# 偏微分方程II期末考题(2018-01-05)

本试卷中总假定：$\Omega\subset R^n$ ($n\ge 3$)是有界开区域，$\partial\Omega\in C^\infty$，$[a^{ij}(x)]_{n\times n}\in C^\infty(\bar\Omega)$ 是$\bar\Omega$上正定、实对称矩阵函数，$\Omega_T=\Omega\times(0,T]$。

1. (10=5+5分) 设 $u,v\in L^1_{loc}(\Omega)$，$\{u_k\}$及它们的弱导数$\{D^\alpha u_k\}$均属于$L^1_{loc}(\Omega)$.
   (i) 如果 $u_k\to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$，$D^\alpha u_k\to v$ in $L^1_{loc}(\Omega)$. 试证 $u$的弱导数 $D^\alpha u$存在，且 $D^\alpha u=v$.
   (ii) 反之，如果 $D^\alpha u=v$，试找出满足(i)中的一个序列$\{u_k\}$，使之具有最好的光滑性。

2. (12分) 设 $u\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 满足 $\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}\,dx=0,\ \forall v\in C_0^\infty(\Omega)$.
   $\phi\in C^2(R)$且$\phi''(t)\ge 0,\forall t\in R$，令 $w(x)=\phi(u(x))$. 试证：
$$\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a^{ij}(x)w_{x_i}v_{x_j}\,dx\le 0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),\ v\ge 0\ a.e\ in\ \Omega.$$

3. (20分) 设 $f\in H^{-1}(\Omega)$. 试用Lax-Milgram定理证明：存在正常数$\delta>0$，当
   $\|c(x)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|B(x)\|_{L^\infty(\Omega)}<\delta$ 时，存在唯一的 $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足
$$\int_\Omega\Big[\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}+(B(x)\cdot Du(x)+c(x)u)v\Big]dx=\langle f,v\rangle,\ \forall\ v\in H_0^1(\Omega).$$

4. (18分) 设$m$为非负整数，$\alpha\in(0,1)$，$f\in C^{m,\alpha}(\bar\Omega)$，$u\in C^{m+2,\alpha}(\bar\Omega)$满足
   $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_ix_j}=f(x),\ \forall x\in\Omega$。试用possion方程的Schauder估计的相关结论证明：
$$\|u\|_{C^{m+2,\alpha}(\bar\Omega)}\le C(n,\alpha,\Omega,m,a^{ij})\cdot\big[\|u\|_{C(\bar\Omega)}+\|f\|_{C^{m,\alpha}(\bar\Omega)}\big]$$

$=\frac{\partial f}{\partial x_i}$

$\sum_{i}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(a^{ij}u_{x_ix_j})$

$\sum_i\sum_{m=0}^{k}\frac{\partial^m}{\partial x_i^m}a^{ij}\cdot\frac{\partial^{k-m}}{\partial x_i^{k-m}}u_{x_ix_j}$

$\sum a^{ij}\left(\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u\right)_{x_ix_j}$

5.(25=15+10分). 设 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $F(t)$在$R$中可导，且其~~导数~~函数有界。

(i) 存在 $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ 使得 $u_t \in L^2(\Omega_T)$ 且满足

证明：
$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i x_j} = F(|x|^2), & \forall\ a.e\ (x,t) \in \Omega_T. \\ u|_{t=0} = \varphi \ \ in\ L^2(\Omega). \end{cases}$$

(ii) 当上述方程中右端项 $F(|x|^2)$ 换为 $F(u)$ 时，相同的结论是否成立？为什么？

6.(15分) 设 $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^2(\Omega_T)$, $u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 满足 $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ in $L^2(\Omega)$, 并且 $\forall\ a.e\ t \in (0,T)$ 有

$$\langle u_{tt}, v\rangle + \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + F(u)\, v\Big] dx = 0, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega),$$

其中 $F \in C(R)$ 且满足 $|F(t)| \le 2018|t|$, $\forall\ t \in R$. 证明：

$$u(x,t) = 0, \quad \forall\ a.e\ (x,t) \in \Omega_T.$$

$\langle u_{tt}, v\rangle + \int_{\Omega_1} (\Sigma\ (\quad) + 2018\, u v)\, dx \ge 0 \quad \forall\ v \ge 0$

$\max \|u\|_{H_0^1} + \quad u \int \int_\Omega a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \phi |u|^2$

$\int \langle u_{tt}, u\rangle dt = -\int \langle u_t, u_t\rangle dt$ $\quad (u_{x_i} u_{x_i}) \ge |u_t|^2_{L^2(\Omega_T)}$



$\frac{d}{dt} |Du|^2 + F(u) u_t$

$|u_t|^2_{L^2(} \le C|u|^2_{L^2(}$

$\frac{d}{dt}|u|^2 = \frac{1}{2}(u, u_t)$

$u_t \in L^2(0,T)$ $\quad u_t \in L^2(\Omega)$

$u \in$