数学分析教学讲义 第一章

讲课教材:《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书:《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社;《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社;《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华数学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Sept. 2016

数学分析讲义总目录

第一章 经典逻辑, 集合与映射

§1.1. 经典逻辑符号和基本演绎法

$\neg$ 非, $\wedge$ 并且, $\vee$ 或, $\Longrightarrow$ 蕴含、推出, $\Longleftrightarrow$ 等价、互推.

运算先后次序: $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$.

也可用括号说明运算的先后次序. 括号内的东西是一个独立命题, 这点一定要清楚.

【例】 $A \vee B \Longrightarrow C$ 理解为 $(A \vee B) \Longrightarrow C$.

$\neg A \wedge B \vee C \Longrightarrow D$ 理解为 $\Big((\neg A) \wedge B\Big) \vee C \Longrightarrow D$.

文字表达即为 $\Big($(A 不真且 B 真) 或 C 真$\Big)$ 蕴含 D 真.

• **说明:** 除逻辑学家外, 几乎所有数学工作者都宁愿使用伴有文字解释的命题表达, 因为这容易使人明白.

• 关于" $\Longleftrightarrow$ "的通常文字表达:"$A \Longleftrightarrow B$"表示下面任何一种说法:

对于 B 的成立而言, A 即是必要条件也是充分条件;

B 成立当且仅当 A 成立;

A 蕴含 B 且 B 蕴含 A;

A 与 B 等价.

由此还看出 "$A \Longleftrightarrow B$" 与 "$B \Longleftrightarrow A$" 是一个意思.

• **强调: 数学定义中出现的条件都是 被定义者存在的充分必要条件**.

• **形式逻辑中的三段论演绎法:** 若 A 真, 且 $A \Longrightarrow B$ 为真, 则 B 亦真. 文字说明即为: 从真的前提出发, 经过正确的推导, 得到的结论也真. 这是逻辑思维中的基本语言.

• **形式逻辑中要求有限步完成论证:** 为了由 A 导出 B, 须根据有限多个命题在有限步内完成证明:

$$A \Longrightarrow C_1 \Longrightarrow C_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow C_n \Longrightarrow B$$

而不能无休止地推演下去. 对于研究中出现的无穷过程, 一般要借助公理和由公理导出的一些原理, 如实数公理, 归纳法原理, 等. 例如在有限推导链$A \Longrightarrow C_1 \Longrightarrow C_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow C_n \Longrightarrow B$中, 某个命题 C_k 可能包含了这类公理或原理的使用.

• **需要注意：** “$A \Longrightarrow B$ 为真”与 “B 本身为真”二者没有必然关系；A 假时, B 可能为假也可能为真.

很多情况下, 在发现或证明一个命题时, 可能被发现者已经存在了或者被证明者的真假与否已经确定了, 而不依赖于发现或证明的过程. 换言之, 人们可能（实际上是经常）用了一些不合逻辑的手段得到了一个正确命题. 我们在研究问题的过程中通常是要犯错误、走弯路的；对新问题的解决, 我们几乎不可能从开始到结束始终展现准确无误的严格论证. 事实说明, 探索与创新的成功不完全是靠逻辑. 逻辑学的作用主要是帮助我们减少错误, 对成果加以检查或严格证明, 以确定它的正确与否.

还需注意: 形式逻辑只能处理 “同一确定”的东西和“真、假”两种情况. 也就是说在形式逻辑中我们必须遵守同一律和排中律:

• **同一律**. 在论证或考虑的过程中(无论这一过程需要多少时间), 认定 A 就是 A, 此A等于彼A, 不得更换[1], 也写作$A \equiv A$.

• **排中律**. 对任一命题 A, 要么 A 真, 要么 $\neg A$ 真, 没有其它状态.

根据排中律, 我们把“不真”也叫做“假”, 把“真”也叫做“不假”. 在这个意义上我们有貌似极端的说法:“非真即假,非假即真, 没有中间状态”. 同学们需要明白: 这里的“真”与“假”只是逻辑上的互反关系, 与通常意义下的“一致”与“对立”不完全相同.

需要注意, 排中律(甚至同一律)的这种刚性与实际问题并不全吻合. 量子力学的出现, 对排中律(乃至同一律)是一个极大的冲击. 典型的例子是著名的测不准原理, 它是说, 对于一个微观粒子, 例如电子, 我们不可能精确地测量出它在同一时刻的位置和速度（因为准确测量位置需要“不动”，而准确测量速度则需要“动”, 二者不能同时满足). 在生活中也有类似现象：根据早期量子力学家的评论, 一个人不可能精确地表达出此时此刻他正在想的是什么, 因为他在解释（相当于自我测量）的时候, 他的思维不断增加新内容, 包括可能开小差. 这里要害是所谓“测量”、“同时”和“精确”. 测量必须花时间, 时间变化了, 可能导致此物已非原物；特别是, 由于测量带来的干扰, 物体可能改变了测量前的性态. 但哲学问题是：不花时间何以测量？不测量何以

[1]在一些较为复杂的数学证明中, 为了简化记号或由于记号不够用, 对一些不重要的情形, 人们会用同一记号代表不同的东西, 不过这一点都会事先加以说明, 而且是以不易产生混淆为前提的. 例如我们可能看见这样的做法:“ 在下面的证明中, 我们用同一字母C 表示只依赖于某某已知量的常数; 在不同的段落里, C的值可以不同.” 等等. 这并不等于说这些数学工作者不懂得遵守同一律.

认知？！如果容许有误差（例如普朗克常数量级的误差）, 则还是可以同时测量的. 所以如果一定要用排中律解释的话, 则“排中律”就要允许有一定误差范围. 数学中的演绎、论证等（不是指发现探索过程）之所以使用排中律, 是因为不用排中律, 情况会更糟；而对一些不确定的东西的描述, 则已有概率论方法了.... 大家知道现代计算机有高精度模拟的功能, 然而它的基本运行原理仍就是 0–1 律 (即排中律), 也就是每次运算只执行 0（否）或 1 （是）的命令, 别无选择. 但在允许误差的意义下, 计算机是巨大成功的. 计算机与人类思维的本质区别是它缺乏人的并行、容错、跳跃等功能 — 这些不都是遵循排中律的甚至不遵守形式逻辑 — 尽管目前正在向这方面靠拢....

【例】一瓶陈年葡萄酒, 打开倒出几分钟后与打开之前有微妙差别, 因为酒与空气中的氧接触后有了化学变化, 更适于饮用(即此A非彼A) —— 涉及同一律问题, 与同一律无矛盾: 酒在打开之前与打开之后实际上属于两种不同的状态, 每种状态遵守自己的同一律(尽管差别可以很小).

【例】让一枚有一定厚度的硬币落地, 则

要么正面朝上, 要么反面朝上, 没有其它情形 —— 将模型简化后使用排中律；

不排除侧立的可能性, 但这可能性很小 —— 概率论.

• **关于否命题和反证法**. 根据排中律我们有

$$\neg(\neg A) = A$$

意即非假即真. 这常用于反证法论证中：从假设 A 不真出发推出 A 真, 从而与排中律不符, 因此只能是 A 真.

利用反证法和排中律可得如下逆否命题：

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$$

意即：（若 A 真则 B 真）等价于（若 B 假则 A 假）.

证明如下：假设（若 A 真则 B 真）成立. 来证明（若 B 假则 A 假）成立. 反证法: 假设（若 B 假则 A 假）不成立, 则这等于说虽然 B 假但 A 不假. 也即 (由排中

律）B 假但 A 真. 然由假设知由 A 真可得 B 真, 于是我们有 B 假和 B 真两种情况同时出现, 这与排中律不符. 因此必是 A 假.

反过来假设（若 B 假则 A 假）成立, 来证明（若 A 真则 B 真）成立. 仍用反证法. 假设（若 A 真则 B 真）不成立. 则这等于说虽然 A 真但 B 不真. 也即 (由排中律）A 真但 B 假. 然由假设知由 B 假可得 A 假, 于是我们有 A 真和 A 假两种情况同时出现, 这与排中律不符. 因此必是 B 真. $\square$

【例】证明平面正方形的边长l与对角线长d不可公度, 即不存在正整数m,n使得$ml=nd$.

【证】反证法, 假设l与d可公度, 即存在正整数m,n使得$ml=nd$. 可以假设 m,n 无公约数(否则约去公约数). 两边平方得$m^2l^2=n^2d^2$. 因$d^2=2l^2$, 故得$m^2=2n^2$. 由此知 m 是偶数. 令 $m=2m_1$. 则 $4m_1^2=2n^2\Longrightarrow n^2=2m_1^2\Longrightarrow n$ 也是偶数, 从而 m,n 有公约数 2, 这矛盾于 m,n 无公约数. 因此l与d不可公度. 换言之我们证明了 $\sqrt{2}$ 是无理数. $\square$

【例 (鸽笼原理)】设 m,n 为正整数. 运用反证法和排中律易证下面两个命题 A,B 等价即　命题$A\Longleftrightarrow$ 命题B.

命题 A: 若m 只鸽子放入了 n 个鸽笼里并且$m>n$, 则在这 n 个鸽笼中一定存在一个鸽笼, 它含有至少两只鸽子.

命题 B: 若 m 只鸽子能放入 n 个鸽笼里使得每个鸽笼里至多只有一只鸽子, 则必有 $m\le n$.

• 关于蕴含关系“$A\Longrightarrow B$”成立与否的问题.

在经典形式逻辑中我们知道, 若 A 真且 $A\Longrightarrow B$ 真, 则 B 也真. 由此得到:

(1) 若 A 真, B 假, 则 “ $A\Longrightarrow B$” 不成立.

然而对 A,B 的其余三种情况, 经典形式逻辑都规定“$A\Longrightarrow B$”成立, 即

(2) A 真, B 真, 则 “ $A\Longrightarrow B$” 成立.

(3) A 假, B 真, 则 “ $A\Longrightarrow B$” 成立.

(4) A 假, B 假, 则 “ $A \Longrightarrow B$” 成立.

让我们对 (2),(3),(4) 做如下解释：按人的思维习惯,“$A \Longrightarrow B$”也常说成为“如果有 A 就有 B”, 它属于假言命题, 也即这里的“如果”可能实际上不出现. 在 (2) 中, 既然已经有 A(即 A 真) 且有 B(即 B 真), 且 A 与 B 之间不排除存在蕴含关系的可能, 只是可能无法证明, 所以就做了规定 (2). 而对于 (3),(4), 因根本就没有 A(即 A 实际上是假的), 所以它与假言命题“如果有 A 就有 B”并无矛盾. 既然无矛盾, 就规定它成立(排中律). (3),(4) 也可以理解为：假的前提可以导出任何结论, 只是它完全不保证该结论本身的真假性.

虽然这些规定不易理解, 但它们确是独立的, 即不能由更基本的命题导出, 且与其它命题是相容的 (不矛盾的). 特别是, 实践表明它们较之其它规定还是最合适的.

根据上述规定, 不难得到下面命题：

$$\Big(A \Longrightarrow B\Big) \Longleftrightarrow \Big((\neg A) \vee B\Big).$$

【证】

“ $\Longrightarrow$ ”: 设 $A \Longrightarrow B$ 成立. 则当 $\neg A$ 真时自然有 $(\neg A) \vee B$ 真；当 $\neg A$ 不真时,A 真（排中律）, 从而由 $A \Longrightarrow B$ 成立推出 B 真, 因此 $(\neg A) \vee B$ 成立.

“ $\Longleftarrow$ ”: 设 $(\neg A) \vee B$ 成立. 若 $\neg A$ 真, 即 A 不真, 则由规定知 $A \Longrightarrow B$ 成立；若 $\neg A$ 不真, 则 B 真, 同时 A 真, 因此按规定 $A \Longrightarrow B$ 成立. $\square$

【例】(1) $(\ 1 < 0\ ) \Longrightarrow$ (我是博士).

(2) (我没赊账 (谎话)) $\Longrightarrow$ (你诬陷我).

在这两个推断中, 前提 A 都是假的. 因此 A 愿意导出什么结论就任由它去, 因为假的前提对它“导出”的结论本身的真假性判断没有作用；结论自身的真假性要从可靠的正确的前提来推断.

以后会看到, 数学中也有些无奈的情况: 形式逻辑要求任何理论体系的基础的建立都必须在有限步完成. 因此只能依靠公理, 包括公理之间的协调所需要的公理. 我们所能做的只是选择相对好的方案.

顺便说几句：所有问题都产生于“无限”; 当我们不可能依据更基本的性质处理无限时, 就不得不建立公理. 著名经济学家、诺贝尔奖获得者赫伯特·西蒙的一个重要理论就是“有限性”理论, 它解释了人类社会和自然界的无奈：这世界的各种资源是有限的, 人们的理解力、决策能力、耐心程度, 以及解决问题需要的时间、步骤, 等等都是有限的, 因此需要可行性理论；当最佳理论不可能实现时,“可行”方案就是“现实最佳”方案. **但理论上的“最佳”仍然重要, 因为它是人们度量现实与理想的偏离度的标杆.**

• **逻辑学中常用的陈述词和记号：**

1. 谓词“存在”：$\exists$. 它表示“存在”, 英文即为 “there exists...”. 也可理解为“至少存在一个”,“至少有一个”, 等. 有时也用$\exists!$... 表示程度谓词“存在唯一的...”即“there exists a unique...”.

2. 全称量词：$\forall$. 它表示“任意的”,“每一个”, “所有的”, 也可表为“对于任意的”, “对于每一个”,“对于任意一个”, “对所有的”, 等. 英文表达为“for any”, “for every”, “for arbitrary”, “for all”.

3. 连词“使得”：s.t., 它是“such that”的缩写. 在本讲义中我们有时也用s.t. 表示“满足”(satisfying).

【例 (阿基米德原理)】暂且借用集合的符号, 设 $\mathbb{N}$ 为自然数的集合. 阿基米德原理是说：

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad n\varepsilon > M.$$

语言表达即为：对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $M > 0$, 都存在自然数 n, 使得 $n\varepsilon > M$.

而假如你理解了阿基米德原理的意义, 则这一原理也可这样陈述 (它更突出该原理的本质):

无论 $\varepsilon > 0$ 多么小, 也无论 $M > 0$ 多么大, 都可以找到一个自然数 n, 使得 $n\varepsilon > M$.

注: 如果希望将上面两个 $\forall$ 缩并为一个, 则可采用如下表达（暂时借用集合符号）：

$$\forall (\varepsilon, M) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty), \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad n\varepsilon > M\,.$$

语言表达可为：对每一对正数 ε 和 M, 都存在自然数 n, 使得 $n\varepsilon > M$.

• **关于否命题的肯定语气表达**.

数学上为了证明的需要, 否命题 通常要转换成等价的肯定语气或**尽可能**肯定的语气陈述, 否则无法进行证明的操作. 以下我们通过例子来说明如何进行正确的陈述.

【例】设命题 A 为 "一粉笔盒里的粉笔都是白色的".

则 $\neg A$ 即为：这个粉笔盒里的粉笔不都是白色的.

$\neg A$ 的正确的肯定语气陈述为：这个粉笔盒里至少有一根粉笔不是白色的.

$\neg A$ 的一个不正确的肯定语气陈述为：这个粉笔盒里有一根粉笔是红色的.

当然如果粉笔的颜色只限于红白两种, 则第二个陈述也是正确的且更明确.

【例】设命题 A 为：每个 ≥ 4 的偶数都可表为两个素数之和（此乃著名的歌德巴赫猜想）.

则$\neg A$ 为：不是每个 ≥ 4 的偶数都能表为两个素数之和.

$\neg A$ 的肯定语气陈述：存在一个 ≥ 4 的偶数, 它不能表为两个素数之和.

进一步的肯定语气陈述：存在一个偶数 $n \geq 4$, 使得对于任何两个素数 p_1, p_2 都有 $n \neq p_1 + p_2$.

【例】设 $f(x)$ 是区间 I 上的一个实函数, $x_0 \in I$. 设命题为：

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对一切 $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

我们来试着找它的否命题的肯定语气陈述方式：存在某个 $\varepsilon > 0$, 对于它而言, 找不到这样的 $\delta > 0$, 使得不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 对于所有 $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 成立. 也就是说, 任何 $\delta > 0$ 都不具有上述性质, 也即对任何 $\delta > 0$, 不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 不能对所有 $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 成立, 也即对任何 $\delta > 0$, 至少有一个 $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 使得 $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. 经过这一分析, 上述命题的否命题的肯定语气陈述可简短地表为：

存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意 $\delta > 0$, 都存在 $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使得 $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

如用逻辑符号, 则上述正命题可表为：

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,.$$

它的否命题（用肯定语气陈述）为：

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \cap (x_0 - \delta, x\_0 + \delta) \quad \text{s.t.} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \,.$$

♠ **逻辑论证中的某些量之间的先后依赖关系**.

