数学分析讲义: 第七章 点集拓扑初步

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; 《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Feb. 2017

数学分析讲义总目录

第七章 点集拓扑初步、

引言： Topology（“拓扑”）这一外来词是指这样一门学问, 它研究集合的形状及其连续变化。由于集合数量巨大, 形状千差万别, 人们只能对其进行分类研究。若按“彼此能一一对应”进行分类，则太粗且用处不大，这分类的优点只是对集合没有任何要求。数学实践表明，按“彼此能连续地一一对应”进行分类，也即按同胚来分类，是合适的，既有广度又能帮助解决很多有趣的和重要的问题，唯一的要求是对所考虑的集合族和其上映射能够建立“连续性”，而这就是点集拓扑的任务。通过研究集合上的连续映射来研究集合本身，是一种具有哲学意义的观念也是一种富有成效的方法。现代数学的一个特点就是把研究的着眼点从集合本身转移到集合之间的连续映射了。

“连续”这个概念是由“邻近、邻域”这个概念描述的。如果对所考虑的集合能建立距离（例如像欧几里德空间中两点间的距离那样), 那么就容易定义邻域。但是, 一方面有些集合在其上很难建立可用的距离函数，另一方面，数学实践表明，为了能对尽可能一般的集合类建立有用的邻域族，距离不是必须的。因此陈书就是直接从一般拓扑空间的基本概念和性质开始的, 并做了仔细的讲解。但是距离概念是我们熟悉的且很有用，且已包含了拓扑中绝大多数共同概念和本质，因此，对于初学者和今后很多的应用来说，先学好距离空间是正确的顺序。所以本章就只讲距离空间(即度量空间)。

【经验之谈：学习上的大顺序与小顺序】大顺序是指根据所学知识的结构, 从浅易概念出发, 进行逐步系统的、逐渐广泛的、逐步深刻的、以及理论难度逐步增加的顺序进行教学和自学, 但是其间, 为了能马上看到某定理的伟大作用(从而加深印象!), 在举例时有时就不得不提前用到后面才学的某个理论, 就是说需要先承认一些基本事实, 否则就不生动、不给力。小顺序是从已知的(即已定义的和已证明的)概念和性质出发, 学习新知识, 即是一种线性顺序，其优点是确保理论的正确性并使学生学会研究和证明方法。这种严谨的线性序很重要，因为真实、可靠是科学的最重要因素。但其缺点是不那么有机, 不那么生动，与实际探索经历也可以很不一致。例如, 历史上是先有了积分(由于丈量面积等简单的宏观需要), 百年后才有了微分(时代发展到需要知道局部和微观)，先有了一些成功经验，然后才纳入理论, 等等。我们的教学将尽量同时保持大顺序与小顺序各自的优点。这就需要学生在学到后面的理论后, 不忘回看前面提前用了某定理的例子。这也是温故知新的又一层意思。

学习是一种劳动, 不能只看, 要动手练; “理论是灰色的，生活之树常青 (歌德)”。

§7.1. 度量空间

度量空间也称为距离空间, 它是欧几里德空间的推广. 在度量空间中, 度量是主要角色. 在下面度量空间的定义中, 对集合X 没有任何限制！特别不要求X是线性空间. 顺便说一句: 与代数不同, “空间(space)”在拓扑学中不必是指含有代数结构的集合.

【定义(度量空间) 】设X 是一个非空集合。称函数$\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ 是X上的一个度量(或距离) 如果它满足下面三条:

(i) 正定性: 对任意$x,y\in X$都有$\rho(x,y)\ge 0$, 并且$\rho(x,y)=0 \iff x=y$.

(ii) 对称性: 对任意$x,y\in X$都有$\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

(iii) 三角不等式: 对任意$x,y,z\in X$都有

$$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

如果ρ是X上的一个度量, 则称(X,ρ)是一个度量空间. □

【球和邻域】设(X,ρ)是一个度量空间. 则X中的开球、闭球是形如

$$B(a,r)=\{x\in X \mid \rho(x,a)<r\},\qquad \overline{B}(a,r)=\{x\in X \mid \rho(x,a)\le r\}$$

的集合, 其中点$a\in X$ 和正数$0<r<+\infty$分别称为这开、闭球的中心和半径. 我们也称开球$B(a,r)$ 是点a的一个球形邻域.

在往下进行之前, 先回答**两个问题**:

1. 为何不把度量$\rho(x,y)$ 定义成常见的两点间的距离$|x-y|$的形式呢? 原因是:

(1) 在X中“$x-y$”可能没有定义,

(2) 假设$X\subset\mathcal{X}$ 而$\mathcal{X}$ 是一个线性空间. 那么对于$x,y\in X$ 有$x-y\in\mathcal{X}$, 但未必有$x-y\in X$. 特别是未必有$0\in X$, 因此$\rho(x-y,0)$ 就可能无定义.

(3) 度量的概念与“$x-y, x+y$”等运算问题无关. □

2. 度量一定存在吗? 任何集合X上都可以定义度量. 例如至少可以定义离散度量, 即ρ 被定义为

$$\rho(x,x)=0,\quad \rho(x,y)=1\qquad \forall\, x,y\in X,\, x\ne y.$$

但要获得合适的度量, 却要根据集合X的特性来制定. 后面我们将看到, 很多情况下, 同一集合X上可以有很多不同度量, 在应用时可以挑选合适的度量. □

【定义(序列的收敛)】设(X,ρ)为一度量空间. X中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为收敛序列, 如果存在$a\in X$ 使得当$n\to\infty$时数列$\rho(x_n,a)$ 趋于0, 即

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0.$$

此时也称x_n收敛于a, 记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或$x_n\to a\,(n\to\infty)$. □

【强调:】度量的一个显然但十分重要的作用是**它区分不同的点**. 也即对任意$x,y\in X$ 有:

$$x\neq y \iff \rho(x,y)>0. \quad 或等价地, \quad x=y \iff \rho(x,y)=0.$$

根据这个性质易见序列的**极限是唯一的**：假设$x_n\to a\,(n\to\infty)$ 且同时有$x_n\to b\,(n\to\infty)$, 即假设同时有$\rho(x_n,a)\to 0$和$\rho(x_n,b)\to 0$ $(n\to\infty)$, 则由三角不等式有

$$0\le\rho(a,b)\le\rho(a,x_n)+\rho(x_n,b)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

因$\rho(a,b)$ 与n无关, 故必有$\rho(a,b)=0$. 所以$a=b$.

另外一个连续性和收敛性有关的常用的不等式是：

$$|\rho(x,y)-\rho(a,b)|\le\rho(x,a)+\rho(y,b) \qquad \forall\, x,y,a,b\in X.$$

我们把证明留为作业(运用度量的三角不等式和对称性). □

【定义(开集,闭集)】设(X,ρ)是一个度量空间.

开集: 设$G\subset X$. 若对任意$x\in G$, 都存在$\delta=\delta_x>0$ 使得$B(x,\delta)\subset G$, 则称G是X的一个开集, 简称G为开集. 规定空集$\emptyset$ 是开集.

闭集: 设$F\subset X$. 若F的余集$F^c=X\setminus F$是X的开集, 则称F是X的一个闭集, 简称F为闭集. □

由此定义可知：

X中的一个集合F是闭集当且仅当$F^c=X\setminus F$是开集;

X中的一个集合G是开集当且仅当$G^c=X\setminus G$ 是闭集。

X和空集$\emptyset$ 都既是开集也是闭集.

【例】在度量空间中, 开球是开集, 闭球是闭集, 单点集是闭集.

【证】考察任意开球$B(a,r)$ 和闭球$\overline{B}(a,r)=\{x\in X\,|\,\rho(x,a)\le r\}$, 以及单点集$\{a\}$. 对任意$x\in B(a,r)$ 有$\rho(x,a)<r$. 令$\delta=r-\rho(x,a)$. 则$\delta>0$ 且对任意$y\in B(x,\delta)$ 有$\rho(y,x)<\delta$ 从而由三角不等式有

$$\rho(y,a)\le\rho(y,x)+\rho(x,a)<\delta+\rho(x,a)=r$$

因此$y\in B(a,r)$. 这表明$B(x,\delta)\subset B(a,r)$. 所以$B(a,r)$是开集.

为证$\overline{B}(a,r)$是闭集, 只需证明其余集$\overline{B}(a,r)^c=\{x\in X\,|\,\rho(x,a)>r\}$是开集. 对任意$x\in\overline{B}(a,r)^c$ 有$\rho(x,a)>r$. 令$\delta=\rho(x,a)-r$. 则$\delta>0$ 且对任意$y\in B(x,\delta)$ 有$\rho(y,x)<\delta$ 从而由三角不等式有

$$\rho(y,a)\ge\rho(x,a)-\rho(y,x)>\rho(x,a)-\delta=r$$

因此$y\in\overline{B}(a,r)^c$. 这表明$B(x,\delta)\subset\overline{B}(a,r)^c$. 所以$\overline{B}(a,r)^c$是开集.

同理可证$\{a\}^c=\{x\in X\,|\,\rho(x,a)>0\}$ 是开集. 所以单点集$\{a\}$是闭集. $\square$

下面命题给出开集类和闭集类的典型性质.

【命题7.1.】设(X,ρ)为一度量空间. 则

(I) 关于开集:

(i) 任意并封闭: 任意多个开集的并是开集, 即对任一族开集$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 并集$\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$仍是开集.

(ii) 有限交封闭: 有限多个开集的交是开集, 即若$n\in\mathbb{N},G_1,G_2,...,G_n$ 是开集, 则交集$\bigcap_{j=1}^n G_j$仍是开集.

(II) 关于闭集:

(i)' 任意交封闭: 任意多个闭集的交是闭集, 即对任一族闭集$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 交集$\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha$仍是闭集.

(ii)' 有限并封闭: 有限多个闭集的并是闭集, 即若$n\in\mathbb{N},F_1,F_2,...,F_n$ 是闭集, 则并集$\bigcup_{j=1}^n F_j$仍是闭集.

【证】(I): 设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$为$X$中的任一族开集. 对任意$x \in \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$, 存在$\alpha \in A$ 使得$x \in G_\alpha$. 因G_α是开集, 故存在$\delta > 0$ 使得$B(x,\delta) \subset G_\alpha$ 从而有$B(x,\delta) \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$. 所以$\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ 是开集.

其次设$G_1, G_2, ..., G_n$ 是开集. 若$\bigcap_{j=1}^n G_j = \emptyset$ 则这交集已经是开集. 设$\bigcap_{j=1}^n G_j \neq \emptyset$. 对任意$x \in \bigcap_{j=1}^n G_j$, 即$x$属于每个$G_j$, 则存在$\delta_j = \delta_{x,j} > 0$ 使得$B(x,\delta_j) \subset G_j, j = 1, 2, ..., n$. 令

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}.$$

则$\delta > 0$ 且$B(x,\delta) \subset B(x,\delta_j), j = 1, 2, ..., n$, 从而有$B(x,\delta) \subset \bigcap_{j=1}^n B(x,\delta_j) \subset \bigcap_{j=1}^n G_j$. 所以$\bigcap_{j=1}^n G_j$是开集.

(II): 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$为$X$中的任一族闭集. 由de Morgan 对偶律和(I)知

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c \quad \text{是开集},$$

所以$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$是闭集.

其次设$F_1, F_2, ..., F_n$ 是闭集. 则仍由de Morgan 对偶律和(I)知

$$\Big(\bigcup_{j=1}^n F_j\Big)^c = \bigcap_{j=1}^n F_j^c \quad \text{是开集},$$

所以$\bigcup_{j=1}^n F_j$是闭集. $\square$

【注1】根据开集的定义和上述性质可见, X中的一个子集G 是X的开集当且仅当G 可表示成一些开球的并, 例如可表示成

$$G = \bigcup_{x\in G} B(x,\delta_x) \qquad\qquad (\delta_x > 0).$$

【注2】按照一般拓扑学中的术语, 我们把X中的开集的全体记作$\mathcal{T}$, 称之为X上的**拓扑**, 同学们将看到, 一旦有了拓扑, X的各种分析就可以进行了并获得很多基本结果.

【注3】由上面命题我们还有下面常用性质:

开集减闭集等于开集, 闭集减开集等于闭集

即若G, F 分别是X的开集, 则

$$G \setminus F = G \cap F^c \ \text{是开集}; \qquad F \setminus G = F \cap G^c \ \text{是闭集}.$$

下面引入几个最常见的子集类:

【定义(内点、外点、边界点、聚点、孤立点、导集、闭包、稠密集)】

设(X,ρ)为一度量空间, $E\subset X$.

(1) 内点:. 设$x\in E$. 若存在$\delta=\delta_x>0$使得$B(x,\delta)\subset E$, 则称x是E的一个内点. E的内点的全体记作E°, 称之为E的内部或开核, 即

$$E^\circ=\{x\in E\mid \exists\,\delta=\delta_x>0 \text{ s.t. } B(x,\delta)\subset E\}.$$

(2) 外点:. 若$x\in X$是$E^c=X\setminus E$的一个内点, 即$x\in(E^c)^\circ$, 则称x是E的一个外点.

(3) 边界点:. 若$x\in X$既不是E的内点也不是E的外点, 即x 满足

$$\text{对任意}\varepsilon>0\text{都有}\quad E\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset\quad \text{且}\quad E^c\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset$$

则称x是E的一个边界点. E的边界点的全体记作∂E, 即

$$\partial E=X\setminus(E^\circ\cup(E^c)^\circ).$$

于是X按自己的任一子集$E\subset X$有如下分解:

$$X=E^\circ\cup(E^c)^\circ\cup\partial E.\qquad (\text{右边三者互不相交})$$

(4) 聚点与孤立点:. 若$x\in X$满足:

$$\text{对任意}\varepsilon>0\text{都有}(E\setminus\{x\})\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset,$$

则称x是E的一个聚点(或极限点). E的聚点的全体记作E', 称之为E的导集, 即

$$E'=\{x\in X\mid (E\setminus\{x\})\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset\ \text{ for all } \varepsilon>0\,\}.$$

E中的点x若不是E的聚点, 即若$x\in E\setminus E'$, 则称x为E的一个孤立点.

(5) 闭包:. E与其导集E'的并叫做E的闭包, 记作$\overline{E}$, 即

$$\overline{E}=E\cup E'.$$

(6) 稠密集:. 若E的一个子集$D\subset E$ 使E含于D的闭包内, 即$E\subset\overline{D}$, 则称D是E的一个稠密子集. □

【注】由边界的定义和$(E^c)^c = E$ 可见E 与$E^c = X \setminus E$ 有相同的边界:

$$\partial E = \partial(E^c).$$

下面两个命题是对开集、闭集、聚点、闭包的最基本的认知.

【命题7.2.】设(X, ρ)为一度量空间, $E \subset X$, $x \in X$. 则

(a) E的内部E°是开集.

(b) E是开集$\iff E = E^\circ$.

(c) $x \in E'$ (即x是E的聚点) $\iff$ 存在序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E \setminus \{x\}$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(d) 闭包的等价定义:

$$\begin{aligned} x \in \overline{E} &\iff \text{存在点列}\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E\text{使得}\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad (\textbf{very useful!}) \\ &\iff \text{对任意}\varepsilon > 0 \text{ 存在}y \in E\text{使得}\rho(y, x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

【证】(a): 对任意$x \in E^\circ$, 由内点的定义, 存在$\delta = \delta_x > 0$使得$B(x, \delta) \subset E$. 对任意$y \in B(x, \delta)$, 令$\varepsilon = \delta - \rho(y, x)$, 则$\varepsilon > 0$ 并且对任意$z \in B(y, \varepsilon)$, 由三角不等式有

$$\rho(z, x) \le \rho(z, y) + \rho(y, x) < \varepsilon + \rho(y, x) = \delta.$$

因此$z \in B(x, \delta) \subset E$. 这表明$B(y, \varepsilon) \subset E$. 据内点的定义知$y \in E^\circ$. 所以$B(x, \delta) \subset E^\circ$. 据开集的定义知$E^\circ$ 是开集.

(b): 设E是开集. 则由开集的定义知E的每一点都是E的内点. 因此$E = E^\circ$. 反之若$E = E^\circ$, 则由(a)知E是开集.

(c): "$\Longrightarrow$": 设$x \in E'$. 由聚点的定义知对每个$n \in \mathbb{N}$, 集合$(E\setminus\{x\}) \cap B(x, 1/n) \neq \emptyset$. 取$x_n \in (E\setminus\{x\}) \cap B(x, 1/n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 则有$x_n \in E\setminus\{x\}$, $\rho(x_n, x) < 1/n \to 0\,(n \to \infty)$.

"$\Longleftarrow$": 设存在序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E \setminus \{x\}$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 则对任意$\varepsilon > 0$ 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$\rho(x_n, x) < \varepsilon$. 这说明$x_n \in (E \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon)$. 所以$(E \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. 由$\varepsilon > 0$的任意性知$x$是$E$的一个聚点.

(d): 设$x \in \overline{E}$. 若$x \in E$, 则取$x_n \equiv x, n = 1, 2, 3, \dots$, 当然有$x_n \to x\,(n \to \infty)$. 设$x \in E'$, 则由(c) 知存在序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E \setminus \{x\} \subset E$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

设存在序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 则对任意$\varepsilon > 0$ 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$\rho(x_n, x) < \varepsilon$. 取$y = x_n$ 即知x 具有第三个陈述中的性质.

设对任意$\varepsilon > 0$ 存在$y \in E$使得$\rho(y,x) < \varepsilon$. 若$x \notin \overline{E}$, 即$x \notin E \cup E'$, 则由$x \notin E'$ 知存在$\varepsilon > 0$ 使得$(E \setminus \{x\}) \cap B(x,\varepsilon) = \emptyset$, 再由$x \notin E$知$(E \setminus \{x\}) \cap B(x,\varepsilon) = E \cap B(x,\varepsilon)$ 从而得到$E \cap B(x,\varepsilon) = \emptyset$. 这与假设条件矛盾. 所以必有$x \in \overline{E}$. $\square$

【命题7.3(闭集的刻画)】设(X,ρ)为一度量空间, $E \subset X$. 则以下(1)-(6) 彼此下等价:

(1) E 是闭集.

(2) E关于序列极限封闭, 即只要$E \ni x_n \to x \in X$ $(n \to \infty)$ 就有$x \in E$.

(3) $E' \subset E$, 即 E 包含了 E 的所有聚点.

(4) $\overline{E} = E$.

(5) $\partial E \subset E$, 即 E 包含了 E 的边界.

(6) $E = E^\circ \cup \partial E$.

【证】来证明(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2): 设E是闭集. 设$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$和$x \in X$ 满足$x_n \to x\,(n \to \infty)$. 要证$x \in E$. 假设$x \notin E$, 即$x \in E^c$. 则因$E^c$是开集, 存在$\delta > 0$ 使得$B(x,\delta) \subset E^c$. 因$\rho(x_n,x) \to 0\,(n \to \infty)$ 故存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$\rho(x_n,x) < \delta$. 于是有$x_n \in B(x,\delta) \subset E^c$. 这与$x_n \in E$ 矛盾. 所以必有$x \in E$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 设E关于序列极限封闭. 假如$E' \not\subset E$, 那么存在$x_0 \in E'$ 使得$x_0 \notin E$. 由上一命题中关于聚点的刻画知定义知存在序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E \setminus \{x_0\}$ 使得$x_n \to x_0\,(n \to \infty)$. 由假设知应有$x_0 \in E$. 这与$x_0 \notin E$ 矛盾. 这矛盾证明了$E' \subset E$.

(3) $\Longrightarrow$ (4): 设$E' \subset E$. 则由闭包$\overline{E}$的定义和$E' \subset E$有

$$\overline{E} = E \cup E' = E.$$

(4) $\Longrightarrow$ (5): 设$\overline{E} = E$. 则有$E' \subset E$. 回忆由边界∂E的定义知三个集合$E^\circ, (E^c)^\circ, \partial E$ 互不相交. 任取$x \in \partial E$. 若$x \notin E$, 则由$E' \subset E$知$x \notin E'$ 即x不是E的聚点. 于是由聚点的定义知存在$\varepsilon > 0$使得$(E \setminus \{x\}) \cap B(x,\varepsilon) = \emptyset$. 注意$x \notin E$，故得知$E \cap B(x,\varepsilon) = \emptyset$. 这表明$B(x,\varepsilon) \subset E^c$, 因此$x \in (E^c)^\circ$, 即$x$是$E$的一个外点, 但这与$x \in \partial E$矛盾. 这矛盾证明了$x \in E$. 所以$\partial E \subset E$.

(5) $\Longrightarrow$ (6): 设$\partial E \subset E$. 则有$E^\circ \cup \partial E \subset E$. 来证明反向包含也成立. 假设不然, 则存在$x \in E$使得$x \notin E^\circ \cup \partial E$. 于是由空间分解$X = E^\circ \cup \partial E \cup (E^c)^\circ$ 可知必有$x \in (E^c)^\circ$.

但$(E^c)^\circ \subset E^c$, 故$x \in E^c$, 这就与$x \in E$ 矛盾. 这矛盾证明了$E \subset E^\circ \cup \partial E$也成立. 所以$E = E^\circ \cup \partial E$.

(6) $\Longrightarrow$ (1)：设$E = E^\circ \cup \partial E$. 则由空间分解有

$$X = (E^\circ \cup \partial E) \cup (E^c)^\circ = E \cup (E^c)^\circ.$$

但E 与$(E^c)^\circ$不相交, 故得$E^c = X \setminus E = (E^c)^\circ$. 由上一命题知$(E^c)^\circ$是开集, 所以$E^c$是开集, 也即$E$是闭集. $\square$

下面命题是关于集合的边界, 内部, 闭包, 闭包运算等的基本性质.

【**命题7.4.**】设(X, ρ)是一度量空间, E, A, B 为X的任意子集. 则有

(a) E**的闭包**$\overline{E}$ **和边界**∂E **都是闭集**, 并且

$$\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ \qquad \text{即} \quad \overline{E} = E^\circ \cup \partial E\,.$$

(b)(单调性和闭包运算)

$$A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ, \quad \overline{A} \subset \overline{B} \qquad (\text{单调性}).$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (\text{据归纳法, 这等式对任何有限多个子集也成立}).$$

(c)(边界的性质) $\partial(A \cup B)$, $\partial(A \cap B)$, $\partial(A \setminus B)$都是$(\partial A) \cup (\partial B)$的子集, 即

$$\partial(A \cup B),\, \partial(A \cap B),\, \partial(A \setminus B) \subset (\partial A) \cup (\partial B).$$

【证】(a): 由集合的内部是开集知$E^\circ \cup (E^c)^\circ$ 是开集. 因此由边界的定义和闭集的定义即知$\partial E = (\,E^\circ \cup (E^c)^\circ\,)^c$是$X$的闭集.

来证$\overline{E}$是闭集. 即证明$(\overline{E})^c$是开集. 据**命题7.1 (a)**, 只需证明$[(\overline{E})^c]^\circ = (\overline{E})^c$.

显然有$[(\overline{E})^c]^\circ \subset (\overline{E})^c$.

反之, 对任意$x \in (\overline{E})^c$, 即$x \notin \overline{E} = E \cup E'$, 则$x \notin E$ 且存在$\varepsilon > 0$使得$(E \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$. 因$x \notin E$ 故实际上有$E \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$. 看: 对任意$y \in B(x, \varepsilon)$, 令$\delta = \varepsilon - \rho(y, x)\,(> 0)$, 则有$B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$ 从而有$(E \setminus \{y\}) \cap B(y, \delta) = \emptyset$, 这表明$y \notin E \cup E' = \overline{E}$ 即$y \in (\overline{E})^c$. 因此$B(x, \varepsilon) \subset (\overline{E})^c$. 根据内点的定义即知$x \in [(\overline{E})^c]^\circ$. 所以$(\overline{E})^c \subset [(\overline{E})^c]^\circ$. 这证明了$[(\overline{E})^c]^\circ = (\overline{E})^c$. 所以$(\overline{E})^c$是开集, 即$\overline{E}$是闭集.

现在证明$\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$.

先证$\overline{E} \subset E^\circ \cup \partial E$. 假设不然, 则存在$x_0 \in \overline{E}$使得$x_0 \notin E^\circ \cup \partial E$. 由空间分解$X = (E^\circ \cup \partial E) \cup (E^c)^\circ$ 知$x_0 \in (E^c)^\circ$, 因此存在$\delta > 0$ 使得$B(x_0, \delta) \subset E^c$即$E \cap B(x_0, \delta) = \emptyset$. 这蕴含$x_0 \notin E$ 同时由聚点的定义知$x_0 \notin E'$. 因此$x_0 \notin E \cup E' = \overline{E}$. 这与$x_0 \in \overline{E}$矛盾。因此必有$\overline{E} \subset E^\circ \cup \partial E$。

再证$E^\circ \cup \partial E \subset \overline{E}$. 还是用反证法。假设存在$x_0 \in E^\circ \cup \partial E$ 使得$x_0 \notin \overline{E}$ 即$x_0 \in (\overline{E})^c$. 因已证$(\overline{E})^c$是开集, 故存在$\delta > 0$ 使得$B(x_0, \delta) \subset (\overline{E})^c$. 这蕴含$\overline{E} \cap B(x_0, \delta) = \emptyset$. 特别有$E \cap B(x_0, \delta) = \emptyset$. 这蕴含$x_0 \notin E^\circ$ 同时由边界点的定义知$x_0 \notin \partial E$. 因此$x_0 \notin E^\circ \cup \partial E$, 这与$x_0 \in E^\circ \cup \partial E$矛盾. 所以必有$E^\circ \cup \partial E \subset \overline{E}$。

这就证明了$\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$.

(b): 先证单调性. 设$A \subset B$. 则由内点集的定义易见$A^\circ \subset B^\circ$ 成立. 而对任意$x \in \overline{A} = A \cup A'$, 若$x \in A$ 则$x \in B \subset \overline{B}$; 若$x \in A'$, 则对任意$\varepsilon > 0$都有

$$(B \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon) \supset (A \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

因此$x \in B' \subset \overline{B}$. 这就证明了$\overline{A} \subset \overline{B}$.

来证闭包等式. 首先由$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$ 和闭包的单调性有

$$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}, \quad \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \qquad \text{从而有} \quad \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

反之, 对任意$x \in \overline{A \cup B} = A \cup B \cup (A \cup B)'$, 若$x \in A \cup B$, 则显然有$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$; 若$x \in (A \cup B)'$, 则断言$x \in A' \cup B'$. 不然, 即$x \notin A' \cup B'$, 则由定义知存在$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ 使得$(A \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon_1) = \emptyset, (B \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon_2) = \emptyset$. 令$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 则$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_2) \cap B(x, \varepsilon_2)$ 从而有

$$[(A \cup B) \setminus \{x\}] \cap B(x, \varepsilon) \subset [(A \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon_1)] \cup [(B \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon_2)] = \emptyset.$$

这就与$x \in (A \cup B)'$ (即x是$A \cup B$的聚点) 矛盾. 这矛盾证明了$x \in A' \cup B'$ 从而有$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. 因此$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

所以闭包等式$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 成立.

(c): 先证明

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

事实上由闭包运算和内点集的单调性有$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $(A\cup B)^\circ\supset A^\circ$, $(A\cup B)^\circ\supset B^\circ$. 因此结合闭包与边界、内点集的关系式有

$$\partial(A\cup B)=\overline{A\cup B}\setminus(A\cup B)^\circ=(\overline{A}\cup\overline{B}\,)\setminus(A\cup B)^\circ\subset(\overline{A}\setminus A^\circ)\cup(\overline{B}\setminus B^\circ)=\partial A\cup\partial B.$$

将这一关系应用于A^c, B^c并注意一个集合E与其余集E^c 有相同的边界, 即$\partial E=\partial(E^c)$, 同时利用$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ 便得到

$$\partial(A\cap B)=\partial((A\cap B)^c)=\partial(A^c\cup B^c)\subset(\partial(A^c))\cup(\partial(B^c)=(\partial A)\cup(\partial B).$$

再将这一结果应用于A, B^c 并再次利用$\partial E=\partial(E^c)$ 就得到

$$\partial(A\setminus B)=\partial(A\cap B^c)\subset(\partial A)\cup(\partial(B)^c)=(\partial A)\cup(\partial B). \qquad\Box$$

对"闭包"一词的解释： 集合E的闭包$\overline{E}$也可以等价地定义为：包含E的最小闭集, 即我们有下面等式

$$\overline{E}=\bigcap_{F\in\mathcal{F}_E}F \qquad \text{其中}\quad \mathcal{F}_E=\{F\subset X\mid F\text{是}X\text{的闭集且}F\supset E\}.$$

事实上我们已证明了闭包$\overline{E}$ 是闭集, 因此再由$\overline{E}\supset E$ 可知$\overline{E}\in\mathcal{F}_E$. 于是有

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}_E}F\subset\overline{E}\,.$$

另一方面, 由闭包的单调性和"闭集的闭包等于闭集自己"有

$$\text{对任意}F\in\mathcal{F}_E\ \text{有}\ \ F=\overline{F}\supset\overline{E}.$$

从而有

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}_E}F\supset\bigcap_{F\in\mathcal{F}_E}\overline{E}=\overline{E}.$$

所以$\bigcap_{F\in\mathcal{F}_E}F=\overline{E}$. $\qquad\Box$

集合的稠密性页是常用性质。下面我们以集合在全空间中的稠密性为例给出稠密性的等价描述.

【命题7.5.】设(X,ρ)为一度量空间, $D\subset X$. 则以下(a),(b),(c) 彼此等价:

(a) D在X中稠密, 即$\overline{D}=X$.

(b) 对任意$x\in X$和任意$\varepsilon>0$, 交集$B(x,\varepsilon)\cap D\neq\emptyset$.

(c) $(X\setminus D)^\circ=\emptyset$, 即$D$的余集$D^c=X\setminus D$无内点.

此外由**(c)** 知

$$D\text{在}X\text{中不稠密(即}\overline{D}\neq X) \iff (X\setminus D)^\circ\neq\emptyset, \text{即}D\text{的余集}D^c=X\setminus D\text{有内点}.$$

【证】(a)$\Longrightarrow$(b)：设D在X中稠密．则对任意$x\in X$ 和$\varepsilon>0$, 由$X=\overline{D}$和闭包的序列刻画知存在序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset D$使得$x_n\to x$ 即$\rho(x_n,x)\to 0\,(n\to\infty)$. 因此对于$n>>1$ 有$\rho(x_n,x)<\varepsilon)$ 即$x_n\in B(x,\varepsilon)\cap D$. 所以$B(x,\varepsilon)\cap D\neq\emptyset$.

(b)$\Longrightarrow$(c)：设D具有性质(b). 假设$X\setminus D$有内点, 则存在$x_0\in X$ 和$\delta>0$ 使得$B(x_0,\delta)\subset X\setminus D$ 也即$B(x_0,\delta)\cap D=\emptyset$. 这与假设(b) 矛盾. 因此$X\setminus D$无内点。

(c)$\Longrightarrow$(a)：设$X\setminus D$无内点. 要证$\overline{D}=X$. 当然已有包含关系$\overline{D}\subset X$. 假设$\overline{D}\neq X$, 则必是$X\setminus\overline{D}\neq\emptyset$. 因$X\setminus\overline{D}$ 是开集(闭集的余集), 故$X\setminus\overline{D}$中的每一点都是$X\setminus\overline{D}$的内点。取一点$x_0\in X\setminus\overline{D}$ 则存在$\delta>0$ 使得$B(x_0,\delta)\subset X\setminus\overline{D}$. 则有$B(x_0,\delta)\cap\overline{D}=\emptyset$, 更有$B(x_0,\delta)\cap D=\emptyset$, 即$B(x_0,\delta)\subset X\setminus D$. 这说明$x_0$ 是$X\setminus D$的内点, 与$X\setminus D$无内点矛盾. 所以必有$\overline{D}=X$ 成立. $\Box$

常用的度量空间例子见陈书. 此处我们愿意早一点介绍常用的概念—— **相对拓扑**.

【定义(相对拓扑)】设(X,ρ)为一个度量空间. 对于X的任一非空子集$E\subset X$, 易见限制在$E\times E$上, $\rho=\rho|_{E\times E}$ 也是E上的一个度量, 因此(E,ρ)也是一个度量空间. 注意到(E,ρ)中的开球$B_E(a,r)=\{x\in E\,|\,\rho(x,a)<r\}=E\cap B(a,r)$ 其中$B(a,r)=B_X(a,r)$是X中的开球. 于是由**命题7.1**下面的**【注1】**可知:

$U\subset E$ 是E的开集$\Longleftrightarrow$ 存在X的开集$G\subset X$使得$U=E\cap G$.

$H\subset E$ 是E的闭集$\Longleftrightarrow$ 存在X的闭集$F\subset X$使得$H=E\cap F$.

E中的开集和闭集, 由于可以写成$E\cap G, E\cap F$的形式其中G,F是X的开集和闭集, 故有时也称

$E\cap G$是X的相对于E的开集, $E\cap F$是X的相对于E的闭集。

因(X,ρ) 比(E,ρ)大, 有时也称(X,ρ)是(E,ρ)的**背景空间**. $\Box$

【例】考虑一维欧空间$(\mathbb{R},\rho)$, 其中$\rho(x,y) = |x-y|$ (绝对值). 设$\mathbb{Z}$是整数的全体, $[0,1]$为闭区间. 则在同样度量ρ下, $(\mathbb{Z},\rho)$, $([0,1],\rho)$也是度量空间, 它们共同的背景空间是$(\mathbb{R},\rho)$. $\Box$

【例(关于闭球)】设(X,ρ)是一个度量空间. 回忆：闭球的定义为

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X \mid \rho(x,a) \le r\}$$

其中点$a \in X$, $0 < r < +\infty$是这闭球的中心和半径. 不难看出闭球$\overline{B}(a,r)$ 是闭集, 这是因为其余集

$$\overline{B}(a,r)^c = \{x \in X \mid \rho(x,a) > r\}$$

是开集. 事实上对任意$x \in \overline{B}(a,r)^c$ 有$\rho(x,a) > 0$, 因此对于$r_x = \rho(x,a) - r > 0$ 有:

对任意$y \in B(x,r_x) \Longrightarrow \rho(y,a) \ge \rho(x,a) - \rho(x,y) > \rho(x,a) - r_x = r \Longrightarrow y \in \overline{B}(a,r)^c$, 因此$B(x,r_x) \subset \overline{B}(a,r)^c$. 所以$\overline{B}(a,r)^c$ 是开集, 即$\overline{B}(a,r)$是闭集.

因$B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$且$\overline{B}(a,r)$是闭集, 故由闭包的最小性知有包含关系:

$$\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r).$$

问题: 上面的包含关系是否实际上是等式? 也即开球$B(a,r)$的闭包是否就是闭球$\overline{B}(a,r)$? 即是否有

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r) \ ?$$

这问题在很多情况下是肯定的, 例如对$X = \mathbb{R}^n$为欧空间的情形就是肯定的, 即等号成立. 但对于一般情形, 特别是对于离散的度量空间, 等号不总成立.

例如对于离散空间$(\mathbb{Z},\rho)$ 其中$\rho(x,y) = |x-y|$, 考虑以0为中心,$r = 2$为半径的开球和闭球$B(0,2), \overline{B(0,2)}$, 易见有

$$B(0,2) = \{-1,0,1\}, \quad \overline{B}(0,2) = \{-2,-1,0,1,2\}.$$

因为度量空间中的有限集都是闭集, 故$B(0,2)$是闭集. 于是由闭包的最小性知$\overline{B(0,2)} = B(0,2)$ 从而有

$$\overline{B(0,2)} = \{-1,0,1\} \ne \overline{B}(0,2). \qquad \Box$$

【**有界集及其直径**】有了度量后, 我们在度量空间中定义集合的直径并建立有界性概念. 设(X,ρ)为一度量空间, $E\subset X$. 如果E非空, 则称E中两点间的距离的上确界为E的直径, 记作$\mathrm{diam}(E)$, 即

$$\mathrm{diam}(E)=\sup_{x,y\in E}\rho(x,y)\qquad(\text{可能是}+\infty).$$

如果E是空集或E非空且$\mathrm{diam}(E)<+\infty$, 则称E是一个有界集.

当E为空集时, 定义$\mathrm{diam}(\emptyset)=0$. 当然若$E$是单点集, 则也有$\mathrm{diam}(E)=0$. 于是易见有: $\mathrm{diam}(\emptyset)=0\iff E$ 是单点集或空集.

由“集合越小其上确界越小”可知按集合的包含关系, 直径是集合的单调不减的函数，即

$$A\subset B\implies \mathrm{diam}(A)\le\mathrm{diam}(B).$$

由此可知有界集的子集还是有界集. 不难看出, 球体$B(a,r)$ 是有界集且$\mathrm{diam}(B(a,r))\le 2r$.

集合的“有界性”也可以用“能被球包含”来定义. 这是因为对任意集合$E\subset X$ 我们有

$$E\text{有界}\iff\text{存在球}B(a,r)\text{ 使得}E\subset B(a,r).$$

事实上若E有界(不妨设E非空), 取一点$a\in E$ 并令$r=1+\mathrm{diam}(B(a,r))$, 则对任意$x\in E$ 有$\rho(x,a)\le\mathrm{diam}(B(a,r))<r$, 因此$E\subset B(a,r)$. 反之若$E\subset B(a,r)$, 则$E$当然是有界的.

至此我们已有了开集、闭集、有界集、稠密集的概念。下面我们要学习几个重要集类: 完备集、紧集、列紧集、完全有界集。

【**完备集和完备度量空间**】

在实数理论中我们已看到了完备性的重要性: 它一方面使得收敛行为是封闭的, 另一方面可以通过构造Cauchy列来获得新东西(例如获得方程的解等等). 这两点也是任何完备度量空间的主要优点.

【**定义(完备集和完备度量空间)**】设(X,ρ)为一个度量空间. 我们称X中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个Cauchy列(或**基本列**) 如果它满足Cauchy 条件:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{使得当}m>n\ge N\text{时}\ \rho(x_m,x_n)<\varepsilon.$$

也即 $$\lim_{m>n\to\infty}\rho(x_m,x_n)=0.$$

设$E\subset X$. 如果E中的任何Cauchy列都在E中收敛[1], 则称E是(X,ρ)中的一个完备集或E在(X,ρ)中是完备的. 特别若X是完备集, 则称X是一个完备的度量空间. □

从Cauchy列的定义和完备性的定义大家看到, 集合的完备性是一个**绝对的性质**。意即设$E\subset X=(X,\rho)$. 则X上的度量ρ 当然也是E上的度量, 因此(E,ρ) 也是一个度量空间, 称之为(X,ρ)的一个度量子空间. 所说的"完备性是一个绝对的性质"是指: E是(X,ρ)中的一个完备集当且仅当(E,ρ) 是一个完备的度量空间, 也即E相对于X是完备的当且仅当E相对于自己的空间(E,ρ)是完备的, 也即没有相对性.

但是开集、闭集的概念就是相对的, 意即E作为度量空间(E,ρ)的全集, 总是自己空间中的开集和闭集, 但是E作为$X=(X,\rho)$的子集可以不是X的开集或闭集!

对于集合的完备性的判定, 下面命题给出了必要和充分条件。

【命题7.6.】

(a) 度量空间中的完备集是闭集.

(b) 完备度量空间中的闭集是完备集.

(c) 因此在完备度量空间中, 一个集合是完备集$\Longleftrightarrow$ 该集合是闭集.

【证】设(X,ρ)为一度量空间, $E\subset X$.

(a): 设E是(X,ρ)中的完备集. 设$E\ni x_n\to x\in X\ (n\to\infty)$. 则由

$$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_m,x)+\rho(x,x_n)\to 0\quad (m>n\to\infty)$$

知$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是E中的一个Cauchy列. 因E完备, 故$x\in E$. 所以E 是闭集.

(b): 设(X,ρ)完备而E是(X,ρ)的闭集. 设$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是E中的任一Cauchy列. 则由$E\subset X$知$\{x_n\}_{n=1}^\infty$也是X中的一个Cauchy列. 因X完备, 故存在$x\in X$使得$x_n\to x\,(n\to\infty)$. 又因E 是闭集, 故由闭集的序列刻画和极限的唯一性知$x\in E$. 所以E是完备集. □

下面的定义和例子(例如乘积空间上的不同度量)说明, 有时候, 同一集合上的某些度量之间是可以互相比较的, 即互相等价.

---

[1]**此话的意思是: 若$\{x_n\}_{n=1}^\infty$是X中的一个Cauchy列, 则存在$x\in E$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$.**

【**定义(等价度量)**】设X是一个度量空间, ρ, ρ_* 是X上的两个度量. 如果存在常数$0 < C_1, C_2 < +\infty$ 使得

$$\rho(x, y) \le C_1 \rho_*(x, y), \qquad \rho_*(x, y) \le C_2 \rho(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$

则称两个度量ρ, ρ_* 等价. $\square$

下面命题说明等价的度量导致相同的完备性.

