测度与积分 教学讲义

讲课教材: **Real Analysis**, E.M.Stein & R. Shakarchi 编著, 普林斯顿大学出版2005.

参考书: 《实变函数》和《实变函数解题指南》周民强, 北大出版社;

《实分析与复分析》[美] W.Rudin, 有中译本.

清华大学数学科学系本科教学　卢旭光　Feb. 2018

讲义目录

引言

我们在数学分析课程中已对Riemann积分与Lebesgue 积分的共性和各自的特点做了简要说明, 那里已揭示了现代积分的某些一般性, 为教学需要这里我们再重复一下: 以重积分和有界函数为例。设$E \subset \mathbb{R}^d$是一个有界区域, 函数$f(x)$在E上有定义且有界.

Riemann 积分: 作E的分划和E上的**Riemann 和**:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad E_k\text{是小区域, 互不重叠},$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) m(E_k), \quad \xi_k \in E_k; \quad \text{这里}\, m(E_k) = E_k\text{的}d\text{维体积}.$$

函数f在E上Riemann 可积是说: 存在一个数, 记作$\int_E f(x)\mathrm{d}x$, 使得

$$\text{当} \quad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \mathrm{diam}(E_k) = 0 \ \text{ 时} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{\xi_k \in E_k, 1\le k\le n} \Big| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) m(E_k) - \int_E f(x)\mathrm{d}x \Big| = 0.$$

根据这个定义, 我们知道这等价于

$$\text{当} \quad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \mathrm{diam}(E_k) = 0 \ \text{ 时} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{\xi_k \in E_k, 1\le k\le n} \sum_{k=1}^{n} \omega(f, E_k) m(E_k) = 0$$

其中$\omega(f, E_k)$是f在E_k上的振幅:

$$\omega(f, E_k) = \sup_{x,y\in E_k} |f(x) - f(y)|, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

于是可见：有界函数f在E上Riemann 可积, 当且仅当f在E上**“几乎处处”连续**.

Lebesgue 积分: 按f的函数值的分布对E作分划: 设$a \le f(x) < b, x \in E$,

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad E_k = \{x \in E \,|\, a + (k-1)\frac{b-a}{n} \le f(x) < a + k\frac{b-a}{n}\}.$$

令

$$\underline{L}_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\Big) m(E_k), \quad \overline{L}_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) m(E_k)$$

则有

$$0 \le \overline{L}_n(f) - \underline{L}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \frac{b-a}{n} m(E) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

这里用到可加性质

$$\sum_{k=1}^{n} m(E_k) = m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) = m(E).$$

于是可见存在实数, 记作$\int_E f(x)\mathrm{d}x$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\overline{L}_n(f)=\lim_{n\to\infty}\underline{L}_n(f)=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

由此可见

$$\sup_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}\le y_k<a+k\frac{b-a}{n}}\Big|\sum_{k=1}^n y_k m(E_k)-\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|\le\frac{b-a}{n}m(E)\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此f在E上可积, 其积分近似值为**Lebesgue 和**: $\sum_{k=1}^n y_k m(E_k)$. 在这个推导中我们唯一要求的是f能使诸集合$E_1,E_2,...,E_n$ 具有可加性.

....

事实上经典的Lebesgue 测度与积分已包含了现代测度与积分的主要思想和理论框架。同学们在两、三年后会看到很多数学分支如泛函分析、动力系统、PDE、几何分析、分形理论，尤其概率论随机过程都广泛使用现代测度与积分。将来学习随机过程时大家更将看到, 所有问题所有理论都是测度论的, 且多涉及更复杂的测度包括无穷维空间上的测度。甚至在数论研究中也用到测度论。为什么测度论的应用如此广泛? 我想主要是因为以下三点:

- 在现代测度论中“几乎所有”集合都是可测的, 并且测度空间都是完备的或都是容易完备化的, 这使得其中“几乎所有”极限运算都是封闭的。事实上上世纪七十年代数学家索罗威证明了不可测集的存在(差不多)等价于选择公理。[此处顺便说一句, 积分也可看成是测度。]

- 现代测度论是一种柔性技术, 即它可以研究结构很坏的集合, 能渗透到一些重要细节中。这归功于它的普适性和一些强大的定理, 而古典积分则要么无法研究很差的集合，要么只能做形式运算而无法用于严格证明。

- 测度与积分主要用于处理平均行为和大范围性质, 自然界和科学中的问题也往往与个体的群体行为有关, 包括微观大宏观小的介观问题。一方面, 在我们还没有足够的精准技术去跟踪和研究个体问题时, 先研究群体行为就是自然的可行的，另一方面, 即便每个个体行为清楚了，也远不能代替对它们的群体行为的研究，即仍需要研究群体行为。例如按照牛顿力学，单个质点的运动服从牛顿定律, 是可逆的, 即可以沿反向回到初态，但一般来说质点群体的运动行为就不可逆了。

现代测度与积分已构成了一个比较完整的体系, 操作方式都是有章可循的, 也是比较直观的, 我们的学生在学习上一般没有大的障碍, 只是开始不习惯一些集合运算。同学们务必多动手演练。

教材和参考书：

教材：**Real Analysis**, E.M.Stein & R. Shakarchi 编著, 普林斯顿大学出版2005

参考书:

[1] 周民强《实变函数》, 北京大学出版社。此书主要讲经典 Lebesgue 测度和积分, 习题丰富有趣 (90 年代以后的各版本有部分习题解答), 适于作本科生实分析教材。

[2] W. Rudin *Real and Complex Analysis* (《实分析与复分析》)有中译本, 人民教育出版社,1981. 此书为名著,其实分析部分包括了现代测度与积分的主要方法和结果, 适于数学系高年级学生和研究生学习。

[3] Gerald B. Folland *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Jon Wiley & Sons, Inc. , 1984. 该书比较浓缩但是非常清晰地展示了现代测度和积分的基本知识, 使读者能较快地领略并掌握这门学科的主干和应用方法。

[4] 严加安《测度论讲义》(第二版), 科学出版社, 2004. 此书较全面也较浓缩, 是研究测度论和概率论学者的必读教材。

[5] A. Mukherjea and K. Pothoven, *Real and Functional Analysis, Part A: Real Analysis,* Second Edition, 1984, Plenum Press, New York. 此书技术含量较高, 论证严谨, 本讲义对非负简函数积分的定义即参考该书的处理。

第一章 $\mathbb{R}^n$上的测度论

§1.1. 集合与映射, 集合的特征函数

• 集合的运算.

以下出现的大写字母 A, B, C, A_i, X 等都表示集合.

1° **子集**：若 A 的元素都在 B 中, 则称 A 是 B 的一个子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 因此

$$\Big(A \subset B\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longrightarrow x \in B\Big).$$

2° **相等**：A 与 B 相等的定义为

$$\Big(A = B\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longleftrightarrow x \in B\Big) \Longleftrightarrow \Big(A \subset B \quad \text{and} \quad B \subset A\Big).$$

若 A, B 不相等, 则记为 $A \neq B$.

注意：等号 (不等号) 两边的东西是地位相等的, 即

$$A = B \Longleftrightarrow B = A, \qquad A \neq B \Longleftrightarrow B \neq A.$$

3° **并集**：由 A, B 两集合的元素的全体组成的集合记作 $A \cup B$, 称为 A 与 B 的并集. 即

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \quad \text{或} \quad x \in B\}. \qquad \text{显然} \quad A \cup B = B \cup A.$$

一般地任意多个集合 $A_\alpha (\alpha \in I)$ 的, 元素的全体组成的集合记作 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 称为诸 A_α 的并集, 即

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x \,|\, \exists\, \alpha \in I \ \text{ s.t. } \ x \in A_\alpha\}.$$

4° **交集**：由 A, B 两集合的公共元素的全体组成的集合记作 $A \cap B$, 称为 A 与 B 的交集. 即

$$A \cap B := \{x \,|\, x \in A \quad \text{且} \quad x \in B\}. \qquad \text{易见} \quad A \cap B = B \cap A.$$

一般地任意多个集合 $A_\alpha (\alpha \in I)$ 的公共元素的全体组成的集合记作 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, 称为诸 A_α 的交集, 即

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x \,|\, \forall\ \alpha \in I\,,\, x \in A_\alpha\}.$$

5° **并、交运算的结合律和交换律：**

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)\,,\quad (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)\,.$$

【证】略.

6° **并、交运算的两个分配律：**

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)\,,\quad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)\,.$$

一般地

$$A\cap\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}A\cap B_\alpha\,,\quad A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

【证】只证明最后两个等式.

$$x\in A\cap\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha \Longleftrightarrow x\in A \text{ and } x\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha \Longleftrightarrow x\in A \text{ and } \exists\alpha\in I \text{ s.t. } x\in B_\alpha$$
$$\Longleftrightarrow \exists\alpha\in I \text{ s.t. } x\in A\cup B_\alpha \Longleftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I}A\cap B_\alpha\,.$$

所以两集合相等. 对最后那个等式, 我们有

$$\forall\alpha\in I\,,\ A\subset A\cup B_\alpha \Longrightarrow A\subset\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

而显然

$$\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

所以

$$A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\,.$$

反之, 设 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha$. 若 $x\in A$, 则自然 $x\in A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$. 若 $x\notin A$, 则由交集定义, 对任意 $\alpha\in I$ 有 $x\in A\cup B_\alpha$ 从而有$x\in B_\alpha$. 因此 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$. 所以仍有 $x\in A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$. 因此

$$\bigcap_{\alpha\in I}A\cup B_\alpha\subset A\cup\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\,.$$

因此两集合相等. □

7° **差集：**把 A 中属于 B 的元素去掉, 剩下的元素构成的集合称为 A 减 B 后的差集, 记作 $A\setminus B$, 即

$$A\setminus B := \{x\in A\,|\,x\notin B\}\,.$$

8° **余集 (或补集)：**设X是我们所考虑的一个大集合. 对任意 $A \subset X$, 我们把差集 $X \setminus A$ 叫做 A 关于 X 的补集或余集, 记作

$$A^c := X \setminus A\,.$$

这里上标 c 提示“补”或“余”(complement). 易见当 $A, B \subset X$ 时 有

$$(A^c)^c = A\,, \qquad A = B \Longleftrightarrow A^c = B^c\,.$$

9° **用补集表示差集：**设 $A, B \subset X$. 则

$$A \setminus B = A \cap B^c = B^c \cap A\,.$$

【证】由 $A, B \subset X$ 和交集运算交换律有

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \in X \setminus B\} = A \cap (X \setminus B) = A \cap B^c = B^c \cap A\,.$$

10° **de Morgan 对偶原理**: 设 A, B 为 X 的子集. 则

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c\,.$$

一般地, 设 $A_\alpha \subset X$ $(\forall\, \alpha \in I)$. 则

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,, \quad \Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,.$$

也即“并的补等于补的交”,“交的补等于补的并”. 用差集表示则写成

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)\,, \quad X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)\,.$$

【证】

$$\begin{aligned} & x \in \Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c \Longleftrightarrow x \in X \ \text{ and } \ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow x \in X \ \text{ and } \ \forall\, \alpha \in I\,, \ x \notin A_\alpha \\ & \Longleftrightarrow \forall\, \alpha \in I\,, \ \ x \in X \setminus A_\alpha \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,. \end{aligned}$$

所以第一个恒等式成立. 利用这一恒等式得到

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c\Big)^c = \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha^c)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\,. \qquad \text{因此} \quad \Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c\,.$$

□

• **集合的乘积 (笛卡尔积或直积)**.　设 X, Y 为任意两个集合. 定义新的集合

$$X \times Y := \{(x, y) \,|\, x \in X,\ \ y \in Y\}\,.$$

在 $X \times Y$ 中规定两元素相等为

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2\,, \quad y_1 = y_2\,.$$

称　$X \times Y$　为集合 X, Y 的乘积, 也称为笛卡尔积或直积.

一般地, 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为任意 n 个集合. 定义它们的乘积 (笛卡尔积) 为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_i \in X_i\,,\ \ i = 1, 2, ..., n\}\,.$$

在 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 中规定两元素相等为

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad x_i = y_i\,, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

当 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ 时简记

$$\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n} = X^n\,.$$

例如

$$X^2 = X \times X, \quad \mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \text{等等.}$$

乘积的结合律: 对于 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 中的元素我们规定括号运算: 例如

$$((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) = (x_1, (x_2, x_3, \cdots, x_n)) = (x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$((x_1, x_2, \cdots, x_k), x_{k+1}, ..., x_n) = \cdots = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-k}, (x_{n-k+1}, ..., x_n)) = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

等等, 其中括号内的元素组自然看成是相应的部分乘积集的元素. 于是有结合律:

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n = X_1 \times (X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n,$$

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1} \times \cdots \times X_n = \cdots$$
$$= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-k} \times (X_{n-k+1} \times \cdots \times X_n) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n.$$

等等. 这个结合律的主要作用之一在于人们可以对集合 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的个数 n 运用数学归纳法来证明乘积集合 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$的某些性质.

• **乘积集合的本质**. 以 $X\times Y$ 为例. $X\times Y$ 的元素 (x,y) 的分量 x 和 y, 除了它们的顺序 (x 为第一分量,y 为第二分量) 被人为规定外, 是**彼此独立**的, 即一方的变化范围和属性与另一方无关. 至于 x,y 的顺序要求, 则完全是为了明确分量的位置和身份. 当然, 由于这种顺序的缘故, x与y 的地位就不是对称的: x在第一位置, y在第二位置.

很多时候, 顺序也是不得已而为之的, 也即我们无法做到全面均衡或对称. 例如为了给同等级别的嘉宾安排座位, 可以采用圆桌排位, 但在书写或宣布嘉宾名字的时候, 就不得不有先后之分(通常采用以姓氏为序的天然顺序). 这也说明了我们的空间和时间在很多情况下不得不是有区别的、有序的.

