数学规划第三次作业

胡家琦　2016012108
汪　圣　2015012087
夏　燚　2016012110

2019 年 12 月 8 日

9

4.1

(1) 不正确

反例：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 \\ s.t. \quad & x_1x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

取$x_2 = k, x_1 = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$知该优化问题最优值为0,但不可达，又当$x_1 > 0$递增时,$x_1^2$严格递增($x_1 < 0$同理),故知该问题没有局部优解,也没有最优可行解。

(2) 不正确

反例：同(1)

(3) 正确

此即最优解的定义

(4) 不正确

反例：定义$f(x)=\begin{cases}-p, & x\in\mathbb{Q}, x=\frac{q}{p}, q,p\in\mathbb{Z}\text{互质}, p>0;\\ 0, & others.\end{cases}$

考虑优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & x\in[0,1] \end{aligned}$$

则可行解区域有界，但目标值无解.

(5) 正确

由连续函数在紧集上可取到最值即知.

(6) 不正确

反例：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x)=x_1 \\ s.t. \quad & g_1(x)=x_2-x_1^3\le 0 \\ & g_2(x)=-x_2\le 0 \\ & x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

我们有$x_2\ge 0\Rightarrow x_1^3\ge x_2\ge 0$,所以$\bar{x}=(0,0)^T$是优化问题的全局最小解。计算$\nabla f(\bar{x})=(1,0)^T, \nabla g_1(\bar{x})=(0,1)^T, \nabla g_2(\bar{x})=(0,-)^T$,从而知$\nabla f(\bar{x})+\lambda_1 g_1(\bar{x})+\lambda_2 g_2(\bar{x})=0$不可能成立,即$KKT$条件不成立.

4.2

(1) KKT条件为

$$1+2\lambda x_1=0$$

$$1+2\lambda x_2=0$$

$\lambda \geq 0, \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad \lambda g(x) = 0$

显然$\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-1}{2\lambda}, g(x) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}, (x_1, x_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

此时目标值$-\sqrt{2}$,而模型有$x_1 + x_2 \geq -\sqrt{2(x_1^2 + x_2^2)} = -\sqrt{2}$

因此上面所求为全局最优解

(2) KKT条件为

$2x_1 + 2\lambda x_1 + \mu = 0$

$1 + 4\lambda x_2 + \mu = 0$

$-1 + 2\lambda x_3 + \mu = 0$

$\lambda, \mu \geq 0, \quad g_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 1 \leq 0, \quad g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, \quad \lambda g_1(x) = 0, \quad \mu g_2(x) = 0$

$\lambda = 0$显然无解；$\lambda > 0$时，$x_1 = -\frac{\mu}{2(1+\lambda)} \leq 0, x_2 = -\frac{\mu+1}{4\lambda} < 0$

$\Rightarrow g_2(x) < 0$，否则$x_3 > 1$，与$g_1(x) \leq 0$矛盾！$\Rightarrow \mu = 0$

从而$x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{4\lambda}, x_3 = \frac{1}{2\lambda}$代入$g_1(x) = 0$

解得$(x_1, x_2, x_3) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), (\lambda, \mu) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, 0\right)$目标值$-\frac{\sqrt{6}}{2}$

而模型有$x_1^2 + x_2 - x_3 \geq x_2 - x_3 \geq -\sqrt{(2x_2^2 + x_3^2)\left(\frac{1}{2} + 1\right)} \geq -\sqrt{1 \times \frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$。因此上面KKT点为全局最优解。

4.4

(1) 记 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2\alpha}(x-y)^T(x-y)$，则 $g(x)$ 亦为 $\mathbb{R}^n$ 上的二阶连续可微函数，且有

$$\nabla^2 g(x) = \nabla^2 f(x) + \frac{1}{\alpha} I_n = \frac{1}{\alpha}\left(I_n + \alpha \nabla^2 f(x)\right)$$

又 $\|\nabla^2 f(x)\|_2 \leqslant L > 0 \Rightarrow \|\alpha\nabla^2 f(x)\|_2 \leqslant \alpha L < 1$

