测, 则成立可数可加性：

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】记 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 先设$E_k$互不相交. 此时有$1=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_k}(x), x\in E$ 从而有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_k}(x)f(x)\qquad \forall\, x\in E\,.$$

因此由非负可测函数列的逐项积分定理得到

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E \mathbf{1}_{E_k}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\,.$$

现在设E_k 互不重叠. 令

$$Z=\bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},i\neq j}E_i\cap E_j.$$

则Z 是可数个零测集的并因而是零测集. 令$\widetilde{E}=E\setminus Z$, $\widetilde{E}_k=E_k\setminus Z$. 则

$$\widetilde{E}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\quad \text{且}\ \widetilde{E}_k\ \text{互不相交}.$$

因此由互不相交情形的可数可加性有

$$\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

又由$E\setminus\widetilde{E}=Z$, $E_k\setminus\widetilde{E}_k\subset Z$ 知$E\setminus\widetilde{E}, E_k\setminus\widetilde{E}_k$ 都是零测集. 因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E\setminus\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_k\setminus\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

代入上式即知所证可加性成立. $\square$

【例(积分与级数)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f:E\to[0,+\infty]$ 可测且几乎处处有限, 即$m(E(f=+\infty))=0$. 则对任意 $0<h<\infty$ 有

$$\frac{1}{2h}\int_{E(f\ge h)}f(x)\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^{\infty}m(E(f\ge kh))\le\frac{1}{h}\int_{E(f\ge h)}f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】因

$$E(f\ge kh)=E(\frac{1}{h}f\ge k),\qquad \frac{1}{h}\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E\frac{1}{h}f(x)\mathrm{d}x$$

故以 $\frac{1}{h}f$ 代替 f 可以假定 $h=1$. 由**定理2.1.2(e)** 有

$$m(E(f\ge k))\le\frac{1}{k}\int_{E(f\ge k)}f(x)\mathrm{d}x\qquad (\,k\ge 1\,)\,.$$

若存在$k_0 \geq 1$ 使得$m(E(f \geq k_0)) = +\infty$, 则$\int_{E(f\geq k_0)} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$ (从而由$E(f \geq 1) \supset E(f \geq k_0)$ 知$\int_{E(f\geq 1)} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$) 且$\sum_{k=1}^{\infty} m(E(f \geq k)) = +\infty$. 此时所证不等式自动自动成立.

因此下面可以假设$m(E(f \geq k)) < \infty, k = 1, 2, 3, \ldots$. 这个有限性保证了下面推导中不涉及广义实数, 因此不会出现“$\infty - \infty$”. 此外由于零测集对测度和积分无贡献, 故若以$E(f < \infty)$代替E, 则所有积分值不变. 因此不失一般性可以假定f 处处有限.

在 Abel 分部求和公式

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = \sum_{k=1}^{N-1} \Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\Big)(b_k - b_{k+1}) + \Big(\sum_{k=1}^{N} a_k\Big) b_N\,, \quad N \geq 2$$

中取 $a_k = 1$ 和 $b_k = m(E(f \geq k))$ 并注意

$$b_k - b_{k+1} = m(E(f \geq k)) - m(E(f \geq k+1)) = m(E(k \leq f < k+1))$$

得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} m(E(f \geq k)) = \sum_{k=1}^{N-1} k m(E(k \leq f < k+1)) + N m(E(f \geq N)) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} \int_{E(k\leq f<k+1)} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E(f\geq N)} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{E(1\leq f<N)} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E(f\geq N)} f(x) = \int_{E(f\geq 1)} f(x)\mathrm{d}x \quad (\forall\, N \geq 2)
\end{aligned}$$

这里用到了积分的可加性. 令 $N \to \infty$ 即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E(f \geq k)) \leq \int_{E(f\geq 1)} f(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} m(E(f \geq k)) \geq \sum_{k=1}^{N-1} k m(E(k \leq f < k+1)) \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) m(E(k \leq f < k+1)) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{E(k\leq f<k+1)} f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

令$N \to \infty$ 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E(f \geq k)) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E(k\leq f<k+1)} f(x)\mathrm{d}x.$$

注意f 处处有限: $0\le f(x)<\infty$ for all $x\in E$, 我们有分解

$$E(f\ge 1)=E(1\le f<\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(k\le f<k+1).$$

据积分的可加性便有

$$\int_{E(f\ge 1)}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E(k\le f<k+1))}f(x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(E(f\ge k))\ge\frac{1}{2}\int_{E(f\ge 1)}f(x)\mathrm{d}x.\qquad\square$$

【定理2.1.6(积分的扩张)】设$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$单调增加:

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots,\qquad E:=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\,.$$

则对E上的任一非负可测函数f 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】由假设条件有

$$0\le f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)\le f(x)\mathbf{1}_{E_{k+1}}(x)\,,\ k=1,2,...;\quad \lim_{k\to\infty}f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)=f(x)$$

for all $x\in E$. 【事实上对任意 $x\in E$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in E_N$. 因此当 $k\ge N$ 时 $\mathbf{1}_{E_k}(x)=1$, 从而有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)=f(x)$.】应用 Levi 单调收敛定理即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\,.\qquad\square$$

【定理2.1.7(积分的收缩)】设$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$单调减少:

$$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots;\qquad E:=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\,.$$

若f 是E_1 上的非负可测函数且

$$\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】由假设知

$$E_1 \setminus E_k \subset E_1 \setminus E_{k+1}, \ \ k=1,2,3,...; \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_1 \setminus E_k) = E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \setminus E.$$

故应用上述积分扩张定理并注意$\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x < \infty$ 即得

$$\begin{aligned}&\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1\setminus E} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_1\setminus E_k} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\Big) = \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

消去$\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x < \infty$ 即得所证. □

【**例**】用积分的方法证明Borel-Cantelli 引理:

设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $k=1,2,3,...$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. 则 E 中几乎所有点至多同时属于有限多个 E_k.

【证】根据“几乎处处”的定义, 本题是说 E 中同时属于无限多个 E_k 的点的集合是一个零测集, 即集合

$$Z := \{x \in E \mid \text{存在严格增加的自然数列}\ \{k_j\}_{j=1}^{\infty}\ \text{使得}\ x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j}\}$$

是零测集. 前面讲过, 特征函数是个好东西, 它把集合与数值联系起来了. 所以我们可以进一步分析：考虑可测函数

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_k}(x), \qquad x \in E\,.$$

则易见 $x \in Z$ 当且仅当有无限多个 $\mathbf{1}_{E_k}(x)$ 等于 1, 即当且仅当 $f(x) = +\infty$. 因此

$$Z = E(f = +\infty).$$

于是为证明 $m(Z) = 0$, 充分地我们只要证明 f 在 E 上可积, 即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty$. 由非负可测函数的逐项积分和题目假设有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E \mathbf{1}_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty\,.$$

所以 f 的确在 E 上可积. 因此 $m(Z) = 0$. □

下面这个Fatou引理属于那种证明简单但经常使用的一类.

【Fatou引理】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是E 上的任一非负可测函数列。则有

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,.$$

特别若 $f_k(x)\to f(x)$ a.e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \le \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】令 $F_k(x)=\inf\limits_{j\ge k} f_j(x)$. 则

$$0\le F_k(x)\le F_{k+1}(x)\,,\quad k=1,2,...;\qquad \lim_{k\to\infty}F_k(x)=\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\quad \forall\, x\in E\,.$$

由 Levi 单调收敛定理和 $F_k\le f_k$ 得到

$$\begin{aligned}&\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}x\\ &=\liminf_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}x\le \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

这证明了引理的第一部分.

现在设 $f_k(x)\to f(x)$ a.e. $x\in E$, 则由几乎处处的定义, 知

$$Z=\{x\in E\mid f_k(x)\not\to f(x)\ (k\to\infty)\}$$

是零测集, 同时由可测函数性质知f是E上的可测函数。因零测集对积分无贡献, 故将引理的第一部分应用于$E\setminus Z$ 得到

$$\begin{aligned}&\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E\setminus Z} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E\setminus Z}\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{k\to\infty}\int_{E\setminus Z}f_k(x)\mathrm{d}x=\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.\qquad\Box\end{aligned}$$

作业题（2018-3-30留)

Stein和Shakarchi的《实分析》第2章第5节习题10.

周民强《实变函数论》(第2版2008 年, 北大出版社) P161 思考题1,4,5,6; P168 思考题9,10,12; P220 习题4 第一组习题1,2,3,5; 第二组习题1,2,5,6.

§2.2. 一般可测函数的积分

设 $f: E \to [-\infty, +\infty]$. 回忆: f 可表示为它的正部和负部之差:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)\,, \quad x \in E$$

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = f(x)\mathbf{1}_{E(f\ge 0)}(x) \ge 0\,,$$

$$f^-(x) := (-f)^+(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = -f(x)\mathbf{1}_{E(f\le 0)}(x) \ge 0\,.$$

【注】 若 f 在 E 上可测, 则 $f^{\pm}$ 都在 E 上非负可测. 此外易见对每个$x \in E$, $f^+(x)$与$f^-(x)$必有一个为零, 因此在上述分解中不会出现“$\infty - \infty$”.

【定义】 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f: E \to [-\infty, +\infty]$ 可测.

(i) 如果 f^+ 和 f^- 中至少有一个在E上L-可积, 即$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x\,, \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$中至少有一个为有限, 则称广义实数

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x := \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 f 在 E 上关于Lebesgue测度的积分, 同时称积分 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

(ii) 若 f^+和f^- 都在 E 上L-可积, 则称 f 在 E 上L-可积, 有时简称可积。在 E 上L-可积的函数的全体记为 $L^1(E)$.

(iii) 对一维情形, 当 E 是区间 (有界、无界、开、闭、半开半闭), 也即当 $E = [a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$ 时, 由于端点 a, b 对积分没有贡献, 区间上的积分一律记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,. \qquad \square$$

【注】 由 $|f| = f^+ + f^-$ 和

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

易见(当f在E上可测时)

$$f \in L^1(E) \iff |f| \in L^1(E) \iff \int_E |f(x)|\mathrm{d}x < \infty\,.$$

因此对于 Lebesgue 积分而言, **可积等价于绝对可积**. 当 $f \in L^1(E)$ 时记

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(E)} = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x\,.$$

下面给出积分的基本性质. 由于证明简单, 我们将定理的陈述与证明并行.

【定理2.2.1(积分的基本性质)】 设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, f,g 为 E 上广义实值可测函数。

(a) 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则

$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|\le\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\,.$$

这是因为

$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|=\Big|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x\Big|\le\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) 若 $\int_E g(x)\mathrm{d}x$ 存在并且 $f(x)=g(x)$ a.e. $x\in E$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 存在且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x\,.$$

这是因为 $m(E(f\ne g))=0\Longrightarrow$

$$\int_E f^{\pm}(x)\mathrm{d}x=\int_{E(f=g)}f^{\pm}(x)\mathrm{d}x=\int_{E(f=g)}g^{\pm}(x)\mathrm{d}x=\int_E g^{\pm}(x)\mathrm{d}x\,.$$

(c) 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$, $\int_E g(x)\mathrm{d}x$ 都存在并且 $f(x)\le g(x)$ a.e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\le\int_E g(x)\mathrm{d}x\,.$$

这是因为

$$f(x)\le g(x)\quad\Longrightarrow\quad f^+(x)\le g^+(x),\quad f^-(x)\ge g^-(x)$$

因此结合 $m(E(f>g))=0$ 有

$$\int_E f^+\mathrm{d}x=\int_{E(f\le g)}f^+\mathrm{d}x\le\int_{E(f\le g)}g^+\mathrm{d}x=\int_E g^+\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_E f^-\mathrm{d}x=\int_{E(f\le g)}f^-\mathrm{d}x\ge\int_{E(f\le g)}g^-\mathrm{d}x=\int_E g^-\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$

$$\int_E f\mathrm{d}x=\int_E f^+\mathrm{d}x-\int_E f^-\mathrm{d}x\le\int_E g^+\mathrm{d}x-\int_E g^-\mathrm{d}x=\int_E g\mathrm{d}x\,.$$

(d) 若 $f\in L^1(E)$ 而 $A\subset E$ 是可测集, 则 $f\in L^1(A)$ 且

$$\int_A|f(x)|\mathrm{d}x\le\int_E|f(x)|\mathrm{d}x.$$

这是由于此时 f 也在 A 上可测. 因此不等式属于非负可测函数积分的单调性的结论.

(e) 若 f 在 E 上有界, 且 $m(E)<\infty$, 则 $f\in L^1(E)$.

这是因为 $\sup\limits_{x\in E}|f(x)|\le M<\infty$ 和 $m(E)<\infty\Longrightarrow$

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\le\int_E M\mathrm{d}x=M\cdot m(E)<\infty\,.$$

(f) 若 $0\le g\in L^1(E)$ 而 $|f(x)|\le g(x)$ a.e. $x\in E$, 则 $f\in L^1(E)$.

这是因为（由**(c)**）

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\le\int_E g(x)\mathrm{d}x<\infty\,.$$

(g) 若 $f\in L^1(E)$, 则 f 在 E 上几乎处处有限, 即 $m(E(|f|=\infty))=0$.

事实上将非负可测函数积分的**定理2.1.2(f)** 应用于 $|f|$, 并注意 $\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 即得结论.

(h)(线性性和三角不等式). 可积函数类 $L^1(E)$ 是一个线性空间, 即若 $f,g\in L^1(E)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 为常数, 则 $\alpha f+\beta g\in L^1(E)$, 并成立线性性:

$$\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

和三角不等式:

$$\int_E|f(x)+g(x)|\mathrm{d}x\le\int_E|f(x)|\mathrm{d}x+\int_E|g(x)|\mathrm{d}x\,.$$

【(h)的证明】设 $f,g\in L^1(E)$, $\alpha\in\mathbb{R}^1$ 为常数. 由结论 (f) 知 f,g 在 E 上几乎处处有限. 因此由可测函数的基本性质知 $\alpha f, f+g$ 都是 E 上的可测函数. 又由

$$|\alpha f(x)|=|\alpha||f(x)|\,,\quad |f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$$

和非负可测函数的积分性质有

$$\begin{aligned}&\int_E|\alpha f(x)|\mathrm{d}x=|\alpha|\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\infty\,,\\&\int_E|f(x)+g(x)|\mathrm{d}x\le\int_E(|f(x)|+|g(x)|)\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x+\int_E|g(x)|\mathrm{d}x<\infty\,.\end{aligned}$$

因此 αf, $f+g\in L^1(E)$. 这同时证明了三角不等式.

为证明线性性, 只需证明

$$\int_E\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x\,,\quad\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x\,.$$

根据函数的正、负部的定义易见：当 $\alpha \ge 0$ 时,

$$(\alpha f)^+(x) + \alpha f^-(x) = \alpha f^+(x) + (\alpha f)^-(x)\,,$$

从而有

$$\int_E (\alpha f)^+ \mathrm{d}x + \alpha \int_E f^- \mathrm{d}x = \alpha \int_E f^+ \mathrm{d}x + \int_E (\alpha f)^- \mathrm{d}x < \infty\,.$$

移项即得

$$\int_E \alpha f(x) \mathrm{d}x = \alpha \int_E f(x) \mathrm{d}x\,.$$

而当 $\alpha < 0$ 时,

$$(\alpha f)^+(x) = \max\{\alpha f(x)\,, 0\} = \max\{-(-\alpha) f(x)\,, 0\} = (-\alpha f)^-(x)\,,$$

$$(-\alpha) f^+(x) = -\alpha \max\{f(x)\,, 0\} = \max\{-\alpha f(x)\,, 0\} = (\alpha f)^-(x)$$

$$\Longrightarrow\ (\alpha f)^+(x) + (-\alpha) f^+(x) = (\alpha f)^-(x) + (-\alpha) f^-(x)\,,$$

从而有

$$\int_E (\alpha f)^+ \mathrm{d}x + (-\alpha) \int_E f^+ \mathrm{d}x = \int_E (\alpha f)^- \mathrm{d}x + (-\alpha) \int_E f^- \mathrm{d}x < \infty\,.$$

移项后同样得到

$$\int_E \alpha f(x) \mathrm{d}x = \alpha \int_E f(x) \mathrm{d}x\,.$$

最后设 $Z = E(|f| = +\infty) \cup E(|g| = +\infty)$. 则 $m(Z) = 0$. 于是在$E \setminus Z$上,
以下运算有意义：

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ + g^+ - f^- - g^-\,,$$

$$\Longrightarrow\ (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+\,.$$

因零测集对积分没有贡献, 对这些非负函数在整个 E 上取积分得到

$$\int_E (f+g)^+ \mathrm{d}x + \int_E f^- \mathrm{d}x + \int_E g^- \mathrm{d}x = \int_E (f+g)^- \mathrm{d}x + \int_E f^+ \mathrm{d}x + \int_E g^+ \mathrm{d}x < \infty\,.$$

移项即得所证等式. $\Box$

【注】当f 在E上可积时, 由于$E(|f| = +\infty)$是零测集, 而去掉零测集不改变可积性和积分值, 故永远可以用$E(|f| < \infty)$代替E, 即可以假定f在E上处处有限. 同样, 当f和可数多个函数f_k 在E上可积时,

$$Z := E(|f| = +\infty) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f_k| = +\infty) \quad \text{是零测集}$$

故可以用$E\setminus Z$代替E. 这就使得减法运算$f_k(x)-f(x), f_k(x)-f_j(x)$等等运算有意义。

现在我们可以证明 现代积分理论中最有力最常用的几个定理：Lebesgue 控制收敛定理, 逐项积分定理, 可数可加定理, 积分的绝对连续性, 等.

【Lebesgue 控制收敛(LDC)定理】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, E上的可测函数$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)\quad$ a.e. $\quad x\in E$,

(ii) 存在函数 $0\le F\in L^1(E)$ 使得

$$|f_k(x)|\le F(x)\,,\quad \forall\, x\in E\,,\quad \forall\, k=1,2,3,\dots.$$

则 $f_k, f\in L^1(E)$ 且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【Lebesgue 控制收敛(LDC)定理的推广形式】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, E上的可测函数列$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和非负函数列$\{F_k\}_{k=1}^{\infty}, F$满足

(i) $\quad\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\quad \lim\limits_{k\to\infty} F_k(x)=F(x)\quad$ a.e. $\quad x\in E$,

(ii) $\quad |f_k(x)|\le F_k(x)\,,\quad \forall\, x\in E\,,\quad \forall\, k=1,2,3,\dots.$

(iii) $\quad F_k, F\in L^1(E)\quad$ 且 $\quad\lim\limits_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}x=\int_E F(x)\mathrm{d}x.$

则 $f_k, f\in L^1(E)$ 且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【注】LDC 是 **Lebesgue Dominated Convergence** (Lebesgue 控制收敛) 的缩写. 在推广形式的LDC中的一个特殊情形是$F_k\equiv F$, 此时即为原版LDC. 两个定理中条件 (ii) 中的函数 F (相应地F_k) 称为 f_k 的控制函数. 控制函数可以有很多, 例如若 F (相应地F_k) 是 f_k 的控制函数, 而若$0\le G\in L^1(E)$, 则 $3F$ 和 $F+G$ (相应地$3F_k, F_k+G$)也都是 f_k 的控制函数. 但$|f_k|$一般不是f_k的控制函数除非$F_k:=|f_k|, F:=|f|$ 满足推广形式的LDC中的条件(iii).

【定理的证明】只需证推广形式的LDC. 由$F_k, F\in L^1(E)$ 和$|f_k|\le F_k$ 知$f_k\in L^1(E)$. 再由假设(i)知$\lim\limits_{k\to\infty}|f_k(x)|=|f(x)|$ a.e. $x\in E$, 于是由Fatou 引理有

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x\le \liminf_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}x\le \liminf_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}x=\int_E F(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

于是所有函数f_k, F_k, f, F都是可积的因而几乎处处有限. 令

$$Z=E(f_k\not\to f)\cup E(F_k\not\to F)\cup E(|f|+F=+\infty)\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}E(|f_k|+F_k=+\infty)\,.$$

则$m(Z)=0$. 由于去掉一个零测集不改变积分值, 我们可以以 $E\setminus Z$ 代替 E, 也即可以假定 $f_k(x), f(x), F_k(x), F(x)$ 在 E 上处处有限. 于是减法$f_k(x)-f(x)$处处有意义, 等等. 令

$$g_k(x)=|f_k(x)-f(x)|.$$

则

$$\begin{aligned}&g_k\in L^1(E)\,,\quad g_k(x)\to 0\quad (k\to\infty\,)\quad \forall\, x\in E,\\ &0\le g_k(x)\le F_k(x)+F(x)\quad \forall\, x\in E\,,\quad \forall\, k=1,2,3,\dots\,.\end{aligned}$$

对**非负**可测函数F_k+F-g_k应用 Fatou 引理和数列的上下极限关系有

$$\begin{aligned}&2\int_E F\mathrm{d}x=\int_E \lim_{k\to\infty}(F_k+F)\mathrm{d}x=\int_E \lim_{k\to\infty}(F_k+F-g_k)\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{k\to\infty}\int_E (F_k+F-g_k)\mathrm{d}x=\liminf_{k\to\infty}\Big(\int_E F_k\mathrm{d}x+\int_E F\mathrm{d}x-\int_E g_k\mathrm{d}x\Big)\\ &\le \limsup_{k\to\infty}\Big(\int_E F_k\mathrm{d}x+\int_E F\mathrm{d}x\Big)+\liminf_{k\to\infty}\Big(-\int_E g_k\mathrm{d}x\Big)\\ &=2\int_E F\mathrm{d}x-\limsup_{k\to\infty}\int_E g_k\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

消去有限数 $2\int_E F\mathrm{d}x<+\infty$ (这儿用到 F 的可积性!), 即得

$$\limsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x\le 0\,.$$

但 $g_k\ge 0$ 于 E, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x=0$ 即

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0\,.$$

最后由积分不等式得到

$$\Big|\int_E f_k\mathrm{d}x-\int_E f\mathrm{d}x\Big|=\Big|\int_E (f_k-f)\mathrm{d}x\Big|\le \int_E |f_k-f|\mathrm{d}x\to 0\ \ (k\to\infty)\,.\qquad\Box$$

【**重要例题**】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), f \in L^1(E)$. 则按积分范数, f可以被有界的可积函数逼近. 具体来说, 令$f_M(x) = f(x)\mathbf{1}_{E(|f|\le M)}(x)$, $0 < M < \infty$. 则f_M是有界的可积函数且

$$\int_E |f(x) - f_M(x)|\mathrm{d}x = \int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad (M \to +\infty).$$

【证】易见f_M是可测函数且$|f_M(x)| = |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|\le M)}(x) \le \min\{|f(x)|, M\}, x \in E$. 因此$f_M$ 是有界的可积函数. 同时有$|f(x) - f_M(x)| = |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|>M)}(x)$,

$$\int_E |f(x) - f_M(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|>M)}(x)\mathrm{d}x = \int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

由f 可积知f在E上几乎处处有限, 即$Z = E(|f| = +\infty)$ 是零测集. 令$E_1 = E \setminus Z$. 则$E = E_1 \cup Z$. 因零测集对积分无贡献, 故我们可以以E_1代替E, 即可以假定f在E上处处有限即$E = E(|f| < \infty)$. 其次我们注意: 只需证明当M取正整数值(即$M = k \in \mathbb{N}$)时有

$$\int_{E(|f|>k)} |f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{2.2.1}$$

事实上若(2.2.1)成立, 令$[M]$ 为不超过M的最大整数, 则由$M \ge [M]$ 有$E(|f| > M) \subset E(|f| > [M])$ 从而由非负函数积分的单调性即得

$$\int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_{E(|f|>[M])} |f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad (M \to +\infty).$$

[**证法1:**] 为了保持积分集合是固定的, 即不依赖于k, 从而可使用LDC, 我们使用特征函数：令

$$g_k(x) := |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|>k)}(x), \quad x \in E,\ k = 1, 2, 3, \dots.$$

则有

$$\int_{E(|f|>k)} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E g_k(x)\mathrm{d}x.$$

对任意$x \in E = E(|f| < \infty)$有$|f(x)| < \infty$, 因此当$k > |f(x)|$时, $\mathbf{1}_{E(|f|>k)}(x) = 0$, 从而有$g_k(x) = 0$. 由此可知

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = 0 \quad \forall\, x \in E; \qquad |g_k(x)| \le |f(x)| \quad \forall\, x \in E,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

因$|f| \in L^1(E)$, 故由LDC 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x = 0.$$

所以(2.2.1)成立.

[**证法2:**]为证(2.2.1), 令

$$f_k(x)=|f(x)|\mathbf{1}_{E(f\le k)}(x),\quad k=1,2,3,\dots.$$

则对任意$x\in E$ 有

$$0\le f_k(x)\le f_{k+1}(x)\le|f(x)|\ (k=1,2,3,...)\,;\quad f_k(x)\to|f(x)|\quad(k\to\infty).$$

对$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 应用 LDC (可取$|f|$为控制函数因为$|f|$可积)或 Levi 单调收敛定理并注意 $|f(x)|-f_k(x)=|f(x)|\mathbf{1}_{E(f>k)}(x)$, 得到

$$\int_{E(f>k)}|f|\mathrm{d}x=\int_E(|f|-f_k)\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_E f_k\mathrm{d}x\to 0\quad(k\to\infty).\qquad\Box$$

LDC 的一个特殊且常用的情形是下列有界收敛定理:

【Lebesgue有界收敛定理】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列可测函数, 满足

(i) $m(E)<\infty$,

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\quad$ a.e. $x\in E$,

(iii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上一致有界, 即存在常数 $0\le M<\infty$ 使得

$$|f_k(x)|\le M\qquad\forall\,x\in E\,,\quad\forall\,k=1,2,3,\dots.$$

则 $f\in L^1(E)$ 且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】由 $m(E)<\infty$ 知常值函数 $F(x)=M$ 在 E 上可积: $\int_E F(x)\mathrm{d}x=Mm(E)<\infty$. 因此由假设知 F 是 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的控制函数. 这就转化为 LDC, 遂得证. $\Box$

很多情况下我们会遇到带连续参数的函数族. 相应地我们有

【连续参变量的Lebesgue控制收敛定理】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $I\subset\mathbb{R}^l$, 0 是I 的一个聚点, $\{f_h\}_{h\in I}$是E 上的一族可测函数, 满足

(i) $\lim\limits_{I\ni h\to 0}f_h(x)=f(x)\quad$ a.e. $\quad x\in E\,.$

(ii) 存在函数 $0 \le F \in L^1(E)$ 使得 $|f_h(x)| \le F(x) \quad \forall\, x \in E\,,\ \forall\, h \in I\,.$

则 $f \in L^1(E)$ 且

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E |f_h(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0$$

从而有

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E f_h(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x\,.$$

【证】任取点列 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset I$ 满足 $h_k \neq 0, h_k \to 0\ (k \to \infty)$, 由假设 (i),(ii) 可见 $\{f_{h_k}\}_{k=1}^{\infty}, f, F$ 满足函数列情形的 LDC 的条件. 因此 $f \in L^1(E)$ 且

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |f_{h_k}(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0.$$

再由 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的任意性即得所证. $\square$

【连续参变量的有界收敛定理】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $I \subset \mathbb{R}^l$, 0 是I的一个聚点, $\{f_h\}_{h \in I}$是 E 上的一族可测函数, 满足

(i) $\lim\limits_{I \ni h \to 0} f_h(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad x \in E\,.$

(ii) $\{f_h\}_{h \in I}$ 一致有界, 即 $\sup\limits_{x \in E,\, h \in I} |f_h(x)| < \infty.$

(iii) $m(E) < \infty.$

则 $f \in L^1(E)$ 且

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E |f_h(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0$$

从而有

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E f_h(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x\,.$$

【证】令$M = \sup\limits_{x \in E,\, h \in I} |f_h(x)|$, 则$0 \le M < \infty$. 由 $m(E) < \infty$ 知常值函数 $F(x) = M$ 在 E 上可积: $\int_E F(x) \mathrm{d}x = M m(E) < \infty$. 因此$F$ 是 $\{f_h\}_{h \in I}$ 的可积的控制函数. 据上一定理即得证. $\square$

【定理2.2.2(逐项积分)】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 若 $f_k \in L^1(E)$, $k = 1, 2, 3, ...$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

则函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处绝对收敛, 且和函数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 在 E 上可积并成立逐项积分:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) \mathrm{d}x$$

和

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |S_k(x)-S(x)|\mathrm{d}x=0$$

其中 $S_k(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

【证】令 $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$. 则 F 是 E 上非负可测函数. 由非负可测函数的逐项积分定理和假设条件有

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}x<\infty\,.$$

因此 $F\in L^1(E)$. 这蕴涵 F 在 E 上几乎处处有限, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|<\infty \quad \text{a.e.} \quad x\in E$$

也即函数级数 $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处绝对收敛. 因此 (由级数收敛的定义)

$$S_k(x)\to S(x) \quad (k\to\infty) \quad \text{a.e.} \quad x\in E\,;$$
$$|S_k(x)|\le\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\le F(x)\,,\quad x\in E\,,\quad k=1,2,3,\dots\,.$$

应用 LDC (注意 LDC 已蕴涵 $S\in L^1(E)$) 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |S_k(x)-S(x)|\mathrm{d}x=0$ 从而由积分的线性性和级数收敛的定义得到

$$\int_E S(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E S_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,.$$

□

在应用这一定理时, 一般是先对非负函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$ 逐项积分, 这一步总是可行的, 除了要求 f_k 可测外, 没有任何限制. 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k|\mathrm{d}x<\infty$, 则可以对 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 逐项积分.

【定理2.2.3(可数可加性)】设$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ $(k=1,2,3,...)$ 且E_k互不相交(或稍一般些: 互不重叠, 即若$i\ne j$ 则$m(E_i\cap E_j)=0$). 令$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 并设$f\in L^1(E)$. 则成立可加性:

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】令 $f_k(x)=f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)$. 由非负可测函数的积分可加性有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x<\infty\,.$$

于是应用逐项积分定理得

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x\,.$$

另一方面, 由 E_k 互不相交和 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_k}(x) = \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{\infty} E_k}(x) = \mathbf{1}_E(x) = 1\,, \quad x \in E$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_k}(x) = f(x)\,, \quad x \in E\,.$$

所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

现在设E_k 互不重叠. 令

$$Z = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, i\neq j} E_i \cap E_j.$$

则Z 是可数个零测集的并因而是零测集. 令$\widetilde{E} = E \setminus Z$, $\widetilde{E}_k = E_k \setminus Z$. 则

$$\widetilde{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{E}_k \quad \text{且} \ \widetilde{E}_k \ \text{互不相交.}$$

因此由互不相交情形的可数可加性有

$$\int_{\widetilde{E}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\widetilde{E}_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

又由$E \setminus \widetilde{E} = Z$, $E_k \setminus \widetilde{E}_k \subset Z$ 知$E \setminus \widetilde{E}, E_k \setminus \widetilde{E}_k$ 都是零测集. 因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{\widetilde{E}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E\setminus\widetilde{E}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\widetilde{E}} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\widetilde{E}_k} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_k\setminus\widetilde{E}_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\widetilde{E}_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

代入上式即知所证可加性成立. □

【并集上的积分的分拆】很多时候我们需要建立一个函数分别在每个特定类型的集合上的积分与这函数在这些特定集合的并集上的积分的关系式. 下面这个定理给出了一种这样的关系式.

【定理2.2.4(并集上积分的分拆)】设$E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $k = 1,2,3,...,n$, 并设$f \in L^1(\bigcup_{k=1}^n E_k)$. 则有

$$\int_{\bigcup_{k=1}^n E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{1\le i<j\le n} \int_{E_i\cap E_j} f(x)\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} \int_{E_i\cap E_j\cap E_k} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + (-1)^{n-1}\int_{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n} f(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_{\bigcup_{k=1}^n E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le n} \int_{E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_j}} f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】我们将使用下面的多项展开式(对n用归纳法即可证明): 设a_k为实数或复数, $k = 1,2,...,n$. 则有

$$\prod_{k=1}^n (1+a_k) = 1 + \sum_{j=1}^n \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le n} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}.$$

在这一展开式中把a_k 换成$-a_k$ 然后移项可得

$$1 - \prod_{k=1}^n (1-a_k) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le n} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}.$$

将这第二个展开式用于$a_k = \mathbf{1}_{E_k}(x)$ 并用特征函数基本性质

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n E_k}(x) = 1 - \prod_{k=1}^n \Big(1 - \mathbf{1}_{E_k}(x)\Big),$$
$$\mathbf{1}_{E_{k_1}(x)}\mathbf{1}_{E_{k_2}}(x)\cdots\mathbf{1}_{E_{k_j}}(x) = \mathbf{1}_{E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_j}}(x)$$

得到

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n E_k}(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le n} \mathbf{1}_{E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_j}}(x).$$

对这等式两边乘以$f(x)$ 并在$E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ 上积分即得所证积分等式. 注意由f在E上可积知上述所有积分都有限, 因此运算是合法的。 □

如何从函数在某类子集上的可积性推测函数在全集上的可积性？下面这个定理给出了一个常用的方法.

【定理2.2.5(积分的扩张)】设 $E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 是一列单调增加的可测集：

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots; \qquad E := \bigcup_{k=1}^\infty E_k\,.$$

设 f 是 E 上的可测函数. 则

$$f \in L^1(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{k\geq 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty\,.$$

此外当 $f \in L^1(E)$ 时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】若 f 在 E 上可积, 则由非负函数积分的单调性 $\int_{E_k}|f|\mathrm{d}x \leq \int_E |f|\mathrm{d}x$ 有

$$\sup_{k\geq 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_E |f(x)|\mathrm{d}x < \infty\,.$$

反之假设 $\sup\limits_{k\geq 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty$. 将非负可测函数的积分扩张定理分别应用于 f 的正部和负部并注意显然的不等式 $0 \leq f^{\pm}(x) \leq |f(x)|$, 得到

$$\int_E f^{\pm}(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f^{\pm}(x)\mathrm{d}x \leq \sup_{k\geq 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty\,.$$

因此 f 在 E 上可积. 同时对 f 在 E 上可积的情形我们还得到

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}x &= \int_E f^{+}\mathrm{d}x - \int_E f^{-}\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f^{+}\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f^{-}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{E_k} f^{+}\mathrm{d}x - \int_{E_k} f^{-}\mathrm{d}x\Big) = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

□

【定理2.2.6(积分的收缩)】 设 $E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 是一列单调减少的可测集:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots\,; \qquad E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\,.$$

设$f \in L^1(E_1)$. 则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】留为练习(课堂抽查). 至少有两种证法. □

下面这个定理及其推论揭示了可积函数的一个自然性质：积分 $E \mapsto \int_E f(x)\mathrm{d}x$ 关于积分集 E 是连续的: 集合的测度越小, 其上积分越小.

【定理2.2.7(积分的绝对连续性)】 设$E \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1(E)$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当可测子集 $A \subset E$ 满足 $m(A) < \delta$ 时

$$\Big|\int_A f(x)\mathrm{d}x\Big| \leq \int_A |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

[第一个不等式是已知性质. 第二个不等式体现了 “绝对” 的意义.]

【证】在上面**重要例题**中我们已证明

$$\int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad (M \to +\infty).$$

因此对任意$\varepsilon > 0$ 存在$0 < M < \infty$ 使得

$$\int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

取$\delta = \varepsilon/(2M)$, 则对任意可测子集$A \subset E$ 满足$m(A) < \delta$ 有

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)|\mathrm{d}x &= \int_{A(|f|\le M)} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{A(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\le \int_{A(|f|\le M)} M\mathrm{d}x + \int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\le Mm(A) + \varepsilon/2 < M\delta + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \Box\end{aligned}$$

下面这个定理是积分绝对连续性的另一表述, 其中集合 A_k 通常取成使被积函数 f 在 A_k 上具有某种较好的性质的集合.

【定理2.2.8(积分的连续性)】设$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1(E)$, A, A_k 是 E中的可测子集. 令$A_k \Delta A := (A_k \setminus A) \cup (A \setminus A_k)$. 则

$$\text{当}\, m(A_k\Delta A) \to 0 \ \ (k \to \infty)\,\text{时} \quad \int_{A_k} f(x)\mathrm{d}x \to \int_A f(x)\mathrm{d}x \quad (k \to \infty)\,.$$

【证】由 $\int_{A_k} = \int_{A_k\setminus A} + \int_{A_k\cap A}$, $\int_A = \int_{A\setminus A_k} + \int_{A_k\cap A}$ 和积分的绝对连续性得到

$$\Big|\int_{A_k} f\mathrm{d}x - \int_A f\mathrm{d}x\Big| \le \int_{A_k\setminus A} |f|\mathrm{d}x + \int_{A\setminus A_k} |f|\mathrm{d}x = \int_{A_k\Delta A} |f|\mathrm{d}x \to 0 \quad (k \to \infty).$$

$\Box$

• **L^p 空间及其完备性** Lebesgue 积分理论的一个主要优点是完备性.

设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 对于常数 $1 \le p < \infty$ 定义

$$L^p(E) := \Big\{ f : E \to [-\infty, +\infty] \ L\text{-可测} \ \Big| \ \int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x < \infty \Big\}.$$

在$L^p(E)$ 上定义范数$\|\cdot\|_{L^p} = \|\cdot\|_{L^p(E)}$ 为

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(E)} := \Big(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x \Big)^{1/p}, \quad f \in L^p(E)\,.$$

需说明$L^p(E)$ 是一个实线性赋范空间: 首先注意, 在$L^p(E)$中, **相等** “$=$” 的定义是

$$f = g \quad \text{in} \quad L^p(E) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \text{a.e.} \quad x \in E.$$

也即把两个几乎处处相等的函数视为同一个函数. 这等价于说

$$f = g \quad \text{in} \quad L^p(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \|f - g\|_{L^p} = 0.$$

由此立即看出：这样定义的相等“$=$” 确实是$L^p(E)$上的一个**等价关系**, 所以它是合理的、与通常的相等是相容的.【粗略地说, 这不过是说零测集对积分无贡献, 而在$L^p(E)$中, 一切都是从积分考虑的.】

来看: 若 $f, g \in L^p(E)$. 则 f, g 几乎处处有限. 因此 $f + g$ 在 E 上可测. 因 $1 \le p < \infty$ 故函数 $t \mapsto t^p$ 在 $[0, +\infty)$ 上为凸函数, 从而有$(\frac{a+b}{2})^p \le \frac{1}{2}(a^p + b^p)$ 即$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)\,(\forall\, a, b \in [0, +\infty))$. 于是对于几乎所有 $x \in E$ 有

$$|f(x) + g(x)|^p \le (|f(x)| + |g(x)|)^p \le 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)\,.$$

这蕴涵 $f + g \in L^p(E)$. 此外对任意常数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有 $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p$. 所以 $\alpha f \in L^p(E)$. 这证明了 $L^p(E)$ 是一个实线性空间.

其次来证明$\|\cdot\|_{L^p}$ 确实是$L^p(E)$上的一个范数从而$L^p(E)$ 是一个实线性赋范空间。由范数的定义, 需证明$\|\cdot\|_{L^p}$满足下面关于范数的三个规定性质(i)-(iii):

(i) 正定性：

$$\|f\|_{L^p} \ge 0 \quad \forall\, f \in L^p(E); \qquad \|f\|_{L^p} = 0 \iff f = 0.$$

(ii) 正齐次性：

$$\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p} \qquad \forall\, f \in L^p(E),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

(iii) 三角不等式：

$$\|f + g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad f, g \in L^p(E).$$

第(i),(ii)条是显然的, 第(iii)条是主要性质, 我们把它和另一常用不等式(Höledr不等式)列为一个定理:

【**定理2.2.9(Höledr不等式和三角不等式)**】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(a) 设$1<p,q<\infty$ 满足$1/p+1/q=1$. 设$f\in L^p(E)\,,g\in L^q(E)$. 则乘积$fg\in L^1(E)$且成立**Hölder不等式**:

$$\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\,.$$

即

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

当$p=q=2$时, Hölder 不等式称为**Cauchy-Schwarz不等式**: 即若$f,g\in L^2(E)$则$fg\in L^1(E)$ 且

$$\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

即

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le\left(\int_E|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

(b) 设$f,g\in L^p(E)$, $1\le p<\infty$. 则成立**三角不等式(也称为Minkowski不等式)**:

$$\|f+g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}\,.$$

即

$$\left(\int_E|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\le\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_E|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

【证】(a): 若例如$\|f\|_{L^p}=0$, 则有$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=0$ 从而有$f(x)=0$ a.e. $x\in E$. 这蕴含$f(x)g(x)=0$ a.e. $x\in E$. 因此$\|fg\|_{L^1}=0$. 此时Hölder 不等式显然成立。设$\|f\|_{L^p}>0$, $\|g\|_{L^q}>0$. 令

$$f_1(x)=\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}},\quad g_1(x)=\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}.$$

则由Young不等式

$$AB\le\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}\qquad\forall\ 0\le A,B\le+\infty\,.$$

有

$$f_1(x)g_1(x)\le\frac{f_1(x)^p}{p}+\frac{g_1(x)^q}{q},\quad x\in E$$

取积分得到

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}}\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x=\int_E f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{p}\int_E f_1(x)^p \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_E g_1(x)^q \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x}{(\|f\|_{L^p})^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}x}{(\|g\|_{L^q})^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

不等式两边乘以$\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ 即得Hölder 不等式.

(b): 当$p = 1$ 时, 这是已证的积分不等式(由$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ 推出). 设$1 < p < \infty$. 考虑分拆

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \leq |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}.$$

设$1 < q < \infty$为p的相伴数, 即满足$1/p + 1/q = 1$, 即$q = \frac{p}{p-1}$. 则由Hölder 不等式有

$$\int_E |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\mathrm{d}x \leq \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$= \|f\|_{L^p}\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q} = \|f\|_{L^p}((\|f+g\|_{L^p})^p)^{1/q} = \|f\|_{L^p}(\|f+g\|_{L^p})^{p-1} \quad .$$

同样有

$$\int_E |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\mathrm{d}x \leq \|g\|_{L^p}(\|f+g\|_{L^p})^{p-1}.$$

因此

$$(\|f+g\|_{L^p})^p = \int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})(\|f+g\|_{L^p})^{p-1}.$$

当$\|f+g\|_{L^p} > 0$ 时, 两边除以$(\|f+g\|_{L^p})^{p-1}$ 即得三角不等式. 而当$\|f+g\|_{L^p} = 0$ 时, 三角不等式显然成立. $\square$

应用归纳法易见三角不等式可推广成多角不等式:

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^p}\,, \quad f_k \in L^p(E)\,, \quad k = 1,2,...,n\,.$$

进一步推广到无穷和也是可能的只要具有某种收敛性. 这就是下面定理的内容.

【定理2.2.10】 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, 函数列$\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^p(E)$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L^p} < \infty.$$

则函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E$$

在E 上几乎处处绝对收敛, 和函数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \in L^p(E)$, 并有

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \Big\|_{L^p} \le \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L^p}, \qquad \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \Big\|_{L^p} = 0.$$

【证】从非负函数下手总是方便且安全的. 考虑非负函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|, \quad x \in E.$$

它显然在E上可测:

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k(x)| \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)| \quad (k \to \infty) \quad \forall\, x \in E.$$

由此有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k(x)|\Big)^p \nearrow \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|\Big)^p \quad (k \to \infty) \quad \forall\, x \in E.$$

因此由Levi单调收敛定理有

$$\int_E \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|\Big)^p \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E \Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k(x)|\Big)^p \mathrm{d}x.$$

另一方面, 由范数的三角不等式我们计算

$$\int_E \Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k(x)|\Big)^p \mathrm{d}x = \Big(\Big\| \sum_{k=1}^{n} |u_k| \Big\|_{L^p}\Big)^p \le \Big(\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|_{L^p}\Big)^p \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L^p}\Big)^p$$

$n = 1, 2, 3, \dots$. 因此

$$\int_E \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|\Big)^p \mathrm{d}x \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L^p}\Big)^p < \infty.$$

这证明了$\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|\Big)^p$在$E$上可积也即$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| \in L^p(E)$. 由此可知$\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|\Big)^p$ 在E上几乎处处有限从而$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ 在E 上几乎处处有限: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)| < \infty\ \forall\, x \in E \setminus Z$ 其中Z 是一个零测集. 如将每个$u_k(x)$ 在$x \in Z$处重新定义为$u_k(x) = 0$, 则根据L^p中相等的定义可知u_k与修正前的u_k几乎处处相等, 因此它们在$L^p(E)$中相等($k = 1, 2, 3, \dots$). 于是$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$E$上处处绝对收敛. 再由$|\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ 可知$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \in L^p(E)$ 且

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \Big\|_{L^p} \le \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \Big\|_{L^p} \le \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L^p}.$$

对函数级数 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, 照搬上面推导同样有

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \Big\|_{L^p} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_{L^p} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

其中的零极限是因为收敛的级数的尾巴趋于零. $\square$

【定理2.2.11(L^p空间的完备性)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $1\le p<\infty$.

则$L^p(E)$ 按距离$\|f-g\|_{L^p}$ 是完备的, 即: 若序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 列, 也即 $\lim\limits_{n\to\infty,k\to\infty}\|f_n-f_k\|_{L^p}=0$, 则$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在$L^p(E)$ 中收敛, 即存在 $f\in L^p(E)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^p}=0.$$

这个收敛简记作 $f_k\to f$ in L^p.

【证】设$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 列. 则由Cauchy 列的定义易见$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$在$L^p(E)$中有界, 即

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|f_k\|_{L^p}<\infty.$$

此外由可积蕴含几乎处处有限知f_k都在E上几乎处处有限。下证存在$f\in L^p(E)$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^p}=0$.

[**证法1**]. 对任意$\varepsilon>0$ 有

$$m(E(|f_n-f_k|\ge\varepsilon))\le\int_{E(|f_n-f_k|\ge\varepsilon)}\frac{|f_n(x)-f_k(x)|^p}{\varepsilon^p}\mathrm{d}x\le\frac{1}{\varepsilon^p}\int_E|f_n(x)-f_k(x)|^p\mathrm{d}x$$

即

$$m(E(|f_n-f_k|\ge\varepsilon))\le\frac{1}{\varepsilon^p}(\|f_n-f_k\|_{L^p})^p.$$

因右边趋于零当$n,k\to\infty$, 故$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是依测度Cauchy 列。据**命题1.8.1(依测度收敛的Cauchy准则)**, E上存在几乎处处有限的可测函数f使得f_k在E上依测度收敛于f. 再由**Riesz 定理** 知则存在$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{f_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 使得f_{k_n}在E上几乎处处收敛于f, 即

$$\lim_{n\to\infty}f_{k_n}(x)=f(x)\qquad \text{a.e.}\quad x\in E.$$

注意这蕴含

$$\lim_{n\to\infty}|f_{k_n}(x)|^p=|f(x)|^p\qquad \text{a.e.}\quad x\in E.$$

于是由**Fatou 引理** 有

$$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_{k_n}(x)|^p \mathrm{d}x \le \Big(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_{L^p}\Big)^p < \infty.$$

这表明$f \in L^p(E)$. 同理对任意$k \in \mathbb{N}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} |f_k(x) - f_{k_n}(x)|^p = |f_k(x) - f(x)|^p \qquad \text{a.e.} \quad x \in E.$$

从而再由**Fatou 引理** 有

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_k(x) - f_{k_n}(x)|^p \mathrm{d}x.$$

对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$使得当$k, n \ge N$时$\|f_k - f_n\|_{L^p} < \varepsilon$. 于是当$k \ge N$ 时有

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_k(x) - f_{k_n}(x)|^p \mathrm{d}x \le \varepsilon^p.$$

因此当$k \ge N$ 时有$\|f_k - f\|_{L^p} \le \varepsilon$. 所以$\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p} = 0$.

[**证法2**]. 因可积蕴涵几乎处处有限, 故 $Z_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E(|f_k| = \infty)$ 是零测集. 因此以 $E \setminus Z_0$ 代替 E 我们可以假定所有 f_k 在 E 上处处有限. 这使得下面涉及的函数运算处处有意义. 由 Cauchy 列的定义易见存在子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ (即 $1 \le k_1 < k_2 < k_3 < ...$) 使得

$$\|f_{k_j} - f_{k_{j-1}}\|_{L^p} \le \frac{1}{2^{j-1}}, \qquad j = 2, 3, 4, \dots .$$

这蕴含

$$\|f_{k_1}\|_{L^p} + \sum_{j=2}^{\infty} \|f_{k_j} - f_{k_{j-1}}\|_{L^p} \le \|f_{k_1}\|_{L^p} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} < \infty.$$

将上述**定理2.2.10** 应用于函数列

$$u_1 = f_{k_1}, \quad u_j = f_{k_j} - f_{k_{j-1}}, \quad j = 2, 3, 4, ...$$

可知和函数

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{j=2}^{\infty} [f_{k_j}(x) - f_{k_{j-1}}(x)], \quad x \in E$$

在E上几乎处处绝对收敛,并且$f \in L^p(E)$ 以及有

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{j=n+1}^{\infty} [f_{k_j} - f_{k_{j-1}}] \Big\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{j=n+1}^{\infty} u_j \Big\|_{L^p} = 0.$$

对任意$n (\ge 2)$ 有

$$f_{k_1}(x) + \sum_{j=2}^{n} [f_{k_j}(x) - f_{k_{j-1}}(x)] = f_{k_n}(x).$$

因此由级数收敛的定义有

$$f(x)=f_{k_1}(x)+\sum_{2=1}^{\infty}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)]=f_{k_n}(x)+\sum_{j=n+1}^{\infty}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)]$$

$x\in E\setminus Z$, 也即

$$f(x)-f_{k_n}(x)=\sum_{j=n+1}^{\infty}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)],\quad x\in E\setminus Z$$

其中Z为一个零测集: $m(Z)=0$. 因此有

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_{k_n}\|_{L^p}=\lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=n+1}^{\infty}[f_{k_j}-f_{k_{j-1}}]\Big\|_{L^p}=0.$$

注意到$k_n\ge n$, $n=1,2,3,...$, 以及$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列得到

$$\|f-f_n\|_{L^p}\le\|f-f_{k_n}\|_{L^p}+\|f_{k_n}-f_n\|_{L^p}\to 0\quad(n\to\infty).$$

换回记号f_k, 这就是$\lim\limits_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L^p}=0$. $\square$

【注1】定理2.2.10的证明和定理2.2.11的证法2 具有一般性, 将来在学习泛函分析时会遇到类似的论证：对于一个赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 来说, X 是完备的当且仅当数值级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛蕴涵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 在 $(X,\|\cdot\|)$ 中收敛.

【注2】在定理2.2.11 的证明中我们实际上还证明了下面的

【Riesz 定理】设$1\le p<\infty$ 且若$\|f_n-f\|_{L^p(E)}\to 0\,(n\to\infty)$, 则存在子列$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得$f_{n_k}\to f\,(k\to\infty)$ a.e. 于E. $\square$

一个自然的问题是: 能否证明实际上是全序列几乎处处收敛?, 即能否证明$f_n\to f\,(n\to\infty)$ a.e. 于E ?

下面的例子表明, “子序列”一般不能换成“全序列”。

【重要例题】设$1\le p<\infty$. 则有函数列$f,f_n\in L^p([0,1)^d)$ 满足$\|f_n-f\|_{L^p}\to 0\,(n\to\infty)$, 使得$f_n$在$[0,1)^d$上处处**不**收敛于$f$.

只需考虑$f(x)\equiv 0$的情形. 设S为$[0,1)^d$中的左闭右开的2-进方体族:

$$S=\Big\{\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{j_i-1}{2^k},\,\frac{j_i}{2^k}\Big)\;\Big|\;j_i=1,2,...,2^k,i=1,2,...,d,k\in\mathbb{N}\Big\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$$

其中
$$S_k=\Big\{\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{j_i-1}{2^k},\,\frac{j_i}{2^k}\Big)\;\Big|\;j_i=1,2,...,2^k, i=1,2,...,d\Big\},\quad k\in\mathbb{N}.$$
易见S_k的元素个数为2^{kd} 且有
$$m(Q)=\frac{1}{2^{kd}},\quad Q\in S_k.$$
将S 中的元素按下面方式排成一列: $S=\{Q_1,Q_2,Q_3,...,Q_n,...\}$:
$$\begin{aligned}&S_1=\{Q_1,Q_2,...,Q_{2^d}\},\quad S_2=\{Q_{2^d+1},Q_{2^d+2},...,Q_{2^d+2^{2d}}\},\quad ...,\\ &S_k=\{Q_{2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+1},Q_{2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+2},...,Q_{2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+2^{kd}}\},\\ &k=2,3,4,\dots.\end{aligned}$$

令
$$f_n(x)=\mathbf{1}_{Q_n}(x),\quad Q_n\in S,\quad n=1,2,3,...,.$$
则对任意$n>2^d$, 存在唯一的$2\le k\in\mathbb{N}$使得$2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+1\le n\le 2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+2^{kd}$, 因此$Q_n\in S_k$. 这给出$n<2^{(k+1)d}$,
$$(\|f_n\|_{L^p})^p=\int_{[0,1)^d}(f_n(x))^p\mathrm{d}x=m(Q_n)=\frac{1}{2^{kd}}<\frac{2^d}{n}.$$
其中用到$(\mathbf{1}_{Q_n}(x))^p=\mathbf{1}_{Q_n}(x)$. 这表明$\|f_n\|_{L^p}\to 0\,(n\to\infty)$.

下证对任意$x\in[0,1)^d$ 有$f_n(x)\not\to 0\,(n\to\infty)$. 事实上对任意$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in[0,1)^d$, 对每个$i\in\{1,2,...,d\}$ 和每个$k\in\mathbb{N}$, 由$[0,1)=\bigcup_{j=1}^{2^k}[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})$知存在$j=j_i\in\{1,2,...,2^k\}$ 使得$x_i\in[\frac{j_i-1}{2^k},\frac{j_i}{2^k})$. 于是
$$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{j_i-1}{2^k},\,\frac{j_i}{2^k}\Big)=:Q_{n_k}\in S_k,\quad k=2,3,4,\dots.$$
由S_k的上述编号知
$$n_k\in\{2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+1,2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+2,...,2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(k-1)d}+2^{kd}\}.$$
这蕴含当$k\to\infty$时$n_k\to\infty$. 而由$x\in\bigcap_{k=2}^{\infty}Q_{n_k}$知$f_{n_k}(x)=\mathbf{1}_{Q_{n_k}}(x)=1,k=2,3,4,\dots$. 因此$f_n(x)\not\to 0\ (n\to\infty)$. 这证明了$f_n$在$[0,1)^d$上处处**不**趋于0. $\square$

强调: 积分$\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 是由被积函数f和积分集E这两个因素决定, 因此在估算积分时要同时考虑这两点, 特别对于初学者来说更要注意对积分集E的分解。

【例】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $m(E)<\infty$, 设E上的可测函数列$\{f_n\}_{n=1}^\infty$一致有界: $|f_n(x)|\le M$, $x\in E, n=1,2,3,...$ 其中M为有限常数. 假设当$n\to\infty$时f_n依测度收敛于函数f, 证明f_n按L^1范数收敛于f, 即$\|f_n-f\|_{L^1}=\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\to 0\,(n\to\infty)$.

【证】首先由Riesz定理知存在子列$\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ 使得$f_{n_j}(x)\to f(x)\,(j\to\infty)$ a.e. $x\in E$. 由此有$|f(x)|=\lim\limits_{j\to\infty}|f_{n_j}(x)|\le M$ a.e. $x\in E$. 由于零测集不影响积分, 故可以假设$|f(x)|\le M$ for all $x\in E$. 下面给出两种证法.

[**证法1**] 对任意$\varepsilon>0$ 考虑分解

$$\begin{aligned}
&\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\int_{E(|f_n-f|<\varepsilon)}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_{E(|f_n-f|\ge\varepsilon)}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\
&\le\int_{E(|f_n-f|<\varepsilon)}\varepsilon\mathrm{d}x+\int_{E(|f_n-f|\ge\varepsilon)}2M\mathrm{d}x=\varepsilon m(E(|f_n-f|<\varepsilon))+Mm(E(|f_n-f|\ge\varepsilon))\\
&\le\varepsilon m(E)+2Mm(E(|f_n-f|\ge\varepsilon))\\
&\Longrightarrow\ \limsup_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1}\le\varepsilon m(E)+2M\limsup_{n\to\infty}m(E(|f_n-f|\ge\varepsilon))=\varepsilon m(E).
\end{aligned}$$

由$m(E)<\infty$和ε的任意性(或者令$\varepsilon\to0+$) 即知$\limsup\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1}=0$. 所以$f_n$在$E$上按$L^1$范数收敛到$f$.

[**证法2**] 回忆实数理论: 任何实数序列的上(下)极限等于该数列的某个子列的极限。据此知存在子列$\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}-f\|_{L^1}=\limsup_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1}.$$

对函数列$\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ (它当然依测度收敛于f), 由Riesz定理知存在子列$\{f_{n_{k_j}}\}_{j=1}^\infty$ 使得$f_{n_{k_j}}(x)\to f(x)\,(j\to\infty)$ a.e. $x\in E$. 于是有

$$\lim_{j\to\infty}|f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|=0\quad\text{a.e. }x\in E\,;\qquad\sup_{j\in\mathbb{N},x\in E}|f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|\le M.$$

因$m(E)<\infty$, 故由Lebesgue 有界收敛定理知

$$\lim_{j\to\infty}\int_E|f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0\quad\text{i.e.}\quad\lim_{j\to\infty}\|f_{n_{k_j}}-f\|_{L^1}=0.$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1}=\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}-f\|_{L^1}\lim_{j\to\infty}\|f_{n_{k_j}}-f\|_{L^1}=0.\qquad\square$$

• **复值函数和实向量值函数的积分**. 有了实值可测函数和积分的定义以及基本性质便可以定义复值函数和实向量值函数的可测性和可积性并得到相关性质.

【**定义(复值可测函数和积分)**】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f=\mathrm{Re}(f)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f):E\to\mathbb{C}$ 其中$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$是$f$的实部和虚部, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

若$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在E 上可测, 则称f 在E 上可测.

若$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在E 上可积, 即$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)\in L^1(E)$, 则称$f$ 在E 上可积, 记作$f\in L^1(E)$, 并定义f在E上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_E \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x. \qquad \Box$$

【**定义(向量值可测函数和积分)**】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f=(f_1,f_2,...,f_n):E\to\mathbb{R}^d$.

若f 的每个坐标函数$f_1,f_2,...,f_n$ 都在E 上可测, 则称f 在E 上可测.

若f 的每个坐标函数$f_1,f_2,...,f_n$ 都在E 上可积, 即$f_1,f_2,...,f_n\in L^1(E)$, 则称$f$ 在E 上可积, 并定义f在E上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\Big(\int_E f_1(x)\mathrm{d}x,\ \int_E f_2(x)\mathrm{d}x,\ ...,\ \int_E f_n(x)\mathrm{d}x\Big). \qquad \Box$$

【**注**】在复值函数f的可测性和可积性定义中我们要求f的实部和虚部都属于$\mathbb{R}$ 即他们处处有限.这是因为我们不打算处理$a+\mathrm{i}\infty,\infty+\mathrm{i}b,\infty+\mathrm{i}\infty$, etc. 的情形. 对向量值的情形也同样不考虑向量的某些分量是$\pm\infty$的情形.

下面命题给出复值和向量值函数积分的基本不等式.

【**命题2.2.12**】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 若复值函数$f:E\to\mathbb{C}$或向量值函数$f:E\to\mathbb{R}^d$ 在E 上可积, 则有

$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|\le\int_E|f(x)|\mathrm{d}x \tag{2.2.2}$$

其中$|\cdot|$ 是复数的模或向量的欧几里德范数.

【证】对于向量的情形, $f=(f_1,f_2,...,f_n)$, 不等式(2.2.2) 详细写为

$$\left(\sum_{k=1}^n\Big(\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\Big)^2\right)^{1/2}\le\int_E\Big(\sum_{k=1}^n(f_k(x))^2\Big)^{1/2}\mathrm{d}x. \tag{2.2.3}$$

对于复值的情形, 如写$f=f_1+\mathrm{i}f_2$, 则由复数的模的定义$|a+\mathrm{i}b|=(a^2+b^2)^{1/2}$可见, 此时(2.2.2)的详细表示等于(2.2.3)中$n=2$的情形. 因此只需证明(2.2.3), 也即只需对向量值的情形证明(2.2.2).

任取向量$y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^d$. 考虑内积并运用积分的线性性和Cauchy不等式有

$$\begin{aligned}\Big\langle y,\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big\rangle &= \sum_{k=1}^n y_k\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E\Big(\sum_{k=1}^n y_k f_k(x)\Big)\mathrm{d}x\\ &=\int_E\langle y,f(x)\rangle\mathrm{d}x\le\int_E|y||f(x)|\mathrm{d}x=|y|\int_E|f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取

$$y=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

得到

$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|^2\le\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|\int_E|f(x)|\mathrm{d}x.$$

当$\int_E f(x)\mathrm{d}x\neq 0$ 时, 也即当$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|>0$ 时, 从上面不等式消去它即得(2.2.2). 而当$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$(零向量)时, (2.2.2)显然成立. □

根据复值函数和向量值函数的积分的定义和不等式(2.2.2)易知, 前面得到的所有性质（除了涉及大小顺序的以外) 例如线性性、可加性、逐项积分、LDC、积分的绝对连续性、L^p空间极其完备性, 等等对复值函数和向量值函数的情形都成立。

作业题:

1. 设实函数$f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 则$f\wedge g, f\vee g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 这里$(f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}$, $(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$.

2. 设$(0,\infty)^2=(0,\infty)\times(0,\infty)$上的二元函数

$$f(x,y)=-1\quad\text{if}\quad\frac{y}{x}\in\mathbb{Q},\qquad f(x,y)=1\quad\text{if}\quad\frac{y}{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

证明f在$(0,\infty)^2$上可测并求$\int_{(0,1)^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=?$

3. 设$E\subset\mathbb{R}$为可测集, $0\le f\in L^1(E)$ 且$\int_E f(x)\mathrm{d}x=1$. 证明

$$\int_E f(x)\cos(x)\mathrm{d}x<1.$$

4. 设$f_n,f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,3,\dots.$$

证明$f_n(x)\to f(x)\,(n\to\infty)$ a.e. $x\in\mathbb{R}^d$. [级数收敛蕴含其通项趋于零.]

5. 设$f \in L^1(E)$. 证明

$$m(E(|f|>k)) = o\Big(\frac{1}{k}\Big) \quad (k\to\infty).$$

6. 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), f \in L^1(E), f_n(x) = \mathbf{1}_{E\cap B(0,n)}(x)f(x)$. 证明当$n\to\infty$时$f_n$ 按L^1范数收敛于f 从而f_n依测度收敛于f.

7. (1) 设实值函数$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \ge 0 \qquad \forall\, E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d).$$

证明$f \ge 0$ a.e. 于$\mathbb{R}^d$.

(2) 若$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 满足$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0 \ \forall\, E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 证明$f = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

(3) 设$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 满足: 对$\mathbb{R}^d$上每个有界可测函数φ 都有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明$f = 0$ a.e. 于$\mathbb{R}^d$.