乘积集合的“乘积”这个叫法来自于矩形面积和长方体的体积的计算方式. 例如

矩形(二维乘积集合)

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b]\,,\ b\in[c,d]\}$$

的面积S即为相邻边长的乘积：$S=(b-a)(d-c)$.

长方体(三维乘积集合)

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_i\in[a_i,b_i]\,,\,i=1,2,3.\}$$

的体积V即为相邻棱长的乘积：$V=(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$.

当然, 由乘积集合的定义易见很多集合不是乘积型的.

• **函数与映射**

映射的概念：设 X,Y 为两个集合. 如果按照某个确定规律 f, 对每个 $x\in X$, 存在唯一的元素 $y\in Y$ 与x对应, 则说 f 是定义在 X 上而在 Y 中取值的映射. 这时我们称集合 X 为映射 f 的定义域或出发域, 它的一般元素 x 称为映射 f 的变元或自变量, 而由x通过f对应的元素y记作$f(x)$, 即 $y=f(x)$, 并称 $y=f(x)$ 是f 的因变量. 我们把此事记作

$$f:X\to Y,\quad x\mapsto f(x)\,.$$

于是记号 $f:X\to Y$（读作 f 是从 X 到 Y 的映射或 f 把 X 映入 Y) 就表示：

(1) $x\in X\Longrightarrow f(x)\in Y$.

(2) $x_1 = x_2 \in X \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

此时我们称集合

$$f(X) := \{y \in Y \,|\, \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in X\}$$

为映射 f 的值域, 或到达域, 或象集. 当 Y 为数集时, 如 Y 是实数集合或复数集合的子集, 也称映射 f 为函数. 现代数学中无论 Y 是否为数集, 人们有时也把映射叫做函数.

设 $f: X \to Y$, $g: X \to Y$. 若 $x \in X \Longrightarrow f(x) = g(x)$, 则成 f 与 g 相等, 或称 f,g 为同一个映射. $\square$

纵观整个数学领域, 可以说

最基本最常用最重要的东西就是映射(函数、变换)及其表示.

映射的例子: 随堂给出......

• **映射的象集和逆象集**. 设 $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. 称

$$f(A) := \{y \in Y \,|\, \exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

为A 在 f 下的象集；而称

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$$

为B 在 f 下的原象集或逆象集. 对于空集 $\emptyset$, 显然有 $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

易见下列包含关系成立:

$$A_1 \subset A_2 \subset X \quad \Longrightarrow \quad f(A_1) \subset f(A_2) \subset Y,$$

$$B_1 \subset B_2 \subset Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \subset X.$$

此外, 由映射的定义还易见下面包含关系成立：

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

【**例**】设$f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. 则

$$f([0, \pi]) = [0, 1], \quad f^{-1}([0, \infty)) = f^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

这里$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合, $\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合.

下面命题给出了映射的象集和逆象集的常用的基本关系式.

【命题1.1.1】对任一映射$f: X \to Y$, 设一切$A_\alpha \subset X$, 一切$B_\alpha \subset Y$. 则有

$$f\Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha),$$

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \qquad (\text{当}f \text{ 为单射时等号成立}),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha).$$

【证】只证第三个. 对任意$x \in X$ 我们有

$x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha) \iff f(x) \in \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha \iff$存在$\beta \in J$使得$f(x) \in B_\beta \iff$存在$\beta \in J$使得$x \in f^{-1}(B_\beta) \iff x \in \bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$. 因此两个集合相等. $\square$

• **集合的特征函数**. 设 X, A 为集合且 $A \subset X$. 定义二值函数 $1_A : X \to \{0,1\}$ 如下

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in A\,, \\ 0 & \text{if} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

注意: 当 $A = \emptyset$ 为空集时有 $1_\emptyset(x) \equiv 0$. 一般地对任一性质 P, 也可定义

$$1_{\{P\}} = \begin{cases} 1 & \text{if } P \text{ is true}, \\ 0 & \text{if } P \text{ is not true}. \end{cases}$$

例如

$$1_{\{a<b\}} = \begin{cases} 1 & \text{if } a < b, \\ 0 & \text{if } a \ge b\,. \end{cases}$$

特征函数的基本性质:

(1) 设 X_i 为集合, $A_i \subset X_i\,, i = 1, 2, ..., n$. 则

$$1_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_d}(x_1, x_2, ..., x_d) = 1_{A_1}(x_1)1_{A_2}(x_2)\cdots 1_{A_d}(x_d)\,, \quad x_i \in X_i\,.$$

(2) 设 X 为集合并设下面出现的集合皆为 X 的子集. 则有

$$
\begin{aligned}
&1_{A^c}(x)=1-1_A(x)\,,\\
&1_{A\cup B}(x)=1_A(x)+1_B(x)-1_{A\cap B}(x)\,,\\
&1_{A\cup B}(x)=1_A(x)+1_B(x)\quad \text{if}\quad A\cap B=\emptyset\,,\\
&B\subset\bigcup_{i=1}^n A_i\implies 1_B(x)\le\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\,,\\
&1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)\le\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\,,\\
&1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\quad \text{if}\quad A_i\cap A_j=\emptyset\quad\forall\, i\ne j\,,\\
&1_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_d}(x)=1_{A_1}(x)1_{A_2}(x)\cdots 1_{A_d}(x)\,,\\
&1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=1-\prod_{i=1}^n(1-1_{A_i}(x))\,,\\
&\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\ge k\iff x\in A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\ \text{ for some }\ i_1,i_2,...,i_k\,.
\end{aligned}
$$

倒数第二个等式的推导如下: 考虑补集!! 我们有

$$1-1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=1_{(\cup_{i=1}^n A_i)^c}(x)=1_{\cap_{i=1}^n A_i^c}(x)=\prod_{i=1}^n 1_{A_i^c}(x)=\prod_{i=1}^n(1-1_{A_i}(x)).$$

移项即得所证等式。当然你还可以进一步把右边展开...。

【集合与数的乘积公式】

【命题1.1.2(乘积公式).】

(a) 设$E_{i,j}$ 为一些集合, $j=1,2,...,n_i$; $i=1,2,...,d$. 则有

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{n_1}E_{1,j}\Big)\times\Big(\bigcup_{j=1}^{n_2}E_{2,j}\Big)\times\cdots\times\Big(\bigcup_{j=1}^{n_d}E_{d,j}\Big)=\bigcup_{j_1=1}^{n_1}\bigcup_{j_2=1}^{n_2}\cdots\bigcup_{j_d=1}^{n_d}E_{1,j_1}\times E_{2,j_2}\times\cdots\times E_{d,j_d}. \tag{1.1.1}$$

(b) 设$a_{i,j}$ 为一些数, $j=1,2,...,n_i$; $i=1,2,...,n$. 则有

$$\Big(\sum_{j=1}^{n_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{n_d}a_{d,j}\Big)=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}\,. \tag{1.1.2}$$

【证】(1.1.1)可从集合相等的定义直接导出. 下证(1.1.2). 对$a_{i,j}$的第一个下标i的个数n 用归纳法. 当$n=1$ 时, (1.1.2) 自动成立. 假设在下标i的个数为n时(1.1.2)成立,

则在下标i的个数为$n+1$时, 令

$$A=\sum_{j=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j}=\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j_{d+1}}.$$

则有

$$a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}A=a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j_{d+1}}=\sum_{j_{d+1}=1}^{m_{d+1}}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}a_{d+1,j_{d+1}}.$$

由归纳假设便有

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j=1}^{n_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{n_{d+1}}a_{d+1,j}\Big)=\Big(\sum_{j=1}^{n_1}a_{1,j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}a_{2,j}\Big)\cdots\Big(\sum_{j=1}^{n_d}a_{d,j}\Big)A\\
&=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{d,j_d}A\\
&=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}\left(\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{i,j_1}a_{i,j_2}\cdots a_{i,j_{d+1}}\right)=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}\sum_{j_{d+1}=1}^{n_{d+1}}a_{i,j_1}a_{i,j_2}\cdots a_{i,j_{d+1}}.
\end{aligned}$$

所以(1.1.2) 成立. □

§1.2. $\mathbb{R}^d$中开集的结构

【$\mathbb{R}^d$中的区间】 回忆: $\mathbb{R}^d$ 中的d维有界区间I 是d 个一维有界区间的乘积, 即

$$I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d]=\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]\qquad(\text{有界闭区间}),$$

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_d,b_d)=\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i)\qquad(\text{有界开区间}),$$

$$I=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots\times[a_d,b_d)=\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i)\qquad(\text{左闭右开的有界区间})$$

$$I=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_d,b_d]=\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i]\qquad(\text{左开右闭的有界区间})$$

等等. 每个一维区间$[a_i,b_i],(a_i,b_i),[a_i,b_i),(a_i,b_i]$ 称为区间I 的边或棱. 由I 的边的左、右端点构成的向量$(a_1,a_2,...,a_d),(b_1,b_2,...,b_d)$ 称为区间I 的左、右端点.

定义I 的面积或体积为I 的各棱长的乘积, 即 (无论各条棱是否为闭区间)

$$|I|=|I^\circ|=|\overline{I}|=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_d-a_d)=\prod_{i=1}^{d}(b_i-a_i)\,.$$

注意: $\mathbb{R}^d$中的区间要求是非退化的, 即I的各棱长必须大于零! 因此总有$|I|>0$. □

• **区间的内部, 闭包和边界.** 设$n(\ge 2)$维有界区间I 的左、右端点为$(a_1,a_2,...,a_d)$, $(b_1,b_2,...,b_d)$. 则易见

$$I^\circ=\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i),\quad \overline{I}=\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]$$

因此I的边界为

$$\partial I=\overline{I}\setminus I^\circ=\bigcup_{k=1}^{d}\left(\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]\Big|_{\text{其中}[a_k,b_k]\text{被换成二元素集}\{a_k,b_k\}}\right).\qquad(1.2.1)$$

它说明边界∂I是由$2d$个$d-1$维有界闭区间组成的. 建议用$d=2,3$的情形(即平面矩形和三维长方体)检验一下.

• **区间的直径.** 不难看出d维有界区间I 的直径等于I 的左、右端点$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_d)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_d)$ 的距离, 也即等于I 的对角线之长:

$$\mathrm{diam}(I)=\mathrm{diam}(I^\circ)=\mathrm{diam}(\overline{I})=\Big(\sum_{i=1}^{d}(b_i-a_i)^2\Big)^{1/2}=|\mathbf{b}-\mathbf{a}|.$$

由此得到常用的估计式

$$\mathrm{diam}(I) \le \sqrt{d} \max_{1\le i\le d}(b_i - a_i).$$

• **区间的分划.** 设I 是以$(a_1, a_2, ..., a_d), (b_1, b_2, ..., b_d)$ 为左、右端点的有界区间. 给定任意$\delta > 0$ 我们对每个一维区间$[a_i, b_i]$ 做分划：

$$a_i = a_{i,0} < a_{i,1} < a_{i,2} < \cdots < a_{i,n_i} = b_i \quad 满足 \quad a_{i,j} - a_{i,j-1} < \frac{\delta}{\sqrt{d}},\ j = 1, 2, ..., n_i\,.$$

则有

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j=1}^{n_i}[a_{i,j-1},\ a_{i,j}]\,, \quad [a_i, b_i) = \bigcup_{j=1}^{n_i}[a_{i,j-1},\ a_{i,j})\,, \quad \text{etc.}$$

从而由并集的乘积公式得到I 的一个分划：

$$I = \bigcup_{j_1=1}^{n_1}\bigcup_{j_2=1}^{n_2}\cdots\bigcup_{j_d=1}^{n_d} I_{j_1,j_2,...,j_d} \tag{1.2.2}$$

其中

$$I_{j_1,j_2,...,j_d} = \prod_{i=1}^{d}[a_{i,j_i-1},\ a_{i,j_i}] \quad 或 \quad = \prod_{i=1}^{d}[a_{i,j_i-1},\ a_{i,j_i}) \qquad \text{etc.}$$

同时由数值和的乘积公式(1.1.2) 得到

$$|I| = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) = \prod_{i=1}^{d}\Big(\sum_{j=1}^{n_i}(a_{i,j} - a_{i,j-1})\Big) = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}\prod_{i=1}^{d}(a_{i,j_i} - a_{i,j_i-1})$$

即

$$|I| = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_d=1}^{n_d}|I_{j_1,j_2,...,j_d}|\,. \tag{1.2.3}$$

由于$I_{j_1,j_2,...,j_d}$的每条棱的长度$< \delta/\sqrt{d}$, 故有

$$\mathrm{diam}(I_{j_1,j_2,...,j_d}) < \sqrt{d}\frac{\delta}{\sqrt{d}} = \delta.$$

这表明I 可以被分解成有限多个直径$< \delta$的区间的并.

此外易见当I 左闭右开时, 相应的子区间$I_{j_1,j_2,...,j_d}$(左闭右开) 是互不相交的. 对于一般情形, 诸子区间$I_{j_1,j_2,...,j_d}$ 的内部总是互不相交的, **也即$I_{j_1,j_2,...,j_d}$是互不重叠的.**

• **区间的平移、伸缩、反射还是区间.**

设$E \subset \mathbb{R}^d$ 为任一集合. 对任意$h \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0$, 我们定义

$$E + h = h + E = \{x + h \,|\, x \in E\} \qquad (\ E的平移),$$

$$\lambda E = \{\lambda x \,|\, x \in E\} \qquad (E\ 的伸缩),$$

$$-E = (-1)E = \{-x \,|\, x \in E\} \qquad (E\ 的反射).$$

一般地定义

$$\lambda E + h = \{\lambda x + h \,|\, x \in E\}, \quad h \in \mathbb{R}^d,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.2.4}$$

现在设$E = I$是一个d维有界区间. 例如设$I = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i)$ 是左闭右开的. 则对任意$h = (h_1, h_2, ..., h_d) \in \mathbb{R}^d$ 和任意$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 有

$$\lambda I + h = \prod_{i=1}^d [\lambda a_i + h_i,\ \lambda b_i + h_i) \qquad \text{if } \lambda > 0,$$

$$\lambda I + h = \prod_{i=1}^d (\lambda b_i + h_i,\ \lambda a_i + h_i] \qquad \text{if } \lambda < 0.$$

这表明d维有界区间的平移、伸缩、反射还是d维有界区间.