于是 $\forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ 有

$$\begin{aligned}
&u^T\left(I_n + \alpha\nabla^2 f(x)\right)u \\
=&u^T u + \alpha u^T \nabla^2 f(x) u \\
\geqslant&\|u\|_2^2 - \alpha\|u\|_2\left\|\nabla^2 f(x) u\right\|_2 \\
\geqslant&\|u\|_2^2 - \alpha\|u\|_2\left\|\nabla^2 f(x)\right\|_2\|u\|_2 \\
\geqslant&(1-\alpha L)\|u\|_2^2 \\
>&0
\end{aligned}$$

也即有 $I_n + \alpha\nabla^2 f(x)$ 严格正定，于是有 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的严格凸函数。

2 由 z 为问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) = f(x) + \frac{1}{2\alpha}(x-y)^T(x-y)$$

的一个最优解，于是有 $g(z) \leqslant g(y)$, 也即 $f(z) + \frac{1}{2\alpha}(z-y)^T(z-y) \leqslant f(y) + \frac{1}{2\alpha}(y-y)^T(y-y) = f(y)$, 于是有 $f(y) - f(z) \geqslant \frac{1}{2\alpha}(z-y)^T(z-y) \geqslant 0$

4.5

二次约束二次规划模型为

$min \quad x^TQx + q^Tx$

$s.t. \quad x_k(x_k-1) = 0; \quad k = 1, 2, \&\&, n$

直接由书上结论或者下一题结果，得Lagrange对偶模型

$max \quad \sigma$

$$s.t. \quad \begin{pmatrix} -\sigma & \frac{q^T - a^T}{2} \\ \frac{q-a}{2} & Q + diag\{a_1, \&\&, a_n\} \end{pmatrix} \in D$$

$\quad \sigma \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow U \in S_+^{n+1}$

其中$D = \{U \in S^{n+1} | \left(1, x^T\right) U \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

4.6

对于二次约束二次规划问题

$$\begin{array}{ll} \min & f(x)=\frac{1}{2}x^TQ_0x+\left(q^0\right)^Tx+c_0 \\ \text{s.t.} & g_i(x)=\frac{1}{2}x^TQ_ix+\left(q^i\right)^Tx+c_i\leqslant 0, i=1,2,\ldots,m \quad \text{(QCQP)} \\ & x\in\mathbb{R}^n \end{array}$$

其中 $\forall 0\leqslant i\leqslant m,\ Q_i\in\mathcal{S}^n, q^i\in\mathbb{R}^n, c_i\in\mathbb{R}$ 记可行解区域为

$$\mathcal{F}=\left\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)=\frac{1}{2}x^TQ_ix+\left(q^i\right)^Tx+c_i\leqslant 0, i=1,2,\ldots,m\right\}$$

则原问题的 Lagrange 函数为

$$L(x,\lambda)=\frac{1}{2}x^T\left(Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i\right)x+\left(q^0+\sum_{i=1}^m\lambda_iq^i\right)^Tx+c_0+\sum_{i=1}^m\lambda_ic_i, x\in \cancel{\mathcal{F}}\ \mathbb{R}^n$$

而将 Lagrange 对偶问题写成矩阵形式为：

$$\begin{array}{ll} \max & \sigma \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}^T U\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}\geqslant 0, \forall x\in \cancel{\mathcal{F}}\ \mathbb{R}^n \\ & \sigma\in\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R}_+^m \end{array}$$

其中

$$U=\begin{pmatrix} -2\left(\sigma-c_0-\sum_{i=1}^m\lambda_ic_i\right) & \left(q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iq^i\right)^T \\ q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iq^i & Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i \end{pmatrix}$$

进一步可以写为

$$\begin{array}{ll} \max & \sigma \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} -2\sigma+2c_0+2\sum_{i=1}^m\lambda_ic_i & \left(q^0+\sum_{i=1}^m\lambda_iq^i\right)^T \\ q^0+\sum_{i=1}^m\lambda_iq^i & Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i \end{pmatrix}\in\mathcal{D}_{\mathcal{F}} \\ & \sigma\in\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R}_+^m \end{array}$$

其中

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}=\left\{U\in\mathcal{S}^{n+1}|\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}^T U\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}\geqslant 0, \forall x\in \cancel{\mathcal{F}}\ \mathbb{R}^n\right\} \Leftrightarrow U\in\mathcal{S}_+^{n+1}$$