【**命题7.7.**】设X 为一度量空间, ρ, ρ_* 是X上的两个度量. 设$E \subset X$. 则有:

E在(X, ρ)中是完备的$\Longleftrightarrow$ E在(X, ρ_*)中是完备的.

特别有: (X, ρ)是完备的$\Longleftrightarrow$ (X, ρ_*)是完备的.

【证】由假设知常数$0 < C_1, C_2 < +\infty$ 使得$\rho(\cdot, \cdot) \le C_1 \rho_*(\cdot, \cdot)$, $\rho_*(\cdot, \cdot) \le C_2 \rho(\cdot, \cdot)$. 对任一序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 和任意$x \in X$有

$$\rho(x_m, x_n) \le C_1 \rho_*(x_m, x_n), \quad \rho_*(x_m, x_n) \le C_2 \rho(x_m, x_n),$$

$$\rho(x_n, x) \le C_1 \rho_*(x_n, x), \quad \rho_*(x_n, x) \le C_2 \rho(x_n, x).$$

由此即知所证成立. $\square$

完备空间中有一个"闭集套性质", 但它与我们在实数理论中学习的闭区间套性质不同之处是: 要求集合的直径趋于零. 以后在学习泛函分析时大家会看到, 没有这个条件的话, 这些闭集的交集可以是空集.

【**命题7.8.**】设(X, ρ) 为一度量空间, $E \subset X$为一完备集, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$是一列下降的非空的有界闭集且其直径趋于零, 即

$$\text{闭集 } E_n \supset E_{n+1} \neq \emptyset, \;\; n = 1, 2, 3, ...; \qquad \lim_{n \to \infty} \mathrm{diam}(E_n) = 0.$$

则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x_0\} \quad \text{是非空的单点集.}$$

【证】对每个$n \in \mathbb{N}$, 取$x_n \in E_n$. 则当$m > n \ge 1$时有$x_m \in E_m \subset E_n, x_n \in E_n$ 从而有

$$\rho(x_m, x_n) \le \mathrm{diam}(E_n). \quad \text{因此} \quad \lim_{m > n \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0.$$

这表明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个Cauchy 列. 因E完备, 故存在$x_0 \in E$ 使得$x_n \to x_0\,(n \to \infty)$. 又因$E_n$是闭集且$\{x_k\}_{k=n}^{\infty} \subset E_n$, 故有

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \in E_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

因此$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. 而对任意$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 有$\rho(x, x_0) \le \mathrm{diam}(E_n) \to 0\,(n \to \infty)$. 因此$\rho(x, x_0) = 0$ 即$x = x_0$. 因此$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x_0\}$. □

在上面命题中, 如果把"有界闭集"换成"紧集", 则可以把"直径趋于零"这个条件去掉而仍保持有$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \ne \emptyset$. 集合的紧性是比完备性强得多的性质, 因而其存在范围就不如完备集广泛。但对于有限维空间来说, 集合的紧性等价于有界闭, 这一点从后面讲授的欧空间中点集拓扑的基本性质即可看出.

现在学习紧集概念.

【紧集和紧度量空间】

在实数理论中我们已学习了紧性的概念, 即具有有限覆盖性质, 或本质等价地, 有界序列必有收敛子列. 子列的极限点属于哪个集合这是第二重要的问题, 第一重要的是收敛子列的存在性! 因此紧性是很好的性质（特别对于无穷维空间中的子集来说更加珍贵!).

【定义(紧集和紧度量空间)】设(X, ρ)为一度量空间, $K \subset X$. 设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是X中的一族开集满足

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

则称$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是K的一个开覆盖, 也称$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖了K.

如果K满足: 对于K的任一开覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 都存在有限个$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in A$ 使得$\{G_{\alpha_j}\}_{j=1}^{n}$就已覆盖了$K$, 即

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}.$$

则称K 是X的一个紧子集, 简称紧集.

特别若X 是X自己的紧子集, 则称(X, ρ)为一个紧度量空间. □

【例子】任一有界闭区间$[a, b] \subset \mathbb{R}$是$\mathbb{R}$中的紧集.

【证】设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是K的任一开覆盖. 则对任意$x\in[a,b]$ 存在$\alpha^{(x)}\in A$ 使得$x\in G_{\alpha^{(x)}}$. 因$G_{\alpha^{(x)}}$是开集, 据度量空间中的开集的等价定义知存在$\delta_x>0$使得$(x-\delta_x,x+\delta_x)\subset G_{\alpha^{(x)}}$. 易见

$$[a,b]\subset\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

即$\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\}_{x\in[a,b]}$ 是$[a,b]$的一个开区间覆盖. 据上学期学过的有限开区间覆盖定理知存在有限多个$x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$ 使得$[a,b]\subset\bigcup_{j=1}^n(x_j-\delta_{x_j},x+\delta_{x_j})$. 记$\alpha_j=\alpha^{(x_j)}$, 则有$(x_j-\delta_{x_j},x+\delta_{x_j})\subset G_{\alpha_j}, j=1,2,...,n$ 从而有

$$[a,b]\subset\bigcup_{j=1}^n(x_j-\delta_{x_j},x+\delta_{x_j})\subset\bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}.$$

因此$[a,b]$ 具有有限覆盖性质, 即$[a,b]$是$\mathbb{R}$中的紧集. □

【注】集合的紧性是一个绝对性质, 即这性质与这集合的背景空间是什么无关, 而集合的闭性(等价地开性) 则是一个相对性质, 与这集合的背景空间直接相关.

我们举例说明这一点. 令$E=[0,1)$为$\mathbb{R}$中的半闭区间, 则E不是$\mathbb{R}$中的闭集(因为E关于序列极限不封闭), 并且若把E 看成任何高维空间$\mathbb{R}^n$中的线段, 即$E=[0,1)\times\{(0,...,0)\}\subset\mathbb{R}^n$, 则$E$仍不是$\mathbb{R}^n$中的闭集. 事实上序列$(1-\frac{1}{k},0,...,0)\in E, k=1,2,3,...$ 但$\lim\limits_{k\to\infty}(1-\frac{1}{k},0,...,0)=(1,0,...,0)\notin E$, 因此$E$不是闭集. 当然若把$E$ 看成是一个度量空间, 即考虑(E,ρ)时(其中$\rho(x,y)=|x-y|$), 则E当然是自己的闭子集.

又令$K=[0,1]$. 上面已证明了K是$\mathbb{R}$中的紧集. 若把K 看成任何高维空间$\mathbb{R}^n$中的线段, 即$K=[0,1]\times\{(0,...,0)\}\subset\mathbb{R}^n$, 则由于$K$是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, 故$K$ 是$\mathbb{R}^n$中的紧集(见下面定理). 而把K看成是一个度量空间, 即考虑(K,ρ), 其中$\rho(x,y)=|x-y|$, 则K 也是自己的紧子集.

紧集的这种绝对性质可用下面命题严格表述:

【命题7.9.】设(X,ρ)为一度量空间, $K\subset X$. 则以下(a), (b), (c)彼此等价:

(a) K 是(X,ρ)的紧集.

(b) 存在X的子集$X_0\supset K$ 使得K 是度量子空间(X_0,ρ)的紧集.

(c) 对于X的任意子集$X_0\supset K$ (包括$X_0=K$的情形), K 都是度量子空间(X_0,ρ)的紧集.

【证】来证明(c)$\Longrightarrow$ (b)$\Longrightarrow$ (a)$\Longrightarrow$ (c).

(c)$\Longrightarrow$ (b): 这是显然的.

(b)$\Longrightarrow$ (a): 设K 是某个度量子空间(X_0, ρ)的紧集, 其中$X_0 \supset K$. 设$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$是$X$的对于$K$的任一开覆盖, 即

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

则由$K \subset X_0$ 有

$$K = X_0 \cap K \subset X_0 \cap \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} X_0 \cap G_\alpha.$$

因为(X_0, ρ)是(X, ρ)的度量子空间, 故X_0的开集都是X相对于X_0的开集, 因此$X_0 \cap G_\alpha$是(X_0, ρ)的开集. 因K 是(X_0, ρ)的紧集, 故存在有限多个$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in A$ 使得

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} X_0 \cap G_{\alpha_j} \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}.$$

因此K 是X的紧集.

(a)$\Longrightarrow$ (c): 设K是(X, ρ)的紧集, 任取集合$X_0 \subset X$ 满足$X_0 \supset K$. 设$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$是$(X_0, \rho)$的对于$K$的任一开覆盖. 因为$(X_0, \rho)$是$(X, \rho)$的度量子空间, 故$X_0$的开集都是$X$相对于$X_0$的开集, 因此对每个$U_\alpha$, 存在$X$的开集$G_\alpha$使得$U_\alpha = X_0 \cap G_\alpha$. 于是有

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

因K 是X的紧集, 故存在有限多个$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in A$ 使得

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}.$$

于是再由$K \subset X_0$ 得到

$$K = X_0 \cap K \subset X_0 \cap \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j} = \bigcup_{j=1}^{n} X_0 \cap G_{\alpha_j} = \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}.$$

所以K也是(X_0, ρ)的紧集. $\square$

紧集有两个特征, 一个是具有有限开覆盖性质(即紧集的定义), 另一个是列紧性:

【定义(列紧集)】设(X, ρ)为一度量空间, $K \subset X$. 若K中的任何序列都有在K中收敛的子列, 则称K 是X的一个列紧集. 特别若X是自己的列紧集, 则称(X, ρ)为一个列紧的度量空间. $\square$

我们一会儿看到, 对于度量空间来说, 紧与列紧是一回事. 不过我们先再介绍一个重要的且与紧性密切相关的概念—— 完全有界性.

【定义(完全有界集)】设(X,ρ)为一度量空间, $E\subset X$. 我们称E是(X,ρ)中的一个完全有界集(也称E完全有界), 如果对任意$\varepsilon>0$, E都有一个有限ε-网$\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset E$, 即存在$E$的一个有限子集$\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset E$使得

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{n}B(x_j,\varepsilon).\qquad\Box$$

【命题7.10.】设(X,ρ)为一度量空间, $E\subset X$. 则有

(a) 若E完全有界, 则E有界.

(b) 若E完全有界, 则其闭包$\overline{E}$也完全有界.

(b) 若E完全有界, 则E的任何子集也完全有界.

【证】以下设E完全有界.

(a): 取$\varepsilon=1$, 设$\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset E$ 是E的一个有限1-网. 则由三角不等式$\rho(x,y)\le\rho(x,x_i)+\rho(x_i,x_j)+\rho(x_j,y)$ 易见有

$$\rho(x,y)\le 2+\max_{1\le i,j\le n}\rho(x_i,x_j)\qquad\forall\,x,y\in E.$$

因此

$$\mathrm{diam}(E)\le 2+\max_{1\le i,j\le n}\rho(x_i,x_j)<+\infty.$$

所以E有界.

(b): 对任意$\varepsilon>0$, 对于$\varepsilon/2>0$, 设$\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset E$ 是E的一个有限$\varepsilon/2$-网. 则由闭包的单调性和有限个集合的并的闭包等式有

$$\overline{E}\subset\overline{\bigcup_{j=1}^{n}B(x_j,\varepsilon/2)}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{B(x_j,\varepsilon/2)}.$$

因

$$\overline{B(x_j,\varepsilon/2)}\subset\{x\in X\mid\rho(x,x_j)\le\varepsilon/2\}\subset B(x_j,\varepsilon)$$

故得

$$\overline{E}\subset\bigcup_{j=1}^{n}B(x_j,\varepsilon).$$

再注意$\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset E\subset\overline{E}$ 即知$\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 是$\overline{E}$的一个有限ε-网. 所以$\overline{E}$完全有界.

(c): 任取子集$E_0\subset E$. 要证E_0也是完全有界的. 对任意$\varepsilon>0$, 对于$\varepsilon/2>0$, 设$\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset E$ 是E 的一个有限$\varepsilon/2$- 网. 则有

$$E_0=E_0\cap E\subset E_0\cap\bigcup_{j=1}^n B(x_j,\varepsilon/2)=\bigcup_{j=1}^n E_0\cap B(x_j,\varepsilon/2).$$

不妨设一切$E_0\cap B(x_j,\varepsilon/2)\neq\emptyset, j=1,2,...,n$. 则可取$y_j\in E_0\cap B(x_j,\varepsilon/2)$. 易见有

$$E_0\cap B(x_j,\varepsilon/2)\subset B(y_j,\varepsilon),\quad j=1,2,...,n.$$

所以$\{y_1,y_2,...,y_n\}\subset E_0$ 是E_0 的一个有限ε- 网. 所以E_0完全有界. □

有了以上准备, 我们可以给出紧集的三种等价特征.

【定理7.11(紧集的刻画)】设(X,ρ)为一度量空间, $K\subset X$. 则以下(a),(b),(c) 彼此等价:

(a) K是紧集.

(b) K是列紧集.

(c) K是完备集且完全有界.

【证】来证明“(a)$\Longrightarrow$(b)$\Longrightarrow$(c) $\Longrightarrow$(a)”.

(a) $\Longrightarrow$ (b): 设K为紧集. 任取序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset K$. 要证存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 和$x_0\in K$ 使得$x_{n_k}\to x_0\,(k\to\infty)$, 即$\rho(x_{n_k},x_0)\to 0\,(k\to\infty)$. 这等价于证明

$$\text{存在}x_0\in K\text{使得}\quad \liminf_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0.$$

反证法: 假设不然, 即

$$\text{对任意}x\in K\text{都有}\quad \liminf_{n\to\infty}\rho(x_n,x)>0.$$

令

$$r(x)=\min\{1,\,\frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}\rho(x_n,x)\},\quad x\in K.$$

则对任意$x\in K$ 有$0<r(x)\le 1$. 于是$B(x,r(x))$ 是开球且

$$K\subset\bigcup_{x\in K}B(x,r(x)).$$

因K为紧集, 故存在有限多个$y_1, y_2, ..., y_N \in K$ 使得

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(y_j, r(y_j)).$$

因$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(y_j, r(y_j))$ 故得到自然数集的分解

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{N} \mathbb{N}_j, \qquad \mathbb{N}_j = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(y_j, r(y_j))\}, \quad j = 1, 2, ..., N.$$

于是存在$j_0 \in \{1, 2, ..., N\}$ 使得$\mathbb{N}_{j_0}$是无限集, 即$B(y_{j_0}, r(y_{j_0}))$ 含有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的无限多项. 由此和下极限的定义得到

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(x_n, y_{j_0}) \le r(y_{j_0}).$$

另一方面由$r(x)$的定义有

$$2r(y_{j_0}) \le \liminf_{n\to\infty} \rho(x_n, y_{j_0}).$$

于是得到

$$2r(y_{j_0}) \le r(y_{j_0}), \quad \text{这矛盾于 } 0 < r(y_{j_0}) < +\infty.$$

这矛盾证明了$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有在K中收敛的子列. 所以K 是列紧集.

(b) $\Longrightarrow$ (c): 设K 列紧. 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为K中的任一Cauchy 列. 因K 列紧, 故存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_0 \in K$ 使得$\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0\,(k \to \infty)$. 再由$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Cauchy 易见

$$\rho(x_k, x_0) \le \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

这说明$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ (也即$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$) 在K中收敛. 所以K 是完备集.

下证K完全有界. 假设K 不是完全有界的, 则存在$\varepsilon > 0$ 使得K没有有限ε-网, 即对任意$n \in \mathbb{N}$ 和任意$x_1, x_2, ..., x_n \in E$ 都有$K \not\subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$, 即$K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon) \ne \emptyset$.

取一点$x_1 \in K$, 则有$K \setminus B(x_1, \varepsilon) \ne \emptyset$.

取一点$x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon)$, 则有$K \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)) \ne \emptyset$.

假设在第$n(\ge 2)$步我们已取到点$x_1, x_2, ..., x_n \in K$ 使得

$$x_k \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B(x_j, \varepsilon), \quad k = 2, 3, ..., n. \tag{$*$}$$

则取一点$x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$ 后仍有$K \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} B(x_j, \varepsilon) \ne \emptyset$. 据操作程序的归纳法原理我们得到了序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ 使得$(*)$ 对所有自然数$n \ge 2$ 成立.

由$(*)$ 易见

$$\text{对任意}k, j \in \mathbb{N}, k > j, \text{ 有} \quad \rho(x_k, x_j) \ge \varepsilon.$$

这说明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列. 这与K为列紧集矛盾. 因此K 必是完全有界的.

(c) $\Longrightarrow$ (a): 设K完备且完全有界. 反证法: 假设K 不是紧集. 则存在K的一个开覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得K不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖.

设$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset K$为$K$的一个有限1-网. 则有

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} K \cap \overline{B}(x_j, 1).$$

这里和下面, $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \,|\, \rho(x, a) \le r\}$, 即是以$a$为中心$r$为半径的闭球.

因K不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖, 故在$\{K \cap \overline{B}(x_j, 1)\}_{j=1}^{n}$中存在一个集合, 记作$K_1$, 它也不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖.

因K_1 也是完全有界的, 故它有一个有限1/2-网$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset K_1$. 如上有

$$K_1 = \bigcup_{j=1}^{n} K_1 \cap \overline{B}(x_j, 1/2).$$

K_1不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖, 故在$\{K_1 \cap \overline{B}(x_j, 1/2)\}_{j=1}^{n}$中存在一个集合, 记作$K_2$, 它也不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖.

因K_2 也是完全有界的, 故它有一个有限1/3-网$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset K_2$. 如上有

$$K_2 = \bigcup_{j=1}^{n} K_1 \cap \overline{B}(x_j, 1/3).$$

K_2不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖, 故在$\{K_2 \cap \overline{B}(x_j, 1/3)\}_{j=1}^{n}$中存在一个集合, 记作$K_3$, 它也不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖.

如此操作, 应用操作程序的归纳法原理, 我们得到一列非空的下降的闭集K_n:

$$K \supset K_n \supset K_{n+1}, \quad \mathrm{diam}(K_n) \le \frac{2}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

且每个K_n 都不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖.

另一方面, 应用**命题7.8**知交集$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x_0\} \subset K$. 于是存在$\alpha_0 \in A$ 使得$x_0 \in G_{\alpha_0}$. 因G_{α_0}是开集, 故存在$\delta > 0$ 使得$B(x_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$. 取$n \in \mathbb{N}$ 满足$\frac{2}{n+1} < \delta$. 则对任意$x \in K_n$ 有

$$\rho(x, x_0) \le \mathrm{diam}(K_n) \le \frac{2}{n+1} < \delta$$

从而$x \in B(x_0,\delta)$. 这表明$K_n \subset B(x_0,\delta) \subset G_{\alpha_0}$. 这就与每个$K_n$ 都不能被$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$有限覆盖矛盾. 这矛盾证明了$K$是紧集. □

利用紧集的列紧特征和闭集的序列刻画容易得到

【推论】若K 是$X=(X,\rho)$中的紧集, 则K是X的闭集.

【证】设$K \ni x_n \to x_0 \in X\,(n\to\infty)$. 则由$K$的列紧性, 存在子列$\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ 和$x_0^* \in K$使得$x_{n_j} \to x_0^*\,(j\to\infty)$. 于是$x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0^* \in K$. 所以$\{x_n\}_{n=1}^\infty$收敛于$K$中的点. 根据闭集的序列刻画知$K$是$X$的闭集. □

下面定理— 紧集套定理— 是紧集性质的重要方面.

【定理7.12(紧集套定理)】设(X,ρ)为一度量空间, $\{K_n\}_{n=1}^\infty$为X中的一列非空的下降的紧集, 即

$$\text{紧集 } K_n \supset K_{n+1} \neq \emptyset, \quad n=1,2,3,\dots.$$

则

$$\bigcap_{n=1}^\infty K_n \neq \emptyset.$$

此外有

$$\mathrm{diam}\Big(\bigcap_{n=1}^\infty K_n\Big) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(K_n).$$

特别有 $\bigcap_{n=1}^\infty K_n$ 是单点集 $\iff \lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{diam}(K_n)=0.$

【证】**Step 1**. 来证交集非空. 假设 $\bigcap_{n=1}^\infty K_n=\emptyset$. 则由de Morgan对偶律有$\bigcup_{n=1}^\infty K_n^c = X$ 从而有

$$K_1 \subset X = \bigcup_{n=1}^\infty K_n^c.$$

因 K_1 紧, K_n^c 开, 故存在有限个 $n_1,n_2,...,n_p$ 使得 $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^p K_{n_i}^c$. 令 $m=\max\{n_1,n_2,...,n_p\}$. 则由单调关系 $K_1^c \subset K_2^c \subset K_3^c \subset \cdots$ 可知 $\bigcup_{i=1}^p K_{n_i}^c = K_m^c$ 从而 $K_1 \subset K_m^c$. 但$K_m \subset K_1$ 故得到$K_m \subset K_m^c$. 这蕴 $K_m=\emptyset$, 矛盾于一切 K_n 非空. 所以必有 $\bigcap_{n=1}^\infty K_n \neq \emptyset$.

Step 2. 证明:

$$\text{对任意开集}\Omega \supset \textstyle\bigcap_{n=1}^\infty K_n,\ \text{存在}N\in\mathbb{N}\ \text{使得}\ K_N \subset \Omega.$$

事实上由$\Omega \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ 有

$$\Omega^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c \quad \text{从而有} \quad K_1 \cap \Omega^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c.$$

因 $K_1 \cap \Omega^c$ 是紧集 (紧集的闭子集还是紧集), 而 K_n^c 是开集, 故由紧集的有限覆盖性质, 存在有限个 $n_1, n_2, ..., n_q$ 使得 $K_1 \cap \Omega^c \subset \bigcup_{i=1}^{q} K_{n_i}^c$. 令 $N = \max\{n_1, n_2, ..., n_q\}$. 则$K_{n_i}^c \subset K_N^c$, $i = 1, 2, ..., q$ 从而有 $\bigcup_{i=1}^{q} K_{n_i}^c = K_N^c$. 因此 $K_1 \cap \Omega^c \subset K_N^c$. 这等价于$(K_1 \cap \Omega^c)^c \supset K_N$, 即$K_1^c \cup \Omega \supset K_N$. 但是 $K_N \subset K_1$, 即$K_N \cap K_1^c = \emptyset$, 故实际上有$\Omega \supset K_N$.

Step 3. 证明直径等式. 令$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. 则由直径的单调性有

$$\mathrm{diam}(K) \le \mathrm{diam}(K_{n+1}) \le \mathrm{diam}(K_n), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

因此

$$\mathrm{diam}(K) \le \lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(K_n).$$

下证反向不等式也成立. 对任意 $\varepsilon > 0$, 令

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{a\in K} B(a, \varepsilon).$$

则Ω_ε 是包含 K 的开集且易见

$$\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) \le \mathrm{diam}(K) + 2\varepsilon\,.$$

由**Step 2** 知存在$N \in \mathbb{N}$ 使得$\Omega_\varepsilon \supset K_N$. 于是得到

$$\mathrm{diam}(K_N) \le \mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) \le \mathrm{diam}(K) + 2\varepsilon$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(K_n) \le \mathrm{diam}(K_N) \le \mathrm{diam}(K) + 2\varepsilon.$$

据 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得反向不等式.

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(K_n) \le \mathrm{diam}(K).$$

联合正向不等式, 这就证明了等式 $\mathrm{diam}(K) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(K_n)$ 成立.

最后, 根据显然的事实：一个集合为单点集当且仅当该集合的直径等于零, 即知命题的第三个结论也成立. □

【度量空间的乘积(笛卡尔积)】 设(X_j,ρ_j) 为度量空间, $j=1,2,...,n$. 则在乘积集合$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\prod_{j=1}^n X_j$上的两种常用的度量$\varrho_\infty,\varrho_p$ 是

$$\varrho_\infty(x,y)=\max_{1\le j\le n}\rho_j(x_j,y_j),\qquad \varrho_p(x,y)=\Big(\sum_{j=1}^n\rho_j(x_j,y_j)^p\Big)^{1/p}$$

其中$x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\prod_{j=1}^n X_j$; $1\le p<+\infty$.

不难看出ϱ_∞,ϱ_p 确实是乘积集合$\prod_{j=1}^n X_j$上的度量且二**者等价**。这是一个很好的练习题, 留为作业.

• 今后我们称$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$ 是一个乘积度量空间就是指每个$X_j=(X_j,\rho_j)$ 都是度量空间, 而ρ 取为ϱ_∞ 或ϱ_p中的任何一个。例如常取

$$\rho(x,y)=\max_{1\le j\le n}\rho_j(x_j,y_j)\qquad \text{或}\qquad \rho(x,y)=\Big(\sum_{j=1}^n\rho_j(x_j,y_j)^2\Big)^{1/2}.$$

乘积集合$\prod_{j=1}^n X_j$中点$x=(x_1,x_2,...,x_n)$的第j个分量x_j 也叫做x的第j个坐标.

【乘积度量空间中序列的收敛等价于序列的每个坐标序列收敛】

【命题7.13(乘积度量空间中收敛的坐标刻画)】 设$\{x_k\}_{k=1}^\infty$为$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$中序列. 则$\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 收敛$\Longleftrightarrow$ $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 的每个坐标序列收敛. 也即如写

$$x_k=(x_{1,k},x_{2,k},...,x_{n,k}),\quad a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\prod_{j=1}^n X_j$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}x_k=a\quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}x_{j,k}=a_j,\qquad j=1,2,...,n$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x_k,a)=0\quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\rho_j(x_{j,k},a_j)=0,\qquad j=1,2,...,n.$$

【证】这是下面双边控制不等式的直接结果：

$$\rho_j(x_{j,k},a_j)\le\rho(x_k,a),\quad j=1,2,...,n;\qquad \rho(x_k,a)\le\sum_{i=1}^n\rho_j(x_{j,k},a_j).\qquad\Box$$

【乘积集合的简单拓扑性质】

【命题7.14.】 设$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$为一个乘积度量空间, $\emptyset\ne E_j\subset X_j=(X_j,\rho_j)$, $j=1,2,...,n$. 则对于乘积集合$\prod_{j=1}^n E_j$ 我们有:

(a) $\prod_{j=1}^n E_j$ 是$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$的开集$\iff$ 每个E_j 是(X_j,ρ_j)的开集, $j=1,2,...,n$.

(b) $\prod_{j=1}^n E_j$ 是$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$的闭集$\iff$ 每个E_j 是(X_j,ρ_j)的闭集, $j=1,2,...,n$.

(c) $\prod_{j=1}^n E_j$ 是$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$的有界集$\iff$ 每个E_j 是(X_j,ρ_j)的有界集, $j=1,2,...,n$.

(d) $\prod_{j=1}^n E_j$ 是$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$的完备集$\iff$ 每个E_j 是(X_j,ρ_j)的完备集, $j=1,2,...,n$.

特别有: $(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$是完备度量空间$\iff$ 每个(X_j,ρ_j)是完备度量空间, $j=1,2,...,n$.

(e) $\prod_{j=1}^n E_j$ 是$(\prod_{j=1}^n X_j,\rho)$的紧集$\iff$ 每个E_j 是(X_j,ρ_j)的紧集, $j=1,2,...,n$.

【证】为了看清本质, 我们以$n=2$为例进行证明. 证明方法对$n\ge 3$时同样适用. 注意($n=2$时) 按约定, 度量ρ 可表示为下面之一(不是混合的, 而是只取一种):

$$\rho(x,y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\,\rho_2(x_2,y_2)\}\quad \text{或}\quad \rho(x,y)=\sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2}$$

$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$.

我们用$B(\cdot,\cdot)$ 表示$(X_1\times X_2,\rho)$中的开球, 用$B_j(\cdot,\cdot)$ 表示(X_j,ρ_j)中的开球, $j=1,2$.

(a): "$\Longrightarrow$": 设$E_1\times E_2$ 是$(X_1\times X_2,\rho)$的开集. 先证E_1是(X_1,ρ_1)的开集. 取定一个$x_2\in E_2$. 则对任意$x_1\in E_1$ 有$(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$, 因此存在$\delta>0$使得$B((x_1,x_2),\delta)\subset E_1\times E_2$. 则对任意$y_1\in B_1(x_1,\delta)$ 有

$$\rho((y_1,x_2),(x_1,x_2))=\rho_1(y_1,x_1)<\delta$$

从而有$(y_1,x_2)\in B((x_1,x_2),\delta)\subset E_1\times E_2$. 这表明

$$B_1(x_1,\delta)\times\{x_2\}\subset E_1\times E_2.$$

因此$B_1(x_1,\delta)\subset E_1$. 所以$E_1$是$(X_1,\rho_1)$的开集. 同理$E_2$是$(X_2,\rho_2)$的开集.

"$\Longleftarrow$": 设E_1,E_2 分别是$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$的开集. 则对任意$x=(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$, 存在$\delta_1>,\delta_2>0$使得$B_1(x_1,\delta_1)\subset E_1, B_2(x_2,\delta_2)\subset E_1$. 令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则$\delta>0$ 且对任意$y=(y_1,y_2)\in B(x,\delta)$ 有

$$\rho_1(y_1,x_1)\le\rho(y,x)<\delta\le\delta_1,\quad \rho_2(y_2,x_2)\le\rho(y,x)<\delta\le\delta_2.$$

因此$(y_1,y_2)\subset B_1(x_1,\delta_1)\times B_2(x_2,\delta_2)\subset E_1\times E_2$. 这表明$B(x,\delta)\subset E_1\times E_2$. 所以$E_1\times E_2$是$(X_1\times X_2,\rho)$的开集.

(b): “$\Longrightarrow$”：设$E_1 \times E_2$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$的闭集. 先证E_1是(X_1, ρ_1)的开集. 取定一个$x_2 \in E_2$. 则对任意序列$E_1 \ni x_{1,n} \to x_1 \in X_1\,(n \to \infty)$ 有$E_1 \times E_1 \ni (x_{1,n}, x_2) \to (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\,(n \to \infty)$. 因$E_1 \times E_2$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$的闭集, 故$(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ 从而有$x_1 \in E_1$. 所以E_1是(X_1, ρ_1)的闭集. 同理E_2是(X_2, ρ_2)的闭集.

“$\Longleftarrow$”：设E_1, E_2 分别是$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$的闭集. 则对任意收敛序列$E_1 \times E_2 \ni x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}) \to x = (x_1, x_2)\,(n \to \infty)$ 有$\rho_1(x_{1,n}, x_1) \to 0, \rho_2(x_{2,n}, x_2) \to 0\,(n \to \infty)$ 因此$x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ 从而有$x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. 所以$E_1 \times E_2$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$的闭集.

(c): 由集合的直径的定义和ρ, ρ_1, ρ_2的关系易见有

$$\mathrm{diam}(E_1), \mathrm{diam}(E_2) \le \mathrm{diam}(E_1 \times E_2) \le \mathrm{diam}(E_1) + \mathrm{diam}(E_2).$$

于是有: $E_1 \times E_1$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$的有界集$\Longleftrightarrow$ E_1, E_2 分别是$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$的有界集。

(d): “$\Longrightarrow$”：设$E_1 \times E_2$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$的完备集. 先证E_1是(X_1, ρ_1)的完备集. 取定一个$x_2 \in E_2$. 则对于E_1中的任一Cauchy 列$\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, 有

$$\rho((x_{1,m}, x_2), (x_{1,n}, x_2)) = \rho_1(x_{1,m}, x_{1,n}), \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

这表明$\{(x_{1,n}, x_2)\}_{n=1}^{\infty}$是$E_1 \times E_2$中的一个Cauchy列. 因此(由极限的唯一性) 存在$(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$使得$\rho((x_{1,n}, x_2), (x_1, x_2)) \to 0\,(n \to \infty)$. 这蕴含$x_1 \in E_1$ 且$\rho_1(x_{1,n}, x_1) \to 0\,(n \to \infty)$. 所以$E_1$是$(X_1, \rho_1)$的完备集. 同理$E_2$是$(X_2, \rho_2)$的完备集.

“$\Longleftarrow$”：设E_1, E_2 分别是$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$的完备集. 设$x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}) \subset E_1 \times E_2$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$中的Cauchy 列. 则由

$$\rho_1(x_{1,m}, x_{1,n}) \le \rho(x_m, x_n), \qquad \rho_2(x_{2,m}, x_{2,n}) \le \rho(x_m, x_n)$$

知$\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1, \{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset E_2$分别是$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$中的Cauchy 列. 因$E_1, E_2$都完备, 故存在$x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ 使得$\rho_1(x_{1,n}, x_1) \to 0$, $\rho_2(x_{1,n}, x_2) \to 0\,(n \to \infty)$ 从而对于$x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ 有

$$\rho(x_n, x) \le \rho_1(x_{1,n}, x_1) + \rho_2(x_{1,n}, x_2) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E_1 \times E_2$中收敛. 所以$E_1 \times E_2$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$的完备集.

(e): 因在度量空间中, 紧和列紧等价, 故我们从列紧的角度进行证明.

“$\Longrightarrow$”：设$E_1 \times E_2$ 是$(X_1 \times X_2, \rho)$ 的紧集. 先证E_1是(X_1, ρ_1)的紧集. 取定一个$x_2 \in E_2$. 则对于E_1中的任一序列$\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(x_{1,n}, x_2)\}_{n=1}^{\infty}$是$E_1 \times E_2$中的序列, 因此存在子列$\{(x_{1,n_k}, x_2)\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_1 \in E_1$使得$\rho((x_{1,n_k}, x_2), (x_1, x_2)) \to 0\,(k \to \infty)$. 于是由$\rho_1(x_{1,n_k}, x_1) = \rho((x_{1,n_k}, x_2), (x_1, x_2))$知$\rho_1(x_{1,n_k}, x_1) \to 0\,(k \to \infty)$. 这证明了$\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$有在$(X_1, \rho_1)$中收敛于$E_1$中的子列. 所以$E_1$是$(X_1, \rho_1)$的紧集. 同理$E_2$是$(X_2, \rho_2)$的紧集.

“$\Longleftarrow$”：设E_1, E_2分别是(X_1, ρ_1) 和(X_2, ρ_2) 的紧集. 对于任一序列$\{x_n = (x_{1,n}, x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1 \times E_2$, $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是E_1 和E_2中的序列. 因此存在子列$\{x_{1,n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_1 \in E_1$使得$\rho_1(x_{1,n_k}, x_1) \to 0\,(k \to \infty)$. 继而对于$\{x_{2,n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset E_2$, 存在子列$\{x_{2,n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$和$x_2 \in E_2$ 使得$\rho_2(x_{2,n_{k_j}}, x_2) \to 0\,(j \to \infty)$. 于是对于子列$x_{n_{k_j}} = (x_{1,n_{k_j}}, x_{2,n_{k_j}})$ 和$x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ 有$\rho(x_{n_{k_j}}, x) \le \rho_1(x_{1,n_{k_j}}, x_1) + \rho_2(x_{2,n_{k_j}}, x_2) \to 0\,(j \to \infty)$. 所以$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有在$(X_1 \times X_2, \rho)$中收敛于$E_1 \times E_2$中的子列. 所以$E_1 \times E_2$是紧集. $\square$

【作业题】以下设$X = (X, \rho)$为一度量空间.

1. 证明不等式:

$$|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \le \rho(x, a) + \rho(y, b) \qquad \forall\, x, y, a, b \in X.$$

2. 设F, H 是X 中的两个非空闭集且$F \cap H = \emptyset$. 证明存在开集$U \supset F$使得$U \cap H = \emptyset$.

3. (1) 设$E_\alpha \subset X, \alpha \in A$. 证明闭包运算的包含关系:

$$\bigcup_{\alpha \in A} \overline{E}_\alpha \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha}.$$

(2) 取$X = \mathbb{R}$并构造一列集合$E_n \subset \mathbb{R}$ 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n \ne \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}.$$

这个不等号说明什么问题?

4. 设U, V为X中的两个开集且$U \cap V = \emptyset$. 证明 $U \cap \overline{V} = \emptyset$, $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

5. 设$E \subset X$. 证明

(1) $\partial E \subset \overline{X \setminus E}$.　　(利用闭包的序列刻画)

(2) $X \setminus E^{\circ} = \overline{X \setminus E}$.

6. 设$E \subset X, \varepsilon > 0$. 试构作一开集$\Omega_\varepsilon \subset X$ 使得

$$\Omega_\varepsilon \supset E \quad \text{且} \quad \mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) \le \mathrm{diam}(E) + 2\varepsilon.$$

[考虑球的并]

7. (1) 设$X \ni x_n \to x \in X,\ X \ni y_n \to y\ (n \to \infty)$. 证明$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)\ (n \to \infty)$.

(2) 设$\emptyset \ne E \subset X$. 证明

$$\mathrm{diam}(E) = \mathrm{diam}(\overline{E}).$$

这特别蕴含 E 与其闭包 $\overline{E}$ 同为有界和无界.

8. 假设度量空间$X = (X, \rho)$是完备的, $K \subset X$. 证明：K是紧集当且仅当K完全有界而且是闭集.

9. 设 $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 X 中一族非空紧集, 满足所谓 "有限交" 条件: 对于脚标集 A 的任何有限子集 B, 都有 $\bigcap_{\alpha \in B} K_\alpha \ne \emptyset$. 证明 $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \ne \emptyset$.

10. 设$(\prod_{j=1}^n X_j, \rho)$为一个乘积度量空间, $E_j \subset X_j = (X_j, \rho_j), j = 1, 2, ..., n$. 则对于乘积集合$\prod_{j=1}^n E_j$ 有

$$\overline{\prod_{j=1}^n E_j} = \prod_{j=1}^n \overline{E_j}$$

其中左边是$(\prod_{j=1}^n X_j, \rho)$中的闭包, 右边$\overline{E_j}$是$(X_j, \rho_j)$中的闭包, $j = 1, 2, ..., n$.

[利用闭包的序列刻画.]

11. 设$(\prod_{j=1}^n X_j, \varrho)$ 是(X_j, ρ_j)乘积度量空间, 其中$\varrho = \varrho_\infty$ 或$\varrho = \varrho_p\ (1 \le p < +\infty)$,

$$\varrho_\infty(x, y) = \max_{1 \le j \le n} \rho_j(x_j, y_j), \qquad \varrho_p(x, y) = \Big(\sum_{j=1}^n \rho_j(x_j, y_j)^p\Big)^{1/p},$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \prod_{j=1}^n X_j$.

证明$\varrho_\infty, \varrho_p$ 都是$\prod_{j=1}^n X_j$上的度量, 并且对任意$x, y \in \prod_{j=1}^n X_j$ 有

$$\varrho_\infty(x, y) \le \varrho_p(x, y) \le \varrho_1(x, y), \qquad \varrho_p(x, y) \le n^{1/p} \varrho_\infty(x, y),$$

$$\lim_{p \to +\infty} \varrho_p(x, y) = \varrho_\infty(x, y).$$

[在证明ϱ_p满足三角不等式时要用到上学期学习的Minkovski 不等式, 即一种三角不等式: 对任意$a_j, b_j \ge 0\,(j=1,2,...,n)$ 有

$$\Big(\sum_{j=1}^n (a_j+b_j)^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{j=1}^n (a_j)^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^n (b_j)^p\Big)^{1/p}.$$

在证明$\varrho_p(x,y) \le \varrho_1(x,y)$ 要用到**Jensen 不等式:** 任意$a_j \ge 0\,(j=1,2,...,n)$ 有

$$\Big(\sum_{j=1}^n (a_j)^p\Big)^{1/p} \le \sum_{j=1}^n a_j\,.$$

为证这一不等式可先假定$A := \sum_{j=1}^n a_j = 1$; 对一般情形, 利用齐次性.]

§7.2 欧空间$\mathbb{R}^n$, 赋范线性空间

数学分析中常用的度量空间是欧空间和赋范线性空间以及这些空间中的若干子集. 欧空间是欧几里德空间的简称, 它是最常用的有限维赋范线性空间. 首先给出赋范线性空间的定义.

【定义(赋范线性空间)】 设X 是一个实或复的线性空间 (即X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间其中$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$). 映射

$$\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$$

称为X上的一个范数如果它满足下列三条:

(i) 正定性: 对任意$x\in X$都有$\|x\|\ge 0$ 并且$\|x\|=0 \iff x=0$.

(ii) 正齐次性: 对任意$x\in X$和任意$\lambda\in\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$ 都有$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$.

(iii) 三角不等式: 对任意$x,y\in X$都有

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|.$$

如果$\|\cdot\|$是X上的一个范数, 则称$(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间.

设$(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间. 则在X上有一个自然的度量ρ, 其定义为

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,\qquad x,y\in X.$$

在这个自然的度量下, 赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$ 便是一个度量空间. 当我们把赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$当做度量空间时，就默认其度量是由范数$\|\cdot\|$诱导的度量$\rho(\cdot,\cdot)=\|\cdot-\cdot\|$. 进一步, 如果按照度量$\rho(\cdot,\cdot)=\|\cdot-\cdot\|$, X作为度量空间是完备的, 则称$(X,\|\cdot\|)$是一个完备的赋范线性空间. 完备的赋范线性空间也叫做**Banach 空间**.[2] □

【注】 由范数的三角不等式知

$$\|x-z\|=\|x-y+y-z\|\le\|x-y\|+\|y-z\|\qquad\forall\, x,y,z\in X$$

$$\text{即}\qquad \rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)\qquad\forall\, x,y,z\in X.$$

因此ρ 确实是X上的度量.

