图论: Homework #2 #5

Finish on October 25, 2017

Jiqiang Chen

1 第一章 42

若G是单图,$\varepsilon > \binom{v-1}{2}$,则G是连通图。

Solution
反证法：
假如G不连通，将G分为ω个连通片。
假设每个连通片内都为边数最多的情况：
则$\varepsilon_i(1 \leq i \leq \omega) = \binom{v_i}{2}$

$$\begin{aligned}\varepsilon = \sum_{i=1}^{\omega} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{\omega} \binom{v_i}{2} \\ = \frac{(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_\omega^2) - (v_1 + v_2 + \cdots + v_\omega)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{v-1}{2} = \frac{(v-1)(v-2)}{2} = \frac{v^2 - 3v + 2}{2} \\ = \frac{(v_1 + v_2 + \cdots + v_\omega)^2 - 3(v_1 + v_2 + \cdots + v_\omega) + 2}{2}\end{aligned}$$

比较可得：$\binom{v-1}{2} > \varepsilon$，矛盾
得证：G为连通图。

2 第一章 47

证明：连通图若有两条最长轨，则二最长轨有公共顶点。

Solution
反证法：
假设二最长轨$p_1(a_1, a_2, \cdots, a_n), p_2(b_1, b_2, \cdots, b_m)$无公共顶点。
由于G连通图，则必存在两点分别属于p_1, p_2，且相连。设为a_i, b_j。
这时由$max\{i, n-i\} + 1 + max\{j, m-j\}$可以拼接出新轨$p_3$，且长度大于$p_1, p_2$。
与题设矛盾，得证：二最长轨有公共顶点。

3 第一章 58

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$是6个城市，下面矩阵的(i,j)号元素是$v_i$到$v_j$的机票票价，
试为一个旅行者制作一张由v_1到各城去旅游的最便宜的航行路线图。

Solution
具体过程参考章节1.5：Dijkstra算法。

解不唯一。下面给出一组解：
$v_1 - -v_6$
$v_1 - -v_5$

	V2	V3	V4	V5	V6
P1	50	∞	40	25	10
P2	35	∞	35	25	
P3	35	45	35		
P4	35	45			
P5		45			

Figure 1: 58题

$v_1 - -v_6 - -v_2$
$v_1 - -v_6 - -v_4$
$v_1 - -v_5 - -v_3$

4 第二章 1

至少两个顶的树其最长轨的起止顶皆是叶，试证明之。

Solution
反证法：
设最长轨$P(v_1, v_2, \cdots, v_n)$。
假设v_1, v_n中至少有一个不是叶，设v_1不为叶。
由于图为树，所以v_1必与其他非轨顶点相连，设为v_0。
则P不为最长轨，矛盾。
得证：起止顶点皆为叶。

5 第二章 2

如果一棵树仅有两个叶，则此树就是一条轨。

Solution
根据树的定义：$\varepsilon = v - 1$
则$d(v) = 2\varepsilon = 2(v - 1)$
根据树性质可知，除去两叶顶点，度数为1。
其它顶点至少度数为2。

若其它顶点存在度数大于2的点，则：
$d(v) > 2 + 2(v - 2) = 2(v - 1)$， 矛盾
所以其它顶点度数均为2，此树为一条轨。

6 第二章 3

证明：如果T为树，且$\Delta(T) \geq n$，则T至少有n个叶。

Solution
设v_0为次数最大的顶点。
v_0与$(v_1, v_2, \cdots, v_\Delta)$相连。
根据树的性质：无圈
则任意的$v_i, v_j (1 \leq i, j \leq \Delta)$两顶点必不存在其它轨相连。
所以由v_0沿$v_1, v_2, \cdots, v_\Delta$出发，必可到达Δ个不同叶节点。

7 第二章 5

证明：树有一个中心或两个中心，但有两个中心时，此二中心是邻顶。

Solution
查看定义1.6:周长，直径，中心

(1)先证：将树G中所有叶子删去后，新树G'中心不变

因为对于G中任意一点w,当$d(w,v)\ (v \in G)$取最大值,v只能为叶子。
则满足,删去所有叶子后：
$max\ d(w,v')\ (v' \in G') = max\ d(w,v) - 1\ (v \in G)$
所以G'与G有相同的中心。
(2)不断重复上述过程。
则最终会产生一个顶或两个相邻顶的情况，为原树G的中心.

