中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

By LJW in USTC

图论第二次习题课

李佳伟

2017-12-14

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

By LJW in USTC

CH5： 8. 11. 12. 16. 18. 32. 33.

CH6： 2. 3. 4. 16. 17.

CH7： 2. 3. 5. 6. 9. 10.

第5章：8题(左上3行4列)

题：矩阵A的ij号元素a_{ij}是教师x_i对班级y_j一周上课的节数。求一天应几节课，若每天8节课，需几间教室？

A	y1	y2	y3	y4
x1	3	2	3	3
x2	1	3	6	0
x3	5	0	5	5

- $\varepsilon(G)=36$; $\Delta=15$
- 每周需安排15节课.
- 若每周5天课，则每天3节课.
- 若每天8节课，则每周5*8=40节课；

$$\left[\frac{\varepsilon}{40}\right]=0,\qquad \left\{\frac{\varepsilon}{40}\right\}=1,$$ 即每天8节课，需要1间教室.

- 请阅读5.1章节“课程表问题”，参考例5.3

第5章：11题

By LJW in USTC

题：求证$\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$

- 设G中顶点u满足：$\Delta(G) = d(u)$
- K_2两个顶点为v_1, v_2
- $\Delta(G * K_2) = d(uv_1) = d(uv_2)$。
- 在$G * K_2$中与uv_1相邻的点有（1）uv_2，（2）在G中与u相邻的点与v_1相乘后的点，（3）在G中与u相邻的点与v_2相乘后的点。
- 则：$\Delta(G \times K_2) = d(uv_1) = 2d(u)+1 = 2\Delta(G)+1$
- 则：$\chi'(G \times K_2) \geq \Delta(G \times K_2) = 2\Delta(G)+1$

- 接下来证 $\chi'(G \times K_2) \leq \Delta(G \times K_2) = 2\Delta(G)+1$
- <u>(两图的积在5.5章节末尾)</u>

第5章：11题 (续1)

By LJW in USTC

题：求证$\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$

接下来要证：$\chi'(G \times K_2) \le \Delta(G \times K_2) = 2\Delta(G)+1$

- 由定理5.2知：$\chi'(G) = \Delta(G)$ 或 $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$
- (1) 若 $\chi'(G) = \Delta(G)$：
  - 方法一：
    - $G \times K_2$ 相当于两个G全相连，两个G之间连线的边构成二分图G'，$\chi'(G') = \Delta(G') = \Delta(G)+1$
    - 则 $\chi'(G \times K_2) \le \Delta G + (\Delta G+1) = 2\Delta G + 1$
  - 方法二：
    - u_iv_j与u_kv_j仍使用G中u_i与u_k的$\chi'(G)$边着色方案，u_iv_1与u_iv_2之间采用一种新颜色着色，u_iv_1与u_kv_2使用新一种$\chi'(G)$边着色。
    - 则：$\chi'(G \times K_2) \le 2\chi'(G) + 1 = 2\Delta(G) + 1$

第5章：11题 (续2)

By LJW in USTC

题：求证$\chi'(G\times K_2) = \Delta(G\times K_2)$

接下来要证：$\chi'(G\times K_2) \le \Delta(G\times K_2) = 2\Delta(G)+1$

由定理5.2知：$\chi'(G) = \Delta(G)$ 或 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$

- (2) 若 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$：
  - u_iv_j与u_kv_j仍然使用G中u_i 与u_k的着色，共$\chi'(G) =\Delta(G)+1$ 种， u_iv_1与u_iv_2之间采用$\chi'(G)$ 中与u_i无关的1种颜色。 u_iv_1与u_kv_2使用新一种$\Delta(G)$着色。
  - 则： $\chi'(G\times K_2) \le (\Delta G+1)+\Delta G = 2\Delta(G)+1$
- 综合(1)(2)：$\chi'(G\times K_2) \le 2\Delta(G)+1$

- 以及：$\chi'(G\times K_2) \ge \Delta(G\times K_2) = 2\Delta(G)+1$
- 得： $\chi'(G\times K_2) = 2\Delta(G)+1 = \Delta(G\times K_2)$

第5章：12题

题：给出一个单图的△+1正常顶着色的算法。

By LJW in USTC

- 1.将单图的顶点按照度数由大到小排序.
- 2.按照由大到小的顺序，依次给不相邻的顶着相同颜色.
- 3.重复2直到循环结束.
- 4.若颜色数小于$\Delta + 1$，做适当调整.