必须注意, 一般来说逻辑论证中的某些量之间具**有先后依赖关系**. 因此为清楚起见, 可以对依赖关系做些记号. 例如阿基米德原可写为:

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \forall\,M>0\quad \exists\,n=n_{\varepsilon,M}\in\mathbb{N}\quad \text{s.t.}\quad n\varepsilon>M.$$

它的否命题为

$$\exists\,\varepsilon>0,\quad \exists\,M>0\quad \text{s.t.}\quad \forall\,n\in\mathbb{N}\quad n\varepsilon\le M.$$

同样上面例子中的命题可表为

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\delta=\delta_\varepsilon>0\quad \text{s.t.}\quad \forall\,x\in I\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\,.$$

它的否命题为:

$$\exists\,\varepsilon>0\quad \text{s.t.}\quad \forall\,\delta>0\quad \exists\,x_\delta\in I\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\quad \text{s.t.}\quad |f(x_\delta)-f(x_0)|\ge\varepsilon\,.$$

一些教科书或学术论文中, 为了记号简洁, 作者们对一些因变量或常数, 常常会省去它们应有的复杂的下标, 或者对简化记号做单独说明. 但对于初学者, 我们应该不厌其烦地把<u>严格完整的表示</u>保持一段时间, 直到我们明白了这个做法的作用才采取简便写法.

§1.2 集合及其初等运算.

集合是用来定义所有其它概念、事物、属性等的基础, 因此集合本身是不能被更为基本的更低级的东西来定义的. 所以集合的概念本身只能是描述性的. 根据现代集合论的创始人 G. Cantor 的描述, 集合的三个基本要素为

1° **广泛性:** 集合可以由任意多个（包括零个) 和任意不同的事物组成;

2° **确定性:** 构成集合的事物(从而该集合的范围)是确定的而不是模糊的;

3° **概括性:** 任何性质 (命题、属性) 都可以确定一个具有该性质的事物的集合.

构成集合的事物叫做该集合的元素. 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$. 注意不要把“X 是空集”与“X 不是集合”搞混了.

集合的表示: 设 X 为一集合. 若 x 为 X 的一个元素, 则我们用 $x\in X$ 表之, 读作 x 属于 X. 若 x 不是 X 的元素, 则我们用 $x\notin X$ 表之, 读作 x 不属于 X. 偶尔也分别用 $X\ni x$ 和 $X\not\ni x$ 表之, 读作 X 包含 x 和 X 不包含 x.

• **列出集合的所有元素:**

$$A=\{\text{列出所有元素}\} \qquad \text{例如}\quad A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\} \quad \text{或} \quad A=\{a_1,a_2,a_3,...\}.$$

• **用元素所具有的公共性质来描述:** 设 X 为一集合, P 为某一确定的性质, 我们用 $P(x)$ 表示“X 中的元素 x 具有性质 P ”, 并用

$$A=\{x\in X\,|\,P(x)\} \quad \text{或} \quad A=\{x\in X\;:\;P(x)\}$$

表示 X 中具有性质 P 的元素的全体.

【例】 (1) $A=\{$各国国旗, 所有自然数, 26个英文字母 $\}$ 是集合, 其元素没有统一规律 (但都是确定的). 这说明集合的广泛性. 当然, 若一定要突出规律(或概括性)的话, 你可以把A写成三个有规律的集合的并集:
$A=\{$各国国旗$\}\cup\{$所有自然数$\}\cup\{$26个英文字母$\}$.

(2) $B=\{$ 看起来像猫的动物 $\}$ 不是集合, 因为其中的事物不确定, 依赖于观察者描述的尺度; 不同的观察者给出的B 的大小是不同的. 但如果你能建立所谓“模糊集合”论, 则对此类B应令当别论.

(3) $C=\{$ 一枚硬币落地后正面朝上的概率 $\}$ 是集合, 因为概率是数, 有确定的值. 这反映集合的确定性.

(4) $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-2x-1\geq 0\}$ 是集合, 其元素由性质 $P(x)$: $x^2-2x-1\geq 0$ 确定 (概括性).

【例(常用的数集)】(关于自然数集合实数集的详细定义见本章后面和第二章)

<u>自然数集</u>: $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$. (详见本章后面)

<u>整数集</u>: $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$.

<u>有理数集</u>：$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\}$. (这里为应用方便我们规定分母是正整数)

<u>实数集</u>：$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ (详见第二章. 简单地说, $\mathbb{R}$是$\mathbb{Q}$的完备化).

<u>非负整数集</u>: $\mathbb{Z}_+=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq 0\}$.

<u>非负有理数集</u>：$\mathbb{Q}_+=\{r\in\mathbb{Q}\,|\,r\geq 0\}$.

<u>非负实数集</u>：$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 0\}=[0,+\infty)$.

无理数：一实数若不是有理数, 则称它为无理数.

复数和复数集：形如$z = x + \mathrm{i}y$的数称为复数, 其中x, y 为实数, i为虚数单位, 即$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. 复数的全体记作$\mathbb{C}$, 即

$$\mathbb{C} = \{z \,|\, \text{存在} x, y \in \mathbb{R} \text{ 使得 } z = x + \mathrm{i}y\} = \{x + \mathrm{i}y \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

• **排中律的集合表达:** 对任一集合X和任一事物A, "$A \in X$"与"$A \notin X$"二者都有意义, 并且根据排中律, "$A \in X$"和"$A \notin X$"二者中有且只有一个成立.

• **关于悖论**. 在经典逻辑中, 悖论指自相矛盾的东西. 悖论通常产生于事物与自身打交道. 可以想象, 如果一事物过大, 就可能包含它自身, 遂可能出现悖论. 来看经典例子：

【**例**】设 S 是所有集合的全体, 即$S = \{X \,|\, X \text{ 是集合}\}$. 则 S 不是集合.

【证】反证法, 假设 S 是集合. 令

$$K = \{X \in S \,|\, X \notin X\}.$$

则由 S 是集合可知 K 是集合（包括空集的可能）. 据 S 的定义, 便有 $K \in S$. 于是, 若 $K \notin K$, 则由 K 的定义有 $K \in K$, 矛盾；若 $K \in K$, 则仍由 K 的定义又有 $K \notin K$, 也矛盾. 因这些矛盾是由假设 S 是集合产生的, 故"S 是集合"这个假设不成立, 所以 S 不是集合. □

思考题 (2005 级王力同学提供): 下面命题是否成立？其论证是否正确？错误在哪？

命题：对于任意集合 X, 恒有 $X \in X$.

【证】令 $K = \{X \,|\, X \text{ 是集合且 } X \notin X\}$. 则要证明的是 $K = \emptyset$. 假设 $K \neq \emptyset$. 则当 $K \notin K$时, 由 K 的定义有 $K \in K$, 矛盾；而当 $K \in K$时, 仍由 K 的定义又有 $K \notin K$, 也矛盾. 故必有 $K = \emptyset$. □ [2]

[2]**答案：此命题本身是错误的, 但它的证明过程基本是对的. 命题的错误在于默认了所有集合的全体是集合, 从而导致论证中的 K 是集合. 实际上, 由前面例子的证明可知K 不是集合. 当然如果考虑缩小范围, 即考虑某个集合M(无论M多大), 而令$K = \{X \in M \,|\, X \notin X\}$, 则论证将不会得出任何结论, 因为无法判定是否有$K \in M$.**

为了避免在<u>集合范围内</u> 出现悖论, 集合论规定：任一集合不是自身的元素, 即若 X **是集合, 则** $X \notin X$**.** 根据这个规定, $S = \{X \,|\, X \text{ 是集合}\}$便不是集合, 否则便有$S \in S$, 与规定冲突.

【问题】最后看一个问题(由2014级学生提供): 设S^* 是由不是集合的东西组成的全体, 即$S^* = \{X \,|\, X \text{ 不是集合}\}$. 如前我们可以讨论“$S^* \in S^*$”和“$S^* \notin S^*$”的问题. **但是** 首先需要看$S^*$ 是否为集合. 我们认为：由于集合这个概念已经很广, 因此“X 不是集合”这个描述就太过宽泛以至于我们不能确定X到底是什么或到底属于什么范围, 也即我们认为S^*中的元素不具有确定性(从而S^*自身也就不确定!). 假如这个看法成立, 那么根据构成集合的要素便知S^*不是集合, 进而我们就无法在集合论系统内讨论S^*的归属等问题.

作为对比让我们看: $\{X \subset \mathbb{R} \,|\, X \text{ 不是有理数集的子集}\}$. 它是一个集合, 因为其中的元素$X$是确定的, 即$X$ 是实数集$\mathbb{R}$的子集且至少含有一个无理数.

本题提醒注意的是: 构成集合的元素必须是确定的.

♠ **集合的运算.** 以下出现的大写字母 A, B, C, A_i, X 等都表示集合.

1° **子集**：若 A 的元素都在 B 中, 则称 A 是 B 的一个子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 因此

$$\Big(A \subset B\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longrightarrow x \in B\Big).$$

2° **相等**：A 与 B 相等的定义为

$$\Big(A = B\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \in A \Longleftrightarrow x \in B\Big) \Longleftrightarrow \Big(A \subset B \quad \text{and} \quad B \subset A\Big).$$

若 A, B 不相等, 则记为 $A \neq B$.

注意：等号 (不等号) 两边的东西是地位相等的, 即

$$A = B \Longleftrightarrow B = A, \qquad A \neq B \Longleftrightarrow B \neq A.$$

3° **并集**：由 A, B 两集合的元素的全体组成的集合记作 $A \cup B$, 称为 A 与 B 的并集. 即

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \quad \text{或} \quad x \in B\}. \qquad \text{显然} \quad A \cup B = B \cup A.$$

一般地任意多个集合 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 的, 元素的全体组成的集合记作 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, 称为诸 A_α 的并集, 即

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \,|\, \exists\, \alpha \in I \text{ s.t. } x \in A_\alpha\}\,.$$

4° **交集：**由 A, B 两集合的公共元素的全体组成的集合记作 $A\cap B$, 称为 A 与 B 的交集. 即

$$A\cap B := \{x \,|\, x\in A \quad \text{且} \quad x \in B\}\,. \qquad \text{易见} \quad A\cap B = B\cap A\,.$$

一般地任意多个集合 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 的公共元素的全体组成的集合记作 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$, 称为诸 A_α 的交集, 即

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \,|\, \forall\ \alpha \in I\,,\, x \in A_\alpha\}\,.$$

5° **并、交运算的结合律和交换律：**

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)\,, \quad (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)\,.$$

【证】略.

6° **并、交运算的两个分配律：**

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)\,, \quad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)\,.$$

一般地

$$A\cap\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} A\cap B_\alpha\,, \quad A\cup\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} A\cup B_\alpha\,.$$

【证】只证明最后两个等式.

$$\begin{aligned} x\in A\cap\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha &\iff x\in A \text{ and } x\in\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \iff x\in A \text{ and } \exists\,\alpha\in I \text{ s.t. } x\in B_\alpha \\ &\iff \exists\,\alpha\in I \text{ s.t. } x\in A\cup B_\alpha \iff x\in\bigcup_{\alpha\in I} A\cap B_\alpha\,. \end{aligned}$$

所以两集合相等. 对最后那个等式, 我们有

$$\forall\,\alpha\in I\,,\ A\subset A\cup B_\alpha \implies A\subset\bigcap_{\alpha\in I} A\cup B_\alpha\,.$$

而显然

$$\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subset \bigcap_{\alpha\in I} A\cup B_\alpha\,.$$

所以

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in I} A \cup B_\alpha \,.$$

反之, 设 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A \cup B_\alpha$. 若 $x \in A$, 则自然 $x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$. 若 $x \notin A$, 则由交集定义, 对任意 $\alpha \in I$ 有 $x \in A \cup B_\alpha$ 从而有$x \in B_\alpha$. 因此 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$. 所以仍有 $x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$. 因此

$$\bigcap_{\alpha \in I} A \cup B_\alpha \subset A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \,.$$

因此两集合相等. □

7° **差集**：把 A 中属于 B 的元素去掉, 剩下的元素构成的集合称为 A 减 B 后的差集, 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B := \{x \in A \,|\, x \notin B\} \,.$$

8° **余集 (或补集)**：设X是我们所考虑的一个大集合. 对任意 $A \subset X$, 我们把差集 $X \setminus A$ 叫做 A 关于 X 的补集或余集, 记作

$$A^c := X \setminus A \,.$$

这里上标 c 提示“补”或“余”(complement). 易见当 $A, B \subset X$ 时 有

$$(A^c)^c = A \,, \qquad A = B \Longleftrightarrow A^c = B^c \,.$$

9° **用补集表示差集**：设 $A, B \subset X$. 则

$$A \setminus B = A \cap B^c = B^c \cap A \,.$$

【证】由 $A, B \subset X$ 和交集运算交换律有

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \in X \setminus B\} = A \cap (X \setminus B) = A \cap B^c = B^c \cap A \,.$$

10° **de Morgan 对偶原理**: 设 A, B 为 X 的子集. 则

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \,, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \,.$$

一般地, 设 $A_\alpha \subset X$ $(\forall\, \alpha \in I)$. 则

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \,, \quad \Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c \,.$$

也即“并的补等于补的交”,“交的补等于补的并”. 用差集表示则写成

$$X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)\,, \quad X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)\,.$$

【证】

$$\begin{aligned}&x\in\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c \iff x\in X \ \text{ and } \ x\notin \bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha \iff x\in X \ \text{ and } \ \forall\,\alpha\in I\,,\ \ x\notin A_\alpha\\ &\iff \forall\,\alpha\in I\,,\ \ x\in X\setminus A_\alpha \iff x\in \bigcap_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c\,.\end{aligned}$$

所以第一个恒等式成立. 利用这一恒等式得到

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c\Big)^c=\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha^c)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\,. \qquad \text{因此} \quad \Big(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c\,.$$

□

• **集合的乘积 (笛卡尔积或直积)**. 设 X, Y 为任意两个集合. 定义新的集合

$$X\times Y := \{(x,y)\,|\,x\in X,\ \ y\in Y\}\,.$$

在 $X\times Y$ 中规定两元素相等为

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \quad\iff\quad x_1=x_2\,,\quad y_1=y_2\,.$$

称 $X\times Y$ 为集合 X, Y 的乘积, 也称为笛卡尔积或直积.

一般地, 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为任意 n 个集合. 定义它们的乘积 (笛卡尔积) 为

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n := \{(x_1,x_2,...,x_n)\,|\,x_i\in X_i\,,\ \ i=1,2,...,n\}\,.$$

在 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 中规定两元素相等为

$$(x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n) \quad\iff\quad x_i=y_i\,,\quad i=1,2,...,n.$$

当 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$ 时简记

$$\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n}=X^n\,.$$

例如

$$X^2=X\times X,\quad \mathbb{N}^3=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad \text{等等}.$$

乘积的结合律: 对于 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 中的元素我们规定括号运算: 例如

$$((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) = (x_1, (x_2, x_3, \cdots, x_n)) = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$((x_1, x_2, \cdots, x_k), x_{k+1}, ..., x_n) = \cdots = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-k}, (x_{n-k+1}, ..., x_n)) = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

等等, 其中括号内的元素组自然看成是相应的部分乘积集的元素. 于是有结合律:

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n = X_1 \times (X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n,$$

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1} \times \cdots \times X_n = \cdots$$
$$= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-k} \times (X_{n-k+1} \times \cdots \times X_n) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n.$$

等等. 这个结合律的主要作用之一在于人们可以对集合 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的个数 n 运用数学归纳法来证明乘积集合 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$的某些性质.

• **乘积集合的本质**. 以 $X \times Y$ 为例. $X \times Y$ 的元素 (x, y) 的分量 x 和 y, 除了它们的顺序 (x 为第一分量,y 为第二分量) 被人为规定外, 是**彼此独立**的, 即一方的变化范围和属性与另一方无关. 至于 x, y 的顺序要求, 则完全是为了明确分量的位置和身份. 当然, 由于这种顺序的缘故, x与y 的地位就不是对称的: x在第一位置, y在第二位置.

很多时候, 顺序也是不得已而为之的, 也即我们无法做到全面均衡或对称. 例如为了给同等级别的嘉宾安排座位, 可以采用圆桌排位, 但在书写或宣布嘉宾名字的时候, 就不得不有先后之分(通常采用以姓氏为序的天然顺序). 这也说明了我们的空间和时间在很多情况下不得不是有区别的、有序的.

