数学分析讲义: 第六章 一元函数的Riemann积分

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; 《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Sept. 2016

数学分析讲义总目录

第一章 经典逻辑, 集合与映射. 第二章 实数与复数. 第三章 极限与级数. 第四章 连续函数类和其他函数类. 第五章 一元微分学.

第六章 一元函数的Riemann积分

在引进Riemann 积分的定义之前, 先简单介绍古典积分与现代积分的特点和用途.

古典概念中的长度、面积、体积以及力的做功等等的计算与性质推导, 是Riemann 积分的功能. Riemann 积分的优点表现在**Riemann 和 (Riemann sum)** 上：

$$R_n(f)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k| \tag{6.1}$$

其中$f:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\xi_k\in I_k=[x_{k-1},x_k]$,

$$|I_k|=x_k-x_{k-1},\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

Riemann 和(6.1) 是被积函数f的线性函数, 即

$$R_n(\alpha f+\beta g)=\alpha R_n(f)+\beta R_n(g) \tag{6.2}$$

且有简单直观的表达式, 因此使人们在几何、力学、物理等很多问题的研究时下手方便, 能较快地建立数学模型, 得到初步结果. 但Riemann 和的结构决定了Riemann 积分只能处理几乎处处连续的函数：为看清这点, 设f 非负、有界: $0\le f(x)<M, x\in[a,b]$, 则Riemann 和(6.1) 就近似等于图形

$$G_f:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b], 0\le y\le f(x)\}$$

的面积[1] Area(G_f). 考察Area(G_f)的**不足近似值** 和**过剩近似值**:

$$\underline{R}_n(f)=\sum_{k=1}^{n}(\inf_{\xi_k\in I_k} f(\xi_k))|I_k|\le \mathrm{Area}(G_f),$$

$$\overline{R}_n(f)=\sum_{k=1}^{n}(\sup_{\xi_k\in I_k} f(\xi_k))|I_k|\ge \mathrm{Area}(G_f).$$

假设当$n\to\infty$ 时Riemann 和$R_n(f)$关于分点ξ_k一致收敛于Area(G_f), 那么Area(G_f) 的过剩近似值与不足近似值之差就应趋于零:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\sup_{\xi_k\in I_k} f(\xi_k)-\inf_{\xi_k\in I_k} f(\xi_k)\Big)|I_k|=\overline{R}_n(f)-\underline{R}_n(f)\to 0$$

而这相当于要求f 在$[a,b]$的大部分子区间I_k 上的振幅是趋于零的, 也即f在$[a,b]$ 中大部分点处是连续的. 由于这个限制, Riemann积分除了对具体问题的计算外, 很难用

[1]**逻辑上看，"面积"需要用离散和的极限来定义, 但此处为了说明问题, 我们暂时倒行逆施.**

于一些重要的精细问题和很多需要严格化的基础问题的研究. 致命缺陷是Riemann积分不完备: 某些逐点收敛且一致有界的Riemann可积的函数列, 其极限函数却不是Riemann 可积的. 例如仍以Dirichlet函数$f(x)=1_{\mathbb{Q}}(x)$ 为例: 设$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是$[a,b]$ 中的全体有理数(其中r_k 互不相同). 令

$$f_n(x)=1_{A_n}(x),\quad A_n=\{r_1,r_2,...,r_n\},\quad n=1,2,3,\dots.$$

则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$一致有界且每个f_n只有有限多个(n个) 间断点, 因此按Riemann可积性判别的Lebesgue 定理(见后面) 知每个f_n都是Riemann 可积的. 又易见成立逐点收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ \forall\, x\in[a,b]$. 但是我们刚才已讲了: 这个极限函数$f(x)=1_{\mathbb{Q}}(x)$ 不是Riemann 可积的!

法国数学家Lebesgue 针对Riemann 积分的弱点, 采用了下列格式(例如):

$$\underline{L}_n(f)=\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}|E_k|,\qquad \overline{L}_n(f)=\sum_{k=1}^{n} y_k|E_k| \tag{6.3}$$

其中

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=M,\quad E_k=\{x\in[a,b]\,|\,y_{k-1}\le f(x)<y_k\},$$

$$\bigcup_{k=1}^{n}E_k=[a,b],\qquad |E_k|=\text{集合}E_k\ \text{的长度}.$$

从$\underline{L}_n(f),\overline{L}_n(f)$ 的结构看出, $\underline{L}_n(f),\overline{L}_n(f)$ 分别是面积Area(G_f) 的不足近似值和过剩近似: $\underline{L}_n(f)\le \mathrm{Area}(G_f)\le \overline{L}_n(f)$. 由于

$$0\le \overline{L}_n(f)-\underline{L}_n(f)=\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k-1})|E_k|$$

而y_k **是可以随意调节的**, 例如取y_k 满足$y_k-y_{k-1}=\frac{M}{n}, k=1,2,...,n$, 因此立刻得到

$$0\le \overline{L}_n(f)-\underline{L}_n(f)=\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|E_k|=\frac{M}{n}(b-a)\to 0\quad (n\to\infty).$$

这意味着只要函数f 使得所有集合E_k的长度具有**可加性**, 即满足

$$\sum_{k=1}^{n}|E_k|=\Big|\bigcup_{k=1}^{n}E_k\Big|=|[a,b]|=b-a$$

那么f 的按(6.3)定义的Lebesgue 和 $\underline{L}_n(f),\overline{L}_n(f)$就是稳定的且收敛于$G_f$ 的面积Area(G_f). 人们把f具有的上述可加性叫做f 具有可测性, 或更直接地, 称具有可加性的集合为可测集. Lebesgue的系统工作表明, 函数的可测性远比函数的连续性宽松得多，

例如Dirichlet 函数$f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x)$, 它在$[a,b]$上处处间断因而不是Riemann 可积的, 但在Lebesgue 积分体系中它是最可积的, 其Lebesgue 积分$= 0$. 产生这个巨大差异的根源是Lebesgue 进行了伟大的战略转移, 把面积的定义归结为函数的可测性和集合测度的存在性. 这不仅极大地延拓了古典时代关于“长度、面积”的概念, 而且可测性、测度论为现代分析学及其发展和应用提供了宽广的基础和强有力的工具.

Lebesgue 测度与积分有很多好性质：如完备性, 在**很弱的条件下的** 积分号下取极限、取微商, 逐项积分, 重积分化为累次积分(Fubini 定理), Newton-Leibniz公式, 积分换元公式, 等等. 因此现代积分理论在概率论, 微分方程, 调和分析, 泛函分析, 分形几何, 积分几何, 动力系统, 统计物理, 流体力学基础, 等众多领域中有广泛应用, 尤其随着计算技术的提高,宏观和微观的应用都得以实现.

Riemann积分在数值上与Lebesgue 积分相等, 广义Riemann积分是常义Riemann积分的变上(下)限的极限，因此也属于Lebesgue 积分的一种扩张, 多用于条件收敛. 某些问题虽然用Riemann积分也可以解决,却要花费很大篇幅论证, 而用Lebesgue积分处理,就显得很轻松、自然. 当然, 基础理论的建立总要向更深层基础交换代价：在Lebesgue积分论中, 极限与积分交换次序等仍需一定条件, 尽管条件已相当弱. 但是对于很多理论和实际问题的研究来说, 现代测度与积分体系已经够用.

既然现代积分比Riemann积分优越和方便得多，为什么多数数学分析教材不直接讲现代积分？主要原因如下：

1. Riemann和的直观、明显的几何、物理、力学等意义使人们容易利用它建立常规的数学模型, 因此必需保留.

2. Riemann和由于其结构简单, 适于作积分的数值计算和估计, 包括建立随机计算格式.

3. 由于物理、力学等课程对积分(重积分换元公式, 曲线、曲面积分等)的需要, 积分理论应尽早讲完, 因此一般都考虑Riemann积分.

但在国际上一些数学分析的教材中, 已将Riemann积分和现代积分的主要内容放在一起处理. 事实上, 花在讲授Riemann积分和Jordan测度的课时, 几乎可以讲完现代测度和积分中最常用的基本性质, 因此完全可以将Riemann 积分与现代积分基本知识“合二而一”, 而且这个做法至少有三点好处:

(1) 这种“合二而一”的教学将会减轻学习负担和解题负担(按大一的要求)因为基

本知识重复次数相对多了, 武器也更先进了; 并且由于“基本的抽象”比“高端的具体”容易, 因此“合二而一”也是可行性的, 至少对于清华数学系学生来说, 不必担心学生的接受能力.

(2) 由于现代测度与积分的基础足够深广, 其上任何建筑只需适当加入新条件即可施行, 操作方式都是有章可循的, 没有大的障碍. 相反如果像多数现行教材那样, 没有宽阔严格的基础, 则要么我们不得不经常返回根处建立所需的基础, 因而导致时间的浪费和观念上过多的歧义, 要么使用人为的高超技术强行过关, 因而把原本简单的问题神秘化和复杂化了.

(3) 由于较早接触现代测度与积分, 学生在后续学习实分析时就能把精力较早地集中在上层建筑部分; 对于不一定在本科学习实分析的学生, 有了测度论的基础, 以后学习概率论和自学实分析也能较快入门.[2] 根据以往的经验, 我们认为, 对重点大学的数学系本科生而言, 较早地学习现代测度与积分的一般概念和基本定理, 对于今后的学习和理论研究是大有益处的, 也是可行的.

以上就是陈书的部分目的. 按照陈书的安排, 本章学习一元函数的Riemann积分, 而在第二学期学习一般的测度与积分. 顺便强调一下: 单独学习一元函数的Riemann积分的另一个目的是: 由于实数域$\mathbb{R}$是有序域, 一元函数的Riemann积分就具有其他积分没有的特点, 如

方向性: 当$a < b$ 时, 从a到b的积分为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 而当$a > b$时, 定义从a到b的积分为$-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{当 } a > b \text{ 时}.$$

变上限积分: $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 等等.

积分是好东西！它不仅自然清晰严格, 而且是解决问题的强有力的工具.

[2]顺便说一句, 测度与积分是数学知识中较难的部分, 一些同学需要学几次才有感觉和自由运作. 经验教训表明, 夹生饭代价更大, 应尽最大努力在首次学习就弄得比较清楚.

§6.1. 区间上的Riemann 积分

【关于区间的记号】对于有界区间(开、闭、半开半闭) $I=[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$ ($a<b$), 我们用

$$|I|=b-a \quad \text{表示 } I \text{ 的长度.}$$

若I是退化的区间, 即I是单点集或空集, 则定义其长度为零: $|I|=0$.

易见两个区间I,J的交集$I\cap J$ 也是区间(可能为退化的区间或空集).

两个区间I,J (包括退化的情形) 如果满足$|I\cap J|=0$, 则称I,J 是**不重叠**的.

遵照习惯, 在没有特别说明时, 区间都是指非退化的区间.

【区间的分划, 分划的模和选点组】

设 $I=[a,b]$ 为有界闭区间. 区间I 上的一个分划$\mathcal{C}=\{I_k\}_{k=1}^n$ 是指将I分割成有限多个内部互不相交的区间的并:

$$\mathcal{C}:\ \ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b, \quad I_k=[x_{k-1},x_k].$$

我们将子区间 I_k 的长度 $|I_k|$ 也记成 Δx_k, 即

$$|I_k|=\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, \quad k=1,2,...,n.$$

将最大的子区间的长度记作 $\lambda(\mathcal{C})$, 即

$$\lambda(\mathcal{C})=\max\{|I_1|,|I_2|,...,|I_n|\}=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n\}.$$

我们称 $\lambda(\mathcal{C})$ 为分划 $\mathcal{C}$ 的模. 显然 $\lambda(\mathcal{C})$ 的作用在于度量 I 被分割的疏密程度：$\lambda(\mathcal{C})$ 越小则 I 被分割得越细密. 不难看出, 分划 $\mathcal{C}$ 的子区间的个数 n 随着 $\lambda(\mathcal{C})$趋于零而趋于无穷. 事实上我们有

$$b-a=\sum_{k=1}^n\Delta x_k\le n\lambda(\mathcal{C}) \quad \Longrightarrow \quad n\ge\frac{b-a}{\lambda(\mathcal{C})}. \tag{6.4}$$

在每个子区间 I_k 中任取一点 ξ_k, 称 $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ 为从属于分划 $\mathcal{C}$ 的一个**选点组**. 注意每个分点 $\xi_k\in I_k$ 是独立变化的, 这是 Riemann 积分的传统定义的关键点. 为行文简便, 我们把“$\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ 为从属于分划 $\mathcal{C}$ 的一个选点组”, 记作“$\xi\in\mathcal{C}$”. 选点组的一个作用是建立 Riemann 积分.

【**定义(Riemann 积分)**】设实或复值函数 f 在有界闭区间 $I=[a,b]$ 上有定义.

(i) Riemann 和. 对于 I 的任意分划 $\mathcal{C}=\{I_k\}_{k=1}^n$ 和任意选点组 $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathcal{C}$, 称和式

$$\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)|I_k|$$

为 f 在区间 $I=[a,b]$ 上的一个 Riemann 和.

(ii) Riemann 积分. 我们称函数f在$I=[a,b]$上 Riemann 可积, 如果存在常数 A 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得只要 I 的分划 $\mathcal{C}=\{I_k\}_{k=1}^n$ 的模 $\lambda(\mathcal{C})<\delta$, 就有一致估计式成立:

$$|\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)-A|=\Big|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)|I_k|-A\Big|\le\varepsilon\qquad\forall\,\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathcal{C}.$$

也可写成

$$\sup_{\xi\in\mathcal{C}}|\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)-A|\to 0\quad\text{as}\quad\lambda(\mathcal{C})\to 0.$$

如果 f 在 $I=[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则相应的常数 A 称为 f 在 $I=[a,b]$ 上的 Riemann 积分, 记作

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

积分记号中的 $f(x)$ 也称为被积函数. 在 $I=[a,b]$ 上Riemann可积的函数的全体记作 $\mathcal{R}(I)$ 或 $\mathcal{R}([a,b])$.