[2]S.Banach (巴拿赫), 1892.3.30–1945.8.31, 波兰数学家, 泛函分析的开创者之一。数学分析中许多常用的空间都是Banach 空间及其推广，它们有许多重要应用。大多数Banach空间是无穷维空间，可看成通常向量空间的无穷维推广。

【欧空间$\mathbb{R}^n$】 欧空间$\mathbb{R}^n$作为点集是一维实空间$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ 的 n 次笛卡尔积:

$$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}\qquad(n\text{ 个因子})$$

$\mathbb{R}^n$ 中的元素, 也称为向量或点, 记作 x,y,z 等, 按习惯表示为

$$x=(x_1,x_2,...,x_n),\quad y=(y_1,y_2,...,y_n),\quad z=(z_1,z_2,...,z_n),\quad \text{etc.}$$

回忆: 有限个 $\mathbb{R}^n$ 的笛卡尔积仍具有 $\mathbb{R}^n$ 的形式, 例如

$$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^{n+m},\quad \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r=\mathbb{R}^{p+q+r}.$$

- **$\mathbb{R}^n$ 的加法和数乘 (二元运算):**

$$(x,y)\mapsto x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n).$$

$$(\alpha,x)\mapsto \alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n).$$

由此有

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,...,\alpha x_n+\beta y_n).$$

一般地, 对于

$$x_k=(x_{k,1},x_{k,2},...,x_{k,n})\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha_k\in\mathbb{R},\quad k=1,2,...,m$$

有

$$\sum_{k=1}^m\alpha_kx_k=\Big(\sum_{k=1}^m\alpha_kx_{k,1},\ \sum_{k=1}^m\alpha_kx_{k,2},\ \dots,\ \sum_{k=1}^m\alpha_kx_{k,n}\Big).$$

- **$\mathbb{R}^n$ 中的零元和负元**

$$0=(0,0,...,0)$$

$$x\mapsto -x=(-1)x=(-x_1,-x_2,...,-x_n).$$

因此 $\mathbb{R}^n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

【注】加法、数乘, 以及下面介绍的内积、范数、距离等等的运算结果都是唯一的. 零元也称为零向量或原点, 它也是唯一的. 负元 $-x$ 也是由 x 唯一确定的, 等等. 一般地, 如上面所说, 这些运算作为相应的映射的值, 当然是由自变量唯一确定的.

- **$\mathbb{R}^n$ 上的内积与欧氏范数**:

$$x\cdot y=\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

$$|x| = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}.$$

说明: $|\cdot|$是欧氏范数的标准记号. 范数$|x|$ 也称为向量x的长度.

- **内积运算**:

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle.$$

- **内积不等式 (Cauchy不等式)**:

$$|\langle x, y\rangle| \le |x||y|.$$

- **非零向量的夹角**: 设x, y均非零, 则称由余弦

$$\cos\theta = \left\langle \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right\rangle = \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

确定的θ为x 与y的夹角.

- **垂直与共线**:

$$x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0; \qquad x \text{ 与 } y \text{ 共线} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ x = \lambda y \ \text{ 或 } \ y = \lambda x.$$

说明: 欧氏范数$|\cdot|$ 确实是范数, 即它具有范数的三个规定性质

(i) 正定性:

$$|x| \ge 0; \qquad |x| = 0 \iff x = 0.$$

(ii) 正齐次性:

$$|\alpha x| = |\alpha||x|, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(iii) 三角不等式:

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

一般地有多角不等式（借助归纳法)

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

【证】正定性和正齐次性可由欧氏范数的定义直接推出. 下证三角不等式. 由$|\cdot|$的定义、内积运算和Cauchy不等式有

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$= |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

开方即得三角不等式. $\square$

- **欧氏度量(距离)：**我们称由欧氏范数$|\cdot|$ 诱导的度量ρ, 即

$$\rho(x,y)=|x-y|,\qquad x,y\in\mathbb{R}^n$$

为欧空间$\mathbb{R}|^n$上的欧氏度量或欧氏距离.

- $\mathbb{R}^n$ **的一组标准正交基**:

$$\mathbf{e}_1=(1,0,...,0),\quad \mathbf{e}_2=(0,1,0,...,0),\ \ ...,\quad \ \mathbf{e}_n=(0,0,...,0,1).$$

$$\Longrightarrow\quad \langle\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\rangle=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,...,n.$$

由此易见 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n$ 线性无关, 且

$$x=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\qquad \forall\, x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

因此 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基. 据此可知维数$\dim(\mathbb{R}^n)=n$.

• 把 $\mathbb{R}^n$ 和其上的欧氏范数 $|\cdot|$ 放在一起, 我们称 $(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$ 为 n 维欧空间. 同样, 把 $\mathbb{R}^n$ 和其上的欧氏度量 $\rho(\cdot,\cdot)=|\cdot-\cdot|$ 放在一起, 我们称 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 为 n 维欧空间. 由于欧氏范数 $|\cdot|$ 可以由内积导出, 即$|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, 人们也把 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称为 n 维欧空间. 但这两者是等价的, 事实上内积也可由欧氏范数导出:

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\Big(|x+y|^2-|x-y|^2\Big).$$

为记号简便, 通常直接称 $\mathbb{R}^n$ 为欧空间, 即

$$\mathbb{R}^n=(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)=(\mathbb{R}^n,|\cdot|)=(\mathbb{R}^n,\rho),\quad \rho(x,y)=|x-y|.$$

前置词“欧”主要强调内积、夹角、距离. 如上所见, 有了距离即度量, 即可建立邻域、收敛等概念. 在最基本的性质上, 这些与一维情形相同, 但是在维数 $n\geq 2$ 时, $\mathbb{R}^n$ 不是全序集；$\mathbb{R}^n$ 中的点或向量的运动是多方向的, 这些与一维有本质区别, 复杂程度也随之增加.

• **关于闭球：** 由$\mathbb{R}^n$的线性结构和度量的定义不难看出, 在$\mathbb{R}^n$中(同样在任何赋范线性空间中), 闭球等于相应的开球的闭包, 即

$$\overline{B(a,r)}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-a|\leq r\}=:\overline{B}(a,r)\qquad \forall\, a\in\mathbb{R}^n, r>0.$$

这是因为对任意$x \in \overline{B}(a,r)$ 即满足$|x-a| \le r$者, 令$x_k = (1-\frac{1}{k})x + \frac{1}{k}a$, 则$x_k \in \mathbb{R}^n$且$|x_k - a| = (1-\frac{1}{k})|x-a| \le (1-\frac{1}{k})r < r, k = 1,2,3,....$ 因此$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B(a,r)$. 而$|x_k - x| = \frac{1}{k}|a-x| \to 0\,(k\to\infty)$, 于是$x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in \overline{B(a,r)}$. 这就证明了$\overline{B}(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. 另一方面我们前面已证明了对任何度量空间都有$\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$. 所以对欧空间有$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$. $\Box$

关于欧空间$\mathbb{R}^n$, 我们第一个命题是

【命题7.15.】欧空间$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \rho)$ 是完备的度量空间, 其中度量为$\rho(x,y) = |x-y|$.

【证】因$\mathbb{R}^n = \mathrm{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (n个因子), 而在实数理论中已证明$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1 = (\mathbb{R}^1, \rho_1)$是完备的, 其中$\rho_1(x,y) = |x-y|$, 故由乘积度量空间的完备性定理知$\mathbb{R}^n$是完备的. $\Box$

因为欧空间$\mathbb{R}^n$是度量空间, 故前面的所有概念和结果(开集、闭集、开球、闭球、聚点、孤立点、边界点、闭包、有界集、集合的直径、稠密集、序列的收敛、Cauchy列、完备性、完全有界、紧性与列紧性、紧集套定理、乘积集合及其拓扑性质, 等等) 对于$\mathbb{R}^n$都适用都成立. 例如$\mathbb{R}^n$中的向量的收敛等价于按坐标收敛: 设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ 收敛 } \Longleftrightarrow \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ 的每个坐标序列收敛.}$$

也即如写$x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{n,k}), a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, 则有

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - a| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |x_{j,k} - a_j| = 0, \qquad j = 1,2,...,n.$$

【例: 有理点集$\mathbb{Q}^n$在$\mathbb{R}^n$中稠密】这就是说对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $q \in \mathbb{Q}^n$ s.t. $|q-x| < \varepsilon$. 等价地, 存在有理点列 $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}^n$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} |q_k - x| = 0$.

事实上,如写 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, 则由有理数的稠密性, 对每个实数 x_j, 存在有理数列 $\{q_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $|q_{j,k} - x_j| \to 0\,(k\to\infty)$. 令 $q_k = (q_{1,k}, q_{2,k}, ..., q_{n,k})$. 则 $q_k \in \mathbb{Q}^n$ 且 $|q_k - x| \le \sum_{j=1}^{n} |q_{j,k} - x_j| \to 0\,(k\to\infty)$. $\Box$

由于欧空间$\mathbb{R}^n$是线性空间, 故其中的点(即向量)之间可以做加法和数乘运算, 也即我们可以研究$\mathbb{R}^n$中的无穷级数.

【**定义(向量值级数)**】对于$\mathbb{R}^n$中的任一序列$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, 称$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 是一个以a_k 为通项的**形式**向量值级数.

进一步, 若部分和序列$\{\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\}_{N=1}^{\infty}$ 收敛, 则称向量值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$收敛并定义其值为此部分和的极限, 即定义

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k.$$

再进一步, 若正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$收敛, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

则称向量值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛. $\square$

将向量a_k写成坐标形式$a_k = (a_{1,k}, a_{2,k}, ..., a_{n,k})$, 则由向量的运算有

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N}(a_{1,k}, a_{2,k},\ ...,\ a_{n,k}) = \Big(\sum_{k=1}^{N} a_{1,k},\ \sum_{k=1}^{N} a_{2,k},\ ...,\ \sum_{k=1}^{N} a_{n,k}\Big).$$

由$\mathbb{R}^m$中序列的收敛等价于按坐标收敛可知

$$\text{向量值级数}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 对收敛} \iff \text{数值级数}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} \text{ 收敛},\ j = 1, 2, ..., n.$$

而当收敛时有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k},\ ...,\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\Big).$$

对于二维向量, 即$n = 2$的情形, 以上相当于说: 复数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + \mathrm{i}b_k)$ 收敛当且仅当其实部级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 虚部级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛. 而当收敛时有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + \mathrm{i}b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

关于向量值级数的收敛性, 最常用的是绝对收敛定理:

【**命题7.16.**】若$\mathbb{R}^n$中的向量值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛, 则它必收敛且

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

并且$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$在任意重排下其和不变, 即对于$\mathbb{N}$的任意重排$\mathbb{N}=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),...\}$ 都有$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ 绝对收敛且

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

【证】写$a_k=(a_{1,k},a_{2,k},...,a_{n,k})$. 则由$|a_{j,k}|\le|a_k|$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{j,k}|\le\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<+\infty,\quad j=1,2,...,n.$$

因此数值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$ 绝对收敛从而收敛. 于是有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k},\ ...,\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\Big)\quad \text{收敛.}$$

同时由$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$ 绝对收敛还知对于$\mathbb{N}$的任意重排$\mathbb{N}=\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),...\}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{j,\sigma(k)}$ 绝对收敛且其和不变:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,\sigma(k)}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k},\quad j=1,2,...,n$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}=\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,\sigma(k)},\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,\sigma(k)},\ ...,\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,\sigma(k)}\Big)$$
$$=\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k},\ ...,\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

最后令

$$A=\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

则由收敛的定义有

$$\lim_{N\to\infty}\Big|\sum_{k=1}^{N} a_k-A\Big|=0$$

而由向量的范数不等式有

$$\Big|\sum_{k=1}^{N} a_k\Big|\le\sum_{k=1}^{N}|a_k|\le\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|,\quad N=1,2,3,\dots.$$

再由

$$\Big||A|-\Big|\sum_{k=1}^{N} a_k\Big|\Big|\le\Big|A-\sum_{k=1}^{N} a_k\Big|\to 0\quad(N\to\infty)$$

即得

$$|A| = \lim_{N\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{N} a_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \qquad \square$$

【$\mathbb{R}^n$中的区间和区间的分划】

首先介绍关于集合的并集之间的乘积公式

【命题7.17(并集的乘积公式)】设$E_{i,j}$ 为一些集合, $j = 1, 2, ..., m_i$; $i = 1, 2, ..., n$. 则有

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_1} E_{1,j}\Big) \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_2} E_{2,j}\Big) \times \cdots \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_n} E_{n,j}\Big) = \bigcup_{j_1=1}^{m_1}\bigcup_{j_2=1}^{m_2}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{m_n} E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{n,j_n}.$$

【证】用集合相等的定义验证：

$$\begin{aligned}
&\forall\, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{m_1} E_{1,j}\Big) \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_2} E_{2,j}\Big) \times \cdots \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_n} E_{n,j}\Big)\\
&\Longrightarrow \text{ 存在 } j_1 \in \{1, 2, ..., m_1\},\ j_2 \in \{1, 2, ..., m_2\}, ..., j_n \in \{1, 2, ..., m_n\}\\
&\text{使得 } \ x_1 \in E_{1,j_1},\ x_2 \in E_{2,j_2},\ \ ...,\ \ x_n \in E_{n,j_n}\\
&\Longrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{n,j_n}\\
&\subset \bigcup_{j_1=1}^{m_1}\bigcup_{j_2=1}^{m_2}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{m_n} E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{n,j_n}.
\end{aligned}$$

所以

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_1} E_{1,j}\Big) \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_2} E_{2,j}\Big) \times \cdots \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_n} E_{n,j}\Big) \subset \bigcup_{j_1=1}^{m_1}\bigcup_{j_2=1}^{m_2}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{m_n} E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{n,j_n}\,.$$

反之易见对任意$j_1 \in \{1, 2, ..., m_1\}$, $j_2 \in \{1, 2, ..., m_2\}, ..., j_n \in \{1, 2, ..., m_n\}$ 有

$$E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{n,j_n} \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{m_1} E_{1,j}\Big) \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_2} E_{2,j}\Big) \times \cdots \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_n} E_{n,j}\Big).$$

因此

$$\bigcup_{j_1=1}^{m_1}\bigcup_{j_2=1}^{m_2}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{m_n} E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{n,j_n} \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{m_1} E_{1,j}\Big) \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_2} E_{2,j}\Big) \times \cdots \times \Big(\bigcup_{j=1}^{m_n} E_{n,j}\Big).$$

所以两集合相等. $\square$

【**定义($\mathbb{R}^n$中的有界区间)**】$\mathbb{R}^n$ 中的n维有界区间I 是n 个一维有界区间的乘积, 即

$$I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]\qquad (\text{有界闭区间}),$$

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)=\prod_{i=1}^n(a_i,b_i)\qquad (\text{有界开区间}),$$

$$I=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots\times[a_n,b_n)=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i)\qquad (\text{左闭右开的有界区间})$$

$$I=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_n,b_n]=\prod_{i=1}^n(a_i,b_i]\qquad (\text{左开右闭的有界区间})$$

等等. 每个一维区间$[a_i,b_i],(a_i,b_i),[a_i,b_i),(a_i,b_i]$ 称为区间I 的边或棱. 由I 的边的左、右端点构成的向量$(a_1,a_2,...,a_n),(b_1,b_2,...,b_n)$ 称为区间I 的左、右端点. $\square$

• **区间的内部, 闭包和边界.** 设$n(\ge 2)$维有界区间I 的左、右端点为$(a_1,a_2,...,a_n)$, $(b_1,b_2,...,b_n)$. 则易见

$$I^\circ=\prod_{i=1}^n(a_i,b_i),\quad \bar{I}=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]$$

因此I的边界为

$$\partial I=\bar{I}\setminus I^\circ=\bigcup_{k=1}^n\left(\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]\Big|_{\text{其中}[a_k,b_k]\text{被换成二元素集}\{a_k,b_k\}}\right).$$

它说明边界∂I是由$2n$个$n-1$维有界闭区间组成的. 建议用$n=2,3$的情形(即平面矩形和三维长方体)检验一下.

• **区间的直径.** 不难看出n维有界区间I 的直径等于I 的左、右端点$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ 的距离, 也即等于I 的对角线之长：

$$\mathrm{diam}(I)=\mathrm{diam}(I^\circ)=\mathrm{diam}(\bar{I})=\sqrt{\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)^2}=|\mathbf{b}-\mathbf{a}|.$$

由此得到常用的估计式

$$\mathrm{diam}(I)\le\sqrt{n}\cdot\max_{1\le i\le n}(b_i-a_i).$$

• **区间的分划.** 设I 是以$(a_1,a_2,...,a_n),(b_1,b_2,...,b_n)$ 为左、右端点的有界区间. 给定任意$\delta>0$ 我们对每个一维区间$[a_i,b_i]$ 做分划：

$$a_i=a_{i,0}<a_{i,1}<a_{i,2}<\cdots<a_{i,m_i}=b_i\quad \text{满足}\quad a_{i,j}-a_{i,j-1}<\frac{\delta}{\sqrt{n}},\ j=1,2,...,m_i\,.$$

则有

$$[a_i,b_i]=\bigcup_{j=1}^{m_i}[a_{i,j-1},\,a_{i,j}]\,,\quad [a_i,b_i)=\bigcup_{j=1}^{m_i}[a_{i,j-1},\,a_{i,j})\,,\quad \text{etc.}$$

从而由并集的乘积公式得到I 的一个分划:

$$I=\bigcup_{j_1=1}^{m_1}\bigcup_{j_2=1}^{m_2}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{m_n}I_{j_1,j_2,...,j_n}$$

其中

$$I_{j_1,j_2,...,j_n}=\prod_{i=1}^{n}[a_{i,j_i-1},\,a_{i,j_i}]\quad\text{或}\quad=\prod_{i=1}^{n}[a_{i,j_i-1},\,a_{i,j_i})\qquad\text{etc.}$$

由于$I_{j_1,j_2,...,j_n}$的每条棱的长度$<\delta/\sqrt{n}$, 故有

$$\mathrm{diam}(I_{j_1,j_2,...,j_n})<\sqrt{n}\cdot\frac{\delta}{\sqrt{n}}=\delta.$$

这表明I 可以被分解成有限多个直径$<\delta$的区间的并.

从上一节我们知道“完全有界”蕴含“有界”. 从上面关于区间的划分大家或许看到, 在欧空间$\mathbb{R}^n$中, 反向也对, 即“有界”也是“完全有界”. 这是有限维的一个特征.

【命题7.18.】在欧空间$\mathbb{R}^n$中, 有界集合也是完全有界的.

【证】设$E\subset\mathbb{R}^n$ 有界. 不妨设E非空且不是单点集. 取$a=(a_1,a_2,...,a_n)\in E$, 则$E\subset I:=\prod_{i=1}^n[a_i-L,a_i+L]$, 其中$L=\mathrm{diam}(E)>0$. 对任意$\varepsilon>0$, 将$I$ 分成有限个直径$<\varepsilon$的区间$I_1,I_2,...,I_N$ 之并: $I=\bigcup_{k=1}^N I_k$,. 于是有

$$E=\bigcup_{k=1}^{N}E\cap I_k,\qquad \mathrm{diam}(I_k)<\varepsilon,\quad k=1,2,...,N.$$

重新编号后可以假设每个$E\cap I_k\neq\emptyset$. 取$x_k\in E\cap I_k$, 则有

$$E\cap I_k\subset B(x_k,\varepsilon),\quad k=1,2,...,N;\qquad E\subset\bigcup_{k=1}^{N}B(x_k,\varepsilon).$$

所以$\{x_1,x_2,...,x_N\}$ 是E的一个有限ε-网. 因此E是完全有界的. $\square$

根据这一性质和上节关于紧集的刻画, 立刻得到

【**定理7.19($\mathbb{R}^n$中紧集的刻画)**】设$K\subset\mathbb{R}^n$. 则以下(a),(b),(c) 彼此等价:

(a) K是紧集.

(b) K是列紧集.

(c) K是有界闭集.

【证】根据上节**定理7.11(紧集的刻画)**, 只需证明

在$\mathbb{R}^n$中: K是有界闭集$\Longleftrightarrow$ K完备且完全有界.

假设K是有界闭集, 则由上一命题知K 是完全有界集, 又因$\mathbb{R}^n$是完备的度量空间, 故其中的闭集必是完备集, 因此K是完备集.

反之假设K完备且完全有界, 则由度量空间中的完备集必是闭集知K是闭集, 再由完全有界蕴含有界知K有界. $\Box$

应用上述定理立刻得到常用定理—

【**定理7.20(Weierstrass 极限点定理)**】$\mathbb{R}^n$中的任一有界序列必有收敛子列.

详细: 若序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^n$有界, 则存在子列$\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 和$x_0\in\mathbb{R}^n$ 使得$x_{k_j}\to x_0\,(j\to\infty)$ 即$|x_{k_j}-x_0|\to 0\,(j\to\infty)$.

【证】因$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$有界, 故对于充分大的$R>0$ 有$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset[-R,R]^n$. 因$[-R,R]^n$是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, 故由上述定理知$[-R,R]^n$是列紧集. 于是由$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset[-R,R]^n$ 知存在子列$\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 和$x_0\in[-R,R]^n$ 使得$x_{k_j}\to x_0\,(j\to\infty)$. $\Box$

作业题

1. 设$(X,\|\cdot\|)$ 为一实(或复)赋范线性空间. 证明范数函数 $x\mapsto\|x\|$ 是连续的:

$$\Big|\|x\|-\|y\|\Big|\le\|x-y\|\qquad\forall\,x,y\in X.$$

此外证明

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m}x_k\Big\|\le\sum_{k=1}^{m}\|x_k\|\qquad\forall\,x_k\in X,\,k=1,2,...,m.$$

2. 设X 为一实(或复)赋范线性空间, 设$\|\cdot\|,\|\cdot\|_*$是X 上的两个范数. 我们称$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_*$等价如果存在常数$0<a<b<+\infty$ 使得

$$a\|x\|\le\|x\|_*\le b\|x\|\qquad\forall\,x\in X.$$

现在设$X=\mathbb{R}^n$. 对于 $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 令

$$1\le p<+\infty: \qquad \|x\|_p=\Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p} \qquad .$$

$$p=\infty: \qquad \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i| \qquad .$$

(1) 证明 $\|\cdot\|_p\,(1\le p\le\infty)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数. （特别 $\|\cdot\|_2=|\cdot|$ 即为欧氏范数).

(2) 证明若 $1<p<+\infty, 1/p+1/q=1$, 则

$$\|x\|_p\le\|x\|_1\le n^{1/q}\|x\|_p \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

若 $p=\infty$ 则

$$\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

此外给出 $\|x\|_p\,(1\le p\le\infty)$ 与欧氏范数 $|x|=\|x\|_2$ 的互相控制关系.

本题不仅说明这些范数是彼此等价的, 而且给出了控制常数.

3. 设$\|\cdot\|$ 为实(或复)赋范线性空间X上的一个范数. 证明$\frac{\|\cdot\|}{1+\|\cdot\|}$ 不是X 上的范数, 但是由下式定义的 ρ,

$$\rho(x,y):=\frac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}, \qquad x,y\in X$$

是 X 上的一个度量. [提示：先证明函数 $t\mapsto\frac{t}{1+t}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数].

4. 设 $\rho_k, k=1,2,3,...,$ 是一个度量空间 X 上的一列度量证明

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)} \qquad \text{也是 } X \text{ 上的度量.}$$

5.关于直径:

(1) 设$K\subset\mathbb{R}^n$为一非空的紧集. 证明存在$a,b\in K$使得$\mathrm{diam}(K)=|a-b|$.

[建议利用乘积集合$K\times K$的紧性, 这使得对(a_n,b_n)只需抽子列一次, 否则将依次抽子列$a_n,a_{n_k},b_{n_{k_j}}$ 即抽取两次. 当然这都是非本质的. 不过考虑乘积集合$K\times K$ 比较有趣.]

(2) 由(1) 和等式$\mathrm{diam}(E)=\mathrm{diam}(\overline{E})$ 推出：对任意非空的有界集$E\subset\mathbb{R}^n$, 存在$a,b\in\overline{E}$使得$\mathrm{diam}(E)=|a-b|$.

(3) 设 $E_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ 非空, $i = 1, 2, ..., N$. 证明

$$\operatorname{diam}\Big(\prod_{i=1}^{N} E_i\Big) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} [\operatorname{diam}(E_i)]^2}.$$

[建议: 证明可归结为等式两端皆为有限的情形, 因为乘积无界等价于某个因子无界. 然后利用闭包的性质和(1)或(2)的结果.]

(4) 设$a_i < b_i, b_i - a_i = \lambda, i = 1, 2, ..., n$. 证明

$$\operatorname{diam}(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]) = \sqrt{n}\,\lambda.$$

6. (1) 设$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 是$\mathbb{R}^n$中两个收敛的向量值级数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 证明向量值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ 也收敛且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

(2) 设向量值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 和正数列$\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$|a_k| \le M_k, \quad k = 1, 2, 3, ...; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$绝对收敛.

(3) 设$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 是$\mathbb{R}^n$中两个绝对收敛的向量值级数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 证明向量值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ 也绝对收敛且

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)\Big| \le |\alpha| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |\beta| \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

§7.3 连通性, 连通集与道路连通集

物质的连通性是指在其中可以由此及彼且过程不间断, 因此属于连续性概念. 本节为叙述简便, 我们以欧空间$\mathbb{R}^n$为例学习度量空间中集合的连通概念和基本性质.

【定义(连通集)】设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 如果对于 E 的**任意分割:**

$$E = A \cup B, \quad A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset$$

都有 $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ 或 $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ （也即 A, B 能在某点 “粘” 起来), 则称 E 是一个连通集, 或称 E 是连通的, 或 E 连通. 此外规定: 单点集是连通集. □

由连通集的定义可知, E不是连通集$\Longleftrightarrow$ 存在 E 的一个分割 $E = A \cup B$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$, 使得 $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (即 A, B 在任意点都不能相 “粘”, 即 A, B 是严格分离的),

下面命题描述了开集和闭集的连通性特征.

【命题7.21.】设$E \subset \mathbb{R}^n$ 非空.

(a) 若E是开集, 则 E连通 $\Longleftrightarrow$ E不能被分解为两个非空的不相交的开集之并.

(b) 若E是闭集, 则 E连通 $\Longleftrightarrow$ E不能被分解为两个非空的不相交的闭集之并.

【证】(a): 设E为开集. 等价地来证明

E不连通$\Longleftrightarrow$ E可以被分解为两个非空的不相交的开集之并.

假设 E 不连通. 则存在 E 的一个分割 $E = A \cup B$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$, 使得 $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. 我们来证明 A, B 都是开集. 由 $\overline{A} \cap B = \emptyset$ 知 $B \subset (\overline{A})^c$ 从而 $B \subset E \cap (\overline{A})^c$. 对任意 $x \in B$, 有 $x \in E \cap (\overline{A})^c$. 因后者为开集,故存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x, \delta) \subset E \cap (\overline{A})^c$. 这蕴含 $B(x, \delta) \cap \overline{A} = \emptyset$ 从而更有 $B(x, \delta) \cap A = \emptyset$. 但 $B(x, \delta) \subset E = A \cup B$, 故必有 $B(x, \delta) \subset B$. 所以 B 是开集. 因 A, B 地位完全对称, 同理可证 A 也是开集.

反之设 E 可分解为 $E = A \cup B$ 其中 A, B 为非空开集且 $A \cap B = \emptyset$. 这蕴含 $A \subset B^c$. 由闭包运算和 B^c 是闭集,有 $\overline{A} \subset \overline{B^c} = B^c$. 因此 $\overline{A} \cap B = \emptyset$. 同理有 $A \cap \overline{B} = \emptyset$. 所以 E 不连通.

(b): 设E为闭集. 等价地来证明

$$E\text{不连通} \Longleftrightarrow E\text{可以被分解为两个非空的不相交的闭集之并}.$$

假设 E 不连通. 则存在 E 的一个分割 $E = A\cup B$, $A\neq\emptyset, B\neq\emptyset, A\cap B=\emptyset$, 使得 $\overline{A}\cap B = A\cap\overline{B}=\emptyset$. 来证明 A, B 都是闭集, 即 $A=\overline{A}, B=\overline{B}$. 由闭包运算和 E 为闭集我们有 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}=\overline{E}=E=A\cup B$. 因此

$$\overline{A}\cup\overline{B}=A\cup B.$$

由此和 $\overline{A}\cap B=\emptyset$ 可见必有 $\overline{A}\subset A$ 从而有 $\overline{A}=A$. 同样, 由 $A\cap\overline{B}=\emptyset$ 可得 $\overline{B}=B$. 所以 A,B 都是闭集.

反之设 E 可分解为 $E=A\cup B$ 其中 A,B 为非空闭集且 $A\cap B=\emptyset$. 则由 $A=\overline{A}, B=\overline{B}$ 便知 $\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=A\cap B=\emptyset$. 所以 E 不连通. $\square$

【例】设 $[a,b]$ 为 $\mathbb{R}$ 中有界闭区间. 则 $[a,b]$ 是连通集.

【证】假设 $[a,b]$ 不连通. 则由**命题7.21** 存在两个非空的不相交的闭集 $A,B\subset[a,b]$ 使得 $[a,b]=A\cup B$. 考虑

$$\delta := \inf_{x\in A, y\in B}|x-y|.$$

由下确界的定义知对任意$k\in\mathbb{N}$ 存在$x_k\in A, y_k\in B$ 使得$\delta\le|x_k-y_k|<\delta+1/k$. 因 A,B 是$\mathbb{R}$中的有界闭集即$\mathbb{R}$中的紧集, 故$A\times B$ 是$\mathbb{R}^2$中的紧集. 因$\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty}\subset A\times B$, 故存在子列$\{(x_{k_j},y_{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ 和$(x_0,y_0)\in A\times B$ 使得$(x_{k_j},y_{k_j})\to(x_0,y_0)$ 即$x_{k_j}\to x_0\in A$, $y_{k_j}\to y_0\in B\,(j\to\infty)$. 于是得到 (注意$A\cap B=\emptyset$ 蕴含$|x_0-y_0|>0$)

$$\delta=\lim_{k\to\infty}|x_k-y_k|=\lim_{j\to\infty}|x_{k_j}-y_{k_j}|=|x_0-y_0|>0$$

因$[a,b]$ 是区间且$x_0,y_0\in[a,b]$, 故$\frac{x_0+y_0}{2}\in[a,b]=A\cup B$. 不妨设 $\frac{x_0+y_0}{2}\in A$. 则有

$$\delta\le\left|\frac{x_0+y_0}{2}-y_0\right|=\frac{1}{2}|x_0-y_0|=\frac{\delta}{2}.$$

这矛盾于 $0<\delta<+\infty$. 这矛盾证明了$[a,b]$ 是连通集. $\square$

【命题7.22.】连通集的闭包也是连通集. 反之未必.

【证】设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为连通集. 考察闭包 $\overline{E}$ 的任一分割: $\overline{E}=A\cup B$, $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, $A\cap B=\emptyset$. 由 $E\subset\overline{E}$ 有 $E=(E\cap A)\cup(E\cap B)$. 若 $E\cap A=\emptyset$, 则 $E=E\cap B\subset B$ 从

而由闭包的单调性有 $\overline{E} \subset \overline{B}$ 进而 $\Longrightarrow A \subset \overline{B} \Longrightarrow A \cap \overline{B} = A \neq \emptyset$. 同理若 $E \cap B = \emptyset$, 则 $\overline{A} \cap B = B \neq \emptyset$.

下设 $E \cap A \neq \emptyset, E \cap B \neq \emptyset$. 则由 E 连通可知 $\overline{E \cap A} \cap (E \cap B)$, $(E \cap A) \cap \overline{E \cap B}$ 必有一个非空. 例如设 $\overline{E \cap A} \cap (E \cap B) \neq \emptyset$. 则由 $\overline{E \cap A} \cap (E \cap B) \subset \overline{A} \cap B$ 知 $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. 所以 $\overline{E}$ 是连通集.

$\overline{E}$ 连通而 E 不连通的例子很多, 例如取 $E = [-1, 0) \cup (0, 1]$. 则 $\overline{E} = [-1, 1]$ 连通. 但通过取 E 的分割集 $A = [-1, 0), B = (0, 1]$ 立即看出 E 不连通. $\square$

下面讲一个例子, 它在直观上是比较明显的, 对以后某些问题的研究也有用.

【例】 设$E, F \subset \mathbb{R}^n$且$F$为连通集. 则有蕴含关系:

$$\text{若} \, F \cap \partial E = \emptyset, \text{则或者} \, F \subset E \ \ \text{或者} \ \ F \subset E^c.$$

或等价地,

$$\text{若} \, F \cap E^c \neq \emptyset \ \text{且} \, F \cap E \neq \emptyset, \text{则} \ \ F \cap \partial E \neq \emptyset.$$

【证】 设$F \cap E^c \neq \emptyset$ 且$F \cap E \neq \emptyset$. 考虑分解$F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$. 这是一个非空不交并. 因$F$ 连通, 故或者$\overline{F \cap E} \cap (F \cap E^c) \neq \emptyset$ 或者$(F \cap E) \cap \overline{F \cap E^c} \neq \emptyset$.

假设$\overline{F \cap E} \cap (F \cap E^c) \neq \emptyset$. 取$x_0 \in \overline{F \cap E} \cap (F \cap E^c) \neq \emptyset$, 则存在$x_n \in F \cap E \, (n = 1, 2, 3, ...)$ 使得$x_n \to x_0 \, (n \to \infty)$. 由此知对任意$\varepsilon > 0$ 有$B(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ 且$B(x_0, \varepsilon) \cap E^c \neq \emptyset$. 据边界点的定义知$x_0 \in \partial E$ 从而$x_0 \in F \cap \partial E$.

再假设$(F \cap E) \cap \overline{F \cap E^c} \neq \emptyset$. 取$y_0 \in (F \cap E) \cap \overline{F \cap E^c} \neq \emptyset$, 则存在$y_n \in F \cap E^c \, (n = 1, 2, 3, ...)$ 使得$y_n \to y_0 \, (n \to \infty)$. 由此知对任意$\varepsilon > 0$ 有$B(y_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ 且$B(y_0, \varepsilon) \cap E^c \neq \emptyset$. 据边界点的定义知$y_0 \in \partial E$ 从而$y_0 \in F \cap \partial E$.

综上知$F \cap \partial E \neq \emptyset$. $\square$

连通集中常见的一类是 “道路连通集” (顾名思义!). 首先我们定义道路.

【定义】 设$E \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in E$. 设$\gamma : [0, 1] \to E, t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$ 连续(即每个坐标函数 $\gamma_i(t)$ 都在 $[0, 1]$ 上连续, $i = 1, 2, ..., n$) 且 $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, 则称 γ 是E中连接 a, b 的一条道路. 此事简记为$\gamma \in C([0, 1], E), \gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. $\square$

【注】按照参数t增大的方向, 通常称 $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ 为道路 γ 的起点和终点. 如令$\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(1-t), t \in [0,1]$, 则作为轨迹, $\widetilde{\gamma}$ 与γ 是同一条曲线, 但$\widetilde{\gamma}$的走向与 γ相反: $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(1_)$, $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma(0)$. 称$\widetilde{\gamma}$为 γ 的反向道路.

【定义 (道路连通集】设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 如果 E 中任何两点都可以在 E 中道路连接, 则称 E 是一个道路连通集, 简称 E 道路连通.

也即: E 道路连通 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $a, b \in E$, 在 E 中存在连接 a, b 的道路. $\square$

既然出现了“连通”二字, 就需证明道路连通集首先是连通集.

【命题7.23.】$\mathbb{R}^n$ 中的道路连通集必是连通集.

【证】设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 道路连通. 考察 E 的任一分割：$E = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$. 取 $a \in A, b \in B$. 设 $\gamma : [0,1] \to E$ 是连接 a, b 的道路. 不妨设 $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. 为证明 A, B 在某点 “粘在一起”, 我们令

$$I = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in A\}, \quad J = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in B\}.$$

由 $\gamma(t) \in E = A \cup B$ 可知 $[0,1] = I \cup J$. 又由 $\gamma(0) = a \in A, \gamma(1) = b \in B$ 可知 $0 \in I, 1 \in J$, 因此 I, J 皆非空. 又因 A, B 不相交, 故 I, J 也不相交. 于是 $[0,1] = I \cup J$ 是 $[0,1]$ 的一个分割. 而据上面例题知 $[0,1]$ 是连通集, 故 $\overline{I} \cap J, I \cap \overline{J}$ 中必有一个非空. 不妨设 $\overline{I} \cap J$ 非空. 取 $t_0 \in \overline{I} \cap J$. 则由闭包的序列刻画, 存在 $\{t_n\}_{k=1}^{\infty} \subset I$ 使得 $\lim_{k\to\infty} t_k = t_0$. 再由 γ 连续、$\gamma(t_n) \in A$ 以及闭包的序列刻画可知 $\gamma(t_0) = \lim_{k\to\infty} \gamma(t_n) \in \overline{A}$. 另一方面由 $t_0 \in J$ 有 $\gamma(t_0) \in B$. 所以 $\gamma(t_0) \in \overline{A} \cap B$ 从而 $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. 同理可证若 $I \cap \overline{J} \neq \emptyset$ 则 $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. 总之 $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ 必有一个非空. 所以 E 是连通集. $\square$

最典型的道路连通集是凸集.

【定义（凸集)】. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 若对任意 $x, y \in E$, 连接 x, y 的直线段都含于 E, 则称 E 是一个凸集. 也即

E 为凸集 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $x, y \in E$, 对任意 $t \in [0,1]$, 总有 $(1-t)x + ty \in E$. $\square$

因直线段$t \mapsto (1-t)x + ty$连续, 故凸集是道路连通集.

球体、区间等是典型的凸集. 凸集的内部被挖去一点后, 就不再是凸集了; 并且当维数$n = 1$时, 它们也不连通了. 将连通性与实数公理体系中连续性公理相联系有助于我

们对实数理论的理解. 我们有

【命题7.24.】 设$E \subset \mathbb{R}$至少含有两个元素. 则 E连通$\Longleftrightarrow$ E是一个区间.

【证】"$\Longleftarrow$": 设E是一个区间. 因区间是凸集, 因而道路连通从而连通, 故E是连通集.

"$\Longrightarrow$": 设 E 为连通集. 令 $a = \inf E, b = \sup E$ (包括 $a = -\infty$ 或 $b = \infty$ 的情形). 由E 不是单点集知 $a < b$. 我们来证明 E 是以 a 为左端点、b 为右端点的区间. 为此, 只需证明 $(a, b) \subset E$, 因为如果此事成立, 则根据 $a \in E, a \notin E, b \in E, b \notin E$ 即知 E 是以 a 为左端点、b 为右端点的闭、开、半闭半开的区间.

反证法: 假设 $(a, b) \not\subset E$. 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $c \notin E$. 取 $A = E \cap (-\infty, c), B = E \cap (c, \infty)$. 则 $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ 且由确界的定义知 A, B 皆非空. 然而易见 $\overline{A} \cap B \subset (-\infty, c] \cap (c, \infty) = \emptyset, A \cap \overline{B} \subset (-\infty, c) \cap [c, \infty) = \emptyset$ 也即 $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. 这与 E 是连通集矛盾. 这矛盾说明必有 $(a, b) \subset E$. $\square$

【连通而非道路连通的典型例子】 设

$$E = A \cup B,$$

$$\text{其中} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \sin(1/x),\ 0 < x \le 1\}, \quad B = \{(0, y) \,|\, y \in [-1, 1]\}.$$

易见 A 是道路连通集因而是连通集. 此外易证 $E = \overline{A}$. 根据**命题7.22** 便知 E 连通. 但" E 不是道路连通集" 的证明较难. 学生可以尝试一下. 在一些《拓扑学》教材中可以找到证明. 难点在表现在 y- 轴的区间 B 上：直观上看, 由于曲线 $y = \sin(1/x)\,(0 < x \le 1)$ 在靠近 y- 轴时巨烈振动, A 中的任一点都不能在 E 中与 B 中任一点连续相接. $\square$

【命题7.25(集合按道路连接产生的分类)】 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 在 E 上定义关系 $\sim$ 如下:

$$x \sim y \iff \text{存在 } \gamma \in C([0, 1], E) \text{ 使得 } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y.$$

则 $\sim$ 是 E 上的一个等价关系. 每个等价类 $[x] = \{y \in E \mid y \sim x\}$ 称为 E 的一个道路连通分支. 在每个道路连通分支中取定一点, 称其为该分支的代表元. 令 C 是所有这

些代表元的全体. 于是 E 可以按道路连通分支连进行分解 (不交并):

$$E = \bigcup_{x\in C}[x].$$

【证】只需证明 $\sim$ 是 E 上的一个等价关系. 根据等价关系的定义, 只需证明 $\sim$ 满足下列 (i),(ii),(iii).

