《初等概率论》第 10 讲

邓 婉 璐

清华大学
统计学研究中心

October 29, 2018

概率母函数

♣ 概率母函数的引入为计算取非负整值的随机变量的概率分布、期望和方差等带来很多的方便.

定义 1.1 (probability-generating function)

设 X 是取非负整值的随机向量，称

$$g(s) = E(s^X) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(X = j), \quad s \in [-1, 1],$$

为 X 的概率母函数 (probability-generating function). 约定 $0^0 = 1$.

♣ 显然 $g(s)$ 在 $[-1, 1]$ 中绝对收敛.

性质 1.1

设 $g(s)$ 是 X 的概率母函数，$g^{(k)}(s)$ 是 $g(s)$ 的 k-阶导数. 则

1. $\mathbb{P}(X=k) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$;
2. $E(X) = g^{(1)}(1)$;
3. 如果 $E(X) < \infty$, 则 $\mathrm{var}(X) = g^{(2)}(1) + g^{(1)}(1) - [g^{(1)}(1)]^2$;
4. 如果 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，$g_i(s) = E(s^{X_i})$ 是 X_i 的概率母函数，则 $Y = X_1 + \ldots + X_n$ 的概率母函数为
$$g_Y(s) = g_1(s)g_2(s)\cdots g_n(s), \quad s \in [-1,1].$$

证明. (1). 由下式得到.

$$\frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{g^{(k)}(s)}{k!}\Big|_{s=0} = \frac{1}{k!}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{d^k}{ds^k}(s^j)\mathbb{P}(X=j)\Big|_{s=0} = \mathbb{P}(X=k)$$

【概率母函数与概率分布列相互唯一决定.】

(2). 由 $g^{(1)}(1)=\sum_{j=0}^{\infty} j\mathbb{P}(X=j)=E(X)$ 得到.

(3). 由 $g^{(1)}(1)=E(X)$ 和

$$
\begin{aligned}
& g^{(2)}(1)+g^{(1)}(1)-[g^{(1)}(1)]^2 \\
&=\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\mathbb{P}(X=j)+\sum_{j=0}^{\infty} j\mathbb{P}(X=j)-(EX)^2 \\
&=E[X(X-1)]+EX-(EX)^2 \\
&=E(X^2)-(EX)^2 \\
&=\operatorname{var}(X).
\end{aligned}
$$

得到.

(4). 利用 $s^{X_1},\ldots,s^{X_n}$ 的独立性，可知结论成立.

概率母函数

♣ 常见分布的概率母函数

例 1.1 (二项分布 $B(n,p)$)

二项分布 $B(n,p)$ 的概率母函数是

$$g(s)=\sum_{j=0}^{n} s^j\binom{n}{j}p^j q^{n-j}=(q+sp)^n.$$

♣ 应用：设 $X_1,X_2,\dots,X_m$ 是相互独立，且 $X_i\sim B(n_i,p)$，则

$$Y=X_1+X_2+\dots+X_m\sim B(n_1+n_2+\dots+n_m,\ p).$$

概率母函数

例 1.2 (Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$)

Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的概率母函数是

$$g(s)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda(s-1)}.$$

♣ **应用：** 设 $X_1,X_2,\ldots,X_m$ 是相互独立，且 $X_i\sim\mathcal{P}(\lambda_i)$，则

$$Y=X_1+X_2+\ldots+X_m\sim\mathcal{P}(\lambda_1+\ldots+\lambda_m).$$

例 1.3 (几何分布 $G(p)$)

几何分布 $G(p)$ 的概率母函数是

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k p q^{k-1} = \frac{sp}{1-sq}.$$

♣ **应用：设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 是相互独立，且 $X_i \sim G(p)$，则**

$$S_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

有概率母函数

$$g_m(s) = \left(\frac{sp}{1-sq}\right)^m.$$

将 $g_m(s)$Taylor 展开得到

$$g_m(s) = (sp)^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\cdots(m+j-1)}{j!}(sq)^j$$

概率母函数

$$= (sp)^m \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{m-1} (sq)^j$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} s^k.$$

于是得到 Pascal 分布

$$\mathbb{P}(S_m = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}, \quad k = m, m+1, \ldots.$$

概率母函数

例 1.4

掷三颗骰子，求总点数是 9 的概率.

