第三章　二阶散度椭圆型方程

§3.1　问题的提出和弱解的定义

称算子

$$\text{Ł}u \equiv -\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u\Big)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

为 二阶散度形式的偏微分算子；

而称

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_jx_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

为 二阶非散度形式的偏微分算子。 其中a^{ij}, d^i, b^i, c是已知函数， 称为算子的系数。

显然， 如果$a^{ij}, d^i \in C^1$, 散度形式的算子一定是非散度形式的； 反之不然。

Definition

3.1 用$\lambda(x)$表示矩阵函数$[a^{ij}(x)]_{n\times n}$的最小特征值。

- 如果$\lambda(x) > 0$ in Ω， 则称Ł或L在Ω 中是严格椭圆的;
- 如果$\lambda(x) \geq 0$ in Ω 且$E = \{x \in \Omega : \lambda(x) = 0\}$非空，则Ł或$L$在$\Omega$ 中是退化椭圆的, 而E称为它们的退化集;
- 如果存在正常数λ_0使得$\lambda(x) \geq \lambda_0$ in Ω， 则称Ł或L在Ω中是一致椭圆的。

为了简单， 本书只研究矩阵函数$[a^{ij}(x)]_{n\times n}$是对称且对应的算子是一致椭圆的。即； 我们将假设存在正常数λ, 使得$\forall x \in \Omega$和 $\forall \xi = (x_1, \cdots, \xi_n) \in R^n$, 均有

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \forall i,j = 1, 2, \cdots, n; \quad \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2. \tag{3.1}$$

给定函数f和g 求函数u, 满足

$$\begin{cases} Łu \text{ (or } Lu) = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

这样的问题称为Dirichlet边值问题.
如果边值条件换为

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ on } \partial\Omega$$

或者

$$\alpha(x)u + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ on } \partial\Omega,$$

该问题就分别称为Neuman边值问题或混合边值问题. 其中α, β也是给定的函数。
当$g = 0$时，就称边值条件是齐次的； 当$f = 0$时，就称方程是齐次的。

- 由于方程关于u是线性的， 故延拓g并做变换

$$v = u - g,$$

则边界条件都可化为齐次的， 而方程的形式不变。 所以， 我们一般只考虑齐次边值条件。

- 如果$u \in W^{2,p}(\Omega)$满足$Lu = f$ a.e. in Ω, 则称它是强解;
- 如果$u \in C^2(\Omega)$满足$Lu = f$ in Ω , 则称它是经典解.

我们将在下一章研究经典解。 本章主要研究散度形式方程的Dirichelet问题，

即

$$\begin{cases} Łu = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

它的弱解就是在弱导数意义下满足方程和在Sobole空间函数迹的意义下满足边界条件的解。

为了简单， 我们将把其 弱解限制在空间$H_0^1(\Omega)$中， 于是问题(3.2)中边界条件自然满足。
为了这个空间的函数在弱导数意义下能满足方程， 我们需要对系数加些条件。

a^{ij}是二阶系数

$$\begin{cases} 若n \geq 3, 存在\Lambda = C(n)使得 \\ \sum_{i,j=1}^{n} ||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}(||d^i||_{L^n(\Omega)} + ||b^i||_{L^n(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{n/2}(\Omega)} \leq \Lambda; \\ 若n = 2, 存在p > 2和\Lambda = C(p)使得 \\ \sum_{i,j=1}^{2} ||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}(||d^i||_{L^p(\Omega)} + ||b^i||_{L^p(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{p/2}(\Omega)} \leq \Lambda. \end{cases} \tag{3.3}$$

对于$(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$,令

$$B(u, v) = \int_\Omega [\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv]dx. \tag{3.4}$$

我们在下一小节将证： 在条件(3.3)下， 它是空间 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$上的双线性有界泛函。