乘积集合的"乘积"这个叫法来自于矩形面积和长方体的体积的计算方式. 例如

矩形(二维乘积集合)

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \,|\, x \in [a, b]\,,\ b \in [c, d]\}$$

的面积S即为相邻边长的乘积：$S = (b - a)(d - c)$.

长方体(三维乘积集合)

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_i \in [a_i, b_i]\,,\, i = 1, 2, 3.\}$$

的体积V即为相邻棱长的乘积：$V = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$.

当然, 由乘积集合的定义易见很多集合不是乘积型的.

【例】 圆盘 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$ 不能表为两个集合的乘积.

【证】 反证法, 假设存在集合 A,B 使得 $D=A\times B$. 任取 $x\in[-1,1]$. 由 $x^2+0^2=x^2\le 1$ 知 $(x,0)\in D=A\times B$. 因此由乘积集合的定义有 $x\in A$. 所以 $[-1,1]\subset A$. 同理可证 $[-1,1]\subset B$. 于是易见 $[-1,1]\times[-1,1]\subset A\times B=D$. 因 $(1,1)\in[-1,1]\times[-1,1]$, 故 $(1,1)\in D$ 从而得到矛盾：$2=1^2+1^2\le 1$. 这矛盾证明了 D 不可能表为两个集合的乘积. □

§1.3 函数与映射

1. **映射的概念：**设 X,Y 为两个集合. 如果按照某个确定规律 f, 对每个 $x\in X$, 存在唯一的元素 $y\in Y$ 与x对应, 则说 f 是定义在 X 上而在 Y 中取值的映射. 这时我们称集合 X 为映射 f 的定义域或出发域, 它的一般元素 x 称为映射 f 的变元或自变量, 而由x通过f对应的元素y记作$f(x)$, 即 $y=f(x)$, 并称 $y=f(x)$ 是f 的因变量. 我们把此事记作

$$f:X\to Y,\quad x\mapsto f(x)\,.$$

于是记号 $f:X\to Y$（读作 f 是从 X 到 Y 的映射或 f 把 X 映入 Y) 就表示：

(1) $x\in X\Longrightarrow f(x)\in Y\,.$

(2) $x_1=x_2\in X\Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)\,.$

此时我们称集合

$$f(X):=\{y\in Y\,|\,\exists x\in X\ \text{s.t. } y=f(x)\}=\{f(x)\,|\,x\in X\}$$

为映射 f 的值域, 或到达域, 或象集. 当 Y 为数集时, 如 Y 是实数集合或复数集合的子集, 也称映射 f 为函数. 现代数学中无论 Y 是否为数集, 人们有时也把映射叫做函数.

设 $f:X\to Y$, $g:X\to Y$. 若 $x\in X\Longrightarrow f(x)=g(x)$, 则成 f 与 g 相等, 或称 f,g 为同一个映射. □

纵观整个数学领域, 可以说

最基本最常用最重要的东西就是映射(函数、变换)

映射的例子, 见陈书P.11.

• **映射的象集和逆象集**. 设 $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. 称

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

为A 在 f 下的象集；而称

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

为B 在 f 下的原象集或逆象集. 对于空集 $\emptyset$, 显然有 $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

易见下列包含关系成立:

$$A_1 \subset A_2 \subset X \quad \Longrightarrow \quad f(A_1) \subset f(A_2) \subset Y,$$

$$B_1 \subset B_2 \subset Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \subset X.$$

此外, 由映射的定义还易见下面包含关系成立：

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \quad f(f^{-1}(B)) \subset B\,.$$

【**例**】设$f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. 则

$$f([0, \pi]) = [0, 1], \quad f^{-1}([0, \infty)) = f^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

这里$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合, $\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合.

下面命题给出了映射的象集和逆象集的常用的基本关系式.

【**命题**】对任一映射$f: X \to Y$, 设一切$A_\alpha \subset X$, 一切$B_\alpha \subset Y$. 则有

$$f\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha),$$

$$f\Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \qquad (\text{当}f\text{ 为单射时等号成立}),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha).$$

【证】只证第三个. 对任意$x \in X$ 我们有

$x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha) \iff f(x) \in \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha \iff$存在$\beta \in J$使得$f(x) \in B_\beta \iff$存在$\beta \in J$使得$x \in f^{-1}(B_\beta) \iff x \in \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$. 因此两个集合相等. □

• **集合的特征函数**. 设 X, A 为集合且 $A\subset X$. 定义二值函数 $1_A : X\to\{0,1\}$ 如下

$$1_A(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad x\in A\,,\\ 0 & \text{if}\quad x\not\in A\,.\end{cases}$$

注意: 当 $A=\emptyset$ 为空集时有 $1_{\emptyset}(x)\equiv 0$. 一般地对任一性质 P, 也可定义

$$1_{\{P\}}=\begin{cases}1 & \text{if } P \text{ is true},\\ 0 & \text{if } P \text{ is not true}.\end{cases}$$

例如

$$1_{\{a<b\}}=\begin{cases}1 & \text{if } a<b,\\ 0 & \text{if } a\ge b\,.\end{cases}$$

特征函数的基本性质：

(1) 设 X_i 为集合, $A_i\subset X_i\,, i=1,2,...,n$. 则

$$1_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1,x_2,...,x_n)=1_{A_1}(x_1)1_{A_2}(x_2)\cdots 1_{A_n}(x_n)\,,\quad x_i\in X_i\,.$$

(2) 设 X 为集合并设下面出现的集合皆为 X 的子集. 则有

$$\begin{aligned}
&1_{A^c}(x)=1-1_A(x)\,,\\
&1_{A\cup B}(x)=1_A(x)+1_B(x)-1_{A\cap B}(x)\,,\\
&1_{A\cup B}(x)=1_A(x)+1_B(x)\quad\text{if}\quad A\cap B=\emptyset\,,\\
&B\subset\bigcup_{i=1}^n A_i\implies 1_B(x)\le\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\,,\\
&1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)\le\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\,,\\
&1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\quad\text{if}\quad A_i\cap A_j=\emptyset\quad\forall\, i\ne j\,,\\
&1_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}(x)=1_{A_1}(x)1_{A_2}(x)\cdots 1_{A_n}(x)\,,\\
&1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)=1-\prod_{i=1}^n(1-1_{A_i}(x))\,,\\
&\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)\ge k\iff x\in A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\ \text{for some}\ i_1,i_2,...,i_k\,.
\end{aligned}$$

<u>**作业题**</u>**：证明上述关于特征函数的基本性质.** [对最复杂的那个, 可先看$1-1_{\cup_{i=1}^n A_i}(x)$ 并使用de Morgan 对偶律, 等等] 特征函数是个好东西! 本题性质在今后学分析类概率类课程中常用.

§1.4 映射的限制与延拓以及映射的分类

• **映射的限制与延拓**. 设 $f: X \to Y$. 若$A \subset X$, 则称$f: A \to Y$为f在A上的限制, 记作 $f|_A$. 意即 $f|_A$ 表示这样的映射, 它的定义域为原 f的定义域 X 的子集 A, 且当 $x \in A$ 时,$f|_A(x) = f(x)$. 易见$f|_A$ 由f 和A唯一决定.

设集合 $\widetilde{X} \supset X$. 如果$\widetilde{Y} \supset Y$且映射 $F: \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ 满足 $F|_X = f$, 则称 F 是 f 的一个延拓. 注意, f的延拓可能不只一个, 即可能不是唯一的.

• **单射**：设 $f: X \to Y$. 若不同的自变量对应不同的映射值, 即

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 是 X 到 Y 的单射或内射或一对一的映射[3](injective mapping).

• **满射**：设 $f: X \to Y$. 若对任意 $y \in Y$, 都存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 也即 $Y = f(X)$, 则称 f 为 X 到 Y 上的满射. (surjective mapping)

• **双射 (或一一对应)**：若 $f: X \to Y$ 既是单射又是满射, 则称 f 为 X 到 Y 的双射 (bijective mapping), 或称 f 是 X 与 Y 之间的一一对应 (one to one correspondence).

• **逆映射 (反函数)**：设 $f: X \to Y$ 是双射. 此时对任意 $y \in Y$, 存在唯一的 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$. 换言之, 对任意 $y \in Y$, 方程 $f(x) = y$ 在 X 中存在唯一解. 我们把这个唯一的由 y 确定的解 x 记作 $x = f^{-1}(y)$. 于是我们得到一个映射: $f^{-1}: Y \to X$, 称之为映射 $f: X \to Y$ 的逆映射或反函数. 于是当 $f: X \to Y$ 是双射时, 其逆映射 (反函数) $f^{-1}: Y \to X$ 就表示

$$\forall\, y \in Y\,,\ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow x \in X \ \text{ and } \ f(x) = y\,.$$

设 $f: X \to Y$ 是双射. 由逆映射 (反函数) 的定义易见,$f: X \to Y$ 与 $f^{-1}: Y \to X$ 互为逆映射（互为反函数), 即

$$(f^{-1})^{-1} = f\,.$$

• **单射与逆映射的关系**. 设 $f: X \to Y$ 为单射. 这时 $f: X \to f(X)$ 便是双射. 此时自然定义 $f^{-1}: f(X) \to X$ 为 $f: X \to f(X)$ 的逆映射（反函数).

【例】函数 $x \mapsto \sin x$ 在整个定义域 $(-\infty, \infty)$ 上不是单射, 但限制在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上, $\sin|_{[\pi/2,\pi/2]}$ 是单射. 因 $\sin|_{[\pi/2,\pi/2]}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$, 故 $\sin|_{[\pi/2,\pi/2]}$ 的反函数为

$$\arcsin y := (\sin|_{[\pi/2,\pi/2]})^{-1}(y)\,, \quad y \in [-1, 1]\,.$$

[3]在术语上, "一对一" 与" 一一对应"不同, 前者只要求是单射, 而后者则要求是单满射.

§1.5 复合映射及运算, 互逆映射. 设 $f: X\to Y$,$g: Y\to Z$, 我们定义一个新映射 $g\circ f: X\to Z$ 如下:

$$g\circ f(x)=g(f(x))\,,\quad x\in X\,.$$

称 $g\circ f$ 为 f 与 g 的复合映射. 见文图.

复合映射的结合律: 设 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, $h: Z\to W$. 则有 $g\circ f: X\to Z$, $h\circ(g\circ f): X\to W$, $(h\circ g)\circ f: X\to W$, 且

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f\,.$$

事实上我们分别有

$$h\circ(g\circ f)(x)=h(g\circ f(x))=h(g(f(x)))\,,\quad x\in X,$$

$$(h\circ g)\circ f(x)=(h\circ g)(f(x)))=h(g(f(x)))\,,\quad x\in X\,.$$

所以

$$h\circ(g\circ f)(x)=(h\circ g)\circ f(x)=h(g(f(x)))\,,\quad x\in X\,.$$

由于结合律, 在多个映射的复合乘法中, 任何两个相邻的映射是否先行运算, 都不改变乘法结果. 于是我们可以把强调先行运算的括号 “( )” 去掉, 从而可以写

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f=h\circ g\circ f\,.$$

一般地, 若

$$f_1: X_1\to X_2,\ f_2: X_2\to X_3,\quad ...,\quad f_n: X_n\to X_{n+1}$$

则有 $f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1: X_1\to X_{n+1}$ 且

$$f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1=f_n\circ(f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1)=(f_n\circ f_{n-1})\circ(f_{n-2}\circ\cdots\circ f_1)=\cdots,\quad \text{etc.}$$

特殊情形: 设 $X_1=X_2=\cdots=X_{n+1}=X$, $f_1=f_2=\cdots=f_n=f$. 则有

$$f: X\to X\,,\quad f^n:=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ times}}: X\to X\,,\quad f^n(x)=f(f(\cdots(f(x))\cdots))\,.$$

关于两个映射的复合乘法是否可交换的问题. 假设 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 都有意义. 则一般来说二者不一定相等, 即可能有 $f\circ g\neq g\circ f$.

【**例**】(1) 复合函数 $\sin(\log(x))$ 对所有 $x\in(0,\infty)$ 都有定义, 但复合函数 $\log(\sin(x))$ 只对 $x\in\{x\in\mathbb{R}\mid \sin x>0\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 有定义.

(2) $\sin(\cos x)\not\equiv\cos(\sin x),\quad x\in\mathbb{R}$.

(3) $e^{\log x}=\log(e^x)\ (=x)\qquad \forall\, x>0.$

(4) 设 $m,n\in\mathbb{N}$. 则对于 $f(x)=x^n$, $g(x)=x^m$ 有 $f(g(x))\equiv g(f(x))\equiv x^{mn}$, 也即

$(x^m)^n=(x^n)^m=x^{mn}\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$

(5) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为常值函数, 即 $f(x)\equiv c$. 则对任意函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有

$$f\circ g(x)=c\,,\quad g\circ f(x)=g(c)\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}\,.$$

作业题. (1). 设映射 $f:X\to X$ 满足 $g\circ f=f\circ g$ 对所有映射 $g:X\to X$ 成立. 证明：$f(x)\equiv x$.

(2). 假设映射 $f,g:X\to X$ 可交换, 即 $g\circ f=f\circ g$. 证明 f^n,g^m 也是可交换的, 即 $f^n\circ g^m=g^m\circ f^n,\ n,m=1,2,3,\dots$.

(3). 假设函数 $f,g:[0,1]\to[0,1]$ 可交换且对某个常数 α 有 $f(x)\ge g(x)+\alpha\quad \forall\, x\in[0,1]$. 证明 $f^n(x)\ge g^n(x)+n\alpha\quad \forall\, x\in[0,1],\ \forall\, n=1,2,3,\dots$.

• **恒等映射**. 若映射$f:X\to X$ 满足$f(x)\equiv x$, 则称f 为X上的恒等映射或恒同映射, 并记之为$f=\mathrm{e}_X$. 也即, $\mathrm{e}_X(x)\equiv x$.

【**引理**】设$f:X\to Y\,,g:Y\to X$ 满足$g\circ f=\mathrm{e}_X$. 则g 是满射, f 是单射.

【证】由e_X的定义有

$$X=\mathrm{e}_X(X)=g\circ f(X)=g(f(X))\subset g(Y)\subset X\implies g(Y)=X\,.$$

因此g 是满射. 而对任意$x_1,x_2\in X$ 还有蕴含关系:

$$x_1\neq x_2\Longrightarrow g\circ f(x_1)=\mathrm{e}_X(x_1)=x_1\neq x_2=\mathrm{e}_X(x_2)=g\circ f(x_2)\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\,.$$

所以f 是单射. $\square$

【**命题**】设 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$. 则

$$f,g\ \text{互为逆映射(即 } f=g^{-1},\ g=f^{-1})\iff g\circ f=\mathrm{e}_X,\ f\circ g=\mathrm{e}_Y.$$

因此当两边之一(从而两边都)满足时有$f^{-1}\circ f = \mathrm{e}_X$, $f\circ f^{-1} = \mathrm{e}_Y$.

【证】假设$f = g^{-1}$ 且 $g = f^{-1}$. 则由逆映射的定义有$f(X) = g^{-1}(X) = Y$, $g(Y) = f^{-1}(X) = X$ 且

$$(g\circ f)(x) = (g\circ g^{-1})(x) = x = \mathrm{e}_X(x)\,, \quad (f\circ g)(y) = (f\circ f^{-1})(y) = y = \mathrm{e}_Y(y)\,.$$

所以$g\circ f = \mathrm{e}_X$, $f\circ g = \mathrm{e}_Y$.

反之, 设$g\circ f = \mathrm{e}_X$, $f\circ g = \mathrm{e}_Y$. 则应用上面引理可知$g: X\to Y$是单满射, $f: X\to Y$ 是单满射. 因此逆映射$g^{-1}: Y\to X$ 和$f^{-1}: Y\to X$ 都存在. 于是有

$$\forall\, y\in Y = f(X) \Longrightarrow \exists!\, x\in X \text{ s.t. } y = f(x) \Longrightarrow g(y) = g(f(x)) = x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)\,.$$

因此$g = f^{-1}$. 同样还有

$$\forall\, x\in X = g(Y) \Longrightarrow \exists!\, y\in Y \text{ s.t. } x = g(y) \Longrightarrow f(x) = f(g(y)) = y = g^{-1}(g(y)) = g^{-1}(x)\,.$$

因此$f = g^{-1}$. 所以f, g 互为逆映射. $\square$

§1.6 集合与逻辑的对应关系 (学生自学) 本节我们尝试建立逻辑与集合的以下对应关系, 其中左边为逻辑演算, 右边为集合运算:

“$\Longrightarrow$”与“$\subset$”, “$\Longleftrightarrow$”与“相等”,
“$\neg$”与“补集”, “$\vee$”与“$\cup$”, “$\wedge$”与“$\cap$”.

