中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

图论习题课

李佳伟
张强

2017-10-26

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第一次作业

第一章：1题

- 1.1 举出两个可以化成图论模型的实际问题

路线规划（时间最短？少换乘？价格最低？）

城市间道路规划

课程安排

第一章：2题

- 1.2 证明$|E(G)| \leq \binom{v}{2}$，其中G是单图

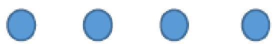
证明：

（思路）根据单图无环无重边的特点，所以$|E(G)|$最大的情形为任意两个顶点间有一条边相连，即极端情况为$\binom{v}{2}$。

第一章：4题

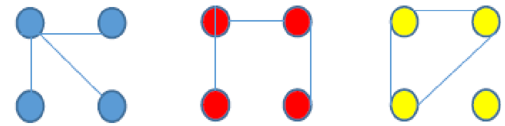
- 1.4 画出不同构的一切四顶单图.

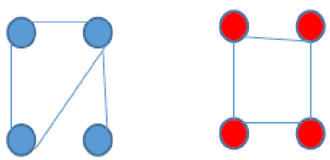
解：

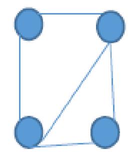
0条边：

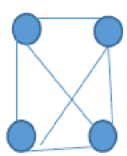
1条边：

2条边：

3条边：

4条边：

5条边：

6条边：

第一章：10题

- 1.10 $G \cong H$当且仅当存在可逆映射$\theta: V(G) \to V(H)$，使得$uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \epsilon E(H)$，其中G和$H$是单图。

证明：

必要性

- 若$G \cong H$，由定义可得，存在可逆映射$\theta: V(G) \to V(H)$ $\varphi: E(G) \to E(H)$当且仅当$\psi_{G(e)} = uv$时，$\psi_{H(\varphi(e))} = \theta(u)\theta(v)$，所以$uv \in E(G) \Rightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$

充分性

- 定义$\phi: E(G) \to E(H)$，使得$uv \in E(G)$和$\theta(u)\theta(v) \in E(H)$一一对应，于是$\phi$可逆，且$\psi_G(e) = uv$的充要条件是$\psi_{H(\varphi(e))} = \theta(u)\theta(v)$，得$G \cong H$

第一章：32题

- 1.32 证明 $\sigma \le \frac{2\varepsilon}{v} \le \Delta$

证明：

对任意顶点V_i有：$\sigma \le d(V_i) \le \Delta$。(i=1,2,…,v)

因此，$v\sigma \le \sum_{i=1}^{v} d(V_i) \le v\Delta$

即$\sigma \le \frac{\sum_{i=1}^{v} d(V_i)}{v} \le \Delta$

由Euler定理得：$\sigma \le \frac{2\varepsilon}{v} \le \Delta$，命题得证。

第一章：35题

- 1.35 证明: (a)7,6,5,4,3,3,2和6,6,5,4,3,3,1不是单图的次数序列。

  (b)若$d_1, d_2, \ldots, d_n$是单图的次数序列且$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$，

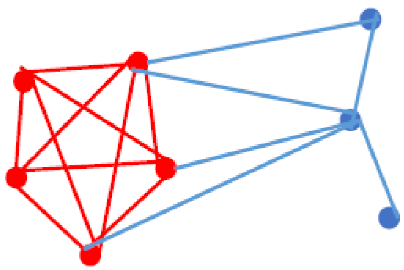
  则$\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数，且对1 ≤k ≤n，

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$$

证明：

(a)第一个序列考虑度数7,第二个序列考虑6,6,1

(b)将顶点v分成两部分v'和v''



$v' = \{v \mid v = v_i,\ 1 \leq i \leq k\}$,

$v'' = \{v \mid v = v_i,\ k < i \leq n\}$

以v'点为顶的原图的导出子图度数之和小于 $k(k-1)$

然后考虑剩下的点贡献给这k个点的度数之和最大可能为 $\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$