8. 设$f, g \in L^1([0,\infty))$ 满足

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \qquad \forall\, x > 0.$$

证明$f = g$ a.e. 于$[0,\infty)$.

9. 设$f \in L^1((0,\infty))$,

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}\mathrm{d}t, \quad x \in (0,\infty).$$

证明g在$(0,\infty)$ 连续且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

10. 设$f \in L^1(E)$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E(|f|<1/k)} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

11. 设$f_k, f \in L^1(E)$ 且$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ a.e. $x \in E$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x - 0.$$

12. 设$f:[0,1]\to\mathbb{R}$为可测函数, $E=\{x\in[0,1]\mid f(x)\in\mathbb{Z}\}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\cos(f(x)\pi)|^n\mathrm{d}x=m(E).$$

13. 设$f_k,f,g_k,g\in L^1(E)$, $M:=\sup\limits_{k\in\mathbb{N},\,x\in E}|f_k(x)|<\infty$, 且
$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|g_k(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

14. 设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^p),\Omega\subset\mathbb{R}^q$, $f(x,y)$ 为$E\times\Omega$上的实值或复值函数, 满足

(i) 对每个$y\in\Omega$, $x\mapsto f(x,y)$ 是E上的可测函数,

(ii) 对每个$x\in E$, $y\mapsto f(x,y)$ 是Ω上的连续函数,

(iii) 存在$0\le g\in L^1(E)$ 使得 $\sup\limits_{y\in\Omega}|f(x,y)|\le g(x)$ a.e. $x\in E$.

证明函数$y\mapsto F(y)=\int_E f(x,y)\mathrm{d}x$在$\Omega$上连续.

[可用连续参量的LFC或用函数连续性的序列刻画.]

15. 设可测集列$E_k\subset[0,1]^d$ 和数列$\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 满足

$$m(E_k)\ge\delta,\quad k=1,2,3,...;\qquad \sum_{k=1}^\infty|a_k|\mathbf{1}_{E_k}(x)<\infty\quad \text{a.e.}\quad x\in[0,1]^d.$$

这里$\delta>0$为常数. 证明

$$\sum_{k=1}^\infty|a_k|<\infty.$$

§2.3. Riemann 积分与Lebesgue 积分的关系

在数学分析中我们已学习了Riemann 积分. 本节证明Riemann 可积的函数也是Lebesgue可积的且积分值相等。首先回忆

【Jordan 可测集】若$E \subset \mathbb{R}^d$ 有界且$m(\partial E) = 0$, 则称E是一个Jordan 可测集. □

典型的Jordan 可测集是有界闭区间$I = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$. 一般地, 由$E = E^\circ \cup (E \cap \partial E)$ 易知Jordan 可测集一定是Lebesgue 可测集。但有界的Lebesgue 可测集远非Jordan可测集：例如设E是$[0,1]^d$中的有理点的全体, 则E是L-可测集, 且由有理点的稠密性知$\partial E = [0,1]^d$ 从而有$m(\partial E) = 1 > 0$. 因此E不是Jordan可测集。

【定义(Riemann 积分)】设$E \subset \mathbb{R}^d$为一Jordan可测集.

(i) Riemann 和. 设$f : E \to \mathbb{C}$ 有界. 对于E 的任一Jordan可测分划$P = \{E_k\}_{k=1}^n$ (即$E = \bigcup_{k=1}^n E_k$, E_k是Jordan 可测集且互不重叠, 即当$i \neq j$时$m(E_i \cap E)j) = 0$), 和任意标志点组$\xi_k \in E_k, k = 1, 2, ..., n$, 称和式

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) m(E_k)$$

为f 在E 上的一个Riemann 和.

(ii) Riemann 积分. 我们称一个函数$f : E \to \mathbb{C}$ 在E 上Riemann 可积, 如果f在E上有界且存在常数A 使得对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 满足: 只要E 的任意分划$P = \{E_k\}_{k=1}^n$ 满足$\lambda(P) := \max\limits_{1 \le k \le n} \mathrm{diam}(E_k) < \delta$, 就有

$$\sup_{\xi_k \in E_k, 1 \le k \le n} \Big| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) m(E_k) - A \Big| < \varepsilon.$$

以上也可写成: 存在常数A 使得

$$\sup_{\xi_k \in E_k, 1 \le k \le n} \Big| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) m(E_k) - A \Big| \to 0 \quad \text{as} \quad \lambda(P) \to 0.$$

如果f 在E 上Riemann 可积, 则称Reimann和的极限A为f在E上的Riemann积分, 记作

$$A = (\mathrm{R}) \int_E f(x) \mathrm{d}x.$$

(iii) Riemann可积函数类. 我们把在E上Riemann可积的函数类记做$\mathcal{R}(E)$. □

几点说明：

1. Riemann积分的优点体现在Reiamm和$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)m(E_k)$上. Reiamm和的这个显示结构使得它具有直观的几何、力学、物理意义. 因此Reimann积分适合用于

建立数学模型(物理、力学、几何,...).

定积分的近似计算(各种算法格式, 包括随机算法...).

一些纯数学问题例如数论问题的研究也得益于Riemann 和的好结构.

另外注意, Riemann 和关于被积函数是线性的, 即

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha f+\beta g)(\xi_k)m(E_k)=\alpha\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)m(E_k)+\beta\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)m(E_k).$$

这些就是Riemann 积分值得保留的主要原因.

2. 对于任一有界集$E\subset\mathbb{R}^d$, 取有界闭区间$I=\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]$ 充分大使得$E\subset I$. 则在特征函数$\mathbf{1}_E(x)$在I上Riemann可积当且仅当E是Jordan 可测集。这就是为什么Riemann积分只能建立在Jordan 可测集上的本质原因。此外为了避免非本质的纠缠, 可以直接对有界函数建立Riemann 积分。

3. 设$E\subset\mathbb{R}^d$为一Jordan可测集. 在数学分析中已证明了若$f:E\to\mathbb{C}$ 有界, 则

$$f\in\mathcal{R}(E)\iff\lim_{\lambda(P)\to 0+}\sum_{k=1}^{n}\omega(f;E_k)m(E_k)=0\iff f \text{ 在}E\text{上几乎处处连续}$$

其中$P=\{E_k\}_{k=1}^{n}$是E的任一Jordan可测分划, $\omega(f;E_k)$是f在E_k上的振幅:

$$\omega(f;E_k)=\sup_{x,y\in E_k}|f(x)-f(y)|.$$

下面命题给出Riemann 积分与Lebesgue 积分的关系.

【命题2.3.1】设$E\subset\mathbb{R}^d$为一Jordan可测集. 则$\mathcal{R}(E)\subset L^1(E)$ 且当$f\in\mathcal{R}(E)$时有

$$(\mathrm{R})\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

上式右边为Lebesgue 积分.

【证】设$f\in\mathcal{R}(E)$. 由定义和上述刻画知f在E上有界且几乎处处连续。因E也是Lebesgue 可测集, 故这蕴含f在E上L-可测。于是由$m(E)<\infty$ (因E有界) 和f有界知$f\in L^1(E)$. 设$P=\{E_k\}_{k=1}^{n}$是E的任一Jordan可测分划。则对任意$\xi_k\in E_k$,

$k=1,2,...,n$, 由L-积分的可加性有

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)m(E_k)-\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)m(E_k)-\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\Big|$$
$$=\Big|\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}[f(\xi_k)-f(x)]\mathrm{d}x\Big|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}|f(\xi_k)-f(x)|\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^{n}\omega(f;E_k)m(E_k).$$

因此

$$\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le n}\Big|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)m(E_k)-\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|\le\sum_{k=1}^{n}\omega(f;E_k)m(E_k)\to 0\ \text{ as }\ \lambda(P)\to 0.$$

据Riemann 积分的定义知(R) $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$. □

有了这一命题, 今后对例如连续函数计算Lebesgue 积分就可以考虑Riemann 和。这几乎就够了, 因为除了数值模拟外(各种算法包括随机算法), 理论计算的工具是Newton-Lebinitz 公式。本课程将在最广泛的条件下证明Newton-Lebinitz 公式。

【例】(计算Gauss积分) 证明

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\,.$$

【证】由Lebesgue 积分的扩张定理知

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

因被积函数e^{-x^2}连续, 故右边的积分也是Riemann 积分, 即

$$\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\dots.$$

于是由数学分析中对广义Riemann 积分的定义和计算结果知

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

我们在学完关于Lebesgue积分的Fubini定理和重积分换元公式后, 还会再次证明这个Gauss 积分等式。 □

作业题: 设开集$\Omega\supset[0,1]^d\cap\mathbb{Q}^d$ 且$m(\Omega)<1$. 令$K=[0,1]^d\setminus\Omega$, $g(x)=\mathbf{1}_K(x)$. 证明 (1) $g\notin\mathcal{R}([0,1]^d)$. (2) 对任意$f\in\mathcal{R}([0,1]^d)$ 有$\int_{[0,1]^d}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x>0$. (3) Riemann 和的序列

$$S_n:=\frac{1}{n^d}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_d=1}^{n}g\Big(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n},...,\frac{k_d}{n}\Big)\not\longrightarrow\int_{[0,1]^d}g(x)\mathrm{d}x\quad(n\to\infty).$$

§2.4. 简单的积分换元公式和Newton-Leibnitz 公式

对于积分的计算和估计, 基本工具是Newton-Leibnitz 公式(与分部积分), 积分号下求导, 和重积分化累次积分(Fubini定理)。这些基本工具我们在数学分析中也学习过, 本课程(实分析) 的一大贡献是: 使这些工具在更大范围、更弱条件下仍然成立。

本节学习简单的换元公式, Newton-Leibnitz公式, 和积分号下求导定理。这里简单换元公式是指在平移、展缩和一般线性变换下的积分换元公式。一般的换元公式将本章最后一节学习。

【定理2.4.1(平移和线性变换下的积分换元公式)】设f 在$\mathbb{R}^d$ 上L-可积或非负可测。则对任意$h\in\mathbb{R}^d, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x\qquad\text{(全空间积分的平移不变性)},$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\lambda|^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x\qquad\text{(积分的平移和展缩关系)},$$

一般地, 对任意可逆矩阵$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{d\times d}$有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\det\mathrm{A}|}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】只需就f 非负的情形证明即可. 事实上若对非负的情形定理成立, 则对于实值可积函数f, 分别对f 的正部f^+ 和负部f^- 应用定理并结合$f=f^+-f^-$ 以及f^+ 和f^- 的积分皆有限从而可以做减法即知f 具有定理中的性质. 而对复值可积函数f, 分别对f 的实部$\mathrm{Re}(f)$ 和虚部$\mathrm{Im}(f)$ 应用实值可积函数的结果并根据复值函数积分的定义即知f仍具有定理中的性质.

因平移不变性和展缩关系是$\mathrm{A}=\mathrm{I}$ (单位矩阵) 和$\mathrm{A}=\lambda\mathrm{I}$ 的特殊情形, 故只需证明一般情形.

先设$f(x)=\mathbf{1}_E(x)$ 是可测集$E\subset\mathbb{R}^d$的特征函数. 则有

$$\mathbf{1}_E(\mathrm{A}x+h)=\mathbf{1}_{\mathrm{A}^{-1}(E-h)}(x).$$

由测度的平移不变性和线性变换下的测度公式有

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_E(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_{\mathrm{A}^{-1}(E-h)}(x)\mathrm{d}x=m(\mathrm{A}^{-1}(E-h))=|\det\mathrm{A}^{-1}|m(E-h)$$

$$=\frac{1}{|\det\mathrm{A}|}m(E)=\frac{1}{|\det\mathrm{A}|}\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}x$$

其次设f 在$\mathbb{R}^d$ 上的非负可测. 由非负可测函数的级数表示, 存在$\mathbb{R}^d$ 上的一列可测集E_k 和常数$c_k>0$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k1_{E_k}(x),\qquad x\in\mathbb{R}^d.$$

易见

$$f(\mathrm{A}x+h)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k1_{E_k}(\mathrm{A}x+h),\qquad x\in\mathbb{R}^d.$$

于是由非负可测函数级数的逐项积分和上面结果即得

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{\mathbb{R}^d}1_{E_k}(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\mathrm{detA}|}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{\mathbb{R}^d}1_{E_k}(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{|\mathrm{detA}|}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{k=1}^{\infty}c_k1_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\mathrm{detA}|}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x.\qquad\square$$

【定理2.4.2(平移和线性变换下的积分换元公式)的推论】

(a) 设$E\subset\mathbb{R}^d$为可测集, $h\in\mathbb{R}^d$, f 在$E+h$上L-可积或非负可测. 则有

$$\int_E f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{E+h}f(x)\mathrm{d}x.$$

(b) 设$E\subset\mathbb{R}^d$为可测集, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 可逆, f 在$\mathrm{A}(E)$ 上可积或非负可测. 则有

$$\int_E f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\mathrm{detA}|}\int_{\mathrm{A}(E)}f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】为应用上述定理, 我们将f 零延拓到$\mathbb{R}^d$ 上, 即分别考虑$\mathbf{1}_{E+h}(x)f(x)$ 和 $\mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(x)f(x),x\in\mathbb{R}^d$.

(a): 由$\mathbf{1}_E(x)=\mathbf{1}_{E+h}(x+h)$ 和全空间积分的平移不变性有

$$\int_E f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_E(x)f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_{E+h}(x+h)f(x+h)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_{E+h}(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{E+h}f(x)\mathrm{d}x.$$

(b): 类似地, 由A 可逆有$\mathbf{1}_E(x)=\mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(\mathrm{A}x)$. 应用全空间积分的线性变换公式即得

$$\int_E f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_E(x)f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(\mathrm{A}x)f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{|\mathrm{detA}|}\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\mathrm{detA}|}\int_{\mathrm{A}(E)}f(x)\mathrm{d}x\,.\qquad\square$$

【例$(d=1)$】(1) 设$f\in L^1((a,\infty))$ 或f在(a,∞)上非负可测. 则对任意$b\in(a,\infty)$和$h>0$ 有

$$\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{a+h}^{b+h} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设函数f 在$(0,\infty)$ 上L-可测. 对于常数$a>0$, 作线性换元$x=\frac{t}{a}, t\in(0,\infty)$, 则有$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}t$, 并在换元后的积分中将字母$t$ 再换成x, 可得以下结果:

(a) 若$\frac{f(x)}{x}\in L^1((0,\infty))$, 则有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \qquad \forall\, a>0.$$

(b) 若$\frac{f(x)}{x}\in L^1((\varepsilon,+\infty))$ for all $\varepsilon>0$. 则有

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\varepsilon}^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \qquad \forall\, a>0, \forall\, \varepsilon>0.$$

□

【例】设$2\le p\in\mathbb{N}$ 并设E_n^j 是区间$[0,1]$中的这样的实数x的全体：x的p-进制表示中的第n位数字为j（$j\in\{0,1,...,p\}$). 证明E_n^i是可测集且

$$m(E_n^0)=m(E_n^1)=\cdots=m(E_n^{p-1})=\frac{1}{p}\,,\quad n=1,2,3,\dots.$$

并且对任意$i\in\{0,1,...,p-1\}$和任意$f\in L^1([0,1])$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n^i} f(x)dx=\frac{1}{p}\int_0^1 f(x)dx\,.$$

[本题说明, 从几何和概率上看, $E_n^0,E_n^1,...,E_n^{p-1}$ 的地位是一样的.]

【证】令$E_{\rm ir}=E\setminus\mathbb{Q}$ 为E中无理数的全体. 则易见对任意$j\in\{0,1,...,p-1\}$ 有

$$(E_1^j)_{\rm ir}=\Big[\frac{j}{p},\frac{j+1}{p}\Big)_{\rm ir},$$
$$(E_n^j)_{\rm ir}=\bigcup_{a_1,a_2,...,a_{n-1}\in\{0,1,...,p-1\}}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{p^k}+\frac{j}{p^n},\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{p^k}+\frac{j+1}{p^n}\Big)_{\rm ir},\quad n\ge 2.$$

因$\mathbb{Q}$是L-零测集, 故这表明E_n^j是L-可测集且由可加性有 (因上式右边是不交并)

$$m(E_n^j)=m((E_n^j)_{\rm ir})=p^{n-1}\frac{1}{p^n}=\frac{1}{p}.$$

此外易见对任意$n\in\mathbb{N}$ 有

$$[0,1)_{\rm ir}=\bigcup_{j=0}^{p-1}(E_n^j)_{\rm ir},\quad (E_n^j)_{\rm ir}=(E_n^0)_{\rm ir}+\frac{j}{p^n},\quad j=1,2,...,p-1.$$

将f零延拓到$\mathbb{R}$上, 则$f \in L^1(\mathbb{R})$ 且有 (因$E_n^j \cap \mathbb{Q}$是零测集)

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d} = \int_{[0,1)_{\mathrm{ir}}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{(E_n^j)_{\mathrm{ir}}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{E_n^j} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{E_n^j} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_n^0 + \frac{j}{p^n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_n^0} f(x + \frac{j}{p^n})\mathrm{d}x = \int_{E_n^0} f(x)\mathrm{d}x + \Delta_{n,j}$$

其中

$$\Delta_{n,j} = \int_{E_n^0} [f(x + \frac{j}{p^n}) - f(x)]\mathrm{d}x.$$

据可积函数的平均连续性有

$$|\Delta_{n,j}| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x + \frac{j}{p^n}) - f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty),\ j = 0, 1, ..., p-1.$$

由此有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d} = p\int_{E_n^0} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{p-1} \Delta_{n,j},$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n^0} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{p-1} \Delta_{n,j} = \frac{1}{p}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n^j} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n^0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \Delta_{n,j} = \frac{1}{p}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\ \ j = 0, 1, ..., p-1.$$

□

【命题2.4.3(积分中值定理)】设$E \subset \mathbb{R}^d$ 为一连通的可测集, $0 < m(E) < \infty$, 实值函数$f \in L^1(E)$. 则存在$\xi \in E$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】令$a = \inf\limits_{x\in E} f(x),\ b = \sup\limits_{x\in E} f(x)$. 则$-\infty \le a, b \le +\infty$ (广义实数) 且由$f \in L^1(E)$和简单的积分不等式有

$$a \le \frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x \le b.$$

若这两个不等式中有一个是等式, 例如设

$$a = \frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

则$a \in \mathbb{R}$ (即$-\infty < a < +\infty$) 并由非负性$f(x) - a \ge 0$ for all $x \in E$ 和

$$\int_E (f(x) - a)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x - am(E) = 0$$

可知$f(x)-a=0$ a.e. $x\in E$, 即$E(f\neq a)$ 是零测集. 因$m(E)>0$ 故$E(f=a)=E\setminus E(f\neq a)$ 非空. 取$\xi\in E(f=a)$ 即知

$$f(\xi)=a=\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

现在设

$$a<\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x<b.$$

则由确界的定义(包括$a=-\infty$ 或$b=+\infty$的情形), 存在$x_0,y_0\in E$ 使得

$$f(x_0)<\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x<f(y_0).$$

因E 连通, 故由连通集上的连续函数介值定理即知存在$\xi\in E$ 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

• Newton-Leibniz公式

Newton-Leibniz公式也称为微积分基本定理, 它既是理论和计算工具, 也给出了微分与积分的关系。以下两个定理和证明参照W. Rudin的教科书*Real and Complex Analysis*. 为尽量放宽Newton-Leibniz公式成立的条件, 我们需要证明可积函数的如下性质：

【Vitali-Carathéodory 定理】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), f\in L^1(E)$. 则对任意$\varepsilon>0$, 存在$\mathbb{R}^d$上的广义实值函数$u,v$ 满足

1° $u,v\in L^1(E)$, $u(x)\le f(x)\le v(x)$ for all $x\in E$ 且

$$\int_E (v(x)-u(x))\mathrm{d}x<\varepsilon\,.$$

2° 对任意$t\in\mathbb{R}$, 集合$\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,u(x)<t\}$ 和$\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,v(x)>t\}$ 都是开集. (具有这样性质的函数u,v 分别称为上半连续和下半连续函数.)

【证】由$f\in L^1(E)$ 知f在E上几乎处处有限. 因去掉一个零测集对可积性和积分无影响, 故我们可以假定f在E上处处有限。

首先假定$f\ge 0$ 于E. 根据简单函数逼近定理, 存在一列常数$0<c_k<\infty$ 和可测集$E_k\subset E$使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x)\qquad \forall\, x\in E\,.$$

由非负可测函数的逐项积分有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k m(E_k)\,.$$

因f 在E 上可积, 上面级数是收敛的. 因此对任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}c_k m(E_k)<\varepsilon/2\,.$$

由Lebesgue 可测集的正则性, 对每个E_k, 存在紧集K_k 和开集U_k 使得$K_k\subset E_k\subset U_k$,

$$c_k m(U_k\setminus K_k)<2^{-k-1}\varepsilon\,,\quad k=1,2,3,\dots\,.$$

令

$$v(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{U_k}(x)\,,\quad u(x)=\sum_{k=1}^{N}c_k\mathbf{1}_{K_k}(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}^d\,.$$

则$u(x)\le f(x)\le v(x)$ for all $x\in E$ 且 (由$\mathbf{1}_{U_k}=\mathbf{1}_{E_k}+\mathbf{1}_{U_k\setminus E_k}\le\mathbf{1}_{E_k}+\mathbf{1}_{U_k\setminus K_k}$)

$$\begin{aligned}v(x)-u(x)&=\sum_{k=1}^{N}c_k(\mathbf{1}_{U_k}(x)-\mathbf{1}_{K_k}(x))+\sum_{k=N+1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{U_k}(x)\\&=\sum_{k=1}^{N}c_k\mathbf{1}_{U_k\setminus K_k}(x)+\sum_{k=N+1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{U_k}(x)\le\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{U_k\setminus K_k}(x)+\sum_{k=N+1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\int_E(v(x)-u(x))dx\le\sum_{k=1}^{\infty}c_k m(U_k\setminus K_k)+\sum_{k=N+1}^{\infty}c_k m(E_k)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\,.$$

下证u,v 的半连续性. 任给$t\in\mathbb{R}$. 由级数的定义和u 为有限和易见

$$\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,v(x)>t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\sum_{k=1}^{n}c_k\mathbf{1}_{U_k}(x)>t\}\,,$$

$$\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,u(x)<t\}=\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\sum_{k=1}^{N}c_k\mathbf{1}_{(K_k)^c}(x)>\sum_{k=1}^{N}c_k-t\}\,.$$

因此为证明上式左边为开集, 只需证明若$n\in\mathbb{N},\Omega_k\subset\mathbb{R}^d$ 是开集, $k=1,2,...,n$, 则对任意$t\in\mathbb{R}$,

$$G_t:=\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\sum_{k=1}^{n}c_k\mathbf{1}_{\Omega_k}(x)>t\}\,.$$

是开集. 当$t<0$ 时, $G_t=\mathbb{R}^d$ 是开集. 设$t\ge0$. 对任意$x_0\in G_t\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}c_k\mathbf{1}_{\Omega_k}(x_0)>t$. 因一切$c_k>0$ 故存在$1\le k_1<k_2<...<k_p\le n$ 使得$\mathbf{1}_{\Omega_k}(x_0)=1\ \forall\,k\in\{k_1,k_2,...,k_p\}$; $\mathbf{1}_{\Omega_k}(x_0)=0\ \forall\,k\in\{1,2,...,n\}\setminus\{k_1,k_2,...,k_p\}$. 因此

$$x_0\in\bigcap_{j=1}^{p}\Omega_{k_j}\,,\quad\sum_{j=1}^{p}c_{k_j}=\sum_{j=1}^{p}c_{k_j}\mathbf{1}_{\Omega_{k_j}}(x_0)=\sum_{k=1}^{p}c_k\mathbf{1}_{\Omega_k}(x_0)>t\,.$$

因有限个开集的交是开集, 故存在$\delta > 0$ 使得$B(x_0,\delta)\subset\bigcap_{j=1}^{p}\Omega_{k_j}$ 从而有

$$\sum_{k=1}^{d} c_k \mathbf{1}_{\Omega_k}(x) \ge \sum_{j=1}^{p} c_{k_j}\mathbf{1}_{\Omega_{k_j}}(x) = \sum_{j=1}^{p} c_{k_j} > t \quad \forall\, x\in B(x_0,\delta)$$

所以$B(x_0,\delta)\subset G_t$. 所以G_t 是开集.

转到一般情形. 对于$f = f^{+} - f^{-}$ 的正部f^{+} 和负部f^{-}, 如上分别作出上半连续函数u_1,u_2 和下半连续函数v_1,v_2, 使得$u_1\le f^{+}\le v_1$, $u_2\le f^{-}\le v_2$ 于E 且u_1,u_2 在$\mathbb{R}^d$ 上处处有限. 令$u = u_1 - v_2$, $v = v_1 - u_2$. 则$u\le f\le v$. 这蕴涵

$$|u| \le v - u + |f|\,,\quad |v|\le v-u+|f| \quad \text{on} \quad E\,.$$

因此$u,v\in L^1(E)$. 还需证明u 上半连续, v 下半连续.

一般地我们证明若φ 上半连续, ψ 下半连续, 且两者之一处处有限, 则$\varphi-\psi$ 上半连续, $\psi-\varphi$ 下半连续. 事实上对任意$t\in\mathbb{R}$, 由有理数$\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,r_3,...\}$ 的稠密性, 我们有分解

$$\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\varphi(x)-\psi(x)<t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in\ |\,\varphi(x)<r_k\}\cap\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\psi(x)>r_k-t\}\,.$$

因任意多个开集的并是开集，所以$\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\varphi(x)-\psi(x)<t\}$ 是开集. 由此对任意$t\in\mathbb{R}$ 有$\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\psi(x)-\varphi(x)>t\} = \{x\in\mathbb{R}^d\,|\,\varphi(x)-\psi(x)<-t\}$ 是开集. [注：由φ,ψ 之一处处有限可知$\varphi(x)-\psi(x)$ 处处有意义.] □

【定理(Newton-Leibniz公式)】设实值或复值函数$f(x)$ 在有界闭区间$[a,b]$ 上连续、在开区间(a,b) 内**处处**可导且导函数$f'(x)$ 在(a,b) 上L-可积, 则有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a)\,. \tag{2.4.1}$$

【证】先说明若这定理对实值函数成立, 则它对复值函数也成立. 这是因为由假设知$f=f_1+\mathrm{i}f_2$的实部、虚部f_1,f_2都分别满足定理条件从而有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1'(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b f_2'(x)\mathrm{d}x = f_1(b)-f_1(a)+\mathrm{i}(f_2(b)-f_2(a)) = f(b)-f(a).$$

这表明为证明这一定理, 可以假设f是实值的. 证明分两步.

Step1. 考虑稍强的假设: 设$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上**处处**可导且导函数$f'(x)$ 在$[a,b]$ 上L-可积.

给定任意$\varepsilon > 0$. 由Vitali-Caratheódory 定理, 存在下半连续函数$g : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ 使得$g \in L^1([a,b])$, $f'(x) \le g(x)$ 于$[a,b]$ 且

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\,. \tag{2.4.2}$$

如用$\widetilde{g}(x) = g(x) + \varepsilon_1/(b-a)$ 代替$g(x)$, 其中常数$\varepsilon_1 > 0$ 充分小使不等式(2.4.2) 对$\widetilde{g}$ 也成立, 则我们可假定g 满足严格不等式[3]:

$$f'(x) < g(x) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

对任一$\eta > 0$, 定义

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t - f(x) + f(a) + \eta(x-a)\,, \quad x \in [a,b]\,. \tag{2.4.3}$$

来证明$F_\eta(b) \ge 0$. 固定η, 对每个$x \in [a,b)$, 因g 下半连续且$g(x) > f'(x)$, 故 $\{t \in \mathbb{R} \,|\, g(t) > f'(x)\}$ 是开集且包含x. 因此存在$\delta_x > 0$ 使得

$$(x, x+\delta_x) \subset [a,b) \ \ \text{且}\ \ g(t) > f'(x)\,,\ \ \frac{f(t)-f(x)}{t-x} < f'(x) + \eta \quad \forall\, t \in (x, x+\delta_x)\,.$$

于是对任何$t \in (x, x+\delta_x)$ 有

$$\begin{aligned} F_\eta(t) - F_\eta(x) &= \int_x^t g(\tau)\mathrm{d}\tau - [f(t) - f(x)] + \eta(t-x) \\ &> f'(x)(t-x) - [f'(x) + \eta](t-x) + \eta(t-x) = 0\,. \end{aligned}$$

因F_η 在$[a,b]$上连续且$F_\eta(a) = 0$, 故存在一个满足$F_\eta(x) = 0$ 的最大点$x_0 \in [a,b]$. 若$x_0 = b$, 则有$F_\eta(b) = 0$; 若$x_0 < b$, 则上面的计算蕴涵$F_\eta(t) > F_\eta(x_0) = 0$ $\forall\, t \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$, 从而由介值定理和$x_0$ 的最大性知必有$F_\eta(b) \ge 0$. 所以在任何情况下都有$F_\eta(b) \ge 0$.

因为$F_\eta(b) \ge 0$ 对所有$\eta > 0$ 成立, 故由$F_\eta(b)$ 的表达式(2.4.3)$(x = b)$ 得到

$$f(b) - f(a) \le \int_a^b g(t)\mathrm{d}x + \eta(b-a) \qquad \forall\, \eta > 0.$$

令$\eta \to 0$ 并结合(2.4.2)得到

$$f(b) - f(a) \le \int_a^b g(t)\mathrm{d}t < \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t + \varepsilon\,.$$

因$\varepsilon > 0$ 是任意的, 这就给出

$$f(b) - f(a) \le \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\,. \tag{2.4.4}$$

[3]由假设和导数的定义知$f'(x)$在$[a,b]$上处处有限, 因此不会出现"$\infty < \infty$"的情形.

最后注意$-f$ 也满足定理中的假设,且$(-f)'=-f'$, 故不等式(2.4.4) 的反向不等式也成立. 这就证明了等式(2.4.1).

Step2. 回到定理中的假设. 令$a_n=a+\frac{b-a}{4n}$, $b_n=b-\frac{b-a}{4n}, n=1,2,3,\dots$. 则$f$在每个$[a_n,b_n]$上满足**Step1**中的条件。于是由积分的扩张定理、(2.4.1) 和f的连续性得到

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}[f(b_n)-f(a_n)]=f(b)-f(a). \qquad \square$$

【注】由于Lebesgue 可积的函数不必是有界的, 上述Newton-Leibniz公式包括了导函数$f'(x)$无界的情形. 下同.

【命题2.4.4(无界区间上的Newton-Leibniz公式)】

(a) 设$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上连续、在开区间$(a,+\infty)$ 内处处可导且导函数$f'(x)$在$(a,+\infty)$ 上可积, 则极限$f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在有限且成立

$$\int_a^\infty f'(x)dx=f(+\infty)-f(a).$$

(b) 设$f(x)$ 在$(-\infty,a]$ 上连续、在开区间$(-\infty,a)$ 内处处可导且导函数$f'(x)$在$(-\infty,a)$ 上可积, 则极限$f(-\infty):=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在有限且成立

$$\int_{-\infty}^a f'(x)dx=f(a)-f(-\infty).$$

(c) 设$f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上处处可导且导函数$f'(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上可积. 则极限$f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $f(-\infty):=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在有限且成立

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^\infty f'(x)dx=f(+\infty)-f(-\infty)\,.$$

【证】(a): 在$(a,+\infty)$ 内任取点单调增加趋于$+\infty$的点列：$x_n\nearrow+\infty$. 应用有界区间上的Newton-Leibniz公式和可积性的扩张定理有

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(a)+\lim_{n\to+\infty}\int_a^{x_n}f'(x)dx=f(a)+\int_a^\infty f'(x)dx\,.$$

由$\{x_n\}$ 的任意性, 这证明了$f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且所证公式成立.

(b): 证明与(a)的相同.

(c): 将(a),(b) 分别应用于$[0,+\infty),(-\infty,0]$知极限$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $f(-\infty):=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 均存在有限从而有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f'(x)dx+\int_{0}^{\infty}f'(x)dx\\&=f(0)-f(-\infty)+f(+\infty)-f(0)=f(+\infty)-f(-\infty)\,.\qquad\Box\end{aligned}$$

【命题2.4.5(分部积分)】

(a) 设f,g 在有界闭区间$[a,b]$ 上连续在(a,b) 内处处可导, 且$f'(x)$ 和$g'(x)$ 都在(a,b) 上可积. 则

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b f(x)g'(x)dx\,.$$

(b) 设f,g 在区间$[a,+\infty)$ 上连续在$(a,+\infty)$ 内处处可导且$f'(x)$, $g'(x)$ 都在$(a,+\infty)$ 上可积. 则

$$\int_a^{\infty} f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=+\infty}-\int_a^{\infty} f(x)g'(x)dx\,.$$

(c) 设f,g 在区间$(-\infty,a]$ 上连续在$(-\infty,a)$ 内处处可导, 且$f'(x)$, $g'(x)$ 都在$(-\infty,a)$ 上可积. 则

$$\int_{-\infty}^{a} f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=a}-\int_{-\infty}^{a} f(x)g'(x)dx\,.$$

(d) 设f,g在$\mathbb{R}$ 处处可导且$f'(x)$, $g'(x)$ 都在$\mathbb{R}$ 上可积. 则

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}-\int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx\,.$$

注： 这个结论当$[a,b]$ 换为无界闭区间时也成立(参见下面证明).

【证】(a): 因紧集上的连续函数必有界, 故$f'(x)g(x),f(x)g'(x)$ 从而$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 都在(a,b)上可积。于是对fg 应用Newton-Leibniz公式便有

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=\int_a^b(fg)'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

移项即得分部积分公式.

(b): 由假设和**命题2.4.4(无界区间上的Newton-Leibniz公式)** 知f,g都在$[a,+\infty)$上有界, 因此$f'(x)g(x),f(x)g'(x)$ 从而$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 都在$(a,+\infty)$上可积。于是对fg 应用无界区间上的Newton-Leibniz公式便有

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=+\infty}=\int_a^{\infty}(fg)'(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^{\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

移项即得分部积分公式.

(c): 证法同上.

(d): 由假设和**命题2.4.4(无界区间上的Newton-Leibniz公式)** 知f,g都在$\mathbb{R}$上有界, 因此$f'(x)g(x), f(x)g'(x)$ 从而$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 都在$\mathbb{R}$上可积。于是对fg 应用无界区间上的Newton-Leibniz公式便有

$$f(x)g(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \int_{\mathbb{R}}(fg)'(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

移项即得分部积分公式. □

单调函数的Newton-Leibniz公式.

单调函数类在分析学、概率论及其应用中占有重要地位. 相应的Newton-Leibniz公式的条件也可简化. 不失一般性我们只考虑单调增加的情形. 证明基于两点：(1)单调函数总有极限,(2)单调增加的可微函数的导函数是非负可测函数, 因而其积分总存在(**可能为无穷大**).

【命题2.4.6(单调函数的Newton-Leibniz公式)】设$-\infty \le a < b \le +\infty$, 函数$f(x)$在$(a,b)$ 内处处可微且单调增加(**不必有界**), 则有

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{x\to b-} f(x) - \lim_{x\to a+} f(x) =: f(b-) - f(a+)\,.$$

因此特别有：

当$-\infty < a < b < \infty$ 且$f(x)$ 在a 点右连续、在b 点左连续时

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)\,;$$

当$-\infty < a < b = +\infty$ 且$f(x)$ 在a 点右连续时

$$\int_a^\infty f'(x)dx = f(+\infty) - f(a)\,;$$

当$-\infty = a < b < \infty$ 且$f(x)$ 在b 点左连续时

$$\int_{-\infty}^b f'(x)dx = f(b) - f(-\infty)\,;$$

当$-\infty = a < b = +\infty$ 时

$$\int_{-\infty}^\infty f'(x)dx = f(+\infty) - f(-\infty)\,.$$

【证】先假设$[a,b]$ 是有界闭区间、f 在$[a,b]$ 上连续、单调增加且在(a,b) 内处处可导。为证f 满足Newton-Leibniz公式, 根据命题7.1, 只需证明$f'(x)$ 在(a,b) 上可积.

将f 延拓至$[a,+\infty)$: $f(x)=f(b)$, $x\ge b$; 并令$f_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)]$, $x\in[a,b]$. 由f 单调增加有$f_n(x)\ge 0$ 且

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\qquad \forall\, x\in(a,b)\,.$$

应用Fatou 引理得

$$\int_a^b f'(x)dx\le\liminf_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx\,.$$

另一方面, 利用积分的平移变换公式和可加性我们计算

$$\begin{aligned}&\int_a^b(f(x+1/n)-f(x))dx=\int_a^b f(x+1/n)dx-\int_a^b f(x)dx\\&=\int_{a+1/n}^{b+1/n}f(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_b^{b+1/n}f(x)dx-\int_a^{a+1/n}f(x)dx\\&=\frac{1}{n}[f(\alpha_n)-f(\beta_n)]\end{aligned}$$

其中$\alpha_n\in(a,a+1/n),\beta_n\in(b,b+1/n)$ (这里用到续函数的积分中值定理). 于是

$$\int_a^b f_n(x)dx=f(\beta_n)-f(\alpha_n)\to f(b)-f(a)\ \ (n\to+\infty\,)\,.$$

这就给出

$$\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)<\infty\,.$$

因$f'(x)\ge 0\;\forall\, x\in(a,b)$, 所以$f'(x)$ 在(a,b) 上可积. 于是Newton-Leibniz公式成立, 即等号成立: $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$.

对一般情形, 选取a_n,b_n 满足$a<a_n<b_n<b$ 且$a_n\searrow a$, $b_n\nearrow b$ $(n\to+\infty)$. 由假设和上面结果易见f 在每个区间$[a_n,b_n]$ 上满足Newton-Leibniz公式. 因$[a_n,b_n]\subset[a_{n+1},b_{n+1}]\subset(a,b)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=(a,b)$, 且$f(x)$ 单调增加、$f'(x)\ge 0$ 于(a,b), 应用非负可测函数的积分扩张定理即得

$$\int_a^b f'(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{a_n}^{b_n}f'(x)dx=\lim_{n\to+\infty}[f(b_n)-f(a_n)]=f(b-)-f(a+)\,.\qquad\Box$$

【例】(1) 函数$x\mapsto\arcsin x$ 在闭区间$[-1,1]$ 上单调增加, 在开区间$(-1,1)$ 内处处可导,$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 因此Newton-Leibniz公式成立:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1)-\arcsin(0)=\frac{\pi}{2}\,.$$

(2) 同样, 使用单调函数的Newton-Leibniz公式有（设$0<\delta<\infty$）

$$\int_0^\delta x^{-\alpha}dx=\begin{cases}\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\lim\limits_{x\to0+}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}<\infty & \text{if}\quad \alpha<1\\ \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\lim\limits_{x\to0+}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}=+\infty & \text{if}\quad \alpha>1\\ \log\delta-\lim\limits_{x\to0+}\log x=+\infty & \text{if}\quad \alpha=1\end{cases}$$

$$\int_\delta^\infty x^{-\alpha}dx=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\delta^{1-\alpha}}{\alpha-1}<\infty & \text{if}\quad \alpha>1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}=+\infty & \text{if}\quad \alpha<1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\log x-\log\delta=+\infty & \text{if}\quad \alpha=1\end{cases}$$

(3) 利用积分平移变换和上面计算结果有对任意$c\in[0,1]$,

$$\int_0^1|x-c|^{-\alpha}dx=\int_{-c}^{1-c}|t|^{-\alpha}dt=\int_{-c}^0(-t)^{-\alpha}dt+\int_0^{1-c}t^{-\alpha}dt=\int_0^c t^{-\alpha}dt+\int_0^{1-c}t^{-\alpha}dt$$

$\Longrightarrow$

$$\int_0^1|x-c|^{-\alpha}dx=\begin{cases}\frac{c^{1-\alpha}+(1-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}<\infty & \text{if}\quad \alpha<1\\ +\infty & \text{if}\quad \alpha\ge1\end{cases}$$

(4)

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)-\arctan(0)=\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}-\frac{1}{-\lambda}=\frac{1}{\lambda},\qquad \lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R}\,.$$

【例】

$$\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{k=1}^\infty\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{k=1}^\infty\int_0^\pi\frac{|\sin(x+(k-1)\pi)|}{x+(k-1)\pi}dx$$
$$=\sum_{k=1}^\infty\int_0^\pi\frac{\sin x}{x+(k-1)\pi}dx\ge\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi\sin xdx=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}=+\infty\,.$$

【例(Lebesgue)】设$f(x)$ 在有界闭区间$[a,b]$ 上连续且单调增加. 则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上几乎处处可微且成立不等式

$$\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)\,.$$

此外可以构造单调增加的连续函数$f(x)$ (如Cantor 函数) 使严格不等号“$<$”成立:

$$\int_a^b f'(x)dx=0<f(b)-f(a)\,.$$

【证】单调函数几乎处处可微这是Lebesgue 的著名定理, 详细证明放在关于有界变差函数类的章节中. 我们这里只给出积分不等式的证明. 如前, 做延拓$f(x)=f(b)\,,\ x\geq b$. 由f 单调增加知$n[f(x+1/n)-f(x)]\geq 0$, 而由单调函数几乎处处可微有

$$\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}\to f'(x)\geq 0\ \ (n\to+\infty)\quad \text{a.e.}\quad x\in[a,b]\,.$$

于是应用Fatou 引理和前面的证明(用f 的连续性) 有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leq\liminf_{n\to+\infty}\int_a^b\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}\mathrm{d}x=f(b)-f(a)\,.\qquad\Box$$

作为Lebesgue 控制收敛(LDC) 的一个重要应用, 我们来学习并证明含参变量积分的连续性和积分号下求微商定理.

【定理2.4.7(含实参变量积分的连续性和积分号下求微商)】设$E\subset\mathbb{R}^d$ 为L-可测集, $I\subset\mathbb{R}$ 为开区间, 函数$f:E\times I\to\mathbb{C}$.

(a) 假设对每个$t\in I$, 函数$x\mapsto f(x,t)$ 在E上L-可积; 对每个$x\in E$, 函数函数$t\mapsto f(x,t)$ 在I上连续且存在$0\leq F\in L^1(E)$ 使得

$$|f(x,t)|\leq F(x)\qquad\forall\,(x,t)\in E\times I.$$

则函数$t\mapsto\int_E f(x,t)\mathrm{d}x$ 在I 上连续.

(b) 假设对每个$t\in I$, 函数$x\mapsto f(x,t)$ 在E上L-可积; 对每个$x\in E$, 函数$t\mapsto f(x,t)$ 在I上可微且存在$0\leq G\in L^1(E)$ 使得

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big|\leq G(x)\qquad\forall\,(x,t)\in E\times I.$$

则函数$t\mapsto\int_E f(x,t)\mathrm{d}x$ 在I 上可微, 且对每个$t\in I$, 函数$x\mapsto\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$在$E$上$L$-可积, 并有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x,\quad t\in I.$$

【证】(a),(b)的证明都是连续参变量LDC的直接应用, 故只需证略微复杂的(b). 任取$t_0\in I$. 因I是开区间, 故存在$\delta>0$ 使得$[t_0-\delta,t_0+\delta]\subset I$. 则对任意$0<h|<\delta$, 由积分的线性性有

$$\frac{1}{h}\Big(\int_E f(x,t_0+h)\mathrm{d}x-\int_E f(x,t_0)\mathrm{d}x\Big)=\int_E\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\mathrm{d}x.$$

又由假设和微分中值不等式[4]有

$$\Big|\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\Big| \le \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)\Big| \le G(x) \qquad \forall\, x\in E, \quad \forall\, 0<|h|<\delta.$$

其中ξ 介于t_0, t_0+h 之间因而属于$[t_0-\delta, t_0+\delta]\subset I$. 又有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \qquad \forall\, x\in E.$$

对函数族$f_h(x) := \frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}, x\in E, h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$, 应用连续参变量的Lebesgue控制收敛定理即得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\int_E f(x,t_0+h)\mathrm{d}x - \int_E f(x,t_0)\mathrm{d}x\Big) = \lim_{h\to 0}\int_E \frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\mathrm{d}x$$
$$= \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}x$$

再由导数的定义即知函数$t\mapsto \int_E f(x,t)\mathrm{d}x$ 在t_0 可导, $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ 在E上可积且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x\Big|_{t=t_0} = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}x.$$

最后由$t_0\in I$的任意性, 定理得证. $\square$

以上定理可以推广到参数为复变量的情形:

【定理2.4.8(含复数参变量积分的连续性和积分号下求微商)】 设$E\subset\mathbb{R}^d$ 为L-可测集, $D\subset\mathbb{C}$ 为开集, 函数$f: E\times D\to\mathbb{C}$.

(a) 假设对每个$z\in D$, 函数$x\mapsto f(x,z)$ 在E上L-可积; 对每个$x\in E$, 函数函数$z\mapsto f(x,z)$ 在D上连续且存在$0\le F\in L^1(E)$ 使得

$$|f(x,z)|\le F(x) \qquad \forall\,(x,z)\in E\times D.$$

则函数$z\mapsto\int_E f(x,z)\mathrm{d}x$ 在D 上连续.

(b) 假设对每个$z\in D$, 函数$x\mapsto f(x,z)$ 在E上L-可积; 对每个$x\in E$, 函数$z\mapsto f(x,z)$ 在D内解析(即全纯). 假设设对每个$z_0\in D$ 存在$\delta>0$ 使得$B_\delta(z_0)\subset D$ 且存在$0\le G\in L^1(E)$ 使得

$$\Big|\frac{\partial}{\partial z}f(x,z)\Big|\le G(x) \qquad \forall\,(x,z)\in E\times B_\delta(z_0).$$

[4] **当f为实值函数时, 是微分中值定理; 当f为复值函数时, 即等价地, 当f为向量值函数时, 是微分中值不等式.**

则函数$z\mapsto\int_E f(x,z)\mathrm{d}x$ 在点D内可微, 且对每个$z\in D$, 函数$x\mapsto\frac{\partial}{\partial z}f(x,z)$在$E$上可积, 并有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_E f(x,z)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\partial}{\partial z}f(x,z)\mathrm{d}x\qquad\forall\, z\in D.$$

【证】(a),(b)的证明类似, 这里只证(b). 先证明若复值函数g在$B_\delta(z_0)$内解析, 则对任意$a,b\in B_\delta(z_0)$ 存在$\xi=a+\theta(b-a)\in B_\delta(z_0),0<\theta<1$, 使成立微分中值不等式:

$$|g(b)-g(a)|\le|g'(\xi)||b-a|.$$

事实上令$\varphi(t)=g(a+t(b-a)),t\in[a,b]$. 则由复合函数的求导法则知$\varphi(t)$在$[0,1]$上可微且

$$\varphi'(t)=g'(a+t(b-a))(b-a),\quad t\in[a,b].$$

而由g在$B_\delta(z_0)$内解析知$g'(z)$在$B_\delta(z_0)$内连续。因此$\varphi'(t)=g'(a+t(b-a))(b-a)$在$t\in[0,1]$上连续。于是由Newton-Leibnitz 公式有

$$g(b)-g(a)=\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 g'(a+t(b-a))(b-a)\mathrm{d}t.$$

因此

$$|g(b)-g(a)|\le\int_0^1|g'(a+t(b-a))(b-a)|\mathrm{d}t=|g'(\xi)(b-a)|\le|g'(\xi)||b-a|.$$

现在任取一点$z_0\in D$. 由假设, 存在$\delta>0$ 使得$B_\delta(z_0)\subset D$ 并存在$0\le G\in L^1(E)$ 使得定理中的条件。任取点列$\{z_n\}_{n=1}^\infty\subset B_\delta(z_0)$ 满足$z_n\ne z_0,z_n\to z_0\,(n\to\infty)$. 看差商

$$\frac{1}{z_n-z_0}\Big(\int_E f(x,z_n)\mathrm{d}x-\int_E f(x,z_0)\mathrm{d}x\Big)=\int_E\left(\frac{f(x,z_n)-f(x,z_0)}{z_n-z_0}\right)\mathrm{d}x.$$

由假设条件和微分中值不等式有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,z_n)-f(x,z_0)}{z_n-z_0}=\frac{\partial}{\partial z}f(x,z_0)\qquad\forall\, x\in E,$$
$$\Big|\frac{f(x,z_n)-f(x,z_0)}{z_n-z_0}\Big|\le\Big|\frac{\partial}{\partial z}f(x,\xi_n)\Big|\le G(x),\quad x\in E,n=1,2,3,...$$

这里$\xi_n=z_0+\theta_n(z_n-z_0)\in B_\delta(z_0),0<\theta_n<1$. 据LDC 知$x\mapsto\frac{\partial}{\partial z}f(x,z_0)$在$E$上可积且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n-z_0}\Big(\int_E f(x,z_n)\mathrm{d}x-\int_E f(x,z_0)\mathrm{d}x\Big)=\int_E\frac{\partial}{\partial z}f(x,z_0)\mathrm{d}x.$$

由$\{z_n\}_{n=1}^\infty$的任意性, 这证明了函数$z\mapsto\int_E f(x,z)\mathrm{d}x$ 在点z_0可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_E f(x,z_0)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\partial}{\partial z}f(x,z_0)\mathrm{d}x.$$

最后由$z_0\in D$的任意性知定理成立。 □

§2.5. 连续函数逼近, 积分的平均连续性

如果被积函数是连续的函数或光滑的, 则很多性质将容易导出。下面的逼近定理表明, 在积分度量下, 可积函数可以被具有紧支集的续函数逼近。以后会看到, 可积函数也可以被具有紧支集的C^∞-光滑函数逼近。

【定理2.5.1(连续函数逼近)】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), 1\le p<\infty$, $f\in L^p(E)$. 则对任意$\varepsilon>0$, 存在$g\in C_c(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$\|f-g\|_{L^p}=\left(\int_E|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\varepsilon.$$

【证】将f零延拓到$\mathbb{R}^d$, 即以$\mathbf{1}_E(x)f(x)$代替$f(x)$, 并注意

$$\int_E|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x$$

则可以假设$E=\mathbb{R}^d$. 由$|f|^p\in L^1(\mathbb{R}^d)$知$f$几乎处处有限。因零测集对积分无贡献, 故可以假定$f$处处有限。考虑截断逼近: $f_R(x)=f(x)\mathbf{1}_{\{|x|<R\}}\mathbf{1}_{\{|f(x)|<R\}}$. 易见

$$|f(x)-f_R(x)|^p\le|f(x)|^p,\quad |f_R(x)-f(x)|^p\to 0\quad(R\to+\infty)\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^d.$$

因$|f|^p\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 故由LDC (例如可以取$R$为正整数, 或者在连续参量的LDC 中取参量为$h=1/R$) 有$\|f-f_R\|_{L^p}\to 0$ $(R\to+\infty)$.

对任意$\varepsilon>0$, 取定$0<R<\infty$ 充分大使得$\|f-f_R\|_{L^p}<\varepsilon/2$. 将Lusin 定理应用于集合$E=B_R:=B(0,R)$ (开球)、函数f_R 以及开集$\Omega=B_R$, 则存在$g\in C(\mathbb{R}^d)$ 满足$\operatorname{supp}g\subset\overline{\Omega}=\overline{B_R}$ 使得

$$m(B_R(f_R\ne g))<\varepsilon_1\quad 且\quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|g(x)|\le\sup_{x\in B_R}|f_R(x)|\le R.$$

这里ε_1 是一个待定的正数, 只与ε,R 和p 有关. 函数g 当然依赖于ε_1. 数学论证中这种"随后确定"的做法常见, 好处是使推导发展自然. 注意闭球$\overline{B_R}$是紧集, 故$\operatorname{supp}g$是紧集, 因此$g\in C_c(\mathbb{R}^d)$. 同时由g连续易见$g(x)=0$ for all $x\in\mathbb{R}^d\setminus B_R$. [事实上由$g$连续和$g(x)=0$ 于$\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_R}$ 易见$g(x)=0$ 于∂B_R. 因此$g(x)=0$ 于$\mathbb{R}^d\setminus B_R$.]

我们来估计(运用三角不等式)

$$\|f-g\|_{L^p}\le\|f-f_R\|_{L^p}+\|f_R-g\|_{L^p}<\varepsilon/2+\|f_R-g\|_{L^p}\,,$$

$$\begin{aligned}\|f_R-g\|_{L^p}^p&=\int_{\mathbb{R}^d}|f_R(x)-g(x)|^pdx=\int_{B_R}|f_R(x)-g(x)|^pdx\\&=\int_{B_R(f_R\ne g)}|f_R(x)-g(x)|^pdx\le(2R)^pm(B_R(f_R\ne g))<(2R)^p\varepsilon_1\,.\end{aligned}$$

如果事先取ε_1 满足$(2R)^p\varepsilon_1=(\varepsilon/2)^p$, i.e. $\varepsilon_1=(\frac{\varepsilon}{4R})^p$, 则得到$\|f_R-g\|_{L^p}<\varepsilon/2$. 所以$\|f-g\|_{L^p}<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. $\Box$

【定理2.5.2(平均连续性)】设$1\le p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$. 则有

$$\|f(\cdot+h)-f\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\to 0\quad\text{as}\quad h\to 0.$$

【证】根据极限的定义, 只要证明对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$ 使得当$h\in\mathbb{R}^d$ 且$|h|<\delta$ 时

$$\|f(\cdot+h)-f\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}<\varepsilon\,.$$

由已证明的连续函数逼近, 对$\varepsilon/3>0$ 存在$g\in C_c(\mathbb{R}^d)$ 使得$\|f-g\|_{L^p}<\varepsilon/3$. 由三角不等式和$\mathbb{R}^d$ 上积分的平移不变性有: $\forall\,h\in\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}&\|f(\cdot+h)-f\|_{L^p}\le\|f(\cdot+h)-g(\cdot+h)\|_{L^p}+\|g(\cdot+h)-g\|_{L^p}+\|g-f\|_{L^p}\\&=2\|f-g\|_{L^p}+\|g(\cdot+h)-g\|_{L^p}<2\varepsilon/3+\|g(\cdot+h)-g\|_{L^p}\,.\end{aligned}$$

因g有紧支集, 故存在$0<R<\infty$, 使得$g(x)=0\ \forall x\in(B_R)^c$. 同时易见$g$ 在$\mathbb{R}^d$ 一致连续. 故对任意$\eta>0$, 存在$\delta>0$ (可设$\delta<R$), 使得当$h\in\mathbb{R}^d$ 满足$|h|<\delta$ 时$|g(x+h)-g(x)|<\eta$ 对一切$x\in\mathbb{R}^d$ 成立. 因$g(x+h)=0\,,g(x)=0\ \forall x\in(B_{2R})^c$, 故当$|h|<\delta$ 时

$$\|g(\cdot+h)-g\|_{L^p}^p=\int_{B_{2R}}|g(x+h)-f(x)|^p dx<\eta\, m(B_{2R})\,.$$

取$\eta>0$ 满足$\eta\, m(B_{2R})=(\varepsilon/3)^p$. 则得$\|g(\cdot+h)-g\|_{L^p}<\varepsilon/3$ 从而有

$$\|f(\cdot+h)-f\|_{L^p}<2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon\qquad\forall\,|h|<\delta.\qquad\Box$$

• **本性有界函数空间**$L^\infty(E)$

设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, f是E上的实值或复值L-可测函数, 定义

$$f\in L^\infty(E)\Longleftrightarrow\ \text{存在一个零测集}Z\subset E\text{使得}f\text{在}E\setminus Z\text{上有界.}$$

此时我们将f的这种界的下确界记为$\|f\|_{L^\infty}$, 即

$$\|f\|_{L^\infty}=\|f\|_{L^\infty(E)}:=\inf_{Z\subset E\,,m(Z)=0}\ \sup_{x\in E\setminus Z}|f(x)|\quad(<\infty)\,.$$

不难证明这个下确界 inf 可以达到, 也即我们有：存在零测集$Z_0\subset\mathbb{R}^d$使得

$$\|f\|_{L^\infty}=\sup_{x\in E\setminus Z_0}|f(x)|\,.\tag{2.5.1}$$

事实上由下确界的定义,对任意$n\in\mathbb{N}$, 存在零测集$Z_n\subset\mathbb{R}^d$使得

$$\|f\|_{L^\infty}\le\sup_{x\in E\setminus Z_n}|f(x)|<\|f\|_{L^\infty}+\frac{1}{n}\,.$$

令$Z_0=\bigcup_{n=1}^\infty Z_n$, 则$m(Z_0)=0$因而据$\|f\|_{L^\infty}$的定义和"小的集合其上确界也小"有

$$\|f\|_{L^\infty}\le\sup_{x\in E\setminus Z_0}|f(x)|\le\sup_{x\in E\setminus Z_n}|f(x)|<\|f\|_{L^\infty}+\frac{1}{n}\,,\quad n=1,2,3,\dots.$$

这蕴含(2.5.1). 数$\|f\|_{L^\infty}$称为$f\in L^\infty(E)$的本性界(或称为$|f|$的本性上界), 其意义在积分中是明显的：由于零测集对积分无贡献, 你可以把本性有界的被积函数当作普通有界函数对待.

注意：若$m(E)=0$, 则E上的任何函数都属于$L^\infty(E)$. 因此为使问题有意义, 我们假定在研究$L^\infty(E)$时, $m(E)>0$. 我们用下面定理概括$L^\infty(E)$的基本性质.

【定理2.5.3】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $L^\infty(E)$是E上本质有界的实值或复值L-可测函数的全体. 则$L^\infty(E)$是一个实或复的线性空间, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是$L^\infty(E)$上的一个范数, 且$L^\infty(E)$是一个代数, 即若$f,g\in L^\infty(E)$, 则$fg\in L^\infty(E)$ 且

$$\|fg\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^\infty}.$$

此外$L^\infty(E)$ 按距离$\|f-g\|_{L^\infty}$ 是完备的, 但当$m(E)>0$时连续函数类不在$L^\infty(E)$稠密.

【证】如前, 我们把$L^\infty(E)$中几乎处处相等的两个函数看成是同一个函数。于是易见$\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是$L^\infty(E)$上的一个范数。下面只需证完备性和连续函数类不在$L^\infty(E)$稠密, 其他性质是显然的。设$\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是$L^\infty(E)$中的一个Cauchy 列, 即
$\lim\limits_{k\to\infty,n\to\infty}\|f_k-f_n\|_{L^\infty}=0$. 由上面分析的结果知存在零测集$Z_{k,n}\subset E$ 使得

$$\|f_k-f_n\|_{L^\infty}=\sup_{x\in E\setminus Z_{k,n}}|f_k(x)-f_n(x)|,\quad k,n=1,2,3,\dots.$$

令$Z=\bigcup_{k,n\in\mathbb{N}}Z_{k,n}$. 则$m(Z)=0$ 且

$$\lim_{k\to\infty,n\to\infty}\sup_{x\in E\setminus Z}|f_k(x)-f_n(x)|=0.$$

换言之, 限制在$E\setminus Z$上, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是有界函数列且满足一致收敛的Cauchy 条件. 因此由数学分析知存在$E\setminus Z$上的有界函数f 使得f_k在$E\setminus Z$上一致收敛于f, 即

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in E\setminus Z}|f_k(x)-f(x)|=0.$$

如令$f(x)=0$ 于Z, 则f是E上的可测函数且$f\in L^\infty(E)$ 并由$m(Z)=0$有

$$\|f_k-f\|_{L^\infty}\le\sup_{x\in E\setminus Z}|f_k(x)-f(x)|\to 0\quad(k\to\infty).$$

所以$\|f_k-f\|_{L^\infty}\to 0\,(k\to\infty)$. 所以$L^\infty(E)$ 是完备的。

下面设$m(E)>0$, 来构造一个函数$f\in L^\infty(E)$ 使得

$$\|g-f\|_{L^\infty}\ge\frac{1}{2}\qquad\forall\, g\in C(E)\cap L^\infty(E).$$

由$m(E)>0$ 可知E中几乎每一点都是全密点(见第三章§3.1), 这特别蕴含存在零测集$Z_1\subset E$使得对任意$x\in E\setminus Z_1$ 和任意$r>0$有$m(E\cap B(x,r))>0$. 周知有理点集$\mathbb{Q}^d$是可数的稠密集, 因此作为数学分析的练习易证$E\setminus Z_1$有一个可数稠密子集: $A=\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 其中a_k 互不相同. 考虑$\Omega=\bigcup_{k=1}^\infty B(a_k,\frac{\varepsilon}{2^k}), 0<\varepsilon<1$. 则有$m(\Omega)\le\sum_{k=1}^\infty m(B(a_k,\frac{\varepsilon}{2^k}))=C_d\sum_{k=1}^\infty(\frac{\varepsilon}{2^k})^d\le C_d\varepsilon$, 其中$C_d=m(\mathbb{B}^d)$ 等于单位球的测度. 取ε充分小使得$C_d\varepsilon<\frac{1}{2}m(E)$. 则得知$m(\Omega)<\frac{1}{2}m(E)$. 令

$$K=E\setminus\Omega,\quad f(x)=\mathbf{1}_K(x).$$

则由$E\subset K\cup\Omega$ 知$m(K)>0$. 来证明对任意$g\in C(E)\cap L^\infty(E)$ 有$\|g-f\|_{L^\infty}\ge 1/2$. 首先由上面分析的结果知存在零测集$Z_0\subset E$使得$\|g-f\|_{L^\infty}=\sup\limits_{x\in E\setminus Z_0}|f(x)-g(x)|$. 于是为证这一性质, 我们用反证法: 假设$\sup\limits_{x\in E\setminus Z_0}|f(x)-g(x)|<1/2$, 来导出矛盾. 令

$$Z_*=Z_0\cup Z_1\cup A.$$

则$m(Z_*)=0$. 这蕴含$K\setminus Z_*\ne\emptyset$. 取$x_0\in K\setminus Z_*$. 由$A=\{a_k\}_{k=1}^\infty$在$E\setminus Z_1$中稠密、$x_0\in E\setminus Z_1$ 和$x_0\notin A$ 知存在子列$\{a_{k_j}\}_{j=1}^\infty$使得$a_{k_j}\to x_0\,(j\to\infty)$ 这里$k_1<k_2<k_3<\cdots$.[5] 其次由$m(E\cap B(a_{k_j},\frac{\varepsilon}{2^{k_j}}))>0$知$E\cap B(a_{k_j},\frac{\varepsilon}{2^{k_j}})\setminus Z_*\ne\emptyset$, 因此可以取定$x_j\in E\cap B(a_{k_j},\frac{\varepsilon}{2^{k_j}})\setminus Z_*$, $j=1,2,3,\dots$. 这蕴含$|x_j-x_0|\le|x_j-a_{k_j}|+|a_{k_j}-x_0|\le\frac{\varepsilon}{2^{k_j}}+|a_{k_j}-x_0|\to 0\,(j\to\infty)$. 因$g$连续, 故$g(x_0)=\lim\limits_{j\to\infty}g(x_j)$. 又由$\Omega$的定义知$x_j\in E\cap\Omega\setminus Z_*$ 因此$x_j\notin K$ 从而有$f(x_j)=0$ 和

$$|g(x_j)|=|g(x_j)-f(x_j)|\le\sup_{x\in E\setminus Z_0}|g(x)-f(x)|<1/2,\quad j=1,2,3,\dots.$$

[5]因$x_0\notin A$, 故$|a_k-x_0|>0$ for all $k\in\mathbb{N}$. 由$A=\{a_k\}_{k=1}^\infty$的稠密性易见依次存在$k_1,k_2,k_3,...\in\mathbb{N}$ 使得$k_1=1$, $0<|a_{k_j}-x_0|\le\frac{1}{j}\min\limits_{1\le k\le k_{j-1}}\frac{|a_k-x_0|}{1+|a_k-x_0|}, j=2,3,4,\dots$. 这蕴含$k_1<k_2<k_3<\cdots$ 且$|a_{k_j}-x_0|\le\frac{1}{j}\to 0\,(j\to\infty)$.