在本讲义中, Riemann可积被简称为可积, 即**"可积"= "Riemann 可积"** □

Riemann 积分的记号说明:

(1) Riemann 积分的定义也常简略地写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\quad\text{uniformaly in}\quad\xi\in\mathcal{C}.$$

据此定义, 当一切 $\Delta x_k<<1$, 即 $\lambda(\mathcal{C})<<1$ 时, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\quad\text{uniformaly in}\quad\xi\in\mathcal{C}.$$

(2) 积分号的$\int_a^b$上下限对应于求和号 $\sum_{k=1}^n$中的求和顺序, 即 x 从 a 移动至 b 对应于 x_k 从 $x_0=a$ 走到 $x_n=b$, 也即 k 从 1 增至 n; 而微分元 $f(x)\mathrm{d}x$ 对应于微小

元 $f(x_k)\Delta x_k$. 注意：因 x 是从小到大变化的, 故与 $\Delta x_k=|I_k|>0$ 一样, $\mathrm{d}x$ 应理解为“正的无穷小”.

(3)**必须注意**, 对于合适的(例如均匀的)分割$\mathcal{C}$：$[a,b]=\bigcup_{k=1}^{N}[x_{k-1},x_k]$, 一般来说有$\lambda(\mathcal{C})\to 0 \iff N\to\infty$ (也见(6.4)). 因此子区间$[x_{k-1},x_k]$ 必定依赖于N. 所以严格的写法应该使用上下标:

$$\mathcal{C}_n:\quad [a,b]=\bigcup_{k=1}^{N_n}[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}],\quad \Delta x_k^{(n)}=x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)}>0,\quad k=1,2,...,N_n.$$

(4) 如果f已经在$[a,b]$上可积, 那么选点ξ_k 就可以根据方便来选取, 例如取ξ_k为子区间$[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$的端点: $\xi_k=x_{k-1}^{(n)}$ 或$\xi_k=x_k^{(n)}$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n}f(x_{k-1}^{(n)})\Delta x_k^{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n}f(x_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(5) f在区间$I=[a,b]$上的Riemann 积分也常写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

Riemann 和的优点：直观、线性

Riemann 和$\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)$关于被积函数 f是线性的, 即

$$\mathcal{R}(f+g,\mathcal{C},\xi)=\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)+\mathcal{R}(g,\mathcal{C},\xi),$$
$$\mathcal{R}(cf,\mathcal{C},\xi)=c\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi),\quad c=\mathrm{const}.$$

这些就是 Riemann 积分值得保留的主要原因.

【复值函数的Riemann积分】从Riemann 和$f\mapsto\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)$的线性性特别可知: 对于一个复值函数$f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$ (其中f_1,f_2 为实值函数) 有

$$\mathcal{R}(f_1+\mathrm{i}f_2,\mathcal{C},\xi)=\mathcal{R}(f_1,\mathcal{C},\xi)+\mathrm{i}\mathcal{R}(f_2,\mathcal{C},\xi).$$

因一个复数列收敛当且仅当它的实部序列和虚部序列都收敛, 故由此可见：复值函数$f_1+\mathrm{i}f_2$ 在$[a,b]$ 上Rirmann 可积$\iff$ f的实部虚部f_1,f_2 都在$[a,b]$ 上Rirmann 可积.

当两边之一成立(从而两边都成立时)有

$$\int_a^b \Big(f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)\Big)\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

这表明在研究积分性质时, 我们总可先假定被积函数为实值函数, 然后对复值函数做实部虚部的叠加.

下面证明一个不难但极为重要的命题, 它说明Riemann 和与Riemann积分特别适于连续函数(后面将证明任何连续函数都有原函数).

【命题6.1(Newton-Leibniz公式)】 设 $[a,b]$ 为有界闭区间, 函数$f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 连续, F 是f的一个原函数, 即$f(x)=F'(x)\ \forall\, x\in[a,b]$. 则$f$ 在$[a,b]$上可积且成立Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

【证】先设F为实值的. 对于 $[a,b]$ 的任意分划 $\mathcal{C}:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 有

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^n[F(x_k)-F(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta x_k$$

这里用到微分中值定理：$F(x_k)-F(x_{k-1})=f(\zeta_k)\Delta x_k$, $\zeta_k\in(x_{k-1},x_k)$. 令

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|x-y|\le\delta,\ x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)|,\qquad \delta=\lambda(\mathcal{C}).$$

则对任意选点组 $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathcal{C}$ 有如下估计:

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k-[F(b)-F(a)]\Big|=\Big|\sum_{k=1}^n[f(\xi_k)-f(\zeta_k)]\Delta x_k\Big|\\ &\le\sum_{k=1}^n|f(\xi_k)-f(\zeta_k)|\Delta x_k\le\omega(f,\delta)\sum_{k=1}^n\Delta x_k=\omega(f,\delta)(b-a)\end{aligned}$$

从而有

$$\sup_{\xi\in\mathcal{C}}\Big|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k-[F(b)-F(a)]\Big|\le\omega(f,\delta)(b-a).$$

因 $[a,b]$ 是有界闭区间, 故 f 在 $[a,b]$ 上一致连续, 也即 $\omega(f,\delta)\to 0$ $(\delta\to 0^+)$. 于是得到

$$\sup_{\xi\in\mathcal{C}}\Big|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k-[F(b)-F(a)]\Big|\longrightarrow 0\quad\text{as}\quad \delta=\lambda(\mathcal{C})\to 0.$$

据 Riemann 可积的定义知 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

其次对于复值的情形$F = F_1 + \mathrm{i}F_2$, 将上面结果用于实部虚部F_1, F_2 便知导函数$f(x) = F'(x) = F_1'(x) + \mathrm{i}F_2'(x) = f_1(x) + \mathrm{i}f_2(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x = F_1(b) - F_1(a) + \mathrm{i}(F_2(b) - F_2(a)) = F(b) - F(a).$$

□

我曾建议一名博士后在入职试讲时讲这个命题及其证明, 因为它不长, 结果又极为重要(微积分基本定理!), 且含有微分中值定理.

【例】设$[a,b]$为有界闭区间. 则有

$$\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_{x=a}^{b} = \cos a - \cos b,$$

$$\int_a^b \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{x=a}^{b} = \sin b - \sin a,$$

$$\int_a^b e^{\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda}.$$

其中$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.　□

【例】求极限

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\Big)^{1/n}.$$

【解】由

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\Big)^{1/n} = \exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{k}{n})\Big)$$

知只需确定极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{k}{n}).$$

容易看出上式极限号内的和式是函数$f(x) = \log(1+x)$在区间$[0,1]$上的对应于分划为$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{n}[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, 选点为$\frac{k}{n}$ 的Riemann和. 因函数$f(x) = \log(1+x)$ 在$[0,1]$上连续故f 在$[0,1]$ 上可积(见下面Lebesgue准则). 或者直接求出$f(x)$的一个原函数为

$$F(x) = (1+x)\log(1+x) - 1 - x, \quad F'(x) = f(x), \quad x > -1.$$

因此由上面**命题6.1(Newton-Leibniz公式)** 便知$f \in \mathcal{R}([0,1])$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{k}{n}) = \int_0^1 \log(1+x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 2\log 2 - 1.$$

于是得到

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\Big)^{1/n}=e^{\int_0^1\log(1+x)\mathrm{d}x}=e^{2\log 2-1}=\frac{4}{e}.\qquad\square$$

在学习其他主要结果之前我们先看Riemann 可积的一个必要条件：

【命题 6.2】若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 必在 $[a,b]$ 上有界.

【证】f 在 $[a,b]$ 上 可积. 记 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 取 $\varepsilon=1$, 则存在 $\delta>0$, 使得对于 $[a,b]$ 的（例如）等距分划

$$\mathcal{C}:\quad x_k=a+\frac{b-a}{N}(k-1),\quad k=1,2,...,N;\quad \frac{b-a}{N}<\delta$$

我们有

$$\Big|\frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)-A\Big|\le 1\qquad \forall\,\xi_k\in[x_{k-1},x_k],\quad k=1,2,...N$$

从而有

$$\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Big|\le\frac{N}{b-a}(1+|A|)\qquad \forall\,\xi_k\in[x_{k-1},x_k],\quad k=1,2,...N.$$

于是对每个 $j\in\{1,2,...,N\}$ 便有

$$|f(\xi_j)|=\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)-\sum_{1\le k\le N,k\neq j}f(\xi_k)\Big|\le\frac{N}{b-a}(1+|A|)+\sum_{1\le k\le N,k\neq j}|f(\xi_k)|.$$

现取定特殊分点 $\xi_k=x_k,k=1,2,...,N$. 任取 $x\in[x_{j-1},x_j]$ 并将第 j 个分点 ξ_j 取为 x. 则有

$$|f(x)|\le\frac{N}{b-a}(1+|A|)+\sum_{1\le k\le N,k\neq j}|f(x_k)|:=M_j.$$

据 $x\in[x_{j-1},x_j]$ 的任意性, 这说明 f 在子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 上有界：

$$\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]}|f(x)|\le M_j.$$

让 j 遍取 $1,2,...,N$ 我们得到

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\le\max\{M_1,M_2,...,M_N\}\ (<\infty).$$

这证明了 f 在 $[a,b]$ 上有界. $\square$

可积性的振幅刻画

首先回忆

函数的振幅: 设实或复值函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义且有界. 设$E\subset I$. 称

$$\omega_f(E)=\sup_{x,y\in E}|f(x)-f(y)|$$

为 f 在 E 上的振幅. 当f为实值函数时有

$$\omega_f(E)=\sup_{x\in E}f(x)-\inf_{x\in E}f(x).$$

振幅的单调性: 由上确界的定义易见

$$A\subset B\implies\omega_f(A)\le\omega_f(B)\,.$$

【引理6.3】设$I=[a,b]$ 为有界闭区间, 作I的分划$I=\bigcup_{k=1}^n I_k$, 其中$I_k=[a_{k-1},a_k]$, $a_{k-1}<a_k,k=1,2,...,n;a_0=a,a_n=b$. 则对任意闭子区间$J=[\alpha,\beta]\subset I$ 有

$$J=\bigcup_{k=1}^n J\cap I_k,\quad |J|=\sum_{k=1}^n|J\cap I_k|.$$

这里约定: 如果k 使得$J\cap I_k$ 是退化的区间(即单点集或空集), 则定义$|J\cap I_k|=0$.

【证】由$J\subset I=\bigcup_{k=1}^n I_k$ 和集合运算有$J=J\cap\bigcup_{k=1}^n I_k=\bigcup_{k=1}^n J\cap I_k$. (也可用集合相等的定义直接证明这一等式). 下证第二个等式.

因$a=a_0\le\alpha<\beta\le a_n=b$, 故下面被取min的正整集非空因此其min 存在: 令

$$p=\min\{k\in\{1,2,...,n\}\,|\,\alpha<a_k\},\quad q=\min\{k\in\{1,2,...,n\}\,|\,\beta\le a_k\}.$$

则有$a_{p-1}\le\alpha<a_p,a_{q-1}<\beta\le a_q$. 易见$1\le p\le q\le n$. 若$p=q$, 则得$a_{p-1}\le\alpha<\beta\le a_p$, 即$J\subset I_p$, 因此$J=J\cap I_p$ 且当$k\ne p$ 时$J\cap I_k$ 是退化的区间从而有$|J\cap I_k|=0$. 此时有$|J|=|J\cap I_p|=\sum_{k=1}^n|J\cap I_k|$.

设$p<q$. 则有$p\le q-1$. 当$p=q-1$ 时, $a_{p-1}\le\alpha<a_p<\beta\le a_{p+1}$. 此时有$J\cap I_p=[\alpha,a_p],J\cap I_{p+1}=[a_p,\beta]$, $|J\cap I_p|+|J\cap I_{p+1}|=a_p-\alpha+\beta-a_p=\beta-\alpha=|J|$. 而当$k\notin\{p,p+1\}$ 时$J\cap I_k$是退化的区间从而有$|J\cap I_k|=0$. 因此$|J|=\sum_{k=1}^n|J\cap I_k|$.