第一章：37题

- 1.37 证明：无环图G含二分生成子图H,使得 $d_{H(v)} \geq \frac{1}{2} d_{G(v)}$对每个$v \in V(G)$成立。

证明：

任取X, Y满足$X \cup Y = V(G)$， $X \cap Y = \emptyset$， 且令X,Y中的顶两两不相邻，所得的图是H且是二分子图，令H是G边数最多的二分生成子图，若存在$v \in V(G)$，使得$d_H(v) < \frac{1}{2} d_G(v)$，不妨设$v \in X$，则将v所连的边取消，换成$d_G(v) - d_H(v)$条边，且将v加入Y中，于是H的边数增加了$d_G(v) - 2d_H(v)$条，与H边数最多矛盾，故原命题成立。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第二次作业

第一章：42题

- 1.42 若G是单图，$\varepsilon > \binom{v-1}{2}$，则G是连通图

证明：

假设G不是连通图，则G至少由两个连通片G1和G2组成，

顶点数分别为V1,V2。

则$\varepsilon \le \binom{v_1}{2} + \binom{v_2}{2} = v_1(v_1-1)/_2 + v_2(v_2-1)/_2 \le (v_1+v_2-1)(v_1+v_2-2)/_2$

$= \binom{v_1+v_2-1}{2} = \binom{v-1}{2}$

与$\varepsilon > \binom{v-1}{2}$矛盾，故假设错误，G是连通图。

第一章：47题

- 1.47 证明：连通图若有两条最长轨，则二最长轨有公共顶点。

证明：反证法：

假设两条最长轨$P=P(v_1,v_2)$和$Q=P(v_3,v_4)$无公共顶点.

由于连通性，不妨设$v_m v_n$连接了轨P和Q，且$v_m\in$轨P，$v_m\in$轨Q. 那么，可以找出一条更长轨:

$\max\{P(v_1,v_m),P(v_2,v_m)\}+ v_m v_n+\max\{P(v_n,v_3),P(v_n,v_4)\}$，

得出矛盾，故二最长轨有公共顶点。

第一章：58题

- 1.58 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$是6个城市，下面矩阵的(i,j)号元素是$v_i$到$v_j$的机票票价，试为一个旅行者制作一张由$v_1$到各城去旅游的最便宜的航行路线图。

解：

根据Dijkstra算法

到达城市	最便宜路线	票价
v2	v1--v6--v2	35
v3	v1--v5--v3 or v1-v6-v4-v3	45
v4	v1-v5-v4 or v1-v6-v4	35
v5	v1-v5	25
v6	v1-v6	10

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

- 解：

(1).若顶点u, v不相邻，$\omega(u,v) = \infty$.

(2).令$l(u_0) = 0, pre(u_0) = -1, l(v) = \infty\ (v \neq u_0)$; $S_0 = \{u_0\}, i = 0$.

(3).对$\forall v \in V - S_i$，用$\min\{l(v), l(u_i) + \omega(u_i, v)\}$替代$l(v)$，

若替代前$l(v) > l(u_i) + \omega(u_i, v)$，则$\boldsymbol{pre(v) = u_i}$, 设$u_{i+1}$是使$l(v)$取最小值的$V(G) - S_i$中的顶，令$S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

(4). $i = v$ -1，止；若$i < v - 1$，用i +1代替i，转(3).