Definition

3.2 (1) 称由(3.4)定义的$B(\cdot,\cdot)$是算子Ł决定的双线性泛函；
(2) 设$f\in H^{-1}(\Omega)$. 如果$u\in H_0^1(\Omega)$满足

$$B(u,v)=<f,v>,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

则称u为问题(3.2)的一个弱解;
(3) 设$f\in H^{-1}(\Omega)$. 如果$u\in H^1(\Omega)$满足

$$B(u,v)\le \ <f,v>(\quad 或\quad \ge \ <f,v>),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega), v\ge 0,$$

则称u为方程Ł$u=f$的一个弱下解(或弱上解)。

注： 弱解的定义是相对的， 要根据实际问题所满足的条件选出合适的空间作为弱解的所在空间。 弱解定义中的函数v通常称为试验函数, 它不一定要取遍弱解所在的函数空间， 而往往只要取遍它的一个稠密子空间即可。

作业12： 证明： 如果$u \in H_0^1(\Omega)$是方程$\$u = f$的弱下解和弱上解， 则$u$为问题(3.2)的一个弱解.

§3.2 Dirichlet问题弱解的存在唯一性

1. Lax-Milgram定理

Theorem

3.1 设H是一个实空间，$B: H\times H\rightarrow R$是一个有界,双线性,强制泛函， 即满足
(i) 存在常数$\alpha>0$使得$B(u,v)\leq\alpha||u||||v||$， $\forall u,v\in H$;
(ii) $\forall v,u_1,u_2\in H, a_1,a_2\in R$, 均有
$B(v,a_1u_1+a_2u_2)=a_1B(v,u_1)+a_2B(v,u_2)$ 和
$B(a_1u_1+a_2u_2,v)=a_1B(u_1,v)+a_2B(u_2,v)$;
*(iii)*存在常数$\beta>0$, 使得$B(u,u)\geq\beta||u||^2$， $\forall u\in H$.
如果f是H上的一个有界线性泛函，即$f\in H^*$， 则存在唯一的$u\in H$, 使得

$$B(u,v)=<f,v>,\quad \forall v\in H.$$

证明. 任取$u \in H$,则由条件(i), (ii)知: $B(u, \cdot) \in H^*$.
由Riesz表示定理，存在唯一的$\omega \in H$使得

$$B(u, v) = < \omega, v >_H, \quad \forall v \in H.$$

令 $T: \quad H \to H, \quad Tu = \omega$. 即

$$B(u, v) = < Tu, v >_H \quad \forall v \in H.$$

另一方面， 任取$f \in H^*$, 再由Riesz表示定理，存在唯一的$\bar{\omega} \in H$使得

$$< f, v > = < \bar{\omega}, v >_H, \quad \forall v \in H.$$

于是， 为证存在性， 只要证明算子T是可逆的， 且

$$T^{-1}: \quad H \to H.$$

这一点留给读者练习，详细证明可见[Evans: p.319].
为证唯一性。 假设$u_1, u_2 \in H$使得

$$B(u_i, v) =< f, v >, \quad \forall v \in H, \ i = 1, 2.$$

则

$$B(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \forall v \in H.$$

取$v = u_1 - u_2$, 由强制性条件(ii), 即得 $u_1 = u_2$. $\square$

2. 能量估计

Theorem

3.2 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， $\partial\Omega$满足线段性质, Ł的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*， 则由它决定的$B(u,v)$是 $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$是的一个双线性泛函， 并且存在正常数$C = C(n, \Omega, \text{Ł})$和$\mu = C(n, \Omega, \text{Ł})$使得

$$|B(u,v)| \leq C||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

$$B(u,u) \geq \frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)} - \mu||u||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{3.5}$$

证明. (1) 不妨设$n \geq 3$，$n = 2$的情况留给作业。$\forall u, v \in H^1(\Omega)$，由(3.3)，Hölder不等式和Sobolev嵌入定理2.14，有

$$|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx| \leq \Lambda ||Du||_{L^2(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)},$$

$$\int_\Omega abc\,dx \leq \left(\int a^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int b^\beta dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int c^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$$