(i) 反身性: $\forall x \in E$ 有 $x \sim x$. 这是显然的, 只要取 $\gamma(t) \equiv x$.

(ii) 对称性: 设 $x \sim y$. 要证 $y \sim x$. 设 $\gamma \in C([0,1],E)$, $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, 令 $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. 则 $\widetilde{\gamma} \in C([0,1],E)$ 且 $\widetilde{\gamma}(0) = y, \widetilde{\gamma}(1) = x$. 所以 $y \sim x$.

(iii) 传递性: 设 $x \sim y$ 且 $y \sim z$. 要证 $x \sim z$. 设 $\alpha, \beta \in C([0,1],E)$, $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$, $\beta(0) = y, \beta(1) = z$. 考虑映射 $\gamma : [0,1] \to E$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{if} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ \beta(2t-1) & \text{if} \quad 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

则 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = z$. 而由 $\alpha(1) = \beta(0)$ 知 $\gamma(t)$ 在 $t = 1/2$ 处连续, 从而在 $[0,1]$ 上处处连续, 即 $\gamma \in C([0,1],E)$. 所以 $x \sim z$. $\square$

【例】设$K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空紧集且局部道路连通, 即对每个$x \in K$ 存在$\varepsilon > 0$ 使得$K \cap B(x,\varepsilon)$ 是道路连通的.

证明K 只有有限多个道路连通分支, 即存在有限多个两两不相连的$a_1, a_2, ..., a_N \in K$ 使得$K = [a_1] \cup [a_2] \cup \cdots \cup [a_N]$.

【证】由上述**命题7.25(集合按道路连接产生的分类)** 可写$K = \bigcup\limits_{x\in C}[x]$ 其中C 是K的道路连通分支的代表元的全体.

由假设知对每个$x \in K$ 存在$\varepsilon_x > 0$ 使得$K \cap B(x,\varepsilon_x)$ 是道路连通的. 易见$K \subset \bigcup\limits_{x\in K} B(x,\varepsilon_x)$. 因$K$ 是紧集, 故存在有限多个$x_1, x_2, ..., x_m$ 使得$K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon_{x_i})$. 因$C \subset K$, 故这给出$C$的一个分解:

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} C \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i}).$$

来证明每个$C \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ 至多含有一个元素. 否则设存在$i \in \{1,2,...,m\}$ 使得$C \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ 含有两个不同元素a, b. 则由于$K \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ 道路连通和$a, b \in C \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \subset K \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ 知$a \sim b$. 因此$[a] = [b]$ 从而由代表元的定义知$a = b$.

这矛盾于$a \neq b$. 所以每个$C \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ 至多含有一个元素. 这蕴含C 是有限集, 即存在$N \in \mathbb{N}$ 使得$C = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$. 于是得到$K = [a_1] \cup [a_2] \cup \cdots \cup [a_N]$.

C为有限集的另一证法是反证法: 假设C 为无限集. 则C 包含一个可数无限集$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. 因K是紧集, 故存在子列$\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 和$x_0 \in K$ 使得$x_{k_j} \to x_0\,(j \to \infty)$. 又因$K$ 是局部道路连通的, 故存在$\varepsilon > 0$使得$K \cap B(x_0, \varepsilon)$ 道路连通. 取N 充分大使得对所有$j \geq N$ 有$x_{k_j} \in K \cap B(x_0, \varepsilon)$. 这蕴含当$i > j \geq N$ 时有$x_{k_i} \sim x_{k_j}$ 从而有$[x_{k_i}] = [x_{k_j}]$. 据代表元的定义知$x_{k_i} = x_{k_j}$, 这矛盾于$x_{k_i} \neq x_{k_j}$. 这矛盾证明了C 是有限集. $\square$

下面这个命题表明, 相比于一般集合, 开集按道路连接产生的分类是最简单的. 特别是, 如果所考虑的开集是连通的, 则这开集就只有一个道路连通分支, 这个分支就是这个连通开集自身：

【命题7.26.】(a) $\mathbb{R}^n$ 的每个连通开集都是道路连通的.

(b) $\mathbb{R}^n$ 的每个不连通的非空开集都只有有限或可数多个道路连通分支, 且每个道路连通分支都是开集. 意即设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个不连通的非空开集, 则 G 可分解为

$$G = \bigcup_{k \geq 1} G_k$$

其中 G_k 是连通开集, 且G_k 之间互不相交.

【证】先证明对于 $\mathbb{R}^n$ 的任一非空开集G, G 的每个道路连通分支都是开集.

任取G的一个道路连通分支 $[x_0] = \{x \in G \mid x \sim x_0\}$. 对任意 $x \in [x_0]$,因 $x \in G$ 且 G 是开集, 故存在 $\delta = \delta_x > 0$ 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 对任意 $y \in B(x, \delta)$, 显然 y 与 x 可以在 $B(x, \delta)$ 中直线连接 (球是凸集!), 故 $y \sim x$. 又 $x \sim x_0$, 所以 $y \sim x_0$. 所以 $y \in [x_0]$. 因此 $B(x, \delta) \subset [x_0]$. 所以 $[x_0]$ 是开集.

(a): 设 $G \subset \mathbb{R}^n$是一个连通开集. 先证明 G 只有一个道路连通分支. 反证法: 假设 G 至少有两个道路连通分支. 设 G_1 是一个道路连通分支, 而设其它道路连通分支的并集为 G_2. 则 $G = G_1 \cup G_2$. 因分支之间互不相交 (这是等价分类的结果), 故 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. 又由本命题开头的证明可知 G_1, G_2 都是开集 (且非空). 于是据**命题7.21** 可知 G 不是连通的. 这与假设矛盾. 所以 G 只有一个道路连通分支. 再根据集合按道路连接的分类定理(**命题7.25**) 便知 G 就等于这个道路连通分支, 从而 G 是道路连通的.

(b): 设 $G\subset\mathbb{R}^n$为非空开集且不连通. 由分类定理 (**命题7.25**) 有 $G=\bigcup_{x\in C}[x]$. 再由开头所证结论知每个分支 $[x]$ 都是开集. 据有理点的稠密性易见开集 $[x]$ 中含有有理点. 让我们从 $[x]$ 中取且只取定一个有理点. 把所有这样的有理点组成一个集合 D. 因为 $[x]$ 之间互不相交,故 D 与分支的全体 $\{[x]\,|\,x\in C\}$ 一一对应. 但 D 是可数集 $\mathbb{Q}^n$ 的子集从而至多可数, 所以分支的全体 $\{[x]\,|\,x\in C\}$ 也至多可数. 将其排列成 $\{[x]\,|\,x\in C\}=\{G_1,G_2,...,G_N\}$ 或 $=\{G_1,G_2,G_3,...\}$, 则得到分解 $G=\bigcup_{k=1}^N G_k$ 或 $G=\bigcup_{k=1}^\infty G_k$. $\square$

下面这个例题很有用:

【**例**】设$n\ge 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为连通开集, $E\subset\Omega$ 是一个有限集. 则$\Omega\setminus E$ 仍是连通开集.

[$\Omega\setminus E$ 显然是开集, 主要性质是连通性.]

【证】先对$E=\{x_0\}$ 是单点集的情形进行证明. 为证开集$\Omega\setminus\{x_0\}$连通, 只需证明$\Omega\setminus\{x_0\}$道路连通. 任取$a,b\in\Omega\setminus\{x_0\}$. 因$\Omega$ 是连通开集, 故它道路连通, 因此存在$\gamma\in C([0,1],\Omega)$ 使得$\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$. 若$\gamma([0,1])\subset\Omega\setminus\{x_0\}$, 则$a,b$已经在$\Omega\setminus\{x_0\}$中道路相连. 设$\gamma([0,1])\not\subset\Omega\setminus\{x_0\}$. 则由$\gamma([0,1])\subset\Omega$ 知存在$t_0\in[0,1]$ 使得$\gamma(t_0)=x_0$. 因$\gamma(0)=a\neq x_0,\gamma(1)=b\neq x_0$, 故$0<t_0<1$.

$$\text{取 } 0<\delta<\min\{|a-x_0|,|b-x_0|\} \text{ 充分小使得闭球 } \overline{B}(x_0,\delta)\subset\Omega.$$

这特别蕴含

$$\{x_0+\delta\mathbf{e}\mid\mathbf{e}\in\mathbb{S}^{n-1}\}=\partial\overline{B}(x_0,\delta)\subset\Omega.$$

这里$\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 是单位球面. 令

$$A=\{t\in[0,t_0]\,|\,|\gamma(s)-x_0|\ge\delta\ \ \forall\, s\in[0,t]\},$$
$$B=\{t\in[t_0,1]\,|\,|\gamma(s)-x_0|\ge\delta\ \ \forall\, s\in[t,1]\}.$$

则$0\in A,1\in B$. 令

$$t_1=\sup A,\quad t_2=\inf B.$$

来证明

$$t_1\in A,\quad t_2\in B,\quad 0<t_1<t_0<t_2<1,\quad |\gamma(t_1)-x_0|=|\gamma(t_2)-x_0|=\delta.$$

首先易见$t_1 \in [0,t_0], t_2 \in [t_0,1]$. 由确界的定义, 存在数列$\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 使得$\tau_n \to t_1\,(n\to\infty)$. 由$\gamma(t)$ 连续知

$$|\gamma(t_1)-x_0| = \lim_{n\to\infty} |\gamma(\tau_n)-x_0| \ge \delta.$$

又由$|\gamma(t_0)-x_0|=0$知$t_1<t_0$. 来证$t_1\in A$. 对任意$s\in[0,t_1]$, 若$s<t_1$, 则由$t_n\to t_0$知当$n>>1$ 时$s<t_n\le t_1$ 即$s\in[0,t_n)$ 从而有$|\gamma(s)-x_0|\ge\delta$. 若$s=t_1$ 则也有$|\gamma(s)-x_0|\ge\delta$. 所以不等式$|\gamma(s)-x_0|\ge\delta$ 对所有$s\in[0,t_1]$成立. 所以$t_1\in A$.

若$|\gamma(t_1)-x_0|>\delta$, 则由连续性知存在$0<\varepsilon<t_0-t_1$ 使得$|\gamma(s)-x_0|>\delta$ for all $s\in[t_1,t_1+\varepsilon]$ 从而有$|\gamma(s)-x_0|\ge\delta$ for all $s\in[0,t_1+\varepsilon]$. 因$t_1+\varepsilon<t_0$, 这蕴含$t_1+\varepsilon\in A$, 从而与$t_1=\sup A$ 矛盾. 因此必有$|\gamma(t_1)-x_0|=\delta$. 其次证明$t_1>0$. 由$|\gamma(0)-x_0|=|a-x_0|>\delta$ 和连续性知存在$0<t_*<t_0$ 使得$|\gamma(s)-x_0|>\delta$ for all $s\in[0,t_*]$. 因此$t_*\in A$. 于是有$t_1\ge t_*>0$. 同法可证$t_2\in B$ 且$t_0<t_2<1$, $|\gamma(t_2)-x_0|=\delta$.

令

$$\mathbf{e}_1=\frac{\gamma(t_1)-x_0}{\delta},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\gamma(t_2)-x_0}{\delta}.$$

则$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\in\mathbb{S}^{n-1}$且

$$\gamma(t_1)=x_0+\delta\mathbf{e}_1,\quad \gamma(t_2)=x_0+\delta\mathbf{e}_2.$$

因$n\ge2$, 故$\mathbb{S}^{n-1}$道路连通(见本节作业题). 因此存在连续映射$\beta:[0,1]\to\mathbb{S}^{n-1}$ 使得$\beta(0)=\mathbf{e}_1,\beta(1)=\mathbf{e}_2$. 令

$$\widetilde{\gamma}(t)=\begin{cases}\gamma(t), & t\in[0,t_1]\cup[t_2,1]\\ x_0+\delta\beta(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}), & t\in[t_1,t_2]\end{cases}$$

则由上面分析知$|\widetilde{\gamma}(t)-x_0|\ge\delta$ for all $t\in[0,1]$. 又易见$\widetilde{\gamma}$在$[0,1]$上连续, 所以$\widetilde{\gamma}:[0,1]\to\Omega\setminus\{x_0\}$ 连续. 结合$\widetilde{\gamma}(0)=a,\widetilde{\gamma}(1)=b$即知$a,b$ 可以在$\Omega\setminus\{x_0\}$内道路相连. 由$a,b\in\Omega\setminus\{x_0\}$的任意性知$\Omega\setminus\{x_0\}$是道路连通的.

现在转到一般情形. 我们对E的元素的个数$|E|$用归纳法. 当$|E|=1$ 时, 这是上面刚证的结果. 假设$|E|=m$时所证成立, 看$|E|=m+1$时. 取$x_0\in E$. 令$E_0=E\setminus\{x_0\}$, $\Omega_0=\Omega\setminus E_0$. 则$|E_0|=m$ 因此据归纳假设知Ω_0是连通开集. 而易见

$$\Omega\setminus E=\Omega_0\setminus\{x_0\}$$

并由上面结果知$\Omega_0 \setminus \{x_0\}$是连通开集, 所以$\Omega \setminus E$是连通开集. 据归纳法原理知所证成立. $\Box$

应用连通性相关命题我们最后来证明一个常用性质——

【命题7.27.】$\mathbb{R}^n$ 中的既开又闭的非空集合只能是 $\mathbb{R}^n$ 自身.

【证】设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 假设 E 既开又闭. 来证$E = \mathbb{R}^n$. 做分解$\mathbb{R}^n = E \cup E^c$. 因$E^c$ 也是开集, 故连通开集 $\mathbb{R}^n$ 被分解成了两个不相交的开集E, E^c之并. 根据**命题7.21**知E, E^c必有一个为空集. 但E非空, 故E^c必为空集. 所以$\mathbb{R}^n = E$. $\Box$

作业题

1. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 证明: 若$\partial E = \emptyset$, 则$E = \mathbb{R}^n$. (利用空间分解$\mathbb{R}^n = E^\circ \cup (E^c)^\circ \cup \partial E$.)

2. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集且 $\partial E \neq E \neq \mathbb{R}^n$. 证明 $\overline{E^\circ} \cap \partial E \neq \emptyset$.

3. 设 E_1, E_2 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集/道路连通集 且 $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. 证明 $E_1 \cup E_2$ 是连通集/道路连通集.

4. (1) 设 A, B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的不相交的非空闭集. 证明 $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

[注: 包含关系 $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ 无条件成立, 但反向包含 $\partial A \cup \partial B \subset \partial(A \cup B)$ 的证明要用到所给条件.]

(2) 利用 (1) 证明：若 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集且 ∂E 连通, 则 E 也是连通的.

5. 一个集合$E \subset \mathbb{R}^n$ 叫做局部道路连通的, 如果E非空且对每个$x \in E$ 存在$\varepsilon > 0$ 使得$E \cap B(x, \varepsilon)$ 是道路连通的.

设$E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个连通且局部道路连通的集合. 证明E 是道路连通的.

6. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个局部道路连通的闭集. 证明E的每个道路连通分支都是闭集, 即对每个$a \in E$, 集合$[a] := \{x \in E \,|\, x \sim a\}$ 是闭集. 这里$x \sim y$ 表示x, y 可以在E中道路相连.

7. 陈书习题7.8.3(v)(与本讲义**命题7.25(集合按道路连接产生的分类)**的证明类似), 7.8.5, 7.8.7. [7.8.7 中$F = \emptyset$ 应改为$F^\circ = \emptyset$.]

8. 设$2 \le n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}^{n-1}$ 和$\mathbb{S}^{n-1}_+$ 分别为$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面和上半球面, 即

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\},$$
$$\mathbb{S}^{n-1}_+ = \mathbb{S}^n \cap \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \ge 0\}.$$

证明$\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}_+$ 都是道路连通集.

[参考助教任金波[3] 提供的方案: 记$E = \mathbb{S}^{n-1}$ 或$E = \mathbb{S}^{n-1}_+$. 任取$a, b \in E$. 取一点$c \in E \setminus \{-a, -b\}$ (此集合显然非空). 考虑

$$\alpha(t) = \frac{(1-t)a + tc}{|(1-t)a + tc|}, \quad \beta(t) = \frac{(1-t)c + tb}{|(1-t)c + tb|}, \qquad t \in [0, 1].$$

需要说明分母非零、$\alpha(t), \beta(t)$ 属于E, 等等.]

9. 设$E \subset \mathbb{R}^n$为一凸集(非空).

(1) 设$x_k \in E, \lambda_k \ge 0, k = 1, 2, ..., N$ 且$\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$. 证明$\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \in E$.

(2) 设$x_k \in E, \lambda_k \ge 0, k = 1, 2, 3, ...,$ 且$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ 并假定向量值级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$收敛 (例如当$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 时即可保证这级数收敛). 证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \in \overline{E}$.

[本题与连通性无关, 只与凸集有关. 以后会用到这个结果.]

[3] **任金波, 本系2008级, 曾是2012级的助教, 现在法国攻读博士学位, 研究基础数学(代数几何方面), 不仅学问好, 对教学对学生也很热心。**

§7.4 连续映射及其基本性质

数学分析中的研究对象, 除了欧空间外, 多数是函数空间, 例如由定义在某个度量空间上的实值(或复值)连续映射组成的线性空间, 由实值(或复值)可积函数组成的线性空间, 等等. 对这些函数空间一般可以赋予范数, 因此构成赋范线性空间. 而更多的时候需要对函数类的值域有约束, 因此这函数类不构成线性空间, 但仍是度量空间。我们今后将主要跟这些函数空间打交道。为了学习这些函数空间的基本性质，需要先学习度量空间中连续函数或映射的基本性质. 这就是本节的内容.

先回忆映射的象集和逆象集. 设$f: E\to Y$. 则对任意$A\subset E, B\subset Y$, 定义

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\},\qquad f^{-1}(B)=\{x\in E\,|\,f(x)\in B\}.$$

在根据上下文不会产生混淆的情况下, 我们将用同一记号$B(\cdot,\cdot)$表示不同的度量空间中的开球.

【定义(连续)】设$(X,\rho),(Y,d)$是两个度量空间, $E\subset X$, 映射$f: E\to Y$.

(1) 设$x_0\in E$. 如果

$\forall\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$使得当$x\in E$且$\rho(x,x_0)<\delta$时$d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$,

即: $\forall\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$使得$E\cap B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$,

则称f在x_0连续, 也称x_0是f在E上的一个连续点.

(2) 若f在E中每一点连续, 则称f在E上连续, 也称$f: E\to Y$ 连续.

(3) 从E到Y的连续映射的全体记作$C(E,Y)$. $\Box$

注意, 连续性和可微性等等都是逐点定义的! (当然映射就是点点定义的).

下面给出判别连续性的三个命题, 其中第一个命题最好用, 它使我们可以利用序列的极限检查映射在一点是否连续.

【命题7.28(连续性的序列刻画very useful!)】设$(X,\rho),(Y,d)$是两个度量空间, $E\subset X, f: E\to Y, x_0\in E$. 则

f在x_0连续$\Longleftrightarrow$ 对任意收敛序列$E\ni x_n\to x_0$ 都有$f(x_n)\to f(x_0)$ $(n\to\infty)$.

【证】"$\Longrightarrow$": 设f在x_0连续. 任取收敛序列$E\ni x_n\to x_0\,(n\to\infty)$. 对任意$\varepsilon>0$, 因$f$在$x_0$连续, 故存在$\delta>0$ 使得当$x\in E$且$\rho(x,x_0)<\delta$时$d(f(x),f(x_0))<$

ε. 由$\rho(x_n, x_0) \to 0\,(n \to \infty)$知存在$N \in \mathbb{N}$使得当$n \geq N$时$\rho(x_n, x_0) < \delta$ 从而有$d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. 这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty} d(f(x_n), f(x_0)) = 0$.

“$\Longleftarrow$”：设f具有所说的序列收敛性. 假设这时f在x_0不连续, 则由“在一点不连续”的肯定语气叙述知, 存在$\varepsilon > 0$ 使得对任意$\delta > 0$ 都有某点$x_* = x_{*,\delta} \in E$ 满足$\rho(x_*, x_0) < \delta$ 却使得$d(f(x_*), f(x_0)) \geq \varepsilon$. 取$\delta = 1/n$, 则相应地存在$x_n \in E$ 满足$\rho(x_n, x_0) < \delta$ 却使得$d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 这样我们得到了E中的点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$\rho(x_n, x_0) < 1/n \to 0, (n \to \infty)$, 使得$d(f(x_n), f(x_0)) \not\to 0\,(n \to \infty)$. 这与假设条件矛盾. 这矛盾证明了$f$必在$x_0$连续. $\square$

【注】这个连续性的序列刻画之所以好用, 一个重要原因是它的证明中须用到选择公理, 因为在谢邦杰先生编著的《超穷数与超穷论法》中说, 如果不承认选择公理, 则函数连续性的$\varepsilon - \delta$ 语言定义与序列刻画二者不等价, 即上述命题中的“$\Longleftarrow$”将不成立. 但是在我们的证明中, 一切都是自然的, 要说用到了选择公理, 唯一可能的就是我们无法给出序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的具体表示因为它根本就是反证法逻辑上的产物, 是“实际上”不存在的。

下面的命题给出了连续性的另一种刻画, 它是任何拓扑学中的标准命题.

【命题7.29(用开集、闭集刻画连续映射)】设$(X,\rho), (Y,d)$是两个度量空间, $E \subset X$, 映射$f: E \to Y$. 则以下(a),(b), (c) 彼此等价:

(a) $f \in C(E, Y)$ 即f在E上连续.

(b) f在开集下的逆象是相对开集, 即对于Y的任意开集$V \subset Y$, 存在X的开集U使得$f^{-1}(V) = E \cap U$.

(c) f在闭集下的逆象是相对闭集, 即对于Y的任意闭集$H \subset Y$, 存在X的闭集F 使得$f^{-1}(H) = E \cap F$.

【证】来证明(a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c).

(a)$\Longrightarrow$ (b): 设f在E上连续. 设开集$V \subset Y$. 若$V = \emptyset$, 则由$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$知可取$U = \emptyset$. 设$V \neq \emptyset$. 对任意$x \in f^{-1}(V)$, 即$x \in E$ 且$f(x) \in V$, 因V 是开集, 故存在$\varepsilon_x > 0$ 使得$B(f(x), \varepsilon_x) \subset V$. 而$f$连续, 故存在$\delta_x > 0$ 使得$E \cap B(x, \delta_x) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon_x))$. 取

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} B(x, \delta_x).$$

则U 是开集且由$x\in E\cap B(x,\delta_x)\subset f^{-1}(V)$ 和集合相等的定义易见

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)} E\cap B(x,\delta_x)=E\cap U.$$

(b)$\Longrightarrow$ (a): 对任意$x\in E$ 和任意$\varepsilon>0$, 取开集$V=B(f(x),\varepsilon)$. 则由假设知存在开集U 使得$f^{-1}(V)=E\cap U$. 因$x\in f^{-1}(V)$ 故$x\in E\cap U$. 又因U 是开集, 故存在$\delta_x>0$ 使得$B(x,\delta_x)\subset U$ 从而有$E\cap B(x,\delta_x)\subset E\cap U=f^{-1}(V)=f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. 据连续的定义知$f$在$x$ 连续. 再由$x\in E$的任意性知f 在E上连续.

下证(b), (c) 等价. 将用到下面的关系式:

$$\text{对任意}W\subset Y\ \text{有}\quad f^{-1}(Y\setminus W)=E\setminus f^{-1}(W).\tag{$*$}$$

(b)$\Longrightarrow$(c): 对任意闭集$H\subset Y$. 令$V=H^c=Y\setminus H$. 则V 是开集. 由假设知存在开集U 使得$f^{-1}(V)=E\cap U$. 取$F=X\setminus U$. 则F 是闭集, 并由$H=Y\setminus V$ 和等式($*$)有

$$f^{-1}(H)=E\setminus f^{-1}(V)=E\setminus E\cap U=E\setminus U=E\cap(X\setminus U)=E\cap F.$$

(c) $\Longrightarrow$(b): 在上面的证明中将闭集H与开集V对调即得证. □

由两个开集的交是开集, 闭集的交是闭集立即得到下面推论:

【命题7.30(开集和闭集上的连续性的等价定义)】设$(X,\rho),(Y,d)$是两个度量空间, $E\subset X$, 映射$f:E\to Y$. 则

(a) 若E 是X的开集, 则

f 在E 上连续 $\Longleftrightarrow$ 对Y的任意开集V, $f^{-1}(V)$ 是X的开集.

(b) 若E是X的闭集, 则

f 在E 上连续 $\Longleftrightarrow$ 对Y的任意闭集H, $f^{-1}(H)$ 是X的闭集. □

【例】设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续, $t\in\mathbb{R}$,

$$\text{令}\quad \mathbb{R}^n(f>t)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,f(x)>t\},\quad \mathbb{R}^n(f\ge t)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,f(x)\ge t\}.$$

则$\mathbb{R}^n(f>t)$ 是开集, $\mathbb{R}^n(f\ge t)$是闭集且$\overline{\mathbb{R}^n(f>t)}\subset\mathbb{R}^n(f\ge t)$.

事实上本例中的两个集合也可写成

$$\mathbb{R}^n(f>t)=f^{-1}((t,\infty)),\quad \mathbb{R}^n(f\ge t)=f^{-1}([t,\infty)).$$

由$\mathbb{R}^n$ 既开又闭、f连续、以及$(t,\infty),[t,\infty)$分别是$\mathbb{R}$的开集和闭集即知$\mathbb{R}^n(f>t),\mathbb{R}^n(f\ge t)$ 分别是$\mathbb{R}^n$的开集和闭集. 而显然有$\mathbb{R}^n(f>t)\subset\mathbb{R}^n(f\ge t)$. 于是由闭包的单调性即得$\overline{\mathbb{R}^n(f>t)}\subset\overline{\mathbb{R}^n(f\ge t)}=\mathbb{R}^n(f\ge t)$.

等式"$\overline{\mathbb{R}^n(f>t)}=\mathbb{R}^n(f\ge t)$"未必对所有$t$ 成立. 例如对连续函数

$$f(x)=(|x|-1)^+=\max\{|x|-1,\,0\},\quad x\in\mathbb{R}^n\qquad\text{(给出图象)}$$

取$t=0$, 则有$\mathbb{R}^n(f>0)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|>1\}$,

$$\overline{\mathbb{R}^n(f>0)}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|\ge 1\}\quad\text{但}\quad\mathbb{R}^n(f\ge 0)=\mathbb{R}^n.\qquad\square$$

下面学习复合映射的连续性和同胚概念.

【命题7.31(复合映射的连续性)】设$(X,\rho),(Y,d),(Z,\lambda)$是三个度量空间, $E\subset X,S\subset Y$, 映射$f:E\to S$ 和$g:S\to Z$是两个连续映射, 则复合映射$g\circ f:E\to Z$也是连续映射.

【证】我们将用连续映射的定义、连续映射的开集刻画、序列刻画三种方法证明这一命题.

[证法1] 任取$x_0\in E$. 因映射g在点$y_0=f(x_0)\in S$连续, 故对任意$\varepsilon>0$, 存在$r>0$ 使得$S\cap B(y_0,r)\subset g^{-1}(B(g(y_0)),\varepsilon)$. 即

$$S\cap B(f(x_0),r)\subset g^{-1}\Big(B(g(f(x_0)),\varepsilon)\Big).$$

又因f在x_0连续, 故存在$\delta>0$使得

$$E\cap B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x_0),r))=f^{-1}\Big(S\cap B(f(x_0),r)\Big)$$

后一等号是因为当$x\in E$时$f(x)\in S$. 于是联合上面的包含关系得到

$$E\cap B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(g^{-1}\Big(B(g(f(x_0)),\varepsilon)\Big)=(g\circ f)^{-1}\Big(B(g(f(x_0)),\varepsilon)\Big).$$

这里用到恒等式

$$f^{-1}(g^{-1}(B))=(g\circ f)^{-1}(B)\qquad\forall\,B\subset Z.$$

所以复合映射$g\circ f$在x_0连续. 由$x_0\in E$的任意性知复合映射$g\circ f$在E上连续。

[证法2] 对于Z的任一开集$W \subset Z$, 由$g: S \to Z$ 连续知存在Y的开集V 使得$g^{-1}(W) = S \cap V$. 而由$f: E \to S$连续知存在X的开集U使得$f^{-1}(V) = E \cap U$. 如上, 因当$x \in E$时$f(x) \in S$, 故有$f^{-1}(V) = f^{-1}(S \cap V)$. 于是我们得到

$$E \cap U = f^{-1}(S \cap V) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W).$$

这表明$(g \circ f)^{-1}(W)$是X相对于E的开集. 据连续映射的开集刻画知复合函数$g \circ f$在E上连续.

[证法3] 任取$x_0 \in E$ 和任一收敛序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 由连续性的序列刻画知, 因$f$在$x_0$连续, 故$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$; 又因$g$在$y_0 = f(x_0)$连续, 故$\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$. 由$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的任意性和连续性的序列刻画知复合函数$g \circ f$在$x_0$连续. 再由$x_0 \in E$的任意性知复合函数$g \circ f$在$E$上连续. $\square$

【例】设$I \subset \mathbb{R}^n$, (Y, d)为度量空间, $(\prod_{j=1}^{m} X_j, \rho)$为一乘积度量空间, 其中$(X_j, \rho_j)$为度量空间, $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le j\le m} \rho_j(x_j, y_j)$或$\rho(x,y) = \Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \rho_j(x_j, y_j)^2\Big)^{1/2}$.
设$E_j \subset X_j$, $f_j : I \to E_j$ 连续, $g: \prod_{j=1}^{m} E_j \to Y$ 连续. 则复合映射$g(f_1, f_2, ..., f_m) : I \to Y$ 连续, 也即复合映射$I \ni t \mapsto g(f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)) \in Y$ 在I上连续.

【证】令

$$f : I \to \prod_{j=1}^{m} E_j, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)), \quad t \in I.$$

则$g(f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)) = g(f(t)) = (g \circ f)(t)$. 因此为证本题, 由复合映射的连续性命题, 只需证明f在I上连续.

最快的证法是序列刻画. 取任一点$t_0 \in I$ 和任一收敛序列$I \ni t_k \to t_0\,(k \to \infty)$. 由每个坐标函数$f_j$ 在t_0连续和乘积度量空间中的收敛等价于按坐标收敛知有

$$\lim_{k\to\infty} f_j(t_k) = f_j(t_0), \quad j = 1, 2, ..., m;$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} f(t_k) &= \lim_{k\to\infty} (f_1(t_k), f_2(t_k), ..., f_m(t_k)) \\ &= (\lim_{k\to\infty} f_1(t_k), \lim_{k\to\infty} f_2(t_k), ..., \lim_{k\to\infty} f_m(t_k)) \\ &= (f_1(t_0), f_2(t_0), ..., f_m(t_0)) = f(t_0).\end{aligned}$$

【定义(同胚)】设$(X, \rho), (Y, d)$是两个度量空间, $A \subset X, B \subset Y$. 我们称A与B同胚, 如果在A, B 之间存在一个连续的双射, 也即存在映射$f: A \to B$ 满足f 是单、满射且$f: A \to B, f^{-1}: B \to A$ 都连续. 这样的映射f也称为是A, B 之间的同胚映射. $\square$

【命题7.32】度量空间中集合之间的同胚关系是一个等价关系, 即若对任何两个度量空间中的子集A, B 定义

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ 与} B\text{同胚}$$

则“ $\sim$ ”具有下列性质:

1° **反身性：**$A \sim A$ 恒成立.

2° **对称性：**若 $A \sim B$ 则 $B \sim A$.

3° **传递性：**若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

【证】**留为作业.** $\square$

根据这一命题，千差万别的集合便可以按照同胚进行分类, 彼此同胚的属于同一类, 不同类中的拓扑空间之间不能同胚。这样就把数量“无限”向本质“有限”做了简化. 当然, 等价类的个数可能也是无限的, 但在很多有趣的研究中，等价类的个数是有限的.

以后在进一步学习拓扑时还要学习关于同胚和分类的具体理论。那时我们将知道(例如以有界闭集为例), 三维空间中的球面、立方体的表面是同胚的, 而它们与轮胎(即圆环面)不同胚。

【说明】前面已指出, 对于度量空间$(X, \rho), (Y, d), \ldots$ 中的(非空)子集$E \subset X$, $S \subset Y, \ldots$ $(E, \rho), (S, d), \ldots$仍是度量空间. 因此在陈书和多数拓扑学的教科书中就只考虑度量空间$X, Y, \ldots$ 本身而不必论及它们的子集. 例如, 永远可以假定映射f的定义域是全空间X。但是必须记住: 不光是不同的X的拓扑可能不同, 同一个X与X自己的子集的拓扑也可能很不同！在这点上初学者容易犯错误, 这是此方式的主要缺点。

本讲义的做法是: 固定一个大空间X(从而固定了拓扑), 然后研究定义在X上众多子集E上的函数的行为. 这是从数学分析过渡到拓扑学的传统做法, 它的缺点是一些定理的叙述略显啰嗦. 由于这是我们以往熟悉的方式且不易犯错误, 故作为拓扑学习的初步, 我们还是使用这个略显啰嗦的方式.

【定义(一致连续性)】设$(X, \rho), (Y, d)$为两个度量空间, $E \subset X$, 映射$f : E \to Y$ 满足

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ 使得只要} x, y \in E \text{ 且} \rho(x, y) < \delta \text{ 就有 } d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

则称f在E上一致连续. $\square$

【命题7.33(一致连续性的序列刻画)】 设$(X,\rho),(Y,d)$为两个度量空间, $E\subset X$, 映射$f:E\to Y$. 则f在E上一致连续的充分必要条件是：对于E中的任何两个序列x_n,y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$ 都有$\lim\limits_{n\to\infty}d(f(x_n),f(y_n))=0$.

【证】**必要性:** 设f在E上一致连续. 任取E中的两个序列x_n,y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$. 对任意$\varepsilon>0$, 因$f$在$E$上一致连续, 故存在$\delta>0$ 使得只要$x,y\in E$ 且$\rho(x,y)<\delta$ 就有$d(f(x),f(y))<\varepsilon$. 因$\rho(x_n,y_n)\to 0\,(n\to\infty)$, 故存在$N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$时$\rho(x_n,y_n)<\delta$ 从而当$n\ge N$时有$d(f(x_n),f(y_n))<\varepsilon$. 这证明了$\lim\limits_{n\to\infty}d(f(x_n),f(y_n))=0$.

充分性: 反证法: 假设f满足充分性条件但f在E上不一致连续. 则由不一致连续的肯定语气叙述知: 存在$\varepsilon>0$ 使得对任意$\delta>0$ 都有两个$x_*,y_*\in E$ 满足$\rho(x_*,y_*)<\delta$ 但却使得$d(f(x_*),f(y_*))\ge\varepsilon$. 因$\delta>0$ 可以任意, 故对每个$n\in\mathbb{N}$, 取$\delta=1/n$, 便存在$x_n,y_n\in E$ 满足$\rho(x_n,y_n)<1/n$, 使得$d(f(x_n),f(y_n))\ge\varepsilon$. 于是得到$E$中的两个序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 满足$\rho(x_n,y_n)<1/n\to 0\,(n\to\infty)$. 由假设知应有$\lim\limits_{n\to\infty}d(f(x_n),f(y_n))=0$. 但这与$d(f(x_n),f(y_n))\ge\varepsilon\,(\forall n\in\mathbb{N})$ 矛盾. 这矛盾证明了f 在E上一致连续. $\square$

【提醒】以上是关于连续映射的一般结果. 它们对特殊情形当然成立。例如在应用中常考虑实值连续函数或复值连续函数, 也即映射f的值域空间(Y,d) 为实数集$\mathbb{R}$ 或复数集$\mathbb{C}$, 其中的度量d自然是绝对值或复数的模:

$$d(f(x),f(y))=|f(x)-f(y)|.$$

【定义(有界映射)】设$(X,\rho),(Y,d)$为两个度量空间, $E\subset X$, 映射$f:E\to Y$. 若象集$f(E)$是(Y,d)中的有界集, 即$\mathrm{diam}(f(E))<+\infty$, 则称$f$在$E$上有界. $\square$

【紧集上连续映射的基本性质】

【定理7.34.】设$(X,\rho),(Y,d)$为两个度量空间. 设$K\subset X$是紧集, $f:K\to Y$连续, 则f在K上一致连续且象集$f(K)$是紧集(从而是有界集).

【证】先证f在K上一致连续. 用两种方法.

[证法1] 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/2 > 0$, 由f连续, 对任意$x \in K$ 存在$\delta_x > 0$使得当$y \in B(x, \delta_x)$时$d(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$. 易见

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\delta_x).$$

因K紧, 故存在$n \in \mathbb{N}$ 和$x_1, x_2, ..., x_n \in K$ 使得

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{1}{2}\delta_{x_j}).$$

令

$$\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_{x_1}, \frac{1}{2}\delta_{x_2}, ..., \frac{1}{2}\delta_{x_n}\}.$$

则$\delta > 0$ 且对任意$x, y \in K$ 满足$\rho(x, y) < \delta$, 设$x \in$某个$B(x_j, \frac{1}{2}\delta_{x_j})$, 则有

$$\rho(y, x_j) \le \rho(y, x) + \rho(x, x_j) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_j} \le \delta_{x_j}.$$

于是x, y都属于$B(x_j, \delta_{x_j})$. 这就给出

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

所以f在K上一致连续.

[证法2] 根据一致连续性的序列刻画, 只需证明: 对于K中任何两个序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ 都有$\lim\limits_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) = 0$. 假设不然, 则$K$中存在两个序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ 但使得$d(f(x_n), f(y_n)) =\not\to 0\,(n \to \infty)$, 即使得上极限

$$\limsup_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) > 0.$$

因一个数列的上(下)极限值等于该数列的某个有极限的子列的极限值, 故存在子列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得极限$\lim\limits_{k\to\infty} d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k}))$存在且

$$\lim_{k\to\infty} d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = \limsup_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) > 0. \qquad (*)$$

对于K中的点列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 由于$K$是紧集, 故存在子列$\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ 和$x_0 \in K$ 使得$x_{n_{k_j}} \to x_0\,(j \to \infty)$. 注意$\rho(x_n, y_n) \to 0\,(n \to \infty)$, 故也有$y_{n_{k_j}} \to x_0\,(j \to \infty)$. 于是再由$f$连续知当$j \to \infty$时

$$d(f(x_{n_{k_j}}), f(y_{n_{k_j}})) \le d(f(x_{n_{k_j}}), f(x_0)) + d(f(x_0), f(y_{n_{k_j}})) \to 0 \quad (j \to \infty).$$

这就与$(*)$矛盾. 这矛盾证明了f必在K上一致连续.

最后证明$f(K)$是紧集. 也采用两种证法.

[证法1] 首先注意逆象$f^{-1}(V)$的定义:

$$f^{-1}(V)=\{x\in K \mid f(x)\in V\},\quad V\subset Y.$$

设$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是$f(K)$的任意开覆盖: $f(K)\subset\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha$. 则有

$$K\subset f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in A}f^{-1}(V_\alpha).$$

因f连续, 故开集的逆象$f^{-1}(V_\alpha)$是K的相对开集. 于是由K为紧集知存在有限多个$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in A$ 使得

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{n}f^{-1}(V_{\alpha_j})$$

从而有

$$f(K)\subset f\Big(\bigcup_{j=1}^{n}f^{-1}(V_{\alpha_j})\Big)=\bigcup_{j=1}^{n}f\big(f^{-1}(V_{\alpha_j})\big)\subset\bigcup_{j=1}^{n}V_{\alpha_j}.$$

所以$f(K)$是紧集.

[证法2] 据紧集的等价刻画, 只需证明$f(K)$是列紧集. 对任意序列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset f(K)$, 写$y_n=f(x_n), x_n\in K, n=1,2,3,...$. 因K为紧集, 故$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有一个收敛子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k}\to x_0\in K\,(k\to\infty)$. 于是再由$f$连续知$y_{n_k}=f(x_{n_k})\to f(x_0)\in f(K)\,(k\to\infty)$. 这表明$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有在$f(K)$中收敛的子列. 所以$f(K)$ 是列紧集. □

【推论】设(X,ρ)为一度量空间, $K\subset X$是紧集, $f:K\to\mathbb{R}$连续. 则有

f在K上一致连续,

$f(K)$是$\mathbb{R}$中紧集,

f在K上有最小值最大值, 从而f在K上有界.

【证】只需证第三项, 即证明存在$x_0,y_0\in K$ 使得

$$f(x_0)=\inf f(K),\quad f(y_0)=\sup f(K).$$

由确界的定义, 存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\inf f(K),\quad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=\sup f(K).$$

因K 紧, 故存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$和$x_0\in K$使得$x_{n_k}\to x_0\,(k\to\infty)$. 于是再由$f$连续知

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\inf f(K).$$

同理可证存在$y_0\in K$ 使得$f(y_0)=\sup f(K)$. $\square$

【定理7.35.】设$(X,\rho),(Y,d)$为两个度量空间. 设$K\subset X$是紧集, $f:K\to Y$为单射且连续. 则逆映射$f^{-1}:f(K)\to K$ 也连续, 因此$f:K\to f(K)$ 是同胚映射.