对于每个u_i，轨道P(u_0, u_i)中u_i的前驱为$pre(u_i)$，依次找到前驱直至u_0，则$u_0, \ldots, pre(u_i), u_i$为$u_0$到$u_i$的最短路径。

第二章：1题

- 2.1 至少两个顶的树其最长轨的起止顶皆是叶，试证明之。

证明：

设最长轨P为$v_0v_1 \dots v_n$，若$d(v_0) \geq 2$

1. v_0与除P上的顶相连，则P可继续延长，与P为最长轨矛盾。
2. v_0与P上的某顶相连，则构成圈，与树矛盾。

从而，起止顶皆为叶。

第二章：3题

- 2.3 证明：若T是树，且$\Delta(T) \geq n$，则T至少有n个叶。

反证法：设树T有v个顶，叶子数为s，且s<n

则 $2\varepsilon(T) = \sum_{v \in v(T)} \mathrm{d}(v) \geq$ 2(v-s-1)+n+s

=2v-2+(n-s)

>2(v-1)

得到 Ɛ(T) > v-1.

对树T，有Ɛ=v-1，矛盾

第二章：5题

- 2.5 证明：树有一个中心或两个中心，但有两个中心时，此二中心是领顶。

证：

①结论对于树K_1，K_2显然成立。

②对于v(T)>2的树，将T中所有叶删去后，新树T'与原树T中心相同。（下证）

③重复②。

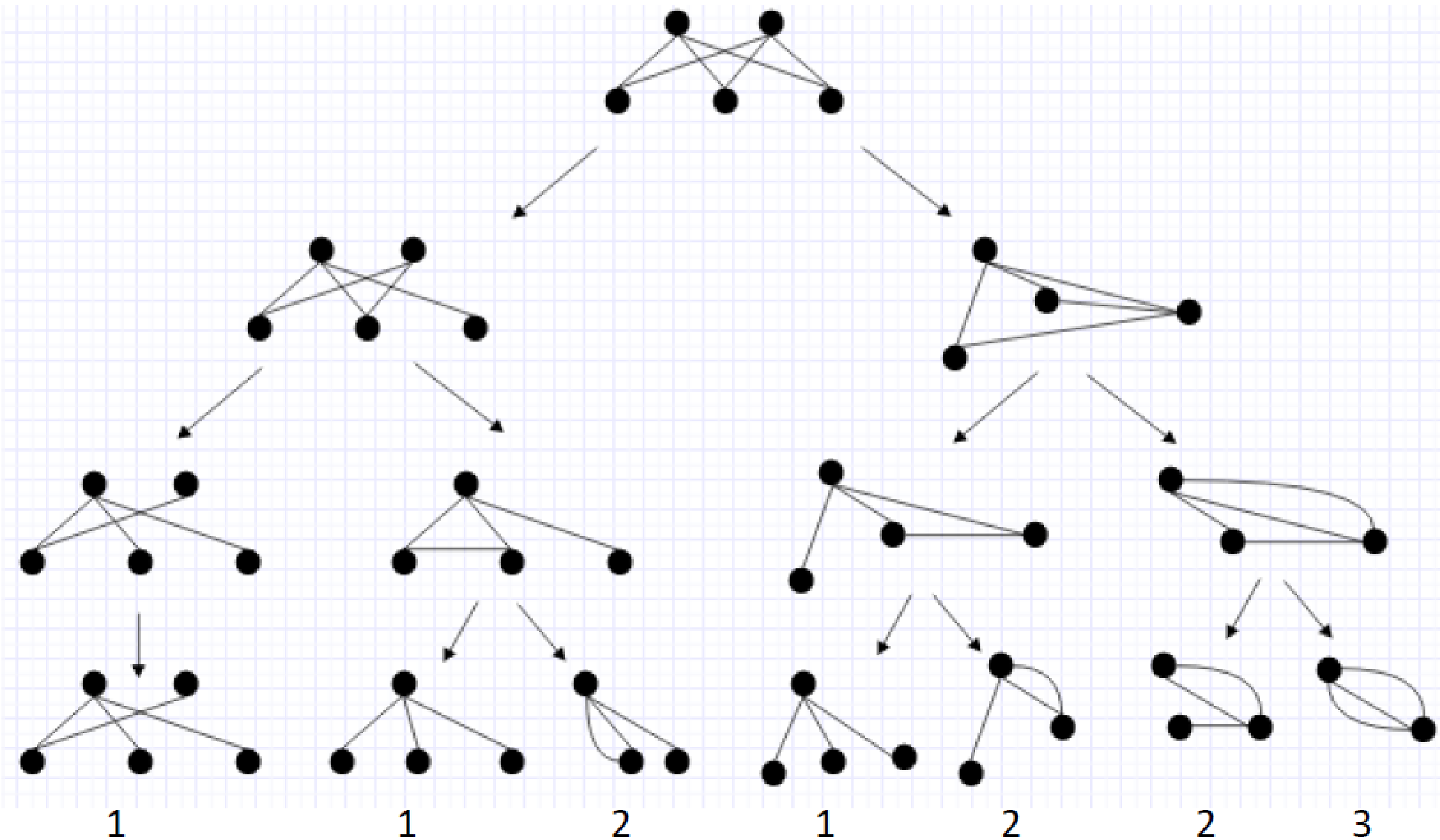
因为T有限，所以，有限步之后，得到树K_1或K_2. 且它的中心就是T的中心。得证