这蕴含$|g(x_0)| = \lim_{j\to\infty} |g(x_j)| \le \frac{1}{2}$. 又由$x_0 \in K \setminus Z_*$ 知$f(x_0) = 1$. 于是得到矛盾:

$$1 \le |1 - g(x_0)| + |g(x_0)| \le |f(x_0) - g(x_0)| + 1/2 \le \sup_{x\in E\setminus Z_0} |f(x) - g(x)| + 1/2 < 1.$$

这矛盾证明了必有$\|g - f\|_{L^\infty} \ge 1/2$. $\square$

§2.6. 重积分和累次积分, Fubini 定理

为了利用一元函数的Newton-Leibniz 公式计算多元函数的重积分, 需要把重积分化为一些低维集合上的累次积分。理论上必须保证累次积分的计算结果与累积次序的选择无关。Fubini定理表明：只要被积函数整体可积或非负可测, 重积分就与累次积分的次序无关。在重积分的计算和估值方面, 由于被积函数千差万别, 不同的累次积分顺序可能带来不同的难度, 而且理论和实践表明: 重积分的某些重要性质只有在合适的累次积分顺序上才能展现出来。因此选择合适的累次积分顺序序是重积分计算与应用的要点之一。

为建立重积分与累次积分的关系式, 我们从特征函数的重积分和累次积分开始。

记号: 令$m_d(\cdot)$ 为$\mathbb{R}^d$ 上的Lebesgue 测度. 注意若$p,q\in\mathbb{N}$, 则$\mathbb{R}^{p+q}=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$.

【集合的截口】对任一集合$E\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, 定义截口$E_x$, E^y 如下：

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}^q\,|\,(x,y)\in E\},\ \ x\in\mathbb{R}^p\,;\qquad E^y=\{x\in\mathbb{R}^p\,|\,(x,y)\in E\},\ \ y\in\mathbb{R}^q\,.$$

$$\text{易见}\qquad \mathbf{1}_E(x,y)=\mathbf{1}_{E_x}(y)=\mathbf{1}_{E^y}(x)\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\,.$$

给定$x\in\mathbb{R}^p$, 我们考察函数$y\mapsto\mathbf{1}_{E_x}(y)$ 在$\mathbb{R}^q$ 上是否可测, 也即是否$E_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$. 如果$E_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 则有

$$m_q(E_x)=\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_x}(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

进一步, 如果对每个$x\in\mathbb{R}^p$, 都有$E_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 则可以进一步考察函数

$$x\mapsto m_q(E_x)=\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y$$

的可测性以及当可测时其积分的计算问题. 对于截口E^y, 上述问题和过程是一样的.

下面的命题表明, 假如$E\subset\mathbb{R}^{p+q}$是$p+q$ 维L-可测集, 即$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$, 则上述问题的回答都至少是“几乎”肯定的.

【命题2.6.1】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$. 则$E$具有下列性质:

(i) 对几乎所有$x\in\mathbb{R}^p$ 都有$E_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$,

对几乎所有$y\in\mathbb{R}^q$ 都有$E^y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$.

(ii) $x\mapsto m_q(E_x)=\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y$是$\mathbb{R}^p$ 上的可测函数,

$y\mapsto m_p(E^y)=\int_{\mathbb{R}^p}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}x$是$\mathbb{R}^q$ 上的可测函数.

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^q} m_p(E^y)\mathrm{d}y = m_{p+q}(E)$$

也即

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

【证】由于两个截口E_x, E^y地位相同, 故只需证明(例如)关于E_x的上述性质. 令$(\mathrm{i})_x, (\mathrm{ii})_x, (\mathrm{iii})_x$ 表示(i),(ii),(iii)中关于截口E_x的性质. 令

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q}) = \{E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q}) \mid E \text{ 具有性质 } (\mathrm{i})_x, (\mathrm{ii})_x, (\mathrm{iii})_x\}.$$

则我们要证明$\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

为此我们将依次证明:

区间和G_δ-型集都属于$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$ 且此时(i) 中的“几乎所有”实为“所有”;

每个零测集属于$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$;

每个可测集属于$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

首先由截口的定义容易验证：对任意集合$E_k, A, B, \subset \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 和任意$x\in\mathbb{R}^p$ 有

$$(\bigcup_{k\ge1} E_k)_x = \bigcup_{k\ge1}(E_k)_x, \qquad (\bigcap_{k\ge1} E_k)_x = \bigcap_{k\ge1}(E_k)_x\,,$$

$$(A\setminus B)_x = A_x\setminus B_x, \qquad A\subset B \Longrightarrow A_x\subset B_x\,.$$

此外, 空集的截口是空集.

设$Q = I\times J$ 是$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$ 中的任一区间. 则

$$Q_x = \begin{cases} J & \text{if} \quad x\in I \\ \emptyset & \text{if} \quad x\notin I \end{cases}$$

所以$Q_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ for all $x\in\mathbb{R}^p$. 同时由

$$m_q(Q_x) = \begin{cases} m_q(J) & \text{if} \quad x\in I \\ 0 & \text{if} \quad x\notin I \end{cases}$$

可知$x\mapsto m_q(Q_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测且

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(Q_x)\mathrm{d}x = \int_I m_q(J)\mathrm{d}x = m_p(I)m_q(J) = |I||J| = |Q| = m_{p+q}(Q)\,.$$

所以$Q \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

设$\Omega \subset \mathbb{R}^{p+q}$ 是任一开集. 由开集分解定理有$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ 其中Q_k 是互不相交的(左闭右开的) 区间. 由

$$\Omega_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (Q_k)_x \,, \quad x \in \mathbb{R}^p \,.$$

知$\Omega_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ for all $x \in \mathbb{R}^p$. 同时由Q_k 互不相交知截口$(Q_k)_x$ 也互不相交. 于是由可加性得

$$m_q(\Omega_x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_q((Q_k)_x) \,, \quad x \in \mathbb{R}^p \,.$$

因每个函数$x \mapsto m_q((Q_k)_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测, 故$x \mapsto m_q(\Omega_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 对$m_q(\Omega_x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_q((Q_k)_x)$ 逐项积分得到

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(\Omega_x) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} m_q((Q_k)_x) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} m_{p+q}(Q_k) = m_{p+q}(\Omega) \,.$$

所以$\Omega \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

设$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ 其中$\Omega_k \subset \mathbb{R}^{p+q}$ 是开集且$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \dots$. 由$\Omega_k \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$ 有: $H_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\Omega_k)_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ for all $x \in \mathbb{R}^p$, 且$(\Omega_1)_x \supset (\Omega_2)_x \supset (\Omega_3)_x \supset \dots$.

现假设Ω_1 有界. 则截口$(\Omega_1)_x$ 也有界. 因此由测度的单调收敛定理$\Longrightarrow$

$$m_q(H_x) = \lim_{k \to \infty} m_q((\Omega_k)_x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p \,.$$

因可测函数的极限函数还是可测函数, 故函数$x \mapsto m_q(H_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 注意Ω_1 有界$\Longrightarrow$ 函数$x \mapsto m_q((\Omega_1)_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上L-可积:

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q((\Omega_1)_x) \mathrm{d}x = m_{p+q}(\Omega_1) < \infty \,.$$

因$m_q((\Omega_k)_x) \le m_q((\Omega_1)_x)$ 故由LDC 和测度的单调收敛定理得

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x) \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^p} m_q((\Omega_k)_x) = \lim_{k \to \infty} m_{p+q}(\Omega_k) = m_{p+q}(H) \,.$$

如果Ω_1 无界, 则考虑截断逼近: 令

$$H_n = H \cap (-n,n)^{p+q} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{k,n}, \quad \Omega_{k,n} = \Omega_k \cap (-n,n)^{p+q}, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

此时对每个$n \in \mathbb{N}$ 和$x \in \mathbb{R}^p$ 都有$(H_n)_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$. 易见

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots \,, \quad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

从而有

$$(H_1)_x \subset (H_2)_x \subset (H_3)_x \subset \cdots, \quad H_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H_n)_x \,.$$

因此对每个$x \in \mathbb{R}^p$ 都有$H_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(H_n)_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$; 同时由测度的单调收敛定理知$m_q(H_x) = \lim\limits_{n\to\infty} m_q((H_n)_x)$. 因可测函数的极限函数还是可测函数, 故这表明$x \mapsto m_q(H_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 于是由Levi 单调收敛定理和测度的单调收敛定理得到

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} m_q((H_n)_x) = \lim_{n\to\infty} m_{p+q}(H_n) = m_{p+q}(H) \,.$$

所以$H \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

设$E \subset \mathbb{R}^{p+q}$为零测集. 由Lebesgue 可测集的结构知, 存在一列递减的开集$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \cdots$ 使得$E \subset H := \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ 且$m_{p+q}(H) = 0$. 上面已证明了$H \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$. 因此

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x)\mathrm{d}x = m_{p+q}(H) = 0 \,.$$

由此可知$m_q(H_x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^p$. 但$E_x \subset H_x$, 故$m_q(E_x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^p$. 意即对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$, E_x 是$\mathbb{R}^q$ 中的零测集. 因此对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$, $E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$. 显然函数$x \mapsto m_q(E_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测(几乎处处$= 0$). 所以$E \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

最后设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$为一般集合. 由Lebesgue 可测集的结构知, 存在一列递减的开集$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \cdots$ 和一个零测集Z 使得$E = H \setminus Z$, 其中$H := \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. 上面已证明了$H, Z \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$. 因此由$E_x = H_x \setminus Z_x$ 知对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$ 有$H_x, Z_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ 且$m_q(Z_x) = 0$. 所以对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$ 有$E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ 且$m_q(E_x) = m_q(H_x)$. 因此函数$x \mapsto m_q(E_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 再借助$H \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$ 得到

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x)\mathrm{d}x = m_{p+q}(H) = m_{p+q}(E) \,.$$

所以$E \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$. 命题至此证毕. $\square$

【命题2.6.2(乘积集合的可测性和测度)】

设$p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p), B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 则$A \times B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$ 且

$$m_{p+q}(A \times B) = m_p(A) m_q(B).$$

【证】根据Lebesgue 可测集的结构我们有分解:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{p,i} \bigcup Z_p \,, \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{q,i} \bigcup Z_q \,,$$

$$\Longrightarrow A\times B=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_{p,i}\times K_{q,j})\bigcup(A\times Z_q)\bigcup(Z_p\times B)\,.$$

其中$K_{p,i}\subset\mathbb{R}^p, K_{q,j}\subset\mathbb{R}^q$ 均为紧集, $Z_p\subset\mathbb{R}^p, Z_q\subset\mathbb{R}^q$ 是L-零测集. 因$K_{p,i}\times K_{q,j}$ 是$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\mathbb{R}^{p+q}$ 中的紧集从而是L-可测集, 故可数个紧集的并$\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_{p,i}\times K_{q,j})$ 是$\mathbb{R}^{p+q}$ 中的L-可测集. 而由**命题1.4.7(Lebesgue零测集的基本性质)**知$A\times Z_q, Z_p\times B$ 是$\mathbb{R}^{p+q}$ 中的L- 零测集. 所以$A\times B$ 是$\mathbb{R}^{p+q}$ 中的L-可测集.

为计算$m_{p+q}(A\times B)$, 注意

$$\mathbf{1}_{A\times B}(x,y)=\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\mathbb{R}^{p+q}$$

因此由**命题2.6.1** 有

$$\begin{aligned}m_{p+q}(A\times B)&=\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{A\times B}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\mathbf{1}_B(y)\int_{\mathbb{R}^p}\mathbf{1}_A(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q}m_p(A)\mathbf{1}_B(y)\mathrm{d}y\\&=m_p(A)\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_B(y)\mathrm{d}y=m_p(A)m_q(B).\qquad\Box\end{aligned}$$

【Fubini 定理】设$p,q\in\mathbb{N}$, $X\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^p), Y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 并设$f(x,y)$ 是$(x,y)\in X\times Y$ 的广义实值函数或复值函数. 若f 在$X\times Y$ 上L-非负可测或者$f\in L^1(X\times Y)$, 则有

$$\iint_{X\times Y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.\tag{2.6.1}$$

这里关于f分别对x和y的可测性以及内层积分$x\mapsto\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\,, y\mapsto\int_X f(x,y)\mathrm{d}x$的可测性有如下详细结果:

(I) 若f 在$X\times Y$ 上非负可测, 则

(I.1) 对于几乎所有$x\in X$, 函数$y\mapsto f(x,y)$ 在Y 上非负可测;

对于几乎所有$y\in Y$, 函数$x\mapsto f(x,y)$ 在X 上可测.

(I.2) 两个内层积分

$$x\mapsto\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\,,\quad y\mapsto\int_X f(x,y)\mathrm{d}x$$

分别在X 上和Y 上非负可测.

(II) 若$f\in L^1(X\times Y)$, 则

(II.1) 对于几乎所有$x\in X$, 函数$y\mapsto f(x,y)$ 在Y 上L-可积;

对于几乎所有$y\in Y$, 函数$x\mapsto f(x,y)$ 在X 上L-可积.

(II.2) 两个内层积分

$$x\mapsto\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\,,\quad y\mapsto\int_X f(x,y)\mathrm{d}x$$

分别在X 和Y 上L-可积.

【注】

1. 由上一命题和$X\times Y\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\mathbb{R}^{p+q}$ 知$X\times Y$ 是$\mathbb{R}^{p+q}$中的Lebesgue 可测集, 即$X\times Y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$.

2. 双重积分符号$\iint_{X\times Y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint_{X_1\times X_2}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ 等等, 只是习惯写法, 它们本身还是多元整体积分, 而不是累次积分(虽然有提示累次积分的作用). 因此可以把它们还原成以前的写法, 例如

$$\iint_{X_1\times X_2}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_{X_1\times X_2}f(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q,\qquad \mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\text{ 为}p+q\text{维的}L\text{- 测度元.}$$

3. Fubini 定理不光是处理累次积分的, 它还给出了多元可测函数的"偏" 可测性! 这种偏可测性不仅保证了累次积分有意义, 而且有其它用途.

4. 累次积分的另一常用写法为

$$\int_X\mathrm{d}x\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y:=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,\tag{2.6.2}$$

$$\int_X\mathrm{d}y\int_Y f(x,y)\mathrm{d}x:=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\tag{2.6.3}$$

这个写法的优点是既保持了累次结构和顺序又不用加括号, 因此适于多层累次积分的表示. 以上两种写法经常同时使用. 初学时建议先使用加括号的形式以确保层次清楚, 待熟悉之后再使用不加括号的形式.

5. 当被积函数$f\geq 0$ 时, Fubini 定理也称为Tonelli 定理. 所以有些教科书将非负可测函数的Fubini 定理称为Fubini-Tonelli 定理.

6. 对于$X \times Y$ 上的非负可测函数$f(x,y)$, 根据Fubini 定理, 内层积分$F_f(x) := \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$ 对所有$x \in X \setminus Z$ 存在, 其中Z 是一个零测集. 如果我们在Z 上对F_f 补充定义, 例如当Z 中的每一点都是$X \setminus Z$ 的极限点时定义

$$F_f(x) := \liminf_{X \setminus Z \ni \tilde{x} \to x} F_f(\tilde{x}), \quad x \in Z.$$

或对一般情形干脆定义

$$F_f(x) := 0, \quad x \in Z.$$

则F_f 在X 上处处有定义. 结论(I.2) 的精确说法是: 补充定义后的函数F_f 在X 上非负可测. 因零测集对积分没有贡献, 故

$$\int_X F_f(x)\mathrm{d}x = \int_{X \setminus Z} \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

同样由于Z 是零测集, 我们可以将F_f 在$x \in Z$ 处的值**形式上**仍记为$\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$, 从而有

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{X \setminus Z} \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

对于$f \in L^1(X \times Y)$ 的情形, 因$f(x)$ 的实部$\mathrm{Re}(f(x))$、虚部$\mathrm{Im}(f(x))$的正、负部$\mathrm{Re}^{\pm}(f(x)), \mathrm{Im}^{\pm}(f(x))$都是$X \times Y$ 上的非负可测函数, 所以上述修正过程可用于$\int_Y \mathrm{Re}^{\pm}(f(x))\mathrm{d}y$ 和$\int_Y \mathrm{Im}^{\pm}(f(x))\mathrm{d}y$.

实际上, 根据可测函数的性质我们知道, 可测函数可以在一个零测集上没有定义, 这是因为在零测集上无论怎样补充定义或任意修改其值, 都不影响可测性. 因此, 由于零测集对积分无贡献, 无论是否做上述修正都不影响Fubini定理的结论.

【Fubini 定理的证明】如果将$f(x,y)$零延拓到$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上, 也即以

$$\widetilde{f}(x,y) = \mathbf{1}_{X \times Y}(x,y) f(x,y) = \mathbf{1}_X(x)\mathbf{1}_Y(y) f(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

代替$f(x,y)$, 则我们可以不失一般性地假定$X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q$.

由于Fubini 定理中两个累次积分和相应的可测性地位对称, 我们只需就其中一种累次积分和相关的可测性进行证明即可.

(I) 非负可测的情形. 设$f(x,y)$ 在$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上非负可测. 由非负可测函数的级数表示, 在一列常数$0 < c_k < \infty$和可测集$E_k \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 使得

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{E_k}(x,y) \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q.$$

对每个E_k, 由**命题2.5.1**, 存在零测集$Z_k\subset\mathbb{R}^p$ 使得对每个$x\in\mathbb{R}^p\setminus Z_k$, 截口$(E_k)_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 且函数

$$x\mapsto F_k(x):=m_q((E_k)_x)=\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}y$$

在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测. 此外还有

$$\int_{\mathbb{R}^p}F_k(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x=\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

令$Z=\bigcup_{k=1}^{\infty}Z_k$, 则$Z$ 是$\mathbb{R}^p$ 中的零测集且$\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus Z$, 所有函数$y\mapsto\mathbf{1}_{E_k}(x,y)$ 都在$\mathbb{R}^q$ 上非负可测. 因此由非负可测的函数级数是可测函数知$\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus Z$, 函数

$$y\mapsto f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x,y)$$

在$\mathbb{R}^q$ 上非负可测. 应用非负可测函数的逐项积分有

$$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(x)\,,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus Z\,.$$

同理, 由于所有函数$F_k\,(k=1,2,...)$ 都在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测且零测集不影响可测性, 所以函数

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(x)$$

在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测并由非负可测函数级数的逐项积分得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^p}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{\mathbb{R}^p}F_k(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

(II) 可积的情形. 设实值函数$f\in L^1(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$. 因$f$ 的正、负部f^+,f^- 都是非负可测函数, 故上面第(I) 部分对于f^+ 和f^- 成立. 又因$f^\pm\le|f|$, 故

$$\int_X\mathrm{d}x\int_Y f^\pm(x,y)\mathrm{d}y=\iint_{X\times Y}f^\pm(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\,.\tag{2.6.4}$$

因此存在零测集$Z^\pm\subset\mathbb{R}^p$ 使得内层积分存在有限:

$$\int_{\mathbb{R}^q}f^\pm(x,y)\mathrm{d}y<\infty\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus Z^\pm\,.$$

因可积函数的线性组合还是可积函数, 故

$\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus(Z^+\cup Z^-)\,,\quad$ 函数$y\mapsto f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y)$ 在$\mathbb{R}^q$ 上L-可积,

又由第(I)部分和可积性(2.6.4)有: 内层积分

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\,, \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y$$

在$\mathbb{R}^p$ 上L-可积, 因此内层积分

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y$$

在$\mathbb{R}^p$ 上L-可积. 于是有

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f^+\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f^-\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f^+\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^q} f^-\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} [f^+(x,y) - f^-(x,y)]\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

最后设复值函数$f \in L^1(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. 因$f$ 的实部$\mathrm{Re}(f)$ 和虚部$\mathrm{Im}(f)$ 都是实值可积函数, 故将上面关于实值可积函数的性质应用于$\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$, 并根据复值函数的积分的定义即知定理中的性质(II) 和(2.6.1) 对于复值可积函数也成立. $\square$

作为Fubini 定理的重要推论, 下面三个性质在判断整体可积方面是经常使用的.

【Fubini 定理的推论1】设$p, q \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p), Y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 并设$f(x,y)$ 是$X \times Y$ 上的实值或复值可测函数, 满足

$$\text{或者}\ \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x < \infty, \quad \text{或者}\ \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty.$$

则f 在$X \times Y$ 上L-可积, 即$f \in L^1(X \times Y)$. 因此f 具有Fubini 定理中的所有性质(即f具有部分可测性且重积分等于累次积分的叠加).

【证】将Fubini 定理应用于非负可测函数$|f(x,y)|$ 有

$$\iint_{X\times Y} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty\,.$$

因f 已在$X \times Y$ 上可测, 故$f \in L^1(X \times Y)$. $\square$

下面例子说明Fubini定理中的条件—— 整体可积或整体非负可测——不能再减弱.

【例】设

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1)\,.$$

则f 连续从而可测. 同时有

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\,,\quad x\in(0,1)\,;\quad \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = \frac{-1}{1+y^2}\,,\quad y\in(0,1)$$

因此

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},\quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}\,.$$

因此

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \ne \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

根据Fubini 定理知$f(x,y)$ 必定不是整体可积的, 也即必定有

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty\,.$$

【证】对任意$0<x,a\le 1$ 计算

$$\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^a \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y = \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=a} = \frac{a}{x^2+a^2}.$$

有这一结果有

$$\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(y,x)\mathrm{d}x = -\frac{a}{y^2+a^2}\,.$$

取$a=1$就得到例题中两个单层积分的结果.

为证f 在$(0,1)\times(0,1)$ 上不可积, 我们取$a=x\in(0,1)$. 此时有

$$\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2x} \Longrightarrow \int_0^1 |f(x,y)|\mathrm{d}y \ge \int_0^x |f(x,y)|\mathrm{d}y \ge \frac{1}{2x}$$
$$\Longrightarrow \int_0^1\left(\int_0^1 |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = +\infty\,.$$

因此由非负可测函数的Fubini 定理有

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\int_0^1 |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = +\infty\,. \qquad \Box$$

【**注**】Fubini 定理的一个大前提是函数$(x,y)\mapsto f(x,y)$ 的整体可测性! 这一点有时容易被忽略. 相关的问题是：如果对于几乎所有$x\in X$, 函数$y\mapsto f(x,y)$ 在Y 上非负可测; 同时对于几乎所有$y\in Y$, 函数$x\mapsto f(x,y)$ 在X 上可测, 这时函数$(x,y)\mapsto f(x,y)$ 一定整体可测吗？两个特殊情形是

1° 若$f(x,y)$ 关于一个变量连续, 关于另一个变量可测, 则$(x,y)\mapsto f(x,y)$ 可测. 这是经典习题, 参见本节作业题**1.**

2° 若$f(x), g(y)$ 分别在X 和X 上可测, 则$(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ 可测. 这是下面推论中的结论之一.

【Fubini定理的推论2】设$X\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^p), Y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$.

(a) 设实值或复值函数$f(x), g(y)$ 分别在X 和Y 上可测. 则函数$(x,y)\mapsto f(x)$, $(x,y)\mapsto g(y)$ 都是$X\times Y$ 上的可测函数. 因此线性组合$\alpha f(x)+\beta g(y)$ 和乘积$f(x)g(y)$ 也都是$X\times Y$ 上的可测函数.

则函数$(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ 在$X\times Y$ 上可测. 特别分别取$f(x)\equiv 1, g(y)\equiv 1$ 知

$$(x,y)\mapsto g(y)\ \text{ 和 }\ (x,y)\mapsto f(x)\,\text{都在}\,X\times Y\ \text{ 上可测.}$$

(b) 若f, g 非负或$f\in L^1(X), g\in L^1(Y)$, 则

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_Y g(y)\mathrm{d}y\,. \tag{2.6.5}$$

特别有

$$m_{p+q}(X\times Y)=m_p(X)m_q(Y)\,. \tag{2.6.6}$$

【证】首先由**命题2.6.2**知$X\times Y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$.

(a): 先设f 是实值的. 定义$F(x,y)=f(x)$, $(x,y)\in X\times Y$. 则对任意$t\in\mathbb{R}$ 我们有

$$(X\times Y)(F>t)=X(f>t)\times Y\,.$$

因$X(f>t)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$, 故由乘积集合的可测性知$(X\times Y)(F>t)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$ 中的可测集. 所以F 是$X\times Y$ 上的可测函数, 意即$(x,y)\mapsto f(x)$是$X\times Y$ 上的可测函数。当f是复值函数时, 将实值的结论用于f的实部虚部即知$(x,y)\mapsto f(x)$ 是$X\times Y$ 上的可测函数. 同理可证$(x,y)\mapsto g(y)$ 是$X\times Y$ 上的可测函数.

(b): 假设f, g 非负. 则由Fubini 定理有

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X f(x)\Big(\int_Y g(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x=\Big(\int_X f(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_Y g(y)\mathrm{d}y\Big)\,.$$

若$f\in L^1(X), g\in L^1(Y)$, 则应用上面结果于$|f(x)|, |g(y)|$ 得

$$\iint_{X\times Y}|f(x)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Big(\int_X|f(x)|\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_Y|g(y)|\mathrm{d}y\Big)<\infty\,.$$

所以$f(x)g(y)$ 在$X\times Y$ 上L-可积. 于是由Fubini 定理可知(2.6.5) 成立. 最后由$\mathbf{1}_{X\times Y}(x,y)=\mathbf{1}_X(x)\mathbf{1}_Y(y)$ 即得(2.6.6). □

【非乘积型集合上的重积分化累次积分】下面这个推论告诉我们, 对于一般可测集(特别对于非乘积型的可测集)上的重积分, 怎样把重积分化成累次积分:

【Fubini 定理的推论3】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1(E)$ 或f 在E 上非负可测. 假设$E \subset X \times Y$ 其中$X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q$ 为可测集, $p+q=d$. 则有

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_Y \mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X \mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

利用截口记号和

$$\mathbf{1}_E(x,y) = \mathbf{1}_{E_x}(y) = \mathbf{1}_{E^y}(x)$$

上式也可写成

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_{E_x} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_{E^y} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

满足$E \subset X \times Y$的集合X, Y包括它们的维数, 可以根据E的结构和需要任意选取.

【证】将Fubini 定理应用于f的零延拓$\mathbf{1}_E(x,y)f(x,y), (x,y) \in X \times Y$, 即知所证成立.
$\square$

【例】设$d \ge 2, X \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 为L-可测集, $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ 是L-可测函数(例如φ, ψ 都在X 上连续). 令

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \mid x \in X,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

则E 是L-可测集并且当$f \in L^1(E)$ 或f在E上非负L-可测时有

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

【证】令$g(x,y) = \varphi(x) - y,\ h(x,y) = \psi(x) - y,\ (x,y) \in X \times \mathbb{R}$, 则由**Fubini定理的推论2 (a)**知g, h都是$X \times \mathbb{R}$上的L-可测函数. 由E的定义易见

$$E = (X \times \mathbb{R})(g \le 0) \cap (X \times \mathbb{R})(h \ge 0)$$

因此E是L-可测集. 易见

$$\mathbf{1}_E(x,y) = \mathbf{1}_X(x)\mathbf{1}_{\{\varphi(x) \le y \le \psi(x)\}} \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^d$$

特别有

$$\mathbf{1}_E(x,y) = \mathbf{1}_{\{\varphi(x) \le y \le \psi(x)\}} \qquad \forall\,(x,y) \in X \times \mathbb{R}.$$

应用**Fubini定理**即知当$f \in L^1(E)$ 或f在E上非负L-可测时有

$$
\begin{aligned}
&\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{X\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_X \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y = \int_X \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\varphi(x)\le y\le \psi(x)\}} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_X \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

□

【**强调**】为了导出各种各样的累次积分,同学们务必认真学习特征函数的性质并灵活且准确地使用这些性质. 这件事并不难, 但效益巨大! 特征函数的表示举例:

$$
\begin{aligned}
&0 \le a < b, p > 0 \implies \mathbf{1}_{(a,b]}(t) = \mathbf{1}_{\{a<t\le b\}} = \mathbf{1}_{\{a^p<t^p\le b^p\}} = \mathbf{1}_{\{a<t\}}\mathbf{1}_{\{t\le b\}} = \cdots; \\
&0 \le f(x) \le b \implies f(x) = \int_0^{f(x)} \mathrm{d}t = \int_0^b \mathbf{1}_{\{0\le t\le f(x)\}}\mathrm{d}t = \int_0^b \mathbf{1}_{\{t\le f(x)\}}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

最后的等号是因为积分区间$[0,b] \ni t$ 的限制已经蕴含$0 \le t$. 还有

$$
m(E(a<f\le b)) = \int_E \mathbf{1}_{E(a<f\le b)}(x)\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_{\{a<f(x)\le b\}}\mathrm{d}x
$$

等等.

【**例**】再看特征函数的应用. 为了改变累次积分的顺序, 可以先画出整体重积分集合的图形, 然后根据图形确定累次积分的内层积分区间和外层积分区间。但是当你很难画出图形时(例如积分区域是高维集合), 则唯一可行的办法是使用特征函数. 例如试改变下面累次积分的顺序:

$$
I := \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{3y} f(x,y)\mathrm{d}x.
$$

这里假定f在相应的二重积分区域上非负可测或可积.

【解】将被积函数作零延拓并使用特征函数, 我们有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{y^2\le x\le 3y\}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^6 \mathbf{1}_{\{y^2\le x\le 3y\}} f(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \iint_{[0,6]\times[0,2]} \{\cdots\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{ 然后用Fubini 定理保证可换序}) \\
&= \int_0^6 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathbf{1}_{\{y^2\le x\le 3y\}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^6 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathbf{1}_{\{\frac{x}{3}\le y\le\sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\min\{2,\sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y \qquad (\text{到此已可以结束})
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\min\{2,\sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_4^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\min\{2,\sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_4^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

从这个积分顺序不难画出整体积分区域的图形(图示). $\square$

下面的例题及其证明再次展示特征函数和Fubini 定理的作用.

【例】 设$E \subset \mathbb{R}^d$ 为L-可测集, $f : E \to [0,+\infty)$为L-可测函数, $b \in (0,+\infty)$, 使得$m(E(f \le b)) < \infty$ 且函数$t \mapsto F(t) := m(\mathbb{R}^d(f \le t))$属于$C^1([0,b])$. 证明: 对任意$p \in (0,+\infty)$ 有

$$\int_{E(f\le b)} (f(x))^p \mathrm{d}x = \int_0^b t^p F'(t)\mathrm{d}t.$$

【证】 首先对任意$0 \le s < t \le b$ 有$E(f \le s) \subset E(f \le t)$ 从而有$m(E(f \le s)) \le m(E(f \le t)) \le m(E(f \le b)) < \infty$, 因此$F(t)$处处有限且单调不减. 同时由

$E(s < f \le t) = E(f \le t) \setminus E(f \le s)$ 有

$$m(E(s < f \le t)) = m(E(f \le t)) - m(E(f \le s)) = F(t) - F(s).$$

下面利用特征函数和Fubini 定理 推导和计算积分:

$$\int_{E(f\le b)} (f(x))^p \mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}} (f(x))^p \mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}} \Big(\int_0^{(f(x))^p} \mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}x$$
$$= \int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}} \Big(\int_0^{b^p} \mathbf{1}_{\{0\le s<(f(x))^p\}} \mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{b^p} \Big(\int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}} \mathbf{1}_{\{0\le s<(f(x))^p\}} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}s \qquad \text{(by Fubini Theorem)}$$
$$= \int_0^{b^p} \Big(\int_E \mathbf{1}_{\{0\le s^{1/p}<f(x)\le b\}} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}s = \int_0^{b^p} \Big(\int_E \mathbf{1}_{\{s^{1/p}<f(x)\le b\}} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}s$$

(这是因为外层积分的限制$s \in [0,b^p]$ 已经蕴含$0 \le s^{1/p}$)

$$= \int_0^{b^p} m(E(s^{1/p} < f \le b))\mathrm{d}s = \int_0^{b^p} (F(b) - F(s^{1/p}))\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^{b^p} \Big(\int_{s^{1/p}}^b F'(t)\mathrm{d}t \Big) \mathrm{d}s = \int_0^{b^p} \Big(\int_0^b F'(t) \mathbf{1}_{\{s^{1/p}\le t\le b\}} \mathrm{d}t \Big) \mathrm{d}s$$
$$= \int_0^b F'(t) \Big(\int_0^{b^p} \mathbf{1}_{\{s^{1/p}\le t\le b\}} \mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t = \int_0^b F'(t) \Big(\int_0^{b^p} \mathbf{1}_{\{s\le t^p\}} \mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t$$

(这是因为外层积分的限制$t \in [0,b]$ 已经蕴含$t \le b$)

$$= \int_0^b F'(t) t^p \mathrm{d}t. \qquad \square$$

【例(分部积分)】设$\mathbb{R}^d$上的实值或复值函数f处处有偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_j}$且$f, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x = 0.$$

因此一般地, 设$\mathbb{R}^d$上的实值或复值函数f, g处处有偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial x_j}$ 且$fg, \frac{\partial f}{\partial x_j} g, f\frac{\partial g}{\partial x_j}$皆在$\mathbb{R}^d$上可积, 则成立**分部积分**:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} g(x) \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x.$$

【证】我们将使用平移不变性和Fubini 定理. 令$\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^d$为单位向量, 其第$j$个分量为1其余分量为0. 应用关于非负可测函数的Fubini 定理和平移不变性有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x+t\mathbf{e}_j)) \Big| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x+t\mathbf{e}_j)) \Big| \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big)(x+t\mathbf{e}_j) \Big| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big)(x) \Big| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \Big| \mathrm{d}x < \infty.
\end{aligned}$$

据这一整体可积性和部分可积性, 我们可以使用整体可积函数的Fubini 定理和Newton-Lebinitz 公式, 后者是因为从上面整体可积性和Fubini 定理知对几乎所有$x \in \mathbb{R}^d$, 偏导函数$t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x+t\mathbf{e}_j)) = (\frac{\partial f}{\partial x_j})(x+t\mathbf{e}_j)$ 在$[0,1]$上可积, 从而成立Newton-Lebinitz 公式：

$$f(x+\mathbf{e}_j) - f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x+t\mathbf{e}_j)) \mathrm{d}t \qquad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

根据这些和积分的平移不变性有

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} [f(x+\mathbf{e}_j) - f(x)] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x+t\mathbf{e}_j)) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\frac{\partial f}{\partial x_j})(x+t\mathbf{e}_j) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x.$$

对于题目中的一般情形, 据假设易见可将上述结果用于fg从而得到

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j}(fg) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} g(x) \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x. \qquad \square$$

- **函数的卷积(convolution)**

Fubini定理的一个重要应用是建立函数的卷积：设f,g 在$\mathbb{R}^d$ 上皆非负可测或$f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则称

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\,,\quad x\in\mathbb{R}^d$$

为函数f 和g 的卷积(convolution).

需要说明定义的合理性：设f,g 在$\mathbb{R}^d$ 上可测. 则由**Fubini定理的推论2(a)**知$(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ 在$\mathbb{R}^{2d}=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上可测. 因线性变换$(x,y)\to(x-y,y)$可逆, 故它保持集合和函数的可测性, 因此函数$(x,y)\mapsto f(x-y)g(x)$ 在$\mathbb{R}^{2d}=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上可测(见上面可测函数例题). 当f,g 皆非负时, 由Fubini 定理, 函数$x\mapsto(f*g)(x)$ 在$\mathbb{R}^d$ 上非负可测且有(重积分化累次积分)

$$\int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y=\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}g(y)\mathrm{d}y\right) \tag{2.6.7}$$

这里对内层积分用到了全空间积分的平移不变性:

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x\qquad\forall\,y\in\mathbb{R}^d.$$

当f,g 不一定非负时, 考虑绝对值(!!) $|f(x)|,|g(y)|$, 应用非负情形的上述结果有

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\mathrm{d}y\right).$$

由此可见, 若$f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}<\infty\,.$$

这同时说明$(x,y)\mapsto f(x-y)g(y)$ 在$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上L-可积, 于是应用Fubini 定理知函数$x\mapsto(f*g)(x)$ 在$\mathbb{R}^d$ 上L-可积且(2.6.7) 成立. 此时还有$|f*g|\le|f|*|g|$ 从而由上面推导有$f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且

$$\|f*g\|_{L^1}\le\|\,|f|*|g|\,\|_{L^1}=\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\,. \tag{2.6.8}$$

根据卷积的定义和积分换元公式(反射加平移) 易见卷积**可交换**：$f*g=g*f$, 即

$$(f*g)(x)=(g*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\,.$$

卷积的意义和作用 —— 卷积是由积分定义的函数, 而积分是平均效应, 好坏分享, 因此卷积后的函数(即由卷积定义的函数) 便具某种连续性或更好的性质, 如变得光滑. 卷积还有重要的代数性质, 这在下面学习Fourier 变换时可以看到.

下面用函数的卷积和Fubini 定理研究可测集的线性加(减)法性质.

【集合的线性加法】设$A, B \subset \mathbb{R}^d$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 定义

$$\alpha A + \beta B = \{\alpha x + \beta y \mid x \in A,\, y \in B\}.$$

我们特别感性趣的是加减法:

$$A + B = \{x + y \mid x \in A,\, y \in B\}, \quad A - B = \{x - y \mid x \in A,\, y \in B\}.$$

问题1: 若A, B都是$\mathbb{R}^d$中的Borel 集, 它们的加法$A + B$也是Borel 集吗? 回答是否定的. 见论文

P. Erdös & A. H. Stone, On the Sum of Two Borel Sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1970, 25 (2):304-306.

Abstract: It is shown that the linear sum of two Borel subsets of the real line need not be Borel, even if one of them is compact and the other is G_δ. This result is extended to a fairly wide class of connected topological groups.

问题2: 若A, B都是$\mathbb{R}^d$中的L-可测集, 它们的加法$A + B$也是L-可测集吗? 至少对偶数维$d = 2p \ge 2$的情形, 回答是否定的[参考周民强《实变函数解题指南》p270 例8(3)]:

首先易见若$W \subset \mathbb{R}^p$不是L-可测集, 则$W \times W$便不是$\mathbb{R}^{2p}$中的L-可测集. 否则, 若$W \times W$是$\mathbb{R}^{2p}$中的L-可测集, 则由Fubini 定理知存在$x_0 \in W$ 使得截口$(W \times W)_{x_0} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid (x_0, y) \in W \times W\}$ 是$\mathbb{R}^p$中的L-可测集。而显然有$(W \times W)_{x_0} = W$, 这就得出W是$\mathbb{R}^p$中的L-可测集, 矛盾。

设$W \subset \mathbb{R}^p$不是L-可测集, $0 \in \mathbb{R}^p$中的原点, $A = (W \times \{0\}) \cup (\{0\} \times W)$. 则易见

$$A + A = [\,(W + W) \times \{0\}\,] \cup [\,\{0\} \times (W + W)\,] \cup (W \times W).$$

上式右边$(W + W) \times \{0\}$ 和$\{0\} \times (W + W)$ 都是$\mathbb{R}^{2p}$中的零测集, 而第三个$W \times W$ 不是$\mathbb{R}^{2p}$中的L-可测集. 所以$A + A$也不是$\mathbb{R}^{2p}$中的L-可测集。

问题3: 若A, B都是$\mathbb{R}^d$中的零测集, 那么$A + B$ 也是零测集吗? 回答是否定的。只需对$d = 1$的情形给出反例。设C是$[0, 1]$中的Cantor 集, 即

$$C = \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \;\Big|\; a_k \in \{0, 2\},\; k = 1, 2, 3, ... \Big\}.$$

周知$m(C)=0$. 下证C与自己的线性加法减法都具有正测度:

$$C+C=[0,2],\quad C-C=[-1,1].$$

首先易见$C+C\subset[0,2]$. 任取$x\in[0,2]$, 可写$\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}c_k, c_k\in\{0,1,2\}$. 对任意$k\in\mathbb{N}$, 若$c_k\in\{0,1\}$, 则取$a_k=2c_k, b_k=0$; 若$c_k=2$ 则取$a_k=b_k=2$. 则有$a_k,b_k\in\{0,2\}$ 且$c_k=\frac{a_k+b_k}{2}, k=1,2,3,\dots$. 因此$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}b_k)$ 也即$x=\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}b_k\in C+C$. 因此$[0,2]\subset C+C$. 这证明了$C+C=[0,2]$. 其次来证明$C=1-C$. 事实上对任意$x\in[0,1]$, 写$x=\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}c_k, c_k\in\{0,1,2\}$, 则由$1=2\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}$ 有$1-x=\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}(2-c_k)$. 易见$c_k\in\{0,2\}\iff 2-c_k\in\{0,2\}$. 这就证明了$1-C=C$. 由此得到(据平移的定义)

$$C-C=(C+1-C)-1=(C+C)-1=[0,2]-1=[-1,1].\qquad\square$$

虽然有反例, 但一般性的结论是: 若A,B都是$\mathbb{R}^d$中的测度>0的L-可测集, 那么$A+B$包含开球。特别$A-A$包含一个以0为中心的开球。

【命题2.6.3】设$A,B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$且$m(A)>0, m(B)>0$. 则存在$x_0\in\mathbb{R}^d,\delta>0,r>0$使得 $A+B\supset B(x_0,\delta)$, $A-A\supset B(0,r)$.

【证】由$m(A)=\lim\limits_{n\to\infty}m(A\cap[-n,n]^d), m(B)=\lim\limits_{n\to\infty}m(B\cap[-n,n]^d)$ 知存在$N\in\mathbb{N}$使得$m(A\cap[-N,N]^d)>0, m(B\cap[-N,N]^d)>0$. 因此只需对$A\cap[-N,N]^d, B\cap[-N,N]^d$证明本命题。换言之可以进一步假定$A,B$都是测度有限的。在这一假设下, 特征函数$\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_B$ 都属于$L^1(\mathbb{R}^d)$. 考虑二者的卷积:

$$(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_B(x-y)\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

先证明$(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)$在$\mathbb{R}^d$上连续. 事实上对任意$x_0\in\mathbb{R}^d$ 和$h\in\mathbb{R}^d$ 有

$$\Big|(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)(x_0+h)-(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)(x_0)\Big|=\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_A(y)[\mathbf{1}_B(x_0+h-y)-\mathbf{1}_B(x_0-y)]\mathrm{d}y\Big|$$

$$\le\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_A(y)|\mathbf{1}_B(x_0+h-y)-\mathbf{1}_B(x_0-y)|\mathrm{d}y\le\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{1}_B(x_0+h-y)-\mathbf{1}_B(x_0-y)|\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{1}_B(y+h)-\mathbf{1}_B(y)|\mathrm{d}y\to0\quad\text{as}\quad h\to0.$$

其中趋于零是由于可积函数的平均连续性。所以$(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)$在$\mathbb{R}^d$中每一点连续。

由卷积运算(Fubini定理)和$m(A)>0, m(B)>0$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)(x)\mathrm{d}x=\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_A(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_B(x)\mathrm{d}x\right)=m(A)m(B)>0.$$

因此存在$x_0\in\mathbb{R}^d$使得

$$(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)(x_0)>0.$$

于是由连续性, 存在$\delta>0$ 使得对任意$x\in B(x_0,\delta)$ 有$(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)(x)>0$. 于是对任意$x\in B(x_0,\delta)$ 有

$$(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_B)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_B(x-y)\mathrm{d}y>0.$$

这蕴含存在$y\in\mathbb{R}^d$ 使得$\mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_B(x-y)>0$, 即$y\in A, x-y\in B$. 所以$x=y+x-y\in A+B$. 所以$B(x_0,\delta)\subset A+B$.

对于$A-A$ 的情形, 取$B=-A$ 并取$x_0=0$ 则有

$$(\mathbf{1}_A*\mathbf{1}_{-A})(0)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_{-A}(-y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}[\mathbf{1}_A(y)]^2\mathrm{d}y=m(A)>0.$$

于是上面的结果对于$B=-A$ 和$x_0=0$成立, 即存在$r>0$ 使得$B(0,r)\subset A-A$. $\square$

下面再用函数的卷积和Fubini 定理研究可积函数的卷积逼近。

【命题2.6.4(卷积逼近)】设$K\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 满足$\int_{\mathbb{R}^d}K(x)\mathrm{d}x=1$. 令

$$K_\delta(x)=\delta^{-d}K(\delta^{-1}x),\quad x\in\mathbb{R}^d,\ \ \delta>0.$$

则对任意$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 有

$$\lim_{\delta\to0+}\|K_\delta*f-f\|_{L^1}=0.$$

【证】设$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 由展缩变换和$\int_{\mathbb{R}^d}K(y)\mathrm{d}y=1$ 有

$$\begin{aligned}&(K_\delta*f)(x)-f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(y)f(x-y)\mathrm{d}y-f(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^d}K(y)f(x-\delta y)\mathrm{d}y-f(x)\int_{\mathbb{R}^d}K(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}K(y)[f(x-\delta y)-f(x)]\mathrm{d}y\\&\Longrightarrow\ |(K_\delta*f)(x)-f(x)|\le\int_{\mathbb{R}^d}|K(y)||f(x-\delta y)-f(x)|\mathrm{d}y\\&\Longrightarrow\ \|K_\delta*f-f\|_{L^1}=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|K(y)||f(x-\delta y)-f(x)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^d}|K(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-\delta y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=:\int_{\mathbb{R}^d}|K(y)|\omega_f(\delta y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中
$$\omega_f(h)=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-h)-f(x)|\mathrm{d}x,\quad h\in\mathbb{R}^d.$$
由$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$和可积函数的平均连续性有
$$\lim_{\delta\to0+}\omega_f(\delta y)=0\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^d;\qquad 0\le\omega_f(\delta y)\le 2\|f\|_{L^1}\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^d,\forall\,\delta>0$$
$$\Longrightarrow\ \lim_{\delta\to0+}|K(y)|\omega_f(\delta y)=0,\quad 0\le|K(y)|\omega_f(\delta y)\le2\|f\|_{L^1}|K(y)|\ \ \forall\, y\in\mathbb{R}^d,\forall\,\delta>0.$$
于是对函数族$\{|K(y)|\omega_f(\delta y)\}_{\delta>0}$可以应用连续参量的Lebesgue 控制收敛定理, 从而有
$$\lim_{\delta\to0+}\|K_\delta*f-f\|_{L^1}=\lim_{\delta\to0+}\int_{\mathbb{R}^d}|K(y)|\omega_f(\delta y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}0\mathrm{d}x=0.\qquad\Box$$

【再讲Fubini 定理的一个经典应用】在第一章学习Vitali覆盖引理的应用时, 我们证明了$\mathbb{R}^d$中的任一非空开集可以几乎被可数多个互不相交的闭球覆盖, 即: 若$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为一非空开集, 则存在一列互不相交的闭球$B_k\subset\Omega,k=1,2,3,...,$ 使得$m(\Omega\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=0$. 现在对这列闭球$B_k$, 应用Fubini 定理我们来证明, 若$d\ge2$, 则对每个$p\in\{1,2,...,d-1\}$都有
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(B_k))^p=\infty.$$
我们把证明分为两个一般性的例题:

【例1】设$p,q\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{p+q}=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$. 则有:

(1) 若$E\subset\mathbb{R}^{p+q}$分别是$\mathbb{R}^{p+q}$中的开集/闭集/紧集, 则对任意$x\in\mathbb{R}^p$, 截口
$$E_x=\{y\in\mathbb{R}^q\mid(x,y)\in E\}$$
分别是$\mathbb{R}^q$中的开集/闭集/紧集. [注: 根据规定, 空集同时是开集、闭集、紧集.]

(2) 设$K\subset\mathbb{R}^{p+q}$为非空紧集, $D\subset\mathbb{R}^p$ 是K向$\mathbb{R}^p$的投影, 即
$$D=\{x\in\mathbb{R}^p\mid\exists\, y\in\mathbb{R}^q\ \text{ s.t. }(x,y)\in K\}.$$
则D是紧集且
$$m_p(D)\le C_p(\mathrm{diam}(K))^p$$
其中$C_p=m_p(\mathbb{B}^p)$, $\mathbb{B}^p=\{x\in\mathbb{R}^p\,|\,|x|\le1\}$(单位球), m_p是$\mathbb{R}^p$上的Lebesgue 测度.

【证】(1): 设E是$\mathbb{R}^{p+q}$中的开集. 任取$x\in\mathbb{R}^p$. 可设$E_x\neq\emptyset$. 对任意$y\in E_x$, 由$(x,y)\in E$ 和E开可知存在$\delta>0$ 使得$B_{p+q}((x,y),\delta)\subset E$. 于是当$z\in B_q(y,\delta)$ 时有$|(x,z)-(x,y)|=|z-y|<\delta$ 即$(x,z)\in B_{p+q}((x,y),\delta)$. 因此$(x,z)\in E$ 即$z\in E_x$. 这证明了$B_q(y,\delta)\subset E_x$. 所以E_x是开集. 其余两个的证明也是简单的.

(2): 先证明D是紧集(从而是可测集). 任取序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$. 则由$D$的定义知存在$y_n\in\mathbb{R}^q$使得$(x_n,y_n)\in K, n=1,2,3,...$. 因$K$ 是紧集, 故存在子列$\{(x_{n_j},y_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$和$(x_*,y_*)\in K$使得$(x_{n_j},y_{n_j})\to(x_*,y_*)\,(j\to\infty)$. 这蕴含$x_*\in D$ 且$\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_j}=x_*$. 这表明$D$中的每个序列都有在$D$中收敛的子列. 所以$D$是紧集.

取$(x_0,y_0)\in K$. 则对任意$x\in D$ 存在$y\in\mathbb{R}^q$使得$(x,y)\in K$ 从而有$|x-x_0|\le\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}=|(x,y)-(x_0,y_0)|\le\mathrm{diam}(K)$. 这表明$x\in\overline{B}(x_0,\mathrm{diam}(K))$. 所以$D\subset\overline{B}(x_0,\mathrm{diam}(K))$. 于是得到

$$m_p(D)\le m_p\Big(\overline{B}(x_0,\mathrm{diam}(K)\Big)=C_p(\mathrm{diam}(K))^p.$$

最后的等号用到可测集的平移展缩的测度计算公式和$C_p=m_p(\mathbb{B}^p)$:

$$\overline{B}(x_0,r)=x_0+r\mathbb{B}^p\implies m_p(\overline{B}(x_0,r))=r^pm_p(\mathbb{B}^p).\qquad\Box$$

【例2】设$d\ge2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$为非空开集, $K_j\subset\Omega$ 为非空紧集, $j=1,2,3,...$. 则有下列蕴含关系: 若

$$m\Big(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)=0$$

则对每个$p\in\{1,2,...,d-1\}$都有

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(K_j))^p=\infty.$$

等价地, 若存在$p\in\{1,2,...,d-1\}$使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(K_j))^p<\infty$$

则必有

$$m\Big(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)>0.$$

【证】[参考周民强《实变函数解题指南》p270 例8(2)] 等价地只需证明第二个蕴含关系: 假设存在$p\in\{1,2,...,d-1\}$ 使得$\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(K_j))^p<\infty$, 来证明$m(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j)>$

0. 考虑分解$\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 其中$q=d-p$. 设$D_j\subset\mathbb{R}^p$ 是K_j 向$\mathbb{R}^p$的投影, 即

$$D_j=\{x\in\mathbb{R}^p\,|\,\exists\, y\in\mathbb{R}^q\ \text{ s.t. }\ (x,y)\in K_j\}.$$

由上面例题和假设$\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(K_j))^p<\infty$ 知D_j 是紧集且

$$\sum_{j=1}^{\infty}m_p(D_j)\le C_p\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(K_j))^p<\infty.$$

这里m_p是$\mathbb{R}^p$上的Lebesgue 测度. 令

$$Z=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}D_j.$$

则$m_p(Z)=0$. 设$\Omega_x=\{y\in\mathbb{R}^q\,|\,(x,y)\in\Omega\}$是$\Omega$在$x$的截口. 则由$\Omega$是开集知$\Omega_x$是$\mathbb{R}^q$中的开集. 令

$$E=\{x\in\mathbb{R}^p\,|\,m_q(\Omega_x)>0\}.$$

则由Ω 是$\mathbb{R}^d$中的非空开集和Fubini定理知$x\mapsto m_q(\Omega_x)$ 是$\mathbb{R}^p$上的L-可测函数从而E是$\mathbb{R}^p$中的L-可测集且

$$0<m_d(\Omega)=\int_{\mathbb{R}^p}m_q(\Omega_x)\mathrm{d}x=\int_E m_q(\Omega_x)\mathrm{d}x.$$

这蕴含$m_p(E)>0$. 于是有$m_p(E\setminus Z)=m_p(E)>0$. 再看测度: 由Fubini定理和截口运算有

$$\begin{aligned}m_d\Big(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)&=\int_{\mathbb{R}^p}m_q\Big(\Big(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)_x\Big)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}m_q\Big(\Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x\Big)\mathrm{d}x\\&=\int_E m_q\Big(\Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x\Big)\mathrm{d}x=\int_{E\setminus Z}m_q\Big(\Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x\Big)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

来证明

$$\text{对每个 } x\in E\setminus Z, \text{ 集合 } \Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x\ \text{ 都是}\mathbb{R}^q\text{的非空开集.}\qquad(*)$$

任取$x\in E\setminus Z$. 由Z的定义知存在$i_x\in\mathbb{N}$使得$x\not\in\bigcup_{j=i_x}^{\infty}D_j$. 而由$K_j$的投影$D_j$的定义知: 若$(K_j)_x\neq\emptyset$, 则$x\in D_j$; 因此若$x\not\in D_j$ 则必有$(K_j)_x=\emptyset$. 于是可知当$j\ge i_x$时$(K_j)_x=\emptyset$ 从而有

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x=\bigcup_{j=1}^{i_x}(K_j)_x,\qquad \Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x=\Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{i_x}(K_j)_x.$$

由此易知$(*)$成立. 事实上由K_j 是紧集知其截口$(K_j)_x$也是紧集从而$\bigcup_{j=1}^{i_x}(K_j)_x$是紧集, 因此上式右边$\Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{i_x}(K_j)_x$是开集. 假若它是空集, 则导致$\Omega_x\subset\bigcup_{j=1}^{i_x}(K_j)_x$. 但由$K_j\subset\Omega$ 又有$(K_j)_x\subset\Omega_x$ 从而得到$\Omega_x=\bigcup_{j=1}^{i_x}(K_j)_x$. 这蕴含$\Omega_x$既开又闭从而是全空间: $\Omega_x=\mathbb{R}^q$. 但这不可能, 因为$\bigcup_{j=1}^{i_x}(K_j)_x$ 是紧集. 这个矛盾证明了$(*)$成立.

由$(*)$ 便有

$$m_q\Big(\Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x\Big)>0\quad\forall\,x\in E\setminus Z.$$

再由$m_p(E\setminus Z)>0$即得

$$m_d\Big(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)=\int_{E\setminus Z}m_q\Big(\Omega_x\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_x\Big)\mathrm{d}x>0.$$

□

§2.7. L^1-函数的Fourier 变换和Fourier反演公式

Fourier 变换是一种积分变换, 是研究函数分析性质的最常用最有力的工具之一, 在函数空间、微分方程、信号/图像处理、概率论等研究中有广泛应用。我们在后面学习Hilbert 空间特别是L^2 空间时会系统学习关于Fourier 变换的基本性质。这里, 作为Fubini 定理和已学过其他定理的应用, 我们先学习L^1-函数的Fourier 变换和Fourier 反演公式。

【$L^1(\mathbb{R}^d)$上的Fourier 变换】 设$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$为实值或复值函数, 则称

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R}^d \tag{2.7.1}$$

为f的Fourier 变换, 这里$\xi\cdot x=\langle\xi,x\rangle$ 为向量内积。 $\square$

如果还有$\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则对$\widehat{f}(-\xi)$再取Fourier 变换可重新得到$f$, 即

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(-\xi)e^{-2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi,\quad x\in\mathbb{R}^d$$

即

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi,\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.7.2}$$

公式(2.7.2)称为**Fourier 反演公式**, 即Fourier 变换(2.7.1)的逆变换公式。

需说明: 从下面的命题知, L^1-可积函数的Fourier 变换是连续函数, 因此(2.7.2)蕴含f 在$\mathbb{R}^d$上连续, 然而在一个零测集上修改函数值不影响可积性和积分, 故一般来说(2.7.2)应是几乎处处成立。在证明反演公式前, 先学习L^1-函数的Fourier 变换的基本性质。

【命题2.7.1】 设$f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 并设$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\lambda>0$ 和$h\in\mathbb{R}^d$ 为常量. 则有

(a) L^1上的Fourier 变换的正则性(连续、有界、衰减):

$$\widehat{f}\in C(\mathbb{R}^d),\quad \|\widehat{f}\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^1},\quad \text{and}\quad \lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0.$$

(b) Fourier 变换是线性的:

$$(\alpha f+\beta g)\widehat{\ }(\xi)=\alpha\widehat{f}(\xi)+\beta\widehat{g}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^d.$$

(c) 平移和展缩的Fourier 变换:

$$\lambda^{-d}\widehat{f\Big(\frac{\cdot+h}{\lambda}\Big)}(\xi)=e^{2\pi \mathrm{i}\xi\cdot h}\widehat{f}(\lambda\xi),\qquad \lambda^{-d}\widehat{f}\Big(\frac{\xi+h}{\lambda}\Big)=\widehat{f(\lambda\cdot)}(\xi+h).$$

(d) Fourier 变换把卷积变成普通乘积:

$$\widehat{f*g}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^d\,.$$

(e) 乘法公式:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\widehat{g}(x)\mathrm{d}x.$$

(f) 偏导数关系: 假设$f(x)(1+|x|)$在$\mathbb{R}^d$上可积, 则有

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}\widehat{f}(\xi)=-2\pi\mathrm{i}\,\widehat{x_jf}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^d,\quad j=1,2,...,d.$$

其中ξ_j,x_j 分别是$\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_d),x=(x_1,x_2,...,x_d)$的第$j$个分量.

又若f在$\mathbb{R}^d$上处处有各一阶偏导且$f,\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^d)\,(j=1,2,...,d)$, 则有

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}\,(\xi)=2\pi\mathrm{i}\,\xi_j\widehat{f}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^d,\quad j=1,2,...,d\,.$$

【证】(a): 先证有界性, 它是显然的: 由$|e^{\mathrm{i}\theta}|\equiv1,\theta\in\mathbb{R}$ 有

$$|\widehat{f}(\xi)|\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x=\|f\|_{L^1},\quad \xi\in\mathbb{R}^d.$$

证连续性：对任意$\xi,h\in\mathbb{R}^d$有

$$\begin{aligned}&|e^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+h)\cdot x}-e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}|=|e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}(e^{-2\pi\mathrm{i}h\cdot x}-1)|=|e^{-2\pi\mathrm{i}h\cdot x}-1|\\&\Longrightarrow\quad |\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x)(e^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+h)\cdot x}-e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x})\mathrm{d}x\right|\\&\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|e^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+h)\cdot x}-e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot h}-1|\mathrm{d}x\\&\Longrightarrow\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)|\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{-2\pi\mathrm{i}h\cdot x}-1|\mathrm{d}x,\quad h\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

因

$$\lim_{h\to0}|f(x)||e^{-2\pi\mathrm{i}h\cdot x}-1|=0,\quad |f(x)||e^{-2\pi\mathrm{i}h\cdot x}-1|\le2|f(x)|\qquad \forall\,x\in\mathbb{R}^d$$

故由连续参量的Lebesgue控制收敛定理知

$$\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{-2\pi\mathrm{i}h\cdot x}-1|\mathrm{d}x=0.\quad 所以\quad \lim_{h\to0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)|=0.$$

这实际上证明了$\widehat{f}$在$\mathbb{R}^d$上一致连续.

衰减: 对任意$\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, 令$h=\frac{\xi}{2|\xi|^2}$, 则有$h\cdot\xi=\frac{1}{2}$, 从而有

$$e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot(x+h)}=e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot h}=e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}e^{-\pi\mathrm{i}}=-e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}.$$

于是由平移公式有

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot(x+h)}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(f(x)-f(x+h)\Big)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

然后由可积函数的平均连续性和$h=\frac{\xi}{2|\xi|^2}\to 0$ 当$|\xi|\to\infty$ 即得

$$|\widehat{f}(\xi)|\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(x+h)|\mathrm{d}x\to 0\quad \text{as}\ \ |\xi|\to\infty.$$

(b)：线性质是显然的.

(c): 由积分的平移和展缩变换有

$$\begin{aligned}&\lambda^{-d}\widehat{f(\frac{\cdot+h}{\lambda})}(\xi) = \lambda^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(\frac{x+h}{\lambda})e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot(\lambda y-h)}\mathrm{d}y \\ &= e^{2\pi \mathrm{i}\xi\cdot h}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i}\lambda\xi\cdot y}\mathrm{d}y = e^{2\pi \mathrm{i}\xi\cdot h}\widehat{f}(\lambda\xi),\end{aligned}$$

$$\lambda^{-d}\widehat{f}\Big(\frac{\xi+h}{\lambda}\Big) = \lambda^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\frac{\xi+h}{\lambda}\cdot x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda y)e^{-2\pi \mathrm{i}(\xi+h)\cdot y}\mathrm{d}y = \widehat{f(\lambda\cdot)}(\xi+h).$$

(d): 由L^1-函数的卷积性质知$f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 因此其Fourier 变换$\widehat{f*g}(\xi)$有定义. 易见对任意$\xi\in\mathbb{R}^d$ 函数$(x,y)\mapsto f(x-y)g(y)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}$ 属于$L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$, 因此由Fubini 定理知下面推导成立:

$$\begin{aligned}&\widehat{f*g}(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x)g(y)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}g(y)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot y}\mathrm{d}y\right) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

(e): 由$f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$知函数$(x,\xi)\mapsto f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}g(\xi)$ 属于$L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$, 因此由Fubini 定理, 下面推导成立:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}g(\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)e^{-2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(f): 设$f(x)(1+|x|)$在$\mathbb{R}^d$上可积. 下面等式的右边

$$\Big|\frac{\partial}{\partial\xi_j}f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\xi\cdot x}\Big| = 2\pi|x_jf(x)|\qquad (\forall\, x,\xi\in\mathbb{R}^d)$$

在$\mathbb{R}^d$上可积. 因此应用积分号下求导定理, 对每个$j\in\{1,2,...,d\}$ 有

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial}{\partial\xi_j}f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x=-2\pi\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^d}x_jf(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x=-2\pi\mathrm{i}\,\widehat{x_jf(x)}(\xi).$$

其次设f在$\mathbb{R}^d$上处处有各一阶偏导且$f,\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^d)\,(j\in\{1,2,...,d\})$, 则在上面的**例(分部积分)**中取$g(x)=e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}$ (ξ 固定) 易见f,g 满足分部积分公式的条件, 从而有

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\Big)e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\xi_j\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\xi_j\widehat{f}(\xi).$$

□

【Gauss 函数】Gauss 函数$G(x),G_\delta(x)$ 在Fourier分析和概率论中有广泛应用:

$$G(x)=e^{-\pi|x|^2},\quad G_\delta(x)=\delta^{-d}G(\frac{x}{\delta})=\delta^{-d}e^{-\pi|x|^2/\delta^2},\quad x\in\mathbb{R}^d,\ \delta>0.$$

下面命题及其证明中的结果刻画了Gauss函数.