【证】令$g=f^{-1}$. 为证$g:f(K)\to K$连续, 由连续映射的等价刻画知只需证明g在闭集下的逆象是闭集, 即对任意闭集$E\subset K$, 逆象$g^{-1}(E)$是$f(K)$中的闭集. 而由$g=f^{-1}$知$g^{-1}(E)=f(E)$. 因此只需证明$f(E)$是闭集.

由于紧集的闭子集是紧集, 故E是K中的紧集. 于是由上面定理知象集$f(E)$是紧集从而是闭集. 所以$g=f^{-1}:f(K)\to K$ 连续.

[**另法**] 用连续性的序列刻画. 任取$y_0\in f(K)$, 任取序列$f(K)\ni y_n\to y_0\,(n\to\infty)$. 令$x_0=f^{-1}(y_0),x_n=f^{-1}(y_n)$. 则$x_0,x_n\in K$. 要证$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$. 取子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x_{n_k},x_0)=\limsup_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0).$$

因K是紧集, 故存在子列$\{x_{n_{k_j}}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_*\in K$使得$x_{n_{k_j}}\to x_*\,(j\to\infty)$. 于是由$f$连续有

$$f(x_*)=\lim_{j\to\infty}f(x_{n_{k_j}})=\lim_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=\lim_{n\to\infty}y_n=y_0=f(x_0).$$

但f为单射, 故$x_*=x_0$. 于是有

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x_{n_k},x_0)=\lim_{j\to\infty}\rho(x_{n_{k_j}},x_0)=0.$$

所以$\limsup\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$. 这就证明了$f^{-1}(y_n)=x_n\to x_0=f^{-1}(y_0)\,(n\to\infty)$. 所以$f^{-1}$在任一点$y_0\in f(K)$连续. 所以$f^{-1}$在$f(K)$上连续. $\square$

【例】(极坐标变换, 图示). 设$0<R<+\infty$. 则映射

$$f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta),\quad (r,\theta)\in[0,R]\times[0,2\pi]$$

是$[0,R]\times[0,2\pi]$ 到闭圆盘$\overline{B(0,R)}$ 的连续满射. 但显然f 在$[0,R]\times[0,2\pi]$上不是单射.

现在把定义域缩小一点: 设$0 < \delta << R < +\infty, 0 < \varepsilon << 1$, $K := [\delta, R] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. 则限制在$K$ 上, $f|_K : K \to \mathbb{R}^2$ 便是连续单射. 据紧集上的逆映射定理知逆映射$(f|_K)^{-1} : f(K) \to K$ 连续. $\Box$

【注】在上面同胚的定义和上面命题中, 没有涉及定义域所在的空间X与值域所在的空间Y 是否有相同维数的问题(对X, Y是线性空间的情形), 例如一个同胚的例子是: $K = [0, 1] \subset X = \mathbb{R}$, $f(x) = (x, x, x) \in Y = \mathbb{R}^3, x \in [0, 1]$). 但在多数情况下, 例如设$f$的定义域是欧空间$\mathbb{R}^n$中的有内点的集合, f的值域含于另一个欧空间$\mathbb{R}^n$中, 则f成为同胚或连续单射的一个重要的必要条件是$m = n$(即维数相等). 当$n \geq 2$ 时, 这一性质的证明将在拓扑学课程中给出. 对$n > m = 1$的情形, 对"f不是同胚"的证明是介值定理的一个应用. 见下面**例题(对径点)** (也见本节作业题**23.**).

【连通集上连续映射的基本性质】

因前面我们只对欧空间$\mathbb{R}^n$中点集讲授了连通性, 这里就只学习这些连通集上的连续映射的性质. 但这些都可以直接推广到一般度量空间上.

【命题7.36.】连续映射把连通集映为连通集、把道路连通集映为道路连通集.

意即：若映射 $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 连续, 则当 E 是连通集时, 象集 $f(E)$ 也是连通集; 当 E 是道路连通集时, 象集 $f(E)$ 也是道路连通集.

【证】先设 E 连通. 考察象集 $f(E)$ 的任意分割 $f(E) = A \cup B$, 其中 A, B 非空且不相交. 回忆逆象的定义 $f^{-1}(A) = \{x \in E \,|\, f(x) \in A\}$ 有

$$E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

由 A, B 非空且不相交可知 $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ 也非空且不相交. 因 E 连通, 故不妨设 $\overline{f^{-1}(A)} \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. 取 $x_0 \in \overline{f^{-1}(A)} \cap f^{-1}(B)$, 则由 $x_0 \in f^{-1}(B)$ 知 $x_0 \in E$ 且 $f(x_0) \in B$. 同时由闭包的定义, 存在序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset f^{-1}(A)$ 使得 $x_k \to x_0\,(k \to \infty)$. 于是由 f 连续、$f(x_k) \in A$ 以及闭包的定义可知 $f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \in \overline{A}$. 所以 $f(x_0 \in \overline{A} \cap B$. 所以 $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. 这证明了 $f(E)$ 连通.

其次设 E 道路连通. 任取 $y_0, y_1 \in f(E)$. 则存在 $x_0, x_1 \in E$ 使得 $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$. 因 E 道路连通, 故存在 $\gamma \in C([0, 1]; E)$ 使得 $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. 而由复合连续映射定理知映射

$$\Gamma : [0, 1] \to f(E), \quad \Gamma(t) := f(\gamma(t))$$

在 $[0,1]$ 上连续且 $\Gamma(0)=f(x_0)=y_0, \Gamma(1)=f(x_1)=y_1$. 所以 Γ 是 $f(E)$ 中连接 y_0, y_1 的道路. 据 y_0, y_1 的任意性即知 $f(E)$ 道路连通. $\Box$

当$p=1$ 时, 因 $\mathbb{R}$ 中的连通集都是区间、$\mathbb{R}$ 中的连通紧集都是有界闭区间, 故立即得到下列

【命题7.36 的推论1】设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为连通集, 实函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 连续. 则象集 $f(E)$ 必是区间. 进一步, 若 E是连通的紧集, 则 $f(E)$ 是有界闭区间. $\Box$

【命题7.36的推论2: 介值定理】设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为连通集, 实函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 连续. 若 $a,b\in E, C\in\mathbb{R}$ 满足

$$f(a)<C<f(b)$$

则存在 $\xi\in E$ 使得 $f(\xi)=C$.

【证】由**命题7.36的推论1**知 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的区间. 因 $f(a), f(b)\in f(E)$ 且 $f(a)<f(b)$, 故 $[f(a), f(b)]\subset f(E)$. 于是由 $C\in(f(a), f(b))$ 知 $C\in f(E)$ 即存在 $\xi\in E$ 使得 $C=f(\xi)$. $\Box$

【例(对径点)】设$n\geq 2, r>0$, $S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x-x_0|=r\}$ (球面). 则对任意连续函数$f:S(x_0,r)\to\mathbb{R}$, 存在单位向量$\mathbf{e}$ (即$|\mathbf{e}|=1$) 使得

$$f(x_0+r\mathbf{e})=f(x_0-r\mathbf{e}).$$

换言之f必在$S(x_0,r)$ 上的一对对径点$x_0-r\mathbf{e}, x_0+r\mathbf{e}$ 处取值相同.

特别得到结论: **任何连续数值函数**$f:S(x_0,r)\to\mathbb{R}$ **都不是单射.**

【证】做一个标准化转换(只为简化记号): 令

$$\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|=1\}$$

$g(x)=f(x_0+rx), x\in\mathbb{S}^{n-1}$. 则由复合映射连续性知$g:\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}$ 连续. 注意到$\mathbb{S}^{n-1}$ 关于原点对称即$x\in\mathbb{S}^{n-1}\Longleftrightarrow -x\in\mathbb{S}^{n-1}$ 我们考虑奇函数

$$h(x)=g(x)-g(-x),\quad x\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

因$n \geq 2$ 蕴含球面$\mathbb{S}^{n-1}$是连通集(实为道路连通, 见上节**作业题8.**) 且$\mathbb{S}^{n-1}$ 是紧集(有界闭), 故根据介质定理知$h(\mathbb{S}^{n-1})$ 是一个有界闭区间(区间端点为h的最小值和最大值). 再因h 是奇函数, 故$h(\mathbb{S}^{n-1})$是一个关于原点对称的闭区间, 即$h(\mathbb{S}^{n-1}) = [-b, b], b \geq 0$. 于是$0 \in h(\mathbb{S}^{n-1})$, 即存在$\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$ 使得$h(\mathbf{e}) = 0$. $\square$

最后讲一个与连通性和连续性有关的命题, 它在下面学习多元函数微分学和研究极值问题时有用.

【命题7.37.】设$E \subset \mathbb{R}^n$为连通集, 映射$f : E \to \mathbb{R}^m$ 连续. 假设f局部为常值,即对任意$x \in E$ 存在$\delta_x > 0$ 使得$f(y) = f(x)$ for all $y \in E \cap B(x, \delta_x)$. 则$f(x) \equiv$ 常值, $x \in E$.

【证】取定$a \in E$. 来证明$f(x) \equiv f(a)$ 于E. 假设, $f(x) \not\equiv f(a)$ 于E. 令

$$A = \{x \in E \mid f(x) = f(a)\}, \quad B = \{x \in E \mid f(x) \neq f(a)\}.$$

则

$$E = A \cup B, \quad A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset.$$

因E 是连通集, 故或者$\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, 或者$A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, 二者必有一个成立.

我们来导出矛盾. 用两种方法.

[方法1] 先设$\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. 取$x_0 \in \overline{A} \cap B$. 由假设知存在$\delta > 0$ 使得$f(x) \equiv f(x_0), x \in E \cap B(x_0, \delta)$. 另一方面由闭包的序列刻画, 存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 使得$x_n \to x_0\,(n \to \infty)$. 于是对于$n >> 1$ 有$x_n \in E \cap B(x_0, \delta)$ 从而由A, B的定义导出$f(a) = f(x_n) = f(x_0) \neq f(a)$ 矛盾.

再设$A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. 取$x_0 \in A \cap \overline{B}$. 如上, 由假设知存在$\delta > 0$ 使得$f(x) \equiv f(x_0), x \in E \cap B(x_0, \delta)$. 另一方面由闭包的序列刻画, 存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ 使得$x_n \to x_0\,(n \to \infty)$. 于是对于$n >> 1$ 有$x_n \in E \cap B(x_0, \delta)$ 从而由A, B的定义导出$f(a) = f(x_0) = f(x_n) \neq f(a)$ 矛盾.

[方法2] 我们将找到两个开集G_A, G_B 满足$E \cap G_A = A, E \cap G_B = B$. 如果此事办成, 则

$$A \cap G_B = E \cap G_A \cap G_B = [E \cap G_A] \cap [E \cap G_B] = A \cap B = \emptyset,$$

$$B \cap G_A = E \cap G_B \cap G_A = [E \cap G_B] \cap [E \cap G_A] = B \cap A = \emptyset$$

也即$A \subset (G_B)^c, B \subset (G_A)^c$. 但开集的余集$(G_A)^c, (G_B)^c$ 是闭集, 故由闭包的单调性和闭集的性质有

$$\overline{A} \cap B \subset \overline{(G_B)^c} \cap G_B = (G_B)^c \cap G_B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \cap B = \emptyset,$$

$$A \cap \overline{B} \subset G_A \cap \overline{(G_A)^c} = G_A \cap (G_A)^c = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cap \overline{B} = \emptyset$$

也即得到$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. 这就与$E$ 是连通集矛盾. 这个矛盾便证明了$f(x) \equiv f(a)$ 于E.

G_A, G_B 的构造: 对任意$x \in A$, 由假设, 存在$\delta_x > 0$使得对任意$y \in E \cap B(x, \delta_x)$ 都有$f(y) = f(x)$. 但$f(x) = f(a)$, 故对任意$y \in E \cap B(x, \delta_x)$ 都有$f(y) = f(a)$. 这证明了$E \cap B(x, \delta_x) \subset A$. 令

$$G_A = \bigcup_{x \in A} B(x, \delta_x).$$

则G_A 是开集且$G_A \supset A$ 从而有$E \cap G_A = A$.

对任意$x \in B$, 即$x \in E$ 且$f(x) \neq f(a)$. 因f 在E 上连续, 故对于$|f(x) - f(a)| > 0$, 在$\eta_x > 0$ 使得对任意$y \in E \cap B(x, \eta_x)$ 都有$|f(y) - f(x)| < |f(x) - f(a)|$. 这蕴含: 对任意$y \in E \cap B(x, \eta_x)$ 都有$f(y) \neq f(a)$. 这证明了$E \cap B(x, \eta_x) \subset B$. 令

$$G_B = \bigcup_{x \in B} B(x, \eta_x).$$

则G_B 是开集且$G_B \supset B$ 从而有$E \cap G_B = B$. □

下面我们将引入距离函数, 它是很有用的函数.

【集合间的距离, 点到集合的距离】设(X, ρ)为一度量空间, $A, B \subset X$非空. 定义A, B的距离$\rho(A, B)$为

$$\rho(A, B) = \rho(B, A) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y).$$

而定义X中的一点x到一个非空集合$E \subset X$的距离定义为单点集$\{x\}$ 与E的距离, 即

$$\rho(x, E) = \rho(\{x\}, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y).$$

【当$E = \emptyset$时可以根据需要定义$\rho(x, \emptyset) \equiv +\infty$ 或$\rho(x, \emptyset) \equiv 1$. 】

显见当$x \in E$ 时$\rho(x, E) = 0$. 反之$\rho(x, E) = 0$ 不一定蕴含$x \in E$, 它严重依赖于集合E的拓扑性质(例如一个无理数与有理数集的距离是零, 但无理数当然不属于有理数

集), 一个充分条件是: E 是闭集, 此时则必有$x \in E$. 事实上由$\rho(x, E) = 0$ 和下确界的定义知存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$使得$\rho(x, x_n) \to \rho(x, E) = 0\,(n \to \infty)$. 因$E$闭, 故由闭集的序列刻画知$x \in E$.

同学们会看到, 距离函数$x \mapsto \rho(x, E)$ 在研究集合和函数方面有很多简单直接的应用. **距离函数 $\rho(x, E)$ 是个好东西！**

【命题7.38(距离函数的基本性质)】

设(X, ρ)为一度量空间. 则

(a) Lipschitz连续性：对任意非空集合$E \subset X$有

$$|\rho(x, E) - \rho(y, E)| \le \rho(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$

(b) 对任意非空集合$E \subset X$有

$$\rho(x, E) = \rho(x, \overline{E}) \qquad \forall\, x \in X.$$

(c) 对任意非空集合$E \subset X$ 和任意$x \in X$ 有:

$$\rho(x, E) = 0 \iff x \in \overline{E}.$$

特别有

$$\text{若}E\text{是闭集, 则:} \quad \rho(x, E) = 0 \iff x \in E.$$

等价地,

$$\text{若}E\text{是闭集, 则:} \quad \rho(x, E) > 0 \iff x \notin E.$$

(d) 若A, B都是X中的非空紧集, 则存在$a \in A, b \in B$ 使得

$$\rho(A, B) = \rho(a, b).$$

特别可知：若A, B都是X中的非空紧集. 则: $A \cap B = \emptyset \iff \rho(A, B) > 0$.

(e) 对于X的任意非空子集A, B有

$$\rho(A, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B}).$$

【证】(a): 对任意$x, y \in X$ 有

$$
\begin{aligned}
&\forall\, z \in E \text{ 有 } \rho(x,E) \le \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \\
&\Longrightarrow \rho(x,E) - \rho(x,y) \le \rho(y,z) \qquad \forall\, z \in E, \\
&\Longrightarrow \rho(x,E) - \rho(x,y) \le \inf_{z\in E} \rho(y,z) = \rho(y,E).
\end{aligned}
$$

同理有$\rho(y,E) - \rho(x,y) \le \rho(x,E)$. 所以$|\rho(x,E) - \rho(y,E)| \le \rho(x,y)$.

(b): 由$E \subset \overline{E}$ 和下确界的性质易见$\rho(x,E) \ge \rho(x,\overline{E})$. 另一方面再由下确界的定义知对每个$n \in \mathbb{N}$ 存在$x_n \in \overline{E}$ 使得$\rho(x,x_n) < \rho(x,\overline{E}) + 1/n$. 而对于$x_n \in \overline{E}$ 存在$\widetilde{x}_n \in E$ 使得$\rho(x_n, \widetilde{x}_n) < 1/n$. 于是得到

$$
\rho(x,E) \le \rho(x,\widetilde{x}_n) \le \rho(x,x_n) + \rho(x_n,\widetilde{x}_n) < \rho(x,\overline{E}) + \frac{2}{n}, \quad n = 1,2,3,\dots.
$$

令$n \to \infty$ 得到

$$
\rho(x,E) \le \lim_{n\to\infty} \left(\rho(x,\overline{E}) + \frac{2}{n}\right) = \rho(x,\overline{E}).
$$

所以$\rho(x,E) = \rho(x,\overline{E})$.

(c): 设$\rho(x,E) = 0$, 则存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$使得$0 = \rho(x,E) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x,x_n)$. 这表明$E \ni x_n \to x \in X$. 由闭包的序列刻画知$x \in \overline{E}$.

反之设$x \in \overline{E}$, 则由闭包的序列刻画知存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$使得$x_n \to x\,(n \to \infty)$. 于是有$\rho(x,E) \le \rho(x,x_n) \to 0\,(n \to \infty)$. 因此$\rho(x,E) = 0$.

(d): 由确界的定义知存在$a_n \in A, b_n \in B$ 使得

$$
\rho(A,B) \le \rho(a_n,b_n) < \rho(A,B) + 1/n, \quad n = 1,2,3,\dots.
$$

因$A \times B$ 是乘积度量空间$(X \times X, \varrho)$中的紧集, 其中(例如)
$\varrho((x,x'),(y,y')) = (\rho(x,y)^2 + \rho(x',y')^2)^{1/2}$, 故由$(a_n,b_n) \in A \times B$ 和$A \times B$的列紧性, 存在子列$\{(a_{n_k}, b_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ 和$(a,b) \in A \times B$ 使得$(a_{n_k}, b_{n_k}) \to (a,b)\,(k \to \infty)$. 因乘积度量空间中的收敛等价于按坐标收敛, 故有$a_{n_k} \to a$, $b_{n_k} \to b\,(k \to \infty)$. 由此和关于度量的估计式(见§7.1 的作业题1) 有

$$
\rho(a_{n_k}, b_{n_k}) \to \rho(a,b) \quad (k \to \infty).
$$

所以

$$
\rho(A,B) = \lim_{n\to\infty} \rho(a_n,b_n) = \lim_{k\to\infty} \rho(a_{n_k}, b_{n_k}) = \rho(a,b).
$$

[注:] 也可利用连续函数性质进行证明: 函数$(x,y)\mapsto\rho(x,y)$ 在$X\times X$ 上连续(关于乘积空间的度量ϱ) 从而在紧集$A\times B$ 上连续, 因此它在$A\times B$有最小值: 存在$(a,b)\in A\times B$使得

$$\rho(a,b)=\min_{(x,y)\in A\times B}\rho(x,y)=\inf_{x\in A,y\in B}\rho(x,y).$$

(e): 由下确界的定义和$A\subset\overline{A},B\subset\overline{B}$ 有$\rho(A,B)\ge\rho(\overline{A},\,\overline{B})$. 反向不等式的证明与上面类似, 对任意$n\in\mathbb{N}$ 存在$a_n\in\overline{A},b_n\in\overline{B}$ 使得

$$\rho(\overline{A},\,\overline{B})\le\rho(a_n,b_n)<\rho(\overline{A},\,\overline{B})+\frac{1}{n}.$$

而由闭包的等价定义知对于$a_n\in\overline{A},b_n\in\overline{B}$ 存在$\widetilde{a}_n\in A,\widetilde{b}_n\in B$ 使得$\rho(a_n,\widetilde{a}_n)<1/n,\rho(b_n,\widetilde{b}_n)<1/n$. 于是有

$$\begin{aligned}\rho(A,B)&\le\rho(\widetilde{a}_n,\widetilde{b}_n)\le\rho(\widetilde{a}_n,a_n)+\rho(a_n,b_n)+\rho(b_n,\widetilde{b}_n)\\&\le\frac{1}{n}+\rho(\overline{A},\,\overline{B})+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\rho(\overline{A},\,\overline{B})+\frac{3}{n},\quad n=1,2,3,\dots.\end{aligned}$$

令$n\to\infty$ 即得

$$\rho(A,B)\le\lim_{n\to\infty}\left(\rho(\overline{A},\,\overline{B})+\frac{3}{n}\right)=\rho(\overline{A},\,\overline{B}).$$

所以$\rho(A,B)=\rho(\overline{A},\,\overline{B})$. □

下面的命题指出, 对于欧式空间$\mathbb{R}^n$, 距离函数有更好的性质, 这归功于Weierstrass极限点定理和$\mathbb{R}^n$的完备性.

【命题7.38(续: $\mathbb{R}^n$中距离函数的进一步的性质)】

对欧空间$\mathbb{R}^n=(\mathbb{R}^n,\rho),\rho(x,y)=|x-y|$, 我们有:

(a) 紧集与闭集的距离可达: 若$\mathbb{R}^n$中两个非空集合A,B 一个为紧集另一个为闭集, 则存在 $a\in A,b\in B$ 使得

$$\rho(A,B)=|a-b|.$$

(b) 点到闭集的距离可达: 若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是非空闭集, 则

$$\forall\,x\in\mathbb{R}^n\quad\exists\,x_0\in E\quad\text{s.t.}\quad\rho(x,E)=|x-x_0|.$$

因此当E为闭集时, $\rho(x,E)=0\Longleftrightarrow x\in E.$

因此一般情形是在闭包中到达: 对任意非空集合$E\subset\mathbb{R}^n$ 有

$$\forall\,x\in\mathbb{R}^n\quad\exists\,x_0\in\overline{E}\quad\text{s.t.}\quad\rho(x,E)=\rho(x,\overline{E})=|x-x_0|.$$

【证】(a): 不妨设A是紧集, B是闭集. 由下确界的定义存在点列$a_k \in A, b_k \in B$使得

$$\rho(A,B) \le |a_k - b_k| < \rho(A,B) + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

因A紧故A有界闭, 因此存在$0 < R < +\infty$使得$|x| \le R$ for all $x \in A$. 由此得到

$$|b_k| \le |b_k - a_k| + |a_k| < \rho(A,B) + 1 + R, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

于是$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都是有界点列. 因此$\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 是$A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 中的有界点列. 据Weierstrass 极限点定理知存在子列$\{(a_{k_j}, b_{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ 和$(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 使得

$$|(a_{k_j}, b_{k_j}) - (a,b)| \to 0 \quad (j \to \infty).$$

即

$$a_{k_j} \to a, \quad b_{k_j} \to b \quad (j \to \infty).$$

因A, B 都是闭集, 故由闭集关于极限封闭知$a \in A, b \in B$. 最后得到

$$\rho(A,B) = \lim_{k\to\infty} |a_k - b_k| = \lim_{j\to\infty} |a_{k_j} - b_{k_j}| = |a - b|.$$

(b): 设E为非空闭集. 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 单点集$\{x\}$ 是闭集. 由$\rho(x,E) = \rho(\{x\}, E)$ 和性质(a) 即知结论成立. $\Box$

【**例**】设(X,ρ)为一度量空间, $\emptyset \neq E \subset X$. 对于$\varepsilon > 0$, 令

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in X \mid \rho(x,E) < \varepsilon\}.$$

则Ω_ε是包含E的开集并且

$$\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) \le \mathrm{diam}(E) + 2\varepsilon.$$

【证】显然$E \subset \Omega_\varepsilon$. 令$f(x) = \rho(x,E)$. 则$f : X \to \mathbb{R}$连续. 因此

$$\Omega_\varepsilon = f^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \quad \text{是}X\text{的开集}.$$

也可通过证明余集$\Omega_\varepsilon^c = \{x \in X \mid \rho(x,E) \ge \varepsilon\}$是闭集来证明$\Omega_\varepsilon$ 是开集. 设$\Omega_\varepsilon^c \ni x_k \to x \in X\,(k \to \infty)$. 则有

$$\begin{aligned}&\rho(x,E) \ge \rho(x_k,E) - \rho(x_k,x) \ge \varepsilon - \rho(x_k,x)\\ &\Longrightarrow \rho(x,E) \ge \lim_{k\to\infty}\Big(\varepsilon - \rho(x_k,x)\Big) = \varepsilon \quad \Longrightarrow x \in \Omega_\varepsilon^c.\end{aligned}$$

所以Ω_ε^c是闭集.

下面证明题中的直径不等式. 若$\mathrm{diam}(E)=+\infty$, 则不等式是显然的. 设$\mathrm{diam}(E)<+\infty$. 对任意$x,y\in\Omega_\varepsilon$ 有$\rho(x,E)<\varepsilon,\rho(y,E)<\varepsilon$. 由下确界的定义知存在$\widetilde{x},\widetilde{y}\in E$ 使得

$$\rho(x,\widetilde{x})<\varepsilon,\quad \rho(y,\widetilde{y})<\varepsilon$$

于是有

$$\rho(x,y)\le\rho(x,\widetilde{x})+\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})+\rho(\widetilde{y},y)<\varepsilon+\mathrm{diam}(E)+\varepsilon.$$

由$x,y\in\Omega_\varepsilon$的任意性得知

$$\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon)\le\mathrm{diam}(E)+2\varepsilon. \qquad \Box$$

【**例**】设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 非空, $\varepsilon>0$. 令

$$\Omega_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\rho(x,E)<\varepsilon\},$$

$$H_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\rho(x,E)\le\varepsilon\}.$$

则有

$$\overline{\Omega}_\varepsilon=H_\varepsilon. \tag{$*$}$$

此外有: Ω_ε 是开集且$E\subset\overline{E}\subset\Omega_\varepsilon$.

[闭包等式($*$) 是2012级孟成同学提醒并证明的.]

【证】由距离函数的性质**命题 7.38**之**(c)** 知$\rho(x,E)\equiv\rho(x,\overline{E})$. 因此实际上有

$$\Omega_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\rho(x,\overline{E})<\varepsilon\},\quad H_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\rho(x,\overline{E})\le\varepsilon\}.$$

由此可知包含关系$E\subset\overline{E}\subset\Omega_\varepsilon$ 是显然的. Ω_ε 是开集已在前面证明了. 但现在可以用连续函数的性质证明Ω_ε 是开集, H_ε 是闭集.

令$f(x)=\rho(x,\overline{E})$. 则$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$连续且$\Omega_\varepsilon,H_\varepsilon$等于$f^{-1}$的逆象:

$$\Omega_\varepsilon=f^{-1}((-\infty,\varepsilon)),\quad H_\varepsilon=f^{-1}((-\infty,\varepsilon]).$$

于是由连续函数的性质—— 开集的逆象是开集, 闭集的逆象是闭集—— 即知Ω_ε是$\mathbb{R}^n$中的开集, H_ε是$\mathbb{R}^n$中的闭集.

来证明$\overline{\Omega}_\varepsilon = H_\varepsilon$. 首先由闭包运算的单调性、$\Omega_\varepsilon \subset H_\varepsilon$ 以及 H_ε 是闭集有 $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset \overline{H}_\varepsilon = H_\varepsilon$. 来证反向包含$H_\varepsilon \subset \overline{\Omega}_\varepsilon$ 也成立. 任取$x \in H_\varepsilon$. 由$\overline{E}$是闭集和H_ε的定义知存在$x_0 \in \overline{E}$ 使得$|x - x_0| = \rho(x, \overline{E}) \le \varepsilon$. 令

$$x_k = (1 - \frac{1}{k})x + \frac{1}{k}x_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

则

$$\begin{aligned}
&x_k - x_0 = (1 - \frac{1}{k})(x - x_0), \quad x_k - x = \frac{1}{k}(x_0 - x), \\
&\rho(x_k, \overline{E}) \le |x_k - x_0| = (1 - \frac{1}{k})|x - x_0| \le (1 - \frac{1}{k})\varepsilon < \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \\
&x_k - x = \frac{1}{k}(x_0 - x) \to 0 \ \ (k \to \infty).
\end{aligned}$$

因此$\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \Omega_\varepsilon$ 且$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. 由闭包的序列刻画知$x \in \overline{\Omega}_\varepsilon$. 所以$H_\varepsilon \subset \overline{\Omega}_\varepsilon$. 这就证明了$\overline{\Omega}_\varepsilon = H_\varepsilon$. □

下面学习一致收敛和相关性质.

【在一致收敛下, 极限函数保持有界性和连续性】

回忆: 函数$f : E \to Y$有界是指其值域$f(E)$是$Y = (Y, d)$中的有界集, 即

$$\mathrm{diam}(f(E)) = \sup_{x,y\in E} d(f(x), f(y)) < +\infty.$$

【定理7.39.】设$(X, \rho), (Y, d)$为两个度量空间, $E \subset X$. 设映射序列$f_n : E \to Y$在E上一致收敛于映射$f : E \to Y$, 即

$$\sup_{x\in E} d(f_n(x), f(x)) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

则: 若每个f_n都在E上有界, 则f也在E上有界;

若每个f_n都在E上连续, 则f也在E上连续.

【证】先设每个f_n都在E上有界. 由一致收敛知存在$N \in \mathbb{N}$使得

$$\sup_{x\in E} d(f_N(x), f(x)) < 1.$$

据此, 对任意$x, y \in E$ 有

$$\begin{aligned}
&d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(y)) + d(f_N(y), f(y)) \\
&\le 1 + d(f_N(x), f_N(y)) + 1 \le 2 + \mathrm{diam}(f_N(E))
\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{diam}(f(E)) = \sup_{x,y\in E} d(f(x), f(y)) \le 2 + \operatorname{diam}(f_N(E)) < +\infty.$$

所以f在E上有界.

现在设每个f_n都在E上连续. 任取$x_0 \in E$, 来证f在x_0连续. 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/3 > 0$, 由一致收敛知存在$N \in \mathbb{N}$使得$\sup\limits_{x\in E} d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon/3$. 对任意$x \in E$, 有

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\le d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), d_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &\le 2\sup_{x\in E} d(f_N(x), f(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) < 2\varepsilon/3 + d(f_N(x), f_N(x_0)). \end{aligned}$$

因f_N 连续, 故存在$\delta > 0$ 使得当$x \in E$且$\rho(x, x_0) < \delta$ 时$d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/3$. 于是当$x \in E$且$\rho(x, x_0) < \delta$ 时

$$d(f(x), f(x_0)) < 2\varepsilon/3 + d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon.$$

所以f在任意点$x_0 \in E$ 连续. 所以f在E上连续. $\square$

【一致度量下连续函数空间的完备性】

【定理7.40.】设$(X, \rho), (Y, d)$为两个度量空间, $E \subset X$. 设$C_b(E, Y)$ 是从E到Y的**有界的**连续映射的全体[4]. 在函数集$C_b(E, Y)$上定义度量ϱ_∞ (称之为**一致度量**):

$$\varrho_\infty(f, g) = \sup_{x\in E} d(f(x), g(x)), \qquad f, g \in C_b(E, Y).$$

假设(Y, d) 是完备的, 则度量空间$(C_b(E, Y), \varrho_\infty)$也是完备的.

【证】先证明ϱ_∞确是$C_b(E, Y)$ 上的度量. 取定一点$x_0 \in E$. 则对任意$f, g \in C_b(E, Y)$和任意$x \in E$ 有

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\le d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) \\ &\le \operatorname{diam}(f(E)) + d(f(x_0), g(x_0)) + \operatorname{diam}(g(E)). \end{aligned}$$

取上确界得到

$$\sup_{x\in E} d(f(x), g(x)) \le \operatorname{diam}(f(E)) + d(f(x_0), g(x_0)) + \operatorname{diam}(g(E)) < +\infty$$

这表明$\varrho_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in E} d(f(x), g(x)) < +\infty$ 对所有$f, g \in C_b(E, Y)$成立. 因此ϱ_∞在$C_b(E, Y) \times C_b(E, Y)$上有定义.

[4]**这里下标b 提示英文词bounded (有界的).**

(i) 正定性: 易见对任意$f, g \in C_b(E, Y)$ 有$\varrho_\infty(f, g) \geq 0$ 并且

$$\varrho_\infty(f, g) = 0 \Longleftrightarrow f(x) \equiv g(x) \text{ 于} E \text{ 即} f = g.$$

(ii) 对称性: 对任意$f, g \in C_b(E, Y)$ 有

$$\varrho_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} d(f(x), g(x)) = \sup_{x \in E} d(g(x), f(x)) = \varrho_\infty(g, f).$$

(iii) 三角不等式: 对任意$f, g, h \in C_b(E, Y)$ 有

$$\begin{aligned}
&\varrho_\infty(f, h) = \sup_{x \in E} d(f(x), h(x)) \leq \sup_{x \in E} \Big(d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \Big) \\
&\leq \sup_{x \in E} d(f(x), g(x)) + \sup_{x \in E} d(g(x), h(x)) = \varrho_\infty(f, g) + \varrho_\infty(g, h).
\end{aligned}$$

这证明了ϱ_∞是$C_b(E, Y)$ 上的度量.

现在证明$(C_b(E, Y), \varrho_\infty)$是完备的. 设$\{f_n\}_{n=1}^\infty$为$(C_b(E, Y), \varrho_\infty)$中的任一Cauchy 列, 即

$$\lim_{m > n \to \infty} \varrho_\infty(f_m, f_n) = 0.$$

对任意$x \in E$, 由

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varrho_\infty(f_m, f_n)$$

知

$$\lim_{m > n \to \infty} d(f_m(x), f_n(x)) = 0.$$

因此$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是(Y, d)是的Cauchy列. 因(Y, d)完备, 故(由极限的唯一性)存在唯一的元素$f(x) \in Y$ 使得$\lim_{n \to \infty} d(f_n(x), f(x)) = 0$ 即$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. 以这极限方式我们得到了一个映射$f : E \to Y$.

下证$\{f_n\}_{n=1}^\infty$在E上一致收敛于f. 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得当$m > n \geq N$ 时$\varrho_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon$. 由此, 对任意$n \geq N$ 和任意$x \in E$ 有: $\forall\, m > n$

$$\begin{aligned}
&d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) \\
&\leq \varrho_\infty(f_m, f_n) + d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon + d(f_m(x), f(x)).
\end{aligned}$$

令$m \to \infty$ 得到

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon + \lim_{m \to \infty} d(f_m(x), f(x)) = \varepsilon.$$

因这不等式对任意$n \geq N$ 和$x \in E$ 成立, 故对$x \in$取上确界得到

$$\sup_{x \in E} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}d(f_n(x),f(x))=0$ 即$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E上一致收敛于f. 据上一定理知f 在E上有界且连续, 即$f\in C_b(E,Y)$. 于是上述一致收敛可写成$\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_\infty(f_n,f)=0$. 这就证明了$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$(C_b(E,Y),\varrho_\infty)$ 收敛. 所以$(C_b(E,Y),\varrho_\infty)$是完备的度量空间. $\square$

因为紧集上的连续映射都是有界的, 故由上面定理立刻得到下面常用的定理:

【定理7.41.】设(X,ρ)为一度量空间, $K\subset X$ 为一紧集, (Y,d)为一完备度量空间. 则在一致度量

$$\varrho_\infty(f,g)=\max_{x\in K}d(f(x),g(x)),\qquad f,g\in C(K,Y)$$

下, $(C(K,Y),\varrho_\infty)$是完备的度量空间.

【证】由K是紧集知$C(K,Y)=C_b(K,Y)$. 又对任意$f,g\in C(K,Y)$ 对任意$x,y\in K$有

$$\begin{aligned}&d(f(x),g(x))\le d(f(x),f(y))+d(f(y),g(y))+d(g(y),g(x))\\ &\Longrightarrow\ d(f(x),g(x))-d(f(y),g(y))\le d(f(x),f(y))+d(g(y),g(x)).\end{aligned}$$

交换x,y 同样有

$$d(f(y),g(y))-d(f(x),g(x))\le d(f(y),f(x))+d(g(x),g(y)).$$

因此

$$|d(f(x),g(x))-d(f(y),g(y))|\le d(f(x),f(y))+d(g(y),g(x)).$$

这蕴含实值函数

$$x\mapsto d(f(x),g(x)),\quad x\in K$$

在K 上连续. 因K是紧集, 所以最大值$\max\limits_{x\in K}d(f(x),g(x))$ 存在. 因此

$$\varrho_\infty(f,g)=\max_{x\in K}d(f(x),g(x))=\sup_{x\in K}d(f(x),g(x))<+\infty.$$

所以由上一定理知$(C(K,Y),\varrho_\infty)$是完备的度量空间. $\square$

应用到常用的度量空间— 赋范线性空间

如果在上述定理中将完备的度量空间Y为常见的完备的赋范线性空间, 例如取$Y=\mathbb{R},Y=\mathbb{C}$ 或$Y=\mathbb{R}^m$, 其中范数欧氏范数$|\cdot|$ (即分别是实数的绝对值、复数的模和向

量的长度), 而对函数取一致范数$\|\cdot\|_\infty$, 例如以$Y=\mathbb{R}^m$为例：

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E}|f(x)|,\quad f\in C_b(E,\mathbb{R}^m),\quad E\subset X\text{ 是}X\text{的任一子集;}$$

$$\|f\|_\infty=\max_{x\in K}|f(x)|,\quad f\in C(K,\mathbb{R}^m),\quad K\subset X\text{ 是}X\text{的紧子集.}$$

则$(C_b(E,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_\infty),(C(K,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_\infty)$ 都是完备的赋范线性空间(即Banach 空间). 这是因为$C_b(E,\mathbb{R}^m),C(K,\mathbb{R}^m)$关于函数的加法和数乘封闭, 因此它们是(实)线性空间, 而$\varrho_\infty(f,g)=\|f-g\|_\infty$ 就是上面定义的一致度量.

更具体些, 例如取度量空间$X=\mathbb{R}^n$, 并取$E=[0,+\infty)^n$, $K=[a,b]^n$. 则

$(C_b([0,+\infty)^n,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_\infty)$, $(C([a,b]^n,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_\infty)$ 都是完备的赋范线性空间, 等等.

注意适应记号! 对于不同维数的欧氏空间$\mathbb{R}^m$, 其上的欧氏范数都用$|\cdot|$表示, 由$|\cdot|$诱导的度量也就都用同一记号$\rho(x,y)=|x-y|$. 例如对于$E\subset\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}^m$, $u_k:E\to\mathbb{R}^m$, 我们写

$$|x-y|,\quad |f(x)-f(y)|,\quad \Big|\sum_{k=1}^N u_k(x)\Big|,\quad \text{等等}$$

下面学习向量空间中的函数级数. 我们以欧空间为例.

【定义(向量值函数级数)】设$E\subset\mathbb{R}^n$, 映射$u_k:E\to\mathbb{R}^m, k=1,2,3,\dots$.

(1) 逐点收敛: 如果对任意$x\in E$, 向量值级数$\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(x)$ 都收敛, 即存在映射$S:E\to\mathbb{R}^m$ 使得

$$\sum_{k=1}^\infty u_k(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N u_k(x)=S(x)\qquad \forall\, x\in E$$

则称向量值函数级数$\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(x)$ 在E上收敛并称$S(x)=\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(x)$ 为$\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(x)$的和函数.

(2) 一致收敛: 若存在映射$S:E\to\mathbb{R}^m$ 使得部分和序列$\sum\limits_{k=1}^N u_k\ (N=1,2,3,\dots)$ 在E上一致收敛于S, 即

$$\sup_{x\in E}\Big|S(x)-\sum_{k=1}^N u_k(x)\Big|\to 0\quad (N\to\infty)$$

则称向量值函数级数$\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(x)$ 在E上一致收敛, 并称它一致收敛于$S(x)$. □

显然一致收敛必是逐点收敛. 因此一致收敛的极限函数$S(x)$ 也是$\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(x)$的和函数, 即$S(x)=\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(x)\ \forall\, x\in E$.

• **由函数级数定义的连续函数**　我们已知一致收敛的连续函数列的极限函数是连续函数. 很多时候可以用通项连续且一致收敛的函数级数构造所需的连续函数. 下面就是这方面最常用的定理——

【定理7.42(Weierstrass 优级数判别法)】 设$E \subset \mathbb{R}^n$, 映射$u_k : E \to \mathbb{R}^m$ 连续, $k = 1, 2, 3, ...$ 且存在正数列$\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$|u_k(x)| \le M_k \quad \forall\, x \in E, \forall\, k \in \mathbb{N}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

则向量值函数级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在E 上一致收敛, 因此和函数$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$E$上连续.

