数学分析讲义: 第九章 $\mathbb{R}^n$上的测度

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; 《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学　卢旭光 Mar. 2017

数学分析讲义总目录

第九章 $\mathbb{R}^n$上的测度

我们在本讲义第六章的开头已对Lebesgue 积分与Riemann积分的共性和各自的特点做了简要说明, 那里已揭示了现代积分的某些一般性。事实上经典的Lebesgue 测度与积分, 即Lebesgue早期建立的测度积分, 已包含了现代测度与积分的主要思想和理论框架。同学们在两、三年后会看到很多数学分支如泛函分析、动力系统、PDE、几何分析、分形理论，尤其概率论随机过程都广泛使用现代测度与积分。将来学习随机过程时大家更将看到, 所有问题所有理论都是测度论的, 且多涉及更复杂的测度包括无穷维空间上的测度。甚至在数论研究中也用到测度论。例如本系2012级的杨李扬同学(现在CalTech读博士)告诉我, 最近一位英国青年博士有一篇14 页的研究数论的论文, 其中前7页都是在定义一族威力强大的测度, 后7页是展现这族测度的威力: 只需调整这族测度中的参数就可以得到很好的数论结果，包括孪生素数方面的结果。为什么测度论的应用如此广泛? 我想主要是因为以下三点:

- 在现代测度论中“几乎所有”集合都是可测的, 并且测度空间都是完备的或都是容易完备化的, 这使得其中“几乎所有”极限运算都是封闭的。事实上上世纪七十年代数学家索罗威证明了不可测集的存在(差不多)等价于选择公理。[此处顺便说一句, 积分也可看成是测度。]

- 现代测度论是一种柔性技术, 即它可以研究结构很坏的集合, 能渗透到一些重要细节中。这归功于它的普适性和一些强大的定理, 而古典积分则要么无法研究很差的集合，要么只能做形式运算而无法用于严格证明。

- 测度与积分主要用于处理平均行为和大范围性质, 自然界和科学中的问题也往往与个体的群体行为有关, 包括微观大宏观小的介观问题。一方面, 在我们还没有足够的精准技术去跟踪和研究个体问题时, 先研究群体行为就是自然的可行的，另一方面, 即便每个个体行为清楚了，也远不能代替对它们的群体行为的研究，即仍需要研究群体行为。例如按照牛顿力学，单个质点的运动服从牛顿定律, 是可逆的, 即可以沿反向回到初态，但一般来说质点群体的运动行为就不可逆了。

现代测度与积分已构成了一个比较完整的体系, 操作方式都是有章可循的, 也是比较直观的, 我们的学生在学习上一般没有大的障碍, 只是开始不习惯一些集合运算。陈天权教授的讲义中对测度与积分的讲解比一般本科生教材要深(当然陈书的其他章节也比一般本科数学系数学分析教材深)。考虑到学时限制和认知的渐进性，本讲义只

讲欧空间$\mathbb{R}^n$上的测度与积分, 即以$\mathbb{R}^n$为全空间建立其上常用的测度, 即Lebesgue测度和Hausdorff 测度和相应的积分理论。这也是基于以下考虑:

1. $\mathbb{R}^n$是最常用的空间, 其上的Lebesgue测度、Hausdorff 测度和积分理论应用广泛, 使用频率是最高的, 同时$\mathbb{R}^n$中各种维数的集合的测度, 如曲线的长度、曲面的面积、实心体的体积等等可以统一纳入Hauisdorff 测度与积分理论中。

2. Lebesgue测度, Hausdorff 测度和积分理论已包含了一般测度与积分的基本概念和基本性质, 通过对这经典理论的学习, 可为进一步学习一般测度与积分打下良好基础。

3. 这样做兼顾了直观、严格、普适性和实用性, 而实践表明这也更加经济有效。

根据以往的教学验我们相信, 只要学生具有基本的逻辑思维能力、抽象能力和想象力, 他/她就会感到现代测度与积分其实是最有规律, 最具概括性, 最好用, 也是最容易理解和接受的。

除了陈天权的《数学分析讲义》外, 本章和下一章的其他参考书如下:

[1] 周民强《实变函数》, 北京大学出版社。此书主要讲经典 Lebesgue 测度和积分, 习题丰富有趣 (90 年代以后的各版本有部分习题解答), 适于作本科生实分析教材。

[2] W. Rudin *Real and Complex Analysis* (《实分析与复分析》)有中译本, 人民教育出版社,1981. 此书为名著,其实分析部分包括了现代测度与积分的主要方法和结果, 适于数学系高年级学生和研究生学习。

[3] Gerald B. Folland *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Jon Wiley & Sons, Inc. , 1984. 该书比较浓缩但是非常清晰地展示了现代测度和积分的基本知识, 使读者能较快地领略并掌握这门学科的主干和应用方法。

[4] 严加安《测度论讲义》(第二版), 科学出版社, 2004. 此书较全面也较浓缩, 是研究测度论和概率论学者的必读教材。

[5] A. Mukherjea and K. Pothoven, *Real and Functional Analysis, Part A: Real Analysis,* Second Edition, 1984, Plenum Press, New York. 此书技术含量较高, 论证严谨, 本讲义对非负简函数积分的定义即参考该书的处理 (见本讲义第十章**§10.1**)。

§9.1. 广义实数运算和开集的结构

为了后面内容叙述连贯紧凑, 这里先学习一些最基本常用的概念, 如广义实数集$[-\infty,+\infty]$ 中的算术运算, $\mathbb{R}^n$中n维区间的基本性质和开集的结构.

【$[-\infty,+\infty]$ 中的算术运算】 在测度和积分论中, 不可避免地要与无穷大 $\pm\infty$ 打交道. 例如无界直线的长度为无穷大, 函数在某些点处的极限为无穷大, 一些有限量的极限是无穷大, 等等.

把 $-\infty,+\infty$ 添加到 $\mathbb{R}$ 中, 我们称 $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}=[-\infty,+\infty]$ 为广义实数集. 广义实数集中算术运算法则是在常义实数集的运算法则基础增加以下约定 (对于 $x\in\mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
&-\infty<+\infty,\quad -(-\infty)=+\infty,\quad |\pm\infty|=+\infty,\\
&+\infty+(+\infty)=+\infty-(-\infty)=-(-\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad -\infty-(+\infty)=-\infty\,,\\
&(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,\qquad (+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty\,,\\
&x+\infty=+\infty+x=+\infty,\qquad x-\infty=-\infty+x=-\infty\,,\quad x\in\mathbb{R};\\
&x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=+\infty,\quad x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=-\infty\quad \text{if}\quad x>0\,,\\
&x\cdot(+\infty=(+\infty)\cdot x=-\infty,\quad x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=+\infty\quad \text{if}\quad x<0\,,\\
&0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0\,.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

但下列运算无定义：

$$
\text{“}+\infty-(+\infty)\text{”},\qquad \text{“}-\infty+(+\infty)\text{”},\qquad \text{“}\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{”}
$$

注意以上约定与极限论 L' Hospital 法则中的不定型问题有区别. 最大的区别是: 在广义实数运算约定中, $0\cdot(\pm\infty)=0$ 中的 0 是常数 0, 而不是无穷小变量!

对于$\frac{1}{0}, \frac{1}{\pm\infty}$, 则根据具体问题来定义其值. 例如若所考虑的集合是非负实数的子集, 而0是这集合中的最小数, 则定义$\frac{1}{0}=\frac{1}{0+}=+\infty$. 又例如若$\frac{1}{\pm\infty}$不与无穷大做乘法运算, 则可定义$\frac{1}{\pm\infty}=0$.

【注】当上下文清楚时, 有时用∞ 代表$+\infty$, 例如若n 是自然数, 则$n\to\infty$ 当然表示$n\to+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}$ 当然表示$\sum_{n=1}^{+\infty}$, 等等.

• **广义非负实数和上确界:** 设 $A\subset[0,+\infty]$ 非空. 若 $+\infty\in A$ 或 $A\subset[0,+\infty)$ 无上界, 则我们定义 $\sup A=+\infty$.

关于广义非负实数, 常用的一个性质是：单调增加的数列总有极限:

若 $0 \le b_1 \le b_2 \le b_3 \le \dots$, $b_n \in [0, +\infty]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sup\limits_{n\ge 1} b_n$.

事实上当一切 $b_n \in [0, +\infty)$ 时, 这归结为常义极限问题. 若存在 N 使得 $b_N = +\infty$, 则 $b_n = +\infty\ \forall\, n \ge N$. 此时当然有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty = \sup\limits_{n\ge 1} b_n$.

对于广义非负实数, 加法永远有定义. 在测度与积分中经常用到广义正项级数, 其定义与常义正项级数相同, 即为部分和的极限：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} := \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\,, \quad a_k,\, a_{i,j} \in [0, +\infty]\,.$$

易见当 $a_k \in [0, +\infty]\,(k = 1, 2, \dots)$ 中有一项为 $+\infty$ 时, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

【命题9.1(广义正项级数的求和及换序不变性)】 设$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ 为广义非负实数列. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\,, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$$

这里 $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty} = \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的任一排列. 让一些 a_k 和 $a_{i,j}$ 等于 0, 上式包括了任意有限求和的情形.

【证】第一个等式的证明与常义正项级数的情形相同. 下证第二个等式. 由通项非负易见若某一项 $a_{i,j} = +\infty$, 则所有求和都等于 $+\infty$, 这时所证等式成立. 以下假设 $0 \le a_{i,j} < +\infty\ \forall\, i, j \ge 1$. 计算

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

注意一切 $a_{i,j} \ge 0$, 得到

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\Big) = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

再令 $n \to \infty$ 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

同理由

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\Big) \le \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\Big)$$

得到反向不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}=\lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big)\,.$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}$. 同理可证 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{i,j})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}$. $\square$

• **广义实数集的上下确界和上下极限:** 对于任一非空广义实数集合 $A\subset[-\infty,+\infty]$, 若 $\infty\in A$, 或 $A\subset[-\infty,+\infty)$ 但 A 没有有限的上界, 则定义 $\sup A=+\infty$; 若 $-\infty\in A$, 或 $A\subset(-\infty,+\infty]$ 但 A 没有有限的下界, 则定义 $\inf A=-\infty$.

对任一数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[-\infty,+\infty]$, 部分序列 $n\mapsto\{a_k\}_{k\geq n}$ 是单调的:

$$\{a_k\}_{k\geq n+1}\subset\{a_k\}_{k\geq n}\,,\quad n=1,2,3,...$$

因此

$$\sup_{k\geq n+1}a_k\leq\sup_{k\geq n}a_k\,,\quad \inf_{k\geq n+1}a_k\geq\inf_{k\geq n}a_k\,,\quad n=1,2,3,\dots\,.$$

我们称

$$\limsup_{n\to\infty}a_n:=\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{k\geq n}a_k\Big),\qquad \liminf_{n\to\infty}a_n:=\lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{k\geq n}a_k\Big)$$

分别为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限和下极限.

与实数集性质相同, 我们称广义实数列 $\{a_n\}$ 有极限如果

$$\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n\,.$$

这时这个公共值即定义为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限, 记做 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n:=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$.

• **函数列的情形:** 设$f_k:E\to[-\infty,+\infty]$ 是 E 上一列广义实值函数. 对每一固定的 $x\in E$, $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 就是一个广义实数列. 我们说 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛, 如果

$$\limsup_{k\to\infty}f_k(x)=\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\qquad\forall\,x\in E\,.$$

此时我们称这个公共极限

$$f(x):=\lim_{k\to\infty}f_k(x):=\limsup_{k\to\infty}f_k(x)=\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\qquad\forall\,x\in E\,.$$

为 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上的极限函数. 这里有两种情形：一种是利用函数列来构作函数, 即这函数是函数列的极限函数, 另一种刚好相反：对于已知函数, 构作满足一定条件的

函数列使得此函数列处处收敛于这个已知函数. 无论哪种情形, 说 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛于 f 是指 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \varphi(x) \qquad \forall\, x\in E\,.$$

注意这里 " 收敛" 只是习惯说法, 事实上它包括了在某些点 x 处的极限等于 $+\infty, -\infty$ 的情形.

【例】

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\cos(\pi x)|^k}{1-|\cos(\pi x)|^k} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \\ +\infty & \text{if} \quad x\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

在这个例子中我们已定义$\frac{1}{0}=\frac{1}{0+}=+\infty$, 这是因为$1-|\cos(\pi x)|^k\ge 0 \;\; \forall\, x\in\mathbb{R}$.

【集合与数的乘积公式】

【命题9.2(乘积公式).】

(a) 设$E_{i,j}$ 为一些集合, $j=1,2,...,m_i$; $i=1,2,...,n$. 则有

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_1}E_{1,j}\Big)\times\Big(\bigcup_{j=1}^{m_2}E_{2,j}\Big)\times\cdots\times\Big(\bigcup_{j=1}^{m_n}E_{n,j}\Big) = \bigcup_{j_1=1}^{m_1}\bigcup_{j_2=1}^{m_2}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{m_n}E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{n,j_n}.$$

(b) 设$a_{i,j}$ 为一些数, $j=1,2,...,m_i$; $i=1,2,...,n$. 则有

$$\Big(\sum_{j=1}^{m_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{m_n}a_{n,j}\Big) = \sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}\,. \tag{1.2}$$

【证】(a) 已在第七章证明了. 下证(b). 对$a_{i,j}$的第一个下标i的个数n 用归纳法. 当$n=1$ 时, (1.2) 自动成立. 假设在下标i的个数为n时(1.2)成立, 则在下标i的个数为$n+1$时, 令

$$A=\sum_{j=1}^{m_{n+1}}a_{n+1,j}=\sum_{j_{n+1}=1}^{m_{n+1}}a_{n+1,j_{n+1}}.$$

则有

$$a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}A = a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}\sum_{j_{n+1}=1}^{m_{n+1}}a_{n+1,j_{n+1}} = \sum_{j_{n+1}=1}^{m_{n+1}}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}a_{n+1,j_{n+1}}.$$

由归纳假设便有

$$\Big(\sum_{j=1}^{m_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{m_{n+1}}a_{n+1,j}\Big)=\Big(\sum_{j=1}^{m_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{m_n}a_{n,j}\Big)A$$
$$=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}A$$
$$=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}\left(\sum_{j_{n+1}=1}^{m_{n+1}}a_{i,j_1}a_{i,j_2}\cdots a_{i,j_{n+1}}\right)=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}\sum_{j_{n+1}=1}^{m_{n+1}}a_{i,j_1}a_{i,j_2}\cdots a_{i,j_{n+1}}.$$

所以(1.2) 成立. □

【$\mathbb{R}^n$中的区间】 回忆: $\mathbb{R}^n$ 中的n维有界区间I 是n 个一维有界区间的乘积, 即

$$I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]\qquad(\text{有界闭区间}),$$

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)=\prod_{i=1}^n(a_i,b_i)\qquad(\text{有界开区间}),$$

$$I=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots\times[a_n,b_n)=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i)\qquad(\text{左闭右开的有界区间})$$

$$I=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_n,b_n]=\prod_{i=1}^n(a_i,b_i]\qquad(\text{左开右闭的有界区间})$$

等等. 每个一维区间$[a_i,b_i],(a_i,b_i),[a_i,b_i),(a_i,b_i]$ 称为区间I 的边或棱. 由I 的边的左、右端点构成的向量$(a_1,a_2,...,a_n),(b_1,b_2,...,b_n)$ 称为区间I 的左、右端点.

定义I 的面积或体积为I 的各棱长的乘积, 即 (无论各条棱是否为闭区间)

$$|I|=|I^\circ|=|\overline{I}|=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)\,.$$

注意: $\mathbb{R}^n$中的区间要求是非退化的, 即I的各棱长必须大于零! 因此总有$|I|>0$.
□

• **区间的内部, 闭包和边界.** 设$n(\ge 2)$维有界区间I 的左、右端点为$(a_1,a_2,...,a_n)$, $(b_1,b_2,...,b_n)$. 则易见

$$I^\circ=\prod_{i=1}^n(a_i,b_i),\quad \overline{I}=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]$$

因此I的边界为

$$\partial I=\overline{I}\setminus I^\circ=\bigcup_{k=1}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\Big|_{\text{其中}[a_k,b_k]\text{被换成二元素集}\{a_k,b_k\}}\Big)\,. \tag{1.3}$$

它说明边界∂I是由$2n$个$n-1$维有界闭区间组成的. 建议用$n=2,3$的情形(即平面矩形和三维长方体)检验一下.

• **区间的直径.** 不难看出n维有界区间I 的直径等于I 的左、右端点$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ 的距离, 也即等于I 的对角线之长：

$$\mathrm{diam}(I)=\mathrm{diam}(I^\circ)=\mathrm{diam}(\overline{I})=\Big(\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2\Big)^{1/2}=|\mathbf{b}-\mathbf{a}|.$$

由此得到常用的估计式

$$\mathrm{diam}(I)\le\sqrt{n}\cdot\max_{1\le i\le n}(b_i-a_i).$$

• **区间的分划.** 设I 是以$(a_1,a_2,...,a_n),(b_1,b_2,...,b_n)$ 为左、右端点的有界区间. 给定任意$\delta>0$ 我们对每个一维区间$[a_i,b_i]$ 做分划：

$$a_i=a_{i,0}<a_{i,1}<a_{i,2}<\cdots<a_{i,m_i}=b_i\quad\text{满足}\quad a_{i,j}-a_{i,j-1}<\frac{\delta}{\sqrt{n}},\ j=1,2,...,m_i\,.$$

则有

$$[a_i,b_i]=\bigcup_{j=1}^{m_i}[a_{i,j-1},\,a_{i,j}]\,,\quad [a_i,b_i)=\bigcup_{j=1}^{m_i}[a_{i,j-1},\,a_{i,j})\,,\quad \text{etc.}$$

从而由并集的乘积公式得到I 的一个分划：

$$I=\bigcup_{j_1=1}^{m_1}\bigcup_{j_2=1}^{m_2}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{m_n}I_{j_1,j_2,...,j_n} \tag{1.4}$$

其中

$$I_{j_1,j_2,...,j_n}=\prod_{i=1}^{n}[a_{i,j_i-1},\ a_{i,j_i}]\quad\text{或}\quad=\prod_{i=1}^{n}[a_{i,j_i-1},\ a_{i,j_i})\qquad\text{etc.}$$

同时由数值和的乘积公式(1.2) 得到

$$|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m_i}(a_{i,j}-a_{i,j-1})\Big)=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}\prod_{i=1}^{n}(a_{i,j_i}-a_{i,j_i-1})$$

即

$$|I|=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}|I_{j_1,j_2,...,j_n}|\,. \tag{1.5}$$

由于$I_{j_1,j_2,...,j_n}$的每条棱的长度$< \delta/\sqrt{n}$, 故有

$$\mathrm{diam}(I_{j_1,j_2,...,j_n}) < \sqrt{n}\cdot\frac{\delta}{\sqrt{n}} = \delta.$$

这表明I 可以被分解成有限多个直径$< \delta$的区间的并.

此外易见当I 左闭右开时, 相应的子区间$I_{j_1,j_2,...,j_n}$(左闭右开) 是互不相交的. 对于一般情形, 诸子区间$I_{j_1,j_2,...,j_n}$ 的内部总是互不相交的, **也即$I_{j_1,j_2,...,j_n}$是互不重叠的.**

- **区间的平移、伸缩、反射还是区间.**

设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为任一集合. 对任意$h\in\mathbb{R}^n, \lambda>0$, 我们定义

$$\begin{aligned}
&E+h = h+E = \{x+h\,|\,x\in E\} \qquad (\,E\text{的平移}\,),\\
&\lambda E = \{\lambda x\,|\,x\in E\} \qquad (E\text{ 的伸缩}\,),\\
&-E = (-1)E = \{-x\,|\,x\in E\} \qquad (E\text{ 的反射}\,).
\end{aligned}$$

一般地定义

$$\lambda E+h = \{\lambda x+h\,|\,x\in E\},\quad h\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{1.6}$$

现在设$E=I$是一个n维有界区间. 例如设$I=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i)$ 是左闭右开的. 则对任意$h=(h_1,h_2,...,h_n)\in\mathbb{R}^n$ 和任意$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 有

$$\lambda I+h = \prod_{i=1}^n[\lambda a_i+h_i,\ \lambda b_i+h_i) \qquad \text{if } \lambda>0,$$

$$\lambda I+h = \prod_{i=1}^n(\lambda b_i+h_i,\ \lambda a_i+h_i] \qquad \text{if } \lambda<0.$$

这表明n维有界区间的平移、伸缩、反射还是n维有界区间.

【$\mathbb{R}^n$中开集的结构】 为了定义和计算一个集合的测度(长度、面积、体积等等), 我们需要知道最基本的集合—— 开集—— 的结构。当$n=1$时, 由于$\mathbb{R}$ 是有序集, 我们已证明了$\mathbb{R}$中的开集可以被唯一地表示成可数个互不相交的开区间的并, 因此这开集的长度可以被定义为是这些开区间的长度之和。当$n\ge 2$ 时, 由于$\mathbb{R}^n$ 是无序集, 向量的方向无限多, 因此关于$\mathbb{R}^n$中的开集的表示就没有统一结果。但是我们将证明$\mathbb{R}^n$ 中的开集可以被表示成可数无限多个左闭右开的正方形或方体的并, 而且可以要求这些正方形或方体是2-进正方形或2-进方体。于是开集的面积(或体积)就等于这些正方形(或

方体)的面积(体积)之和。而对$\mathbb{R}^n$中其他类型的集合, 可以用开集逼近之, 其面积(或体积) 也就定义为这些开集的面积(或体积)的极限。由此可见弄清开集的结构是件很基本的事情。

- **2-进方体.** 形如

$$\prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big]\,,\quad \prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big)\,,\quad \prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big)\,,\quad k\,,p_i\in\mathbb{Z}$$

的n 维2-进区间分别称为2-进闭方体, 2-进开方体, 和左闭右开的2-进方体。统称它们为2-进方体。如用Q 表示任意2-进方体, 用$l(Q)$ 表示Q 的边长, 则易见

$$l(Q)=2^{-k}\,,\qquad |Q|=[l(Q)]^n\,,\qquad \mathrm{diam}(Q)=\sqrt{n}\,l(Q)\,.$$

当$k=0$, $p_i=0$ 时, Q 即为单位方体, 即$Q=[0,1]^n,(0,1)^n,[0,1)^n$, 等。

如上, 不难看出$\mathbb{R}^n$ 中只有可数无限多个2-进方体。事实上, 以左闭右开的2-进方体为例, 令$\mathscr{Q}^n$ 表示$\mathbb{R}^n$中的左闭右开的2-进方体的全体, 则对应关系

$$(k,p_1,p_2,...,p_n)\mapsto Q=\prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big)$$

给出 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 到$\mathscr{Q}^n$ 到的1 -1 对应。因为$\mathbb{Z}^{n+1}$ 是可数集, 所以$\mathscr{Q}^n$ 是可数集。

【命题9.3(2-进方体的特性).】设Q_1,Q_2 为$\mathbb{R}^n$ 中任意两个左闭右开的2-进方体。则只有下列三种情形之一出现:

$$\text{或者}\quad Q_1\cap Q_2=\emptyset\quad\text{或者}\quad Q_1\subset Q_2\quad\text{或者}\quad Q_2\subset Q_1.$$

进一步, 假设$Q_1\cap Q_2\neq\emptyset$, 则有以下关系:

$$l(Q_1)\le l(Q_2)\iff Q_1\subset Q_2\iff \overline{Q}_1\subset\overline{Q}_2, \tag{1.7}$$

$$l(Q_1)=l(Q_2)\iff Q_1=Q_2\iff \overline{Q}_1=\overline{Q}_2\,. \tag{1.8}$$

特别可知, 若$l(Q_1)=l(Q_2)$, 则有: $Q_1\neq Q_2\iff Q_1\cap Q_2=\emptyset$.

【证】写

$$Q_1=\prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big)\,,\quad Q_2=\prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{q_i}{2^m},\,\frac{q_i+1}{2^m}\Big)\,.$$

假设$Q_1\cap Q_2\neq\emptyset$ 且$l(Q_1)\le l(Q_2)$. 取一点$c=(c_1,c_2,...,c_n)\in Q_1\cap Q_2$, 则有

$$\frac{p_i}{2^k}\le c_i<\frac{p_i+1}{2^k}\,,\quad \frac{q_i}{2^m}\le c_i<\frac{q_i+1}{2^m}\,,\quad i=1,2,...,n.$$

借助公共数c_i 传递不等式, 得到

$$\frac{p_i}{2^k}<\frac{q_i+1}{2^m}\,,\quad \frac{q_i}{2^m}<\frac{p_i+1}{2^k}\,,\quad i=1,2,...,n$$

即

$$p_i<2^{k-m}(q_i+1)\,,\qquad 2^{k-m}q_i<p_i+1\,,\quad i=1,2,...,n\,.$$

因$l(Q_1)\le l(Q_2)$ 即$2^{-k}\le 2^{-m}$ 也即$k\ge m$, 故2^{k-m}, p_i, q_i 皆为整数. 因此

$$p_i+1\le 2^{k-m}(q_i+1)\,,\qquad 2^{k-m}q_i\le p_i\,,\quad i=1,2,...,n$$

即

$$\frac{q_i}{2^m}\le\frac{p_i}{2^k}<\frac{p_i+1}{2^k}\le\frac{q_i+1}{2^m}\,,\qquad j=1,2,...,n\,. \tag{1.9}$$

因此$Q_1\subset Q_2$ 从而$\overline{Q}_1\subset\overline{Q}_2$.

反之假设$\overline{Q}_1\subset\overline{Q}_2$ 即

$$\prod_{i=1}^n\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big]\subset\prod_{i=1}^n\Big[\frac{q_i}{2^m},\,\frac{q_i+1}{2^m}\Big]$$

则由乘积集合的包含关系有

$$\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big]\subset\Big[\frac{q_i}{2^m},\,\frac{q_i+1}{2^m}\Big],\quad i=1,2,...,n$$

这蕴含(1.9) 成立. 于是有$Q_1\subset Q_2$. 这就证明了(1.7). 由(1.7) 即得(1.8). $\square$

根据实数的阿基米德原理知对任意$k\in\mathbb{Z}$, 实数轴$\mathbb{R}$ 可以被分解成互不相交的左闭右开的2-进区间$[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k})$ 的并:

$$\mathbb{R}=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\Big[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k}\Big)=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\Big[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k}\Big].$$

因$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ 是$\mathbb{R}$的n次笛卡尔积, 故得到$\mathbb{R}^n$的2进方体分解:

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{(p_1,p_2,...,p_n)\in\mathbb{Z}^n}\prod_{i=1}^n\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big)=\bigcup_{(p_1,p_2,...,p_n)\in\mathbb{Z}^n}\prod_{i=1}^n\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big]. \tag{1.10}$$

由此易见, 对于$\mathbb{R}^n$ 中的任意点x的任意邻域$U(x)$, 只要$k\in\mathbb{N}$ 充分大, 就存在一个2 进闭方体$\prod_{i=1}^n[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}]\subset U(x)$ 使得$x\in\prod_{i=1}^n[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k})$. 根据这一性质容易相信, $\mathbb{R}^n$ 中任一非空开集Ω可以被分解成可数个互不相交的左闭右开的2-进方体的并, 而且可以要求这些方体的闭包也含于Ω 中. 详细来说我们有下列定理:

【定理9.4(开集的方体分解)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为任一非空开集, M 为一整数. 则存在一列**互不相交的** 左闭右开的2-进方体$\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ 满足边长$l(Q_k)\le 2^{-M}$, 使得

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^\infty Q_k=\bigcup_{k=1}^\infty \overline{Q}_k\,. \tag{1.11}$$

(对$n=2$的情形给出图示和解释.)

【证】令$\mathcal{Q}^{(k)}$ 表示棱长等于2^{-k} 的所有左闭右开2-进方体的集合, 即

$$\mathcal{Q}^{(k)}=\Big\{\prod_{i=1}^n\Big[\frac{p_i}{2^k},\,\frac{p_i+1}{2^k}\Big)\;\Big|\;p_i\in\mathbb{Z}\,,i=1,2,...,n\Big\}.$$

我们把所有其闭包含于Ω 内的满足棱长$\le 2^{-M}$ 的最大的左闭右开的2-进方体做成一个集合$\mathcal{C}$, 即

$$\mathcal{C}=\Big\{Q^*\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}\;\Big|\;\overline{Q^*}\subset\Omega\ \text{且满足: 若}\ Q\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}\ \text{且}\ Q^*\subset\overline{Q}\subset\Omega\,,\ \text{则}\ Q^*=Q\Big\}.$$

来证明

$$\mathcal{C}\ \text{中不同的元素不相交, 即若}\ Q_1^*,Q_2^*\in\mathcal{C}\ \text{且}\ Q_1^*\ne Q_2^*,\ \text{则}\ Q_1^*\cap Q_2^*=\emptyset. \tag{1.12}$$

$$\Omega=\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*=\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}\overline{Q^*}. \tag{1.13}$$

(1.12) 的证明: 设$Q_1^*,Q_2^*\in\mathcal{C}$ 且$Q_1^*\ne Q_2^*$. 假如$Q_1^*\cap Q_2^*\ne\emptyset$, 则由**命题9.3(2-进方体的特性)** 知二者有包含关系: 例如$Q_1^*\subset Q_2^*$, 从而有$Q_1^*\subset\overline{Q_2^*}\subset\Omega$. 而由$\mathcal{C}$的定义知这蕴含$Q_1^*=Q_2^*$, 矛盾于$Q_1^*\ne Q_2^*$. 因此必有$Q_1^*\cap Q_2^*=\emptyset$. 这证明了(1.12) 成立.

(1.13) 的证明: 显然有$\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*\subset\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}\overline{Q^*}\subset\Omega$. 为证(1.13), 只需证明$\Omega\subset\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 任取一点$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega$. 因$\Omega$ 是开集, 故存在$\delta>0$ 使得$B(x,\delta)\subset\Omega$. 选取$k_0\in\mathbb{Z}$ 充分大, 使得$k_0\ge M$且$\sqrt{n}\,2^{-k_0}<\delta$. 令$p_i=[2^{k_0}x^i]\,(=2^{k_0}x_i$ 的整数部分). 则有

$$p_i\le 2^{k_0}x_i<p_i+1\qquad\text{即}\qquad\frac{p_i}{2^{k_0}}\le x_i<\frac{p_i+1}{2^{k_0}}\,,\quad i=1,2,...,n\,.$$

因此

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in Q_0:=\prod_{i=1}^n\Big[\frac{p_i}{2^{k_0}},\,\frac{p_i+1}{2^{k_0}}\Big)\,,\quad Q_0\in\mathcal{Q}^{(k_0)}\,.$$

因$\forall\, y\in \overline{Q}_0 \implies |y-x|\le \mathrm{diam}(\overline{Q}_0)=\sqrt{n}\,2^{-k_0}<\delta \implies y\in B(x,\delta)$, 故$\overline{Q}_0\subset B(x,\delta)\subset \Omega$. 现在我们考虑整数子集

$$\mathbb{Z}_0=\{k\in\mathbb{Z}\mid k\ge M \text{ 且存在 } Q\in\mathcal{Q}^{(k)} \text{ 使得 } Q_0\subset\overline{Q}\subset\Omega\}\,.$$

由$k_0\ge M$ 和$\overline{Q}_0\subset\Omega$ 可知$k_0\in\mathbb{Z}_0$, 因此$\mathbb{Z}_0\neq\emptyset$. 又因$\mathbb{Z}_0$ 有下界M, 故$\mathbb{Z}_0$的最小数$m=\min\mathbb{Z}_0$ 存在且$m\ge M$. 于是存在$Q^*\in\mathcal{Q}^{(m)}$ 使得$Q_0\subset\overline{Q^*}\subset\Omega$. 由于$Q_0,Q^*$ 都是左闭右开的2-进方体, 故$Q_0\subset Q^*$. 我们断言 $Q^*\in\mathcal{C}$. 事实上首先我们有$Q^*\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 且$\overline{Q^*}\subset\Omega$. 其次任取 $Q\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 满足 $Q^*\subset\overline{Q}\subset\Omega$. 我们来证明$Q^*=Q$. 由$Q\in\bigcup\limits_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 知存在$k\ge M$ 使得 $Q\in\mathcal{Q}^{(k)}$. 根据$\mathbb{Z}_0$ 的定义易见$k\in\mathbb{Z}_0$. 因此$m\le k$. 另一方面, 由**命题9.3(2-进方体的特性)** 知$Q^*\subset\overline{Q}$ 蕴涵$Q^*\subset Q$ 从而有$l(Q^*)\le l(Q)$, 即$2^{-m}\le 2^{-k}$. 所以$m\ge k$ 从而$m=k$. 因此$l(Q^*)=l(Q)$. 再由**命题9.3(2-进方体的特性)** 即得$Q^*=Q$. 据$\mathcal{C}$的定义, 这就证明了$Q^*\in\mathcal{C}$. 于是由$x\in Q_0\subset Q^*$ 和$Q^*\in\mathcal{C}$ 即知 $x\in\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 所以$\Omega\subset\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 所以(1.13)成立.

最后证明$\mathcal{C}$ 是可数无限集. 因$\mathbb{R}^m$ 中只有可数无限多个2-进方体, 故$\mathcal{C}$ 是可数集. 假设$\mathcal{C}$ 是有限集:

$$\mathcal{C}=\Big\{\prod_{i=1}^{n}[a_{i,k}\,,\,b_{i,k})\;\Big|\;k=1,2,...,N\Big\},\quad N\in\mathbb{N}\,.$$

考虑$\mathcal{C}$ 中诸方体各条棱的最小左端点(它的存在性由“有限”保证):

$$a_{k_0}^{i_0}=\min\{a_{i,k}\mid 1\le i\le n,\,1\le k\le N\}.$$

对于这个k_0 我们有

$$x_0:=(a_{1,k_0},a_{2,k_0},...,a_{n,k_0})\in\prod_{i=1}^{n}[a_{i,k_0}\,,\,b_{i,k_0})\subset\Omega$$

因此存在$\delta>0$ 使得$B(x_0,\delta)\subset\Omega$. 如取$\varepsilon$ 满足$0<\varepsilon<\delta/\sqrt{n}$, 则有

$$(a_{1,k_0}-\varepsilon,a_{2,k_0}-\varepsilon,...,a_{n,k_0}-\varepsilon)\in B(x_0,\delta)\subset\Omega=\bigcup_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}[a_k^i\,,\,b_k^i).$$

于是对某个$k_1\in\{1,2,...,N\}$ 有$(a_{1,k_0}-\varepsilon,a_{2,k_0}-\varepsilon,...,a_{n,k_0}-\varepsilon)\in\prod_{i=1}^{n}[a_{i,k_1}\,,\,b_{i,k_1})$ 从而有$a_{i_0,k_0}-\varepsilon\in[a_{i_0,k_1}\,,\,b_{i_0,k_1})$ 这导致$a_{i_0,k_1}\le a_{i_0,k_0}-\varepsilon<a_{i_0,k_0}$, 它与$a_{i_0,k_0}$ 的最小性矛盾. 因此$\mathcal{C}$ 必是可数无限集. 将$\mathcal{C}$ 表为$\mathcal{C}=\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 并代入(1.13) 即得(1.11) 并由(1.12) 知Q_k 互不相交. 命题证毕. $\square$

最后说明: 本讲义将用$\mathrm{dist}(x,y)=|x-y|$ 表示欧空间$(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$上的距离函数, 因此对任意$x\in\mathbb{R}^n$和$A,B\subset\mathbb{R}^n$有

$$\mathrm{dist}(x,A)=\inf_{y\in A}|x-y|,\quad \mathrm{dist}(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}|x-y|.$$

其中对于空集$\emptyset$的情形, 定义$\mathrm{dist}(x,\emptyset)=+\infty, \mathrm{dist}(A,\emptyset)=\mathrm{dist}(\emptyset,B)=+\infty$.

作业题

1. 设$I,J\subset\mathbb{R}^n$为有界区间. 证明$I\cap J$ 仍是区间(即非退化的区间)$\Longleftrightarrow I^\circ\cap J^\circ\neq\emptyset$.

2. 设$N\in\mathbb{N}$, $Q_k\subset\mathbb{R}^n\ (k=1,2,...,N)$ 是棱长$l(Q_k)<1$的互不相交的左闭右开的2-进方体, 满足

$$[0,1)^n\subset\bigcup_{k=1}^N Q_k,\qquad [0,1)^n\cap Q_k\neq\emptyset,\quad k=1,2,...,N.$$

证明

$$[0,1)^n=\bigcup_{k=1}^N Q_k,\qquad 1=\sum_{k=1}^N|Q_k|.$$

[设这些2-进方体Q_k的最小棱长为2^{-m}, 对$[0,1)$做2^m等分, 利用公式(1.4), 2-进方体的性质和公式(1.5), 等等.]

3. 设$n\geq 2$. 本题研究如何将一个n维方体分解成$n!$个互不重叠的全等相似的n维“三角形”:

(1) 设S_n是所有一一对应$\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$的全体. S_n 也叫做n阶置换群或n元置换群(意指S_n按映射的复合乘法运算是封闭的, 等等). 证明$\mathrm{Card}(\mathrm{S}_n)=n!$.

(2) 对任意$i,j\in\{1,2,...,n\}, i\neq j$, 令

$$Z_{i,j}=Z_{j,i}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,x_i=x_j\},\quad Z=\bigcup_{1\leq i<j\leq n}Z_{i,j}.$$

对于$a>0$, 令$A_\sigma=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid 0\leq x_{\sigma(1)}<x_{\sigma(2)}<\cdots<x_{\sigma(n)}\leq a\}$.

证明

$$[0,a]^n\setminus Z=\bigcup_{\sigma\in\mathrm{S}_n}A_\sigma\quad 且\quad A_\sigma\quad 互不相交.$$

(3) 令$E_\sigma=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid 0\leq x_{\sigma(1)}\leq x_{\sigma(2)}\leq\cdots\leq x_{\sigma(n)}\leq a\}$. 证明

$$[0,a]^n=\bigcup_{\sigma\in\mathrm{S}_n}E_\sigma.$$

此外证明$E_\sigma = A_\sigma \cup Z_\sigma$ 其中Z_σ 是Z的子集, 并且如令

$$K = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le a\}$$

则每个E_σ 都与K 全等相似, 即存在正交矩阵(正交变换) $\mathrm{T}_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得$E_\sigma = \mathrm{T}_\sigma^{-1}(K)$.

§9.2. 可测集和测度

古典概念中长度、面积、体积等的共同特征是可加性：

(1) 总量等于部分量之和,

(2) 部分量之和定义了总量。

一些物理量如力所做的功等也具有可加性。这些物理量除去量纲后, 数学表达上都等价于几何描述——空间中点集的“测度”和函数的“积分”. 注意上面(1),(2) 中包含两个概念:**整体与部分**和**整体量与部分量**。整体即是全集,部分即是全集的子集；整体量是按某种测度计算的全集的量, 部分量是按同一种测度计算的子集的量。同一个整体可以用任意方式分解为若干部分,但测度却未必能照顾到每个部分：也即同一种测度未必对任意子集都适用。为避免这种麻烦, 需要对部分(即子集)的属性加以限制, 但这个限制不应过强以致不便应用。考虑到这些, 数学上给出如下定义。

【定义(可测集, σ-代数)】设$\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$. 如果$\mathcal{A}$ 具有下列性质

(i) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

(ii) 补集封闭：若$E \in \mathcal{A}$, 则补集$E^c := \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{A}$

(iii) 可数并封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ...,$, 则$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

则称$\mathcal{A}$ 为$\mathbb{R}^n$上的一个σ-代数, 并称$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ 为一个可测空间. $\mathcal{A}$ 中的元素称为可测集.
□

从这个定义我们容易得到以下

【推论】

(1) 空集$\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c \in \mathcal{A}$.

(2) 有限并封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ..., n$, 则$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$.

事实上在(iii)中取$E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset$, 则$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

(3) 可数交封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ...,$ 则$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c)^c \in \mathcal{A}$.

(4)有限交封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ..., n$, 则$\bigcap_{k=1}^{n} E_k = (\bigcup_{k=1}^{n} E_k^c)^c \in \mathcal{A}$;

(5) 差集封闭：若$E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, 则$E_1 \setminus E_2 = E_1 \bigcap E_2^c \in \mathcal{A}$. □

这些性质说明σ-代数$\mathcal{A}$ 就是这样一个集合类: $\mathcal{A}$ 中有限多个或可数多个元素经过有限次或可数次集合运算— 交、并、差、补— 所得结果仍在$\mathcal{A}$ 中.

【注1】如果在可测集定义中把“可数并封闭”换为“有限并封闭”则相应的$\mathcal{A}$ 称为$\mathbb{R}^n$上的一个代数。本讲义中, 除非特别说明, $\mathcal{A}$ 总表示$\mathbb{R}^n$上的一个σ-代数。

【注2】“σ-代数”的前缀σ是求和符号Σ 的小写(早年间, Σ 也表示求并), 在这里用于提示可数并：$\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty}$. “可数并封闭”意味着容纳了更多的可测集; 而相应的可数可加性也为很多收敛问题的研究奠定了宽阔稳定的基础。

【注3】**σ-代数的存在性:** 显然$2^{\mathbb{R}^n}$是$\mathbb{R}^n$上的一个σ-代数并且是$\mathbb{R}^n$上的最大的σ-代数, 即$\mathbb{R}^n$上的任何σ-代数都是$2^{\mathbb{R}^n}$的子集。而两个元素的集合$\{\mathbb{R}^n, \emptyset\}$ 也是$\mathbb{R}^n$ 的一个σ-代数, 它是$\mathbb{R}^n$上的最小的σ-代数, 即$\mathbb{R}^n$上的任何σ-代数都包含$\{\mathbb{R}^n, \emptyset\}$. 但这两个极端的$\sigma$-代数用处不大。通常我们需要这样的$\sigma$-代数: 它是包含了我们感兴趣的$\mathbb{R}^n$的某类子集族的最小的$\sigma$-代数, 详见下面**命题9.6($\mathbb{R}^n$上的Borel σ-代数的等价定义)**。

【记号】如前, 我们用$\bigcup_{k\ge1}, \sum_{k\ge1}$ 表示可数并和可数和, 即

$$\bigcup_{k\ge1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{ 或 } \bigcup_{k=1}^{n}, \qquad \sum_{k\ge1} = \sum_{k=1}^{\infty} \text{ 或 } \sum_{k=1}^{n}, \qquad \text{等等.}$$

【由给定的集合族生成的σ-代数】

从测度和积分角度看, 可测空间过大就可能产生较多的奇异现象。下面的命题告诉我们如何使可测空间不过大且好包含了我们感兴趣的集合类。这就是所谓“最小”或“生成”的概念:

【命题9.5】对$\mathbb{R}^n$任一子集族$\mathcal{G} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, 令$\sum(\mathcal{G})$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的所有包含$\mathcal{G}$ 的σ-代数的全体. 则交集

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})} \mathcal{A}$$

仍是$\mathbb{R}^n$ 上的一个σ-代数且$\mathcal{B} \supset \mathcal{G}$, 即$\mathcal{B} \in \sum(\mathcal{G})$. 换言之, $\mathcal{B}$ 是$\mathbb{R}^n$ 上包含$\mathcal{G}$的最小σ-代数. 我们也称$\mathcal{B}$是$\mathbb{R}^n$上的由$\mathcal{G}$ 生成的σ-代数.