解. 用 X_i 表示第 i 颗骰子的点数，$i = 1, 2, 3$. 则 $Y = X_1 + X_2 + X_3$ 是三颗骰子的总点数. 由

$$g(s) = E(s^{X_1}) = \frac{1}{6}(s + s^2 + \ldots + s^6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{s(1-s^6)}{1-s}$$

得 Y 的概率母函数

$$g_Y(s) = [g(s)]^3 = \frac{s^3(1-s^6)^3}{6^3(1-s)^3}$$

$$= \frac{1}{6^3} s^3 (1 - 3s^6 + 3s^{12} - s^{18}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} s^k.$$

可以算出 s^9 的系数是

$$\mathbb{P}(Y = 9) = \frac{1}{6^3}\left[\binom{6+2}{2} - 3\right] = \frac{25}{216}.$$

概率母函数

定理 1.1

设 (i) $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的非负整值随机变量，且 X_1 的概率母函数为

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad p_k = \mathbb{P}(X_1 = k).$$

(ii) Y 为取正整数值的随机变量，且其概率母函数为

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n s^n, \quad g_n = \mathbb{P}(Y = n).$$

(iii) Y 与 $\{X_j\}$ 相互独立. 则 $W := X_1 + X_2 + \ldots + X_Y$ 的概率母函数 $H(s)$ 为 $H(s) = G[\psi(s)]$.

证明. 按照概率母函数的定义，得

$$
\begin{aligned}
H(s) = E(s^W) = E[E(s^W | Y)] &= \sum_{n=1}^{\infty} E(s^W | Y = n)\mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E(s^{X_1+\ldots+X_n} | Y = n)\mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E(s^{X_1+\ldots+X_n})\mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\psi(s)]^n \mathbb{P}(Y = n) \\
&= G[\psi(s)].
\end{aligned}
$$

例 1.5

观测资料表明，天空中星体个数服从 $\mathcal{P}(\lambda\sigma)$，其中 σ 是观测区域的体积，λ 为正常数. 如果每个星体上有生命的概率为 p, 则在体积为 $\bigtriangledown$ 的宇宙空间中有生命存在的星体数 X 服从 $\mathcal{P}(\lambda p\bigtriangledown)$.

解. 设 Y 为体积是 $\bigtriangledown$ 的宇宙空间中星体的个数，则

$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{(\lambda\bigtriangledown)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda\bigtriangledown},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

设 $\xi_i=1$ or 0, 根据 $\bigtriangledown$ 中第 i 个星体上有无生命，$i=1,2,\ldots$, 且 $X=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_Y$ 为 $\bigtriangledown$ 中有生命的星体个数. 由于 $\{\xi_i\}$ 独立同分布且 ξ_1 的概率母函数为 $\psi(s)=q+ps(q=1-p)$, 而 Y 的概率母函数为 $G(s)=e^{\lambda\bigtriangledown(s-1)}$. 利用定理1.1得，$X$ 的概率母函数为

$$H(s)=G[\psi(s)]=e^{\lambda\bigtriangledown((q+ps)-1)}=e^{\lambda p\bigtriangledown(s-1)}.$$

由唯一性知，$X\sim\mathcal{P}(\lambda p\bigtriangledown)$.

概率母函数

定义 1.2 (2-dimensional moment-generating function)

设 (X, Y) 是二维取非负整数值的随机向量，其分布列为 $p_{ik} = \mathbb{P}(X = i, Y = k)$, $i, k = 0, 1, 2, \ldots$,. 称 (s, t) 的函数

$$g(s, t) = E(s^X t^Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} s^i t^k, \quad s, t \in [-1, 1],$$

为 (X, Y) 的概率母函数.