• **$\mathbb{R}^d$中开集的结构**

为了定义和计算一个集合的测度(长度、面积、体积等等), 我们需要知道最基本的集合—— 开集—— 的结构。

当$d = 1$时, 由于$\mathbb{R}$ 是有序集, 我们在数学分析中已证明了$\mathbb{R}$ 中的开集可以被唯一地表示成可数个互不相交的开区间的并, 即

$$\text{若 } \mathcal{O} \subset \mathbb{R} \text{ 是开集, 则 } \mathcal{O} = \bigcup_{k \ge 1} (a_k, b_k), \quad \text{其中}(a_k, b_k)\text{是}\textbf{互不相交的}\text{开区间.}$$

因此这开集的长度可以被定义为等于这些开区间的长度之和(对于无界的开区间, 定义其长度为$+\infty$)。

当$d \ge 2$ 时, 由于$\mathbb{R}^d$是无序集, 向量的方向有无限多个, 因此关于$\mathbb{R}^d$中的开集的表示就没有统一结果。但是我们将证明$\mathbb{R}^d$ 中的开集可以被表示成可数无限多个左闭右开的正方形或方体的并, 而且可以要求这些正方形或方体是2-进正方形或2-进方体。于是开集的面积(或体积)就等于这些正方形(或方体)的面积(体积)之和。而对$\mathbb{R}^d$中其他类型的集合, 可以用开集逼近之, 其面积(或体积) 也就定义为这些开集的面积(或体积)的极限。由此可见弄清开集的结构是件很基本的事情。

• **2-进方体.** 形如

$$\prod_{i=1}^d \left[\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\right], \quad \prod_{i=1}^d \left(\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\right), \quad \prod_{i=1}^d \left[\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\right), \quad \prod_{i=1}^d \left(\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\right]$$

(其中$k, p_i \in \mathbb{Z}$)的d 维2-进区间分别称为2-进闭方体, 2-进开方体, 左闭右开的2-进方体和左开右闭的2-进方体。统称它们为2-进方体。如用Q 表示任意2-进方体, 用$l(Q)$ 表示Q 的边长, 则易见

$$l(Q) = 2^{-k}, \qquad |Q| = [l(Q)]^d, \qquad \mathrm{diam}(Q) = \sqrt{d}\, l(Q).$$

当$k = 0$, $p_i = 0\,(i = 1, 2, ..., n)$ 时, Q 即为单位方体, 即$Q = [0,1]^d, (0,1)^d, [0,1)^d, (0,1]^d$.

如上, 不难看出$\mathbb{R}^d$ 中只有可数无限多个2-进方体。事实上, 以左闭右开的2-进方体为例, 令$\mathscr{Q}^d$ 表示$\mathbb{R}^d$中的左闭右开的2-进方体的全体, 则对应关系

$$(k, p_1, p_2, ..., p_d) \mapsto Q = \prod_{i=1}^{d} \Big[\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\Big)$$

给出 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 到$\mathscr{Q}^d$ 到的1 -1 对应。因为$\mathbb{Z}^{d+1}$ 是可数集, 所以$\mathscr{Q}^d$ 是可数集。

【命题1.2.1(2-进方体的特性).】设$d \in \mathbb{N}$, Q_1, Q_2 为$\mathbb{R}^d$ 中任意两个左闭右开的2-进方体。则只有下列三种情形之一出现:

$$\text{或者} \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \quad \text{或者} \quad Q_1 \subset Q_2 \quad \text{或者} \quad Q_2 \subset Q_1.$$

进一步, 假设$Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, 则有以下关系:

$$l(Q_1) \le l(Q_2) \iff Q_1 \subset Q_2 \iff \overline{Q}_1 \subset \overline{Q}_2, \tag{1.2.5}$$

$$l(Q_1) = l(Q_2) \iff Q_1 = Q_2 \iff \overline{Q}_1 = \overline{Q}_2. \tag{1.2.6}$$

特别可知, 若$l(Q_1) = l(Q_2)$, 则有: $Q_1 \neq Q_2 \iff Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

【证】写

$$Q_1 = \prod_{i=1}^{d} \Big[\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i + 1}{2^k}\Big), \quad Q_2 = \prod_{i=1}^{d} \Big[\frac{q_i}{2^m}, \frac{q_i + 1}{2^m}\Big).$$

假设$Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ 且$l(Q_1) \le l(Q_2)$. 取一点$c = (c_1, c_2, ..., c_d) \in Q_1 \cap Q_2$, 则有

$$\frac{p_i}{2^k} \le c_i < \frac{p_i + 1}{2^k}, \quad \frac{q_i}{2^m} \le c_i < \frac{q_i + 1}{2^m}, \quad i = 1, 2, ..., d.$$

借助公共数c_i 传递不等式, 得到

$$\frac{p_i}{2^k} < \frac{q_i + 1}{2^m}, \quad \frac{q_i}{2^m} < \frac{p_i + 1}{2^k}, \quad i = 1, 2, ..., d$$

即

$$p_i < 2^{k-m}(q_i+1)\,, \qquad 2^{k-m}q_i < p_i+1\,, \quad i=1,2,...,d\,.$$

因$l(Q_1)\le l(Q_2)$ 即$2^{-k}\le 2^{-m}$ 也即$k\ge m$, 故2^{k-m}, p_i, q_i 皆为整数. 因此

$$p_i+1\le 2^{k-m}(q_i+1)\,, \qquad 2^{k-m}q_i\le p_i\,, \quad i=1,2,...,d$$

即

$$\frac{q_i}{2^m}\le\frac{p_i}{2^k}<\frac{p_i+1}{2^k}\le\frac{q_i+1}{2^m}\,, \qquad j=1,2,...,d\,. \tag{1.2.7}$$

因此$Q_1\subset Q_2$ 从而$\overline{Q}_1\subset\overline{Q}_2$.

反之假设$\overline{Q}_1\subset\overline{Q}_2$ 即

$$\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big]\subset\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{q_i}{2^m},\frac{q_i+1}{2^m}\Big]$$

则由乘积集合的包含关系有

$$\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big]\subset\Big[\frac{q_i}{2^m},\frac{q_i+1}{2^m}\Big], \quad i=1,2,...,d$$

这蕴含(1.2.7) 成立. 于是有$Q_1\subset Q_2$. 这就证明了(1.2.5). 由(1.2.5) 即得(1.2.6). □

根据实数的阿基米德原理知对任意$k\in\mathbb{Z}$, 实数轴$\mathbb{R}$ 可以被分解成互不相交的左闭右开的2-进区间$[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k})$ 的并:

$$\mathbb{R}=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\Big[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k}\Big)=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\Big[\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k}\Big].$$

因$\mathbb{R}^d=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (d个)是$\mathbb{R}$的d次笛卡尔积, 故得到$\mathbb{R}^d$的2进方体分解:

$$\mathbb{R}^d=\bigcup_{(p_1,p_2,...,p_d)\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big)=\bigcup_{(p_1,p_2,...,p_d)\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big]. \tag{1.2.8}$$

由此易见, 对于$\mathbb{R}^d$ 中的任意点x的任意邻域$U(x)$, 只要$k\in\mathbb{N}$ 充分大, 就存在一个2 进闭方体$\prod_{i=1}^d[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}]\subset U(x)$ 使得$x\in\prod_{i=1}^d[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k})$. 根据这一性质容易相信, $\mathbb{R}^d$ 中任一非空开集Ω可以被分解成可数个互不相交的左闭右开的2-进方体的并, 而且可以要求这些方体的闭包也含于Ω 中. 详细来说我们有下列定理:

【定理1.2.2(开集的方体分解)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为任一非空开集, M 为一整数. 则存在一列**互不相交的** 左闭右开的2-进方体$\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足边长$l(Q_k)\le 2^{-M}$, 使得

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{Q}_k\,. \tag{1.2.9}$$

(对$d=2$的情形给出图示和解释.)

【证】令$\mathcal{Q}^{(k)}$ 表示棱长等于2^{-k} 的所有左闭右开2-进方体的集合, 即

$$\mathcal{Q}^{(k)}=\Big\{\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^k},\frac{p_i+1}{2^k}\Big)\ \Big|\ p_i\in\mathbb{Z}\,,i=1,2,...,d\Big\}.$$

我们把所有其闭包含于Ω 内的满足棱长$\le 2^{-M}$ 的最大的左闭右开的2-进方体做成一个集合$\mathcal{C}$, 即

$$\mathcal{C}=\Big\{Q^*\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}\,\Big|\,\overline{Q^*}\subset\Omega\ \text{且满足: 若}\ Q\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}\ \text{且}\ Q^*\subset\overline{Q}\subset\Omega,\ \text{则}\ Q^*=Q\Big\}.$$

来证明

$$\mathcal{C}\ \text{中不同的元素不相交, 即若}\ Q_1^*,Q_2^*\in\mathcal{C}\ \text{且}\ Q_1^*\ne Q_2^*,\ \text{则}\ Q_1^*\cap Q_2^*=\emptyset. \tag{1.2.10}$$

$$\Omega=\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*=\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}\overline{Q^*}\,. \tag{1.2.11}$$

(1.2.10) 的证明: 设$Q_1^*,Q_2^*\in\mathcal{C}$ 且$Q_1^*\ne Q_2^*$. 假如$Q_1^*\cap Q_2^*\ne\emptyset$, 则由**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 知二者有包含关系: 例如$Q_1^*\subset Q_2^*$, 从而有$Q_1^*\subset\overline{Q_2^*}\subset\Omega$. 而由$\mathcal{C}$的定义知这蕴含$Q_1^*=Q_2^*$, 矛盾于$Q_1^*\ne Q_2^*$. 因此必有$Q_1^*\cap Q_2^*=\emptyset$. 这证明了(1.2.10) 成立.

(1.2.11) 的证明: 显然有$\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*\subset\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}\overline{Q^*}\subset\Omega$. 为证(1.2.11), 只需证明$\Omega\subset\bigcup_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 任取一点$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in\Omega$. 因$\Omega$ 是开集, 故存在$\delta>0$ 使得$B(x,\delta)\subset\Omega$. 选取$k_0\in\mathbb{Z}$ 充分大, 使得$k_0\ge M$且$\sqrt{d}\,2^{-k_0}<\delta$. 令$p_i=[2^{k_0}x^i]\,(=2^{k_0}x_i$ 的整数部分). 则有

$$p_i\le 2^{k_0}x_i<p_i+1\qquad \text{即}\qquad \frac{p_i}{2^{k_0}}\le x_i<\frac{p_i+1}{2^{k_0}}\,,\quad i=1,2,...,d\,.$$

因此

$$x=(x_1,x_2,...,x_d)\in Q_0:=\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{p_i}{2^{k_0}},\frac{p_i+1}{2^{k_0}}\Big)\,,\quad Q_0\in\mathcal{Q}^{(k_0)}\,.$$

因$\forall\,y\in\overline{Q}_0\implies|y-x|\le\mathrm{diam}(\overline{Q}_0)=\sqrt{d}\,2^{-k_0}<\delta\implies y\in B(x,\delta)$, 故$\overline{Q}_0\subset B(x,\delta)\subset\Omega$. 现在我们考虑整数子集

$$\mathbb{Z}_0=\{k\in\mathbb{Z}\mid k\ge M\ \text{且存在}\ Q\in\mathcal{Q}^{(k)}\ \text{使得}\ Q_0\subset\overline{Q}\subset\Omega\}\,.$$

由$k_0\ge M$ 和$\overline{Q}_0\subset\Omega$ 可知$k_0\in\mathbb{Z}_0$, 因此$\mathbb{Z}_0\ne\emptyset$. 又因$\mathbb{Z}_0$ 有下界M, 故$\mathbb{Z}_0$的最小数$m=\min\mathbb{Z}_0$ 存在且$m\ge M$. 于是存在$Q^*\in\mathcal{Q}^{(m)}$ 使得$Q_0\subset\overline{Q^*}\subset\Omega$. 由于$Q_0,Q^*$ 都是左闭右开的2-进方体, 故$Q_0\subset Q^*$. 我们断言 $Q^*\in\mathcal{C}$. 事实上首先我们

有$Q^*\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 且$\overline{Q^*}\subset\Omega$. 其次任取 $Q\in\bigcup_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 满足 $Q^*\subset\overline{Q}\subset\Omega$. 我们来证明$Q^*=Q$. 由$Q\in\bigcup\limits_{k\ge M}\mathcal{Q}^{(k)}$ 知存在$k\ge M$ 使得 $Q\in\mathcal{Q}^{(k)}$. 根据$\mathbb{Z}_0$ 的定义易见$k\in\mathbb{Z}_0$. 因此$m\le k$. 另一方面, 由**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 知$Q^*\subset\overline{Q}$ 蕴涵$Q^*\subset Q$ 从而有$l(Q^*)\le l(Q)$, 即$2^{-m}\le 2^{-k}$. 所以$m\ge k$ 从而$m=k$. 因此$l(Q^*)=l(Q)$. 再由**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 即得$Q^*=Q$. 据$\mathcal{C}$的定义, 这就证明了$Q^*\in\mathcal{C}$. 于是由$x\in Q_0\subset Q^*$ 和$Q^*\in\mathcal{C}$ 即知$x\in\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 所以$\Omega\subset\bigcup\limits_{Q^*\in\mathcal{C}}Q^*$. 所以(1.2.11)成立.