一个性质是指一些元素所具有的共同性质(属性). 具有共同性质(属性)的元素的全体称为这个性质(属性)的范畴. 意即若A是一个性质(属性), 则A的范畴为集合$\{x\,|\ x \text{ 具有性质}A\}$. 设 A, B 为两个性质, 定义$A\Longrightarrow B$ 为A的范畴不大于B的范畴, 也即

$$A\Longrightarrow B \quad \text{当且仅当} \quad \{x\,|\ x \text{ 具有性质}A\}\subset\{x\,|\ x \text{ 具有性质}B\}.$$

于是两个性质A, B被称为彼此等价是指它们的范畴相同, 即

$$A\Longleftrightarrow B \quad \text{当且仅当} \quad \{x\,|\ x \text{ 具有性质}A\} = \{x\,|\ x \text{ 具有性质}B\}.$$

我们把集合$\{x\,|\ x \text{ 不具有性质}A\}$中元素的共同属性定义为 $\neg A$. 于是就有“x 不具有性质A” =“x具有性质$\neg A$”.

设A,B是两个性质. 我们把集合$\{x\mid\ x$具有性质A或性质$B\}$中元素的共同性质定义为 $A\vee B$. 而把集合$\{x\mid\ x$同时具有性质A和性质$B\}$中元素的共同性质定义为 $A\wedge B$. 于是$A\vee B$, $A\wedge B$ 也都是性质. 这样一来便有

"x具有性质A或性质B"="x具有性质$A\vee B$".

"x同时具有性质A和性质B"="x具有性质$A\wedge B$".

令

$$P=\{A\,|\,A\ \text{是一个性质}\},$$

$$X=\{x\,|\ \text{存在}A\in P\text{使得}x\text{具有性质}A\}.$$

易见若 $A,B\in P$, 则由上面分析知 $\neg A, A\vee B, A\wedge B$ 均属于 P. 而对任意集合 $M\subset X$, 令 A 表示由"$x\in M$"定义的性质, 则 $A\in P$. 这说明, X的任一子集也对应一个性质.

令 2^X 是 X 的所有子集的集族. 作映射 (可以称为范畴函数)

$$f:P\to 2^X,\ A\mapsto f(A)=\{x\in X\,|\ x\ \text{具有性质}\ A\}.$$

那么上述逻辑与集合之间的对应关系便可以用映射f来重新表述. 也即同学可以证明对任意$A,B\in P$ 有

(1)
$$\Big(A\Longrightarrow B\Big)\Longleftrightarrow\Big(f(A)\subset f(B)\Big).$$

(2)
$$\Big(A\Longleftrightarrow B\Big)\ \Longleftrightarrow\ \Big(f(A)=f(B)\Big).$$

(3) $f(\neg A)=(f(A))^c$.

(4) $f(A\vee B)=f(A)\cup f(B)$.

(5) $f(A\wedge B)=f(A)\cap f(B)$.

以上也见习题课上的讨论. 所有这些只是告诉我们一种思维方式: 即对于常规问题而言, 逻辑思维与集合运算是等价的. 【当然如前所说, 人的思维不都是遵循逻辑的！】

§1.7 关系, 作为关系的函数, 以及函数图象.

【关系】由一些二元序对 (x,y) 组成的一个集合叫做一个关系, 记作 $\mathcal{R}$. 通常我们也将决定 $\mathcal{R}$ 的性质记作 $\mathcal{R}$. 注意到 (x,y) 是有顺序的, 于是由定义和约定我们有: $(x,y)\in\mathcal{R}$ 当且仅当 x 通过 $\mathcal{R}$ 联系着 y, 此事记作

$$(x,y)\in\mathcal{R} \iff x\mathcal{R}y.$$

注意: 逻辑上看, 从 $(x,y)\in\mathcal{R}$ 未必推出 $(y,x)\in\mathcal{R}$, 虽然后者有些时候成立.

当 x,y 都取自同一集合 X 或同一个类 X 时, 也称 $\mathcal{R}$ 是 X 上的一个关系. □

在下面的例子中 X 分别是直线的全体, 实数的全体, 所有集合的全体【注：这里“全体”是为了避免“所有集合的集合”】.

直线间的平行关系 $\mathcal{R}: //$, 实数间的大小关系 $\mathcal{R}:\le$, 集合间的包含关系 $\mathcal{R}:\subset$, 这三个关系具有以下两个共性(i),(ii)：

(i) **反身性**：$a\mathcal{R}a$ 恒成立.

(ii) **传递性**：若 $a\mathcal{R}b$ 且 $b\mathcal{R}c$, 则 $a\mathcal{R}c$.

此外平行关系 $//$ 还满足

(iii) **对称性**：若 $a\mathcal{R}b$ 则 $b\mathcal{R}a$.

而大小关系 $\le$ 和包含关系 $\subset$ 还满足

(iv) **反对称性**：若 $a\mathcal{R}b$ 且 $b\mathcal{R}a$, 则 $a=b$.

• **等价关系**：X 上的一个关系 $\mathcal{R}$ 若满足反身性、对称性、和传递性, 则称之为 X 上的一个等价关系.

• **偏序关系**：X 上的一个关系 $\mathcal{R}$ 若满足反身性、传递性、和反对称性, 则称之为 X 上的一个偏序关系.

• **全序关系**：若 $\mathcal{R}$ 是 X 上的一个偏序关系并且满足

(v) 对任意 $a,b\in X$, 要么 $a\mathcal{R}b$ 成立, 要么 $b\mathcal{R}a$ 成立, 没有例外.

则称 $\mathcal{R}$ 是 X 上的一个全序关系. 此时也称X (关于关系$\mathcal{R}$) 是一个全序集.

例如平行关系 // 是一个等价关系但不是偏序关系（因不具有反对称性）, 而实数的大小关系 $\leq$ 和集合的包含关系 $\subset$ 都是偏序关系, 但都不是等价关系 (因不具有对称性）, 此外实数的大小关系 $\leq$ 是全序关系, 但集合的包含关系 $\subset$ 不是全序关系.

注意：以上 (i),(ii), (iii), (iv), (v) 中, 只有 (i),(v) 要求恒成立, 其它都是假言命题!

提问：同一集合中元素间的相等 “ =” 属于什么关系？

作业题. (1) 在 xy- 平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义关系 $\leq$ 如下：

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2,\ y_1 \leq y_2.$$

证明 $\leq$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个偏序关系但不是全序关系.

(2) 设 L 是 xy- 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一条斜率大于 0 的直线. 将 (1) 中的偏序关系 $\leq$ 限制在 L 上, 证明 $\leq$ 是 L 上的一个全序关系.

又问：一般地, 对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任一条直线, 如何在其上定义全序关系?

(3) 设实数集合 $\mathbb{R}$ 上的关系 $\sim$ 定义为 $x \sim y \Longleftrightarrow x - y$ 是有理数. 证明 $\sim$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系.

2. 函数关系和函数图象, 见书或课堂演示

§1.8 关于自然数集 $\mathbb{N}$, 整数集$\mathbb{Z}$ 和有理数集$\mathbb{Q}$

逻辑链是这样的: 首先确立自然数集$\mathbb{N}$(即正整数集) 并建立运算法则, 大小顺序, 然后建立整数集$\mathbb{Z}$和有理数集$\mathbb{Q}$，其中给出运算法则和大小序关系. 最后将确界原理作为公理就可以建立完备的有序数集— 实数集$\mathbb{R}$. 有了实数集再结合选择公理便得到整个分析数学的最基础部分. 由此可见, 自然数集$\mathbb{N}$的确立及其算数结构和序结构是整个分析数学的基础的基础.

【自然数集$\mathbb{N}$的公理化定义】存在一个集合$\mathbb{N}$ 和它的一个元素$1 \in \mathbb{N}$ (称为起始元), 具有下列性质: 存在一个映射$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (称为后继映射)满足下列**(a)**,**(b)**,**(c)**:

(a) $1 \notin S(\mathbb{N})$.

(b) S 是单射.

(c) 若$\mathbb{N}$的子集$M \subset \mathbb{N}$ 满足以下条件(i),(ii):

(i) $1 \in M$; (ii) 对任意$n \in \mathbb{N}$, 若$n \in M$ 则$S(n) \in M$.

则$M = \mathbb{N}$.

我们称这样的集合$\mathbb{N}$为自然数集. $\Box$

【注】上述性质**(c)** 就是常用的**第一数学归纳法原理**. 这同时说明**第一数学归纳法原理**是自然数集公理化定义中要求成立的性质, 因此可以看成是公理(自然数系统中的公理).

为了熟悉自然数集的上述定义, 我们看它的一个应用:

【命题】我们有

$$\{1\} \cup S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \qquad \text{即} \qquad \mathbb{N} \setminus \{1\} = S(\mathbb{N}).$$

【证】令$M = \{1\} \cup S(\mathbb{N})$. 则$M \subset \mathbb{N}$ 且$1 \in M$. 而对任意$n \in \mathbb{N}$, 若$n \in M$, 则$S(n) \in S(M) \subset S(\mathbb{N}) \subset M$. 所以由自然数集的定义知$M = \mathbb{N}$. $\Box$

【自然数集$\mathbb{N}$中加法的定义】在$\mathbb{N}$中我们用下面关系式**(a)**,**(b)** 归纳地定义加法“+”运算

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (n, m) \mapsto n + m \in \mathbb{N} : \qquad \text{(称 } n + m \text{ 为} n \text{与} m \text{的和)}$$

(a) 对任意$n\in\mathbb{N}$, 定义$n+1=S(n)$.

(b) 对任意$n,m\in\mathbb{N}$, 定义$n+S(m)=S(n+m)$. $\square$

需要证明上述"+"是良好确定的.

【**命题**】上面定义的$\mathbb{N}$中的加法运算"+"是良好确定的(well-defined), 即对任意$n,m\in\mathbb{N}$, 加法$n+m$ 由(n,m) 唯一确定且属于$\mathbb{N}$.

【证】任意取定$n\in\mathbb{N}$, 令

$$M_n=\{m\in\mathbb{N}\mid n+m \text{ 由 } (n,m) \text{ 唯一确定且属于 } \mathbb{N}\}.$$

只需证明$M_n=\mathbb{N}$. 由$n+1=S(n)$知 $1\in M_n$. 对任意$m\in\mathbb{N}$, 假设$m\in M_n$, 则由M_n的定义知$n+m$ 由(n,m) 唯一确定且属于$\mathbb{N}$. 于是由我们的加法的定义知$n+S(m)=S(n+m)$ 属于$\mathbb{N}$ 且由(n,m)唯一确定. 但S是单射，故$n+S(m)$也是由$(n,S(m))$唯一确定的 【细: 若有$\widetilde{m}\in\mathbb{N}$ 使得$(n,S(\widetilde{m}))=(n,S(m))$, 则$S(\widetilde{m})=S(m)$. 这蕴含$\widetilde{m}=m$ 从而有$n+S(\widetilde{m})=n+S(m)$.】所以$S(m)\in M_n$. 据自然数集的定义知$M_n=\mathbb{N}$. $\square$

【**命题**】$\mathbb{N}$ 中的加法"+"运算满足**结合律**和**交换律**, 即对任意$a,b,c\in\mathbb{N}$ 有

$$(a+b)+c=a+(b+c),\qquad a+b=b+a.$$

【证】先证结合律. 任取$a,b\in\mathbb{N}$. 令

$$M_{a,b}=\{c\in\mathbb{N}\mid (a+b)+c=a+(b+c)\}.$$

只需证明$M_{a,b}=\mathbb{N}$.

由$(a+b)+1=S(a+b)=a+S(b)=a+(b+1)$ 知$1\in M_{a,b}$. 对任意$n\in\mathbb{N}$, 假设$n\in M_{a,b}$. 则有我们的加法的定义有

$$(a+b)+S(n)=S((a+b)+n)=S(a+(b+n))=a+S(b+n)=a+(b+S(n)).$$

所以$S(n)\in M_{a,b}$. 据自然数集的定义知$M_{a,b}=\mathbb{N}$.

其次来证交换律. 先证明对任意$n\in\mathbb{N}$ 有$n+1=1+n$, 也即证明$1+n=S(n)$. 令

$$M=\{n\in\mathbb{N}\,|\,1+n=S(n)\}.$$

要证$M=\mathbb{N}$. 易见$1\in M$. 对任意$n\in\mathbb{N}$, 假设$n\in M$. 则由我们的加法定义有

$$1+S(n)=S(1+n)=S(S(n)).$$

所以$S(n)\in M$. 据自然数集的定义知$M=\mathbb{N}$.

任取$n\in\mathbb{N}$. 令

$$M_n=\{m\in\mathbb{N}\,|\,n+m=m+n\}.$$

只需证明$M_n=\mathbb{N}$. 由上面结果知$1\in M_n$. 对任意$m\in\mathbb{N}$, 假设$m\in M_n$. 则由加法的定义, $n+1=1+n$, 和结合律有

$$\begin{aligned}n+S(m)&=S(n+m)=S(m+n)=m+S(n)\\&=m+(n+1)=m+(1+n)=(m+1)+n=S(m)+n.\end{aligned}$$

所以$S(m)\in M_n$. 据自然数集的定义知$M_n=\mathbb{N}$. $\square$

定义了加法后, 我们可以重述第一数学归纳法原理

【第一数学归纳法原理】设 $P(n)$ 是一个与自然数$n\in\mathbb{N}$ 有关的命题或性质. 假设 P 满足以下 (i)-(ii):

(i) $P(1)$ 成立; (ii) 对任意$n\in\mathbb{N}$, 若$P(n)$ 成立, 则 $P(n+1)$也成立.

那么 $P(n)$ 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立.

【证】令$M=\{n\in\mathbb{N}\,|\,P(n)\text{ 成立}\}$. 只需证明$M=\mathbb{N}$. 易见$1\in M\subset\mathbb{N}$. 对任意$n\in\mathbb{N}$, 假设$n\in M$, 即$P(n)$ 成立, 则由归纳假设知$P(n+1)$也成立, 因此$S(n)=n+1\in M$. 据自然数集的定义知$M=\mathbb{N}$. $\square$

【自然数集$\mathbb{N}$中的大小顺序】设$n,m\in\mathbb{N}$. 若存在$k\in\mathbb{N}$ 使得$n+k=m$. 则称n小于m或m大于n, 记作$n<m$ 或$m>n$. 此外我们用$n\le m$ 表示$n<m$ 或$n=m$. 同样, $m\ge n$表示$m>n$ 或$m=n$. $\square$

【命题】自然数集$\mathbb{N}$关于大小顺序"$\le$"是一个全序集, 即

反身性: 对任意$a\in\mathbb{N}$, 恒有$a\le a$. （实为$a=a$.）

传递性: 对任意$a,b,c\in\mathbb{N}$, 若$a\le b$ 且$b\le c$, 则$a\le c$.

反对称性: 对任意$a, b \in \mathbb{N}$, 若$a \leq b$ 且$b \leq a$, 则$a = b$.

三歧性: 对任意$a, b \in \mathbb{N}$, 三者$a < b$, $a = b$, $a > b$ 中有且只有一个出现.

特别有: $a \neq b \iff a < b$ 或$a > b$.

此外有: 后继映射S 是保序的, 即对任意$a, b \in \mathbb{N}$ 有

$$a < b \iff S(a) < S(b).$$

【证】反身性是显然的.

传递性: 设$a \leq b$ 且$b \leq c$. 为证$a \leq c$, 可以假设$a < b$ 且$b < c$. 由"$<$"的定义知存在$h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ 使得$a + h_1 = b, b + h_2 = c$. 因$h_1 + h_2 \in \mathbb{N}$, 于是有$a + (h_1 + h_2) = (a + h_1) + h_2 = b + h_2 = c$. 因此$a < c$.

注: 从上面证明我们实际上还证得了**严格的传递性**, 即

$$\text{若 } a < b,\ b \leq c \ \text{ 或 } \ a \leq b,\ b < c, \quad \text{则有 } \ a < c.$$

为证其余性质, 先证明

$$\text{对任意 } n \in \mathbb{N} \text{ 有 } n \neq n + 1. \tag{$*$}$$

当$n = 1$ 时, 由$1 \notin S(\mathbb{N})$ 有$1 \neq S(1) = 1 + 1$. 设$n \neq n + 1$. 则由S为单射有$n + 1 = S(n) \neq S(n + 1) = (n + 1) + 1$. 据归纳法原理知$(*)$ 成立.