【命题2.7.3】我们有

$$\widehat{G}(\xi)=G(\xi)=e^{-\pi|\xi|^2},\quad \xi\in\mathbb{R}^d.$$

一般有

$$\widehat{G_\delta}(\xi)=G(\delta\xi)=e^{-\pi\delta^2|\xi|^2},\quad \xi\in\mathbb{R}^d,\ \delta>0.$$

【证】先设$d=1$. 此时我们证明$\widehat{G}(\xi)$ 满足微分方程

$$(\widehat{G})'(\xi)+2\pi\xi\widehat{G}(\xi)=0,\quad \xi\in\mathbb{R};\quad \widehat{G}(0)=1.\tag{2.7.3}$$

首先由展缩变换和一维的结果有

$$\int_{\mathbb{R}}G_\delta(x)\mathrm{d}x=\delta^{-1}\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2/\delta^2}\mathrm{d}x=\delta^{-1}\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1.$$

取$\delta=1$得到

$$\widehat{G}(0)=\int_{\mathbb{R}}G(x)\mathrm{d}x=1.$$

其次证明$G(x)(1+|x|)$在$\mathbb{R}$上可积. 由

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{1+|x|}{e^{\frac{\pi}{2}x^2}}=0$$

知存在$0<C<\infty$使得$1+|x|\le Ce^{\frac{\pi}{2}x^2}$ for all $x\in\mathbb{R}$. 因此

$$G(x)(1+|x|)\le CG(x)e^{\frac{\pi}{2}x^2}=Ce^{-\frac{\pi}{2}x^2}\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

这蕴含$G(x)(1+|x|)$在$\mathbb{R}$上可积. 因此据**命题2.7.1(f)** 知

$$\widehat{G}'(\xi)=-2\pi\mathrm{i}\,\widehat{xG}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

而由上面的**例(分部积分)**或直接计算有

$$\begin{aligned}\widehat{xG}(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\pi x^2}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x\\&=\frac{e^{-\pi x^2}}{-2\pi}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}(-2\pi\mathrm{i}\xi)\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{i}\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\xi\widehat{G}(\xi).\end{aligned}$$

代入上式即得

$$\widehat{G}'(\xi)=-2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{i}\xi)\,\widehat{G}(\xi)=-2\pi\xi\widehat{G}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

所以$\widehat{G}(\xi)$满足微分方程(2.7.3). 由这一方程得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big(\widehat{G}(\xi)e^{\pi\xi^2}\Big)=0,\qquad \xi\in\mathbb{R}.$$

因此

$$\widehat{G}(\xi)e^{\pi\xi^2}=\text{常数}=\widehat{G}(0)=1,\quad \xi\in\mathbb{R}$$

所以$\widehat{G}(\xi)=e^{-\pi\xi^2}=G(\xi)$ for all $\xi\in\mathbb{R}$. 由这一结果和Fourier变换的展缩变换可得

$$\widehat{G_\delta}(\xi)=\widehat{G}(\delta\xi)=G(\delta\xi)=e^{-\pi\delta^2\xi^2}.$$

对于$d\ge 2$, 应用这一结果和$G_\delta(x_1,x_2,...,x_d)$的乘积结构以及Fubini 定理便有

$$\widehat{G_\delta}(\xi)=\delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2/\delta^2}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x=\delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\prod_{j=1}^{d}e^{-\pi x_i^2/\delta^2}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi_j x_j}\Big)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_d$$

$$=\prod_{j=1}^{d}\delta^{-1}\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x_j^2/\delta^2}e^{-2\pi\mathrm{i}\xi_j x_j}\mathrm{d}x_j=\prod_{j=1}^{d}e^{-\pi\delta^2\xi_j^2}=e^{-\pi\delta^2|\xi|^2},\quad \xi\in\mathbb{R}^d.\qquad\square$$

【命题2.7.4(Fourier 反演公式)】若$f,\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则反演公式(2.7.2) 几乎处处成立:

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\qquad \text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

【证】设$f,\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 考虑卷积逼近。对于Gauss 函数$G(x)=e^{-\pi|x|^2}$, 上面已证明$\int_{\mathbb{R}^d}G(x)\mathrm{d}=1$, 故在**命题2.6.4(卷积逼近)**中可以取$K(x)=G(x)$ 从而有

$$\|G_\delta*f-f\|_{L^1}\to 0\quad \text{as}\quad \delta\to 0+.$$

取$\delta=\frac{1}{n},n=1,2,3,...,$ 则有$\|G_{\frac{1}{n}}*f-f\|_{L^1}\to 0\,(n\to\infty)$. 因此存在子列$\{\delta_k=\frac{1}{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得

$$\lim_{k\to\infty}(G_{\delta_k}*f)(x)=f(x)\quad \text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.7.4}$$

这里用到事实: 序列按L^1范数收敛蕴含依测度收敛从而蕴含存在子列几乎处处收敛, 见**定理2.2.11**证明后面的[**注2**]. 其次来证明

$$(G_\delta*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi,\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.7.5}$$

事实上由$G_\delta(x)$是偶函数、$G_\delta(x)$ 与$G(x)$的关系、$G(\xi)=\widehat{G}(\xi)$ 和**命题2.7.1(c)** 有

$$G_\delta(x-y)=G_\delta(y-x)=\delta^{-d}G(\frac{y-x}{\delta})=\delta^{-d}\widehat{G}(\frac{y-x}{\delta})=\widehat{G(\delta\cdot)}(y-x),\quad x,y\in\mathbb{R}^d.$$

由此和乘法公式得到

$$\begin{aligned}(G_\delta*f)(x)&=\int_{\mathbb{R}^d}G_\delta(x-y)f(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{G(\delta\cdot)}(y-x)f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{G(\delta\cdot)}(y)f(y+x)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}G(\delta\xi)\widehat{f(\cdot+x)}(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

这证明了(2.7.5).

对任意$x\in\mathbb{R}^d$ 有

$$\lim_{\delta\to0+}e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}=\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x},\quad |e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}|\le|\widehat{f}(\xi)|\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^d,\ \forall\,\delta>0.$$

因$\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 故由连续参量的Lebesgue 控制收敛定理有

$$\lim_{\delta\to0+}(G_\delta*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi\qquad(\forall\,x\in\mathbb{R}^d\,).$$

由此和(2.7.4)即得

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}(G_{\delta_k}*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi\qquad \text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}^d.\qquad\square$$

【命题2.7.5(Fourier 反演公式的推论)】设$f,\widehat{f},g,\widehat{g}\in L^1(\mathbb{R}^d)$.

若$\widehat{f}=\widehat{g}$ 于$\mathbb{R}^d$, 则$f=g$ a.e. 于$\mathbb{R}^d$. 特别若$\widehat{f}=0$ 于$\mathbb{R}^d$, 则$f=0$ a.e. 于$\mathbb{R}^d$

【证】令$h=f-g$. 则$\widehat{h}=\widehat{f}-\widehat{g}=0$ 于$\mathbb{R}^d$. 据Fourier 反演公式知$h=0$ a.e. 于$\mathbb{R}^d$.
$\square$

§2.8. 积分换元公式

积分换元公式与Fubini定理和Newton-Leibniz 公式一起是研究积分和计算积分的主要工具. 回想不定积分的计算, 如果没有积分换元公式, 很多不定积分将难以“积出”. 从证明的难度上看, 积分换元公式也是分析学中是能量较大的定理之一: 在较长篇幅的证明中一劳永逸地吸收了很多公共难点.

积分换元公式是宏观量之间的等量转换, 但是它的证明过程却着力于微观、局部分析. 我们马上看到, 测度和积分在一点附近的行为由换元映射的线性主部决定, 也即是“微分”的行为. 简单地说, 换元公式的证明过程就是化整为零、积零为整的过程.

与Riemann 积分换元公式相比, 本节学习的Lebesgue积分换元公式, 条件很弱: 只要求被积函数f可积或非负可测, 同时只要求换元映射φ是C^1-类的单射, 不要求它的Jacobi矩阵处处可逆, 因此应用更加广泛。

我们先从C^1映射下的测度估计开始. 如前, 我们用

$$\varphi'(x)=J\varphi(x)=\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\Big)_{d\times d}$$

表示映射$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_d)^\tau$在$x$点的微分即Jacobi 矩阵.

【定理2.8.1(C^1 变换下的测度估计)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 为C^1 映射. 则对任何可测集$E\subset\Omega$ 有

$$m(\varphi(E))\le\int_E|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.1}$$

【证】首先由C^1 映射把零测集映为零测集、把可测集映为可测集(**定理1.5.2**) 知φ把Ω 中的零测集映为零测集, 把Ω 中的可测集映为可测集. 不等式(2.8.1)的证明分几步进行.

Step 1. 证明局部性质：对任意$x\in\Omega$ 和包含x 的任意闭方体族$\{Q\}$ 都有

$$\limsup_{Q\ni x,\,l(Q)\to0}\frac{m(\varphi(Q))}{m(Q)}\le|\mathrm{det}\varphi'(x)|. \tag{2.8.2}$$

意即$\forall\,x\in\Omega,\forall\,\varepsilon>0\,,\exists\,\delta>0$ 使得对于Ω 中所有满足$Q\ni x$ 且棱长$l(Q)<\delta$ 的闭方体Q 都有

$$\frac{m(\varphi(Q))}{m(Q)}<|\mathrm{det}\varphi'(x)|+\varepsilon\,.$$

为证明这个估计, 给定任一$x_0\in\Omega$, 记$A=\varphi'(x_0)$. 取$\delta_0>0$ 充分小使得$B(x_0,\delta_0)\subset\Omega$. 考虑闭单位方体$[0,1]^d$ 在变换$x\mapsto Ax$ 下的象$K:=A([0,1]^d)$. 由Lebesgue 可测集的正

则性, 对任意$\varepsilon>0$, 存在开集$G\supset K$使得$m(G)<m(K)+\varepsilon$. 因K 是紧集, $G^c=\mathbb{R}^d\setminus G$是闭集, 且$K,G^c$ 不相交, 故$\mathrm{dist}(G^c,K)>0$. 取$0<r<\mathrm{dist}(G^c,K)$, 则易见有

$$\{x\in\mathbb{R}^d\mid \mathrm{dist}(x,K)\le r\}\subset G\,. \tag{2.8.3}$$

由φ可微知, 存在$0<\delta<\delta_0/\sqrt{d}$ 使得

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)|\le\frac{r}{\sqrt{d}}|x-x_0|\qquad\forall\,|x-x_0|<\sqrt{d}\,\delta\,. \tag{2.8.4}$$

设Q是满足$Q\ni x_0$ 且棱长$\lambda:=l(Q)<\delta$ 的任一闭方体. 则有

$$\forall\,x\in Q\implies|x-x_0|\le\sqrt{d}\lambda<\sqrt{d}\,\delta<\delta_0\implies x\in B(x_0,\delta_0)\subset\Omega.$$

这表明$Q\subset\Omega$. 写$Q=\prod_{i=1}^d[a_i,a_i+\lambda]$ 并令$a=(a_1,a_2,...,a_d)^\tau$. 则对任意$x\in Q$有$\frac{x-a}{\lambda}\in[0,1]^d$ 从而有$A(\frac{x-a}{\lambda})\in A([0,1]^d)=K$. 于是由(2.8.4) 有（注意$x\mapsto Ax$是线性映射!）

$$\mathrm{dist}\Big(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(a-x_0)}{\lambda}\,,K\Big)\le\Big|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(a-x_0)}{\lambda}-A(\frac{x-a}{\lambda})\Big|$$
$$=\frac{1}{\lambda}|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)|\le\frac{1}{\lambda}\frac{r}{\sqrt{d}}|x-x_0|\le\frac{1}{\lambda}\frac{r}{\sqrt{d}}\cdot\sqrt{d}\,\lambda=r\,.$$

据(2.8.3)知

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(a-x_0)}{\lambda}\in G\qquad\text{即}\quad\varphi(x)\in\lambda G+h$$

其中$h=\varphi(x_0)+A(a-x_0)$. 这表明$\varphi(Q)\subset\lambda G+h$. 于是由**定理1.5.3(平移和线性变换下Lebesgue测度的计算公式)** 以及$m(Q)=\lambda^d$ 和$m(K)=m(A([0,1]^d)=|\mathrm{det}A|$ 得到

$$m(\varphi(Q))\le m(\lambda G)=\lambda^d m(G)<\lambda^d(m(K)+\varepsilon)=m(Q)(|\mathrm{detA}|+\varepsilon)\,.$$

这就给出所要的估计

$$\frac{m(\varphi(Q))}{m(Q)}<|\mathrm{det}A|+\varepsilon\,.$$

Step2. 证明：对任意闭方体$Q\subset\Omega$ 都有

$$m(\varphi(Q))\le\int_Q|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.5}$$

反证法: 假设存在闭方体$Q\subset\Omega$ 使(2.8.5) 不成立. 令

$$\delta=\frac{1}{m(Q)}\left(m(\varphi(Q))-\int_Q|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\right).$$

则$\delta > 0$ 且

$$m(\varphi(Q)) = \int_Q (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x\,.$$

将Q 的每条棱2 等分, 得到2^d 个互不重叠的闭子方体$I_1, I_2, ..., I_{2^d}$, $Q = \bigcup_{i=1}^{2^d} I_i$. 由$\varphi(Q) = \bigcup_{i=1}^{2^d} \varphi(I_i)$ 和测度的次可加性和积分的可加性得到

$$\sum_{i=1}^{2^d} m(\varphi(I_i)) \ge m(\varphi(Q)) = \sum_{i=1}^{2^d} \int_{I_i} (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x\,.$$

由此可知存在某个I_i, 记之为Q_1, 使得

$$m(\varphi(Q_1)) \ge \int_{Q_1} (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x\ , \quad l(Q_1) = \frac{1}{2} l(Q).$$

再将Q_1 的每条棱2 等分, 得到2^d 个互不重叠的闭子方体$J_1, J_2, ..., J_{2^d}$, $Q_1 = \bigcup_{i=1}^{2^d} J_i$. 由$\varphi(Q_1) = \bigcup_{i=1}^{2^d} \varphi(J_i)$ 和如上分析得到

$$\sum_{i=1}^{2^d} m(\varphi(J_i)) \ge m(\varphi(Q_1)) \ge \sum_{i=1}^{2^d} \int_{J_i} (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x\,.$$

因此存在某个J_i, 记之为Q_2, 使得

$$m(\varphi(Q_2)) \ge \int_{Q_2} (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x\,, \quad l(Q_2) = \frac{1}{2} l(Q_1) = \frac{1}{4} l(Q)\,.$$

如此操作下去我们得到Q中的闭方体套

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_k \supset \cdots\,; \quad l(Q_k) = 2^{-k} l(Q), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

满足

$$m(\varphi(Q_k)) \ge \int_{Q_k} (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

根据紧集套定理, 存在$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. 另一方面, 由中值定理(因$x \mapsto \mathrm{det}\varphi'(x)$ 连续)

$$\exists\, x_k \in Q_k \ \ \text{s.t.} \quad \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x = |\mathrm{det}\varphi'(x_k)| + \delta\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

于是有

$$\frac{m(\varphi(Q_k))}{m(Q_k)} \ge |\mathrm{det}\varphi'(x_k)| + \delta\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

因$|x_k - x_0| \le \mathrm{diam}(Q_k) = \sqrt{d}\, l(Q_k) \to 0\,(k \to \infty)$, 故由(2.8.2)得到矛盾：

$$|\mathrm{det}\varphi'(x_0)| \ge \limsup_{k\to\infty} \frac{m(\varphi(Q_k))}{m(Q_k)} \ge |\mathrm{det}\varphi'(x_0)| + \delta > |\mathrm{det}\varphi'(x_0)|\,.$$

Step 3. 证明：对任意闭方体$Q\subset\Omega$ 和任意可测集$E\subset Q$ 都有

$$m(\varphi(E))\le\int_E|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.6}$$

给定Q,E 如上. 我们有$\varphi(E)\subset\varphi(E\cap Q^\circ)\cup\varphi(\partial Q)$. 因$\partial Q$是$\Omega$中的零测集, 故$\varphi(\partial Q)$是零测集. 于是有$m(\varphi(E))=m(\varphi(E\cap Q^\circ))$. 这表明, 以$E\cap Q^\circ$代替$E$, 我们可以假定$E\subset Q^\circ$. 我们先证明(2.8.6) 对于$Q^\circ$ 中的开集成立. 设开集$G\subset Q^\circ$. 由开集的方体分解定理(**定理1.2.2(开集的方体分解)**) 可写$G=\bigcup_{k=1}^\infty\overline{Q}_k$, 其中$\overline{Q}_k$ 是互不重叠的闭方体. 应用测度的次可加性、**Step 2**、和互不重叠时的积分可加性有

$$m(\varphi(G))\le\sum_{k=1}^\infty m(\varphi(\overline{Q}_k))\le\sum_{k=1}^\infty\int_{\overline{Q}_k}|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_{\bigcup_{k=1}^\infty\overline{Q}_k}|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_G|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

对于一般的可测集$E\subset Q^\circ$, 应用开集逼近, 存在一列开集G_k 满足$E\subset G_k\subset Q^\circ$ 使得$m(G_k\setminus E)\to 0\,(k\to\infty)$. 注意到闭方体$Q\subset\Omega$ 蕴含$\int_Q|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 于是应用**定理2.2.7(积分的绝对连续性)** 得到

$$m(\varphi(E))\le m(\varphi(G_k))\le\int_{G_k}|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\to\int_E|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\ \ (k\to\infty)\,.$$

这证明了(2.8.6).

Step 4. 由开集的方体分解定理知$\Omega=\bigcup_{k=1}^\infty\overline{Q}_k$ 其中$\overline{Q}_k$ 是互不重叠的闭方体. 对任意可测集$E\subset\Omega$, 考虑分解

$$E=\bigcup_{k=1}^\infty E\cap\overline{Q}_k\,,\quad \varphi(E)=\bigcup_{k=1}^\infty\varphi(E\cap\overline{Q}_k)\,.$$

则由**Step 3** 并注意$E\cap\overline{Q}_k$ 也是互不重叠的, 得到

$$\begin{aligned}m(\varphi(E))&\le\sum_{k=1}^\infty m(\varphi(E\cap\overline{Q}_k))\le\sum_{k=1}^\infty\int_{E\cap\overline{Q}_k}|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{\bigcup_{k=1}^\infty E\cap\overline{Q}_k}|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_E|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$ □

作为上述定理的重要推论, 我们立即得到

【Sard 定理: C^1映射的临界值是零测集】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 为C^1 映射, $S=\{x\in\Omega\,|\,\mathrm{det}\varphi'(x)=0\}$是$\varphi$ 的临界点的集合, 则φ 的临界值的集合$\varphi(S)$是零测集, 即$m(\varphi(S))=0$.

【证】在**定理2.8.1**(C^1 **变换下的测度估计**)中取$E=S$ 即得证. $\square$

有了以上准备, 我们可以叙述并证明重积分换元公式.

【定理2.8.2(积分换元公式)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 为C^1类的单射.

(a) 若$f\in L^1(\varphi(\Omega))$ 或f在$\varphi(\Omega)$上非负可测, 则成立换元公式:

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y=\int_{\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x \tag{2.8.7}$$

(b) 一般地, 设可测集$E\subset\Omega$, 函数$f\in L^1(\varphi(E))$ 或f 在$\varphi(E)$ 上非负可测. 则有

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\mathrm{d}y=\int_{E} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.8}$$

以上**(a)**,**(b)** 分别包含了函数$x\mapsto f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|$ 在Ω 和E上的可积性和相应的非负可测性. 特别在**(b)**中取$f\equiv 1$ 有

$$m(\varphi(E))=\int_{E}|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.9}$$

【证】先证明(a) 蕴含(b). 设$E\subset\Omega$ 为可测集. 由$\varphi\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$ 和C^1 映射把可测集映为可测集(**定理1.5.2**) 知$\varphi(E)$ 是可测集. 因此$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)$ 是可测函数. 设$f(y)$在$\varphi(E)$上L-可积或非负可测. 则函数$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)f(y)$在$\varphi(\Omega)$ 上L-可积或非负可测. 于是将(a) 应用于被积函数$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)f(y)$ 并注意φ 是单射蕴含$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(\varphi(x))=\mathbf{1}_E(x)$ 即知函数

$$x\mapsto \mathbf{1}_{\varphi(E)}(\varphi(x))f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|=\mathbf{1}_E(x)f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|,\quad x\in\Omega$$

在Ω上的可积性和相应的非负可测性. 这就蕴含了函数$x\mapsto f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|$ 在E上的可积性和相应的非负可测性. 同时由(2.8.7) 有

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(E)} f(y)\mathrm{d}y&=\int_{\varphi(\Omega)}\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)f(y)\mathrm{d}y=\int_{\Omega}\mathbf{1}_{\varphi(E)}(\varphi(x))f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{\Omega}\mathbf{1}_E(x)f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面证明(a). 分两步进行.

Step 1. 假设φ 满足$\mathrm{det}\varphi'(x)\neq 0\ \forall\, x\in\Omega$. 来证明此时换元公式(2.8.7)成立. 注意此时$\varphi(\Omega)$ 是开集且逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(\Omega)\to\Omega$ 也是C^1 的. 因此再由C^1 映射把可测集映为可测集(**定理1.5.2**) 知φ^{-1} 把$\varphi(\Omega)$ 中的可测集映为可测集并且当$f(y)$在$\varphi(\Omega)$ 上可测时, 函数$x\mapsto f(\varphi(x))$ 在Ω 上可测.

首先先证明: 对于$\varphi(\Omega)$ 上的任意非负可测函数f, 换元公式(2.8.7) 成立. 为此我们先证明

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y \le \int_{\Omega} f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.10}$$

为证明(2.8.10), 先考虑简单情形: $f(y) = \mathbf{1}_A(y)$ 其中$A \subset \varphi(\Omega)$ 是可测集. 由**定理2.8.1(C^1 变换下的测度估计)** 有

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{1}_A(y)\mathrm{d}y &= m(A) = m(\varphi(\varphi^{-1}(A)) \le \int_{\varphi^{-1}(A)} |\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(A)}(x)|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

现在设f是$\varphi(\Omega)$上的任一非负可测函数. 由非负可测函数的级数表示知存在一列可测集$A_k \subset \varphi(\Omega)$ 和一列常数$c_k > 0$ 使得

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{A_k}(y), \quad y \in \Omega.$$

由非负可测函数级数的逐项积分和关于特征函数的结果得到

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{1}_{A_k}(y)\mathrm{d}y \le \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\Omega} \mathbf{1}_{A_k}(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{A_k}(\varphi(x))\Big)|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将这一结论应用于C^1单射$\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$得到: 对于$\Omega$上的任意非负可测函数$g(x)$ 有

$$\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(\Omega))} g(x)\mathrm{d}x \le \int_{\varphi(\Omega)} g(\varphi^{-1}(y))|\det(\varphi^{-1})'(y)|\mathrm{d}y\,.$$

回忆

$$|\det\varphi'(\varphi^{-1}(y))||\det(\varphi^{-1})'(y)| \equiv 1, \quad y \in \varphi(\Omega)\,.$$

取$g(x) = f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|$ 即得

$$\int_{\Omega} f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x \le \int_{\varphi(\Omega)} f(\varphi(\varphi^{-1}(y)))|\det\varphi'(\varphi^{-1}(y))||\det(\varphi^{-1})'(y)|\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y\,.$$

结合(2.8.10) 即知换元公式对于非负可测函数成立.

其次对于任意实值函数$f \in L^1(\varphi(\Omega))$, 将上述结果应用于$f$ 的正部和负部得到(由可积性, 以下减法有意义!)

$$\begin{aligned}&\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\varphi(\Omega)} f^+(y)\mathrm{d}y - \int_{\varphi(\Omega)} f^-(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Omega} f^+(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x - \int_{\Omega} f^-(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega} [f^+(\varphi(x)) - f^-(\varphi(x))]|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

最后于任意复值函数$f\in L^1(\varphi(\Omega))$, 将实值的结果应用于$f$ 的实部、虚部并注意复值函数积分的定义即知换元公式对于复值可积函数也成立.

Step 2. 去掉"$\det\varphi'(x)\neq 0\ \forall\, x\in\Omega$" 的假设(只保持单射条件). 设$f\in L^1(\varphi(\Omega))$ 或f 在$\varphi(\Omega)$ 上非负可测. 令

$$S=\{x\in\Omega\,|\,\det\varphi'(x)=0\}\,,\quad \Omega_0=\Omega\setminus S=\{x\in\Omega\,|\,\det\varphi'(x)\neq 0\}\,.$$

由**Sard定理** 知$\varphi(S)$ 为零测集. 因此有

$$\int_{\varphi(S)}f(y)\mathrm{d}y=0=\int_S f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.11}$$

由此可知若$\Omega=S$, 则换元公式成立. 设$\Omega\neq S$, 即$\Omega_0\neq\emptyset$. 则由$x\mapsto\det\varphi'(x)$ 连续知Ω_0 是非空开集. 因$\det\varphi'(x)\neq 0$ for all $x\in\Omega_0$, 故由开映射定理知$\varphi(\Omega_0)$ 是开集从而是$\varphi(\Omega)$的可测子集. 这蕴含f在$\varphi(\Omega_0)$上L-可积或相应地非负可测. 于是由**Step1** 知知$x\mapsto f(\varphi(x))$ 在Ω_0 上可测且

$$\int_{\varphi(\Omega_0)}f(y)\mathrm{d}y=\int_{\Omega_0}f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x. \tag{2.8.12}$$

另一方面, 由$m(\varphi(S))=0$ 有$\int_{\varphi(S)}f(y)\mathrm{d}y=0$. 因此由$\varphi(\Omega)=\varphi(\Omega_0)\cup\varphi(S)$ (不交并) 有

$$\int_{\varphi(\Omega)}f(y)\mathrm{d}y=\int_{\varphi(\Omega_0)}f(y)\mathrm{d}y. \tag{2.8.13}$$

而由$\det\varphi'(x)=0$于S知$f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|=0$ for all $x\in S$. 这蕴含函数$x\mapsto f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|$在$\Omega=\Omega_0\cup S$ 上可测且

$$\int_{\Omega}f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_{\Omega_0}f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x. \tag{2.8.14}$$

联合(2.8.11)-(2.8.14) 即得换元公式(2.8.7). $\square$

【注1】在上面的证明中我们从逻辑上考虑了$\Omega=S$ 的情形. 实际上这种情形不会出现: 根据在《拓扑学》和《非线性分析》课程中将学到的**Brouwer 区域不变性定理** —— 从开集$\Omega\subset\mathbb{R}^d$到$\mathbb{R}^d$的连续单射必是开映射——知$\varphi(\Omega)$ 是开集从而其测度>0. 因$\varphi(S)$ 是零测集, 故$\varphi(\Omega)\setminus\varphi(S)$ 非空. 而由φ 为单射知$\varphi(\Omega\setminus S)=\varphi(\Omega)\setminus\varphi(S)$, 所以$\Omega\setminus S$ 非空.

【注2】在换元公式的应用中,"单射"是主要条件. 由于整体反函数问题是分析学中的一个难点, 单射的验证并不容易. 但对一些常用的变换(如球极坐标变换, 线性变换等), 单射条件不难验证.

很多情况下积分集合是闭区域. 对此我们有下列常用的换元公式, 其中不要求换元$x\mapsto\varphi(x)$ 在整个闭区域上是单射, 而只要求它在闭区域的**内部**是单射.

【定理2.8.3(闭区域上的积分换元公式)】设$V\subset\mathbb{R}^d$ 为开集, $\varphi:V\to\mathbb{R}^d$ 为C^1 映射. 设开集$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 满足

(i) $\overline{\Omega}\subset V$ 且$m(\partial\Omega)=0\,,$ **(ii)** $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 为单射.

则对任意可测集$E\subset\overline{\Omega}$ 有

$$m(\varphi(E))=\int_E|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.15}$$

一般地, 对任何$f\in L^1(\varphi(\overline{\Omega}))$ 或f 在$\varphi(\overline{\Omega})$ 上非负可测, 成立换元公式:

$$\int_{\varphi(\overline{\Omega})}f(y)\mathrm{d}y=\int_{\overline{\Omega}}f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{2.8.16}$$

【证】首先由假设条件知φ在Ω上满足**定理2.8.2(积分换元公式)**中的条件, 因此换元公式(2.8.7)成立.

由闭包的定义和Ω 为开集知$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ 且$\Omega\cap\partial\Omega=\emptyset$. 因$\varphi:V\to\mathbb{R}^d$ 为C^1 映射, $\partial\Omega\subset V$ 且$\partial\Omega$ 为零测集, 故$\varphi(\partial\Omega)$ 也是零测集. 对任意可测集$E\subset\overline{\Omega}$, 由$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ 有

$$E=(E\cap\Omega)\cup(E\cap\partial\Omega),\quad m(E\cap\partial\Omega)=0,$$
$$\varphi(E)=\varphi(E\cap\Omega)\cup\varphi(E\cap\partial\Omega),\quad m(\varphi(E\cap\partial\Omega)=0$$

从而在换元公式(2.8.7)中取$f(y)=\mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(y)$ 并注意φ 在Ω 上是单射蕴含

$$\mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(\varphi(x))\equiv\mathbf{1}_{E\cap\Omega}(x),\quad x\in\Omega$$

便有

$$\begin{aligned}m(\varphi(E))&=m(\varphi(E\cap\Omega))=\int_{\varphi(\Omega)}\mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(y)\mathrm{d}y=\int_\Omega\mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\mathbf{1}_{E\cap\Omega}(x)|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_{E\cap\Omega}|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_E|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

一般地, 对任意$f\in L^1(\varphi(\overline{\Omega}))$ 或f 在$\varphi(\overline{\Omega})$ 上非负可测, 由**定理2.8.2(积分换元公式)**知

$$\int_{\varphi(\Omega)}f(y)\mathrm{d}y=\int_\Omega f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

而由$\varphi(\overline{\Omega}) = \varphi(\Omega)\cup Z$, $Z = \varphi(\partial\Omega)\setminus\varphi(\Omega)$, $m(Z) = m(\partial\Omega) = 0$ 有

$$\int_Z f(y)\mathrm{d}y = 0, \quad \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x = 0$$

于是由积分的可加性即得所证公式(2.8.14):

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(\overline{\Omega})} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y + \int_Z f(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x \\
&= \int_{\overline{\Omega}} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned} \qquad \square$$

【奇、偶函数的积分】

• 设可测集$E\subset\mathbb{R}^d$关于某个$d-1$维坐标平面对称, 即存在$i\in\{1,2,...,d\}$ 使得

$$x = (x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_d)\in E \iff (x_1,...,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},...,x_d)\in E.$$

(图示) 设函数f 在E 上有定义.

(a) 假设$f\in L^1(E)$ 且$f(x)$ 关于x的第i个变量x_i 是奇函数, 即

$$f(x_1,...,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},...,x_d) = -f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_d).$$

则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(b) 假设$f(x)$ 关于x的第i个变量x_i 是偶函数, 即

$$f(x_1,...,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},...,x_d) = f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_d).$$

则当$f\in L^1(E)$ 或f 在E 上非负可测时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{E_i^-} f(x)\mathrm{d}x.$$

其中

$$E_i^+ = \{x = (x_1,x_2,...,x_d)\in E\,|\,x_i\ge 0\}, \quad E_i^- = \{x = (x_1,x_2,...,x_d)\in E\,|\,x_i\le 0\}.$$

【证】考虑线性变换$\varphi(x) = (x_1,...,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},...,x_d), x\in\mathbb{R}^d$. 显然$|\mathrm{det}\varphi'(x)|\equiv 1$ 且由E的定义有

$$\varphi(E) = E, \quad \varphi(E_i^+) = E_i^-, \quad \varphi(E_i^-) = E_i^+.$$

(a): 设f是上述奇函数. 则由换元公式(2.8.8) 和$f(\varphi(x))=-f(x)$ 得到(在换元公式的左边, 将变量记号y也换成x)

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(E)} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(x))\mathrm{d}x=-\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

因$\int_E f(x)\mathrm{d}x$是有限数(即不是无穷大), 故$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

(b): 设f是上述偶函数. 则应用换元公式(2.8.8) 和$E_i^+=\varphi(E_i^-)$ 以及$f(\varphi(x))=f(x)$ 得到

$$\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(E_i^-)} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_i^-} f(\varphi(x))\mathrm{d}x=\int_{E_i^-} f(x)\mathrm{d}x.$$

因$E=E_i^+\cup E_i^-$ 且易见E_i^+, E_i^- 不重叠, 即$m(E_i^+\cap E_i^-)=0$, 故有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_i^-} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

• 设可测集$E\subset\mathbb{R}^d$关于每个$n-1$维坐标平面都对称, 即

$$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in E \quad \Longleftrightarrow \quad (\pm x_1,\pm x_2,...,\pm x_d)\in E.$$

设E上的函数$f(x)$ 关于x的每个分量都是偶函数, 即

$$f(x_1,x_2,...,x_d)=f(\pm x_1,\pm x_2,...,\pm x_d), \quad x\in E.$$

则当$f\in L^1(E)$ 或f 在E 上非负可测时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=2^d\int_{E\cap\mathbb{R}_+^d} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.8.17}$$

其中$\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$. 特别, 当$E=\mathbb{R}^d$时有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x=2^d\int_{\mathbb{R}_+^d} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.8.18}$$

【证】公式(2.8.17) 可以用和上面相同的方法给予证明. 但较快的证法是利用Fubini定理先证(2.8.18) 然后由(2.8.18)推出(2.8.17). 当$d=1$ 时, (2.8.18) 是熟知的偶函数在对称区间上的积分等式. 假设当维数为$d-1$时(2.8.18)成立, 则当维数等于d 时, 由Fubini 定理和归纳假设有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1,x_2,...,x_{d-1},x_d)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{d-1}\Big)\mathrm{d}x_d\\
&=2^{d-1}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} f(x_1,x_2,...,x_{d-1},x_d)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{d-1}\Big)\mathrm{d}x_d\\
&=2^d\int_{\mathbb{R}_+}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} f(x_1,x_2,...,x_{d-1},x_d)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{d-1}\Big)\mathrm{d}x_d=2^d\int_{\mathbb{R}_+^d} f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

所以(2.8.18) 成立.

对一般情形, 将已证的结果用于$\mathbb{R}^d$上的函数$\mathbf{1}_E(x)f(x)$ (它在$\mathbb{R}^d$ 上显然满足上述偶函数条件)便有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x)f(x)\mathrm{d}x = 2^d\int_{\mathbb{R}^d_+} \mathbf{1}_E(x)f(x)\mathrm{d}x = 2^d\int_{E\cap\mathbb{R}^d_+} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

【Jacobi 矩阵行列式的其他记号】

对于光滑映射$y=(y_1,y_2,...,y_d)=\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,...,x_d)$ 很多文献和教科书中常用下列比较直观的记号:

$$\mathrm{det}\varphi'(x)=\frac{\partial(y_1,y_2,...,y_d)}{\partial(x_1,x_2,...,x_d)}=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_d}{\partial x_1} & \frac{\partial y_d}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

相应的换元公式为

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y_1,y_2,...,y_d)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_d=\int_\Omega f(\varphi(x_1,x_2,...,x_d))\Big|\frac{\partial(y_1,y_2,...,y_d)}{\partial(x_1,x_2,...,x_d)}\Big|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_d.$$

例如对于$(x,y)=\varphi(u,v)$ 则有

$$\mathrm{det}\varphi'(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$\iint_{\varphi(\Omega)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Omega f(\varphi(u,v))\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

对于$(x,y,z)=\varphi(u,v,w)$ 则有

$$\mathrm{det}\varphi'(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix},$$

$$\iiint_{\varphi(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(\varphi(u,v,w))\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

• **球极坐标变换**

在数学分析中已经证明了一般维数的球极坐标变换在所示区域的内部是单射, 在区域的闭包上是满射, 因此满足换元公式的条件.

注意： 不失一般性我们只需考虑函数在全空间$\mathbb{R}^d$上的积分, 因为对于积分区域$\neq \mathbb{R}^d$的情形, 通过将函数零延拓, 即将被积函数乘以原积分区域的特征函数, 即可化成全空间的积分.

极坐标变换$(d=2)$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r\in[0,+\infty), \quad \theta\in[0,2\pi] \text{ 或 } \theta\in[-\pi,\pi].$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = r$$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{[0,+\infty)\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_{[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

【例】计算Gauss 积分: 由Fubini 定理、极坐标换元公式和Newton-Leibnitz 公式有

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2}\mathrm{d}y\right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi x^2}e^{-\pi y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{[0,+\infty)\times[0,2\pi]} e^{-\pi r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^\infty e^{-\pi r^2} r\mathrm{d}r = -e^{-\pi r^2}\Big|_{r=0}^{r=+\infty} = 1.\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1.$$

由此和指数函数的乘积结构和Fubini 定理即得

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi x_1^2}e^{-\pi x_2^2}\cdots e^{-\pi x_d^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_d = \prod_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2}\mathrm{d}x_j = 1.$$

球极坐标变换 $(d=3)$:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r\in[0,+\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \ \phi\in[0,2\pi].$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right| = r^2\sin\theta\,,$$

$$\begin{aligned}&\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ =& \iiint_{[0,+\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

一般维数的球极坐标变换 $(d\ge 3)$: d维球极坐标变换

$$\Psi:[0,+\infty)\times[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^d,\quad (r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1})\mapsto x=\Psi(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1})$$

由下式给出:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Psi_1(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1}) = r\cos\theta_1\,,\\
x_2 &= \Psi_2(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1}) = r\sin\theta_1\cos\theta_2\,,\\
x_3 &= \Psi_3(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1}) = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\,,\\
&\cdots\cdots\\
x_{d-1} &= \Psi_{d-1}(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1}) = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1}\,,\\
x_d &= \Psi_d(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1}) = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1}\,.
\end{aligned}$$

在数学分析中已证明球极坐标变换$\Psi:[0,+\infty)\times[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^d$ 是满射, 而Ψ 在开区间$(0,+\infty)\times(0,\pi)^{d-2}\times(0,2\pi)$ 上是单射, 并经计算有

$$|\mathrm{det}\Psi'(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1})| = r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\,.$$

因Ψ 是光滑映射且$(0,+\infty)\times(0,\pi)^{d-2}\times(0,2\pi)$ 的边界是零测集, 故由**定理2.8.3(闭区域上的换元公式)** 知对任意$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 或f 在$\mathbb{R}^d$ 上非负可测, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,+\infty)\times[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]} & f(\Psi(r,\theta_1,\theta_2,....,\theta_{d-1})) \\ & \times r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{d-1}\,.\end{aligned}$$

【径向函数的积分】设$d\ge 2$, $\mathbb{B}^d,\mathbb{S}^{d-1}$ 为闭单位球和单位球面, 即

$$\mathbb{B}^d=\{x\in\mathbb{R}^d\mid |x|\le 1\},\quad \mathbb{S}^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d\mid |x|=1\}.$$

设$\mathbb{R}^d$上的可积或非负可测函数$f=f(|x|)$只依赖于$|x|$, 则由

$$|\Psi(r,\theta_1,\theta_2,....,\theta_{d-1})|\equiv r$$

可知f的d 维重积分可简化为一维积分:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(|x|)\mathrm{d}x=\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\int_0^\infty f(r)r^{d-1}\mathrm{d}r \tag{2.8.19}$$

其中$\sigma(\mathbb{S}^{d-1})$是单位球面$\mathbb{S}^{d-1}$的面积即

$$\sigma(\mathbb{S}^{d-1})=\int_{[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{d-1}.$$

【球体体积和球面面积的计算】利用Gauss积分和径向函数的积分公式(2.8.19)有

$$1=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x=\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\int_0^\infty r^{d-1}e^{-\pi r^2}\mathrm{d}r\,.$$

作变量替换$r=\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ 计算: $\mathrm{d}r=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$,

$$\int_0^\infty r^{d-1}e^{-\pi r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\pi}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{d}{2}-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\Gamma(\frac{d}{2})$$

其中$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ 为Gamma 函数$(s>0)$. 于是得到$\sigma(\mathbb{S}^{d-1})=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$. 对于闭单位球$\mathbb{B}^d$, 令$(\mathbb{B}^d)^\circ$ 为相应的开单位球, 即$(\mathbb{B}^d)^\circ=\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|x|<1\}$, 则易见$\mathbf{1}_{\mathbb{B}^d}(x)=\mathbf{1}_{[0,1]}(|x|)$, $\mathbf{1}_{(\mathbb{B}^d)^\circ}(x)=\mathbf{1}_{[0,1)}(|x|)$. 因此应用径向函数的积分公式(2.8.19) 并注意$\mathbf{1}_{[0,1)}(r)$与$\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$ 几乎处处相等, 有

$$m(\mathbb{B}^d)=m((\mathbb{B}^d)^\circ)=\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\int_0^\infty r^{d-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(r)\mathrm{d}r=\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\int_0^1 r^{d-1}\mathrm{d}r=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

综上得到

$$m(\mathbb{B}^d)=m((\mathbb{B}^d)^\circ)=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})},\quad \sigma(\mathbb{S}^{d-1})=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

为算出具体值, 可以利用Gamma 函数的递推关系:

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(1)=1,\quad \Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad s>0.$$

对一般开球$B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|x-a|<r\}$ 和闭球$\overline{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|x-a|\le r\}$ 有

$$B(a,r)=a+r(\mathbb{B}^d)^\circ,\quad \overline{B}(a,r)=a+r\mathbb{B}^d$$

因此由平移和展缩变换的测度计算公式有

$$m(B(a,r))=m(\overline{B}(a,r))=r^d m(\mathbb{B}^d)=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}r^d.$$

注意: $B(a,r)$的边界 (即以a为中心、r为半径的球面) 可写成

$$\partial B(a,r)=\partial\overline{B}(a,r)=\overline{B}(a,r)\setminus B(a,r)$$

故有

$$m(\partial B(a,r))=m(\overline{B}(a,r))-m(B(a,r))=0.$$

这表明$\mathbb{R}^d$中的球的边界是d-维零测集.

【**例**】设$f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$具有需要的可积性, 将下面积分

$$I=\iiint_{x,y,z\ge 0,\,xy+yz+zx\le 1}f(xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

化成一维定积分.

【解】因$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_{\ge 0}\mid x=0$ 或 $y=0$或 $z=0\}$是零测集, 对积分无贡献, 故有

$$I=\iiint_{x,y,z>0,\,xy+yz+zx\le 1}f(xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

令

$$xy=u^2,\quad yz=v^2,\quad zx=w^2,\qquad u,v,w>0,\,u^2+v^2+w^2\le 1$$

则有$(xyz)^2=xyyzzx=u^2v^2w^2, xyz=uvw$, $x=\frac{u^2}{y}=\frac{u^2zx}{yzx}=\frac{u^2w^2}{uvw}=\frac{uw}{v}$, $y=\frac{v^2}{z}=\frac{v^2xy}{zxy}=\frac{v^2u^2}{uvw}=\frac{uv}{w}$, $z=\frac{w^2}{x}=\frac{w^2yz}{xyz}=\frac{w^2v^2}{uvw}=\frac{vw}{u}$ 所以

$$x=\frac{uw}{v},\quad y=\frac{uv}{w},\quad z=\frac{vw}{u},\qquad u,v,w>0,\quad u^2+v^2+w^2\le 1.$$

这个(x,y,z) 与(u,v,w) 之间的变换是(x,y,z) 的积分区域与(u,v,w)的积分区域(即第一卦限中的单位球) 之间的光滑同胚. 计算

$$\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\Big|=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{w}{v} & \frac{-uw}{v^2} & \frac{u}{v}\\ \frac{v}{w} & \frac{u}{w} & \frac{-uv}{w^2}\\ \frac{-vw}{u^2} & \frac{w}{u} & \frac{v}{u}\end{pmatrix}\right|\qquad\text{(按第一行展开)}$$
$$=\Big|\frac{w}{v}\Big(\frac{u}{w}\frac{v}{u}+\frac{w}{u}\frac{uv}{w^2}\Big)+\frac{uw}{v^2}\Big(\frac{v}{w}\frac{v}{u}-\frac{vw}{u^2}\frac{uv}{w^2}\Big)+\frac{u}{v}\Big(\frac{v}{w}\frac{w}{u}+\frac{vw}{u^2}\frac{u}{w}\Big)\Big|=4.$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= 4\iint_{u,v,w>0}\mathbf{1}_{\{u^2+v^2+w^2<1\}}f(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \quad (\text{然后用球坐标变换})\\
&= 4\cdot\frac{4\pi}{8}\int_0^1 r^2 f(r^2)\mathrm{d}r = \pi\int_0^1 f(t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t. \qquad \square
\end{aligned}
$$

本章后几节作业题

1. Stein和Shakarchi的《实分析》第2章第5节习题8, 15, 16.

2. 设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 函数$f$在$E$上有定义, 满足: 对任意$\varepsilon>0$ 存在$g,h\in L^1(E)$使得$g(x)\le f(x)\le h(x)$ for all $x\in E$ 并且

$$\int_E [\,h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证明$f\in L^1(E)$ (注意先证f在E上可测!).

3. 设$f\in L^1(\mathbb{R}^d), K\subset\mathbb{R}^d$是紧集. 证明

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_{K+y} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

4. 设$0\le f\in L^1([0,\infty))$. (1) 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+2} f(x)\mathrm{d}x\le 2\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设正数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$满足: 每个长度为1 的区间至多含有$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$中的5项. 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x+a_n)<\infty$ a.e. $x\in[0,\infty)$ 从而有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x+a_n)=0$ a.e. $x\in[0,\infty)$.

[提示: 先在$[0,1]$上积分, 考虑重组: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n\in S_k}$ 其中$S_k=\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\in[k,k+1)\}$, 规定空集上的求和为零.]

5. 设数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$|a_n|\le\log n$, $n=2,3,...;$. 证明

$$\int_2^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2\log n}.$$

这里$\log=\ln$.

6. 证明下列等式:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x=\Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},\quad \alpha>1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{n^2+a^2}, \quad a>0.$$

这里$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,(s>0)$ 是Gamma 函数.

7. 设$f\in L^1(\mathbb{R})$, $a>0$. 证明

$$S(x):=\sum_{n=-\infty}^\infty f\Big(\frac{x}{a}+n\Big)$$

在$\mathbb{R}$上几乎处处绝对收敛(从而几乎处处收敛) 并且和函数$S(x)$是一个以a为周期的周期函数且$S\in L^1([0,a])$.

8. 设$f\in L^1(\mathbb{R})$. 试 (通过级数收敛蕴含通项趋于零) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{(\log n)^2}=0 \quad \text{a.e.} \quad x\in\mathbb{R}.$$

9. 设f是$\mathbb{R}$)上的周期函数, 周期为$T>0$. 设$f\in L^1([0,T])$, 证明f在$\mathbb{R}$上可测且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n^2}=0 \quad \text{a.e.} \quad x\in\mathbb{R}.$$

10. 设$E_n\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m(E_n)<\infty$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{1}_{E_n}(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证明存在$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$使得$f(x)=\mathbf{1}_E(x)$ a.e. $x\in\mathbb{R}^d$.

11. 设$f\in L^1((0,\infty)), g$在$(0,\infty)$上可测且$M:=\sup\limits_{x>0}\frac{|g(x)|}{x}<\infty$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t=0.$$

12. 设$x^sf(x), x^tf(x)$都在$(0,\infty)$上可积, 其中$s<t$. 证明对任意$u\in[s,t]$, 函数$x^uf(x)$在$(0,\infty)$上可积且函数

$$g(u):=\int_0^\infty x^uf(x)\mathrm{d}x \quad 在\ [s,t]\ 上连续.$$

13. 试给出一列实函数$\{g_n\}_{n=1}^\infty\subset C([0,1]^d)$, 它在积分度量下是一个Cauchy 列, 即

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_{[0,1]^d}|g_n(x)-g_m(x)|\mathrm{d}x=0$$

但不存在$f\in\mathcal{R}([0,1]^d)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^d}|g_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

由此说明(在积分度量下)Riemann 可积函数空间$\mathcal{R}([0,1]^d)$不是完备的。

14(关于Fubini定理的习题). Stein和Shakarchi的《实分析》第2章第5节习题17,18,19.

周民强《实变函数论》(第2版2008 年, 北大出版社) P213 思考题1, 2, 3, 4；P224 习题30, 31, 32, 33, 34，P227 习题18, 19, 21, 23.

15. Stein和Shakarchi的《实分析》第2章第5节习题21, 22, 23, 24, 25; 第6节习题1, 2.

作业(2018-5-9)

• 把**定理2.8.1** 和其后的Sard 定理中的"$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 属于C^1类"换成"$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 可微", 证明结论仍成立。(详见下面**学生作业1、2**)

• 把换元公式**定理2.8.2**中的"$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 属于C^1类"换成"$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 可微且$\{x\in\Omega\,|\,\det\varphi'(x)\neq 0\}$ 是开集", 证明结论仍成立。(详见下面**学生作业3**)

在证明中要用到《数学分析》课程中证明的下面定理(可以承认使用之)

【命题1 (可微映射的开映射定理)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 可微且$\varphi'(x)$在Ω上处处可逆, 即$\det\varphi'(x)\neq 0$ for all $x\in\Omega$. 则φ 是开映射, 即对任意开集$U\subset\Omega$, $\varphi(U)$ 是$\mathbb{R}^d$中的开集.

注意: 因定义域Ω 和值域$\varphi(\Omega)$都含于$\mathbb{R}^d$, 故Jacobi矩阵$\varphi'(x)$ 是方阵！

【证】设开集$U\subset\Omega$, 来证明$\varphi(U)$ 是开集. 任取$y_0\in\varphi(U)$, 须证明存在$\varepsilon>0$ 使得$B(y_0,\varepsilon)\subset\varphi(U)$.　写$y_0=\varphi(x_0), x_0\in U$. 令$A=\varphi'(x_0)$.

由φ 可微知$\varphi(x)=\varphi(x_0)+A(x-x_0)+o(|x-x_0|)$ 即

$$\lim_{U\ni x\to x_0}\frac{|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|}=0.$$

据此有: 存在$\delta>0$ 使得闭球$\overline{B}(x_0,\delta)\subset U$ 且

$$\frac{|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|}<\frac{1}{2\|A^{-1}\|}\qquad\forall\,x\in\overline{B}(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}.$$

即

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)|<\frac{|x-x_0|}{2\|A^{-1}\|}\qquad\forall\,x\in\overline{B}(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}.$$

这里$\|\cdot\|$为矩阵范数．由此有

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)-\varphi(x_0)| &\geq |A(x-x_0)| - |\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)| \\
&> |A(x-x_0)| - \frac{|x-x_0|}{2\|A^{-1}\|} \geq \frac{|x-x_0|}{2\|A^{-1}\|} = \frac{\delta}{2\|A^{-1}\|} \quad \forall\, x\in\partial B(x_0,\delta) \qquad (*)
\end{aligned}
$$

其中用到不等式

$$|x-x_0| = |A^{-1}A(x-x_0)| \leq \|A^{-1}\||A(x-x_0)|.$$

令

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min_{x\in\partial B(x_0,\delta)}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|.$$

则由$(*)$ 知

$$\varepsilon \geq \frac{\delta}{4\|A^{-1}\|} > 0.$$

下证$B(\varphi(x_0),\varepsilon)\subset\varphi(B(x_0,\delta))$．任取$y\in B(\varphi(x_0),\varepsilon)$．我们有: 对任意$x\in\partial B(x_0,\delta)$

$$|\varphi(x)-y| \geq |\varphi(x)-\varphi(x_0)| - |\varphi(x_0)-y| \geq 2\varepsilon - |\varphi(x_0)-y| > |\varphi(x_0)-y|. \qquad (**)$$

设$x_*\in\overline{B}(x_0,\delta)$ 是函数$x\mapsto|\varphi(x)-y|^2$ 在闭球$\overline{B}(x_0,\delta)$上的最小值点, 即

$$|\varphi(x_*)-y|^2 = \min_{x\in\overline{B}(x_0,\delta)}|\varphi(x)-y|^2$$

则由严格不等式$(**)$知$x_*\notin\partial B(x_0,\delta)$．因此$x_*\in B(x_0,\delta)$．因$B(x_0,\delta)$ 是开集, 故存在$\eta>0$ 使得$B(x_*,\eta)\subset B(x_0,\delta)$．于是有$|\varphi(x)-y|^2\geq|\varphi(x_*)-y|^2$ for all $x\in B(x_*,\eta)$. 这表明点$x_*\in B(x_0,\delta)$ 是函数$x\mapsto|\varphi(x)-y|^2$ 在开球$B(x_0,\delta)$ 内的一个极小值点. 据极值原理知

$$(|\varphi(x)-y|^2)'_x\Big|_{x=x_*} = 0.$$

在欧氏范数平方的微分关系式

$$(|g(x)|^2)' = 2g(x)^\tau g'(x)$$

中取$g(x)=\varphi(x)-y$ 得到

$$0 = (|\varphi(x)-y|^2)'_x\Big|_{x=x_*} = 2(\varphi(x_*)-y)^\tau\varphi'(x_*).$$

而由假设知$\varphi'(x_*)$ 可逆, 故得$2(\varphi(x_*)-y)^\tau=0$ 即$\varphi(x_*)-y=0$．所以$y=\varphi(x_*)\in\varphi(B(x_0,\delta))$．这证明了$B(y_0,\varepsilon)=B(\varphi(x_0),\varepsilon)\subset\varphi(B(x_0,\delta))\subset\varphi(U)$．由$y_0\in\varphi(U)$的任意性即知$\varphi(U)$ 是开集. $\square$

【**命题2 (可微映射的逆映射定理)**】设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$为单射、可微且$\varphi'(x)$ 在Ω上处处可逆, 即$\det\varphi'(x) \neq 0$ for all $x \in \Omega$. 则$\varphi(\Omega)$是开集, 逆映射$y \mapsto \varphi^{-1}(y)$ 在$\varphi(\Omega)$上可微且

$$(\varphi^{-1})'(y) = [\varphi'(x)]^{-1}\Big|_{x=\varphi^{-1}(y)}, \quad y \in \varphi(\Omega).$$

[注: 为证命题2, 先应用命题1 证明逆映射$y \mapsto \varphi^{-1}(y)$ 在$\varphi(\Omega)$上连续。]

学生作业1. 证明【**定理2.8.1***】设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 可微. 则对任何可测集$E \subset \Omega$, 象集$\varphi(E)$是可测集且

$$m(\varphi(E)) \le \int_E |\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

证明步骤(供参考):

Step 0. 证明$x \mapsto \det\varphi'(x)$ 是Ω上的可测函数.

Step 1. 证明φ 把Ω中的零测集映为零测集从而把Ω中的可测集映为可测集[参见习题课].

Step 2. 证明对任意$x_0 \in \Omega$, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta = \delta_{x_0,\varepsilon} > 0$ 使得$\overline{B}(x_0, \delta) \subset \Omega$ 且

$$\frac{m(\varphi(\overline{B}(x_0, r))}{m(\overline{B}(x_0, r))} < |\det\varphi'(x_0)| + \varepsilon \qquad \forall\, 0 < r \le \delta.$$

证明中的核心一步是

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}\Big(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{r}, K\Big) \le \Big|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{r} - A(\frac{x-x_0}{r})\Big| \\ &= \frac{|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)|}{r} \le \eta\frac{|x-x_0|}{r} \le \eta \qquad \forall\, x \in \overline{B}(x_0, r),\ 0 < r \le \delta\end{aligned}$$

其中

$$K = A(\overline{B}(0, 1)), \quad A = \varphi'(x_0).$$

Step 3. 设$E \subset \Omega$为可测集, 满足存在常数$0 < M < +\infty$ 使得$|\det\varphi'(x)| \le M$ for all $x \in E$. 证明

$$m(\varphi(E)) \le Mm(E).$$

Step 4. 对任意可测集$E \subset \Omega$ 满足$m(E) < +\infty$, 证明

$$m(\varphi(E)) \le \int_E |\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

Step 5. 对任意可测集$E \subset \Omega$, 证明

$$m(\varphi(E)) \le \int_E |\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

□

学生作业2. 证明【**Srad定理*(可微映射的临界值是零测集)**】设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 可微, $S = \{x \in \Omega \mid \mathrm{det}\varphi'(x) = 0\}$. 则$m(\varphi(S)) = 0$.

学生作业3. 证明【**定理2.8.2*(积分换元公式)**】设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 为单射且可微, 并假设$\{x \in \Omega \mid \mathrm{det}\varphi'(x) \ne 0\}$是开集.

(a) 若$f \in L^1(\varphi(\Omega))$ 或f在$\varphi(\Omega)$上非负可测, 则成立换元公式:

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

(b) 一般地, 设可测集$E \subset \Omega$, 函数$f \in L^1(\varphi(E))$ 或f 在$\varphi(E)$ 上非负可测. 则有

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\mathrm{d}y = \int_E f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,.$$

以上**(a)**,**(b)** 分别包含了函数$x \mapsto f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|$ 在Ω 和E上的可积性和相应的非负可测性. 特别在**(b)**中取$f \equiv 1$ 有

$$m(\varphi(E)) = \int_E |\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,.$$

学生作业4. 本题是同维数Sard 定理的逆定理. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$为开集, 映射$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 和子集$E \subset \Omega$ 满足: 对每个$x \in E$, φ在x可微; 象集$\varphi(E)$是零测集, 即$m(\varphi(E)) = 0$. 则有$\mathrm{det}\varphi'(x) = 0$ a.e. $x \in E$.

学生作业5. 设实值函数f在开区间$(a, b) \subset \mathbb{R}$上可测, $E \subset (a, b)$ 为可测集, f在E中每点可微. 则$f(E)$是可测集且

$$m(f(E)) \le \int_E |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

习题课(2018-4-20)

1. 设f是有界闭区间$[a,b]\subset\mathbb{R}$上单调不减的实值函数. 令

$$D^+f(x)=\limsup_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad x\in[a,b).\qquad (\text{右上导数})$$

证明D^+f几乎处处有限, 即$(0\le)\ D^+f(x)<+\infty$ a.e. $x\in[a,b)$.

【证】只需证明

$$E=\{x\in(a,b)\mid D^+f(x)=+\infty\}$$

是零测集. 任给定$M>0$. 对任意$x\in E$和任意$\varepsilon>0$, 由$D^+f(x)=+\infty$知

$$\text{存在}\,0<h_{x,\varepsilon}<\varepsilon\ \text{使得}\ [x,x+h_{x,\varepsilon}]\subset(a,b)\ \text{且}\ \frac{f(x+h_{x,\varepsilon})-f(x)}{h_{x,\varepsilon}}>M.\tag{1}$$

区间族$\mathcal{V}=\{[x,x+h_{x,\varepsilon}]\mid x\in E,\varepsilon>0\}$构成了$E$的一个Vitali覆盖, 因此由Vitali覆盖引理, 存在可数多个互不相交的闭区间$[a_k,b_k]\in\mathcal{V}$ 使得

$$m^*(E\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[a_k,b_k])=0.$$

这里$\mathbb{N}_0=\{1,2,...,N\}\ (N\in\mathbb{N})$ 或$=\mathbb{N}$. 据(1) 可知

$$b_k-a_k<\frac{1}{M}[f(b_k)-f(a_k)]\qquad\forall\, k\in\mathbb{N}_0.\tag{2}$$

易见

$$E\subset\Big(E\setminus\bigcup_{k\ge1}[a_k,b_k]\Big)\cup\bigcup_{k\ge1}[a_k,b_k]$$

因此由外测度的次可加性和(2) 有

$$m^*(E)\le m\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[a_k,b_k]\Big)=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(b_k-a_k)\le\frac{1}{M}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}[f(b_k)-f(a_k)].\tag{3}$$

下证

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}[f(b_k)-f(a_k)]\le f(b)-f(a).\tag{4}$$

若此式成立, 则结合(3)得到估计

$$m^*(E)<\frac{1}{M}[f(b)-f(a)].$$

再由$M>0$的任意性(或令$M\to+\infty$) 即知$m^*(E)=0$.

为证(4), 我们采用测度论的方法. 由f单调不减知当$x\in\mathbb{N}_0$ 时$f(a_k)\le f(b_k)$ 且闭区间$[f(a_k),f(b_k)]$ 互不重叠(注意: 因f不一定是严格递增的, 故这些闭区间可能是退化

的). 事实上对任意$i,j\in\mathbb{N}_0$, 不妨设$a_i<a_j$. 则由$[a_i,b_i],[a_j,b_j]$ 不相交知$b_i<a_j$ 从而再由f单调不减有$f(a_i)\le f(b_i)\le f(a_j)\le f(b_j)$. 因此

$$m([f(a_i),f(b_i)]\cap[f(a_j),f(b_j)])=0.$$

因$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[f(a_k),f(b_k)]\subset[f(a),f(b)]$, 故由互不重叠的可测集的可加性有

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{N}_0}[f(b_k)-f(a_k)]=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}m([f(a_k),f(b_k)])\\&=m\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[f(a_k),f(b_k)]\Big)\le m([f(a),f(b)]=f(b)-f(a).\qquad\square\end{aligned}$$

2. 设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $m(E)>0,f\in L^1(E)\cap L^\infty(E)$. 则有

$$\|f\|_{L^\infty}=\lim_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}.$$

注: (1) 助教先回忆$L^\infty(E)$ 和$\|f\|_{L^\infty}$的定义(也见上面讲义):

$$\|f\|_{L^\infty}=\|f\|_{L^\infty(E)}=\inf_{Z\subset E,\,m(Z)=0}\sup_{x\in E\setminus Z}|f(x)|.$$

(2)本题解释了$L^\infty(E)$中“∞”的缘由.

(3) 当$m(E)<\infty$时易见$L^\infty(E)\subset L^1(E)$.

(4) 当$m(E)=\infty$时, 取常值函数$f(x)\equiv1\,(x\in E)$ 知$f\in L^\infty(E)$ 但$f\not\in L^p(E)$ for all $1\le p<\infty$. 因此当$m(E)=\infty$时, 交集条件$f\in L^1(E)\cap L^\infty(E)$ (或存在$1<p_0<\infty$使得$f\in L^{p_0}(E)\cap L^\infty(E)$) 是必要的.