【证】因对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$都有$\mathcal{A} \supset \mathcal{G}$, 故也有$\mathcal{B} \supset \mathcal{G}$. 下面验证$\mathcal{B}$ 满足σ-代数的三个规定性质.

(i) 对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$, 因$\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}^n$上的σ-代数, 故$\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$. 因此$\mathbb{R}^n \in \bigcap_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})} \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(ii) 设$E \in \mathcal{B}$. 则对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$有$E \in \mathcal{A}$. 因$\mathcal{A}$ 是σ-代数, 故$E^c \in \mathcal{A}$. 因此$E^c \in \bigcap_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})} \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(iii) 设$E_k \in \mathcal{B}, k = 1,2,3,...,$. 则对任意$\mathcal{A} \in \sum(\mathcal{G})$ 有$E_k \in \mathcal{A}, k = 1,2,3,...,$. 因$\mathcal{A}$是$\sigma$-代数, 故$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$. 因此$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \bigcap\limits_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})} \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

这证明了$\mathcal{B}$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的σ-代数. □

$\mathbb{R}^n$上最常用的σ-代数是所谓Borel σ-代数, 它是由$\mathbb{R}^n$的开集族生成的σ-代数.

【定义(Borel σ-代数和Borel集)】设$\mathcal{G} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ 为$\mathbb{R}^n$ 的开集的全体, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是$\mathbb{R}^n$上由$\mathcal{G}$ 生成的σ- 代数. 则称$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是$\mathbb{R}^n$上的 Borel σ- 代数, 并称$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为Borel集. □

由σ-代数的定义和Borel集的定义立刻得知:

$\mathbb{R}^n$中的所有开集,闭集都是Borel 集, 并且由开集, 闭集经过可数次集合运算(交、并、差、补) 所得到的集合也都是Borel集.

关于$\mathbb{R}^n$上的Borel σ- 代数我们有下列等价性:

【命题9.6($\mathbb{R}^n$上的Borel σ-代数的等价定义)】设$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是$\mathbb{R}^n$上的Borel σ- 代数, 设

$\mathcal{I}$ 为$\mathbb{R}^n$ 中n维有界区间的全体,

$\mathcal{I}_0$ 为$\mathbb{R}^n$ 中n维有界开区间的全体,

$\mathcal{I}_1$ 为$\mathbb{R}^n$ 中n维有界闭区间的全体,

设$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$分别是由$\mathcal{I}, \mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1$ 生成的σ- 代数. 则有$\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

即Borel σ- 代数$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$可以分别由有界区间族, 有界开区间族和有界闭区间族生成.

【证】因为开集是Borel 集, 故$\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 因$\mathcal{A}_0$是由$\mathcal{I}_0$生成的$\sigma$- 代数(即$\mathcal{A}_0$是包含$\mathcal{I}_0$ 的最小的σ- 代数), 故有$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 同理由$\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}, \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ 和"生成"的定义知$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$.

任取$I \in \mathcal{I}$, 即$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 其中每个$I_i \subset \mathbb{R}$为有界区间. 对于$-\infty < a < b < +\infty$ 易见

$$[a,b) = \bigcap_{k=1}^{\infty}(a-1/k, b), \quad (a,b] = \bigcap_{k=1}^{\infty}(a, b+1/k), \quad [a,b] = \bigcap_{k=1}^{\infty}(a-1/k, b+1/k).$$

因此每个I_i可表示成可数个有界开区间$I_{i,k}$的交: $I_i=\bigcap_{k=1}^{\infty}I_{i,k}$. [这里, 当$I_i$本身是开区间时, 取$I_{i,k}\equiv I_i, k=1,2,3,\dots$.] 于是易见有

$$I=\bigcap_{k=1}^{\infty}I_{1,k}\times I_{2,k}\times\cdots\times I_{n,k}=:\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k.$$

因为每个$I_k=I_{1,k}\times I_{2,k}\times\cdots\times I_{n,k}$ 都是n维有界开区间, 故$I\in\mathcal{A}_0$. 这证明了$\mathcal{I}\subset\mathcal{A}_0$. 因此由“生成”的定义有$\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_0$. 再结合$\mathcal{A}_0\subset\mathcal{A}$ 便有$\mathcal{A}=\mathcal{A}_0$.

设$\mathcal{G}$为$\mathbb{R}^n$的开集的全体. 由**定理9.4(开集的方体分解)** 知$\mathbb{R}^n$ 中的每个非空开集可以表示成可数个n维有界闭区间的并, 因此每个开集都属于$\mathcal{A}_1$. 这表明$\mathcal{G}\subset\mathcal{A}_1$. 因$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$是包含$\mathcal{G}$的最小的$\sigma$-代数, 故有$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{A}_1$.

至此我们得到包含关系:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}=\mathcal{A}_0\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

所以$\mathcal{A}_1=\mathcal{A}=\mathcal{A}_0=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. □

为了熟悉Borel σ-代数和有关的论证方法, 我们介绍两个命题, 它们在后面有用. 首先引进记号，它在测度与积分中常用也很直观: 对于集合E,Y, 映射$\varphi:E\to Y$, 和子集$B\subset Y$, 我们用$E(\varphi\in B)$ 表示φ在B下的逆象(原象), 即

$$E(\varphi\in B):=\{x\in E\mid\varphi(x)\in B\}=\varphi^{-1}(B).$$

【命题9.8】设$m,n\in\mathbb{N}$.

(a) 设$E\subset\mathbb{R}^n$ 是一个Borel 集, $\varphi:E\to\mathbb{R}^m$ 连续. 则对任意Borel 集$B\subset\mathbb{R}^m$, 逆像$E(\varphi\in B)=\{x\in E\,|\,\varphi(x)\in B\}=\varphi^{-1}(B)$ 是E 中的Borel 集.

(b) E是$\mathbb{R}^n$的开集或闭集, 或一般地, 设E可以表示成可数个紧集的并. 设$\varphi:E\to\mathbb{R}^m$为连续单射. 则φ把E中的Borel 集映成$\mathbb{R}^m$中的Borel 集[1].

【证】记$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 为$\mathbb{R}^m$上的Borel σ-代数.

(a): 令

$$\mathcal{B}_0=\{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\,|\,\varphi^{-1}(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}.$$

则要证明的是$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)=\mathcal{B}_0$.

先证$\mathcal{B}_0$ 是一个σ-代数. 为此, 来验证$\mathcal{B}_0$具有σ-代数的三个规定性质:

[1]**根据集合论的一个结果知, 存在一个连续而非单射的映射, 它把某些Borel集映为非Borel 集.**

(i): $\mathbb{R}^m \in \mathcal{B}_0$. 这是因为$\mathbb{R}^m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 且$\varphi^{-1}(\mathbb{R}^m) = E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(ii): 设$B \in \mathcal{B}_0$. 则$B^c = \mathbb{R}^m \setminus B \in \mathcal{B}_0$.

这是因为$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 且$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 因此$\mathbb{R}^m \setminus B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 且
$\varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus B) = E \setminus \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 所以$\mathbb{R}^m \setminus B \in \mathcal{B}_0$.

(iii): 设$B_j \in \mathcal{B}_0, j = 1, 2, 3, ...$ 则$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}_0$.

这是因为$B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 且$\varphi^{-1}(B_j) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 因此$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 且

$$\varphi^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi^{-1}(B_j) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

所以$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}_0$.

以上证明了$\mathcal{B}_0$ 是一个σ-代数.

其次证明$\mathcal{B}_0$包含了$\mathbb{R}^m$的所有开集. 对任意开集$V \subset \mathbb{R}^m$, 由$\varphi : E \to \mathbb{R}^m$连续知存在开集$U \subset \mathbb{R}^n$使得$\varphi^{-1}(V) = E \cap U$. 因$E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 故$\varphi^{-1}(V) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 所以$V \in \mathcal{B}_0$. 所以$\mathcal{B}_0$包含了$\mathbb{R}^m$的所有开集.

因$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$是包含$\mathbb{R}^m$的所有开集的最小的$\sigma$-代数, 故$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{B}_0$. 而由$\mathcal{B}_0$的定义知$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. 所以$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}_0$.

(b): 先证明当E为开集或闭集时, E可以表示成可数个紧集的并.

设E 是$\mathbb{R}^n$的开集. 由开集的结构定理, 存在可数个闭方体$\overline{Q}_i \subset \mathbb{R}^n$ 使得$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{Q}_i$. 因闭方体是紧集, 所以$E$可以表示成可数个紧集的并.

设E 是$\mathbb{R}^n$的闭集. 令$K_i = E \cap [-i, i]^n$, 则K_i 是紧集(有界闭) 且$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, 它是可数个紧集的并.

下证φ 把E中的Borel 集映为$\mathbb{R}^m$中的Borel 集. 令

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \,|\, \varphi(E \cap A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\}.$$

来证明$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}$. 首先说明这个等式蕴含$\varphi$ 把E中的Borel 集映为$\mathbb{R}^m$中的Borel 集. 事实上若这一等式成立, 则对任意$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 满足$A \subset E$者, 由$A = E \cap A$ 和$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}$ 有$\varphi(A) = \varphi(E \cap A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

为证$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}$, 先证$\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个σ-代数, 即验证$\mathcal{A}$ 具有σ- 代数的三个规定性质:

(i) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$. 这是因为$\mathbb{R}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 且由假设和上面分析知存在可数个紧集$K_i, i = 1,2,3,...$ 使得$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. (见本页底下的**注**[2].) 因$\varphi : E \to \mathbb{R}^m$ 连续, 故$\varphi(K_i)$ 是紧集, 从而$\varphi(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(K_i)$ 是Borel 集. 因此$\varphi(\mathbb{R}^n \cap E) = \varphi(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. 所以$\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$.

(ii) 设$A \in \mathcal{A}$. 则$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$. 这是因为由$A \in \mathcal{A}$有$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 因此$A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; 同时由$\varphi$ 是单射知$\varphi(E \cap A^c) = \varphi(E \setminus (E \cap A)) = \varphi(E) \setminus \varphi(E \cap A)$. 因$\varphi(E), \varphi(E \cap A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 故$\varphi(E \cap A^c) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. 所以$A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) 设$A_k \in \mathcal{A}, k = 1,2,3,....$ 则由$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$是$\sigma$-代数知$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; 同时由$\varphi(E \cap A_k) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 知

$$\varphi\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap A_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi(E \cap A_k) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

所以$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

以上证明了$\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个σ-代数. 下证$\mathcal{A}$包含了$\mathbb{R}^n$中的所有开集. 设$U \subset \mathbb{R}^n$ 为任一开集. 当$U = \emptyset$ 时, 因$\mathcal{A}$ 是一个σ-代数, 故当然有$U = \emptyset \in \mathcal{A}$. 设$U \neq \emptyset$. 由开集的结构定理, 存在可数个闭方体$\overline{Q}_j$ 使得$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{Q}_j$. 这给出

$$E \cap U = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} K_i \cap \overline{Q}_j, \quad \varphi(E \cap U) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(K_i \cap \overline{Q}_j).$$

因$K_i \cap \overline{Q}_j$ 是E中的紧集而φ 连续, 故$\varphi(K_i \cap \overline{Q}_j)$ 也是紧集. 因此$\varphi(E \cap U)$ 是Borel 集. 所以$U \in \mathcal{A}$.

由于σ-代数$\mathcal{A}$包含了$\mathbb{R}^n$中所有开集, 故由$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$的最小性知$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$. 但由$\mathcal{A}$的定义知$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 所以$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

【对学生的忠告】在测度论中将大量运用集合运算, 包括函数的象集和逆象集的运算。学生务必做些相关练习题。至少要能对讲义证明中出现的集合关系给出证明。

【两个问题】(1): 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个Borel 集, $\varphi : E \to \mathbb{R}^m$ 连续。那么φ 是否一定把E中的Borel 集映成Borel 集? 意即若$A \subset E$ 是Borel 集, 象集$\varphi(A)$ 是否也是Borel集? 回答是否定的, 反例见汪林编著的《实分析中的反例》page 227.

[2] **若E等于有限多个紧集的并: $E = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$, 则令$K_i = \emptyset$ for all $i \geq p+1$. 因空集也是紧集, 故仍有$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.**

(2)：$\mathbb{R}^n$中是否存在不是Borel集的子集？也即是否存在$E \in 2^{\mathbb{R}^n}$ 使得$E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$? 答案是: 存在。事实上可以证明$\mathrm{Card}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$, 即Borel集的全体可以与实数的全体一一对应。但我们知道$\mathrm{Card}(\mathbb{R}^n) < \mathrm{Card}(2^{\mathbb{R}^n})$ (回忆：$2^{\mathbb{R}^n}$表示$\mathbb{R}^n$的子集的全体), 所以$\mathbb{R}^n$中必定存在不可数多个非Borel集。

尽管如此, Borel集合已足够多, 能满足实际问题的需要。实际上你不可能具体地构造出一个非Borel 集, 因为只要你的构造是具体的, 是经过可数多个步骤完成的, 就不可能逃出Borel集类。

现在我们引进测度。所谓测度, 就是定义在σ-代数上的一种**集合函数**(即这函数的自变量是集合), 它们具有**可数可加性**。这个可数可加性是长度、面积、体积等丈量手续具有的共性和特征。如同无界直线的长度是正无穷大一样, 某些集合的“测度”可以取为正无穷大。因此下面关于测度的定义中包含了测度等于$+\infty$ 的可能性。

【定义(测度与测度空间)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ 为一可测空间。我们称一个非负函数
$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 为σ-代数$\mathcal{A}$ 上的一个正测度(简称测度), 如果μ 满足下列 (i),(ii)：

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) 可数可加性：若$E_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, ...)$ 互不相交, 则

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)\,.$$

如果μ 是$\mathcal{A}$ 上的一个测度, 则称$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间. □

【注3】关于测度的称呼: 当三元组$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ 给定后, $\mathbb{R}^n$和其上的σ-代数$\mathcal{A}$也就给定了. 由于任何测度空间中的σ-代数都是一个模式, 但不同的空间$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}$ 等等对应的测度度μ 是不同的, 因此为突出主要因素, 有时用“μ **是$\mathbb{R}^n$ 上的测度**”代替“μ是$\mathbb{R}^n$上的σ-代数$\mathcal{A}$上的测度”。

【注4】测度的存在性. 我们后面将看到, 对于常用的测度(如欧几里德空间$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 测度和Hausdorff 测度)的建立, 需要做进一步的工作. 然而可以立即给出两个浅显的例子：

计数测度: 设$\mathcal{A}$ 为$\mathbb{R}^n$上的一个σ-代数. 对任意$E \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mu(E) = \begin{cases} E \text{ 的元素个数} & \text{当}E\text{是有限集和空集时}, \\ +\infty & \text{当}E\text{是无限集时}. \end{cases}$$

则不难验证μ 是$\mathcal{A}$ 上的一个测度. 这个测度称为$\mathbb{R}^n$ 上的计数测度.

Dirac 测度: 固定$x_0 \in \mathbb{R}^n$, 对任意$E \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{当}E \ni x_0\text{时}, \\ 0 & \text{当}E \not\ni x_0\text{时}. \end{cases}$$

则易证μ是$\mathbb{R}^n$ 上的一个测度. 这个测度称为集中在x_0的单位质量或称为集中在x_0的Dirac (狄拉克)测度.

下面的定理概括了所有测度的公共性质. 从几何(长度、面积等)上看, 这定理的意义是很明显的.

【定理9.9(测度的基本性质)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间. 则有

(a) 可加性对于有限多个可测集也成立, 即若$E_1, E_2, ..., E_N$ 是$\mathbb{R}^n$中互不相交的可测集, 则

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_N) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots + \mu(E_N).$$

(b) 单调性：

$$A \subset B \implies \mu(A) \le \mu(B)\,.$$

(c) 减法运算：若$\mu(A \cap B) < +\infty$ 则

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B), \qquad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)\,.$$

(d) 可数次可加性：设$E_k \in \mathcal{A}$(不要求互不相交), 则

$$\mu(\bigcup_{k\ge1} E_k) \le \sum_{k\ge1} \mu(E_k)\,.$$

(e) 可数多个零测集的并还是零测集, 即

若$\mu(E_k) = 0, k = 1, 2, 3, ...$ 则$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$.

(f) 单调极限/单调收敛：

$$\text{若}\quad E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\quad\text{则}\qquad \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k)\,,$$

$$\text{若}\quad E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots\quad\text{且 }\mu(E_1)<+\infty,\quad\text{则}\quad \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k)\,.$$

【证】**(a)**: 取$E_{N+1}=E_{N+2}=E_{N+3}=\cdots=\emptyset$, 则由$\mu(\emptyset)=0$ 即知有限可加性成立.

(b),(c): 设$A,\,B\in\mathcal{A}$. 由$A\cup B=A\cup(B\setminus A)$, $A\cap(B\setminus A)=\emptyset$ 和可加性得

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)\,.$$

假设$A\subset B$. 则$A\cup B=B$, 因此由非负性得$\mu(B)\ge\mu(A)$. 同理由$B=(B\cap A)\cup(B\setminus A)$ (不交并)得 $\mu(B)=\mu(B\cap A)+\mu(B\setminus A)$, 因此

$$\mu(B\cap A)<+\infty\implies\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(B\cap A),$$

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(B\cap A)\,.$$

【注: 条件$\mu(A\cap B)<+\infty$ 的作用是避免出现"$\infty-\infty$".】

(d): 设$E_k\in\mathcal{A}$, $k=1,2,3,\dots$. 注意E_k不一定互不相交. 令

$$\widetilde{E}_1=E_1\,,\quad \widetilde{E}_k=E_k\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}E_j\,,\quad k=2,3,\dots\,. \tag{2.1}$$

则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\,,\quad \widetilde{E}_k\cap\widetilde{E}_j=\emptyset\,,\quad k\ne j\,. \tag{2.2}$$

[这种"不交并"的分解在测度论中较常使用.] 于是由测度的可加性和单调性即得

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)\,.$$

(e): 这是**(d)** 的推论.

(f): 假设E_k单调增加：$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\dots$. 为证明极限等式, 可以假定对所有$k$ 都有$\mu(E_k)<+\infty$ (否则由单调性知极限等式两边都等于$+\infty$). 这时我们对可加性公式可以做减法运算:

$$\mu(E_k\setminus E_{k-1})=\mu(E_k)-\mu(E_{k-1})\,,\quad k=1,2,3,\,\dots;\quad E_0:=\emptyset\,.$$

另一方面由E_k 单调增加我们有“不交并”分解：

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus E_{k-1})\,.$$

根据可数可加性和正项级数的定义得到

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Big(\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})\Big) = \lim_{N\to\infty} \Big(\mu(E_N) - \mu(E_0)\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mu(E_N)\,. \qquad (\text{因}E_0 = \emptyset)\end{aligned}$$

最后设E_k 单调下降：$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset ...$, 并设$\mu(E_1) < +\infty$. 则有

$$E_1 \setminus E_2 \subset E_1 \setminus E_3 \subset E_1 \setminus E_4 \subset ...; \quad E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k)\,.$$

因此

$$\mu(E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_k)\,.$$

注意$\mu(E_k) \le \mu(E_1) < +\infty$, 这就给出

$$\mu(E_1) - \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \mu(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)\,.$$

消去$\mu(E_1)$即得极限等式. □

【例】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间, $E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, 3, ...$. 则有

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{N} E_k).$$

这是因为

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{N+1} E_k, \;\; N = 1, 2, 3, ...; \qquad \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{N} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

然后应用测度的单调极限性质即知等式成立. □

在测度的可加性等式中, E_k互不相交可以减弱为E_k **互不重叠** 即

$$\mu(E_k \cap E_j) = 0 \quad \text{if} \quad k \ne j\,.$$

【命题9.10】 设$E_k \in \mathcal{A}$ $(k \geq 1)$ 互不重叠, 则

$$\mu(\bigcup_{k\geq 1} E_k) = \sum_{k\geq 1} \mu(E_k)\,.$$

【证】可以假定有可数无限多个E_k （否则添加空集$E_k = \emptyset\,, k = N+1, N+2, ...$). 利用不交并分解式(2.1),(2.2) 和可数可加性有

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\widetilde{E}_k)\,.$$

来证明$\mu(\widetilde{E}_k) = \mu(E_k)$. 由单调性, 可次可加性和互不重叠有

$$\mu(\widetilde{E}_k) \leq \mu(E_k) \leq \mu(\widetilde{E}_k) + \sum_{j=1}^{k-1} \mu(E_k \cap E_j) = \mu(\widetilde{E}_k)$$

所以$\mu(\widetilde{E}_k) = \mu(E_k)\,,\ k = 2, 3, \dots$. □

【定义(Borel 测度)】 设$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是$\mathbb{R}^n$上的Borel σ-代数, μ 是$\mathcal{B}$上的一个测度, 则称μ 是$\mathbb{R}^n$上的一个Borel测度, 并称三元组$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$是一个Borel测度空间。 □

【定义(零测集与完备测度空间)】 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ 为一测度空间。

(1) 若可测集$E \in \mathcal{A}$ 具有零测度：$\mu(E) = 0$, 则称E是$\mathbb{R}^n$中的一个$\mathcal{A}$-零测集或μ-零测集, 简称零测集。

(2) 若$\mathbb{R}^n$ 中的每个μ-零测集的子集都是可测集(从而是μ-零测集), 则称μ 是$\mathcal{A}$ 上的一个完备测度, 同时称$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个完备的测度空间。 □

【测度空间的完备化】 数学分析学到此刻, 同学们对完备化应该有了点感觉: 它是把可能的缝隙填平。例如设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$是一个Borel测度空间, $E \in \mathcal{B}$是一个μ-零测集, 即满足$\mu(E) = 0$, 那么E的子集未必属于$\mathcal{B}$; 如果不属于$\mathcal{B}$, 则对分析问题和严格论证带来麻烦。于是需要把零测集的子集填入$\mathcal{B}$中使得扩张后的集类和其上测度满足任何零测集的子集还是可测集。具有这种性质的扩张可以通过下述方式获得(它对任意测度空间都适用):

设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$为任一测度空间. 先将$\mathcal{A}$扩张为$\overline{\mathcal{A}}$:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid \exists\, A, B \in \mathcal{A} \text{ s.t. } A \subset E \subset B \text{ and } \mu(B \setminus A) = 0\}\,.$$

易见确实有$\mathcal{A}\subset\overline{\mathcal{A}}$. 事实上若$E\in\mathcal{A}$, 则可取$A=B=E$. 由$\mu(B\setminus A)=\mu(\emptyset)=0$知$E\in\overline{\mathcal{A}}$. 所以$\mathcal{A}\subset\overline{\mathcal{A}}$.

其次将μ 按如下方式扩张到$\overline{\mathcal{A}}$ 上：对任意$E\in\overline{\mathcal{A}}$, 令

$$\bar{\mu}(E)=\mu(A)\quad \text{if}\quad \exists\, A,B\in\mathcal{A}\ \text{s.t.}\ A\subset E\subset B\ \text{and}\ \mu(B\setminus A)=0\,.$$

则$\bar{\mu}(E)$ 是被良好定义的(well-defined), 即$\bar{\mu}(E)$ 由E 唯一决定, 与A,B 的选择无关.
事实上若$A,B,A_1,B_1\in\mathcal{A}$满足$A\subset E\subset B$, $A_1\subset E\subset B_1$ 且$\mu(B\setminus A)=\mu(B_1\setminus A_1)=0$, 则

$$A\setminus A_1\subset B_1\setminus A_1\,,\quad A_1\setminus A\subset B\setminus A$$

所以$\mu(A\setminus A_1)=0=\mu(A_1\setminus A)$. 因此

$$\mu(A)=\mu(A\setminus A_1)+\mu(A\cap A_1)=\mu(A_1\setminus A)+\mu(A_1\cap A)=\mu(A_1)\,.$$

特别对任意$E\in\mathcal{A}$, 取$A=E=B\Longrightarrow\ \mu(B\setminus A)=\mu(\emptyset)=0\Longrightarrow\bar{\mu}(E)=\mu(E)$. 因此$\bar{\mu}$确是$\mu$ 的扩张.

【命题9.11】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\mu)$ 为任一测度空间, $\overline{\mathcal{A}},\bar{\mu}$ 是上面定义的$\mathcal{A},\mu$的扩张. 则$(\mathbb{R}^n,\overline{\mathcal{A}},\bar{\mu})$是一个完备的测度空间, 称之为$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\mu)$的完备化.

[这个命题说明: 任何测度空间都可以完备化.]

【证】首先验证 $(\mathbb{R}^n,\overline{\mathcal{A}},\bar{\mu})$ 是一个测度空间.

(i): 因$\mathbb{R}^n\in\mathcal{A}$, 故$\mathbb{R}^n\in\overline{\mathcal{A}}$. 又$\emptyset\in\mathcal{A}\subset\overline{\mathcal{A}}$, 故$\bar{\mu}(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$.

(ii): 设$E\in\overline{\mathcal{A}}$. 则存在$A,B\in\mathcal{A}$ 使得$A\subset E\subset B$ 且$\mu(B\setminus A)=0$. 因$B^c,A^c\in\mathcal{A}$, $B^c\subset E^c\subset A^c$, $A^c\setminus B^c=B\setminus A$ 从而$\mu(A^c\setminus B^c)=0$, 故 $E^c\in\overline{\mathcal{A}}$.

(iii): 设$E_k\in\overline{\mathcal{A}}\,(k=1,2,...)$. 设$A_k,B_k\in\mathcal{A}$ 满足 $A_k\subset E_k\subset B_k$, $\mu(B_k\setminus A_k)=0$. 令$A=\bigcup_{k=1}^\infty A_k$, $B=\bigcup_{k=1}^\infty B_k$. 则$A,B\in\mathcal{A}$, $A\subset\bigcup_{k=1}^\infty E_k\subset B$,

$$B\setminus A\subset\bigcup_{k=1}^\infty(B_k\setminus A_k)\,,\quad \mu(B\setminus A)\le\sum_{k=1}^\infty\mu(B_k\setminus A_k)=0\,.$$

因此$\bigcup_{k=1}^\infty E_k\in\overline{\mathcal{A}}$. 进一步假设$E_k$ 互不相交. 则A_k 更是互不相交, 因而有

$$\bar{\mu}(\bigcup_{k=1}^\infty E_k)=\mu(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)=\sum_{k=1}^\infty\mu(A_k)=\sum_{k=1}^\infty\bar{\mu}(E_k)\,.$$

所以$(\mathbb{R}^n,\overline{\mathcal{A}},\bar{\mu})$ 是一个测度空间.

其次证明$(\mathbb{R}^n,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$是完备的, 即$\bar{\mu}$ 是$\overline{\mathcal{A}}$上的完备测度.

设$E\in\overline{\mathcal{A}}$ 满足$\bar{\mu}(E)=0$, 而 Z 为 E 任意子集. 取$A,B\in\mathcal{A}$ 使得$A\subset E\subset B$, $\mu(B\backslash A)=0$. 则由$\mu(A)=\bar{\mu}(E)=0\Longrightarrow\mu(B)=\mu(B\setminus A)+\mu(A\cap B)=\mu(A\cap B)=0$. 于是由 $\emptyset\subset Z\subset E\subset B$ 和$\mu(B\setminus\emptyset)=\mu(B)=0$ 可知$Z\in\overline{\mathcal{A}}$. 这证明了$\bar{\mu}$-零测集的子集是可测集. 因此$\bar{\mu}$是完备测度.

综上,我们那证明了$(\mathbb{R}^n,\overline{\mathcal{A}},\bar{\mu})$ 是一个完备测度空间. □

根据这个命题,我们总可假定任何测度空间 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\mu)$ 都是完备的或已被完备化了.

【作业题】

1. 设集合$E\subset\mathbb{R}^n$, 函数$g:E\to\mathbb{R}$连续. 证明对于$\mathbb{R}^n$的任意闭集$F\subset E$, 象集$g(F)$ 是一个Borel 集.

2 (测度的等价定义). 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A})$ 为一可测空间. 设非负函数$\mu:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$. 证明

μ 是$\mathbb{R}^n$上的测度 $\Longleftrightarrow$ μ 具有可数可加性且存在$A\in\mathcal{A}$ 使得$\mu(A)<+\infty$.

[提示: 考虑$E_1=A, E_k=\emptyset, k=2,3,4,\dots$.]

以下可测集和测度均取自测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\mu)$.

3. 设$A,B\in\mathcal{A}$. 证明

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B).$$

4. 设$A,B\in\mathcal{A}$ 满足$A\subset B$, $\mu(A)=\mu(B)$. 问: 是否必有$\mu(B\setminus A)=0$? 说明理由.

5. 设 $A,B\in\mathcal{A}$. 下面等式

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$$

是否意义？何时有意义？

6. 设 $E_1,E_2,...,E_N$ 为可测集, $E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_N$. 则存在 $k\in\{1,2,...,N\}$ 使得

$$\mu(E_k)\ge\frac{1}{N}\mu(E)\,.$$

7. 设 $E,E_k\in\mathcal{A}$ 且 $E_k\subset E$, $k=1,2,...,N$; 满足$\mu(E)=1$, $\sum\limits_{k=1}^{N}\mu(E_k)>N-1$.

证明 $\mu(\bigcap\limits_{k=1}^{N} E_k) > 0$.

提示: 考虑 $E \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{N} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{N} (E \setminus E_k)$.

8. 设$E_k, E \in \mathcal{A}$ 满足$E_k \subset E$, $\mu(E_k) = \mu(E) < +\infty, k = 1, 2, 3, \ldots$. 证明

$$\mu(E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 0, \quad \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \mu(E).$$

9. (1) 设$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集且$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) < \infty$.

证明$\mu(E_1 \cap E_2) = 0$.

(2) 设$E_1, E_2, E_3, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集且

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty.$$

证明$E_1, E_2, E_3, \ldots$ 互不重叠, 即当$i \neq j$ 时$\mu(E_i \cap E_j) = 0$.

10. (参见陈书习题9.2.5) 设$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. 令

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ 属于无限多个 } E_k\}.$$

证明

$$E = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k.$$

进一步假设$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty$. 证明

$$\mu(E) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k) = 0.$$

[说明: "x 属于无限多个 E_k" 等价于 "存在与x有关的子列$\{E_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 使得$x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j}$". 注意: 根据子列的定义知$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$.]

§9.3. 测度的构造

为了获得常用的和感兴趣的测度, 希腊数学家Caratheodory 在法国数学家Lebesgue的工作的基础上发现可以先建立外测度, 然后通过对外测度加以一定约束就可得到一类σ-代数, 而外测度在这个σ-代数上的限制就是一个测度。这种分两步走的做法在数学研究中是比较常见的, 例如为了研究实数列的极限, 可以先建立数列的上下极限, 然后用上下极限来定义极限。对应于外测度, 还有内测度的概念。但根据测度问题的特性, Caratheodory证明了只需外测度即可。外测度比测度宽松得多, 它可以在任意集合族上定义。

【定义(外测度和度量外测度)】若一个非负的集合函数$\mu^*: 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ 满足下列 (i), (ii), (iii):

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) 单调性: 若$A \subset B$, 则$\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(iii) 次可加性:若$E_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k = 1, 2, 3, ...)$, 则

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)\,.$$

则称μ^* 为$\mathbb{R}^n$ 上的一个外测度。进一步, 若μ^* 还满足

(iv) 隔离可加性: 对任意$A, B \subset \mathbb{R}^n$ 成立蕴含关系:

$$\mathrm{dist}(A, B) > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

则称μ^* 为$\mathbb{R}^n$ 上的一个度量外测度。 □

【注】如前, 上述次可加性蕴含有限次可加性: 即对任意$E_1, E_2, ..., E_N \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$\mu^*(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_N) \le \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \cdots + \mu^*(E_N)\,.$$

事实上取$E_{N+1} = E_{N+2} = E_{N+3} = \cdots = \emptyset$, 则由$\mu^*(\emptyset) = 0$ 即知有限次可加性成立。

数学中常用的外测度是本章主要学习的Lebesgue 外测度m^* 和Hausdorff 外测度H_k^*, 它们都是度量外测度。让我们先学习如何一般地从度量外测度构造测度。下面这个引理提供了一个技术保障。

【引理9.12】设μ^* 为$\mathbb{R}^n$上的一个度量外测度。设一列集合$E_k \subset \mathbb{R}^n$ 和$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$满足

$$E_k \subset E_{k+1}, \quad \mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) > 0, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

则有

$$\mu^*(E)=\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k).$$

【证】首先由$E_k\nearrow$和外测度的单调性有

$$\mu^*(E_k)\le\mu^*(E_{k+1})\le\mu^*(E),\quad k=1,2,3,\dots.$$

因此极限$\lim\limits_{k\to\infty}\mu^*(E_k)$存在且$\le\mu^*(E)$.

若$\lim\limits_{k\to\infty}\mu^*(E_k)=+\infty$, 则这蕴含$\mu^*(E)=+\infty$ 从而有$\lim\limits_{k\to\infty}\mu^*(E_k)=+\infty=\mu^*(E)$.

下设$\lim\limits_{k\to\infty}\mu^*(E_k)<+\infty$. 由外测度的单调性知$\mu^*(E_k)\le\lim\limits_{j\to\infty}\mu^*(E_j)<+\infty,k=1,2,3,\dots$. 因此在下面推导中没有$+\infty$ 参与运算. 令

$$E_0=\emptyset,\quad A_k=E_k\setminus E_{k-1},\quad k=1,2,3,\dots.$$

则由$E_k\nearrow$ 易见有

$$E=E_k\cup\bigcup_{j=k+1}^{\infty}A_j$$

从而由外测度的次可加性有

$$\mu^*(E)\le\mu^*(E_k)+\sum_{j=k+1}^{\infty}\mu^*(A_j),\quad k=1,2,3,\dots.$$

下面我们将证明正项级数$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu^*(A_j)<+\infty$ (即级数收敛). 如果此事成立, 则由级数收敛蕴含其尾巴趋于零: $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\mu^*(A_j)=0$, 得到

$$\mu^*(E)\le\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k)+\lim_{k\to\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\mu^*(A_j)=\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k).$$

即反向不等式也成立. 于是等式$\mu^*(E)=\lim\limits_{k\to\infty}\mu^*(E_k)$成立.

下证$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$收敛. 因$A_k\subset E_k,A_{k+2}\subset E\setminus E_{k+1}$, 故由引理假设有$\operatorname{dist}(A_k,A_{k+2})\ge\operatorname{dist}(E_k,E\setminus E_{k+1})>0$. 于是由$\mu^*$的隔离可加性有

$$\mu^*(A_k\cup A_{k+2})=\mu^*(A_k)+\mu^*(A_{k+2}),\quad k=1,2,3,\dots.$$

这给出

$$\mu^*(A_{2k-1}\cup A_{2k+1})=\mu^*(A_{2k-1})+\mu^*(A_{2k+1}),\quad k=1,2,3,\dots,$$

$$\mu^*(A_{2k}\cup A_{2k+2})=\mu^*(A_{2k})+\mu^*(A_{2k+2}),\quad k=1,2,3,\dots.$$

假设对于$N\in\mathbb{N}$ 已有

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k-1}\Big)=\sum_{k=1}^{N}\mu^*(A_{2k-1}),\qquad \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k}\Big)=\sum_{k=1}^{N}\mu^*(A_{2k}). \tag{3.1}$$

则由

$$\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k-1}\subset E_{2N-1},\quad A_{2N+1}\subset E\setminus E_{2N},$$

$$\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k}\subset E_{2N},\quad A_{2N+2}\subset E\setminus E_{2N+1}$$

知

$$\mathrm{dist}\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k-1},\,A_{2N+1}\Big)\ge \mathrm{dist}(E_{2N-1},E\setminus E_{2N})>0,$$

$$\mathrm{dist}\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k},\,A_{2N+2}\Big)\ge \mathrm{dist}(E_{2N},E\setminus E_{2N+1})>0,$$

于是由μ^*的隔离可加性和归纳假设有

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N+1}A_{2k-1}\Big)=\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k-1}\Big)+\mu^*(A_{2N+1})=\sum_{k=1}^{N+1}\mu^*(A_{2k-1}),$$

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N+1}A_{2k}\Big)=\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k}\Big)+\mu^*(A_{2N+2})=\sum_{k=1}^{N+1}\mu^*(A_{2k}).$$

据归纳法原理, (3.1)对所有$N\in\mathbb{N}$成立.

由(3.1)和外测度的单调性有

$$\sum_{k=1}^{N}\mu^*(A_{2k-1})=\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k-1}\Big)\le\mu^*(E_{2m-1})\le\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k)$$

$$\sum_{k=1}^{N}\mu^*(A_{2k})=\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_{2k}\Big)\le\mu^*(E_{2m})\le\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\mu^*(A_k)\le 2\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k)<+\infty.$$

这证明了级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$收敛. $\Box$

为了从外测度构造测度, 德国数学家C. Caratheodory 引进

【**Caratheodory 条件**】设μ^* 是$\mathbb{R}^n$上的一个外测度. 若集合$E\subset\mathbb{R}^n$ 满足

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^c)\qquad \forall\, T\subset\mathbb{R}^n \tag{C}$$

则称E满足关于μ^*的Caratheodory条件. $\square$

(C)中的任意集合T起着测试(test)的作用, 所以用了字母T.

下面的Caratheodory 定理说明, 可以从度量外测度出发构造σ-代数、完备测度空间和Borel 测度空间:

【定理9.13：Caratheodory 定理】设μ^* 是$\mathbb{R}^n$上的一个度量外测度. 令

$$\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ 满足关于}\mu^*\text{的Caratheodory 条件 (C)}\}.$$

则有

(a) $\mathcal{M}$ 是$\mathbb{R}^n$上的一个σ-代数, 且$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$, 即$\mathcal{M}$包含了$\mathbb{R}^n$所有Borel 集.

(b) 若$\mu^*(E) = 0$, 则$E \in \mathcal{M}$.

(c) 令$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, 即$\mu(E) = \mu^*(E), E \in \mathcal{M}$. 则$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$是一个完备的测度空间, 其子空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$是一个Borel 测度空间.

【证】首先由$T = [T \cap E] \cup [T \cap E^c]$ 和外测度的次可加性有

$$\mu^*(T) \le \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^c) \qquad \forall\, T \subset \mathbb{R}^n.$$

由此可见E满足 Caratheodory 条件 (C) 当且仅当E满足反向不等式, 即

$$E \in \mathcal{M} \quad \Longleftrightarrow \quad E \text{ 满足 } \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^c) \le \mu^*(T) \qquad \forall\, T \subset \mathbb{R}^n.$$

(a): 我们来验证$\mathcal{M}$满足σ-代数的三个规定性质.

(i) 我们有

$$\mu^*(T \cap \mathbb{R}^n) + \mu^*(T \cap (\mathbb{R}^n)^c) = \mu^*(T) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(T) \qquad \forall\, T \subset \mathbb{R}^n.$$

所以$\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$.

(ii) 设$E \in \mathcal{M}$. 则由$(E^c)^c = E$ 和$E \in \mathcal{M}$ 有

$$\mu^*(T \cap E^c) + \mu^*(T \cap (E^c)^c) = \mu^*(T \cap E^c) + \mu^*(T \cap E) = \mu^*(T) \qquad \forall\, T \subset \mathbb{R}^n.$$

因此$E^c \in \mathcal{M}$.

(iii) 为证$\mathcal{M}$ 关于可数并封闭, 我们先证明$\mathcal{M}$关于有限并封闭.

设$A, B \in \mathcal{M}$. 考虑“不交并”分解(此处给出文图)：

$$\mathbb{R}^n = (A \cup B) \cup (A \cup B)^c,$$

$$A \cup B = [A \cap B] \cup [A \cap B^c] \cup [A^c \cap B].$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&T = [T \cap (A \cup B)] \cup [T \cap (A \cup B)^c]\,, \\
&T \cap (A \cup B) = [T \cap A \cap B] \cup [T \cap A \cap B^c] \cup [T \cap A^c \cap B]\,, \\
&T \cap (A \cup B)^c = T \cap A^c \cap B^c\,.
\end{aligned}$$

由次可加性和$A, B \in \mathcal{M}$ 有

$$\begin{aligned}
&\mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)^c) \\
&\le \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \cap A \cap B^c) \\
&+\mu^*(T \cap A^c \cap B) + \mu^*(T \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) = \mu^*(T) \qquad \forall T \subset \mathbb{R}^n\,.
\end{aligned}$$

这表明$A \cup B \in \mathcal{M}$.

由归纳法和$\bigcup_{k=1}^N E_k = (\bigcup_{k=1}^{N-1} E_k) \cup E_N$ 易证：若$E_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, ..., N$, 则$\bigcup_{k=1}^N E_k \in \mathcal{M}$.

此外由$(A \cup B)^c \in \mathcal{M}$这个一般结论我们相继得到$A \cap B = [A^c \cup B^c]^c \in \mathcal{M}$, $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}$. 这个性质将在下面用到.

推广到可数并：设$E_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, 3, ...,$. 先假设E_k 互不相交. 令$S_N = \bigcup_{k=1}^N E_k$. 来证明对任意$T \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$\mu^*(T \cap S_N) = \sum_{k=1}^N \mu^*(T \cap E_k)\,, \quad N = 1, 2, \dots\,. \tag{3.2}$$

当$N = 1$时(3.2) 成立. 假设(3.2)对于N 成立, 则对于$N + 1$, 由$E_{N+1} \in \mathcal{M}$ 和$S_{N+1} \cap (E_{N+1})^c = S_N$ 有

$$\begin{aligned}
&\mu^*(T \cap S_{N+1}) = \mu^*(T \cap S_{N+1} \cap E_{N+1}) + \mu^*(T \cap S_{N+1} \cap (E_{N+1})^c) \\
&= \mu^*(T \cap E_{N+1}) + \mu^*(T \cap S_N) = \sum_{k=1}^{N+1} \mu^*(T \cap E_k)\,.
\end{aligned}$$

据归纳法原理知(3.2)对任意$N\in\mathbb{N}$成立.