即为所求。

注：在上面的问题中将 $\mathcal{F}$ 换为任一包含 $\mathcal{F}$ 的区域 $\mathcal{G}$ 便可得到广义 Lagrange 对偶问题。

4.8

令$L(x,\bar{\lambda}) \triangleq f(x)+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i g_i(x)$为凸函数，由题知$\nabla_x L(\bar{x},\bar{\lambda})=0$,由$KKT$条件与凸函数的性质知$f(\bar{x})=L(\bar{x},\bar{\lambda})\leq L(x,\bar{\lambda}),\forall x\in\mathbb{R}^n,\Rightarrow f(x)\geq f(\bar{x}),\forall x\in\mathbb{R}^n$，故$\bar{x}$为原问题的全局最优解，又由$f(\bar{x})=L(\bar{x},\bar{\lambda})$知$\bar{\lambda}$为对偶问题的最优解.

4.9

令$\mathcal{X}=\{u\in\mathbb{R}^{n+1}|u_i=a^i\bullet x-b_i,i=1,\cdots,m,u_{m+1}=c\bullet x,x\in\mathcal{K}\},\mathcal{K}_0=\{u\in\mathbb{R}^{n+1}|u_i\geq 0,i=1,\cdots,m,u_{m+1}\in\mathbb{R}\}$,则(4.29)等价于下面模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(u) \\ s.t. \quad & u\in\mathcal{X}\cap\mathcal{K}_0 \end{aligned}$$

$f(u)$的共轭对偶函数为：$f^*(w)=\max\limits_{u\in\mathcal{X}}\{u^Tw-f(u)\}=\max\limits_{x\in\mathcal{K}}\{-\sum\limits_{i=1}^{m}w_ib_i+[\sum\limits_{i=1}^{m}w_ia^i+(w_{m+1}-1)c]\bullet x\}$,在$f^*(w)<\infty$的条件下，有

$$[\sum_{i=1}^{m}w_ia^i+(w_{m+1}-1)c]\bullet x\leq 0,\forall x\in\mathcal{K}$$

即-

$$\sum_{i=1}^{m}w_ia^i-(w_{m+1}-1)c\in\mathcal{K}^*$$

于是共轭函数为

$$f^*(w)=-\sum_{i=1}^{m}w_ib_i$$

其定义域为$\mathcal{Y}=\{w\in\mathbb{R}^{m+1}|-\sum\limits_{i=1}^{m}w_ia^i-(w_{m+1}-1)c\in\mathcal{K}^*\}$.又明显有

$$\mathcal{K}_0^*=\{w\in\mathbb{R}^{n+1}|w_i\geq 0,i=1,\cdots,m,w_{m+1}=0\}$$

$$\mathcal{Y}\cap\mathcal{K}_0^*=\{w\in\mathbb{R}^{n+1}|w_i\geq 0,i=1,\cdots,m,w_{m+1}=0,-\sum_{i=1}^{m}w_ia^i+c\in\mathcal{K}^*\}$$

于是共轭对偶问题为：

$$\min_{w\in\mathcal{Y}\cap\mathcal{K}_0^*} f^*(w)=\min_{\{w\in\mathbb{R}^m|\in\mathcal{K}^*,w_i\geq 0,i=1,\cdots,m\}} -\sum_{i=1}^{m} w_i b_i$$

即：

$$\begin{aligned}
\min \quad & f^*(w)=-b^T w\\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} w_i a^i + s = c\\
& s\in\mathcal{K}^*, w\in\mathbb{R}_+^m
\end{aligned}$$

令$y=(w_1,\cdots,w_m)^T$,可写为

$$\begin{aligned}
\max \quad & f^*(w)=b^T y\\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i a^i + s = c\\
& s\in\mathcal{K}^*, y\in\mathbb{R}_+^m
\end{aligned}$$

此即(4.30)

4.10

(1) 此时对偶问题如下

$$\begin{aligned}
\max \quad & 0\cdot y\\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} - y\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\-2\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{L}^3\\
& y\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