设$p\le q-2$. 则有$p+1\le q-1$,

$$\begin{aligned}&a_{p-1}\le\alpha<a_p<a_{p+1}<\cdots<a_{q-1}<\beta\le a_q,\\&J\cap I_p=[\alpha,a_p],\quad J\cap I_k=I_k,\ p+1\le k\le q-1;\quad J\cap I_q=[a_{q-1},\beta],\\&\sum_{k=p}^q|J\cap I_k|=a_p-\alpha+\sum_{k=p+1}^{q-1}(a_k-a_{k-1})+\beta-a_{q-1}\\&=a_p-\alpha+a_{q-1}-a_p+\beta-a_{q-1}=\beta-\alpha=|J|\end{aligned}$$

而当$1 \le k \le p-1$ 或$n \ge k \ge q+1$时$J \cap I_k$是退化的区间从而有$|J \cap I_k| = 0$. 这就得到

$$|J| = \sum_{k=p}^{q} |J \cap I_k| = \sum_{k=1}^{n} |J \cap I_k|.$$

引理证毕. $\square$

【引理6.4】设$I_1, I_2, ..., I_n$ 是互不重叠的有界闭区间, J 是有界区间且$I_k \subset J, k = 1, 2, ..., n$. 则有

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \le |J|.$$

【证】我们对区间I_k的个数用归纳法. 当$n = 1$ 时是显然的. 设个数为$n-1 (\ge 1)$时所证成立, 看个数为n 时. 对$I_1, I_2, ..., I_n$ 重新编号可以假设区间$I_n = [a_n, b_n]$的右端点b_n 最大. 则由$I_1, I_2, ..., I_n$互不重叠易见当$k \le n-1$时$I_k \subset (-\infty, a_n]$. 设$J$的左右端点为$\alpha, \beta$. 则有

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} I_k \subset [\alpha, a_n] \qquad \text{因此由归纳假设有} \quad \sum_{k=1}^{n-1} |I_k| \le a_n - \alpha.$$

于是得到

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \le a_n - \alpha + |I_n| = a_n - \alpha + b_n - a_n = b_n - \alpha \le \beta - \alpha = |J|.$$

据归纳法原理, 引理得证. $\square$

【引理6.5】设实函数 f 在有界闭区间 $I = [a, b]$ 上有界.

(**a**) 对于 I 的任意分划 $\mathcal{C}$: $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 令

$$l_f(I_k) = \inf_{x \in I_k} f(x), \quad u_f(I_k) = \sup_{x \in I_k} f(x).$$

则有

$$\inf_{\xi \in \mathcal{C}} \mathcal{R}(f, \mathcal{C}, \xi) = \sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k|, \quad \sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mathcal{R}(f, \mathcal{C}, \xi) = \sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k|\,. \tag{6.5}$$

(**b**) 对于 I 的任意两个分划$\mathcal{C}_1$: $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 和$\mathcal{C}_2$: $I = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ 都有

$$\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k| \le \sum_{j=1}^{m} u_f(J_j)|J_j| \tag{6.6}$$

从而有

$$\sup_{\mathcal{C}}\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k| \le \inf_{\mathcal{C}}\sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k| \tag{6.7}$$

其中上下确界中的 $\mathcal{C}$各自遍取 I 的所有分划.

【证】(a)：由上下确界的定义, 对任意选点组 $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathcal{C}$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k| \le \mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k| \le \sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k|$$

且对任意 $\varepsilon>0$, 对每个 k, 存在 $\xi_k',\xi_k''\in I_k$ 使得

$$f(\xi_k')>u_f(I_k)-\frac{\varepsilon}{|I|}\,,\quad f(\xi_k'')<l_f(I_k)+\frac{\varepsilon}{|I|}\,.$$

于是对于选点组 $\xi'=(\xi_1',\xi_2',...,\xi_n'),\xi''=(\xi_1'',\xi_2'',...,\xi_n'')$ 有

$$\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi')=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')|I_k|>\sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k|-\frac{\varepsilon}{|I|}\sum_{k=1}^{n}|I_k|=\sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k|-\varepsilon\,,$$

$$\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi'')=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'')|I_k|<\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k|+\frac{\varepsilon}{|I|}\sum_{k=1}^{n}|I_k|=\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k|+\varepsilon\,.$$

其中用到 $|I|=\sum_{k=1}^{n}|I_k|$. 因此 由确界的定义即知 (6.5) 成立.

(b): 给定 I 的任意两个分划$\{I_k\}_{k=1}^{n},\{J_j\}_{j=1}^{m}$ 即 $I=\bigcup_{k=1}^{n} I_k=\bigcup_{j=1}^{m} J_j$. 据**引理6.3** 知

$$I_k=\bigcup_{j=1}^{m} I_k\cap J_j,\quad |I_k|=\sum_{j=1}^{m}|I_k\cap J_j|,\quad k=1,2,...,n\,,$$

$$J_j=\bigcup_{k=1}^{n} I_k\cap J_j,\quad |J_j|=\sum_{k=1}^{n}|I_k\cap J_j|,\quad j=1,2,...,m$$

其中用到约定: 如果某对k,j 使得$I_k\cap J_j$ 是退化的区间(即单点集或空集), 则$|I_k\cap J_j|=0$. 于是有

$$\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k|=\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)\sum_{j=1}^{m}|I_k\cap J_j|=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k\cap J_j|,$$

$$\sum_{j=1}^{m} u_f(J_j)|J_j|=\sum_{j=1}^{m} u_f(J_j)\sum_{k=1}^{n}|I_k\cap J_j|=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} u_f(J_j)|I_k\cap J_j|.$$

为证(6.6) 只需证明

$$l_f(I_k)|I_k\cap J_j|\le u_f(J_j)|I_k\cap J_j|,\quad \forall\, k\in\{1,2,...,n\},\forall\, j\in\{1,2,...m\}. \tag{6.8}$$

事实上对任意$k\in\{1,2,...,n\}, j\in\{1,2,...,m\}$, 若$I_k\cap J_j\neq\emptyset$, 则由上下确界的定义有

$$l_f(I_k)\le l_f(I_k\cap J_j)\le u_f(I_k\cap J_j)\le u_f(J_j)$$

从而有

$$l_f(I_k)|I_k\cap J_j|\le u_f(J_j)|I_k\cap J_j|.$$

若$I_k\cap J_j=\emptyset$,则$|I_k\cap J_j|=0$, 上式仍成立. 所以(6.8)成立. $\square$

在下面的学习和研究中我们将考虑区间函数的极限: 设$I=[a,b]$为有界闭区间, $J\mapsto\Phi(J)$ 是定义在所有子区间$J\subset I$上的有界函数. 对于 I 的任意分划 $\mathcal{C}: I=\bigcup_{k=1}^n I_k$ 我们称极限

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n\Phi(I_k)|I_k|\quad\text{存在有限}$$

是指, 存在常数$A\in\mathbb{R}$满足：对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得对于 I 的任意分划 $\mathcal{C}: I=\bigcup_{k=1}^n I_k$,

$$\text{只要}\ \lambda(\mathcal{C})<\delta\ \text{就有}\ \Big|\sum_{k=1}^n\Phi(I_k)|I_k|-A\Big|<\varepsilon.$$

若这样的A存在, 则记$A=\lim\limits_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n\Phi(I_k)|I_k|$.

我们将主要研究三个极限:

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|,\quad \lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n l_f(I_k)|I_k|,\qquad \lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n u_f(I_k)|I_k|.$$

【命题6.4(可积性的振幅刻画)】设实或复值函数 f 在有界闭区间$I=[a,b]$上有界. $\mathcal{C}: I=\bigcup_{k=1}^n I_k$ 为I上的任意一族分划. 则有:

$$f\ \text{在}I\ \text{上可积}\iff \lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|=0.$$

此外当f在I上可积且为实值函数时有

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n l_f(I_k)|I_k|=\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n u_f(I_k)|I_k|=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】先说明为证明这个命题, 我们可以假定f是实值函数.

事实上如果f是复值的, 则写$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$ 其中f_1,f_2 为实值函数. 由

$$|f_1(x)-f_1(y)|,|f_2(x)-f_2(y)|\le|f(x)-f(y)|\le|f_1(x)-f_1(y)|+|f_2(x)-f_2(y)|$$

易见有

$$\omega_{f_1}(E),\omega_{f_2}(E)\le\omega_f(E)\le\omega_{f_1}(E)+\omega_{f_2}(E),\quad E\subset[a,b].$$

因此

$$\sum_{k=1}^n\omega_{f_1}(I_k)|I_k|,\ \sum_{k=1}^n\omega_{f_2}(I_k)|I_k|\le\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|,$$
$$\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|\le\sum_{k=1}^n\omega_{f_1}(I_k)|I_k|+\sum_{k=1}^n\omega_{f_2}(I_k)|I_k|.$$

由此可见

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to0}\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|=0\Longleftrightarrow\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to0}\sum_{k=1}^n\omega_{f_1}(I_k)|I_k|=\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to0}\sum_{k=1}^n\omega_{f_2}(I_k)|I_k|=0.$$

因

$$f=f_1+\mathrm{i}f_2\text{ 在}I\text{ 上可积}\iff f_1,f_2\text{ 都在}I\text{ 上可积}$$

故可见本命题若对实值函数成立则对复值函数也成立. 因此我们可以假设f是实值函数.

"$\Longrightarrow$": 设 f 在 I 上 可积. 记 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 由定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 I 的满足 $\lambda(\mathcal{C})<\delta$ 任一分划 $\mathcal{C}: I=\bigcup_{k=1}^n I_k$ 成立一致估计:

$$A-\varepsilon/2<\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)<A+\varepsilon/2\qquad\forall\xi\in\mathcal{C}\,.$$

取确界得到

$$A-\varepsilon/2\le\inf_{\xi\in\mathcal{C}}\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)\le\sup_{\xi\in\mathcal{C}}\mathcal{R}(f,\mathcal{C},\xi)\le A+\varepsilon/2\,.$$

因此据**引理6.5**(见(6.5)), 上式即为

$$A-\varepsilon/2\le\sum_{k=1}^n l_f(I_k)|I_k|\le\sum_{k=1}^n u_f(I_k)|I_k|\le A+\varepsilon/2.$$

这给出

$$\Big|\sum_{k=1}^n l_f(I_k)|I_k|-A\Big|\le\varepsilon/2,\quad\Big|\sum_{k=1}^n u_f(I_k)|I_k|-A\Big|\le\varepsilon/2\tag{6.9}$$

同时由$\omega_f(I_k)=u_f(I_k)-l_f(I_k)$ 还得到

$$\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|=\sum_{k=1}^n u_f(I_k)|I_k|-\sum_{k=1}^n l_f(I_k)|I_k|\le\varepsilon\,.$$

所以

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to0}\sum_{k=1}^n l_f(I_k)|I_k|=\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to0}\sum_{k=1}^n u_f(I_k)|I_k|=A,\quad\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to0}\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|=0.$$

“$\Longleftarrow$”: 证明的关键是确定 Riemann 和的极限. 为此我们考虑

$$\underline{A} := \sup_{\mathcal{C}} \sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k|, \quad \overline{A} := \inf_{\mathcal{C}} \sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k|$$

其中上下确界中的 $\mathcal{C}$各自遍取 I 的所有分划.

来证明 $\underline{A} = \overline{A}$ 并且公共值 $A := \underline{A} = \overline{A}$ 即为 f 在 I 上的 Riemann 积分.

首先由**引理6.5(b)** 知 $\underline{A} \le \overline{A}$. 其次对于任意分划 $\mathcal{C}$: $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, 据 $\underline{A}, \overline{A}$ 的定义有

$$0 \le \overline{A} - \underline{A} \le \sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k| - \sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k| = \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k|\,.$$

而由假设知上式右端可以任意小. 这就迫使 $\overline{A} - \underline{A} = 0$. 所以 $\overline{A} = \underline{A}$ 成立.

记 $A := \overline{A} = \underline{A}$. 来证明对任意分划 $\mathcal{C}$: $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 成立一致估计:

$$\sup_{\xi \in \mathcal{C}} |\mathcal{R}(f, \mathcal{C}, \xi) - A| \le \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k|. \tag{6.10}$$

由此和 $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{C}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| = 0$ 即知 f 在I 上 可积且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$.

由**引理6.5** 和 $A = \underline{A} = \overline{A}$ 我们有: $\forall \xi \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{C}, \xi) - A \le \sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k| - \sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k| = \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k|,$$

$$A - \mathcal{R}(f, \mathcal{C}, \xi) \le \sum_{k=1}^{n} u_f(I_k)|I_k| - \sum_{k=1}^{n} l_f(I_k)|I_k| = \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k|$$

也即

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{C}, \xi) - A| \le \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| \qquad \forall \xi \in \mathcal{C}.$$

所以 (6.10) 成立. $\square$

下面命题表明: 一个函数f在$[a, b]$上Riemann可积的本质在于“f在分划区间I_k中的选点ξ_k是可以任意的”, 而不必要求分划也是任意的(例如可以只考虑等距分划), 也即只需存在一列分划$\mathcal{C}^{(n)} : [a, b] = \bigcup_{k=1}^{N_n} I_k^{(n)}, I_k^{(n)} = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$, 满足

$$\text{满足} \quad \lim_{n \to \infty} \lambda(\mathcal{C}^{(n)}) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \omega_f(I_k^{(n)})|I_k^{(n)}| = 0 \quad \text{即可.}$$

【命题6.A】设$[a, b] \subset \mathbb{R}$为有界闭区间, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$在$[a, b]$ 上有界. 则以下(a), (b)等价:

(a) 对任意$\varepsilon > 0$ 存在$[a, b]$的分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ 使得

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_f(I_k)|I_k| < \varepsilon, \quad \text{其中} \quad I_k = [x_{k-1}, x_k].$$

(b) 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得对$[a, b]$上的任意分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,

$$\text{只要}\lambda(\mathcal{C}) < \delta \text{ 就有} \quad \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| < \varepsilon, \quad \text{其中} \quad I_k = [x_{k-1}, x_k].$$

也即

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| = 0.$$

【证】因(a)是(b)的特殊情形, 故"$(b) \Longrightarrow (a)$"显然成立. 下证

"$(a) \Longrightarrow (b)$:" 取定一个正数$M \ge \omega_f([a, b])$. 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/2 > 0$, 由假设存在$[a, b]$的分划$\mathcal{C}^* : a = x_0^* < x_1^* < x_2^* < \cdots < x_N^* = b$ 使得

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_f(J_i)|J_i| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{其中} \quad J_i = [x_{i-1}^*, x_i^*].$$

以下我们将用到约定:空集的长度为零: $|\emptyset| = 0$, 对空集的求和等于零: $\sum\limits_{k\in\emptyset} a_k = 0$.