性质 1.2

设 $g(s,t)$ 是 (X,Y) 的概率母函数，则

1. $|g(s,t)| \le g(1,1) = 1,\ |s| \le 1, |t \le 1;$
2. $g_{aX+bY+c}(s) = s^c g(s^a, s^b)$，其中 a,b,c 均为常数;
3. X 与 Y 独立，则 $g(s,t) = g_X(s)g_Y(t);$
4. $g(s,1) = g_X(s),\ g(1,t) = g_Y(t).$
5. 如果 $E(X),\ E(Y) < \infty$，则

$$E(X) = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s}\Big|_{s=t=1},$$

$$E(Y) = \frac{\partial g(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=t=1}.$$

概率母函数

6. 如果 $E(X^2), E(Y^2) < \infty$, 则

$$E(X^2) = \frac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s^2}\Big|_{s=t=1},$$

$$E(Y^2) = \frac{\partial^2 g(s,t)}{\partial t^2}\Big|_{s=t=1},$$

$$E(XY) = \frac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s \partial t}\Big|_{s=t=1}.$$

7. $$p_{ik} = \frac{1}{i!k!}\frac{\partial^{i+k} g(s,t)}{\partial s^i \partial t^k}\Big|_{s=t=0}, \qquad i,k = 0,1,2,\ldots.$$

矩母函数

定义 2.1 (moment-generating function)

设 X 是随机向量，称

$$M_X(s) = E(e^{sX}),$$

为 X 的矩母函数 (moment-generating function).

- 离散变量：$M_X(s) = \sum_j e^{sx_j} P(X = x_j)$,
- 连续变量：$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx$.

♣ 仅在 $E(e^{sX}) < \infty$ 时，我们称 $M_X(s)$ 存在.

矩母函数

性质 2.1

设 $M(s)$ 是 X 的矩母函数，$M^{(k)}(s)$ 是 $M(s)$ 的 k-阶导数. 则

1. $Y = aX + b$ 的矩母函数为 $M_Y(s) = e^{sb}M(sa)$;
2. $EX^k = M^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \ldots$;
3. $M(0) = 1$;
4. 可逆性：如果存在一个正数 a，使得对任意 $s \in [-a, a]$，有 $M(s) < \infty$，则 $M(s)$ 唯一地决定 X 的分布函数;
5. 如果 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，$M_{X_i}(s) = E(e^{sX_i})$ 是 X_i 的矩母函数，则 $Y = X_1 + \ldots + X_n$ 的矩母函数为

$$M_Y(s) = M_{X_1}(s) \cdots M_{X_n}(s).$$

矩母函数

例 2.1

设离散型随机变量 X 的分布列为

X	2	3	5
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求其矩母函数 $M(s)$, 期望 EX, 二阶矩 EX^2.

解.

$$M(s)=\frac{1}{2}e^{2s}+\frac{1}{6}e^{3s}+\frac{1}{3}e^{5s}.$$

$$EX=M^{(1)}(0)=\frac{1}{2}2e^{2s}+\frac{1}{6}3e^{3s}+\frac{1}{3}5e^{5s}|_{s=0}$$

$$=\frac{1}{2}2+\frac{1}{6}3+\frac{1}{3}5=\frac{19}{6}.$$

$$EX^2=M^{(2)}(0)=\frac{1}{2}4e^{2s}+\frac{1}{6}9e^{3s}+\frac{1}{3}25e^{5s}|_{s=0}=\frac{71}{6}.$$

例 2.2 (指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$)

连续型随机变量 X 有概率密度函数 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\{x \geq 0\}}$. 求其矩母函数 $M(s)$, 期望 EX, 二阶矩 EX^2.

解. 当 $s < \lambda$ 时，有

$$M(s) = \lambda \int_0^{\infty} e^{sx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{e^{(s-\lambda)x}}{s-\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - s}.$$

当 $s > \lambda$ 时, 上积分为无穷.

$$EX = M^{(1)}(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - s)^2}\Big|_{s=0} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$EX^2 = M^{(2)}(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - s)^3}\Big|_{s=0} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

矩母函数

例 2.3 (混合分布)

已知一银行有三位交易员，每位交易员为顾客服务的时间皆服从指数分布。两位快速交易员对应的参数为 $\lambda = 6$, 一位慢速交易员对应的参数为 $\lambda = 4$. 假设你来到银行等概率随机选择了其中一位交易员，请求出你接受服务的时间的概率密度函数和矩母函数.