来证明

$$\text{对任意 } n, m \in \mathbb{N}, \quad \text{若 } n < m, \text{ 则 } n \neq m. \tag{$**$}$$

考虑集合

$$M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{对任意} \, k \in \mathbb{N} \, \text{有} \ n \neq n + k\}.$$

据不等号"$<$"的定义可知为证$(**)$, 只需证明$M = \mathbb{N}$.

由$(*)$ 知$1 \in M$. 假设$n \in M$. 则由加法的定义和S为单射知对任意$k \in \mathbb{N}$ 有$n + 1 = S(n) \neq S(n + k) = (n + k) + 1 = (n + 1) + k$. 所以$n + 1 \in M$. 据自然数集的定义知$M = \mathbb{N}$. 这证明了$(**)$成立.

反对称性: 设$a \leq b$ 且$b \leq a$. 反证法: 假设$a \neq b$. 则有$a < b$ 且$b < a$. 则由上面证明的严格的传递性知$a < a$, 从而由$(**)$ 知应有$a \neq a$, 矛盾. 这矛盾证明了必有$a = b$.

在证三歧性之前, 先证后继映射S的保序性. 设$a, b \in \mathbb{N}$. 假设$a < b$. 则存在$h \in \mathbb{N}$使得$a + k = b$. 这给出$S(b) = S(a + k) = S(k + a) = k + S(a) > S(a)$. 反之假设$S(a) < S(b)$. 则存在$h \in \mathbb{N}$ 使得$S(a)+h = S(b)$ 从而得到$S(a+h) = S(a)+h = S(b)$. 因S 是单射,故$a + h = b$. 因此$a < a + h = b$.

最后证明三歧性. 考虑集合

$$M_k = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \le k \text{ 或 } n > k\}, \quad k \in \mathbb{N}; \qquad M = \{k \in \mathbb{N} \,|\, M_k = \mathbb{N}\}.$$

来证明

$$M = \mathbb{N}.$$

易见$1 \in M$ 即$M_1 = \mathbb{N}$. 事实上对任意$n \in \mathbb{N}$, 若$n = 1$ 则$n = 1 \le 1$ 从而$n \in M_1$; 若$n \ne 1$, 则$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} = S(\mathbb{N})$ 因而存在$m \in \mathbb{N}$使得$n = S(m) = m + 1 = 1 + m > 1$, 即此时也有$n \in M_1$. 所以$M_1 = \mathbb{N}$.

对任意$k \in \mathbb{N}$, 假设$k \in M$, 即$M_k = \mathbb{N}$. 则对任意$n \in \mathbb{N}$ 有$n \le k$ 或$n > k$. 若是$n \le k$, 则有$n < k + 1$ (因$k < k + 1$) 从而$n \in M_{k+1}$; 若是$n > k$, 则存在$m \in \mathbb{N}$使得$k + m = n$. 当$m = 1$ 时$n = k + 1 \in M_{k+1}$; 当$m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} = S(\mathbb{N})$ 时, 存在$h \in \mathbb{N}$使得$m = S(h) = h + 1$. 于是有$n = k + (h + 1) = (k + 1) + h > k + 1$ 从而有$n \in M_{k+1}$. 总之有$n \in M_{k+1}$. 所以$M_{k+1} = \mathbb{N}$ 也即$k + 1 \in M$. 据自然数集的定义知$M = \mathbb{N}$.

根据这一关系式易证三歧性: 任取$a, b \in \mathbb{N}$. 由$M = \mathbb{N}$ 知$M_b = \mathbb{N}$. 因此$a \in M_b$, 即有$a \le b$ 或者$a > b$, 也即有$a < b$ 或者$a = b$ 或者$a > b$. 而由(**)和严格传递性易知这三种情形只能有一种出现. 这就完成了命题的证明. $\square$

后继映射的单射性和保序性可以推广到一般平移的单射性和保序性:

【命题(平移的单射性和保序性)】设$a, b \in \mathbb{N}$. 则有下面等价关系:

$$a = b \iff \text{对任意 } c \in \mathbb{N} \text{ 有 } a + c = b + c \iff \text{存在 } c \in \mathbb{N} \text{ 使得 } a + c = b + c.$$

$$a < b \iff \text{对任意 } c \in \mathbb{N} \text{ 有 } a + c < b + c \iff \text{存在 } c \in \mathbb{N} \text{ 使得 } a + c < b + c.$$

$$a \le b \iff \text{对任意 } c \in \mathbb{N} \text{ 有 } a + c \le b + c \iff \text{存在 } c \in \mathbb{N} \text{ 使得 } a + c \le b + c.$$

【证】先证等式的情形. 若$a = b$, 则显然对任意c 都有$a + c = b + c$. 为证反向蕴含关系(即平移的单射性), 只需证明: 若存在$c \in \mathbb{N}$ 使得$a + c = b + c$, 则必有$a = b$. 反证法,

假设$a \neq b$. 则可设$a < b$. 据"$<$"的定义, 存在$k \in \mathbb{N}$ 使得$a+k=b$. 于是有

$$a+c < a+c+k = a+k+c = b+c \Longrightarrow a+c < b+c, \quad \text{与 } a+c=b+c \text{ 矛盾}.$$

因此必有$a=b$.

其次证严格不等式的情形. 设$a < b$. 令

$$M_{a,b} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, a+n < b+n\}.$$

来证$M_{a,b} = \mathbb{N}$. 由$a+1 = S(a) < S(b) = b+1$ 知$1 \in M_{a,b}$. 假设$n \in M_{a,b}$. 则有$a+n+1 = S(a+n) < S(b+n) = b+n+1$ 即$n+1 \in M_{a,b}$. 据归纳法原理知$M_{a,b} = \mathbb{N}$.

反之假设存在$c \in \mathbb{N}$ 使得$a+c < b+c$. 来证明$a < b$. 由假设知存在$k \in \mathbb{N}$ 使得$a+c+k = b+c$, 即$a+k+c = b+c$. 由上面结果(平移的单射性)知$a+k=b$. 因此$a < a+k = b$.

同理可证"$\leq$"的情形. $\Box$

【自然数中的减法】对任意$n, m \in \mathbb{N}$ 满足$n < m$, 由前面结果知存在唯一的$k \in \mathbb{N}$ 使得$n+k=m$. 对此k 我们记$k = m-n$ 并把它叫做n与m的减法, 称m为减数, n为被减数. 据唯一性知$k = m-n$由$(n,m)(n<m)$ 唯一确定, 因此是良定的. $\Box$

【相邻自然数】由不等式的传递性易见若$n, m \in \mathbb{N}$ 且$m > n$, 则至少有$m \geq n+1$. 事实上由$m > n$ 知存在$k \in \mathbb{N}$ 使得$m = n+k$, 从而得到$m = n+k \geq n+1$. 据传递性知$m \geq n+1$. 从这一性质易见对任意自然数n, 在n 和$n+1$ 之间没有自然数, 即不存在$m \in \mathbb{N}$ 使得$n < m < n+1$. 【否则, 设对某个n, 如此的m存在, 则得到$n+1 > m \geq n+1 \Longrightarrow n+1 > n+1 \Longrightarrow n+1 \neq n+1$, 矛盾.】

根据这一特性, 我们把n 和$n+1$ 叫做一对相邻自然数. $\Box$

按惯例, 我们记$S^1(\cdot) = S(\cdot)$. 根据自然数集$\mathbb{N}$的上述性质我们现在可以联系常用的阿拉伯数字记号(10 进制)：由加法的定义和交换律等我们依次有

$$2 := 1+1 = S(1), \qquad 3 := 2+1 = S(2) = S(S(1)) = S^{1+1}(1) = S^2(1),$$

$$4 := 3+1 = S(3) = S(S^2(1)) = S^{1+2}(1) = S^3(1), \;......$$

$$10 = 9+1 = S(9) = S^9(1), \quad 11 = 10+1 = S(10) = S^{10}(1), ...\,.$$

用归纳法易证

$$n = S^{n-1}(1), \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

根据$\mathbb{N}$的序性质和后继映射S的保序性, 我们有

$$1 < S(1) < S(S(1)) = S^2(1) \cdots < S^n(1) < \cdots,$$

也即

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n < n+1 < \cdots.$$

因为每个自然数$n \geq 2$ 都可表示成$S^k(1)(k \in \mathbb{N})$的形式, 故上述排列列出了所有自然数. 于是我们可以写

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

一般地对任意$m \in \mathbb{N}$, 我们定义

$$\{1, 2, ..., m\} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq m\}.$$

【加法与“个数”的概念】让我们联系实际：

自然数中的起始元1 可以表示任何“一”个东西(如 一张纸, 一个苹果, 一次试验,...).

加上一次1, 则$2 = 1 + 1$ 就表示任何“两”个东西(如一张纸与另一张纸, 一张纸与一个苹果, 一个苹果与一次试验, ...).

再加上一次1, 则$3 = 2 + 1$ 就表示任何“三”个东西(如 两张纸与另外一张纸, 一张纸与一个苹果再与一次试验, 一个苹果与一次试验再与一架飞机, ...), 等等.

由此可见, 每个自然数$n \in \{1, 2, 3, ...\}$ 对应于任意这样的集合：该集合里的元素的“个数”等于n. 因此也可以说, 每个自然数n实际上是具有同一共性的集合类, 这个**共性**就是“集合的元素的个数都等于n”. 我们接受这个事实而不做深入分析了, 只是留下一个思考题:

有人说：“个数”这概念客观存在且与自然数概念实质上是一回事, 后者只是前者的一种表述. 你怎么看？

【第二数学归纳法原理】设 $M \subset \mathbb{N}$ 具有如下性质 (i)-(ii):

(i) $1 \in M$. (ii) 对任意$n \in \mathbb{N}$, 若$1, 2, ..., n \in M$, 则 $n + 1 \in M$.

则 $M=\mathbb{N}$.

【证】我们将利用第一数学归纳法原理. 令

$$E=\{n\in\mathbb{N}\,|\,\{1,2,...,n\}\subset M\}.$$

先证明 $E=\mathbb{N}$. 由假设 (i) 知 $1\in E$. 假设 $n\in E$, 则由 E 的定义有 $\{1,2,...,n\}\subset M$ 从而由假设 (ii) 得知 $n+1\in M$. 于是 $\{1,2,...,n,n+1\}\subset M$. 因此 $n+1\in E$. 据数学归纳法原理I知 $E=\mathbb{N}$.

现在证明 $M=\mathbb{N}$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 由 $\mathbb{N}=E$ 知 $n\in E$ 故有 $\{1,2,...,n\}\subset M$ 特别有 $n\in M$. 所以 $\mathbb{N}\subset M$. 但已有 $M\subset\mathbb{N}$, 所以 $M=\mathbb{N}$. □

第二数学归纳法原理也可表述成如下常用的形式:

【第二数学归纳法原理】设 $P(n)$ 是一个与 $n\in\mathbb{N}$ 有关的命题或性质. 假设 P 满足以下 (i)-(ii):

(i) $P(1)$ 成立.

(ii) 若$n\in\mathbb{N}$使得$P(k)$ 对所有$k=1,2,...,n$ 成立, 则 $P(n+1)$也成立.

那么 $P(n)$ 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立.

【证】令$M=\{n\in\mathbb{N}\,|\,P(n)\text{成立}\}$. 则由原理中的假设有: $1\in M$. 而对任意$n\in\mathbb{N}$, 假若$\{1,2,...,n\}\subset M$, 即$P(k)$对一切$k=1,2,...,n$成立, 则$P(n+1)$也成立, 也即$n+1\in M$. 这说明M 满足上述第二数学归纳法原理中的条件. 因此必有$M=\mathbb{N}$, 也即$P(n)$ 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立. □

【自然数集的良序原理(最小数原理)】自然数集合的任何非空子集必有最小元.

即若$S\subset\mathbb{N}$ 非空, 则存在$m\in S$ 使得对所有$n\in S$ 都有$m\le n$.

【证】设$S\subset\mathbb{N}$ 非空. 反证法, 假设S 没有最小元. 则由1是最小自然数知$1\not\in S$. 令

$$T=\{n\in\mathbb{N}\,|\,\text{对每个}\,m\in S\text{ 都有}\,n<m\}.$$

则有$1\in T$. 假设$n\in T$. 来证$n+1\in T$. 否则$n+1\not\in T$, 则存在$m_0\in S$ 使得$n+1\ge m_0$. 另一当面由$n\in T$ 知对每个$m\in S$ 都有$n+1\le m$. 因此对每个$m\in S$ 都有$m_0\le n+1\le m$. 这蕴含m_0是S的最小元, 与S 没有最小元矛盾. 所以

必有$n+1\in T$. 据归纳法原理知$T=\mathbb{N}$. 这特别蕴含$S\subset T$. 但S非空, 取一元素$m\in S$便有$m\in T$ 从而产生矛盾: $m<m$. 这矛盾证明了S 必有最小元. $\square$

自然数集的最小数原理是一个关于自然数性质的最好用的原理, 我们会通过很多性质的证明看到这一点.

【自然数集$\mathbb{N}$中乘法的定义】在$\mathbb{N}$中我们用下面关系式**(a),(b)** 归纳地定义乘法法"$\cdot$"运算(也记作"$\times$")

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ni(n,m)\mapsto n\cdot m\in\mathbb{N}: \qquad (\text{称}\, n\cdot m\, \text{为}n\text{与}m\ \text{的乘积})$$

(a) 对每个$n\in\mathbb{N}$, 定义$n\cdot 1=n$.

(b) 对每一对$n,m\in\mathbb{N}$, 定义$n\cdot(m+1)=n\cdot m+n$. $\square$

【命题】上面定义的$\mathbb{N}$中的乘法运算"$\cdot$"是良好确定的, 即对任意$n,m\in\mathbb{N}$, 乘积nm由(n,m) 唯一确定且属于$\mathbb{N}$. 并且乘法满足结合律和交换律, 乘法与加法满足分配率, 即对任意$a,b,c\in\mathbb{N}$ 有

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\quad a\cdot b=b\cdot a,\quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

【证】先证命题的第一部分. 只需证明对任意$n\in\mathbb{N}$ 都有$M_n=\mathbb{N}$, 其中

$$M_n=\{m\in\mathbb{N}\mid n\cdot m\ \text{由}\ (n,m)\ \text{唯一确定且属于}\ \mathbb{N}\}.$$

由乘法规定(a)知$n\cdot 1=n$知$1\in M_n$. 对任意$m\in\mathbb{N}$, 假设$m\in M_n$, 则由M_n的定义知$n\cdot m$ 由(n,m) 唯一确定且属于$\mathbb{N}$. 于是由乘法的规定(b)和已证的加法的性质可知$n\cdot(m+1)=n\cdot m+n$ 属于$\mathbb{N}$ 且也是由(n,m)唯一确定的. 但$m\mapsto m+1$是单射, 故$n\cdot(m+1)$也是由$(n,m+1)$唯一确定的. 所以$m+1\in M_n$. 据自然数集的定义(或数学归纳法原理) 知$M_n=\mathbb{N}$.

第二部分的证明留为<u>**作业题**</u>**(见陈书习题1.7.9.)**. $\square$

【整数集$\mathbb{Z}$和整数加法乘法的定义】

(a) 零元, 负元和整数: 在$\mathbb{N}$之外确定一个元素0, 称之为零元; 而对每个$n \in \mathbb{N}$, 在$\mathbb{N} \cup \{0\}$之外确定一个元素$-n$, 称之为n的负元. 称集合

$$\mathbb{Z} = \{n, 0, -n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

为整数集合, 它的元素称为整数.