令$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 则由(3.2) 和$S_N\in\mathcal{M}$ 得到

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap S_N)+\mu^*(T\cap(S_N)^c)=\sum_{k=1}^{N}\mu^*(T\cap E_k)+\mu^*(T\cap(S_N)^c)$$
$$\ge\sum_{k=1}^{N}\mu^*(T\cap E_k)+\mu^*(T\cap S^c)\quad(\text{因为 }(S_N)^c\supset S^c\,).$$

令$N\to\infty$, 则每一项$\mu^*(T\cap E_k)$ 都被加进来了:

$$\mu^*(T)\ge\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(T\cap E_k)+\mu^*(T\cap S^c)$$
$$\ge\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}T\cap E_k)+\mu^*(T\cap S^c)=\mu^*(T\cap S)+\mu^*(T\cap S^c)$$
$$\ge\mu^*(T)\,.$$

以上用到了次可加性. 因此$\forall\,T\subset\mathbb{R}^n$ 有

$$\mu^*(T)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(T\cap E_k)+\mu^*(T\cap S^c)=\mu^*(T\cap S)+\mu^*(T\cap S^c)\,.$$

这证明了$S\in\mathcal{M}$ 即$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathcal{M}$. 同时取$T=S$, 我们还证明了$\mu^*$ 在$\mathcal{M}$上具有可数可加性(因$S\cap S^c=\emptyset$ 且$\mu^*(\emptyset)=0$), 即

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_k)\,.$$

其次转到一般情形：E_k不必互不相交. 如前面作法,令

$$\widetilde{E}_1=E_1\,,\quad\widetilde{E}_2=E_2\setminus E_1\,,\quad\widetilde{E}_k=E_k\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}E_j\,,\quad k=2,3,\dots\,.$$

则$\widetilde{E}_k\in\mathcal{M}\,(k=1,2,...)$ 且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\,,\quad\widetilde{E}_i\cap\widetilde{E}_j=\emptyset\,,\quad i\ne j\,.$$

因此$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\in\mathcal{M}$.　这就证明了$\mathcal{M}$ 是$\mathbb{R}^n$上的一个σ-代数.

$\mathcal{B}\subset\mathcal{M}$的证明放在下面(c)的证明中.

(b): 设$E\subset\mathbb{R}^n$ 满足$\mu^*(E)=0$. 则由μ^*的单调性有

$$\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^c)\le\mu^*(E)+\mu^*(T)=\mu^*(T)\qquad\forall\,T\subset\mathbb{R}^n.$$

所以$E \in \mathcal{M}$.

(c): 我们在(b)的证明中已证明了μ^*在$\mathcal{M}$ 上的限制$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是$\mathcal{M}$上的一个测度. 而由(b) 和μ^*的单调性知μ^*-零测集的子集还是μ^*-零测集从而属于$\mathcal{M}$. 因此$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$是一个完备的测度空间.

最后证明$\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$. 设$\mathcal{G}$是$\mathbb{R}^n$的开集的全体。只需证明$\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$, 因为若此事成立, 则由$\mathcal{B}$是包含$\mathcal{G}$的最小的$\sigma$-代数即知$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

任取$G \in \mathcal{G}$, 即G 是$\mathbb{R}^n$中的开集。令$F = G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$. 则$F$ 是$\mathbb{R}^n$中的闭集。对任意$T \subset \mathbb{R}^n$, 令

$$E = T \setminus F, \quad E_k = \{x \in E \mid \mathrm{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k}\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

则有

$$E_k \subset E_{k+1}, \;\; k = 1, 2, 3, ...; \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

事实上显然有$E_k \subset E_{k+1} \subset E$, $k = 1, 2, 3, \dots$. 这蕴含$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset E$. 而对任意$x \in E$有$x \notin F$. 因$F$ 是闭集, 故有$\mathrm{dist}(x, F) > 0$ 从而对于自然数$k > \frac{1}{\mathrm{dist}(x,F)}$ 有$\mathrm{dist}(x, F) > \frac{1}{k}$, 因此$x \in E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 所以$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 所以$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

对任意$x \in E_k, y \in E \setminus E_{k+1}$, 由定义有$\mathrm{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k}, \mathrm{dist}(y, F) < \frac{1}{k+1}$. 因此

$$|x - y| \ge |\mathrm{dist}(x, F) - \mathrm{dist}(y, F)| \ge \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

因此

$$\mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) = \inf_{x \in E_k, y \in E \setminus E_{k+1}} |x - y| \ge \frac{1}{k(k+1)} > 0.$$

据引理9.12 知

$$\lim_{k \to \infty} \mu^*(E_k) = \mu^*(E).$$

又因

$$\mathrm{dist}(E_k, T \cap F) = \inf_{x \in E_k} \mathrm{dist}(x, T \cap F) \ge \inf_{x \in E_k} \mathrm{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k} > 0$$

故由μ^*的隔离可加性有

$$\mu^*(E_k \cup (T \cap F)) = \mu^*(E_k) + \mu^*(T \cap F).$$

注意到$E_k \cup (T \cap F) \subset T$, 因此

$$\mu^*(T) \ge \mu^*(E_k) + \mu^*(T \cap F) \to \mu^*(E) + \mu^*(T \cap F) \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

因此再由$E = T \setminus F = T \cap G, T \cap F = T \cap G^c$ 得到

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap G) + \mu^*(T \cap G^c) \geq \mu^*(T).$$

所以$\mu^*(T \cap G) + \mu^*(T \cap G^c) = \mu^*(T)$.

这证明了$\mathbb{R}^n$的任意开集G 满足满足关于μ^*的Caratheodory 条件(C). 所以$\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$. 这就证明了$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

前面已证明了$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$是$\mathcal{M}$ 上的测度. 让我们用同一记号μ 表示μ在$\mathcal{B}$ 上的限制, 即$\mu(E) = \mu|_{\mathcal{B}}(E), E \in \mathcal{B}$. 则由$\emptyset \in \mathcal{B}$ 和$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 有

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) 可数可加性：若$E_k \in \mathcal{B}$ $(k = 1, 2, ...)$ 互不相交, 则

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)\,.$$

所以$\mu = \mu|_{\mathcal{B}}$ 是$\mathbb{R}^n$上的Borel 测度。 □

作业题

1. 设μ^* 是$\mathbb{R}^n$上的一个度量外测度, $E_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k = 1, 2, ...)$ 为可数多个互不相交的Borel 集。

$$\mu^*(\bigcup_{k \geq 1} E_k) = \sum_{k \geq 1} \mu^*(E_k).$$

§9.4. $\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度

本节学习完备测度空间的一个具体模型: $\mathbb{R}^n$ 上的Lebesguece测度空间。我们从Lebesgue 外测度开始。

【定义($\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 外测度及其等价形式)】

设$\mathcal{I}$ 为$\mathbb{R}^n$中n维有界区间的全体,

$\mathcal{I}_{\rm open}$ 为$\mathbb{R}^n$中n维有界开区间的全体,

$\mathcal{I}_\delta$ 为$\mathbb{R}^n$中的直径$<\delta$的n维区间的全体, 其中δ为任意给定正数。

定义集合函数$m^*, m^*_{\rm open}, m^*_\delta : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ 如下: 对任意$E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{k\ge 1}|I_k| \;\Big|\; \{I_k\}_{k\ge1} \subset \mathcal{I},\ \bigcup_{k\ge1} I_k \supset E\Big\},$$

$$\mu^*_{\rm open}(E) = \inf\Big\{\sum_{k\ge 1}|I_k| \;\Big|\; \{I_k\}_{k\ge1} \subset \mathcal{I}_{\rm open},\ \bigcup_{k\ge1} I_k \supset E\Big\},$$

$$\mu^*_\delta(E) = \inf\Big\{\sum_{k\ge 1}|I_k| \;\Big|\; \{I_k\}_{k\ge1} \subset \mathcal{I}_\delta,\ \bigcup_{k\ge1} I_k \supset E\Big\},$$

则有$m^* = m^*_{\rm open} = m^*_\delta$, 即

$$m^*(E) = m^*_{\rm open}(E) = m^*_\delta(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^n,$$

并且μ^*是$\mathbb{R}^n$上的一个度量外测度. 我们称m^*为$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 外测度或n维Lebesgue 外测度. $\square$

须证明上述定义中列出的性质确实成立. 为此先证一个引理.

【引理9.14(乘积的连续性)】设a_i, b_i 为实数或复数($i = 1, 2, ..., n$). 则

$$\Big|\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i\Big| \le M^{n-1}\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \tag{4.1}$$

其中$M = \max\limits_{1\le i\le n}\{|a_i|, |b_i|\}$.

【证】我们对乘积因子个数n用归纳法. 当$n = 1$ 时不等式(4.1) 是显然的, 其中规定$0^0 = 1$. 假设不等式(4.1) 对于因子个数$= n$ 时成立. 记$M_k = \max\limits_{1\le i\le k}\{|a_i|, |b_i|\}$. 做分拆

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i = \Big(\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i\Big)a_{n+1} + \Big(\prod_{i=1}^n b_i\Big)(a_{n+1} - b_{n+1})$$

则由归纳假设得到

$$\begin{aligned}\Big|\prod_{i=1}^{n+1}a_i-\prod_{i=1}^{n+1}b_i\Big| &\le (M_n)^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|\Big)|a_{n+1}|+(M_n)^n|a_{n+1}-b_{n+1}|\\ &\le (M_{n+1})^n\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|+|a_{n+1}-b_{n+1}|\Big)=(M_{n+1})^n\sum_{i=1}^{n+1}|a_i-b_i|\,.\end{aligned}$$

由归纳法原理, (4.1) 普遍成立. □

【**命题9.15**】上述关于Lebesgue 外测度定义中的诸性质成立, 因此μ^*确是$\mathbb{R}^n$上的一个度量外测度.

【证】先证明$m^*=m^*_{\rm open}=m^*_\delta$. 易见$\mathcal{I}_{\rm open}\subset\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_\delta\subset\mathcal{I}$ 从而有

$$\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\,\Big|\,\{I_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I}_{\rm open},\bigcup_{k\ge1}I_k\supset E\Big\}\subset\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\,\Big|\,\{I_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I},\bigcup_{k\ge1}I_k\supset E\Big\},$$

$$\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\,\Big|\,\{I_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I}_\delta,\bigcup_{k\ge1}I_k\supset E\Big\}\subset\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\,\Big|\,\{I_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I},\bigcup_{k\ge1}I_k\supset E\Big\}.$$

因此, 由下确界的定义(集合越小其下确界越大), 得到

$$m^*_{\rm open}(E)\ge m^*(E),\quad m^*_\delta(E)\ge m^*(E).$$

下证反向不等式也成立. 若$m^*(E)=+\infty$, 则自然有$m^*_{\rm open}(E)\le m^*(E)$, $m^*_\delta(E)\le m^*(E)$.

设$m^*(E)<+\infty$. 由$m^*(E)$ 的定义, 对任意$0<\varepsilon<1$, 存在E 的一个有界区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

写$\overline{I_k}=\prod_{i=1}^n[a_{k,i},b_{k,i}]$. 考虑包含$I_k$ 的开区间J_k:

$$J_k=\prod_{i=1}^n(a_{k,i}-\delta_k,\,b_{k,i}+\delta_k)\,,\quad \delta_k=\frac{1}{[\max_{1\le i\le n}(b_{k,i}-a_{k,i}+1)]^{n-1}}\cdot\frac{\varepsilon}{n\cdot2^{k+1}}\,,\quad k\ge1\,.$$

则$\{J_k\}_{k\ge1}$ 是E 的一个有界开区间覆盖即$\{J_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I}_{\rm open}$. 而由**引理9.14(乘积的连续性)** 有

$$\begin{aligned}|J_k|-|I_k|&=\prod_{i=1}^n(b_{k,i}-a_{k,i}+2\delta_k)-\prod_{i=1}^n(b_{k,i}-a_{k,i})\\ &\le[\max_{1\le i\le n}(b_{k,i}-a_{k,i}+1)]^{n-1}\cdot n\cdot2\delta_k=\frac{\varepsilon}{2^k}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k\ge1}|J_k|\le\sum_{k\ge1}|I_k|+\sum_{k\ge1}\frac{\varepsilon}{2^k}<m^*(E)+\varepsilon+\varepsilon=m^*(E)+2\varepsilon$$

$\Longrightarrow$

$$m^*_{\rm open}(E)<m^*(E)+2\varepsilon\,.$$

又对每个区间I_k, 根据上节中的**区间的分划**知, 存在正整数N_k使得I_k 被分割成N_k个互不重叠的子区间的并: $I_k=\bigcup_{j=1}^{N_k}I_{j,k}$, $|I_k|=\sum_{j=1}^{N_k}|I_{j,k}|$ 且满足diam$(I_{j,k})<\delta, j=1,2,...,N_k$. 易见$\{I_{j,k}\,|\,k\ge1, j=1,2,...,N_k\}\subset\mathcal{I}_\delta$是$E$的可数覆盖：$\bigcup_{k\ge1}\bigcup_{j=1}^{N_k}I_{j,k}=\bigcup_{k\ge1}I_k\supset E$. 于是有

$$m^*_\delta(E)\le\sum_{k\ge1}\sum_{j=1}^{N_k}|I_{j,k}|=\sum_{k\ge1}\Big(\sum_{j=1}^{N_k}|I_{j,k}|\Big)=\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

最后由$\varepsilon>0$的任意性即知$m^*_{\rm open}(E)\le m^*(E)$, $m^*_\delta(E)\le m^*(E)$.

这证明了$m^*(E)=m^*_{\rm open}(E)=m^*_\delta(E)$ for all $E\subset\mathbb{R}^n$.

其次证明m^* 是度量外测度.

(i) 证明$m^*(\emptyset)=0$: 对任意$\varepsilon>0$ 有$\emptyset\subset(-\varepsilon,\varepsilon)^n$, 因此$m^*(\emptyset)\le|(-\varepsilon,\varepsilon)^n|=(2\varepsilon)^n\to0\,(\varepsilon\to0+)$. 所以$m^*(\emptyset)=0$.

(ii) 证明单调性: 设$A\subset B\subset\mathbb{R}^n$. 则易见

$$\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\,\Big|\,\{I_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I},\bigcup_{k\ge1}I_k\supset B\Big\}\subset\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\,\Big|\,\{I_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I},\bigcup_{k\ge1}I_k\supset A\Big\}.$$

因集合越小其下确界越大, 故两边取下确界知

$$m^*(B)\ge m^*(A)\quad 即\quad m^*(A)\le m^*(B).$$

(iii) 证明次可加性: 设$E_k\subset X$ $(k=1,2,3,...)$. 若$\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)=\infty$, 则显然有$m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\le\infty=\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$. 下设$\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)<+\infty$, 即级数收敛. 对任意$\varepsilon>0$ 和任意$k\in\mathbb{N}$, 由$m^*(E_k)$和下确界的定义, 存在$\{I_{j,k}\}_{j\ge1}\subset\mathcal{I}$ 满足$\bigcup\limits_{j\ge1}I_{j,k}\supset E_k$ 使得

$$\sum_{j\ge1}|I_{j,k}|<m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

因$\{I_{j,k}\}_{j\ge1,k\in\mathbb{N}}$ 仍然是$\mathcal{I}$中可数多个成员的集合且他们覆盖了$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 即

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j\ge1}I_{j,k}\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

故由m^*的定义有

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\ge1}|I_{j,k}|=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j\ge1}|I_{j,k}|\Big)<\sum_{k=1}^{\infty}\Big(m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon.$$

以上用到非负二重级数求和的累次求和可换序的性质. 据$\varepsilon>0$的任意性知$m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$.

(iv) 证明隔离可加性: 设$A,B\subset\mathbb{R}^n$满足$\mathrm{dist}(A,B)>0$. 由次可加性有$m^*(A\cup B)\le m^*(A)+m^*(B)$. 为证反向不等式$m^*(A)+m^*(B)\le m^*(A\cup B)$ 可以假定A,B 皆非空且$m^*(A\cup B)<+\infty$ (否则显然成立).

取$0<\delta<\mathrm{dist}(A,B)$. 对任意$\varepsilon>0$, 由$m^*=m^*_\delta$ 知存在$A\cup B$ 的一个可数覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{I}_\delta$ 使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(A\cup B)+\varepsilon.$$

令

$$\mathbb{N}_A=\{k\mid I_k\cap A\neq\emptyset\},\quad \mathbb{N}_B=\{k\mid I_k\cap B\neq\emptyset\}.$$

则由$0<\delta<\mathrm{dist}(A,B)$ 和$\mathrm{diam}(I_k)<\delta$ 易证

$$\mathbb{N}_A\cap\mathbb{N}_B=\emptyset\qquad\text{从而有}\quad A\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}_A}I_k,\quad B\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}_B}I_k.$$

[自补证明, 反证法.] 于是得到

$$m^*(A)+m^*(B)\le\sum_{k\in\mathbb{N}_A}|I_k|+\sum_{k\in\mathbb{N}_B}|I_k|\le\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(A\cup B)+\varepsilon.$$

令$\varepsilon\to0$ 即得反向不等式$m^*(A)+m^*(B)\le m^*(A\cup B)$. 所以$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$. □

【定义($\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度)】设m^*为$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 外测度, $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$ 是从外测度m^* 通过**Caratheodory 定理** 得到的完备的测度空间。此时我们称σ-代数$\mathcal{M}$中的元素为Lebesgue 可测集, 简称为L-可测集, 并称$m=m^*|_{\mathcal{M}}$为$\mathbb{R}^n$上的n维Lebesgue 测度, 简称为Lebesgue 测度或L-测度, 称$\mathbb{R}^n$中满足$m(E)=0$ (等价地, $m^*(E)=0$)的集合E为n维L-零测集, 简称L-零测集。 □

强调: 在零测集的概念中, 一定要注意所用测度的维数, 即应明白所考虑的零测集是相对于什么维数而言的。例如对于$\mathbb{R}^2$ 中的一条直线段$E=[0,1]\times\{0\}$, 它

的2维Lebesgue测度为零, 但E作为1维区间, 其长度>0, 也即E的1 维Lebesgue 测度>0. 一般来说, 高维零测集未必是低维零测集。例如对于$\mathbb{R}^n$中的一个集合, 用n维L-测度取测量它, 它是零测集, 也即它是一个n维L-零测集, 但它的剖面或截口未必都是低维零测集, 它甚至可能有不可数多个剖面或截口都不是低维零测集。这方面典型的例子是重积分化累次积分(Fubini 定理) 的证明, 那时我们将遇到这种情况, 见第十章§**10.5**.

【命题9.16(零测集的基本性质).】

(**a**) 在任一测度空间中, 可数个零测集的并集还是零测集.

(**b**) 在Lebesgue 测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$中, 可数集是$L$-零测集. 特别, $\mathbb{Q}^n$(有理点集)是L-零测集.

(**c**) 设p,q 为正整数, $n=p+q$. 假设Z_p,Z_q 分别是$\mathbb{R}^p$ 中的p维L-零测集和$\mathbb{R}^q$ 中的q维L-零测集, 则$Z_p\times\mathbb{R}^q$ 和$\mathbb{R}^p\times Z_q$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的n维L-零测集.

因此对任意$A\subset\mathbb{R}^p, B\subset\mathbb{R}^q$, 集合$A\times Z_q$ 和$Z_p\times B$ 都是$\mathbb{R}^n$ 中的n维L-零测集.

(**d**) 若$n\ge 2$, 则$\mathbb{R}^n$ 中维数$<n$的线性子空间及其平移都是n 维L-零测集.

【证】性质(a)是对**定理9.9(测度的基本性质)(e)**的重申, 它是测度次可加性的结果: 若$\mu(Z_k)=0, k=1,2,3,...$, 则

$$\mu(\bigcup_{k\ge1}Z_k)\le\sum_{k\ge1}\mu(Z_k)=0.$$

对于性质(b), 首先易见单点集是L-零测集. 事实上对任意一点$a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\{a\}\subset\prod_{i=1}^{n}(a_i-\varepsilon,a_i+\varepsilon)\Longrightarrow m^*(\{a\})\le(2\varepsilon)^n\to0\ (\varepsilon\to0)\Longrightarrow m^*(\{a\})=0.$$

这蕴含$\{a\}\in\mathcal{M}$ 即单点集$\{a\}$是L-可测集 [据**Caratheodory 定理** 知外测度为零的集合是可测集]. 设$E=\{x_k\}_{k\ge1}$ 为$\mathbb{R}^n$ 中的可数集. 则E 可表示为可数个单点集的并: $E=\bigcup_{k\ge1}\{x_k\}$. 因$m(\{x_k\})=0$, 故$m(E)=0$.

(c): 先证明若$J\subset\mathbb{R}^q$ 是任意有界区间, 例如$J=[-R,R]^q$, 则$Z_p\times J$是n维L-零测集.

事实上对任意$\varepsilon>0$, 由Z_p 是$\mathbb{R}^p$ 中的p维L-零测集, 存在Z_p 的区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得$\sum_{k\ge1}|I_k|<\varepsilon$. 因区间的乘积还是区间, 故$\{I_k\times J\}_{k\ge1}$ 是$Z_p\times J$ 的有界区间覆盖,

从而有

$$m^*(Z_p \times J) \le \sum_{k\ge1} |I_k \times J| = \sum_{k\ge1} |I_k||J| = \Big(\sum_{k\ge1} |I_k|\Big)|J| < \varepsilon|J|\,.$$

令$\varepsilon \to 0$ 即得$m^*(Z_p \times J) = 0$. 因此$Z_p \times J$是L-可测集且$m(Z_p \times J) = 0$.

现在令$J_k = [-k,k]^q\,, k \in \mathbb{N}$, 则$Z_p \times J_k$ 是n维L-零测集且

$$Z_p \times \mathbb{R}^q \;= \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_p \times J_k\,.$$

上式表明$Z_p \times \mathbb{R}^q$等于可数多个n维L-零测集的并集, 因此$Z_p \times \mathbb{R}^q$ 是n维L-零测集. 同法可证$\mathbb{R}^p \times Z_q$ 是n维L-零测集.

(d): 这个证明将在**定理9.22(线性变换下的Lebesgue测度计算公式)** 之后完成, 其间没有循环论证. □

【**例**】任何区间$I \subset \mathbb{R}^n$ 的边界∂I 是n维L-零测集即$m(\partial I) = 0$ 其中m是$\mathbb{R}^n$ 上的n维Lebesgue 测度.

事实上由(1.3) 知∂I 是n个形如$A \times I_1\,, I_2 \times B \times I_3,\ I_4 \times C$ 的集合的并集, 其中A, B, C是$\mathbb{R}$中只含两元素的有限集, I_1, I_4是$\mathbb{R}^{n-1}$ 中的区间, 而当$n \ge 3$时, I_2, I_3分别是$\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$中的区间其中$p + q = n - 1$. 由上述**命题9.16(Lebesgue 零测集的基本性质)(c)** 知$A \times I_1\,, I_4 \times C$ 都是n维L-零测集. 同理$I_2 \times B$是$p+1$维L-零测集, 于是再由上述命题知$I_2 \times B \times I_3 = (I_2 \times B) \times I_3$是$n$维$L$-零测集. 所以$\partial I$ 是n维L-零测集. □

两个自然问题:

Lebesgue 可测集类$\mathcal{M}$有多大?

Lebesgue测度与通常的区间的面积、体积有何联系?

下面这个定理回答了这两个问题。

【**定理9.17(L-测度空间的特征和正则性)**】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$为Lebesgue 测度空间. 则

(a) $\mathbb{R}^n$中每个Borel集都是L-可测集, 即$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$.

(b) (**保持区间体积**) 对每个有界区间$I \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$m(I) = |I|.$$

(c) (**平移不变性**) 若$E \in \mathcal{M}, h \in \mathbb{R}^n$, 则$E + h \in \mathcal{M}$ 且

$$m(E + h) = m(E).$$

(d) (**正则性**) 设$E \in \mathcal{M}$. 则对任意$\varepsilon > 0$

存在开集$G \supset E$ 和闭集$F \subset E$ 使得 $m(G \setminus E) < \varepsilon, \quad m(E \setminus F) < \varepsilon.$

(e) (**可测集的结构**) 若$E \in \mathcal{M}$, 则存在一列紧集$K_j \subset E$ 和一个L-零测集$Z \subset E$ 使得

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots, \qquad E = \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\Big) \cup Z.$$

同时存在一列开集$G_k \supset E$ 和另一个L-零测集Z 使得

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = E \cup Z.$$

(f) Lebesgue 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$等于Borel 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m)$的完备化.

【证】**(a)**: 由L-测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 和**Caratheodory 定理** 即知$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$.

(b): 设$I \subset \mathbb{R}^n$为任一有界区间. 因$\mathbb{R}^n$中的有界区间都属于$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 故$I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$. 先证明

$$m(\overline{I}) = m(I) \le |I|.$$

因区间I 覆盖了I自己, 故由Lebesgue外测度的定义知$m(I) = m^*(I) \le |I|$. 注意

$$\overline{I} \setminus I \subset \overline{I} \setminus I^{\circ} = \partial I, \quad m(\partial I) = 0$$

有$\overline{I} = I \cup Z$ 其中$Z \subset \partial I$. 因此由测度的单调性和次可加性有

$$m(Z) = 0, \quad m(I) \le m(\overline{I}) \le m(I) + m(Z) = m(I).$$

其次证明$m(I) = |I|$. 因$m(\overline{I}) = m(I), |\overline{I}| = |I|$, 故为证$m(I) = |I|$, 只需证明$m(\overline{I}) = |\overline{I}|$. 换言之, 为证明$m(I) = |I|$, 可以假定$I$是有界闭区间.

上面已证明了$m(I) \le |I|$. 下证$|I| \le m(I)$. 设$\{I_k\}_{k \ge 1}$ 为I 的任一开区间覆盖(每个I_k是有界开区间). 因I 是有界闭区间, 据由有限覆盖定理, 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得$I \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k$. 于是只需证明下面蕴含关系成立[3]:

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k \quad \Longrightarrow \quad |I| \le \sum_{k=1}^{N} |I_k|. \tag{4.1}$$

[3]**注: (4.1) 直观上显然成立. 但是严格证明却不易. 这类性质的主要证明方法是使用集合的特征函数, 因为特征函数可以把集合的包含关系转化为函数的大小关系, 进而可以通过函数的积分得到所要的不等式.**

若维数$n=1$, 则我们在第六章§**6.2**(Riemann 积分的简单性质)的【**例♣**】中已证明了(4.1)成立. 设维数$n\ge 2$. 我们将借助特征函数和一维Riemann 积分. 取$0<R<+\infty$ 充分大使得

$$I, I_k\subset[-R,R]^n,\quad k=1,2,...,N.$$

由n维区间的定义可写

$$I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n,\quad I_k=I_{1,k}\times I_{2,k}\times\cdots\times I_{n,k}$$

其中$I_i, I_{i,k}$ 分别是含于$[-R,R]$ 中的闭区间和开区间$(i=1,2,...,n)$.

假设$I\subset\bigcup_{k=1}^N I_k$. 则由特征函数的性质有

$$\mathbf{1}_I(x)\le\sum_{k=1}^N\mathbf{1}_{I_k}(x),\quad x\in[-R,R]^n.$$

而由乘积集合的特征函数等于特征函数的乘积 知

$$\mathbf{1}_I(x)=\mathbf{1}_{I_1}(x_1)\mathbf{1}_{I_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{I_n}(x_n),\quad \mathbf{1}_{I_k}(x)=\mathbf{1}_{I_{1,k}}(x_1)\mathbf{1}_{I_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{I_{n,k}}(x_n)$$

其中$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in[-R,R]^n$, 因此上面不等式可写成

$$\mathbf{1}_{I_1}(x_1)\mathbf{1}_{I_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{I_n}(x_n)\le\sum_{k=1}^N\mathbf{1}_{I_{1,k}}(x_1)\mathbf{1}_{I_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{I_{n,k}}(x_n).\tag{4.2}$$

固定任意$(x_2,x_3,...,x_n)\in[-R,R]^{n-1}$, 不等式(4.2) 两边都是变量$x_1\in[-R,R]$ 的Riemann 可积函数(因为$\mathbb{R}$中有界区间的特征函数在$\mathbb{R}$中任何有界闭区间上都是Riemann 可积的), 因此对不等式(4.2) 两边关于x_1 在$[-R,R]$ 上取Riemann 积分并注意

$$|I_1|=\int_{-R}^R\mathbf{1}_{I_1}(x_1)\mathrm{d}x_1,\quad |I_{1,k}|=\int_{-R}^R\mathbf{1}_{I_{1,k}}(x_1)\mathrm{d}x_1$$

得到

$$|I_1|\mathbf{1}_{I_2}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{I_n}(x_n)\le\sum_{k=1}^N|I_{1,k}|\mathbf{1}_{I_{2,k}}(x_2)\cdots\mathbf{1}_{I_{n,k}}(x_n)\,.\tag{4.3}$$

同理固定任意$(x_3,...,x_n)\in[-R,R]^{n-2}$, 对不等式(4.3)两边关于$x_2$ 在$[-R,R]$ 上取积分得到

$$|I_1||I_2|\mathbf{1}_{I_3}(x_3)\cdots\mathbf{1}_{I_n}(x_n)\le\sum_{k=1}^N|I_{1,k}||I_{2,k}|\mathbf{1}_{I_{3,k}}(x_3)\cdots\mathbf{1}_{I_{n,k}}(x_n).$$

如此操作下去(用归纳法原理), 在第n 步得到

$$|I_1||I_2|\cdots|I_n|\le\sum_{k=1}^N|I_{1,k}||I_{2,k}|\cdots|I_{n,k}|\qquad \text{即}\quad |I|\le\sum_{k=1}^N|I_k|.$$

所以(4.1) 成立.

由(4.1) 有

$$|I| \le \sum_{k=1}^{N} |I_k| \le \sum_{k\ge 1} |I_k|.$$

由开区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 的任意性得到$|I| \le m^*_{\rm open}(I) = m^*(I) = m(I)$. 所以$m(I) = |I|$.

(d)(正则性)的证明: 先设$m(E) < +\infty$. 取E的一个有界开区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得$\sum\limits_{k\ge1} |I_k| < m(E)+\varepsilon$. 令$G = \bigcup_{k\ge1} I_k$. 则$G$ 是包含E的开集并由测度的减法运算, 次可加性以及$m(I_k) = |I_k|$ 有

$$m(G\setminus E) = m(G) - m(E) \le \sum_{k\ge1} m(I_k) - m(E) = \sum_{k\ge1} |I_k| - m(E) < \varepsilon.$$

其次设$m(E) = +\infty$. 令$E_k = E \cap [-k,k]^n$. 则

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad m(E_k) \le m([-k,k]) = |[-k,k]^n| = (2k)^n < +\infty.$$

对每个E_k 和$2^{-k}\varepsilon > 0$, 存在开集$G_k \supset E_k$ 使得$m(G_k\setminus E_k) < 2^{-k}\varepsilon$. 令$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. 则$G$ 是包含E的开集并有$G\setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k\setminus E_k)$ 从而由次可加性有

$$m(G\setminus E) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k\setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon.$$

对于补集E^c 应用这一结果, 存在开集$G \subset E^c$ 使得$m(G\setminus E^c) < \varepsilon$. 取$F = G^c$. 则$F$ 是闭集且$F \subset E$ 并有

$$G\setminus E^c = G\cap E = E\cap G = E\cap F^c = E\setminus F$$

于是有$m(E\setminus F) = m(G\setminus E^c) < \varepsilon$.

(e) (可测集的结构 的证明: 对每个$i\in\mathbb{N}$, 取$\varepsilon = 1/i$, 则由(d) 存在闭集$F_i \subset E$ 使得$m(E\setminus F_i) < 1/i$. 易见

$$E\setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subset E\setminus F_j, \quad j = 1,2,3.....$$

因此

$$m\Big(E\setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) \le m(E\setminus F_j) < 1/j \to 0 \quad (j\to\infty).$$

所以$m(E\setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$. 令$Z = E\setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. 则

$$m(Z) = 0 \quad 且 \quad E = Z \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

易见有分解

$$F_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{i,k},\quad F_{i,k}:=F_i\cap[-k,k]^n\qquad \text{从而有}\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{i,k}.$$

令

$$K_j=\bigcup_{i=1}^{j}\bigcup_{k=1}^{j}F_{i,k},\quad j=1,2,3,\dots.$$

则由有限个紧集的并还是紧集知K_j 是紧集, 且易见

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots,\qquad \bigcup_{j=1}^{\infty}K_j=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{i,k}.$$

因此$E=Z\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$ 成立.

最后对每个$j\in\mathbb{N}$, 由(d) 存在开集$U_j\supset E$ 使得$m(U_j\setminus E)<1/j$. 令

$$G_k=\bigcap_{j=1}^{k}U_j,\quad k=1,2,3,\dots.$$

则G_k 是开集且$G_k\supset E$,

$$G_1\supset G_2\supset G_3\supset\cdots,\quad \bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\supset E$$

同时由$G_N\subset U_N$ 有

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\setminus E\subset G_N\setminus E\subset U_N\setminus E\qquad\forall\,N\in\mathbb{N}$$

从而有

$$m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\setminus E\Big)\le m(U_N\setminus E)<\frac{1}{N}\to 0\quad (N\to\infty).$$

这蕴含$m(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\setminus E)=0$. 令$Z=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\setminus E$ 则Z 是L-零测集且$\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k=E\cup Z$.

(f): 由L-测度空间的定义(基于**Caratheodory 定理**)知$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$是完备的测度空间且$\mathcal{M}\supset\mathcal{B}$. 设$(\mathbb{R}^n,\overline{\mathcal{B}},\overline{m})$是Borel 测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{B},m)$的完备化. 则由完备化的定义(见**命题9.11** 和该命题前面的一段分析)和$\mathcal{M}$ 已是完备的知$\overline{m}=m|_{\overline{\mathcal{B}}}$ 且$\mathcal{M}\supset\overline{\mathcal{B}}$. 而由上面**(e)(可测集的结构)**又知$\mathcal{M}\subset\overline{\mathcal{B}}$. 所以$\mathcal{M}=\overline{\mathcal{B}}$ 从而有$m=\overline{m}$. 所以$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)=(\mathbb{R}^n,\overline{\mathcal{B}},\overline{m})$.

(c)(平移不变性)的证明: 首先证明Lebesgue 外测度具有平移不变性, 即

$$m^*(E+h)=m^*(E)\qquad\forall\,E\subset\mathbb{R},\forall\,h\in\mathbb{R}.$$

证明是基于一个简单事实: 区间的平移仍是区间且保持长度不变.

设$E \subset \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n$. 对任意$\varepsilon > 0$, 由$m^*(E)$的定义, 存在$E$的一个有界区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$, 使得$\sum_{k\ge1}|I_k| < m^*(E)+\varepsilon$. 易见$E+h \subset \bigcup_{n=1}^\infty (I_k+h)$, 即$\{I_k+h\}_{k\ge1}$是$E+h$的一个有界区间覆盖. 因此由外测度的定义有

$$m^*(E+h) \le \sum_{k\ge1}|I_k+h| = \sum_{k\ge1}|I_k| < m^*(E)+\varepsilon.$$

由$\varepsilon > 0$的任意性知$m^*(E+h) \le m^*(E)$. 将这个一般结论用于集合$E+h$ 和$-h$ 并注意$E = (E+h)+(-h)$ 便有$m^*(E) \le m^*(E+h)$. 即反向不等式也成立. 因此等式$m^*(E+h) = m^*(E)$成立.

根据这个结果, 为证明Lebesgue测度的平移不变性, 只需证明平移保持可测性, 即证明若$E \in \mathcal{M}, h \in \mathbb{R}^n$, 则$E+h \in \mathcal{M}$.

由(e), 存在一列紧集$K_j \subset E$ 使得$E = Z \cup \bigcup_{j=1}^\infty K_j$ 其中Z 是L-零测集. 易见

$$E+h = (Z+h) \cup \bigcup_{j=1}^\infty (K_j+h).$$

而由紧集的序列刻画易见紧集的平移也是紧集. 因此每个K_j+h 都是紧集, 从而$\bigcup_{j=1}^\infty (K_j+h)$ 是Borel 集从而是L-可测集. 于是为证$E+h$ 是可测集, 即属于$\mathcal{M}$, 只需证明$Z+h$ 是L-可测集. 而这又只需证明$m^*(Z+h) = 0$ 即证明$Z+h$ 是L-零测集从而是L-可测集. 但由外测度的平移不变性和$m^*(Z) = m(Z) = 0$ 有$m^*(Z+h) = m^*(Z) = 0$. $\Box$

作为上述定理的一个推论, 我们有下面命题,它表明非空开集的测度总大于零; L-零测集的余集是稠密集. 这是两个常用性质.

【命题9.18】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$为Lebesgue 测度空间.

(a) 若$G \subset \mathbb{R}^n$ 是任一非空开集, 则$m(G) > 0$.

(b) 设$G \subset \mathbb{R}^n$是任一非空开集, $Z \subset G$为一个L-零测集. 则差集$G \setminus Z$在G 中稠密, 即对任意$x \in G$ 存在点列$\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset G \setminus Z$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

【证】(a): 取$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G$. 因$G$ 是开集, 故存在$\delta > 0$ 使得$B(x,\delta) \subset G$. 取$0 < \varepsilon < \delta/\sqrt{n}$. 则易见$I(x) := \prod_{i=1}^n [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \subset B(x,\delta)$. 因此

$$m(G) \ge m(B(x,\delta)) \ge m(I(x)) = |I(x)| = (2\varepsilon)^n > 0.$$

(b): 任取$x \in G$. 则存在$\delta > 0$ 使得$B(x,\delta) \subset G$. 对任意$\varepsilon \in (0,\delta]$, 因开球$B(x,\varepsilon)$是非空开集, 故由(a) 知$m(B(x,\varepsilon)) > 0$. 但$m(Z) = 0$, 故$m(B(x,\varepsilon) \setminus Z) = m(B(x,\varepsilon)) > 0$. 这蕴含集合$B(x,\varepsilon) \setminus Z$非空. 取$\varepsilon = \delta/k$ 并取$x_k \in B(x,\delta/k) \setminus Z$, $k = 1,2,3,\dots$. 则有$x_k \in G \setminus Z$ 且$x_k \to x\,(k \to \infty)$. 所以$G \setminus Z$ 在G 中稠密. $\square$

【**例**】设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一开集, 函数$f,g : \Omega \to \mathbb{R}$ 连续. 若$Z = \{x \in \Omega \,|\, f(x) \neq g(x)\}$是Lebesgue 零测集则$f(x) \equiv g(x), x \in \Omega$.

【证】由$m(Z) = 0$ 知$\Omega \setminus Z$ 在Ω 中稠密. 因此对任意$x \in \Omega$, 存在点列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus Z$ 使得$x_k \to x\,(k \to \infty)$. 再由$f,g$连续和$f(x_k) = g(x_k)$ 即得

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x).$$

所以$f(x) \equiv g(x)$ 于Ω. $\square$

作为Lebesgue 测度正则性的一个应用我们有

【命题9.19(乘积集合的可测性)】

设$p,q \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}_p, m_p), (\mathbb{R}^q, \mathcal{M}_q, m_q), (\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{M}_{p+q}, m_{p+q})$ 分别是$\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ 和$\mathbb{R}^{p+q}$ 上的Lebesgue 测度空间. 若$A \in \mathcal{M}_p, B \in \mathcal{M}_q$, 则$A \times B \in \mathcal{M}_{p+q}$.

[在第十章学习**Fubini定理**时我们还将证明$m_{p+q}(A \times B) = m_p(A)m_q(B)$.]

【证】根据Lebesgue 可测集的结构我们有分解:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{p,i} \bigcup Z_p\,, \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{q,i} \bigcup Z_q\,,$$

$$\Longrightarrow A \times B = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} (K_{p,i} \times K_{q,j}) \bigcup (A \times Z_q) \bigcup (Z_p \times B)\,.$$

其中$K_{p,i} \subset \mathbb{R}^p, K_{q,j} \subset \mathbb{R}^q$ 均为紧集, $Z_p \subset \mathbb{R}^p, Z_q \subset \mathbb{R}^q$ 是L-零测集. 因$K_{p,i} \times K_{q,j}$是$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$ 中的紧集从而是L-可测集, 故可数个紧集的并$\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(K_{p,i} \times K_{q,j})$是$\mathbb{R}^{p+q}$ 中的L-可测集. 而由**命题9.16(Lebesgue 零测集的基本性质)**知$A \times Z_q, Z_p \times B$是$\mathbb{R}^{p+q}$ 中的L-零测集. 所以$A \times B$ 是$\mathbb{R}^{p+q}$ 中的L-可测集, 即$A \times B \in \mathcal{M}_{p+q}$. $\square$

作业题 以下m, m^*均为$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 测度和Lebesgue 外测度; 可测均指Lebesgue可测.

1. (1)设$E \subset \mathbb{R}^n$ 有界. 证明$m^*(E) < +\infty$.

(2) 设$U \subset \mathbb{R}^n$为非空开集. 证明$m(U) > 0$.

2. 设$I, J \subset \mathbb{R}^n$为有界区间且$m(I \cap J) > 0$. 证明$I \cap J$ 仍是区间(即仍是非退化的区间).

3. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 和$0 \le q < 1$ 满足：对任意有界区间$I \subset \mathbb{R}^n$ 有$m^*(E \cap I) \le q|I|$.

证明$m^*(E) = 0$.

[提示：先对$m^*(E) < +\infty$的情形给出证明. 对一般情形考虑$E_N = E \cap J_N$ 其中$J_N = [-N, N]^n$, $N = 1, 2, \ldots$. 说明每个E_N 具有题目中同样的性质.]

4. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 和$0 < \lambda \le 1$ 满足：对任意有界区间$I \subset \mathbb{R}^n$ 有$m^*(E \cap I) \ge \lambda|I|$.

证明E是满测度的, 即$m^*(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$.

5. (1) 设$U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集. 证明$m(U) = 0 \Longleftrightarrow U = \emptyset$.

(2) 设$K \subset [0, 1]^n$ 为闭集, 证明$m(K) = 1 \Longleftrightarrow K = [0, 1]^n$. [此结论显然不能推广到其它类型的可测集！]

6. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集, $E \subset \Omega$为可测集且$m(E) = m(\Omega)$, 即E在Ω内是满测度的. 证明E是Ω的一个稠密子集.

7. 对任意$\varepsilon > 0$, 构造一个可测集$E \subset \mathbb{R}^n$ 满足$m(E) < \varepsilon$ 且对每个开区间$I \subset \mathbb{R}^n$ 都有$m(E \cap I) > 0$. [提示: 从有理点集$\mathbb{Q}^n = \{r_1, r_2, r_3, ...\}$出发.]

8. 设可测集$E_k \subset [0, 1]^n, k = 1, 2, 3, \ldots$. 证明

$$m(E_k) = 1 \quad \forall\, k = 1, 2, 3, ... \quad \Longleftrightarrow \quad m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1.$$

9. 测度的介质性质: 设$E \subset \mathbb{R}^n$可测且$m(E) > 0$. 证明对任意$0 < C < m(E)$, 存在可测集$A \subset E$ 使得$m(A) = C$.