解. 设 X 为你接受服务的时间，则 $f_X(x) = [\frac{2}{3}6e^{-6x}+\frac{1}{3}4e^{-4x}]I_{\{x\geq 0\}}$
当 $s < 4$ 时，有

$$M_X(s) = \int_0^{\infty} e^{sx}[\frac{2}{3}6e^{-6x} + \frac{1}{3}4e^{-4x}]\,dx = \frac{2}{3}\frac{6}{6-s} + \frac{1}{3}\frac{4}{4-s}.$$

反演：若已知 X 的矩母函数形如 $p_1\frac{\lambda_1}{\lambda_1-s} + p_2\frac{\lambda_2}{\lambda_2-s}$，则 X 是 X_1,X_2 的混合变量，其中 $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$, 且这两个变量被选中的概率分别为 p_1, p_2，相应密度函数为 $f_X(x) = p_1 f_{X_1}(x) + p_2 f_{X_2}(x)$.

矩母函数

例 2.4 (正态分布)

设连续型随机变量 $Z = X + Y$, 其中 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X 和 Y 相互独立. 求 Z 的概率密度函数.

解.

(1) 若 $V \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则由定义可计算得到 $M_V(s) = e^{s^2/2}$.

(2) 若 $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则由矩母函数性质 1 得到 $M_W(s) = e^{\mu s + (\sigma^2 s^2/2)}$.

(3) 进而由性质 5 得 $M_Z(s) = M_X(s) M_Y(s) = e^{(\mu_1+\mu_2)s + \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)s^2}{2}}$.

(4) 可见 $M_Z(s)$ 的形式符合正态分布对应的矩母函数, 由性质 4 推断 $Z \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, (\sigma_1^2 + \sigma_2^2))$, 从而可直接得其概率密度函数.

矩母函数

♣ 随机向量的矩母函数

设 $\vec{X}=\{X_1,...,X_n\}'$ 是一个随机向量，则对应的多元矩母函数可定义为

$$M_{\vec{X}}(\vec{s})=E(e^{\vec{s}'\vec{X}})=E(e^{s_1X_1+...+s_nX_n}),$$

其中 $\vec{s}=(s_1,...,s_n)'\in R^n.$

矩母函数

♣ 随机数个相互独立的随机变量之和的矩母函数

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布，有共同的矩母函数 $M_X(s)$, N 为一个取正整数值的随机变量，且独立于该随机变量列. 令 $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. 求 $M_Y(s)$.

$$\begin{aligned} E(e^{sY}|N=n) &= E(e^{sX_1}\cdots e^{sX_N}|N=n) \\ &= E(e^{sX_1}\cdots e^{sX_n}) = E(e^{sX_1})\cdots E(e^{sX_n}) \\ &= (M_X(s))^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_Y(s) = E(e^{sY}) = E[E(e^{sY}|N=n)] &= E[(M_X(s))^N] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(M_X(s))^n P(N=n). \end{aligned}$$

对比 $M_N(s) = E(e^{sN}) = \sum_{n=1}^{\infty}(e^s)^n P(N=n)$.

矩母函数

例 2.5

小明为了买《概率论》这本书跑到一个满是书店的街道．每家店有此书的概率皆为 p，且与其它店相互独立．小明逛每个店只找这本书，找到就走，或者这家店肯定没有他才走．他一直逛下去直到买到此书．假设在每个店内他花费的时间都是一个随机变量，服从参数为 λ 的指数分布，并且与其他任何事情都独立．求小明逛书店的总时间的分布．

解．$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $N \sim G(p)$, $Y = X_1 + \ldots + X_N$. 当 $s < \lambda$ 时，有

$$M_{X_i}(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}.$$

而 $M_N(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$. 于是

$$M_Y(s) = \frac{pM_X(s)}{1-(1-p)M_X(s)} = \frac{p\lambda}{p\lambda - s}.$$

即 $Y \sim \mathcal{E}(p\lambda)$.

若 $Y = X_1 + \ldots + X_n$ 呢？

♣ 局限性

例如，Cauchy 分布的矩母函数就不存在 (非有限).

X 服从 Cauchy 分布，$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. EX $=$?