最后证明$\mathcal{C}$ 是可数无限集. 因$\mathbb{R}^m$ 中只有可数无限多个2-进方体, 故$\mathcal{C}$ 是可数集. 假设$\mathcal{C}$ 是有限集:

$$\mathcal{C}=\Big\{\prod_{i=1}^{d}[a_{i,k}\,,\,b_{i,k})\;\Big|\;k=1,2,...,N\Big\},\quad N\in\mathbb{N}.$$

考虑$\mathcal{C}$ 中诸方体各条棱的最小左端点(它的存在性由“有限”保证):

$$a^{i_0}_{k_0}=\min\{a_{i,k}\mid 1\le i\le n,\,1\le k\le N\}.$$

对于这个k_0 我们有

$$x_0:=(a_{1,k_0},a_{2,k_0},...,a_{d,k_0})\in\prod_{i=1}^{d}[a_{i,k_0}\,,\,b_{i,k_0})\subset\Omega$$

因此存在$\delta>0$ 使得$B(x_0,\delta)\subset\Omega$. 如取$\varepsilon$ 满足$0<\varepsilon<\delta/\sqrt{d}$, 则有

$$(a_{1,k_0}-\varepsilon,a_{2,k_0}-\varepsilon,...,a_{d,k_0}-\varepsilon)\in B(x_0,\delta)\subset\Omega=\bigcup_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{d}[a^i_k\,,\,b^i_k).$$

于是对某个$k_1\in\{1,2,...,N\}$ 有$(a_{1,k_0}-\varepsilon,a_{2,k_0}-\varepsilon,...,a_{d,k_0}-\varepsilon)\in\prod_{i=1}^{d}[a_{i,k_1}\,,\,b_{i,k_1})$ 从而有$a_{i_0,k_0}-\varepsilon\in[a_{i_0,k_1}\,,\,b_{i_0,k_1})$ 这导致$a_{i_0,k_1}\le a_{i_0,k_0}-\varepsilon<a_{i_0,k_0}$, 它与$a_{i_0,k_0}$ 的最小性矛盾. 因此$\mathcal{C}$ 必是可数无限集. 将$\mathcal{C}$ 表为$\mathcal{C}=\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 并代入(1.2.11) 即得(1.2.9) 并由(1.2.10) 知Q_k 互不相交. 命题证毕. $\Box$

最后说明: 本讲义将用$\mathrm{dist}(x,y)=|x-y|$ 表示欧空间$(\mathbb{R}^d,|\cdot|)$上的距离函数, 因此对任意$x\in\mathbb{R}^d$和$A,B\subset\mathbb{R}^d$有

$$\mathrm{dist}(x,A)=\inf_{y\in A}|x-y|,\quad \mathrm{dist}(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}|x-y|.$$

其中对于空集$\emptyset$的情形, 定义$\mathrm{dist}(x,\emptyset)=+\infty,\mathrm{dist}(A,\emptyset)=\mathrm{dist}(\emptyset,B)=+\infty$.

【注】把上述**命题1.2.1(2-进方体的特性)** 和**定理1.2.2(开集的方体分解)**中的“左闭右开”换成“左开右闭”, 照搬相同的论证可知结论照样成立。

• **看特征函数的一个典型应用——**

【命题1.2.3(区间的估计)】设I, I_k为$\mathbb{R}^d$中的有界区间, $k=1,2,...,n$. 则有蕴含关系:

$$\text{若}\quad I\subset\bigcup_{k=1}^{n}I_k\quad\text{则}\quad |I|\le\sum_{k=1}^{n}|I_k|.$$

$$\text{若}I_k\text{互不重叠且}\quad\bigcup_{k=1}^{n}I_k\subset I\quad\text{则}\quad\sum_{k=1}^{n}|I_k|\le|I|.$$

$$\text{特别, 若}I_k\text{互不重叠且}\quad I=\bigcup_{k=1}^{n}I_k\quad\text{则}\quad |I|=\sum_{k=1}^{n}|I_k|.$$

【证】我们将利用集合的特征函数和一元黎曼积分的基本性质. 我们先看$d=1$ (一维)的情形. 取实数$\alpha<\beta\in\mathbb{R}$ 使得$I, I_k\subset[\alpha,\beta], k=1,2,...,n$. 不妨设$I, I_k$都是闭区间:

$$I=[a,b],\quad I_k=[a_k,b_k].$$

假设$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$. 来证明

$$b-a\le\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k).$$

由特征函数的性质易见

$$1_{[a,b]}(x)\le\sum_{k=1}^{n}1_{[a_k,b_k]}(x),\quad x\in[\alpha,\beta].$$

易见这些特征函数都在$[\alpha,\beta]$上黎曼可积(每个只有两个间断点). 因此对上述不等式两边取黎曼积分即得(根据积分的单调性、线性性等)

$$b-a=\int_{\alpha}^{\beta}1_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x\le\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}1_{[a_k,b_k]}(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\alpha}^{\beta}1_{[a_k,b_k]}(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k).$$

对于第二个不等式, 假设$[a_k,b_k]$ 互不重叠且$\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,b_k]\subset[a,b]$. 来证明

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\le b-a.$$

事实上由(a_k,b_k) 互不相交且$\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\subset[a,b]$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}1_{(a_k,b_k)}(x)\le1_{[a,b]}(x),\quad x\in[\alpha,\beta].$$

两边去积分即得

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\alpha}^{\beta}1_{(a_k,b_k)}(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}1_{(a_k,b_k)}(x)\mathrm{d}x\le\int_{\alpha}^{\beta}1_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x=b-a.$$

下面证明一般情形(维数$d \ge 1$). 取$0 < R < +\infty$ 充分大使得

$$I, I_k \subset [-R, R]^d, \quad k = 1, 2, ..., d.$$

由d维区间的定义可写

$$I = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_d, \quad I_k = J_{1,k} \times J_{2,k} \times \cdots \times J_{d,k}$$

其中$I_i, J_{i,k}$ 分别是含于$[-R, R]$ 中的闭区间和开区间($i = 1, 2, ..., d$).

假设$I \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$. 则由特征函数的性质有

$$1_I(x) \le \sum_{k=1}^n 1_{I_k}(x), \quad x \in [-R, R]^d.$$

而由 乘积集合的特征函数等于特征函数的乘积 知

$$1_I(x) = 1_{J_1}(x_1)1_{J_2}(x_2)\cdots 1_{J_d}(x_d), \quad 1_{I_k}(x) = 1_{J_{1,k}}(x_1)1_{J_{2,k}}(x_2)\cdots 1_{J_{d,k}}(x_d)$$

其中$x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in [-R, R]^d$, 因此上面不等式可写成

$$1_{J_1}(x_1)1_{J_2}(x_2)\cdots 1_{J_d}(x_d) \le \sum_{k=1}^n 1_{J_{1,k}}(x_1)1_{J_{2,k}}(x_2)\cdots 1_{J_{d,k}}(x_d). \tag{1.2.12}$$

固定任意$(x_2, x_3, ..., x_d) \in [-R, R]^{d-1}$, 不等式(1.2.12) 两边都是变量$x_1 \in [-R, R]$ 的Riemann 可积函数(因为$\mathbb{R}$中有界区间的特征函数在$\mathbb{R}$中任何有界闭区间上都是Riemann 可积的), 因此对不等式(1.2.12) 两边关于x_1 在$[-R, R]$ 上取Riemann 积分并注意

$$|I_1| = \int_{-R}^R 1_{J_1}(x_1)\mathrm{d}x_1, \quad |J_{1,k}| = \int_{-R}^R 1_{J_{1,k}}(x_1)\mathrm{d}x_1$$

得到

$$\begin{aligned}
&|J_1|1_{J_2}(x_2)\cdots 1_{J_d}(x_d) = \int_{-R}^R 1_{J_1}(x_1)\mathrm{d}x_1 1_{J_2}(x_2)\cdots 1_{J_d}(x_d) \\
&= \int_{-R}^R 1_{J_1}(x_1)1_{J_2}(x_2)\cdots 1_{J_d}(x_d)\mathrm{d}x_1 \le \int_{-R}^R \sum_{k=1}^n 1_{J_{1,k}}(x_1)1_{J_{2,k}}(x_2)\cdots 1_{J_{d,k}}(x_d)\mathrm{d}x_1 \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\int_{-R}^R 1_{J_{1,k}}(x_1)\mathrm{d}x_1\right) 1_{J_{2,k}}(x_2)\cdots 1_{J_{d,k}}(x_d) = |J_{1,k}|1_{J_{2,k}}(x_2)\cdots 1_{J_{d,k}}(x_d)\,.
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

同理固定任意$(x_3, ..., x_d) \in [-R, R]^{d-2}$, 对不等式(1.2.13)两边关于$x_2$ 在$[-R, R]$ 上取积分得到

$$|J_1||J_2|1_{J_3}(x_3)\cdots 1_{J_d}(x_d) \le \sum_{k=1}^d |J_{1,k}||J_{2,k}|1_{J_{3,k}}(x_3)\cdots 1_{J_{d,k}}(x_d).$$

如此操作下去(用归纳法原理), 在第d 步得到

$$|J_1||J_2|\cdots|J_d|\le\sum_{k=1}^{n}|J_{1,k}||J_{2,k}|\cdots|J_{d,k}|\qquad 即\quad |I|\le\sum_{k=1}^{n}|I_k|.$$

所以命题中的第一个不等式成立.

最后设I_k互不重叠且$\bigcup_{k=1}^n I_k\subset I$. 则$I_k^\circ$互不相交且$\bigcup_{k=1}^n I_k^\circ\subset I$ 从而有

$$\sum_{k=1}^{n}1_{I_k^\circ}(x)\le 1_I(x),\quad x\in[-R,R]^d.$$

注意

$$I_k^\circ=J_{1,k}^\circ\times J_{2,k}^\circ\times\cdots\times J_{d,k}^\circ$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}1_{J_{1,k}^\circ}(x_1)1_{J_{2,k}^\circ}(x_2)\cdots1_{J_{d,k}^\circ}(x_d)\le 1_{J_1}(x_1)1_{J_1}(x_2)\cdots1_{J_d}(x_d),\quad x=(x_1,x_2,...,x_d)\in[-R,R]^d.$$

两边对$x_1\in[-R,R]$ 取积分有

$$\sum_{k=1}^{n}|J_{1,k}^\circ|1_{J_{2,k}^\circ}(x_2)\cdots1_{J_{d,k}^\circ}(x_d)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-R}^{R}1_{J_{1,k}^\circ}(x_1)\mathrm{d}x_1 1_{J_{2,k}^\circ}(x_2)\cdots1_{J_{d,k}^\circ}(x_d)$$
$$\le\int_{-R}^{R}1_{J_1}(x_1)\mathrm{d}x_1 1_{J_1}(x_2)\cdots1_{J_d}(x_d)=|J_1|1_{J_2}(x_2)\cdots1_{J_d}(x_d).$$

再对$x_2\in[-R,R]$取积分得到

$$\sum_{k=1}^{n}|J_{1,k}^\circ||J_{2,k}^\circ|1_{J_{3,k}^\circ}(x_3)\cdots1_{J_{d,k}^\circ}(x_d)\le|J_1||J_2|1_{J_3}(x_3)\cdots1_{J_d}(x_d).$$

据归纳法得到

$$\sum_{k=1}^{n}|J_{1,k}^\circ||J_{2,k}^\circ|\cdots|J_{d,k}^\circ|\le|J_1||J_2|\cdots|J_d|.$$

最后注意

$$|J_{1,k}^\circ||J_{2,k}^\circ|\cdots|J_{d,k}^\circ|=|J_{1,k}||J_{2,k}|\cdots|J_{d,k}|=|J_{1,k}\times J_{2,k}\times\cdots\times J_{d,k}|=|I_k|$$

即完成了证明. $\square$

【注】我在课上只给出$d=1,2$的证明, 一般情形的证明留为作业。

作业题(2018.3.2)

1. 周民强《实变函数论》(2001年版, 北大出版社)P8: 1,2,3 (集合习题), P12: 1,2 (集合与函数), P16: 6,7 (集合与映射), P65: 8 (关于可数集) 【注：原来留的第6题是错的(感谢汪圣同学指出错误), 现改为该页第8题。】, P66:18 (关于紧集), P68: 29 (关于覆盖).

2. Stein 和Shakarchi 的实分析第一章第12 题(可以考虑闭包...).

3. 完成课上给出的命题(区间估计)的证明。

周民强的书因各版页码可能不同, 故将上面留的题目抄录如下:

周P8: 1,2,3 (集合习题) 证明下列命题:

1. 设A, B, E是全集X的子集, 则

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \iff B^c = E.$$

2. 设$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$, 则

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B_n.$$

3. 设$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$, 则

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n).$$

周P12: 1,2 (集合与函数) 试证明下列命题:

1. 设

$$A_n = \Big\{\frac{m}{n} \;\Big|\; m \in \mathbb{Z}\Big\}, \quad B_n = \Big(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\Big), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n = (0, 1].$$

2. 设$f_n(x), f(x)$ 都是定义在$\mathbb{R}$上的实值函数且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

则对任意$t \in \mathbb{R}$ 有

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; f_n(x) < t + \frac{1}{k}\Big\}.$$

周P16: 6,7 (集合与映射) 试证明下列命题:

6. 设E是由10个两位数字的数形成的集合, 则E中必有两个不相交的子集, 其元素个数相同. (此题可能抄错了.)

7. 设$f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 满足

$$g(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in X.$$

则f是单射, g是满射.

周P65: 8 (关于可数集)

8. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的实值函数。假设$\mathbb{R}$中每一点都是f的局部极小值 (即对任意$x_0 \in \mathbb{R}$存在$\delta > 0$ 使得$f(x) \geq f(x_0)$ for all $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$). 证明f的值域是可数集, 即$f(\mathbb{R})$ 是可数集。【本题或许用选择公理能较快获证.】

周P66:18 (关于紧集, 注意连续映射把紧集映为紧集)

18. 设映射$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 连续, $E_k \subset \mathbb{R}^d$ 是非空紧集且递减: $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. 证明

$$f\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(E_k).$$

周P68: 29 (关于覆盖).