提示: 先假定E 有界: $E \subset [-N, N]^n$. 考虑

$$I(t) = [-k, t] \times [-k, k]^{n-1}, \quad f(t) = m(E \cap I(t)), \quad t \in [-k, k].$$

其次(利用一般测度的单调收敛定理)证明

$$\lim_{k \to \infty} m(E \cap [-k, k]^n) = m(E).$$

§9.5. Lebesgue不可测集的存在性

从下面命题的证明中我们将看到: Lebesgue不可测集的存在性是选择公理的结果.

【命题9.20(不可测集的存在性)】 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 为Lebesgue 测度空间. 则$\mathbb{R}^n$中每个L-测度大于零的集合都含有一个L-不可测集. 因此若一个集合的每个子集都是L-可测集, 则此集合必是L-零测集.

【证(by Sierpinski)】 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为L-可测集且$m(E) > 0$. 来证明E 含有一个L-不可测集. 由测度的单调极限性质有

$$m(E) = \lim_{k \to +\infty} m(E \cap [-k, k]^n) .$$

因此存在$R \in \mathbb{N}$ 使得$m(E \cap [-R, R]^n) > 0$. 所以不失一般性我们可以假定$E \subset [-R, R]^n$ 且$m(E) > 0$.

我们对E 中的点做等价分类：对任意$x, y \in E$ 定义$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$. 由有理点集$\mathbb{Q}^n$ 关于向量加减法运算封闭易见“ $\sim$ ” 确是E 上的一个等价关系, 即下面三个规定性质成立：

$$x \sim x\,; \quad x \sim y \Longrightarrow y \sim x; \quad x \sim y \text{ 且 } y \sim z \Longrightarrow x \sim z. \qquad (x, y, z \in E\ )$$

设$[x]$ 为E 中的点x 所属的等价类, 即$[x] = \{z \in E \,|\, z \sim x\}$. 由等价关系的定义我们有

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \sim y \Longleftrightarrow [x] = [y]. \text{ 也即} [x] \cap [y] = \emptyset \Longleftrightarrow [x] \neq [y].$$

设$\{[x]\}$ 是E 中所有互不相同的等价类的全体. 因为这些等价类互不相交, 据选择公理, 存在集合$W \subset \bigcup[x]$ 使得W 与每个等价类$[x]$ 的交集$W \cap [x]$ 为单点集, 换言之W 是由从每个等价类中取出一个代表元组成的代表团. 设$\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathbb{Q}^n \cap [-2R, 2R]^n$, 其中$r_k$ 互不相同. 令$W_k = W + r_k$ (平移). 来证明

$$W_k \text{ 互不相交且 } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \subset [-3R, 3R]^n.$$

假设存在$k \neq j$ 使$W_k \cap W_j \neq \emptyset$. 取$x \in W_k \cap W_j$, 则存在$x_k, x_j \in W$ 使得$x = x_k + r_k = x_j + r_j$ 从而$x_k \sim x_j$, $[x_k] = [x_j]$. 于是$x_k, x_j \in W \cap [x_j] \Longrightarrow x_k = x_j \Longrightarrow r_k = r_j \Longrightarrow k = j$. 矛盾. 所以$W_k$ 互不相交. 对任意$x \in E \Longrightarrow W \cap [x] = \{y\}$(单点集) $\Longrightarrow x \sim y \Longrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$. 因$x, y \in E \subset [-R, R]^n \Longrightarrow x - y \in [-2R, 2R]^n$ 故$x - y \in \mathbb{Q}^n \cap [-2R, 2R]^n$. 于是存在$k \in \mathbb{N}$ 使得$x - y = r_k$. 所以$x = y + r_k \in W + r_k = W_k$. 这证明了$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$. 又由$W \subset E \subset [-R, R]^n$ 和$r_k \in [-2R, 2R]^n$ 有$W + r_k \subset [-3R, 3R]^n$, 因此一切$W_k = W + r_k \subset [-3R, 3R]^n$, 即 $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \subset [-3R, 3R]^n$.

由上面证明的包含关系得到

$$0 < m(E) = m^*(E) \le m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) \le m^*([-3R, 3R]^n) = m([-3R, 3R]^n) < +\infty\,.$$

同时由外测度的次可加性和平移不变性$m^*(W_k) = m^*(W)$ 有

$$0 < m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(W_k) = m^*(W) + m^*(W) + m^*(W) + \cdots\,.$$

这蕴涵$m^*(W) > 0$ 于是上式右端$= +\infty$. 但$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) < +\infty$, 这就给出外测度次可加的严格不等式:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k) < \sum_{k=1}^{\infty} m^*(W_k)\,. \tag{5.1}$$

由这个严格的次可加不等式易见W (代表团)不是可测集. 否则, W是可测集$\Longrightarrow$ 平移$W_k = W + r_k$ 是可测集 $(k = 1, 2, ...)$. 因W_k 互不相交, 故由可测集类的可数可加性知不等式(5.1) 应该是等式, 矛盾. 所以W 不是可测集. 因$W \subset E$, 这就证明了E 含有一个不可测集. $\square$

【注】从Sierpinski的证明中我们看到, 对于Lebesgue 测度m, 只用到了平移不变性。但是不难证明: 若$\mathbb{R}^n$ 上的一个不恒为零的Borel测度μ 具有平移不变性, 则μ 必等于m的常数倍, 即存在$0 < c < +\infty$ 使得$\mu(E) = cm(E)$ for all Borel 集$E \subset \mathbb{R}^n$. 因Lebesgue 测度m等于Borel 测度$m|_{\mathcal{B}}$的完备化, 故μ的完备化— 仍记作μ— 等于cm，即$\mu = cm$. 于是对于Lebesgue 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 和这个测度μ 来说, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 便是一个测度空间且$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, cm)$. 这说明(在不计非零常数的意义下), 上述不可测集的存在性证明本质上只适合于Lebesgue 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$.

§9.6. 在连续变换下集合的可测性和测度估计

问题: 连续映射是否把可测集映为可测集？对此问题我们有

【命题9.21】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$, $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}_p, m_p)$ 均为Lebesgue测度空间, $E \in \mathcal{M}_n$, 映射$\varphi : E \to \mathbb{R}^p$连续. 则有:

φ把E中的L-可测集映为L-可测集 $\Longleftrightarrow$ φ把E中的L-零测集映为L-零测集.

【证】先证"$\Longleftarrow$"：假设φ 把E中的L-零测集映为L-零测集. 设$A \subset E$ 为任一可测集. 由Lebesgue 可测集的正则性知存在一列紧集$K_j \subset A$ 使得$A = Z \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ 其中Z是m_n-零测集. 由映射的基本运算有

$$\varphi(A) = \varphi(Z) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(K_j).$$

由假设知$\varphi(Z)$ 是m_p-零测集从而是L-可测集, 即$\varphi(Z) \in \mathcal{M}_p$. 而连续映射把紧集映为紧集, 故每个$\varphi(K_j)$都是紧集从而是Borel 集从而属于$\mathcal{M}_p$. 因此$\bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(K_j) \in \mathcal{M}_p$. 所以$\varphi(A) \in \mathcal{M}_p$.

其次证明"$\Longrightarrow$"：假设φ 把E中的L-可测集映为L-可测集. 设$Z \subset E$ 为一L-零测集, 即$m_n(Z) = 0$. 要证$m_p(\varphi(Z)) = 0$. 反证法：假设$m_p(\varphi(Z)) > 0$. 则由上面的**命题9.20**(即每个测度大于零的集合必含有一个不可测子集）知存在一个不可测集$W \subset \varphi(Z)$. 取$A = Z \cap \varphi^{-1}(W)$. 则容易验证$W = \varphi(A)$. 因$A$ 是m_n-零测集Z的子集, 根据Lebesgue测度的完备性知A 也是L-可测集. 于是假设知应有$W = \varphi(A)$ 是L-可测集, 这矛盾于W 不可测. 这矛盾证明了必有$m_p(\varphi(Z)) = 0$. $\square$

下面看同维(即$p = n$)的情形.

【命题9.22】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$为Lebesgue 测度空间.

(a) 设$E \subset \mathbb{R}^n$为L-可测集, 映射$\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ 满足Lipschitz 条件：

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in E$$

其中$0 \le L < +\infty$为常数. 则φ 把E 中的L-零测集映为L-零测集, 从而把E 中的L-可测集映为L-可测集.

(b) 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为C^1 映射. 则φ 把Ω 中的L-零测集映为$\varphi(\Omega)$中的L-零测集, 从而把Ω 中的L-可测集映为$\varphi(\Omega)$中的L-可测集.

【证】(a): 写$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))^{\tau}$. 设$Z$ 是E 中的任一L-零测集. 来证明$\varphi(Z)$ 是L-零测集. 由Lebesgue 可测集的正则性, 对任意$\varepsilon > 0$ 存在开集$G \supset Z$ 使得$m(G) < \varepsilon$. 另一方面据**定理9.4(开集的方体分解)**, 存在可数个互不相交的左闭右开的2进方体Q_k 使得$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$. 这给出

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z \cap Q_k, \quad \varphi(Z) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi(Z \cap Q_k),$$

$$m^*(\varphi(Z)) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(\varphi(Z \cap Q_k)). \tag{6.1}$$

来证明

$$m^*(\varphi(Z \cap Q_k)) \le C m(Q_k), \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{6.2}$$

其中$C = (2L\sqrt{n})^n$. 固定$k \in \mathbb{N}$, 记$Q = Q_k$. 为证(6.2), 可设$Z \cap Q \neq \emptyset$. 取$a \in Z \cap Q$. 令$l = l(Q)$为Q的棱长. 则对任意$x \in Z \cap Q$ 有

$$\begin{aligned}
&|\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| \le |\varphi(x) - \varphi(a)| \le L|x - a| \le L\mathrm{diam}(Q) = L\sqrt{n}l, \quad i = 1, 2, ..., n;\\
&\Longrightarrow \ \varphi_i(x) \in [\varphi_i(a) - L\sqrt{n}l, \varphi_i(a) + L\sqrt{n}l], \quad i = 1, 2, ..., n;\\
&\Longrightarrow \ \varphi(x) \in \prod_{i=1}^{n} [\varphi_i(a) - L\sqrt{n}l, \varphi_i(a) + L\sqrt{n}l] =: \widetilde{Q}\\
&\Longrightarrow \ \varphi(Z \cap Q) \subset \widetilde{Q}\\
&\Longrightarrow \ m^*(\varphi(Z \cap Q)) \le |\widetilde{Q}| = (2L\sqrt{n}l)^n = Cl^n = Cm(Q)\,.
\end{aligned}$$

这证明了(6.2)成立. 由(6.1),(6.2) 得到

$$m^*(\varphi(Z)) \le C \sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) = Cm(G) < C\varepsilon.$$

由$\varepsilon > 0$的任意性即知$m^*(\varphi(Z)) = 0$. 所以$\varphi(Z)$ 是L-零测集.

因$\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ 连续, 故再由**命题9.21** 知φ把E 中的L-可测集映为L-可测集.

(b): 我们将利用性质(a). 如上, 由**定理9.4(开集的方体分解)**, 存在可数个互不重叠的2进闭方体$\overline{Q}_k$ 使得$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{Q}_k$. 于是对于任一$L$-零测集$Z \subset \Omega$ 有可数分解

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z \cap \overline{Q}_k\,, \quad \varphi(Z) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(Z \cap \overline{Q}_k)\,.$$

根据这一分解, 我们只需证明：对任意闭方体$Q \subset \Omega$, φ 把Q 中的L-零测集映为L-零测集.

为了应用(a), 令

$$L = \max_{\xi \in Q} \|\varphi'(\xi)\|$$

其中$\|\cdot\|$ 是矩阵范数(例如取为矩阵2-范数). 因$\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 且$Q \subset \Omega$ 是紧凸集, 故$L < +\infty$且由微分中值不等式知φ在Q上满足Lipschitz 条件, 即

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in Q.$$

因此由(a) 知φ 把Q 中的L-零测集映为L-零测集. □

【**例**】设$1 \le k < n$, $I^k \subset \mathbb{R}^k$ 为一开区间, $f = (f_1, f_2, ..., f_{n-k})^\tau : I^k \to \mathbb{R}^{n-k}$属于$C^1$类. 令$S$ 是f 的图像, 即$S = \{(x, y) \,|\, y = f(x),\, x \in I^k\}$, 它是$\mathbb{R}^n$ 中的一个光滑的k维曲面. 来证明S的n维Lebesgue 测度为零, 即$m(S) = 0$. 这表明, $\mathbb{R}^n$中光滑的低维曲面都是n维Lebesgue零测集.

【证】令$\varphi(x, y) = (x, f(x) - y)^\tau, (x, y) \in I^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. 则易见$\varphi : I^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to I^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ 是单满射且$\varphi^{-1} = \varphi$. 因此$\varphi : I^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to I^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ 是C^1同胚. 易见$\varphi(S) = I^k \times \{0\}$, 即等价地, $S = \varphi(I^k \times \{0\})$. 因$m(I^k \times \{0\}) = 0$, 而光滑映射把$L$-零测集映为$L$-零测集, 故$m(S) = m(\varphi(I^k \times \{0\})) = 0$. □

下面研究可测集在一般线性变换下Lebesgue测度的计算公式.

【定理9.23(线性变换下Lebesgue测度的计算公式)】

设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$为Lebesgue 测度空间. 则对任意$E \in \mathcal{M}, h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 和$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有$\lambda E + h \in \mathcal{M}, \mathrm{A}(E) \in \mathcal{M}$ 且

$$m(\lambda E + h) = |\lambda|^n m(E), \tag{6.3}$$

$$m(\mathrm{A}(E)) = |\det \mathrm{A}| m(E)\,. \tag{6.4}$$

【证】首先由$x \mapsto \lambda x + h$, $x \mapsto \mathrm{A}x$ 是$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的光滑映射知它们把L-零测集映为L-零测集从而把L-可测集映为L-可测集. 命题的证明分为几步.

Step 1. 证明(6.3). 一般地我们证明(6.3) 对于外测度也成立, 即对任意$h \in \mathbb{R}^n$ 和$\lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$m^*(\lambda E + h) = |\lambda|^n m^*(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^n. \tag{6.5}$$

若$\lambda=0$, 则$\lambda E+h=\{h\}$ 是单点集因而是L-零测集. 此时(6.5) 成立. 设$\lambda\neq 0$, $\{I_k\}_{k\ge1}$ 是E 的任意有界区间覆盖: $E\subset\bigcup_{k\ge1}I_k$. 则$\lambda E+h\subset\bigcup_{k\ge1}(\lambda I_k+h)$. 因$\lambda I_k+h$ 也是有界区间且$|\lambda I_k+h|=|\lambda|^n|I_k|$, 故

$$m^*(\lambda E+h)\le\sum_{k\ge1}|\lambda I_k+h|=|\lambda|^n\sum_{k\ge1}|I_k|.$$

这给出

$$\frac{1}{|\lambda|^n}m^*(\lambda E+h)\le\sum_{k\ge1}|I_k|.$$

由$\{I_k\}_{k\ge1}$ 的任意性知

$$\frac{1}{|\lambda|^n}m^*(\lambda E+h)\le m^*(E)\quad\text{即}\quad m^*(\lambda E+h)\le|\lambda|^n m^*(E).$$

将这个一般不等式应用于

$$E=\lambda^{-1}(\lambda E+h)-\lambda^{-1}h$$

有

$$m^*(E)\le|\lambda^{-1}|^n m^*(\lambda E+h)=\frac{1}{|\lambda|^n}m^*(\lambda E+h)$$

即

$$|\lambda|^n m^*(E)\le m^*(\lambda E+h).$$

所以(6.5) 成立.

Step 2. 对于任意矩阵$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 令

$$\Delta(\mathrm{A})=m(\mathrm{A}([0,1)^n))\,.$$

来证明当A 可逆时

$$m(\mathrm{A}(E))=\Delta(\mathrm{A})m(E)\qquad\forall\,E\in\mathcal{M}.\tag{6.6}$$

先证明等式(6.6) 对于任何左闭右开的方体Q 成立. 写$Q=\prod_{i=1}^n[h_i,h_i+\lambda)$, $\lambda>0$. 由集合的平移、伸缩的定义和$x\mapsto\mathrm{A}x$ 是线性变换, 易见

$$Q=[0,\lambda)^n+h=\lambda[0,1)^n+h,\quad \mathrm{A}(Q)=\lambda\mathrm{A}([0,1)^n)+\mathrm{A}h.$$

因此由(6.3) 和$m(Q)=\lambda^n$ 有

$$m(\mathrm{A}(Q))=\lambda^n m(\mathrm{A}([0,1)^n)))=\Delta(\mathrm{A})m(Q)\,.$$

其次证明(6.6) 对任意开集成立. 任取开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 根据**定理9.4(开集的方体分解)**可表$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, 其中$Q_k$ 是互不相交的左闭右开的2 进方体. 注意$x \mapsto \mathrm{A}x$ 是单射(因A可逆), 故$\mathrm{A}(Q_k)$ 也互不相交. 于是由$\mathrm{A}(\Omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}(Q_k)$ 有

$$m(\mathrm{A}(\Omega)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathrm{A}(Q_k)) = \Delta(\mathrm{A}) \sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) = \Delta(\mathrm{A}) m(\Omega)\,.$$

利用这一结果来证明(6.6) 对任意紧集成立. 任取紧集$K \subset \mathbb{R}^n$. 取一个有界开集$\Omega \supset K$. 则有$K = \Omega \setminus (\Omega \setminus K)$. 因$\Omega \setminus K$ 也是开集, 故由开集的结果和$\mathrm{A}(K) = \mathrm{A}(\Omega) \setminus \mathrm{A}(\Omega \setminus K)$ 有(注意这些集合皆有界因而测度有限)

$$m(\mathrm{A}(K)) = m(\mathrm{A}(\Omega)) - m(\mathrm{A}(\Omega \setminus K)) = \Delta(\mathrm{A})\Big(m(\Omega) - m(\Omega \setminus K)\Big) = \Delta(\mathrm{A}) m(K).$$

最后对任意$E \in \mathcal{M}$, 由Lebesgue可测集的结构(见**定理9.17(L-测度空间的特征和正则性)**) 知存在一列递增的紧集$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ 和一L-零测集Z 使得$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup Z$. 因

$$\mathrm{A}(E) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{A}(K_j) \cup \mathrm{A}(Z),\ \mathrm{A}(K_1) \subset \mathrm{A}(K_2) \subset \mathrm{A}(K_3) \subset \cdots,\ \text{且 } \mathrm{A}(Z) \text{ 也是}L\text{-零测集}$$

故由上面结果和测度的单调极限定理得到

$$\begin{aligned} m(\mathrm{A}(E)) &= m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{A}(K_j)\Big) = \lim_{j\to\infty} m(\mathrm{A}(K_j)) = \Delta(\mathrm{A}) \lim_{j\to\infty} m(K_j) \\ &= \Delta(\mathrm{A}) m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\Big) = \Delta(\mathrm{A}) m(E). \end{aligned}$$

Step 3. 证明对任意可逆矩阵$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有

$$\Delta(\mathrm{AB}) = \Delta(\mathrm{A})\Delta(\mathrm{B}). \tag{6.7}$$

事实上在恒等式(6.6) 中取$E = \mathrm{B}([0,1)^n)$ 便有

$$\Delta(\mathrm{AB}) = m(\mathrm{AB}([0,1)^n)) = \Delta(\mathrm{A}) m(\mathrm{B}([0,1)^n)) = \Delta(\mathrm{A})\Delta(\mathrm{B}).$$

Step 4. 证明

$$\Delta(\mathrm{A}) = |\mathrm{det}\mathrm{A}| \qquad \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,. \tag{6.8}$$

当$\mathrm{A} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ 为正对角阵时($\lambda_i > 0, i = 1, 2, ..., n$), 易见$\mathrm{A}([0,1)^n) = \prod_{i=1}^{n} [0, \lambda_i)$ 从而$\Delta(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{det}\mathrm{A}\,(> 0)$.

当A 为正交阵时, 取$E=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|\le 1\}$ (单位球), 则由$|\mathrm{A}x|\equiv|x|$ 知$\mathrm{A}(E)=E$ 且显然$0<m(E)<+\infty$. 于是由(6.6) 得到$\Delta(\mathrm{A})=1=|\mathrm{detA}|$.

设A 为一般可逆阵. 由线代数知对于正定阵$\mathrm{A}^\tau\mathrm{A}$, 存在正交阵T 使得$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}^\tau\mathrm{AT}=\mathrm{D}^2$ 为对角阵, 其中$\mathrm{D}=\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}\,,\sqrt{\lambda_2}\,,...,\sqrt{\lambda_n}\,\}\,,\lambda_i>0\,,i=1,2,...,n$. 令$\mathrm{T}_1=\mathrm{ATD}^{-1}$. 则$\mathrm{T}_1$ 是正交阵且$\mathrm{T}_1\mathrm{D}=\mathrm{AT}$, $\mathrm{detD}=|\mathrm{detA}|$. 因D 是正对角阵, 故$\Delta(\mathrm{D})=\mathrm{detD}=|\mathrm{detA}|$. 注意$\Delta(\mathrm{T})=\Delta(\mathrm{T}_1)=1$, 应用公式(6.7) 即得

$$\Delta(\mathrm{A})=\Delta(\mathrm{AT})=\Delta(\mathrm{T}_1\mathrm{D})=\Delta(\mathrm{D})=|\mathrm{detA}|\,.$$

最后设A 不可逆, 即$\mathrm{detA}=0$. 此时为证$\Delta(\mathrm{A})=0$, 我们直接证明最大集合$\mathrm{A}(\mathbb{R}^n)$ 为L-零测集, 也即证明

$$\text{当 detA}=0\text{ 时},\quad m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^n))=0. \tag{6.9}$$

当$\mathrm{rank(A)}=0$ 时(它等价于$\mathrm{A}=0$), 上式显然成立. 设$\mathrm{rank(A)}=r\in\{1,2,,...,n-1\}$. 则由线性代数, 存在可逆方阵$P,Q$ 使得

$$\mathrm{A}=\mathrm{PDQ},\quad \mathrm{D}=\mathrm{diag}\{1,...,1,0,...,0\}\ (\text{对角阵})\,.$$

由P, Q 可逆有

$$\mathrm{Q}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n,\quad \mathrm{A}(\mathbb{R}^n)=\mathrm{PD}(\mathbb{R}^n),\quad m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^n))=|\mathrm{detP}|m(\mathrm{D}(\mathbb{R}^n)).$$

故为证(6.9), 只需证明$m(\mathrm{D}(\mathbb{R}^n))=0$. 考虑分解

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}[-k,k]^n,\quad \mathrm{D}(\mathbb{R}^n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{D}([-k,k]^n).$$

我们有

$$\mathrm{D}([-k,k]^n)=[-k,k]^r\times\{(0,...,0)\},\quad m(\mathrm{D}([-k,k]^n)=0,\quad k=1,2,3,...\,.$$

因此由测度的次可加性即得$m(\mathrm{D}(\mathbb{R}^n))=0$. 以上证明了(6.8) 成立同时由(6.9)可知(6.8) 对不可逆矩阵A也成立.

最后联合(6.6),(6.8),(6.9) 即知无论A是否可逆, 等式(6.4) 对所有$E\in\mathcal{M}$ 成立. □

应用上述命题容易得到

【定理9.24(线性变换下Lebesgue外测度的计算公式)】

设$h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则对任意$E \subset \mathbb{R}^n$ 成立

$$m^*((\lambda E + h) = |\lambda|^n m^*(E), \qquad m^*(\mathrm{A}(E)) = |\mathrm{det}\mathrm{A}| m^*(E).$$

【证】第一个等式已在上面证明了. 下证第二个等式. 若$\mathrm{det}\mathrm{A} = 0$, 则由**定理9.23** 有$m^*(\mathrm{A}(E)) \le m^*(\mathrm{A}(\mathbb{R}^n)) = m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^n)) = 0$ (也见(6.9)). 因此这时所证等式成立. 设$\mathrm{det}\mathrm{A} \neq 0$. 对每个$j \in \mathbb{N}$ 选取E的区间覆盖$\{I_{k,j}\}_{k\ge1}$ 使得$\sum\limits_{k\ge1} |I_{k,j}| \le m^*(E) + 1/j$. 令$G_j = \bigcup_{k\ge1} I_{k,j}$. 则$G_j$ 是L-可测集且$G_j \supset E$,

$$m^*(E) \le m(G_j) \le \sum_{k\ge1} m(I_{k,j}) = \sum_{k\ge1} |I_{k,j}| \le m^*(E) + 1/j \to m^*(E) \quad (j \to \infty).$$

于是由$\mathrm{A}(E) \subset A(G_j)$得到

$$m^*(\mathrm{A}(E)) \le m(\mathrm{A}(G_j)) = |\mathrm{det}\mathrm{A}| m(G_j) \to |\mathrm{det}\mathrm{A}| m^*(E) \quad (j \to \infty).$$

因此

$$m^*(\mathrm{A}(E)) \le |\mathrm{det}\mathrm{A}| m^*(E).$$

将这一不等式应用于A^{-1} 和$\mathrm{A}(E)$得到

$$m^*(E) = m^*(\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{A}(E))) \le |\mathrm{det}\mathrm{A}^{-1}| m^*(\mathrm{A}(E)) = \frac{1}{|\mathrm{det}\mathrm{A}|} m^*(\mathrm{A}(E)).$$

因此反向不等式也成立:

$$|\mathrm{det}\mathrm{A}| m^*(E) \le m^*(\mathrm{A}(E)). \qquad \Box$$

现在可以完成

【命题9.16(Lebesgue 零测集的基本性质)(d)的证明】

设$n \ge 2$, $X \subset \mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的线性子空间且$\dim(X) < n$. 则存在$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$使得$X = \mathrm{A}(\mathbb{R}^n)$ 且$\mathrm{det}\mathrm{A} = 0$. 对任意$h \in \mathbb{R}^n$, 由平移不变性和$\mathrm{det}\mathrm{A} = 0$ 有

$$m(X + h) = m(X) = m(\mathrm{A}(\mathbb{R}^n)) = |\mathrm{det}\mathrm{A}| m(\mathbb{R}^n) = 0 \cdot \infty = 0. \qquad \Box$$

【注】上面用到了约定：$0 \cdot \infty = 0$. 如果不习惯这种证明, 则可考虑下面的证明, 它顺便解释了为什么约定$0 \cdot \infty = 0$ 是合理的. 事实上如果考虑有限区间$I_k = [-k, k]^n$ 就可避免出现$0 \cdot \infty$：由(6.4)有

$$m(\mathrm{A}(I_k)) = |\mathrm{det}\mathrm{A}| m(I_k) = 0 \cdot m(I_k) = 0\,, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

因$\mathrm{A}(\mathbb{R}^n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}(I_k)$, 故$\mathrm{A}(\mathbb{R}^n)$ 是可数个L-零测的并, 所以$\mathrm{A}(\mathbb{R}^n)$是L-零测集. 这里的关键是：0 是绝对常数0, 而不是不定型极限中变化着的无穷小! 其它类似现象都可以按此解释.

作业题　以下m, m^*均为$\mathbb{R}^n$ 上的L-测度和L-外测度; 可测均指L-可测.

1. 设$\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一一对应, 且保持Lebesgue外测度，即

$$m^*(\varphi(E))=m^*(E)\qquad \forall\, E\subset\mathbb{R}^n.$$

证明φ 把$\mathbb{R}^n$中的Lebesgue 可测集映为Lebesgue 可测集.

[提示: 验证Caratheodory 条件.]

2. 设方阵$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在$E\subset\mathbb{R}^n$ 使得$m^*(\mathrm{A}(E))>0$. 问: A是否可逆?

3. 设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为一个Lebesgue 可测集, 满足对任意$x\in[0,1]^n$ 有$x\in E$ 或者$\mathbf{1}-x\in E$, 其中$\mathbf{1}=(1,1,...,1)$. 试估计$m(E)\geq ?$

[提示: 看是否有$[0,1]^n\subset E\cup(\mathbf{1}-E)$ ？]

4. 设$B=B(0,R)$ 为$\mathbb{R}^n$中的开球,设$\mathrm{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵.

(1) $E\subset B$ 为可测集使得$E,\mathrm{T}(E),\mathrm{T}^2(E),\mathrm{T}^3(E),...$ 互不重叠. 证明$m(E)=0$.

(2) 证明: 对任意非空开集$U\subset B$, 存在$k\in\mathbb{N}$ 使得$m(U\cap\mathrm{T}^k(U))>0$ 从而有$U\cap\mathrm{T}^k(U)\neq\emptyset$.

以上$\mathrm{T}(E)=\{\mathrm{T}x\,|\,x\in E\}$.

5. 设

$$A=\{(x,y)\in[0,\pi/2]^2\,|\,\sin x\leq 1/2,\ \cos(x+y)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}.$$

证明A 是L-可测集并求$m(A)=?$

[注意$\cos(\cdot)$ 在$[0,\pi]$上严格单调.]

§9.7. Vitali 覆盖引理

下面再讲一个与集合的结构有关的性质——Vitali 覆盖引理, 它在后面建立Hausdorff测度与积分(即曲面测度和曲面积分)时有用.

【强调】除非特别说明, 我们总要求开球、闭球的半径大于零, 开方体、闭方体的棱长大于零, 即总考虑非退化的球体和方体.

【定义(Vitali 覆盖)】设$E \subset \mathbb{R}^n$. 若$\mathcal{V}$ 是由$\mathbb{R}^n$中的一些(可以是不可数多个)闭球或闭方体组成的集合族, 满足: 对任意$x \in E$ 和任意$\varepsilon > 0$, 存在$B \in \mathcal{V}$ 使得$x \in B$ 且$\mathrm{diam}(B) < \varepsilon$, 则称$\mathcal{V}$ 是E的一个Vitali 覆盖. $\Box$

【例】(1) 设$E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = \{\overline{B}(x,r) \,|\, x \in E, 0 < r \le 1\}$. 则$\mathcal{V}$ 是E的一个Vitali 覆盖. 这是因为$\mathcal{V}$中闭球$\overline{B}(x,r)$ 的直径$2r$ 可以任意小.

(2) 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集. 则对任意$\delta > 0$, 闭球族$\mathcal{V} = \{\overline{B}(x,r) \,|\, 0 < r \le \delta, \overline{B}(x,r) \subset \Omega\}$. 都是$\Omega$的一个Vitali 覆盖. 事实上对任意$x \in \Omega$, 对任意$\varepsilon > 0$, 因$\Omega$ 是开集, 故存在$0 < r < \min\{\delta, \varepsilon/2\}$ 使得$\overline{B}(x,r) \subset \Omega$. 由$r < \delta$ 知$\overline{B}(x,r) \in \mathcal{V}$, 而由$\mathrm{diam}(\overline{B}(x,r)) = 2r < \varepsilon$ 知$\mathcal{V}$是Ω的一个Vitali 覆盖. $\Box$

通常把$\mathbb{R}^n$中以原点为中心的闭单位球记做$\mathbb{B}^n$, 即

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\}.$$

对于一个闭球$B = \overline{B}(x_0, r)$ 利用平移和伸缩变换可写$B = x_0 + r\mathbb{B}^n$ 从而有

$$m(B) = r^n m(\mathbb{B}^n) = m(\mathbb{B}^n)\Big(\frac{\mathrm{diam}(B)}{2}\Big)^n$$

同样, 对于开球$B = B(x_0, r)$, 以上数值关系同样成立, 这里用到事实: 开球$B(x_0, r)$ 与闭球$\overline{B}(x_0, r)$不仅直径相同而且体积相同, 后者的证明将在第十章中给出.

【Vitali 覆盖引理.】设集合$E \subset \mathbb{R}^n$满足$m^*(E) < +\infty$. 设$\mathcal{V}$为E的一个Vitali 覆盖. 则存在$\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{V}$, 其中$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, ..., N\}$ $(N \in \mathbb{N})$ 或$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$, 使得

$$B_k \text{ 互不相交且 } m^*\Big(E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} B_k\Big) = 0.$$

【证】Step 1. 公共准备. 设$F \subset \mathbb{R}^n$为闭集, $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. 设紧集$B \subset \mathbb{R}^n$ 满足$x \in B$ 且$\mathrm{diam}(B) < \mathrm{dist}(x, F)$. 则必有$B \cap F = \emptyset$.

这是因为若$B\cap F\neq\emptyset$, 则取一点$y\in B\cap F$ 便得到矛盾:

$$\mathrm{dist}(x,F)\le|x-y|\le\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x,F).$$

Step 2. 可以假设$m^*(E)>0$. 因$m^*(E)<+\infty$, 故存在E的**开区间**覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得$\sum\limits_{k\ge1}|I_k|<2m^*(E)$. 令$G=\bigcup_{k\ge1}I_k$ 则G 是开集且

$$G\supset E,\;\; m(G)\le\sum_{k\ge1}m(I_k)=\sum_{k\ge1}|I_k|<2m^*(E).$$

因G 是包含E的开集, 故对任意$x\in E$ 有$x\in G$ 从而有$\mathrm{dist}(x,G^c)>0$. 而由$\mathcal{V}$ 是E的Vitali 覆盖知对任意$\varepsilon>0$存在$B\in\mathcal{V}$使得$x\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\min\{\varepsilon,\mathrm{dist}(x,G^c)\}$. 由**Step 1** 知这蕴含$B\cap G^c=\emptyset$, 即$B\subset G$. 如令$\widetilde{\mathcal{V}}=\{B\in\mathcal{V}\,|\,B\subset G\}$, 则$\widetilde{\mathcal{V}}\subset\mathcal{V}$ 且$\widetilde{\mathcal{V}}$ 仍是E的Vitali 覆盖. 为记号简便, 我们就假定$B\subset G$ for all $B\in\mathcal{V}$.

以下我们仅就$\mathcal{V}$中的集合都是闭球的情形证明本命题. 对于$\mathcal{V}$中的集合都是闭方体的情形以及$\mathcal{V}$中的集合同时含有闭球和闭方体的混合情形, 证明方法完全相同. 注意, 由$m(G)<+\infty$ 易见数集$\{\mathrm{diam}(B)\,|\,B\in\mathcal{V}\}$有界.

如果存在$N\in\mathbb{N}$ 和$\mathcal{V}$中N个互不相交的闭球$B_1,B_2,...,B_N$ 使得$E\setminus\bigcup_{k=1}^N B_k=\emptyset$, 则Vitali 覆盖引理证毕.

以下假设对任意$N\in\mathbb{N}$ 和$\mathcal{V}$中任何N个互不相交的闭球$B_1,B_2,...,B_N$ 都有$E\setminus\bigcup_{k=1}^N B_k\neq\emptyset$. 我们将用归纳操作程序证明在这种情况下, Vitali 覆盖引理中的$\mathbb{N}_0$等于$\mathbb{N}$ 以及满足要求的可数无限多个闭球$\{B_k\}_{k=1}^\infty$的存在性【以下给出图示, 以E 为开集为例: 从E 中依次挖出尽可能大的互不相交的闭球$B_1,B_2,B_3,\dots$.】

第1步: 取定一个$B_1\in\mathcal{V}$. 因$E\setminus B_1\neq\emptyset$, 故取一点$x_0\in E\setminus B_1$. 由$B_1$ 是闭集知$\mathrm{dist}(x_0,B_1)>0$ 同时存在$B\in\mathcal{V}$ 使得$x_0\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x_0,B_1)$. 由**Step 1**知这蕴含$B\cap B_1=\emptyset$. 令

$$d_1=\sup\{\mathrm{diam}(B)\mid B\in\mathcal{V},\,B\cap B_1=\emptyset\}.$$

则存在$B_2\in\mathcal{V}$使得

$$B_2\cap B_1=\emptyset,\quad \mathrm{diam}(B_2)>\frac{d_1}{2}.$$

第2步: 因$E\setminus(B_1\cup B_2)\neq\emptyset$, 故取一点$x_0\in E\setminus(B_1\cup B_2)$. 由$B_1\cup B_2$ 是闭集知$\mathrm{dist}(x_0,B_1\cup B_2)>0$ 同时存在$B\in\mathcal{V}$ 使得$x_0\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x_0,B_1\cup B_2)$.

由**Step 1**知这蕴含$B\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset$. 令

$$d_2=\sup\{\mathrm{diam}(B)\mid B\in\mathcal{V},\, B\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset\}.$$

则存在$B_3\in\mathcal{V}$使得

$$B_3\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset,\quad \mathrm{diam}(B_3)>\frac{d_2}{2}.$$

假设在第k步得到了$\mathcal{V}$中的互不相交的闭球$B_1,B_2,...,B_{k+1}$ 满足

$$\mathrm{diam}(B_{j+1})>\frac{1}{2}d_j,\quad j=1,2,...,k$$

其中

$$d_j=\sup\{\mathrm{diam}(B)\mid B\in\mathcal{V},\, B\cap(B_1\cup B_2\cdots\cup B_j)=\emptyset\}.$$

则在第$k+1$步, 由$E\setminus\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j=\emptyset$, 可取一点$x_0\in E\setminus\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j$. 由$\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j$ 是闭集知$\mathrm{dist}(x_0,\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j)>0$ 同时存在$B\in\mathcal{V}$ 使得$x_0\in B$ 且$\mathrm{diam}(B)<\mathrm{dist}(x_0,\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j)$. 由**Step 1**知这蕴含$B\cap\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j=\emptyset$. 令

$$d_{k+1}=\sup\{\mathrm{diam}(B)\mid B\in\mathcal{V},\, B\cap\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j=\emptyset\}.$$

则存在$B_{k+2}\in\mathcal{V}$使得

$$B_{k+2}\cap\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j=\emptyset,\quad \mathrm{diam}(B_{k+2})>\frac{d_{k+1}}{2}.$$

由归纳操作原理知以上手续对每个自然数k 均可施行, 从而得到$\mathcal{V}$中的互不相交的闭球列$\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和正数列$\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, 它们具有上述性质.

往下证明$m^*\Big(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\Big)=0$.

首先由$B_k\subset G$ 和B_k 互不相交有

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(B_k)=m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\Big)\le m(G)<2m^*(E)<+\infty. \tag{7.1}$$

这蕴含$\lim\limits_{k\to\infty}m(B_k)=0$. 而由球的体积与直径的关系$m(B_k)=m(\mathbb{B}^n)(\mathrm{diam}(B_k)/2)^n$ 知

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{diam}(B_k)=0.$$

对每个闭球B_k, 写$B_k=\overline{B}(x_k,r_k)$ 并令$B_k^*=\overline{B}(x_k,5r_k)$. 来证明

$$E\setminus\bigcup_{k=1}^{N}B_k\subset\bigcup_{k=N+1}^{\infty}B_k^*,\qquad N=1,2,3,\dots. \tag{7.2}$$

任取定$N \in \mathbb{N}$. 对任意$x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} B_k$, 因$\bigcup_{k=1}^{N} B_k$ 是闭集, 故$\mathrm{dist}(x, \bigcup_{k=1}^{N} B_k) > 0$ 同时存在$B \in \mathcal{V}$ 使得$x \in B$ 且$\mathrm{diam}(B) < \mathrm{dist}(x, \bigcup_{k=1}^{N} B_k)$. 由**Step 1**知这蕴含$B \cap \bigcup_{k=1}^{N} B_k = \emptyset$.

断言: 存在$k \in \mathbb{N}$ 使得$B \cap B_k \neq \emptyset$.

事实上若$B \cap B_k = \emptyset$ for all $k = 1, 2, 3, ...$, 则由d_k的定义以及$\mathrm{diam}(B_{k+1})$与d_k的关系有

$$\mathrm{diam}(B_{k+1}) > \frac{1}{2} d_k \geq \frac{1}{2} \mathrm{diam}(B) > 0, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

这与$\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{diam}(B_k) = 0$矛盾. 所以必存在$k \in \mathbb{N}$ 使得$B \cap B_k \neq \emptyset$. 令

$$j = \min\{k \in \mathbb{N} \mid B \cap B_k \neq \emptyset\}.$$

则$B \cap B_j \neq \emptyset$. 而由$B \cap \bigcup_{k=1}^{N} B_k = \emptyset$ 知$j \geq N + 1$ 且$B \cap \bigcup_{k=1}^{j-1} B_k = \emptyset$. 这蕴含

$$\mathrm{diam}(B) \leq d_{j-1} < 2\mathrm{diam}(B_j).$$

借助一点$y \in B \cap B_j$ 我们有 (注意$x \in B$)

$$|x - x_j| \leq |x - y| + |y - x_j| \leq \mathrm{diam}(B) + \frac{1}{2}\mathrm{diam}(B_j) \leq \frac{5}{2}\mathrm{diam}(B_j) = 5r_j.$$

因此$x \in \overline{B}(x_m, 5r_j) = B_j^*$ 从而由$j \geq N + 1$ 知$x \in \bigcup_{k=N+1} B_k^*$. 所以(7.2) 成立.