【本题证明】令$M=\|f\|_{L^\infty}$. 若$M=0$ 则$f=0$ a.e. 于E 从而$\|f\|_{L^p}=0$ for all $p\ge1$, 此时所证等式成立。设$M>0$.

由$L^\infty(E)$的定义知对任意$0<\varepsilon<M$ 有$m(E(|f|>M-\varepsilon))>0$. 于是对任意$p>1$有

$$\begin{aligned}&\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\ge\int_{E(|f|>M-\varepsilon)}|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{E(|f|>M-\varepsilon)}|f(x)|^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x\\&\ge(M-\varepsilon)^{p-1}\int_{E(|f|>M-\varepsilon)}|f(x)|\mathrm{d}x\\&\Longrightarrow\|f\|_{L^p}\ge(M-\varepsilon)^{1-\frac1p}\Big(\int_{E(|f|>M-\varepsilon)}|f(x)|\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\\&\Longrightarrow\liminf_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}\ge M-\varepsilon.\end{aligned}$$

由ε的任意性(或令$\varepsilon\to0+$) 知$\liminf\limits_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}\ge M$.

另一方面由$L^\infty(E)$的定义知$|f(x)|\le M$ a.e. $x\in E$. 因此

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x\le M^{p-1}\|f\|_{L^1}\qquad\forall\, p>1,$$
$$\Longrightarrow\ \|f\|_{L^p}\le M^{1-\frac{1}{p}}(\|f\|_{L^1})^{\frac{1}{p}}$$
$$\Longrightarrow\ \limsup_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}\le M.$$

所以

$$\limsup_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}\le M\le\liminf_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}\le\limsup_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}$$

因此

$$\limsup_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}=\liminf_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}=M\ (<\infty).$$

所以极限$\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}$存在且等于$M=\|f\|_{L^\infty}$. $\square$

提问: 设f是$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上的可测函数, 满足

$$\int_E|f(x)|^n\mathrm{d}x\le 5^n,\quad n=1,2,3,\dots.$$

能否断言$f\in L^\infty(E)$且$\|f\|_{L^\infty}\le 5$?

[回答是肯定的: 【证】要证明$m(E(|f|>5))=0$. 为此, 令

$$g_n(x)=\Big(\frac{|f(x)|}{5}\Big)^n,\quad x\in E(|f|>5),\ n=1,2,3,\dots.$$

则有

$$\int_{E(|f|>5)}g_n(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{5^n}\int_E|f(x)|^n\mathrm{d}x\le 1,\quad n=1,2,3,...,$$
$$0<g_n(x)\le g_{n+1}(x),\ n=1,2,3....;\quad \lim_{n\to\infty}g_n(x)=+\infty\quad\forall\, x\in E(|f|>5).$$

由Levi 渐升积分定理或Fatou 引理得

$$(+\infty)\cdot m(E(|f|>5))=\int_{E(|f|>5)}(+\infty)\mathrm{d}x=\int_{E(|f|>5)}\lim_{n\to\infty}g_n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{E(|f|>5)}g_n(x)\mathrm{d}x\le 1.$$

这就迫使$m(E(|f|>5))=0$. $\square$]

3. 设$f\in L^1(\mathbb{R})$. 证明

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{n}}|f(x-\sqrt{n})|<\infty\quad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}.$$

【证】(可先让学生想5–10分钟) 令

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}|f(x-\sqrt{n})|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

则F是$\mathbb{R}$上的非负可测函数(因F等于可测函数列的极限). 为证本题, 只需证明

$$\int_{y_0}^{y_0+1}F(x)\mathrm{d}x<\infty\qquad\forall\, y_0\in\mathbb{R}\tag{$*$}$$

因为若$(*)$成立, 则取$y_0=j\in\mathbb{Z}$知$Z_j:=\{x\in[j,j+1]\mid F(x)=\infty\}$ 是零测集从而$Z:=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}Z_j$ 是零测集. 而对每个$x\in\mathbb{R}\setminus Z$, 存在$j\in\mathbb{Z}$使得$x\in[j,j+1]$ 从而由有$x\in[j,j+1]\setminus Z_j$, 因此$F(x)<\infty$.

把积分项转为区域的变化

任取$y_0\in\mathbb{R}$, 计算: 由逐项积分和简单的积分换元有

$$\int_{y_0}^{y_0+1}F(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{y_0}^{y_0+1}|f(x-\sqrt{n})|\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1}|f(y_0+1-t)|\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1}g(t)\mathrm{d}t$$
其中 $g(t):=|f(y_0+1-t)|$.

根据正项级数可以任意重排(其和不变) 有

$$\int_{y_0}^{y_0+1}F(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1}g(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1}g(t)\mathrm{d}t\Big)$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{k}\int_{k}^{\sqrt{(k+1)^2-1}+1}g(t)\mathrm{d}t\Big)\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Big(\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}1\Big)\int_{k}^{k+2}g(t)\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k}\int_{k}^{k+2}g(t)\mathrm{d}t\le 3\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_{k}^{k+1}g(t)\mathrm{d}t+\int_{k+1}^{k+2}g(t)\mathrm{d}t\Big)$$
$$=3\int_{1}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t+3\int_{2}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t\le 6\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t=6\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty.\qquad\Box$$

4. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为一开集. 证明存在很多函数$f\in L^{\infty}(\Omega)$ 使得

$$\|g-f\|_{L^{\infty}}\ge 1/2\qquad\forall\, g\in C_b(\Omega)$$

这里$C_b(\Omega)$表示是在Ω上连续且有界的函数的全体, 即等价地$C_b(\Omega)=C(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$.

[本题说明, 与$1\le p<\infty$ 不同, 当$p=\infty$时, 连续函数类在$L^{\infty}(\Omega)$中不稠密. 这个结论对任何$L^{\infty}(E)$都成立其中$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$满足$m(E)>0$.]

【证】回忆记号

$$\|f\|_{L^\infty}=\|f\|_{L^\infty(\Omega)}=\inf_{Z\subset\Omega,\, m(Z)=0}\ \sup_{x\in\Omega\setminus Z}|f(x)|.$$

将可数集$D:=\Omega\cap\mathbb{Q}^d$排成一列: $D=\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 其中a_k 互不相同. 由有理数的稠密性知这可数集在Ω中稠密. 考虑$G=\bigcup_{k=1}^\infty B(a_k,\frac{\varepsilon}{2^k}),\varepsilon>0$. 我们有$m(G)\le\sum_{k=1}^\infty m(B(a_k,\frac{\varepsilon}{2^k}))=C_d\sum_{k=1}^\infty(\frac{\varepsilon}{2^k})^d\le C_d\varepsilon$, 其中$C_d=m(\mathbb{B}^d)$ 等于单位球的测度. 取$\varepsilon>0$充分小使得$C_d\varepsilon<\frac{1}{2}m(\Omega)$. 则得知$m(G)<\frac{1}{2}m(\Omega)$. 令

$$A=\Omega\setminus G,\quad f(x)=\mathbf{1}_A(x).$$

则由$\Omega\subset A\cup G$ 知$m(A)>0$. 来证明对任意$g\in C_b(\Omega)$ 有$\|g-f\|_{L^\infty}\ge 1/2$. 据$\|\cdot\|_L^\infty$的定义, 这只需证明对任意零测集$Z\subset\Omega$ 和任意$g\in C_b(\Omega)$都有 $\sup\limits_{x\in\Omega\setminus Z}|g(x)-f(x)|\ge 1/2$. 我们用反证法: 假设存在零测集$Z_0\subset\Omega$和某个$g\in C_b(\Omega)$ 使得

$$\sup_{x\in\Omega\setminus Z_0}|g(x)-f(x)|<1/2,$$

来导出矛盾. 由$Z_0\cup D$是零测集知$A\setminus(Z_0\cup D)\neq\emptyset$. 取$x_0\in A\setminus(Z_0\cup D)$. 由$D=\{a_k\}_{k=1}^\infty$在$\Omega$中稠密和$x_0\in\Omega\setminus D$ 知存在子列$\{a_{k_j}\}_{j=1}^\infty$使得$a_{k_j}\to x_0\,(j\to\infty)$ 这里$k_1<k_2<k_3<\cdots$.[6] 其次由$\Omega\cap B(a_{k_j},\frac{\varepsilon}{2^{k_j}})$是非空开集而$Z_0\cup D$是零测集知 $\Omega\cap B(a_{k_j},\frac{\varepsilon}{2^{k_j}})\setminus(Z_0\cup D)\neq\emptyset$, 因此可以取定$x_j\in\Omega\cap B(a_{k_j},\frac{\varepsilon}{2^{k_j}})\setminus(Z_0\cup D)$, $j=1,2,3,\dots$. 这蕴含$|x_j-x_0|\le|x_j-a_{k_j}|+|a_{k_j}-x_0|\le\frac{\varepsilon}{2^{k_j}}+|a_{k_j}-x_0|\to 0\,(j\to\infty)$. 因$g$连续, 故$g(x_0)=\lim\limits_{j\to\infty}g(x_j)$. 又由$G$和$A$的定义知$x_j\in G\setminus(Z_0\cup D)$ 因此$x_j\notin A$ 从而有

$$f(x_j)=0,\ \ |g(x_j)|=|g(x_j)-f(x_j)|\le\sup_{x\in\Omega\setminus Z_0}|g(x)-f(x)|<1/2,\quad j=1,2,3,\dots.$$

这蕴含$|g(x_0)|=\lim\limits_{j\to\infty}|g(x_j)|\le\frac{1}{2}$. 又由$x_0\in A\setminus(Z_0\cup D)$ 知$f(x_0)=1$. 于是得到矛盾:

$$1\le|1-g(x_0)|+|g(x_0)|\le|f(x_0)-g(x_0)|+1/2\le\sup_{x\in E\setminus Z_0}|f(x)-g(x)|+1/2<1.$$

这矛盾证明了本题结论. □

[6]因$x_0\notin D=\{a_k\}_{k=1}^\infty$, 故$|a_k-x_0|>0$ for all $k\in\mathbb{N}$. 由D的稠密性易见依次存在$k_1,k_2,k_3,...\in\mathbb{N}$ 使得$k_1=1$, $0<|a_{k_j}-x_0|\le\frac{1}{j}\min\limits_{1\le k\le k_{j-1}}\frac{|a_k-x_0|}{1+|a_k-x_0|}, j=2,3,4,\dots$. 这蕴含$k_1<k_2<k_3<\cdots$ 且$|a_{k_j}-x_0|\le\frac{1}{j}\to 0\,(j\to\infty)$.

习题课2018-5-11.

1. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 有有限的上导数, 即

$$\overline{D}_{\varphi}(x):=\lim_{\delta\to0+}\sup_{|0<|y-x|\le\delta}\frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|}<+\infty\quad\forall\,x\in\Omega.$$

证明φ 把Ω中的零测集映为零测集, 从而把可测集应为可测集.

【证】由假设易见对任意$x\in\Omega$ 存在$\delta_x>0$ 使得

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|\le(\overline{D}_{\varphi}(x)+1)|y-x|\qquad\forall\,y\in\overline{B}(x,\delta_x)\subset\Omega.$$

这首先蕴含φ在Ω上连续. 因此只需证明φ 把Ω中的零测集映为零测集。

设$Z\subset\Omega$是零测集. 令

$$Z_n=\{x\in Z\mid|\varphi(y)-\varphi(x)|\le n|y-x|\quad\forall\,y\in\overline{B}(x,\delta_x)\},\quad n=1,2,3,\dots.$$

则有

$$Z=\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n,\quad\varphi(Z)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi(Z_n).$$

于是只要证明每个$\varphi(Z_n)$是零测集. 固定$n\in\mathbb{N}$. 对任意$\varepsilon>0$, 因$m(Z_n)=0$, 故存在开集$G\supset Z_n$ 使得$m(G)<\varepsilon$. 可以假设$G\subset\Omega$ (否则以$G\cap\Omega$ 代替G). 对每个$x\in Z_n$, 取$0<r_x<\delta_x$ 使得$\overline{B}(x,r_x)\subset G$. 易见

$$\mathcal{V}=\{\overline{B}(\varphi(x),n\delta)\mid x\in Z_n,\,0<\delta\le r_x\}$$

是$\varphi(Z_n)$的一个Vitali 覆盖(这是因为闭球的半径$n\delta$ 可以任意小)。据Vitali 覆盖引理, 存在可数多个**互不相交的**闭球$\overline{B}(\varphi(x_k),n\delta_k)$ 使得

$$m^*\Big(\varphi(Z_n)\setminus\bigcup_{k\ge1}\overline{B}(\varphi(x_k),n\delta_k)\Big)=0.$$

由此和外测度的次可加性得到

$$m^*(\varphi(Z_n))\le\sum_{k\ge1}m(\overline{B}(\varphi(x_k),n\delta_k))=n^d\sum_{k\ge1}m(\overline{B}(x_k,\delta_k)).$$

断言: 闭球$\overline{B}(x_k,\delta_k)$ 互不相交. 否则存在$i\neq j$ 和$x_*\in\overline{B}(x_i,\delta_i)\cap\overline{B}(x_j,\delta_j)$, 则由$\delta_i\le r_{x_i}\le\delta_{x_i},\delta_j\le r_{x_j}\le\delta_{x_j}$ 有

$$|\varphi(x_*)-\varphi(x_i)|\le n|x_*-x_i|\le n\delta_i,\quad|\varphi(x_*)-\varphi(x_j)|\le n|x_*-x_j|\le n\delta_j$$

$$\Longrightarrow\ \varphi(x_*)\in\overline{B}(\varphi(x_i),n\delta_i)\cap\overline{B}(\varphi(x_j),n\delta_j)=\emptyset,\quad\text{矛盾}.$$

于是由闭球$\overline{B}(x_k,\delta_k)$ 互不相交且都含于G 得到

$$m^*(\varphi(Z_n))\le n^d\sum_{k\ge1}m(\overline{B}(x_k,\delta_k))=n^d m\Big(\bigcup_{k\ge1}\overline{B}(x_k,\delta_k)\Big)\le n^d m(G)<n^d\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$的任意性(或令$\varepsilon\to0+$) 便知$m^*(\varphi(Z_n))=0$. $\square$

2. 本题是同维数Sard 定理的逆定理. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$为开集, 映射$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 和子集$E\subset\Omega$ 满足: 对每个$x\in E$, φ在x可微; 象集$\varphi(E)$是零测集, 即$m(\varphi(E))=0$. 则有$\det\varphi'(x)=0$ a.e. $x\in E$.

【证】[参考周民强《实变函数论》中的一维情形] 要证$m^*(E(\det\varphi'\ne0))=0$. 令

$$E_n=\{x\in E\mid |\varphi(y)-\varphi(x)|\ge\frac{1}{n}|y-x|\ \ \forall\, y\in B(x,1/n)\cap\Omega\,\}.$$

来证明[7]

$$E(\det\varphi'\ne0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n. \tag{$*$}$$

任取$x\in E(\det\varphi'\ne0)$, 则$x\in E$且$\det\varphi'(x)\ne0$ 即Jacobi矩阵$\varphi'(x)$可逆. 据可微的定义知,

$$\varphi(y)-\varphi(x)=\varphi'(x)(y-x)+\alpha(x,y-x)|y-x|$$

其中$\alpha(x,h)\to0$ 当$h\to0$时。由此知存在$\delta_x>0$使得当$|h|<\delta_x$时

$$|\alpha(x,h)|<\frac{1}{2\|[\varphi'(x)]^{-1}\|}$$

这里$\|\cdot\|$是矩阵范数. 周知对于可逆矩阵$A\in\mathbb{R}^{d\times d}$有

$$|Ah|\ge\frac{1}{\|A^{-1}\|}|h|\qquad\forall\, h\in\mathbb{R}^d.$$

【细: $|h|=|A^{-1}Ah|\le\|A^{-1}\||Ah|$. 】因此当$y\in B(x,\delta_x)$时, $|y-x|<\delta_x$,

$$\begin{aligned}&|\varphi(y)-\varphi(x)|=|\varphi'(x)(y-x)+\alpha(x,y-x)|y-x|\,|\\&\ge|\varphi'(x)(y-x)|-|\alpha(x,y-x)||y-x|\\&\ge\frac{1}{\|[\varphi'(x)]^{-1}\|}|y-x|-\frac{1}{2\|[\varphi'(x)]^{-1}\|}|y-x|=\frac{1}{2\|[\varphi'(x)]^{-1}\|}|y-x|.\end{aligned}$$

取$n\in\mathbb{N}$ 使得$\frac{1}{n}<\min\{\delta_x,\,\frac{1}{2\|[\varphi'(x)]^{-1}\|}\}$, 则有

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|\ge\frac{1}{n}|y-x|\qquad\forall\, y\in B(x,1/n)\cap\Omega.$$

[7]实际上我们只需要$(*)$的左边$\subset$ $(*)$的右边, 但为了熟悉基本数学性质, 这里给出了等式及其证明.

因此$x \in E_n$. 这证明了$E(\det\varphi' \neq 0) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

反之对任意$n \in \mathbb{N}$ 和任意$x \in E_n$, 利用反证法和微分的定义易证必有$\det\varphi'(x) \neq 0$ 即$E_n \subset E(\det\varphi' \neq 0)$ 【细: 假设$\det\varphi'(x) = 0$, 则由线代数知存在$0 \neq h \in \mathbb{R}^d$使得$\varphi'(x)h = 0$. 而由$\varphi$在点$x \in E_n$ 可微有 (注意$\varphi'(x)th = t\varphi'(x)h = 0, t \in \mathbb{R}$)

$$\frac{1}{n} \leq \frac{|\varphi(x+th) - \varphi(x)|}{|th|} = \frac{|\varphi'(x)th + \alpha(x,th)|th|\,|}{|th|} = |\alpha(x,th)| \to 0 \quad \text{当} 0 \neq t \to 0 \text{时}$$

矛盾. 因此必有$\det\varphi'(x) \neq 0$.】 所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E(\det\varphi' \neq 0)$. 所以$(*)$成立。

由$(*)$可知为证$m^*E((\det\varphi' \neq 0)) = 0$ 只需证明$m^*(E_n) = 0, n = 1, 2, 3, \dots$.

固定任意$n \in \mathbb{N}$. 为证$m^*(E_n) = 0$ 先证明：

$$\text{对任意} a \in E_n \text{ 有 } m^*(E_n \cap B(a, \frac{1}{2n})) = 0.$$

对任意$\varepsilon > 0$, 因$m(\varphi(E)) = 0$, 故存在开集$G \supset \varphi(E)$ 使得$m(G) < \varepsilon$. 据$\mathbb{R}^d$中开集的方体分解, 可写$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ 其中Q_k是互不相交的左闭右开的方体. 令

$$E_{n,a,k} = \{x \in E_n \cap B(a, \frac{1}{2n}) \mid \varphi(x) \in Q_k\}, \quad k = 1, 2, 3, ..., .$$

则由$\varphi(E_n) \subset \varphi(E) \subset G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ 易见

$$E_n \cap B(a, \frac{1}{2n}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n,a,k}.$$

对任意$x, y \in E_{n,a,k}$ 有

$$\begin{aligned} &|y - x| \leq |y - a| + |a - x| < 2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow |y - x| \leq n|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq n\mathrm{diam}(Q_k) = n\sqrt{d}\, l_k \end{aligned}$$

这里l_k是方体Q_k的棱长. 这给出

$$\mathrm{diam}(E_{n,a,k}) \leq n\sqrt{d}\, l_k$$

取$x_k \in E_{n,a,k}$ 则有$E_{n,a,k} \subset \overline{B}(x_k, \mathrm{diam}(E_{n,a,k}))$ 从而有

$$m^*(E_{n,a,k}) \leq m^*(\overline{B}(x_k, \mathrm{diam}(E_{n,a,k}))) = C_d[\mathrm{diam}(E_{n,a,k})]^d \leq C_{d,n} l_k^d = C_{d,n} m(Q_k)$$

$$\Longrightarrow m^*(E_n \cap B(a, \frac{1}{2n})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_{n,a,k}) \leq C_{d,n} \sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) = C_{d,n} m(G) < C_{d,n}\varepsilon.$$

由$\varepsilon > 0$的任意性(或令$\varepsilon \to 0+$) 知$m^*(E_n \cap B(a, \frac{1}{2n})) = 0$.

开球族$\{B(a, \frac{1}{2n}) \,|\, a \in E_n\}$ 覆盖了E_n. 由可数覆盖性质(见上面第一次习题课的第1题(更新后的讲义) 或直接证明) 知存在$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ 和$\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subset E_n$ 使得$E_n \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} B(a_j, \frac{1}{2n})$. 于是有

$$E_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} E_n \cap B(a_j, \frac{1}{2n}), \quad m^*(E_n) \le \sum_{j\in\mathbb{N}_0} m^*(E_n \cap B(a_j, \frac{1}{2n})) = 0.$$

□

3. 设实值函数f在开区间$(a,b) \subset \mathbb{R}$上可测, $E \subset (a,b)$ 为可测集, f在E中每点可微. 则$f(E)$是可测集且

$$m(f(E)) \le \int_E |f'(x)| \mathrm{d}x.$$

【证】由假设易见$f'(x)$ 从而$|f'(x)|$是E上的可测函数。【将f零延拓到$\mathbb{R}$, 考虑$f_n(x) = n[f(x+1/n) - f(x)]$. 则$f_n$在$\mathbb{R}$上可测。对任意$x \in E$, 因$f$ 在x点可微, 故$f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. 再因$E$是可测集, 所以$f'(x)$ 是E上的可测函数列的极限从而是E上的可测函数。】

先设$m(E) < \infty$ 并设存在$0 < M < \infty$ 使得$|f'(x)| \le M$ for all $x \in E$. 此时来证明

$$m(f(E)) \le Mm(E).$$

我们将使用Vitali 覆盖。以下用$I(x,r)$ 表示以x为中心、r为半径的有界闭区间, 即

$$I(x,r) = [x-r, x+r], \quad x \in \mathbb{R},\ r > 0.$$

任给定$\eta > 0$. 存在开集$G \supset E$ 使得$m(G) < m(E) + \eta$. 注意$E \subset (a,b)$. 以开集$G \cap (a,b)$ 代替G 可以假设$G \subset (a,b)$. 对任意$x \in E$ 和任意$\varepsilon > 0$, 由$|f'(x)| \le M$ 和G是开集知存在$0 < \delta_{x,\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2(M+\eta)}$ 使得$I(x, \delta_{x,\varepsilon}) \subset G$ 且

$$|f(y) - f(x)| \le (M+\eta)|y-x| \le (M+\eta)\delta_{x,\varepsilon} \qquad \forall\, y \in I(x, \delta_{x,\varepsilon}).$$

由$\mathrm{diam}(I(f(x), (M+\eta)\delta_{x,\varepsilon})) = 2(M+\eta)\delta_{x,\varepsilon} < \varepsilon$ 和$\varepsilon > 0$的任意性知闭区间族

$$\mathcal{V} := \{I(f(x), (M+\eta)\delta_{x,\varepsilon}) \mid x \in E,\ \varepsilon > 0\}$$

是$f(E)$的一个Vitali 覆盖. 据Vitali 覆盖引理, 存在可数多个互不相交的闭区间
$I_k = I(f(x_k), (M+\eta)\delta_{x_k,\varepsilon_k}) \in \mathcal{V}$ 使得

$$m^*(f(E) \setminus \bigcup_{k\ge1} I_k) = 0.$$

由此和外测度的次可加性得到

$$m^*(f(E)) \le \sum_{k\ge1} m(I_k) = (M+\eta)\sum_{k\ge1} m(I(x_k,\delta_{x_k,\varepsilon_k})).$$

断言: $I(x_k,\delta_{x_k,\varepsilon_k})$ 互不相交. 否则设存在$i\ne j$ 使得$I(x_i,\delta_{x_i,\varepsilon_i})\cap I(x_j,\delta_{x_j,\varepsilon_j})\ne\emptyset$, 则取其中一个元素$x_*$, 由这些区间的做法有

$$|f(x_*)-f(x_i)|\le (M+\eta)\delta_{x_i,\varepsilon_i},\quad |f(x_*)-f(x_j)|\le (M+\eta)\delta_{x_j,\varepsilon_j}$$

这说明$f(x_*)\in I_i\cap I_j$ 从而矛盾于I_k 互不相交. 所以$I(x_k,\delta_{x_k,\varepsilon_k})$ 必是互不相交的. 因$I(x_k,\delta_{x_k,\varepsilon_k})\subset G$, 故有

$$\sum_{k\ge1} m(I(x_k,\delta_{x_k,\varepsilon_k})) = m\Big(\bigcup_{k\ge1} I(x_k,\delta_{x_k,\varepsilon_k})\Big)\le m(G)<m(E)+\eta.$$

代入上式得到

$$m^*(f(E))\le (M+\eta)(m(E)+\eta).$$

由$\eta>0$的任意性(或令$\eta\to0+$) 即得$m^*(f(E))\le Mm(E)$.

过渡到一般情形(即不假定$f'(x)$有界): 对任意$\varepsilon>0$, 令

$$E_n=\{x\in E\mid (n-1)\varepsilon\le|f'(x)|<n\varepsilon\},\quad n=1,2,3,\dots.$$

由$|f'(x)|$是E上的可测函数知E_n是可测集且互不相交. 易见$E=\bigcup_{n=1}^\infty E_n$. 将上面的结果应用于每个$E_n$ 有$m^*(f(E_n))\le n\varepsilon m(E_n)$ 从而有

$$\begin{aligned}m^*(f(E))&\le\sum_{n=1}^\infty m^*(f(E_n))\le\sum_{n=1}^\infty n\varepsilon m(E_n)=\sum_{n=1}^\infty\Big((n-1)\varepsilon m(E_n)+\varepsilon m(E_n)\Big)\\&\le\sum_{n=1}^\infty\int_{E_n}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon m(E)=\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon m(E).\end{aligned}$$

由$\varepsilon>0$的任意性(或令$\varepsilon\to0+$) 即得$m^*(f(E))\le\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x$.

最后对于一般情形(不假定$m(E)<\infty$), 由已证结果特别可知: 对任意零测集$Z\subset E$ 有$m^*(f(Z))\le\int_Z|f'(x)|\mathrm{d}x=0$. 因此$f$把$E$中的零测集映为零测集. 但$f$在$E$上连续, 故$f$把$E$中的可测集映为可测集. 特别$f(E)$是可测集. 令$E_n=E\cap(-n,n), n=1,2,3,\dots$ 则$m(E_n)<\infty$ 且$E_n\subset E_{n+1}, f(E_n)\subset f(E_{n+1}), f(E)=\bigcup_{n=1}^\infty f(E_n)$, 从而有

$$m(f(E))=\lim_{n\to\infty}m(f(E_n))\le\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}|f'(x)|\mathrm{d}x\le\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

□

第三章 微分与积分

本章用Lebesgue 测度论在最大程度上刻画函数的微分与积分的量化关系, 包括Lebesgue微分定理、可测集的密度定理、单调函数几乎处处可微、有界变差函数几乎处处可微、函数的绝对连续性(=Newton-Leibnitz 公式成立的充分必要条件), 等等. 主要工具是Vitali覆盖引理, Hardy-Littlewood 极大函数方法和Riesz 太阳升引理。本讲义对单调函数几乎处处可微的证明参考了周民强《实变函数论》中的证法, 它不需要假定函数连续, 因此不需要Riesz 太阳升引理。但这个太阳升引理在调和分析研究中起重要作用。在Stein & Shakarchi《实分析》书中, 有时为了达到某个目的, 不是寻求最短路径而是引领读者多看一些同样有趣的风景。

§3.1. 积分的微分

历史上是先有积分(出于面积丈量等的需要), 后有微分. 本章学习的微分, 其概念大部分体现在通常的密度或局部平均的概念里:

$$\lim_{[a,b]\ni x,\, b-a\to 0}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=f(x).$$

由于局部平均只涉及函数的局部行为, 这就需要引进局部可积的函数类:

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)=\{f:\mathbb{R}^d\to[-\infty,+\infty]\text{ 或 }\mathbb{C}\mid f\text{ 在}\mathbb{R}^d\text{ 中每个紧集上}L\text{-可积}\}.$$

为了研究函数的平均行为, Hardy-Littlewood 引进了极大函数.

【**Hardy-Littlewood极大函数**】设$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 令

$$f^*(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbb{R}^d$$

其中这里B遍取闭球。则称f^*为f的Hardy-Littlewood极大函数, 简称极大函数. 把“闭球”换成“闭方体”也同样定义极大函数$f^*(x)$. [注意, f^*是非负广义实值的, 也即不排除在某些点x处$f^*(x)=+\infty$的可能.] □

极大函数一定是可测函数：

【**引理3.1.1**】设$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, f^*为f的极大函数. 则对任意$t\in\mathbb{R}$, 集合$\mathbb{R}^d(f^*>t)$是开集. 特别可知f^*是$\mathbb{R}^d$上的L-可测函数.

【证】我们只对由闭球定义的极大函数进行证明, 闭方体的情形证法相同. 设$t\in\mathbb{R}$, 等价地来证明集合$\mathbb{R}^d(f^*\le t)$是闭集. 设$x_n\in\mathbb{R}^d(f^*\le t)$ 且$x_n\to x_0\in\mathbb{R}^d\,(n\to\infty)$.

任取闭球B满足$B \ni x_0$. 写$B = \overline{B}(a,r)$. 对任意$k \in \mathbb{N}$,考虑闭$B_k := \overline{B}(a, r+\frac{1}{k})$. 因$x_n \to x_0, (n \to \infty)$ 故当n充分大时有$x_n \in B_k$ 从而有

$$\frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} |f(y)| \mathrm{d}y \le f^*(x_n) \le t.$$

由于

$$m(B_k \setminus B) = m(B_k) - m(B) = C_d\Big((r+\frac{1}{k})^d - r^d\Big) \to 0 \quad (k \to \infty)$$

故由积分的绝对连续性有

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| \mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} |f(y)| \mathrm{d}y \le t.$$

因此由B的任意性得知

$$f^*(x_0) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| \mathrm{d}y \le t.$$

所以$x_0 \in \mathbb{R}^d(f^* \le t)$. 所以$\mathbb{R}^d(f^* \le t)$是闭集. □

极大函数的一个重要性质是下面的不等式

【定理3.1.2】设$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 则

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d \mid f^*(x) > \alpha\}) \le \frac{3^d}{\alpha}\|f\|_{L^1} \qquad \forall \alpha > 0.$$

特别这蕴含$f^*(x) < \infty$ a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

【证】任给$\alpha > 0$. 对任意$x \in \mathbb{R}^d(f^* > \alpha)$, 由极大函数和上确界的定义知存在闭球$B_x \ni x$ 使得$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \mathrm{d}y > \alpha$. 将闭球$B_x$的中心不动、半径扩大$\lambda > 1$ 倍作出一个开球$B_{x,\lambda} \supset B_x$. 由$m(B_{x,\lambda} \setminus B_x) = (\lambda^d - 1)m(B_x) \to 0 \, (\lambda \to 1+)$ 和积分的绝对连续性知

$$\lim_{\lambda \to 1+} \frac{1}{m(B_{x,\lambda})} \int_{B_{x,\lambda}} |f(y)| \mathrm{d}y = \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \mathrm{d}y > \alpha.$$

因此可以取定$\lambda_x > 1, \lambda_x - 1 <$充分小, 使得

$$\frac{1}{m(B_{x,\lambda_x})} \int_{B_{x,\lambda_x}} |f(y)| \mathrm{d}y > \alpha \quad \text{i.e.} \quad m(B_{x,\lambda_x}) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_{x,\lambda_x}} |f(y)| \mathrm{d}y. \tag{3.1.1}$$

现在集合$\mathbb{R}^d(f^* > \alpha)$ 被开球族$\{B_{x,\lambda_x}\}_{x \in \mathbb{R}^d(f^* > \alpha)}$ 覆盖. 对任意紧集$K \subset \mathbb{R}^d(f^* > \alpha)$, 开球族$\{B_{x,\lambda_x}\}_{x \in \mathbb{R}^d(f^* > \alpha)}$ 当然也覆盖了K. 因此据下面的**引理3.1.3** 知存在有限多个**互不相交的** 开球$B_1, B_2, ..., B_n \in \{B_{x,\lambda_x}\}_{x \in \mathbb{R}^d(f^* > \alpha)}$ 使得

$$m(K) \le 3^d \sum_{i=1}^n m(B_i) \le 3^d \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} \int_{B_i} |f(y)| \mathrm{d}y = \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup_{i=1}^n B_i} |f(y)| \mathrm{d}y \le \frac{3^d}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

其中第一个不等号是根据下面的**引理3.1.3**, 第二个不等号用到了不等式(3.1.1). 因$\mathbb{R}^d(f^* > \alpha)$是可测集, 故存在一列紧集$K_j \subset \mathbb{R}^d(f^* > \alpha)$ 使得$\lim\limits_{j\to\infty} m(K_j) = m(\mathbb{R}^d(f^* > \alpha))$. 于是得到

$$m(\mathbb{R}^d(f^* > \alpha)) = \lim_{j\to\infty} m(K_j) \le \frac{3^d}{\alpha}\|f\|_{L^1}.$$

最后由这一不等式有$m(\mathbb{R}^d(f^* > n)) \to 0\,(n \to \infty)$. 于是可知$\mathbb{R}^d(f^* = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^d(f^* > n)$是零测集. 所以$f^*(x) < +\infty$ a.e. $x \in \mathbb{R}^d$. $\square$

【引理3.1.3】设紧集$K \subset \mathbb{R}^d$被$\mathbb{R}^d$中的开球族$\mathcal{B}$覆盖, 则存在有限多个互不相交的开球$B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$使得

$$m(K) \le 3^d \sum_{i=1}^{n} m(B_i).$$

【证】据有限覆盖定理知存在有限个开球$B(a_1, r_1), B(a_2, r_2), ..., B(a_N, r_N) \in \mathcal{B}$ 使得$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(a_k, r_k)$. 将这些球重新编号后可以假设$r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_N$.

我们按下面程序寻找引理中的开球$B_1, B_2, ..., B_n$.

令$S_0 = \emptyset$. 易见存在$n \in \{1, 2, ..., N\}$ 使下列程序在第n完成:

> 依次取 $i = 1, 2, ..., n$ 使得
>
> $\{1, 2, ..., N\} \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{i-1}) \ne \emptyset$, 其中
>
> $S_i = \{k \in \{1, 2, ..., N\} \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{i-1}) \mid B(a_k, r_k) \cap B_i \ne \emptyset\}$,
>
> $B_i = B(a_{k_i}, r_{k_i}), \quad k_i = \min(\{1, 2, ..., N\} \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{i-1}))$.
>
> 最后得到分解 $\{1, 2, ..., N\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$.

需证明$B_1, B_2, ..., B_n$ 互不相交。否则, 存在$1 \le i < j \le n$ 使得$B_j \cap B_i \ne \emptyset$ 即$B(a_{k_j}, r_{k_j}) \cap B_i \ne \emptyset$. 则由

$$k_j \in \{1, 2, ..., N\} \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{j-1}) \subset \{1, 2, ..., N\} \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{i-1})$$

和S_i的定义知$k_j \in S_i$. 因$i \le j-1$ 故这蕴含$k_j \in S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{j-1}$ 从而与$k_j \in \{1, 2, ..., N\} \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{j-1})$ 矛盾. 所以$B_1, B_2, ..., B_n$ 互不相交。 令

$$3B_i = B(a_{k_i}, 3r_{k_i}), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

来证明 $\qquad B(a_k, r_k) \subset 3B_i \quad \forall\, k \in S_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$

对任意$k \in S_i$ $(i \in \{1, 2, ..., n\})$, 借助一个公共点$c_k \in B(a_k, r_k) \cap B_i$ 我们有:

$$\forall\, x \in B(a_k, r_k) \implies |x - a_{k_i}| \le |x - a_k| + |a_k - c_k| + |c_k - a_{k_i}| < 2r_k + r_{k_i} \le 3r_{k_i}$$

这里最后不等号用到了k_i的最小性: $k \in S_i \Longrightarrow k \ge k_i$. 所以$x \in 3B_i$ 因此$B(a_k, r_k) \subset 3B_i$. 根据以上性质我们得到

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(a_k, r_k) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k \in S_i} B(a_k, r_k) \subset \bigcup_{i=1}^{n} 3B_i$$
$$\Longrightarrow m(K) \le \sum_{i=1}^{n} m(3B_i) = 3^d \sum_{i=1}^{n} m(B_i). \qquad \square$$

【函数的Lebesgue点】 设$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 若$x \in \mathbb{R}^d$满足

$$\lim_{B \ni x,\, m(B) \to 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y = 0. \tag{3.1.2}$$

其中B是闭球, 则称x为f的一个Lebesgue 点。把“闭球”换成“闭方体”同样定义f的Lebesgue 点。 $\square$

用$\varepsilon - \delta$语言, 极限(3.1.2)可表述为:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \text{ 使得对任何满足} B \ni x \text{和} \mathrm{diam}(B) < \delta$$
$$\text{的闭球(相应地闭方体)} B \text{ 都有 } \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y < \varepsilon.$$

需要说明: 函数的Lebesgue点按闭球的定义和按闭方体的定义是等价的, 即二者给出相同的Lebesgue点. 这是由于闭球和闭方体可以互相控制:

对任意闭方体$Q = \prod_{i=1}^{d}[a_i - l/2, a_i + l/2]$, 取闭球$B = \overline{B}(a, \frac{\sqrt{d}}{2} l)$ 其中$a = (a_1, a_2, ..., a_d)$, 则有$Q \subset B$且

$$m(Q) = l^d = C_d (\frac{\sqrt{d}}{2} l)^d = C_d m(B),$$
$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y \le \frac{1}{C_d} \cdot \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y.$$

这里和下面记号C_d表示为只依赖于d的正常数, 在不同地方可以取不同的值.

反之对任意闭球$B = \overline{B}(a, r)$, 取闭方体$Q = \prod_{i=1}^{d}[a_i - r, a_i + r]$ 则有$B \subset Q$ 且

$$m(B) = C_d r^d = \widetilde{C}_d (2r)^d = \widetilde{C}_d m(Q),$$

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y \le \frac{1}{\widetilde{C}_d} \cdot \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y.$$

由此可知

$$\lim_{B\ni x,\, m(B)\to 0}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y=0 \Longleftrightarrow \lim_{Q\ni x,\, m(Q)\to 0}\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y=0.$$

由上述等价性可知, 对下面Lebesgue 微分定理和全密点陈述中的“闭球或闭方体”怎样理解都可以: 既可以理解为“B全为闭球”, 和相应地, “B全为闭方体”， 也可以理解为“B既可以为闭球也可以为闭方体”。

【Lebesgue 微分定理】设$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, 则$\mathbb{R}^d$中几乎每一点都是$f$的Lebesgue 点. 因此特别有

$$\lim_{B\ni x,\, m(B)\to 0}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}y=f(x)\qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d$$

其中B是闭球或闭方体.

【证】先设$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 对任意$\alpha>0$, 令

$$Z_\alpha=\Big\{x\in\mathbb{R}^d \;\Big|\; \lim_{\delta\to 0+}\sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y>2\alpha\Big\}.$$

来证明$m(Z_{2\alpha})=0$. 对任意$\varepsilon>0$, 由连续函数逼近定理, 存在$g\in C_c(\mathbb{R}^d)$使得

$$\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon.$$

来估计: 对任意$x,y\in\mathbb{R}^d$ 有

$$|f(y)-f(x)|\le |f(y)-g(y)|+|g(y)-g(x)|+|g(x)-f(x)|.$$

两边对$y\in B$积分然后除以$m(B)$并取上确界得到

$$\begin{aligned}
&\sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y\\
&\le \sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-g(y)|\mathrm{d}y\\
&+\sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B |g(y)-g(x)|\mathrm{d}y+|g(x)-f(x)|\\
&\le (f-g)^*(x)+\sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B |g(y)-g(x)|\mathrm{d}y+|g(x)-f(x)|.
\end{aligned}$$

由g连续有

$$\lim_{\delta\to 0+}\sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B |g(y)-g(x)|\mathrm{d}y=0\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^d.$$

因此对任意$x\in Z_\alpha$ 有

$$
\begin{aligned}
&2\alpha<\lim_{\delta\to0+}\sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y\le(f-g)^*(x)+|g(x)-f(x)|\\
&\Longrightarrow\ x\in\mathbb{R}^d((f-g)^*>\alpha)\cup\mathbb{R}^d(|g-f|>\alpha)\\
&\Longrightarrow\ Z_\alpha\subset\mathbb{R}^d((f-g)^*>\alpha)\cup\mathbb{R}^d(|g-f|>\alpha)\\
&\Longrightarrow\ m^*(Z_\alpha)\le m(\mathbb{R}^d((f-g)^*>\alpha))+m(\mathbb{R}^d(|g-f|\ge\alpha))\\
&\qquad\qquad\le\frac{3^d}{\alpha}\|f-g\|_{L^1}+\frac{1}{\alpha}\|g-f\|_{L^1}<\frac{3^d+1}{\alpha}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

由$\varepsilon>0$的任意性(或令$\varepsilon\to0+$) 知$m^*(Z_\alpha)=0$. 令

$$
Z=\Big\{x\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ \lim_{\delta\to0+}\sup_{B\ni x,\,\mathrm{diam}(B)<\delta}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y>0\Big\}.
$$

则

$$
Z=\bigcup_{n=1}^\infty Z_{1/n}\quad\text{从而有}\quad m(Z)=0.
$$

由Lebesgue 点的定义知$\mathbb{R}^d\setminus Z$中每一点都是f的Lebesgue 点.

回到局部可积的情形, 设$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 则对任意$n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{1}_{(-2n,2n)^d}(x)f(x)$ 属于$L^1(\mathbb{R}^d)$. 因此有

$$
\lim_{B\ni x,\,m(B)\to0}\frac{1}{m(B)}\int_B|\mathbf{1}_{(-2n,2n)^d}(y)f(y)-\mathbf{1}_{(-2n,2n)^d}(x)f(x)|\mathrm{d}y=0\quad\text{a.e. }x\in\mathbb{R}^d.
$$

特别可知存在零测集$Z_n\subset(-n,n)^d$使得

$$
\lim_{B\ni x,\,m(B)\to0}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y=0\quad\forall\,x\in(-n,n)^d\setminus Z_n.
$$

这表明$(-n,n)^d\setminus Z_n$中每一点都是f的Lebesgue 点. 因$\bigcup_{n=1}^\infty Z_n$是零测集且 $\mathbb{R}^d\setminus\bigcup_{n=1}^\infty Z_n\subset\bigcup_{n=1}^\infty((-n,n)^d\setminus Z_n)$, 所以$\mathbb{R}^d$中几乎每一点都是$f$的Lebesgue 点. □

【推论(变上限函数的微分)】设$f\in L^1([a,b])$. 则$x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上几乎处处可微且

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad\text{a.e. }x\in[a,b].\tag{3.1.3}
$$

【证】将f零延拓至$\mathbb{R}$, 也即以$\mathbf{1}_{[a,b]}(x)f(x)$代替$f(x)$, 可设$f\in L^1(\mathbb{R})$. 对任意$h>0$有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\Big)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t,\\
&\frac{1}{h}\Big(\int_a^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x-h} f(t)\mathrm{d}t\Big)=\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}f(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

而由**Lebesgue 微分定理** 有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}$$

所以$x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$\mathbb{R}$上几乎处处可微且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad \text{a.e. }\ x\in\mathbb{R}.$$

这当然蕴含$x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上几乎处处可微且微分等式(3.1.3) 成立。 □

Lebesgue 微分定理的一个重要应用是研究可测集的Lebesgue 密度:

【全密点】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 若

$$\lim_{B\ni x,\, m(B)\to 0}\frac{m(E\cap B)}{m(B)}=1$$

其中B是闭球或闭方体, 则称x是E的一个**全密点** 或具有Lebesgue 密度的点. □

下面的定理表明, 不必引进其他密度点了(例如密度为$\frac{1}{2}$的点) ——

【定理3.1.4】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 且$m(E)>0$, 则E中几乎每一点都是E的全密点.

【证】易见E的特征函数$\mathbf{1}_E$属于$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 由Lebesgue 微分定理知$\mathbb{R}^d$中几乎每一点都是$\mathbf{1}_E$的Lebesgue 点, 即存在零测集$Z\subset\mathbb{R}^d$ 使得每个$x\in\mathbb{R}^d\setminus Z$ 都是$\mathbf{1}_E$的Lebesgue 点. 因

$$\frac{1}{m(B)}\int_B\mathbf{1}_E(y)\mathrm{d}y=\frac{m(E\cap B)}{m(B)}$$

故

$$\lim_{B\ni x,\, m(B)\to 0}\frac{m(E\cap B)}{m(B)}=\lim_{B\ni x,\, m(B)\to 0}\frac{1}{m(B)}\int_B\mathbf{1}_E(y)\mathrm{d}y=\mathbf{1}_E(x)\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}^d\setminus Z.$$

特别有

$$\lim_{B\ni x,\, m(B)\to 0}\frac{m(E\cap B)}{m(B)}=\mathbf{1}_E(x)=1\qquad\forall\, x\in E\setminus Z.$$ □

【例】有趣的事实: 可测集不会被几乎处处平分:

$$\text{不存在}E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\text{ 满足 }\lim_{B\ni x,\, m(B)\to 0}\frac{m(E\cap B)}{m(B)}=\frac{1}{2}\quad \text{a.e. }\ x\in E.$$

这是因为若这样的E存在, 则这蕴含$m(E)>0$ 且存在一个零测集$Z_1\subset E$ 使得这个密度极限1/2 对所有$x\in E\setminus Z_1$成立. 另一方面由全密点定理知存在零测集$Z_2\subset E$使

得$E\setminus Z_2$中每一点都是E的全密点。再注意$m(E)>0$蕴含$E\setminus(Z_1\cup Z_2)$非空, 就导出矛盾: $1/2=1$.　同理还知

$$\text{不存在}E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\ \text{满足}\ \frac{m(B)}{3}\le m(E\cap B)\le\frac{2m(B)}{3}\quad\forall\,\text{闭球或闭方体}B.$$

当然在E的一个零测集上, "密度极限"可能会取值于$[0,1]$中的任一数: 例如对一维情形, 设$E=[0,1]$, 则对于边界点$0\in\partial[0,1]$ 和任意$\alpha\ge 0,\beta\ge 0$ 满足$\alpha+\beta>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m([0,1]\cap[-\frac{\beta}{n},\,\frac{\alpha}{n}]}{\frac{\alpha+\beta}{n}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.\qquad\Box$$

【好的核与恒同逼近】

回忆**命题2.6.4(卷积逼近)**: 设$K\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 满足$\int_{\mathbb{R}^d}K(x)\mathrm{d}x=1$. 令$K_\delta(x)=\delta^{-d}K(\delta^{-1}x)$, $\delta>0$. 则对任意$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 有$\lim\limits_{\delta\to0+}\|K_\delta*f-f\|_{L^1}=0$. 取离散值$\delta=1/n,n=1,2,3,...$ 则有$\lim\limits_{n\to\infty}\|K_{1/n}*f-f\|_{L^1}=0$. 据Riesz 定理知存在子列$\delta_k=1/n_k$ 使得被积函数几乎处处趋于零:

$$\lim_{k\to\infty}(K_{\delta_k}*f)(x)=f(x)\qquad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

现在问: 在这个几乎处处收敛中, 可否把离散的无穷小量$\delta_k\to0$ 换成连续的无穷小量$\delta\to0$? 这个问题对于所谓"好的核"K_δ, 回答是肯定的. 证明方法是: **Lebesgue点 和环形分解!**

【定义(好的核)】设$0<\delta_0\le+\infty$. 我们称一族函数$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,\delta_0)}\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ 为好的核如果它满足下列两条:

$$\mathbf{1}^\circ\qquad\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)\mathrm{d}x=1\qquad\forall\,\delta\in(0,\delta_0).$$

$$\mathbf{2}^\circ\qquad|K_\delta(x)|\le\min\left\{\frac{C}{\delta^d},\,\frac{C\delta}{|x|^{d+1}}\right\}\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}^d,\ \forall\,\delta\in(0,\delta_0).$$

这里$C>0$是与一个x,δ 无关的有限常数[8]. 注意: 这个定义不要求$K_\delta(x)$ 是某个函数$K(x)$的展缩.　$\Box$

【例】常用的**好的核** —— 展缩型核:

(1) $K(x)$在$\mathbb{R}^d$上有界、非负、可测且支撑在单位球$\mathbb{B}^d$内并且$\int_{\mathbb{R}^d}K(x)\mathrm{d}x=1$. 这时$K_\delta(x)=\delta^{-d}K(\delta^{-1}x)$ 是好的核, 其中可以取$C=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}K(x)$.

[8]当$x=0$时, 定义$\frac{C\delta}{|x|^{d+1}}=+\infty$.

(2) $d=1$, 上半平面的Possion 核:

$$P_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2},\quad x\in\mathbb{R},\ y\in(0,+\infty)$$

其中取$\delta=y\in(0,+\infty),C=\frac{1}{\pi}$.

(3) $\mathbb{R}^d$中的热核:

$$H_t(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},\quad x\in\mathbb{R}^d,\ t>0$$

其中取$\delta=t^{1/2}\in(0,+\infty)$, 常数$C$(不是唯一的)可以利用不等式$e^\alpha>1+\alpha>\alpha$确定, 具体来说, 可以通过不等式

$$e^{(\frac{|x|}{2\delta})^2\frac{2}{d+1}}>(\frac{|x|}{2\delta})^2\frac{2}{d+1}$$

确定. □

【**例**】常用的**好的核** ——非展缩型的核:

(1) $d=1$, 圆盘上的Poisson 核:

$$K_\delta(x)=\frac{1}{2\pi}P_r(x)\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

其中$0<r<1,\delta=1-r$, 常数C可以取(例如) $C=4\pi$.

(2) $d=1$, Fejér 核:

$$K_\delta(x)=\frac{1}{2\pi}F_N(x)\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)=\frac{1}{2\pi N}\cdot\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

其中$\delta=1/N\in(0,1),N\geq 2$, 常数$C$可以取(例如) $C=....$

【证】只证(1). 先证明Poisson 核等式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}=P_r(x):=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},\quad x\in\mathbb{R},\quad 0<r<1.$$

事实上对任意$0<r<1,x\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}r^ne^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}r^ne^{-inx}=1+\frac{re^{\mathrm{i}x}}{1-re^{\mathrm{i}x}}+\frac{re^{-\mathrm{i}x}}{1-re^{-\mathrm{i}x}}\\&=1+\frac{re^{\mathrm{i}x}(1-re^{-\mathrm{i}x})+re^{-\mathrm{i}x}(1-re^{\mathrm{i}x})}{|1-re^{\mathrm{i}x}|^2}=1+\frac{2r\cos x-2r^2}{1-2r\cos x+r^2}=P_r(x).\end{aligned}$$

由这一等式和逐项积分有

$$\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\mathrm{d}x=2\pi,\quad 0<r<1.$$

由此和$K_\delta(x)$的定义有

$$\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{1-\delta}(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \delta\in(0,1).$$

这证明了$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}\subset L^1(\mathbb{R})$ 满足**好的核**的条件$\mathbf{1}^\circ$. 下面证明$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$ 还满足**好的核**的条件$\mathbf{2}^\circ$. 为此, 只需证明

$$0\le K_\delta(x)\le \min\Big\{\frac{4\pi}{\delta},\, \frac{4\pi\delta}{|x|^2}\Big\} \qquad \forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\,\delta\in(0,1). \tag{3.1.4}$$

对任意$x\in\mathbb{R}$, 当$|x|>\pi$时, $K_\delta(x)=0$. 以下设$|x|\le\pi$. 此时有

$$K_\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\delta(2-\delta)}{\delta^2+2(1-\delta)(1-\cos x)}.$$

若$1/2\le\delta<1$, 则$\delta\ge 1/2\ge \frac{|x|}{2\pi}$ 从而有

$$0\le K_\delta(x)\le\frac{1}{2\pi}\min\Big\{\frac{2}{\delta},\, 4\pi^2\frac{2\delta}{|x|^2}\Big\}.$$

若$0<\delta<1/2$, 则由Jordan 不等式$|\sin(\frac{x}{2})|\ge\frac{|x|}{\pi}$ (因$|x|\le\pi$)有$2(1-\delta)(1-\cos x)\ge 1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})\ge\frac{2}{\pi^2}|x|^2$ 从而有

$$0\le K_\delta(x)\le\frac{1}{2\pi}\min\Big\{\frac{2}{\delta},\, \pi^2\frac{\delta}{|x|^2}\Big\}.$$

这就证明了不等式(3.1.4)成立. 因此$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$是**好的核**。 □

下面来证明对于**好的核**K_δ来说有点态恒同逼近: $(K_\delta * f)(x)\to f(x)\,(\delta\to 0+)$. 这需要一个引理:

【引理3.1.5】设$f\in L^1(\mathbb{R}^d), x\in\mathbb{R}^d$是$f$的Lebesgue 点. 令

$$A(r)=\frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y, \quad r>0; \quad A(0)=0.$$

则$A(r)$在$[0,\infty)$上连续、有界, 特别有$\lim\limits_{r\to 0+}A(r)=A(0)=0$.

【证】首先由积分的绝对连续性知$r\mapsto\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y$ 在$[0,\infty)$上连续, 因此$A(r)$至少在$(0,\infty)$内连续. 因x是f的Lebesgue 点且$m(B(0,r))=m(B(x,r))=C_d r^d$ (其中$C_d=m(\mathbb{B}^d)$ 是单位球的体积), 故

$$A(r)=C_d\cdot\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y\to 0=A(0) \quad \text{as} \quad r\to 0+\,.$$

所以$A(r)$在$r=0$也连续, 从而$A(r)$在$[0,\infty)$上处处连续. 又由f整体可积知有

$$\begin{aligned}A(r)&\le C_d\cdot\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|\mathrm{d}y+C_d|f(x)|\\&\le C_d\cdot\frac{1}{m(B(x,r))}\|f\|_{L^1}+C_d|f(x)|\le\|f\|_{L^1}+C_d|f(x)|\quad\forall\, r\ge 1.\end{aligned}$$

所以$A(r)$在$[1,\infty)$上有界. 因此$A(r)$在$[0,\infty)$上有界. $\square$

【定理3.1.6】设函数族$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,\delta_0)}\subset L^1(\mathbb{R}^d)$是好的核, $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则对于f的每个Lebesgue 点$x\in\mathbb{R}^d$ 有$\lim\limits_{\delta\to0+}(K_\delta*f)(x)=f(x)$, 从而有

$$\lim_{\delta\to0+}(K_\delta*f)(x)=f(x)\quad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

此外有L^1-收敛:

$$\lim_{\delta\to0+}\|K_\delta*f-f\|_{L^1}=0.$$

【证】设$x\in\mathbb{R}^d$ 为f的任一Lebesgue 点. 证明的关键是做**环形分解**:

$$\begin{aligned}&|(K_\delta*f)(x)-f(x)|\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\mathrm{d}y\\&=\int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\mathrm{d}y+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\delta<|y|\le2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对第一项, 由好的核的条件$\mathbf{2}^\circ$ 和$A(r)$的定义有

$$\int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\mathrm{d}y\le C\frac{1}{\delta^d}\int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y=CA(\delta).$$

对于第二项中的通项, 由好的核的条件$\mathbf{2}^\circ$ 有

$$\begin{aligned}&\int_{2^k\delta<|y|\le2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\mathrm{d}y\le\int_{2^k\delta<|y|\le2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\frac{C\delta}{|y|^{d+1}}\mathrm{d}y\\&\le\frac{C\delta}{(2^k\delta)^{d+1}}\int_{|y|\le2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y=\frac{C2^d}{2^k}A(2^{k+1}\delta),\quad k=0,1,2,\dots.\end{aligned}$$

因此

$$|(K_\delta*f)(x)-f(x)|\le CA(\delta)+C2^d\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A(2^{k+1}\delta)\le\widetilde{C}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A(2^k\delta).$$

下面只需证明$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A(2^k\delta)\to0\,(\delta\to0+)$. 由上述引理知$A(r)$在$[0,\infty)$ 有界且连续。设$M=\sup\limits_{r\ge0}A(r)$. 则对任意$N\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A(2^k\delta)=\sum_{k=0}^{N}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\le\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}A(2^k\delta)+M\frac{1}{2^N},\quad\delta>0.$$

因$A(r)\to 0\,(r\to 0+)$, 故对不等式两边取$\delta\to 0+$的上极限有

$$\limsup_{\delta\to 0+}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A(2^k\delta)\le \limsup_{\delta\to 0+}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}A(2^k\delta)+M\frac{1}{2^N}=M\frac{1}{2^N}.$$

由$N\in\mathbb{N}$ 的任意性(或令$N\to\infty$) 即知$\limsup\limits_{\delta\to 0+}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A(2^k\delta)=0$.、

其次证L^1-收敛. 任给$0<R<\infty$, 做分解

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}|(K_\delta * f)(x)-f(x)|\mathrm{d}x\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)|K_\delta(y)|\mathrm{d}y\\ &=\int_{|y|\le\delta R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)|K_\delta(y)|\mathrm{d}y\\ &+\int_{|y|>\delta R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)|K_\delta(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对第一项$\int_{|y|\le\delta R}$, 做变换$y\to\delta y$ 有

$$\begin{aligned}&\int_{|y|\le\delta R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)|K_\delta(y)|\mathrm{d}y\\ &=\int_{|y|\le R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-\delta y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)\delta^d|K_\delta(\delta y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

我们对被积函数来验证控制收敛定理的条件: 由好的核的条件**2**° 有

$$\begin{aligned}&\delta^d|K_\delta(\delta y)|\le C\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d,\\ &\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-\delta y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)\delta^d|K_\delta(\delta y)|\le 2\|f\|_{L^1}C,\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d,\\ &\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-\delta y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)\delta^d|K_\delta(\delta y)|\to 0\quad \text{as}\quad \delta\to 0+\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

于是由Lebesgue 有界收敛定理知

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_{|y|\le R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-\delta y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)\delta^d|K_\delta(\delta y)|\mathrm{d}y=0.\tag{3.1.6}$$

对第二项$\int_{|y|>\delta R}$, 由好的核的条件**2**° 有

$$\begin{aligned}&\int_{|y|>\delta R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)|K_\delta(y)|\mathrm{d}y\le\int_{|y|>\delta R}2\|f\|_{L^1}\frac{C\delta}{|y|^{d+1}}\mathrm{d}y\\ &=2\|f\|_{L^1}C\delta\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\int_{\delta R}^{\infty}\frac{r^{d-1}}{r^{d+1}}\mathrm{d}r=2\|f\|_{L^1}C\delta\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\int_{\delta R}^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\\ &=2\|f\|_{L^1}C\delta\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\frac{1}{\delta R}=2\|f\|_{L^1}C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\frac{1}{R}.\end{aligned}$$

于是对任意$\varepsilon > 0$, 取$R = R_\varepsilon > 0$ 使得$2\|f\|_{L^1} C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\frac{1}{R} < \varepsilon/2$. 对此$R > 0$, 由(3.1.5),(3.1.6) 知存在$\delta_\varepsilon > 0$ 使得

$$\int_{|y|\le\delta R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)|K_\delta(y)|\mathrm{d}y < \varepsilon/2 \qquad \forall\, 0<\delta<\delta_\varepsilon.$$

于是当$0<\delta<\delta_\varepsilon$时

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}|(K_\delta * f)(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\ &\le \int_{|y|\le\delta R}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)|K_\delta(y)|\mathrm{d}y + 2\|f\|_{L^1}C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\frac{1}{R}\\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{\delta\to 0+}\|K_\delta * f - f\|_{L^1} = 0.$ $\square$

从点态恒同逼近的证明中我们看到, **环形分解**技术(和其他辅助条件) 把局部性质拓广到了全局.

§3.2. 函数的微分, 单调函数

实分析中的一类基本结论是: 函数的连续程度决定了函数的可微性. 而对于单变量函数来说, 由于$\mathbb{R}$的全序性, 很多函数的可微性归结为单调函数的可微性。本节学习的单调函数的Lebesgue定理表明: 区间上的单调函数是几乎处处可微的且其微分是可积的。而在下一节将看到: 满足Lipschitz 条件的函数, 或一般地, 具有有界变差的函数, 可以被分解成单调函数的差, 从而也是几乎处处可微的。在应用中, 单调函数类也是极为重要的函数类。本节学习单调函数的可微性和导数的积分关系式, 在后面一节中我们还将给出单调函数的分解定理。

Stein和Shakarchi《实分析》对本章中的函数多使用了大写字母F 等, 其原因应该是希望读者联系概率论中的分布函数(它是大写的)、可积函数的变上限积分, 等等。

作为热身, 我们先回忆函数的Lipschitz连续性并看一下如何把Lipschitz连续的函数表示成两个单调不减的函数之差。

Lipschitz函数类: 若区间I上的实值或复值或向量值的函数F 满足Lipschitz 条件, 即存在常数$0 < L < \infty$ 使得

$$|F(x) - F(y)| \le L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in I$$

则称F在I上Lipschitz连续并称L是F的一个Lipschitz 常数。I上Lipschitz连续的函数的全体记作 $\mathrm{Lip}(I)$.

设实值函数F在区间$I \subset \mathbb{R}$上Lipschitz连续, $L > 0$是F的一个Lipschitz 常数。令

$$F_1(x) = Lx - F(x), \quad F_2(x) = Lx + F(x), \quad x \in I.$$

则F_1, F_2 都是I上单调不减的函数且有

$$F(x) = \frac{1}{2}F_2(x) - \frac{1}{2}F_1(x), \quad x \in I.$$

这说明F被分解成两个单调不减的函数之差。

为研究单调函数性质, 只需考虑单调不减的函数。

说明:

1. 下面出现的区间$I \subset \mathbb{R}$ 可以是任意区间, 即有界、无界、开、闭、半开半闭。
2. 设实值函数F在区间$I \subset \mathbb{R}$上单调不减, 则当$a = \inf I \in I$时, 定义$F(a-) = F(a)$;

当$b=\sup I\in I$时, 定义$F(b+)=F(b)$.

2. 对于自然数子集$\mathbb{N}_0\subset\mathbb{N}$, 总假定

$$\mathbb{N}_0=\{1,2,...,N\}\,(N\in\mathbb{N})\quad\text{或}\quad\mathbb{N}_0=\mathbb{N}.$$

让我们从一个例子开始。在数学分析课程中我们已知道区间上的单调函数只有可数多个间断点。下面的例子具有一般性。

【例】设$\mathbb{N}_0\subset\mathbb{N}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{R}$ 其中x_n互不相同(例如$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$ 而$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是有理数的全体). 设$a_n>0$ 且$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}a_n<+\infty$. 令

$$F(x)=\sum_{x_n\le x}a_n,\quad x\in\mathbb{R}$$

这里$\sum\limits_{x_n\le x}$ 表只对那些满足$x_n\le x$的$n\in\mathbb{N}_0$ 求和.

则F在$\mathbb{R}$上单调不减且其间断点集等于$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, 并且每个$x_n$都是$F$的左间断点, 意即$F$在$x_n$左间断、右连续: $F(x_n-)<F(x_n)=F(x_n+)$. 此外对每个$n\in\mathbb{N}_0$都有$F(x_n+)-F(x_n-)=a_n$.