【证】令

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_k(x), \quad x \in E, \quad N = 1, 2, 3, \dots .$$

则对任意$x \in E$, 对任意$N' > N \ge 1$ 有

$$|S_{N'}(x) - S_N(x)| = \Big| \sum_{k=N+1}^{N'} u_k(x) \Big| \le \sum_{k=N+1}^{N'} |u_k(x)|$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{N'} M_k \le \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k.$$

由此有

$$\lim_{N' > N \to \infty} |S_{N'}(x) - S_N(x)| = 0.$$

因此$\{S_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}^m$中的Cauchy 列. 因此极限

$$S(x) := \lim_{N \to \infty} S_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \in \mathbb{R}^m$$

存在. 这样得到的极限函数$S(x)$在E上处处有定义. 来证明$S_N(x)$在E上一致收敛于$S(x)$. 在上面得到的不等式

$$|S_{N'}(x) - S_N(x)| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k \qquad \forall\, N' > N \ge 1$$

中, 令$N' \to \infty$ 得到

$$|S(x) - S_N(x)| = \lim_{N' \to \infty} |S_{N'}(x) - S_N(x)| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k \qquad \forall\, x \in E, N \in \mathbb{N}.$$

对$x \in E$取上确界　然后　令$N \to \infty$　得到

$$\sup_{x \in E} |S(x) - S_N(x)| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k \to 0 \quad (N \to \infty).$$

这表明$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$在E 上一致收敛于S. 因对每个$N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k$ 在E上连续, 故由前面的**定理7.39** 知S在E上连续, 即和函数$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$E$上连续. □

作为上面定理的一个应用, 我们学习连续映射的扩张定理. 这定理是说若一个映射在一个闭集上连续, 则可以这映射的定义域扩张到全空间使得扩充后的映射在全空间上连续.

为此我们需要连续映射的一个简单性质

【命题7.43.】设$E_1, E_2, ..., E_N \subset \mathbb{R}^n$ 为互不相交的非空闭集, $f : \bigcup_{k=1}^{N} E_k \to \mathbb{R}^n$. 则

$$f\text{在}\bigcup_{k=1}^{N} E_k \text{ 上连续} \Longleftrightarrow f\text{在每个}E_k\text{上连续}\,(k = 1, 2, ..., N).$$

【证】“$\Longrightarrow$”：设f在$\bigcup_{k=1}^{N} E_k$上连续. 则由连续的定义易见f在$\bigcup_{k=1}^{N} E_k$的每个子集上连续, 特别f在每个E_k上连续, $k = 1, 2, ..., N$.

“$\Longleftarrow$”：设f在每个E_k上连续$(k = 1, 2, ..., N)$. 任取$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{N} E_k$. 不妨设$x_0 \in E_1$. 则$x_0 \notin \bigcup_{k=2}^{N} E_k$. 因$\bigcup_{k=2}^{N} E_k$ 是闭集, 故有

$$\rho\Big(x_0, \bigcup_{k=2}^{N} E_k\Big) > 0.$$

对任意$\varepsilon > 0$, 由f在E_1上连续知存在$\delta > 0$ 使得当$x \in E_1$且$|x - x_0| < \delta$ 时$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 令

$$\delta_1 = \min\Big\{\delta,\ \rho\Big(x_0, \bigcup_{k=2}^{N} E_k\Big)\Big\}.$$

则$\delta_1 > 0$ 并且当$x \in \bigcup_{k=1}^{N} E_k$ 且$|x - x_0| < \delta_1$ 时, 必有$x \notin \bigcup_{k=2}^{N} E_k$, 因此只能是$x \in E_1$ 从而有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 所以$f$在$x_0$连续. 再由$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{N} E_k$ 的任意性知f在$\bigcup_{k=1}^{N} E_k$ 上连续. □

• **函数的支集:** 设f 从欧空间中的集合到欧空间的映射. 称f的定义域中使得$f(x) \neq 0$的x的集合的闭包为f的承载集或支撑集, 简称支集, 记作$\mathrm{supp} f$, 即

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in f\text{的定义域} \mid f(x) \neq 0\}}.$$

注意：因闭包是闭集, 故f的支集$\mathrm{supp}f$ 总是闭集. 此外易见当f 的定义域为闭集时有$\mathrm{supp}f \subset f$的定义域.

【定理7.44(连续映射延拓定理)】设$E \subset \mathbb{R}^n$为闭集, $f: E \to \mathbb{R}^m$ 连续. 则存在连续映射$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得 $F|_E = f$ 并且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|F(x)| = \sup_{x\in E}|f(x)|, \quad \mathrm{supp}F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(x, \mathrm{supp}f) \le 1\}.$$

特别若 E 是紧集, 则$\mathrm{supp}F$ 也是紧集.

【证】可以假定$E \ne \mathbb{R}^n$. 取定一点$x_0 \in E^c := \mathbb{R}^n \setminus E$, 令$r = \frac{1}{2}\min\{1,\, \rho(x_0, E)\}$,

$$E_r^c = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(x, E) \ge r\}, \quad A = E \cup E_r^c$$

并补充定义 $f(x) = 0$ 当 $x \in E_r^c$. 则由 E 和 E_r^c 为不相交的闭集知 f 在闭集 A 上连续. 此外易见

$$\sup_{x\in A}|f(x)| = \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

不难看出A 为无限集. 事实上对于 $r_1 = \rho(x_0, E) - r > 0$, 当$|x - x_0| < r_1$ 时有$\rho(x, E) \ge \rho(x_0, E) - |x - x_0| > \rho(x_0, E) - r_1 = r$, 因此$x \in E_r^c$. 这说明$B(x_0, r_1) \subset E_r^c \subset A$.

对于无限集A, 据习题课的结果知A 有一个**可数稠密子集** $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$. 令

$$\varphi_k(x) = \max\Big\{0,\ 2 - \frac{|x - a_k|}{\rho(x, A)}\Big\}, \qquad x \in A^c, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$f_c(x) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}\Big)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(a_k)\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}, \quad x \in A^c,$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \quad x \in A \\ f_c(x) & \text{if} \quad x \in A^c. \end{cases}$$

来证明这个F 即为f的一个满足要求的延拓.

首先, 为保证f_c 有意义, 须证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)} > 0 \qquad \forall\, x \in A^c. \tag{$*$}$$

事实上假如存在 $x \in A^c$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)} = 0$, 则一切 $\varphi_k(x) = 0$, 即

$$\rho(x, A) \le \frac{1}{2}|x - a_k|, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

因 A 闭, 故存在 $y \in A$ 使得 $\rho(x, A) = |x - y|$. 另一方面由 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 A 中稠密, 存在子列 $\{a_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 使得 $a_{k_j} \to y\,(j \to \infty)$. 于是得到

$$|x - y| = \rho(x, A) \le \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}|x - a_{k_j}| = \frac{1}{2}|x - y|$$

从而 $x = y \in A$, 这与 $x \in A^c$ 矛盾. 这证明了 $(*)$ 成立.

易见 φ_k 在 A^c 上连续且 $0 \le \varphi_k \le 2$. 因

$$\Big|\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}\Big| \le \frac{2}{2^k}, \quad \Big|\frac{f(a_k)\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}\Big| \le \frac{2}{2^k} \qquad \forall\, x \in A^c,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

故由Weierstrass 优级数判别法知向量值函数级数

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}, \qquad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}$$

都在 A^c 内连续. 因此映射 $x \mapsto f_c(x)$ 在开集 A^c 内连续. 此外由 f_c 的定义有

$$|f_c(x)| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}\Big)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(a_k)|\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)} \le \sup_{x\in A}|f(x)|, \quad x \in A^c$$

其中用到

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)}\Big)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{2^k(1 + |f(a_k)|)} = 1, \qquad x \in A^c.$$

由此和$F(x)$ 的定义有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|F(x)| \le \sup_{x\in A}|f(x)| = \sup_{x\in E}|f(x)| \quad \text{从而有} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|F(x)| = \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

现证明 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 任取 $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

先设$x_0 \in A^c$. 由A^c是开集知存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subset A^c$ 从而 $F(x) = f_c(x)\ \forall\, x \in B(x_0, \delta)$. 所以 F 在 x_0 连续.

其次设$x_0 \in A$. 由 f 在 A 上连续, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使当 $x \in B(x_0, \delta) \cap A$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 由此, 当 $x \in B(x_0, \delta/3)$ 时, 若 $x \in A$, 则 $|F(x) - F(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; 若 $x \in A^c$, 则对于所有满足 $\varphi_k(x) > 0$ 的 k 有

$$|x - a_k| < 2\rho(x, A) \le 2|x - x_0| < 2\delta/3$$

从而有

$$|x_0 - a_k| \le |x_0 - x| + |x - a_k| < \delta/3 + 2\delta/3 = \delta$$

因此$|f(x_0)-f(a_k)|<\varepsilon$. 于是由

$$F(x)=f_c(x)=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}\Big)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(a_k)\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}$$

和

$$F(x_0)=f(x_0)=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}\Big)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(x_0)\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}$$

有 (注意$\varphi_k(x)=0$的项对求和无贡献, 即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{\cdots\}=\sum\limits_{k:\ \varphi_k(x)>0}\{\cdots\}$)

$$\begin{aligned}|F(x)-F(x_0)|&=\Big|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}\Big)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[f(a_k)-f(x_0)]\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}\Big|\\&\le\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}\Big)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f(a_k)-f(x_0)|\varphi_k(x)}{2^k(1+|f(a_k)|)}<\varepsilon\,.\end{aligned}$$

所以 F 在任一点 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 连续.

最后看 F 的支集：来证明

$$\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,F(x)\neq 0\}\subset\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\rho(x,\mathrm{supp}f)<2r\}.\qquad(**)$$

对满足 $F(x)\neq 0$ 的任意$x\in\mathbb{R}^n$, 若 $x\in A$, 则由 $f(x)=F(x)\neq 0$ 知 $x\in\mathrm{supp}f$ 从而有$\rho(x,\mathrm{supp}f)=0<2r$. 若 $x\in A^c$, 则由 $F(x)$ 的定义和$F(x)\neq 0$ 知存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $f(a_k)\varphi_k(x)\neq 0$. 这蕴含 $a_k\in E$ 且 $\varphi_k(x)>0$ 即 $|x-a_k|<2\rho(x,A)$. 而由 $A=E\cup E_r^c$ 和$x\notin A$ 知 $x\notin E_r^c$, 即 $\rho(x,E)<r$. 因此 $\rho(x,A)\le\rho(x,E)<r$. 于是此时x满足 $\rho(x,\mathrm{supp}f)\le|x-a_k|<2r$. 这证明了$(**)$ 成立. 由$(**)$得到

$$\mathrm{supp}F\subset\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\rho(x,\mathrm{supp}f)\le 2r\}\subset\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\rho(x,\mathrm{supp}f)\le 1\}.$$

定理证毕. □

【注】从f_c 和F的取法大家看到: 如果事先已知f的值域与0含于一个凸集中, 即对某个凸集$C\subset\mathbb{R}^m$ 有$f(E)\cup\{0\}\subset C$, 则延拓后的F满足$F(\mathbb{R}^n)\subset\overline{C}$ [也见§7.4作业题8.] 例如若$|f(x)|\le b$ for all $x\in E$, 则延拓后的F满足$|F(x)|\le b$ for all $x\in\mathbb{R}^n$. □

回到一般度量空间. 需要注意: 度量空间的完备与否, 一般与所用的度量有关（以后学习泛函分析可知这主要是对无穷维空间而言的). 我们举例说明这一点.

【例】设$[a,b] \subset \mathbb{R}$ 为有界闭区间, 在$C([a,b],\mathbb{R})$上考察两种范数一个是一致范数$\|\cdot\|_\infty$，一个是积分范数$\|\cdot\|_p$, $1 \le p < +\infty$:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \qquad f \in C([a,b]).$$

它们都是$C([a,b],\mathbb{R})$上的范数. (作业题)

【例】设$[a,b] \subset \mathbb{R}$ 为有界闭区间$(a < b)$, $\mathcal{R}([a,b])$为$[a,b]$上的实值(或复值)常义Riemann可积函数的全体. 按照通常的函数加法和数乘运算易见$\mathcal{R}([a,b])$便是一个实(或复)的线性空间。

因常义Riemann 可积的函数必有界, 故在$\mathcal{R}([a,b])$ 上可以使用一致范数$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. 此时$(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$是一个赋范线性空间.

但是$\mathcal{R}([a,b])$中的函数远不必连续, 因此用一致范数做其范数就太强, 不适于对积分—宏观行为— 的研究。一般对于可积函数的空间, 使用L^p范数, $1 \le p < +\infty$. 不过, 相应于$\mathcal{R}([a,b])$上的L^p范数, 人们需要对函数“相等”的定义作如下扩充:

$$\text{在}\mathcal{R}([a,b])\text{中定义} \qquad f = g \iff f = g \ \text{ a.e. 于 } [a,b].$$

后者表示f与g在$[a,b]$ 上几乎处处相等. 换言之我们把彼此几乎处处相等的函数看成是同一个函数. 例如常数0 就代表几乎处处等于0的任意函数. 当然, 大前提是: 所考虑的函数都属于$\mathcal{R}([a,b])$. 否则的话, 例如$[a,b]$上的有理数集的特征函数$f(x) = 1_{[a,b]\cap\mathbb{Q}}(x)$ 就几乎处处等于0, 但显然$f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

按照这个关于相等的约定, 易见$(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_p)$是一个赋范线性空间. $\square$

【例】设$[a,b] \subset \mathbb{R}$ 为有界闭区间$(a < b)$, $\mathcal{R}([a,b])$为$[a,b]$上的实值(或复值)常义Riemann可积函数的全体. 设$\|\cdot\|_\infty$(一致范数) 和$\|\cdot\|_p$(积分范数, $1 \le p < +\infty$)) 定义如上. 则对于相应的两个赋范线性空间有:

$$(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \text{ 是完备的, } (\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_p)\text{不是完备的.}$$

但这个完备的空间$(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ 由于一致范数$\|\cdot\|_\infty$要求太高, 其用途很窄.

而不完备的空间$(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_p)$ 由于积分范数$\|\cdot\|_\infty$适于研究积分, 其用途较广.

$(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$的完备性的证明留为本节作业.

$(\mathcal{R}([a,b]),\|\cdot\|_p)$的不完备性的证明(举例)需要用到第十章中的Lebesgue 积分理论. 但方法仍是常规方法. 这里我们给出证明大意, 略去的细节都是Lebesgue 积分理论的简单应用. 需要说明: 函数的L^p-范数$\|f\|_p$ 实际上最初是对所有Lebesgue p-次可积函数f定义的. 因$\mathcal{R}([a,b])$中的函数都是Lebesgue p-次可积的, 故$\|f\|_p$对所有$f\in\mathcal{R}([a,b])$当然有意义.

令$\mu(\cdot)$ 是$\mathbb{R}$上的Lebesgue 测度. 将$[a,b]$中的全体有理数和两个端点a,b 排成一列, 即令$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}=([a,b]\cap\mathbb{Q})\cup\{a,b\}$. 作开集$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n-2^{-n}\varepsilon,r_n+2^{-n}\varepsilon)$, 其中$\varepsilon=(b-a)/4$. 根据Lebesgbue测度的次可加性易见$\mu(G)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n}=(b-a)/2$. 令$K=[a,b]\setminus G$, 则$K$是闭集, $K\subset(a,b)$, 且

$$\mu(K)\ge\mu((a,b))-\mu(G)=b-a-\mu(G)\ge(b-a)/2>0.$$

考虑函数$f(x)=1_K(x),x\in\mathbb{R}$. 据Lebesgue 积分理论知$f$在$\mathbb{R}$上的任何有界区间上都是Lebesgue p-次可积的. 此外由f有界还知变上限积分$x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,+\infty)$上Lipschitz 连续. 令

$$f_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x+\frac{t}{n})\mathrm{d}t,\qquad x\in[a,b].$$

则f_n 在$[a,b]$ 上连续且按Lebesgue 积分有

$$\|f_n-f\|_p\le\int_0^1\Big(\int_a^b|f(x+\frac{t}{n})-f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\mathrm{d}t\to0\quad(n\to\infty).$$

因$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C([a,b])$ 故当然有$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{R}([a,b])$. 又由$\|f_n-f\|_p\to0\,(n\to\infty)$知$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是$(\mathcal{R}([a,b]),\|\cdot\|_p)$ 中的一个Cauchy 列. 假如$(\mathcal{R}([a,b]),\|\cdot\|_p)$是完备的, 则存在$g\in\mathcal{R}([a,b])$ 使得$\|f_n-g\|_p\to0\,(n\to\infty)$. 由极限的唯一性知$\|f-g\|_p=0$, 即$f=g$ a.e. 于$[a,b]$, 意即若令$Z=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)\ne g(x)\}$, 则$\mu(Z)=0$ (即Z是零集). 我们将导出矛盾: 一方面由$g\in\mathcal{R}([a,b])$ 知g的间断点集D_g是零集, 即$\mu(D_g)=0$, 另一方面由f的特性和$g=f$ a.e.于$[a,b]$又将导出$\mu(D_g)>0$. 为此我们先证明$G\setminus Z$在(a,b)中稠密,即对于任意开区间$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, 交集$(\alpha,\beta)\cap(G\setminus Z)\ne\emptyset$. 事实上由有理数稠密性和$G$的取法知存在$r_n\in(\alpha,\beta)\cap G$. 这说明开集$(\alpha,\beta)\cap G$ 非空因而必有$\mu((\alpha,\beta)\cap G)>0$. 于是由$(\alpha,\beta)\cap G\subset[(\alpha,\beta)\cap(G\setminus Z)]\cup Z$ 和$\mu(Z)=0$知

$$0<\mu((\alpha,\beta)\cap G)=\mu((\alpha,\beta)\cap(G\setminus Z))$$

从而可知$(\alpha,\beta)\cap(G\setminus Z)$非空.

来证明$K\setminus Z\subset D_g$, 即$K\setminus Z$中每点都是g的间断点. 对任意$x\in K\setminus Z$, 有$g(x)=f(x)=1_K(x)=1$. 因$K\subset(a,b)$, 故$x\in(a,b)$. 于是存在$N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$时$(x-1/n,x+1/n)\subset(a,b)$. 由$G\setminus Z$在$(a,b)$内稠密知$(x-1/n,x+1/n)\cap(G\setminus Z)\ne\emptyset$. 对每个$n\ge N$取$x_n\in(x-1/n,x+1/n)\cap(G\setminus Z)$, 则得到序列$\{x_n\}_{n=N}^{\infty}\subset G\setminus Z$ 满足$x_n\to x\,(n\to\infty)$. 而由$K=[a,b]\setminus G$ 知$g(x_n)=f(x_n)=1_K(x_n)=0, n=N,N+1,N+2,...$, 从而有$\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=0\ne g(x)=1$. 这说明$x$是$g$的一个间断点, 即$x\in D_g$. 所以$K\setminus Z\subset D_g$. 这就导出$\mu(D_g)\ge\mu(K\setminus Z)=\mu(K)>0$, 因此$D_g$不是零集. 这与$g\in\mathcal{R}([a,b])$矛盾. 这矛盾证明了当$1\le p<+\infty$时, $(\mathcal{R}([a,b]),\|\cdot\|_p)$ 不是完备的. □

作业题

1. 证明**命题7.32**, 即证明同胚关系是等价关系.

2. (设(X,ρ) 为度量空间, $E\subset X$是闭集. 证明E可表示成一列开集的交(陈书习题7.6.2(v)).

3.设(X,ρ) 为度量空间, $A,B\subset X$ 为X的非空闭集且$A\cap B=\emptyset$. 试构造两个开集$U_A\supset A, U_B\supset B$ 满足$\overline{U}_A\cap\overline{U}_B=\emptyset$.

[考虑$f(x)=\frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$. 证明$\rho(x,A)+\rho(x,B)>0$ for all $x\in X$. 考虑

$f^{-1}((-\infty,\frac{1}{3})), f^{-1}((-\infty,\frac{1}{3}]), f^{-1}((\frac{2}{3},+\infty)), f^{-1}([\frac{2}{3},+\infty))$.]

4. 陈书习题7.6.2(x).

5. 陈书习题7.6.4.

6. 设$(X,\rho),(Y,d)$ 为度量空间, $K\subset X$是紧集, $f:K\to Y$. 证明f在K上连续$\Longleftrightarrow f$的图像$G_f=\{(x,f(x))\mid x\in K\}$ 是$X\times Y$中的紧集.

[为证明一个非负数列$\lambda_n\to 0\,(n\to\infty)$, 可以先抽取$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个有极限的子列$\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_{n_k}=\limsup\limits_{k\to\infty}\lambda_n$. 这里用到事实: 一个实数列的上极限等于该数列的某个子列的极限.]

7. 设 $E_1,E_2,...,E_N$ $(N\in\mathbb{N})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中非空、互不相交的闭集. 设 $f:E=\bigcup_{i=1}^{N}E_i\to\mathbb{R}^m$ 且 f 在每个 E_i 上的限制 $f|_{E_i}$ 是连续的. 证明 f 在 E 上连续.

8. 设 A, B 为 $\mathbb{R}^n$ 中非空的不相交的闭集. 令$f: A\cup B\to\mathbb{R}, f(x)=0, x\in A; f(x)=1, x\in B$. 证明存在$F\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 使得$F|_{A\cup B}=f$ 且$0\le F(x)\le 1$ for all $x\in\mathbb{R}^n$.

[见连续映射延拓定理证明后的**注**.]

9. 设$f\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 满足$\lim\limits_{|x|\to+\infty}|f(x)|=+\infty$. [函数极限的定义与一元函数的情形相同, 也可以看本章最后一节中的定义.] 证明对任意紧集$K\subset\mathbb{R}^m$, 其原象集$f^{-1}(K)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,f(x)\in K\}$ 是紧集. [回忆: 在欧空间中, 紧= 有界+闭.]

10. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\omega_f(x)$ 为点振幅函数. 证明对任意$\varepsilon>0$, 集合 $\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\omega_f(x)<\varepsilon\}$ 是开集. 这里点振幅的定义与以前一样:

$$\omega_f(x)=\lim_{\delta\to0+}\sup_{y,z\in B(x,\delta)}|f(y)-f(z)|,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

11. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 一致连续. 证明f 至多是线性增长的, 即存在常数$a,b>0$ 使得

$$|f(x)|\le a+b|x|\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

[证法与一维相同.] 应用这一必要条件可知, 函数$f(x)=\langle\mathbf{e},x\rangle^2$ (其中$\mathbf{e}$ 为非零常向量) 和映射$f(x)=x_0+|x|x$ 在$\mathbb{R}^n$ 上都不是一致连续的.

12. 设$E\subset\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}^m$ 一致连续. 证明: 可以把f的定义域延拓到闭包$\overline{E}$上使得延拓后的映射(仍记为f) 在$\overline{E}$ 上仍然一致连续. [提示: 利用Cauchy 收敛准则可以做成所要的延拓.]

13(连续模). 设$E\subset\mathbb{R}^n, f:E\to\mathbb{R}^m$ 是有界映射. 令

$$\omega(f,\delta)=\sup_{x,y\in E;\,|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|,\quad\delta>0.$$

证明: f 在E 上一致连续 $\iff$ $\lim\limits_{\delta\to0+}\omega(f,\delta)=0$.

14. 设$K\subset\mathbb{R}^n$为紧集, 映射$f:K\to\mathbb{R}^m$连续. 令

$$\omega(f,\delta)=\max_{x,y\in K;\,|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|,\quad\delta>0.$$

证明这个max 确实存在(考察$(x,y)\mapsto|f(x)-f(y)|, (x,y)\in K\times K$, ...), 并且

$$\lim_{\delta\to0+}\omega(f,\delta)=0.$$

15. 设$\|\cdot\|$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的任一范数而$|\cdot|$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的欧氏范数. 证明存在常数$0<a<b<+\infty$ 使得

$$a|x|\le\|x\|\le b|x|\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}^n.$$

由此即知$\mathbb{R}^n$ 上的任何两个范数都是等价的(即互相控制).

[提示: 通过写$x=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 可以得到有限常数$b>0$使得$\|x\|\le b|x|$. 对另一方向的不等式, 考虑函数$f(x)=\|x\|$ 及其在单位球面$\mathbb{S}^{n-1}$上的行为. 这里$\mathbb{S}^{n-1}:=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|=1\}$.]

16. 默证**命题7.37.** (即关于连通集与常值映射的关系的命题)。

17. 令

$$\mathbb{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\},\quad\mathbb{S}^2_+=\mathbb{S}^2\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z\ge 0\}.$$

设$f:[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{S}^2$ 为球面坐标变换:

$$(\theta,\varphi)\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=f(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\\sin\theta\sin\varphi\\\cos\theta\end{pmatrix},\quad(\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi].$$

证明 (1) $f([0,\pi]\times[0,2\pi])=\mathbb{S}^2$, $f([0,\pi/2]\times[0,2\pi])=\mathbb{S}^2_+$.

(2) $\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2_+$ 都是道路连通集.

[对一般维数也可以建立球面坐标变换, 见讲义第八章.]

18. 设$f:[0,1]^n\to\mathbb{R}^m$ 连续且$f([0,1]^n)$ 为可数集. 证明$f=$常值映射.

19. 设$K=\partial[0,1]^2$, 函数$f:K\to\mathbb{R}$ 连续. 设$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in K$ 和$C\in\mathbb{R}$ 满足$f(x_1,y_1)<C<f(x_2,y_2)$. 证明方程$f(x,y)=C$ 在K中至少有两个不同的解.

20(上一题的推广). 设$E\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$. 设k为正整数. 我们称E是k-连通的, 如果对于E中任意两点$a,b\,(a\ne b)$, 存在k 条道路$\gamma_j\in C([0,1],E)$ 满足

$$\gamma_j(0)=a,\ \gamma_j(1)=b;\quad\gamma_i(s)\ne\gamma_j(t)\quad\forall\,s,t\in(0,1),\ \forall\,i\ne j\quad(i,j\in\{1,2,...,k\}).$$

设E是k-连通的, 函数$f:E\to\mathbb{R}$ 连续. 设$a,b\in E$, $a\ne b$ 且$f(a)<C<f(b)$. 证明方程$f(x)=C$ 在E中至少有k 个不同的解.

21. 设二元函数$f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ 连续. 假设$f(0,0)<C<f(1,1)$. 问方程$f(x,y)=C$在$[0,1]^2$中有多少不同的解？ [只需给出答案和相应的图示.]

22. 设二元函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续且

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}|f(x,y)|=1.$$

证明极限$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)$ 存在且等于-1或1. [函数极限的定义与一元函数的情形相同, 也可以看本章最后一节中的定义.] 此外对一元函数举例说明, 存在连续函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足$\lim\limits_{|x|\to+\infty}|f(x)|=1$但极限$\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)$ 不存在（注: 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在但二者不相等, 则也属于极限$\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)$ 不存在的情形). 本题与这个例子揭示了什么现象?

23. 设$n\ge 2, E\subset\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}$ 连续. 证明: 若E有内点(即$E^\circ\neq\emptyset$), 则f一定不是单射.

24. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 连续, $K\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集. 假设f 在K 上是单射并且对任意$x\in K$ 存在$\delta=\delta_x>0$ 使得f 在$B(x,\delta)$ 内是单射. 证明存在开集$\Omega\supset K$ 使得f在Ω 上是单射.

[建议考虑开集

$$\Omega_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\rho(x,K)<\varepsilon\},\quad \varepsilon>0.$$

利用反证法和Weierstrass极限点定理或$K\times K$的列紧性, 证明存在$\varepsilon>0$ 使得Ω_ε 即为满足问题要求的一个开集.

注: 本题若用正证法(有限覆盖方法)来证明, 则较繁/难. 2010级的**李泱**同学和2016级的**吴雨宸**同学先后给出了这种证明.]

25. 证明一致范数$\|\cdot\|_\infty$ 和积分范数$\|\cdot\|_p$确实都是$C([a,b],\mathbb{R})$上的范数并且$\|\cdot\|_\infty=\lim\limits_{p\to+\infty}\|\cdot\|_p$, 即

$$\|f\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p\qquad\forall\, f\in C([a,b],\mathbb{R}).$$

【注意验证范数的有限性!! 即需要证明对任意$f\in C([a,b])$ 都有$\|f\|_p<+\infty$.】由本节定理知$(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$是完备的, 但是对于积分范数$\|\cdot\|_p$ $(1\le p<+\infty)$, $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_p)$ 不是完备的. 对这件事来说, $p=1$和$1<p<+\infty$ 并无实质区别, 因此不妨设$p=1$ 和$[a,b]=[-1,1]$.

试通过连续函数列

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

证明$(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ 不是完备的.

[确定极限函数$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,(x \in [-1,1])$的具体表达式, 证明$\|f_n - f\|_1 \to 0\,(n \to \infty)$ (从而$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个Cauchy列), 证明不存在$g \in C([-1,1],\mathbb{R})$ 满足$\|f - g\|_1 = 0$, 证明不存在$g \in C([-1,1],\mathbb{R})$使得$\|f_n - g\|_1 \to 0\,(n \to \infty)$.]

26. 证明在一致范数$\|\cdot\|_\infty$下, $(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的赋范线性空间。

[证明中要用到零集的性质: 可数多个零集的并还是零集.]

§7.5 完备度量空间中的几个重要定理

下面来学习完备度量空间中的几条定理: **Baire 纲定理, Osgood 定理, Banach 压缩映射不动点定理,** 和常微分方程中的**Picard 定理**, 它们给出了完备度量空间中的一些深刻且很有用的性质.

【定理7.45(Baire 纲定理）】设(X,ρ)为一完备度量空间.

设$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的一列闭集, 使得其并集

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\quad \text{有内点, 即 } E^{\circ}\neq\emptyset.$$

则存在$n\in\mathbb{N}$ 使得F_n 有内点, 即$F_n^{\circ}\neq\emptyset$.

与此等价的另一叙述为:

设$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的一列开集, 其中每个G_n都在X中稠密, 即$\overline{G_n}=X$, $n=1,2,3,\dots$. 则交集$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$在$X$中稠密.

【证】先证明两个叙述的等价性.

假设第一个叙述成立, 设$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的一列开集, 其中每个G_n都在X中稠密. 令$F_n=X\setminus G_n$, 则F_n 是闭集且由**命题7.5** 知F_n无内点, 即$F_n^{\circ}=\emptyset, n=1,2,3,\dots$. 据假设知并集$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 无内点, 于是由$E=X\setminus(X\setminus E)$ 和**命题7.5** 知$X\setminus E$ 在X中稠密. 而由de Morgan 对偶律有

$$X\setminus E=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

所以$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$在$X$中稠密.

反之假设第二个叙述成立, 设$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的一列闭集使得其并集$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$在$X$中有内点. 令$G_n=F_n^c=X\setminus F_n$. 则$G_n$ 是开集且

$$X\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=E\quad\text{有内点.}$$

由**命题7.5** 知$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 在X中不稠密。于是由假设知必存在$n\in\mathbb{N}$ 使得G_n 不在X中稠密. 再由**命题7.5** 知, 这等于说$F_n=X\setminus G_n$ 有内点, 即$F_n^{\circ}\neq\emptyset$.

以上证明了两个叙述的等价性. 下面证明这一定理. 由于两个叙述等价, 故只需证其中的一个. 我们来证第二个叙述.

为证$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$在$X$中稠密, 只需证明对任意$x_0 \in X$和任意$\varepsilon_0 > 0$ 都有

$$B_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset, \qquad \text{其中 } B_0 = B(x_0, \varepsilon_0).$$

因G_1 在X中稠密, 故$B_0 \cap G_1 \neq \emptyset$. 又因$B_0, G_1$都是开集, 故$B_0 \cap G_1$是开集. 取$x_1 \in B_0 \cap G_1$, 则存在$0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0/2$ 使得$B(x_1, 2\varepsilon_1) \subset B_0 \cap G_1$. 令$B_1 = B(x_1, \varepsilon_1)$, 则有

$$\overline{B_1} \subset \{x \in X \mid \rho(x, x_1) \le \varepsilon_1\} \subset B(x_1, 2\varepsilon_1) \subset B_0 \cap G_1.$$

因G_2 在X中稠密, 故$B_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. 又因$B_1, G_2$都是开集, 故$B_1 \cap G_2$是开集. 取$x_2 \in B_1 \cap G_2$, 则存在$0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1/2$ 使得$B(x_2, 2\varepsilon_2) \subset B_1 \cap G_2$. 令$B_2 = B(x_2, \varepsilon_2)$, 则有

$$\overline{B_2} \subset \{x \in X \mid \rho(x, x_2) \le \varepsilon_2\} \subset B(x_2, 2\varepsilon_2) \subset B_1 \cap G_2.$$

假设在第n步已经得到X中的n个开球$B_j = B(x_j, \varepsilon_j), j = 1, 2, ..., n$ 满足

$$0 < \varepsilon_j \le \frac{\varepsilon_{j-1}}{2}, \quad \overline{B_j} \subset B_{j-1} \cap G_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

则在第$n+1$步, 因G_{n+1} 在X中稠密, 故$B_n \cap G_{n+1} \neq \emptyset$. 又因$B_n, G_{n+1}$都是开集, 故$B_n \cap G_{n+1}$是开集. 取$x_{n+1} \in B_n \cap G_{n+1}$, 则存在$0 < \varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n/2$ 使得$B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1}) \subset B_n \cap G_{n+1}$. 令$B_{n+1} = B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$, 则有

$$\overline{B_{n+1}} \subset \{x \in X \mid \rho(x, x_{n+1}) \le \varepsilon_{n+1}\} \subset B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1}) \subset B_n \cap G_{n+1}.$$

这说明以上操作程序在第$n+1$仍可实施. 根据操作程序的归纳法原理, 我们得到了X中的一个递降的开球列$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}, B_n = B(x_n, \varepsilon_n)$, 满足

$$0 < \varepsilon_n \le \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}, \quad \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap G_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

由此易见$\varepsilon_n \le \frac{\varepsilon_0}{2^n}, n = 1, 2, 3, ...,$

$$\overline{B_n} \supset \overline{B_{n+1}} \neq \emptyset, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\mathrm{diam}(\overline{B_n}) \le 2\varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因(X, ρ)完备, 故由**命题7.8**知$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \{x_0\}$是非空单点集. 而由$B_n$与$G_n$的上述关系知

$$\overline{B_n} \subset B_0 \cap G_n, \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

因此
$$\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}\subset B_0\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n.$$
这就证明了$B_0\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\neq\emptyset$. □

下面的Osgood 定理是Baire 纲定理的一个重要应用. [由陈书知, 历史上是Osgood定理先于Baire 纲定理.]

【定理7.46(Osgood定理)】设(X,ρ)为一完备度量空间, $f_n:X\to\mathbb{R}$ (或$f_n:X\to\mathbb{C}$) 是X上的一列实值(或复值)连续函数, 具有点态有界性, 即
$$对任意x\in X\ 有\quad \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|<+\infty.$$
则存在一个非空开集$U\subset X$ (例如U为某个开球), 使得$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在U 上一致有界, 即
$$\sup_{x\in U,n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|<+\infty.$$

【证】对每个$m\in\mathbb{N}$,
$$F_m=\{x\in X\mid \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|\le m\}.$$
由$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$点态有界不难看出有
$$X=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m.$$
事实上对任意$x\in X$, 因$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|<+\infty$, 故可取一自然数$m\ge\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|$. 这说明$x\in F_m$. 所以$X=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m$ 成立.

为了应用Baire 纲定理, 需要证明每个F_m都是闭集. 首先易见F_m还可写成
$$F_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X\mid |f_n(x)|\le m\}.$$

由
$$\Big||f_n(x)|-f_n(y)|\Big|\le|f_n(x)-f_n(y)|$$
可知$x\mapsto|f_n|(x)=|f_n(x)|$ 也在X上连续. 因闭区间$[0,m]$ 是$\mathbb{R}$中的闭集而$|f_n|:X\to[0,+\infty)$连续, 故$|f_n|$ 在闭集$[0,m]$下的逆象
$$|f_n|^{-1}([0,m])=\{x\in X\mid |f_n(x)|\in[0,m]\}=\{x\in X\mid |f_n(x)|\le m\}$$
是X的闭集. 再由闭集的交是闭集即知F_m是X的闭集.

因X是全空间, X中的点当然都是内点, 故等式$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$保证了$\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$有内点. 根据Baire 纲定理, 存在$m \in \mathbb{N}$ 使得F_m 有内点, 也即存在$x_0 \in X$和$\delta > 0$ 使得$U := B(x_0, \delta) \subset F_m$. 再由$F_m$的定义即知

$$\sup_{x \in U, n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \le m < +\infty.$$

所以$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在开球U上一致有界. $\square$

【定理7.47(Banach压缩映射不动点定理)】设(X, ρ)为一完备度量空间, f是X上的一个压缩自映射, 即$f : X \to X$ 且存在常数$0 \le \alpha < 1$ 使得

$$\rho(f(x), f(y)) \le \alpha \rho(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$

则存在唯一的$\xi \in X$使得$f(\xi) = \xi$. 此外对任意$x_0 \in X$, 迭代序列

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

都收敛于ξ 并有收敛估计:

$$\rho(x_n, \xi) \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0), \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

【证】先证唯一性. 设ξ_1, ξ_2都是f在X上的不动点. 则由压缩条件有

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \rho(f(\xi_1), f(\xi_2)) \le \alpha \rho(\xi_1, \xi_2).$$

因$\alpha < 1$, $0 \le \rho(\xi_1, \xi_2) < +\infty$, 故这蕴含$\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$ 即$\xi_1 = \xi_2$. 所以f的不动点是唯一的.

下证存在性和迭代序列的收敛估计. 任取$x_0 \in X$, 令$x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, 3, \dots$. 则对任意$n \in \mathbb{N}$ 有

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \le \alpha \rho(x_n, x_{n-1}) \le \cdots \le \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

由此, 对任意$m > n \ge 1$ 有

$$\begin{aligned}
&\rho(x_m, x_n) \le (x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \\
&\le \Big(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n\Big) \rho(x_1, x_0) \\
&\le \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k\Big) \rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

这蕴含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个Cauchy 列. 因X完备, 故存在$\xi\in X$ 使得$\rho(x_n,\xi)\to 0\,(n\to\infty)$. 在已证明的不等式

$$\rho(x_m,x_n)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0),\qquad m>n\ge 1$$

中, 固定任意$n\in\mathbb{N}$ 令$m\to\infty$, 则由$|\rho(x_m,x_n)-\rho(\xi,x_n)|\le\rho(x_m,\xi)\to 0$ 得到

$$\rho(\xi,x_n)=\lim_{m\to\infty}\rho(x_m,x_n)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

□

很多时候我们是在一个完备度量空间(X,ρ)的闭子集E上考虑不动点问题. 由于(E,ρ)也是一个完备度量空间, 故将上一定理用于(E,ρ)便立刻得到下面推论:

【推论(Banach压缩映射不动点定理)】设(X,ρ)为一完备度量空间, $E\subset X$是(X,ρ)的一个闭子集. 设f是E上的一个压缩自映射, 即$f:E\to E$ 且存在常数$0\le\alpha<1$ 使得

$$\rho(f(x),f(y))\le\alpha\rho(x,y)\qquad\forall\,x,y\in E.$$

则存在唯一的$\xi\in E$使得$f(\xi)=\xi$. 此外对任意$x_0\in E$, 迭代序列

$$x_n=f(x_{n-1}),\qquad n=1,2,3,...$$

都收敛于ξ 并有收敛估计:

$$\rho(x_n,\xi)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0),\qquad n=1,2,3,....$$ □

下面的著名定理是Banach压缩映射不动点定理的一个典型应用: 证明常微分方程初值问题的解的局部存在唯一性.

【定理7.48(Picard定理)】设G是$\mathbb{R}^2$中的一个开集, $(x_0,y_0)\in G$, $f:G\to\mathbb{R}$ 连续. 考虑初值问题的常微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,y(x)), & x\in I\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{$*$}$$

其中I是一个包含x_0的区间. 假设存在$r>0,h>0,L>0$ 使得

$$Q:=[x_0-r,x_0+r]\times[y_0-h,y_0+h]\subset G$$

且$f(x,y)$在Q上对于变量y满足一致Lipschitz 条件:

$$|f(x,y)-f(x,z)|\le L|y-z| \qquad \forall\,(x,y),(x,z)\in Q.$$

令

$$M=\max_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|, \quad \delta=\min\{r,\,\frac{h}{M}\}.$$

则初值问题$(*)$在闭区间$I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$上存在唯一解$y(\cdot)\in C^1(I,J)$, 其中$J=[y_0-h,y_0+h]$.

【证】首先说明若$f(x,y)\equiv 0$于Q, 即$M=0$, 则定义$h/M=+\infty$ 从而有$\delta=r$. 此时易见常值函数$y(x)\equiv y_0, x\in I$, 显然是$(*)$的唯一的光滑解.

以下设$M>0$ 并记住$I=[x_0-\delta,x_0+\delta], J=[y_0-h,y_0+h]$.