最后由(7.2) 有

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} B_k \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} B_k^*, \qquad N = 1, 2, 3, ...$$

从而结合$m(B_k^*) = 5^n m(B_k)$和收敛性(7.1)得到

$$m^*\Big(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} m(B_k^*) = 5^n \sum_{k=N+1}^{\infty} m(B_k) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

所以$m^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$. □

【Vitali覆盖引理的推论】设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为一非空开集且$m(\Omega) < +\infty$. 则对任意$\delta > 0$存在一列直径$\leq \delta$的闭球$B_k \subset \Omega, k = 1, 2, 3, ...$, 使得

$$B_k \text{ 互不相交 且 } \quad m\Big(\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = 0.$$

【证】前面例子中已说明闭球族$\mathcal{V} = \{\overline{B}(x, r) \mid 0 < r \leq \delta, \overline{B}(x, r) \subset \Omega\}$ 是Ω的一个Vitali 覆盖. 因此由**Vitali覆盖引理**, 存在可数多个互不相交的闭球$B_k \in \mathcal{V}, k \in \mathbb{N}_0$,

使得$m(\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k)=0$, 其中$\mathbb{N}_0$ 是有限集 或$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$. 若$\mathbb{N}_0$是有限集, 则$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k$ 是闭集从而$\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k$ 是开集. 于是由$m(\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k)=0$ 知$\Omega\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k=\emptyset$. 因一切$B_k\subset\Omega$, 故得到$\Omega=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}B_k$ 从而Ω 既开又闭. 这蕴含$\Omega=\mathbb{R}^n$, 与$m(\Omega)<+\infty$ 矛盾. 因此只能是$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$. 所以$m(\Omega\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=0$. □

【例】从直观上看, Vitali覆盖引理及其推论有些出乎意外。例如对于平面闭矩形$[0,1]\times[0,1]$, 可以证明$[0,1]\times[0,1]$不能表示成互不重叠的非退化的闭圆盘的并。但Vitali覆盖引理的推论表明: 开矩形$(0,1)\times(0,1)$ 可以表示成可数多个互不相交的闭球B_k的并外加一个2维零测集: $(0,1)\times(0,1)=Z_0\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}B_j$, $m(Z_0)=0$. 令$Z=Z_0\cup\partial((0,1)\times(0,1))$, 则$m(Z)=0$ 且$[0,1]\times[0,1]=Z\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$. 这表明：$[0,1]\times[0,1]$ 可以表示成可数多个互不相交的闭圆盘的并外加一个2维零测集。如果同学们用手在方块$[0,1]\times[0,1]$内画出一个一个互不相交的小圆盘$B_1,B_2,B_3,...$, 估计很多人不相信剩余集$[0,1]\times[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$可以是一个2维零测集。但是Vitali证明了这是可能的。所以不仅要有直观, 还要用严格论证来检验直观和纠正直观。这个例子就说明了这个道理: 直观与事实不一定总一致。 □

§9.8. Hausdorff 测度

Hausdorff 测度是用来测量同一个大空间$\mathbb{R}^n$中各种k 维集合的测度, 即$k=1$ 时集合的长度, $k=2$ 时集合的面积, $k=3$ 时集合的体积, 等等, 还包括了k 不是整数时集合的测度, 因此它是对Lebesgue 测度的重要推广。例如对于$n\ge 3$, 则由前面**§9.6**中的一个例题知$\mathbb{R}^n$中的一条光滑曲线(一维)和一块二维光滑曲面的n 维体积都等于零, 也即这时$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue测度m完全不能区分光滑曲线和曲面。为了能给任意维数的集合建立合适的测度, 数学家F. Hausdorff [4] 引入了Hausdorff 测度。我们在下一章将看到, 在Hausdorff 测度的测量下, $\mathbb{R}^n$中光滑曲线的一维Hausdorff 测度和二维光滑曲面的二维Hausdorff 测度分别是曲线的长度和曲面的面积, 而在曲线与曲面上的第一型曲线与曲面积分, 就分别是关于一维Hausdorff 测度和二维Hausdorff 测度的积分。

因Hausdorff 测度是通过Hausdorff 外测度和Caratheodory条件得到的测度, 所以我们从Hausdorff 外测度开始。

【定义(Hausdorff 外测度)】设$n\in\mathbb{N}, k\ge 0$, 令

$$\alpha_k=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\int_0^{+\infty}t^{\frac{k}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t}.$$

对任意$\delta>0$和任一集合$E\subset\mathbb{R}^n$, 定义

$$H^*_{k,\delta}(E)=\inf\Big\{\sum_{j\ge1}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k\ \Big|\ E\subset\bigcup_{j\ge1}B_j,\ \mathrm{diam}(B_j)\le\delta\Big\}$$

其中右边括号中的每个B_j均**非空**. 称集族$\{B_j\}_{j\ge1}$ 称为E的可数δ-覆盖, 简称为E的δ-覆盖. 令

$$H^*_k(E)=\lim_{\delta\to0+}H^*_{k,\delta}(E).$$

则称$H^*_k(E)$ 为E的k-维Hausdorff 外测度. $\Box$

几点说明:

[4]**豪斯道夫(Felix Hausdorff, 1868-1942), 德国数学家, 是现代拓扑学的创始人之一, 对集合论和泛函分析也有杰出贡献。他在莱比锡大学学习数学并于1891年在该校获得博士学位。1895年他在莱比锡大学取得了数学和天文学的助理教授职位。1900年他受聘在波恩大学担任副教授, 并开始集合论的研究, 完成了《集合论基础》的初稿。1913年至1921年, 他在Greifswald担任教授。1914年, 豪斯道夫发表了《集合论基础》一书, 并以此奠定了他在科学界的地位。1921年, 豪斯道夫再次回到波恩大学, 并担任波恩大学数学研究所所长, 他的家庭也迁到了Kessenich大街(1949年后, 这条大街被重命名为Hausdorff大街)。除了数学研究, 豪斯道夫还以“Paul Mongre”的笔名发表绘画作品和哲学论著。摘自Wikipedia.**

(1) 在外测度的记号$H^*_{k,\delta}(E)$, $H^*_k(E)$ 中没有标记E所在的欧空间$\mathbb{R}^n$的维数n. 这是因为$H^*_{k,\delta}(E)$, $H^*_k(E)$ 只是由$B_j\subset\mathbb{R}^n$的直径$\mathrm{diam}(B_j)$和常数k定义的, 几何上看它与背景空间$\mathbb{R}^n$的维数n 无关. 因此外测度$H^*_{k,\delta}(E)$, $H^*_k(E)$可以用于任一欧空间$\mathbb{R}^n$中的集合E.

(2) 当$k=0$时, $\alpha_0=1$. 此时在$H^*_{0,\delta}(E)$的定义中我们使用数学约定: $0^0=1$; 并规定$H^*_{0,\delta}(\emptyset)=0$ for all $\delta>0$. 由此不难看出零维Hausdorff外测度H^*_0等于集合计数测度, 即对任意$E\subset\mathbb{R}^n$

$$H^*_0(E)=\begin{cases} E\text{的元素个数}, & \text{若}E\text{为有限集或空集},\\ +\infty, & \text{若}E\text{为无限集}.\end{cases}$$

(3) $H^*_{k,\delta}$, H^*_k 确实是$\mathbb{R}^n$上的外测度, 见下面**命题9.25**.

此外由于$\{B_j\}_{j\ge1}$是$\bigcup_{j\ge1}B_j$的δ-覆盖, 据$H^*_{k,\delta}$的定义得知

$$H^*_{k,\delta}\Big(\bigcup_{j\ge1}B_j\Big)\le\sum_{j\ge1}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k.$$

另外注意: 与$k=0$ 不同的是, 当$k>0$ 时, “$H^*_{k,\delta}(\emptyset)=0$ for all $\delta>0$”是一个导出性质, 因此不需设为假设条件.

(4) 上述定义中引入的常数α_k 只是为了保持与通常的体积、面积、弧长等的测度相同. 事实上我们在第十章积分理论中将证明, 当k为正整数时, α_k 等于$\mathbb{R}^k$中单位球$\mathbb{B}^k$的体积即$\alpha_k=m_k(\mathbb{B}^k)$, 因此$\alpha_k(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2})^k$ 等于一个以$r_j=\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}$为半径的$k$维球$B(0,r_j)\subset\mathbb{R}^k$ 的体积, 即

$$\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k=m_k(B(0,r_j)),\quad B(0,r_j)\subset\mathbb{R}^k,\quad r_j=\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}.$$

(5) 上述定义对维数k的大小没有约束. 但下后面的**命题9.27**表明, 为使$\mathbb{R}^n$上Hausdorff外测度H^*_k是非平凡的(即$H^*_k(E)\not\equiv0$), 一个必要条件是$k\le n$.

【命题9.25】 设$n\in\mathbb{N}, k\ge0$. 则

(a) $H^*_{k,\delta}$, H^*_k 都是$\mathbb{R}^n$上的外测度且$H^*_{k,\delta}\le H^*_k$, 即

$$H^*_{k,\delta}(E)\le H^*_k(E)\qquad\forall\,E\subset\mathbb{R}^n,\quad\forall\,\delta>0.$$

(b) H^*_k是$\mathbb{R}^n$上的度量外测度.

【证】(a): 首先由$H^*_{k,\delta}(E)$的定义知$H^*_{k,\delta}(E)$ 关于δ 单调不增：

$$\begin{aligned}0<\delta_1<\delta_2 \implies &\Big\{\sum_{j\ge1}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k \;\Big|\; E\subset\bigcup_{j\ge1}B_j,\ \mathrm{diam}(B_j)\le\delta_1\Big\}\\ &\subset\Big\{\sum_{j\ge1}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k \;\Big|\; E\subset\bigcup_{j\ge1}B_j,\ \mathrm{diam}(B_j)\le\delta_2\Big\}\\ \implies H^*_{k,\delta_1}(E)\ge H^*_{k,\delta_2}(E).\end{aligned}$$

因此极限

$$H^*_k(E)=\lim_{\delta\to0+}H^*_{k,\delta}(E)=\sup_{\delta>0}H^*_{k,\delta}(E)$$

总存在(可能为$+\infty$). 其次证明$H^*_{k,\delta}, H^*_k$ 满足外测度定义中的三条规定性质(i)-(iii):

(i) $H^*_{k,\delta}(\emptyset)=0$, $H^*_k(\emptyset)=0$.

当$k=0$ 时, 这是规定性质. 当$k>0$ 时, 取$B_1=\{x_0\}$ 为单点集, 则对任意$\delta>0$ 有$\mathrm{diam}(B_1)=0<\delta$, 因此$B_1$ 是$\emptyset$的δ-覆盖. 此时有$H^*_{k,\delta}(\emptyset)\le\alpha_k(\mathrm{diam}(B_1)/2)^k=0$. 所以$H^*_{k,\delta}(\emptyset)=0$ for all $\delta>0$, 进而有$H^*_k(\emptyset)=0$.

(ii) 单调性: 若$A\subset B$, 则$H^*_{k,\delta}(A)\le H^*_{k,\delta}(B)$, $H^*_k(A)\le H^*_k(B)$.

这是因为若$A\subset B$ 则

$$\Big\{\sum_{j\ge1}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k \;\Big|\; B\subset\bigcup_{j\ge1}B_j,\ \mathrm{diam}(B_j)\le\delta\Big\}$$

$$\subset\Big\{\sum_{j\ge1}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k \;\Big|\; A\subset\bigcup_{j\ge1}B_j,\ \mathrm{diam}(B_j)\le\delta\Big\}$$

从而有$H^*_{k,\delta}(B)\ge H^*_{k,\delta}(A)$. 令$\delta\to+$ 即得$H^*_k(B)\ge H^*_k(A)$.

(iii) 次可加性: 对任意$E_i\subset\mathbb{R}^n, i=1,2,3,...$ 有

$$H^*_{k,\delta}\Big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\Big)\le\sum_{i=1}^\infty H^*_{k,\delta}(E_i),\quad H^*_k\Big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\Big)\le\sum_{i=1}^\infty H^*_k(E_i).$$

为证第一个不等式, 可以假设$\sum\limits_{i=1}^\infty H^*_{k,\delta}(E_i)<+\infty$. 对任意$\varepsilon>0$, 对任意$i\in\mathbb{N}$, 存在$E_i$的$\delta$-覆盖$\{B_{i,j}\}_{j\ge1}^\infty$使得$\sum\limits_{j\ge1}^\infty\alpha_k(\mathrm{diam}(B_{i,j})/2)^k<H^*_{k,\delta}(E_i)+2^{-i}\varepsilon$. 易见$\{B_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 是$\bigcup_{i=1}^\infty E_i$的δ-覆盖. 因此由正项级数任意重排后其和不变有

$$\begin{aligned}H^*_{k,\delta}\Big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\Big)&\le\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_{i,j})}{2}\Big)^k=\sum_{i=1}^\infty\Big(\sum_{j\ge1}\alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_{i,j})}{2}\Big)^k\Big)\\ &<\sum_{i=1}^\infty\Big(H^*_{k,\delta}(E_i)+2^{-i}\varepsilon\Big)=\sum_{i=1}^\infty H^*_{k,\delta}(E_i)+\varepsilon.\end{aligned}$$

令$\varepsilon \to 0+$ 即知$H^*_{k,\delta}$具有次可加性.

由$H^*_{k,\delta}$的次可加性和$H^*_{k,\delta}(E_i) \le H^*_k(E_i)$ 得到

$$H^*_{k,\delta}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} H^*_{k,\delta}(E_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} H^*_k(E_i).$$

令$\delta \to 0+$ 即知H^*_k也具有次可加性.

(b): 设$A, B \subset \mathbb{R}^n$ 是隔离的, 即$\mathrm{dist}(A, B) > 0$. 由外测度的次可加性有$H^*_k(A \cup B) \le H^*_k(A) + H^*_k(B)$. 为证反向不等式, 可以假定$A, B$ 皆非空且$H^*_k(A \cup B) < +\infty$ (否则显然成立).

任取$0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$. 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$A \cup B$ 的δ-覆盖$\{B_j\}_{j\ge1}$使得

$$\sum_{j\ge1} \alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k < H^*_{k,\delta}(A \cup B) + \varepsilon.$$

令

$$\mathbb{N}_A = \{j \ge 1 \mid B_j \cap A \ne \emptyset\}, \quad \mathbb{N}_B = \{j \ge 1 \mid B_j \cap B \ne \emptyset\}.$$

由$0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$和$\mathrm{diam}(B_j) \le \delta$ 知不存在j 使得$B_j \cap A \ne \emptyset, B_j \cap B \ne \emptyset$. 因此

$$\mathbb{N}_A \cap \mathbb{N}_B = \emptyset \quad \text{从而有} \quad A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}_A} B_j, \quad B \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}_B} B_j.$$

这就给出

$$\begin{aligned}
&H^*_{k,\delta}(A) + H^*_{k,\delta}(B)\\
&\le \sum_{j\in\mathbb{N}_A} \alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k + \sum_{j\in\mathbb{N}_B} \alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k\\
&\le \sum_{j\ge1} \alpha_k\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k < H^*_{k,\delta}(A \cup B) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

令$\varepsilon \to 0+$ 得到

$$H^*_{k,\delta}(A) + H^*_{k,\delta}(B) \le H^*_{k,\delta}(A \cup B).$$

再令$\delta \to 0+$ 即得$H^*_k(A) + H^*_k(B) \le H^*_k(A \cup B)$. □

如上, 根据**Caratheodory 定理**, 有了度量外测度就可以建立相应的测度。但此前我们先了解一下Hausdorff 测度的一些重要性质。

【例】若$E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数集, 则对任意$k > 0$ 有$H^*_k(E) = 0$.

【证】先设$E=\{x_0\}$ 是单点集。则如上论证知$H_k^*(E)=0$. 一般情形, 写$E=\{x_j\}_{j\ge1}=\bigcup_{j\ge1}E_j$ 其中$E_j=\{x_j\}$ 为单点集。则由次可加性有$H_k^*(E)\le\sum_{j\ge1}H_k^*(E_j)=0$. □

上述例子是一个极端情形。一般来说, 长度有限的曲线, 其面积体积均为零; 面积有限的曲面, 其体积为零, 等等。下面命题证明了这一事实。

【命题9.26(维数的作用)】低维测度有限的集合, 其高维测度为零. 具体来说是:

(a) 设$0\le p<q$. 则当$H_p^*(E)<+\infty$ 时, $H_q^*(E)=0$.

(b) 若$k>n$, 则$H_k^*(E)=0$ for all $E\subset\mathbb{R}^n$.

【证】(a): 设$H_p^*(E)<+\infty$. 对任意$\delta>0$ 存在E的δ-覆盖$\{B_j\}_{j\ge}$ 使得

$$\sum_{j\ge1}\alpha_p\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^p<H_{p,\delta}^*(E)+1\le H_p^*(E)+1.$$

于是

$$H_{q,\delta}^*(E)\le\sum_{j\ge1}\alpha_q\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^q=C_{p,q}\sum_{j\ge1}\alpha_p\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^p(\mathrm{diam}(B_j))^{q-p}$$
$$\le C_{p,q}\delta^{q-p}(H_p^*(E)+1),\qquad \text{其中 } C_{p,q}=\frac{\alpha_q}{\alpha_p}2^{p-q}.$$

因$p<q$, 故令$\delta\to0+$ 得到

$$H_q^*(E)=\lim_{\delta\to0+}H_{q,\delta}^*(E)\le\lim_{\delta\to0+}C_{p,q}\delta^{q-p}(H_p^*(E)+1)=0.$$

所以$H_q^*(E)=0$.

(b): 设$k>n$. 只需证明$H_k^*(\mathbb{R}^n)=0$. 设$\{\overline{Q}_j\}_{j=1}^\infty$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的所有棱长等于1的2进闭方体. 则有

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{j=1}^\infty\overline{Q}_j,\quad H_k^*(\mathbb{R}^n)\le\sum_{j=1}^\infty H_k^*(\overline{Q}_j).$$

由下面的**命题9.29(同维的情形)** 知$\mathbb{R}^n$ 上的n维Hausdorff外测度H_n^* 等于$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 外测度, 即$H_n^*=m_n^*$, 故$H_n^*(\overline{Q}_j)=m_n^*(\overline{Q}_j)=1<+\infty$. 因此由$k>n$ 和(a) 知$H_k^*(\overline{Q}_j)=0, j=1,2,3,....$ 所以$H_k^*(\mathbb{R}^n)=0$. [注: **命题9.29(同维的情形)**的证明只用到Hausdorff 外测度的定义和等径不等式. 因此与本命题不存在循环论证关系.] □

【命题9.27(Hausdorff外测度保持距离不等式)】

设$l, n, m \in \mathbb{N}, k > 0$, $E \subset \mathbb{R}^l$, 映射$\varphi : E \to \mathbb{R}^n, \psi : E \to \mathbb{R}^m$ 满足

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le C|\psi(x) - \psi(y)| \qquad \forall\, x, y \in E.$$

其中$0 < C < +\infty$ 为常数. 则有

$$H_k^*(\varphi(E)) \le C^k H_k^*(\psi(E)).$$

【证】对任意$\delta > 0$, 对$\psi(E)$的任一δ-覆盖$\{B_j\}_{j\ge1}$, 令$A_j = \varphi(\psi^{-1}(B_j))$. 来证明$\{A_j\}_{j\ge1}$是$\varphi(E)$ 的$C\delta$-覆盖.

对任意$y \in \varphi(E)$, 写$y = \varphi(x), x \in E$. 则$\psi(x) \in \psi(E)$. 因此存在B_j使得$\psi(x) \in B_j$ 从而有$x \in \psi^{-1}(B_j)$, $y = \varphi(x) \in \varphi(\psi^{-1}(B_j)) = A_j$. 所以$y \in \bigcup_{j\ge1} A_j$. 这证明了$\varphi(E) \subset \bigcup_{j\ge1} A_j$. 又对任意$j$ 和任意$y_1, y_2 \in A_j$, 写$y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2)$ 其中$x_1, x_2 \in \psi^{-1}(B_j)$ 即$\psi(x_1), \psi(x_2) \in B_j$. 则由假设有

$$|y_1 - y_2| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le C|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \le C\mathrm{diam}(B_j).$$

由$y_1, y_2 \in A_j$的任意性得到直径不等式:

$$\mathrm{diam}(A_j) \le C\mathrm{diam}(B_j) \le C\delta. \tag{8.1}$$

所以$\{A_j\}_{j\ge1}$ 是$\varphi(E)$ 的$C\delta$-覆盖.

由此和(8.1)有

$$H_{k,C\delta}^*(\varphi(E)) \le \sum_{j\ge1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(A_j)}{2}\Big)^k \le C^k \sum_{j\ge1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k.$$

取关于δ-覆盖$\{B_j\}_{j\ge1}$的下确界得到

$$H_{k,C\delta}^*(\varphi(E)) \le C^k H_{k,\delta}^*(\psi(E)).$$

令$\delta \to 0+$ 即得

$$H_k^*(\varphi(E)) = \lim_{\delta\to0+} H_{k,C\delta}^*(\varphi(E)) \le C^k \lim_{\delta\to0+} H_{k,\delta}^*(\psi(E)) = C^k H_k^*(\psi(E)). \qquad \square$$

【命题9.28】设$k \in \{1,2,...,n\}$, $E \subset \mathbb{R}^n$. 则对任意$h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 和任意正交矩阵$\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有

$$\begin{aligned} &\text{平移不变性：} && H_k^*(E+h) = H_k^*(E), \\ &\text{伸缩与反射：} && H_k^*(\lambda E) = |\lambda|^k H_k^*(E), \\ &\text{旋转不变性：} && H_k^*(\mathrm{T}(E)) = H_k^*(E), \\ &\text{以上合成的情形：} && H_k^*(\lambda\mathrm{T}(E)+h) = |\lambda|^k H_k^*(E). \end{aligned}$$

【证】设$h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$为正交阵. 令

$$\psi(x) = \lambda \mathrm{T}x + h, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

则$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是同胚且

$$|\psi(x) - \psi(y)| = |\lambda||x-y|, \quad |x-y| = |\lambda|^{-1}|\psi(x)-\psi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

因此由**命题9.27(Hausdorff外测度保持距离不等式)**知对任意$E \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$H_k^*(\psi(E)) \le |\lambda|^k H_k^*(E), \quad H_k^*(E) \le |\lambda|^{-k} H_k^*(\psi(E)).$$

所以$H_k^*(\psi(E)) = |\lambda|^k H_k^*(E)$ 即$H_k^*(\lambda\mathrm{T}(E)+h) = |\lambda|^k H_k^*(E)$. 取$\lambda = 1$, T为单位矩阵即得平移不变性; 取$h = 0$, T为单位矩阵即得伸缩与反射关系式; 取$h = 0, \lambda = 1$ 即得旋转不变性。 □

下面命题表明, 当$k = n$时, $\mathbb{R}^n$ 上的n维Hausdorff 外测度与$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue外测度重合。在证明中我们将提前使用第十章**§10.6**中证明的**等径不等式**。

【命题9.29(同维的情形)】$\mathbb{R}^n$ 上的n维Hausdorff外测度H_n^* 等于$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 外测度: $H_n^* = m_n^*$, 即

$$H_n^*(E) = m_n^*(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^n.$$

【证】任取$E \subset \mathbb{R}^n$. 对任意$\delta > 0$ 和E的任一δ-覆盖$\{B_j\}_{j\ge1}$: $E \subset \bigcup_{j\ge1} B_j$. 由**等径不等式** (见第十章**§10.6**) 和$m_n(\mathbb{B}^n) = \alpha_n$, $\mathrm{diam}(\overline{B}_j) = \mathrm{diam}(B_j)$ 有

$$m_n(\overline{B}_j) \le m_n(\mathbb{B}^n)\Big(\frac{\mathrm{diam}(\overline{B}_j)}{2}\Big)^n = \alpha_n\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^n$$
$$\Longrightarrow \; m_n^*(E) \le \sum_{j\ge1} m_n(\overline{B}_j) \le \alpha_n \sum_{j\ge1}\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^n.$$

取关于δ-覆盖$\{B_j\}_{j\ge1}$的下确界得到

$$m_n^*(E) \le H_{n,\delta}^*(E).$$

令$\delta \to 0+$ 得到

$$m_n^*(E) \le H_n^*(E).$$

为证反向不等式, 先证明若$m_n(Z)=0$, 则$H_n^*(Z)=0$. 设$m_n(Z)=0$. 则对任意$\varepsilon>0$存在Z的开区间覆盖$\{I_j\}_{j\ge1}$使得$\sum_{j\ge1}|I_j|<\varepsilon$. 令$G=\bigcup_{j\ge1}I_j$. 则$G$ 是开集. 由开集的结构定理知对任意$\delta>0$, 有分解$G=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ 其中Q_j 是互不相交的2 进方体且棱长$l(Q_j)\le\delta$. 因$\mathrm{diam}(Q_j)=\sqrt{n}l(Q_j)\le\sqrt{n}\delta$, 故

$$H_{n,\sqrt{n}\delta}^*(Z) \le \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_n\Big(\frac{\mathrm{diam}(Q_j)}{2}\Big)^n = C_n\sum_{j=1}^{\infty}(l(Q_j))^n$$

$$= C_n\sum_{j=1}^{\infty}m_n(Q_j) = C_n m_n(G) < C_n\varepsilon, \qquad \text{其中 } C_n=\alpha_n(\sqrt{n}/2)^n.$$

令$\delta \to 0+$ 得到

$$H_n^*(Z) = \lim_{\delta\to0+}H_{n,\sqrt{n}\delta}^*(Z) \le C_n\varepsilon.$$

再令$\varepsilon\to0+$ 即知$H_n^*(Z)=0$.

注意由$H_{n,\delta}^*\le H_n^*$ 知这蕴含$H_{n,\delta}^*(Z)=0$ for all $\delta>0$.

下证反向不等式$H_n^*(E)\le m_n^*(E)$. 可以假设$m_n^*(E)<+\infty$. 对任意$\varepsilon>0$ 存在E的开区间覆盖$\{I_j\}_{j\ge1}$使得$\sum_{j\ge1}|I_j|<m_n^*(E)+\varepsilon$. 令$\Omega=\bigcup_{j\ge1}I_j$. 则$\Omega$ 是开集且$m_n(\Omega)\le\sum_{j\ge1}m_n(I_j)=\sum_{j\ge1}|I_j|<m_n^*(E)+\varepsilon$. 由**Vitali 覆盖引理的推论**, 对任意$\delta>0$ 存在子集$Z\subset\Omega$ 和可数个互不相交的闭球$B_j\subset\Omega$, $j=1,2,3,...$ 使得$\mathrm{diam}(B_j)<\delta$ 且

$$\Omega = Z\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j, \quad m_n(Z)=0.$$

于是有

$$H_{n,\delta}^*(E)\le H_{n,\delta}^*(\Omega)\le H_{n,\delta}^*(Z)+H_{n,\delta}^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\Big)=H_{n,\delta}^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\Big)$$

$$\le\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_n\Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^n=\sum_{j=1}^{\infty}m_n(B_j)=m_n(\Omega)<m_n^*(E)+\varepsilon.$$

令$\delta\to0+$得到

$$H_n^*(E)\le m_n^*(E)+\varepsilon.$$

再令$\varepsilon \to 0+$ 即得$H_n^*(E) \le m_n^*(E)$. 所以反向不等式也成立。 因此$H_n^*(E) \equiv m_n^*(E)$.
$\square$

下面学习k-维子空间中的集合的Hausdorff 外测度计算公式。

【命题9.30】设$k \in \{1, 2, ..., n\}$, H_k^* 是$\mathbb{R}^n$ 上的k维Hausdorff 外测度, m_k^* 是$\mathbb{R}^k$ 上的Lebesgue 外测度. 则对任意矩阵$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 有

$$H_k^*(\mathrm{A}(E)) = \sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau \mathrm{A})}\, m_k^*(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^k. \tag{8.2}$$

【证】由**命题9.29(同维的情形)**知当$k = n$时有$H_n^* = m_n^*$, $\det(\mathrm{A}^\tau \mathrm{A}) = |\det \mathrm{A}|^2$, 因此这是关于Lebesgue 外测度的已证结论(见**命题9.24(线性变换下Lebesgue外测度的计算公式)**).

以下设$1 \le k \le n-1$. 分两步证明.

Step 1. 考虑特殊情形:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{其中}\mathrm{I} \in \mathbb{R}^{k\times k} \text{ 为单位阵.}$$

此时$\mathrm{A}x = (x, 0)^\tau, x \in \mathbb{R}^k$, 其中$0 = (0, ..., 0)^\tau \in \mathbb{R}^{n-k}$. 因此$\mathrm{A}(E) = E \times \{0\}$. 此外有$\mathrm{A}^\tau \mathrm{A} = \mathrm{I}$, $\det(\mathrm{A}^\tau \mathrm{A}) = 1$. 在这种情况下, (8.2) 变成

$$H_k^*(E \times \{0\}) = m_k^*(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^k. \tag{8.3}$$

记$\widetilde{H}_k$ 为$\mathbb{R}^k$ 上的k维Hausdorff 外测度. 则由**命题9.29(同维的情形)** 知$\widetilde{H}_k^* = m_k^*$. 因此为证(8.3), 只需证明

$$H_k^*(E \times \{0\}) = \widetilde{H}_k^*(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^k. \tag{8.4}$$

设$E \subset \mathbb{R}^k$. 对任意$\delta > 0$ 和E的任一δ-覆盖$\{B_j\}_{j\ge1}$, 由$\mathrm{diam}(B_j \times \{0\}) = \mathrm{diam}(B_j)$ 知$\{B_j \times \{0\}\}_{j\ge1}$ 是$E \times \{0\}$的δ-覆盖. 因此

$$H_{k,\delta}^*(E \times \{0\}) \le \sum_{j\ge1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k.$$

由$\{B_j\}_{j\ge1}$的任意性即知

$$H_{k,\delta}^*(E \times \{0\}) \le \widetilde{H}_{k,\delta}^*(E).$$

令$\delta \to 0+$ 得到

$$H_k^*(E \times \{0\}) \leq \widetilde{H}_k^*(E).$$

反之对于$E \times \{0\}$的任意δ-覆盖$\{C_j\}_{j\geq 1}$, 令

$$B_j = \{x \in \mathbb{R}^k \,|\, \text{存在} y \in \mathbb{R}^{n-k} \text{ 使得 } (x, y) \in C_j\}.$$

则对任意$x_1, x_2 \in B_j$, 存在$y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$使得$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C_j$ 从而有

$$|x_1 - x_2| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| \leq \mathrm{diam}(C_j)$$

因此$\mathrm{diam}(B_j) \leq \mathrm{diam}(C_j)$. 这表明$\{B_j\}_{j\geq 1}$ 是E的δ-覆盖. 因此

$$\widetilde{H}_{k,\delta}^*(E) \leq \sum_{j\geq 1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(B_j)}{2}\Big)^k \leq \sum_{j\geq 1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\Big)^k.$$

由$\{C_j\}_{j\geq 1}$的任意性即知

$$\widetilde{H}_{k,\delta}^*(E) \leq H_{k,\delta}^*(E \times \{0\}).$$

令$\delta \to 0+$ 即得反向不等式:

$$\widetilde{H}_k^*(E) \leq H_k^*(E \times \{0\}).$$

所以(8.4)成立。

Step 2. 一般情形. 对矩阵A的行向量做初等正交变换使其化为后$n-k$行为零的形式, 即选取正交矩阵$\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得[5]

$$\mathrm{TA} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{其中} \mathrm{A}_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}.$$

由Hausdorff 外测度关于正交变换的不变性知

$$H_k^*(\mathrm{A}(E)) = H_k^*(\mathrm{TA}(E)).$$

因$\mathrm{TA}x = (\mathrm{A}_1 x, 0)^\tau$, 故$\mathrm{TA}(E) = \mathrm{A}_1(E) \times \{0\}$. 因此由**Step 1** 和**命题9.24(线性变换下Lebesgue外测度的计算公式)** 得到

$$H_k^*(\mathrm{TA}(E)) = H_k^*(\mathrm{A}_1(E) \times \{0\}) = m_k^*(\mathrm{A}_1(E)) = |\mathrm{det}\mathrm{A}_1| m_k^*(E).$$

[5] **几何上看, 这等价于线性子空间**$\mathrm{A}(\mathbb{R}^k) = \{\mathrm{A}x \,|\, x \in \mathbb{R}^k\}$ **经旋转后成为**$\mathbb{R}^k \times \{0\}$ **的子空间, 即存在正交阵**$\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **使得**$\mathrm{TA}(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

另一方面我们有

$$\mathrm{A}_1^\tau \mathrm{A}_1 = (\mathrm{TA})^\tau \mathrm{TA} = \mathrm{A}^\tau \mathrm{T}^\tau \mathrm{TA} = \mathrm{A}^\tau \mathrm{A}, \quad |\mathrm{det}\mathrm{A}_1|^2 = \mathrm{det}(\mathrm{A}^\tau \mathrm{A}).$$

联合上式即得

$$H_k^*(\mathrm{A}(E)) = |\mathrm{det}\mathrm{A}_1| m_k^*(E) = \sqrt{\mathrm{det}(\mathrm{A}^\tau \mathrm{A})}\, m_k^*(E). \qquad \square$$

【Hausdorff 测度及其基本性质】

如前, 有了Hausdorff外测度就可以定义Hausdorff测度:

【定义(Hausdorff 测度)】设$n \in \mathbb{N}, k \ge 0$, H_k^* 是$\mathbb{R}^n$上的Hausdorff外测度, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$是从外测度$H_k^*$ 通过**Caratheodory 定理** 得到的完备测度空间, 即

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_k(\mathbb{R}^n) = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ 满足关于外测度} H_k^* \text{的Caratheodory 条件 (C)}\}$$

$H_k = H_k^*|_{\mathcal{M}_k}$. 我们也称$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$ 是k维Hausdorff 测度空间, $\mathcal{M}_k$中的元素E称为H_k-可测集, $H_k(E)$ 称为E的k维Hausdorff 测度。 $\square$

下面几个命题给出Hausdorff测度的基本性质。

【命题9.31(同维的情形)】$\mathbb{R}^n$上的n维Hausdorff 可测集类$\mathcal{M}_n$等于$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 可测集类$\mathcal{M}_n$ 并且$H_n|_{\mathcal{M}_n} = m_n|_{\mathcal{M}_n}$ 即

$$H_n(E) = m_n(E) \qquad \forall\, E \in \mathcal{M}_n.$$

【证】我们已证明了两个外测度相等: $H_n^* = m_n^*$. 因为Hausdorff测度空间和Lebesgue 测度空间都是通过各自的外测度和Caratheodory 条件定义的, 故命题得证。 $\square$

【命题9.32】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$为Hausdorff 测度空间。则

(a) $\mathbb{R}^n$中所有Borel集都是Hausdorff可测集, 即$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_k$. 因此$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, H_k)$是一个Borel 测度空间。

(b)(可测集的结构) 设E为H_k-可测集且$H_k(E) < +\infty$. 则存在一个Borel 集B和一个H_k-零测集Z 使得[6]

$$E = B \cup Z.$$

[6]由$B \cup Z = B \cup (Z \setminus B)$ 和$H_k(Z \setminus B) = H_k(Z) = 0$ 知, 以$Z \setminus B$代替Z, 总可以假设B 与H_k-零测集Z 不相交。

一般地, 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 有可数分解: $E = \bigcup_{j\ge 1} E_j$ 其中每个E_j都是H_k-可测集且$H_k(E_j) < +\infty$. 则存在一个Borel 集B和一个H_k-零测集Z 使得$E = B \cup Z$.

【证】(a): 因Hausdorff外测度H_k^*是$\mathbb{R}^n$上的度量外测度, 故由**Caratheodory 定理**知$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_k$, 即$\mathbb{R}^n$中的Borel 集都是$H_k$-可测集, 从而$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, H_k)$是一个Borel 测度空间。

(b): 设$H_k(E) < +\infty$. 对每个$i \in \mathbb{N}$, 存在E的$1/i$-覆盖$\{B_{i,j}\}_{j\ge 1}$使得

$$\sum_{j\ge 1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(B_{k,j})}{2}\Big)^k < H_{k,1/i}^*(E) + 1/i.$$

令

$$A_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j\ge 1} \overline{B}_{i,j}.$$

则A_1 是Borel 集且$A_1 \supset E$. 由外测度的单调性和$\mathrm{diam}(\overline{B}_{i,j}) = \mathrm{diam}(B_{i,j}) \le 1/i$ 有

$$H_{k,1/i}^*(E) \le H_{k,1/i}^*(A_1) \le H_{k,1/i}^*\Big(\bigcup_{j\ge 1} \overline{B}_{i,j}\Big) \le \sum_{j\ge 1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(\overline{B}_{k,j})}{2}\Big)^k$$
$$= \sum_{j\ge 1} \alpha_k \Big(\frac{\mathrm{diam}(B_{i,j})}{2}\Big)^k < H_{k,1/i}^*(E) + 1/i.$$

于是由H_k的定义有

$$H_k(A_1) = H_k^*(A_1) = \lim_{i\to\infty} H_{k,1/i}^*(A_1) = \lim_{i\to\infty} H_{k,1/i}^*(E) = H_k^*(E) = H_k(E).$$

令$Z_1 = A_1 \setminus E$. 因E是H_k-可测集且$H_k(A_1) = H_k(E) < +\infty$, 故由测度的减法运算有

$$H_k(Z_1) = H_k(A_1 \setminus E) = H_k(A_1) - H_k(E) = 0.$$

于是我们得到E的一个表示: $E = A_1 \setminus Z_1$ 其中A_1是Borel 集, Z_1 是H_k-零测集。

将这一结果应用于H_k- 可测集$A_1 \setminus E$, 则存在Borel 集A_2和H_k-零测集Z_2使得$A_1 \setminus E = A_2 \setminus Z_2$, 即

$$A_1 \cap E^c = A_2 \cap Z_2^c.$$

由此和$E = A_1 \setminus (A_1 \setminus E) = A_1 \cap (A_1 \cap E^c)^c$得到

$$E = A_1 \cap (A_1 \cap E^c)^c = A_1 \cap (A_2 \cap Z_2^c)^c = A_1 \cap (A_2^c \cup Z_2) = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap Z_2).$$

于是对于Borel 集$B = A_1 \cap A_2^c$ 和H_k-零测集$Z = A_1 \cap Z_2$ 便有$E = B \cup Z$.

对一般情形, 设有H_k-可测集$E_1,E_2,E_3,...$ 使得$E=\bigcup_{j\ge1}E_j$ 且$H_k(E_j)<+\infty$ for all $j\ge1$. 由刚才的结果, 对每个E_j存在Borel 集B_j 和H_k-零测集Z_j使得$E_j=B_j\cup Z_j$ $(j\ge 1)$. 令

$$B=\bigcup_{j\ge1}B_j,\quad Z=\bigcup_{j\ge1}Z_j.$$

则$E=B\cup Z$ 且B 是Borel集。因可数个零测集的并还是零测集, 故$H_k(Z)=0$. □

【命题9.33】设$k\in\{1,2,...,n\}$, $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_k,H_k)$为$k$维Hausdorff 测度空间, $E\subset\mathbb{R}^n$为H_k-可测集。则对任意$h\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 和任意正交矩阵$\mathrm{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 集合$E+h,\lambda E,\mathrm{T}(E),\lambda\mathrm{T}(E)+h$ 都是H_k-可测集且有

$$\begin{aligned}
\text{平移不变性:}\qquad & H_k(E+h)=H_k(E),\\
\text{伸缩与反射:}\qquad & H_k(\lambda E)=|\lambda|^kH_k(E),\\
\text{旋转不变性:}\qquad & H_k(\mathrm{T}(E))=H_k(E),\\
\text{以上合成的情形:}\qquad & H_k(\lambda\mathrm{T}(E)+h)=|\lambda|^kH_k(E).
\end{aligned}$$

【证】上述测度等式是**命题9.28**的结论, 这里只需证集合的H_k-可测性。为此只需一般地证明若E为H_k-可测集, 则$\lambda\mathrm{T}(E)+h$也是H_k-可测集。

令$\psi(x)=\lambda\mathrm{T}x+h$. 则$\psi^{-1}(y)=\lambda^{-1}\mathrm{T}^{-1}y-\lambda^{-1}\mathrm{T}^{-1}h$. 因此由**命题9.28** 知

$$H_k^*(\psi(E))=|\lambda|^kH_k^*(E),\quad H_k^*(\psi^{-1}(E))=|\lambda^{-1}|^k|H_k^*(E)\qquad\forall\,E\subset\mathbb{R}^n.$$

设$E\subset\mathbb{R}^n$为H_k-可测集。要证$\psi(E)$ 也是H_k-可测集。为此我们验证$\psi(E)$满足Caratheory条件。对任意$T\subset\mathbb{R}^n$ 有

$$\psi(E)\cap T=\psi(E)\cap\psi(\psi^{-1}(T))=\psi(E\cap\psi^{-1}(T)),$$

$$\psi(E)^c=\psi(E^c),\quad \psi(E)^c\cap T=\psi(E^c\cap\psi^{-1}(T))$$

其中$E^c=\mathbb{R}^n\setminus E$. 由此有

$$\begin{aligned}
&H_k^*(\psi(E)\cap T)+H_k^*(\psi(E)^c\cap T)\\
&=H_k^*(\psi(E\cap\psi^{-1}(T))+H_k^*(\psi(E^c\cap\psi^{-1}(T))\\
&=|\lambda|^k\Big(H_k^*(E\cap\psi^{-1}(T))+H_k^*(E^c\cap\psi^{-1}(T))\Big)\\
&=|\lambda|^kH_k^*(\psi^{-1}(T))=H_k^*(T)
\end{aligned}$$

其中第三个等号用到E是H_k-可测集。所以$\psi(E)$满足Caratheodory 条件。因此$\psi(E)$是H_k-可测集。 $\square$

对于可微映射$t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, 为清楚起见我们将用Jacobi矩阵$\varphi'(t)$ 对应的行列式非零表示$\varphi(t)$ 满秩：若$D \subset \mathbb{R}^k$ 为开集, $1 \le k \le n$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$可微, 则对于$x \in D$ 有

$$\mathrm{rank}\varphi(t) = k \iff \det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t)) > 0. \tag{8.5}$$

下面这个引理在研究复合函数的可测性和建立关于Hausdorff 测度的积分换元公式时起重要作用。

【引理9.34】设$k \in \{1, 2, ..., n\}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ 为开集, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且$\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t)) > 0$ for all $t \in D$. 则有

(a) 设$t_0 \in D$, 令$\mathrm{T} = \varphi'(t_0)$. 则$\forall\, 0 < \varepsilon < 1$, $\exists\, \delta > 0$, 使得$B(t_0, \delta) \subset D$ 且

$$(1 - \varepsilon)|\mathrm{T}(t - s)| \le |\varphi(t) - \varphi(s)| \le (1 + \varepsilon)|\mathrm{T}(t - s)| \quad \forall\, t, s \in B(t_0, \delta). \tag{8.6}$$

(b) 对任意紧凸集$K \subset D$, 存在常数$a > 0, b > 0$ 使得

$$a|t - s| \le |\varphi(t) - \varphi(s)| \le b|t - s| \qquad \forall\, t, s \in K. \tag{8.7}$$

【证】(a): 取$r > 0$ 使得$\overline{B}(t_0, r) \subset D$. 先证明对任意$t, s \in B(t_0, r)$ 存在$\xi = s + \theta(t - s), \theta \in (0, 1)$, 使得

$$|\varphi(t) - \varphi(s) - \varphi'(s)(t - s)| \le \|\varphi'(\xi) - \varphi'(s)\||t - s| \tag{8.8}$$

其中$\|\cdot\|$ 是矩阵范数(例如是矩阵2-范数或算子范数, 下同). 事实上固定$s \in B(t_0, r)$, 令

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(s) - \varphi'(s)(t - s), \quad t \in B(t_0, r)$$

则

$$f'(t) = \varphi'(t) - \varphi'(s), \quad t \in B(t_0, r).$$

因$B(t_0, r)$ 是凸集, 故由微分中值不等式知存在$\xi = s + \theta(t - s), \theta \in (0, 1)$, 使得（注意$f(s) = 0$）

$$|f(t)| = |f(t) - f(s)| \le \|f'(\xi)\||t - s|.$$

这正是(8.8).