此时容易看出原问题目标值有限，而对偶问题没有可行解，无强对偶性。

(2) 由线性锥优化模型理论直接写出对偶模型为：

$$-\max \quad -y_2$$

$$s.t.\quad y_1+y_3-y_4+y_5=0$$

$$y_2+y_4=-1$$

$$y_1+s_1=0$$

$$y_2+s_2=0$$

$$y_3+s_3=0$$

$$y_4+s_4=0$$

$$y_5+s_5=0$$

$$y\in\mathbb{R}^5, s\in\mathcal{L}^3\times\mathcal{L}^2$$

令$z=-y$得更简单形式

$$-\max\quad z_2$$

$$s.t.\quad z_1+z_3=-(z_5-z_4)$$

$$z_2+z_4=1$$

$$z\in\mathcal{L}^3\times\mathcal{L}^2$$

分析原问题有

$$x_3=-x_1=x_5,(x_3,x_4,x_5)\in\mathcal{L}^3\Rightarrow x_4=0\Rightarrow x_2=-1$$

注：定理4.28条件不满足，无法凭理论判断强对偶性。

易验证$(-1,-1,1,0,1,0,1)$可行，从而原问题最优值为1

分析对偶问题有$0\le z_1+z_3=-(z_5-z_4)\le 0\Rightarrow z_2=0<1$

因此不具有强对偶性。

(3) 令$A=I_7$表示7阶单位阵,$b=(1,0,-2,0,0,0,0)^T,c=(0,0,0,2,0,0,-5)^T,x=(x_1,x_2,x_3,t_1,x_4,x_5,t_2),\mathcal{K}=\mathcal{L}^4\times\mathcal{L}^3$原问题为：

$$\begin{aligned}\min\quad & c^Tx\\ s.t.\quad & Ax\geq_{\mathcal{K}} b\\ & x\in\mathbb{R}^7\end{aligned}$$

从而知对偶模型为

$$\begin{aligned}\min\quad & b^Ty=2y_4-5y_7\\ s.t.\quad & y=c\\ & y\in\mathcal{K}^*=\mathcal{K}\end{aligned}$$

注意到原问题的t_2可任意大,即知原问题无界,令$x_0=(0,1,0,100,1,1,100)^T$,则$Ax_0>_{\mathcal{K}}0$,即知对偶问题没有可行解.无强对偶性.

(4) 由线性锥优化模型理论直接写出对偶模型为：

$$\min\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\bullet X$$

$$s.t.\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\bullet X=1$$

$X\in S_+^2$

易知$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\in S_{++}^2$可行，且显然有下界1；

由定理4.28知具有强对偶性。

(5) 对偶模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & y \\ s.t. \quad & y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & s \in S_+^2, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

注意到原问题有可行解$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in S_{++}^2$ 则知强对偶性成立.此时由$y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s \in S_+^2$知对偶问题的最优解为$\bar{y} = 1$.

(6) 对偶模型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_{23} \\ s.t. \quad & x_{22} = 0, x_{11} - 2x_{23} = 1 \\ & X \in S_+^3 \end{aligned}$$

由$x_{22} = 0, X \in S_+^3$得到$x_{23} = 0$,从而知对偶问题的最优值为0.又由原问题的约束条件可得到：$\begin{pmatrix} -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 1+x_2 \\ 0 & 1+x_2 & 0 \end{pmatrix} \in S_+^3$,得到$x_2 = -1$,从而最优值为1，即两问题无强对偶性.

4.11

(1) $c \bullet x - b^T y = s \bullet x + \sum_{-=1}^{m} y_i \left(a^i \bullet x - b_i\right) \geq s \bullet x \geq 0$

(2) $c \bullet x^* = b^T y^*$满足定理4.21条件，从而定理4.31第一条结论成立。

由定理4.29直接得到定理4.31后面两条结论成立。

4.12

(1) 记

$$\tilde{\mathcal{Y}}=\left\{\lambda\in\mathbb{R}^m|Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i\in\mathcal{S}_{++}^n\right\}$$