(b) $\mathbb{Z}$中加法和乘法的定义:

$$n+m = \begin{cases} n+m & \text{若} \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \\ n & \text{若} \quad m = 0 \\ m & \text{若} \quad n = 0 \\ n-k & \text{若} \quad n \in \mathbb{N}, m = -k, k \in \mathbb{N}, n > k \\ 0 & \text{若} \quad n \in \mathbb{N}, m = -n \\ -(k-n) & \text{若} \quad n \in \mathbb{N}, m = -k, k \in \mathbb{N}, n < k \\ m-k & \text{若} \quad m \in \mathbb{N}, n = -k, k \in \mathbb{N}, m > k \\ 0 & \text{若} \quad m \in \mathbb{N}, n = -m \\ -(k-m) & \text{若} \quad m \in \mathbb{N}, n = -k, k \in \mathbb{N}, m < k \\ -(k+l) & \text{若} \quad n = -k, m = -l,\ k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$n \cdot m = \begin{cases} n \cdot m & \text{若} \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{若} \quad n = 0 \text{ 或 } m = 0 \\ -n \cdot k & \text{若} \quad n \in \mathbb{N}, m = -k, k \in \mathbb{N} \\ -k \cdot m & \text{若} \quad n = -k, k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \\ k \cdot l & \text{若} \quad n = -k, m = -l,\ k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(c) $\mathbb{Z}$中序"$<$"的定义: 设$m, n \in \mathbb{Z}$. 若存在$k \in \mathbb{N}$ 使得$n + k = m$, 则称n小于m, 记作即$n < m$. [例如当$n \in \mathbb{N}$时, 由$0 + n = n$ 和$(-n) + n = 0$ 分别可知$0 < n, -n < 0$.] 如前我们用$n \leq m$ 表示$n < m$ 或者$n = m$. $\square$

【说明】可能有同学会问, 上面给出的加法和乘法的定义为何那么复杂? 以前没见过, 它可靠吗? 对此问题, 解答很简单: 只要回忆映射的概念: **任何映射都是点点定义的! 即只要这映射在其定义域中的每一点都被定义好了, 那么这映射就在其定义域**

上被定义好了. 例如令$f(a,b)=a+b, g(a,b)=a\cdot b, (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, 则按照上面方式, f 和g 在$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上就被处处定义好了(只不过不是以公式的方式定义的). $\square$

在现代数学中, 乘法的记号也常用空字表示, 即

$$ab=a\cdot b.$$

有了整数集$\mathbb{Z}$ 后, 人们也把自然数叫做正整数, 自然数集$\mathbb{N}$ 叫做正整数集. 不难证明整数集$\mathbb{Z}$ 具有自然数集$\mathbb{N}$的上述所有性质, 即$\mathbb{Z}$中的加法和乘法满足结合律、交换律、分配律, 不等式"$<$"满足三歧性、平移保序性、正倍数保序性等等.

例如我们以正倍数保序性为例给出证明. 设$a,b\in\mathbb{Z}, c\in\mathbb{N}$. 则有

$$a<b \iff b-a>0 \iff ca<cb.$$

事实上第一个"$\Longleftrightarrow$"是显然的. 看"$\Longleftrightarrow$": 假设$b-a>0$. 则$k:=b-a\in\mathbb{N}$ 从而有$cb-ca=c(b-a)=ck\in\mathbb{N}$ 因此$cb-ca>0$. 于是由第一个等价关系知$ca<cb$. 反之, 设$ca<cb$, 则由第一个等价关系知$c(b-a)=cb-ca>0$.根据乘法的定义和$c\in\mathbb{N}$易见$k:=b-a\in\mathbb{N}$. 因此$b-a>0$. $\square$

- 有理数集$\mathbb{Q}$.

【有理数集$\mathbb{Q}$和其中加法乘法的定义】在$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$上引进等价关系$\sim$:

$$(m,n)\sim(m_1,n_1) \iff mn_1=m_1n.$$

【待续或见陈书第二章后面补充教材】

§1.9 最小数原理的应用: 归纳法原理和离散操作程序.

这里我们补充几个今后常用的性质. 首先介绍关于有界归纳法原理.

【第一有界归纳法原理】: 设 $P(n)$ 是一个与 $n \in \{1, 2, ..., N\}(N \ge 2)$ 有关的命题. 假设 P 满足以下 (i)-(ii):

(i) $P(1)$ 成立. (ii) 若$1 \le n \le N-1$且$P(n)$ 成立, 则 $P(n+1)$ 成立.

那么 $P(n)$ 对一切 $n \in \{1, 2, ..., N\}$ 成立. $\square$

【第二有界归纳法原理】: 设 $P(n)$ 是一个与 $n \in \{1, 2, ..., N\}(N \ge 2)$ 有关的命题. 假设 P 满足以下 (i)-(ii):

(i) $P(1)$ 成立. (ii) 若 $1 \le n \le N-1$ 且 $P(k)$ 对于所有 $k = 1, 2, ..., n$ 成立, 则 $P(n+1)$ 成立.

那么 $P(n)$ 对一切 $n \in \{1, 2, ..., N\}$ 成立. $\square$

作业题: 证明上述两个有界归纳法原理. [建议使用自然数集的最小数原理, 即假设使命题$P(n)$不成的$n \in \{1, 2, ..., N\}$的集合非空, 然后导出矛盾.]

【多重归纳法原理】设 $2 \le q \in \mathbb{N}$, $P(n_1, n_2, ..., n_q)$ 是一个与 $(n_1, n_2, ..., n_q) \in \mathbb{N}^q$ 有关的命题. 假设 P 满足以下 (i)-(ii):

(i) $P(1, 1, ..., 1)$ 成立.

(ii) 对于正整数 $N \ge q$, 若 $P(n_1, n_2, ..., n_q)$ 对于所有满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_q = N$ 的 $(n_1, n_2, ..., n_q) \in \mathbb{N}^q$ 成立, 则 $P(n_1, n_2, ..., n_q)$ 对于所有满足 $n_1+n_2+\cdots+n_q = N+1$ 的 $(n_1, n_2, ..., n_q) \in \mathbb{N}^q$也成立.

那么 $P(n_1, n_2, ..., n_q)$ 对一切 $(n_1, n_2, ..., n_q) \in \mathbb{N}^q$ 成立.

【证】反证法. 假设存在 $(m_1, m_2, ..., m_q) \in \mathbb{N}^q$ 使得 $P(m_1, m_2, ..., m_q)$ 不成立. 令

$$E = \{N \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, (n_1, n_2, ..., n_q) \in \mathbb{N}^q \ \text{ s.t. } n_1+n_2+\cdots+n_q = N \ \text{ 且 } \ P(n_1, n_2, ..., n_q) \ \text{ 不成立}\}.$$

则 $m_1 + m_2 + \cdots + m_q \in E$. 因此 E 非空, 从而有最小元. 令$N_0 = \min E$. 由$N_0 \in E$知存在$(\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2, ..., \widetilde{n}_q) \in \mathbb{N}^q$ 使得$\widetilde{n}_1 + \widetilde{n}_2 + \cdots + \widetilde{n}_q = N_0$且$P(\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2, ..., \widetilde{n}_q)$ 不成立. 显然$N_0 \ge q$, 而由$P(1, 1, ..., 1)$ 成立可知实际上有$N_0 \ge q+1$, 即$N_0 - 1 \ge q$. 同时由 N_0 之

最小性可知$N_0-1\notin E$, 也即 $P(n_1,n_2,...,n_q)$ 对于所有满足 $n_1+n_2+\cdots+n_q=N_0-1$ 的 $(n_1,n_2,...,n_q)\in\mathbb{N}^q$ 成立. 于是由假设 (ii) 知 $P(n_1,n_2,...,n_q)$ 对于所有满足 $n_1+n_2+\cdots+n_q=N_0$ 的 $(n_1,n_2,...,n_q)\in\mathbb{N}^q$ 成立. 但这与 $N_0\in E$ 矛盾. 此矛盾即证明了本命题. $\Box$

归纳法原理的一个应用.

回忆二项式展开定理: 设a,b为实数或复数, n为非负整数. 则有

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

[注意规定$x^0\equiv 1$], 其中

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!},\qquad k=0,1,...,n$$

称为二项组合数.

二项式展开定理也常写成对称形式:

$$(a+b)^n=\sum_{j+k=n}\frac{n!}{j!k!}a^jb^k$$

其中j,k,n均为非负整数.

由此不难证明三项式展开定理:

$$(a+b+c)^n=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}a^ib^jc^k$$

其中i,j,k,n均为非负整数.

一般地运用归纳法原理我们有多项式展开定理(**证明见陈书<u>作业题</u>或习题课**):

$$(a_1+a_2+\cdots+a_p)^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_p!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_p^{k_p}$$

其中$k_1,k_2,...,,k_p,n$均为非负整数. 称系数$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_p!}$为$p$项组合数, 其中$k_1+k_2+\cdots+k_p=n$.

不难看出p项组合数等于$p-1$个二项组合数的乘积, 例如对于三项组合数有

$$\frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}=\frac{(i+j!}{i!j!}\cdot\frac{(i+j+k)!}{(i+j)!k!}=\binom{i+j}{i}\binom{i+j+k}{i+j}.$$

“组合数”这一名称来自于这样的事实: $\binom{n}{k}$等于从n个不同的元素中每次取出k个不同元素的取法的个数. 这首先意味着二项组合数$\binom{n}{k}$是正整数. 根据这一事实和多项组合数与二项组合数的关系即知多项组合数是正整数.

作为二重归纳法原理的应用, 让我们来直接证明二项组合数确实是正整数，也即证明：对所有非负整数n,k 满足$0\le k\le n$, 组合数$\binom{n}{k}$是正整数.

【证】为应用二重归纳法原理, 我们做转换: 设n,k为非负整数满足$0\le k\le n$. 则有

$$\binom{n}{k}=\binom{m+l-2}{l-1}\quad \text{其中}\quad l=k+1,\ m=n+1-k.$$

由于m,l都是正整数, 故为证明二项组合数是正整数, 只需证明

$$\text{若}\ \ (n,k)\in\mathbb{N}^2,\quad \text{则}\quad \binom{n+k-2}{k-1}\in\mathbb{N}.$$

当$(n,k)=(1,1)$ 时,$\binom{n+k-2}{k-1}=\binom{0}{0}=1$ 是正整数. 设 $2\le N\in\mathbb{N}$ 并假设对于所有满足 $n+k=N$ 的 $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, 组合数 $\binom{n+k-2}{k-1}$ 是正整数. 则对任意 $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ 满足 $n+k=N+1$, 若$n=1$, 则$\binom{n+k-2}{k-1}=\binom{k-1}{k-1}=1$; 若$k=1$, 则$\binom{n+k-2}{k-1}=\binom{n-1}{0}=1$; 若$n,k\ge 2$, 则$(n-1,k),(n,k-1)\in\mathbb{N}^2$且$(n-1)+k=n+(k-1)=N$, 因此由归纳假设知

$$\binom{n+k-3}{k-1}=\binom{(n-1)+k-2}{k-1},\qquad \binom{n+k-3}{k-2}=\binom{n+(k-1)-2}{(k-1)-1}$$

都是正整数. 于是由熟知的组合关系式

$$\binom{n+k-2}{k-1}=\binom{n+k-3}{k-1}+\binom{n+k-3}{k-2}$$

即知$\begin{pmatrix} n+k-2 \\ k-1 \end{pmatrix}$是正整数. 据二重归纳法原理, 所证性质成立. $\square$

• **关于离散程序的实施**. 很多时候我们要通过设计一个有限或无限程序来构造一个有限或无限序列. 这个有限或无限程序之能够完成是由归纳法原理保证的：

【关于操作程序的第一归纳法原理】. 设 $P(n)$ 是一个与自然数 n 有关的操作程序的第n步, 它有如下性质 (i)-(ii):

(i) $P(1)$ 可以实施.

(ii) 若$P(n)$ 可以实施, 则$P(n+1)$ 也可实施.

则程序 $P(n)$ 对一切自然数 n 均可实施.

【证】令

$$E=\{n\in\mathbb{N}\,|\ P(n)\ \text{可以实施}\}.$$

要证 $E=\mathbb{N}$. 由假设 (i) 有 $1\in E$. 假设 $n\in E$, 即 $P(n)$ 可以实施. 则由假设 (ii) 知 $P(n+1)$ 也可以实施, 即 $n+1\in E$. 据归纳法原理即得 $E=\mathbb{N}$. $\square$

【关于操作程序的第二归纳法原理】设$P(n)$ 是一个与$n\in\mathbb{N}$ 有关的操作程序的第n步, P^* 是对$P(n)$设定的一个目标. 假设$P(n)$ 与P^* 满足如下 (i)-(ii):

(i) $P(1)$ 可以实施.

(ii) 若$P(n)$可以实施但未达到目标P^*, 则$P(n+1)$仍可实施.

则下列三种情形中必有一种出现:

1° $P(1)$已达到目标P^*.

2° 存在$2\le m\in\mathbb{N}$ 使得程序$P(n)$对所有$n=1,2,...,m$均可实施且当$1\le n\le m-1$时$P(n)$没达到目标P^*, 而$P(m)$达到目标P^*.

3° 程序$P(n)$ 对一切$n\in\mathbb{N}$ 均可实施且总达不到目标P^*.

【证】证法一：假设前两种情况都不出现. 来证明第三种情况出现. 令

$$E=\{n\in\mathbb{N}\,|\ P(n)\ \text{可以实施并且没达到目标}\ P^*\}.$$

由假设条件(i)和第一种情况不出现可知$1\in E$. 假设$n\in\mathbb{N}$ 满足$\{1,2,...,n\}\subset E$. 来证明$n+1\in E$. 首先由$n\in E$ 和假设条件(ii)知$P(n+1)$ 可以实施. 而若$P(n+1)$已达到

目标P^*, 则取$m=n+1$ 便有$\{1,2,...,m-1\}\subset E$ 且$P(m)$已达到目标P^*, 也即第二种情况出现, 这矛盾于第二种情况不出现. 因此必然是$P(n+1)$没达到目标P^*. 这证明了$n+1\in E$. 由数学归纳法原理II 知$E=\mathbb{N}$, 此即第三种情况出现.

证法二：令E 如上.

若$1\notin E$, 则假设条件(i)知$P(1)$已达到目标P^*, 也即第一种情形出现.

又若$E=\mathbb{N}$, 则第三种情形出现.

以下设$1\in E$ 且$E\neq\mathbb{N}$. 此时由$E\subset\mathbb{N}$ 知$\mathbb{N}\setminus E\neq\emptyset$. 据自然数的最小数原理知$m:=\min(\mathbb{N}\setminus E)$存在. 由于$1\in E$, 故必有$m\geq 2$. 根据$m$的最小性易见$\{1,2,...,m-1\}\subset E$. 事实上若存在$n\in\{1,2,...,m-1\}$ 使得$n\notin E$, 则$n\in\mathbb{N}\setminus E$ 从而有$n\geq\min(\mathbb{N}\setminus E)=m$, 它与$n\leq m-1$矛盾. 所以必有$\{1,2,...,m-1\}\subset E$ 成立, 也即当$1\leq n\leq m-1$时$P(n)$可以实施但未达到目标P^*. 特别可知$P(m-1)$ 可以实施并且未达到目标P^*. 于是由假设条件(ii)知$P(m)$可以实施. 但因$m\notin E$, 故必是$P(m)$已达到目标P^*. 这证明了第二种情形出现.

综上, 我们证明了三种情形中必有一种出现. □

【评论】1. 上面第一种证法是一下子就排除了两种情形而转向它们的余集 — 第三种情况形, 感觉上是似乎太逻辑了, 缺少实在性. 相对而言, 第二种证法感觉上比较实在. 但其实检查两种证法后, 发现它们本质上相同, 例如在第一种证法中, 为了证明第三种情况形出现, 需要使用前两种情况形不出现的假设, 也即需要它们的反面信息. 总之, 都要使用三种情形各自的范围.

2. 我们在下面证明“任何无限集都含有一个可数无限子集”以及在建立小数的 q- 进表示时将使用上述关于操作程序的归纳法原理. 学生将看到, 以后在其它很多场合这两个关于操作程序的归纳法原理将被多次使用. 其重要性是明显的：计算机操作只能进行有限步, 但不同的机器, 其操作步长可能不同, 例如 10^8 步或 10^{12} 步. 理论的作用在于保证操作程序可以实施/完成.

【例】设M为$\mathbb{N}$的任一非空子集. 则M的全部元素可以按大小排列. 也即当M 是有限集时, M的全部元素可排成$n_1<n_2<\cdots<n_N$. 而当M 是无限集时, 其元素可排列成$n_1<n_2<n_3\cdots$.

【证】当M为有限集时, 这是上面关于有限数集的一般结果的特例.

设M为无限集. 由非空自然数子集的最小数原理可知下面出现的自然数的子集皆非空因而其最小数存在:

$$
\begin{aligned}
&n_1 := \min M,\\
&n_2 := \min(M \setminus \{n_1\}),\\
&n_3 := \min(M \setminus \{n_1, n_2\}),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&n_k := \min(M \setminus \{n_1, n_2, ..., n_{k-1}\}),\\
&\dots\dots\dots\dots\,.
\end{aligned}
$$

应用归纳操作原理可知上述确定min的过程对每个$k \in \mathbb{N}$均可实施. 于是我们得到了含于M中的子集$\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ 且由min的性质易见$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. 最后只需证明$M = \{n_1, n_2, n_3, ...\}$. 因已有$M \supset \{n_1, n_2, n_3, ...\}$, 故只需证明$M \subset \{n_1, n_2, n_3, ...\}$. 首先由$1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 易见有$n_k \ge k, k = 1, 2, 3, ...$. 任取$m \in M$. 则有$n_m \ge m$. 据此我们断言: $m \in \{n_1, n_2, ..., n_m\}$. 否则, 便有$m \in M \setminus \{n_1, n_2, n_3, ..., n_m\}$ 从而有$m \ge \min(M \setminus \{n_1, n_2, n_3, ..., n_m\}) = n_{m+1} \ge m + 1$, 矛盾. 所以必有$m \in \{n_1, n_2, ..., n_m\}$. 这证明了$M \subset \{n_1, n_2, n_3, ...\}$. 因此$M = \{n_1, n_2, n_3, ...\}$. $\square$

§1.10 集合的基数, 选择公理, 等价类.