因$\mathrm{T}=\varphi'(t_0)$满秩, 故当$\omega\neq 0$ 时$\mathrm{T}\omega\neq 0$. 因此

$$\beta:=\min_{|\omega|=1}|\mathrm{T}\omega|>0.$$

易见

$$\beta|t-s|\le|\mathrm{T}(t-s)|\qquad\forall\, t,s\in\mathbb{R}^k. \tag{8.9}$$

对任意$0<\varepsilon<1$, 由$t\mapsto\varphi'(t)$连续, 存在$0<\delta<r$ 使得当$t\in B(t_0,\delta)$时
$\|\varphi'(t)-\mathrm{T}\|=\|\varphi'(t)-\varphi'(t_0)\|<\varepsilon\beta/3$. 于是当$t,s\in B(t_0,\delta)$ 时

$$\|\varphi'(t)-\varphi'(s)\|\le\|\varphi'(t)-\mathrm{T}\|+\|\mathrm{T}-\varphi'(s)\|<2\varepsilon\beta/3.$$

由此和(8.9) 知: 对任意$t,s\in B(t_0,\delta)$ 有

$$\begin{aligned}&|\varphi(t)-\varphi(s)-\mathrm{T}(t-s)|\le|\varphi(t)-\varphi(s)-\varphi'(s)(t-s)|+|(\varphi'(s)-\mathrm{T})(t-s)|\\&\le\|\varphi'(\xi)-\varphi'(s)\||t-s|+\|\varphi'(s)-\mathrm{T}\||t-s|\le\varepsilon\beta|t-s|\le\varepsilon|\mathrm{T}(t-s)|\end{aligned}$$

从而有

$$-\varepsilon|\mathrm{T}(t-s)|\le|\varphi(t)-\varphi(s)|-|\mathrm{T}(t-s)|\le\varepsilon|\mathrm{T}(t-s)|.$$

所以(8.6)成立.

(b): (8.7)中的第二个不等式是显然的: 因$\varphi: D\to\mathbb{R}^n$ 属于C^1类且$K\subset D$是紧凸集, 故$b=\max\limits_{t\in K}\|\varphi'(t)\|$ 存在(当然有限). 因此由微分中值不等式知对任意$t,s\in K$ 存在$\xi\in[t,s]\subset K$ 使得

$$|\varphi(t)-\varphi(s)|\le\|\varphi'(\xi)\||t-s|\le b|t-s|.$$

为证(8.7)中的第一个不等式, 我们用反证法: 假设这样的$a>0$ 不存在, 则对任意$j\in\mathbb{N}$ 存在$t_j,s_j\in K$ 使得

$$|\varphi(t_j)-\varphi(s_j)|<\frac{1}{j}|t_j-s_j|.$$

注意这蕴含$t_j\neq s_j$. 因$K\times K$ 是紧集, 故存在子列$\{(t_{j_i},s_{j_i})\}_{i=1}^{\infty}$ 和$(t_0,s_0)\in K\times K$ 使得$(t_{j_i},s_{j_i})\to(t_0,s_0)\,(i\to\infty)$. 即$t_{j_i}\to t_0\in K$, $s_{j_i}\to s_0\in K\,(i\to\infty)$. 于是由$\varphi$ 连续得到

$$|\varphi(t_0)-\varphi(s_0)|=\lim_{i\to\infty}|\varphi(t_{j_i})-\varphi(s_{j_i})|\le\lim_{i\to\infty}\frac{1}{j_i}|t_{j_i}-s_{j_i}|=0.$$

这蕴含$|\varphi(t_0)-\varphi(s_0)|=0$. 但$\varphi$是单射, 故必有$t_0=s_0$. 注意$t_0\in K\subset D$. 令$\mathrm{T}=\varphi'(t_0)$. 则由(a), 存在$\delta>0$ 使得$B(t_0,\delta)\subset D$ 且

$$\frac{\beta}{2}|t-s|\le\frac{1}{2}|\mathrm{T}(t-s)|\le|\varphi(t)-\varphi(s)|\qquad\forall\, t,s\in B(t_0,\delta).$$

因$t_{j_i},s_{j_i}\to t_0\,(i\to\infty)$, 故当$i>>1$ 时$t_{j_i},s_{j_i}\in B(t_0,\delta)$. 于是注意$t_{j_i}\ne s_{j_i}$ 得到

$$\frac{\beta}{2}\le\frac{|\varphi(t_{j_i})-\varphi(s_{j_i})|}{|t_{j_i}-s_{j_i}|}<\frac{1}{j_i}\to 0\quad(i\to\infty).$$

这导致$\beta=0$, 与$\beta=\min\limits_{|\omega|=1}|\mathrm{T}\omega|>0$ 矛盾. 所以(8.7)中的第一个不等式成立. $\square$

【命题9.35】 设$n\in\mathbb{N},k\in\{1,2,...,n\},D\subset\mathbb{R}^k$ 为开集.

(a) 设$\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ 为C^1 映射. 则φ 把D中的L-零测集映为$\mathbb{R}^n$中的H_k-零测集, 把D中的L-可测集映为$\mathbb{R}^n$中的H_k-可测集, 即

若$Z\subset D$, $m_k(Z)=0$ 则$H_k(\varphi(Z))=0$;

若$E\subset D$是L-可测集, 则$\varphi(E)$是H_k-可测集.

(b) 设$\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且$\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0$ for all $x\in D$. 则对任意$S\subset\varphi(D)$ 有:

$$S\text{ 是}H_k\text{-可测集}\iff\varphi^{-1}(S)\text{ 是}L\text{-可测集}.$$

【证】(a): 设$Z\subset D$ 为L-零测集, 即$m_k(Z)=0$. 设$Q\subset D$ 为闭方体. 由假设知$C:=\sup\limits_{t\in Q}\|\varphi'(t)\|<+\infty$. 据微分中值不等式知

$$|\varphi(t)-\varphi(s)|\le C|t-s|\quad\forall\, t,s\in Q.$$

因此由**命题9.27(Hausdorff外测度保持距离不等式)**有

$$H_k^*(\varphi(Q\cap Z))\le C^kH_k^*(Q\cap Z)\le C^kH_k^*(Z)=C^km_k^*(Z)=0.$$

所以$\varphi(Q\cap Z)$ 是H_k-零测集。

由开集的方体分解定理可写$D=\bigcup_{j=1}^\infty\overline{Q}_j$ 其中$\overline{Q}_j$ 是2 进闭方体。这给出

$$Z=\bigcup_{j=1}^\infty\overline{Q}_j\cap Z,\quad\varphi(Z)=\bigcup_{j=1}^\infty\varphi(\overline{Q}_j\cap Z),$$

$$H_k^*(\varphi(Z))\le\sum_{j=1}^\infty H_k^*(\varphi(\overline{Q}_j\cap Z))=0.$$

所以$\varphi(Z)$ 是H_k-零测集。这证明了φ 把D中的L-零测集映为H_k-零测集。

设$E\subset D$为L-可测集。则由L-可测集的结构知存在可数多个紧集K_j 和L-零测集Z 使得$E=Z\cup\bigcup_{j\ge1}K_j$. 据此有$\varphi(E)=\varphi(Z)\cup\bigcup_{j\ge1}\varphi(K_j)$. 因$\varphi$连续故$\varphi(K_j)$也是紧集从而是Borel 集因此$\bigcup_{j\ge1}\varphi(K_j)$是$H_k$-可测集。又$\varphi(Z)$是$H_k$-零测集, 当然也是$H_k$-可测集。所以$\varphi(E)$ 是H_k-可测集。

(b): 对任意$S\subset\varphi(D)$, 令$E=\varphi^{-1}(S)$. 则$E\subset D$. 于是只需证明对任意$E\subset D$ 有:

$$E\text{是}L\text{-可测集}\iff\varphi(E)\text{是}H_k\text{-可测集''}$$

由(a)知φ 把D中的L-可测集映为$\varphi(D)$中的H_k-可测集。因此"$\Longrightarrow$"成立。

对于"$\Longleftarrow$", 设$E\subset D$ 使得$\varphi(E)$是H_k-可测集。来证明E是L-可测集。如上, 有分解$D=\bigcup_{j=1}^{\infty}\overline{Q}_j$ 其中$\overline{Q}_j$ 是2 进闭方体。由$E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E\cap\overline{Q}_j$ 可见只需证明每个$E\cap\overline{Q}_j$都是L-可测集。也即只需证明对任意闭方体$Q\subset D$, $E\cap Q$ 是L-可测集。

由**引理9.34** 知对于闭方体$Q\subset D$, 存在常数$a>0,b>0$ 使得

$$|t-s|\le\frac{1}{a}|\varphi(t)-\varphi(s)|,\quad |\varphi(t)-\varphi(s)|\le b|t-s|\qquad\forall\, t,s\in Q.\tag{8.10}$$

因φ 是单射, 故$\varphi(E\cap Q)=\varphi(E)\cap\varphi(Q)$. 又因$\varphi(E),\varphi(Q)$ 都是H_k-可测集, 故$\varphi(E\cap Q)$也是H_k-可测集。由(8.10)中的第二个不等式和**命题9.27(Hausdorff外测度保持距离不等式)** 并注意$\mathbb{R}^k$ 上的Hausdorff 外测度H_k^*等于Lebesgue 外测度m_k^*, 有

$$H_k(\varphi(E\cap Q))\le b^kH_k^*(E\cap Q)=b^km_k^*(E\cap Q)\le b^km_k(Q)<+\infty.$$

根据**命题9.32**, 这个测度有限性保证了$\varphi(E\cap Q)$ 可以分解成$\varphi(E\cap Q)=B\cup Z$ 其中B是Borel 集, Z 是H_k-零测集。于是得到分解

$$E\cap Q=\varphi^{-1}(B\cup Z)=\varphi^{-1}(B)\cup\varphi^{-1}(Z).$$

因$\varphi:D\to\mathbb{R}^n$连续, 故$\varphi^{-1}(B)$ 是Borel 集(见**命题9.8**) 从而是L-可测集。又因$\varphi^{-1}(Z)\subset Q$, 故由(8.10)中的第一个不等式和**命题9.27(Hausdorff外测度保持距离不等式)**并注意$\mathbb{R}^k$ 上的Hausdorff 外测度H_k^*等于Lebesgue 外测度m_k^*, 有

$$m_k^*(\varphi^{-1}(Z))=H_k^*(\varphi^{-1}(Z))\le(1/a)^kH_k^*(\varphi(\varphi^{-1}(Z)))=(1/a)^kH_k^*(Z)=0.$$

因此$\varphi^{-1}(Z)$是L-零测集从而是L-可测集。所以$E\cap Q=\varphi^{-1}(B)\cup\varphi^{-1}(Z)$ 是L-可测集。 $\square$

下面学习k-维子空间中的集合的Hausdorff 测度计算公式。

【**命题9.36**】设$k\in\{1,2,...,n\}$, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times k}$. 则有:

若$\mathrm{rank}(\mathrm{A})<k$, 即$\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})=0$, 则$H_k(\mathrm{A}(E))=0$ for all $E\subset\mathbb{R}^k$.

若$\mathrm{rank}(\mathrm{A})=k$ (满秩), 即$\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})>0$, 则对任意$E\subset\mathbb{R}^k$ 有:

E是Lebesgue 可测集 $\iff$ $\mathrm{A}(E)$是H_k-可测集.

当两边之一满足时有

$$H_k(\mathrm{A}(E))=\sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})}\,m_k(E).$$

【证】设$\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})=0$. 则由**命题9.30**知$H_k^*(\mathrm{A}(E))=\sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})}\,m_k^*(E)=0$ for all $E\subset\mathbb{R}^k$.

设$\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})>0$. 因测度等式是**命题9.30**的结论, 故只需证明可测性部分. 由A满秩知映射$t\mapsto\mathrm{A}t$ 是$\mathbb{R}^k$ 到$\mathbb{R}^n$的单射, 其逆映射为[7]

$$\mathrm{A}^{-1}(x):=(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\tau x,\quad x\in\mathrm{A}(\mathbb{R}^k).$$

因$\mathbb{R}^k$, $\mathrm{A}(\mathbb{R}^k)$ 分别是$\mathbb{R}^k$ 和$\mathbb{R}^n$的闭集, 故由**命题9.8(b)** 知映射$t\mapsto\mathrm{A}t$ 把$\mathbb{R}^k$中的Borel集映为Borel 集, 映射$x\mapsto\mathrm{A}^{-1}(x)$ 把$\mathrm{A}(\mathbb{R}^k)$中的Borel 集映为Borel 集.

设$E\subset\mathbb{R}^k$ 是L-可测集. 则由L-可测集的结构知$E=F\cup Z$ 其中F 是Borel集, Z 是L-零测集即$m_k^*(Z)=0$. 于是有$\mathrm{A}(E)=\mathrm{A}(F)\cup\mathrm{A}(Z)$ 且$\mathrm{A}(F)$ 是Borel 集从而是H_k-可测集. 因

$$H_k^*(\mathrm{A}(Z))=\sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})}\,m_k^*(Z)=0$$

故$\mathrm{A}(Z)$ 也是H_k-零测集从而是H_k-可测集.

反之设$E\subset\mathbb{R}^k$使得$\mathrm{A}(E)$ 是H_k-可测集. 令$E_j=E\cap[-j,j]^k$. 则$E=\bigcup_{j=1}^\infty E_j$, $\mathrm{A}(E)=\bigcup_{j=1}^\infty\mathrm{A}(E_j)$,

$$H_k(\mathrm{A}(E_j))=\sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})}\,m_k^*(E_j)<+\infty,\quad j=1,2,3,\dots.$$

因此由**命题9.32(b)(可测集的结构)** 知存在Borel 集B 和H_k-零测集Z使得$\mathrm{A}(E)=B\cup Z$. 由此有$E=\mathrm{A}^{-1}(B)\cup\mathrm{A}^{-1}(Z)$. 因$\mathrm{A}^{-1}(B)$ 是Borel集, 故它也是L-可测集. 又由

$$0=H_k(Z)=H_k(\mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1}(Z)))=\sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})}\,m_k^*(\mathrm{A}^{-1}(Z))$$

[7] **当**$x\in\mathrm{A}(\mathbb{R}^k)$ **时易证** $x=\mathrm{A}t\iff\mathrm{A}^\tau x=\mathrm{A}^\tau\mathrm{A}t\iff(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\tau x=t$.

和$\sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau\mathrm{A})}>0$知$m_k^*(\mathrm{A}^{-1}(Z))=0$ 从而$\mathrm{A}^{-1}(Z)$也是L-可测集. 所以$E=\mathrm{A}^{-1}(B)\cup\mathrm{A}^{-1}(Z)$是$L$-可测集. $\square$

作业题　以下设$k > 0, H_k, H_k^*$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的Hausdorff 测度和外测度.

说明: 若$E \subset \mathbb{R}^n$ 有可数分解$E = \bigcup_{j\ge1} E_j$ 满足每个E_j 都是H_k- 可测集且 $H_k(E_j) < +\infty$, 则称E (关于测度H_k) 是**σ-有限的**.

1. 设$E \subset \mathbb{R}^n$是一个Borel 集且$0 < H_k(E) < +\infty$. 证明

若$0 \le p < k$, 则$H_p(E) = +\infty$; 若$k < p$, 则$H_p(E) = 0$.

由于这个缘故, 我们称E的Hausdorff维数等于k.　[这里“Borel集”的目的仅在于使得对任意$p > 0$, E都是H_p-可测集从而符号$H_p(E)$ 有意义.]

2. (1) 设$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且$C := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|\Phi'(t)\| < +\infty$. 证明

$$H_k^*(\Phi(E)) \le C^k H_k^*(E) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^n.$$

并证明当E是σ-有限的H_k-可测集时, $\Phi(E)$也是σ-有限的H_k-可测集.

(2) 设方阵$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆, 令λ_1, λ_n 分别是正定阵$A^\tau A$的最小特征值和最大特征值. 证明: 对任一σ-有限的H_k-可测集$E \subset \mathbb{R}^n$有

$$\lambda_1^{k/2} H_k(E) \le H_k(\mathrm{A}(E)) \le \lambda_n^{k/2} H_k(E).$$

其中$\mathrm{A}(E) = \{\mathrm{A}x \,|\, x \in E\}$.

3. 设$k \in \{1, 2, ..., n\}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ 为开凸集, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ 为C^1类映射且

$$C := \sup_{x\in D} \|\varphi'(t)\| < +\infty.$$

证明: 对任意L-可测集$E \subset D$, $\varphi(E)$ 是H_k-可测集且

$$H_k(\varphi(E)) \le C^k m_k(E).$$

§9.9. 可测函数

有了可测集和测度, 还需要建立可测函数类, 它将用于定义和研究函数的积分—— 因为不可能对所有函数都可以定义积分。可测函数的主要概念只与可测空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M})$有关而与其上的测度无关, 只是在涉及“几乎处处”等由测度确定的性质时, 才与测度有关。因本讲义主要讲授完备测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 和相应的积分理论, 特别着重学习Lebesgue测度空间$\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$ 和Hausdorff测度空间$\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_k,H_k)$ 上的测度与积分, 其中多涉及“几乎处处”等由测度确定的性质, 因此当涉及测度时, 我们将只考虑完备的测度空间。特别回忆: 测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$是完备的是指: $\mathcal{M}$-零测集的子集都是$\mathcal{M}$-可测集从而还是$\mathcal{M}$-零测集。

【记号】在分析学和概率论中, 映射$f:E\to[-\infty,+\infty]$ 在集合$B\subset[-\infty,+\infty]$ 下的逆象集$f^{-1}(B)$ 也常被写成直观的形式:

$$f^{-1}(B)=E(f\in B):=\{x\in E\,|\,f(x)\in B\}.$$

记号$E(f\in B)$ 的优点是: 它指明了f的定义域(或所考虑的集合)为E. 例如

$$E(f>t)=E(f\in(t,+\infty])=f^{-1}((t,+\infty])=\{x\in E\,|\,f(x)>t\}\,,$$

$$E(a\le f<b)=E(f\in[a,b))=f^{-1}([a,b))=\{x\in E\,|\,a\le f(x)<b\}\,,$$

$$E(f>g)=\{x\in E\mid f(x)>g(x)\}\,,\quad E(f\ne g)=\{x\in E\mid f(x)\ne g(x)\}\,,\quad \text{etc.}$$

【定义(广义实值可测函数)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M})$ 为一可测空间, $E\in\mathcal{M}$, $f:E\to[-\infty,+\infty]$. 如果

$$E(f>t)\ \in\mathcal{M}\qquad\forall\,t\in\mathbb{R}$$

则称f 是E 上的广义实值$\mathcal{M}$-可测函数, 也称f 在E 上$\mathcal{M}$-可测。若f 是E 上的广义实值$\mathcal{M}$-可测函数且f 的值域含于$\mathbb{R}$, 则称f 是E上的实值$\mathcal{M}$-可测函数。当$\mathcal{M}$ 明确后, $\mathcal{M}$-可测函数也简称为可测函数。此外我们规定：任何函数都在空集上可测。 □

【注】上述定义及其导出的结果（见下面）体现了测度论的一大特点：很多情况下问题的处理是从函数的值域着手, 从值域上设定的性质来确定定义域应提供的性质。

【命题9.37】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M})$ 为一可测空间, $E\in\mathcal{M}$, $f:E\to[-\infty,+\infty]$. 则

(a) 以下(1),(2),(3),(4) 四类可测性彼此等价, 因此其中任何一个都可作为可测函数的定义：

(1) $E(f>t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}$. (2) $E(f\ge t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}$.

(3) $E(f<t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}$. (4) $E(f\le t)\in\mathcal{M}\quad\forall\, t\in\mathbb{R}$.

(b) 设f 可测。则(由**(a)**)

$E(f=t)=E(f\le t)\cap E(f\ge t)\in\mathcal{M}$,

$E(f<+\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f<k)\in\mathcal{M}$,

$E(f>-\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>-k)\in\mathcal{M}$,

$E(|f|<+\infty)=E(f<+\infty)\cap E(f>-\infty)\in\mathcal{M}$,

$E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>k)\in\mathcal{M}$,

$E(f=-\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f\le -k)\in\mathcal{M}$.

(c) 设f 可测. 则对任意Borel 集$B\subset\mathbb{R}$ 有$E(f\in B)\in\mathcal{M}$.

【证】只需证(a) 和(c). 对于(a) 我们有

$$x\in E(f>t)\Longleftrightarrow x\in E\ \text{且}\ f(x)>t\Longleftrightarrow x\in E\ \text{且}\ \exists\, k\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ f(x)\ge t+1/k$$
$$\Longleftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ x\in E(f\ge t+1/k)\ \Longleftrightarrow\ x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\ge t+1/k)\,.$$

同理有

$$x\in E(f\ge t)\Longleftrightarrow x\in E\ \text{且}\ f(x)\ge t\ \Longleftrightarrow x\in E\ \text{且}\ f(x)>t-1/k\quad\forall\, k\in\mathbb{N}$$
$$\Longleftrightarrow x\in E(f>t-1/k)\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}\ \Longleftrightarrow\ x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>t-1/k)\,.$$

所以

$$E(f>t)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\ge t+1/k)\,,\quad E(f\ge t)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>t-1/k)\,.$$

因此 (1) 与(2) 等价.

同法可证对任意$t\in\mathbb{R}$ 有

$$E(f<t)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\le t-1/k),\quad E(f\le t)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f<t+1/k).$$

因此(3) 与(4) 等价. 而由$E\in\mathcal{M}$ 和$E(f\ge t)=E\setminus E(f<t)$, $E(f<t)=E\setminus E(f\ge t)$, 可见 (2) 与(3) 等价. 这证明了蕴涵关系 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) 成立.

对于(c), 令

$$\mathcal{A}=\{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\mid E(f\in B)\in\mathcal{M}\}\,.$$

则要证明的是$\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$. 为此只需证明$\mathcal{A}$ 是一个$\sigma-$代数并且$\mathcal{A}$ 包含了$\mathbb{R}$中所有有界开区间. 如果这件事成立, 则由Borel σ-代数的等价定义(见**命题9.6(Borel σ- 代数的等价定义)**) —— 包含所有有界开区间的最小σ-代数——可知$\mathcal{A}\supset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. 但已有$\mathcal{A}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 所以$\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

我们有

$$\begin{aligned}
&E(f\in\mathbb{R})=E(-\infty<f<+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E(f>-n)\cup E(f<n))\in\mathcal{M}\Longrightarrow\mathbb{R}\in\mathcal{A}\,,\\
&B\in\mathcal{A}\Longrightarrow E(f\in B^c)=E(f\in\mathbb{R})\setminus E(f\in B)\in\mathcal{M}\Longrightarrow B^c\in\mathcal{A}\,,\\
&B_k\in\mathcal{A}\,,\,k=1,2,...,\Longrightarrow E(f\in\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\in B_k)\in\mathcal{M}\Longrightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\in\mathcal{A}\,.
\end{aligned}$$

所以$\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}$上的一个σ-代数. 此外对任意有界开区间(a,b) 有

$$E(f\in(a,b))=E(f>a)\cap E(f<b)\in\mathcal{M}\Longrightarrow(a,b)\in\mathcal{A}\,.\qquad\Box$$

【例】设$E\in\mathcal{M}$, $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 为$\mathcal{M}$-可测. 则取开集$B=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 可知

$$E(0<|f|<+\infty)=E(f\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\in\mathcal{M}.$$

$\Box$

【定义(几乎处处)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\subset\mathbb{R}^n$, $P(x)$ 是一个与x 有关的性质. 若集合$Z:=\{x\in E\mid P(x)$ 不成立$\}$满足$\mu(Z)=0$, 则称$P(x)$ 在E 上μ-几乎处处成立, 简称为几乎处处成立, 也简记为$P(x)$ a.e. $x\in E$ 或 P a.e. 于E 或 P a.e.. 这里 a.e. = almost everywhere. $\Box$

【强调】"几乎处处"完全是由所考虑的测度μ 决定的。对于$\mathbb{R}^n$上的两个测度μ,ν, 性质$P(x)$关于测度μ 几乎处处成立, 但关于测度ν 就未必几乎处处成立。

对于给定的完备测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$, 我们用"$\mu(Z)=0$"同时表示两个意思：一个是$Z\subset\mathbb{R}^n$ 是一个$\mathcal{M}$-可测集, 另一个是Z的μ-测度等于零。由于本讲义中学习的具体的测度空间都是从$\mathbb{R}^n$上的度量外测度μ^*得到的完备测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ [例如是Lebesgue 测度空间和Hausdorff 测度空间] 其中特别有等价关系: $\mu(Z)=0\iff$

$\mu^*(Z)=0$, 而外测度记号$\mu^*(Z)$ 对任意集合$Z\subset\mathbb{R}^n$ 都有意义, 因此这种略微模糊的写法"$\mu(Z)=0$"在后面的学习和应用的具体情况中都是有意义的合理的。

常用的几个"几乎处处"如下:

• **几乎处处有限:** 设$f:E\subset\mathbb{R}^n\to[-\infty,+\infty]$. 若

$$\mu(E(|f|=+\infty))=0$$

则称f 在E 上几乎处处有限, 记为$|f|<+\infty$ a.e. 于E.

• **几乎处处相等:** 设$f,g:E\subset\mathbb{R}^n\to[-\infty,+\infty]$. 若

$$\mu(E(f\neq g))=0$$

则称f 与g 在E 上几乎处处相等, 记为$f=g$ a.e. 于E.

• **几乎处处收敛:** 设f_k,f 是$E\subset\mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数($k=1,2,3,...$). 若

$$\mu(E(f_k\not\to f))=0$$

其中$E(f_k\not\to f)=\{x\in E\mid f_k(x)\not\to f(x)\ (k\to\infty)\}$, 则称$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在E 上几乎处处收敛于f, 记做

$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ a.e. $x\in E$ 或 $f_k\to f\ (k\to\infty)$ a.e. 于E.

• **几乎处处连续:** 设$E\subset\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}^m$ 满足

$$\mu(\{x\in E\mid f\text{在}x\text{不连续}\})=0$$

则称f在E上几乎处处连续.

• **几乎处处可微:** 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$. 若

$$\mu(\{x\in\Omega\mid f\text{在}x\text{不可微}\})=0$$

则称f在Ω上几乎处处可微.

【注1】由于空集的测度为零, 因此"处处成立"自然是"几乎处处成立".

【注2】因完备测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$是完备的, 即零测集的子集还是可测集从而是零测集, 故任何性质都在零测集上几乎处处成立. 因此为使问题真正有意义, 应用时就要

看前提集合E 是否具有正测度, 即是否有$\mu(E) > 0$.

【命题9.38(可测函数基本性质)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$.

(a) 若$\mu(E) = 0$, 则E上的任何函数都是可测函数。

(b) 若f 在E 上可测, $A \subset E$ 是可测子集, 则f 在A 上可测。

(c) 若$Z \subset E$ 是零测集, f 在$E \setminus Z$ 上可测, 则无论f在Z上是否有定义,

在Z上任意定义f的值后, f都在E上可测。

(d) 设$E_k \in \mathcal{M}$, $f : E = \bigcup_{k\geq 1} E_k \to [-\infty, +\infty]$. 则

$$f \text{ 在} E \text{ 上可测} \iff f \text{ 在每个} E_k \text{ 上可测。}$$

(e) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$在$E$上几乎处处相等, 则有

$$f \text{ 在} E \text{ 上可测} \iff g \text{ 在} E \text{ 上可测。}$$

特别若f在E上可测, 则在E的任何零测子集上修改f的值不改变f在E上的可测性。

(f) 设I, J为$\mathbb{R}$中的开集, $\Phi : I \times J \to \mathbb{R}$ 连续。设$f : E \to I, g : E \to J$都可测, 则$x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$在$E$上可测。

特别分别取$\Phi(u, v) = \alpha u + \beta v, |u|, uv, u/v$ 和$I = \mathbb{R}, J = \mathbb{R}$ 以及$J = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 其中$\alpha, \beta$ 为常数, 则可知当$f, g : E \to \mathbb{R}$可测时, $\alpha f + \beta g, |f|, fg$都在$E$上可测。又若$g : E \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 可测, 则f/g 在E 上可测。

(g) 若$f(x) = c \in [-\infty, +\infty]$ (广义常数), 则f 在E 上可测。

(h) 若$f, g : E \to [0, +\infty]$ 可测, 则$f + g$ 在E 上可测。

一般地, 若$f, g : E \to [0, +\infty]$ 可测且$E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)$ 和

$E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty)$ 都是零测集, 则$f + g$ 在E 上可测。

(i) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ 可测, 则乘积fg 在E 上可测。

(j) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ 且$0 < |g(x)| < +\infty$ a.e. 于$x \in E$, 则f/g 在E 上可测。

(k) 若$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ 为可测函数, 则$E(f > g) \in \mathcal{M}$, $E(f \neq g) \in \mathcal{M}$.

【证】以下证明将多次用到$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$的完备性。

(a): 这是因为对任意$t \in \mathbb{R}$, $E(f > t)$ 都是零测集从而是可测集。

(b): 这是因为$A(f>t)=E(f>t)\cap A$.

(c): 若f在Z上无定义, 则随意定义其值, 例如定义$f(x)=0, x\in Z$. 则对任意$t\in\mathbb{R}$, $Z(f>t)$ 都是零测集从而是可测集, 因此$E(f>t)=(E\setminus Z)(f>t)\cup Z(f>t)$ 是可测集。

(d): 这是下面等式的推论：

$$E_k(f>t)=E(f>t)\cap E_k,\qquad E(f>t)=\bigcup_{k\ge1}E_k(f>t).$$

(e): 令$E_1=E(f\neq g), E_2=E\setminus E_1=E(fg)$. 则$E_1$ 是零测集从而是可测集, 因而E_2是可测集。f,g 当然都在零测集E_1上可测。于是结合$f|_{E_2}=g|_{E_2}$即知：f在E上可测$\Longleftrightarrow f$在E_2上可测$\Longleftrightarrow g$在E_2上可测$\Longleftrightarrow g$在E上可测。

(f): 对任意$t\in\mathbb{R}$, 若$E(\Phi(f,g)>t)$为空集, 则$E(\Phi(f,g)>t)$可测。设$E(\Phi(f,g)>t)$非空。则由$\Phi:I\times J\to\mathbb{R}$ 连续和$I\times J$是开集　知$(I\times J)(\Phi>t)=\Phi^{-1}((t,+\infty))$ 是$\mathbb{R}^2$的非空开集。据开集的方体分解有

$$\{(u,v)\in I\times J\mid \Phi(u,v)>t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\times[c_k,d_k).$$

易见对任意$x\in E$ 有:

$$\begin{aligned}&\Phi(f(x),g(x))>t\iff (f(x),g(x))\in\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\times[c_k,d_k)\\&\iff \exists\, k\in\mathbb{N}\text{ s.t. } f(x)\in[a_k,b_k),\ g(x)\in[c_k,d_k)\\&\iff \exists\, k\in\mathbb{N}\text{ s.t. } x\in E(f\in[a_k,b_k))\cap E(g\in[c_k,d_k))\\&\iff x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\in[a_k,b_k))\cap E(g\in[c_k,d_k)).\end{aligned}$$

这就证明了

$$E(\Phi(f,g)>t)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\in[a_k,b_k))\cap E(g\in[c_k,d_k)).$$

因$E(f\in[a_k,b_k)), E(g\in[c_k,d_k))$都是可测集, 所以$E(\Phi(f,g)>t)$是可测集. 所以$x\mapsto\Phi(f(x),g(x))$在$E$上可测.

(g): 这是因为对任意$t\in\mathbb{R}$ 有

$$E(f>t)=\emptyset\in\mathcal{M}\ \text{当}t\ge c\text{时},\quad E(f>t)=E\in\mathcal{M}\ \text{当}t<c\ \text{时}.$$

(h): 设$f, g : E \to [0, +\infty]$ 可测且$E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)$ 和$E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty)$ 都是零测集. 来证明$f + g$ 在E 上可测. 令

$$
\begin{aligned}
E_1 &= [E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)] \cup [E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty)],\\
E_2 &= [E(f = +\infty) \cap E(-\infty < g \le +\infty)] \cup [E(-\infty < f \le +\infty) \cap E(g = +\infty)],\\
E_3 &= [E(f = -\infty) \cap E(-\infty \le g < +\infty)] \cup [E(-\infty \le f < +\infty) \cap E(g = -\infty)],\\
E_4 &= E(|f| < +\infty) \cap E(|g| < +\infty).
\end{aligned}
$$

则$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ 且E_1, E_2, E_3, E_4 都是可测集, $\mu(E_1) = 0$, 而$f + g$ 在E_2, E_3 上分别是广义常数$+\infty$, $-\infty$, 因此$f + g$ 分别在E_2, E_3上可测. 又由(f) 知$f + g$在E_4上可测, 所以$f + g$ 分别在E_1, E_2, E_3, E_4上可测. 所以$f + g$在E上可测.

(i): 考虑分解$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ 其中

$$
\begin{aligned}
&E_1 = E(fg = +\infty), \quad E_2 = E(fg = -\infty), \quad E_3 = E(fg = 0)\\
&E_4 = E(0 < |fg| < +\infty) = E(0 < |f| < +\infty) \cap E(0 < |g| < +\infty).
\end{aligned}
$$

则E_1, E_2, E_3, E_4都是可测集, fg 在E_1, E_2, E_3 上分别是广义常数$+\infty$, $-\infty, 0$, 因此fg 分别在E_1, E_2, E_3上可测. 又由(f) 知fg在E_4上可测, 所以fg 分别在E_1, E_2, E_3, E_4上可测. 所以fg在E上可测.

(j): 考虑分解$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ 其中

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E(g = 0) \cup E(|g| = +\infty)\\
E_2 &= [E(f = +\infty) \cap E(0 < g < +\infty)] \cup [E(f = -\infty) \cap E(-\infty < g < 0)],\\
E_3 &= [E(f = +\infty) \cap E(-\infty < g < 0)] \cup [E(f = -\infty) \cap E(0 < g < +\infty)],\\
E_4 &= E(|f| < +\infty) \cap E(0 < |g| < +\infty).
\end{aligned}
$$

则E_1, E_2, E_3, E_4都是可测集, $\mu(E_1) = 0$, f/g 在E_2, E_3 上分别是广义常数$+\infty$, $-\infty$, 因此f/g 分别在E_2, E_3上可测. 又由(f) 知f/g在E_4上可测, 所以f/g 分别在E_1, E_2, E_3, E_4上可测. 所以f/g在E上可测.

(k): 写$\mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ (全体有理数). 由有理数的稠密性易见

$$
E(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f > r_k) \cap E(g < r_k) \in \mathcal{M}.
$$

由此还知$E(f\neq g)=E(f>g)\cup E(g>f)\in\mathcal{M}$. $\square$

【可测函数的极限函数的可测性】

【命题9.39】 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是E 上的一列广义实值可测函数. 则

(a) 上极限函数 $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}(\sup\limits_{j\ge k} f_j(x))=\inf\limits_{k\ge1}(\sup\limits_{j\ge k} f_k(x))$, $\quad x\in E$,

下极限函数 $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}(\inf\limits_{j\ge k} f_k(x))=\sup\limits_{k\ge1}(\inf\limits_{j\ge k} f_k(x))$, $\quad x\in E$

都是E 上的可测函数.

(b) 若$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)\ \ \forall\, x\in E$, 则极限函数$f$ 在E 上可测.

(c) 若$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ a.e. $x\in E$, 则极限函数f 在E 上可测.

【证】(a): 令

$$F_k(x)=\sup_{j\ge k} f_j(x),\quad G_k(x)=\inf_{j\ge k} f_j(x).$$

容易验证对任意$t\in\mathbb{R}$

$$E(F_k\le t)=\bigcap_{j=k}^\infty E(f_j\le t)\in\mathcal{M},\quad E(G_k\ge t)=\bigcap_{j=k}^\infty E(f_j\ge t)\in\mathcal{M}.$$

因此F_k,G_k 都在E 上可测$(k=1,2,3,\dots.)$. 于是对任意$t\in\mathbb{R}$有

$$E(\inf_{k\ge1} F_k\ge t)=\bigcap_{k=1}^\infty E(F_k\ge t)\in\mathcal{M},\quad E(\sup_{k\ge1} G_k\le t)=\bigcap_{k=1}^\infty E(G_k\le t)\in\mathcal{M}.$$

所以上极限函数$\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\inf\limits_{k\ge1} F_k(x)$ 和下极限函数$\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\sup\limits_{k\ge1} G_k(x)$ 都在E 上可测.

(b): 此时有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_k(x)=\limsup_{k\to\infty} f_k(x)=\liminf_{k\to\infty} f_k(x)\qquad\forall\, x\in E$$

所以f 在E 上可测.

(c): 令

$$Z=\{x\in E\mid f_k(x)\not\to f(x)\ (k\to\infty)\}.$$

则$\mu(Z)=0$ 因此Z 是可测集, 从而$E\setminus Z$ 是可测集. 因Z是零测集, 故f在Z上可测, 而由(b) 知f在$E\setminus Z$上可测. 所以f在$E=Z\cup(E\setminus Z)$上可测. $\square$

【连续函数和复合函数的可测性】

【命题9.40】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间且$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{M}$ (即$\mathbb{R}^n$中的每个Borel 集都是$\mathcal{M}$-可测集), 设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为$\mathcal{M}$- 可测集. 则有:

(a) 若$f:E\to\mathbb{R}$ 几乎处处连续, 则f 在E上可测.

(b) 若$f:E\to\mathbb{R}$可测且$f(E)\subset I$ 其中I 是一个区间, 又设$g:I\to\mathbb{R}$ 连续, 则复合函数$x\mapsto g(f(x))$ 在E上可测.

【证】(a): 先设f在E上处处连续。对任意$t\in\mathbb{R}$, 由连续函数的开集刻画知对于开集$(t,+\infty)\subset\mathbb{R}$, 存在开集$U_t\subset\mathbb{R}^n$ 使得$f^{-1}((t,+\infty))=E(f>t)=U_t\cap E$. 因$E$是$\mathcal{M}$-可测集, U_t是Borel 集从而是$\mathcal{M}$-可测集, 故$U_t\cap E$为$\mathcal{M}$-可测集。因此f在E上$\mathcal{M}$-可测。

其次设f 在E上几乎处处连续, 即存在μ-零测集$Z\subset E$ 使得$E\setminus Z$中每一点都是f在E上的连续点。这特别蕴含限制在$E\setminus Z$上, $f:E\setminus Z\to\mathbb{R}$ 处处连续。因$E\setminus Z$ 是$\mathcal{M}$-可测集, 故f在$E\setminus Z$上$\mathcal{M}$-可测。又因Z 是零测集, 故f在Z上$\mathcal{M}$-可测, 所以f在$E=(E\setminus Z)\cup Z$ 上$\mathcal{M}$-可测。

(b): 对任意$t\in\mathbb{R}$, 由g连续、I是区间从而是Borel集、以及**命题9.8(a)** 知$B_t:=g^{-1}((t,+\infty))=I(g>t)$ 是Borel 集。因

$$E(g\circ f>t)=E(g\circ f\in(t,+\infty))=E(f\in g^{-1}((t,+\infty)))=E(f\in B_t)$$

故由**命题9.37(c)** 知$E(g\circ f>t)=E(f\in B_t)\in\mathcal{M}$. 所以复合函数$g\circ f$在$E$上可测。 $\square$

【命题9.41(C^1 变换下函数的可测性)】

(a) 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$ 为Lebesgue测度空间, $D\subset\mathbb{R}^n$为开集, $\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且$\det\varphi'(t)\neq0$ for all $t\in D$. 设$f:\varphi(D)\to[-\infty,+\infty]$. 则有

$$x\mapsto f(x)\text{在}\varphi(D)\text{上}L\text{-可测}\iff\text{复合函数}t\mapsto f(\varphi(t))\text{在}D\text{上}L\text{-可测}.$$

(b) 一般地, 设$k\in\{1,2,...,n\}$, $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_k,H_k)$ 为Hausdorff测度空间, $D\subset\mathbb{R}^k$为开集, $\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且$\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0$ for all $t\in D$. 设$f:\varphi(D)\to[-\infty,+\infty]$. 则有

$$x\mapsto f(x)\text{在}\varphi(D)\text{上}H_k\text{-可测}\iff\text{复合函数}t\mapsto f(\varphi(t))\text{在}D\text{上}L\text{-可测}.$$

【证】设φ为(a),(b)中给出的映射, f为$\varphi(D)$上的广义实值函数. 则对任意$\tau\in\mathbb{R}$ 有等式:

$$\varphi(D)(f>\tau)=\varphi(D(f\circ\varphi>\tau)),\quad D(f\circ\varphi>\tau)=\varphi^{-1}(\varphi(D)(f>\tau)).\tag{9.1}$$

事实上对任意$x\in\varphi(D),t\in D$ 有

$$x\in\varphi(D)(f>\tau)\iff f\circ\varphi(\varphi^{-1}(x)))=f(x)>\tau$$
$$\iff\varphi^{-1}(x)\in D(f\circ\varphi>\tau),\, x=\varphi(\varphi^{-1}(x))\in\varphi(D(f\circ\varphi>\tau)),$$

$$t\in D(f\circ\varphi>\tau)\iff f(\varphi(t))>\tau\iff\varphi(t)\in\varphi(D(f>\tau))$$
$$\iff t\in\varphi^{-1}(\varphi(D(f>\tau)).$$

所以(9.1)成立.

(a): 由假设条件和反函数定理知$\varphi(D)$是$\mathbb{R}^n$的开集且逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(D)\to D$ 也是C^1的. 因此由**命题9.22(b)**知, φ 把D中的L-可测集应为L-可测集, φ^{-1} 把$\varphi(D)$中的L-可测集应为L-可测集. 于是由(9.1) 知对任意$\tau\in\mathbb{R}$ 有

$$\varphi(D)(f>\tau)\text{ 是}L\text{-可测}\iff D(f\circ\varphi>\tau)\text{ 是}L\text{-可测}.$$

所以f在$\varphi(D)$上L-可测$\iff$复合函数$t\mapsto f(\varphi(t))$在D上L-可测.

(b): 由假设条件和**命题9.35(a),(b)** 知映射φ把D中的L-可测集应为$\varphi(D)$中的H_k-可测集, 逆映射φ^{-1} 把$\varphi(D)$ 中的H_k-可测集映为D中的L-可测集。于是由(9.1) 知对任意$\tau\in\mathbb{R}$ 有

$$\varphi(D)(f>\tau)\text{ 是}H_k\text{-可测}\iff D(f\circ\varphi>\tau)\text{ 是}L\text{-可测}.$$

所以f在$\varphi(D)$上H_k-可测$\iff$复合函数$t\mapsto f(\varphi(t))$在D上L-可测. □

【例】

(1). 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$ 为Lebesgue测度空间, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$为可逆矩阵, $h\in\mathbb{R}^n$. 则仿线性变换$x\mapsto\mathrm{A}x+h$ 是从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的光滑同胚, 因此对任一函数$f:\mathbb{R}^n\to[-\infty,+\infty]$有: f在$\mathbb{R}^n$ 上L-可测 $\iff x\mapsto f(\mathrm{A}x+h)$ 在$\mathbb{R}^n$ 上L-可测。

(2). 设$f:\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to[-\infty,+\infty]$. 则有:

f 在$\mathbb{R}^{2n}$上L-可测 $\iff$ 函数$(x,y)\mapsto f(x-y,y)$ 在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上L-可测.