【证】为分析方便, 我们只考虑$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$的情形; 对$\mathbb{N}_0$为有限集的情形, 证法相同且更简单。由假设知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$. 令

$$j_n(x)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad x<x_n,\\ 1 & \text{if}\quad x_n\le x\end{cases}$$

则

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nj_n(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

据Weierstrass 优级数判别法知这函数级数在$\mathbb{R}$上一致收敛并有:

(1) 和函数$F(x)$在$\mathbb{R}$上有定义且有界: $0\le F(x)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ \ \forall x\in\mathbb{R}$,

(2) 由每个$j_n(x)$在$\mathbb{R}$上单调不减知$F(x)$在$\mathbb{R}$上也是单调不减的,

(3) 当$x\in\mathbb{R}\setminus\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 时, 因每个$j_n(\cdot)$ 都在x连续, 故由一致收敛知F在x连续; 当$x=x_k\in\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 时, 因每个$j_n(\cdot)$ 都在x_k右连续(实际是: 当$n\ne k$时, $j_n(\cdot)$在x_k连续, 当$n=k$时, $j_k(\cdot)$ 在x_k右连续、左间断), 故再由一致收敛知F在x_k右连续, 即$F(x_k+)=F(x_k)$。进一步, 令

$$\widetilde{F}(x)=\sum_{n\in\mathbb{N},n\ne k}a_nj_n(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

则

$$F(x)=\widetilde{F}(x)+a_kj_k(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

因每个$j_n(x)\,(n\neq k)$在$x=x_k$点连续, 故如上, 由一致收敛知$\widetilde{F}(x)$在x_k处连续. 对任意x,y 满足$x<x_k<y$ 有

$$F(y)-F(x)=\widetilde{F}(y)-\widetilde{F}(x)+a_k.$$

分别令$x\to x_k-, y\to x_k+$ 得到

$$F(x_k+)-F(x_k-)=a_k>0.$$

所以$F(x)$在x_k点间断. □

【引理3.2.1】设F在区间$I\subset\mathbb{R}$上单调不减. 令$A=\inf\limits_{x\in I}F(x), B=\sup\limits_{x\in I}F(x)$. 则有

(a) 若$\{[a_k,b_k]\}_{k\in\mathbb{N}_0}$为$I$中可数多个互不相交的闭区间(其中$\mathbb{N}_0\subset\mathbb{N}$), 则

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}[F(b_k)-F(a_k)]\le B-A.$$

(b) 若$\mathbb{N}_0\subset\mathbb{N}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\subset I$ (x_n 互不相同), 其中每个x_n都是F的间断点, 则

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0}[F(x_n+)-F(x_n-)]\le B-A.$$

【证】可以假设F不是常值函数, 即$A<B$. 若A,B中有一个为无穷大, 则有$B-A=+\infty$, 此时上面不等式显然成立. 下面设A,B 均有限。

(a): 由F单调不减和$[a_k,b_k]\subset I$互不相交易知闭区间$[F(a_k),F(b_k)]$ (可能退化) 互不重叠, 即当$i\neq j$时$[F(a_i),F(b_i)]\cap[F(a_j),F(b_j)]$是零测集. 由此和$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[F(a_k),F(b_k)]\subset[A,B]$ 以及$F(b_k)-F(a_k)=m([F(a_k),F(b_k)])$便有

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}[F(b_k)-F(a_k)]=m\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[F(a_k),F(b_k)]\Big)\le m([A,B])=B-A.$$

(b): 对任意$i,j\in\mathbb{N}_0, i\neq j$, 有$x_i\neq x_j$. 由$F$单调不减知成立蕴含关系:

$$x_i<x_j\implies F(x_i-)<F(x_i+)\le F(x_j-)<F(x_j+).$$

这说明闭区间$[F(x_n-),F(x_n+)]$ 互不重叠. 于是结合$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}[F(x_n-),F(x_n+)]\subset[A,B]$得知

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0}[F(x_n+)-F(x_n-)]=m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}[F(x_n-),F(x_n+)]\Big)\le m([A,B])=B-A.$$

□

在证明单调函数几乎处处可微前, 先介绍一般函数的

【Dini导数】 设$x\in\mathbb{R}$, 实值函数f 在x的一个邻域$(x-\delta,x+\delta)$内有定义. 令

$$D^+f(x)=\limsup_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad D_+f(x)=\liminf_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$D^-f(x)=\limsup_{h\to0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad D_-f(x)=\liminf_{h\to0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

分别称它们为f在x的右上导数、右下导数、左上导数、左下导数, 每一个都称f在x点的为Dini 导数。

由这一定义易见

$$\begin{aligned}
&D^+f(x)\ge D_+f(x),\quad D^-f(x)\ge D_-f(x),\\
&D^+f(x)=D_+f(x)\text{ 且有限 }\iff f\text{ 在}x\text{ 有右导数},\\
&D^-f(x)=D_-f(x)\text{ 且有限 }\iff f\text{ 在}x\text{ 有左导数},\\
&D^+f(x)=D_+f(x)=D^-f(x)=D_-f(x)\text{ 且有限 }\iff f\text{ 在}x\text{ 可导}.
\end{aligned}$$

【定理3.2.2(Lebesgue)】 设实值函数F在区间$I\subset\mathbb{R}$上单调不减. 则F在I上几乎处处可微, 且对任意有界闭子区间$[a,b]\subset I$ 有

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x\le F(b)-F(a).$$

【证】设I° 为区间I的内部即$I^\circ=(\inf I,\sup I)$. 由F在I上单调不减知F在每一点$x\in I^\circ$的四个Dini 导数均≥ 0.

为证F在I上几乎处处可微, 只需证F在I° 内几乎处处可微. 令

$$\begin{aligned}
E_1&=\{x\in I^\circ\mid D^+F(x)>D_-F(x)\},\\
E_2&=\{x\in I^\circ\mid D^-F(x)>D_+F(x)\},\\
E_\infty&=\{x\in I^\circ\mid D^+F(x)=+\infty\}.
\end{aligned}$$

需证明这三个集合皆为零测集. 若此事成立, 则得

$$0\le D^+F(x)\le D_-F(x)\le D^-F(x)\le D_+F(x)\le D^+F(x)<+\infty\quad\text{a.e.}\quad x\in I^\circ$$

从而有 $\quad 0 \le D^+F(x) = D_-F(x) = D^-F(x) = D_+F(x) < +\infty \quad \text{a.e.} \quad x \in I^\circ$

因此F在I°上几乎处处可微.

取严格单调数列$a_n \searrow \inf I, b_n \nearrow \sup$, $a_n < b_n$ 使得$[a_n, b_n] \subset I^\circ, I^\circ = \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n)$. 则有$E_i = \bigcup_{n=1}^\infty E_i \cap (a_n, b_n)$ $(i = 1, 2, \infty)$. 因此为证$m^*(E_i) = 0$, 只需证明 $m^*(E_i \cap (a_n, b_n)) = 0, n = 1, 2, 3, \dots$. 也即只需证明对任意有界闭区间$[a, b] \subset I^\circ$ 都有$m^*(E_i \cap (a, b)) = 0$.

先证$m^*(E_\infty \cap (a, b)) = 0$. 任给定$M > 0$. 对任意$x \in E_\infty \cap (a, b)$ 和任意$\varepsilon > 0$, 由$D^+F(x) = \infty$知

$$\text{存在}\, 0 < h_{x,\varepsilon} < \varepsilon \text{ 使得 } [x, x + h_{x,\varepsilon}] \subset (a, b) \text{ 且 } \frac{F(x + h_{x,\varepsilon}) - F(x)}{h_{x,\varepsilon}} > M. \tag{3.2.1}$$

区间族$\mathcal{V} = \{[x, x + h_{x,\varepsilon}] \mid x \in E_\infty \cap (a, b), \varepsilon > 0\}$构成了$E_\infty \cap (a, b)$的一个Vitali覆盖, 因此由Vitali覆盖引理, 存在可数多个互不相交的闭区间$[a_k, b_k] \in \mathcal{V}$ 使得

$$m^*\Big(E_\infty \cap (a, b) \setminus \bigcup_{k\ge1} [a_k, b_k]\Big) = 0. \tag{3.2.2}$$

这里和下面, “$k \ge 1$”表示下标k的集合是$\{1, 2, ..., N\}$ $(N \in \mathbb{N})$ 或$\mathbb{N}$. 因$[a_k, b_k] \in \mathcal{V}$, 故由(3.2.1)知

$$b_k - a_k \le \frac{1}{M}[F(b_k) - F(a_k)].$$

于是由

$$E_\infty \cap (a, b) = \Big(E_\infty \cap (a, b) \setminus \bigcup_{k\ge1} [a_k, b_k]\Big) \cup \Big(E_\infty \cap (a, b) \cap \bigcup_{k\ge1} [a_k, b_k]\Big)$$

和(3.2.2) 和**引理3.2.1**(将该引理用于闭区间$[a, b]$) 有

$$m^*(E_\infty \cap (a, b)) \le \sum_{k\ge1} (b_k - a_k) \le \frac{1}{M} \sum_{k\ge1} [F(b_k) - F(a_k)] \le \frac{1}{M}[F(b) - F(a)].$$

令$M \to +\infty$ 即知$m^*(E_\infty \cap (a, b)) = 0$.

下证$m^*(E_1 \cap (a, b)) = 0$. 设$\mathbb{Q}_+$为正有理数的全体. 则有

$$E_1 \cap (a, b) = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}_+,\, r>s} \{x \in (a, b) \mid D^+F(x) > r > s > D_-F(x)\}.$$

由有理数是可数集知上式右边是可数多个子集的并. 因此只需证明每一个这样的子集都是零测集. 任取定$r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r > s$, 令

$$A = A_{r,s} = \{x \in (a, b) \mid D^+F(x) > r > s > D_-F(x)\}.$$

来证明$m^*(A)=0$. 任给$\eta>0$, 取开集$G\supset A$ 使得$m(G)<m^*(A)+\eta$.

对任意$x\in A$ 和任意$\varepsilon>0$, 由$(a,b)\cap G$是开集和$D_-F(x)<s$ 知

$$\text{存在}\,0<h_{x,\varepsilon}<\varepsilon \text{ 使得 } [x-h_{x,\varepsilon},x]\subset(a,b)\cap G \text{ 且 } \frac{F(x)-F(x-h_{x,\varepsilon})}{h_{x,\varepsilon}}<s. \quad (3.2.3)$$

区间族$\mathcal{V}^{(-)}=\{[x-h_{x,\varepsilon},x]\mid x\in A,\varepsilon>0\}$构成了$A$的一个Vitali覆盖, 因此由Vitali覆盖引理, 存在可数多个互不相交的闭区间$[a_k,b_k]\in\mathcal{V}^{(-)}$ 使得$m^*(A\setminus\bigcup_{k\ge1}[a_k,b_k])=0$. 据外测度的性质(单调性、次可加性)知

$$m^*(A)=m^*\Big(A\cap\bigcup_{k\ge1}[a_k,b_k]\Big)=m^*\Big(A\cap\bigcup_{k\ge1}(a_k,b_k)\Big). \quad (3.2.4)$$

同时由(3.2.3)和$[a_k,b_k]\subset(a,b)\cap G$ 有

$$\sum_{k\ge1}[F(b_k)-F(a_k)]\le s\sum_{k\ge1}(b_k-a_k)=sm\Big(\bigcup_{k\ge1}[a_k,b_k]\Big)\le sm(G)<s(m^*(A)+\eta). \quad (3.2.5)$$

令

$$B=A\cap\bigcup_{k\ge1}(a_k,b_k).$$

则对任意$x\in B$ 和任意$\varepsilon>0$, 存在$k\ge1$ 使得$x\in(a_k,b_k)$, 且由$D_+F(x)>r$知

$$\text{存在}\,0<h_{x,\varepsilon}<\varepsilon \text{ 使得 } [x,x+h_{x,\varepsilon}]\subset(a_k,b_k) \text{ 且 } \frac{F(x+h_{x,\varepsilon})-F(x)}{h_{x,\varepsilon}}>r. \quad (3.2.6)$$

区间族$\mathcal{V}^{(+)}=\{[x,x+h_{x,\varepsilon}]\mid x\in B,\varepsilon>0\}$构成了$B$的一个Vitali覆盖, 因此由Vitali覆盖引理, 存在可数多个互不相交的闭区间$[\alpha_j,\beta_j]\in\mathcal{V}^{(+)}$ 使得$m^*(B\setminus\bigcup_{j\ge1}[\alpha_j,\beta_j])=0$. 结合(3.2.6) 得到

$$m^*(B)\le\sum_{j\ge1}(\beta_j-\alpha_j)\le\frac{1}{r}\sum_{j\ge1}[F(\beta_j)-F(\alpha_j)]. \quad (3.2.7)$$

令$S_k=\{j\ge1\mid[\alpha_j,\beta_j]\subset(a_k,b_k)\}$. 由Vitali 覆盖$\mathcal{V}^{(+)}$的做法知每个$[\alpha_j,\beta_j]$ 必含于某个(a_k,b_k)内. 因此$[\alpha_j,\beta_j]$的所有下标j的集合被分解成$S_k\,(k\ge1)$的不交并. 对每个S_k, 由**引理3.2.1** 知

$$\sum_{j\in S_k}[F(\beta_j)-F(\alpha_j)]\le F(b_k)-F(a_k)$$

这里对$S_k=\emptyset$的情形, 按数学约定, 空集上的求和为零. 于是得到 (注意一切 $F(\beta_j)-F(\alpha_j)\ge0$ 以及非负级数在任意重排下其和不变)

$$\sum_{j\ge1}[F(\beta_j)-F(\alpha_j)]=\sum_{k\ge1}\Big(\sum_{j\in S_k}[F(\beta_j)-F(\alpha_j)]\Big)\le\sum_{k\ge1}[F(b_k)-F(a_k)].$$

联合B的定义和(3.2.4), (3.2.7), (3.2.5) 得到

$$\begin{aligned}&rm^*(A)=rm^*(B)\le\sum_{j\ge1}[F(\beta_j)-F(\alpha_j)]\le\sum_{k\ge1}[F(b_k)-F(a_k)]<s(m^*(A)+\eta),\\&\Longrightarrow\quad(r-s)m^*(A)<s\eta.\end{aligned}$$

由$\eta>0$的任意性(或令$\eta\to0+$) 知$(r-s)m^*(A)=0$ 即$m^*(A)=0$. 如上所说, 这就证明了$m^*(E_1\cap(a,b))=0$. 用完全相同的证明可证$m^*(E_2\cap(a,b))=0$. 所以F在I上几乎处处可微.

最后证明积分不等式. 任取有界闭区间$[a,b]\subset I$. 暂时重新定义$F(x)=F(b)$当$x\in[b,+\infty)$时. 则F在$[a,+\infty)$上是单调不减的. 因单调函数几乎处处连续, 故F是可测函数。令

$$F_n(x)=\frac{F(x+1/n)-F(x)}{1/n},\quad x\in[a,b].$$

则每个F_n是$[a,b]$上的可测函数且由F在$[a,b]$上几乎处处可微知

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F'(x)\quad\text{a.e.}\quad x\in[a,b].$$

这蕴含$F'(x)$在$[a,b]$上可测. [注意: 可测函数可以在一个零测集上无定义, 或者在这个零测集上定义该函数为(例如)零.] 又因F单调不减, 故$F_n(x)\ge0$ for all $x\in[a,b]$. 于是由Fatou 引理有

$$\int_a^bF'(x)\mathrm{d}x\le\liminf_{n\to\infty}\int_a^bF_n(x).$$

而对任意$n\in\mathbb{N}$, 由积分的可加性和F单调不减有

$$\begin{aligned}&\int_a^bF_n(x)=n\Big(\int_a^bF(x+1/n)\mathrm{d}x-\int_a^bF(x)\mathrm{d}x\Big)\\&=n\Big(\int_{a+1/n}^{b+1/n}F(x)\mathrm{d}x-\int_a^bF(x)\mathrm{d}x\Big)=n\Big(\int_b^{b+1/n}F(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+1/n}F(x)\mathrm{d}x\Big)\\&=n\Big(\frac1nF(b)-\int_a^{a+1/n}F(x)\mathrm{d}x\Big)\le n\Big(\frac1nF(b)-\frac1nF(a)\Big)=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

这就证明了定理中的积分不等式. □

【定理3.2.3(Fubini逐项微分定理)】设实值函数F_n在区间$I\subset\mathbb{R}$上单调不减($n=1,2,3,...$) 且函数级数

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x),\quad x\in I$$

在I上处处收敛. 则和函数$F(x)$在I上几乎处处可微且成立逐项微分:

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n'(x)\quad \text{a.e. } x\in I.$$

【证】由假设知F在I上有定义且单调不减. 因此F_n,F 都在I上几乎处处可微. 令Z_n,Z_0 分别是F_n,F在I中的不可微点集. 则$Z:=\bigcup_{n=0}^{\infty}Z_n$ 是零测集. 对任意$N\in\mathbb{N}$做分解

$$F(x)=S_N(x)+R_N(x),\quad x\in I$$

其中$S_N(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}F_n(x)$, $R_N(x)=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}F_n(x)$. 易见对任意$x\in I\setminus Z$ 有

$$F'(x)=S_N'(x)+R_N'(x)=\sum_{n=1}^{N}F_n'(x)+R_N'(x).$$

下证$\lim\limits_{N\to\infty}R_N'(x)=0$ a.e. $x\in I$. 由$F_n'(x)\ge 0$ 有$S_N'(x)\le S_{N+1}'(x), x\in[a,b]\setminus Z$. 因此

$$F'(x)\ge R_N'(x)\ge R_{N+1}'(x)\ge 0,\quad x\in I\setminus Z,\ N=1,2,3,\dots.$$

这里"≥ 0"是因为$x\mapsto R_N(x)$在I上单调不减。令

$$R(x)=\lim_{N\to\infty}R_N'(x),\quad x\in I\setminus Z.$$

则$R(x)\ge 0$ 于$I\setminus Z$. 对任意有界闭区间$[a,b]\subset I$, 应用LDC (因$F'\ge 0$ 在$[a,b]$上可积) 和$\int_a^b R_N'(x)\mathrm{d}x\le R_N(b)-R_N(a)$ 有

$$\int_a^b R(x)\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\int_a^b R_N'(x)\mathrm{d}x\le\lim_{N\to\infty}[R_N(b)-R_N(a)]=0.$$

于是由非负性$R(x)\ge 0$ a.e. $x\in I$知$\int_a^b R(x)\mathrm{d}x=0$. 再由$R(x)$的非负性和$[a,b]$的任意性得到$\int_I R(x)\mathrm{d}x=0$. 因此存在零测集$\widetilde{Z}\subset I$, 可设$\widetilde{Z}\supset Z$ (否则以$Z\cup\widetilde{Z}$代替$\widetilde{Z}$), 使得$R(x)=0$ for all $x\in I\setminus\widetilde{Z}$. 于是对任意$x\in I\setminus\widetilde{Z}$ 有

$$F'(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}F_n'(x)+\lim_{N\to\infty}R_N'(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}F_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n'(x).$$

这里最后的等号是根据级数的定义: 级数等于部分和的极限(只要这极限存在), 特别正项级数的部分和的极限总存在. $\square$

【单调函数的跳跃函数】

如前, 只需考虑单调不减的函数. 设实值函数F在区间$I \subset \mathbb{R}$上单调不减. 对F的每个间断点$x_0 \in I$ 有

$$F(x_0-) := \lim_{x<x_0,\, x\to x_0} F(x) < \lim_{x>x_0,\, x\to x_0} = F(x_0+), \quad F(x_0-) \le F(x_0) \le F(x_0+).$$

设F在I上的间断点集为$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. 称正数

$$\alpha_n := F(x_n+) - F(x_n-) > 0$$

为F在x_n的跳跃度(简称跃度). 令

$$\theta_n = \frac{F(x_n) - F(x_n-)}{\alpha_n}$$

则$0 \le \theta_n \le 1$ 且

$$F(x_n) = F(x_n-) + \theta_n \alpha_n.$$

令

$$j_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < x_n, \\ \theta_n & \text{if} \quad x = x_n, \\ 1 & \text{if} \quad x_n < x \end{cases}$$

$$J(x) = J_F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \alpha_n j_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

因正项级数总有意义, 故$J(x)$在$\mathbb{R}$上处处有定义且≥ 0. 我们称$J(x)$为F的跳跃函数. 启用规定: 空集上的求和为零. 于是若F处处连续, 则F的跳跃函数J恒为零. 我们的第一个观察是

【引理3.2.4】设实值函数F在区间$I \subset \mathbb{R}$上单调不减且有界, 设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$为$F$的间断点集, α_n为F在x_n的跃度. 则

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \alpha_n \le \sup_{x\in I} F(x) - \inf_{x\in I} F(x) < +\infty. \tag{3.2.8}$$

因此F的跳跃函数$x \mapsto J(x) = J_F(x)$ 在$\mathbb{R}$上单调不减且有界. 进一步, 对任意$x, y \in I, x < y$, 有

$$J(y) - J(x) \le F(y) - F(x). \tag{3.2.9}$$

【证】因F有界, 故收敛性(3.2.8)是前面**引理3.2.1(b)**的结论. 因$0 \le j_n(x) \le 1$, 故(3.2.8)蕴含$0 \le J(x) \le \sup_I F - \inf_I F$ for all $x \in \mathbb{R}$. 所以$J(x)$ 在$\mathbb{R}$上有界. 因每个$j_n(x)$单调不减, 故$J(x)$在$\mathbb{R}$上单调不减.

下证不等式(3.2.9). 任取$x,y\in I, x<y$. 让我们用$\sum\limits_{x_n\le x}$ 表示对$\mathbb{N}_0$中的满足$x_n\le x$的n求和. 则由$j_n(x)$的定义, $x<y$, $\alpha_k\theta_k=F(x_k)-F(x_k-)$, 等等, 我们有

$$
\begin{aligned}
J(x)&=\sum_{x_n\le x}\alpha_n j_n(x)=\sum_{x_n<x}\alpha_n+[F(x_k)-F(x_k-)]\mathbf{1}_{\{x_k=x\}},\\
J(y)&=\sum_{x_n\le y}\alpha_n j_n(y)=\sum_{x_n\le x}\alpha_n+\sum_{x<x_n<y}\alpha_n+[F(x_m)-F(x_m-)]\mathbf{1}_{\{x_m=y\}}\\
&=\sum_{x_n<x}\alpha_n+[F(x_k+)-F(x_k-)]\mathbf{1}_{\{x_k=x\}}+\sum_{x<x_n<y}\alpha_n+[F(x_m)-F(x_m-)]\mathbf{1}_{\{x_m=y\}}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
J(y)-J(x)&=\sum_{x<x_n<y}\alpha_n+[F(x_k+)-F(x_k)]\mathbf{1}_{\{x_k=x\}}+[F(x_m)-F(x_m-)]\mathbf{1}_{\{x_m=y\}}\\
&=\sum_{x<x_n<y}\alpha_n+[F(x+)-F(x)]\mathbf{1}_{\{x_k=x\}}+[F(y)-F(y-)]\mathbf{1}_{\{x_m=y\}}.
\end{aligned}
$$

将前面**引理3.2.1(b)**用于开区间(x,y) 并注意$F(x+)=\inf\limits_{t\in(x,y)}F(t), F(y-)=\sup\limits_{t\in(x,y)}F(t)$ 得到

$$\sum_{x<x_n<y}\alpha_n=\sum_{x<x_n<y}[F(x_n+)-F(x_n-)]\le F(y-)-F(x+).$$

代入上式即得

$$
\begin{aligned}
J(y)-J(x)&\le F(y-)-F(x+)+[F(x+)-F(x)]\mathbf{1}_{\{x_k=x\}}+[F(y)-F(y-)]\mathbf{1}_{\{x_m=y\}}\\
&\le F(y)-F(x).\qquad\Box
\end{aligned}
$$

【定理3.2.5】设实值函数F在区间$I\subset\mathbb{R}$上单调不减且有界, 设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$为$F$的间断点集, $J(x)=J_F(x)$是F的跳跃函数. 则

1° $J(x)$在$\mathbb{R}$上的间断点集恰为$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, 并且$J(x)$与$F(x)$在每个$x_n$处的跃度相同.

2° $J(x)$在$\mathbb{R}$上几乎处处可微且$J'(x)=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}$.

2° 差$F(x)-J(x)$在I上连续且也是单调不减的.

【证】为分析方便, 我们假设$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$. 对$\mathbb{N}_0$为有限集的情形, 证明完全相同且更简单.

1°: 首先由**引理3.2.4** 和$0\le j_n(x)\le 1$知函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n j_n(x)$在$\mathbb{R}$上一致收敛(Weierstrass优级数判别法). 设$x_0\in\mathbb{R}\setminus\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则每个$j_n(x)$都在$x_0$连续, 因此由函数级数一致收敛知$J(x)$在$x_0$点连续. 设$x_0=x_k\in\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(k\in\mathbb{N})$. 令

$$\widetilde{J}(x)=\sum_{n\in\mathbb{N},n\ne k}\alpha_n j_n(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

则

$$J(x) = \widetilde{J}(x) + \alpha_k j_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

因每个$j_n(x)\,(n \neq k)$在$x = x_k$点连续, 故如上, 由函数级数一致收敛知$\widetilde{J}(x)$在x_k处连续. 对任意x, y 满足$x < x_k < y$ 有

$$J(y) - J(x) = \widetilde{J}(y) - \widetilde{J}(x) + \alpha_k.$$

分别令$x \to x_k-, y \to x_k+$ 得到

$$J(x_k+) - J(x_k-) = \alpha_k > 0.$$

所以$J(x)$在x_k点间断且在这点的跃度与F的跃度相等.

2°: 这是Fubini 逐项微分定理的结果. 事实上当$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$时$j_n'(x) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, 因此

$$J'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n'(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

3°: 由**引理3.2.4** 知$G(x) := F(x) - J(x)$在I上单调不减. 对任一点$x \in I$, 若$x \notin \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则$F, J$都在$x$连续从而$G$在$x$连续; 若$x = x_n \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则因$F, J$在$x$的跃度相同, 故

$$G(x_n+) - G(x_n-) = F(x_n+) - F(x_n-) - (J(x_n+) - J(x_n-)) = 0.$$

于是再由G单调知$G(x_n-) = G(x_n) = G(x_n+)$, 因此$G$在$x_n$也连续. 所以$G$在区间$I$上处处连续. □

【Cantor 集和Cantor 函数】

Cantor 集和Cantor 函数是测度论中经典例子, 它们展现了一类点集的自相似结构和相应的函数的奇异行为, 后者常被用来构造反例。下面我们只考虑闭区间$[0,1]$中的Cantor 集.

设$\xi \in [0,1)$ 和正数列$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1/2)$ 满足

$$\xi = \lim_{n\to\infty} 2^n \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n.$$

[例如对于$\xi = 0$, 可以取$\xi_n = \frac{1}{3}\,(n = 1, 2, 3, ...)$; 对于$\xi = \frac{1}{2}$, 可以取$\xi_n = \frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, 后者用到事实$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n = \log 2$.]

对任一闭区间$[\alpha,\beta]$ 和$0<\delta<(\beta-\alpha)/2$, 下面的分解方式称为Cantor 三分法:

$$[\alpha,\beta]=\Big[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}-\delta\Big]\cup\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}-\delta,\,\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta\Big)\cup\Big[\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta,\,\beta\Big]:=J_1\cup I\cup J_2$$

即中间区间I是开区间且它的中点与原来区间$[\alpha,\beta]$的中点相同. 下面按Cantor 三分法依次做分解:

$$\begin{aligned}&[0,1]=J_1^{(0)}=J_1^{(1)}\cup I_1^{(1)}\cup J_2^{(1)},\quad m(J_i^{(1)})=\xi_1,\,i=1,2;\\&J_1^{(1)}=J_1^{(2)}\cup I_1^{(2)}\cup J_2^{(2)},\\&J_2^{(1)}=J_3^{(2)}\cup I_2^{(2)}\cup J_4^{(2)},\qquad m(J_i^{(2)})=\xi_1\xi_2,\,i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

这产生分解(**从左到右排列**)

$$[0,1]=J_1^{(2)}\cup I_1^{(2)}\cup J_2^{(2)}\cup I_1^{(1)}\cup J_3^{(2)}\cup I_2^{(2)}\cup J_4^{(2)}.$$

归纳地, 对每个$J_j^{(n-1)}\,(j=1,2,...,2^{n-1})$ 按Cantor 三分法做分解

$$J_j^{(n-1)}=J_{2j-1}^{(n)}\cup I_j^{(n)}\cup J_{2j}^{(n)},\quad m(J_i^{(n)})=\xi_1\xi_2\cdots\xi_n,\quad i=1,2,...,2^n.$$

则在第n步得到分解 (不交并):

$$[0,1]=\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}I_j^{(k)}\Big)\cup\bigcup_{i=1}^{2^n}J_i^{(n)}.$$

据操作程序归纳法原理, 这个分解手续对每个n均可施行。令

$$K^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{2^n}J_i^{(n)},\quad n=1,2,3,\dots.$$

则$K^{(n)}$是紧集,

$$m(K^{(n)})=\sum_{i=1}^{2^n}m(J_i^{(n)})=2^n\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$$

且由包含关系$J_i^{(n-1)}\supset J_{2i-1}^{(n)}\cup J_{2i}^{(n)}$有$K^{(1)}\supset K^{(2)}\supset K^{(3)}\supset\cdots$. 相应的Cantor 集$C_\xi$被定义为

$$C_\xi=\bigcap_{n=1}^{\infty}K^{(n)}$$

它的Lebesgue 测度等于

$$m(C_\xi)=\lim_{n\to\infty}m(K^{(n)})=\lim_{n\to\infty}2^n\xi_1\xi_2\cdots\xi_n=\xi.$$

易见$0,1\in C_\xi$ 因此C_ξ关于$[0,1]$的余集是开集:

$$[0,1]\setminus C_\xi=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}I_j^{(k)},\quad I_j^{(k)}=(\alpha_j^{(k)},\beta_j^{(k)}).$$

根据上面构造不难证明C_ξ无内点(即不含区间), 因此C_ξ中每一点都是$[0,1]\setminus C_\xi$的聚点.

下面构造$[0,1]$上的Cantor 函数$F:[0,1]\to\mathbb{R}$, 它具有下面两个特征:

(i) F在$[0,1]$上连续、单调不减且$F(0)=0,F(1)=1$.

(ii) F在$[0,1]\setminus C_\xi$中的每个区间$I_j^{(k)}=(\alpha_j^{(k)},\beta_j^{(k)})$上是常数.

我们用两种方法构造F:

方法1(此法包括了Cantor 集测度为零的情形): 先在$[0,1]\setminus C_\xi=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}I_j^{(k)}$ 上定义

$$F(x)=\frac{2j-1}{2^k}\quad 当x\in I_j^{(k)}\ 时,\quad j=1,2,...,2^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

因在同一个第k层中, 当$i<j$时, 区间$I_i^{(k)}$ 位于$I_j^{(k)}$的左侧, 故F在$[0,1]\setminus C_\xi$上单调不减. 然后用下面方式将F扩充到C_ξ上:

$$F(0)=0,\quad F(x)=\sup_{y\in[0,x]\cap([0,1]\setminus C_\xi)}F(y),\quad 0<x\in C_\xi.$$

注意当$x\in[0,1]\setminus C_\xi$时, 由F在$[0,1]\setminus C_\xi$上单调不减, 有$F(x)=\max\limits_{y\in[0,x]\cap([0,1]\setminus C_\xi)}F(y)$. 因此$[0,1]$上这样定义的函数$F$ 满足

$$F(x)=\sup_{y\in[0,x]\cap([0,1]\setminus C_\xi)}F(y)\qquad\forall\,x\in[0,1]$$

从而可知F在$[0,1]$上单调不减. 此外易见$F(1)=1$. 因此$F([0,1])\subset[0,1]$. 而由于F的象集$F([0,1])$包含了$[0,1]$的一个稠密集$\{\frac{2j-1}{2^k}\,|\,j=1,2,...,2^{k-1},k=1,2,3,...\}$, 故由单调函数性质知必有$F([0,1])=[0,1]$ 从而可知F在$[0,1]$上连续。

方法2 (限于正测度的Cantor 集, 即$\xi>0$的情形): 此时我们直接定义

$$F(x)=\frac{1}{m(C_\xi)}\int_0^x\mathbf{1}_{C_\xi}(t)\mathrm{d}t=\frac{m([0,x]\cap C_\xi)}{m(C_\xi)},\quad x\in[0,1].$$

显然F在$[0,1]$上连续, 单调不减且$F(0)=0,F(1)=1$. 当$x\in I_j^{(k)}=(\alpha_j^{(k)},\beta_j^{(k)})$ 时, 由于$(\alpha_j^{(k)},\beta_j^{(k)})\cap C_\xi=\emptyset$, 故有$[0,x]\cap C_\xi)=[0,\alpha_j^{(k)}]\cap C_\xi)$ 从而有

$$F(x)=\frac{m([0,\alpha_j^{(k)}]\cap C_\xi)}{m(C_\xi)}\qquad\forall\,x\in(\alpha_j^{(k)},\beta_j^{(k)}).$$

所以F在$[0,1]\setminus C_\xi$中的每个区间$I_j^{(k)}=(\alpha_j^{(k)},\beta_j^{(k)})$上是常数。

关于Cantor 函数的Newton-Leibnitz 公式: 由单调函数的Lebesgue 定理知Cantor 函数F在$[0,1]$上几乎处处可微, 同时由Cantor 函数F的性质知F在开集$[0,1]\setminus C_\xi$内局部为常数, 因此

$$F'(x)=0 \qquad \forall\, x\in[0,1]\setminus C_\xi.$$

当$m(C_\xi)=0$ 时(即$\xi=0$时), 这表明$F'(x)=0$ a.e. $x\in[0,1]$ 从而有

$$\int_0^1 F'(x)\mathrm{d}x=0<F(1)-F(0).$$

当$m(C_\xi)>0$ 时(即$\xi>0$时), 方法2 构造的Cantor 函数F 满足Newton-Leibnitz 公式:

$$\int_0^1 F'(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)$$

这是因为此时F在$[0,1]$上绝对连续(见下面§3.4)。

作业题

• Stein和Shakarchi的《实分析》第3章第5节习题10, 12, 14(a). 关于14(a)的提示: 做延拓$F(x)=F(b)$ for all $x\ge b$. 令$\{r_k\}_{k=1}^\infty=\mathbb{Q}\cap(0,1]$, $F_k(x)=\frac{F(x+r_k)-F(x)}{r_k}$, $\widetilde{F}_n(x)=\sup\limits_{0<r_k<1/n}F_k(x)$.

• 周民强《实变函数论》(第2版2008年, 北大出版社) P248 思考题1, 2, 3, 5. 对于第5题, 应取$\{r_n\}_{n=1}^\infty$ 为有界区间中的有理数, 例如取$\{r_n\}_{n=1}^\infty=\mathbb{Q}\cap[-1,1]$. 此外可以考虑恒等式: $|x-r_n|=r_n-x+2(x-r_n)_+$.

§3.3. 有界变差函数

几何上看, 单变量函数的“全变差”概念来自于曲线长度的定义—— 内接折线长度的上确界。

【定义】 设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, F是$[a,b]$上的实值或复值或向量值函数(即$F:[a,b]\to\mathbb{R}$, 或$F:[a,b]\to\mathbb{C}$, 或$F:[a,b]\to\mathbb{R}^d$), 则称

$$\mathrm{V}_a^b(F)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})|$$

为F在$[a,b]$上的**全变差** (total variation). 对$b=a$的情形我们规定$\mathrm{V}_a^a(F)=0$. 若$\mathrm{V}_a^b(F)<+\infty$, 则称$F$在$[a,b]$上具有有界变差(bounded variation)或是有界变差的. $[a,b]$上的实值或复值或向量值的有界变差函数的全体分别记作$\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R}),\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$和$\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R}^d)$, 也常笼统地记作$\mathrm{BV}([a,b])$. □

【注1】 如果$d\ge 2, F\in\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R}^d)$, 则也称曲线$F$ 是可求长的, 并定义全变差$\mathrm{V}_a^b(F)$为曲线F的长。 显然当$d=2$时, 曲线$F(t)=(x(t),y(t))$ 与复值函数$F(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$显然描述同一条平面曲线.

【注2】 有界变差函数F总是有界的, 这是因为对任意$x\in(a,b)$ 有

$$\begin{aligned}&|F(x)|=\Big|\frac{1}{2}(F(x)-F(a))+\frac{1}{2}(F(x)-F(b))+\frac{1}{2}(F(a)+F(b))\Big|\\&\le\frac{1}{2}(|F(x)-F(a)|+|F(b)-F(x)|)+\frac{1}{2}(|F(a)+F(b)|)\\&\le\frac{1}{2}\mathrm{V}_a^b(F)+\frac{1}{2}(|F(a)+F(b)|)\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{x\in[a,b]}|F(x)|\le\frac{1}{2}\mathrm{V}_a^b(F)+\frac{1}{2}(|F(a)+F(b)|)<\infty.$$

【注3】 由定义易见若F 在$[a,b]$上是有界变差的, 则对任意子区间$[a_1,b_1]\subset[a.b]$, F在$[a_1,b_1]$上是有界变差的且$\mathrm{V}_{a_1}^{b_1}(F)\le\mathrm{V}_a^b(F)$.

【注4】 有界变差函数类$\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$ 和$\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R}^d)$都是实数域上的线性空间, 而$\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$是复数域上的线性空间, 并且当$F,G$都是有界变差的而$\alpha,\beta$为常数时有

$$\mathrm{V}_a^b(\alpha F+\beta G)\le|\alpha|\mathrm{V}_a^b(F)+|\beta|\mathrm{V}_a^b(G).$$

这是因为对$[a,b]$的任一分划$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}|(\alpha F+\beta G)(t_k)-(\alpha F+\beta G)(t_{k-1})|\\
&=\sum_{k=1}^{n}|\alpha[F(t_k)-F(t_{k-1})]+\beta[G(t_k)-G(t_{k-1})]|\\
&\le|\alpha|\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|+|\beta|\sum_{k=1}^{n}|G(t_k)-G(t_{k-1})|\\
&\le|\alpha|\mathrm{V}_a^b(F)+|\beta|\mathrm{V}_a^b(G).
\end{aligned}$$

取关于分划的确界即得$\mathrm{V}_a^b(\alpha F+\beta G)\le|\alpha|\mathrm{V}_a^b(F)+|\beta|\mathrm{V}_a^b(G)\,(<+\infty)$. 这同时表明线性组合$\alpha F+\beta G$ 也是有界变差的.

【例】(1) 设f是$[a,b]$上的单调函数, 则F是有界变差的且

$$\mathrm{V}_a^b(F)=|F(b)-F(a)|.$$

因此若F单调不减, 则

$$\mathrm{V}_a^x(F)=F(x)-F(a),\qquad x\in[a,b].$$

由此可见变差函数$[a,b]\ni x\mapsto \mathrm{V}_a^x(F)$ 不一定是连续的.

(2) 设实值或复值或向量值函数F在$[a,b]$上Lipschitz连续, 则F是有界变差的。

【证】(1): 对$[a,b]$的任一分划$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 因F单调, 故$F(x_k)-F(x_{k-1})$ 同号, $k=1,2,...,n$, 因此

$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})|=\Big|\sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1}))\Big|=|F(x_n)-F(x_0)|=|F(b)-F(a)|.$$

这表明F在$[a,b]$上的变差恒为常数$|F(b)-F(a)|$. 所以$\mathrm{V}_a^b(F)=|F(b)-F(a)|$.

(2): 设$F\in\mathrm{Lip}([a,b])$ 并设$L>0$为F的一个Lipschitz 常数。则对$[a,b]$的任一分划$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\le L\sum_{k=1}^{n}|t_k-t_{k-1}|=L(b-a).\qquad\square$$

【例】连续函数不必是有界变差的: 令

$$F(x)=x\cos(\pi/x),\quad x\in(0,1];\quad F(0)=0.$$

则F在$[0,1]$上连续, 但由$F(\frac{1}{k})=\frac{1}{k}(-1)^k$ 有

$$\mathrm{V}_0^1(F)\ge\sum_{k=1}^{n}|F(\frac{1}{k+1})-F(\frac{1}{k})|=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k})\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

因此$\mathrm{V}_0^1(F)=+\infty$, 即$F\not\in\mathrm{BV}([0,1])$. $\square$

下面两个定理与直观一致: 大体来说, 分划越细, 曲线内接折线的长度就越接近曲线的长度; 数学分析中对光滑曲线F定义的长度确实等于$\mathrm{V}_a^b(F)$.

【**定理3.3.1**】设F 为$[a,b]$上的实值或复值或向量值函数. 则

$$\mathrm{V}_a^b(F)=\lim_{\delta\to0+}\sup_{\lambda(P)<\delta}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|$$

其中上确界$\sup\limits_{\lambda(P)<\delta}$是对$[a,b]$的所有满足$\lambda(P)=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})<\delta$的分划
$P:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 取的.

【证】首先注意$\delta\mapsto\sup\limits_{\lambda(P)<\delta}\{\cdots\}$是$\delta>0$的单调不减的函数, 因此极限$\lim\limits_{\delta\to0+}\sup\limits_{\lambda(P)<\delta}\{\cdots\}$存在。由$\mathrm{V}_a^b(F)$的定义易见

$$\mathrm{V}_a^b(F)\ge L^*(F):=\lim_{\delta\to0+}\sup_{\lambda(P)<\delta}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|.$$

为证反向不等式, 可设$L^*(F)<+\infty$ (否则反向不等式显然成立). 对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$ 使得

$$\sup_{\lambda(P)<\delta}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|<L^*(F)+\varepsilon.$$

任取$[a,b]$的分划$P:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. 将每个子区间$[t_{k-1},t_k]$做$m$等分:

$$\tau_{(k-1)m}=t_{k-1}<\tau_{(k-1)m+1}<\tau_{(k-1)m+2}<\cdots<\tau_{km}=t_k,\quad k=1,2,...,n$$

其中N 满足$(b-a)/m<\delta$. 这样得到了加细分划$\widetilde{P}:\ a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_{mn}=b$ 它满足$\lambda(\widetilde{P})<\delta$. 因

$$|F(t_k)-F(t_{k-1})|=|F(\tau_{km})-F(\tau_{(k-1)m})|=\Big|\sum_{j=\tau_{(k-1)m+1}}^{\tau_{km}}(F(\tau_j)-F(\tau_{j-1})\Big|$$

$$\le\sum_{j=(k-1)m+1}^{km}|F(\tau_j)-F(\tau_{j-1})|$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=(k-1)m+1}^{km}|F(\tau_j)-F(\tau_{j-1})|=\sum_{j=1}^{mn}|F(\tau_j)-F(\tau_{j-1})|$$

$$\le\sup_{\lambda(P)<\delta}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|<L^*(F)+\varepsilon.$$

由分划的任意性和$\mathrm{V}_a^b(F)$的定义即得$\mathrm{V}_a^b(F)\le L^*(F)+\varepsilon$. 再由$\varepsilon>0$的任意性(或令$\varepsilon\to 0+$) 即知$\mathrm{V}_a^b(F)\le L^*(F)$. 因此$\mathrm{V}_a^b(F)=L^*(F)$. $\square$

【**定理3.3.2**】$C^1([a,b],\mathbb{R}^d)\subset \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R}^d)$ 且当$F\in C^1([a,b],\mathbb{R}^d)$时

$$\mathrm{V}_a^b(F)=\int_a^b|F'(t)|\mathrm{d}t.$$

换言之, 对于光滑曲线来说, 曲线长度的两种定义是一致的。

【证】设$F\in C^1([a,b],\mathbb{R}^d)$. 对于$[a,b]$的任一分划$P:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 由数学分析知下面不等式成立(弦长≤弧长):

$$|F(t_k)-F(t_{k-1})|=\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}F'(t)\mathrm{d}t\Big|\le\int_{t_{k-1}}^{t_k}|F'(t)|\mathrm{d}t.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|F'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|F'(t)|\mathrm{d}t.$$

由分划的任意性和$\mathrm{V}_a^b(F)$的定义知$F\in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R}^d)$ 且

$$\mathrm{V}_a^b(F)\le\int_a^b|F'(t)|\mathrm{d}t.$$

为证反向不等式也成立, 先证明对任意$\delta>0$, 对于$[a,b]$的任一分划$P:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 满足$\lambda(P)<\delta$, 都有

$$\int_a^b|F'(t)|\mathrm{d}t\le\omega(F',\delta)(b-a)+\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\tag{3.3.1}$$

这里

$$\omega(F',\delta)=\max_{s,t\in[a,b],\,|s-t|\le\delta}|F'(s)-F'(t)|.$$

事实上由积分中值定理有

$$\int_a^b|F'(t)|\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|F'(t)|\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}|F'(\xi_k)|(t_{k+1}-t_k),\qquad \xi_k\in(t_{k-1},t_k).$$

而由向量的模长不等式$|\mathbf{x}|-|\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$有

$$
\begin{aligned}
&|F'(\xi_k)|(t_{k+1}-t_k)-|F(t_k)-F(t_{k-1})|=|F'(\xi_k)|(t_{k+1}-t_k)-\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}F'(t)\mathrm{d}t\Big|\\
&\le\Big|F'(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)-\int_{t_{k-1}}^{t_k}F'(t)\mathrm{d}t\Big|=\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(F'(\xi_k)-F'(t))\mathrm{d}t\Big|\\
&\le\int_{t_{k-1}}^{t_k}|F'(\xi_k)-F'(t)|\mathrm{d}t\le\omega(F',\delta)(t_k-t_{k-1}),\quad k=1,2,...,n.
\end{aligned}
$$

对这一不等式两边取和$\sum\limits_{k=1}^{n}$即得(3.3.1).

由(3.3.1) 得到

$$\int_a^b|F'(t)|\mathrm{d}t\le\omega(F',\delta)(b-a)+\sup_{\lambda(P)<\delta}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|$$

再令$\delta\to0+$即得反向不等式:

$$\int_a^b|F'(t)|\mathrm{d}t\le\lim_{\delta\to0+}\sup_{\lambda(P)<\delta}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|=\mathrm{T}_F(a,b)$$

这里用到$F'(t)$在$[a,b]$上的一致连续性: 当$\delta\to0+$时$\omega(F',\delta)\to0$. □

【定理3.3.3(变差的有限可加性)】设F 为有界闭区间$[a,b]$上的实值或复值或向量值的函数。则有

$$\mathrm{V}_a^b(F)=\mathrm{V}_a^c(F)+\mathrm{V}_c^b(F)\qquad\forall\,c\in[a,b].$$

因此对于$c\in(a,b)$ 有: $\mathrm{V}_a^b(F)<+\infty\iff\mathrm{V}_a^c(F)<+\infty$且$\mathrm{V}_c^b(F)<+\infty$.

特别可知当$\mathrm{V}_a^b(F)<+\infty$时, 变差函数$x\mapsto\mathrm{V}_a^x(F)$在$[a,b]$上是递增的.

【证】设$a<c<b$. 先证

$$\mathrm{V}_a^c(F)+\mathrm{V}_c^b(F)\le\mathrm{V}_a^b(F).$$

为此可以假定$\mathrm{V}_a^b(F)<+\infty$ (否则显然成立)。对$[a,c],[c,b]$ 做任意分划:

$$a=s_0<s_1<\cdots<s_n=c=t_0<t_1<\cdots<t_m=b.$$

令$\tau_k=s_k,\ \ k=0,1,...,n,\quad\tau_{n+k}=t_k,\ \ k=0,1,2,...,m$. 则有

$$a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=c<\tau_{n+1}<\tau_{n+2}<\cdots<\tau_{n+m}=b$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(s_k)-F(s_{k-1})|+\sum_{k=1}^{m}|F(t_k)-F(t_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n+m}|F(\tau_k)-F(\tau_{k-1})|\le\mathrm{V}_a^b(F).$$

这给出

$$\sum_{k=1}^{n}|F(s_k)-F(s_{k-1})|\le \mathrm{V}_a^b(F)-\sum_{k=1}^{m}|F(t_k)-F(t_{k-1})|.$$

固定$[c,b]$上的任一分划, 对上式左边取关于$[a,c]$的分划的上确界得到

$$\mathrm{V}_a^c(F)\le \mathrm{V}_a^b(F)-\sum_{k=1}^{m}|F(t_k)-F(t_{k-1})|.$$

这蕴含$\mathrm{V}_a^c(F)<+\infty$ 且有

$$\sum_{k=1}^{m}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\le \mathrm{V}_a^b(F)-\mathrm{V}_a^c(F).$$

再对左边取关于$[c,b]$的分划的上确界得到

$$\mathrm{V}_c^b(F)\le \mathrm{V}_a^b(F)-\mathrm{V}_a^c(F).$$

所以

$$\mathrm{V}_a^c(F)+\mathrm{V}_c^b(F)\le \mathrm{V}_a^b(F).$$

其次证明反向不等式也成立. 对$[a,b]$的任一分划$a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=b$, 则有$m\in\{1,2,...,n\}$ 使得$\tau_{m-1}\le c<\tau_m$. 先设$\tau_{m-1}<c<\tau_m$. 则产生$[a,c],[c,b]$的分划：

$$s_k=\tau_k,\ k=0,1,...,m-1;\ s_m=c=t_0;\ t_1=\tau_m,t_2=\tau_{m+1},...,t_{n-m+1}=\tau_n=b.$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}|F(\tau_k)-F(\tau_{k-1})|\\
&=\sum_{k=1}^{m-1}|F(\tau_k)-F(\tau_{k-1})|+|F(\tau_m)-F(\tau_{m-1})|+\sum_{k=m+1}^{n}|F(\tau_k)-F(\tau_{k-1})|\\
&\le\sum_{k=1}^{m-1}|F(\tau_k)-F(\tau_{k-1})|+|F(c)-F(\tau_{m-1})|+|F(\tau_m)-F(c)|+\sum_{k=m+1}^{n}|F(\tau_k)-F(\tau_{k-1})|\\
&=\sum_{k=1}^{m}|F(s_k)-F(s_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n-m+1}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\\
&\le \mathrm{V}_a^c(F)+\mathrm{V}_c^b(F).
\end{aligned}$$

同法对于$c=\tau_{m-1}$的情形也有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(\tau_k)-F(\tau_{k-1})|\le \mathrm{V}_a^c(F)+\mathrm{V}_c^b(F).$$

取关于$[a,b]$的分划的上确界即得反向不等式:

$$\mathrm{V}_a^b(F) \le \mathrm{V}_a^c(F) + \mathrm{V}_c^b(F).$$

这就证明了等号成立.

最后设$\mathrm{V}_a^c(F) < +\infty$. 则由上述可加性, 对任意$x, y \in [a,b], x < y$, 有

$$\mathrm{V}_a^y(F) = \mathrm{V}_a^x(F) + \mathrm{V}_x^y(F) \ge \mathrm{V}_a^x(F).$$

所以$x \mapsto \mathrm{V}_a^x(F)$在$[a,b]$上是递增的. □

下面定理对实值的有界变差函数给出了一种分解, 它的一个推论是: 为了研究有界变差函数的基本性质, 只需研究单调函数即可。令

$$(y)_+ = \max\{y, 0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

【定理3.3.4(Jordan 分解)】设$F \in \mathrm{BV}([a,b], \mathbb{R})$, 令

$$\mathrm{V}_a^b(F)^{(+)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b} \sum_{k=1}^n \Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big)_+ \qquad [\,F\text{的正变差}\,]$$

$$\mathrm{V}_a^b(F)^{(-)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b} \sum_{k=1}^n \Big(-[F(x_k) - F(x_{k-1})]\Big)_+ \qquad [\,F\text{的负变差}\,]$$

并规定$\mathrm{V}_a^a(F)^{(\pm)} = 0$. 则有

$$\mathrm{V}_a^b(F)^{(+)} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^b(F) + F(b) - F(a)\Big), \quad \mathrm{V}_a^b(F)^{(-)} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^b(F) - [F(b) - F(a)]\Big),$$

$$\mathrm{V}_a^b(F) = \mathrm{V}_a^b(F)^{(+)} + \mathrm{V}_a^b(F)^{(-)}, \quad F(b) - F(a) = \mathrm{V}_a^b(F)^{(+)} - \mathrm{V}_a^b(F)^{(-)}.$$

因此一般地(以x代替b) 有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V}_a^x(F)^{(+)} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^x(F) + F(x) - F(a)\Big), \\
&\mathrm{V}_a^b(F)^{(-)} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^x(F) - [F(x) - F(a)]\Big), \\
&\mathrm{V}_a^x(F) = \mathrm{V}_a^x(F)^{(+)} + \mathrm{V}_a^x(F)^{(-)}, \\
&F(x) - F(a) = \mathrm{V}_a^x(F)^{(+)} - \mathrm{V}_a^x(F)^{(-)}, \quad x \in [a,b]
\end{aligned}$$

【证】由$(y)_+ = \frac{1}{2}(|y| + y)$, $y \in \mathbb{R}$, 有

$$\sum_{k=1}^n \Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big)_+ = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| + F(b) - F(a)\Big) \le \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^b(F) + F(b) - F(a)\Big).$$

同时上面等号还给出

$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})| = 2\sum_{k=1}^{n}\Big(F(x_k)-F(x_{k-1})\Big)_{+} + F(a)-F(b).$$

于是取关于分划的上确界后分别得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{V}_a^b(F)^{(+)} \le \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^b(F)+F(b)-F(a)\Big),\\ &\mathrm{V}_a^b(F) \le 2\mathrm{P}_F(a,b)+F(a)-F(b).\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{V}_a^b(F)^{(+)} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^b(F)+F(b)-F(a)\Big).$$

同理由$(-y)_+ = \frac{1}{2}(|y|-y)$ $(y\in\mathbb{R})$ 可证明关于负变差的等式。 $\square$

【**Jordan 分解的推论**】设$F\in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$, 则$F$在$[a,b]$上可以表示成两个递增的非负函数之差, 即存在$[a,b]$上两个递增的非负函数$F_1, F_2$ 使得

$$F(x) = F_1(x)-F_2(x),\quad x\in[a,b].$$

因此特别可知F在$[a,b]$上几乎处处可微。

【证】首先证明$[a,b]\ni x\mapsto \mathrm{V}_a^x(F)^{(+)}$, $[a,b]\ni x\mapsto \mathrm{V}_a^x(F)^{(-)}$ 都是递增的且非负. 事实上非负性是显然的, 而对任意$x,y\in[a,b]$, $x<y$, 由Jordan 分解定理和变差的可加性有

$$\begin{aligned}&\mathrm{V}_a^y(F)^{(\pm)}-\mathrm{V}_a^x(F)^{(\pm)} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^y(F)\pm[F(y)-F(a)]\Big)-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^x(F)\pm[F(x)-F(a)]\Big)\\ &=\frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_a^y(F)-\mathrm{V}_a^x(F)\pm[F(y)-F(x)]\Big)\\ &=\frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_x^y(F)\pm[F(y)-F(x)]\Big)\ge\frac{1}{2}\Big(|F(y)-F(x)|\pm[F(y)-F(x)]\Big)\ge 0.\end{aligned}$$

所以$\mathrm{V}_a^x(F)^{(+)}, \mathrm{V}_a^x(F)^{(-)}$ 都是x的递增函数. 令

$$F_1(x) = \mathrm{V}_a^x(F)^{(+)}+|F(a)|,\quad F_2(x) = \mathrm{V}_a^x(F)^{(-)}+|F(a)|-F(a),\quad x\in[a,b].$$

则F_1, F_2都是递增的且非负并由Jordan 分解定理有

$$F(x) = \mathrm{V}_a^x(F)^{(+)}-\mathrm{V}_a^x(F)^{(-)}+F(a) = F_1(x)-F_2(x),\quad x\in[a,b].$$

$\square$

【**定理3.3.5**】设F是$[a,b]$上的实值或复值或向量值的有界变差函数, 则F在$[a,b]$上几乎处处可微且$F'\in L^1([a,b])$ 并有

$$|F'(x)|\le \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{V}_a^x(F)\qquad \text{a.e.}\quad x\in[a,b],$$

$$\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x\le \mathrm{V}_a^b(F).$$

【证】以一般情形$F=(F_1,F_2,...,F_d)\in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R}^d)$为例. 易见$F$的每个坐标函数$F_i$在$[a,b]$上也是有界变差的($i=1,2,...,d$). 因此存在零测集$Z\subset[a,b]$ 使得每个$x\in[a,b]\setminus Z$ 都是每个函数F_i和函数$x\mapsto \mathrm{V}_a^x(F)$在$[a,b]$上的可微点. 于是每个$x\in[a,b]\setminus Z$ 都是$F=(F_1,F_2,...,F_d)$和$x\mapsto \mathrm{V}_a^x(F)$在$[a,b]$上的可微点. 因此对每个$x\in[a,b]\setminus Z$ 有

$$|\mathrm{V}_a^y(F)-\mathrm{V}_a^x(F)|=|\mathrm{V}_x^y(F)|\ge |F(y)-F(x)|,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{V}_a^x(F)=\lim_{y\to x}\Big|\frac{\mathrm{V}_a^y(F)-\mathrm{V}_a^x(F)}{y-x}\Big|\ge \lim_{y\to x}\Big|\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\Big|=|F'(x)|.$$

以上用到$x\mapsto \mathrm{V}_a^x(F)$在$[a,b]$上单调不减因此$\frac{\mathrm{V}_a^y(F)-\mathrm{V}_a^x(F)}{y-x}=|\frac{\mathrm{V}_a^y(F)-\mathrm{V}_a^x(F)}{y-x}|$, $[a,b]\ni y\neq x$. 由这一不等式并对单调函数$x\mapsto \mathrm{V}_a^x(F)$ 应用Lebesgue 定理(**定理3.2.2**)便有

$$\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x\le \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{V}_a^x(F)\,\mathrm{d}x\le \mathrm{V}_a^b(F)-\mathrm{V}_a^a(F)=\mathrm{V}_a^b(F).\qquad\square$$

作业题

• Stein和Shakarchi的《实分析》第3章第5节习题27, 28(a), 30; 第6节习题7.

说明: 在第30题中, 应把“对每个$A>0$ 和所有$h\in\mathbb{R}$ ”换成“存在常数$A>0$ 使得对所有$h\in\mathbb{R}$ ”. 此外可以利用Lebesgue 积分的扩张性质:

$$\int_{\mathbb{R}}|F(x+h)-F(x)|\mathrm{d}x=\sup_{-\infty<a<b<+\infty}\int_a^b |F(x+h)-F(x)|\mathrm{d}x.$$

• 周民强《实变函数论》(第2版2008年, 北大出版社) P255 习题1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

§3.4. 绝对连续函数

绝对连续, 顾名思义, 是连续性很强的意思。虽然从见下面给出的绝对连续的定义中完全看不到可微性, 但一个惊人的事实是: 函数的绝对连续性等价于函数几乎处处可微且使Newton-Leibnitz 公式成立。

【定义】区间$I \subset \mathbb{R}$上的实值或复值函数F称为是绝对连续的, 如果对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得对于I中任何有限多个互不相交的开区间$(a_k, b_k), k = 1, 2, ..., n$,

$$\text{只要}\quad \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \ \ \text{就有}\quad \sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

在I上绝对连续的函数的全体记作$\mathrm{AC}(I)$. □

显然绝对连续的函数一定是一致连续的。同时易见$\mathrm{AC}(I)$是一个线性空间: 若$F, G \in \mathrm{AC}(I)$, α, β为常数, 则$\alpha F + \beta G \in \mathrm{AC}(I)$. 而当$I = [a, b]$为有界闭区间时, $\mathrm{AC}([a, b])$还是一个代数, 即当$F, G \in \mathrm{AC}([a, b])$时还有$FG \in \mathrm{AC}([a, b])$. 此外易证

$$\mathrm{AC}([a, b]) \subset \mathrm{BV}([a, b])$$

意即$[a, b]$上的绝对连续函数必是有界变差的。为证明这点, 取$\varepsilon = 1$, 则存在$\delta > 0$使得$[a, b]$中任何有限多个互不相交的开区间$(a_k, b_k), k = 1, 2, ..., n$ 满足$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ 都有$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| < 1$. 取$N \in \mathbb{N}$ 使得$\frac{b-a}{N} < \delta$. 作等距分划$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_N = b$, $c_k - c_{k-1} = \frac{b-a}{N}$, 则有$\mathrm{V}_{c_{k-1}}^{c_k}(F) \le 1$, $k = 1, 2, ..., N$. 因此由变差的有限可加性有

$$\mathrm{V}_a^b(F) = \mathrm{V}_{c_0}^{c_N}(F) = \mathrm{V}_{c_0}^{c_1}(F) + \mathrm{V}_{c_1}^{c_2}(F) + \cdots + \mathrm{V}_{c_{N-1}}^{c_N}(F) \le N < +\infty.$$

所以$F \in \mathrm{BV}([a, b])$.

由这一性质可知若$F \in \mathrm{AC}(I)$, 则F在I上是几乎处处可微的. 事实上对任意有界闭区间$[a, b] \subset I$ 易见$F \in \mathrm{AC}([a, b])$. 因此$F \in \mathrm{BV}([a, b])$. 因有界变差函数是几乎处处可微的, 故$F$在$[a, b]$上几乎处处可微. 再由$[a, b]$的任意性知$F$ 在I 上是几乎处处可微的.

【例】设$I \subset \mathbb{R}$ 为一区间. 则

(1) $\mathrm{Lip}(I) \subset \mathrm{AC}(I)$, 因此可知若$F \in \mathrm{Lip}(I)$, 则$F$在$I$上几乎处处可微.

(2) 若$f \in L^1(I), a = \inf I$, C为常数, $F(x) = C + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in I$, 则$F \in \mathrm{AC}(I)$.

【证】(1): 设$F\in \mathrm{Lip}(I)$ 并设L为F的一个Lipschitz 常数. 则对于I中任何有限多个互不相交的开区间$(a_k,b_k), k=1,2,...,n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|\le L\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$$

由此即知$F\in \mathrm{AC}(I)$.

(2): 我们有

$$F(y)-F(x)=\int_x^y f(t)\mathrm{d}t,\quad x,y\in I.$$

于是对于I中任何有限多个互不相交的开区间$(a_k,b_k), k=1,2,...,n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{a_k}^{b_k}f(t)\mathrm{d}t\Big|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|f(t)|\mathrm{d}t=\int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)}|f(t)|\mathrm{d}t.$$

因$f\in L^1(I)$, 故由积分的绝对连续性知, 对任意$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 使得当$E\subset I$ 可测且$m(E)<\delta$时有$\int_E|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon$. 因此当

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\Big)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

时

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|\le\int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)}|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

所以$F\in \mathrm{AC}(I)$. □

【**命题3.4.1**】设函数F在区间$I\subset\mathbb{R}$上绝对连续, 则F 在I 上几乎处处可微. 进而若$F'(x)=0$ a.e. 于I 则$F(x)\equiv$常数于I.