29. 设$K \subset \mathbb{R}^d$是有界闭集, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是K的开球覆盖(即每个B_α是$\mathbb{R}^d$中的开球且$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$). 试证明存在$\delta > 0$ 使得对每个$x \in K$ 都存在$\alpha \in A$使得$B(x, \varepsilon) \subset B_\alpha$.

这里$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d \,|\, |y - x| < \varepsilon\}$ (即是以x为中心、ε为半径的开球）.

§1.3. 广义实数运算

把正负无穷大$\pm\infty$ 加入实数集$\mathbb{R}$中, 我们称

$$\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=[-\infty,+\infty]$$

为广义实数集。在测度和积分论中, 不可避免地要与无穷大 $\pm\infty$ 打交道。例如无界直线的长度为正无穷大, 一些变量的极限是正(负)无穷大, 等等。

广义实数集中算术运算法则是在常义实数集的运算法则基础增加以下约定 (对于 $x\in\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
&-\infty<+\infty,\quad -(-\infty)=+\infty,\quad |\pm\infty|=+\infty,\\
&+\infty+(+\infty)=+\infty-(-\infty)=-(-\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad -\infty-(+\infty)=-\infty\,,\\
&(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,\qquad (+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty\,,\\
&x+\infty=+\infty+x=+\infty,\qquad x-\infty=-\infty+x=-\infty\,,\quad x\in\mathbb{R};\\
&x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=+\infty,\quad x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=-\infty\quad \text{if}\quad x>0\,,\\
&x\cdot(+\infty=(+\infty)\cdot x=-\infty,\quad x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=+\infty\quad \text{if}\quad x<0\,,\\
&0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0\,.
\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

但**下列运算无定义:**

$$“+\infty-(+\infty)”,\qquad “-\infty+(+\infty)”,\qquad “\frac{\pm\infty}{\pm\infty}”$$

注意以上约定与极限论 L' Hospital 法则中的不定型问题有区别. 最大的区别是: 在广义实数运算约定中, $0\cdot(\pm\infty)=0$ 中的 0 是常数 0, 而不是无穷小变量!

对于$\frac{1}{0},\frac{1}{\pm\infty}$, 则根据具体问题来定义其值. 例如若所考虑的集合是非负实数的子集, 而0是这集合中的最小数, 则定义$\frac{1}{0}=\frac{1}{0+}=+\infty$. 又例如若$\frac{1}{\pm\infty}$不与无穷大做乘法运算, 则可定义$\frac{1}{\pm\infty}=0$.

【注】当上下文清楚时, 有时用∞ 代表$+\infty$, 例如若n 是自然数, 则$n\to\infty$ 当然表示$n\to+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}$ 当然表示$\sum_{n=1}^{+\infty}$, 等等.

• **广义非负实数和上确界:** 设 $A\subset[0,+\infty]$ 非空. 若 $+\infty\in A$ 或 $A\subset[0,+\infty)$ 无上界, 则我们定义 $\sup A=+\infty$.

关于广义非负实数, 常用的一个性质是：单调增加的数列总有极限:

若 $0 \le b_1 \le b_2 \le b_3 \le \dots$, $b_n \in [0, +\infty]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sup\limits_{n\ge1} b_n$.

事实上当一切 $b_n \in [0, +\infty)$ 时, 这归结为常义极限问题. 若存在 N 使得 $b_N = +\infty$, 则 $b_n = +\infty \ \forall n \ge N$. 此时当然有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty = \sup\limits_{n\ge1} b_n$.

对于广义非负实数, 加法永远有定义. 在测度与积分中经常用到广义正项级数, 其定义与常义正项级数相同, 即为部分和的极限：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} := \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\,, \quad a_k,\, a_{i,j} \in [0, +\infty]\,.$$

易见当 $a_k \in [0, +\infty]\,(k = 1, 2, ...)$ 中有一项为 $+\infty$ 时, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

【命题1.3.1(广义正项级数的求和及换序不变性)】设$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ 为广义非负实数列. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\,, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$$

这里 $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty} = \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的任一排列. 让一些 a_k 和 $a_{i,j}$ 等于 0, 上式包括了任意有限求和的情形.

【证】第一个等式的证明与常义正项级数的情形相同. 下证第二个等式. 由通项非负易见若某一项 $a_{i,j} = +\infty$, 则所有求和都等于 $+\infty$, 这时所证等式成立. 以下假设 $0 \le a_{i,j} < +\infty \ \forall\, i, j \ge 1$. 计算

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

注意一切 $a_{i,j} \ge 0$, 得到

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

再令 $n \to \infty$ 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

同理由

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\right)$$

得到反向不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \le \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\Big).$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$. 同理可证 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$. □

• **广义实数集的上下确界和上下极限:** 对于任一非空广义实数集合 $A \subset [-\infty, +\infty]$, 若 $\infty \in A$, 或 $A \subset [-\infty, +\infty)$ 但 A 没有有限的上界, 则定义 $\sup A = +\infty$; 若 $-\infty \in A$, 或 $A \subset (-\infty, +\infty]$ 但 A 没有有限的下界, 则定义 $\inf A = -\infty$.

对任一数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [-\infty, +\infty]$, 部分序列 $n \mapsto \{a_k\}_{k\ge n}$ 是单调的：

$$\{a_k\}_{k\ge n+1} \subset \{a_k\}_{k\ge n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

因此

$$\sup_{k\ge n+1} a_k \le \sup_{k\ge n} a_k, \quad \inf_{k\ge n+1} a_k \ge \inf_{k\ge n} a_k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

我们称

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{k\ge n} a_k\Big), \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{k\ge n} a_k\Big)$$

分别为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限和下极限.

与实数集性质相同, 我们称广义实数列 $\{a_n\}$ 有极限如果

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

这时这个公共值即定义为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限, 记做 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

• **函数列的情形:** 设$f_k : E \to [-\infty, +\infty]$ 是 E 上一列广义实值函数. 对每一固定的 $x \in E$, $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 就是一个广义实数列. 我们说 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛, 如果

$$\limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in E.$$

此时我们称这个公共极限

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) := \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in E.$$

为 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上的极限函数. 这里有两种情形：一种是利用函数列来构作函数, 即这函数是函数列的极限函数, 另一种刚好相反：对于已知函数, 构作满足一定条件的

函数列使得此函数列处处收敛于这个已知函数. 无论哪种情形, 说 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛于 f 是指 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \varphi(x) \qquad \forall\, x \in E\,.$$

注意这里 " 收敛" 只是习惯说法, 事实上它包括了在某些点 x 处的极限等于 $+\infty, -\infty$ 的情形.

【例】

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\cos(\pi x)|^k}{1 - |\cos(\pi x)|^k} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ +\infty & \text{if} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

在这个例子中我们已定义$\frac{1}{0} = \frac{1}{0+} = +\infty$, 这是因为$1 - |\cos(\pi x)|^k \ge 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

§1.4. Lebesgue 外测度和测度

Lebesgue测度论是古典几何体的长度、面积、体积等丈量法的推广: 对欧空间中大量的一般点集也可以赋予测度。测度的主要特征是可加性, 即整体的测度等于部分测度之和。由于并非每个点集的子集之间具有可加性(见后面不可测集的例子), 因此必须对点集进行挑选，使得挑选后的点集类具有可加性。做这件事通常分两步: 第一步先对任意点集建立外测度, 第二步：在外测度的基础上增加一个限制(例如通常的<u>**Carathéodory 条件**</u> 或本教材中考虑的<u>**开集逼近**</u> (二者是等价的)), 使得由满足这个限制的点集组成的类具有可加性.

以下我们用$\bigcup_{k\ge1}, \sum_{k\ge1}$ 表示**可数并、可数和**, 即

$$\bigcup_{k\ge1}=\bigcup_{k=1}^{n}\ \text{或}\ =\bigcup_{k=1}^{\infty};\qquad \sum_{k\ge1}=\sum_{k=1}^{n}\ \text{或}\ =\sum_{k=1}^{\infty}.$$

【定义($\mathbb{R}^d$上的Lebesgue 外测度)】设$E\subset\mathbb{R}^d$. 称广义非负实数

$$m^*(E)=\inf\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\ \Big|\ I_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界区间且}\ \bigcup_{k\ge1}I_k\supset E\Big\}$$

为集合E的d维Lebesgue 外测度, 简称外测度. □

为了应用方便我们先给出

【命题1.4.1(外测度的等价定义)】设$E\subset\mathbb{R}^d,\delta>0$. 令

$$\begin{aligned}
m^*_{\rm open}(E)&=\inf\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\ \Big|\ I_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界开区间且}\ \bigcup_{k\ge1}I_k\supset E\Big\},\\
m^*_{\delta}(E)&=\inf\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\ \Big|\ I_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界区间且}{\rm diam}(I_k)<\delta,\ \bigcup_{k\ge1}I_k\supset E\Big\},\\
m^*_{Q}(E)&=\inf\Big\{\sum_{k\ge1}|Q_k|\ \Big|\ Q_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界闭方体且}\ \bigcup_{k\ge1}Q_k\supset E\Big\}.
\end{aligned}$$

则有

$$m^*(E)=m^*_{\rm open}(E)=m^*_{\delta}(E)=m^*_{Q}(E).$$

为证这一命题, 先证一个引理.

【引理1.4.2(乘积的连续性)】设a_i,b_i 为实数或复数($i=1,2,...,d$). 则

$$\Big|\prod_{i=1}^{d}a_i-\prod_{i=1}^{d}b_i\Big|\le M^{d-1}\sum_{i=1}^{d}|a_i-b_i| \tag{1.4.1}$$

其中$M=\max\limits_{1\le i\le d}\{|a_i|\,,\,|b_i|\}$.

【证】我们对乘积因子个数d用归纳法. 当$d=1$ 时不等式(1.4.1) 是显然的, 其中规定$0^0=1$. 假设不等式(1.4.1) 对于因子个数$=d$ 时成立. 记$M_k=\max\limits_{1\le i\le k}\{|a_i|\,,\,|b_i|\}$. 做分拆

$$\prod_{i=1}^{d+1}a_i-\prod_{i=1}^{d+1}b_i=\Big(\prod_{i=1}^{d}a_i-\prod_{i=1}^{d}b_i\Big)a_{d+1}+\Big(\prod_{i=1}^{d}b_i\Big)(a_{d+1}-b_{d+1})$$

则由归纳假设得到

$$\begin{aligned}\Big|\prod_{i=1}^{d+1}a_i-\prod_{i=1}^{d+1}b_i\Big|&\le (M_d)^{d-1}\Big(\sum_{i=1}^{d}|a_i-b_i|\Big)|a_{d+1}|+(M_d)^d|a_{d+1}-b_{d+1}|\\&\le (M_{d+1})^d\Big(\sum_{i=1}^{d}|a_i-b_i|+|a_{d+1}-b_{d+1}|\Big)=(M_{d+1})^d\sum_{i=1}^{d+1}|a_i-b_i|\,.\end{aligned}$$

由归纳法原理, (1.4.1) 普遍成立. □

【外测度定义等价性的证明】首先由下确界的定义(集合越小其下确界越大)有

$$m^*(E)\le m^*_{\rm open}(E),\quad m^*(E)\le m^*_{\delta}(E),\quad m^*(E)\le m^*_{Q}(E).$$

下证反向不等式也成立:

$$m^*_{\rm open}(E)\le m^*(E),\quad m^*_{\delta}(E)\le m^*(E),\quad m^*_{Q}(E)\le m^*(E).$$

任取$E\subset\mathbb{R}^d$. 若$m^*(E)=+\infty$, 则反向不等式显然成立。设$m^*(E)<+\infty$. 由$m^*(E)$ 的定义, 对任意$\varepsilon>0$ (可设$\varepsilon<1$), 存在E 的一个有界区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

写$\overline{I_k}=\prod_{i=1}^d[a_{k,i},b_{k,i}]$. 考虑包含$I_k$ 的开区间J_k:

$$J_k=\prod_{i=1}^{d}(a_{k,i}-\delta_k,\,b_{k,i}+\delta_k)\,,\quad \delta_k=\frac{1}{[\max_{1\le i\le d}(b_{k,i}-a_{k,i}+1)]^{d-1}}\cdot\frac{\varepsilon}{d\cdot 2^{k+1}}\,,\quad k\ge1\,.$$

则$\{J_k\}_{k\ge1}$ 是E 的一个有界开区间覆盖。而由**引理1.4.2(乘积的连续性)** 有

$$\begin{aligned}|J_k|-|I_k|&=\prod_{i=1}^{d}(b_{k,i}-a_{k,i}+2\delta_k)-\prod_{i=1}^{d}(b_{k,i}-a_{k,i})\\&\le[\max_{1\le i\le d}(b_{k,i}-a_{k,i}+1)]^{d-1}\cdot d\cdot 2\delta_k=\frac{\varepsilon}{2^k}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$m^*_{\text{open}}(E) \le \sum_{k\ge1}|J_k| \le \sum_{k\ge1}|I_k| + \sum_{k\ge1}\frac{\varepsilon}{2^k} < m^*(E)+\varepsilon+\varepsilon = m^*(E)+2\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$的任意性, 令$\varepsilon\to0+$知$m^*_{\text{open}}(E)\le m^*(E)$。

又对每个区间I_k, 根据上节中的**区间的分划**知, 存在正整数N_k使得I_k 被分割成N_k个互不重叠的子区间的并: $I_k=\bigcup_{j=1}^{N_k} I_{k,j}$, $|I_k|=\sum_{j=1}^{N_k}|I_{k,j}|$ 且满足$\text{diam}(I_{k,j})<\delta, j=1,2,...,N_k$. 易见$\{I_{k,j}\,|\,k\ge1, j=1,2,...,N_k\}$是$E$的可数覆盖:$\bigcup_{k\ge1}\bigcup_{j=1}^{N_k} I_{k,j}=\bigcup_{k\ge1} I_k\supset E$. 于是有

$$m^*_\delta(E)\le\sum_{k\ge1}\sum_{j=1}^{N_k}|I_{k,j}|=\sum_{k\ge1}\Big(\sum_{j=1}^{N_k}|I_{k,j}|\Big)=\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

再由$\varepsilon>0$的任意性即知$m^*_\delta(E)\le m^*(E)$. 以上证明了$m^*(E)=m^*_{\text{open}}(E)=m^*_\delta(E)$.