事实上如令$\mathrm{I}\in\mathbb{R}^{n\times n}$为单位阵,

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & -\mathrm{I}\\ 0 & \mathrm{I}\end{pmatrix}$$

则按列向量表示$\mathbf{x}=(x,y)^{\tau}$ 有$\mathrm{A}\mathbf{x}=(x-y,y)^{\tau}$. 因此如果我们用行向量和列向量表示同一函数的自变量, 就有$f(x-y,y)=f(\mathrm{A}\mathbf{x})$. 因$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 可逆, 故由本题(1)知f在$\mathbb{R}^{2n}$ 上L-可测 $\iff$ $\mathbf{x}\mapsto f(\mathrm{A}\mathbf{x})$ 在$\mathbb{R}^{2n}$ 上L-可测。 $\Box$

【可测函数的延拓】

把一个可测函数保持可测性地延拓至全空间$\mathbb{R}^n$ 有助于对问题的研究。由于可测性是最容易满足的要求, 保测延拓的方式几乎可以随心所欲。

【命题9.42(可测函数的延拓)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M})$为一可测空间, $E\in\mathcal{M}$, $f: E\subset\mathbb{R}^n\to[-\infty,+\infty]$ 是$\mathcal{M}$- 可测函数。任取$\mathcal{M}$-可测函数$g:E^c\to\mathbb{R}$ (例如$g(x)\equiv 0$). 令$F(x)=f(x)$ 当$x\in E$; $F(x)=g(x)$ 当$x\in E^c$. 则$F:\mathbb{R}^n\to[-\infty,+\infty]$ 在$\mathbb{R}^n$ 上$\mathcal{M}$-可测。

【证】由F的做法和$\mathbb{R}^n=E\cup E^c$知, 对任意$t\in\mathbb{R}$ 有

$$\mathbb{R}^n(F>t)=E(F>t)\cup E^c(F>t)=E(f>t)\cup E^c(g>t)\in\mathcal{M}\qquad\forall\, t\in\mathbb{R}.$$

所以F 在$\mathbb{R}^n$ 上$\mathcal{M}$-可测. $\Box$

当$g(x)\equiv 0$ 时, 命题中的F 称为f 的**零延拓**, 它可写成

$$F(x)=f(x)\mathbf{1}_E(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}^n\,.$$

【例】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在Ω上可微. 则对任意$k\in\{1,2,...,n\}$, 偏导函数$\frac{\partial f}{\partial x_j}$都在$\Omega$ 上H_k-可测$(j=1,2,...,n)$. [当$k=n$时即为: 偏导函数$\frac{\partial f}{\partial x_j}$都在$\Omega$ 上L-可测$(j=1,2,...,n)$.]

【证】因可微蕴含连续, 所以f在Ω上连续从而在Ω上H_k-可测. 将f 做零延拓: $f(x)=0, x\in\Omega^c$. 则延拓后的f在$\mathbb{R}^n$上H_k-可测. 因此对任意$h\in\mathbb{R}^n$, 平移$x\mapsto f(x+h)$ 在$\mathbb{R}^n$上H_k-可测. 取$h=\frac{1}{k}\mathbf{e}_i$, 令

$$f_k(x)=\frac{f(x+\frac{1}{k}\mathbf{e}_j)-f(x)}{\frac{1}{k}},\quad x\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{N}$$

则f_k 在$\mathbb{R}^n$ 上H_k-可测(从而在Ω 上H_k-可测) 且有

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in \Omega.$$

因可测函数列的极限函数还是可测函数, 故$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在Ω 上H_k-可测. $\square$

作业题

1. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ 为一可测空间, $E \in \mathcal{M}$, $f : E \to [-\infty, +\infty]$. 证明：

f 在E 上可测 $\iff$ 对任意有理数r, $E(f > r) \in \mathcal{M}$.

提示：$\forall\, t \in \mathbb{R}$, 考虑有理数子集$\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = [t, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, 证明$E(f > t) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E(f > r_k)$.

2. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ 为一可测空间, $E \in \mathcal{M}$, $f : E \to \mathbb{R}$. 设函数$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续且严格单调. 证明: 在f在E 上可测$\iff$ 在$g \circ f$在E 上可测.

3. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ 为一可测空间. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 但$E \notin \mathcal{M}$. 证明存在$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得 $|f|$ 在$\mathbb{R}^n$ 上可测, 而f 在$\mathbb{R}^n$ 上不可测.

4. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_p, H_p)$ 为Hausdorff 测度空间（注意若取$p = n$, 则包含了Lebesgue 测度空间), 设$E \in \mathcal{M}_p$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C(E, \mathbb{R})$. 证明

$$\limsup_{k\to\infty} f_k(x), \quad \liminf_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in E$$

是H_p-可测函数. 又设对于一个H_p-零测集$Z \subset E$ 有

$$\text{极限 } f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ 存在} \qquad \forall\, x \in E \setminus Z.$$

补充定义$f(x) = 0$ 当$x \in Z$ 时. 证明f在E上是H_p-可测函数.

§9.10. 简单函数逼近

【定义(简单函数)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 若可测函数$f : E \to \mathbb{R}$ 的值域$f(E)$ 是有限集, 则称f 是一个简单可测函数, 简称简单函数。 $\Box$.

简单函数主要用于研究可测函数的结构和定义积分。将来进一步学实分析时将学习可测函数与连续函数的逼近关系(Lusin 定理) 和可测函数列的依测度收敛、几乎处处收敛和一致收敛的关系(Riesz 定理, Egoroff 定理)等重要性质。本讲义不涉及这些。

【命题9.43】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 则有:

(**a**) 函数$f : E \to \mathbb{R}$ 是简单函数的充分必要条件是 f 可表示为 E 的可测子集的特征函数的有限线性组合:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{E_k}(x)\,, \qquad x \in E \tag{10.1}$$

其中 $E_k \in \mathcal{M}$, $E_k \subset E$; $c_k \in \mathbb{R}$ 为常数, $k = 1, 2, ..., N$.

(**b**) 若 f, g 都是 E 上的简单函数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 和 fg 都是 E 上的简单函数.

【证】(a): 设 f 为是 E 上的简单函数. 由定义, f 的值域 $f(E) = \{c_1, c_2, ..., c_N\}$ 为有限集, 其中 c_k 互不相同. 令 $E_k = E(f = c_k)$, $k = 1, 2, ..., N$. 则得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{E_k}(x)\,, \quad x \in E.$$

反之设 f 可表示为 (10.1) 的形式。则 f 是 E 上的可测函数并且 f 的值域含于由数 $c_1, c_2, ..., c_N$ 和这些数的每一组的和所组成的有限数集, 其互不相同的元素个数不超过 $\sum_{k=1}^{N} C_N^k = 2^N - 1$. 因此 f 的值域为有限集。所以 f 是 E 上的简单函数。

(b): 这是因为函数 $\alpha f + \beta g$ 和 fg 都是 E 上的可测函数且它们的值域 $(\alpha f + \beta g)(E)$ 和 $(fg)(E)$ 也都是有限集。 $\Box$

最常用的简单函数是可测集的特征函数。

- **特征函数.** 设E 为任意集合。称二值函数

$$\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in E \\ 0 & \text{if} \quad x \notin E \end{cases}$$

为集合E 的特征函数或指示函数。

特征函数在分析学中经常使用。有人说: “特征函数是个宝, 不会用就学不好。”

【例】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\subset\mathbb{R}^n$. 则

$$E\text{ 是可测集}\Longleftrightarrow \mathbf{1}_E\text{ 是}\mathbb{R}^n\text{ 上的可测函数。}$$

事实上我们有

$$\mathbb{R}^n(\mathbf{1}_E>t)=\begin{cases}\emptyset & \text{if}\quad t\ge 1\\ E & \text{if}\quad 0\le t<1\\ \mathbb{R}^n & \text{if}\quad t<0\,.\end{cases}$$

因此有: $\mathbf{1}_E$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的可测函数$\Longleftrightarrow \mathbb{R}^n(\mathbf{1}_E>t)\in\mathcal{M}$ for all $t\in\mathbb{R}\iff E\in\mathcal{M}$. $\square$

【特征函数的基本性质】(假设下面出现的集合均为$\mathbb{R}^n$的子集):

$$\mathbf{1}_{E^c}(x)=1-\mathbf{1}_E(x),$$

$$A\subset B\implies \mathbf{1}_A(x)\le\mathbf{1}_B(x)\,,$$

$$\mathbf{1}_{A\cup B}(x)=\mathbf{1}_A(x)+\mathbf{1}_B(x)-\mathbf{1}_{A\cap B}(x)\,,$$

$$\mathbf{1}_{A\cup B}(x)=\mathbf{1}_A(x)+\mathbf{1}_B(x)\quad\text{if}\quad A\cap B=\emptyset\,,$$

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k\ge1}E_k}(x)\le\sum_{k\ge1}\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,$$

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k\ge1}E_k}(x)=\sum_{k\ge1}\mathbf{1}_{E_k}(x)\qquad\text{if}\quad E_i\cap E_j=\emptyset\quad\forall\, i\ne j\,,$$

$$\mathbf{1}_{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n}(x)=\mathbf{1}_{E_1}(x)\mathbf{1}_{E_2}(x)\cdots\mathbf{1}_{E_n}(x)\,,$$

$$\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^nE_k}(x)=1-\prod_{k=1}^n(1-\mathbf{1}_{E_k}(x))\,,$$

$$\sum_{k\ge1}\mathbf{1}_{E_k}(x)\ge m\iff x\in E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_m}\ \text{ for some }\ k_1,k_2,...,k_m\,.$$

注意: 在最后这个等价关系中的右端, 下标$k_1,k_2,...,k_m$ 与x 有关, 即不同的x 可能对应于不同的m个下标。

以上性质容易从特征函数的定义推出。例如对倒数第二个,

$$1-\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^nE_k}(x)=\mathbf{1}_{(\cup_{k=1}^nE_k)^c}(x)=\mathbf{1}_{\cap_{k=1}^nE_k^c}(x)=\prod_{k=1}^n\mathbf{1}_{E_k^c}(x)=\prod_{k=1}^n(1-\mathbf{1}_{E_k}(x))\,.$$

下面学习用简单函数点态逼近一般可测函数。

【引理9.44(恒等函数的阶梯函数逼近)】在广义区间 $[0,+\infty]$ 上做阶梯函数列如下：

$$\varphi_k(t)=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}(t)+k\mathbf{1}_{[k,+\infty]}(t)\,,\quad t\in[0,+\infty]\,.\quad(k=1,2,3,\dots)$$

则有

$$0\le\varphi_1(t)\le\varphi_2(t)\le\varphi_3(t)\le\cdots\le t\,;\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t)=t\qquad\forall\,t\in[0,+\infty]\,.$$

此外有级数表示:

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{I_k}(t)\,,\qquad t\in[0,+\infty]\tag{10.2}$$

其中 I_k 是 $(0,+\infty]$ 中的区间, $0<c_k<+\infty$, $k=1,2,3,\dots$.

【证】略去自变量只看函数关系, 可写

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}&=\sum_{j=1}^{(k+1)2^{k+1}}\frac{j-1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+(k+1)\mathbf{1}_{[k+1,+\infty]}\\&=\sum_{j=1}^{k2^{k+1}}\frac{j-1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+\sum_{j=k2^{k+1}+1}^{(k+1)2^{k+1}}\frac{j-1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+(k+1)\mathbf{1}_{[k+1,+\infty]}\,,\end{aligned}$$

对右端第一项分 j 奇、偶求和, 并用特征函数性质 $\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{2j-1}{2^{k+1}})}+\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^k})}=\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k2^{k+1}}\frac{j-1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}&=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{2j-1}{2^{k+1}})}+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{2j-1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^k})}\\&=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{2j-1}{2^{k+1}})}+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^k})}+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^k})}\\&=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^k})}\,.\end{aligned}$$

对其余两项有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=k2^{k+1}+1}^{(k+1)2^{k+1}}\frac{j-1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+(k+1)\mathbf{1}_{[k+1,+\infty]}\\&=k\Big(\sum_{j=k2^{k+1}+1}^{(k+1)2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+\mathbf{1}_{[k+1,+\infty]}\Big)+\sum_{j=k2^{k+1}+1}^{(k+1)2^{k+1}}\Big(\frac{j-1}{2^{k+1}}-k\Big)\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+\mathbf{1}_{[k+1,+\infty]}\\&=k\mathbf{1}_{[k,+\infty]}+\sum_{j=k2^{k+1}+2}^{(k+1)2^{k+1}}\Big(\frac{j-1}{2^{k+1}}-k\Big)\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+\mathbf{1}_{[k+1,+\infty]}\,.\end{aligned}$$

因此

$$\varphi_{k+1}-\varphi_k=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^k})}+\sum_{j=k2^{k+1}+2}^{(k+1)2^{k+1}}\Big(\frac{j-1}{2^{k+1}}-k\Big)\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^{k+1}},\frac{j}{2^{k+1}})}+\mathbf{1}_{[k+1,+\infty]}\ \ge 0\,. \tag{10.3}$$

所以 φ_k 关于 k 是递增的.

证收敛性：$\forall\, t\in[0,+\infty]$, 若 $t<+\infty$, 则当 $k>t$ 时存在唯一 $j\in\{1,2,...,k2^k\}$ 使得 $t\in[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})$ 从而有$t\ge\varphi_k(t)=\frac{j-1}{2^k}>t-\frac{1}{2^k}$, 因此若$0\le t<+\infty$ 则有

$$0\le t-\varphi_k(t)\le\frac{1}{2^k}\qquad\forall\, k>t. \tag{10.4}$$

若 $t=+\infty$, 则 $\varphi_k(t)=k$ $(k=1,2,...)$. 总之有 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t)=t\ \ \forall\, t\in[0,+\infty]$.

最后证明级数表示 (10.2). 为此令 $\varphi_0(t)\equiv 0$. 由收敛性和 $\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\ge 0$ (见 (10.3)) 以及正项级数定义得

$$t=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t))=\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t))\,,\quad t\in[0,+\infty]\,.$$

而由 (10.3) 可写

$$\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)=\sum_{j=1}^{N_k}c_{k,j}\mathbf{1}_{I_{k,j}}(t)\,,\quad k=0,1,2,...$$

其中 $I_{k,j}$ 是 $(0,+\infty]$ 中的区间, $N_k\in\mathbb{N},0<c_{k,j}<+\infty$(**注**: 在 $\varphi_1-\varphi_0=\varphi_1$ 的表达式中第一项 $(j=1)$ 的系数等于 0, 不起作用, 所以只需对系数大于零的项求和) . 将可数集 $\{c_{k,j}\mathbf{1}_{I_{k,j}}\,|\,j=1,2,...,N_k\,;k=0,1,2,...\}$ 排列成 $\{c_1\mathbf{1}_{I_1},c_2\mathbf{1}_{I_2},c_3\mathbf{1}_{I_3},...\}$ 并根据正项级数的和与求和顺序无关就得到 (10.2). □

【定理9.45(简单函数逼近和级数表示)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$.

(a) 对任一非负可测函数$f:E\to[0,+\infty]$, 存在一列非负简单函数 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le...\le f(x)\,;\quad\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\qquad\forall\, x\in E\,.$$

此外存在存在一列常数 $0<c_k<+\infty$ 和可测集 $E_k\subset E$ $(k=1,2,3,...)$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x)\qquad\forall\, x\in E\,. \tag{10.5}$$

(b) 对任一可测函数$f: E\to[-\infty,+\infty]$, 存在一列简单函数 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\sup_{k\ge 1}|f_k(x)|\le|f(x)|\,,\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\qquad\forall\, x\in E\,.$$

【证】(a): 令

$$\begin{aligned}&E_{k,j}=f^{-1}\Big([\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})\Big)=E(\frac{j-1}{2^k}\le f<\frac{j}{2^k}),\quad j=1,2,...,k2^k;\\&E_k=f^{-1}\Big([k,+\infty]\Big)=E(f\ge k),\end{aligned}$$

则由

$$\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}(f(x))=\mathbf{1}_{E_{k,j}}(x),\quad \mathbf{1}_{[k,+\infty]}(f(x))=\mathbf{1}_{E_k}(x)$$

和上述引理有 (取 $t=f(x)$)

$$f_k(x):=\varphi_k(f(x))=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{E_{k,j}}(x)+k\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\quad x\in E\quad(k=1,2,3,...).$$

由 $\varphi_k(t)$ 的性质易见 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 (a) 中的要求. 同样在 (10.2) 中取 $t=f(x)$ 得到

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{I_k}(f(x))=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\quad x\in E$$

其中 $E_k=E(f\in I_k)\in\mathcal{M}$. **【注：若 $f(x)\equiv 0$, 则一切 E_k 都是空集.】**

(b): 设 $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 可测. 考虑 f 的正部 f^+和负部f^-, 即

$$\begin{aligned}f^+(x)&=\max\{f(x),0\}=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}=f(x)\mathbf{1}_{E(f\ge 0)}(x),\\f^-(x)&=\max\{-f(x),0\}=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}=-f(x)\mathbf{1}_{E(f\le 0)}(x)\,.\end{aligned}$$

则易见 f^+, f^- 都是 E 上非负可测函数, 且

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x)\,,\quad x\in E\,.$$

因 $f^+(x)\cdot f^-(x)\equiv 0$, 故这里不会出现 "$\infty-\infty$" 的情况. 设 $\{f_k^+\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ 是 (a) 中构造的相应于 f^+, f^- 的非负简单函数列. 则有

$$0\le f_k^{(\pm)}(x)\le f_{k+1}^{\pm}(x)\le f^{\pm}(x)\,;\qquad \lim_{k\to\infty}f_k^{\pm}(x)=f^{\pm}(x)\qquad\forall\, x\in E\,.$$

取 $f_k=f_k^+-f_k^-$, 则 f_k 是简单函数且 $|f_k(x)|\le|f(x)|$ $(\forall\, x\in E\,,\forall\, k\ge 1)$,

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=\lim_{k\to\infty}f_k^+(x)-\lim_{k\to\infty}f_k^-(x)=f^+(x)-f^-(x)=f(x)\quad\forall\, x\in E\,.\quad\Box$$

【注】对于有界可测函数,可以得到较好的级数表示. 例如设$0\le f<1$ 于E. 此时只需考虑$t\in[0,1)$, 相应的函数$\varphi_k(t)$ 有简单的表达式：

$$\varphi_k(t)=\sum_{j=1}^{2^k}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{j-1}{2^k},\,\frac{j}{2^k})}(t)\,,\quad t\in[0,1)\,.$$

根据上面(10.2)有

$$0\le\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)=\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k}\mathbf{1}_{[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\,\frac{j}{2^k})}(t)=\frac{1}{2^{k+1}}\mathbf{1}_{A_{k+1}}(t)$$

其中$A_{k+1}=\sum_{j=1}^{2^k}[\frac{2j-1}{2^{k+1}},\,\frac{j}{2^k})$ (不交并). 注意$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1)}(t)$, 故令$A_1=[\frac{1}{2},1)$ 和$\varphi_0(t)=0$ 得到

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\Big(\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\mathbf{1}_{A_k}(t)\,,\quad t\in[0,1)\,.$$

代换$t=f(x)$ 我们得到f 的级数表示：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\mathbf{1}_{E_k}(x)\,,\quad x\in E \tag{10.6}$$

其中$E_k=E(f\in A_k)$.

作业题

1. 证明: **定理9.45(简单函数逼近和级数表示)** 中, 若可测函数$f:E\to[-\infty,+\infty]$在E上有界, 即$|f(x)|\le M\,,x\in E$, 其中M 为有限常数, 则对于定理的证明中构造的简单函数列f_k 有

$$|f(x)-f_k(x)|\le\frac{1}{2^{k-1}}\,,\quad\forall\,x\in E\,,\quad\forall\,k>M\,.$$

因此f_k 在E 上一致收敛于f, 即$\sup\limits_{x\in E}|f(x)-f_k(x)|\to 0$ $(k\to\infty)$.

提示：当f 非负时, 参见(10.4), 证明相应的非负简单函数f_k 满足下列估计

$$0\le f(x)-f_k(x)\le\frac{1}{2^k}\,,\quad\forall\,x\in E\,,\quad\forall\,k>M\,.$$

对一般情形, 考虑f的正负部分解$f=f^+-f^-$.

习题课

1 (这是已留过的作业题, 放在此处的目的是把它当做期中考试前的综合复习).

设$n\ge 2$, $F\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$,

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,F(x)=0\}\quad\text{是非空的紧集且}\quad \nabla F(x)\neq 0\quad \forall\, x\in S.$$

由S是紧集, 易见存在$\varepsilon>0$ 使得

$$\nabla F(x)\neq 0\qquad \forall\, x\in\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\mathrm{dist}(x,S)\le\varepsilon\}.$$

令

$$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\mathrm{dist}(x,S)<\frac{\varepsilon}{2}\},\quad \Omega_0=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\mathrm{dist}(x,S)<\varepsilon\}.$$

则Ω,Ω_0 均为有界开集且

$$S\subset\Omega,\quad \overline{\Omega}\subset\Omega_0,\quad \overline{\Omega_0}=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\mathrm{dist}(x,S)\le\varepsilon\}.$$

令

$$\mathbf{n}(x)=\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|},\qquad f_t(x)=x+t\mathbf{n}(x),\quad x\in\overline{\Omega_0}$$

其中t 是实数.

(1) 证明：存在$0<\delta\le\varepsilon/4$ 使得对任意$t\in(-\delta,\delta)$, 映射$f_t:\Omega\to f_t(\Omega)$ 是C^1 同胚.

(2) 对于(1)中的δ, 令

$$S_t=\{x+t\mathbf{n}(x)\,|\,x\in S\}.$$

证明：对任意$t\in(-\delta,\delta)$, S_t是C^1类的$n-1$维曲面.

(3) 对于(1)中的δ, 令

$$\eta=\min\left\{\delta,\ \frac{\min\limits_{x\in S}|\nabla F(x)|}{1+\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|H_F(x)\|}\right\}.$$

证明：当$t\in(-\eta,\eta)$时,

$$S_t\cup S_{-t}=\{x\in\mathbb{R}^n\ |\,\mathrm{dist}(x,S)=|t|\},$$

而当$t\in(-\eta,\eta)\setminus\{0\}$时$S_t$ 有如下几何表示:

$$S_t=\{x\in\mathbb{R}^n\ |\,\exists\, x_*\in S\ \text{ s.t. }\ \mathrm{dist}(x,S)=|x-x_*|=|t|\ \text{ and }\ t\langle x-x_*,\mathbf{n}(x_*)\rangle>0\,\}.$$

(4) 对于(3)中的η, 证明：当$t_1,t_2\in(-\eta,\eta)$且$t_1\neq t_2$时, $S_{t_1}\cap S_{t_2}=\emptyset$.

【注：在(3)的证明中要用到F 的二阶Taylor 公式(涉及Hesse 矩阵), 而证明几何表示时, 要用到条件极值理论，(4)的证明中难点在于证明当$0 < t < \eta$ 时$S_t \cap S_{-t} = \emptyset$, 仍需要用$F$ 的二阶Taylor 公式. 】

【证明】

【证(1)】由$\nabla F(x) \neq 0$ for all $x \in \overline{\Omega_0}$ 可知$\mathbf{n}(x)$ 在每一点$x \in \overline{\Omega_0}$可微. 事实上由本章的作业题题和$(\nabla F)'(x) = H_F(x)$ (=F 在点x的Hesse 矩阵) 可知

$$\mathbf{n}'(x) = \frac{1}{|\nabla F(x)|}\left(\mathrm{I} - \frac{\nabla F(x)(\nabla F(x))^{\tau}}{|\nabla F(x)|^2}\right)H_F(x), \quad x \in \overline{\Omega_0}.$$

由$F \in C^2$知$x \mapsto \mathbf{n}'(x)$ 在紧集$\overline{\Omega_0}$上连续. 因此可令

$$M = \max_{x \in \overline{\Omega_0}} \|\mathbf{n}'(x)\|.$$

这里$\|\cdot\|$ 是矩阵范数. 来证明数

$$\delta := \min\{\frac{1}{2M+1}, \frac{\varepsilon}{4}\}$$

具有(1)中的性质. 首先易见映射$x \mapsto f_t(x), x \in \Omega_0$, 属于$C^1$类.

任取$t \in (-\delta, \delta)$. 先证明$x \mapsto f_t(x), x \in \Omega$, 是单射.

对任意$x, y \in \Omega, x \neq y$, 若$|x-y| < \varepsilon/2$, 则取$x_* \in S$ 使得$\mathrm{dist}(x, S) = |x - x_*|$. 则对任意$\tau \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}((1-\tau)x + \tau y, S) \le |(1-\tau)x + \tau y - x_*| = |x - x_* + \tau(y-x)| \\ &\le |x - x_*| + \tau|y - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \tau\frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon.\end{aligned}$$

这说明$(1-\tau)x + \tau y \in \Omega_0$ for all $\tau \in [0,1]$, 也即线段$[x,y] \subset \Omega_0$. 于是由微分中值不等式, 存在$\xi \in (x,y)$ 使得

$$|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)| \le \|\mathbf{n}'(\xi)\||x-y| \le M|x-y|$$

从而有

$$|f_t(x) - f_t(y)| \ge |x-y| - |t||\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)| \ge |x-y| - \delta M|x-y| \ge \frac{1}{2}|x-y| > 0.$$

若$|x-y| \ge \varepsilon/2$, 则由$|t| < \delta \le \frac{\varepsilon}{4}$ 有

$$|f_t(x) - f_t(y)| \ge |x-y| - |t||\mathbf{n}(x)| - |t||\mathbf{n}(y)| \ge \frac{\varepsilon}{2} - 2|t| > 0.$$

所以$x\mapsto f_t(x)$在Ω 上是单射.

其次由$|t|\|\mathbf{n}'(x)\|\le \delta M<\frac{1}{2}$ for all $x\in\Omega$ 可知Jacobi矩阵$f_t'(x)=\mathrm{I}+t\mathbf{n}'(x)$ 在Ω 上可逆, 即

$$\det f_t'(x)=\det\Big(\mathrm{I}+t\mathbf{n}'(x)\Big)\neq 0\qquad \forall\, x\in\Omega.$$

因此由整体反函数定理可知$f_t:\Omega\to f_t(\Omega)$ 是C^1 同胚.

【证(2)】来证明对任意$t\in(-\delta,\delta)$, S_t 是C^1类的$n-1$维曲面. 当$t=0$时，$S_0=S=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,F(x)=0\}$. 据假设条件和**命题8.47** 可知$S_0=S$是$C^2$类的(从而是$C^1$类的)$n-1$维曲面. 设$0<|t|<\delta$. 任取$f_t(x_0)\in S_t$ 其中$x_0\in S$. 因S是C^2类的曲面, 故在$\mathbb{R}^n$中存在x_0的一个邻域$U(x_0)\subset\Omega$ 和一个C^2类同胚$\varphi:U(x_0)\to(-1,1)^n$, 使得$\varphi(x_0)=0$ 且φ把$S\cap U(x_0)$恰好映成$(-1,1)^n$的$n-1$维子区间, 即$\varphi(S\cap U(x_0))=(-1,1)^{n-1}\times\{0\}$. 由$f_t:\Omega\to f_t(\Omega)$ 是C^1 同胚可知

$$V(f_t(x_0)):=f_t(U(x_0))\subset f_t(\Omega)$$

是$f_t(x_0)$的一个邻域且

$$\psi:=\varphi\circ f_t^{-1}:V(f_t(x_0))\to(-1,1)^n$$

是C^1类同胚, 其逆映射为

$$\psi^{-1}:=f_t\circ\varphi^{-1}:(-1,1)^n\to V(f_t(x_0))$$

并有$\psi(f_t(x_0))=\varphi(x_0)=0$ 以及 [注意$V(f_t(x_0)):=f_t(U(x_0))$ 和f_t 为同胚蕴含$S_t\cap V(f_t(x_0))=f_t(S)\cap f_t(U(x_0))=f_t(S\cap U(x_0))$]

$$\psi\Big(S_t\cap V(f_t(x_0))\Big)=\psi\Big(f_t(S\cap U(x_0))\Big)=\varphi(S\cap U(x_0))=(-1,1)^{n-1}\times\{0\}.$$

所以S_t 是C^1类的$n-1$ 维曲面.

【证(3)】当$t=0$ 时显然有$S_0=S$. 以下设$t\in(-\eta,\eta)\setminus\{0\}$. 记

$$K_{|t|}=\{x\in\mathbb{R}^n\ |\,\mathrm{dist}(x,S)=|t|\},$$

$$S_t^*:=\{x\in\mathbb{R}^n\ |\,\exists\, x_*\in S\ \text{ s.t. }\ \mathrm{dist}(x,S)=|x-x_*|=|t|\ \text{ and }\ t\langle x-x_*,\mathbf{n}(x_*)\rangle>0\,\}.$$

显然有$K_0=S=S_0$. 因此只需证明

$$S_t\cup S_{-t}=K_{|t|},\quad S_t=S_t^*\qquad \forall\, t\in(-\eta,\eta)\setminus\{0\}.$$

任取$x \in S_t$. 则存在$\widehat{x} \in S$ 使得$x = \widehat{x} + t\mathbf{n}(\widehat{x})$. 取$x_* \in S$ 使得$\mathrm{dist}(x, S) = |x - x_*|$. 则有

$$|x - x_*| = \mathrm{dist}(x, S) \le |x - \widehat{x}| = |t|$$

从而有

$$|x - x_*|^2 \le t^2 \quad \text{i.e.} \quad |\widehat{x} + t\mathbf{n}(\widehat{x}) - x_*|^2 \le t^2$$

也即

$$t^2 + 2t\langle \mathbf{n}(\widehat{x}),\, \widehat{x} - x_*\rangle + |\widehat{x} - x_*|^2 \le t^2$$

即

$$|\widehat{x} - x_*|^2 \le 2t\langle \mathbf{n}(\widehat{x}),\, x_* - \widehat{x}\rangle. \tag{$*$}$$

另一方面我们有$[\widehat{x}, x_*] \subset \Omega$. 事实上对任意$\tau \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}((1-\tau)\widehat{x} + \tau x_*, S) \le |(1-\tau)\widehat{x} + \tau x_* - \widehat{x}| = \tau|x_* - \widehat{x}| \le |x_* - \widehat{x}| \\ &\le |x_* - x| + |x - \widehat{x}| \le 2|t| < 2\eta \le 2\delta \le \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

所以$(1-\tau)\widehat{x} + \tau x_* \in \Omega$ for all $\tau \in [0, 1]$. 因此$[\widehat{x}, x_*] \subset \Omega$. 对$F$在点$\widehat{x}$做二阶Taylor展开并注意$F(x_*) = F(\widehat{x}) = 0$ 有：存在$\xi \in (\widehat{x}, x_*)$ 使得

$$0 = F(x_*) - F(\widehat{x}) = \langle \nabla F(\widehat{x}), x_* - \widehat{x}\rangle + \frac{1}{2}(x_* - \widehat{x})^\tau H_F(\xi)(x_* - \widehat{x}).$$

这蕴含

$$\begin{aligned}&|\langle \nabla F(\widehat{x}), x_* - \widehat{x}\rangle| = \frac{1}{2}|(x_* - \widehat{x})^\tau H_F(\xi)(x_* - \widehat{x})| \\ &\le \frac{1}{2}\|H_F(\xi)\||x_* - \widehat{x}|^2 \le \frac{1}{2}\max_{x\in\overline{\Omega}}\|H_F(x)\||x_* - \widehat{x}|^2.\end{aligned}$$

于是由上面不等式$(*)$ 和$\mathbf{n}(\cdot)$的定义得到

$$\begin{aligned}&|\widehat{x} - x_*|^2 \le 2t\langle \mathbf{n}(\widehat{x}),\, x_* - \widehat{x}\rangle = 2t\frac{\langle \nabla F(\widehat{x}), x_* - \widehat{x}\rangle}{|\nabla F(\widehat{x})|} \\ &\le 2|t| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|H_F(x)\|}{\min\limits_{x\in S}|\nabla F(x)|}|x_* - \widehat{x}|^2 \le \eta\frac{\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|H_F(x)\|}{\min\limits_{x\in S}|\nabla F(x)|}|x_* - \widehat{x}|^2.\end{aligned}$$

据η的取法可知

$$\eta\frac{\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|H_F(x)\|}{\min\limits_{x\in S}|\nabla F(x)|} < 1.$$

于是得出$|x_* - \widehat{x}|^2 = 0$ 即$x_* = \widehat{x}$ 从而有$x = x_* + t\mathbf{n}(x_*)$. 因此$\mathrm{dist}(x, S) = |x - x_*| = |t|$ 且$t\langle x - x_*, \mathbf{n}(x_*)\rangle = t^2\langle \mathbf{n}(x_*), \mathbf{n}(x_*)\rangle = t^2 > 0$. 所以$x \in S_t^*$. 这证明了$S_t \subset S_t^*$.

由此得知$S_t \subset S_t^* \subset K_{|t|}$, $S_{-t} \subset S_{-t}^* \subset K_{|t|}$. 这证明了$S_t \cup S_{-t} \subset K_{|t|}$.

另一方面对任意$x \in K_{|t|}$, 由$K_{|t|}$的定义和S 是紧集, 存在$x_* \in S$ 使得$\mathrm{dist}(x, S) = |x - x_*| = |t|$. 为得到$x_*$的进一步信息, 我们考虑条件极值问题:

$$\min_{y \in S} |y - x|^2 \qquad \text{即} \qquad \min_{y \in \mathbb{R}^n,\, F(y)=0} |y - x|^2.$$

它的Lagrange 函数为$(y, \lambda) \mapsto L(y, \lambda) = |y - x|^2 - \lambda F(y)$. 因$x_* \in S$ 是此条件极值的最小值点, 故由条件极值理论知存在$\lambda \in \mathbb{R}$ 使得(x_*, λ) 是$L(y, \lambda)$的临界点, 即

$$\nabla_y L(y, \lambda)\Big|_{y=x_*} = 0, \quad F(x_*) = 0.$$

这给出

$$2(x_* - x)^\tau - \lambda F'(x_*) = 0 \quad \text{即} \quad 2(x_* - x) - \lambda \nabla F(x_*) = 0.$$

因此

$$x - x_* = \frac{-\lambda}{2} \nabla F(x_*) = \frac{-\lambda}{2} |\nabla F(x_*)| \mathbf{n}(x_*) \tag{$**$}$$

其中用到$\nabla F(x_*) \neq 0$. 因$|x - x_*| = |t|$, 故得到

$$|t| = \frac{|\lambda|}{2} |\nabla F(x_*)| \qquad \text{即} \qquad \pm t = \frac{-\lambda}{2} |\nabla F(x_*).$$

代入上式得知

$$x - x_* = \pm t\mathbf{n}(x_*) \qquad \text{即} \qquad x = x_* \pm t\mathbf{n}(x_*).$$

所以$x \in S_t \cup S_{-t}$. 因此$K_{|t|} \subset S_t \cup S_{-t}$. 结合上面结果, 这就证明了$S_t \cup S_{-t} = K_{|t|}$.

进一步, 对任意$x \in S_t^*$, 则有$x \in K_{|t|}$. 于是对$(**)$式两边内积乘以$t\mathbf{n}(x_*)$ 并注意条件$t\langle x - x_*, \mathbf{n}(x_*)\rangle > 0$ 有

$$0 < t\langle x - x_*, \mathbf{n}(x_*)\rangle = \frac{-t\lambda}{2} |\nabla F(x_*)|.$$

这表明$t\lambda < 0$. 于是再由

$$|t| = |x - x_*| = \frac{|\lambda|}{2} |\nabla F(x_*)|$$

得到

$$t = \frac{-\lambda}{2} |\nabla F(x_*)|$$

从而有

$$x - x_* = \frac{-\lambda}{2} |\nabla F(x_*)| \mathbf{n}(x_*) = t\mathbf{n}(x_*).$$

所以$x=x_*+t\mathbf{n}(x_*)\in S_t$. 这证明了$S_t^*\subset S_t$. 再结合已证的反向包含关系即知$S_t=S_t^*$成立.

【证(4)】设$t_1,t_2\in(-\eta,\eta)$满足$t_1\neq t_2$.

若$|t_1|\neq|t_2|$, 则有

$$\{x\in\mathbb{R}^n\mid \mathrm{dist}(x,S)=|t_1|\,\}\cap\{x\in\mathbb{R}^n\mid \mathrm{dist}(x,S)=|t_2|\,\}=\emptyset.$$

于是由(3) 知$S_{t_1}\cap S_{t_2}=\emptyset$.

若$|t_1|=|t_2|$, 则由$t_1\neq t_2$ 知t_1与t_2 均非零且反号. 不妨设$t_1=t>0$. 则$t_2=-t$. 于是只需证明$S_t\cap S_{-t}=\emptyset$. 反证法, 假设$S_t\cap S_{-t}\neq\emptyset$, 则取$y\in S_t\cap S_{-t}$. 由$S_t$的定义知存在$x\in S,\widetilde{x}\in S$ 使得$y=x+t\mathbf{n}(x)=\widetilde{x}-t\mathbf{n}(\widetilde{x})$. 对$F$ 用Taylor 公式有

$$\begin{aligned}&F(y)=F(x)+\langle\nabla F(x),t\mathbf{n}(x)\rangle+\frac{1}{2}t^2\mathbf{n}(x)^\tau H_F(\xi)\mathbf{n}(x)\\&=t|\nabla F(x)|+\frac{1}{2}t^2\mathbf{n}(x)^\tau H_F(\xi)\mathbf{n}(x),\qquad \xi=x+\theta t\mathbf{n}(x),\quad 0<\theta<1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F(y)=F(\widetilde{x})+\langle\nabla F(\widetilde{x}),-t\mathbf{n}(\widetilde{x})\rangle+\frac{1}{2}t^2\mathbf{n}(\widetilde{x})^\tau H_F(\widetilde{\xi})\mathbf{n}(\widetilde{x})\\&=-t|\nabla F(\widetilde{x})|+\frac{1}{2}t^2\mathbf{n}(\widetilde{x})^\tau H_F(\widetilde{\xi})\mathbf{n}(\widetilde{x}),\qquad \xi=\widetilde{x}+\widetilde{\theta}t\mathbf{n}(\widetilde{x}),\quad 0<\widetilde{\theta}<1\end{aligned}$$

这里用到$F(x)=F(\widetilde{x})=0$ 和$\mathbf{n}(x)$ 的定义. 于是得到

$$t|\nabla F(x)|+\frac{1}{2}t^2\mathbf{n}(x)^\tau H_F(\xi)\mathbf{n}(x)=-t|\nabla F(\widetilde{x})|+\frac{1}{2}t^2\mathbf{n}(\widetilde{x})^\tau H_F(\widetilde{\xi})\mathbf{n}(\widetilde{x})$$

消去$t>0$ 即得

$$|\nabla F(x)|+\frac{1}{2}t\mathbf{n}(x)^\tau H_F(\xi)\mathbf{n}(x)=-|\nabla F(\widetilde{x})|+\frac{1}{2}t\mathbf{n}(\widetilde{x})^\tau H_F(\widetilde{\xi})\mathbf{n}(\widetilde{x})$$

$$\Longrightarrow\ |\nabla F(x)|+|\nabla F(\widetilde{x})|=\frac{1}{2}t\Big(\mathbf{n}(\widetilde{x})^\tau H_F(\widetilde{\xi})\mathbf{n}(\widetilde{x})-\mathbf{n}(x)^\tau H_F(\xi)\mathbf{n}(x)\Big).$$

因

$$\mathrm{dist}(\xi,S)\le|\xi-x|=\theta t\le t<\eta\le\delta\le\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon/2$$

所以$\xi\in\Omega$. 同理$\widetilde{\xi}\in\Omega$. 于是得到

$$2\min_{x\in S}|\nabla F(x)|\le t\max_{x\in\overline{\Omega}}\|H_F(x)\|\le\eta\max_{x\in\overline{\Omega}}\|H_F(x)\|<\min_{x\in S}|\nabla F(x)|$$

矛盾, 这里用到η的定义. 这矛盾证明了必有$S_t\cap S_{-t}=\emptyset$. $\square$

2. 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\mu)$ 为一测度空间, $E_k, E\in\mathcal{A}, E_k\subset E, k=1,2,3,...;\mu(E)<+\infty$. 假设

$$Z:=\{x\in E \mid x \text{ 同时属于无限多个} E_k\}=\emptyset \quad (\text{空集}).$$

证明

$$\lim_{N\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\Big)=0.$$

【证】易证(给学生细证一下)

$$Z=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\,.$$

因此由假设知$\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k=\emptyset$. 又因

$$E\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\supset\bigcup_{k=2}^{\infty}E_k\supset\bigcup_{k=3}^{\infty}E_k\supset\cdots$$

且$\mu(E)<+\infty$, 故由测度的单调极限定理知

$$\lim_{N\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\Big)=\mu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\Big)=\mu(\emptyset)=0. \qquad \square$$

3. 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\mu)$ 为一测度空间, $E_i\in\mathcal{A},\mu(E_i)<+\infty, i=1,2,...,N$. 证明

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{N}E_i)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}).$$

【证】对可测集的个数N 用归纳法. 当$N=2$ 时, 设$A,B\in\mathcal{A},\mu(A\cup B)<+\infty$. 由

$$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$$

和可加性、有限性有

$$\mu(A)=\mu(A\setminus B)+\mu(A\cap B),\quad \mu(A\setminus B)=\mu(A)-\mu(A\cap B).$$

于是再由

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup B$$

和可加性得到

$$\mu(A\cup B)=\mu(A\setminus B)+\mu(B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B).$$

假设所证等式对于集合个数等于$N(\ge 2)$ 时成立, 看$N+1$ 时: 设$E_i\in\mathcal{A},\mu(E_i)<+\infty, i=1,2,...,N,N+1$. 则由

$$\bigcup_{i=1}^{N+1}E_i=\Big(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\Big)\cup E_{N+1}$$

和上面$N=2$时的结果以及归纳假设有

$$
\begin{aligned}
&\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N+1}E_i\Big)=\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\Big)+\mu(E_{N+1})-\mu\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\Big)\cap E_{N+1}\Big)\\
&=\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\Big)+\mu(E_{N+1})-\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\cap E_{N+1}\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})+\mu(E_{N+1})\\
&-\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}\cap E_{N+1})\\
&=\sum_{i=1}^{N+1}\mu(E_i)+\sum_{k=2}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&-\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}\cap E_{N+1}).\qquad(*)
\end{aligned}
$$

另一方面我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&=\sum_{i=1}^{N+1}\mu(E_i)+\sum_{k=2}^{N+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}).
\end{aligned}
$$

做分解

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\Big|_{i_k\le N}\\
&+\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\Big|_{i_k=N+1}\\
&=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&+\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}<N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_{k-1}}\cap E_{N+1})\\
&=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&+\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_{k-1}}\cap E_{N+1}).
\end{aligned}
$$

定义空集上的求和为零, 即

$$\sum_{j\in\emptyset}a_j=0.$$

则有

$$当k = N+1 时 \qquad \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{N+1}\le N} \mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}) = 0.$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{N+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&=\sum_{k=2}^{N+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&+\sum_{k=2}^{N+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_{k-1}}\cap E_{N+1})\\
&=\sum_{k=2}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+2}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}\cap E_{N+1}) \quad (脚标平移后)\\
&=\sum_{k=2}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&-\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}\cap E_{N+1}).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&=\sum_{i=1}^{N+1}\mu(E_i)+\sum_{k=2}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})\\
&-\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}\cap E_{N+1}).
\end{aligned}$$

这正是等式$(*)$的右端. 所以

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N+1}E_i\Big)=\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N+1}\mu(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k}).$$

由归纳法原理知所证等式成立. □

4. 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\mu)$ 为一测度空间, $E_k\in\mathcal{A}, k=1,2,3,\ldots$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2\mu(E_k)<+\infty,$$

$$\mu(E_i \cap E_j \cap E_k \cap E_l) = 0 \qquad \forall 1 \le i < j < k < l.$$

证明

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) - \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1} \mu(E_i \cap E_j) + \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1} \mu(E_i \cap E_j \cap E_k).$$

【证】对任意$N \ge 4$, 作分解

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \Big(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} E_k\Big).$$

由上一题和本题中的收敛性假设有

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\Big) + \mu\Big(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} E_k\Big) - \mu\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\Big) \cap \Big(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} E_k\Big)\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le N} \mu(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) + R_N$$

其中

$$R_N = \mu\Big(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} E_k\Big) - \mu\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\Big) \cap \Big(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} E_k\Big)\Big).$$

由假设知

$$0 \le R_N \le \mu\Big(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} E_k\Big) \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(E_k) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

所以

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le N} \mu(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}).$$

而由假设知：任何四个下标不同的E_k 的交集为零测集. 因此当$N \ge 4$ 时有

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le N} \mu(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k})$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) - \sum_{1 \le i < j \le N} \mu(E_i \cap E_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le N} \mu(E_i \cap E_j \cap E_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k) - \sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j-1} \mu(E_i \cap E_j) + \sum_{k=3}^{N}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1} \mu(E_i \cap E_j \cap E_k).$$

由假设知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty,$$

$$\sum_{j=2}^{+\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j)\le\sum_{j=2}^{+\infty}j\mu(E_j)<+\infty,$$
$$\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j\cap E_k)\le\sum_{k=3}^{\infty}k^2\mu(E_k)<+\infty.$$

所以由上面关系式和级数收敛的定义即得

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}\mu(E_k)-\sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j)+\sum_{k=3}^{N}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j\cap E_k)\Big)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\mu(E_k)-\lim_{N\to\infty}\sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j)+\lim_{N\to\infty}\sum_{k=3}^{N}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j\cap E_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)-\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j)+\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\mu(E_i\cap E_j\cap E_k).$$

□

习题课

1. 试比较Lebesgue 积分和Riemann积分的区别和优劣。

设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为一个有界函数:

$$\alpha\le f(x)<\beta\qquad\forall\,x\in[a,b].$$

假设f在$[a,b]$ 上Riemann 可积。则由Riemann 积分的定义知对于Riemann 积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 有: 对任意$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 使得对$[a,b]$的任意分划$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$, 当$\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_k<\delta$ 时（其中$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$)有

$$\sup_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k],k=1,2,\dots,n}\Big|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big|<\varepsilon.$$

现在设$(\mathbb{R},\mathcal{M},\mu)$ 为一个完备的测度空间, $\mathcal{M}$包含了$\mathbb{R}$中的所有Borel集。假设在$[\alpha,\beta]$ 上f 是$\mathcal{M}$- 可测函数且$\mu([a,b])<+\infty$. 按照Lebesgue 的方案，我们对f的值域所在的区间$[\alpha,\beta)$作分划

$$\alpha=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=\beta$$

然后考虑f的Lebesgue 积分的离散和

$$\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\mu(E_k)$$

其中

$$\zeta_k \in [y_{k-1}, y_k),$$
$$E_k = [a,b](y_{k-1} \le f < y_k) = \{x \in [a,b] \mid y_{k-1} \le f(x) < y_k\}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

我们来证明存在常数$A \in \mathbb{R}$ 使得对任意$\varepsilon > 0$ 存在$\delta > 0$ 使得对$[\alpha, \beta)$的任意分划$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = \beta$, 当$\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta y_k < \delta$ 时（其中$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$)有

$$\sup_{\zeta_k \in [y_{k-1}, y_k], k=1,2,...,n} \Big| \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \mu(E_k) - A \Big| < \varepsilon.$$

这个A就称为f在$[a,b]$上的关于测度μ的Lebesgue 积分.