- 言之有理即可

By LJW in USTC

5.16 设图G的次数序列为$d_1, d_2, \dots, d_v$，且此序列单调下降，即$d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_v$，则$\chi(G) \le \max_i \min\{d_i + 1, i\}$。

- 解：将G的顶点按度下降的顺序排列，记为$v_1, v_2, \dots, v_v$，不同颜色用不同大小的色号表示。

从v_1开始依次给顶点着色，第i次着色时，用v_i的邻点尚未使用的颜色中色号最小的颜色对v_i着色。由于对v_i着色时，下标比i大的顶点尚未着色，而下标比i小的顶点中与i相邻的顶点数不超过$\min_i\{d_i, i-1\}$个。

所以已使用的颜色数不超过$\min_i\{d_i, i-1\}$，所以v_i着色的色号不会超过$\min_i\{d_i, i-1\}$+1。

所以将G全部着色的颜色数不超过$max(\min_i\{d_i, i-1\}+1)$。

所以$\chi(G) \le \max(\min\{d_i, i-1\}+1) = \max_i \min\{d_i + 1, i\}$。

第5章：18题

题：求证 $\chi(G) + \chi(G^c) \le v+1$，其中$G^c$是图G的补图.

By LJW in USTC

- 利用16题结论: $\chi(G) \le \max(i) \min\{d_i+1, i\}$
- 存在k、k’，使得:
- $k \ge \chi(G)$，$d_k(G)+1 \ge \chi(G)$
- $k' \ge \chi(G^c)$，$d_{k'}(G^c)+1 \ge \chi(G^c)$
- (1)当$k+k' \ge v+1$时 ($v=|v|$)
  - 因为G中第k个顶点次数和G^c中第v-k+1个顶点次数之和为v-1.
  - 所以 $v-1 = d_k(G)+ d_{v-k+1}(G^c)$
  - 因为$k+k' \ge v+1 \implies k' \ge v-k+1$:
  - $v-1 = d_k(G) + d_{v-k+1}(G^c) \ge d_k(G) + d_{k'}(G^c) \ge \chi(G)-1 + \chi(G^c)-1$
  - 则 $v+1 \ge \chi(G) + \chi(G^c)$
- (2)当$k+k' < v+1$ 时 : $v+1 = k+(v-k+1) \ge k+k' \ge \chi(G) + \chi(G^c)$
- 综合(1)(2),可得$v+1 \ge \chi(G) + \chi(G^c)$ 得证。

第5章：32题

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

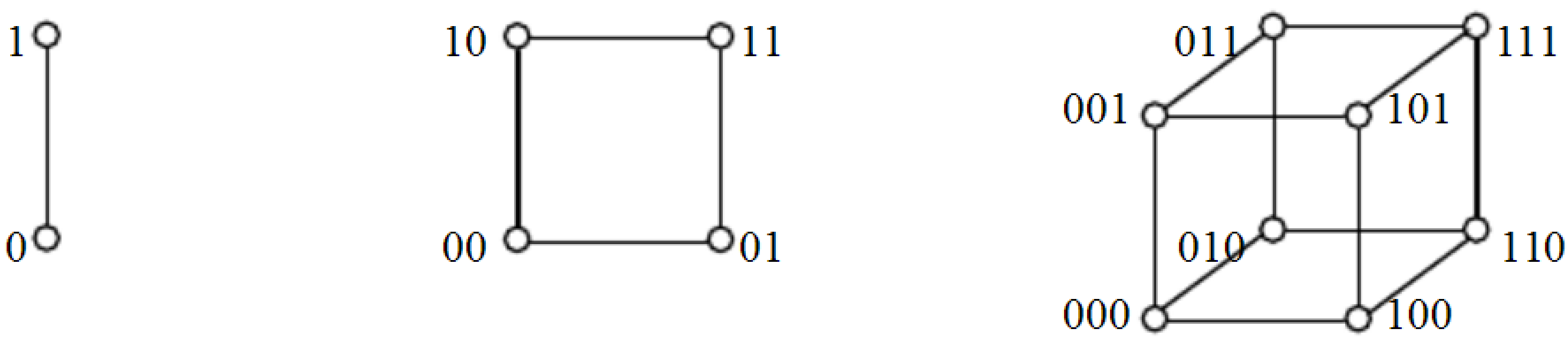
By LJW in USTC

- α(k维立方体) = 2^{k-1}
- β (k维立方体) = 2^{k-1}
- 思路：用数学归纳法证明

K维立方体定义：

顶点集V ={$(a_1a_2\ldots a_k)|a_i$= 0 or 1}，

两顶相邻当且仅当两个k维序列恰好有一个对应位不同



第5章：33题

题：求证 对G的任一子图H，$\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$ $\Leftrightarrow$ G是二分图.