最后证明$m^*_Q(E)\le m^*(E)$。我们将提前使用下面将证明的**可加性**和**外测度保持区间体积**的性质。不难看到这样做是安全的因为在后面的证明中我们将只用到已证明的性质, 不会有逻辑循环。

对任意$\varepsilon>0$, 由$m^*(E)=m^*_{\text{open}}(E)$ 知存在E的有界开区间覆盖$\bigcup_{k\ge1} I_k\supset E$使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.$$

对于开集$\bigcup_{k\ge1} I_k$, 由**定理1.2.2(开集的方体分解)** 知存在可数多个互不重叠的2-进闭方体Q_j 使得$\bigcup_{k\ge1} I_k=\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$. 于是由$Q_j$的可测性和互不重叠以及$m^*(Q_j)=|Q_j|$和$m^*_Q(E)$的定义得到

$$\begin{aligned} m^*_Q(E)&\le\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|=\sum_{j=1}^{\infty}m^*(Q_j)=m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j\Big)\\ &=m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}I_k\Big)\le\sum_{k\ge1}m^*(I_k)=\sum_{k\ge1}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon.\end{aligned}$$

再由$\varepsilon>0$的任意性即得$m^*_Q(E)\le m^*(E)$. $\square$

【命题1.4.3(Lebesgue 外测度的基本性质)】

(a) $m^*(\emptyset)=0$, 即空集的外测度为零.

(b) 单调性:

$$\text{若}A\subset B,\ \text{则}\quad m^*(A)\le m^*(B).$$

(c) 次可加性: 对任意可数多个$E_k\subset\mathbb{R}^d$ 有

$$m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}E_k\Big)\le\sum_{k\ge1}m^*(E_k).$$

(d) 隔离可加性: 对任意$A,B\subset\mathbb{R}^d$,

$$\text{若}\quad \mathrm{dist}(A,B)>0,\quad \text{则}\quad m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

(e) 保持区间体积:

$$\text{对任意有界区间}\, I\subset\mathbb{R}^d\ \text{都有}\quad m^*(I)=|I|.$$

【证】先证(b),(c). 设$B\supset A$. 则有

$$\begin{aligned}&\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\ \Big|\ I_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界区间且}\ \bigcup_{k\ge1}I_k\supset B\Big\}\\ \subset&\Big\{\sum_{k\ge1}|I_k|\ \Big|\ I_k\subset\mathbb{R}^d\ \text{是有界区间且}\ \bigcup_{k\ge1}I_k\supset A\Big\}\end{aligned}$$

因此由下确界的性质知

$$m^*(B)\ge m^*(A).$$

为证次可加性不等式, 可以假设$\sum_{k\ge1}m^*(E_k)<+\infty$, 否则不等式显然成立。对任意$\varepsilon>0$ 和任意$k\ge1$, 由$m^*(E_k)$和下确界的定义, 存在可数多个有界区间$\{I_{k,j}\}_{j\ge1}$ 满足$\bigcup\limits_{j\ge1}I_{k,j}\supset E_k$ 使得

$$\sum_{j\ge1}|I_{k,j}|<m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

易见$\{I_{k,j}\}_{k\ge1,j\ge1}$覆盖了$E$, 即

$$\bigcup_{k\ge1,j\ge1}I_{k,j}=\bigcup_{k\ge1}\bigcup_{j\ge1}I_{k,j}\supset\bigcup_{k\ge1}E_k.$$

因此由m^*的定义有

$$m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}E_k\Big)\le\sum_{k\ge1,j\ge1}|I_{j,k}|=\sum_{k\ge1}\Big(\sum_{j\ge1}|I_{k,j}|\Big)<\sum_{k\ge1}\Big(m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\Big)\le\sum_{k\ge1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon.$$

以上用到非负二重级数求和的累次求和可换序的性质. 据$\varepsilon > 0$的任意性知$m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

来证(a). 因空集$\emptyset$是任何集合的子集, 故对任一点$x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0d}) \in \mathbb{R}^d$ 都有$\emptyset \subset \{x_0\}$ 后者为单点集. 于是由m^*的单调性有$m^*(\emptyset) \le m^*(\{x_0\})$. 于是只需证明$m^*(\{x_0\}) = 0$. 而这是显然的：对任意$\varepsilon > 0$ 有

$$\{x_0\} \subset \prod_{i=1}^{d} (x_{0i} - \varepsilon, x_{0i} + \varepsilon)$$

据外测度的定义得

$$m^*(\{x_0\}) \le \Big| \prod_{i=1}^{d} (x_{0i} - \varepsilon, x_{0i} + \varepsilon) \Big| = (2\varepsilon)^d.$$

令$\varepsilon \to 0+$ 即知$m^*(\{x_0\}) = 0$.

下证(c)(隔离可加性): 设$A, B \subset \mathbb{R}^d$满足$\mathrm{dist}(A, B) > 0$. 由次可加性有$m^*(A \cup B) \le m^*(A) + m^*(B)$. 为证反向不等式$m^*(A) + m^*(B) \le m^*(A \cup B)$ 可以假定A, B 皆非空且$m^*(A \cup B) < +\infty$ (否则显然成立).

取$0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$. 对任意$\varepsilon > 0$, 由$m^* = m^*_\delta$ 知存在$A \cup B$ 的一个区间可数覆盖$\{I_k\}_{k \ge 1}$ 满足$\mathrm{diam}(I_k) < \delta$ 使得

$$\sum_{k \ge 1} |I_k| < m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

令

$$\mathbb{N}_A = \{k \mid I_k \cap A \ne \emptyset\}, \quad \mathbb{N}_B = \{k \mid I_k \cap B \ne \emptyset\}.$$

则由$0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$ 和$\mathrm{diam}(I_k) < \delta$ 易证

$$\mathbb{N}_A \cap \mathbb{N}_B = \emptyset \qquad \text{从而有} \quad A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}_A} I_k, \quad B \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}_B} I_k.$$

[自补证明, 反证法.] 于是得到

$$m^*(A) + m^*(B) \le \sum_{k \in \mathbb{N}_A} |I_k| + \sum_{k \in \mathbb{N}_B} |I_k| \le \sum_{k \ge 1} |I_k| < m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

令$\varepsilon \to 0$ 即得反向不等式$m^*(A) + m^*(B) \le m^*(A \cup B)$. 所以$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

最后证(e) (保持区间体积): 设$I \subset \mathbb{R}^d$为任一有界区间. 因区间I 覆盖了I自己, 故由Lebesgue外测度的定义知$m^*(I) \le |I|$. 为证反向不等式, 先设I是闭区间. 对任意$\varepsilon > 0$, 由$m^* = m^*_{\rm open}$知存在I的有界开区间可数覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$使得

$$\sum_{k\ge1}|I_k| < m^*(I)+\varepsilon.$$

因I是紧集(因I是有界闭区间), 故由紧集的有限覆盖定理知存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k.$$

于是据**命题1.2.3(区间的估计)** 有

$$|I| \le \sum_{k=1}^{N}|I_k| \le \sum_{k\ge1}|I_k| < m^*(I)+\varepsilon.$$

据$\varepsilon > 0$的任意性即得$|I| \le m^*(I)$. 对于一般情形, 将I 表为$I = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i)$ 或$\prod_{i=1}^d [a_i, b_i)$ 等等. 考虑I的内闭逼近:

$$I_n = \prod_{i=1}^{d}\Big[a_i+\frac{1}{2n}, b_i-\frac{1}{2n}\Big], \quad \frac{1}{n} < \max_{1\le i\le d}(b_i-a_i).$$

则由闭区间的结果和m^*的单调性有

$$\prod_{i=1}^{d}(b_i-a_i-\frac{1}{n}) = |I_n| \le m^*(I_n) \le m^*(I).$$

令$n \to \infty$即得

$$|I| = \prod_{i=1}^{d}(b_i-a_i) = \lim_{n\to\infty}|I_n| \le m^*(I).$$

因此反向不等式$|I| \le m^*(I)$也成立。 □

【注】由Lebesgue外测度m^*保持区间体积 易证两个常用性质(学生自证):

(1) 若E有内点, 即$E^\circ \ne \emptyset$, 则$m^*(E) > 0$.

(2) 若E有界, 则$m^*(E) < +\infty$.

• **Lebesgue 可测集和测度**

为了兼顾一般测度论的学习, 我们对可测集给出**两个等价的定义**。

【可测集和测度的定义】设$E \subset \mathbb{R}^d$.

定义1 —— 开集逼近: 若对任意$\varepsilon > 0$ 存在开集$\mathcal{O} \supset E$使得

$$m^*(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon$$

则称E 是一个d维Lebesgue 可测集.

定义2 —— Carathéodory 条件: 设$E \subset \mathbb{R}^d$. 若E 满足Carathéodory 条件, 即

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \qquad \forall T \subset \mathbb{R}^d \tag{C}$$

则称E是一个d维Lebesgue 可测集。 条件(C)中的集合T称为检验集(testing set)。

$\mathbb{R}^d$中的Lebesgue 可测集的全体记作$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 外测度$m^*$在$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上的限制$m = m^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$, 即

$$m(E) = m^*(E), \qquad E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

称为$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上的Lebesgue 测度或简称为$\mathbb{R}^d$上的$d$维Lebesgue 测度。 □

定义1 给出了可测集的结构: 可测集是开集的极限; 而定义2则迫使可测集具有可加性, 预示了可测集类具有可加性。下面证明这两个定义是等价的。先证一个引理:

【引理1.4.6】设集合$E_k \subset \mathbb{R}^d$ 和$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 满足

$$E_k \subset E_{k+1}, \quad \mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) > 0, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

则有

$$m^*(E) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k).$$

【证】首先由$E_k \nearrow$和外测度的单调性有

$$m^*(E_k) \le m^*(E_{k+1}) \le m^*(E), \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

因此极限$\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)$存在且$\le m^*(E)$.

若$\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) = +\infty$, 则这蕴含$m^*(E) = +\infty$ 从而有$\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) = +\infty = m^*(E)$.

下设$\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 由外测度的单调性知$m^*(E_k) \le \lim\limits_{j\to\infty} m^*(E_j) < +\infty, k = 1,2,3,....$ 因此在下面推导中没有$+\infty$ 参与运算. 令

$$E_0 = \emptyset, \quad A_k = E_k \setminus E_{k-1}, \quad k = 1,2,3,\dots.$$

则由$E_k \nearrow$ 易见有

$$E = E_k \cup \bigcup_{j=k+1}^{\infty} A_j$$

从而由外测度的次可加性有

$$m^*(E) \le m^*(E_k) + \sum_{j=k+1}^{\infty} m^*(A_j), \quad k = 1,2,3,\dots.$$

下面我们将证明正项级数$\sum\limits_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < +\infty$ (即级数收敛). 如果此事成立, 则由级数收敛蕴含其尾巴趋于零: $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} m^*(A_j) = 0$, 得到

$$m^*(E) \le \lim_{k\to\infty} m^*(E_k) + \lim_{k\to\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} m^*(A_j) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k).$$

即反向不等式也成立. 于是等式$m^*(E) = \lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)$成立.

下证$\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$收敛. 因$A_k \subset E_k, A_{k+2} \subset E \setminus E_{k+1}$, 故由引理假设有

$$\mathrm{dist}(A_k, A_{k+2}) \ge \mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) > 0.$$

于是由m^*的隔离可加性有

$$m^*(A_k \cup A_{k+2}) = m^*(A_k) + m^*(A_{k+2}), \quad k = 1,2,3,\dots.$$

这给出

$$m^*(A_{2k-1} \cup A_{2k+1}) = m^*(A_{2k-1}) + m^*(A_{2k+1}), \quad k = 1,2,3,\dots,$$

$$m^*(A_{2k} \cup A_{2k+2}) = m^*(A_{2k}) + m^*(A_{2k+2}), \quad k = 1,2,3,\dots.$$

假设对于$n \in \mathbb{N}$ 已有

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1}\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k-1}), \qquad m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k}). \tag{1.4.2}$$

则由

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1} \subset E_{2n-1}, \quad A_{2n+1} \subset E \setminus E_{2n},$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k} \subset E_{2n}, \quad A_{2n+2} \subset E \setminus E_{2n+1}$$

知

$$\mathrm{dist}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1},\, A_{2n+1}\Big) \ge \mathrm{dist}(E_{2n-1}, E \setminus E_{2n}) > 0,$$

$$\mathrm{dist}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k},\, A_{2n+2}\Big) \ge \mathrm{dist}(E_{2n}, E \setminus E_{2n+1}) > 0,$$

于是由m^*的隔离可加性和归纳假设有

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_{2k-1}\Big) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1}\Big) + m^*(A_{2n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(A_{2k-1}),$$

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_{2k}\Big) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}\Big) + m^*(A_{2n+2}) = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(A_{2k}).$$

据归纳法原理, (1.4.2)对所有$n \in \mathbb{N}$成立.