为证这个常数A存在, 我们考虑Lebesgue 上和$\overline{L_n}(f)$ 与下和$\underline{L_n}(f)$：

$$\overline{L_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k), \quad \underline{L_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k).$$

来证明任何一个Lebesgue 下和都不超过任何一个Lebesgue 上和。具体来说, 令

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = \beta, \quad \alpha = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_m = \beta$$

$$A_i = [a,b](y_{i-1} \le f < y_i), \ i = 1, 2, ..., n; \quad B_j = [a,b](z_{j-1} \le f < z_j), \ j = 1, 2, ..., m.$$

则有

$$\underline{L_n}(f) \le \overline{L_m}(f) \quad \text{即} \quad \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \mu(A_i) \le \sum_{j=1}^{m} z_j \mu(B_j).$$

为证这一点, 注意

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

因此有

$$A_i = A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j, \quad \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \quad (\text{可加性}).$$

$$B_j = B_j \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_j \cap A_i, \quad \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_j \cap A_i) \quad (\text{可加性}).$$

由此有

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \mu(A_i \cap B_j) \Big).$$

对于内层求和易见

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i:\, A_i\cap B_j\neq\emptyset}^{n} y_{i-1}\mu(A_i \cap B_j).$$

这里用到性质: 若$A_i \cap B_j = \emptyset$ 则$\mu(A_i \cap B_j) = 0$ 从而对求和无贡献. 而当$A_i \cap B_j \neq \emptyset$时, 取一点$x \in A_i \cap B_j$ 得知

$$y_{i-1} \le f(x) < z_i \quad \text{即} \implies y_{i-1} < z_j.$$

于是得到

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i:\, A_i\cap B_j\neq\emptyset}^{n} y_{i-1}\mu(A_i \cap B_j) \le \sum_{i:\, A_i\cap B_j\neq\emptyset} z_j\mu(A_i \cap B_j)$$
$$= z_j \sum_{i:\, A_i\cap B_j\neq\emptyset}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = z_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = z_j\mu(B_j)$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mu(A_i \cap B_j)\Big) \le \sum_{j=1}^{m} z_j\mu(B_j).$$

根据这一性质我们有

$$\sup_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(E_k) \le \inf_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_k\mu(E_k).$$

下面证明等号成立。首先有

$$\alpha\mu([a,b]) \le \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} y_k\mu(E_k) \le \beta\mu([a,b]).$$

因此这些数集都是有界的从而有有限的上下确界.

对任意$\varepsilon > 0$ 取$[\alpha,\beta)$的一个分划$[\alpha,\beta) = \bigcup_{k=1}^{N}[\widetilde{y}_{k-1},\widetilde{y}_k)$ 使得$\max\limits_{1\le k\le N} \Delta\widetilde{y}_k < \varepsilon$. 对这个分划便有

$$\sum_{k=1}^{N} \widetilde{y}_k\mu(\widetilde{E}_k) - \sum_{k=1}^{N} \widetilde{y}_{k-1}\mu(\widetilde{E}_k) = \sum_{k=1}^{N} \Delta\widetilde{y}_k\mu(\widetilde{E}_k) \le \varepsilon\sum_{k=1}^{N} \mu(\widetilde{E}_k) = \varepsilon\mu([a,b])$$

由此有

$$\inf_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_k\mu(E_k) \le \sum_{k=1}^{N} \widetilde{y}_k\mu(\widetilde{E}_k) \le \sum_{k=1}^{N} \Delta\widetilde{y}_{k-1}\mu(\widetilde{E}_k) + \varepsilon\mu([a,b])$$
$$\le \sup_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(E_k) + \varepsilon\mu([a,b]).$$

令$\varepsilon \to 0$ 即得反向不等式:

$$\inf_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) \le \sup_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k).$$

所以等号成立:

$$\sup_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k) = \inf_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) =: A.$$

最后证明这个公共值A即具有前面说的性质, 即它是f在$[a,b]$上的Lebesgue 积分。为此需要证明

$$\lim_{\max\limits_{1\le k\le n} \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k) = \sup_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k) = A,$$

$$\lim_{\max\limits_{1\le k\le n} \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) = \inf_{\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,\, n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) = A.$$

由于时间紧张，**请助教自己补充这个证明, 如果困难, 就给学生直观解释一下。**

根据这个极限等式可知对任意$\varepsilon > 0$ 存在$\delta > 0$ 使得当$[\alpha,\beta)$的分划的子区间的最大长度$\max\limits_{1\le k\le n} \Delta y_k < \delta$ 时有

$$A - \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) < A + \varepsilon/2.$$

于是有

$$A - \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \mu(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) < A + \varepsilon/2, \quad \zeta_k \in [y_{k-1}, y_k].$$

因此

$$\sup_{\zeta_k\in[y_{k-1},y_k],\, k=1,2,\dots,n} \Big| \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \mu(E_k) - A \Big| \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

所以A是f在$[a,b]$ 上的关于测度μ的Lebesgue 积分.

比较两个积分的优劣:

(1). Riemann 积分的优点是它有好的离散形式, 即Riemann 和

$$f \mapsto \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

是线性的、显式的、便于操作，常用于建模和计算。Riemann 积分的缺点是：Riemann可积性对被积函数f的要求较高, 即要求f几乎处处连续, 因此挤掉了很多基本的简单的函数.

(2). Lebesgue积分的优点是它对被积函数的要求很弱，只要求可测和有界(很多时候还可以无界). 因此容纳了大量的不连续函数，使得这个积分能广泛用于概率论、泛函分析、几何分析、...,。Lebesgue积分的缺点是它的离散形式关于被积函数是完全非线性的:

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \mu([a,b](y_{k-1} \le f < y_k)).$$

因此不便用于计算和建模。不过这揭示了某种规律: 一般来说, 隐式的、非线性的方案往往能在较差的范围内发挥较大作用, 而显式的、线性的方案就不具有这个能力。 $\square$

习题课.

1. (1) 设E是一个集合, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是E上的一列实值(或复值)函数. 令

$$A=\{x\in E\mid \lim_{k\to\infty}f_k(x)\ \text{存在有限}\}.$$

证明

$$A=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{j>k\ge N}E(|f_j-f_k|<\frac{1}{m}).$$

(2) 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$是一测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是E 上的一列实值(或复值)可测函数. 令

$$A=\{x\in E\mid \lim_{k\to\infty}f_k(x)\ \text{存在有限}\}$$

证明A是$\mathcal{M}$-可测集, 即$A\in\mathcal{M}$.

【证】(1): 利用数列收敛的Cauchy 收敛准则。（2）：利用(1)。

细节请助教补上。 $\Box$

2.(并集的交的公式) 设$E_k^{(j)}$ 为一些集合, $k=1,2,...,N_j, j=1,2,...,p$. 则有

$$\Big(\bigcup_{k_1=1}^{N_1}E_{k_1}^{(1)}\Big)\cap\Big(\bigcup_{k_2=1}^{N_2}E_{k_2}^{(2)}\Big)\cap\cdots\cap\Big(\bigcup_{k_p=1}^{N_p}E_{k_p}^{(p)}\Big)=\bigcup_{k_1=1}^{N_1}\bigcup_{k_2=1}^{N_2}\cdots\bigcup_{k_p=1}^{N_p}E_{k_1}^{(1)}\cap E_{k_2}^{(2)}\cap\cdots\cap E_{k_p}^{(p)}.$$

【证】用集合相等的定义验证：对任意x, 有

$$\begin{aligned}
&x\in\Big(\bigcup_{k_1=1}^{N_1}E_{k_1}^{(1)}\Big)\cap\Big(\bigcup_{k_2=1}^{N_2}E_{k_2}^{(2)}\Big)\cap\cdots\cap\Big(\bigcup_{k_p=1}^{N_p}E_{k_p}^{(p)}\Big)\\
&\iff \text{存在}\ k_1\in\{1,2,...,N_1\},\ k_2\in\{1,2,...,N_2\},...,k_p\in\{1,2,...,N_p\}\\
&\text{使得}\ \ x\in E_{k_1}^{(1)}\cap E_{k_2}^{(2)}\cap\cdots\cap E_{k_p}^{(p)}\\
&\iff x\in\bigcup_{k_1=1}^{N_1}\bigcup_{k_2=1}^{N_2}\cdots\bigcup_{k_p=1}^{N_p}E_{k_1}^{(1)}\cap E_{k_2}^{(2)}\cap\cdots\cap E_{k_p}^{(p)}.
\end{aligned}$$

所以本题中的等式成立. $\Box$

注：本题是为下面习题设置的，但实际上并不好用(虽然可用), 也即在重要的地方, 并没有比用集合的特征函数方便。

3(细讲!). 本题学习Lebesgue 测度的计算、2-进区间的性质, 可测集之间的独立性。

设

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Big[\frac{2(k-1)}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\Big), \quad B_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Big[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

则不难证明

$$A_n \cup B_n = [0,1), \quad A_n \cap B_n = \emptyset,$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{B_n}(x) \qquad \forall\, x \in [0,1) \qquad [\text{见第九章最后一节的注}],$$

$$A_n = \{x \in [0,1) \,|\, x\text{的2-进制表示}x = 0.a_1a_2a_3...\text{中的第}n\text{位数字}a_n = 0\},$$

$$B_n = \{x \in [0,1) \,|\, x\text{的2-进制表示}x = 0.a_1a_2a_3...\text{中的第}n\text{位数字}a_n = 1\}.$$

这里我们对x的2-进有理数的两种表示取0出现最多的那种. 即例如对于

$$0.00111111... = 0.01000000... \qquad \text{取后一种表示.}$$

计算

$$m(A_n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} m\Big(\Big[\frac{2(k-1)}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

同样

$$m(B_n) = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

对每个$n \in \mathbb{N}$ 取定E_n 如下:

$$E_n \in \{A_n, B_n\} \qquad \text{即} \quad E_n = A_n \quad \text{或} \quad E_n = B_n.$$

来证明这样取定的集合列$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有下列性质:

$$m(E_n) = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, ...;$$
$$m\Big(E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \cdots \cap E_{n_p}\Big) = m(E_{n_1})m(E_{n_2})\cdots m(E_{n_p}) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^p,$$
$$\forall\, 1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_p, \quad p = 1, 2, 3, ...$$

因此用概率论的语言来说, $E_1, E_2, E_3, ...$是$[0,1)$中互相独立的集合.

此外对任意子列$1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 有

$$m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}\Big) = 0, \quad m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}\Big) = 1.$$

【证】由E_n的取法知对每个$n\in\mathbb{N}$ 存在$i_n\in\{1,2\}$ 使得

$$E_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\Big[\frac{2k-i_n}{2^n},\frac{2k-i_n+1}{2^n}\Big).$$

需要先证明一个求和公式: 若$1\le n_1<n_2<\cdots<n_p,\ p\in\mathbb{N}$, 则

$$\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}1=2^{n_p-p}$$

其中

$$\begin{aligned}S_{n_1,n_2,...,n_p}=\Big\{&(k_1,k_2,...,k_p)\in\mathbb{N}^p\ \Big|\\&1\le k_1\le 2^{n_1-1},\\&2^{n_2-n_1-1}(2k_1-i_{n_1})+1\le k_2\le 2^{n_2-n_1-1}(2k_1-i_{n_1}+1),\\&2^{n_3-n_2-1}(2k_2-i_{n_2})+1\le k_3\le 2^{n_3-n_2-1}(2k_2-i_{n_2}+1),\\&......,\\&2^{n_p-n_{p-1}-1}(2k_{p-1}-i_{n_{p-1}})+1\le k_p\le 2^{n_p-n_{p-1}-1}(2k_{p-1}-i_{n_{p-1}}+1)\Big\}.\end{aligned}$$

我们对n_i的个数p用归纳法. 当$p=1$ 时有

$$\sum_{k_1\in S_{n_1}}1=\sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}}=2^{n_1-1}.$$

假设所证等式对于n_i的个数为$p\in\mathbb{N}$时成立, 则当n_i的个数为$p+1$时有

$$\begin{aligned}&\sum_{(k_1,k_2,...,k_p,k_{p+1})\in S_{n_1,n_2,...,n_p,n_{p+1}}}1=\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}\left(\sum_{k_{p+1}=2^{n_{p+1}-n_p-1}(2k_p-i_{n_p})+1}^{2^{n_{p+1}-n_p-1}(2k_p-i_{n_p}+1)}1\right)\\&=\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}2^{n_{p+1}-n_p-1}=\left(\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}1\right)2^{n_{p+1}-n_p-1}\\&=2^{n_p-p}\cdot 2^{n_{p+1}-n_p-1}=2^{n_{p+1}-(p+1)}.\end{aligned}$$

这表明当n_i的个数为$p+1$时所证等式也成立. 因此所证等式对一切$p\in\mathbb{N}$成立.

任取$2\le p\in\mathbb{N}$和任取$1\le n_1<n_2<\cdots<n_p$. 利用特征函数的性质和数的和的乘积公式(**命题9.2 (乘积公式)**) 以及2-进区间的性质我们计算

$$\mathbf{1}_{E_{n_1}\cap E_{n_2}\cap\cdots\cap E_{n_p}}(x)=\mathbf{1}_{E_{n_1}}(x)\mathbf{1}_{E_{n_2}}(x)\cdots\mathbf{1}_{E_{n_p}}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{k=1}^{2^{n_1-1}} \mathbf{1}_{[\frac{2k-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k-i_{n_1}+1}{2^{n_1}})}(x)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{2^{n_2-1}} \mathbf{1}_{[\frac{2k-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k-i_{n_2}+1}{2^{n_2}})}(x)\Big)\cdots\Big(\sum_{k=1}^{2^{n_p-1}} \mathbf{1}_{[\frac{2k-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k-i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x)\Big)\\
&= \sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}}\sum_{k_2=1}^{2^{n_2-1}}\cdots\sum_{k_p=1}^{2^{n_p-1}} \mathbf{1}_{[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}})}(x)\mathbf{1}_{[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}})}(x)\cdots\mathbf{1}_{[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x)\\
&= \sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}}\sum_{k_2=1}^{2^{n_2-1}}\cdots\sum_{k_p=1}^{2^{n_p-1}} \mathbf{1}_{[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}})\cap[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}})\cap\cdots\cap[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x)\\
&= \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_p)\in T_{n_1,n_2,\dots,n_p}} \mathbf{1}_{[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}})\cap[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}})\cap\cdots\cap[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x)
\end{aligned}
$$

其中

$$
T_{n_1,n_2,\dots,n_p} = \Big\{(k_1,k_2,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^p \;\Big|\; 1\le k_i\le 2^{n_i-1},\ i=1,2,\dots,p;
$$

$$
\Big[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}}\Big)\bigcap\Big[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}}\Big)\bigcap\cdots\bigcap\Big[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}}\Big)\neq\emptyset\Big\}.
$$

根据2-进区间的性质(见**命题9.3(2-进方体的特性)**) 和$1\le n_1<n_2<\cdots<n_p$可知

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}}\Big)\bigcap\Big[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}}\Big)\bigcap\cdots\bigcap\Big[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}}\Big)\neq\emptyset\\
&\Longleftrightarrow\ \Big[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}}\Big)\supset\Big[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}}\Big)\supset\cdots\supset\Big[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}}\Big)\\
&\Longleftrightarrow\ (k_1,k_2,\dots,k_p)\in S_{n_1,n_2,\dots,n_p}.
\end{aligned}
$$

这里最后等号用到了整数的性质: $2N+1\le 2M \iff N+1\le M$.

所以

$$
T_{n_1,n_2,\dots,n_p} = S_{n_1,n_2,\dots,n_p}
$$

同时可知

$$
\begin{aligned}
&(k_1,k_2,\dots,k_p)\in T_{n_1,n_2,\dots,n_p}\Longrightarrow\\
&\Big[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}}\Big)\bigcap\Big[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}}\Big)\bigcap\cdots\bigcap\Big[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}}\Big)\\
&=\Big[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}}\Big)\\
&\Longrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{1}_{[\frac{2k_1-i_{n_1}}{2^{n_1}},\frac{2k_1-i_{n_1}+1}{2^{n_1}})\cap[\frac{2k_2-i_{n_2}}{2^{n_2}},\frac{2k_2-i_{n_2}+1}{2^{n_2}})\cap\cdots\cap[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x)=\mathbf{1}_{[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x),\quad x\in\mathbb{R}.
$$

于是得到

$$
\mathbf{1}_{E_{n_1}\cap E_{n_2}\cap\cdots\cap E_{n_p}}(x)=\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_p)\in S_{n_1,n_2,\dots,n_p}}\mathbf{1}_{[\frac{2k_p-i_{n_p}}{2^{n_p}},\frac{2k_p-i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x),\qquad x\in\mathbb{R}.
$$

于是得到 (**以下用**$\mathrm{d}x = \mathrm{d}m(x)$ **表示Lebesgue 测度元，并注意当**$E \subset [0,1)$**时有**$m(E) = \int_0^1 \mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}x$)

$$\begin{aligned}
& m(E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \cdots \cap E_{n_p}) = \int_0^1 \mathbf{1}_{E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \cdots \cap E_{n_p}}(x)\mathrm{d}x \\
& = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in S_{n_1,n_2,\ldots,n_p}} \int_0^1 \mathbf{1}_{[\frac{2k_p - i_{n_p}}{2^{n_p}}, \frac{2k_p - i_{n_p}+1}{2^{n_p}})}(x)\mathrm{d}x \\
& = \frac{1}{2^{n_p}} \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in S_{n_1,n_2,\ldots,n_p}} 1 = \frac{1}{2^{n_p}} 2^{n_p - p} = 2^{-p}.
\end{aligned}$$

这证明了E_n的独立性等式.

注意

$$[0,1) \setminus A_n = B_n, \quad [0,1) \setminus B_n = A_n$$

因此

$$E_n \in \{A_n, B_n\} \iff \hat{E}_n := [0,1) \setminus E_n \in \{A_n, B_n\}.$$

于是有

$$[0,1) \setminus \hat{E}_{n_1} \cap \hat{E}_{n_2} \cap \cdots \cap \hat{E}_{n_p} = [0,1) \setminus \bigcap_{i=1}^{p} \hat{E}_{n_i} = \bigcup_{i=1}^{p} [0,1) \setminus \hat{E}_{n_i} = \bigcup_{i=1}^{p} E_{n_i}$$

$\Longrightarrow$

$$1 - 2^{-p} = 1 - m(\hat{E}_{n_1} \cap \hat{E}_{n_2} \cap \cdots \cap \hat{E}_{n_p}) = m([0,1) \setminus \hat{E}_{n_1} \cap \hat{E}_{n_2} \cap \cdots \cap \hat{E}_{n_p}) = m(\bigcup_{i=1}^{p} E_{n_i})$$

$$\Longrightarrow \quad m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}) = \lim_{p \to \infty} m(\bigcup_{i=1}^{p} E_{n_i}) = 1, \quad m(\bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{E}_{n_i}) = 0.$$

同样有$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{E}_{n_i}) = 1$, $m(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}) = 0$. 因此我们得到

$$m(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}) = 0, \qquad m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}) = 1.$$

由下标$1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$的任意性可知有

$$m(\bigcap_{i=j}^{\infty} E_{n_i}) = 0, \qquad m(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}) = 1, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

由这第二个等式我们最后得到

$$m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}\Big) = \lim_{j \to \infty} m(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}) = 1. \qquad \square$$

3(下面老的版本和老的证法, 较为繁琐，但部分推导有新意). 本题学习Lebesgue 测度的计算、2-进区间的性质, 可测集之间的独立性。

设

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}\Big[\frac{2(k-1)}{2^n},\frac{2k-1}{2^n}\Big),\quad B_n=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}\Big[\frac{2k-1}{2^n},\frac{2k}{2^n}\Big),\quad n\in\mathbb{N}.$$

则不难证明

$$A_n\cup B_n=[0,1),\quad A_n\cap B_n=\emptyset,$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\mathbf{1}_{B_n}(x)\qquad\forall\,x\in[0,1)\qquad[\text{见第九章最后一节的注}],$$

$$A_n=\{x\in[0,1)\,|\,x\text{的2-进制表示}x=0.a_1a_2a_3...\text{中的第}n\text{位数字}a_n=0\},$$

$$B_n=\{x\in[0,1)\,|\,x\text{的2-进制表示}x=0.a_1a_2a_3...\text{中的第}n\text{位数字}a_n=1\}.$$

这里我们对x的2-进有理数的两种表示取0出现最多的那种. 即例如对于

$$0.00111111...=0.01000000...$$

取后一种表示. 来证明上述$\{A_n\}_{n=1}^{\infty},\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有下列性质:

$$\begin{aligned}&m(A_n)=m(B_n)=\frac{1}{2},\quad n=1,2,3,...;\\&m\Big(A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap\cdots\cap A_{n_p}\Big)=m(A_{n_1})m(A_{n_2})\cdots m(A_{n_p})=\Big(\frac{1}{2}\Big)^p,\\&m\Big(B_{n_1}\cap B_{n_2}\cap\cdots\cap B_{n_p}\Big)=m(B_{n_1})m(B_{n_2})\cdots m(B_{n_p})=\Big(\frac{1}{2}\Big)^p\\&\forall\,1\le n_1<n_2<\cdots<n_p,\quad p=1,2,3,\dots.\end{aligned}$$

因此用概率论的语言来说, $A_1,A_2,A_3,...$是$[0,1)$中互相独立的集合; $B_1,B_2,B_3,...$是$[0,1)$中互相独立的集合.

此外对任意子列$1\le n_1<n_2<n_3<\cdots$ 有

$$m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\Big)=m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_{n_i}\Big)=0,\qquad m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\Big)=m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_{n_i}\Big)=1,$$

$$m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}A_{n_i}\Big)=m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}B_{n_i}\Big)=1.$$

【证】先证明关于B_n的独立公式. 为此需要先证明若$1\le n_1<n_2<\cdots<n_p,\ p\in\mathbb{N}$, 则

$$\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}1=2^{n_p-p}$$

其中

$$\begin{aligned}S_{n_1,n_2,...,n_p}=\Big\{&(k_1,k_2,...,k_p)\in\mathbb{N}^p\;\Big|\\&1\le k_1\le 2^{n_1-1},\\&2^{n_2-n_1-1}(2k_1-1)+1\le k_2\le 2^{n_2-n_1-1}2k_1,\\&2^{n_3-n_2-1}(2k_2-1)+1\le k_3\le 2^{n_3-n_2-1}2k_2,\\&......,\\&2^{n_p-n_{p-1}-1}(2k_{p-1}-1)+1\le k_p\le 2^{n_p-n_{p-1}-1}2k_{p-1}\Big\}.\end{aligned}$$

我们对n_i的个数p用归纳法. 当$p=1$ 时有

$$\sum_{k_1\in S_{n_1}}1=\sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}}=2^{n_1-1}.$$

假设所证等式对于n_i的个数为$p\in\mathbb{N}$时成立, 则当n_i的个数为$p+1$时有

$$\begin{aligned}&\sum_{(k_1,k_2,...,k_p,k_{p+1})\in S_{n_1,n_2,...,n_p,n_{p+1}}}1=\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}\left(\sum_{k_{p+1}=2^{n_{p+1}-n_p-1}(2k_p-1)+1}^{2^{n_{p+1}-n_p-1}2k_p}1\right)\\&=\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}2^{n_{p+1}-n_p-1}=\left(\sum_{(k_1,k_2,...,k_p)\in S_{n_1,n_2,...,n_p}}1\right)2^{n_{p+1}-n_p-1}\\&=2^{n_p-p}\cdot 2^{n_{p+1}-n_p-1}=2^{n_{p+1}-(p+1)}.\end{aligned}$$

这表明当n_i的个数为$p+1$时所证等式也成立. 因此所证等式对一切$p\in\mathbb{N}$成立.

计算

$$m(B_n)=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}m\Big(\Big[\frac{2k-1}{2^n},\frac{2k}{2^n}\Big)\Big)=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

任取$2\le p\in\mathbb{N}$和任取$1\le n_1<n_2<\cdots<n_p$. 利用特征函数的性质和数的和的乘积公式(**命题9.2 (乘积公式)**) 我们计算

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{B_{n_1}\cap B_{n_2}\cap\cdots\cap B_{n_p}}(x)=\mathbf{1}_{B_{n_1}}(x)\mathbf{1}_{B_{n_2}}(x)\cdots\mathbf{1}_{B_{n_p}}(x)\\&=\Big(\sum_{k=1}^{2^{n_1-1}}\mathbf{1}_{[\frac{2k-1}{2^{n_1}},\frac{2k}{2^{n_1}})}(x)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{2^{n_2-1}}\mathbf{1}_{[\frac{2k-1}{2^{n_2}},\frac{2k}{2^{n_2}})}(x)\Big)\cdots\Big(\sum_{k=1}^{2^{n_p-1}}\mathbf{1}_{[\frac{2k-1}{2^{n_p}},\frac{2k}{2^{n_p}})}(x)\Big)\\&=\sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}}\sum_{k_2=1}^{2^{n_2-1}}\cdots\sum_{k_p=1}^{2^{n_p-1}}\mathbf{1}_{[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}},\frac{2k_1}{2^{n_1}})}(x)\mathbf{1}_{[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}},\frac{2k_2}{2^{n_2}})}(x)\cdots\mathbf{1}_{[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}},\frac{2k_p}{2^{n_p}})}(x)\\&=\sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}}\sum_{k_2=1}^{2^{n_2-1}}\cdots\sum_{k_p=1}^{2^{n_p-1}}\mathbf{1}_{[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}},\frac{2k_1}{2^{n_1}})\cap[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}},\frac{2k_2}{2^{n_2}})\cap\cdots\cap[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}},\frac{2k_p}{2^{n_p}})}(x).\end{aligned}$$

于是得到 (**以下用**$\mathrm{d}x = \mathrm{d}m(x)$ **表示Lebesgue 测度元，并注意当**$E \subset [0,1)$**时有**$m(E) = \int_0^1 \mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}x$)

$$
\begin{aligned}
&m(B_{n_1} \cap B_{n_2} \cap \cdots \cap B_{n_p}) = \int_0^1 \mathbf{1}_{B_{n_1} \cap B_{n_2} \cap \cdots \cap B_{n_p}}(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}} \sum_{k_2=1}^{2^{n_2-1}} \cdots \sum_{k_p=1}^{2^{n_p-1}} \int_0^1 \mathbf{1}_{[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}}, \frac{2k_1}{2^{n_1}}) \cap [\frac{2k_2-1}{2^{n_2}}, \frac{2k_2}{2^{n_2}}) \cap \cdots \cap [\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}})}(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k_1=1}^{2^{n_1-1}} \sum_{k_2=1}^{2^{n_2-1}} \cdots \sum_{k_p=1}^{2^{n_p-1}} m\Big(\Big[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}}, \frac{2k_1}{2^{n_1}}\Big) \bigcap \Big[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}}, \frac{2k_2}{2^{n_2}}\Big) \bigcap \cdots \bigcap \Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big)\Big) \\
&= \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in T_{n_1,n_2,\ldots,n_p}} m\Big(\Big[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}}, \frac{2k_1}{2^{n_1}}\Big) \bigcap \Big[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}}, \frac{2k_2}{2^{n_2}}\Big) \bigcap \cdots \bigcap \Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
T_{n_1,n_2,\ldots,n_p} = \Big\{(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in \mathbb{N}^p \,\Big|\, & 1 \le k_i \le 2^{n_i-1},\ i = 1,2,\ldots,p; \\
& \Big[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}}, \frac{2k_1}{2^{n_1}}\Big) \bigcap \Big[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}}, \frac{2k_2}{2^{n_2}}\Big) \bigcap \cdots \bigcap \Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big) \neq \emptyset\Big\}.
\end{aligned}
$$

根据2-进区间的性质(见**命题9.3(2-进方体的特性)**) 和$1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_p$可知

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}}, \frac{2k_1}{2^{n_1}}\Big) \bigcap \Big[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}}, \frac{2k_2}{2^{n_2}}\Big) \bigcap \cdots \bigcap \Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big) \neq \emptyset \\
\Longleftrightarrow\ &\Big[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}}, \frac{2k_1}{2^{n_1}}\Big) \supset \Big[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}}, \frac{2k_2}{2^{n_2}}\Big) \supset \cdots \supset \Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big) \\
\Longleftrightarrow\ &(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in S_{n_1,n_2,\ldots,n_p}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
T_{n_1,n_2,\ldots,n_p} = S_{n_1,n_2,\ldots,n_p}
$$

同时可知

$$
\begin{aligned}
&(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in T_{n_1,n_2,\ldots,n_p} \Longrightarrow \\
&\Big[\frac{2k_1-1}{2^{n_1}}, \frac{2k_1}{2^{n_1}}\Big) \bigcap \Big[\frac{2k_2-1}{2^{n_2}}, \frac{2k_2}{2^{n_2}}\Big) \bigcap \cdots \bigcap \Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big) = \Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big).
\end{aligned}
$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
&m(B_{n_1} \cap B_{n_2} \cap \cdots \cap B_{n_p}) = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in S_{n_1,n_2,\ldots,n_p}} m\Big(\Big[\frac{2k_p-1}{2^{n_p}}, \frac{2k_p}{2^{n_p}}\Big)\Big) \\
&= \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in S_{n_1,n_2,\ldots,n_p}} \frac{1}{2^{n_p}} = \Bigg(\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_p) \in S_{n_1,n_2,\ldots,n_p}} 1\Bigg) \frac{1}{2^{n_p}} = \frac{1}{2^p}.
\end{aligned}
$$

这证明了B_n的独立性等式.

下面利用B_n的独立性等式证明A_n的独立性等式. 由$[0,1)\setminus A_n = B_n$ 有

$$[0,1)\setminus A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap\cdots\cap A_{n_p} = [0,1)\setminus\bigcap_{k=1}^{p} A_{n_k} = \bigcup_{k=1}^{p}[0,1)\setminus A_{n_k} = \bigcup_{k=1}^{p} B_{n_k}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&1-m(A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap\cdots\cap A_{n_p}) = m([0,1)\setminus A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap\cdots\cap A_{n_p}) = m(\bigcup_{i=1}^{p} B_{n_i})\\
&=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le p} m(B_{n_{i_1}}\cap B_{n_{i_2}}\cap\cdots\cap B_{n_{i_k}}) \qquad \text{(这是前面习题课的习题结果)}\\
&=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^k}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le p} 1 = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^k}C_p^k = (-1)\sum_{k=1}^{p}C_p^k\Big(\frac{-1}{2}\Big)^k\\
&=(-1)\Big(\sum_{k=0}^{p}C_p^k\Big(\frac{-1}{2}\Big)^k-1\Big) = (-1)\Big(\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^p-1\Big) = 1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^p.
\end{aligned}$$

所以

$$m(A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap\cdots\cap A_{n_p}) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^p.$$

最后来证明无限交集和并集的测度性质. 任取子列$1\le n_1<n_2<n_3<\cdots$. 我们有

$$0\le m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\Big)\le m\Big(\bigcap_{i=1}^{p}A_{n_i}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^p\to 0 \quad (p\to\infty).$$

因此$m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\Big)=0$. 同理$m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_{n_i}\Big)=0$. 由此和De Morgan 对偶律便得到

$$[0,1)\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{n_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty}([0,1)\setminus A_{n_i}) = \bigcap_{i=1}^{\infty}B_{n_i}$$

从而有

$$1-m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\Big) = m\Big([0,1)\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\Big) = m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_{n_i}\Big) = 0.$$

所以$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\Big)=1$. 同理$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_{n_i}\Big)=1$.

注意到下标子列的任意性我们有

$$m\Big(\bigcup_{i=j}^{\infty}A_{n_i}\Big)=1,\quad j=1,2,3,\dots.$$

于是由单调性

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{n_i}\supset\bigcup_{i=2}^{\infty}A_{n_i}\supset\bigcup_{i=3}^{\infty}A_{n_i}\supset\cdots$$

和测度有限性即得

$$m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}A_{n_i}\Big)=\lim_{j\to\infty}m\Big(\bigcup_{i=j}^{\infty}A_{n_i}\Big)=1.$$

同理可证

$$m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}B_{n_i}\Big)=1. \qquad \square$$

4. 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$为一测度空间, $E_k\in\mathcal{M}, k=1,2,3,...$; $\varepsilon>0$ 满足

$$\mu(E_k)\ge\varepsilon,\quad k=1,2,3,...;\qquad \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)<+\infty.$$

证明

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)\ge\varepsilon>0.$$

因此特别可知存在子列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$ 使得

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}E_{k_j}\ne\emptyset.$$

但是**可以**出现这样的情形: 对于任意子列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$ 都有$\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_{k_j})=0$.

【证】我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\supset\bigcup_{k=2}^{\infty}E_k\supset\bigcup_{k=3}^{\infty}E_k\supset\cdots,\quad \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)<+\infty.$$

据测度的单调极限定理和

$$\mu\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)\ge\mu(E_j)\ge\varepsilon,\quad j=1,2,3,...$$

即得

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)=\lim_{j\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\Big)\ge\varepsilon>0.$$

由此正测度知$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\ne\emptyset$. 取$x_0\in\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k$.

则对于$j=1$ 有$x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, 因此存在$k_1\ge1$ 使得$x_0\in E_{k_1}$.

对于$j=k_1+1$ 有$x_0\in\bigcup_{k=k_1+1}^{\infty}E_k$, 因此存在$k_2\ge k_1+1$ 使得$x_0\in E_{k_2}$.

对于$j=k_2+1$ 有$x_0\in\bigcup_{k=k_2+1}^{\infty}E_k$, 因此存在$k_3\ge k_2+1$ 使得$x_0\in E_{k_3}$.

如此操作下去, 用归纳法, 我们得到严格递增的自然数列$1\le k_1<k_2<k_3<\cdots$ 使得$x_0\in\bigcap_{j=1}^{\infty}E_{k_j}$. 所以$\bigcap_{j=1}^{\infty}E_{k_j}\ne\emptyset$.

最后我们来构造一个使得任何交集$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j}$皆为零测集的例子.

考虑Lebesgue 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 其中$\mu = m_n$ 是$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度. 令$A_k \subset [0,1)$为第3题中的集合, 令

$$E_k = A_k \times [0,1)^{n-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

令m_1 表示$\mathbb{R}$上的Lebesgue测度. 则有

$$\mu(E_k) = m_n(A_k \times [0,1)^{n-1}) = m_1(A_k) m_{n-1}([0,1)^{n-1}) = m_1(A_k) = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

同时有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset [0,1)^n \quad \text{从而有} \quad \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = m_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \le 1 < +\infty.$$

但对任意子列$1 \le k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ 有

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j} = \bigcap_{j=1}^{\infty} (A_{k_j} \times [0,1)^{n-1}) = \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{k_j}\Big) \times [0,1)^{n-1}$$

从而有

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j}\Big) = m_1\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{k_j}\Big) m_{n-1}([0,1)^{n-1}) = m_1\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{k_j}\Big) = 0. \qquad \square$$

5. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一个测度空间, $E \in \mathcal{M}, 0 < \mu(E) < +\infty$. 设$f : E \to \mathbb{R}$为$\mathcal{M}$- 可测函数满足

$$\mu(E(f = t)) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

证明函数

$$t \mapsto \mu(E(f > t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

在$\mathbb{R}$上连续。因此存在$c \in \mathbb{R}$使得

$$\mu(E(f > c)) = \mu(E(f \le c)) = \frac{1}{2}\mu(E).$$

【证】令$F(t) = \mu(E(f > t))$. 任取$t_0 \in \mathbb{R}$. 要证F在t_0连续。任取递增数列

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_0, \quad t_n \to t_0 \quad (n \to \infty).$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&E(f>t_1)\supset E(f>t_2)\supset E(f>t_3)\supset\cdots,\\
&E(f\ge t_0)\supset\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>t_k)\supset E(f>t_0).
\end{aligned}
$$

于是由假设和测度的单调极限定理有

$$
\lim_{k\to\infty}F(t_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E(f>t_k))=\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>t_k)\Big)=\mu(E(f>t_0))=F(t_0)
$$

这里第三个等号用到了题中的假设它蕴含 （写$E(f\ge t_0)=E(f=t_0)\cup E(f>t_0)$ ）

$$
\mu(E(f\ge t_0))=\mu(E(f>t_0)).
$$

另一方面任取递减数列

$$
t_1>t_2>t_3>\cdots>t_0,\quad t_n\to t_0\quad(n\to\infty).
$$

我们有

$$
E(f>t_1)\subset E(f>t_2)\subset E(f>t_3)\subset\cdots,\qquad E(f>t_0)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>t_k).
$$

细节: 对任意$x\in E(f>t_0)$ 有$f(x)>t_0$. 因$t_k\to t_0\,(k\to\infty)$, 故存在$k\in\mathbb{N}$ 使得$f(x)>t_k>t$. 因此$x\in E(f>t_k)$. 这证明了$E(f>t_0)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>t_k)$. 而易见$E(f>t_k)\subset E(f>t_0), k=1,2,3,\dots$. 所以$\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>t_k)\subset E(f>t_0)$. 所以$E(f>t_0)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>t_k)$.

于是由测度的单调极限定理有

$$
\lim_{k\to\infty}F(t_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E(f>t_k))=\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>t_k)\Big)=\mu(E(f>t_0))=F(t_0).
$$

这就证明了

$$
F(t_0-)=\lim_{t\to t_0-}F(t)=F(t_0)=\lim_{t\to t_0+}F(t)=F(t_0+).
$$

所以F在t_0连续. 由$t_0\in\mathbb{R}$的任意性知F在$\mathbb{R}$上连续。

其次看:

$$
E(f>1)\supset E(f>2)\supset E(f>3)\supset\cdots,\qquad\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>k)=E(f=+\infty)=\emptyset,
$$

$$E(f>-1)\subset E(f>-2)\subset E(f>-3)\subset\cdots,\quad \bigcup_{k=1}^{\infty}E(f>-k)=E(f>-\infty)=E,$$

因此再由测度的单调极限定理有

$$\lim_{k\to\infty}F(k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E(f>k))=\mu(\emptyset)=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}F(-k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E(f>-k))=\mu(E).$$

据连续函数介值定理知

$$(0,\mu(E))\subset F(\mathbb{R}).$$

因$\frac{1}{2}\mu(E)\in(0,\mu(E))$, 故存在$c\in\mathbb{R}$ 使得

$$\frac{1}{2}\mu(E)=F(c)=\mu(E(f>c))=\mu(E(f\le c)).$$

这里最后的等号是因为

$$\frac{1}{2}\mu(E)=\mu(E)-\frac{1}{2}\mu(E)=\mu(E)-\mu(E(f>c))=\mu(E(f\le c)).$$

□