任取$[a, b]$的一个分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 令$I_k = [x_{k-1}, x_k]$. 由$I_k \subset [a, b] = \bigcup_{i=1}^{N} J_i$有(根据**引理6.3**)

$$I_k = \bigcup_{i=1}^{N} I_k \cap J_i, \quad |I_k| = \sum_{i=1}^{N} |I_k \cap J_i|, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

据此有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| &= \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k) \sum_{i=1}^{N} |I_k \cap J_i| = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k\in A_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| + \sum_{k\in B_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k\in A_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k\in B_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big)
\end{aligned}$$

其中

$$A_i = \{k \in \{1, 2, ..., n\} \mid I_k \subset J_i\}, \quad B_i = \{k \in \{1, 2, ..., n\} \mid I_k \cap J_i \neq \emptyset,\, I_k \not\subset J_i\}.$$

因当$k \in A_i$时$I_k \subset J_i$, 故有$\omega_f(I_k) \le \omega_f(J_i)$. 同时由**引理6.4** 有

$$\sum_{k \in A_i} |I_k| \le |J_i|.$$

于是有

$$\sum_{k \in A_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| = \sum_{k \in A_i} \omega_f(I_k)|I_k| \le \omega_f(J_i) \sum_{k \in A_i} |I_k| \le \omega_f(J_i)|J_i|.$$

而由B_i的定义易见B_i至多只有两个元素. 因为若有$k_1, k_2, k_3 \in B_i$, 不妨设$k_1 < k_2 < k_3$. 取$y_1 \in I_{k_1} \cap J_i, y_3 \in I_{k_3} \cap J_i$, 则有$x_{k_1-1} \le y_1 \le x_{k_1} \le x_{k_2-1} < x_{k_2} \le x_{k_3-1} \le y_3 \le x_{k_3}$, 从而有$I_{k_2} \subset [y_1, y_3] \subset J_i$, 这与$k_2 \in B_i$ 矛盾. 所以B_i至多只有两个元素。据此我们得到

$$\sum_{k \in B_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \le \sum_{k \in B_i} M|I_k| \le \sum_{k \in B_i} M\lambda(\mathcal{C}) \le 2M\lambda(\mathcal{C}).$$

令$\delta = \frac{\varepsilon}{4NM}$. 将这两个估计式代入上面得到：当$\lambda(\mathcal{C}) < \delta$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| \le \sum_{i=1}^{N} \omega_f(J_i)|J_i| + \sum_{i=1}^{N} 2M\lambda(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{N} \omega_f(J_i)|J_i| + 2NM\lambda(\mathcal{C}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{\lambda(\mathcal{C}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| = 0$. $\Box$

可积性判别的Lebesgue准则

下面我们将从Lebesgue零测集的角度描述函数的可积性.

【定义(零集)】集合$E \subset \mathbb{R}$被称为是一个Lebesgue零测集或零集(null set) 如果对任意$\varepsilon > 0$ 存在可数多个开区间$\{I_k\}_{k \ge 1}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{k \ge 1} I_k \quad 且 \quad \sum_{k \ge 1} |I_k| \le \varepsilon. \qquad \Box$$

【记号说明】我们将用$\{\ \}_{k \ge 1}, \bigcup_{k \ge 1}, \sum_{k \ge 1}$ 分别表示可数集, 可数并 和可数和, 即

$$\{\ \}_{k \ge 1} = \{\ \}_{k=1}^{N} \text{ 或 } \{\ \}_{k=1}^{\infty}, \quad \bigcup_{k \ge 1} = \bigcup_{k=1}^{n} \text{ 或 } \bigcup_{k=1}^{\infty}, \quad \sum_{k \ge 1} = \sum_{k=1}^{n} \text{ 或 } \sum_{k=1}^{\infty}.$$

【注】易见有:

E 是零集$\Longleftrightarrow$ 对任意$\varepsilon > 0$ 存在可数无限多个开区间$\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 且$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| \le \varepsilon$.

事实上由零集的定义知"$\Longleftarrow$"是显然的. 对于"$\Longrightarrow$", 设E 是零集. 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/2 > 0$, 存在可数多个开区间$\{I_k\}_{k\ge1}$ 使得$E \subset \bigcup_{k\ge1} I_k$ 且$\sum_{k\ge1}|I_k| \le \varepsilon/2$. 若$\{I_k\}_{k\ge1} = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, 则证明结束; 若$\{I_k\}_{k\ge1} = \{I_k\}_{k=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}$, 则补充(例如) $I_k = (-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}), k \ge N+1$. 此时有$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| = \sum_{k=1}^{N}|I_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty}|I_k| \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^N} \le \varepsilon. \qquad \square$$

【命题6.5 (零集的基本性质)】

(a) 零集的子集还是零集. 因此空集是零集.

(b) 可数集是零集. 但零集不必是可数集.

(c) 可数多个零集的并集还是零集.

【证】(a): 这是零集的定义的直接推论.

(b): 设E为一个可数集. 不妨设E是可数无限集, 否则将E 扩大成可数无限集. 写$E = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. 对任意$\varepsilon > 0$ 令$I_k = (x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}})$. 则$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

所以E 是一个零集. 下学期学习Lebesgue测度时我们将介绍著名的Cantor集, 它是一个零集但具有连续统(因而不可数).

(c): 为记号统一, 只需考虑有可数无限多个零集的情形(若为有限多个的情形, 则添加可数无限多个空集$E_i = \emptyset$), 即可设E_i 为零集, $i = 1, 2, 3, \dots$. 令$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. 来证明$E$是零集. 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\frac{\varepsilon}{2^i} > 0$, 存在一列开区间$\{I_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ 使得$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^{(i)}$且$\sum_{j=1}^{\infty}|I_j^{(i)}| \le \frac{\varepsilon}{2^i}$. 将可数多个开区间$\{I_j^{(i)}\,|\, i, j \in \mathbb{N}\}$ 排成一列: $I_1, I_2, I_3, \dots$. 则有

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^{(i)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|I_j^{(i)}| = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|I_j^{(i)}|\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

所以E 是零集. $\square$

回忆函数在一点处的振幅: 设函数 $f(x)$ 在区间$I=[a,b]$ 上有定义且有界. 设 $x\in I$,

$$I(x,\delta)=I\cap(x-\delta,x+\delta),\quad \delta>0.$$

由振幅的单调性可知 $\omega_f(I(x,\delta))$关于$\delta\in(0,\infty)$单调不减, 即

$$0<\delta_1<\delta_2 \implies \omega_f(I(x,\delta_1))\le\omega_f(I(x,\delta_2)).$$

因此极限

$$\omega_f(x)=\lim_{\delta\to0}\omega_f(I(x,\delta))=\inf_{\delta>0}\omega_f(I(x,\delta))\ \text{ 存在有限.}$$

我们称 $\omega_f(x)$ 为 f 在点 x处的振幅.

易见f 在x 连续当且仅当$\omega_f(x)=0$. 等价地, f 在x 不连续当且仅当$\omega_f(x)>0$.

【**引理6.6**】设$[a,b]$ 为有界闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 有界. 设一列开区间$\{J_i\}_{i=1}^\infty$覆盖了f的间断点集$D=\{x\in[a,b]\,|\,\omega_f(x)>0\}$ 即$D\subset\bigcup_{i=1}^\infty J_i$. 设$\sigma>0$. 则存在$\delta>0$ 使得对于每个满足$|I|<\delta$ 和$\omega_f(I)\ge\sigma$的闭区间$I\subset[a,b]$, 都存在$i\in\mathbb{N}$ 使得$I\subset J_i$.

【证】**证法1:** 采用**2016级吴雨宸**同学的证法: 取δ为Lebesgue 数. 令C 为f的连续点的集合, 即$C=[a,b]\setminus D$. 对每个$x\in C$, 有 $\lim\limits_{r\to0+}\omega_f((x-r,x+r)\cap[a,b])=\omega_f(x)=0$. 因此存在$r_x>0$ 使得$\omega_f((x-r_x,x+r_x)\cap[a,b])<\sigma$. 这样一来我们得到

$$[a,b]=C\cup D\subset\bigcup_{x\in C}(x-r_x,x+r_x)\cup\bigcup_{i=1}^\infty J_i.$$

根据第四章**命题7 (Lebesgue 数)**, 存在$\delta>0$ 使得对于$[a,b]$中的任何闭子区间I 满足$|I|<\delta$, 都有I 含于某个$(x-r_x,x+r_x)$内或含于某个J_i内. 这里用到: 若写$I=[\alpha,\beta]$, 则有$|I|=\beta-\alpha=\sup\limits_{x,y\in[\alpha,\beta]}|x-y|$. 现在任取闭区间$I\subset[a,b]$ 满足$|I|<\delta$ 和$\omega_f(I)\ge\sigma$. 来证明: 存在$i\in\mathbb{N}$ 使得$I\subset J_i$. 事实上若不然, 则存在$x\in C$ 使得$I\subset(x-r_x,x+r_x)$. 于是有$I\subset(x-r_x,x+r_x)\cap[a,b]$ 从而导致矛盾: $\sigma>\omega_f((x-r_x,x+r_x)\cap[a,b])\ge\omega_f(I)\ge\sigma$.

证法2: 反证法. 假设不然, 则对任意$\delta>0$, 存在闭区间$I_\delta\subset[a,b]$满足$|I_\delta|<\delta$和$\omega_f(I_\delta)\ge\sigma$ 但I_δ 不含于任何J_i中. 对每个$n\in\mathbb{N}$, 取$\delta=1/n$, 则存在闭区间$I_n\subset[a,b]$ 满足$|I_n|<1/n,\omega_f(I_n)\ge\sigma$ 但I_n不完全含于任何J_i中. 令x_n为I_n的中心, 即写

$$I_n=[x_n-|I_n|/2,x_n+|I_n|/2],\quad n=1,2,3,\dots.$$

因$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset [a,b]$ 故由$[a,b]$的列紧性, 存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_0\in [a,b]$ 使得$x_{n_k}\to x_0\,(k\to\infty)$. 对任意$r>0$, 取$k>>1$ 使得$|x_{n_k}-x_0|<r/2, |I_{n_k}|/2<r/2$. 则易见有

$$I_{n_k}=[x_{n_k}-|I_{n_k}|/2,\, x_{n_k}+|I_{n_k}|/2]\subset (x_0-r,x_0+r)$$

从而有

$$I_{n_k}\subset (x_0-r,x_0+r)\cap[a,b],\quad \omega_f((x_0-r,x_0+r)\cap[a,b])\ge \omega_f(I_{n_k})\ge\sigma.$$

于是得到

$$\omega_f(x_0)=\lim_{r\to 0+}\omega_f((x_0-r,x_0+r)\cap[a,b])\ge\sigma>0.$$

这表明$x_0\in D$. 因此存在$i\in\mathbb{N}$ 使得$x_0\in J_i$. 写$J_i=(\alpha_i,\beta_i)$. 取$k>>1$使得

$$|x_{n_k}-x_0|, |I_{n_k}|/2<\frac{1}{2}\min\{x_0-\alpha_i,\beta_i-x_0\}.$$

则有

$$I_{n_k}=[x_{n_k}-|I_{n_k}|/2,\, x_{n_k}+|I_{n_k}|/2]\subset(\alpha_i,\beta_i)=J_i.$$

这与每个I_n 都不完全含于任何J_i中矛盾. 这矛盾证明了命题成立. □

【“几乎处处”(almost everywhere)】设$E\subset\mathbb{R}$, $P=P(x)$是一个与$x\in E$有关的性质. 如果集合

$$\{x\in E\,|\,P(x)\,\text{不成立}\}\quad \text{是零集}$$

则称性质P 在E 上几乎处处成立.

因空集是零集, 故“处处成立”当然也是“几乎处处成立”.

【例】设$I\subset\mathbb{R}$ 为区间, $f,g:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

(1) 若f的间断点的集合$D=\{x\in I\,|\,\omega_f(x)>0\}$ 是零集, 则称f在I上几乎处处连续.

(2) 若$\{x\in I\,|\,f(x)\,\text{在}x\text{ 不可导}\}$ 是零集, 则称f在I 上几乎处处可导.

(3) 若$\{x\in I\,|\,f(x)\ne g(x)\}$ 是零集, 则称f,g在I 上几乎处处相等.

(4) 若$\{x\in I\,|\,f(x)\ge g(x)\}$ 是零集, 则称$f(x)<g(x)$ 几乎处处于I.