证：将树T中所有叶子删去后，新树T'与原树T中心相同：

- 因为对于T中任意一点ω,当 d(w,v) (v∈T)取最大值,v只能为叶子。则满足,删去所有叶子后:
- max d(w,v') (v'∈ T') = max d(w,v) - 1 (v∈T)
- 所以T' 与T有相同中心。

- 2.10 求$K_{2,3}$生成树的个数。

解：



1+1+2+1+2+2+3 = 12

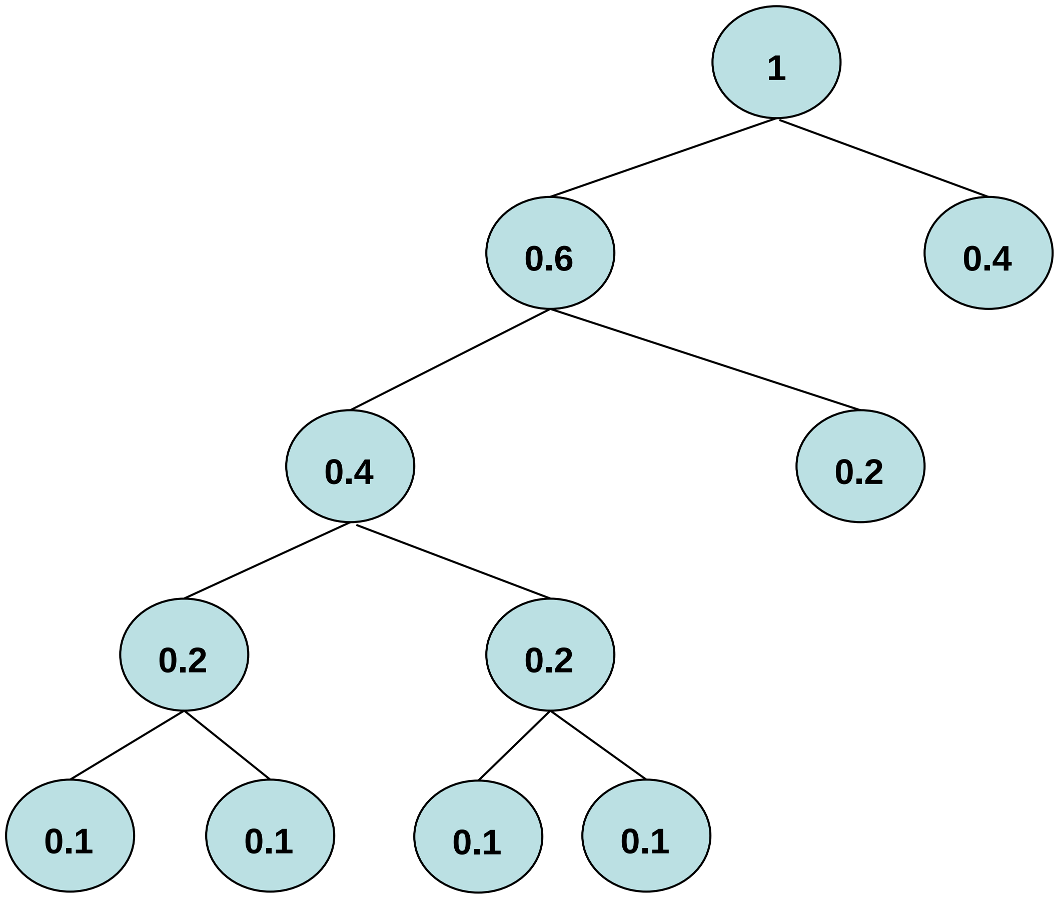
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第三次作业