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \sum_{i=1}^n d^i(x) u v_{x_i} dx| &\leq \sum_{i=1}^n ||d^i||_{L^n(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\leq C(n, \Lambda, \Omega) ||u||_{H^1(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^*} = 1$$

同样

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v(x)dx| \le C(n,\Lambda,\Omega)||v||_{H^1(\Omega)}||Du||_{L^2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned} |\int_\Omega c(x)uvdx| &\le ||c||_{L^{n/2}(\Omega)}||u||_{L^{2^*}(\Omega)}||v||_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\le C(n,\Lambda,\Omega)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

于是第一式得证。

(2) 为证(3.5). 我们回忆： 如果$f \in L^p(\Omega), p \in [1, \infty)$，则只要$K$充分大, $\int_E |f(x)|^p dx$就可以任意小, 其中

$$E = \{x \in \Omega : |f(x)| \geq K\}.$$

取

$$f_1(x) = f(x)\chi_E(x).$$

则$\forall \varepsilon > 0$， 存在常数$K(\varepsilon)$和可积函数f_1, f_2使得

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

且

$$||f_1||_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon, \quad ||f_2||_{L^\infty(\Omega)} \leq K(\varepsilon).$$

于是存在可积函数d_k^j, b_k^j, c_k使得

$d^j(x) = d_1^j(x)+d_2^j(x), b^j(x) = b_1^j(x)+b_2^j(x), c(x) = c_1(x)+c_2(x)$

并且

$$\sum_{j=1}^{n}(||b_1^j||_{L^n(\Omega)} + ||d_1^j||_{L^n(\Omega)}) + ||c_1||_{L^{n/2}(\Omega)} < \varepsilon,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(||b_2^j||_{L^\infty(\Omega)} + ||d_2^j||_{L^\infty(\Omega)}) + ||c_2||_{L^\infty(\Omega)} < K(\varepsilon).$$

利用上面的事实， 类似(1)中的计算， 我们有

$$
\begin{aligned}
B_1(u,u): &= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j} + d_1^i(x)u)u_{x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n b_1^i(x)u_{x_i}u + c_1(x)u^2]dx \\
&\geq \lambda ||Du||^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon C(n,\Lambda,\Omega)||u||^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

for all $u \in H^1(\Omega)$.

而用Young不等式，

$$\begin{aligned} {\color{red}B_2(u,u):} &= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (d_2^i + b_2^i(x)) u_{x_i} u + c_2(x) u^2] dx \\ &\geq -C(n)K(\varepsilon) \int_\Omega [|Du||u| + u^2] dx \\ &\geq -C(n)K(\varepsilon)(\frac{C(n)K(\varepsilon)}{\lambda} + 1)||u||^2_{L^2(\Omega)} \\ &- \frac{\lambda}{4}||Du||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

现在取$\varepsilon > 0$使得$\varepsilon C(n, \Lambda, \Omega) = \frac{\lambda}{4}$. 然后令

$$\mu = \frac{\lambda}{4} + C(n)K(\varepsilon)(\frac{C(n)K(\varepsilon)}{\lambda} + 1),$$

立即得

$$\begin{aligned} B(u,u) &= B_1(u,u) + B_2(u,u) \\ &\geq \frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)} - \mu||u||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

由于$H_0^1(\Omega)$是自然嵌入$L^{2^*}(\Omega)$中（见定理2.13），从上面的证明立即有

Corollary

3.1 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集，$Ł$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，则由它决定的$B(u,v)$是 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$是的一个双线性泛函，并且存在正常数$C=C(n,Ł)$和$\bar{\mu}=C(n,Ł)$使得

$$|B(u,v)|\leq ||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)},\quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega),$$

$$(B(u,u))\geq \frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)}-\bar{\mu}||u||^2_{L^2(\Omega)},\quad \forall u\in H_0^1(\Omega).$$

作业13: 对于$n=2$, 证明定理3.2.