【定理6.8(Lebesgue准则)】设函数f在有界闭区间$[a,b]$上有界. 则

$$f\text{ 在}[a,b]\text{上可积}\iff f\text{ 在}[a,b]\text{上几乎处处连续.}$$

【证】“$\Longrightarrow$”：设$f \in \mathcal{R}([a,b])$. 要证f的间断点集$D=\{x\in[a,b]\,|\,\omega_f(x)>0\}$是零集. 为此, 令

$$D_\sigma=\{x\in[a,b]\,|\,\omega_f(x)\ge\sigma\},\quad \sigma>0.$$

则有分解:

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{1/n}.$$

根据**命题6.5(零集的基本性质)**知, 为证D是零集, 只需证明每个$D_{1/n}$ 都是零集. 因此只需一般地证明对任意$\sigma>0$, D_σ 是零集. 固定$\sigma>0$, 来证明D_σ 是零集. 对任意$\varepsilon>0$, 对$\sigma\varepsilon/2>0$, 由**命题6.4(可积性的振幅刻画)** 知存在$[a,b]$的分划$\mathcal{C}:[a,b]=\bigcup_{k=1}^n I_k$, $I_k=[x_{k-1},x_k]$, 使得

$$\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|<\frac{\sigma\varepsilon}{2}.$$

令$I_k^\circ=(x_{k-1},x_k)$, $k=1,2,...,n$;

$$J_k=\Big(x_k-\frac{\varepsilon}{4(n+1)},\,x_k+\frac{\varepsilon}{4(n+1)}\Big),\quad k=0,1,...,n.$$

则由$D_\sigma\subset[a,b]=\bigcup_{k=1}^n I_k$ 知对任意$x\in D_\sigma$, 若x 不属于分划的分点$\{x_0,x_1,...,x_n\}$则x必属于某个I_k°. 因此有包含关系:

$$D_\sigma\subset\bigcup_{k\in A}I_k^\circ\cup\bigcup_{k=0}^n J_k \tag{6.11}$$

其中

$$A=\{k\in\{1,2,...,n\}\,|\,D_\sigma\cap I_k^\circ\neq\emptyset\}.$$

易见对每个$k\in A$有$\omega_f(I_k)\ge\sigma$. 事实上对每个$k\in A$, 可取一点$\xi_k\in D_\sigma\cap I_k^\circ$, 从而对于充分小的$r>0$有$(\xi_k-r,\xi_k+r)\subset I_k^\circ\subset I_k$. 于是有

$$\omega_f(I_k)\ge\omega_f(I_k^\circ)\ge\omega_f((\xi_k-r,\xi_k+r))\ge\omega_f(\xi_k)\ge\sigma.$$

据此我们得到估计:

$$\sum_{k\in A}|I_k|=\frac{1}{\sigma}\sum_{k\in A}\sigma|I_k|\le\frac{1}{\sigma}\sum_{k\in A}\omega_f(I_k)|I_k|\le\frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^n\omega_f(I_k)|I_k|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而由J_k的取法有

$$\sum_{k=0}^n|J_k|=(n+1)\frac{\varepsilon}{2(n+1)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

因$|I_k^\circ| = |I_k|$ 故得到

$$\sum_{k\in A} |I_k^\circ| + \sum_{k=0}^{n} |J_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

再联合开区间覆盖(6.11)即知D_σ 是零集.

"$\Longleftarrow$"：设f在$[a,b]$ 上几乎处处连续, 也即间断点集D是一个零集. 则由零集定义下面的**注** 知: 对任意$\varepsilon > 0$, 存在一列开区间$\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$使得

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |J_i| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

其中$M = \omega_f([a,b])$ 是最大振幅(当$\omega_f([a,b]) = 0$时取$M = 1$). 令$\sigma = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 由**引理6.6**知对此$\sigma > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得对于每个满足$|I| < \delta$ 和$\omega_f(I) \ge \sigma$的闭区间$I \subset [a,b]$, 都存在$i \in \mathbb{N}$ 使得$I \subset J_i$. 现在对于$[a,b]$的分划$\mathcal{C}$: $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$满足$\lambda(\mathcal{C}) < \delta$, 令

$$A = \{k \in \{1,2,...,n\} \,|\, \omega_f(I_k) < \sigma\}, \quad B = \{k \in \{1,2,...,n\} \,|\, \omega_f(I_k) \ge \sigma\}.$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| &= \sum_{k\in A}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| + \sum_{k\in B}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| \\ &\le \sigma \sum_{k\in A}^{n} |I_k| + M \sum_{k\in B}^{n} |I_k| \le \sigma(b-a) + M \sum_{k\in B}^{n} |I_k|.\end{aligned}$$

注意对每个$k \in B$ 有$\omega_f(I_k) \ge \sigma$ 且$|I_k| \le \lambda(\mathcal{C}) < \delta$, 故由上面的分析结果知存在$i \in \mathbb{N}$ 使得$I_k \subset J_i$. 这就给出不等式:

$$\text{当}\, k \in B \,\text{时} \quad 1 \le \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{I_k \subset J_i\}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k\in B}^{n} |I_k| &\le \sum_{k\in B}^{n} |I_k| \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{I_k\subset J_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k\in B} |I_k| 1_{\{I_k\subset J_i\}} \Big) \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k:\, I_k\subset J_i} |I_k| \Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} |J_i| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \Big(\text{用到}\textbf{引理6.4}\Big).\end{aligned}$$

由此和$\sigma(b-a) = \varepsilon/2$ 即得：当$\lambda(\mathcal{C}) < \delta$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| < \sigma(b-a) + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)|I_k|=0.$$

据**命题6.4(可积性的振幅刻画)**知f在$[a,b]$ 上可积. $\square$

因有界闭区间上的连续函数是有界的, 故下面是Lebesgue 准则的

【Lebesgue准则的重要推论1】

有界闭区间$[a,b]$上的连续函数都是可积的, 即$C([a,b])\subset\mathcal{R}([a,b])$. $\square$

【Lebesgue准则的重要推论2】

若f是有界闭区间$[a,b]$上的单调函数, 则f在$[a,b]$上可积.

【证】留为作业. $\square$

Lebesgue准则是一个强有力的工具! 下面我们应用这一准则建立一些函数的可积性.

【命题6.9.】设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$.

(a) 若 $f(x),g(x)$ 都在$[a,b]$上可积, c为常数, 则函数$|f(x)|, cf(x), f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ 也都在$[a,b]$上可积. 若进一步假设存在$m>0$ 使得$|g(x)|\ge m\ \forall x\in[a,b]$, 则$f(x)/g(x)$也在$[a,b]$上可积.

(b) 设$[A,B]$为有界闭区间, $\Phi:[A,B]\to\mathbb{C}$ 连续, 又设$f(x)$在$[a,b]$上可积且$A\le f(x)\le B\ \forall x\in[a,b]$. 则复合函数$\Phi(f(x))$ 也在$[a,b]$)上可积.

【证】对于可积性的证明, 我们将使用Lebesgue 准则. 因此我们将考察函数$f:[a,b]\to\mathbb{C}$的连续点的集合C_f 和间断点集D_f, 即

$$D_f=[a,b]\setminus C_f=\{x\in[a,b]\,|\,\omega_f(x)>0\}.$$

(a): 由函数连续性的定义易见: 若f在点x处连续, 则$|f|, cf$ 也在x连续. 因此
$C_f\subset C_{|f|}$, $C_f\subset C_{cf}$, 也即

$$D_{|f|}\subset D_f,\quad D_{cf}\subset D_f.$$

同理若f,g 都在点x 处连续, 则$f+g, fg$ 也都在点x 处连续. 因此$C_f\cap C_g\subset C_{f+g}, C_f\cap C_g\subset C_{fg}$, 也即

$$D_{f+g}\subset D_f\cup D_g,\quad D_{fg}\subset D_f\cup D_g.$$

由假设和Lebesgue 准则知f,g都在$[a,b]$ 上有界且D_f, D_g都是零集, 因此$|f|, cf, f+g, fg$ 也都在$[a,b]$ 上有界且$D_{|f|}, D_{cf}, D_{f+g}, D_{fg}$ 也都是零集. 所以$|f|, cf, f+g, fg$都在$[a,b]$上可积.

同理若进一步假设存在$m>0$ 使得$|g(x)|\ge m\ \ \forall x\in[a,b]$, 则$f/g$在$[a,b]$ 上有界, 且有$C_f\cap C_g\subset C_{f/g}$ 也即

$$D_{f/g}\subset D_f\cup D_g$$

因此$D_{f/g}$是零集, 从而由Lebesgue准则知f/g也在$[a,b]$上可积.

(b): 由假设知复合函数$\Phi\circ f:[a,b]\to\mathbb{C}$在$[a,b]$ 上有界, 并且若f在点$x\in[a,b]$连续, 则复合函数$\Phi\circ f$也在x连续, 因此$C_f\subset C_{\Phi\circ f}$, 即

$$D_{\Phi\circ f}\subset D_f$$

从而$D_{\Phi\circ f}$ 也是零集. 因此由Lebesgue准则知复合函数$\Phi\circ f$在$[a,b]$上可积. $\square$

§6.2. Riemann积分的简单性质

本小节学习可积函数的几个基本性质: 子集上的积分, 有限可加性, 积分的线性性, 积分的单调性, 常用的积分不等式, 变上限积分的连续性.

【命题6.10.】 设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$. 则有

(a) (子集上的积分) 若 f在$[a,b]$ 上可积, 则f在任意子区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$上可积且

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b 1_{[\alpha,\beta]}(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b 1_{[\alpha,\beta)}(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b 1_{(\alpha,\beta)}(x)f(x)\mathrm{d}x. \quad (6.12)$$

(b)(积分的可加性) 设$a<c<b$ 且f分别在$[a,c],[c,b]$上可积, 则f在$[a,b]$上可积且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(c)(积分的线性性) 若 $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, c 为常数, 则

$$\int_a^b(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(d) f在$[a,b]$上可积$\Longleftrightarrow$ f的实部$\mathrm{Re}(f)$、虚部$\mathrm{Im}(f)$ 都在$[a,b]$上可积, 且在可积时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b\mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x. \quad (6.13)$$

【证】先证(c)(积分的线性性): 设$f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, C_1,C_2 为常数. 则由**命题6.9**知$C_1f+C_2g\in\mathcal{R}([a,b])$. 作分划序列

$$\mathcal{C}_n:\quad a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}=b,\quad \lambda(\mathcal{C}_n)\to 0\,(n\to\infty).$$

由可积性有

$$\begin{aligned}&\int_a^b\Big(C_1f(x)+C_2g(x)\Big)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\Big(C_1f(x_k^{(n)})+C_2g(x_k^{(n)})\Big)\Delta x_k^{(n)}\\&=C_1\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}+C_2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n g(x_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}\\&=C_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+C_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这就证明了积分的线性性.

(a)(子集上的积分): 设$f \in \mathcal{R}([a,b]), [\alpha,\beta] \subset [a,b]$. 易见若$x \in [\alpha,\beta]$是$f|_{[\alpha,\beta]}$的间断点, 则$x$ 一定是f在$[a,b]$ 上的一个间断点. 因此$D_{f|_{[\alpha,\beta]}} \subset D_f$. 所以由Lebesgue准则知$f|_{[\alpha,\beta]}$在$[\alpha,\beta]$ 上可积, 也即f在$[\alpha,\beta]$ 上可积. 令g 是四个特征函数$1_{[\alpha,\beta]}, 1_{[\alpha,\beta)}, 1_{(\alpha,\beta]}, 1_{(\alpha,\beta)}$中的任何一个. 易见$g$ 在$\mathbb{R}$ 上只有两个间断点α,β, 因此它在$\mathbb{R}$中的任何有界闭区间上都是可积的. 因此由(a) 知乘积$g(x)f(x)$在$[a,b]$ 上可积. 既然已可积, 我们就可以方便地选取分划和选点: 注意$a \le \alpha < \beta \le b$, 作$[a,b]$的分划, 分为三段, 每段$n$-等分($n > 2$):

$$a = y_0^{(n)} < y_1^{(n)} < \cdots < y_n^{(n)} = \alpha = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = \beta = z_0^{(n)} < z_1^{(n)} < \cdots < z_n^{(n)} = b$$

其中当$a = \alpha$时, 第一段不出现; 当$\beta = b$ 时, 第三段不出现. 取

$$\xi_k^{(n)} = x_k^{(n)}, \quad k = 1,2,...,n-1,; \qquad \xi_n^{(n)} \in (x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)}).$$

则$\xi_k^{(n)} \in (\alpha,\beta), k = 1,2,...,n$. 由$g$的定义知当$a < \alpha, \beta < b$ 时

$$g(y_{k-1}^{(n)}) = 0, \quad g(z_k^{(n)}) = 0, \quad k = 1,2,...,n$$

故有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} = &\sum_{k=1}^{n} g(y_{k-1}^{(n)})f(y_{k-1}^{(n)})\Delta y_k^{(n)}\\ &+\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k^{(n)})f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}\\ &+\sum_{k=1}^{n} g(z_k^{(n)})f(z_k^{(n)})\Delta z_k^{(n)}.\end{aligned}$$

而当$a = \alpha$ 时, 上式右边第一项不出现; 当$\beta = b$ 时, 上式右边第三项不出现. 令$n \to \infty$知上式左边趋于$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$, 右边趋于$\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x$. 所以

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

因g 是四个特征函数$1_{[\alpha,\beta]}, 1_{[\alpha,\beta)}, 1_{(\alpha,\beta]}, 1_{(\alpha,\beta)}$ 中的任何一个, 所以(6.12) 成立.

(b)(积分的可加性): 设f在$[a,b]$上可积. 则由(a) 知f在$[a,c],[c,b]$ 上都可积. 反之设f分别在$[a,c],[c,b]$上可积. 则由可积性易见f在$[a,b]$上有界. 而对任意点$x \in (a,c)$ 易见x是f的连续点当且仅当x 是$f|_{[a,c]}$的连续点, 同样对任意点$x \in (c,b)$ 有: x 是f的连续点当且仅当x 是$f|_{[c,b]}$的连续点. 于是得到$D_f \subset \{c\} \cup D_{f|_{[a,c]}} \cup D_{f|_{[c,b]}}$. 因后者是三个零集的并故$D_f$ 是零集. 因此由Lebesgue 准则知f在$[a,b]$上可积.