由(1.4.2)和外测度的单调性有

$$\sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k-1}) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k-1}\Big) \le m^*(E_{2m-1}) \le \lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m^*(A_{2k}) = m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}\Big) \le m^*(E_{2m}) \le \lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) \le 2 \lim_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty.$$

这证明了级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$收敛. $\square$

【可测集两个定义的等价性的证明:】

先证明开集满足Carathéodory 条件(C). 任取开集$\mathcal{O} \in \mathbb{R}^d$。令$F = \mathcal{O}^c = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$. 则$F$是$\mathbb{R}^d$中的闭集。对任意$T \subset \mathbb{R}^d$, 令[1]

$$E = T \setminus F, \quad E_k = \{x \in E \mid \mathrm{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k}\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

则有

$$E_k \subset E_{k+1},\ \ k = 1, 2, 3, \ldots; \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

[1] **当**$F = \emptyset$**(空集)时，我们定义**$\mathrm{dist}(x, \emptyset) = +\infty$

事实上显然有$E_k \subset E_{k+1} \subset E$, $k = 1, 2, 3, \dots$. 这蕴含$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset E$. 而对任意$x \in E$有$x \notin F$. 因$F$ 是闭集, 故有$\mathrm{dist}(x, F) > 0$ 从而对于自然数$k > \frac{1}{\mathrm{dist}(x,F)}$ 有$\mathrm{dist}(x, F) > \frac{1}{k}$, 因此$x \in E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 所以$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 所以$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

对任意$x \in E_k, y \in E \setminus E_{k+1}$, 由定义有$\mathrm{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k}, \mathrm{dist}(y, F) < \frac{1}{k+1}$. 因此

$$|x - y| \ge |\mathrm{dist}(x, F) - \mathrm{dist}(y, F)| \ge \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

因此

$$\mathrm{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) = \inf_{x \in E_k, y \in E \setminus E_{k+1}} |x - y| \ge \frac{1}{k(k+1)} > 0.$$

据引理1.4.6 知

$$\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

又因

$$\mathrm{dist}(E_k, T \cap F) = \inf_{x \in E_k} \mathrm{dist}(x, T \cap F) \ge \inf_{x \in E_k} \mathrm{dist}(x, F) \ge \frac{1}{k} > 0$$

故由m^*的隔离可加性有

$$m^*(E_k \cup (T \cap F)) = m^*(E_k) + m^*(T \cap F).$$

注意到$E_k \cup (T \cap F) \subset T$, 因此

$$m^*(T) \ge m^*(E_k) + m^*(T \cap F) \to m^*(E) + m^*(T \cap F) \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

因此再由$E = T \setminus F = T \cap \mathcal{O}$, $T \cap F = T \cap \mathcal{O}^c$ 得到

$$m^*(T) \ge m^*(T \cap \mathcal{O}) + m^*(T \cap \mathcal{O}^c) \ge m^*(T).$$

所以$m^*(T \cap \mathcal{O}) + m^*(T \cap \mathcal{O}^c) = m^*(T)$, 即$\mathcal{O}$满足条件(C).

现在设$E \subset \mathbb{R}^d$ 满足定义1, 即E可被开集逼近. 来证E 满足条件(C). 任取$T \subset \mathbb{R}^d$, 由

$$T = (T \cap E) \cup (T \cap E^c)$$

和外测度的次可加性有$m^*(T) \le m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$. 来证反向不等式也成立:

$$m^*(T) \ge m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

取开集序列$\mathcal{O}_n \supset E$ 使得

$$\mathcal{O}_n \supset E, \quad m^*(\mathcal{O}_n \setminus E) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

因$\mathcal{O}_n$满足条件(C), 故有

$$m^*(T) = m^*(T \cap \mathcal{O}_n) + m^*(T \cap \mathcal{O}_n^c) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap \mathcal{O}_n^c).$$

易见

$$T \cap E^c \subset (T \cap \mathcal{O}_n^c) \cup (\mathcal{O}_c \setminus E) \quad \text{即} \quad T \setminus E \subset (T \setminus \mathcal{O}_n) \cup (\mathcal{O}_c \setminus E)$$

因此

$$m^*(T \cap E^c) \leq m^*(T \cap \mathcal{O}_n^c) + m^*(\mathcal{O}_c \setminus E) < m^*(T \cap \mathcal{O}_n^c) + \frac{1}{n}$$

于是得到

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

令$n \to \infty$即得反向不等式. 所以E满足条件(C).

反之设E满足条件(C), 来证E可被开集逼近. 先设$m^*(E) < \infty$. 对任意$\varepsilon > 0$, 存在有界开区间覆盖$\bigcup_{k \geq 1} I_k \supset E$ 使得

$$\sum_{k \geq 1} |I_k| < m^*(E) + \varepsilon.$$

令$\mathcal{O} = \bigcup_{k \geq 1} I_k$, 则$\mathcal{O}$是开集且$\mathcal{O} \supset E$. 取检验集$T = \mathcal{O}$, 则有

$$m^*(\mathcal{O}) = m^*(\mathcal{O} \cap E) + m^*(\mathcal{O} \cap E^c) = m^*(E) + m^*(\mathcal{O} \setminus E)$$

因此

$$m^*(\mathcal{O} \setminus E) = m^*(\mathcal{O}) - m^*(E) \leq \sum_{k \geq 1} m^*(I_k) - m^*(E) = \sum_{k \geq 1} |I_k| - m^*(E) < \varepsilon.$$

这证明了E可被开集逼近。其次设E无界. 考虑有界子集$E_n = E \cap [-n, n]^d$. 对任意$\varepsilon > 0$, 如上, 存在开集$\mathcal{O}_n := \bigcup_{k \geq 1} I_{n,k} \supset E_n$ 使得

$$\sum_{k \geq 1} |I_{n,k}| < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

取检验集$T = \mathcal{O}_n$ 便有

$$m^*(\mathcal{O}_n) = m^*(\mathcal{O}_n \cap E) + m^*(\mathcal{O}_n \setminus E) \geq m^*(E_n) + m^*(\mathcal{O}_n \setminus E)$$

从而有

$$m^*(\mathcal{O}_n \setminus E) \leq m^*(\mathcal{O}_n) - m^*(E_n) \leq \sum_{k \geq 1} m^*(I_{n,k}) - m^*(E_n)$$
$$= \sum_{k \geq 1} |I_{n,k}| - m^*(E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

令$\mathcal{O}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$, 则$\mathcal{O}$是开集且包含了$E$: $\mathcal{O}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$. 又显然有

$$\mathcal{O}\setminus E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathcal{O}_n\setminus E)$$

于是有

$$m^*(\mathcal{O}\setminus E)\le\sum_{n=1}^{\infty}m^*(\mathcal{O}_n\setminus E)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

所以E可以被开集逼近. 这就证明了上述两个定义的等价性。 □

【定义(零测集)】若$E\subset\mathbb{R}^d$ 且$m^*(E)=0$, 则称E是一个d维Lebesgue零测集(set of measure zero) 或零集(null set). □

零测集在测度论研究中具有重要作用。下面命题给出零测集的基本性质。

【命题1.4.7(Lebesgue零测集的基本性质).】

(**a**) 可数个(d维)零测集的并集还是(d维)零测集.

(**b**) 可数集是零测集. 特别, $\mathbb{Q}^d$(有理点集) 是零测集.

(**c**) 设p,q 为正整数, $d=p+q$. 假设Z_p,Z_q 分别是$\mathbb{R}^p$ 中的p维零测集和$\mathbb{R}^q$ 中的q维零测集, 则$Z_p\times\mathbb{R}^q$ 和$\mathbb{R}^p\times Z_q$ 是$\mathbb{R}^d$ 中的d维零测集.

因此对任意$A\subset\mathbb{R}^p, B\subset\mathbb{R}^q$, 集合$A\times Z_q$ 和$Z_p\times B$ 都是$\mathbb{R}^d$ 中的d维零测集.

(**d**) 若$d\ge 2$, 则$\mathbb{R}^d$ 中维数$<d$的线性子空间及其平移都是d 维L-零测集.

【证】(a): 设Z_k是零测集, $m^*(Z_k)=0$. 则由次可加性有

$$0\le m^*\Big(\bigcup_{k\ge1}Z_k\Big)\le\sum_{k\ge1}m^*(Z_k)=0.$$

(b): 设$Z=\{x_k\}_{k\ge1}$ 是一个可数集。我们前面已证明了单点集是零测集, 故有$m^*(\{x_k\})=0$. 把Z写成单点集的并: $Z=\bigcup_{k\ge1}\{x_k\}$ 即知Z是零测集。

(c): 先证明若$J\subset\mathbb{R}^q$ 是任意有界区间, 例如$J=[-R,R]^q$, 则$Z_p\times J$是d维零测集.

事实上对任意$\varepsilon>0$, 由Z_p 是$\mathbb{R}^p$ 中的p维零测集, 存在Z_p 的区间覆盖$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得$\sum_{k\ge1}|I_k|<\varepsilon$. 因区间的乘积还是区间, 故$\{I_k\times J\}_{k\ge1}$ 是$Z_p\times J$ 的有界区间覆盖, 从而有

$$m^*(Z_p\times J)\le\sum_{k\ge1}|I_k\times J|=\sum_{k\ge1}|I_k||J|=\Big(\sum_{k\ge1}|I_k|\Big)|J|<\varepsilon|J|\,.$$

令$\varepsilon \to 0$ 即得$m^*(Z_p \times J) = 0$. 因此$Z_p \times J$是d维零测集.

现在令$J_k = [-k, k]^q\,, k \in \mathbb{N}$, 则$Z_p \times J_k$ 是d维零测集且

$$Z_p \times \mathbb{R}^q \;= \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_p \times J_k\,.$$

上式表明$Z_p \times \mathbb{R}^q$等于可数多个d维零测集的并集, 因此$Z_p \times \mathbb{R}^q$ 是d维零测集. 同法可证$\mathbb{R}^p \times Z_q$ 是d维L-零测集.

(d): 这个证明将在**定理？(线性变换下的Lebesgue测度计算公式)** 之后完成, 其间没有循环论证. $\square$

【**例**】任何区间$I \subset \mathbb{R}^d$ 的边界∂I 是d维零测集即$m^*(\partial I) = 0$.

事实上由区间的定义知边界∂I 是d个形如$A \times I\,, I_1 \times B \times I_2,\ I \times C$ 的集合的并集, 其中A, B, C 是$\mathbb{R}$中只含两元素的有限集, I是$\mathbb{R}^{d-1}$ 中的区间, 而当$d \ge 3$时, I_1, I_2分别是$\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ 中的区间其中$p + q = d - 1$. 由上述**命题1.4.7(Lebesgue 零测集的基本性质)(c)** 知$A \times I\,, I \times C$ 都是d维零测集. 同理$I_1 \times B$是$p + 1$维零测集, 于是再由上述命题知$I_1 \times B \times I_2 = (I_1 \times B) \times I_2$是$d$维零测集. 所以$\partial I$ 是d维零测集. $\square$

【**定理1.4.8(Lebesgue可测集和测度的基本性质)**】设$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$是$\mathbb{R}^d$中的Lebesgue 可测集的全体, $m = m^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ 是$\mathbb{R}^d$上的d维Lebesgue 测度。则有

(a) $\mathbb{R}^d$中的每个开集属于$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 特别有$\mathbb{R}^d \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(b) 若$E \subset \mathbb{R}^d$ 且$m^*(E) = 0$, 则$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 即零测集是可测集。特别有$\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(c) 若$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则$E^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(d) 若$E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), k = 1, 2, 3, ...$, 则$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

若进一步假设E_k互不相交, 则成立可加性:

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

【证】我们将使用可测集的Carathéodory 定义(即条件(C)).

(a): 我们在**可测集两个定义的等价性的证明**中已证明了每个开集满足Carathéodory 条件(C). 所以开集是可测集。

(b): 设$E \subset \mathbb{R}^d$ 且$m^*(E) = 0$, 则对任意$T \subset \mathbb{R}^d$ 有$m^*(T \cap E) \le m^*(E) = 0$ 从而有

$$m^*(T) \ge m^*(T \cap E^c) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \ge m^*(T)$$

即$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$, 所以$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(c): 由 $(E^c)^c=E$ 可知Carathéodory 条件(C)中E与E^c的地位是对称的. 因此有 $E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\iff E^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

(d): 先证明若$A,B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 且$A\cap B=\emptyset$, 则有$A\cup B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

考虑"不交并"分解(此处给出文图):

$$\mathbb{R}^d=(A\cup B)\cup(A\cup B)^c,$$

$$A\cup B=[A\cap B]\cup[A\cap B^c]\cup[A^c\cap B].$$

由此, 对任意$T\subset\mathbb{R}^d$有

$$\begin{aligned}
&T=[T\cap(A\cup B)]\cup[T\cap(A\cup B)^c]\,,\\
&T\cap(A\cup B)=[T\cap A\cap B]\cup[T\cap A\cap B^c]\cup[T\cap A^c\cap B]\,,\\
&T\cap(A\cup B)^c=T\cap A^c\cap B^c\,.
\end{aligned}$$

由次可加性和$A,B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 有

$$\begin{aligned}
&m^*(T\cap(A\cup B))+m^*(T\cap(A\cup B)^c)\\
&\le m^*(T\cap A\cap B)+m^*(T\cap A\cap B^c)\\
&+m^*(T\cap A^c\cap B)+m^*(T\cap A^c\cap B^c)\\
&=m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c)=m^*(T)\qquad\forall T\subset\mathbb{R}^d\,.
\end{aligned}$$

这蕴含$A\cup B$ 满足条件(C). 因此$A\cup B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

注意, 由(c)还知$(A\cup B)^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 这是一个一般结论。于是我们相继得到$A\cap B=[A^c\cup B^c]^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $A\setminus B=A\cap B^c\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 这个性质将在下面用到.

由$\bigcup_{k=1}^n E_k=(\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k)\cup E_n$和归纳法易证：若$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $k=1,2,...,n$, 则$\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

推广到可数并：设$E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $k=1,2,3,...,$. 先假设E_k 互不相交. 令$S_n=\bigcup_{k=1}^n E_k$. 来证明对任意$T\subset\mathbb{R}^d$ 有

$$m^*(T\cap S_n)=\sum_{k=1}^n m^*(T\cap E_k)\,,\quad n=1,2,...\,. \tag{1.4.3}$$

当$n=1$时(1.4.3) 成立. 假设(1.4.3)对于n 成立, 则对于$n+1$, 由$E_{n+1}\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$和$S_{n+1}\cap(E_{n+1})^c=S_n$ 有

$$\begin{aligned}&m^*(T\cap S_{n+1})=m^*(T\cap S_{n+1}\cap E_{n+1})+m^*(T\cap S_{n+1}\cap(E_{n+1})^c)\\&=m^*(T\cap E_{n+1})+m^*(T\cap S_n)=\sum_{k=1}^{n+1}m^*(T\cap E_k)\,.\end{aligned}$$

据归纳法原理知(1.4.3)对任意$n\in\mathbb{N}$成立.