8 第二章 10

求$K_{2,3}$生成树的个数。

Solution
查看章节2.3 生成树算法。

9 第五章 2

给出求二分图正常Δ边着色的算法。

Solution
教材P_8给出了正则图，δ, Δ的定义。
查看5.1图的边着色。

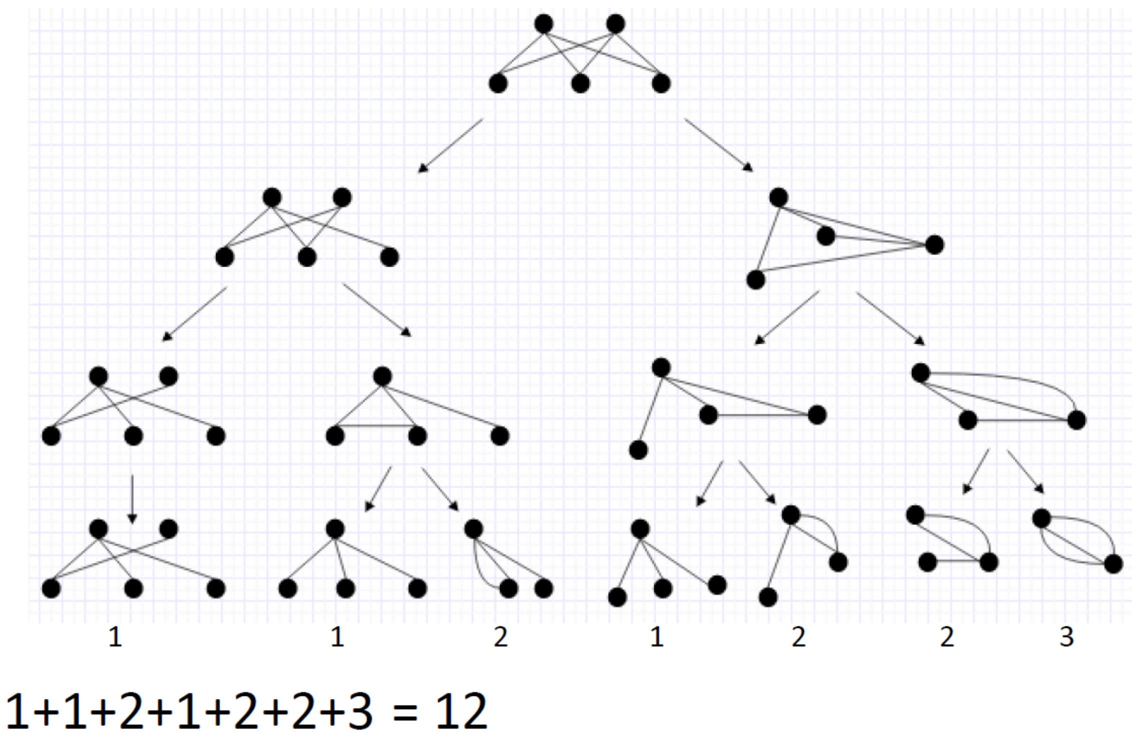

Figure 2: 10题

查看4.2正则2分图的完备匹配方法。

对于二分图$G = (X, Y, E)$，设$|X| > |Y|$，则在Y中添加若干顶点，以及E中添加若干边，
使得图G为Δ阶正则二分图,记为G'。
利用匈牙利算法逐次求其完备匹配，直至求出G'的Δ个边不重复的完备匹配，
每一个完备匹配着一种颜色即可。最后去掉扩充的顶及边即可。

10 第二章 3

证明：若二分图的顶之最小次数为$\delta > 0$,则对此图边进行δ着色时，
能使每顶所关联的边中皆出现δ种颜色。

Solution
查看引理5.2

反证法：
若结论不成立，则存在最佳δ边着色，
则必存在一顶点v，又存在两种颜色i,j。
i在v顶不出现，而j在v顶出现了两次。
根据引理5.2，存在奇圈，与二分图矛盾。
得证。

11 第二章 5

证明：若G是奇数个顶的有边正则图，则G是第二类图。

Solution
查看定理5.2
教材P_{88}给出了第一类图与第二类图的定义。

设为k次正则图。
若G为第一类图，则存在正常k着色。
则每种颜色在每顶都出现一次。
k种颜色出现次数相同，为：$\frac{1}{k} \cdot \frac{nk}{2} = \frac{n}{2}$
由题设知n为奇数，$\frac{n}{2}$不为整数，矛盾。
则G是第二类图。

12 第二章 8

有7名老师，12个班。矩阵中代表上课节数。
计算：一天应分几节课？若每天8节课，需用几间教室？

Solution
$\varepsilon(G) = 240; \Delta = 35$
言之有理即可。