第二章：13题

- 2.13 画出带权0.1，0.1，0.1，0.1，0.2，0.4的Huffman树。

解：



第二章：18题

- 2.18 求图2.16中图的最优树

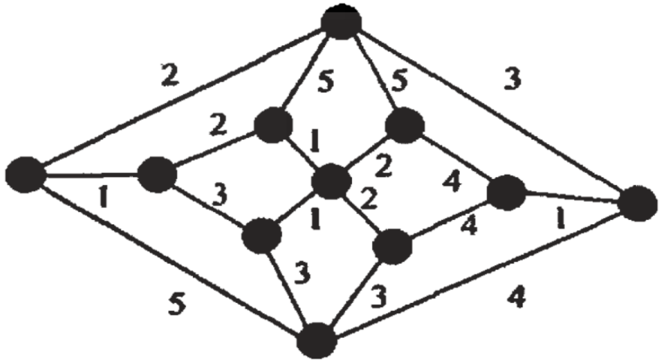
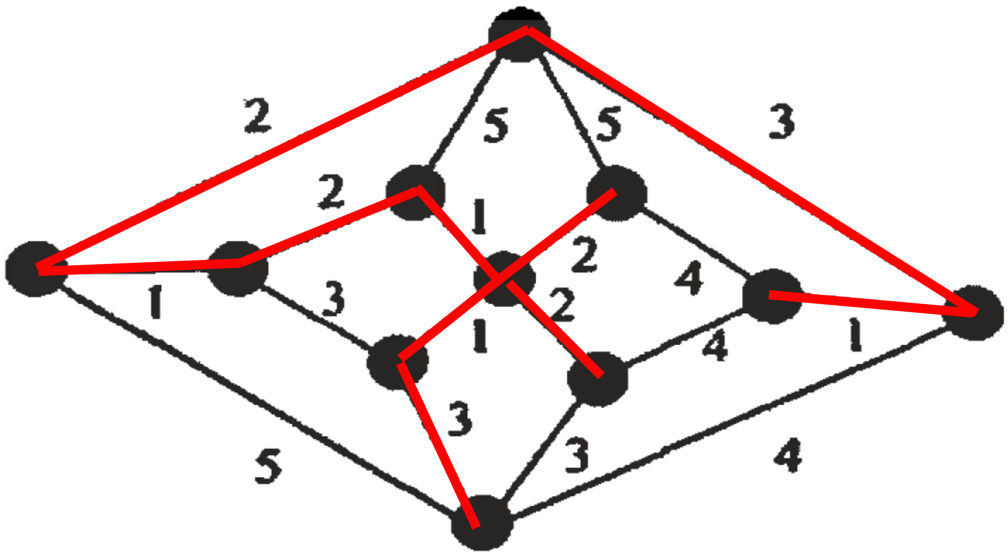


图 2.16

解：



2.4节：求最优树算法

第二章：30题

- 2.30 加权连通图G有边权相等的长为m的圈C，且其权为E(G)中边权最小值，则G至少有m棵不同最优树.