令$S=\bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 则由(1.4.3) 和$S_n\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 得到

$$\begin{aligned}&m^*(T)=m^*(T\cap S_n)+m^*(T\cap(S_n)^c)=\sum_{k=1}^{n}m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap(S_n)^c)\\&\ge\sum_{k=1}^{n}m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap S^c)\quad(\text{因为 }(S_n)^c\supset S^c\,)\,.\end{aligned}$$

令$n\to\infty$, 则每一项$m^*(T\cap E_k)$ 都被加进来了:

$$\begin{aligned}&m^*(T)\ge\sum_{k=1}^{\infty}m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap S^c)\\&\ge m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}T\cap E_k)+m^*(T\cap S^c)=m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c)\ge m^*(T)\,.\end{aligned}$$

以上用到了次可加性. 因此$\forall T\subset\mathbb{R}^d$ 有

$$m^*(T)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap S^c)=m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c)\,.$$

这证明了$S\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 即$S=\bigcup_{k=1}^\infty E_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 同时取$T=S$, 我们还证明了$m^*$在$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$上具有可数可加性(因$S\cap S^c=\emptyset$ 且$m^*(\emptyset)=0$), 即

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)\,.$$

其次转到一般情形：E_k不必互不相交. 如前面作法,令

$$\widetilde{E}_1=E_1\,,\quad\widetilde{E}_2=E_2\setminus E_1\,,\quad\widetilde{E}_k=E_k\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}E_j\,,\quad k=2,3,\dots\,.$$

则$\widetilde{E}_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\,(k=1,2,...)$ 且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\,,\quad\widetilde{E}_i\cap\widetilde{E}_j=\emptyset\,,\quad i\ne j\,.$$

因此$\bigcup_{k=1}^\infty E_k=\bigcup_{k=1}^\infty\widetilde{E}_k\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 这就完成了定理的证明. □

【注】由可数可加性可得有限可加性和交集与差集的计算公式：

对任意$E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 取$E_k = \emptyset, k = n+1, n+2, ...,$ 则

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d).$$

进一步假设$E_1, E_2, ..., E_n$互不相交, 从而$E_1, E_2, ..., E_n, ...$ 互不相交, 则由$m(E_k) = m(\emptyset) = 0, k = n+1, n+2, ...$和可数可加性有

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) = m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

将这一结果用于两个可测集, 设$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则由$A^c, B^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 知$A^c \cup B^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 从而有$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 此外由$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ 和可加性有

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A).$$

同时由$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ 有

$$m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B).$$

因此当$m(A \cap B) < \infty$时有

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A \cap B)$$

从而有

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

□

【定义(σ-代数、可测集与可测空间)】设X是一个集合, $\mathcal{A}$ 是X的一个子集族, 即$\mathcal{A}$是由X的一些子集组成的集合族。如果$\mathcal{A}$ 具有下列性质

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) 补集封闭：若$E \in \mathcal{A}$, 则补集$E^c := X \setminus E \in \mathcal{A}$

(iii) 可数并封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ...,$, 则$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

则称$\mathcal{A}$ 为X上的一个σ-代数, 并称$(X, \mathcal{A})$ 为一个可测空间, $\mathcal{A}$ 中的元素称为可测集。 □

从这个定义我们容易得到

【定义的推论】

(1) 空集$\emptyset = (\mathbb{R}^d)^c \in \mathcal{A}$.

(2) 有限并封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ..., n$, 则$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$.

事实上在(iii)中取$E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset$, 则$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

(3) 可数交封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ...$, 则$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c)^c \in \mathcal{A}$.

(4)有限交封闭：若$E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, ..., n$, 则$\bigcap_{k=1}^{n} E_k = (\bigcup_{k=1}^{n} E_k^c)^c \in \mathcal{A}$;

(5) 差集封闭：若$E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, 则$E_1 \setminus E_2 = E_1 \bigcap E_2^c \in \mathcal{A}$. □

这些性质说明σ-代数$\mathcal{A}$ 就是这样一个集合类: $\mathcal{A}$ 中有限多个或可数多个元素经过有限次或可数次集合运算—— 交、并、差、补—— 所得结果仍在$\mathcal{A}$ 中.

【注1】如果在可测集定义中把“可数并封闭”换为“有限并封闭”则相应的$\mathcal{A}$ 称为X上的一个代数。

【注2】“σ-代数”的前缀σ是求和符号Σ 的小写(早年间, Σ 也表示求并), 在这里用于提示可数并：$\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty}$. “可数并封闭”意味着容纳了更多的可测集; 而相应的可数可加性也为很多收敛问题的研究奠定了宽阔稳定的基础。

【注3】σ-代数的存在性: 令2^X是由X的所有子集组成的集合族。则显然2^X是X上的一个σ-代数并且是X上的最大的σ-代数, 即X上的任何σ-代数都是2^X的子集。而两个元素的集合$\{X, \emptyset\}$ 也是X 的一个σ-代数, 它是X上的最小的σ-代数, 即X上的任何σ-代数都包含$\{X, \emptyset\}$. 但这两个极端的σ-代数用处不大。通常我们需要这样的σ-代数: 它是包含了我们感兴趣的X的某类子集族的最小的σ-代数. 例如对于$X = \mathbb{R}^d$的情形, $\mathbb{R}^d$上最常用的σ-代数是Borel σ-代数, 它是由$\mathbb{R}^d$中所有开集生成的σ-代数, 具体见下面。

【由给定的集合族生成的σ-代数】

从测度和积分角度看, 可测空间过大就可能产生较多的奇异现象。下面的命题告诉我们如何使可测空间不过大且好包含了我们感兴趣的集合类。这就是所谓“最小”或“生成”的概念:

【**命题1.4.9**】设$\mathcal{G}$是X的一个子集族, 令$\sum(\mathcal{G})$ 是X 上的所有包含$\mathcal{G}$ 的σ- 代数的全体。则交集

$$\mathcal{B}=\bigcap_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})}\mathcal{A}$$

仍是X 上的一个σ-代数且$\mathcal{B}\supset\mathcal{G}$, 即$\mathcal{B}\in\sum(\mathcal{G})$。换言之, $\mathcal{B}$ 是X 上包含$\mathcal{G}$的最小σ-代数。我们也称$\mathcal{B}$是X上的由$\mathcal{G}$ 生成的σ-代数。

【证】因对任意$\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})$都有$\mathcal{A}\supset\mathcal{G}$, 故也有$\mathcal{B}\supset\mathcal{G}$. 下面验证$\mathcal{B}$ 满足σ-代数的三个规定性质.

(i) 对任意$\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})$, 因$\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}^d$上的σ-代数, 故$\mathbb{R}^d\in\mathcal{A}$. 因此$\mathbb{R}^d\in\bigcap\limits_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})}\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

(ii) 设$E\in\mathcal{B}$. 则对任意$\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})$有$E\in\mathcal{A}$. 因$\mathcal{A}$ 是σ-代数, 故$E^c\in\mathcal{A}$. 因此$E^c\in\bigcap\limits_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})}\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

(iii) 设$E_k\in\mathcal{B},k=1,2,3,...,$. 则对任意$\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})$ 有$E_k\in\mathcal{A},k=1,2,3,...,$. 因$\mathcal{A}$是$\sigma$-代数, 故$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathcal{A}$. 因此$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\bigcap\limits_{\mathcal{A}\in\sum(\mathcal{G})}\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

这证明了$\mathcal{B}$ 是X 上的σ-代数。 $\square$

下面我们只考虑$X=\mathbb{R}^d$ 的情形。

$\mathbb{R}^d$上最常用的σ-代数是所谓Borel σ-代数, 它是由$\mathbb{R}^d$的开集族生成的σ-代数。

【**定义(Borel σ-代数和Borel集)**】设$\mathcal{G}$ 为$\mathbb{R}^d$ 的开集的全体, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 是$\mathbb{R}^d$上由$\mathcal{G}$生成的σ- 代数。则称$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 是$\mathbb{R}^d$上的 Borel σ- 代数, 并称$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 中的元素称为Borel集。 $\square$

由σ-代数的定义和Borel集的定义立刻得知:

$\mathbb{R}^d$中的所有开集,闭集都是Borel 集, 并且由开集, 闭集经过可数次集合运算(交、并、差、补) 所得到的集合也都是Borel集。

两个常用的Borel集类: G_δ**-型集** 和F_σ**-型集**。

G_δ**-型集:** $E\subset\mathbb{R}^d$称为是一个G_δ-型集如果E可以表示成可数多个开集的交。

F_σ**-型集:** $E\subset\mathbb{R}^d$称为是一个F_σ-型集如果E可以表示成可数多个闭集的并。

由此定义和DeMorgen 对偶律可知, 集合E是一个G_δ-型集当且仅当其补集E^c是一个F_σ-型集。

【**命题1.4.10**】**(a)** $\mathbb{R}^d$中的Lebesgue 可测集的全体$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$是$\mathbb{R}^d$上的一个$\sigma$- 代数并且$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, 即$\mathbb{R}^d$中的Borel 集都是Lebesgue 可测集。

(b) (可测集的结构) 若$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, 则存在一个$G_\delta$-型集$H \supset E$ 和一个零测集Z 使得$E = H \setminus Z$, 同时存在一个F_σ-型集$F \subset E$ 和另一个零测集Z 使得$E = F \cup Z$.

【证】(a): 这是**定理1.4.8(Lebesgue可测集和测度的基本性质)**、σ-代数的定义和Borel集的定义的直接推论。

(b): 设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. 由可测集的等价定义(开集逼近), 对每个$k \in \mathbb{N}$, 存在开集$\mathcal{O}_k \supset E$ 使得$m(\mathcal{O}_k \setminus E) < \frac{1}{k}$. 令

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k, \quad Z = H \setminus E$$

则H是一个G_δ-型集且$H \supset E$ 且$E = H \setminus Z$ 并有

$$m(Z) = m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k \setminus E\Big) \le m(\mathcal{O}_n \setminus E) < \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此$m(Z) = 0$.

将这一结果应用于$E^c = \mathbb{R}^d \setminus E$, 则存在开集列$\mathcal{O}_k \supset E^c$ 和零测集Z 使得

$$E^c = \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k\Big) \setminus Z = \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k\Big) \cap Z^c.$$

取补集并令$F_k = \mathcal{O}_k^c, F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 得到

$$E = (E^c)^c = \bigg(\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k\Big) \cap Z^c\bigg)^c = \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k\Big)^c \cup Z = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\Big) \cup Z = F \cup Z.$$

□

作业题(2018.3.7)

1. 自学上面讲义, 有些内容课上没时间讲, 但后面常用。

2. 周民强《实变函数论》(2001年版, 北大出版社)P85: 1, 2, 3; P94: 1, 4 ; P100: 1,3.

3. Stein 和Shakarchi 的实分析第一章习题5, 11 (周书里有类似题解法), 14, 16 (其中注意记号$\limsup\limits_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$), 25, 27, 28。

周民强的书因各版页码可能不同, 故将上面留的题目抄录如下:

周书P85: 1,2,3 解答下列问题:

1. 设$A \subset \mathbb{R}^d$ 且$m^*(A) = 0$, 试证明对任意$B \subset \mathbb{R}^d$ 有

$$m^*(A \cup B) = m^*(B) = m^*(B \setminus A).$$

(换言之, 对B 加上或减去一个零测集, 不改变B的外测度。)

2. (i) 设$A, B \subset \mathbb{R}^d$ 且$m^*(A) < \infty, m^*(B) < \infty$, 试证明

$$|m^*(A) - m^*(B)| \le m^*(A \Delta B)$$

这里和下面,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \qquad \text{称之为} A, B \text{的对称差}.$$

(ii) 设$A, B, C \subset \mathbb{R}^d$ 且有

$$m^*(A \Delta B) = 0, \quad m^*(B \Delta C) = 0.$$

证明$m^*(A \Delta C) = 0$.

3. 设$E \subset \mathbb{R}^d$. 若对任意$x \in E$, 存在开球$B(x, \delta_x)$ 使得$m^*(E \cap B(x, \delta_x)) = 0$, 试证明$m^*(E) = 0$.

周书P94: 1, 4 解答下列问题:

1. 设$E \subset [0, 1]^d$. 试证明

若$m^*(E) = 1$, 则$\overline{E} = [0, 1]^d$. 若$m^*(E) = 0$, 则$E^\circ = \emptyset$.

这里$\overline{E}, E^\circ$ 分别表示E的闭包和内部。

4. 设$B \subset \mathbb{R}^d$ 满足对任意$\varepsilon > 0$ 存在可测集$A \subset \mathbb{R}^d$ 使得$m^*(A \Delta B) < \varepsilon$, 证明$B$是可测集。

周书P100: 1,3 解答下列问题:

1. 设$E \subset \mathbb{R}^d$ 且$m^*(E) < \infty$. 若有

$$m^*(E) = \sup\{m(K) \mid K \text{ 是紧集且 } K \subset E\}.$$

试证明E是可测集。

3. 设$A, B \subset \mathbb{R}^d$. 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \le m^*(A) + m^*(B).$$

[建议先证明集合的等测包的存在性: 对于任一集合$E \subset \mathbb{R}^d$, 由外测度的定义和性质易见存在一列开集$\mathcal{O}_n \supset E, n = 1, 2, 3, ...$ 使得集合$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$满足$m(H) = m^*(E)$. 称这样的$H$为$E$的一个等测包.]