现在设f在$[a,b]$ 上可积. 则由恒等式$1=1_{[a,c)}(x)+1_{[c,b]}(x), x\in[a,b]$ 有

$$f(x)=1_{[a,c)}(x)f(x)+1_{[c,b]}(x)f(x)\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

因此由积分的线性性和子集上的积分等式(6.12) 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b 1_{[a,c)}(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b 1_{[c,b]}(x)f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(d): 令$f_1(x)=\mathrm{Re}(f(x)), f_2(x)=\mathrm{Im}(f(x))$. 则有$f=f_1+\mathrm{i}f_2$,

$$\begin{aligned}&|f_1(x)-f_1(y)|\le|f(x)-f(y)|,\quad |f_2(x)-f_2(y)|\le|f(x)-f(y)|,\\ &|f(x)-f(y)|\le|f_1(x)-f_1(y)|+|f_2(x)-f_2(y)|.\end{aligned}$$

因此f在点x 连续当且仅当f_1,f_2都在点x 连续, 或等价地, f在点x间断当且仅当f_1,f_2中至少有一个在点x间断. 因此$D_f=D_{f_1}\cup D_{f_2}$. 又显然f在$[a,b]$上有界当且仅当f_1,f_2都在$[a,b]$上有界. 因此由Lebesgue 准则和零集的性质即知$f\in\mathcal{R}([a,b])\iff f_1,f_2\in\mathcal{R}([a,b])$. 而当两边之一的可积性被满足时, 由积分的线性性即得等式(6.13). $\square$

应用归纳法可将可加性和线性性推广如下:

设$f:[a,b]\to\mathbb{C}$, $a=c_0<c_1<\cdots<c_{n-1}<c_n=b$. 则$f$在$[a,b]$上可积$\iff f$在每个$[c_{k-1},c_k]$ 上可积, $k=1,2,...,n$. 当两边之一满足(从而两边都满足)时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_{c_{k-1}}^{c_k}f(x)\mathrm{d}x,$$

设$f_1,f_2,...,f_m\in\mathcal{R}([a,b])$, 则有

$$\int_a^b\sum_{k=1}^m f_k(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^m\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

【记号约定】

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}\mathrm{d}x=\int_I\mathrm{d}x=b-a=|I|,\quad \text{其中 } I=[a,b].$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \quad \text{当 } b < a \text{ 时}; \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

按照这个约定, 若$f \in \mathcal{R}([A, B])$, 则对任意$a, b, c \in [A, B]$ 都有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【命题6.11】设$[a, b] \subset \mathbb{R}$为有界闭区间, f, g 为$[a, b]$上的实值或复值函数. 则有

(a)(单调性)

$$\text{若 } f \in \mathcal{R}([a, b]) \text{ 且 } f \ge 0 \text{ 于}[a, b], \text{ 则} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0.$$

一般地,

$$\text{若 } f, g \in \mathcal{R}([a, b]) \text{ 且 } f \le g \text{ 于}[a, b], \text{ 则} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(b)(单调性) 设$0 \le f \in \mathcal{R}([a, b])$. 则$f$在小区间上的积分也小. 即

$$[\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad \Longrightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(c) 若$f \in \mathcal{R}([a, b])$, 则

$$\Big|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

【证】(a): 设$f \ge 0$ 于$[a, b]$. 则对任意分划$\mathcal{C}: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 对应的Riemann 和便是非负的: $\mathcal{R}(f, \mathcal{C}, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. 因此其极限(当$\lambda(\mathcal{C}) \to 0$ 时) 也是非负的, 即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

一般情形, 设$f, g \in \mathcal{R}([a, b])$且$f \le g$ 于$[a, b]$. 则$g - f \ge 0$ 于$[a, b]$ 从而由积分的线性性有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \ge 0.$$

(b): 设$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. 则由$f \ge 0$ 有

$$1_{[\alpha,\beta]}(x)f(x) \le f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

从而有

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 1_{[\alpha,\beta]}(x)f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(c): 设$f \in \mathcal{R}([a,b])$. 采用W. Rudin教授在其《实分析与复分析》中的证法: 令$z = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 则由复数的极坐标表示知存在$\theta \in [0,2\pi)$使得$z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$ 即$|z| = e^{-\mathrm{i}\theta}z$. 于是得到(结合积分的线性性)

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big| = e^{-\mathrm{i}\theta}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-\mathrm{i}\theta} f(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta} f(x))\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(e^{-\mathrm{i}\theta} f(x))\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta} f(x))\mathrm{d}x \qquad \Big(\text{因实数的虚部为零}\Big)\\
&\le \int_a^b |\mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta} f(x))|\mathrm{d}x \le \int_a^b |e^{-\mathrm{i}\theta} f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \qquad \Box
\end{aligned}$$

下面的例题很重要, 其证明过程说明积分是很好的工具.

【例♣】设$I = [a,b]$ 为有界闭区间($a < b$), $I_k = (a_k, b_k)$ 为有界开区间, $k = 1, 2, ..., n$ 且$I \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$. 则有

$$|I| \le \sum_{k=1}^n |I_k| \qquad \text{即} \qquad b - a \le \sum_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

【证】由$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$ 和特征函数的定义有

$$1_{[a,b]}(x) \le \sum_{k=1}^n 1_{(a_k,b_k)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

如前已说, 任何有界区间J 的特征函数$x \mapsto 1_J(x)$ 在$\mathbb{R}$上只有两个间断点, 因此它在$\mathbb{R}$中的任何有界闭区间上都是可积的. 取$-\infty < A < B < +\infty$ 使得

$$[a,b], (a_k, b_k) \subset (A, B), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

则由积分的单调性和线性性有

$$\begin{aligned}
b - a &= \int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_A^B 1_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x \le \int_A^B \sum_{k=1}^n 1_{(a_k,b_k)}(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^n \int_A^B 1_{(a_k,b_k)}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} 1\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k). \qquad \Box
\end{aligned}$$

下面的命题是**例♣**的一个重要应用:

【**命题6.12(零集的余集是稠密集)**】设$Z\subset\mathbb{R}$ 为一个零集. 则 $Z^c=\mathbb{R}\setminus Z$ 在$\mathbb{R}$中稠密, 即对任意区间$(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, 都有$(\alpha,\beta)\setminus Z\neq\emptyset$.

【证】反证法: 假设$(\alpha,\beta)\setminus Z=\emptyset$. 则$(\alpha,\beta)\subset Z$. 取$\alpha<a<b<\beta$, 则$[a,b]\subset(\alpha,\beta)\subset Z$, 从而可知$[a,b]$ 也是零集. 因此对任意$0<\varepsilon\le(b-a)/2$ 存在一列开区间$\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 且$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon$. 因$[a,b]$ 是紧集, 故由有限覆盖定理知存在$n\in\mathbb{N}$ 使得$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{n}I_k$. 于是由(1) 有

$$b-a\le\sum_{k=1}^{n}|I_k|<\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon\le\frac{b-a}{2}$$

这矛盾于$b-a>0$. 因此Z^c 在$\mathbb{R}$中稠密. $\square$

下面的例题是**例♣**的另一个应用, 它在研究Riemann可积性问题时有用.

【**例**】设$[a,b]$ 为有界闭区间$(a<b)$, $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$是(a,b)中的一列开区间且$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<(b-a)/2$. 令$K=[a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. 则$K$是紧集且不是零集.

【证】因$K=[a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=[a,b]\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n)^c$ 是两个闭集的交且有界, 所以K 是$\mathbb{R}$中的有界的闭集, 因此是紧集. 为证K 不是零集, 我们用反证法. 假设K 是零集, 则对于$(b-a)/4>0$, 存在可数个开区间$\{J_k\}_{k\ge1}$ 使得$K\subset\bigcup_{k\ge1}J_k$ 且$\sum_{k\ge1}|J_k|<(b-a)/4$. 由$K$的定义知这蕴含

$$[a,b]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\bigcup\bigcup_{k\ge1}J_k.$$

根据有限覆盖定理知存在$N,M\in\mathbb{N}$ 使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{n=1}^{N}I_n\bigcup\bigcup_{k=1}^{M}J_k.$$

因此由上面例题知

$$b-a\le\sum_{n=1}^{N}|I_n|+\sum_{k=1}^{M}|J_k|\le\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|+\sum_{k\ge1}|J_k|<(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})(b-a)=\frac{3}{4}(b-a)$$

矛盾于$0<b-a<+\infty$. 这矛盾证明了K 不是零集. $\square$

下面这个性质说明了积分的一个特点.

【**命题6.13**】设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$. 则有:

$$f\text{ 在}[a,b]\text{上几乎处处等于 }0\iff\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

$$f, g\text{ 在}[a,b]\text{ 上几乎处处相等 } \iff \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

特别有

$$\text{若 } f, g\text{ 在}[a,b]\text{ 上几乎处处相等, 则 } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

【证】先证第一个性质. 设

$$Z = \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\}.$$

假设f 在$[a,b]$ 上几乎处处等于0, 即Z 是零集. 则由**命题6.12(零集的余集稠密)**知Z^c在$\mathbb{R}$中稠密. 对于$[a,b]$的任意分划$\mathcal{C}$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 由$Z^c$在$\mathbb{R}$的稠密性可取点$\xi_k \in (x_{k-1}, x_k) \setminus Z, k = 1, 2, ..., n$. 于是$f(\xi_k) = 0, k = 1, 2, ..., n$ 从而有

$$\mathcal{R}(|f|, \mathcal{C}, \xi) = \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta x_k = 0.$$

因此

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta x_k = 0.$$

反之设$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = 0$. 来证明$Z$ 是零集. 先证明f在自己的每个连续点处为0. 假设f有某个连续点$x_0 \in [a,b]$ 使得$|f(x_0)| > 0$, 则由$|f|$的连续性, 存在$\delta > 0$ 使得

$$\text{当 } x \in I(x_0) := [a,b] \cap [x_0-\delta, x_0+\delta]\text{ 时, } |f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)|.$$

对这不等式两边取积分并注意区间长$|I(x_0)| > 0$, 得到矛盾:

$$0 = \int_{[a,b]} |f(x)|\mathrm{d}x \geq \int_{I(x_0)} |f(x)|\mathrm{d}x \geq \frac{|f(x_0)|}{2}\int_{I(x_0)} 1\mathrm{d}x = \frac{|f(x_0)|}{2}|I(x_0)| > 0.$$

这矛盾便证明了f在自己的每个连续点处为0. 于是得到$Z \subset D_f$ 这里D_f 是f的间断点的集合. 因D_f 是零集, 所以Z 是零集.

设f, g在$[a,b]$上几乎处处相等. 将第一个性质应用于可积函数$f-g$ 即知第二个性质成立. 于是有积分的可加性和积分不等式以及第二个性质即得

$$\Big|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\Big| \leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. □

下面命题也常用, 它说明可积性和积分值属于宏观行为, 不受某类零集的影响.

【**命题6.14**】设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, $Z\subset[a,b]$ 是一个零集且是**闭集** (例如Z 是有限集), 设$f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ 有界且满足$f(x)=g(x)\quad\forall\, x\in[a,b]\setminus Z$. 则

$$f\text{在}[a,b]\text{上可积}\iff g\text{在}[a,b]\text{上可积}.$$

而当f在$[a,b]$上可积时(或等价地当g在$[a,b]$上可积时) 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{6.14}$$

【证】因Z 是零集, 故f,g在$[a,b]$上几乎处处相等. 于是如果f,g 都在$[a,b]$ 上可积, 则由**命题6.13**知积分等式(6.14)成立.

因此只需证明本命题的第一部分. 设D_f,D_g 为f,g在$[a,b]$ 上的间断点集. 来证明

$$D_g\subset D_f\cup Z\cup\{a,b\},\quad D_f\subset D_g\cup Z\cup\{a,b\}. \tag{6.15}$$

因地位对称, 只需证第一个. 反证法: 假设$D_g\not\subset D_f\cup Z\cup\{a,b\}$. 则存在$x_0\in D_g$ 使得$x_0\not\in D_f\cup Z\cup\{a,b\}$. 则$x_0\in(a,b)\setminus Z$. 因$Z$是闭集, 故$(a,b)\setminus Z$ 是开集. 因此存在$\delta>0$ 使得$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)\setminus Z$. 于是有

$$g(x)=f(x)\quad\forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

因x_0是f的连续点, 故

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=g(x_0).$$

这表明x_0 也是g的一个连续点, 与$x_0\in D_g$矛盾. 这矛盾证明了$D_g\subset D_f\cup Z\cup\{a,b\}$. 所以(6.15) 成立.

由(6.15) 和零集的性质知D_f 是零集$\iff D_g$ 是零集. 于是再由f,g 都在$[a,b]$上有界和Lebesgue 准则即知f在$[a,b]$上可积$\iff g$在$[a,b]$上可积. $\Box$

【**命题6.15(严格单调性)**】

设$f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ 且$f(x)<g(x)$ 处处于(a,b), 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

【证】考虑开区间(a,b)的特征函数$1_{(a,b)}(x)$: 令

$$h(x)=1_{(a,b)}(g(x)-f(x)),\quad x\in[a,b].$$

则由假设知

$$h(x)\ge 0\quad \forall\, x\in[a,b];\qquad h(x)>0\quad \forall\, x\in(a,b).$$

同时由积分的线性性和**命题6.10.**(a) 有　(显然$h\in\mathcal{R}([a,b])$)

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x=\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

[或者由**命题6.14** 知在有限多个点处修改函数值不影响可积性和积分值. 故我们可以修改f在端点a,b 处的值使得$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 其他点处的函数值不变. 则修改后的f仍可积且积分值不变并使得不等式$f(x)\le g(x)$ 在$[a,b]$上处处成立. 然后令$h(x)=g(x)-f(x), x\in[a,b]$.]