证明：由于圈C中边的权是E(G)中边权最小值，故由kruskal算法，G的最优树的m-1条边可在圈C中选择，且不同的m-1条边的选择可以由kruskal算法生成不同的最优树，m条边中选择m-1条边有m种选法，因此可得到m棵不同最优树，故G至少有m棵不同最优树，得证。

第三章：5题

- 3.5 证明：(1)若G为自对偶图，则$\varepsilon(G) = 2v(G) - 2$.
  (2)对于$\forall n \epsilon N, n \geq 4$, 构作一个n顶自对偶图.

证明：

(1) 由Euler公式，对平面图G，有v(G)-ε(G)+ø(G)=2,由于G为自对偶图，由对偶图的顶集为原图的面集，故ø(G)=v(G)，带入Euler公式即得证。

(2) 当n≥4，n顶的轮Wn(即一个单独的顶点和n-1条边的圈上点都相邻的图)满足题意要求，定义一个映射将轮的内部的n-1个面映射为圈上的n-1个点，轮外部的面映射为轮中心的点，则由该映射可知Wn与其对偶图同构，故Wn为自对偶图。

第三章：11题

- 3.11 设ω是平面图G的连通片个数，则

$$v(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) = \omega + 1$$

证：对于每个连通片G_i, $1 \le i \le \omega$，运用欧拉定理：

$$\nu(G_i) - \varepsilon(G_i) + \phi(G_i) = 2$$

$$\sum_{i=1}^{w} [\nu(G_i) - \varepsilon(G_i) + \phi(G_i)] = 2\omega$$

而 $\phi(G) = \sum_{i=1}^{w} \phi(G_i) - \omega + 1$（最外面的平面被重复计算$\omega - 1$次）

$$\nu(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) = 2\omega - \omega + 1 = \omega + 1$$

第四次作业

第三章：7题

- 3.7 若G的顶点数不少于11个，则G^c不是平面图

证明：

由于G为平面图，故$\varepsilon(G) \leq 3v(G) - 6$

若G^c也是平面图，则也有$\varepsilon(G^c) \leq 3v(G^c) - 6$

因此有$\varepsilon(G) + \varepsilon(G^c) \leq 3v(G) + 3v(G^c) - 12$

由于K_n的边数为$\frac{n(n-1)}{2}$，故由补图的定义可得，

$v(G^c)$=$v(G)$=n，$\varepsilon(G) + \varepsilon(G^c)$= $\frac{n(n-1)}{2}$，代入上面的不等式得到

$\frac{n(n-1)}{2} \leq 6n - 12$，即$n^2 - 13n + 24 \leq 0$

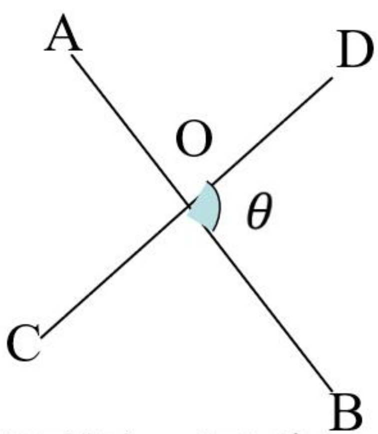
求解该不等式得到$n \leq 10$，与题设矛盾，故G^c不是平面图。

第三章：8题

- 3.8 S={$X_1, X_2, \ldots, X_n$}是平面上的点组成的集合，n>=3，S中任二点距离至少为1，则距离恰为1的顶对在S中最多3n-6对。

解：

以点集S构成V(G)，在距离恰为1的顶对之间连边构成E(G)，下面用反证法证明图G是平面图：若G不是平面图，则存在两边除端点外有公共点，设为边AB、CD，公共点为O。



则不失一般性可以设OD<=1/2，OB<=1/2

$$BD = \sqrt{OD^2 + OB^2 - 2OD \times OB \times \cos\theta}$$

$$< \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times (-1)} = 1$$

与任两点距离至少为1矛盾，所以图G是平面图，因此$\varepsilon \le 3v - 6 = 3n - 6$，而图G的边数对应距离为1的顶对，所以距离恰为1顶对在S中最多3n-6对。