特征函数

定义 3.1 (characteristic function)

对随机变量 X，称

$$\phi(t) := E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}) = E\cos(tX) + \mathrm{i}E\sin(tX), \quad t \in R,$$

为 X 的特征函数(characteristic function)，其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

性质 3.1

设 $\phi(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$，则

1. $|\phi(t)| \le \phi(0) = 1$, $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$;
2. $\phi(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续;
3. 如果 $E(|X|^k) < \infty$，则

$$\phi^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k E(X^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}), \quad \phi^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k E(X^k).$$

特征函数

4. 非负定性：对任意复常数 $z_1, .., z_n$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\phi(t_k - t_j) z_k \bar{z}_j \geq 0.$$

5. 如果 X_k 有特征函数 $\phi_k(t)$，且 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，则 $Y = X_1 + \ldots + X_n$ 的特征函数为

$$\phi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n}\phi_k(t).$$

♣ 常见分布的特征函数

例 3.1 (二项分布 $B(n,p)$)

二项分布 $B(n,p)$ 的特征函数是

$$\phi(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=\sum_{j=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}=(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n.$$

例 3.2 (Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$)

Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的特征函数是

$$\phi(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}.$$

特征函数

例 3.3 (几何分布 $G(p)$)

几何分布 $G(p)$ 的特征函数是

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} p q^{k-1} = \frac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

例 3.4 (均匀分布 $\mathcal{U}(a,b)$)

均匀分布 $\mathcal{U}(a,b)$ 有特征函数

$$\phi(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}}{\mathrm{i}t(b-a)}.$$

特别地，$\mathcal{U}(-c,c)$ 有特征函数 $\sin(ct)/(ct)$.

特征函数

例 3.5 (指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$)

指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$ 有特征函数

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

特征函数

例 3.6 (正态分布 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$)

正态分布 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 有特征函数

$$\phi(t) = \exp\left(\mathrm{i}\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

解. 先求 $\mathcal{N}(0,1)$ 的特征函数.

【方法 1：形式运算】将 i 视为常数，形式地运算得到

$$\begin{aligned}\phi(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx \\ &= \mathrm{e}^{-t^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i}t)^2/2}\,dx = \mathrm{e}^{-t^2/2}.\end{aligned}$$

特征函数

【方法 2：严格的数学推导】

$$\phi(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$$

得

$$\phi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\sin(tx)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\,d\mathrm{e}^{-x^2/2}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\cos(tx)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$$
$$= -t\phi(t).$$

特征函数

即：

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)\mathrm{e}^{t^2/2}] = [\phi'(t) + t\phi(t)]\mathrm{e}^{t^2/2} = 0$$

得 $\phi(t)\mathrm{e}^{t^2/2} = C$. 因为 $C = \phi(0) = 1$ 得到

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

现设 $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y = \mu + \sigma X.$$

因此，

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY}) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu+\sigma X)}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mu} E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sigma X}) = \exp\left(\mathrm{i}\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

♣ 设 $X_1, ..., X_m$ 相互独立， $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$, 则

$$Y = X_1 + \cdots + X_m \sim \mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^m \mu_j, \sum_{j=1}^m \sigma_j^2\right).$$

特征函数

例 3.7 (Cauchy 分布)

Cauchy 分布，其密度 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in R$, 有特征函数

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-|t|}.$$

例 3.8 (Laplace 分布)

Laplace 分布，其密度 $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$, 有特征函数

$$\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

特征函数

定理 3.1 (混合分布)

设分布函数 $F_1(x), ..., F_m(x)$ 的特征函数分别为 $\phi_1(t), ..., \phi_m(t)$. $\lambda_i \geq 0$，且 $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$，则 $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k$ 有特征函数 $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \phi_k(t)$.

特征函数

例 3.9

设 X 是 Cauchy 分布，具有密度函数 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，$x\in R$. 令 $Y=aX$，$(a>0)$. 证明 $\phi_{X+Y}(t)=\phi_X(t)\,\phi_Y(t)$.

证明. 首先 $\phi_X(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$. 故

$$\phi_Y(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY})=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(at)X})=\mathrm{e}^{-|at|}=\mathrm{e}^{-a|t|}$$

和

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t)&=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X+Y)})=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(1+a)X})\\&=\mathrm{e}^{-|(1+a)t|}=\mathrm{e}^{-(1+a)|t|}.\end{aligned}$$

因此

$$\phi_{X+Y}(t)=\mathrm{e}^{-(1+a)|t|}=\mathrm{e}^{-|t|}\cdot\mathrm{e}^{-a|t|}=\phi_X(t)\,\phi_Y(t).$$

♣ 此例说明：尽管 $\phi_{X+Y}(t)=\phi_X(t)\,\phi_Y(t)$，但是推不出它们对应的随机变量是独立的.