【证】只需证后半. 设$F'(x)=0$ a.e.于I. 为证$F(x)\equiv$常数于I, 只需证明对任意$a,b\in I, a<b$, 都有$F(b)=F(a)$.

令

$$Z=\{x\in[a,b]\mid F'(x)\,\text{不存在或}\,F'(x)\,\text{存在但}\,F'(x)\ne 0\}.$$

则由假设知$m(Z)=0$. 令$E=(a,b)\setminus Z$. 则E是可测集且$m(E)=b-a$.

任给定$\eta>0$. 由F绝对连续, 存在$\delta>0$ 使得对于$[a,b]$中任何有限多个互不相交的开区间$(\alpha_k,\beta_k), k=1,2,...,N$, 只要$\sum_{k=1}^{N}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$ 就有$\sum_{k=1}^{N}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|<\eta$.

另一方面对任意$x\in E$ 有

$$\lim_{h\to0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)=0\quad\text{i.e.}\quad\lim_{h\to0+}\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\Big|=0.$$

因此对任意$\varepsilon > 0$ 存在$0 < h_{x,\varepsilon} < \varepsilon$ 使得

$$x \in [x, x + h_{x,\varepsilon}] \subset (a, b) \quad \text{且} \quad |F(x + h_{x,\varepsilon}) - F(x)| < \eta h_{x,\varepsilon}.$$

这样得到的闭区间族$\mathcal{V} = \{[x, x + h_{x,\varepsilon}] \,|\, x \in E, \varepsilon > 0\}$ 构成了E的一个Vitali覆盖. 由Vitali 覆盖引理, 存在可数多个**互不相交的**闭区间$[a_k, b_k] \in \mathcal{V}, k \in \mathbb{N}_0$, 使得 $m(E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[a_k, b_k]) = 0$ 这里$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, ..., N\}\,(N \in \mathbb{N})$ 或$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$. 于是由

$$E \subset \Big(E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[a_k, b_k]\Big) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[a_k, b_k], \quad [a_k, b_k] \subset (a, b) \quad \text{互不相交}$$

得到

$$b - a = m(E) \le m\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[a_k, b_k]\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}(b_k - a_k) \le b - a.$$

因此$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0}(b_k - a_k) = b - a$. 根据级数收敛的定义知存在$n \in \mathbb{N}$使得

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) > b - a - \delta.$$

将这有限多个闭区间$[a_k, b_k]$重新编号使得$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, 则由$[a_k, b_k]$ 互不相交且均含于(a, b) 便有严格顺序:

$$a_0 = b_0 := a < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n < b =: a_{n+1}.$$

令$(\alpha_k, \beta_k) = (b_k, a_{k+1})$, $k = 0, 1, ..., n$. 则$(\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$且互不相交. 由$a_{k+1} - a_k = a_{k+1} - b_k + b_k - a_k = \beta_k - \alpha_k + b_k - a_k$有

$$b - a = a_{n+1} - a_0 = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - b_k) + \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k) = \sum_{k=0}^{n}(\beta_k - \alpha_k) + \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

同理由$F(a_{k+1}) - F(a_k) = F(\beta_k) - F(\alpha_k) + F(b_k) - F(a_k)$有

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n}(F(\beta_k) - F(\alpha_k)) + \sum_{k=1}^{n}(F(b_k) - F(a_k)).$$

这给出

$$\sum_{k=0}^{n}(\beta_k - \alpha_k) = b - a - \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \quad \text{因此} \quad \sum_{k=0}^{n}|F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \eta.$$

同时由$[a_k, b_k] \in \mathcal{V}$ 有

$$|F(b_k) - F(a_k)| < \eta(b_k - a_k), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
|F(b)-F(a)| &\le \sum_{k=0}^{n}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|+\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)| \\
&< \eta+\eta\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\le(1+b-a)\eta.
\end{aligned}
$$

最后由$\eta>0$的任意性(或令$\eta\to 0+$)即知$F(b)-F(a)=0$. $\square$

【定理3.4.2(绝对连续函数的刻画)】设F是有界闭区间$[a,b]\subset\mathbb{R}$上的实值或复值函数. 则以下(a),(b),(c),(d) **彼此等价:**

(a) $F\in \mathrm{AC}([a,b])$.

(b) F在$[a,b]$上几乎处处可微, $F'\in L^1([a,b])$, 并成立**Newton-Leibnitz公式:**

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

(c) 存在$f\in L^1([a,b])$ 和常数C 使得

$$F(x)=C+\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

(d) $F\in \mathrm{BV}([a,b])$ 且

$$\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x=\mathrm{V}_a^b(F).$$

【证】来证(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a); (a) $\Longleftrightarrow$ (d).

(a) $\Longrightarrow$ (b) : 设$F\in \mathrm{AC}([a,b])$. 前面已证$\mathrm{AC}([a,b])\subset \mathrm{BV}([a,b])$, 因此$F$在$[a,b]$上几乎处处可微且$F'\in L^1([a,b])$. 令

$$G(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t,\quad H(x)=F(x)-G(x),\quad x\in[a,b].$$

则由上面例题知G在$[a,b]$上绝对连续。因此H在$[a,b]$ 上绝对连续, 并由Lebesgue 微分定理有

$$H'(x)=F'(x)-F'(x)=0\quad \text{a.e.}\quad x\in[a,b].$$

据**命题3.4.1** 知$H(x)\equiv$ 常数于$[a,b]$. 但$H(a)=0$, 所以$H(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : 这是显然的.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : 由上面例题知F在$[a,b]$上绝对连续。

(a) $\Longrightarrow$ (d) : 设$F \in \mathrm{AC}([a,b])$. 则由$\mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathrm{BV}([a,b])$ 和**定理3.3.5** 知

$$\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x \le \mathrm{V}_a^b(F).$$

另一方面由已证的(a) $\Longrightarrow$ (b) 知对于$[a,b]$的任意分划$a = x_0 < x_1 < \cdots < a_n = b$ 有$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} F'(x)\mathrm{d}x$ 从而有

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \Big| \int_{x_{k-1}}^{x_k} F'(x)\mathrm{d}x \Big| \le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |F'(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x.$$

取关于分划的上确界即得

$$\mathrm{V}_a^b(F) \le \int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x.$$

所以等号成立.

(d) $\Longrightarrow$ (a) : 这留为作业题(Stein和Shakarchi《实分析》第3章第5节习题16). 要用到导数的积分不等式和变差的有限可加性, 它们蕴含$\int_a^x |F'(t)|\mathrm{d}t = \mathrm{V}_a^x(F) \quad \forall x \in [a,b]$.
□

【**例**】设实值函数F在有界闭区间$[a,b]$上**单调**不减. 则

$$F \in \mathrm{AC}([a,b]) \iff \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

【证】“$\Longrightarrow$”: 这是**定理3.4.2(绝对连续函数的刻画)**的推论.

“$\Longleftarrow$”: 由F在$[a,b]$上**单调**不减知$F'(x) \ge 0$ a.e. $x \in [a,b]$ 因此

$$\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \mathrm{V}_a^b(F).$$

据**定理3.4.2(绝对连续函数的刻画)(d)**知$F \in \mathrm{AC}([a,b])$. 也可直接证明: 对任意$x \in [a,b]$, 由单调函数的Lebesgue 定理分别有

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t \le F(x) - F(a), \quad \int_x^b F'(t)\mathrm{d}t \le F(b) - F(x)$$

再结合假设便有

$$F(b) - F(a) = \int_a^x F'(t)\mathrm{d}t + \int_x^b F'(t)\mathrm{d}t \le F(x) - F(a) + F(b) - F(x) = F(b) - F(a).$$

所以等号成立:

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

所以$F \in \mathrm{AC}([a,b])$. $\quad\square$

从这一例题得知, 前面构作的$[0,1]$上正测度Cantor 集的Cantor 函数是绝对连续的。

下面的定理推广了第二章证明的Newton-Leibnitz 公式, 为判断函数的绝对连续性提供了方便.

【定理3.4.3】设实值或复值函数F在有界闭区间$[a,b]$上连续、在$(a,b)\setminus D$中每一点可微, 其中D是一个可数集。假设导函数$F'(x)$在(a,b)上可积, 则F在$[a,b]$上绝对连续从而成立Newton-Leibnitz 公式:

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - f(a).$$

【证】分别考虑F的实部虚部, 只需对F是实值函数的情形进行证明。先证明: 对任意闭子区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 有

$$|F(\beta)-F(\alpha)| \le \int_\alpha^\beta |F'(x)|\mathrm{d}x. \tag{3.4.1}$$

事实上由实值连续函数把有界闭区间映成有界闭区间知$F([\alpha,\beta]) = [F(x_1),\, F(x_2)]$ 其中$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$使得$F(x_1) = \min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} F(x),\ F(x_2) = \max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} F(x)$. 由此有

$$|F(\beta)-F(\alpha)| \le F(x_2) - F(x_1) = m(F([\alpha,\beta])). \tag{3.4.2}$$

写$D=\{x_k\}_{k\ge1}$, 则$F([\alpha,\beta])\subset F((\alpha,\beta)\setminus D)\cup\{F(\alpha),F(\beta),F(x_k)\,|\,k\ge1\}$. 因$\{F(\alpha),F(\beta),F(x_k)\,|\,k\ge1\}$是可数集(这是唯一用到$D$是可数集的地方!) 从而是零测集, 故有

$$m(F([\alpha,\beta])) \le m(F((\alpha,\beta)\setminus D)) \le \int_{(\alpha,\beta)\setminus D} |F'(x)|\mathrm{d}x \le \int_\alpha^\beta |F'(x)|\mathrm{d}x. \tag{3.4.3}$$

这里第二个不等号用到了第二章的**补充习题2**(证明见习题课)中的结果。联合(3.4.2),(3.4.3) 即得(3.4.1).

对任意$\varepsilon>0$, 因$F'\in L^1((a,b)) = L^1([a,b])$, 故由积分的绝对连续性知存在$\delta>0$ 使得

$$只要E\subset[a,b]可测且m(E)<\delta就有 \quad \int_E |F'(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

对任意有限多个互不相交的闭子区间$[a_k,b_k]\subset[a,b], k=1,2,...,n$, 满足$\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$, 取$E=\bigcup_{k=1}^n[a_k,b_k]$, 则有$m(E)=\sum_{k=1}^n m([a_k,b_k]) = \sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ 从而由(3.4.1)有

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k)-F(a_k)| \le \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |F'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\bigcup_{k=1}^n[a_k,b_k]} |F'(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

所以F在$[a,b]$上绝对连续. $\square$

- **单调函数的Lebesgue 分解**

如上, 在研究单调函数时, 只需考虑单调不减的函数。

【定理3.4.4(Lebesgue 分解定理)】设实值函数F在区间$I\subset\mathbb{R}$上单调不减且有界. 则F可以被分解成三个单调不减的函数之和: $F=F_A+F_C+F_J$, 其中

(i) F_A在I上绝对连续且单调不减;

(ii) F_C在I上连续、单调不减且$F_C'(x)=0$ a.e. $x\in I$;

(iii) $F_J=J_F\ge 0$是F在I上的跳跃函数。

此外在相差一个常数的意义下, F_A, F_C 分别是唯一的. 特别当F在I上非负时, F_A, F_C也可在I上非负.

【证】令$a=\inf I$, $b=\sup I$. 由非负可测函数的积分扩张定理和单调函数的Lebesgue 定理易知有

$$\int_I F'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x\le \sup_{x\in I}F(x)-\inf_{x\in I}F(x)<+\infty.$$

这说明$F'\in L^1(I)$ (注意$F'\ge 0$ a.e. 于I).

记$J(x)=J_F(x)=F_J(x)$ 并令$G=F-J$, 则由**定理3.2.5**知G在I上连续且单调不减, $J'(x)=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}$, 从而有$G'(x)=F'(x)$ a.e. $x\in I$. 此外注意: 由$J(x)$的定义易知当$a\in I$时$J(a)=0$ 从而有$G(a)=F(a)$; 当$a\notin I$ 时(包括$a=-\infty$的情形), 由收敛性$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\alpha_n<+\infty$ 易见有$J(a+)=0$从而有$G(a+)=F(a+)$. 设C_a是如下定义的常数: 当$a\in I$时, $C_a=F(a)$; 当$a\notin I$ 时(包括$a=-\infty$的情形), $C_a=F(a+)$. 令

$$F_A(x)=C_a+\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t,\quad F_C(x)=G(x)-F_A(x),\quad x\in I.$$

则有$F=G+J=F_A+F_C+J$ 且由F'在I上可积和$F'\ge 0$ a.e.于I 知F_A在I上绝对连续且单调不减. 又显然F_C在I上连续并由$G'(x)=F'(x)$ a.e. $x\in I$ 和Lebesgue 微分定理有

$$F_C'(x)=G'(x)-F'(x)=0\quad \text{a.e. } x\in I.$$

而再由$F'(t)=G'(t)$ a.e. $t\in I$还知$F_A(x)=C+\int_a^x G'(t)\mathrm{d}t$ for all $x\in I$. 于是由单调函数的Lebesgue 定理, 当$x,y\in I$ 且$x<y$ 时有

$$F_C(y)-F_C(x)=G(y)-G(x)-\int_x^y G'(t)\mathrm{d}t\ge 0.$$

这表明F_C在I上单调不减. 此外由常数C_a的取法还知: 当$a\in I$时$F_C(a)=G(a)-C_a=F(a)-C_a=0$; 当$a\notin I$时, $F_C(a+)=G(a+)-C_a=F(a+)-C_a=0$. 因此$F_C$在$I$ 上非负。 以上证明了满足要求的分解元F_A, F_C的存在性, 其中$F_C\ge 0$ 于I, 并且当F在I上非负时, F_A也在I 上非负.

最后证分解的唯一性(在不计常数的意义下). 假设还有同类分解$F=\widetilde{F}_A+\widetilde{F}_C+F_J$, 则得$\widetilde{F}_A-F_A=F_C-\widetilde{F}_C$. 由(ii) 知$(\widetilde{F}_A-F_A)'(x)=(\widetilde{F}_C-F_C)'(x)=F_C'(x)-\widetilde{F}_C'(x)=0$ a.e. $x\in I$. 因此由绝对连续函数性质知$\widetilde{F}_A-F_A=F_C-\widetilde{F}_C=$ 常数于I. $\Box$

【**注**】这一定理分别包含了$F_A\equiv$常数, $F_C\equiv$ 常数, $F_J\equiv 0$ 及其组合的情形. 例如若F与其跳跃函数之差$F-F_J$在I上绝对连续, 则由分解的唯一性知函数F_C在I上恒为常数(例如$F_C\equiv 0$)。这等价于说, 若$F-F_J$在I上不绝对连续, 则函数F_C就不是常值函数, 此时称F_C为F的奇异连续部分。

- **分部积分和复合函数的Newton-Leibnitz 公式**

【**定理3.4.5(分部积分)**】设实值或复值函数F,G在有界闭区间$[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上绝对连续, 则成立分部积分:

$$\int_a^b F'(x)G(x)\mathrm{d}x=F(x)G(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b F(x)G'(x)\mathrm{d}x.$$

【证】由假设知$F(x)G(x)$也在$[a,b]$上绝对连续。因此FG满足Newton-Leibnitz 公式. 又因$(FG)'(x)=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$ a.e. $x\in[a,b]$ 且$|F'(x)G(x)|\le C_1|F'(x)|$, $|F(x)G'(x)|\le C_2|G'(x)|$ 其中$C_1=\max\limits_{x\in[a,b]}|F(x)|<+\infty$, $C_2=\max\limits_{x\in[a,b]}|G(x)|<+\infty$, 故$(FG)'(x), F'(x)G(x), F(x)G'(x)$ 都在$[a,b]$上可积。于是对等式$(FG)'(x)=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$ 取积分然后移项即得分部积分公式。 $\Box$

下面学习复合函数的Newton-Leibnitz 公式, 它也是一元函数的换元公式。我们需要两个引理。

【**引理3.4.6**】设$I\subset\mathbb{R}$为一区间, 实值函数F在I上绝对连续, 则F把I中的零测集映为零测集, 即若$Z\subset I, m(Z)=0$, 则$m(F(Z))=0$. [由此可知F把I中的可测集映为可测集.]

【证】设$Z\subset I, m(Z)=0$. 令$I^\circ=(\inf I,\sup I)$. 则$F(Z)$与$F(Z\cap I^\circ)$最多只差两个元素, 因此只需$F(Z\cap I^\circ)$是零测集. 选取严格单调数列$\inf I<a_n<b_n<\sup I$

使得$a_n \searrow \inf I, b_n \nearrow \sup I\,(n\to\infty)$. 则有$I^\circ = \bigcup_{n=1}^\infty (a_n,b_n), Z\cap I^\circ = \bigcup_{n=1}^\infty Z\cap (a_n,b_n), F(Z\cap I^\circ) = \bigcup_{n=1}^\infty F(Z\cap(a_n,b_n))$. 于是只需证明对任意有界闭区间$[a,b]\subset I^\circ$, 集合$F(Z\cap(a,b))$是零测集. 固定$[a,b]\subset I^\circ$, 为记号简便, 就假设$Z\subset(a,b)$.

对任意$\varepsilon>0$, 由F绝对连续, 存在$\delta>0$ 使得当对于I中任何有限多个互不相交的开区间$(x_k,y_k), k=1,2,...,N$, 只要$\sum_{k=1}^N (y_k-x_k)<\delta$ 就有$\sum_{k=1}^N |F(y_k)-F(x_k)|<\eta$.

因$m(Z)=0$, 故对上述$\delta>0$ 存在开集$G\supset Z$ 使得$m(G)<\delta$. 对于开集$G\cap(a,b)\supset Z$, 可写$G\cap(a,b)=\bigcup_{k\ge1}(\alpha_k,\beta_k)$ 其中(α_k,β_k)是互不相交的开区间. 因$[\alpha_k,\beta_k]\subset[a,b]$ 且F在$I\supset[a,b]$上连续, 故存在(非退化的闭区间)$[\widetilde{\alpha}_k,\widetilde{\beta}_k]\subset[\alpha_k,\beta_k]$ 使得$F([\alpha_k,\beta_k]) = [F(\widetilde{\alpha}_k),F(\widetilde{\beta}_k)]$ 或$F([\alpha_k,\beta_k])=[F(\widetilde{\beta}_k),F(\widetilde{\alpha}_k)]$. 于是有

$$\begin{aligned}
&F(Z)\subset\bigcup_{k\ge1}F([\alpha_k,\beta_k]),\\
&m^*(F(Z))\le\sum_{k\ge1}m(F([\alpha_k,\beta_k]))=\sum_{k\ge1}|F(\widetilde{\beta}_k)-F(\widetilde{\alpha}_k)|.
\end{aligned}$$

因开区间$(\widetilde{\alpha}_k,\widetilde{\beta}_k)$ 也互不相交且对任意$n\in\mathbb{N}$有

$$\sum_{1\le k\le n}(\widetilde{\beta}_k-\widetilde{\alpha}_k)\le\sum_{k\ge1}(\widetilde{\beta}_k-\widetilde{\alpha}_k)\le\sum_{k\ge1}(\beta_k-\alpha_k)=m(G\cap(a,b))<\delta$$

故

$$\sum_{1\le k\le n}|F(\widetilde{\beta}_k)-F(\widetilde{\alpha}_k)|<\varepsilon.$$

令$n\to\infty$ 得到

$$\sum_{k\ge1}|F(\widetilde{\beta}_k)-F(\widetilde{\alpha}_k)|=\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le k\le n}|F(\widetilde{\beta}_k)-F(\widetilde{\alpha}_k)|\le\varepsilon.$$

所以$m^*(F(Z))\le\varepsilon$. 由$\varepsilon>0$的任意性知$m^*(F(Z))=0$. $\square$

【引理3.4.7】设开区间$(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$上的实值函数$g$在子集$E\subset(\alpha,\beta)$中的每一点可微且$m(g(E))=0$. 则$g'(t)=0$ a.e. $t\in E$.

【证】我们在第二章**充习题1**中(证明见习题课)对一般维数($d\ge1$)的情形已证明了这一性质。 $\square$

【定理3.4.8】设$[\alpha,\beta],[a,b]$为$\mathbb{R}$中有界闭区间, $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$几乎处处可微, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$绝对连续函数. 设$[a,b]$上的实值函数f函数满足$f(x)=F'(x)$ a.e. $x\in[a,b]$. 假设复合函数$t\mapsto F(g(t))$也是$[\alpha,\beta]$上的绝对连续函数, 则复合函数微分法成立:

$$(F\circ g)'(t)=f(g(t))g'(t)\quad\text{a.e.}\quad t\in[\alpha,\beta].\tag{3.4.4}$$

从而有

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t \tag{3.4.5}$$

即

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t. \tag{3.4.6}$$

【证】令

$$Z_0 = \{t \in [\alpha, \beta] \mid g\text{或}F \circ g\text{在点}t\text{不可微}\},$$

$$Z = \{a, b\} \cup \{x \in [a, b] \mid F\text{在点}x\text{不可微或可微但}F'(x) \neq f(x)\}.$$

则由假设知Z_0, Z都是零测集. 由F绝对连续和**引理3.4.6** 知$F(Z)$是零测集. 令

$$E = \{t \in (\alpha, \beta) \setminus Z_0 \mid g(t) \in Z\}.$$

则$g(E) \subset Z, (F \circ g)(E) = F(g(E)) \subset F(Z)$. 因此$g(E)$ 和$(F \circ g)(E)$ 都是零测集. 因$g, F \circ g$ 都在E中每点可微, 故由**引理3.4.7** 知

$$g'(t) = 0, \quad (F \circ g)'(t) = 0 \qquad \forall\, t \in E \setminus Z_1$$

其中$Z_1 \subset E$是一个零测集. 下证

$$(F \circ g)'(t) = f(g(t))g'(t) \qquad \forall\, t \in (\alpha, \beta) \setminus (Z_0 \cup Z_1). \tag{3.4.7}$$

任取$t_0 \in (\alpha, \beta) \setminus (Z_0 \cup Z_1)$. 若$t_0 \in E$, 则有$(F \circ g)'(t_0) = 0, g'(t_0) = 0$ 从而有$(F \circ g)'(t_0) = 0 = f(g(t_0))g'(t_0)$. 若$t_0 \notin E$, 则$x_0 := g(t_0) \in [a, b] \setminus Z = (a, b) \setminus Z$, 因此$F$在点$x_0$可微且$F'(x_0) = f(x_0)$, 而$g$在点$t_0$可微. 据复合函数微分法(锁链法则)知复合函数$F \circ g$在点$t_0$可微且$(F \circ g)'(t_0) = f(g(t_0))g'(t_0)$. 这就证明了(3.4.7) 从而(3.4.4) 成立. 最后由(3.4.4) 和绝对连续函数的性质(Newton-Leibnitz 公式) 即知积分等式(3.4.5), (3.4.6) 成立。 □

注意: 这一定理中要求复合函数$t \mapsto F(g(t))$也是绝对连续的, 这一点不是多余的因为有例子表明即便F, g都是绝对连续的, 它们的复合$F \circ g$也可以不是绝对连续的.

在实际问题研究中, 常用的是下面定理。

【定理3.4.9】设$[\alpha, \beta], [a, b]$为$\mathbb{R}$中有界闭区间, 函数$g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$满足下面两条之一:

(a) $g\in \mathrm{AC}([\alpha,\beta]), F\in \mathrm{Lip}([a,b])$

(b) $g\in \mathrm{AC}([\alpha,\beta])$且单调不减, $F\in \mathrm{AC}([a,b])$.

则$F\circ g\in \mathrm{AC}([\alpha,\beta])$ 从而有

$$F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t$$

其中函数f满足$f(x)=F'(x)$ a.e. $x\in[a,b]$.

【证】据**定理3.4.8**和$\mathrm{Lip}([a,b])\subset \mathrm{AC}([a,b])$ 以及绝对连续的函数是几乎处处可微的, 为证本定理, 只需证明条件(a) 和(b) 各自蕴含$F\circ g\in \mathrm{AC}([\alpha,\beta])$.

设g,F满足条件(a) 并设$L>0$为F的一个Lipschitz 常数. 则对任意$\varepsilon>0$, 对$\varepsilon/L>0$, 存在$\delta>0$ 使得$[\alpha,\beta]$中任何有限多个互不相交的开区间$(\alpha_k,\beta_k), k=1,2,...,n$ 满足$\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$ 都有$\sum\limits_{k=1}^{n}|g(\beta_k)-g(\alpha_k)|<\varepsilon/L$. 于是有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(g(\beta_k))-F(g(\alpha_k))|\le L\sum_{k=1}^{n}|g(\beta_k)-g(\alpha_k)|<\varepsilon.$$

所以$F\circ g\in \mathrm{AC}([\alpha,\beta])$.

其次设g,F满足条件(b). 对任意$\varepsilon>0$, 由$F\in \mathrm{AC}([a,b])$ 知存在$\eta>0$ 使得$[a,b]$中任何有限多个互不相交的开区间$(a_k,b_k), k=1,2,...,n$ 满足$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\eta$ 都有$\sum\limits_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$.
对此$\eta>0$, 由$g\in \mathrm{AC}([\alpha,\beta])$知存在$\delta>0$ 使得$[\alpha,\beta]$中任何有限多个互不相交的开区间$(\alpha_k,\beta_k), k=1,2,...,N$ 满足$\sum\limits_{k=1}^{N}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$ 都有$\sum\limits_{k=1}^{N}|g(\beta_k)-g(\alpha_k)|<\eta$. 因$g$单调不减, 故重新标号后可以假设

$$g(\alpha_k)<g(\beta_k),\ \ k=1,2,...,n;\quad g(\alpha_k)=g(\beta_k),\ \ k=n+1,n+2,...,N.$$

再由g单调不减知开区间$(g(\alpha_k),\, g(\beta_k))\,(k=1,2,...,n)$ 互不相交. 这样就得到了$[a,b]$中的互不相交的开区间$(g(\alpha_k),\, g(\beta_k)), k=1,2,...,n$ 且满足$\sum\limits_{k=1}^{n}[g(\beta_k)-g(\alpha_k)]<\eta$. 于是有

$$\sum_{k=1}^{N}|F(g(\beta_k))-F(g(\alpha_k))|=\sum_{k=1}^{n}|F(g(\beta_k))-F(g(\alpha_k))|<\varepsilon.$$

所以$F\circ g\in \mathrm{AC}([\alpha,\beta])$. $\square$

应用上述定理, 看一个例子, 它常用于研究微分方程解的比较原理。

【例】 设$u,v:[0,T]\to\mathbb{R}$ 绝对连续. 则有

$$(u(t)-v(t))_+=(u(0)-v(0))_++\int_0^t(u'(s)-v'(s))\mathbf{1}_{\{u(s)>v(s)\}}\mathrm{d}s\qquad\forall\, t\in(0,T].$$

这里$(x)_+=\max\{x,0\}=\frac{1}{2}(|x|+x), x\in\mathbb{R}$.

【证】 令$g(t)=u(t)-v(t), F(x)=(x)_+$, 则$g\in\mathrm{AC}([0,T]), F\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, 且

$$F'(x)=\mathbf{1}_{\{x>0\}}\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

对每个$0<t\le T$, 将上面定理应用于区间$[0,t]$ 有

$$F(g(t))=F(g(0))+\int_0^t 1_{\{g(s)>0\}}g'(s)\mathrm{d}s.$$

再将$F(g(t))=(g(t))_+=(u(t)-v(t))_+$, $g'(s)=u'(s)-v'(s)$ 和$1_{\{g(s)>0\}}=\mathbf{1}_{\{u(s)>v(s)\}}$代入即得所证等式. $\square$

作业题

- Stein和Shakarchi的《实分析》第3章第5节习题16, 19, 23, 32; 第6节习题6.
- 周民强《实变函数论》(第2版2008年, 北大出版社) P269 习题1–7；P273 习题1, 2, 3；P280 习题3–11, 13, 15, 17, 18, 19, 20；P282 习题1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16.

补充习题: 设实值函数F在闭区间$[a,b]$上连续, 在$[a,b]$内几乎处处可微, 且$F'\in L^1([a,b])$. 令$Z=\{x\in[a,b]\mid F\text{ 在}x\text{不可微}\}$. 证明: F在$[a,b]$上绝对连续 $\Longleftrightarrow F(Z)$是零测集。

第四章 Hilbert空间简介, L^2上的Fourier 变换

常见的Hilbert空间, 如由平方和收敛的级数构成的Hilbert空间、平方可积的函数构成的Hilbert空间等等, 是数学各分支(基础、应用、计算、概率统计等)和物理、力学等自然科学中最重要的基本工具. 其一个主要原因是: 科学研究中最难的部分是如何描述研究对象的震荡行为, 而Hilbert空间中的广义Fourier级数和L^2 空间中的Fourier变换是描述震荡行为的最简单、最普适的有效工具.

说明: 为了便于联系函数空间, 我们对一般线性空间中的元素也使用记号f, g等。此外, 为兼顾使用范围, 我们偶尔考虑实数域上的线性空间, 多数情况是考虑复数域上的线性空间。

§4.1 赋范线性空间, 内积空间和Hilbert 空间

赋范线性空间这个词虽是第一次见过, 但我们实际已用过不少例子。例如

欧空间$\mathbb{R}^d$是实数域上的一个线性空间, 其上的范数就是$\mathbb{R}^d$中元素x的模长$|x|$.

复数域$\mathbb{C}$本身是复数域上的一个线性空间, 其上的范数就是复数的模长$|z|$.

函数空间$L^p(E)\,(1\le p\le\infty)$是复数域上的一个线性空间, 其元素$f$的范数为$\|f\|_{L^p}$.

除非特别说明, 我们总假定所考虑的线性空间是非零的(即至少是1维的)。

【定义(赋范线性空间)】设X是复数域$\mathbb{C}$上的一个线性空间. 称X上的一个非负函数$\|\cdot\|: X\to[0,+\infty)$ 是X上的一个范数如果它满足下面三条:

(i) 正定性: $\|f\|\ge 0\quad \forall\, f\in X;\qquad \|f\|=0 \iff f=0.$

(ii) 正齐次性: $\|\lambda f\|=|\lambda|\|f\|\qquad \forall\, f\in X,\ \lambda\in\mathbb{C}.$

(iii) 三角不等式: $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|\qquad \forall\, f,g\in X.$

如果$\|\cdot\|$是X上的一个范数, 则称二元组$(X,\|\cdot\|)$为一个**赋范线性空间**。 □

根据这一定义易见若X_1是赋范线性空间$X=(X,\|\cdot\|)$的一个线性子空间, 则易见$(X_1,\|\cdot\|)$ 也是一个赋范线性空间。

【定义(完备的赋范线性空间)】$(X,\|\cdot\|)$为复数域上的一个赋范线性空间且范数$\|\cdot\|$使得$(X,\|\cdot\|)$还是完备的, 则称$(X,\|\cdot\|)$为一个**完备的赋范线性空间** 或**Banach 空间** (后者是因为数学家Banach 最早系统地研究了这类空间)。 这里完备性的定义

如前: 若对于X中的任一Cauchy 列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即满足

$$\lim_{n\to\infty,k\to\infty}\|f_n-f_k\|=0$$

者, 都存在$f\in X$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

则称$(X,\|\cdot\|)$是完备的. □

【定义(可分的赋范线性空间)】$(X,\|\cdot\|)$为复数域上的一个赋范线性空间。若X有一个可数稠密子集$\mathcal{F}$, 即可数集$\mathcal{F}$按范数$\|\cdot\|$在X中稠密:

$$\forall\, f\in X\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists\varphi\in\mathcal{F}\quad \text{s.t.}\quad \|\varphi-f\|<\varepsilon$$

则称$(X,\|\cdot\|)$是**可分的**, 也称$(X,\|\cdot\|)$是一个**可分的**的赋范线性空间。 □

范数的三角不等式可以推广到多角不等式:

$$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|\le\|f_1\|+\|f_2\|+\cdots+\|f_n\|.$$

此外易见范数$f\mapsto\|f\|$ 是连续的:

$$\Big|\|f\|-\|g\|\Big|\le\|f-g\|.$$

【命题4.1.1】每个有限维的赋范线性空间都是可分的Banach 空间。

【证】设$X=(X,\|\cdot\|)$是一个有限维的赋范线性空间。设$\dim X=N\in\mathbb{N}$ 并设$\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_N\}$ 是X的一个基底. 令

$$|\mathbf{a}|=\Big(\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\Big)^{1/2},\qquad \mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_N)\in\mathbb{C}^N.$$

先证明存在常数$0<C_1\le C_2<\infty$ 使得

$$C_1|\mathbf{a}|\le\Big\|\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\Big\|\le C_2|\mathbf{a}|\qquad\forall\,\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_N)\in\mathbb{C}^N.\tag{4.1.1}$$

为此我们令

$$\Phi(\mathbf{a})=\Big\|\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\Big\|,\quad \mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_N)\in\mathbb{C}^N.$$

由范数的三角不等式和Cauchy 不等式有

$$\Phi(\mathbf{a})\le\sum_{k=1}^{N}\|a_k\varphi_k\|=\sum_{k=1}^{N}|a_k|\|\varphi_k\|\le\Big(\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{N}\|\varphi_k\|^2\Big)^{1/2}=C_2|\mathbf{a}|$$

其中$C_2 = \left(\sum_{k=1}^{N}\|\varphi_k\|^2\right)^{1/2}$. 应用这一不等式, 对任意$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_N), \mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_N) \in \mathbb{C}^N$ 有

$$|\Phi(\mathbf{a}) - \Phi(\mathbf{b})| \le \Big\|\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k - \sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k\Big\| = \Phi(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \le C_2|\mathbf{a}-\mathbf{b}|.$$

这表明Φ在$\mathbb{C}^N$上连续. 又由$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$线性无关可知当$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$时, $\Phi(\mathbf{a}) > 0$. 特别可知Φ在紧集$\{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^N \mid |\mathbf{a}| = 1\}$上处处大于零。于是由连续函数在紧集上有最大值最小值可知

$$C_1 := \min_{\mathbf{a}\in\mathbb{C}^N,\, |\mathbf{a}|=1} \Phi(\mathbf{a}) > 0.$$

对任意$\mathbf{a} \in \mathbb{C}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$, 令$\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, 则$|\widetilde{\mathbf{a}}| = 1$, 因此结合范数的正齐次性有

$$\frac{\Phi(\mathbf{a})}{|\mathbf{a}|} = \Big\|\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{|\mathbf{a}|}\varphi_k\Big\| = \Phi(\widetilde{\mathbf{a}}) \ge C_1 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\mathbf{a}) \ge C_1|\mathbf{a}|.$$

上式右端的不等式当$\mathbf{a} = \mathbf{0}$显然也成立。这就证明了(4.1.1)成立。

下面用不等式(4.1.1)证明$X = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ 是完备的、可分的。

设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的一个Cauchy 列. 写

$$f_n = \sum_{k=1}^{N} a_{n,k}\varphi_k, \quad \mathbf{a}_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,N}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

则有

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m| \le \frac{1}{C_1}\Big\|\sum_{k=1}^{N} a_{n,k}\varphi_k - \sum_{k=1}^{N} a_{m,k}\varphi_k\Big\| = \frac{1}{C_1}\|f_n - f_m\|.$$

这蕴含$\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathbb{C}^N$中的一个Cauchy 列. 因$\mathbb{C}^N$ (看成$\mathbb{R}^{2N}$) 是完备的, 故存在$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_N) \in \mathbb{C}^N$ 使得$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| \to 0\,(n \to \infty)$. 令$f = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k$ 则$f \in X$ 且

$$\|f_n - f\| = \Big\|\sum_{k=1}^{N}(a_{n,k} - a_k)\varphi_k\Big\| \le C_2|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

这证明了$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在X中收敛. 所以X是完备的。

最后证明X是可分的. 周知有理数集$\mathbb{Q}$是可数集且在$\mathbb{R}$ 中稠密. 因两个从而有限多个可数集的笛卡尔积还是可数集, 故$\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q} = \{a + \mathrm{i}b \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$是复数域$\mathbb{C}$ (看成$\mathbb{R}^2$)的可数稠密集, $(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^N = (\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q}) \times (\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q}) \times \cdots \times (\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})$ (N次乘积)是$\mathbb{C}^N$ (看成$\mathbb{R}^{2N}$)的可数稠密集。令

$$\mathcal{F} = \Big\{\sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k \,\Big|\, (c_1, c_2, ..., c_N) \in (\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^N\Big\}.$$

因$\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_N$ 线性无关, 故映射

$$\mathbf{c}=(c_1,c_2,...,c_N)\mapsto\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k,\qquad \mathbf{c}\in(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^N$$

是$(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^N$到$\mathcal{F}$的一一对应. 因此$\mathcal{F}$也是可数集. 来证$\mathcal{F}$在$X$ 中稠密。

对任意$f\in X$ 和任意$\varepsilon>0$, 写$f=\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k$. 对于$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_N)\in\mathbb{C}^N$, 由$(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^N$在$\mathbb{C}^N$ 中的稠密性, 存在$\mathbf{c}=(c_1,c_2,...,c_N)\in(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^N$ 使得$|\mathbf{c}-\mathbf{a}|<\frac{\varepsilon}{C_2}$. 令$\varphi=\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k$, 则$\varphi\in\mathcal{F}$ 且

$$\|\varphi-f\|=\Phi(\mathbf{c}-\mathbf{a})\le C_2|\mathbf{c}-\mathbf{a}|<\varepsilon.$$

所以$\mathcal{F}$在X 中稠密。所以X是可分的。 □

本章主要学习一类特殊的Banach 空间—— Hilbert空间.

【定义(内积空间和Hilbert空间)】设$\mathcal{H}$是复数域$\mathbb{C}$上的一个线性空间, 并设二元函数(叫做内积运算) $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 满足下面三条:

(i) 正定性: $\langle f,f\rangle\ge 0\quad \forall f\in\mathcal{H};\quad \langle f,f\rangle=0\iff f=0.$

(ii) 共轭对称性: $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}\quad \forall f,g\in\mathcal{H}.$

(iii) 对第一变元的线性:

$$\langle\alpha f+\beta g,h\rangle=\alpha\langle f,h\rangle+\beta\langle g,h\rangle\qquad\forall f,g,h\in\mathcal{H},\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

[这蕴含**对第二变元的共轭线性:**

$$\langle h,\alpha f+\beta g\rangle=\overline{\alpha}\langle h,f\rangle+\overline{\beta}\langle h,g\rangle\qquad\forall f,g,h\in\mathcal{H},\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$]

则称$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间. 在内积空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$中, 令$\|\cdot\|$是由内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$导出的范数, 即定义

$$\|f\|:=\sqrt{\langle f,f\rangle},\quad f\in\mathcal{H}.$$

则$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$是一个赋范线性空间。

进一步, 若赋范线性空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$还是完备的, 则称则称$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$是一个完备的内积空间或 **Hilbert空间** (后者是因为数学家Hilbert最早系统地研究了这类空间)。 □

【**注1**】需要说明由内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$导出$\|\cdot\|$ 确实是$\mathcal{H}$上的一个范数.

事实上由内积的定义有

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle},\quad \|\lambda f\|=\sqrt{\langle \lambda f,\lambda f\rangle}=\sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle f,f\rangle}=\sqrt{|\lambda|^2\langle f,f\rangle}=|\lambda|\|f\|$$

因此$\|\cdot\|$ 满足范数定义的前两条. 为证三角不等式, 先证明

Cauchy不等式:

$$|\langle f,g\rangle|\le \|f\|\|g\| \qquad \forall\, f,g\in\mathcal{H}. \tag{4.1.2}$$

若$f=0$, 则$\langle f,g\rangle=\langle 0f,g\rangle=0\langle f,g\rangle=0$. 此时(4.1.2)成立. 设$f\neq 0$. 先设$\langle f,g\rangle$是实数. 此时有

$$0\le \|tf+g\|^2=t^2\|f\|^2+2t\langle f,g\rangle+\|g\|^2 \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

取$t=-\langle f,g\rangle/\|f\|^2$ 得到

$$0\le \frac{\langle f,g\rangle^2}{\|f\|^4}\|f\|^2-2\frac{\langle f,g\rangle^2}{\|f\|^2}+\|g\|^2=-\frac{\langle f,g\rangle^2}{\|f\|^2}+\|g\|^2$$

即$\langle f,g\rangle^2\le\|f\|^2\|g\|^2$. 所以此时(4.1.2)成立.

转到对一般情形: 对复数$\langle f,g\rangle$, 存在$\theta\in[0,2\pi)$ 使得$\langle f,g\rangle=|\langle f,g\rangle|e^{\mathrm{i}\theta}$. 因此内积$\langle e^{-\mathrm{i}\theta}f,g\rangle=|\langle f,g\rangle|$ 是实数. 于是由实的情形的结果有

$$|\langle f,g\rangle|=\langle e^{-\mathrm{i}\theta}f,g\rangle\le\|e^{-\mathrm{i}\theta}f\|\|g\|=\|f\|\|g\|.$$

所以Cauchy不等式成立.

由内积运算和Cauchy不等式即得

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2&=\|f\|^2+\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle+\|g\|^2=\|f\|^2+2\mathrm{Re}(\langle f,g\rangle)+\|g\|^2\\&\le\|f\|^2+2|\langle f,g\rangle|+\|g\|^2\le\|f\|^2+2\|f\|\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|+\|g\|)^2.\end{aligned}$$

所以$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$. 所以$\|\cdot\|$ 还满足三角不等式, 因此$\|\cdot\|$ 确是$\mathcal{H}$上的一个范数. $\square$

【**注2**】一类常用的Hilbert空间是$L^2(E)$, 其中$E\subset\mathbb{R}^d$ 为一个Lebesgue 可测集且$m(E)>0$. 事实上周知$L^2(E)$是复数域$\mathbb{C}$上的一个线性空间且我们已证明它按L^2范数$\|\cdot\|_{L^2}$是完备的, 因此$(L^2(E),\|\cdot\|_{L^2})$ 是一个Banach 空间. 在$L^2(E)$上定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_E f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x, \qquad f,g\in L^2(E).$$

易见$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 确是$L^2(E)$上的内积. 因$\|f\|_{L^2}=\sqrt{\langle f,f\rangle}$ for all $f\in L^2(E)$, 故$L^2(E)=(L^2(E),\|\cdot\|_{L^2})=(L^2(E),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个Hilbert空间.

【注3】关于两个元素的相等: 对于两个元素$f,g\in\mathcal{H}$, 由范数的定义知$f=g\iff\|f-g\|=0$. 把后者看成是两个元素相等的定义是有益的, 会减少困惑。举例来说, 对于内积空间$L^2(E)$, 它的元素f,g等是函数, 因此就有两种相等"$f=g$", 一种相等是按内积空间$L^2(E)$中定义的相等, 另一种相等是作为E上的两个函数的通常的相等. 由范数的定义知第一种相等等价于$\|f-g\|_{L^2}=0$, 进而由积分理论知这等价于$f(x)=g(x)$ a.e. $x\in E$ 即函数f与g在E上几乎处处相等。如果f,g 都是连续函数, 则这两种相等是一回事; 如果f,g 不都是连续函数, 则这两种相等就有微小区别, 这里"微小"是因为零测集对积分无贡献。在具体问题的研究中, 如果涉及点态行为, 例如讨论函数的连续性等, 我们会对相等的意义给出说明。对其它情形, 如果未加说明, 就按内积空间中元素的相等来理解, 也即按"$f=g\iff\|f-g\|_{L^2}=0$"来理解(这是最稳妥的)。

【注4】在Stein & Shakarchi的《实分析》中, 作者在Hilbert 空间的定义中还增加了可分性, 即要求$(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ 还是可分的, 其原因是我们遇到的绝大部分和常用的Hilbert空间都是可分的。但由于多了一个要求, 在应用中就多了一道验证手续, 而且一些定理和命题的证明用不着可分性, 所以本讲义对Hilbert 空间的定义还是保持了传统版本。只是在下面研究Hilbert 空间的规范正交基的存在性时, 我们才加上可分性假设。

• 内积空间中的收敛、范数的连续性、内积的连续性

与任何赋范线性空间一样, 在内积空间$\mathcal{H}$中定义收敛为按范数收敛:

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f\quad\text{in }\mathcal{H}\iff\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0.\qquad(f_n,f\in\mathcal{H})$$

范数和内积的连续性:

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f,\ \lim_{n\to\infty}g_n=g\ \text{ in norm}\implies\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=\|f\|,\ \lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle=\langle f,g\rangle.$$

事实上由范数三角不等式有

$$\Big|\|f_n\|-\|f\|\Big|\le\|f_n-f\|\to0\quad(n\to\infty)$$

所以范数是连续的. 又由Cauchy不等式有

$$|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| = |\langle f_n - f, g_n\rangle + \langle f, g_n - g\rangle| \leq \|f_n - f\|\|g_n\| + \|f\|\|g_n - g\|$$

因此内积也是连续的. $\square$

§4.2 内积空间中的闭子空间和正交投影

【**定义**】设$\mathcal{S}$是内积空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ 的一个线性子空间且是$\mathcal{H}$的闭子集(即$\mathcal{S}\ni f_n\to f\in\mathcal{H}\implies f\in\mathcal{S}$). 则称$\mathcal{S}$ 是$\mathcal{H}$ 的闭子空间。 $\Box$

【**例**】内积空间中的每个有限维线性子空间都是完备的闭子空间。

【证】设$\mathcal{S}$是内积空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$的一个有限维的线性子空间. 则$(\mathcal{S},\|\cdot\|)$ 是一个有限维的赋范线性空间. 据**命题4.1.1** 知$(\mathcal{S},\|\cdot\|)$ 是完备的. 因收敛序列都是Cauchy 列, 故由$\mathcal{S}$的完备性知$\mathcal{S}$ 是$\mathcal{H}$的闭子集. 所以$\mathcal{S}$是$\mathcal{H}$的完备的闭子空间。 $\Box$

注意, 在下面的命题中我们对内积空间加了完备性假设, 即考虑的是Hilbert 空间.

【**命题4.2.1(垂足引理)**】设$\mathcal{S}$是Hilbert 空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$的一个闭子空间, $f\in\mathcal{H}$. 则

1° $\mathcal{S}$对f的最佳逼近元g_0存在且唯一, 即存在唯一的元素$g_0\in\mathcal{S}$ 使得

$$\|f-g_0\|=\min_{g\in\mathcal{S}}\|f-g\|.$$

2° 设$g_0\in\mathcal{S}$. 则

$$g_0\text{是}\mathcal{S}\text{对}f\text{的最佳逼近元}\iff f-g_0\perp\mathcal{S}\quad\text{即}\quad\langle f-g_0,g\rangle=0\ \ \forall\, g\in\mathcal{S}.$$

[综合**1°**,**2°** 即知, 存在唯一的$g_0\in\mathcal{S}$ 使得$f-g_0\perp\mathcal{S}$.]

【证】证明的主要工具是平行四边形等式:

$$\|A+B\|^2+\|A-B\|^2=2(\|A\|^2+\|B\|^2),\qquad A,B\in\mathcal{H}.\tag{4.2.1}$$

它是简单等式$\|A\pm B\|^2=\|A\|^2\pm(\langle A,B\rangle+\langle B,A\rangle)+\|B\|^2$的结果。 令

$$d=\inf_{g\in\mathcal{S}}\|f-g\|.$$

则对任意$n\in\mathbb{N}$, 存在$g_n\in\mathcal{S}$ 使得

$$d\le\|f-g_n\|<\sqrt{d^2+\frac{1}{n}}\qquad\text{i.e.}\qquad d^2\le\|f-g_n\|^2<d^2+\frac{1}{n}.$$

在(4.2.1) 中取$A=f-g_n, B=f-g_m$. 则有

$$\|2f-(g_n+g_m)\|^2+\|g_m-g_n\|^2=2(\|f-g_n\|^2+\|f-g_m\|^2),\quad n,m\in\mathbb{N}.$$

因$\mathcal{S}$是线性空间, 故有$\frac{1}{2}(g_n+g_m)\in\mathcal{S}$ 从而有

$$\|2f-(g_n+g_m)\|^2=4\Big\|f-\frac{g_n+g_m}{2}\Big\|^2\ge 4d^2.$$

由此得

$$\begin{aligned}&\|g_m-g_n\|^2=2(\|f-g_n\|^2+\|f-g_m\|^2)-\|2f-(g_n+g_m)\|^2\\&\le 2\Big(2d^2+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\Big)-4d^2=\frac{2}{n}+\frac{2}{m}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty,m\to\infty}\|g_m-g_n\|=0.\end{aligned}$$

因$\mathcal{H}$ 完备, 故存在$g_0\in\mathcal{H}$ 使得$g_n\to g_0\,(n\to\infty)$. 又因$\mathcal{S}$ 是$\mathcal{H}$的闭子集, 故$g_0\in\mathcal{S}$. 再由

$$\Big|\|f-g_n\|-\|f-g_0\|\Big|\le\|g_0-g_n\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

即得

$$\|f-g_0\|=\lim_{n\to\infty}\|f-g_n\|=d.$$

这证明了下确界d 等于最小值并且g_0 是$\mathcal{S}$对f的一个最佳逼近元。其次证明g_0是唯一的最佳逼近元。先证明$f-g_0\perp\mathcal{S}$.

任取$g\in\mathcal{S}$. 先设$\langle f-g_0,g\rangle$是实数. 此时有

$$\|f-g_0\|^2=p(0)\le p(t):=\|f-g_0+tg\|^2=\|f-g_0\|^2+2t\langle f-g_0,g\rangle+t^2\|g\|^2,\quad t\in\mathbb{R}.$$

这里不等号"$\le$"是因为$g_0-tg\in\mathcal{S}$. 因$p(0)$是$p(t)$在$\mathbb{R}$上的最小值, 故

$$p'(0)=0\qquad\text{i.e.}\qquad\langle f-g_0,g\rangle=0.$$

对于$\langle f-g_0,g\rangle$不是实数的情形, 取$\theta\in[0,2\pi]$ 使得$\langle f-g_0,g\rangle=|\langle f-g_0,g\rangle|e^{\mathrm{i}\theta}$. 则$\langle f-g_0,e^{\mathrm{i}\theta}g\rangle=e^{-\mathrm{i}\theta}\langle f-g_0,g\rangle=|\langle f-g_0,g\rangle|$是实数且$e^{\mathrm{i}\theta}g\in\mathcal{S}$, 故有$\langle f-g_0,e^{\mathrm{i}\theta}g\rangle=0$. 这蕴含$\langle f-g_0,g\rangle=0$. 所以$f-g_0\perp\mathcal{S}$.

现在设$g_1\in\mathcal{S}$也是$\mathcal{S}$对f的一个最佳逼近元。则由$g_0-g_1\in\mathcal{S}$ 知$\langle f-g_0,g_0-g_1\rangle=0$ 从而有

$$\|f-g_1\|^2=\|f-g_0+g_0-g_1\|^2=\|f-g_0\|^2+\|g_0-g_1\|^2.\tag{4.2.2}$$

因$\|f-g_1\|^2=\|f-g_0\|^2=d^2$, 故得$\|g_0-g_1\|^2=0$. 所以$g_1=g_0$.

以上证明了g_0是$\mathcal{S}$对f的唯一最佳逼近元且$f-g_0\perp\mathcal{S}$.

反过来, 设$g_0\in\mathcal{S}$ 满足$f-g_0\perp\mathcal{S}$. 则由(4.2.2)知对任意$g\in\mathcal{S}$ 有

$$\|f-g\|^2=\|f-g_0\|^2+\|g_0-g\|^2\ge\|f-g_0\|^2.$$

这表明g_0是$\mathcal{S}$对f的最佳逼近元。 $\square$

【命题4.2.2(正交分解)】设$\mathcal{S}$是Hilbert 空间$\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle) = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$的一个闭子空间, 设$\mathcal{S}^\perp$是$\mathcal{S}$的正交补, 即$\mathcal{S}^\perp = \{h \in \mathcal{H} \mid h \perp \mathcal{S}\}$. 则成立直和分解

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$$

它表示: 对任意$f \in \mathcal{H}$ 存在唯一的$(g, h) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}^\perp$ 使得$f = g + h$.

【证】这命题实际上是**命题4.2.1(垂足引理)**的另一说法, 因为根据后者, 对任意$f \in \mathcal{H}$, 存在唯一的$g \in \mathcal{S}$ 使得$f - g \perp \mathcal{S}$. 令$h = f - g$, 则$h \in \mathcal{S}^\perp$ 且$f = g + h$. 由g的唯一性还知这分解是唯一的. $\square$

从正交分解的唯一性可以看出$\mathcal{S}^\perp$与$\mathcal{S}$ 地位是对称的(当然这是指在理论上而非实际上), 因此有$(\mathcal{S}^\perp)^\perp = \mathcal{S}$. 这一点也可直接证明: 对任意$g \in \mathcal{S}$, 对任意$h \in \mathcal{S}^\perp$ 有$\langle g, h\rangle = 0$, 因此$g \perp \mathcal{S}^\perp$, 所以$g \in (\mathcal{S}^\perp)^\perp$. 这证明了$\mathcal{S} \subset (\mathcal{S}^\perp)^\perp$. 反之对任意$g \in (\mathcal{S}^\perp)^\perp$, 由上述分解定理, 存在$g_1 \in \mathcal{S}$ 和$h_1 \in \mathcal{S}^\perp$ 使得$g = g_1 + h_1$. 由此得 (因$g \perp \mathcal{S}^\perp$)

$$0 = \langle g, h_1\rangle = \langle g_1, h_1\rangle + \|h_1\|^2 = \|h_1\|^2 \implies h_1 = 0 \implies g = g_1 \in \mathcal{S}.$$

因此$(\mathcal{S}^\perp)^\perp \subset \mathcal{S}$. 所以$(\mathcal{S}^\perp)^\perp = \mathcal{S}$.

【正交投影】设$\mathcal{S}$是Hilbert 空间$\mathcal{H}$的闭子空间. 根据正交分解的唯一性, 我们定义从$\mathcal{H}$到$\mathcal{S}$的正交投影$P_{\mathcal{S}} : \mathcal{H} \to \mathcal{S}$ 如下:

$$P_{\mathcal{S}}(f) = g \quad \text{当} f = g + h \text{时, 其中} g \in \mathcal{S},\ h \in \mathcal{S}^\perp.$$

或等价地,

$$P_{\mathcal{S}}(f) = g \quad \text{当} f - g \perp \mathcal{S} \text{时}.$$

根据这一定义和正交分解的唯一性, 下面基本性质是明显的:

(a) $P_{\mathcal{S}}$是线性的, 即对任意$f, g \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 有

$$P_{\mathcal{S}}(\alpha f + \beta f) = \alpha P_{\mathcal{S}}(f) + \beta P_{\mathcal{S}}(g).$$

(b) $P_{\mathcal{S}}(f) = f \iff f \in \mathcal{S}$.

(c) 对任意$f \in \mathcal{H}$, $P_{\mathcal{S}}(f)$是$\mathcal{S}$对f的唯一的最佳逼近元:

$$\|f - P_{\mathcal{S}}(f)\| = \min_{g \in \mathcal{S}} \|f - g\|.$$

(d) 对任意$f \in \mathcal{H}$ 有$f - P_{\mathcal{S}}(f) \perp P_{\mathcal{S}}(f)$ 因此成立勾股定理:

$$\|f\|^2 = \|P_{\mathcal{S}}(f)\|^2 + \|f - P_{\mathcal{S}}(f)\|^2.$$

从而有“直角边≤斜边”:

$$\|P_{\mathcal{S}}(f)\| \le \|f\|.$$

【例】设$\psi \in \mathcal{H}$为一个单位向量, 即$\|\psi\| = 1$. 令$\mathcal{S}$ 是由ψ张成的一维线性子空间, 即

$$\mathcal{S} = \{\lambda\psi \mid \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

则从$\mathcal{H}$到$\mathcal{S}$的正交投影可表示为

$$P_{\mathcal{S}}(f) = \langle f, \psi\rangle\psi, \qquad f \in \mathcal{H}.$$

这是因为由$\|\psi\| = 1$ 有$\Big\langle f - \langle f, \psi\rangle\psi,\ \psi\Big\rangle = 0$ 即$f - \langle f, \psi\rangle\psi \perp \psi$, 从而有$f - \langle f, \psi\rangle\psi \perp \lambda\psi$ for all $\lambda \in \mathbb{C}$, 即$f - \langle f, \psi\rangle\psi \perp \mathcal{S}$, 所以$P_{\mathcal{S}}(f) = \langle f, \psi\rangle\psi$. 我们可以把内积$\langle f, \psi\rangle$叫做向量$f$沿方向$\psi$的投影系数。 □

§4.3 内积空间中的ON系和ON基

【定义(规范正交系、广义Fourier 系数、广义Fourier级数)】

设$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$为一个内积空间, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$中的可列集, 满足

$$\langle e_j,e_k\rangle=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & \text{if} \quad j=k\\ 0 & \text{if} \quad j\neq k\end{cases}$$

则称$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$中的一个**规范正交系** (orthonormal system), 简称**ON系**.

设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$中的一个ON 系, $f\in\mathcal{H}$. 则f沿每个方向e_k的投影系数

$$\langle f,e_k\rangle,\quad k=1,2,3,...$$

称为f关于ON 系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的**广义Fourier系数**, 简称**Fourier系数**, 同时称形式级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k \tag{4.3.1}$$

为f关于ON 系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的**广义Fourier级数**, 简称**Fourier级数**.

同样可对有限集$\{e_1,e_2,...,e_N\}\subset\mathcal{H}$ 定义ON系和ON基(后者不涉及无穷级数(4.3.1))。□

【注】 形式级数(4.3.1)之所以称为形式级数是因为它可能不收敛, 也即这级数的部分和可能不在$\mathcal{H}$ 中收敛. $\mathcal{H}$中的一个元素是否可以表示成收敛的(1.3)形式, 这是下面将考虑的问题

【Fourier部分和算子及其投影性质】 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为内积空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$中的一个ON系. 对任意$n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{H}_n=\text{span}\{e_1,e_2,...,e_n\}=\Big\{\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\;\Big|\;c_1,c_2,...,c_n\in\mathbb{C}\Big\}.$$

因$\mathcal{H}_n$是有限维的, 故它是$\mathcal{H}$的闭子空间. 我们称线性算子$S_n:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_n$,

$$S_n(f):=\sum_{k=1}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k,\quad f\in\mathcal{H} \tag{4.3.2}$$

为f的Fourier级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k$的前$n$ 部分和算子, 简称为部分和算子. 不难看出$S_n(f)$ 是从$\mathcal{H}$到$\mathcal{H}_n$ 的投影. 事实上易见$f-S_n(f)\perp e_k$ 即

$$\langle f-S_n(f),\,e_k\rangle=\langle f,e_k\rangle-\langle S_n(f),e_k\rangle=0,\quad k=1,2,...,n.$$

因此$f - S_n(f) \perp \mathcal{H}_n$. 所以$S_n(f)$ 是从$\mathcal{H}$到$\mathcal{H}_n$ 的投影. 进一步, 由$e_1, e_2, ..., e_n$ 互相正交有

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2$$

从而有

$$\|f\|^2 = \|S_n(f)\|^2 + \|f - S_n(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 + \|f - S_n(f)\|^2.$$

于是由正交投影基本性质立刻得到下面命题:

【命题4.3.1(最佳逼近、Bessel不等式)】

设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为内积空间$\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$中的一个ON 系. 则对任意$f \in \mathcal{H}$ 和任意$n \in \mathbb{N}$, 部分和$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k$ 是$\mathcal{H}_n = \mathrm{span}\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ 对于f的唯一的最佳逼近元且成立勾股定理:

$$\min_{g\in\mathcal{H}_n} \|f - g\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2. \tag{4.3.3}$$

因此特别有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \le \|f\|^2 \qquad\qquad (\textbf{Bessel 不等式}).$$

□

【定义(规范正交基)】设$\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle) = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$为一个内积空间, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$的一个ON系。如果对每个$f \in \mathcal{H}$, f的Fourier级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k$ 都按范数收敛于f, 即

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

也即

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\| = \lim_{n\to\infty} \left\|f - \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k\right\| = 0$$

则称$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$的一个**规范正交基**(orthonormal basis), 简称**ON基**. □

下面定理是关于Hilbert空间中的Fourier 级数的基本定理, 它同时给出了ON基的一些常用刻画(等价条件).

【定理4.3.2(ON基的刻画)】设$\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle) = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ 为一Hilbert空间, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$的一个ON系. 则以下(1),(2),(3),(4) 彼此等价: 即

$$(\mathbf{1}) \iff (\mathbf{2}) \iff (\mathbf{3}) \iff (\mathbf{4}).$$

(1)($\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是完全的) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的有限线性组合在$\mathcal{H}$中稠密, 即对任意$f\in\mathcal{H}$ 和任意$\varepsilon>0$ 存在有限多个常数$c_1,c_2,...,c_N\in\mathbb{C}$ 使得

$$\Big\|f-\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\Big\|<\varepsilon.$$

(2) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$的ON基.

(3) 对任意$f\in\mathcal{H}$, 若$f\perp e_k$ 即若$\langle f,e_k\rangle=0$ for all $k=1,2,3,...$, 则$f=0$.

(4) (Parseval 等式) 对任意$f\in\mathcal{H}$ 成立

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2.$$

【证】来证明(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2): 任取$f\in\mathcal{H}$. 令$\mathcal{H}_n=\mathrm{span}\{e_1,e_2,...,e_n\}$. 对任意$\varepsilon>0$, 由假设知存在有限多个常数$c_1,c_2,...,c_N\in\mathbb{C}$ 使得$\|f-\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\|<\varepsilon$. 对任意$n\ge N$ 易见有$\mathcal{H}_N\subset\mathcal{H}_n$ 于是由**命题4.3.1(最佳逼近)**可知

$$\|f-S_n(f)\|=\min_{g\in\mathcal{H}_n}\|f-g\|\le\min_{g\in\mathcal{H}_N}\|f-g\|\le\Big\|f-\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\Big\|<\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|=0\qquad\text{i.e.}\qquad f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k.$$

所以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$的ON基.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$的ON基. 并设$\langle f,e_k\rangle=0$ for all $k=1,2,3,....$ 则有

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k=\sum_{k=1}^{\infty}0=0.$$

所以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$具有性质(3).