第四章：2题

- 4.2 树上是否可能有两个不同的完备匹配？为什么？

解：不可能。

反证法：假设树T中存在两个不同的完备匹配M_1和M_2，考虑$T[M_1 \ominus M_2]$，记为T’，T’中任一顶点必定同时与M_1，M_2中的一条边关联，所以T’中顶点的度均为2，则必然存在环。T’为T的子图，因此T中必有环，与T为树矛盾。所以树中不可能有两个不同的完备匹配。

第四章：11题

- 4.11 矩阵的行或列成为矩阵的“线”，证明：0-1矩阵中含所有1的线集合的最小阶数（集合元素个数）等于没有两个在同一线上的1的个数。

证明：设X为行集合，Y为列集合

若某行与某列交点为1，则将这两点之间连线，构成二分图G。

含所有1的线集合的最小阶数为最小覆盖|M|。

没有两个在同一线上的1的个数为最大匹配β(G)。

由konig定理，|M|=β(G)，得证。

- 4.14 用$KØnig$定理来证明Hall定理.

解：设M是二分图G的最大匹配，X与Y是G的顶划分

由于$(X-S)\cup N(S)$是G的一个覆盖，故下式为G的最小覆盖数

$min_{S\subseteq X}\{(|X|-|S|)+|N(S)|\}=|X|-max_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$,

因此由König定理可得，$|M|=|X|-max_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$

- 必要性：M将X中的顶皆许配$\Rightarrow|M|=|X|$

$\Rightarrow max_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}=0\ \Rightarrow\ |S|\le|N(S)|$

- 充分性：$|S|\le|N(S)|\Rightarrow max_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}\le 0$

$\Rightarrow|M|\ge|X|$，故$|M|=|X|$，即M将X中的顶皆许配

- 4.17 写出树有完备匹配的充要条件并加以证明

解：树有完备匹配的充要条件是对$\forall v \in V(G)$，$O(G-v)=1$

证明如下：

- 必要性：若树G有完备匹配，则$V(G)=$偶数，$V(G-v)=$奇数，故$G-v$的所有分支不可能都是偶分支，因此$O(G-v)\geq 1$，由Tutte定理$O(G-v)\leq 1$，即可得$O(G-v)=1$
- 充分性：对$\forall v \in V(G)$，$O(G-v)=1$，即$G-v$存在唯一的奇分支$C(v)$，令v与$C(v)$在G中关联的边为$e(v)=vu$，显然当v确定后，u与$e(v)$都被唯一确定，且易知对u用同样方式得到的$e(u)=uv$。于是$M=\{e(v)\}$构成G的一个完备匹配。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第五次作业

第四章：19题

- 4.19 求下列矩阵A的最佳匹配

- 5.2 给出求二分图正常Δ边着色的算法.

解：设G为二分图，其中$|X|\geq|Y|$，首先加点扩充Y，使$|X|=|Y|$，添加边使G变成Δ次正则二分图，记为G^*，利用匈牙利算法逐次求其完备匹配，直至求出G^*的Δ个边不重的完备匹配，每一个完备匹配着一种颜色即可。最后去掉扩充的顶及边即可。

第五章：3题

- 5.3 证明：若二分图的顶之最小次数为$\delta > 0$，则对此图边进行δ着色时，能使每顶所关联的边中皆出现δ种颜色.

证明： 利用反证法

若不存在这种着色方式，考虑图K的最佳δ着色，由假设，存在一个顶，且所关联的边的颜色数小于δ，即小于该顶的次数。故存在颜色x, y，使得x不出现在v的着色中，y出现了至少两次，则着色x和y的边$E_x \cup E_y$所组成的子图在v处的连通片为奇圈，与二分图中没有奇圈矛盾，故原命题成立。