By LJW in USTC

- 充分性：
  - G是二分图，它的任一子图H也是二分图，

    设$V(H)=X \cup Y$，且$X \cap Y = \emptyset$，
  - 则$\alpha(H) \geq \max(|X|,|Y|) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$

- 必要性：
  - 反证：假设G不是二分图，则图中有奇圈C，
  - 取H=C，则$\alpha(H) = \frac{1}{2}(|V(H)|-1) < \frac{1}{2}|V(H)|$，
  - 与G的任一子图H，$\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$矛盾，
  - 所以G是二分图。

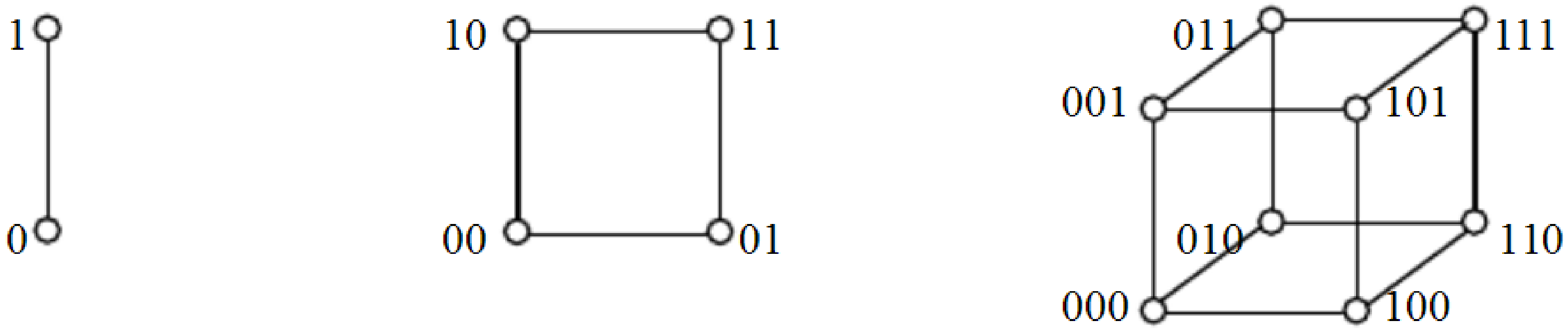
第6章：2题

University of Science and Technology of China

By LJW in USTC

6.2 对K维立方体G，k为何值时G是Euler图？

- K维立方体每个顶的度数均为d_k，且$d_k=k$
- 由定理6.1知，$d_k = k =$ 正偶数 时，G是Euler图



第6章：3题

By LJW in USTC

题：求图6.23中的一条中国邮路.

- 参照6.2章节图6.6题步骤作答.

第6章：4题

题：求证 Euler图G可由v_0起任意行遍 ⇔ v_0在G的每个圈上.

By LuWin in USTC

- 充分性： v_0在G的每个圈上 ==>由v_0起可任意行遍G
  - 反证法。假设v_0起不能任意行遍G.则存在两种情况：
  - 1）无法回到v_0，即到达某顶u后，没有边可以出去。因为Euler图中所有顶的度为偶数，所以这种情况不存在。
  - 2）回到v_0后，没有边可以出去，但还存在某些边没有行遍。
    - 设已走过的闭行迹是W，G’=G-W，且E(G’)$\neq \emptyset$. 易知G’中所有顶的度为偶数，故G’中存在圈C，但v_0不在圈C上，这与条件矛盾。假设不成立。
  - 充分性得证.

第6章：4题(续)

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

题：求证 Euler图G可由v_0起任意行遍 ⇔ v_0在G的每个圈上.