(3) $\Longrightarrow$ (4): 对任意$f\in\mathcal{H}$, 由e_k的正交性有

$$\|S_m(f)-S_n(f)\|^2=\Big\|\sum_{k=n+1}^{m}\langle f,e_k\rangle e_k\Big\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}|\langle f,e_k\rangle|^2,\quad m>n\ge1.$$

而由Bessel不等式$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2\le\|f\|^2<+\infty$ 知正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2$ 收敛. 因此

$$\|S_m(f)-S_n(f)\|^2\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2\to0\quad(m>n\to\infty).$$

这表明$\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ 是$\mathcal{H}$中的一个Cauchy列. 因$\mathcal{H}$是Hilbert空间(即$\mathcal{H}$是完备的), 故按范数收敛的极限元素

$$g := \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k \quad \text{属于}\ \mathcal{H}.$$

来计算g的Fourier系数: 由**命题13.1**(内积的连续性) 对任意$k\in\mathbb{N}$有

$$\langle g, e_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle S_n(f), e_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle f, e_j\rangle\langle e_j, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle$$

即

$$\langle g-f, e_k\rangle = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

现在设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$具有性质(3). 则由$g-f\in\mathcal{H}$ 和上式知$g-f=0$. 因此

$$f = g = \lim_{n\to\infty} S_n(f) \qquad \text{in norm.}$$

于是由**命题4.3.1** 即得

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 \to 0 \quad (n\to\infty)$$

此即

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle f, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, e_k\rangle|^2.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): 设Parseval 等式成立. 则对任意$f\in\mathcal{H}$ 和任意$\varepsilon>0$, 由

$$\Big\|f - \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k\Big\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle f, e_k\rangle|^2 \to 0 \quad (n\to\infty)$$

知存在$N\in\mathbb{N}$使得

$$\Big\|f - \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k\Big\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N}|\langle f, e_k\rangle|^2} < \varepsilon.$$

所以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的有限线性组合在$\mathcal{H}$中稠密. $\square$

【注】由上述第(1)条和可分空间的定义还知: 若Hilbert 空间$(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ 有ON 基, 则$(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ 必是**可分的**。为证明这一点, 我们再次使用以下周知的事实:

(1) 有理点集$\mathbb{Q}^2$是可数集且它在$\mathbb{R}^2$中稠密。

(2) 两个从而有限多个可数集的笛卡尔积还是可数集。

(3) 可数多个可数集的并还是可数集。

由(1)易知复数域$\mathbb{C}$(看成$\mathbb{R}^2$) 有可数稠密集$\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q}=\{a+\mathrm{i}b \mid (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$. 由(2)知$(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^n=(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})\times(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})\times\cdots\times(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})$ (n次乘积) 是可数集, $n=1,2,3,\dots$. 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$一个ON基, 令

$$\mathcal{F}_n=\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\ \Big|\ (a_1,a_2,...,a_n)\in(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^n\Big\},\quad n=1,2,3,\dots.$$

因$e_1,e_2,...,e_n$ 线性无关, 故映射

$$(a_1,a_2,...,a_n)\mapsto\sum_{k=1}^{n}a_ke_k,\qquad (a_1,a_2,...,a_n)\in(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^n$$

是$(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^n$到$\mathcal{F}_n$的一一对应. 因此$\mathcal{F}_n$也是可数集. 于是由(3) 知

$$\mathcal{F}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$$

是可数集。来证$\mathcal{F}$在$(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ 中稠密。

对任意$f\in\mathcal{H}$ 和任意$\varepsilon>0$, 由ON 基的定义知存在$N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\Big\|f-\sum_{k=1}^{N}\langle f,e_k\rangle e_k\Big\|<\varepsilon/2.$$

对每个复数$\langle f,e_k\rangle e_k$ 选取$a_k\in\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q}$ 使得$|a_k-\langle f,e_k\rangle e_k|<\frac{\varepsilon}{2N}$. 令

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_ke_k$$

则$\varphi\in\mathcal{F}$ 且

$$\begin{aligned}&\|f-\varphi\|\le\Big\|f-\sum_{k=1}^{N}\langle f,e_k\rangle e_k\Big\|+\Big\|\sum_{k=1}^{N}\langle f,e_k\rangle e_k-\sum_{k=1}^{N}a_ke_k\Big\|\\&<\varepsilon/2+\Big\|\sum_{k=1}^{N}(\langle f,e_k\rangle-a_k\,)e_k\Big\|\le\varepsilon/2+\sum_{k=1}^{N}|\langle f,e_k\rangle-a_k|\|e_k\|\\&=\varepsilon/2+\sum_{k=1}^{n}|\langle f,e_k\rangle-a_k|<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以$\mathcal{F}$在$(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ 中稠密。 □

【定理4.3.3】 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ 中的一个ON基. 则

(a)(Fourier级数的唯一性) 设$f\in\mathcal{H}$ 且有数列$\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$使得按范数收敛有

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k$$

则$\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k$必为$f$的Fourier级数, 即必有$c_k=\langle f,e_k\rangle,\ k=1,2,3,\dots$.

(b)(Fourier系数的决定作用) 设$f,g\in\mathcal{H}$ 且有下面关系:

$$\text{若}\ \langle f,e_k\rangle=\langle g,e_k\rangle\ \text{对所有}\,k=1,2,3,\dots\text{成立, 则必有}\ \ f=g.$$

【证】(a): 令$f_n=\sum_{k=1}^{n}c_ke_k$. 则由假设知$\|f_n-f\|\to 0\,(n\to\infty)$. 于是对任意$k\in\mathbb{N}$, 当$n\ge k$ 时有

$$c_k=\langle f_n,e_k\rangle\to\langle f,e_k\rangle\quad(n\to\infty).$$

所以$c_k=\langle f,e_k\rangle,\ k=1,2,3,\dots$.

(b): 我们有$\langle f-g,e_k\rangle=0,k=1,2,3,\dots$. 因$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是ON基, 故由**定理13.3** 知$f-g=0$, 即$f=g$. $\square$

上面我们已指出, 若Hilbert 空间$(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ 有ON 基, 则$(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ 必是**可分的**。应用格拉姆-施密特正交化过程（Gram-Schmidt 过程), 我们能够证明反之也对, 即我们有

【定理4.3.4】 每个**可分的**Hilbert 空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathcal{H},\|\cdot\|)$都有ON基.

【证】分四步进行.

Step1. 若$\mathcal{H}$是有限维的, 则$\mathcal{H}$ 有一个ON基。这是因为若$\mathcal{H}$是有限维的, $\dim\mathcal{H}=n\in\mathbb{N}$, 那么设$\{h_1,h_2,...,h_n\}$为$\mathcal{H}$的一个基底, 则应用格拉姆-施密特正交化过程(也见下面)即知$\mathcal{H}$ 有一个ON基$\{e_1,e_2,...,e_n\}$.

以下假设$\mathcal{H}$ 不是有限维的, 即$\mathcal{H}$ 是无限维的.

Step2. 设$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$ 中的一列线性无关的向量, 这里$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$线性无关是指: $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$中的任何有限多个都是线性无关的, 也即等价地, 对任何$n\in\mathbb{N}$, $h_1,h_2,...,h_n$ 线性无关. 来证明, 对$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 应用格拉姆-施密特正交化过程可以得到$\mathcal{H}$ 的一个ON系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 且满足

$$\mathrm{span}\{e_1,e_2,...,e_n\}=\mathrm{span}\{h_1,h_2,...,h_n\},\quad n=1,2,3,\dots.\tag{4.3.4}$$

格拉姆-施密特正交化过程操作如下:

$$
\begin{aligned}
&g_1 = h_1, && e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}, && h_1 = a_{11}e_1,\\
&g_2 = h_2 - \langle h_2, e_1\rangle e_1, && e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}, && h_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g_n = h_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle h_n, e_k\rangle e_k, && e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}, && h_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}e_k,\\
&n = 2, 3, 4, \dots .
\end{aligned}
$$

对$2 \le n \in \mathbb{N}$ 用归纳法并注意$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$线性无关易见$g_n = h_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle h_n, e_k\rangle e_k \ne 0$, 因此$e_n$确实是单位向量。显然$e_1, e_2, e_3, ...$互相正交, 且$e_n \in \mathrm{span}\{h_1, h_2, ..., h_n\}$, $h_n \in \mathrm{span}\{e_1, e_2, ..., e_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$. 因此(4.3.4) 成立。

Step3. 因$\mathcal{H}$可分, 故$\mathcal{H}$有一个可数稠密集$\mathcal{F} = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ (其中φ_j 互不相同). 来证明: 若$N \in \mathbb{N}$ 且$\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, ..., \varphi_{n_N}$ 线性无关, 则必有

$$
\{j \in \mathbb{N} \mid \varphi_j \notin \mathrm{span}\{\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, ..., \varphi_{n_N}\}\} \ne \emptyset. \tag{4.3.5}
$$

否则设这集合为空集, 则有

$$
\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}_N := \mathrm{span}\{\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, ..., \varphi_{n_N}\}.
$$

对任意$f \in \mathcal{H}$ 和任意$\varepsilon > 0$, 由$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$在$\mathcal{H}$中稠密, 存在$\varphi_j$ 使得$\|f - \varphi_j\| < \varepsilon$. 另一方面由**Step1** 知$\mathcal{H}_N$ 有ON 基$e_1, e_2, ..., e_N$. 因此

$$
\varphi_j \in \mathcal{H}_N = \mathrm{span}\{e_1, e_2, ..., e_N\}
$$

进而由**命题4.3.1(最佳逼近、Bessel不等式)**有

$$
\Big\|f - \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k\Big\| = \min_{g\in\mathcal{H}_N}\|f - g\| \le \|f - \varphi_j\| < \varepsilon.
$$

由$\varepsilon > 0$的任意性知$\|f - \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k\| = 0$ 即$f = \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k$, 因此$f \in \mathcal{H}_N$. 再由$f \in \mathcal{H}$的任意性知$\mathcal{H} = \mathcal{H}_N$. 这表明$\mathcal{H}$是有限维的, 与假设矛盾. 这矛盾证明了(4.3.5) 成立.

Step4. 对于$\mathcal{H}$的可数稠密集$\mathcal{F} = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, 调整记号可设$\varphi_1 \ne 0$. 根据**Step3** 易见下面的每个自然数子集均非空, 因此其最小数存在:

$$
n_1 = 1,
$$

$$
\begin{aligned}
&n_2=\min\{j\in\mathbb{N}\mid \varphi_j\notin \mathrm{span}\{\varphi_{n_1}\}\},\\
&n_3=\min\{j\in\mathbb{N}\mid \varphi_j\notin \mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2}\}\},\\
&......\\
&n_k=\min\{j\in\mathbb{N}\mid \varphi_j\notin \mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_{k-1}}\}\},\\
&n_{k+1}=\min\{j\in\mathbb{N}\mid \varphi_j\notin \mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_k}\}\},\\
&.......
\end{aligned}
$$

由$\mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_k}\}\supset \mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_{k-1}}\}$ 易见$n_{k+1}\ge n_k$. 但显然$n_{k+1}\ne n_k$, 因此$n_{k+1}>n_k, k=1,2,3,....$ 而对任意$k\in\mathbb{N}$, 易见$\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_k}$ 线性无关. 因此$\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 线性无关。根据**Step2** 我们可以做出$\mathcal{H}$的ON 系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 且满足

$$
\mathrm{span}\{e_1,e_2,...,e_k\}=\mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_k}\},\quad k=1,2,3,.... \tag{4.3.6}
$$

下证$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是$\mathcal{H}$的ON基. 根据**定理13.3(ON基的刻画)**, 只需证明$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的有限线性组合在$\mathcal{H}$中稠密.

任取$f\in\mathcal{H}$, 对任意$\varepsilon>0$, 因$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$在$\mathcal{H}$中稠密, 故存在$\varphi_j$ 使得

$$
\|f-\varphi_j\|<\varepsilon.
$$

取自然数$N\ge j$. 则有$n_N\ge N\ge j$. 我们断定$\varphi_j\in \mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_N}\}$. 否则, 即$\varphi_j\notin \mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_N}\}$, 则由$n_{N+1}$的定义应有$n_{N+1}\le j$ 从而导出矛盾$n_N<n_{N+1}\le n_N$. 这矛盾证明了$\varphi_j\in \mathrm{span}\{\varphi_{n_1},\varphi_{n_2},...,\varphi_{n_N}\}$. 于是再由(4.3.6) 知$\varphi_j\in \mathrm{span}\{e_1,e_2,...,e_N\}$, 因此可写

$$
\varphi_j=\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\quad \text{从而有}\quad \Big\|f-\sum_{k=1}^{N}c_ke_k\Big\|=\|f-\varphi_j\|<\varepsilon.
$$

这证明了$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的有限线性组合在$\mathcal{H}$中稠密. 所以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是$\mathcal{H}$的ON基. □

下面的定理给出了一个从平方收敛的数值级数构造Hilbert空间中的元素的方法.

【定理4.3.5】设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是Hilbert空间$\mathcal{H}$的一个ON基, 复数列$\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$
\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.
$$

则

$$
\text{级数}\quad f:=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\in\mathcal{H}\quad \text{按范数收敛}
$$

且f关于e_k的Fourier 系数即为c_k, 即$\langle f, e_k\rangle = c_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

【证】令

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

则有

$$\|f_m - f_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0 \quad \text{as } \ m > n \to \infty.$$

因此$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathcal{H}$中的Cauchy 列. 由$\mathcal{H}$的完备性, 存在$f \in \mathcal{H}$ 使得$\|f_n - f\| \to 0\,(n \to \infty)$. 因此$f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$按范数收敛.

对每个$k \in \mathbb{N}$, 当$n > k$时, 由内积的连续性有

$$c_k = \langle f_n, e_k\rangle \to \langle f, e_k\rangle \quad (n \to \infty).$$

所以$\langle f, e_k\rangle = c_k, k = 1, 2, 3, \ldots$. $\square$

§4.4 常用的Hilbert空间$L^2, \mathbb{H}^2(D)$ 和L^2上的Fourier 变换

• Hilbert空间$L^2([-\pi,\pi])$ 和经典Fourier 级数

在数学分析课程中已证明了$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是$L^2([-\pi,\pi])$中的一个ON系. 下面证明它是$L^2([-\pi,\pi])$的一个ON基. 为此我们将使用经典Fourier 级数理论中的传统记号: 注意区间$[-\pi,\pi]$的Lebesgue 测度有限, 因此$L^2([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$; 而对每个$f\in L^1([-\pi,\pi])$, 我们定义$f$的(经典)Fourier系数为

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

并称函数级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$(它可能只是形式级数) 为$f$的(经典)Fourier 级数, 记作

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

为便于分析, 我们需要将$(-\pi,\pi)$上的函数延拓成$\mathbb{R}$的2π-周期函数.

【函数的周期延拓和局部可积性】周知映射$x\mapsto \Phi(x)=e^{\mathrm{i}x}$ 是半闭区间$[-\pi,\pi)$到单位圆周$\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 的一一对应。设$\Phi^{-1}:\mathbb{S}^1\to[-\pi,\pi)$为$\Phi$的逆映射. 则$x$可以表示成$e^{\mathrm{i}x}$的函数: $x=\Phi^{-1}(e^{\mathrm{i}x})$, $x\in[-\pi,\pi)$. 设$f(x)$在开区间$(-\pi,\pi)$上有定义. 先将f 延拓到闭区间$[-\pi,\pi]$上且满足$f(-\pi)=f(\pi)$. 令

$$\widetilde{f}(z) = f(\Phi^{-1}(z)), \quad z\in\mathbb{S}^1.$$

则函数$x\mapsto \widetilde{f}(e^{\mathrm{i}x})$ 在整个$\mathbb{R}$上有定义且是2π-周期函数并由$f(\pi)=f(-\pi)$ 知等式$f(x)=\widetilde{f}(e^{\mathrm{i}x})$ 对所有$x\in[-\pi,\pi]$成立。当$x\in\mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi]$时定义$f(x)=\widetilde{f}(e^{\mathrm{i}x})$, 则等式$f(x)=\widetilde{f}(e^{\mathrm{i}x})$ 对所有$x\in\mathbb{R}$成立。于是这样定义的函数f是原来函数f的延拓且是2π-周期函数。此外易见若f已经是$\mathbb{R}$上的2π-周期函数, 则等式$f(x)=\widetilde{f}(e^{\mathrm{i}x})$ 对所有$x\in\mathbb{R}$成立。以上分析说明:

(1) 开区间$(-\pi,\pi)$上的任何函数都可以延拓成$\mathbb{R}$上的2π-周期函数.

(2) $\mathbb{R}$上的任何2π-周期函数都可表成$e^{\mathrm{i}x}$的函数。换言之, **$\mathbb{R}$上的任何2π-周期函数都可看成是定义在单位圆周$\mathbb{S}^1$上的函数**。

根据以上性质, 在实际操作中如果需要的话我们可以自动假设所考虑的函数已被2π周期化了! 此外还有如下性质:

(3) 如果$f \in L^1([-\pi,\pi])$, 则f的2π-周期化延拓f在$\mathbb{R}$上可测且在任何有界区间上可积, 即$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

事实上由平移保持可测性易见f的2π-周期化延拓在$\mathbb{R}$上是可测的, 而由$f \in L^1([-\pi,\pi])$和周期性, 对任意有界区间(a,b), 取$N \in \mathbb{N}$充分大使得$(a,b) \subset (-(2N+1)\pi, (2N+1)\pi)$, 则有

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} |f(x)|\mathrm{d}x = \sum_{k=-N}^{N} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |f(x)|\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+2k\pi)|\mathrm{d}x = (2N+1)\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

在关于2π-周期函数的研究中, 一个常用性质是:

(4) 2π-周期函数$f \in L^1([-\pi,\pi])$ 在任何长度为2π的区间上的积分值不变, 即:

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}. \tag{4.4.1}$$

事实上我们有（注意已有$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$)

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_c^{-\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{c+2\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$
$$= -\int_{-\pi}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{c+2\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-\pi}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{c+2\pi} f(y-2\pi)\mathrm{d}y = \int_{\pi}^{c+2\pi} f(y)\mathrm{d}y.$$

所以(4.4.1)成立。 $\Box$

【定理4.4.1】 设$f \in L^1([-\pi,\pi])$, $f(x) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$. 则

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx} = f(x) \quad \text{a.e. } x \in [-\pi,\pi].$$

特别可知:

$$\text{若对所有} n \in \mathbb{Z} \text{ 有} a_n = 0, \text{ 则 } f(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in [-\pi,\pi].$$

【证】只需证极限等式。先证明Poisson 核等式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = P_r(x) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0<r<1.$$

事实上对任意$0<r<1, x\in\mathbb{R}$ 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} = 1+\frac{re^{\mathrm{i}x}}{1-re^{\mathrm{i}x}} + \frac{re^{-\mathrm{i}x}}{1-re^{-\mathrm{i}x}}$$
$$= 1+\frac{re^{\mathrm{i}x}(1-re^{-\mathrm{i}x})+re^{-\mathrm{i}x}(1-re^{\mathrm{i}x})}{|1-re^{\mathrm{i}x}|^2} = 1+\frac{2r\cos x-2r^2}{1-2r\cos x+r^2} = P_r(x).$$

将f作2π-周期化延拓至$\mathbb{R}$. 则由上述Poisson 核等式, 对任意$0\le r<1, x\in\mathbb{R}$ 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|}e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)r^{|n|}e^{in(x-y)}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(x-y)}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-y)P_r(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)P_r(y)\mathrm{d}y$$

最后的等号是因为$y\mapsto f(x-y)P_r(y)$ 是2π-周期函数且局部可积. 局部可积是显然的因为$P_r(\cdot)$ 有界: $0\le P_r(y)\le \frac{1+r}{1-r}\quad \forall\, y\in\mathbb{R}\ \ (0<r<1)$. 令

$$K_\delta(x) = \frac{1}{2\pi}P_r(x)\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x),\quad x\in\mathbb{R};\quad \delta=1-r,$$
$$\widetilde{f}(x) = f(x)\mathbf{1}_{[-2\pi,2\pi]}(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

则$K_\delta, \widetilde{f}\in L^1(\mathbb{R})$. 于是由上述等式并注意当$x,y\in[-\pi,\pi]$时$x-y\in[-2\pi,2\pi]$, 得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|}e^{inx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)K_\delta(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(x-y)K_\delta(y)\mathrm{d}y = (K_\delta*\widetilde{f})(x),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

其中$\delta=1-r$. 我们在本讲义第三章**§3.1** 中的例题中已证明了$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$是**好的核**。于是由**定理3.1.6** 知

$$\lim_{r\to1-}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|}e^{inx} = \lim_{\delta\to0+}(K_\delta*\widetilde{f})(x) = \widetilde{f}(x) = f(x)\quad \text{a.e. } x\in[-\pi,\pi].$$

[**补证** $\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$**是好的核：**首先由上面的Poisson核等式和逐项积分有

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\mathrm{d}x = 2\pi,\quad 0<r<1.$$

由此和$K_\delta(x)$的定义有

$$\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\mathrm{d}x = 1,\quad \delta=1-r\in(0,1).$$

而显然K_δ 非负, 这证明了$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}\subset L^1(\mathbb{R})$ 满足好的核的条件$\mathbf{1}^\circ$. 下面证明$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$ 还满足好的核的其余条件。为此, 只需证明

$$0\le K_\delta(x)\le \min\left\{\frac{4\pi}{\delta}, \frac{4\pi\delta}{|x|^2}\right\}\qquad \forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\,\delta\in(0,1). \tag{$*$}$$

对任意$x\in\mathbb{R}$, 当$|x|>\pi$时, $K_\delta(x)=0$. 以下设$|x|\le\pi$. 此时有

$$K_\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\delta(2-\delta)}{\delta^2+2(1-\delta)(1-\cos x)}.$$

若$1/2\le\delta<1$, 则$\delta\ge 1/2\ge\frac{|x|}{2\pi}$ 从而有

$$0\le K_\delta(x)\le\frac{1}{2\pi}\min\Big\{\frac{2}{\delta},\,4\pi^2\frac{2\delta}{|x|^2}\Big\}.$$

若$0<\delta<1/2$, 则由Jordan 不等式$|\sin(\frac{x}{2})|\ge\frac{|x|}{\pi}$ (因$|x|\le\pi$)有$2(1-\delta)(1-\cos x)\ge 1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})\ge\frac{2}{\pi^2}|x|^2$ 从而有

$$0\le K_\delta(x)\le\frac{1}{2\pi}\min\Big\{\frac{2}{\delta},\,\pi^2\frac{\delta}{|x|^2}\Big\}.$$

这就证明了不等式$(*)$成立. 因此$\{K_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$是**好的核**。] $\square$

由这一定理和**定理4.3.2(ON基的刻画)** 以及$L^2([-\pi,\pi])\subset L^1([-\pi,\pi])$ 立即得到下列定理:

【定理4.4.2】$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}nx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是$L^2([-\pi,\pi])$中的一个ON基. 因此对任意$f\in L^2([-\pi,\pi])$成立

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\qquad(\textbf{Parseval 等式})$$

其中a_n为f的(经典)Fourier系数, 并有

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{\mathrm{i}nx}\qquad\textbf{按}L^2\textbf{-范数收敛}$$

即

$$\lim_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|_{L^2}=0$$

其中

$$S_N(f)(x)=\sum_{|n|\le N}a_ne^{\mathrm{i}nx},\quad N=1,2,3,\dots.$$

【证】设$f\in L^2([-\pi,\pi])$ 且$f\perp\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}nx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. 则由$a_n$ 的定义有

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}n\cdot}\Big\rangle=0,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

据**定理4.4.1** 知$f=0$ a.e. 于$[-\pi,\pi]$. 再由**定理4.3.2(ON基的刻画)** 即知$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}nx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$是$L^2([-\pi,\pi])$中的一个ON基. 于是由广义Fourier 级数的Parseval 等式, 对任意$f\in$

$L^2([-\pi,\pi])$ 便有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}n\cdot}\right\rangle\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

同时有

$$S_N(f)(x)=\sum_{|n|\le N}a_ne^{\mathrm{i}nx}=\sum_{|n|\le N}\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}n\cdot}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}nx}\to f(x)\ (N\to\infty)\quad \textbf{按}L^2\textbf{- 范数}.$$

□

• **Hilbert空间$\mathbb{H}^2(D)$**

Stein & Shakarchi的《实分析》对上述经典三角函数ON基的证明, 使用的是Poisson核而不是《数学分析》中使用的Fejér 核。他们这样做的一个好处是可以自然过渡到一类重要的函数空间—— Hardy 空间$\mathbb{H}^2(D)$, 这里

$$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}\quad \text{是复平面中的单位开圆盘.}$$

Hardy 空间$\mathbb{H}^2(D)$的建立是要解决这样的问题: 设复值函数f在D内全纯(即f在D内解析), 那么

— 在什么条件下可以保证当$r<1$ 且$r\to 1$时, $f(re^{\mathrm{i}\theta})$ 对几乎所有$\theta\in\mathbb{R}$收敛?

— 当$F(e^{\mathrm{i}\theta})$满足什么条件时, 存在f使得对几乎所有$\theta\in\mathbb{R}$有$\lim\limits_{r\to 1-}f(re^{\mathrm{i}\theta})=F(e^{\mathrm{i}\theta})$?

在引出Hardy 空间$\mathbb{H}^2(D)$之前, 我们先看一下D上一般解析函数的相关性质.

设函数f在D内解析(即f在D内全纯)。考察f 在圆周上的行为: 设$0\le r<R<1$, $z=re^{\mathrm{i}\theta}$. 由"等比级数"

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n,\qquad \left|\frac{z}{\zeta}\right|=\frac{r}{R}<1$$

和解析函数的Cauchy 积分公式以及逐项积分有

$$f(z)=f(re^{\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{\mathrm{i}n\theta}$$

其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(Re^{\mathrm{i}\theta})}{R^ne^{\mathrm{i}n\theta}}\mathrm{d}\theta,\quad n=0,1,2,\dots.\tag{4.4.2}$$

[注意a_n 实际上不依赖于$R\in(0,1)$.] 我们有

$$|a_n|r^n\le M_R\Big(\frac{r}{R}\Big)^n,\quad n=0,1,2,\dots;\quad M_R=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(Re^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

这蕴含

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n<+\infty.$$

因此函数级数$\theta\mapsto f(re^{\mathrm{i}\theta})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{\mathrm{i}n\theta}$ 在$\theta\in[-\pi,\pi]$上绝对一致收敛. 据经典Fourier级数理论(见**定理4.3.7** 和Parseval 等式) 知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n},\quad 0\le r<1. \tag{4.4.3}$$

由这一等式知

$$[0,1)\ni r\mapsto\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta\quad\text{单调增加}$$

因此下面极限存在(可能$=+\infty$)且等式成立:

$$\lim_{r\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}=\lim_{r\to1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\sup_{0\le r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta. \tag{4.4.4}$$

由这一等式知对任意$N\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2=\lim_{r\to1-}\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2r^{2n}\le\lim_{r\to1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

令$N\to\infty$ 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\le\lim_{r\to1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

而由(4.4.4) 易见反向不等式也成立. 于是得到等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2=\lim_{r\to1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta. \tag{4.4.5}$$

【定义(Hardy 空间$\mathbb{H}^2(D)$)】设$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$. 则函数空间

$$\mathbb{H}^2(D)=\Big\{f:D\to\mathbb{C}\text{解析}\ \Big|\ \sup_{0\le r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta<+\infty\Big\}$$

连同其上的范数

$$\|f\|_{\mathbb{H}^2(D)}=\sup_{0\le r<1}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta\Big)^{1/2},\quad f\in\mathbb{H}^2(D)$$

称为D上的Hardy 空间. □

易见$\mathbb{H}^2(D)$是复数域上的一个线性空间, $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2(D)}$是$\mathbb{H}^2(D)$上的一个范数, 因此$(\mathbb{H}^2(D), \|\cdot\|_{\mathbb{H}^2(D)})$是(复数域上的)一个赋范线性空间. 下面还将证明$\mathbb{H}^2(D)$是一个Hilbert 空间.

由(4.4.5) 知

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = (\|f\|_{\mathbb{H}^2(D)})^2 < +\infty \quad \forall\, f \in \mathbb{H}^2(D) \tag{4.4.6}$$

其中$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. 这一等式和级数的收敛性, 我们可以在$\mathbb{H}^2(D)$上定义内积

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}. \tag{4.4.7}$$

因微分映射$f \mapsto f^{(n)}$ 是线性的, 故这样定义的二元运算$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 确实是$\mathbb{H}^2(D)$上的内积, 同时看到$\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2(D)}$ 等于由这个内积导出的范数, 即

$$\|f\|_{\mathbb{H}^2(D)} = \sqrt{\langle f, f\rangle}, \quad f \in \mathbb{H}^2(D).$$

所以$\mathbb{H}^2(D) = (\mathbb{H}^2(D), \|\cdot\|_{\mathbb{H}^2(D)}) = (\mathbb{H}^2(D), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间.

空间$\mathbb{H}^2(D)$的进一步的性质是下面的

【Fatou 定理】对每个$f \in \mathbb{H}^2(D)$, 径向极限

$$f(e^{\mathrm{i}\theta}) := \lim_{r\to 1-} f(re^{\mathrm{i}\theta}) \in \mathbb{C} \quad \text{对几乎所有}\theta \in \mathbb{R}\ \text{存在}$$

且有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta = (\|f\|_{\mathbb{H}^2(D)})^2, \quad \lim_{r\to 1-}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta}) - f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta = 0.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n = -1, -2, -3, \ldots; \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} & \text{if } n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

我们称函数$f(e^{\mathrm{i}\theta})\,(\theta \in \mathbb{R})$为$f \in \mathbb{H}^2(D)$的径向极限边值函数.

【证】设$f \in \mathbb{H}^2(D)$, 令

$$a_n = 0\ \text{当}\, n = -1, -2, -3, \ldots\ \text{时}; \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ \text{当}\ n = 0, 1, 2, \ldots\ \text{时}.$$

则由(4.4.6) 知

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = (\|f\|_{\mathbb{H}^2(D)})^2 < +\infty.$$

因此据**定理4.3.5** 知, 我们可以用下式定义一个属于$L^2([-\pi,\pi])$的2π-周期函数:

$$f(e^{\mathrm{i}\theta}):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{\mathrm{i}n\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2\pi}a_n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}n\theta}\quad \text{按}L^2\text{-范数收敛}$$

$$\left(\text{即}\quad \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(e^{\mathrm{i}\theta})-\sum_{n=0}^{N}a_n e^{\mathrm{i}n\theta}\right|^2\mathrm{d}\theta=0\right).$$

由Fourier级数的唯一性, 这函数关于基函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}n\theta}$的Fourier 系数等于$\sqrt{2\pi}a_n$, 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=a_n,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

注意到$L^2([-\pi,\pi])\subset L^1([-\pi,\pi])$ 和

$$f(re^{\mathrm{i}\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{\mathrm{i}n\theta},\quad 0\le r<1.$$

于是由**定理4.3.6** 即知极限等式

$$\lim_{r\to1-}f(re^{\mathrm{i}\theta})=f(e^{\mathrm{i}\theta})\in\mathbb{C}\quad \text{对几乎所有}\theta\in[-\pi,\pi]\ \text{成立}$$

从而对几乎所有$\theta\in\mathbb{R}$成立 (因$\theta\mapsto e^{\mathrm{i}\theta}$是$2\pi$-周期函数).

此外由$f(e^{\mathrm{i}\theta})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n e^{\mathrm{i}n\theta}\in L^2([-\pi,\pi])$ 和Parseval 等式和(4.4.5) 还有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2=(\|f\|_{\mathbb{H}^2(D)})^2=\lim_{r\to1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta.\qquad(4.4.8)$$

最后证明L^2-收敛: $\lim\limits_{r\to1-}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})-f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta=0$. 我们将使用推广形式的Lebesgue控制收敛定理。为此我们取数列$0<r_n<1$ 满足$r_n\to1\,(n\to\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_ne^{\mathrm{i}\theta})-f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\limsup_{r\to1-}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})-f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

令

$$g_n(\theta)=2|f(r_ne^{\mathrm{i}\theta})|^2+2|f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2,\quad g(\theta)=4|f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}|f(r_ne^{\mathrm{i}\theta})-f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2=0\quad \text{a.e. }\theta\in[-\pi,\pi];$$
$$|f(r_ne^{\mathrm{i}\theta})-f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\le g_n(\theta),\quad \theta\in[-\pi,\pi],\ n=1,2,3,\dots;$$
$$\lim_{n\to\infty}g_n(\theta)=g(\theta)\quad \text{a.e. }\theta\in[-\pi,\pi];\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}g_n(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)\mathrm{d}\theta<+\infty$$

这里最后的积分极限等式是根据极限等式(4.4.8). 于是由推广形式的Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_ne^{\mathrm{i}\theta})-f(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta=0.$$

这就证明了定理中的L^2-收敛. □

Fatou 定理表明, 每个函数$f\in\mathbb{H}^2(D)$ 确定了一个属于$L^2([-\pi,\pi])$ 的径向极限边值函数$f(e^{\mathrm{i}\theta})$ 且这边值函数关于$n<0$的基函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}$的Fourier 系数为零。下面命题是**Fatou 定理**的逆定理, 即每个属于$L^2([-\pi,\pi])$ 且关于$n<0$的基函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}$的Fourier 系数为零的函数$F(e^{\mathrm{i}\theta})$, 也是$\mathbb{H}^2(D)$中某个函数的径向极限边值函数.

【命题4.4.3】设周期函数$\theta\mapsto F(e^{\mathrm{i}\theta})$ 属于$L^2([-\pi,\pi])$ 且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=0,\quad n=-1,-2,-3,\dots.$$

令

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(e^{\mathrm{i}\theta})}{e^{\mathrm{i}\theta}-z}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |z|<1.$$

则$f\in\mathbb{H}^2(D)$ 且f的径向极限边值函数$f(e^{\mathrm{i}\theta})$几乎处处等于$F(e^{\mathrm{i}\theta})$, 即

$$f(e^{\mathrm{i}\theta}):=\lim_{r\to1-}f(re^{\mathrm{i}\theta})=F(e^{\mathrm{i}\theta})\quad \text{a.e. }\ \theta\in\mathbb{R}.$$

此外当$|z|<1$ 时有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\quad 其中\quad a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta,\ n=0,1,2,\dots.$$

【证】令$\sqrt{2\pi}\,a_n$ 为$F(e^{\mathrm{i}\theta})$关于基函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}n\theta}$的Fourier 系数, 即

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

则由假设有

$$F(e^{\mathrm{i}\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{\mathrm{i}n\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{\mathrm{i}n\theta}\quad 按L^2\text{-范数收敛},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta<+\infty.$$

由

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|F(e^{\mathrm{i}\theta})|}{|e^{\mathrm{i}\theta}-z|}\mathrm{d}\theta\le\frac{1}{1-|z|}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta<+\infty\quad\forall\,|z|<1$$

知$f(z)$在D内是良好定义的。事实上从“等比级数”出发可得幂级数展开

$$\frac{F(e^{\mathrm{i}\theta})}{e^{\mathrm{i}\theta}-z}e^{\mathrm{i}\theta}=F(e^{\mathrm{i}\theta})\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{e^{\mathrm{i}\theta}}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}F(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}z^n,\quad \theta\in[-\pi,\pi];\ |z|<1$$

且易见对$\theta\in[-\pi,\pi]$ 可以逐项积分从而得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<1.$$

因这级数在在D内(即在$|z|<1$ 内) 绝对收敛, 故$f(z)$在F内解析. 设$\le r<1$, 对函数

$$\theta\mapsto f(re^{\mathrm{i}\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{\mathrm{i}n\theta}$$

应用Parseval 等式有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$$

从而得到

$$\sup_{0\le r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty.$$

这表明$f\in\mathbb{H}^2(D)$. 最后应用Fatou 定理和**定理4.3.6** 并注意$a_n=0$ for all $n<0$ 得到

$$f(e^{\mathrm{i}\theta})=\lim_{r\to1-}f(re^{\mathrm{i}\theta})=\lim_{r\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{\mathrm{i}n\theta}=F(e^{\mathrm{i}\theta})\quad \text{a.e. }\theta\in[-\pi,\pi].$$

进而由函数的周期性有$f(e^{\mathrm{i}\theta})=F(e^{\mathrm{i}\theta})$ a.e. $\theta\in\mathbb{R}$. □

根据这一命题和Fatou 定理我们看到, 每个函数$f\in\mathbb{H}^2(D)$可以被它的径向极限边值函数$f(e^{\mathrm{i}\theta})$在单位圆周∂D上的积分来表示, 即**Cauchy积分公式对单位圆周也成立:**

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{\mathrm{i}\theta})}{e^{\mathrm{i}\theta}-z}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |z|<1.$$

事实上若**令上式右边为**$g(z)$, 则由Fatou 定理(它保证边值函数$f(e^{\mathrm{i}\theta})$ 属于$L^2([-\pi,\pi])$) 和上述**命题4.4.3** 知g在D内解析且当$z\in D$时

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=f(z).$$

这里对第二个等号我们再次使用了Fatou 定理:

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad n=0,1,2,\dots.$$

【**定理4.4.4**】按内积$\langle f,g\rangle=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}f^{(k)}(0)\overline{g^{(k)}(0)}$, Hardy 空间$\mathbb{H}^2(D)$ 是一个Hilbert 空间。

【证】继续上面的结果, 只需证明$\mathbb{H}^2(D)$是完备的. 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathbb{H}^2(D)$中的Cauchy 列. 令$F_n(e^{\mathrm{i}\theta})$ 为f_n的径向极限边值函数. 则$F_n(e^{\mathrm{i}\theta})\in L^2([-\pi,\pi])$ 且由Fatou 定理有

$$\|F_m-F_n\|_{L^2([-\pi,\pi])}=\sqrt{2\pi}\|f_m-f_n\|_{\mathbb{H}^2(D)}$$

因此$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$是$L^2([-\pi,\pi])$中的Cauchy 列. 由$L^2([-\pi,\pi])$的完备性, 存在$F(e^{\mathrm{i}\theta})\in L^2([-\pi,\pi])$ 使得

$$\|F_n-F\|_{L^2([-\pi,\pi])}\to 0\quad (n\to\infty).$$

另一方面由Fatou 定理知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta=0,\quad k=-1,-2,-3,\dots.$$

于是对任意负整数k,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[F(e^{\mathrm{i}\theta})-F_n(e^{\mathrm{i}\theta})]e^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta\right|\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{\mathrm{i}\theta})-F_n(e^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|F_n-F\|_{L^2([-\pi,\pi])}\to 0\quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta=0,\quad k=-1,-2,-3,\dots.$$

令

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(e^{\mathrm{i}\theta})}{e^{\mathrm{i}\theta}-z}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |z|<1.$$

则由**命题4.4.3** 知$f\in\mathbb{H}^2(D)$ 且f的径向极限边值函数$f(e^{\mathrm{i}\theta})$几乎处处等于$F(e^{\mathrm{i}\theta})$, 即

$$f(e^{\mathrm{i}\theta}):=\lim_{r\to 1-}f(re^{\mathrm{i}\theta})=F(e^{\mathrm{i}\theta})\quad \text{a.e. }\theta\in\mathbb{R}.$$

于是有

$$\|f_n-f\|_{\mathbb{H}^2(D)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|F_n-F\|_{L^2([-\pi,\pi])}\to 0\quad (n\to\infty).$$

这证明了$\mathbb{H}^2(D)$中的Cauchy 列都在$\mathbb{H}^2(D)$中收敛. 所以$\mathbb{H}^2(D)$是完备的。 □

• **Hilbert空间$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的Fourier 变换**

回忆$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的内积和范数为

$$\langle f,g\rangle:=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,\quad \|f\|_{L^2}=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

由于$L^2(\mathbb{R}^d)$中的函数不必属于$L^1(\mathbb{R}^d)$, 前面在$L^1(\mathbb{R}^d)$上定义的Fourier 变换

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R}^d,\quad f\in L^1(\mathbb{R}^d)$$

就不能形式不变地搬到$L^2(\mathbb{R}^d)$上。但下面**引理4.4.7** 告诉我们, $L^2(\mathbb{R}^d)$的一个稠密子空间$L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$中的函数的Fourier 变换仍属于$L^2(\mathbb{R}^d)$且保持变换前后的$L^2$范数不变: $\|\widehat{f}\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}$. 于是, 由稠密性, 我们可用$L^2$-极限方式把Fourier 变换定义在$L^2(\mathbb{R}^d)$上。这样定义的$L^2(\mathbb{R}^d)$上Fourier 变换是真正的变换且保范, 后者使得$L^2(\mathbb{R}^d)$上的Fourier 变换用途更为广泛。

【命题4.4.5(卷积不等式)】设$g\in L^1(\mathbb{R}^d), f\in L^p(\mathbb{R}^d), 1\le p<\infty$. 则卷积$x\mapsto (g*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)\mathrm{d}y$ 有意义且属于$L^p(\mathbb{R}^d)$ 并有

$$\|g*f\|_{L^p}\le\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

【证】$p=1$时已在前面证明. 设$1<p<\infty$, 设$q>1$ 为p的相伴数, 即$q=p/(p-1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

先考虑非负的情形: $0\le g\in L^1(\mathbb{R}^d), 0\le f\in L^p(\mathbb{R}^d)$. 此时由Fubini 定理知卷积$(g*f)(x)$ 有意义且是非负可测函数. 由$1=1/q+1/p$ 和Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&(g*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}[g(x-y)]^{1/q}[g(x-y)]^{1/p}f(y)\mathrm{d}y\\
&\le\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)[f(y)]^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\
&=(\|g\|_{L^1})^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)[f(y)]^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\
&\Longrightarrow\quad [(g*f)(x)]^p\le(\|g\|_{L^1})^{p/q}\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)[f(y)]^p\mathrm{d}y\\
&\Longrightarrow \text{(应用Fubini定理和积分的平移不变性)}\\
&\int_{\mathbb{R}^d}[(g*f)(x)]^p\mathrm{d}x\le(\|g\|_{L^1})^{p/q}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)[f(y)]^p\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=(\|g\|_{L^1})^{p/q}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\mathrm{d}x\right)[f(y)]^p\mathrm{d}y\\
&=(\|g\|_{L^1})^{p/q}\|g\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d}[f(y)]^p\mathrm{d}y=(\|g\|_{L^1})^p(\|f\|_{L^p})^p<+\infty
\end{aligned}$$

其中用到$p/q+1=p$. 这证明了当g,f皆非负时,卷积$(g*f)(x)$ 有意义且属于$L^p(\mathbb{R}^d)$ 并有$\|g*f\|_{L^p}\le\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}$.

其次设g,f为复值函数。写$g=g_1+\mathrm{i}g_2, f=f_1+\mathrm{i}f_2$ 其中g_1,g_2,f_1,f_2皆为实值函数. 考虑正负部分解:

$$g_1=g_1^+-g_1^-,\ \ g_2=g_2^+-g_2^-,\ \ f_1=f_1^+-f_1^-,\ \ f_2=f_2^+-f_2^-.$$

由$|g|*|f|\in L^p(\mathbb{R}^d)$ 知$(|g|*|f|)(x)<+\infty$ a.e. $x\in\mathbb{R}^d$, 因此

$$(g_j^{\pm}*f_k^{\pm})(x)\le(|g|*|f|)(x)<+\infty\quad \text{a.e.},\ x\in\mathbb{R}^d;\quad j,k=1,2.$$

于是卷积$(g*f)(x)$有意义且是可测函数并有

$$|(g*f)(x)|\le(|g|*|f|)(x)$$

从而可知$g*f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ 并有

$$\|g*f\|_{L^p}\le\|\,|g|*|f|\,\|_{L^p}\le\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.\qquad\square$$

【命题4.4.6(卷积逼近)】设

$$0\le K\in L^1(\mathbb{R}^d)\quad\text{s.t.}\quad\int_{\mathbb{R}^d}K(x)\mathrm{d}x=1.$$

令$K_\delta(x)=\delta^{-d}K(x/\delta)$, $\delta>0$. 设$f\in L^p(\mathbb{R}^d), 1\le p<\infty$. 则有

$$K_\delta*f\in L^p(\mathbb{R}^d),\quad \|K_\delta*f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

且

$$\|f-K_\delta*f\|_{L^p}\to0\quad\text{as}\quad\delta\to0+.\tag{4.4.9}$$

【证】由假设知$K_\delta\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且$\|K_\delta\|_{L^1}=1$, 因此据上一命题知本命题中的卷积不等式成立. 下证(4.4.9). 不妨设$1<p<\infty$ (对$p=1$的情形, 证明相同且更简单). 设$q>1$为p的相伴数, 即$q=p/(p-1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由假设有$\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(y)\mathrm{d}y=1$ 于是可写

$$f(x)-(K_\delta*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}[f(x)-f(x-y)]K_\delta(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}[f(x)-f(x-\delta y)]K(y)\mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow|f(x)-(K_\delta*f)(x)|\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(x-\delta y)|K(y)\mathrm{d}y$$

$$\le\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(x-\delta y)|^pK(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^d}K(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-\delta y)|^p K(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\Longrightarrow\ |f(x) - (K_\delta * f)(x)|^p \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-\delta y)|^p K(y)\mathrm{d}y, \\
&\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - (K_\delta * f)(x)|^p \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-\delta y)|^p K(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-\delta y)|^p \mathrm{d}x\right) K(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

即

$$(\|f - K_\delta * f\|_{L^p})^p \le \int_{\mathbb{R}^d} (\|f - f(\cdot - \delta y)\|_{L^p})^p K(y)\mathrm{d}y.$$

由**定理2.5.2(平均连续性)**知

$$\lim_{\delta\to 0+} \|f - f(\cdot - \delta y)\|_{L^p} = 0 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^d.$$

而由范数的三角不等式和积分的平移不变性有

$$\|f - f(\cdot - \delta y)\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|f(\cdot - \delta y)\|_{L^p} = 2\|f\|_{L^p} \qquad \forall\, \delta > 0, y \in \mathbb{R}^d.$$

于是对被积函数$(\|f - f(\cdot - \delta y)\|_{L^p})^p K(y)$可以应用连续参量的LDC 而得到

$$\lim_{\delta\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} (\|f - f(\cdot - \delta y)\|_{L^p})^p K(y)\mathrm{d}y = 0.$$

这就证明了(4.4.9). $\square$

【引理4.4.7】设$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. 则$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

【证】我们将使用Gauss 函数和卷积逼近. 回忆Gauss 函数及其展缩和Fourier 变换:

$$G(x) = e^{-\pi|x|^2}, \quad G_\delta(x) = \delta^{-d} G(x/\delta) = \delta^{-d} e^{-\pi|x|^2/\delta^2}, \quad \delta > 0.$$

前面已证明

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_\delta(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \widehat{G_\delta}(\xi) = e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}.$$

设$\in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. 则由上述命题知$G_\delta * f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ 且

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|f - G_\delta * f\|_{L^2} = 0 \quad \text{从而有} \quad \|f\|_{L^2} = \lim_{\delta\to 0^+} \|G_\delta * f\|_{L^2}.$$

下面证明

$$\widehat{G_\delta * f} \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{且} \quad \|\widehat{G_\delta * f}\|_{L^2} = \|G_\delta * f\|_{L^2}.$$

事实上由卷积运算有

$$\widehat{G_\delta * f}(\xi) = \widehat{G_\delta}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

再由$\widehat{G_\delta}(\xi) = e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}$ 和$f \in L^1$ 得到

$$|\widehat{G_\delta * f}(\xi)|^2 = e^{-2\pi\delta^2|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi)|^2 \le (\|f\|_{L^1})^2 e^{-2\pi\delta^2|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

这蕴含$\widehat{G_\delta * f} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ for all $1 \le p \le \infty$.

因$G_\delta * f, \widehat{G_\delta * f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 故由**命题2.7.4(Fourier 反演公式)** 有

$$G_\delta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{G_\delta * f}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} \mathrm{d}\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

由此我们计算

$$\begin{aligned}
\|\widehat{G_\delta * f}\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{G_\delta * f}(\xi)}\, \widehat{G_\delta * f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{G_\delta * f}(\xi)}\, (G_\delta * f)(x) e^{-2\pi\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle} \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (G_\delta * f)(x) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{G_\delta * f}(\xi)} e^{-2\pi\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle} \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (G_\delta * f)(x) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{G_\delta * f}(\xi) e^{2\pi\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle} \mathrm{d}\xi\right)} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (G_\delta * f)(x) \overline{(G_\delta * f)(x)}\, \mathrm{d}x = \|G_\delta * f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

为了证明引理中的等式, 我们取$\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3 \ldots..$ 则

$$0 \le |\widehat{G_{\delta_n} * f}(\xi)|^2 = e^{-2\pi\delta_n^2|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi)|^2 \nearrow |\widehat{f}(\xi)|^2 \quad (n \to \infty).$$

于是应用**Levi 单调收敛定理** (而不是LDC) 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{G_{\delta_n} * f}\|_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} \|G_{\delta_n} * f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 \quad (< +\infty).$$

这就证明了$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Another proof of $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ is to use Fatou's Lemma:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \le \liminf_{n\to\infty} \|\widehat{G_{\delta_n} * f}\|_{L^2}^2 = \liminf_{n\to\infty} \|G_{\delta_n} * f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 \quad (< +\infty).$$

Having proven $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, we can use LDC to get

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \lim_{\delta\to 0^+} \|\widehat{G_\delta * f}\|_{L^2}^2 = \lim_{\delta\to 0^+} \|G_\delta * f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 \quad (< +\infty). \qquad \square$$

【定义($L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的Fourier 变换)】对任意函数$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 称函数

$$\widehat{f}(\xi)=\lim_{R\to+\infty}\int_{|x|<R}f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}\mathrm{d}x\quad 按L^2(\mathbb{R}^d)\ 范数收敛 \tag{4.4.10}$$

为f的Fourier 变换。上式也可写成

$$\lim_{R\to+\infty}\|\widehat{f}-\widehat{f_R}\|_{L^2}=0$$

其中$f_R(x)=f(x)\mathbf{1}_{B_R}(x), B_R=\{x\in\mathbb{R}^d\mid |x|<R\}$. □

【说明】1. 需要证明这样定义的Fourier 变换$\widehat{f}(\xi)$的存在性. 首先易见对每个$0<R<\infty$, f_R属于$L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$. 为寻找$\widehat{f}(\xi)$, 我们先取$R=n=1,2,3,\dots$. 由$f_m-f_n$ 属于$L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ 知当$m>n$时

$$\begin{aligned}\|\widehat{f_m}-\widehat{f}_n\|_{L^2}&=\|\widehat{f_m-f_n}\|_{L^2}=\|f_m-f_n\|_{L^2}\\&=\left(\int_{n\le|x|<m}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\to 0\quad\text{as }\ m>n\to\infty.\end{aligned}$$

这表明$\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$是$L^2(\mathbb{R}^d)$中的Cauchy 列. 据$L^2(\mathbb{R}^d)$的完备性, 存在$g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$\|g-\widehat{f}_n\|_{L^2}\to 0\quad(n\to\infty).$$

对任意$R>1$, 令$n=[R]$为R的整数部分. 则如上推导有

$$\begin{aligned}&\|g-\widehat{f_R}\|_{L^2}\le\|g-\widehat{f}_n\|_{L^2}+\|\widehat{f}_n-\widehat{f_R}\|_{L^2}\\&\le\|g-\widehat{f}_n\|_{L^2}+\left(\int_{n\le|x|<R}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\to 0\quad\text{as }\ R\to+\infty.\end{aligned}$$

这表明L^2-极限$g=\lim\limits_{R\to+\infty}\widehat{f_R}$ 存在. 于是我们可以定义g 为f的Fourier 变换$\widehat{f}$.

2. 由上述定义和Riesz 定理知, 对任意正数列$R_n\to+\infty\,(n\to\infty)$, 存在子列$\{R_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使成立几乎处处收敛:

$$\widehat{f}(\xi)=\lim_{k\to+\infty}\int_{|x|<R_{n_k}}f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x\quad\text{a.e.}\quad\xi\in\mathbb{R}^d.$$

□

下面定理给出L^2上的Fourier 变换的基本性质.

【**定理4.4.8**】设$f \mapsto \widehat{f}$ 是上面(4.4.10)定义的$L^2(\mathbb{R}^d)$上的Fourier 变换. 则它具有下列性质：

(a) (**Plancherel 定理**) Fourier 变换$f \mapsto \widehat{f}$ 是从$L^2(\mathbb{R}^d)$ 到$L^2(\mathbb{R}^d)$ 的酉变换, 即它是保范的线性变换(且是满射), 也即对任意$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 和任意常数α, β 有$\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}, \qquad \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle,$$
$$(\alpha f + \beta g)\widehat{\ }(\xi) = \alpha \widehat{f}(\xi) + \beta \widehat{g}(\xi).$$

Some other properties as listed in the previous theorem in Chap.2 also hold true ... .

(b)(**逆变换和反演公式**) Fourier 变换$f \mapsto \widehat{f}$ 的逆变换为$f \mapsto f^\vee$, 其中

$$f^\vee(x) = \widehat{f}(-x).$$

于是成立反演公式

$$f(x) = (f^\vee)\widehat{\ }(x) = (\widehat{f})^\vee(x) = (\widehat{f})\widehat{\ }(-x)$$

即

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \qquad \text{按} L^2(\mathbb{R}^d)\text{范数收敛}.$$

因此对任意正数列$R_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ 存在子列$\{R_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{|x|<R_{n_k}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \quad \text{a.e.} \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

【证】(a): 由$\widehat{f} = \lim\limits_{R\to+\infty} \widehat{f_R}$ 和$(\alpha f + \beta g)_R = \alpha f_R + \beta g_R$ 易见Fourier 变换是线性的. 同时对任意$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 由$\widehat{f}$的定义和按范数收敛有

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \lim_{R\to+\infty} \|\widehat{f_R}\|_{L^2} = \lim_{R\to+\infty} \|f_R\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

这证明了Fourier 变换保持范数不变. 应用这一性质和Hilbert 空间中的内积运算性质有: 对任意$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$2\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \|\widehat{f} + \widehat{g}\|_{L^2}^2 - \mathrm{i}\|\widehat{f} + \mathrm{i}\widehat{g}\|_{L^2}^2 - (1-\mathrm{i})\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 - (1-\mathrm{i})\|\widehat{g}\|_{L^2}^2$$

$$= \|f + g\|_{L^2}^2 - \mathrm{i}\|f + \mathrm{i}g\|_{L^2}^2 - (1-\mathrm{i})\|f\|_{L^2}^2 - (1-\mathrm{i})\|g\|_{L^2}^2 = 2\langle f, g \rangle.$$

这证明了Fourier 变换保持内积不变.

其次来证明Fourier 变换是满射, 即对任意$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 存在$g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 使得$f = \widehat{g}$. 考虑函数

$$g(x) = \widehat{f}(-x).$$

由$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 知$g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. 来证明$f = \widehat{g}$. 为此我们先假设$f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. 我们将使用Gauss 函数和卷积逼近: $G_\delta(x) = \delta^{-d} e^{-\pi|x|^2/\delta^2}, \delta > 0$. 已知有$G_\delta * f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d), \widehat{G_\delta * f} = \widehat{G_\delta}\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 由$L^1$-函数的Fourier 反演公式(见**命题2.7.4(Fourier 反演公式)**)和$\widehat{G_\delta}(\xi) = e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}$ 有

$$(G_\delta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{d}\xi \qquad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

取$\delta_n = 1/n, n = 1, 2, 3, \dots$. 则由LDC 有

$$\lim_{n\to\infty} (G_{\delta_n} * f)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\delta_n^2|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{d}\xi \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

另一方面由卷积逼近有$\|f - G_{\delta_n} * f\|_{L^2} \to 0 \, (n \to \infty)$. 因此

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(-\xi) e^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{d}\xi = \widehat{g}(x) \;\; \text{a.e.} \;\; x \in \mathbb{R}^d.$$

所以在$L^2(\mathbb{R}^d)$中$f = \widehat{g}$.

对一般情形, 如前, 令$f_R(x) = f(x) 1_{\{|x|<R\}}, R > 0$. 则$f_R \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ 因此对于$g_R(x) = \widehat{f_R}(-x)$ 有$f_R = \widehat{g_R}$ 从而对于$g(x) = \widehat{f}(-x)$ 有

$$\begin{aligned} \|f - \widehat{g}\|_{L^2} &= \|f - f_R\|_{L^2} + \|f_R - \widehat{g_R}\|_{L^2} + \|\widehat{g_R} - \widehat{g}\|_{L^2} \\ &= \|f - f_R\|_{L^2} + \|g_R - g\|_{L^2} = 2\|f - f_R\|_{L^2} \to 0 \quad (R \to +\infty). \end{aligned}$$

因此$f = \widehat{g}$. 这就证明了Fourier 变换是满射。

(b): 令$f \mapsto f^\vee$为Fourier 变换$f \mapsto \widehat{f}$ 的逆变换. 则在(a)的证明中我们已证明了

$$f^\vee(x) = g(x) = \widehat{f}(-x).$$

于是对任意$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$f(x) = \widehat{g}(x) = \widehat{f^\vee}(x) = \widehat{\widehat{f}(-\cdot)}(x) = (\widehat{f})^\wedge(-x) = (\widehat{f})^\vee(x). \qquad \square$$

本章作业题在Stein & Shakarchi《实分析》中, 随堂布置.

补充作业题:

1. 试给出Hardy 空间$\mathbb{H}^2(D)$的一个ON 基$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$. (不难)

2. Let $\mathcal{F}(f) \equiv \widehat{f}$ denote the Fourier transform. Then $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$, i.e. for any $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ we have $\mathcal{F}^4(f) = f$ a.e. on $\mathbb{R}^d$. Here $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$, etc.

In particular if $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ is even, i.e. $f(-x) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^d$, then $\mathcal{F}^2(f) = f$ a.e. on $\mathbb{R}^d$.

3. Does there exist a function $0 \not\equiv f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ such that $\widehat{f} = f$, but f is not a Gauss function ?

【附录: C_c^∞-光滑逼近】 Assume that

$$0 \le K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \mathrm{supp}K \subset \overline{B}_1(0), \quad \text{s.t.} \quad \int_{\mathbb{R}^d} K(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Let

$$K_\delta(x) = \delta^{-d} K(x/\delta), \quad \delta > 0.$$

The following famous example is frequently used:

$$K(x) = c\exp\Big(-\frac{1}{1-|x|^2}\Big) \quad \text{if} \quad |x| < 1; \quad K(x) = 0 \quad \text{if} \quad |x| \ge 1 \tag{1}$$

where $c > 0$ is a constant such that $\int_{\mathbb{R}^d} K(x)\mathrm{d}x = 1$.

Theorem A. Let $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Then

(a)

$$\|f - K_\delta * f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{as} \quad \delta \to 0+.$$

(b) $K_\delta * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ and

$$D^\alpha(K_\delta * f) = (D^\alpha K_\delta) * f \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}^d_{\ge 0}. \tag{2}$$

Furthermore if $\mathrm{supp}f$ is compact, $V \subset \mathbb{R}^d$ is open satisfying $\mathrm{supp}f \subset V$, then there is $\delta_0 > 0$ such that $K_\delta * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ and $\mathrm{supp}(K_\delta * f) \subset V$ for all $\delta \in (0, \delta_0)$.

Proof. Part (a) has been proven in the presvious proposition. To prove part (b), we recall that

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_d^{\alpha_d}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}; \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

and

$$\mathrm{supp} D^\alpha K_\delta \subset \mathrm{supp} K_\delta \subset \overline{B}_\delta(0). \tag{3}$$

Given any $\alpha \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ and $0 < R < \infty$. Let $x \in B_{R+\delta}(0)$. We have, by (3),

$$|D^\alpha (K_\delta(x-y))| = |(D^\alpha K_\delta)(x-y))| \leq \|D^\alpha K_\delta\|_\infty 1_{\{|y| \leq R+\delta\}} \tag{4}$$

and so

$$\sup_{x \in B_R(0)} |D^\alpha (K_\delta(x-y)) f(y))| \leq \|D^\alpha K_\delta\|_\infty |f(y)| 1_{\{|y| \leq R+\delta\}} \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

where $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$ for bounded function φ. Form these we also have

$$(K_\delta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x-y) f(y) 1_{\{|y| \leq R+\delta\}} \mathrm{d}y \tag{6}$$

and generally

$$((D^\alpha K_\delta) * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (D^\alpha K_\delta)(x-y) f(y) 1_{\{|y| \leq R+\delta\}} \mathrm{d}y. \tag{7}$$

By Hölder inquality and $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ one sees that the function $y \mapsto |f(y)| 1_{\{|y| \leq R+\delta\}}$ belongs to $L^1(\mathbb{R}^d)$. It follows from the theorem of differentiation under integration that for any $i \in \{1, 2, ..., d\}$, $(D_i(K_\delta * f))(x)$ exists at $x \in B_R(0)$ and

$$(D_i(K_\delta * f))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (D_i K_\delta)(x-y) f(y) 1_{\{|y| \leq R+\delta\}} \mathrm{d}y = ((D_i K_\delta) * f)(x).$$

Since $R > 0$ is arbitrary, this implies that $(D_i(K_\delta * f))(x)$ exists for all $x \in \mathbb{R}^d$ and all $i = 1, 2, ..., d$, and it holds

$$(D_i(K_\delta * f))(x) = ((D_i K_\delta) * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1, 2, ..., d.$$

Now suppose for some $n \in \mathbb{N}$, the functions of partial derivatives $D_{i_n} D_{i_{n-1}} \cdots D_{i_1}(K_\delta * f)$ exist on $\mathbb{R}^d$ and

$$D_{i_n} D_{i_{n-1}} \cdots D_{i_1}(K_\delta * f) = (D_{i_n} D_{i_{n-1}} \cdots D_{i_1} K_\delta) * f = (D^\alpha K_\delta) * f \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^d \tag{8}$$

for all $i_1, i_2, ..., i_n \in \{1, 2, , ..., d\}$ with the corresponding $\alpha \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ with $|\alpha| = n$. Here in the last equality in (8) we used the fact that $K_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Then for any $i_1, i_2, ..., i_n, i_{n+1} \in \{1, 2, , ..., d\}$ we conclude with the same proof as the above using (5), (8), and (7) that the function of partial derivative $D_{i_{n+1}} D_{i_n} \cdots D_{i_1}(K_\delta * f)$ exists on $\mathbb{R}^d$ and

$$D_{i_{n+1}} D_{i_n} \cdots D_{i_1}(K_\delta * f) = (D_{i_{n+1}} D_{i_n} \cdots D_{i_1} K_\delta) * f \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^d.$$

Also as shown above, the representation (8) also holds for $n+1$. By induction principle we conclude that $K_\delta * f$ has all order of all partial derivatives and thus all of the partial derivatives of $K_\delta * f$ are continuous on $\mathbb{R}^d$. This proves $K_\delta * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. And we have also proved that (8) holds for all $n \in$ and all $i_1, i_2, ..., i_n \in \{1, 2, ..., d\}$. Since every D^α with $|\alpha| = n$ is a special version of $D_{i_n} D_{i_{n-1}} \cdots D_{i_1}$, i.e. $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_d^{\alpha_d}$, it follows from the general formula (8) that the equality (2) holds true.

Finally suppose the set $K := \text{supp} f$ is compact and $V \supset K$ is open. In this case we have $\text{dist}(K, V^c) > 0$. Let $0 < \delta_0 < \text{dist}(K, V^c)$, $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \text{dist}(K, x) \leq \delta_0\}$. Then $K_0 \subset V$. Let $0 < \delta \leq \delta_0$. We then need only to prove that $\text{supp}(K_\delta * f) \subset K_0$. For any $x \in \mathbb{R}^d$ satisfying $(K_\delta * f)(x) \neq 0$, there is $y \in \mathbb{R}^d$ such that $K_\delta(x - y) f(y) \neq 0$. This implies that $y \in K$ and $|x - y| \leq \delta$ and so $\text{dist}(K, x) \leq |y - x| \leq \delta \leq \delta_0$ hence $x \in K_0$. So $\text{supp}(K_\delta * f) \subset K_0$. $\square$