• 集合的基数 (势）.

【定义】设 X, Y 为两集合. 若 X, Y 之间存在一个一一对应:

$$f: X \to Y, \quad f^{-1}: Y \to X$$

则称 X 与 Y 有相同的基数或相同的势或 X 与 Y 对等. $\square$

如用 $X \sim Y$ 表示 X 与 Y 对等, 则 $\sim$ 便是集合之间的一个等价关系, 也可说成是由所有集合做成的类上的等价关系.

设 X 为任意集合. 由定义, 凡与 X 对等的集合 (即与 X 等价的集合) 都与 X 有相同的基数. 我们用 $\mathrm{card}X$ 表示所有与 X 对等的集合的这个共同的量, 称为它们的基数. 因此

$$\mathrm{card}X = \mathrm{card}Y \Longleftrightarrow X \sim Y\,.$$

【定义】(有限集与无限集)

若集合 X 满足: 存在自然数 n 使得 $X \sim \{1, 2, ..., n\}$. 则称 X 为一个有限集, 此时也称 X 恰含有 n 个互不相同的元素, 并规定 X 的基数为 n, 即 $\mathrm{card}X = n$. 这时 X 可写成 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 其中 x_i 互不相同. 此外我们规定空集$\emptyset$ 是有限集且$\mathrm{card}\emptyset = 0$.

若集合 X 不是有限集, 则称 X 是一个无限集. $\square$

【命题1 (有限集的基本性质)】

(1) 有限集的子集还是有限集且子集的基数不超过全集的基数.

(2) 有限多个有限集的并还是有限集, 且并集的基数不超过每个基数的和.

(3) 设$X_1, X_2, ..., X_n$ 均为有限集且互不相交. 则

$$\mathrm{card}(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = \mathrm{card}X_1 + \mathrm{card}X_2 + \cdots + \mathrm{card}X_n.$$

【证】(1) 只需考虑非空集合. 设 $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ 为有限集, $A \subset X$ 非空. 令

$$\mathbb{N}_0 = \{k \in \{1, 2, ..., N\} \,|\, x_k \in A\}.$$

则 $\emptyset \neq \mathbb{N}_0 \subset \{1, 2, ..., N\}$. 将 $\mathbb{N}_0$ 的元素按大小排列成 $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_m \, (\le N)$. 则易见$m \le n_m$ 从而$m \le N$, 且有 $A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_m}\}$. 由此可知 A 与 $\{1, 2, ..., m\}$ 对等. 所以 A 是有限集. 因$m \le N$, 这同时证明了 $\mathrm{card}A \le \mathrm{card}X$.

(2) 以两个有限集为例. 多个情形可以借助归纳法原理给予证明(参见(3)的证明). 设 X, Y 为有限集.

先设X, Y不相交. 若X, Y 均非空, 则可写$X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. 则$X \cup Y = \{x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n\} \sim \{1, 2, ..., m, m+1, ..., m+n\}$ 因此$X \cup Y$是有限集且

$$\mathrm{card}(X \cup Y) = m + n = \mathrm{card}X + \mathrm{card}Y.$$

若X, Y中至少有一个为空集, 例如$Y = \emptyset$, 则有$X \cup Y = X$, 且$\mathrm{card}Y = 0$, 从而$\mathrm{card}(X \cup Y) = \mathrm{card}X + \mathrm{card}Y$ 仍成立.

其次设X, Y相交. 则由(1)知子集$Y \setminus X$是有限集. 因X与$Y \setminus X$ 不相交且$X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$, 故$X \cup Y$是有限集且有

$$\mathrm{card}(X \cup Y) = \mathrm{card}(X \cup (Y \setminus X)) = \mathrm{card}X + \mathrm{card}(Y \setminus X) \le \mathrm{card}X + \mathrm{card}Y.$$

(3) 我们对集合个数n 用归纳法. 当$n = 1$ 时无需证明. 当$n = 2$时, 所证等式已在(2)的证明中证明了. 假设个数为$n-1 (\ge 1)$时等式成立. 看n时. 令$S_n = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{n-1}$. 则$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{n-1} \cup X_n = S_n \cup X_n$. 因此由$n = 2$时的一般结果和归纳假设有

$$\mathrm{card}(\bigcup_{k=1}^{n} X_k) = \mathrm{card}(S_n \cup X_n) = \mathrm{card}S_n + \mathrm{card}X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{card}X_k + \mathrm{card}X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}X_k.$$

□

【例】设A 为非空有限集, f为A上的自映射且为单射(即$f: A \to A$且是单射). 则对每个$a \in A$, 存在正整数n 使得$f^n(a) = a$. 这里f^n 是f与自身的n 次复合$f \circ f \circ \cdots \circ f$.

【证】记$N = \mathrm{card}A$. 任取$a \in A$, 考虑迭代: $a, f(a), f^2(a), ..., f^N(a)$. 由$f(A) \subset A$可知$a, f(a), f^2(a), ..., f^N(a)$都属于$A$. 因$N = \mathrm{card}A < N + 1$, 故$a, f(a), f^2(a), ..., f^N(a)$不能互不相同, 否则将导致$A$的子集$\{a, f(a), f^2(a), ..., f^N(a)\}$ 的基数$N + 1$大于A的基数, 矛盾. 记$a = f^0(a)$. 则存在$k, j \in \{0, 1, 2, ..., N\}$, $k \neq j$, 使得$f^k(a) = f^j(a)$. 不妨$k < j$. 令$n = j - k$. 则有

$$f^k(f^n(a)) = f^{k+n}(a) = f^j(a) = f^k(a).$$

因f是单射蕴含$f^k: A\to A$也是单射, 故必有$f^n(a)=a$. $\Box$

【例(鸽笼原理的证明)】设n个非空的有限集$A_1,A_2,...,A_n$互不相交, 设m个互不相同的元素$a_1,a_2,...,a_m\in\bigcup_{k=1}^n A_k$ 且$m>n$. 则存在$k_0\in\{1,2,...,n\}$ 使得A_{k_0} 至少包含$a_1,a_2,...,a_m$中的p 个元素, 其中$p\ge m/n$, 也即

$$\mathrm{card}(A_{k_0}\cap\{a_1,a_2,...,a_m\})\ge\frac{m}{n}.$$

特别有$\mathrm{card}(A_{k_0}\cap\{a_1,a_2,...,a_m\})\ge 2$.

【证】令

$$X_k=A_k\cap\{a_1,a_2,...,a_m\},\quad k=1,2,...,n.$$

则X_k 互不相交且由假设知$\{a_1,a_2,...,a_m\}=\bigcup_{k=1}^n X_k$. 取$k_0\in\{1,2,...,n\}$ 使得

$$\mathrm{card}X_{k_0}=\max_{1\le k\le n}\mathrm{card}X_k.$$

则有

$$m=\mathrm{card}\{a_1,a_2,...,a_m\}=\sum_{k=1}^n\mathrm{card}X_k\le n\,\mathrm{card}X_{k_0}$$

从而有

$$\mathrm{card}X_{k_0}\ge\frac{m}{n}. \qquad \Box$$

【定义】若 X 与 Y 的某个子集 Y_0 对等, 即 $\mathrm{card}X=\mathrm{card}Y_0$. 则称 X 的基数不超过 Y 的基数, 记作 $\mathrm{card}X\le\mathrm{card}Y$ 或 $\mathrm{card}Y\ge\mathrm{card}X$.

若 $\mathrm{card}X\le\mathrm{card}Y$, 但 $\mathrm{card}X\ne\mathrm{card}Y$ (即 X 与 Y 的某个子集对等, 但 X 本身不与 Y 对等), 则称 X 的基数小于 Y 的基数, 记作 $\mathrm{card}X<\mathrm{card}Y$ 或 $\mathrm{card}Y>\mathrm{card}X$. $\Box$

【注】由上述定义易见

$$\mathrm{card}X\le\mathrm{card}Y\iff \text{存在单射 } f:X\to Y.$$

此外有：对任意集合 B 和任意子集 $A\subset B$, 总有 $\mathrm{card}A\le\mathrm{card}B$. 这只需在定义中取 $X=A,Y=B,Y_0=A$.

【基数基本定理 1】. 相等 "=" 关系是集合的基数类 $\{\mathrm{cardX} \,|\, X \text{ is a set}\}$ 上的等价关系. 即

(1) 对任意集合 X 有 $\mathrm{card}X = \mathrm{card}X$.

(2) 若 $\mathrm{card}X = \mathrm{card}Y$ 则 $\mathrm{card}Y = \mathrm{card}X$.

(3) 若 $\mathrm{card}X = \mathrm{card}Y$ 且 $\mathrm{card}Y = \mathrm{card}Z$, 则 $\mathrm{card}X = \mathrm{card}Z$.

【证】只需证 (2),(3): 设 $f : X \to Y$ 是一一对应, 则 $f^{-1} : Y \to X$ 也是一一对应. 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 均为一一对应, 则复合映射 $g \circ f : X \to Z$ 是一一对应. 因此 $\mathrm{card}X = \mathrm{card}Z$. □

在给出基数基本定理 2 之前, 我们先证明两个基本命题.

【命题2】. 若非空集合 $X_1 \sim Y_1, X_2 \sim Y_2$ 且 X_1, X_2 不相交、Y_1, Y_2 不相交, 则

$$X_1 \cup X_2 \sim Y_1 \cup Y_2.$$

【证】设 $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ 分别是一一对应. 令

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if} \quad x \in X_1 \\ f_2(x) & \text{if} \quad x \in X_2 \end{cases}$$

则由 X_1, X_2 不相交和 Y_1, Y_2 不相交可知 $f : X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2$ 是一个映射, 即不会出现 "一对多", 并且是单射, 即不会出现 "多对一". 又显然 f 是满射. 所以 $f : X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2$ 是一一对应. 所以 $X_1 \cup X_2$ 与 $Y_1 \cup Y_2$ 对等. □

【命题3 (Banach 引理)】(集合在映射下的分解定理). 设 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$. 则存在子集 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$ 使得

$$f(A) = B, \quad g(B^c) = A^c.$$

这里 $A^c = X \setminus A$, $B^c = Y \setminus B$.

【注：不排除 A 或 A^c 为空集的可能. 注意: 映射把空集映为空集.】给出文图.

【证】考虑 X 的子集族

$$\Gamma = \{E \,|\, E \subset X \ \text{ s.t. } \ E \cap g(f(E)^c) = \emptyset\}.$$

令

$$A = \bigcup_{E \in \Gamma} E, \quad B = f(A).$$

来证明 $g(B^c)=A^c$ 从而完成证明. 首先证明 $A\in\Gamma$. 事实上

$$\forall\, E\in\Gamma \implies E\subset A \implies f(E)\subset f(A) \implies f(A)^c\subset f(E)^c \implies g(f(A)^c)\subset g(f(E)^c)\,.$$

再由 $E\cap g(f(E)^c)=\emptyset$ 得出 $E\cap g(f(A)^c)=\emptyset$ （空集的子集是还空集). 于是

$$A\cap g(f(A)^c)=\Big(\bigcup_{E\in\Gamma}E\Big)\cap g(f(A)^c)=\bigcup_{E\in\Gamma}E\cap g(f(A)^c)=\emptyset\,.$$

所以 $A\in\Gamma$.

因$B=f(A)$, 故我们证明了 $A\cap g(B^c)=\emptyset$. 因此 $g(B^c)$ 包含在 A 的补集里面, 即 $g(B^c)\subset A^c$. 往证 $A^c\subset g(B^c)$, 即证 $\forall x\in A^c$ 都有 $x\in g(B^c)$. 用反证法：假设存在 $x_0\in A^c$ 使 $x_0\notin g(B^c)$. 作集合 $E_0=A\cup\{x_0\}$. 则

$$\begin{aligned}&A\subset E_0 \implies f(A)\subset f(E_0)\\ &\implies f(E_0)^c\subset f(A)^c \implies E_0\cap g(f(E_0)^c)\subset E_0\cap g(f(A)^c)=E_0\cap g(B^c)=\emptyset\end{aligned}$$

后一等号是因为 $A\cap g(B^c)=\emptyset$ 且 $x_0\notin g(B^c)$. 因此 $E_0\cap g(f(E_0)^c)=\emptyset$. 由 Γ 的定义有 $E_0\in\Gamma$ 从而 $E_0\subset A$. 这导致 $x_0\in A$, 与 $x_0\in A^c$ 矛盾. 此矛盾说明 $A^c\subset g(B^c)$ 必成立. 所以 $A^c=g(B^c)$. $\square$

【注】：若把 X 中满足 $E\cap g(f(E)^c)=\emptyset$ 的子集 E 叫做 X 中的一个隔离集, 则上述证明中的 A 即为 X 中的最大隔离集. Banach 以他高度的抽象能力建立了这个引理, 遂使下面的基数基本定理 2 中的主要性质 (2) 得以较快证明.

【基数基本定理 2】. 集合的基数类 $\{\mathrm{cardX}\,|\,X$ 是集合$\}$ 按照大小关系"$\le$" 是全序的, 也即"$\le$" 是集合的基数类 $\{\mathrm{card}X\,|\,X$ 是集合$\}$ 上的一个全序关系, 也即下列 (1)-(4) 成立：

(1) 对任意集合 X 有 $\mathrm{card}X\le\mathrm{card}X$. (实为相等：$\mathrm{card}X=\mathrm{card}X$.)

(2) 若 $\mathrm{card}X\le\mathrm{card}Y$ 且 $\mathrm{card}Y\le\mathrm{card}X$, 则 $\mathrm{card}X=\mathrm{card}Y$.

[此条为核心性质, 它表示, 若 X 的某个子集与 Y 对等, 而 Y 的某个子集与 X 对等, 则 X 与 Y 对等.]

(3) 若 $\mathrm{card}X\le\mathrm{card}Y$ 且 $\mathrm{card}Y\le\mathrm{card}Z$, 则 $\mathrm{card}X\le\mathrm{card}Z$.

(4) 对任意两个集合 X,Y, 恒有 $\mathrm{card}X\le\mathrm{card}Y$ 或 $\mathrm{card}Y\le\mathrm{card}X$.

【证】第 (1) 条是显然的.

第 (2) 条的证明: 设 card$X \le$ card$Y$ 且 card$Y \le$ card$X$. 则由定义知存在单射 $f: X \to Y$ 和单射 $g: Y \to Z$. 根据上述 Banach 引理, 存在 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$ 使得 $f(A) = B$, $g(B^c) = A^c$. 以下讨论 (所有可能的) 三种情形:

情形 1: 当 $A = \emptyset$ 时, 有$B = \emptyset$, $A^c = X, B^c = Y$, 从而 $g(Y) = X$, 因而 $g: Y \to X$ 为一一对应. 所以 $X \sim Y$.

情形 2: 当 $B^c = \emptyset$ 时, 有 $A^c = \emptyset$, $B = Y, A = X$, 从而 $f(X) = Y$, 因而 $f: X \to Y$ 为一一对应. 所以 $X \sim Y$.

情形 3: 设 $A \neq \emptyset$ 且 $B^c \neq \emptyset$. 则 A^c, B 也均非空. 于是 $f: A \to B$ 和 $g: B^c \to A^c$ 均为一一对应. 因此 $A \sim B, A^c \sim B^c$. 因 $X = A \cup A^c, Y = B \cup B^c$, 故由命题1.4 即知 $X \sim Y$, 也即 card$X$ = card$Y$.

第 (3) 条的证明：由假设, 存在子集 $Y_0 \subset Y$, $Z_0 \subset Z$ 使得 card$X$ = cardY_0, card$Y$ = cardZ_0. 据 card$Y$ = cardZ_0 的定义, 存在一一映射 $f: Y \to Z_0$. 易见限制在 Y_0 上, $f: Y_0 \to f(Y_0)$ 是一一对应, 故 card$f(Y_0)$ = cardY_0. 而由 $f(Y_0) \subset Z_0 \subset Z$ 知 card$f(Y_0) \le$ card$Z$. 因此 card$Y_0 \le$ card$Z$. 即 card$X \le$ card$Z$.

