图论习题课

作业9：Ch7 2,3,5, 9, 10

作业12：Ch9 6 (5)(9) , 补充1

7.2

- 证明无向图G有一种定向方法，使得其最长有向轨不超过G的最大顶次数

证明

由例7.2知，存在一种定向方法，使得最长有向轨长为$\chi(G)-1$。而对任一图G，$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$。综上可知，存在一种定向方法，使得最长有向轨不超过G的最大顶次数

7.3

- 已知有向图G中无有向圈，求δ^-与δ^+

证明：

若$\delta^- \geq 1$，设$v_1v_2 \in E(G)$，由$d(v_2) \geq 1$，存在$v_3 \in V(G)$，$v_2v_3 \in E(G)$，则$v_1 \neq v_3$，否则构成有向圈。由此可构造出无数个点皆属于$V(G)$，矛盾。

故$\delta^- = 0$，同理$\delta^+ = 0$

7.5

- 竞赛图不是强连通图，最少改变几条边的方向，可使得它变成有向Hamilton图

G为竞赛图

∴G去掉方向后的图G’是一完全图，顶数为v，$\chi(G') = v$

由例7.2知，可将G’重定向得到长为$\chi(G') - 1 = v - 1$的有向轨

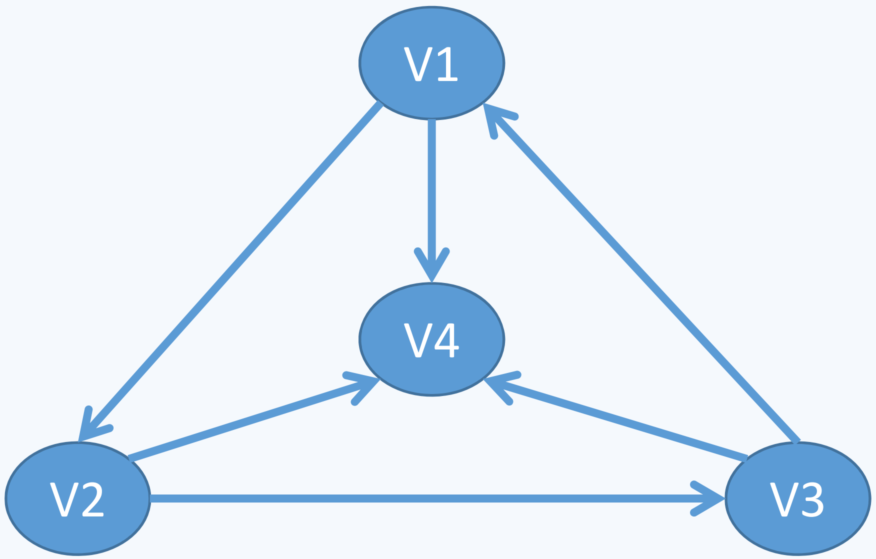
将该轨首尾相连的边反向，可得到有向Hamilton图

即，最少改变一条边方向

7.9

- 赛图不是有向Hamilton图，则它有唯一的王

反例



7.10

- 证明：顶数不小于3的竞赛图中有得分相同的顶的充要条件是此图中有长3的有向圈

充分性:(反证法)

假设u_1与u_2得分相同(u_2胜u_1)，但无长为3 的有向圈。

对于其它任意点v，关于u_1与u_2有4种情形。

（1）若v胜u_1，且v胜u_2

（2）若v胜u_1，且v负u_2

（3）若v负u_1，且v胜u_2

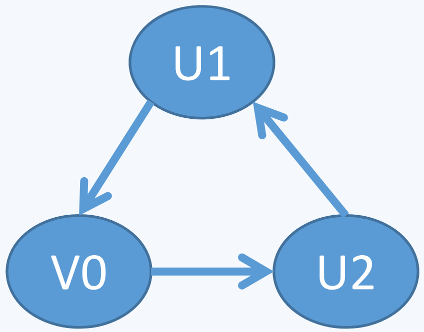
（4）若v负u_1，且v负u_2

7.10

由于u_2胜u_1，所以对于（1）（2）（4）情形，并不能缩小u_2与u_1的得分差距。

则必然存在情形（3）。设v_0满足情形（3）。

（3）若v负u_1，且v胜u_2



则必然存在长为3 的有向圈，矛盾。

7.10

必要性:(反证法)

假设有长为3 的有向圈，但无得分相同的两顶。

设图中为n个点，得分情况必为：

0,1,......,n-1.

因为得分最高的点，一定不是长为3的有向圈中的点。删除得分最多的顶，不影响长为3的有向圈。

如此操作n-3次，剩下得分0,1,2的顶，无圈，矛盾。

得证

补充1

- G是2边连通的$\Leftrightarrow$ 任两点都至少有2条边不重的轨连接

$\Leftarrow$

对$\forall\ u, v$，设u, v的最短轨为$p_1(u, v)\cdots p_n(u, v)(n\geq 2)$，所以从这些轨中各去掉一边后，u,v不再连通，所以$k'(G)=n\geq 2$，G为2边连通

$\Rightarrow$

G是2边连通的，所以$\forall u, v\in V(G)$，必有2轨相连，不妨设为$p_1(u, v), p_2(u, v)$，假设这两轨有公共边，去掉公共边后u,v不再连通，即$k'(G)=1$，矛盾

9.6

- G是块⇔(5) ⇔(9)

1. G是块⇒(5)

反正，若∃uv 以及点n不共圈

不妨设uv所在的圈和n所在的圈的唯一交点为n’

删去n’，n与u不再连通

若nu仍连通，则∃轨p(u,n)

那么p(u,n)+p(v,n’)+p(n’,n)构成圈

所以n’是割顶，矛盾

9.6

(5) ⇒G是块

$\forall e \in E(G), \forall u \in V(G)$

设e的端点为n,m

∃圈C使得$u, e \in C$

则对n，必有两条内部不相交的轨将其连接

所以，G是块

9.6

2. G是块 ⇒(9)

G是块，对$\forall u, v, w \in V(G)$

连接u,v的两条内部不相交的轨

设为$p_1(u, v), p_2(u, v)$

w只能在p_1或p_2上

若同时在$p_1 p_2$上，则内部相交，矛盾

9.6

(9) ⇒G是块

$\forall u, v, w \in V(G)$

设连接u,v的轨为$p_1(u, v) \cdots p_n(u, v)$

假设w在上述轨上

那么删掉w，u,v不再连通

所以G是块

Thank you