By LuWin USTC

- 必要性：由v_0起可任意行遍G ==> v_0在G的每个圈上
  - 反证法. 假设存在圈C， v_0不在圈C上.
  - 由于Euler图G可表示成无公共边的圈之并. 所以G-C = G′ 还是Euler图。而G的欧拉回路与G′ 的欧拉回路不相同，这与“由v_0起可任意行遍G ”的任意性矛盾。假设不成立。
  - 必要性得证。

第6章：16题

By LoWi in USTC

题：若G是二分图，但其二分图顶划分X与Y不均匀，即$|X|\neq|Y|$.
问G是否Hamilton图？为什么？

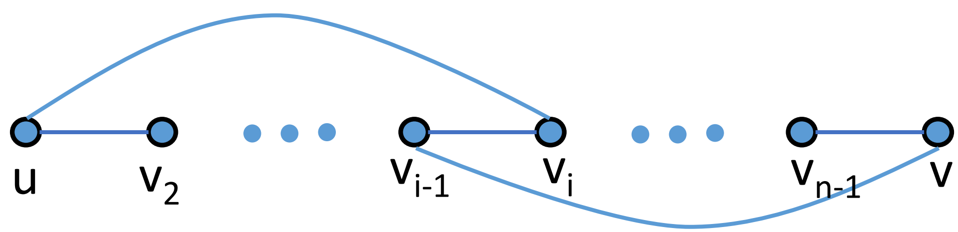
- 不是
- 反证法。
  - 假设G是Hamilton图，则存在圈C是Hamilton圈
  - G是二分图，X内各顶互不相邻，Y内各顶互不相邻
  - 则C中的顶在X、Y中交错出现，C为偶圈
  - 必有$|X| = |Y|$，与题中条件 $|X| \neq |Y|$ 矛盾
  - 故假设不成立
  - G不是Hamilton图

第6章：17题

题：证明:若u, v∈V(G)，u与v不相邻，且d(u)+d(v)≥|V(G)|，
则 G为Hamilton ⇔ G+uv是Hamilton图.

By LJW in USTC

- 必要性：显然若G为Hamilton图 ==> G + uv是Hamilton图。
- 充分性：反证法
  - 设|V (G)| = n，假设G + uv是Hamilton图，但G非Hamilton图。
  - 则uv必在图G + uv的Hamilton圈上。
  - 则图G中必有从u到v的Hamilton轨: $u\ v_2\ v_3 \cdots v_{n-1}\ v$
  - 对某顶v_i $(2 \le i \le n-1)$，若$uv_i \in E(G)$,则必然$v_{i-1}v \notin E(G)$
  - 否则$u\ v_2\ v_3 \cdots v_{i-1}\ v\ v_{n-1}\ v_{n-2}\ v_i\ u$ 构成G的Hamilton圈。
  - 因此$d(v) \le n-1-d(u)$, 即$d(u) + d(v) \le n - 1$.与已知$d(u)+d(v) \ge n$矛盾.
  - 则原命题成立。



第7章：2题

题：证明无向图G有一种定向方法，使得其最长有向轨 $\leq \Delta(G)$

By LuWin in USTC

- 由例7.2知，存在一种定向方法，使得最长有向轨长为 $\chi(G)-1$ 。
- 而对任一图G，有 $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ *（5.2章节）*
- 故 $\chi(G) - 1 \leq \Delta(G)+1 -1 = \Delta(G)$
- 综上可知，存在一种定向方法，使得最长有向轨不超过G的最大顶次数

第7章：3题

题：已知有向图G中无有向圈，求δ^-与δ^+

By LJW in USTC

证明：

- 若$\delta^+\geq 1$，设$v_1v_2\in E(G)$，由$d^+(v_2)\geq 1$，存在$v_3\in V(G)$，$v_2v_3\in E(G)$，则$v_1\neq v_3$，否则构成有向圈。由此可构造出无数个点皆属于$V(G)$，矛盾。
- 故$\delta^+=0$
- 同理$\delta^-=0$

第7章：5题

题：竞赛图不是强连通图，最少改变几条边的方向，可使得它变成有向Hamilton图

By LuW in USTC

- G为竞赛图，故其底图G’是完全图，顶数为v，$\chi(G')=v$
- 由例7.2知，可将G’的边定向得到长为$\chi(G')-1=v-1$的有向轨
- 将该轨首尾相连的边反向，可得到有向Hamilton图.
- 即最少改变一条边方向.