第 (4) 条的证明要用到选择公理 (见后面), 这里不给证明了. □

【注】在基数基本定理2之 (2)的Bernstein 的证明中, Bernstein将(2)转化为下列命题:

$$\text{若 } X \supset Y \supset Z \text{ 且 card}X = \text{card}Z, \text{ 则 card}X = \text{card}Y.$$

事实上假设Bernstein转化的命题成立, 我们来证(2)成立. 假设card$X \le$ card$Y$ 且card$Y \le$ card$X$. 则由“ $\le$ ”的定义知存在单射$f: X \to Y$和单射$g: Y \to X$. 由此有$X \supset g(Y) \supset g(f(X))$. 而再由$f: X \to Y$ 和$g: Y \to X$ 皆为单射易见映射$g \circ f: X \to g(f(X))$是一一对应, 从而有card$X$ = card$g(f(X))$. 于是得到

$$X \supset g(Y) \supset g(f(X)) \quad \text{且} \quad \text{card}X = \text{card}g(f(X)).$$

于是将Bernstein转化的命题应用于$X, g(Y), g(f(X))$ 便有card$X$ = card$g(Y)$. 但显然$g: Y \to g(Y)$是一一对应, 故有card$g(Y)$ = card$Y$, 从而证得card$X$ = card$Y$.

♠ **两类最常用的集合 —— 可数集与不可数集.**

【**定义**】(**可数集与不可数集**) 若集合 X 与自然数集合 $\mathbb{N}$ 一一对应, 即 $\mathrm{card}X = \mathrm{card}\mathbb{N}$, 则称 X 是一个可数无限集. 空集、有限集和可数无限集统称为可数集. 因此 X 是可数集当且仅当 $\mathrm{card}X \le \mathrm{card}\mathbb{N}$. （为什么用“可数”这个名称？）. 若集合 X 不是可数集, 则称 X 是不可数集, 或称X不可数. □

在关于可数集的所有性质中, 下面命题中的性质是最常用也是最好用的. 我们将使用序列的概念(关于序列的定义, 见第二章).

【**命题4**】

(1) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为任一序列. 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必然属于以下两种情形之一：

(I) 存在 $N \in \mathbb{N}$ 和自然数 $1 = n_1 < n_2 < ... < n_N$, 使得 $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_N}$ 互不相同, 而序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的每一项 x_n 都属于 $\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_N}\}$, 从而有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_N}\}$. 换言之, 此时序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为集合是有限集.

(II) 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 其中 x_{n_k} 互不相同 (i.e. $i \ne j \Longrightarrow x_{n_i} \ne x_{n_j}$) 使得序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的每一项 x_n 都属于 $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$, 从而有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...,\}$. 换言之, 此时序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为集合是可数无限集.

(2) 若集合 X 的所有元素可以编号成一序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则 X 是可数集. 【**注意**: x_n 不必互不相同.】

【证】易见(1)蕴含(2). 故只需证明(1).

假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不属于情形 (I). 我们来证明它必属于情形 (II). 注意在这个假设下, 下面出现的自然数的子集均非空, 从而都有最小元.

依次考虑最小元:

$$
\begin{aligned}
& n_1 = 1, \\
& n_2 = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \ne x_{n_1}\}\,, \\
& n_3 = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}\}\}\,, \\
& n_4 = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}\}\}\,, \\
& .... \\
& n_{k+1} = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}\}\,, \\
& ....
\end{aligned}
$$

根据操作程序的归纳法原理, 上述程序对每个自然数 $k \in \mathbb{N}$ 都可施行.

易见上述集合有包含关系：

$$\{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \neq x_{n_1}\} \supset \{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}\}\} \supset \{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}\}\} \supset \cdots.$$

故

$$1 = n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq \cdots.$$

但显然 x_{n_k} 互不相同从而 n_k 互不相同, 因此必有

$$1 = n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots.$$

这表明 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列并且 x_{n_k} 互不相同. 注意 $n_k \geq k$ $(k = 1, 2, ...)$. 任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一项 x_m. 取 $k > m - 1$. 则 $m < k + 1 \leq n_{k+1}$. 断言: $x_m \in \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$. 否则, $x_m \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$, 则由 n_{k+1} 的定义应有 $n_{k+1} \leq m$, 这矛盾于 $m < n_{k+1}$. 这就证明了 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都属于 $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$. 因此作为集合我们有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$. 因后者是可数无限集, 故$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为集合是可数无限集. $\square$

【命题5 (可数集的基本性质)】

(1) 非空集合 X 是可数集当且仅当 X 的元素可以被编号：即

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \qquad \text{当}X\text{是可数无限集时;}$$
$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \qquad \text{当}X\text{是有限集时.}$$

(注意, 以上括号中的元素 x_k 互不相同, 即当 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$.)

(2) 可数集的子集还是可数集.

(3) 可数个可数集的并还是可数集, 即若A_n 是可数集, $n = 1, 2, 3, ..., N$ 或$n \in \mathbb{N}$, 则$\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ 和相应地$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 都是可数集.

(4) 有限多个可数集的乘积集还是可数集, 即若$X_1, X_2, ..., X_N$都是可数集, 则$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ 也是可数集.

【证】(1) 是明显的.

(2). 设 X 是可数集, $A\subset X$. 若 A 是有限集, 则 A 当然是可数集. 设 A 是无限集. 则由命题 1 (利用反证法) 知 X 也是无限集从而 X 是可数无限集. 因此可写 $X=\{x_1,x_2,x_3,...\}$. 令

$$\mathbb{N}_0=\{k\in\mathbb{N}\,|\,x_k\in A\}.$$

则 $\mathbb{N}_0$ 是 $\mathbb{N}$ 的无限子集. 将 $\mathbb{N}_0$ 的元素按大小排列为 $1\le n_1<n_2<n_3<\cdots$. 则有 $A=\{x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},...\}$. 于是由 (1) 知 A 是可数集.

(3) 先假设有可数无限多个A_n 且每个A_n都是可数无限集. 写

$$A_1=\{a_{11},\,a_{12},\,a_{13},\,a_{14},\,...\},$$
$$A_2=\{a_{21},\,a_{22},\,a_{23},\,a_{24},\,...\},$$
$$A_3=\{a_{31},\,a_{32},\,a_{33},\,a_{34},\,...\},$$
$$A_4=\{a_{41},\,a_{42},\,a_{43},\,a_{44},\,...\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

按45° 度角的斜线排法(给图示), 可以将所以元素a_{ij} 排成一列：

$$a_{11},\quad a_{12},a_{21},\quad a_{13},a_{22},a_{31},\quad \cdots\quad a_{1n},a_{2(n-1)},...,a_{i(n-i)},...,a_{n1},\quad \cdots.$$

于是可将$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$的所有元素排成一个序列:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}\qquad \text{(右边的元素中可能有重合者)}.$$

据本节命题4知$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$是可数集.

对于其他情形, 若只有有限多个集合A_n, 则可以添加可数无限多个单点集使成为可数无限多个集合的情形; 而对于某个A_n为有限集的情形, 添加可数无限多个元素于A_n使其成为可数无限集. 因原来的集合的并集是改造后的集合的并集的子集, 故由上面结果知原来的并集也是可数集.

(4) 应用(有界)归纳法原理, 只需证$N=2$的情形. 设X,Y都是可数集. 先设X,Y都是可数无限集: $X=\{x_1,x_2,x_3,...\},Y=\{y_1,y_2,y_3,...\}$. 令

$$A_k=\{(x_k,y_1),(x_k,y_2),(x_k,y_3),...\},\quad k=1,2,3....$$

则每个A_k都与Y一一对应因而是可数无限集. 易见

$$X\times Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$

于是由刚证的性质(3) 知$X\times Y$是可数无限集(无限是显然的).

同理可证当X,Y中一个为可数无限集, 另一个为有限集, 以及两个均为有限集时, $X\times Y$ 也都是可数集. $\square$

【**命题6**】任何无限集都含有一个可数无限子集.

【证】我们将使用操作程序的归纳法原理. 设 X 是一无限集. 首先易见对于X的任何有限子集A, $X\setminus A$非空(否则将推出X是有限集了.)

取 $x_1\in X$. 因$X\setminus\{x_1\}$非空, 故可取出 $x_2\in X\setminus\{x_1\}$.

同理 因$X\setminus\{x_1,x_2\}$非空, 故可取出 $x_3\in X\setminus\{x_1,x_2\}$.

假设已得到互不相同的 $x_1,x_2,...,x_n\in X$, 那么因 $X\setminus\{x_1,x_2,...,x_n\}$非空, 故可取出 $x_{n+1}\in X\setminus\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

根据操作程序的归纳法原理, 我们得到 X 中的一列互不相同的元素 $x_1,x_2,...,x_n,....$ 于是集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,...\}$ 便是 X 的一个可数无限子集. $\square$

【**例**】有理数集$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\,|\,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$ 是可数集. 实数集$\mathbb{R}$ 是不可数集.

【证】令$-\mathbb{N}=\{-n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, 则易见$-\mathbb{N}$是可数集, 因此$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup(-\mathbb{N})$ 是可数集. 令

$$A_n=\left\{\frac{m}{n}\;\Big|\;m\in\mathbb{Z}\right\},\quad n=1,2,3,\dots.$$

则每个A_n都与$\mathbb{Z}$ 对等从而都是可数集. 易见$\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 因此由可数集性质(3)知$\mathbb{Q}$是可数集.

对于“实数集$\mathbb{R}$是不可数集”的证明, 我们在第二章才能给出. 这里提醒同学们到时候回来自己补证这一点. $\square$

• **选择公理：** 设 $\{X\}$ 是由一些非空的互不相交的集合组成的集合族[4]. 那么存在集合 $C \subset \bigcup X$ 使得对于集合族 $\{X\}$ 中的每个成员X, 交集 $C \cap X$ 恰好只含一个元素（即单点集). 通常称交集 $C \cap X$(单点集）的元素称为 X 的代表元, 而称 C为集族 $\{X\}$的代表团. □

• **选择公理(另一形式)：** 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是由一些非空的集合组成的集合族, 满足: 对任意$\alpha, \beta \in A$, 要么$X_\alpha = X_\beta$ 要么$X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, 没有其它情形. 那么存在集合 $C \subset \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ 使得对每个$\alpha \in A$, 交集 $C \cap X_\alpha$ 恰好只含一个元素（即单点集). 通常称交集 $C \cap X_\alpha$(单点集）的元素称为 X_α 的代表元, 而称 C为集族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$的代表团. □

【注 1】：选择公理中的集合 C 的存在性就是这个公理的作用.

【注 2】：当集族 $\{X\}$ 只有**一个**集合 X 时, 选择公理保证我们可以从中取出一个元素来做某些事情. 换言之, 对任意非空集合X, 可以从中取出一个元素来做某些事情. 在本节命题4的证明中我们已经这样做了！

【注 3】：如果$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$是由一些非空集合组成的集合族且下标集$A$满足：当$\alpha, \beta \in A$且$\alpha \neq \beta$时有$X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$. 那么下标集$A$与$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的代表团 C 一一对应, 并且映射

$$\alpha \mapsto x_\alpha \in C \cap X_\alpha \qquad \text{即}x_\alpha \text{ 是}X_\alpha \text{ 的代表元}$$

便是从A到C的单满射(一一对应). 因此 $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}C$.

[事实上对任意$\alpha, \beta \in A$, 当$\alpha = \beta$时有$X_\alpha = X_\beta$ 从而有$\{x_\alpha\} = C \cap X_\alpha = C \cap X_\beta = \{x_\beta\}$(单点集), 因此$x_\alpha = x_\beta$. 这说明$\alpha \mapsto x_\alpha$ 是映射(从A到C). 而当$\alpha \neq \beta$时, 有$X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ 从而有$x_\alpha \neq x_\beta$. 这说明$\alpha \mapsto x_\alpha$ 是单射(从A到C). 而对任意$x \in C$, 因$C \subset \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, 故存在$\alpha \in A$ 使得$x \in X_\alpha$. 于是$x \in C \cap X_\alpha = \{x_\alpha\}$. 因此$x = x_\alpha$. 这说明$\alpha \mapsto x_\alpha$还是从$A$到$C$的满射. 所以$\alpha \mapsto x_\alpha$从$A$到$C$的单满射.]

【注 4】选择公理有几种等价形式. 但在上面形式中, 条件“这些集合互不相交”不能去掉, 否则有反例：取 $X_1 = \{1\}, X_2 = \{2\}, X_3 = \{1,2\}$. 假如存在集合 $C \subset X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1,2\}$ 使得 $C \cap X_i\,(i = 1,2,3)$ 都是单点集, 则 $C \cap X_1 = \{1\}, C \cap X_2 = \{2\}$ 从而有 $C \supset \{1,2\}$, 于是 $C \cap X_3 = \{1,2\}$ 不是单点集, 矛盾.

---

[4]**象通常的陈述那样, 这里没有给集合族$\{X\}$中的成员X编号, 因为很多时候很难让X与X的编号一一对应. 但为了弥补编号的缺乏, 这里所谓“互不相交”就被定义为: 对于$\{X\}$ 中的任何两个成员X_1, X_2, 要么$X_1 = X_2$ 要么$X_1 \cap X_2 = \emptyset$, 没有其它情形. 而当$X_1 = X_2$时, 它们作为集合便只表示同一个集合, 只是记号不同而已.**

【注 5】很多时候, 当所讨论的集合有明显结构时, 代表元的集合 C 可以直接写出来而不必使用选择公理. 但当集合族中的集合没有具体的可操作的结构时, 不用选择公理就很难(甚至无法)得到 C. 举例来看:

【例】 设 $X_n = [n, n+1), n = 1, 2, 3, ...$ 则可取 $C = \{1, 2, 3, ...\}$. 也可取 $C = \{n + 1/2 \,|\, n = 1, 2, 3, ...\}$.

【例】 设 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是由实数集 $\mathbb{R}$ 中的一些互不相交的非空的开区间组成的区间族. 则$\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的代表团 C 可以由一些有理数组成, 从而 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$与有理数集 $\mathbb{Q}$ 的某个子集一一对应. 证明见后面或**习题课**.

• **选择公理应用于等价分类:** 设 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系. 对每个 $x \in X$, 设 $[x]$ 是 X 中与 x 等价的元素的集合, 即

$$[x] = \{y \in X \,|\, y \sim x\}.$$

称 $[x]$ 是 X 由等价关系 $\sim$ 决定的一个等价类. 由等价关系的定义易见两个不同的等价类不相交, 即

$$[x_1] \neq [x_2] \Longleftrightarrow [x_1] \cap [x_2] = \emptyset.$$

应用选择公理于等价类的全体 $\{[x]\}_{x\in X}$, 存在集合 $C \subset \bigcup\limits_{x\in X}[x] = X$ 使得对于每个等价类 $[x]$, 交集 $C \cap [x]$ 恰好只含一个元素 (单点集). 来证明 X 可表示为**互不相交的**等价类的并:

$$X = \bigcup_{x\in C}[x] \qquad \text{并且} \quad x, y \in C, x \neq y \implies [x] \cap [y] = \emptyset.$$

事实上对任意$y \in X$ 有$y \in [y]$. 设$C \cap [y] = \{x\}$(单点集). 则有$x \in [y]$ 即$x \sim y$, 也即$y \in [x]$. 因此$X \subset \bigcup\limits_{x\in C}[x]$. 反之由$[x] \subset X$ $(\forall x \in X)$ 可知$\bigcup\limits_{x\in C}[x] \subset X$. 因此$X = \bigcup\limits_{x\in C}[x]$.

其次证明当$x, y \in C$ 且$x \neq y$ 时, 必有$[x] \cap [y] = \emptyset$. 否则, $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, 则有$[x] = [y]$ 从而有$y \in [x]$. 于是得到$y \in C \cap [x], x \in C \cap [x]$. 但$C \cap [x]$ 是单点集, 故$y = x$, 矛盾于$x \neq y$. 因此必有$[x] \cap [y] = \emptyset$. 所以$[x]$ $(x \in C)$ 互不相交.

关于公理与证明. 任何数学分支都是建立在一些公理基础上的, 其原因已在前面讲过. 不同的公理体系导致不同的数学分支. 对于某组公理的接受与否, 涉及 “信仰” 或观

念问题. 例如非欧几何便是建立在另外一套公理体系上的. 无论怎样, 重要的是要保证构成体系的公理之间是无矛盾的、彼此独立的、以及体系尽可能是完备的. 古人常说 “上帝建造了自然数, 其它都是人造的.” 此话并非迷信, 而其中 “ 人造的” 便主要指数学证明. 关于证明, 还有一句话更重要: “ God is in the details.” 希望大家慢慢体会.