为证明$(*)$的C^1解的存在性, 我们将微分方程$(*)$转化成积分方程$(**)$. 我们先证明: $y(\cdot)$ 是$(*)$的属于$C^1(I,J)$的解 当且仅当 $y(\cdot)$是下面积分方程的属于$C(I,J)$的解:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t, \qquad x\in I \tag{$**$}$$

事实上若$y(\cdot)\in C^1(I,J)$ 是$(*)$的解, 则对$(*)$两边取积分即知$y(\cdot)$满足积分方程$(**)$, 因此$y(\cdot)$是$(**)$的属于$C(I,J)$的解. 反之设$y(\cdot)$ 是$(**)$的属于$C(I,J)$的解, 则显然有$y(x_0)=y_0$ 且由**复合函数连续**性知$t\mapsto f(t,y(t))$在I上连续, 从而由变上限积分求导定理知$y(\cdot)$在I上可微且满足微分方程$(*)$. 进一步, 再由$x\mapsto f(x,y(x))$在I上连续还知导函数$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$在$I$上连续, 因此$y(\cdot)\in C^1(I,J)$.

下面证明积分方程$(**)$的属于$C(I,J)$的解的存在唯一性. 同学们注意, $(**)$是一个不动点的形式,其中“点”是连续函数空间$C(I,J)$中的元素, 这使得我们可以考虑利用Banach压缩映射不动点定理. 【这就是**把微分方程化成积分方程的目的!**】

为应用不动点定理, 我们定义映射$T:C(I,J)\to C(I,J)$ 如下:

$$T(g)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,g(t))\mathrm{d}t, \qquad x\in I, \quad g\in C(I,J).$$

同时对函数集$C(I,J)$引进度量

$$\rho(g_1,g_2)=\max_{x\in I}|g_1(x)-g_2(x)|e^{-2L|x-x_0|}, \qquad g_1,g_2\in C(I,J). \tag{$***$}$$

需要证明T 确实把$C(I,J)$映入$C(I,J)$自身并且对于度量ρ是压缩的.

事实上对任意$g\in C(I,J)$, 由$T(g)$的定义易见$T(g)$在I上连续并且对任意$x\in I$ (分别考虑$x\geq x_0$ 和$x\leq x_0$) 有

$$|T(g)(x)-y_0|\leq\Big|\int_{x_0}^{x}|f(t,g(t))|\mathrm{d}t\Big|\leq\Big|\int_{x_0}^{x}M\mathrm{d}t\Big|=M|x-x_0|\leq M\delta\leq h$$

因此$T(g)(x)\in[y_0-h,y_0+h]=J$. 这说明$T(g)\in C(I,J)$.

同时对任意$g_1,g_2\in C(I,J)$ 有: 对任意$x\in I$ (**推导时不妨设**$x\in[x_0,x_0+\delta]$)

$$\begin{aligned}&|T(g_1)(x)-T(g_2)(x)|=\Big|\int_{x_0}^{x}f(t,g_1(t))\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x}f(t,g_2(t))\mathrm{d}t\Big|\\&=\Big|\int_{x_0}^{x}[f(t,g_1(t))-f(t,g_2(t))]\mathrm{d}t\Big|\leq\Big|\int_{x_0}^{x}|f(t,g_1(t))-f(t,g_2(t))|\mathrm{d}t\Big|\\&\leq\Big|\int_{x_0}^{x}L|g_1(t)-g_2(t)|\mathrm{d}t\Big|=L\Big|\int_{x_0}^{x}|g_1(t)-g_2(t)|e^{-2L|t-x_0|}e^{2L|t-x_0|}\mathrm{d}t\Big|\\&\leq L\Big|\int_{x_0}^{x}\rho(g_1,g_2)e^{2L|t-x_0|}\mathrm{d}t\Big|=L\rho(g_1,g_2)\|\Big|\int_{x_0}^{x}e^{2L|t-x_0|}\mathrm{d}t\Big|\\&=L\rho(g_1,g_2)\frac{e^{2L|x-x_0|}-1}{2L}\leq\frac{1}{2}\rho(g_1,g_2)e^{2L|x-x_0|}\end{aligned}$$

从而有

$$|T(g_1)(x)-T(g_2)(x)|e^{-2L|x-x_0|}\leq\frac{1}{2}\rho(g_1,g_2)\qquad\forall\,x\in I.$$

据度量ρ的定义即知

$$\rho(T(g_1),T(g_2))\leq\frac{1}{2}\rho(g_1,g_2)\qquad\forall\,g_1,g_2\in C(I,J).$$

这就证明了映射$T:C(I,J)\to C(I,J)$是压缩的. 易见$(C(I,J),\rho)$是一个完备的度量空间(见作业题), 故由Banach压缩映射不动点定理知T在$C(I,J)$上存在唯一不动点, 即存在唯一的$y\in C(I,J)$ 使得$T(y)(x)\equiv y(x),x\in I$. 这就证明了积分方程$(**)$在$C(I,J)$中存在唯一解. 因此, 等价地, 原微分方程$(*)$在$C^1(I,J)$中存在唯一解. $\Box$

【注】以上证法参照J.Dugundji & A.Granas 的著书Fixed Point Theory. 由于聪明地考虑了等价度量$(***)$, 因此使得定理中微分方程的解的存在区间I的长度只依赖于使得f有界的矩形的边长和f的界, 而不依赖于f的Lipschitz 常数L. 根据这个定理的结论, 当f满足进一步的条件, 我们能获得I为无界区间时常微分方程的解的存在唯一性. 以后学习ODE或做数学研究时同学们可以回顾本定理的证明, 中心思想是: 选择合适的度量能产生好的结果.

【作业题】

1. 设(X,ρ)为一完备度量空间, $f_n: X\to\mathbb{R}$ (或$f_n: X\to\mathbb{C}$) 是X上的一列实值(或复值)连续函数且逐点趋于零:

$$\text{对任意} x\in X \text{ 有} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

证明: 对任意$\varepsilon>0$ 存在一个非空开集$U\subset X$ (例如U为某个开球) 和$N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_n(x)|\le\varepsilon \qquad \forall\, x\in U\,,\ \forall\, n\ge N.$$

[证法与Osgood定理的证明类似, 考虑$F_m=\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x\in X\mid |f_n(x)|\le\varepsilon\}$.]

2. 设$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续, 满足: 对任意$\alpha>0$都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(n\alpha)=0$.
证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. [提示: 利用上题, $f_n(x)=f(nx), x\in[1,2]$.]

3. 设$I=[a,b], J=[c,d]$ 都是有界闭区间, 令

$$\varrho_\infty(f,g)=\|f-g\|_\infty=\max_{x\in I}|f(x)-g(x)|, \qquad f,g\in C(I,\mathbb{R}).$$

(1) 证明$C(I,J)$是Banach空间$(C(I,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ 的闭子集从而$(C(I,J),\varrho_\infty)$是完备的度量空间. 但为什么不说"$(C(I,J),\|\cdot\|_\infty)$也是一个Banach 空间"?

(2) 取定一点$x_0\in I$ 和常数$a>0$, 令

$$\rho(f,g)=\max_{x\in I}|f(x)-g(x)|e^{-a|x-x_0|}, \qquad f,g\in C(I,\mathbb{R}).$$

证明ρ也是$C(I,\mathbb{R})$上的(从而是$C(I,J)$上的)一个度量且ρ与ϱ_∞ 等价. 由此证明$(C(I,\mathbb{R}),\rho)$, $(C(I,J),\rho)$ 都是完备的.

4. 设$E\subset\mathbb{R}^m$ 为闭集, $f:E\to E$. 假设复合映射$f\circ f$ 满足压缩条件:

$$|f\circ f(x)-f\circ f(y)|\le q|x-y| \qquad \text{for all } \ x,y\in E$$

其中$0\le q<1$ 为常数. 证明f在E上有且有唯一的不动点, 即存在唯一的$x_*\in E$ 使得$f(x_*)=x_*$.

5. 设$K\subset\mathbb{R}^n$ 为紧凸集. $f:K\to K$ 为非扩张映射,即

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y| \qquad \forall\, x,y\in K.$$

证明f 在K 上有不动点.

[提示: 取定$a \in K$. 对每个$k \in \mathbb{N}$, 考虑$f_k(x) = \frac{k}{k+1}f(x) + \frac{1}{k+1}a$.]

6. 设$K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集(不要求是凸集), 映射$f : K \to K$ 满足

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad \forall\, x, y \in K \ \text{ s.t. } x \neq y.$$

证明f 在K 上有且有唯一的不动点.

7. 设$f, g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 且设f 满足Lipschitz 条件:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

其中$0 < L < +\infty$ 为常数. 令λ 满足$0 < \lambda < 1/L$. 证明存在唯一的映射$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$满足恒等式

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda f(\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

此外这个唯一的映射φ 还在$\mathbb{R}^n$上连续.

[提示：固定任意$x \in \mathbb{R}^n$, 考虑映射$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(y) = g(x) + \lambda f(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$. ...., 不动点y_* 由x 唯一决定!... 故可记之为$y_* = \varphi(x)$. 于是映射$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是良好定义.... 为证φ 的连续性, 只需证明

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le C|g(x_1) - g(x_2)| \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

其中$0 < C < +\infty$ 为某个常数.]

8. 几个学生在我校某教室内的课桌上摊开我校地图, 其中一学生用钢笔在地图中的某点处画了小一黑点, 然后说: “地图上这个黑点对应的实际地理位置就是地图下面的这张桌子”. 问: 这是可能的吗？试给出你的解释或证明.

§7.6 Stone-Weierstrass 逼近定理

连续函数由于其定义很宽松(只需每点定义连续), 因此容纳了很多很坏的函数, 例如频繁尖锐颤动的连续曲线, 即处处连续而处处不可微的函数, 而多项式则是最好的函数, 它是以整体的代数的方式定义的. 所以当德国数学家Weierstrass 证明了每个连续函数都可以被多项式一致逼近的时候, 令人吃惊. 今天Weierstrass多项式一致逼近定理及其证明方法已有很多推广和改进, 其中最为出色的推广是美国数学家M.H.Stone做出的, 它提炼出了这类代数逼近的本质, 使人耳目一新, 视野大开。本节我们主要学习Stone-Weierstrass 逼近定理. 在这个定理的证明中, 唯一的技术部分是下面这条引理, 其他部分是触及实质的软分析.

【引理7.49.】 对任意$R>0$, 可构造一列多项式$P_n(x)=\sum_{k=1}^{2n}a_{k,n}x^k$ $(n=1,2,3,...)$使得对某个常数$C_R>0$ 有一致估计

$$\max_{x\in[-R,R]}|P_n(x)-|x||\to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

即$P_n(0)=0$ 且$\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$[-R,R]$上一致收敛于函数$|x|$.

【证】在本讲义第五章学习幂函数$(1+x)^{\alpha}$的Taylor展开(即牛顿二项级数)时, 取$\alpha=1/2$ 并以x^2-1代替x, 我们证明了多项式

$$P_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(x^2-1)^k$$

在$[-1,1]$上一致逼近$|x|$:

$$\max_{x\in[-1,1]}|P_n(x)-|x||\le C\frac{1}{\sqrt{n}},\quad n=1,2,3,\dots.$$

其中$C>0$ 为常数. 由此便得到

$$\max_{x\in[-R,R]}\Big|RP_n\Big(\frac{x}{R}\Big)-|x|\Big|=R\max_{x\in[-R,R]}\Big|P_n\Big(\frac{x}{R}\Big)-|\frac{x}{R}|\Big|$$
$$=R\max_{t\in[-1,1]}|P_n(t)-|t||\le 2RC\frac{1}{\sqrt{n}},\quad n=1,2,3,\dots.$$

$$\widetilde{P}_n(x)=RP_n(\frac{x}{R})-RP_n(0)$$

则$\widetilde{P}_n$ 是$2n$次多项式且$\widetilde{P}_n(0)=0$ 因而有

$$\widetilde{P}_n(x)=\sum_{k=1}^{2n}a_{k,n}x^k,\quad n=1,2,3,\dots.$$

同时有

$$
\begin{aligned}
&\max_{x\in[-R,R]}|\widetilde{P}_n(x)-|x||\le \max_{x\in[-R,R]}\left|RP_n\Big(\frac{x}{R}\Big)-|x|\right|+R|P_n(0)-0|\\
&\le 2RC\frac{1}{\sqrt{n}}+R|P_n(0)-0|\to 0\quad \text{as}\quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

所以$\widetilde{P}_n(x)\,(n=1,2,3,...)$是满足要求的多项式序列. □

【定义(函数代数)】设(X,ρ)为一个度量空间, $K\subset X$为一紧集(非空), $C(K,\mathbb{R})$是在K 上连续的实值函数的全体. 我们称集合$\mathcal{A}\subset C(K,\mathbb{R})$ 为一个函数代数$\mathcal{A}$ 如果$\mathcal{A}$关于函数的加法、数乘和函数乘积运算封闭, 即$\mathcal{A}$满足

若$f,g\in\mathcal{A}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则$\alpha f+\beta g\in\mathcal{A}$, $fg\in\mathcal{A}$.

进一步如果常值函数$1\in\mathcal{A}$, 即$\mathcal{A}$含有乘法单位元, 则称$\mathcal{A}$是一个含有单位元的函数代数. (这等价于$\mathcal{A}$包含所有常值函数). □

【定义(不消失和能分辨点的函数代数)】设(X,ρ)为一个度量空间, $K\subset X$为一紧集(非空), $\mathcal{A}\subset C(K,\mathbb{R})$为一个函数代数.

不消失： 我们说$\mathcal{A}$不消失, 如果对任意$a\in K$, 存在$g\in\mathcal{A}$使得$g(a)\neq 0$.

能分辨点： 我们说$\mathcal{A}$能分辨K中的点, 如果对任意$a,b\in K$, $a\neq b$, 存在$g\in\mathcal{A}$使得$g(a)\neq g(b)$. □

【定义(相对能分辨和相对不消失的函数代数)】设(X,ρ)为一个度量空间, $K\subset X$为一紧集(非空). 设$\mathcal{A}\subset\mathcal{F}\subset C(K,\mathbb{R})$, 其中$\mathcal{A}$ 为一个函数代数.

相对不消失： 我们说$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$不消失, 如果对任意$a\in K$, 若存在$f\in\mathcal{F}$ 满足$f(a)\neq 0$, 则也存在$g\in\mathcal{A}$使得$g(a)\neq 0$.

相对能分辨点： 我们说$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$能分辨K中的点, 如果对任意$a,b\in K$, 若存在$f\in\mathcal{F}$使得$f(a)\neq f(b)$, 则也存在$g\in\mathcal{A}$使得$g(a)\neq g(b)$. □

【注】在上述定义中, 把“实值”和$\mathbb{R}$ 换成“复值”和$\mathbb{C}$, 就得到了对复值代数函数的相应定义.

由上述定义易见有下列蕴含关系:

有单位元$\Longrightarrow$不消失$\Longrightarrow$相对不消失; 能分辨点$\Longrightarrow$相对能分辨点.

【例】设(X,ρ)为一个度量空间, $K\subset X$为一紧集(非空). 则$C(K,\mathbb{R})$便是一个含有单位元的函数代数且能分辨K中的点.

事实上$C(K,\mathbb{R})$显然关于函数的加法，数乘和普通乘法封闭且单位元$1\in C(K,\mathbb{R})$. 又对任意$a,b\in K$, $a\neq b$, 取

$$f(x)=\frac{\rho(x,a)}{\rho(x,a)+\rho(x,b)},\quad x\in K.$$

则由分母$\rho(x,a)+\rho(x,b)\ \geq\ \rho(a,b)\ >\ 0$知$f$是良好定义的且属于$C(K,\mathbb{R})$. 同时有$f(a)=0\neq f(b)=1$. 所以$C(K,\mathbb{R})$ 能分辨K中的点. $\square$

【例】取$K=[0,1]$, $\mathcal{F}=C([0,1],\mathbb{R})$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ 是代数多项式的全体, 即

$$\mathcal{A}=\Big\{P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ \Big|\ a_k\in\mathbb{R},\,n=0,1,2,...\Big\}.$$

易见$\mathcal{A}$是一个含有单位元的函数代数且能分辨$[0,1]$中的点: 对任意$a,b\in[0,1], a\neq b$, 取$f(x)\equiv x$, $x\in\mathbb{R}$, 则$f\in\mathcal{A}$ 且$f(a)\neq f(b)$. $\square$

【例】取$K=[0,2\pi]$, $\mathcal{F}=\{f\in C([0,2\pi],\mathbb{R})\mid f(0)=f(2\pi)\}$.

[注: 对每个$f\in\mathcal{F}$, 易见可以将f 连续延拓成为$\mathbb{R}$上的以2π为周期的连续函数. 因此$\mathcal{F}$中的每个函数可以看成是$\mathbb{R}$上以2π为周期的连续函数在$[0,2\pi]$上的限制.]

设$\mathcal{A}$ 为三角多项式的全体, 即

$$\mathcal{A}=\Big\{T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\ \Big|\ a_0,a_k,b_k\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

则$\mathcal{A}$ 关于函数的加法, 数乘和普通乘法封闭, 其中函数乘法封闭是因为三角函数的积化和差公式:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big),\quad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\Big),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big),\quad \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\Big).$$

和正弦余弦的奇偶性: $\sin(-x)\ =\ -\sin x,\cos(-x)\ =\ \cos x$. 此外显然$\mathcal{A}$含有单位元：$1\in\mathcal{A}$. 因此$\mathcal{A}$是一个含有单位元的函数代数. 若把函数的定义域限制在$[0,2\pi]$上, 则当然有$\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$. 来证明$\mathcal{A}$ 相对于$\mathcal{F}$能分辨$[0,2\pi]$中的点. 对任意$a,b\in[0,2\pi],a\neq b$, 并设存在$f\in\mathcal{F}$ 使得$f(a)\neq f(b)$. 不妨设$a<b$. 则由$f(0)=f(2\pi)$ 知必有$0<b-a<$

2π. 于是有$e^{\mathrm{i}a} \neq e^{\mathrm{i}b}$, 也即或者$\cos a \neq \cos b$ 或者$\sin a \neq \sin b$. 因两个函数$\cos, \sin$ 都属于$\mathcal{A}$, 所以$\mathcal{A}$ 相对于$\mathcal{F}$能分辨$[0, 2\pi]$中的点. $\square$

【**例**】取$K = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$,

$$\mathcal{A} = \left\{x(1-x)P(x) \mid P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ \ a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, ..., n;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

则$\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ 是一个不含单位元的函数代数, 但$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$在$[0, 1]$上不消失同时$\mathcal{A}$ 相对于$\mathcal{F}$ 能分辨$[0, 1]$中的点.

【证】留为作业题, 即本节作业题2, 在该题的证明中要证明这个性质. $\square$

【**引理7.50.**】设$\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \subset C(K, \mathbb{R})$ 其中$\mathcal{A}$是一个函数代数. 则有:

$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$在K 上不消失同时$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$能分辨K中的点$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$对于$\mathcal{F}$具有两点插值性质: 即对任意$f \in \mathcal{F}$ 和任意$a, b \in K$, 存在$g \in \mathcal{A}$ 使得$g(a) = f(a), g(b) = f(b)$.

【证】"$\Longrightarrow$": 设$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$在K 上不消失同时$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$能分辨K中的点.

任取$f \in \mathcal{F}$ 和$a, b \in K$. 要证明存在$g \in \mathcal{A}$ 使得$g(a) = f(a), g(b) = f(b)$.

分三种情形讨论.

Case 1: $a \neq b$ 并存在$p, q \in \mathcal{A}$ 使得$0 \neq p(a) \neq p(b)$, $q(a) \neq q(b) \neq 0$.

此时我们取

$$g(x) = \frac{p(x)[p(x) - p(b)]}{p(a)[p(a) - p(b)]} f(a) + \frac{q(x)[q(x) - q(a)]}{q(b)[q(b) - q(a)]} f(b)\,.$$

因$\mathcal{A}$是一个代数, 故$g \in \mathcal{A}$. 简单计算得知$g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$.

Case 2: $f(a) = f(b)$.

此时若$f(a) = f(b) = 0$, 则取$g(x) \equiv 0$. 因$\mathcal{A}$ 是代数, 故$g = 0 \in \mathcal{A}$. 这时有$g(a) = f(a) = f(b) = g(b) = 0$.

若$f(a) = f(b) \neq 0$. 则由$\mathcal{A}$的相对不消失性知存在$p, q \in \mathcal{A}$使得$p(a) \neq 0$, $q(b) \neq 0$.

若$p(b) = p(a)$ 或$q(a) = q(b)$, 则我们取

$$g(x) = \frac{p(x)}{p(a)} f(a) \quad (\text{ if }\ p(b) = p(a)) \qquad 或 \qquad g(x) = \frac{q(x)}{q(a)} f(a) \quad (\text{ if }\ q(a) = q(b))\,.$$

此时有$g \in \mathcal{A}$ 且$g(a) = f(a)$, $g(b) = f(a) = f(b)$.

若$p(b) \neq p(a)$ 且$q(a) \neq q(b)$, 则结合$p(a) \neq 0$, $q(b) \neq 0$ 可知这时属于**Case 1**. 因此满足要求的$g \in \mathcal{A}$存在.

Case 3: $f(a) \neq f(b)$.

此时有$a \neq b$ 并由$\mathcal{A}$的相对能分辨性知存在$p \in \mathcal{A}$ 使得$p(a) \neq p(b)$.

Case 3.1: $p(a) \neq 0$ 且$p(b) \neq 0$.

这时属于**Case 1** 中$q = p$的情形, 因此满足要求的$g \in \mathcal{A}$存在.

Case3.2: $p(a) \neq 0$ 而$p(b) = 0$.

此时若$f(b) = 0$, 则函数

$$g(x) = \frac{p(x)}{p(a)} f(a)$$

属于$\mathcal{A}$ 且$g(a) = f(a)$, $g(b) = 0 = f(b)$.

若$f(b) \neq 0$, 则由$\mathcal{A}$的相对不消失性, 存在$q \in \mathcal{A}$ 使得$q(b) \neq 0$. 若$q(a) \neq q(b)$, 则由$0 \neq p(a) \neq p(b) = 0$, $q(a) \neq q(b) \neq 0$ 知这归于**Case 1** 因此满足要求的$g \in \mathcal{A}$存在.

若$q(a) = q(b)$, 则函数

$$g(x) = \frac{p(x)}{p(a)} \Big(f(a) - f(b) \Big) + \frac{q(x)}{q(b)} f(b)$$

属于$\mathcal{A}$ 且$g(a) = f(a) - f(b) + f(b) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ (because $p(b) = 0$).

Case 3.3: $p(a) = 0$ 而$p(b) \neq 0$.

若$f(a) = 0$, 则函数

$$g(x) = \frac{p(x)}{p(b)} f(b)$$

属于$\mathcal{A}$ 且$g(a) = 0 = f(a)$, $g(b) = f(b)$.

若$f(a) \neq 0$, 则由$\mathcal{A}$的相对不消失性, 存在$q \in \mathcal{A}$ 使得$q(a) \neq 0$. 若$q(b) \neq q(a)$, 则由$0 \neq q(a) \neq q(b)$, $0 = p(a) \neq p(b) \neq 0$ 知这归于**Case 1**, 因此满足要求的$g \in \mathcal{A}$存在.

若$q(b) = q(a)$, 则函数

$$g(x) = \frac{p(x)}{p(b)} \Big(f(b) - f(a) \Big) + \frac{q(x)}{q(a)} f(a)$$

属于$\mathcal{A}$ 且$g(a) = f(a)$ (because $p(a) = 0$), $g(b) = f(b) - f(a) + f(a) = f(b)$.

综上各种情形, 我们证明了总存在$g \in \mathcal{A}$ 满足$g(a) = f(a)$ 和$g(b) = f(b)$.

“$\Longleftarrow$”：设$\mathcal{A}$对于$\mathcal{F}$具有两点插值性质. 对任意$a\in K$, 若存在$f\in\mathcal{F}$ 使得$f(a)\neq 0$, 那么取$b=a$, 则由两点插值性质知存在$g\in\mathcal{A}$ 使得$g(a)=f(a)\neq 0$. 这表明$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$在K 上不消失. 又对任意$a,b\in K$, 若存在$f\in\mathcal{F}$ 使得$f(a)\neq f(b)$, 则再由两点插值性质知存在$g\in\mathcal{A}$ 使得$g(a)=f(a),g(b)=f(b)$ 从而有$g(a)\neq g(b)$. 这说明$\mathcal{A}$相对于$\mathcal{F}$能分辨K中的点. □

【**定理7.51(Stone-Weierstrass逼近定理)**】设K为X中的紧集, 其中(X,ρ) 为一度量空间, 设$\mathcal{F}=C(K,\mathbb{R})$ 或者$\mathcal{F}$ 是$C(K,\mathbb{R})$的一个闭子空间(按一致度量), 并设$\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ 是一个函数代数, 它相对于$\mathcal{F}$在K上不消失且相对于$\mathcal{F}$ 能分辨K中的点. 则按一致度量, $\mathcal{A}$在$\mathcal{F}$ 中稠密: $\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{F}$, 即

$$\text{对任意}f\in\mathcal{F},\ \text{存在一列}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}\ \text{使得}\|f_n-f\|_{\infty}\to 0\quad(n\to\infty)$$

其中$\|f\|_{\infty}=\max\limits_{x\in K}|f(x)|$.

【证】由对$\mathcal{F}$的假设知$\mathcal{F}$是$(C(K,\mathbb{R}),\|\cdot-\cdot\|_{\infty})$的闭集. 因此由$\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ 有$\overline{\mathcal{A}}\subset\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}$. 因此为证$\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{F}$ 只需证明$\mathcal{F}\subset\overline{\mathcal{A}}$. 分几步进行.

Step 1. 证明闭包$\overline{\mathcal{A}}$也是一个代数.

设$f,g\in\overline{\mathcal{A}}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 由闭包的序列刻画知存在$\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\infty}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-g\|_{\infty}=0$. 由此有

$$\|\alpha f_n+\beta g_n-(\alpha f+\beta g)\|_{\infty}\le|\alpha|\|f_n-f\|_{\infty}+|\beta|\|g_n-g\|_{\infty}\to 0\quad(n\to\infty),$$

$$\begin{aligned}\|f_ng_n-fg\|_{\infty}&=\|(f_n-f)g_n+f(g_n-g)\|_{\infty}\le\|(f_n-f)g_n\|_{\infty}+\|f(g_n-g)\|_{\infty}\\&\le\|f_n-f\|_{\infty}\|g_n\|_{\infty}+\|f\|_{\infty}\|g_n-g\|_{\infty}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

因$\mathcal{A}$ 是代数, 故$\alpha f_n+\beta g_n, f_ng_n\in\mathcal{A}, n=1,2,3,...$ 从而有

$$\alpha f+\beta g=\lim_{n\to\infty}(\alpha f_n+\beta g_n)\in\overline{\mathcal{A}},\quad fg=\lim_{n\to\infty}f_ng_n\in\overline{\mathcal{A}}.$$

所以$\overline{\mathcal{A}}$是一个代数.

Step 2. 证明: 若$f\in\overline{\mathcal{A}}$, 则$|f|\in\overline{\mathcal{A}}$. 这里$|f|(x)=|f(x)|, x\in K$.

设$f\in\overline{\mathcal{A}}$. 由闭包的序列刻画, 存在$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$使得$\|g_n-f\|_{\infty}\to 0\,(n\to\infty)$. 令$R=\|f\|_{\infty}+\sup\limits_{n\ge 1}\|g_n-f\|_{\infty}$. 则$\|g_n\|_{\infty}\le R, n=1,2,3,\dots$. 由**引理7.49** 知存在实系数多项式$P_n(y)=\sum_{k=1}^{2n}a_{k,n}y^k$ 使得$\varepsilon_n:=\max\limits_{|y|\le R}|P_n(y)-|y||\to 0\,(n\to\infty)$.

于是得到, 对任意$x \in K$,

$$|P_n(g_n(x)) - |f(x)|| \le |P_n(g_n(x)) - |g_n(x)|| + ||g_n(x)| - |f(x)|| \le \varepsilon_n + \|g_n - f\|_\infty.$$

因此

$$\|P_n \circ g_n - |f|\|_\infty \le \varepsilon_n + \|g_n - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

另一方面由$\mathcal{A}$是代数和$P_n(g_n(x)) = \sum_{k=1}^{2n} a_{k,n}(g_n(x))^k$ 知$P_n \circ g_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 这就证明了$|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.

Step 3. 证明: 若$f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, 则$\min\{f, g\} \in \overline{\mathcal{A}}$, $\max\{f, g\} \in \overline{\mathcal{A}}$. 一般地, 对任意$n \in \mathbb{N}$, 若$f_1, f_2, ..., f_n \in \overline{\mathcal{A}}$, 则

$$\min_{1 \le j \le n} f_j \in \overline{\mathcal{A}}, \qquad \max_{1 \le j \le n} f_j \in \overline{\mathcal{A}}.$$

这里按通常的写法, 这些函数的定义为

$$(\min_{1 \le j \le n} f_j)(x) = \min_{1 \le j \le n} f_j(x), \quad (\max_{1 \le j \le n} f_j)(x) = \max_{1 \le j \le n} f_j(x), \quad x \in K.$$

注意到如令$F_k = \min_{1 \le j \le k} f_j$, $G_k = \max_{1 \le j \le k} f_j$, 则当$n \ge 2$时有

$$F_n = \min\{F_{n-1}, f_n\}, \quad G_n = \max\{G_{n-1}, f_n\}$$

因此由归纳法, 只需证明两个函数的情形成立.

设$f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, 则由$\overline{\mathcal{A}}$ 是代数和**Step 2** 以及恒等式

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|), \quad \max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

知

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \overline{\mathcal{A}}, \quad \max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Step 4. 证明对任意$f \in \mathcal{F}$ 都有$f \in \overline{\mathcal{A}}$.

任取$f \in \mathcal{F}$. 为证$f \in \overline{\mathcal{A}}$, 由闭包的等价定义, 只需证明对任意$\varepsilon > 0$ 存在$f_\varepsilon \in \mathcal{A}$ 使得$\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$.

设f, ε如上任意给定. 对任意$x, y \in K$, 由**引理7.50**, 存在$g_{x,y} \in \mathcal{A}$使得$g_{xy}(x) = f(x)$, $g_{xy}(y) = f(y)$. 由$t \mapsto g_{xy}(t) - f(t)$连续和$(g_{xy}(t) - f(t))|_{t=x} = 0$ 知对$\varepsilon/2 > 0$ 存在$\delta_{xy} > 0$ 使得

$$\text{当 } t \in U_x(y) := K \cap B(y, \delta_{xy}) \text{ 时} \quad g_{xy}(t) < f(t) + \varepsilon/2. \tag{$*$}$$

易见$K=\bigcup_{y\in K}U_x(y)$. 因K 紧, 故存在$N_x\in\mathbb{N}$ 和$y_j=y_{x,j}\in K, j=1,2,...,N_x$ 使得

$$K=\bigcup_{j=1}^{N_x}U_x(y_j).$$

令

$$g_x=\min_{1\le j\le N_x}g_{xy_j}\quad \text{i.e.}\quad g_x(t)=\min_{1\le j\le N_x}g_{xy_j}(t),\quad t\in K.$$

则由**Step 3** 知$g_x\in\overline{\mathcal{A}}$, 并由$(*)$易见

$$g_x(t)<f(t)+\varepsilon/2\qquad \forall\, t\in K\qquad (\forall\, x\in K).\tag{$**$}$$

且

$$g_x(x)=f(x)\qquad (\forall\, x\in K\,).$$

再由$t\mapsto g_x(t)-f(t)$ 连续和$(g_x(t)-f(t))|_{t=x}=0$ 知 对$\varepsilon/2>0$ 存在$\delta_x>0$ 使得

$$\text{当 } t\in V_x:=K\cap B(x,\delta_x) \text{ 时}\quad g_x(t)>f(t)-\varepsilon/2.\qquad (\forall\, x\in K\,)\tag{$***$}$$

如上, 因K 紧且$K=\bigcup_{x\in K}V_x$, 故存在$m\in\mathbb{N}$ 和$x_1,x_2,...,x_m\in K$使得

$$K=\bigcup_{i=1}^{m}V_{x_i}.$$

令

$$g_*=\max_{1\le i\le m}g_{x_i}\quad \text{i.e.}\quad g_*(t)=\max_{1\le i\le m}g_{x_i}(t),\quad t\in K.$$

则由**Step 3** 知$g_*\in\overline{\mathcal{A}}$, 并由$(**),(***)$易见

$$f(t)-\varepsilon/2<g_*(t)<f(t)+\varepsilon/2\qquad \forall\, t\in K.$$

因此$\|g_*-f\|_\infty<\varepsilon/2$.

最后由$g_*\in\overline{\mathcal{A}}$ 和闭包的等价定义知存在$f_\varepsilon\in\mathcal{A}$使得$\|f_\varepsilon-g_*\|_\infty<\varepsilon/2$. 于是得到$\|f_\varepsilon-f\|_\infty\le\|f_\varepsilon-g_*\|_\infty+\|g_*-f\|_\infty<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. □

应用Stone-Weierstrass逼近定理立刻得到三个重要推论.

【推论1 (代数多项式一致逼近定理)】设$K\subset\mathbb{R}^n$ 为一紧集, $f\in C(K,\mathbb{R})$. 则对任意$\varepsilon>0$, 存在多项式

$$P(x)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\le N}c_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

(其中$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$皆为非负整数) 使得

$$\|P-f\|_\infty=\max_{x\in K}|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

【证】令$\mathcal{A}$ 是n元实系数多项式的全体, 即

$$\mathcal{A}=\Big\{P(x)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\le m}c_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\ \Big|\ c_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}\in\mathbb{R},m=0,1,2,...\Big\}.$$

易见$\mathcal{A}$ 关于函数的加法、数乘和普通乘法封闭。因此$\mathcal{A}$ 是一个函数代数。由显然单位元$1\in\mathcal{A}$ 所以$\mathcal{A}$在K上不消失. 对任意$a=(a_1,a_2,...,a_n),b=(b_1,b_2,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$, 满足$a\neq b$, 存在$i\in\{1,2,...,n\}$ 使得$a_i\neq b_i$. 取$P(x)=x_i,x=(x_1,x_2,...,x_n)$. 则$P\in\mathcal{A}$ 且$P(a)\neq P(b)$. 所以$\mathcal{A}$ 能分辨$\mathbb{R}^n$ 中的点, 从而能分辨K 中的点. 因此由**Stone-Weierstrass逼近定理**, $\mathcal{A}$按一致度量$\|\cdot-\cdot\|_\infty$在$C(K,\mathbb{R})$ 中稠密. 这就是要证的结论. $\square$

【推论2 (三角多项式一致逼近定理)】设$f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 为周期函数且周期为2π. 则对任意$\varepsilon>0$ 存在实系数三角多项式

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

使得

$$\|T-f\|_\infty=\max_{x\in\mathbb{R}}|T(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

【证】取$K=[0,2\pi]$, $\mathcal{F}=\{f\in C([0,2\pi],\mathbb{R})\mid f(0)=f(2\pi)\}$. 易见按一致度量$\mathcal{F}$是$C([0,2\pi],\mathbb{R})$的一个闭子空间. 令$\mathcal{A}$ 是实系数三角多项式的全体, 即

$$\mathcal{A}=\Big\{T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\Big|\,a_0,a_k,b_k\in\mathbb{R},k=1,2,...,n,\ n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

我们在前面例子中已证明了$\mathcal{A}$是一个含有单位元的函数代数且相对于$\mathcal{F}$能分辨$[0,2\pi]$中的点. 对周期为2π的任意函数$f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 把$f$限制在$[0,2\pi]$上显然有$f\in\mathcal{F}$. 因此据Stone-Weierstrass逼近定理, 对任意$\varepsilon>0$ 存在$T(\cdot)\in\mathcal{A}$ 使得

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|T(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

而由于$F(x)-f(x)$是以2π为周期的连续函数, 故易见

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|T(x)-f(x)|=\max_{x\in[0,2\pi]}|T(x)-f(x)|.$$

因此有$\|T-f\|_\infty=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|T(x)-f(x)|<\varepsilon.$ $\square$

【推论3(用乘积型函数一致逼近】设$(\prod_{i=1}^n X_i,\varrho)$ 是度量空间$(X_i,\rho_i)\,(i=1,2,...,n)$的乘积度量空间, 设$K_i\subset X_i$ 为X_i的紧集, $i=1,2,...,n$. 则对任意$f\in C(\prod_{i=1}^n K_i,\mathbb{R})$, 对任意$\varepsilon>0$, 存在乘积型函数的线性组合和

$$g(x)=\sum_{j=1}^m c_j\prod_{i=1}^n g_{i,j}(x_i),\quad x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\prod_{i=1}^n K_i$$

使得

$$\|f-g\|_\infty=\max_{x\in\prod_{i=1}^n K_i}|f(x)-g(x)|<\varepsilon.$$

【证】令

$$\mathcal{A}=\Big\{\sum_{j=1}^m c_j\prod_{i=1}^n g_{i,j}(x_i)\;\Big|\;c_j\in\mathbb{R},\,g_{i,j}\in C(K_i,\mathbb{R}),i=1,2,...,n;j=1,2,...,m,\,m\in\mathbb{N}\Big\}.$$

显然$\mathcal{A}\subset C(\prod_{i=1}^n K_i,\mathbb{R})$. 要证明的是$\mathcal{A}$按一致范数在$C(\prod_{i=1}^n K_i,\mathbb{R})$稠密. 为此, 根据**Stone-Weierstrass逼近定理**, 只需验证$\mathcal{A}$是一个有单位元的代数且能分辨$\prod_{i=1}^n K_i$中的点.

周知每个因子空间$C(K_i,\mathbb{R})$都是有单位元的代数且能分辨K_i 中的点(见上面第一个例子).

设$g_1,g_2\in\mathcal{A}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 写

$$g_1(x)=\sum_{j=1}^{m_1}c_j^{(1)}\prod_{i=1}^n g_{i,j}^{(1)}(x_i),\qquad g_2(x)=\sum_{j=1}^{m_2}c_j^{(2)}\prod_{i=1}^n g_{i,j}^{(2)}(x_i)$$

则

$$\begin{aligned}\alpha g_1(x)+\beta g_2(x)&=\sum_{j=1}^{m_1}\alpha c_j^{(1)}\prod_{i=1}^n g_{i,j}^{(1)}(x_i),+\sum_{j=1}^{m_2}\beta c_j^{(2)}\prod_{i=1}^n g_{i,j}^{(2)}(x_i)\\&=\sum_{j=1}^{m_1+m_2}\widetilde{c}_j\prod_{i=1}^n\widetilde{g}_{i,j}(x_i)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\widetilde{c}_j=\alpha c_j^{(1)},\quad\widetilde{g}_{i,j}(x_i)=g_{i,j}^{(1)}(x_i),\quad j=1,2,...,m_1,\\&\widetilde{c}_j=\beta c_{j-m_1}^{(2)},\quad\widetilde{g}_{i,j}(x_i)=g_{i,j-m_1}^{(2)}(x_i),\quad j=m_1+1,m_1+2,...,m_1+m_2,\\&i=1,2,...,n\,.\end{aligned}$$

所以$\alpha g_1+\beta g_2\in\mathcal{A}$.

又

$$g_1(x)g_2(x)=\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2}c_j^{(1)}c_k^{(2)}\Big(\prod_{i=1}^{n}g_{i,j}^{(1)}(x_i)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n}g_{i,k}^{(2)}(x_i)\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2}c_j^{(1)}c_k^{(2)}\prod_{i=1}^{n}g_{i,j}^{(1)}(x_i)g_{i,k}^{(2)}(x_i)\quad(\text{把二维下标}(j,k)\text{排成一列}\{(j_s,k_s)\}_{s=1}^{m_1m_2}\text{求和})$$

$$=\sum_{s=1}^{m_1m_2}c_{j_s}^{(1)}c_{k_s}^{(2)}\prod_{i=1}^{n}g_{i,j_s}^{(1)}(x_i)g_{i,k_s}^{(2)}(x_i)=\sum_{s=1}^{m_1m_2}c_s\prod_{i=1}^{n}g_{i,s}(x_i)$$

其中

$$c_s=c_{j_s}^{(1)}c_{k_s}^{(2)}\in\mathbb{R},\quad g_{i,s}=g_{i,j_s}^{(1)}g_{i,k_s}^{(2)}\in C(K_i,\mathbb{R}),\quad i=1,2,...,n;\quad s=1,2,...,m_1m_2.$$

这表明$g_1g_2\in\mathcal{A}$. 以上证明了$\mathcal{A}$是一个代数. 显然$\mathcal{A}$有单位元.