特征函数

♣ 特征函数与矩

定理 3.2

如果 $E|X|^n < \infty$，则 X 的特征函数 $\phi(t)$ 满足

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{E[(\mathrm{i}tX)^m]}{m!} + o(t^n).$$

特别地，如果 $E(X^2) < \infty$，则

$$\phi(t) = 1 + \mathrm{i}tE(X) - \frac{1}{2}t^2 E(X^2) + o(t^2).$$

特征函数

♣ 随机变量的特征函数和分布函数相互唯一决定.

定理 3.3 (逆转公式)

设 $\phi(t)$ 是 X 的特征函数, $F(x)$ 是 X 的分布函数. 如果 $F(x)$ 在 a, b 连续, 则

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb}}{\mathrm{i}t}\phi(t)\,dt = F(b)-F(a).$$

定理 3.4

如果 X 的特征函数满足 $\int_R |\phi(t)|dt < \infty$, 则 X 有有界的连续密度函数

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\phi(t)\,dt.$$

特征函数

♣ 收敛性

定义 3.2 (Convergence in distribution)

设 X 有分布函数 $F(x)$, X_n 有分布函数 $F_n(x)$. 如果在 $F(x)$ 的连续点 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

则称 X_n依分布收敛到 X(convergence in distribution)，记作 $X_n \xrightarrow{d} X$，或称 F_n 弱收敛到 F (weak convergence)，记作 $F_n \xrightarrow{w} X$.

特征函数

定理 3.5 (Continuity theorem, 连续性定理)

设 X_n 的特征函数为 $\phi_n(t)$. X 的特征函数为 $\phi(t)$. 则 X_n 依分布收敛到 X 的充分必要条件是,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t), \quad \forall t \in R$$

♣ 此定理是概率论中最常用、最重要的定理之一.

特征函数

♣ 随机向量

定义 3.3 (随机向量的特征函数)

设 $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ 是随机向量，X 的特征函数定义为

$$\phi(\mathbf{t})=E(e^{\mathrm{i}\mathbf{t}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}}),\quad \mathbf{t}=(t_1,...,t_n)\in R^n.$$

定理 3.6

设 $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ 是随机向量，则 $X_1,...,X_n$ 相互独立的充要条件是

$$\phi(\mathbf{t})=\phi_1(t_1)\phi_2(t_2)\cdots\phi_n(t_n),$$

其中 $\phi_k(t_k)$ 是 X_k 的特征函数，$k=1,2,...,n$.

特征函数

定理 3.7

设 $\mathbf{X}$ 的特征函数 $\phi_n(\mathbf{t})$ 收敛到在 $\mathbf{t}=\mathbf{0}$ 处连续的函数 $\phi(\mathbf{t})$, 则 $\phi(\mathbf{t})$ 是某个随机向量 $\mathbf{X}$ 的特征函数, 并且对任何常数向量 $\mathbf{a}$, 有 $\mathbf{a}\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}} \xrightarrow{d} \mathbf{a}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$.

小结

知识点

- 概率母函数、矩母函数、特征函数
- 概率/矩的快速求解、可逆性、独立同分布求和形式的分布求解

技巧

- 寻找能解决问题的最简单工具

作业

打 * 的题目是选做，不算成绩，因而不必写入作业：

- 教材第 4 章 32，35，36，38*,42*, 43, 45*.
- 设 $p = 1 - q \in (0, 1)$, X 服从对数分布，有概率密度函数 $P(X = k) = -\frac{q^k}{k \ln p}, k = 1, 2, \ldots$.
  证明 $g_X(s) = \frac{\ln(1-qs)}{\ln p}$, $EX = \frac{-q}{p \ln p}$.
- 设 X 有概率密度 $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}, \lambda > 0$. 求其特征函数.
- 用概率母函数或矩母函数求负二项分布的期望和方差.

Thank you!