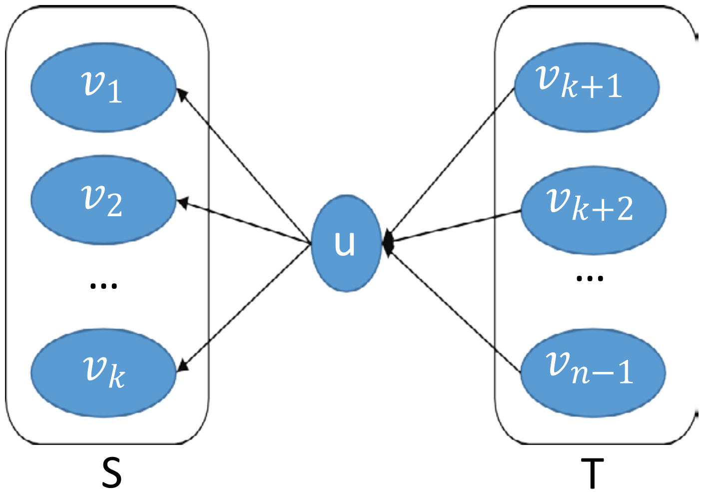
第7章：6题

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

题：在不少于三名运动员的个人循环赛当中，无平局，无人全胜，则必出现甲胜乙，乙胜丙，丙又胜甲的现象。

By LJW in USTC

- 设u为王，得分为$k \leq n-2$，则$v_1, v_2, \dots, v_k$均输给u，$v_{k+1}, \dots, v_{n-1}$赢u。如图
- 由于无人全胜，所以$\boldsymbol{T} \neq \emptyset$。
- 根据王的定义，可通过至多长为2的有向轨到达其他任一顶
- 则对于T中任一顶v_j，S中必存在一顶v_i，使$v_i v_j \in E(G)$
- 则u到v_i，v_i到v_j，v_j到u构成三阶圈。
- 即存在甲胜乙，乙胜丙，丙胜甲的情况.

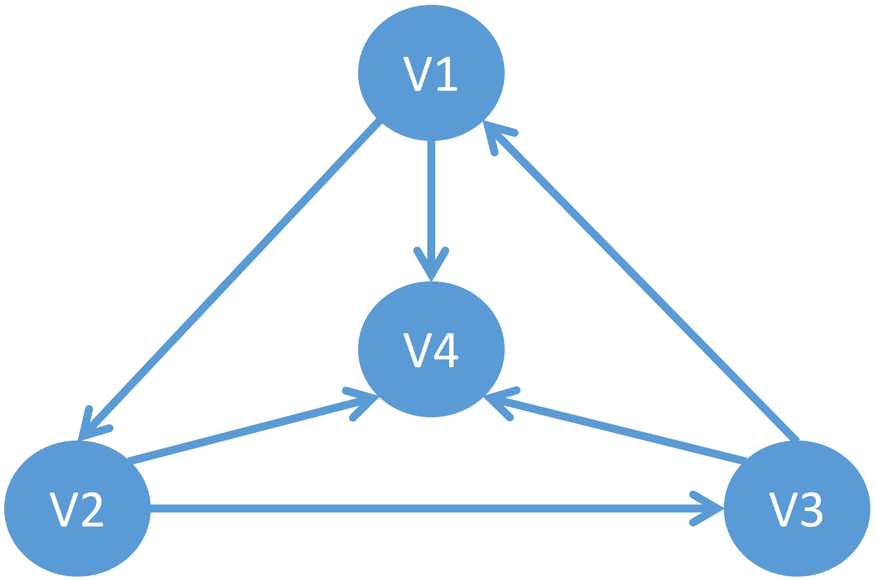


第7章：9题

题：赛图不是有向Hamilton图，则它有唯一的王.

By LJW in USTC

- 题目错误。反例：



第7章：10题

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

By LJW in USTC

题：证：顶数不小于3的赛图中有得分相同的顶
$\Leftrightarrow$此图中有长3的有向圈。

- 充分性：反证法
  - 假设不存在长3的有向圈，不妨设得分相同的顶为v_i, v_j，且$v_i \rightarrow v_j$
  - 任取以v_j为尾的有向边的头v_k，即$v_j \rightarrow v_k$
  - 由于不存在长3的有向圈，则$v_i \rightarrow v_k$
  - 则v_i得分多于v_j，与v_i, v_j得分相同矛盾，
  - 所以假设不成立，必存在长3的有向圈.　　充分性得证.
- 必要性：反证法
  - 假设没有得分相同的顶，则设每顶得分分别为0,1,…,|V|-1
  - 得分|V|-1对应的顶，不会是长为3的有向圈的顶，删除该顶
  - 同理，继续删除剩下的得分最多的顶，直到最后3个顶也无圈
  - 与存在长3的有向圈矛盾，所以一定有得分相同的顶。　必要性得证。