对任意$a=(a_1,a_2,...,a_n),b=(b_1,b_2,...,b_n)\in\prod_{i=1}^{n}K_i$, $a\neq b$, 存在$i\in\{1,2,...,n\}$ 使得$a_i\neq b_i$. 因$C(K_i,\mathbb{R})$能分辨K_i 中的点, 故存在$g_i\in C(K_i,\mathbb{R})$ 使得$g_i(a_i)\neq g_i(b_i)$. 令

$$g(x)=1\cdots1\cdot g_i(x_i)\cdot1\cdots1,\quad x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}K_i.$$

则$g\in\mathcal{A}$ 且$g(a)=g_i(a_i)\neq g_i(b_i)=g(b)$. 因此$\mathcal{A}$能分辨$\prod_{i=1}^{n}K_i$ 中的点. □

作业题

1. 设$\varphi\in C([0,1],\mathbb{R})$ 为严格单调函数. 令

$$\mathcal{A}=\Big\{P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\varphi(x))^k\ \Big|\ a_k\in\mathbb{R},\,k=0,1,2,...,n;n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

证明: 对任意$f\in C([0,1],\mathbb{R})$ 和任意$\varepsilon>0$ 存在$P\in\mathcal{A}$使得$\max\limits_{x\in[0,1]}|P(x)-f(x)|<\varepsilon$.

2. 令

$$\mathcal{A}=\Big\{x(1-x)P(x)\mid P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\ a_k\in\mathbb{R},\,k=0,1,2,...,n;\,n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

证明: 对任意$f\in C([0,1],\mathbb{R})$ 满足$f(0)=f(1)=0$, 对任意$\varepsilon>0$ 存在$P\in\mathcal{A}$使得$\max\limits_{x\in[0,1]}|P(x)-f(x)|<\varepsilon$.

[考察相对分辨性时, 对$a(1-a)=b(1-b)(>0)$的情形想想办法.]

3. 令$\mathcal{A}$ 是余弦多项式的全体, 即

$$\mathcal{A}=\Big\{T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx\ \Big|\ a_k\in\mathbb{R},\ k=0,1,2,...,n;\ n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

(1) 证明对任意$f\in C([0,\pi],\mathbb{R})$ 和任意$\varepsilon>0$ 存在$T\in\mathcal{A}$使得$\max\limits_{x\in[0,\pi]}|T(x)-f(x)|<\varepsilon.$

(2) 证明对任意偶函数$f\in C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$和任意$\varepsilon>0$ 存在$T\in\mathcal{A}$使得

$\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|T(x)-f(x)|<\varepsilon.$

(3) 证明对任意奇函数$f\in C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ 和任意$T\in\mathcal{A}$ 都有

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]}|T(x)-f(x)|\ge\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(T(x)^2+f(x)^2\Big)\mathrm{d}x}.$$

4. 陈书习题**7.7.4.**(复Stone-Weierstrass逼近定理). 此题不难, 可以对$C(K,\mathbb{C})$的情形证明给予证明, 其中K 是度量空间(X,ρ)中的紧集. 用上面的实Stone-Weierastrass 逼近定理即可证明本题.

§7.7 补充: 多元函数极限

如前, 我们将同一个范数记号 $|\cdot|$ 表示不同的欧空间 $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^m$ 的范数. 同样我们用 $B(\cdot,\cdot)$ 表示不同的欧空间 $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^m$ 中的开球.

- **函数（映射）的极限**.

【定义(有限点的极限)】设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 映射 $f:E\to\mathbb{R}^m$. 设 $x_0\in E'$ 即 x_0 为 E 的一个聚点. 若存在 $A\in\mathbb{R}^m$ 使得

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\text{s.t.}\quad|f(x)-A|<\varepsilon\quad\text{for all}\ \ x\in(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)$$

也即

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\text{s.t.}\quad(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B(A,\varepsilon))$$

则称当 x 沿 E 趋于 x_0 时 $f(x)$ 趋于 A, 或称 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{E\ni x\to x_0}|f(x)-A|=0\qquad\text{或}\qquad\lim_{E\ni x\to x_0}f(x)=A.\qquad\square$$

【无穷远点】像扩充实数轴那样, 我们将$\mathbb{R}^n$扩充为$[-\infty,+\infty]^n$. 这时我们称满足$|x|=\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2}=+\infty$的$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in[-\infty,+\infty]^n$ 为一个无穷远点. 我们将这些无穷远点一律记作$x=\infty$.

为理解无穷远点, 我们把一个单位球面放到平面上, 球的南极为平面的原点. 将北极这点与平面上的任意有限点通过直线连接(图示), 我们看到: 平面上的任意有限点与球面上北极以外的某点一一对应, 但北极这一点对应于平面上的所有无穷远点∞. 几何上易见: 以球面北极为中心的一个小圆片对应于平面上某个大圆盘的余集. 这个余集称为平面上无穷远点的一个邻域. 高维情形也是这样:

对任意 $R>0$, 称球的余集 $B(0,R)^c=\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)$ 为无穷远点的一个邻域.

【定义(无穷远点的极限)】设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 映射 $f:E\to\mathbb{R}^m$.

(i) 设 $x_0\in E'$ 即 x_0 为 E 的一个聚点. 若

$$\forall M>0\quad\exists\delta>0\quad\text{s.t.}\quad|f(x)|\ge M\quad\forall x\in(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)$$

也即

$$\forall M>0\quad\exists\delta>0\quad\text{s.t.}\quad(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B(0,M)^c)$$

则称当 x 沿 E 趋于 x_0 时 $f(x)$ 趋于无穷或趋于**无穷远点**, 记作

$$\lim_{E\ni x\to x_0}|f(x)|=+\infty \quad 或 \quad \lim_{E\ni x\to x_0}f(x)=\infty.$$

(ii) 设E无界. 设$A\in\mathbb{R}^n$. 若

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,R>0\quad \text{s.t.}\quad |f(x)-A|<\varepsilon\quad \text{for all}\;\; x\in E\setminus B(0,R)$$

也即

$$\forall\,R>0\quad\exists\,\delta>0\quad \text{s.t.}\quad E\setminus B(0,R)\subset f^{-1}(B(A,\varepsilon))$$

则称当 x沿E 趋向无穷时$f(x)$趋于无穷, 记作

$$\lim_{x\in E,|x|\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{E\ni x\to\infty}f(x)=A$$

(iii) 设E无界. 若

$$\forall\,M>0\quad\exists\,R>0\quad \text{s.t.}\quad |f(x)|\ge M\quad \text{for all}\;\; x\in E\setminus B(0,R)$$

也即

$$\forall\,R>0\quad\exists\,\delta>0\quad \text{s.t.}\quad E\setminus B(0,R))\subset f^{-1}(B(0,M)^c)$$

则称当 x沿E 趋向无穷时$f(x)$趋于无穷, 记作

$$\lim_{x\in E,|x|\to+\infty}|f(x)|=+\infty \quad 也常写成 \quad \lim_{E\ni x\to\infty}f(x)=\infty. \qquad \square$$

【注】如果k 是自然数, 则如以往, “$k\to\infty$”当然表示“$k\to+\infty$”. 对其他类似情形, 只要联系上下文, 就不会对“∞”产生歧义.

命题7.52(极限的序列刻画). 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}^m$.

(a) 设 x_0 为 E 的一个聚点. 则

极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0}f(x)$ 存在 (有限或无限) $\iff$ 对 E 中的异于 x_0 而趋于 x_0 的任一序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都有极限 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)$ 存在 (有限或无限).

此外当两者之一满足时, 对上述任一序列都有

$$\lim_{E\ni x\to x_0}f(x)=\lim_{k\to\infty}f(x_k).$$

(b) 设 E 无界. 则

极限 $\lim\limits_{E\ni x\to\infty} f(x)$ 存在 (有限或无限) $\iff$ 对于 E 中任一满足 $x_k\to\infty\,(k\to\infty)$ 的序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都有极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 存在 (有限或无限).

此外当两者之一满足时, 对上述任一序列都有

$$\lim_{E\ni x\to\infty} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k).$$

【证明】(a): "$\Longrightarrow$": 设极限 $A := \lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在（有限或无限). 设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 中的异于 x_0 而趋于 x_0 的任一序列.

当 A 有限即 $A\in\mathbb{R}^n$ 时, 由极限的定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in E\cap\breve{B}(x_0,\delta)$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 因 $x_k\to x_0\,(k\to\infty)$, 故存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N$ 设时有 $|x_k-x_0|<\delta$. 又因 $x_k\ne x_0$ 故 $n\ge N$ 时有 $x_k\in E\cap\breve{B}(x_0,\delta)$ 从而有 $|f(x_k)-A|<\varepsilon$. 因此极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 存在且 $=A$.

其次设 $A=\infty$. 由趋于无穷远点的定义, 对任意 $M>0$, 存在 $R>0$ 使得当 $x\in E\setminus B(0,R)$ 时恒有 $|f(x)|>M$. 因 $x_k\to\infty\,(k\to\infty)$, 故存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N$ 设时有 $|x_k|\ge R$. 于是当 $n\ge N$ 时有 $x_k\in E\setminus B(0,R)$ 从而有 $|f(x_k)|\ge M$. 因此极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 存在且 $=\infty$.

"$\Longleftarrow$": 先证明极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 的值与 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的选择无关. 也即对于 E 中的异于 x_0 而趋于 x_0 的任意两个序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty},\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k)$.

事实上令

$$z_{2k-1}=x_k,\quad z_{2k}=y_k,\quad k=1,2,3,\dots.$$

则 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 也是 E 中异于 x_0 而趋于 x_0 的序列. 于是由极限存在有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\lim_{k\to\infty} f(z_{2k-1})=\lim_{k\to\infty} f(z_{2k})=\lim_{k\to\infty} f(y_k).$$

令 $A=\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 为这一公共值. 来证明极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在且 $=A$. 反证法：假设极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 不存在或存在但 $\ne A$.

先设 A 有限. 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意 $\delta>0$ 存在 $x_\delta\in E\cap B(x_0,\delta)$ 使得 $|f(x_\delta)-A|\ge\varepsilon_0$. 依次取 $\delta=1/k, k=1,2,3,...$ 则存在 $x_k\in(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,1/k)$ 使得 $|f(x_k)-A|\ge\varepsilon_0, k=1,2,3,\dots$. 显然 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 中的异于 x_0 而趋于 x_0 的序列.

故由上面结果应有 $|f(x_k)-A|\to 0\,(k\to\infty)$ 这与 $\varepsilon_0>0$ 矛盾. 所以极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在且 $=A$.

其次设 $A=\infty$. 此时存在 $M_0>0$(当然 $M_0<+\infty$), 使得对任意 $\delta>0$ 存在 $x_\delta\in E\cap B(x_0,\delta)$ 使得 $|f(x_\delta)|<M_0$. 依次取 $\delta=1/k, k=1,2,3,...$ 则存在 $x_k\in(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,1/k)$ 使得 $|f(x_k)-A|\ge\varepsilon_0, k=1,2,3,\dots$. 显然 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是 E 中的异于 x_0 而趋于 x_0 的序列. 故由上面结果应有 $|f(x_k)|\to+\infty\,(k\to\infty)$ 这与 $M_0<+\infty$ 矛盾. 所以极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在且 $=\infty$. (a) 中关于两个极限相等的证明已含在上面的证明中.

(b): 设 E 无界. “$\Longrightarrow$”: 设极限 $A:=\lim\limits_{E\ni x\infty} f(x)$ 存在（有限或无限). 设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是 E 中满足 $x_k\to\infty\,(k\to\infty)$ 的任一序列.

当 A 有限即 $A\in\mathbb{R}^n$ 时, 由极限的定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $R>0$ 使得当 $x\in E\setminus B(0,R)$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 因 $x_k\to\infty\,(k\to\infty)$, 故存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N$ 设时有 $|x_k|\ge R$ 即 $x_k\in E\cap B(0,R)$. 于是当 $n\ge N$ 时有 $|f(x_k)-A|<\varepsilon$. 因此极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 存在且 $=A$.

其次设 $A=\infty$. 由趋于无穷远点的定义, 对任意 $M>0$, 存在 $R>0$ 使得当 $x\in E\setminus B(0,R)$ 时恒有 $|f(x)|>M$. 因 $x_k\to\infty\,(k\to\infty)$, 故存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N$ 设时有 $|x_k|\ge R$. 于是当 $n\ge N$ 时有 $x_k\in E\setminus B(0,R)$ 从而有 $|f(x_k)|\ge M$. 因此极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 存在且 $=\infty$.

“$\Longleftarrow$”: 照搬 (a) 中的证明易见极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 的值与 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 的选择无关. 令 $A=\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 为这一公共值. 来证明极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在且 $=A$. 反证法：假设极限 $\lim\limits_{E\ni x\to\infty} f(x)$ 不存在或存在但 $\ne A$.

先设 A 有限. 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意 $R>0$ 存在 $x_R\in E\setminus B(0,R)$ 使得 $|f(x_\delta)-A|\ge\varepsilon_0$. 依次取 $R=k=1,2,3,...$ 则存在 $x_k\in E\setminus B(0,n)$ 使得 $|f(x_k)-A|\ge\varepsilon_0, k=1,2,3,\dots$. 显然 $E\ni x_k\to\infty\,(k\to\infty)$. 故应有 $|f(x_k)-A|\to 0\,(k\to\infty)$. 这与 $\varepsilon_0>0$ 矛盾. 所以极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在且 $=A$.

其次设 $A=\infty$. 则存在 $M_0>0$ ($M_0<+\infty$), 使得对任意 $R>0$ 存在 $x_R\in E\setminus B(0,R)$ 使得 $|f(x_R)|<M_0$. 依次取 $R=k=1,2,3,...$ 则存在 $x_k\in E\setminus B(0,n)$ 使得 $|f(x_k)|\ge M_0, k=1,2,3,\dots$. 显然 $E\ni x_k\to\infty\,(k\to\infty)$ 故由上面的结论应有 $|f(x_k)|\to+\infty\,(k\to\infty)$ 这与 $M_0<+\infty$ 矛盾. 所以极限 $\lim\limits_{E\ni x\to\infty} f(x)$ 存在且 $=\infty$.

(b) 中关于两个极限相等的证明已含在上面的证明中. $\square$

命题7.53(Cauchy 收敛准则). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$.

(a) 设 x_0 为 E 的一个聚点. 则

极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在有限 $\iff$ f 满足 Cauchy 条件:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{for all} \quad x, y \in (E \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, \delta).$$

(b) 设 E 无界. 则

极限 $\lim\limits_{E\ni x\to\infty} f(x)$ 存在有限 $\iff$ f 满足 Cauchy 条件:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{for all} \quad x, y \in E \setminus B(0, R).$$

【证】(a): "$\Longrightarrow$": 记 $A = \lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$. 又假设知 $A \in \mathbb{R}^n$. 对任意 $\varepsilon > 0$ 对 $\varepsilon/2 > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (E \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, \delta)$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. 于是当使得当 $x, y \in (E \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, \delta)$ 时

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - A| + |A - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

所以 f 满足 Cauchy 条件.

"$\Longleftarrow$": 设 f 满足 Cauchy 条件. 任取序列 $E\setminus\{x_0\} \ni x_k \to x_0\,(k \to \infty)$. 由 Cauchy 条件, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x, y \in (E\setminus\{x_0\}) \cap B(x_0, \delta)$ 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 因 $E \setminus \{x_0\} \ni x_k \to x_0\,(k \to \infty)$, 故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge N$ 时$x_k \in (E \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, \delta)$. 因此当$k > j \ge N$ 时有$|f(x_k) - f(x_j)| < \varepsilon$. 所以$\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个Cauchy 列. 有$\mathbb{R}^n$的完备性知序列$\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$收敛, 即极限$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 存在有限. 因序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$是任意选取的, 根据**命题7.52(极限的序列刻画)**知极限$\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$存在且$\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. 后者表明$\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$也是有限的.

(b): 证明方法与(a)的相同. $\square$

【注】与以往一样, 如果一个变量有极限, 则当且仅当极限有限时,称此变量是收敛的. 数学上要注意区分 "极限存在" 和 "极限存在且有限 (即收敛)" 的区别.

• **有界函数、无穷小量、无穷大量**.

设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}^m$. 若 f 的象集 $f(E)$ 是有界的,则称 f 是 E 上的一个有界函数 (映射). 这等价于

$$\sup_{x\in E}|f(x)|<+\infty.$$

也即等价于

$$\exists\, 0<M<+\infty \quad \text{s.t.} \quad |f(x)|\le M \qquad \text{for all} \quad x\in E.$$

一般地, 若 $E_1\subset E$ 且 f 在 E_1 上有界, 则称 f 在子集 E_1 上有界.

易见收敛的序列 $k\mapsto x_k$ 是有界的. 同样收敛的函数在其自变量的极限点 (聚点或无穷远点) 的一个邻域内是有界的.

例如设极限 $A:=\lim\limits_{E\ni x\to x_0}f(x)$ 存在有限. 则存在 $\delta>0$ 使得 $|f(x)-A|<1$ for all $x\in(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)$. 于是

$$|f(x)|\le\max\{1+|A|,|f(x_0)|\} \qquad \text{for all} \quad x\in E\cap B(x_0,\delta).$$

再如设极限 $A:=\lim\limits_{E\ni x\to\infty}f(x)$ 存在有限. 则存在 $R>0$ 使得 $|f(x)-A|<1$ for all $x\in E\setminus B(0,R)$. 于是

$$|f(x)|\le 1+|A| \quad \text{for all} \quad x\in E\setminus B(0,R).$$

若 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0}f(x)=0$ 或 $\lim\limits_{E\ni x\to\infty}f(x)=0$ 则分别称 $f(x)$ 在 $E\ni x\to x_0$ 时和 $E\ni x\to\infty$ 时是一个无穷小量. 如果愿意用数值函数表达, 则可分别记之为

$$|f(x)|=o(1) \quad (E\ni x\to x_0), \qquad\qquad |f(x)|=o(1) \quad (E\ni x\to\infty).$$

根据这个说法, 若 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0}f(x)=A$ 有限或 $\lim\limits_{E\ni x\to\infty}f(x)=A$ 有限, 则 $f(x)-A$ 便分别是 $E\ni x\to x_0$ 时和 $E\ni x\to\infty$ 时的无穷小量.

若 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{E\ni x\to\infty}f(x)=\infty$ 则分别称 $f(x)$ 在 $E\ni x\to x_0$ 和 $E\ni x\to\infty$ 时是一个无穷大量.

命题7.54(极限的四则运算). 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 设 ω 为 E 的一个聚点或者当 E 无界时 $\omega=\infty$.

(a) 设 $f,g:E\to\mathbb{R}^m$ 且极限 $\lim\limits_{E\ni x\to\omega}f(x)$ 和 $\lim\limits_{E\ni x\to\omega}g(x)$ 都存在有限. 则线性组合 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 有有限的极限且

$$\lim_{E\ni x\to\omega}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\lim_{E\ni x\to\omega}f(x)+\beta\lim_{E\ni x\to\omega}g(x)$$

(b) $f:E\to\mathbb{R}^m, g:E\to\mathbb{R}$ 且极限 $\lim\limits_{E\ni x\to\omega}f(x)$ 和 $\lim\limits_{E\ni x\to\omega}g(x)$ 都存在有限. 则乘积 $g(x)f(x)$ 有有限的极限且

$$\lim_{E\ni x\to\omega}g(x)f(x)=\lim_{E\ni x\to\omega}g(x)\lim_{E\ni x\to\omega}f(x).$$

又若 $\lim\limits_{E\ni x\to\omega}g(x)$ 存在有限且 $\neq 0$, 则 $f(x)/g(x)$ 的极限也存在有限且

$$\lim_{E\ni x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{E\ni x\to\omega}f(x)}{\lim\limits_{E\ni x\to\omega}g(x)}.$$

【证】记 $A=\lim\limits_{E\ni x\to\omega}f(x), B=\lim\limits_{E\ni x\to\omega}g(x)$. 利用范数不等式有估计式

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)-\alpha A-\beta B|\le|\alpha||f(x)-A|+|\beta||g(x)-B|$$

以及当 $g(x)\in\mathbb{R}$ 时

$$\begin{aligned}&|g(x)f(x)-BA|=|(g(x)-B)f(x)+B(f(x)-A)|\\&\le|g(x)-B||f(x)|+|B||f(x)-A)|\\&\le|g(x)-B||f(x)-A|+|g(x)-B||A|+|B||f(x)-A|,\end{aligned}$$

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\Big|=\Big|\frac{Bf(x)-g(x)A}{g(x)B}\Big|=\Big|\frac{B(f(x)-A)+(B-g(x))A}{g(x)B}\Big|$$

$$\le\frac{|B||f(x)-A|+|B-g(x)||A|}{|g(x)||B|}\le\frac{|B||f(x)-A|+|g(x)-B||A|}{\frac{1}{2}|B|^2}$$

最后这个不等式对所有满足 $|g(x)-B|<\frac{1}{2}|B|$ 的 $x\in E$ 成立, 因为此时有 $|g(x)|>\frac{1}{2}|B|$.

从以上估计, 用 “$\varepsilon-\delta$” 语言等, 即知所证极限关系成立.

本命题的另一证法是利用极限的序列刻画. 例如以除法为例. 任取序列 $E \ni x_k \to \omega\,(k\to\infty)$. 由假设和**命题7.52(极限的序列刻画)** 以及关于收敛的实数序列的算术性质有 (注意欧空间序列的收敛等价于按坐标收敛)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)}{g(x_k)}&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{f_1(x_k)}{g(x_k)},\frac{f_2(x_k)}{g(x_k)},\dots,\frac{f_m(x_k)}{g(x_k)}\right)\\&=\left(\frac{\lim\limits_{k\to\infty}f_1(x_k)}{\lim\limits_{k\to\infty}g(x_k)},\frac{\lim\limits_{k\to\infty}f_2(x_k)}{\lim\limits_{k\to\infty}g(x_k)},\dots,\frac{\lim\limits_{k\to\infty}f_m(x_k)}{\lim\limits_{k\to\infty}g(x_k)}\right)=\frac{\lim\limits_{E\ni x\to\omega}f(x)}{\lim\limits_{E\ni x\to\omega}g(x)}\end{aligned}$$

据序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的任意性即知极限 $\lim\limits_{E\ni x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且等于 $\frac{\lim\limits_{E\ni x\to\omega}f(x)}{\lim\limits_{E\ni x\to\omega}g(x)}$. □

• **复合映射的极限**. 最复杂也最常见的是复合映射的行为.

命题7.55(复合映射的极限) 设 $X\subset\mathbb{R}^n, Y\subset\mathbb{R}^m$, $f: X\to\mathbb{R}^m$ 且 $f(X)\subset Y$. 又设 $g: Y\to\mathbb{R}^p$. 设 ω 是 X 的一个聚点或 $\omega=\infty$(对后者自然要求 X 无界). 假设

(i) 极限 $y_0=\lim\limits_{X\ni x\to\omega}f(x)$ 存在有限且 y_0 是 Y 的一个聚点并且设当 $x\neq\omega$ 时 $f(x)\neq y_0$;

  或 $y_0=\lim\limits_{X\ni x\to\omega}f(x)=\infty$ (此时自然要求 Y 无界).

(ii) 极限 $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0}g(y)$ 存在有限或 $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0}g(y)=\infty$.

则复合映射 $g\circ f(x)=g(f(x))$ 当 $X\ni x\to\omega$ 时有极限且

$$\lim_{X\ni x\to\omega}g(f(x))=\lim_{Y\ni y\to y_0}g(y).$$

【证】将使用极限的序列刻画. 任取序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$ 满足 $x_k\to\omega\,(k\to\infty)$ 且 $x_k\neq\omega\,(k=1,2,3,\dots)$. 由假设和极限的序列刻画有 $y_k:=f(x_k)\to y_0\,(k\to\infty)$ 且 $y_k\neq y_0\,(k=1,2,3,\dots)$ 从而有

$$\lim_{k\to\infty}g(f(x_k))=\lim_{k\to\infty}g(y_k)=\lim_{Y\ni y\to y_0}g(y).$$

再由 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的任意性即知所证极限关系成立. □

• **多元函数的上下极限**.

设$E\subset\mathbb{R}^n$, 实函数$f: E\to\mathbb{R}$. 设x_0 为E的一个聚点. 分别称

$$\limsup_{E\ni x\to x_0}f(x):=\lim_{\delta\to0+}\sup_{(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)}f(x)$$

$$\liminf_{E\ni x\to x_0} f(x) := \lim_{\delta\to 0+} \inf_{(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)} f(x)$$

为$f(x)$ 当$E\ni x\to x_0$时的上、下极限. 注意: 因为函数

$$\delta\mapsto \sup_{(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)} f(x), \qquad \delta\mapsto \inf_{(E\setminus\{x_0\})\cap B(x_0,\delta)} f(x)$$

都是单调的, 故上下极限都存在(可能为无穷大).

类似地, 设E无界, 分别称

$$\limsup_{E\ni x\to\infty} f(x) := \lim_{R\to\infty} \sup_{E\setminus B(0,R)} f(x)$$

$$\liminf_{E\ni x\to\infty} f(x) := \lim_{R\to\infty} \inf_{E\setminus B(0,R)} f(x)$$

为$f(x)$ 当$E\ni x\to\infty$时的上、下极限.

与单变量实函数情形一样,我们分别有:

$$\lim_{E\ni x\to x_0} f(x) \text{ 存在 } \iff \limsup_{E\ni x\to x_0} f(x) = \liminf_{E\ni x\to x_0} f(x)$$

且当两端之一成立时, 三个极限相等. 同样有

$$\lim_{E\ni x\to\infty} f(x) \text{ 存在 } \iff \limsup_{E\ni x\to\infty} f(x) = \liminf_{E\ni x\to\infty} f(x)$$

且当两端之一成立时, 三个极限相等.

当f是向量值的映射时, 即$f:E\to\mathbb{R}^n\,(n\geq 2)$, 将上面的定义和结果用于非负函数$|f(x)-A|$便得到

$$\lim_{E\ni x\to x_0} f(x) = A\in\mathbb{R}^n \text{ 存在 } \iff \limsup_{E\ni x\to x_0} |f(x)-A| = 0.$$

而当E 无界时有

$$\lim_{E\ni x\to\infty} f(x) = A\in\mathbb{R}^n \text{ 存在 } \iff \limsup_{E\ni x\to\infty} |f(x)-A| = 0.$$

对于$f(x)$趋于无穷远点的判断, 有:

$$\lim_{E\ni x\to x_0} f(x) = \infty \iff \liminf_{E\ni x\to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

而当E 无界时

$$\lim_{E\ni x\to\infty} f(x) = \infty \iff \liminf_{E\ni x\to\infty} |f(x)| = +\infty.$$

【**例**】求下列极限:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\mathrm{sign}(x+y), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{(x^2+y^2)^N}{e^{a|x|+b|y|}}$$

其中 $\alpha>0, N>0, a>0, b>0$.

【**解**】我们有

$$|xy\mathrm{sign}(x+y)| \le |x||y| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2) \to 0 \quad \text{as} \quad (x,y)\to(0,0)).$$

所以第一个极限 $=0$.

对第二个极限, 首先回忆不等式 $|\sin t|\le |t|$ 和 Jordan 不等式

$$\sin t \ge \frac{2}{\pi}t, \quad 0\le t\le \pi/2$$

后者用于处理 $\alpha>1$ 的情形. 令 $t=t(x,y)=x^2+y^2$, 则由复合函数极限定理即得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{t\to0^+} \frac{\sin t}{t^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0<\alpha<1, \\ 1 & \text{if} \quad \alpha=1 \\ +\infty & \text{if} \quad \alpha>1 \end{cases}$$

对第三个极限, 令 $c=\min\{a,b\}$. 则 $c>0$ 且 $a|x|+b|y|\ge c(|x|+|y|)\ge c\sqrt{x^2+y^2}$ 从而有

$$0\le \frac{(x^2+y^2)^N}{e^{a|x|+b|y|}} \le \frac{(x^2+y^2)^N}{e^{c\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{t^{2N}}{e^{ct}}, \quad t=t(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

因此

$$\limsup_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{(x^2+y^2)^N}{e^{a|x|+b|y|}} \le \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2N}}{e^{ct}} = 0 \implies \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{(x^2+y^2)^N}{e^{a|x|+b|y|}} = 0.$$

- **多元函数的累次极限** (repeated limits).

【**命题7.56.**】设函数或映射 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 的某个去心邻域内有定义. 逻辑关系: 若下列三个极限都存在（包括极限函数 $x\mapsto \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 有意义等等)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \quad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

则三者必相等:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

【证】设函数 $f(x,y)$ 在去心球 $\breve{B}((x_0,y_0),r)$ 内有定义. 记

$$\begin{aligned} A &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \\ f_1(x) &= \lim_{y\to y_0} f(x,y), \quad x\neq x_0, \\ f_2(y) &= \lim_{x\to x_0} f(x,y), \quad y\neq y_0. \end{aligned}$$

要证明

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{y\to y_0} f_2(y) = A.$$

我们以 A 有限为例. (对$A=\infty$ 的情形, 证明相同.)

对任意 $\varepsilon>0$ 对 $\varepsilon/2>0$ 存在 $\delta=\delta_\varepsilon>0\,(\delta<r)$ 使得当$0<|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$ 时$|f(x,y)-A|<\varepsilon/2$. 对任意 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta/2$, 由 $f(x,y)\to f_1(x)\,(\,y\to y_0)$ 知存在 $0<\eta_x<\delta/2$ 使得 $|f_1(x)-f(x,y)|<\varepsilon/2$ for all $0<|y-y_0|<\eta_x$. 于是对任意满足 $0<|x-x_0|<\delta/2$ 的 x, 借助上述 y 有

$$|(x,y)-(x_0,y_0)|\le |x-x_0|+|y-y_0|<\delta/2+\eta_x<\delta$$

从而有

$$|f_1(x)-A|\le |f_1(x)-f(x,y)|+|f(x,y)-A|<\varepsilon/2+\varepsilon/2.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=A$. 同理可证 $\lim\limits_{y\to y_0} f_2(y)=A$. □

【**例**】对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

有:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=1,\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=-1$$

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. □

【**例** (吉米多维奇 3183)】设 $\varphi(t)=\sin(1/t)$ 当 $t\neq 0$; $\varphi(t)=0$ 当 $t=0$. 对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\varphi(x)\varphi(y)$$

显然整体极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ (存在), 但两个累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\}$, $\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\}$ 都不存在. $\square$

• **沿道路的极限**. 利用复合函数极限定理易见: 若整体极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 则当自变量沿任何射线 $x=x_0+\alpha t, y=y_0+\beta t$ $(\alpha^2+\beta^2>0)$ 趋于(x_0,y_0)时都有极限且与整体极限相同:

$$\lim_{t\to 0^+} f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

反之不一定成立, 即即便对任何射线 $x=x_0+\alpha t, y=y_0+\beta t$ $(\alpha^2+\beta^2>0)$ 都有极限 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)$ 存在, 整体极限可以不存在. 典型的例子如下 (以 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 为例):

【**例**】函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

当自变量沿任何射线 $x=\alpha t, y=\beta t$ $(\alpha^2+\beta^2>0)$ 趋于原点时都有极限且

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha t,\beta t)=0.$$

但是沿着抛物线 $y=x^2$ 趋于原点时, 极限

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此整体极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
但是下面命题成立.

【**命题 7.57.**】设 $n\ge 2, r>0$, 映射 $f:\breve{B}(x_0,r)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. 则

整体极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\iff$ 对于满足 $\gamma(t)\neq x_0$ $\forall\, 0<t\le 1; \gamma(0)=x_0$ 的任一道路 $\gamma\in C([0,1],B(x_0,r))$, 都有极限 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma(t))$ 存在.
此外当整体极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在时, 对于上述任一道路 γ 都有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma(t))$.
【证】对命题中的任一道路 γ, 由连续性有 $\gamma(t)\to x_0\,(t\to 0^+)$. 因此根据复合映射的极限定理易见蕴含关系 “ $\Longrightarrow$ ” 成立且命题的第二个结论成立.

下证 “ $\Longleftarrow$ ” 成立. 通过考虑映射 $\widetilde{f}(x)=f(x_0+x), x\in B(0,r)$ 可知所要证者等价于 $x_0=0$ 的情形. 因此, 为记号简单, 我们可以假设 $x_0=0$. 取 η 满足 $0<\eta<\frac{r}{\sqrt{n}}$. 则有 $[-\eta,\eta]^n\subset B(0,r)$.

Step 1. 将立方体 $[-\eta,\eta]^n$ 的每条楞 $[-\eta,\eta]$ 分解成 $[-\eta,0]\cup[0,\eta]$, 得到 2^n 个闭区间 $J_1,J_2,...,J_{2^n}$:

$$[-\eta,\eta]^n = J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_{2^n}$$

其中每个 J_i 都是 n 个形如 $[-\eta,0],[0,\eta]$ 的一维区间的乘积. 调整下标后可使得 $J_i\cap J_{i+1}$ 是 $n-1$ 维的区间, $i=1,2,...,2^n-1$. 例如在 $n=2$ 时, $J_i\cap J_{i+1}$ 是一维区间 (公共线段), 在 $n=3$ 时, $J_i\cap J_{i+1}$ 是二维区间 (公共面). 令

$$I_i = J_i\setminus\{0\},\quad i=1,2,...,2^n.$$

则易见

$$[-\eta,\eta]^n\setminus\{0\} = I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{2^n}.$$

如上, $I_i\cap I_{i+1}$ 是 $n-1$ 维的区间且 0 是 $I_i\cap I_{i+1}$ 的聚点, $i=1,2,...,2^n-1$. 最后注意: 根据上述分割方式易见每个 I_i 都是**凸集**.

Step 2. 来证明下列极限

$$A_i := \lim_{I_i\ni x\to 0} f(x),\quad i=1,2,...,2^n$$

都存在.

任取 $i\in\{1,2,3,...,2^n\}$. 为记号方便, 可设 $i=1$. (一般情形的证明完全相同). 根据极限的序列刻画, 只要证明对任何序列 $I_1\ni x_k\to 0\,(k\to\infty)$ 都有极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ 存在. 为此我们构造 I_1 中的无限段折线 γ 如下:

$$\gamma(t) = \frac{t-\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}x_k + \frac{\frac{1}{k}-t}{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}x_{k+1},\quad t\in[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}],\quad k=1,2,3,...;$$
$$\gamma(0)=0.$$

由 $(0,1]=\bigcup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$ 知 $\gamma(t)$ 在 $[0,1]$ 上处处有定义. 并且由 $x_k\in I_1$ 且 I_1 是凸集可知 $\gamma(t)\in I_1$ for all $0<t\le 1$. 易见 $\gamma(t)$ 在每个闭区间 $[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$ 上连续且

$$\gamma(\frac{1}{k}) = x_k,\quad \gamma(\frac{1}{k+1}) = x_{k+1},\quad k=1,2,3,\dots.$$

因此 $\gamma(t)$ 在 $(0,1]$ 上处处连续. 又由

$$|\gamma(t)|\le\max\{|x_k|,\,|x_{k+1}|\},\quad t\in[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$$

和 $|x_k|\to 0\,(k\to\infty)$ 可知 $\gamma(t)$ 在 $t=0$ 处也连续【这不难用 $\varepsilon-\delta$ 语言给予证明: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_k|<\varepsilon$ for all $k\ge N$. 因 $(0,\frac{1}{N}]=\bigcup_{k=N}[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$ 故对任

意 $0<t\le\frac{1}{N}$, 存在 $k\ge N$ 使得 $t\in[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$ 从而有 $|\gamma(t)|\le|\le\max\{|x_k|,|x_{k+1}|\}<\varepsilon$. 因此 $|\gamma(t)|\to 0$ as $t\to 0^+$ i.e. $\lim\limits_{t\to 0^+}\gamma(t)=0=\gamma(0)$. 所以 $\gamma(t)$ 在 $t=0$ 也连续.】

为记号简便, 令

$$\breve{B}(0,r)=B(0,r)\setminus\{0\}.\qquad (\text{不含球心的开球})$$

则有 $\gamma\in C([0,1],I_1)\subset C([0,1],\breve{B}(0,r))$. 于是根据假设和 $f(x_k)=f(\gamma(\frac{1}{k}))$ 即知极限

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=\lim_{k\to\infty}f(\gamma(\frac{1}{k}))=\lim_{t\to 0^+}f(\gamma(t))$$

存在.

Step 3. 证明**Step 2** 中的极限全等:

$$A_1=A_2=\cdots=A_{2^n}.$$

事实上由于原点 0 是相邻的两个区间 I_i,I_{i+1} 的公共部分 $I_i\cap I_{i+1}$(仍为凸集) 的聚点, 且极限 A_i,A_{i+1} 已经存在, 故有

$$A_i=\lim_{I_i\ni x\to 0}f(x)=\lim_{I_i\cap I_{i+1}\ni x\to 0}f(x)=\lim_{I_{i+1}\ni x\to 0}f(x)=A_{i+1},\quad i=1,2,...,2^n-1.$$

Step 4. 令 $A:=A_1=A_2=\cdots=A_{2^n}$. 来证明极限 $\lim\limits_{\breve{B}(0,r)\ni x\to 0}f(x)$ 存在且 $=A$.

据 Step 3 知

$$\lim_{I_i\ni x\to 0}f(x)=A,\quad i=1,2,...,2^n.$$

当 $A\in\mathbb{R}^m$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta_i>0$ 使得

$$|f(x)-A|<\varepsilon\quad\text{for all}\ \ x\in\breve{B}(0,\delta_i)\cap I_i,\quad i=1,2,...,2^n.$$

令 $\delta=\min\{\eta,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{2^n}\}$. 则

$$\breve{B}(0,\delta)\subset[-\eta,\eta]^n\setminus\{0\}=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{2^n}$$

从而有

$$\breve{B}(0,\delta)=[\breve{B}(0,\delta)\cap I_1]\cup[\breve{B}(0,\delta)\cap I_2]\cup\cdots\cup[\breve{B}(0,\delta)\cap I_{2^n}]$$

且

$$\breve{B}(0,\delta)\cap I_i\subset\breve{B}(0,\delta_i)\cap I_i,\quad i=1,2,...,2^n.$$

于是

$$\forall\, x \in \breve{B}(0,\delta) \implies \exists\, i \in \{1,2,...,2^n\} \quad \text{s.t.} \quad x \in \breve{B}(0,\delta_i) \cap I_i \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{\breve{B}(0,r)\ni x\to 0} f(x)$ 存在且 $= A$.

当 $|A| = \infty$ 时, 由定义, 这等于说

$$\lim_{I_i \ni x \to 0} |f(x)| = \infty, \quad i = 1,2,...,2^n.$$

因此对任意 $M > 0$ 存在 $\delta_i > 0$ 使得

$$|f(x)| > M \quad \text{for all } x \in \breve{B}(0,\delta_i) \cap I_i, \quad i = 1,2,...,2^n.$$

把上面的 "$|f(x) - A| < \varepsilon$" 换成 "$|f(x)| > M$", 用同样的论证即得 $\lim\limits_{\breve{B}(0,r)\ni x\to 0} |f(x)| = \infty$.

这就完成了命题的证明. □

【注】命题7.57中的维数 $n \geq 2$ 的作用在于当 $n \geq 2$ 时去心开球 $\breve{B}(x_0, r)$ 是连通的. 但在 $n = 1$ 时, 去心区间 $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ **不连通**. 因此不难看出**命题7.57对** $n = 1$ **不成立**. 例如取

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad x < x_0, \\ 1 & \text{if} \quad x > x_0. \end{cases}$$

则整体极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在. 但对任意连续函数 $\gamma : [0,1] \to (x_0 - r, x_0 + r)$ 满足 $\gamma(0) = x_0$ 和 $\gamma(t) \neq x_0$ for all $0 < t \leq 1$, 总有极限 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma(t))$ 存在. 事实上根据实值连续函数介值定理易见: 要么恒有 $\gamma(t) < x_0$ for all $t \in (0,1]$, 要么恒有$\gamma(t) > x_0$ for all $t \in (0,1]$. 因此对第一种情形有 $f(\gamma(t)) \equiv -1, 0 < t \leq 1$, 因而 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = -1$; 对第二种情形有 $f(\gamma(t)) \equiv 1$, $0 < t \leq 1$ 因而 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = 1$.

作业题

1. 求下列极限

$$\lim_{x\to 0, y\to a} \frac{\sin(xy)}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty, y\to +\infty} \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}},$$

$$\lim_{x\to +\infty, y\to +\infty} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}, \quad \lim_{x\to 1, y\to 0} \frac{\log(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2. 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$为对称矩阵．证明

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^\tau Ax = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ 是正定的}.$$

[注：按照矩阵运算法则, Ax 中的x是列向量; x^τ 是x的转置.]

3. 证明：对于二元函数

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

但极限$\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

4. 求累次极限$\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))$ 和$\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))$:

$$(1) \qquad f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \qquad a=+\infty, b=+\infty.$$

$$(2) \qquad f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right), \quad a=+\infty, b=+\infty.$$

$$(3) \qquad f(x,y) = \frac{1}{xy}\tan\left(\frac{xy}{1+xy}\right), \quad a=0, b=+\infty.$$

5. 若$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 其中$\theta \in [0,2\pi)$ 为常数, 问下列极限沿怎样的方向θ才存在：

$$(1) \quad \lim_{\rho\to 0+} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, \qquad (2) \quad \lim_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$