来证明

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x>0.$$

由h可积知D_h是零集. 因此$(a,b)\setminus D_h$非空. 取$x_0\in(a,b)\setminus D_h$. 则h在x_0连续且$h(x_0)=g(x_0)-f(x_0)>0$. 因此存在$\delta>0$ 使得$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(a,b)$ 且

$$\text{当}x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\text{时}\ h(x)\ge\frac{1}{2}h(x_0).$$

由h的非负性和积分的单调性有

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}h(x)\mathrm{d}x\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{1}{2}h(x_0)\mathrm{d}x=h(x_0)\delta>0.$$

这就证明了$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.　　□

下面命题中带人名的不等式是最常用的积分不等式.

【命题6.16】设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$. 则成立

(a) Cauchy-Schwartz 不等式:

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big|\le\Big(\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b|g(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

一般地有**Hölder 不等式:** 若$p>1,q>1$且$1/p+1/q=1$, 则

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big|\le\Big(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}.$$

(b) 三角不等式 (也称为**Minkowski不等式**): 若$1\le p<\infty$, 则

$$\Big(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\le\Big(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}+\Big(\int_a^b|g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

【证】(a): 直接证明Hölder 不等式. 令

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}, \quad \|g\|_q = \Big(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\Big)^{1/q}.$$

若$\|f\|_p = 0$ 或$\|g\|_q = 0$, 则由上面的**命题6.13** 知$|f(x)|^p$ 或$|g(x)|^q$在$[a,b]$ 上几乎处处等于零, 从而乘积$f(x)g(x)$ 在$[a,b]$ 上几乎处处等于零, 因此由**命题6.13** 知

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 0\mathrm{d}x = 0.$$

此时Hölder 不等式实为“$0 = 0$”.

设$\|f\|_p > 0$ 且$\|g\|_q > 0$.　此时我们先设$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, 即

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x = \|f\|_p^p = 1, \quad \int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x = \|g\|_q^q = 1.$$

回忆Young 不等式:

$$AB \le \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \qquad \forall\, A, B \ge 0.$$

由这个不等式有

$$|f(x)||g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}, \quad x \in [a,b].$$

两边取积分, 应用积分的单调性和线性性得到

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

于是得到

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|\mathrm{d}x \le 1.$$

对一般情形, 考虑单位化

$$\widetilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}, \qquad \widetilde{g}(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}.$$

则$\|\widetilde{f}\|_p = \|\widetilde{g}\|_q = 1$, 因此由上面结果和$f(x) = \|f\|_p \widetilde{f}(x), g(x) = \|g\|_q \widetilde{g}(x)$ 即得

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big| = \|f\|_p\|g\|_q\Big|\int_a^b \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)\mathrm{d}x\Big| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

(b): 如上, 为缩短记号, 令$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}$. 则上述三角不等式可写成

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

当$p=1$时, 这三角不等式是显然的:

$$
\begin{aligned}
&|f(x)+g(x)|\le |f(x)|+|g(x)| \implies \\
&\int_a^b |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

下设$1<p<+\infty$. 令$q=p/(p-1)$. 则$p>1, q>1, 1/p+1/q=1$. 作分拆：

$$
\begin{aligned}
&(|f(x)|+|g(x)|)^p = (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|) \\
&= (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|f(x)| + (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|g(x)|.
\end{aligned}
$$

应用Hölder 不等式并注意$(p-1)q=p$ 和$\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$ 有

$$
\begin{aligned}
&\|\,|f|+|g|\,\|_p^p = \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|g(x)|\mathrm{d}x \\
&\le \Big(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\Big)^{1/q}\Big(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \\
&+\Big(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\Big)^{1/q}\Big(\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\mathrm{d}x\Big)^{1/q}(\|f\|_p+\|g\|_p) \\
&= \|\,|f|+|g|\,\|_p^{p-1}(\|f\|_p+\|g\|_p).
\end{aligned}
$$

这就给出估计:

$$\|\,|f|+|g|\,\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p.$$

最后由$|f(x)+g(x)|\le |f(x)|+|g(x)|$ 即得

$$\|f+g\|_p \le \|\,|f|+|g|\,\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p. \qquad \square$$

【命题6.17(变上/下限积分的连续性)】设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, $f\in\mathcal{R}([a,b])$. 取定一点$c\in[a,b]$. 称函数

$$F(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad x\in[a,b].$$

为f的变上限积分或不定积分. 令$L=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\,(<+\infty)$. 则有

$$|F(x)-F(y)|\le L|x-y| \qquad \forall\, x,y\in[a,b].$$

因此变上限积分$F(x)$在$[a,b]$上是Lipschitz 连续的.

【证】对任意$x,y\in[a,b]$, 可设$x\neq y$. 设例如$x<y$, 则由积分的可加性有

$$F(y)=\int_c^y f(t)\mathrm{d}t=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^y f(t)\mathrm{d}t=F(x)+\int_x^y f(t)\mathrm{d}t$$

从而由积分不等式有

$$|F(x)-F(y)|=\Big|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\Big|\leq\int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t\leq\int_x^y L\mathrm{d}t=L(y-x)=L|x-y|.\qquad\square$$

§6.3. 积分估值, 中值定理

本节学习积分估值和积分中值定理.

【命题6.18.】 设$[a,b]\subset\mathbb{R}$为有界闭区间, 实函数$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在$[a,b]$ 上可积, 且g在$[a,b]$上非负, 即$g(x)\ge 0\quad\forall\,x\in[a,b]$.

(a) 若$m\le f(x)\le M\quad\forall\,x\in[a,b]$, 则

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(b)(积分第一中值定理) 若f在$[a,b]$上连续, 则存在$\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{6.16}$$

【证】(a): 由假设有$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)\ \forall\,x\in[a,b]$. 取积分即得(a)中的积分不等式.

(b): 首先看一个平凡的情形: $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$. 此时由$g$非负知$g(x)$在$[a,b]$上几乎处处等于零(**命题6.13**), 从而$f(x)g(x)$也在$[a,b]$上几乎处处等于零, 因而有$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$. 此时显然任意$\xi\in(a,b)$ 都使等式(6.16)成立.

以下设$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$.

由f连续, 存在$\alpha,\beta\in[a,b]$ 使得

$$f(\alpha)=\min_{x\in[a,b]}f(x),\quad f(\beta)=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

则由已证的(a) 知

$$f(\alpha)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le f(\beta)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

令

$$\Phi(t)=f(t)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,\quad t\in[a,b].$$

则Φ在$[a,b]$ 上连续且

$$\Phi(\alpha)\le 0\le\Phi(\beta).$$

以下分两种情形证明.

Case 1:

$$\Phi(\alpha)<0<\Phi(\beta).$$

此时有$\alpha \neq \beta$, 因此由连续函数介值定理知存在$\xi \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ 或$\xi \in (\beta, \alpha) \subset (a, b)$ 使得$\Phi(\xi) = 0$.

Case 2:

$$\Phi(\alpha) = 0 \quad \text{或} \quad \Phi(\beta) = 0.$$

先设$\Phi(\alpha) = 0$. 来证明存在$\xi \in (a, b)$ 使得$f(\xi) = f(\alpha)$, 从而有$\Phi(\xi) = \Phi(\alpha) = 0$.

假设这样的$\xi \in (a, b)$ 不存在, 即对任意$x \in (a, b)$都有$f(x) > f(\alpha)$, 那么由等式

$$\int_a^b (f(x) - f(\alpha))g(x)\mathrm{d}x = -\Phi(\alpha) = 0$$

和非负性$f(x) - f(\alpha) \geq 0, g(x) \geq 0$ 于$[a, b]$ 以及**命题6.13**可知$(f(x) - f(\alpha))g(x)$ 在$[a, b]$ 上几乎处处等于零, 也即

$$Z = \{x \in [a, b] \,|\, (f(x) - f(\alpha))g(x) > 0\}$$

是一个零集. 但因$f(x) - f(\alpha) > 0 \ \forall x \in (a, b)$, 故有

$$\{x \in [a, b] \,|\, g(x) > 0\} \subset Z \cup \{a, b\}$$

从而$\{x \in [a, b] \,|\, g(x) > 0\}$ 也是零集, 即$g(x)$在$[a, b]$ 上几乎处处等于零, 从而有$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$. 但这与前面的假设矛盾. 这矛盾证明了上述$\xi \in (a, b)$的存在性.

对于$\Phi(\beta) = 0$的情形, 有

$$\int_a^b (f(\beta) - f(x))g(x)\mathrm{d}x = \Phi(\beta) = 0.$$

注意$f(\beta) - f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$, 同理可证存在$\xi \in (a, b)$ 使得$f(\xi) = f(\beta)$ 从而有$\Phi(\xi) = \Phi(\beta) = 0$. $\square$

积分第一中值定理要求留在积分中的函数g的非负性(或非正性) 是重要条件, 也有明显的物理意义, 例如g是某细长的金属丝的质量密度函数. 没有这个条件, 中值公式就不一定成立. 例如取

$$f(x) = g(x) = x, \quad x \in [-1, 1].$$

则

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} > 0,$$

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{x=1} = 0.$$

因此对任意$\xi \in [-1,1]$ 都有

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x > 0 = f(\xi)\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x.$$

积分第二中值定理

对于积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 如果希望留在积分里的函数$g$ 是变号的, 那么要增加什么条件才能得到类似的积分中值等式呢? 下面要证明的积分第二中值定理就是解决这个问题的, 它说明只要被提到积分之外的函数f是单调的, 就能得到积分中值等式. 这个结果在建立广义积分理论时特别有用, 是一元广义积分的主要工具和理论保障!

【命题6.19(积分第二中值定理)】设$[a,b]$ 为有界闭区间, 实值函数g在$[a,b]$上可积, 函数f在$[a,b]$上单调. 则存在$\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\mathrm{d}x.$$

【证】首先由f在$[a,b]$上单调知f 在$[a,b]$ 上可积(见**Lebesgue准则的重要推论2**), 因此fg也在上可积.

对于分划 $\mathcal{C}: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 取选点$\xi_k$ 如下:

$$\xi_1 = x_0, \quad \xi_k = x_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

令

$$G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

由积分的可加性有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(\xi_k)]g(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\mathrm{d}x \\
&= R(\mathcal{C}) + \sum_{k=1}^{n}[G(x_k)-G(x_{k-1})]f(\xi_k). \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

其中
$$R(\mathcal{C})=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(\xi_k)]g(x)\mathrm{d}x.$$
先证明
$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}R(\mathcal{C})=0. \tag{6.18}$$
事实上令$M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$. 则有$M<+\infty$且
$$\begin{aligned}|R(\mathcal{C})|&\le\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(\xi_k)||g(x)|\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\omega_f(I_k)M\mathrm{d}x_k\\&=\sum_{k=1}^{n}M\omega_f(I_k)|I_k|=M\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)|I_k|,\quad I_k=[x_{k-1},x_k].\end{aligned}$$
由可积性的振幅刻画知
$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)|I_k|=0$$
所以(6.18)成立.

现在考察主要部分$\sum\limits_{k=1}^{n}[G(x_k)-G(x_{k-1})]f(\xi_k)$. 将 Abel 分部求和公式
$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{k}a_j\Big)(b_k-b_{k+1})+b_n\sum_{k=1}^{n}a_k$$
用于 $a_k=G(x_k)-G(x_{k-1}),b_k=f(\xi_k)$ 我们计算 (注意 $G(x_0)=G(a)=0$)
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}[G(x_k)-G(x_{k-1})]f(\xi_k)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{k}[G(x_j)-G(x_{j-1})]\Big)[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]+f(\xi_n)\sum_{k=1}^{n}[G(x_k)-G(x_{k-1})]\\&=\sum_{k=1}^{n-1}G(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]+f(\xi_n)G(x_n).\end{aligned}$$
于是由(6.17)和极限式(6.18) 得到
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}G(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]+f(\xi_n)G(x_n)\Big). \tag{6.19}$$
由可积函数的变上限积分的连续性知知G连续, 因此存在 $\alpha,\beta\in[a,b]$ 使得
$$G(\alpha)=\min_{x\in[a,b]}G(x),\quad G(\beta)=\max_{x\in[a,b]}G(x).$$

不妨设 f 单调不增 (否则把 f 换成 $-f$). 则有 $f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})\ge 0, k=1,2,...,n-1$ 从而有双边估计: (注意 $\xi_1=x_0=a, \xi_n=x_n=b$)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-1}G(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]+f(\xi_n)G(x_n)\\&\ge G(\alpha)[f(\xi_1)-f(\xi_n)]+f(\xi_n)G(x_n)=G(\alpha)[f(a)-f(b)]+f(b)G(b),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-1}G(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]+f(\xi_n)G(x_n)\\&\le G(\beta)[f(\xi_1)-f(\xi_n)]+f(\xi_n)G(x_n)=G(\beta)[f(a)-f(b)]+f(b)G(b).\end{aligned}$$

于是由极限式(6.19)得到

$$G(\alpha)[f(a)-f(b)]+f(b)G(b)\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le G(\beta)[f(a)-f(b)]+f(b)G(b).$$

如令

$$\Phi(x)=G(x)[f(a)-f(b)]+f(b)G(b),\quad x\in[a,b]$$

则 Φ 在 $[a,b]$ 上连续且

$$\Phi(\alpha)\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\Phi(\beta).$$

根据连续函数介值定理, 存在 $\xi\in[\alpha,\beta]$ 或 $\in[\beta,\alpha]$ 使得 $\Phi(\xi)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=G(\xi)[f(a)-f(b)]+f(b)G(b)=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

□

由上述一般的积分第二中值定理容易得到下面特殊的第二中值定理:

【命题6.20(积分第二中值定理)】设$[a,b]$ 为有界闭区间, 实值函数g在$[a,b]$上可积, 函数f在$[a,b]$上单调.