则 $\forall\lambda,\eta\in\tilde{\mathcal{Y}},t\in[0,1]\Rightarrow Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i\in\mathcal{S}_{++}^n,Q_0+\sum_{i=1}^m\eta_iQ_i\in\mathcal{S}_{++}^n$ 由 $\mathcal{S}_{++}^n$ 为凸集，于是有 $Q_0+\sum_{i=1}^m(t\lambda_i+(1-t)\eta_i)Q_i=t(Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i)+(1-t)(Q_0+\sum_{i=1}^m\eta_iQ_i)\in\mathcal{S}_{++}^n\Rightarrow t\lambda+(1-t)\eta\in\tilde{\mathcal{Y}}\Rightarrow\tilde{\mathcal{Y}}$ 为凸集，又 $\mathcal{Y}=\tilde{\mathcal{Y}}\cap\mathbb{R}_{++}^m$，$\mathbb{R}_{++}^m$ 为凸集，于是有 $\mathcal{Y}$ 为凸集。

另一方面，由 $\mathcal{S}_{++}^n$ 为开集，于是 $\forall\lambda\in\mathcal{Y}\Rightarrow Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i\in\mathcal{S}_{++}^n\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0,\ s.t.\ Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i+A\in\mathcal{S}_{++}^n,\ \forall\,\|A\|<\varepsilon$. 取 $M=\max\{\|Q_i\|\,;1\leqslant i\leqslant m\}$ 则 $\forall\,\|\alpha\|<\varepsilon/mM$ 有 $\|\sum_{i=1}^m\alpha_iQ_i\|\leqslant\sum_{i=1}^m|\alpha_i|\,\|Q_i\|<\varepsilon$ 于是有 $Q_0+\sum_{i=1}^m(\lambda_i+\alpha_i)Q_i=Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i+\sum_{i=1}^m\alpha_iQ_i\in\mathcal{S}_{++}^n\Rightarrow\lambda+\alpha\in\mathcal{Y}\Rightarrow\mathcal{Y}$ 为开集。

于是有 $\mathcal{Y}$ 为开凸集。

(2) 简便起见不妨记：$Q(\lambda):=Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i,q(\lambda):=q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iq_i$ 则由

$$0=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}I=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(Q(\lambda)^{-1}Q(\lambda))=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(Q(\lambda)^{-1})Q(\lambda)+Q(\lambda)^{-1}Q_i$$

有

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(Q(\lambda)^{-1})=-Q(\lambda)^{-1}Q_iQ(\lambda)^{-1}$$

由 $\mathcal{Y}$ 为开凸集。于是对于最优解 $\bar{\lambda}$ 有

$$0=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}P(\bar{\lambda})=-q_i^TQ(\bar{\lambda})^{-1}q(\bar{\lambda})+\frac{1}{2}q(\bar{\lambda})^TQ(\bar{\lambda})^{-1}Q_iQ(\bar{\lambda})^{-1}q(\bar{\lambda})+c_i$$

于是

$$g(\bar{x})=\frac{1}{2}\bar{x}^TQ_i\bar{x}-q_i^T\bar{x}+c_i=0$$

考虑

$$L(x,\lambda)=\frac{1}{2}x^T\left(Q_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iQ_i\right)x+\left(q^0+\sum_{i=1}^m\lambda_iq^i\right)^Tx+c_0+\sum_{i=1}^m\lambda_ic_i$$

则$L(x,\bar{\lambda})$ 关于 x 为凸函数，且 $\frac{\partial}{\partial x}L(x,\bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow x = \bar{x}$ 于是有 $L(x,\bar{\lambda})$ 在 $\bar{x}$ 处取最小值。于是对 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q_0 x + (q^0)^T x + c_0, g_i(x) = \frac{1}{2}x^T Q_i x + (q^i)^T x + c_i$ 有 $f(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda}) \leqslant L(x,\bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1} \bar{\lambda}_i g_i(x) \leqslant f(x)$，于是有 $\bar{x}$ 为原 QCQP问题的全局最优解。

(3) 一个充分条件是 $Q(\bar{\lambda})$ 可逆：此时 $\bar{\lambda}_i = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}P(\bar{\lambda}) = g_i(\bar{x}); \bar{\lambda}_i \neq 0 \Rightarrow 0 \geqslant \frac{\partial}{\partial \lambda_i}P(\bar{\lambda}) = g_i(\bar{x})$ 也即总有 $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$，同上知此时亦有 $f(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda}) \leqslant L(x,\bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1} \bar{\lambda}_i g_i(x) \leqslant f(x)$，即有 $\bar{x}$ 为原 QCQP问题的全局最优解。