(a) 若 f 非负非增, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

(b) 若 f 非负非减, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

【证】(a), (b)的证法一样, 故只证(a). 两种方法:

方法1. 可以设$f(a)>0$. 否则, $f(a)=0$, 则由f非负非增知$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$. 所证等式显然成立. 令$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$. 则由上面**命题6.19**, 存在$c\in[a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x=f(a)G(c)+f(b)[G(b)-G(c)]$$

$$=[f(a)-f(b)]G(c)+f(b)G(b)=f(a)\Big((1-\lambda)G(c)+\lambda G(b)\Big),\quad \lambda=\frac{f(b)}{f(a)}\in[0,1].$$

因G连续且$0\le\lambda\le 1$, 故

$$\min_{x\in[a,b]}G(x)\le(1-\lambda)G(c)+\lambda G(b)\le\max_{x\in[a,b]}G(x).$$

因此由连续函数介值定理知存在$\xi\in[a,b]$ 使得

$$G(\xi)=(1-\lambda)G(c)+\lambda G(b).$$

所以

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)G(\xi)=f(a)\int_a^\xi g(t)\mathrm{d}t.$$

方法2. 采用 2010 级李泱同学[3] 的聪明自然的论证. 设 f 非负非增. 注意到事实：在一点处修改函数值不影响积分, 我们令 $\widetilde{f}(x)=f(x)$ 当 $x\in[a,b)$; $\widetilde{f}(b)=0$. 则由 f 非负非增可知 $\widetilde{f}$**仍为单调函数** 且$\widetilde{f}(a)=f(a)$, $\widetilde{f}(b)=0$. 于是由前面证明的积分第二中定理知存在$\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\widetilde{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\widetilde{f}(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+\widetilde{f}(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

这证明了 (a). 同法可证 (b). □

【**例**】设$\alpha>0$. 证明

$$\Big|\int_x^y\frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t\Big|\le\frac{2}{x^\alpha},\quad \Big|\int_x^y\frac{\cos t}{t^\alpha}\mathrm{d}t\Big|\le\frac{2}{x^\alpha}\qquad\forall\, y>x>0.$$

$$\text{极限}\quad\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t,\quad \lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\cos t}{t^\alpha}\mathrm{d}t\quad\text{皆存在有限.}$$

【证】因函数$t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ 在$[x,y]$ 上非负非增, 故由积分第二中值定理知存在$\xi\in[x,y]$ 使得

$$\int_x^y\frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t=\frac{1}{x^\alpha}\int_x^\xi\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{x^\alpha}(-1)(\cos\xi-\cos x).$$

[3]**李泱现在英国剑桥读数学博士学位. 他是年级中的“数学”先生, 常和同学耐心地讨论数学问题.**

这就给出上述第一个不等式. 同样可证第二个不等式.

令

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t, \quad x \in [1, +\infty).$$

对任意$\varepsilon > 0$, 不妨设$\varepsilon < 1$, 取$R > (2/\varepsilon)^{1/\alpha}$, 即$R^\alpha > 2/\varepsilon$. 则当$y > x > R$时有

$$|F(y) - F(x)| = \Big|\int_x^y \frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t\Big| \leq \frac{2}{x^\alpha} \leq \frac{2}{R^\alpha} < \varepsilon.$$

这表明$F(x)$ 满足$x \to +\infty$ 时的Cauchy 收敛准则. 因此极限$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在有限.

同理可证另一极限存在有限. $\square$

以后我们能算出

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

它是Jordan 首先得到的.

§6.4. 微积分学基本定理, 积分的计算

在迄今为止的数学中, 能够被称作基本定理的似乎只有两个, 一个是代数学基本定理(即复数域上的任何n次多项式必有n个根), 另一个就是本节学习的微积分学基本定理(即微分与积分的互逆关系或Newton-Leibniz 公式).

先回忆原函数:

【原函数】设区间$I\subset\mathbb{R}$, 函数$F,f:I\to\mathbb{C}$. 若F 在I 上处处可导(包括当I的端点属于I时, F在这端点处的单侧导数存在) 且

$$F'(x)=f(x)\qquad\forall\, x\in I$$

则称F是f在I上的一个原函数或不定积分. 在传统教科书中, f的原函数被写成不定积分的形式:

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x,\quad x\in I.\qquad\Box$$

同学们或许看到, 这个记号不太科学, 例如写法

$$\text{“}\quad F(0.4)=\int f(0.4)\mathrm{d}0.4\quad\text{”}$$

就显然不妥. 但似乎又没有科学的紧凑的记号. 事实上人们接受不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$这个记号, 主要因为它有这样的优点: (1)用它容易导出原函数的表达式(例如借助换元公式、分部积分等等), 当f的原函数F被求出之后, 再把$x=0.4$ 等具体的值代入$F(x)$的表达式中. (2)它与原函数的严格表达式形状很像(见下面).

周知, 在相差一个常数的意义下, 一个函数的原函数如果存在, 则必是唯一的. 下面的定理告诉我们一个函数的原函数长什么样.

【定理6.21(微积分学基本定理)】设$[a,b]$为有界闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 在$[a,b]$上可积. 取定一点$c\in[a,b]$. 令

$$F(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

则F在f的每个连续点x处可微且

$$F'(x)=f(x).$$

特别若f在$[a,b]$ 上连续, 则F 就是f在$[a,b]$ 上的一个原函数. **因此$[a,b]$上的每个连续函数都有原函数.**

【证】设$x_0 \in [a,b]$ 为f的任一连续点. 对任意$\varepsilon > 0$, 由连续性, 存在$\delta > 0$ 使得当$x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. 由此有: 对任意$x \in [a,b]$ 满足$0 < |x-x_0| < \delta$, 由积分的可加性有

$$F(x)-F(x_0) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\mathrm{d}t,$$

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\mathrm{d}t\Big| \quad (\text{分别考虑}\, x > x_0, x < x_0\,)$$

$$\le \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t\Big| \le \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^x \varepsilon\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

这证明了F在x_0可导且$F'(x_0) = f(x_0)$.

由此知若f在$[a,b]$上连续, 则F在$[a,b]$上处处可导且$F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in [a,b]$. 因此$F$是$f$的一个原函数. $\Box$

【**定理6.22(Newton-Leibniz公式)**】设$[a,b]$为有界闭区间, 函数f在$[a,b]$上可积, F在$[a,b]$上连续, 在$(a,b)\setminus Z$内可导且$F'(x) = f(x)\ \ \forall\, x \in (a,b)\setminus Z$, 其中$Z$ 是空集或有限集. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

【证】由差集的表示$(a,b)\setminus Z = (a,b)\setminus (a,b)\cap Z$知可以假设$Z \subset (a,b)$. 先设$Z$为空集且$f, F$ 为实值的. 对于 $[a,b]$ 的任意分划 $\mathcal{C}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 有

$$F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^n [F(x_k)-F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

这里用到微分中值定理：$F(x_k)-F(x_{k-1}) = f(\xi_k)\Delta x_k$, $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. 因f在$[a,b]$上可积, 故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = F(b)-F(a).$$

其次设Z为空集, f, F为复值函数: $f = f_1 + \mathrm{i}f_2, F = F_1 + \mathrm{i}F_2$, 将上面结果用于实部虚部$f_1, F_1$ 和虚部f_2, F_2并注意导函数关系$F_1'(x) + \mathrm{i}F_2'(x) = f_1(x) + \mathrm{i}f_2(x)$, 即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x = F_1(b)-F_1(a)+\mathrm{i}(F_2(b)-F_2(a)) = F(b)-F(a).$$

最后设Z为有限集: $Z=\{a_1,a_2,...,a_n\}\subset(a,b)$. 不妨设$a_1<a_2<\cdots<a_n$. 令$a_0=a, a_{n+1}=b$. 则$f,F$在每个闭区间$[a_{k-1},a_k]$上满足关于$Z=\emptyset$时的条件. 于是由积分的可加性和已证的结果有

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{a_0}^{a_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n+1}(F(a_k)-F(a_{k-1}))\\&=F(a_{n+1})-F(a_0)=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

□

【例】设$\lambda_k,c_k\in\mathbb{R}, k=1,2,...,n$. 设$a,b\in\mathbb{R}$. 则

$$\sum_{k=1}^n\lambda_k|b-c_k|-\sum_{k=1}^n\lambda_k|a-c_k|=\int_a^b\sum_{k=1}^n\lambda_k\mathrm{sgn}(x-c_k)\mathrm{d}x. \tag{6.20}$$

这里$\mathrm{sgn}(x)$ 是符号函数.

【证】令

$$F(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_k|x-c_k|,\quad f(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_k\mathrm{sgn}(x-c_k).$$

则F在$\mathbb{R}$ 上连续, 在$\mathbb{R}\setminus\{c_1,c_2,...,c_n\}$ 内可导且

$$F'(x)=f(x)\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{c_1,c_2,...,c_n\}.$$

易见f在$\mathbb{R}$上有界且只有有限多个间断点. 因此f在$\mathbb{R}$中任何有界区间上可积. 于是对任意$a,b\in\mathbb{R}$, 不妨设$a>b$, 将**定理6.22(Newton-Leibniz公式)** 应用于f,F和$[a,b]$ 即知(6.20)成立. □

【例】(凸函数的积分不等式). 设$[a,b]$ 为有界区间, f 是 $[a,b]$上的有界凸函数. 则

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

【证】根据第五章关于凸函数的性质知f 在(a,b)内处处有左右导数:

$$f'_-(x)=\lim_{y\to x-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\in\mathbb{R},\qquad f'_+(x)=\lim_{y\to x+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\in\mathbb{R},\qquad x\in(a,b)$$

因此f在(a,b)内处处连续从而在$[a,b]$上几乎处处连续. 又因f 有界, 故由Lebesgue 准则知$f\in\mathcal{R}([a,b])$. 让我们写

$$x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b,\quad x\in[a,b]$$

则由 f 的凸性有

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b), \quad x \in [a,b].$$

两边取积分, 利用Newton-Leibniz 公式计算得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{b-a}(f(a)+f(b))\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

另一方面, 取定一点 $x_0 \in (a,b)$. 由凸函数性质有

$$f(x) \ge f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0), \quad x \in [a,b]$$

其中 $f'_+(x_0)$ 为右导数 (上式对于左导数 $f'_-(x_0)$ 也成立). 两边取积分得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge f(x_0)(b-a) + f'_+(x_0)\Big(\int_a^b x\mathrm{d}x - x_0(b-a)\Big).$$

假如取 x_0 使得右边第二项消失, 也即取

$$x_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}.$$

则我们得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a). \qquad \Box$$

应用Newton-Leibniz公式我们能导出常用的积分计算公式: 分部积分法和变量替换法.

【命题6.23(分部积分公式)】设f,g在$[a,b]$ 上可积, F,G 在$[a,b]$ 上连续, 在$(a,b)\setminus Z$内可导且$F'(x)=f(x), G'(x)=g(x)\ \ \forall\, x\in(a,b)\setminus Z$, 其中$Z$ 是空集或有限集. 则有

$$\int_a^b g(x)F(x)\mathrm{d}x = F(x)G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$\int_a^b g(x)F(x)\mathrm{d}x = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

【证】由假设知fG, Fg都在$[a,b]$上可积且

$$(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x), \quad x \in (a,b)\setminus Z.$$

因此由Newton-Leibniz公式得有

$$\int_a^b \Big(f(x)G(x) + F(x)g(x)\Big)\mathrm{d}x = F(x)G(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

即
$$\int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x+\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x=F(x)G(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$
移项即得分部积分公式. $\square$

【命题6.24(积分换元公式I)】 设$I\subset\mathbb{R}$为区间, $f:I\to\mathbb{C}$ 连续, $[\alpha,\beta]$为有界闭区间, $\varphi:[\alpha,\beta]\to I$ 可导且导函数φ'在$[\alpha,\beta]$上可积. 则有
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

【证】令
$$F(y)=\int_{\varphi(\alpha)}^{y} f(x)\mathrm{d}x,\quad y\in I,\quad \Phi(t)=F(\varphi(t)),\quad t\in[\alpha,\beta].$$
则由f在I 上连续知F在I上处处可导且$F'(y)=f(y),y\in I$. 于是由假设和复合函数求导法则有
$$\Phi'(t)=F(\varphi(t))'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t),\quad t\in[\alpha,\beta].$$
因两个连续函数f,φ的复合$f(\varphi(t))$仍在$[\alpha,\beta]$上连续从而在$[\alpha,\beta]$上可积, $\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上可积, 故乘积$f(\varphi(t))\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上可积. 因此由Newton-Leibniz公式即知
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\int_\alpha^\beta \Phi'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.\qquad\square$$

由上述命题和积分限的约定$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 立即得到下面常用的换元公式:

【命题6.25(积分换元公式II)】 设$I\subset\mathbb{R}$为区间, $f:I\to\mathbb{C}$ 连续, $[\alpha,\beta]$为有界闭区间, $\varphi:[\alpha,\beta]\to I$ 严格单调且可导且导函数φ'在$[\alpha,\beta]$上可积.

则当φ 严格增加时有
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$
当φ 严格减少时有
$$\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\mathrm{d}t.$$

以上两种情况可以统一写成

$$\int_{\varphi([\alpha,\beta])} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\mathrm{d}t.$$

□

【例】设实数$\lambda \neq 0, \mu \neq 0, a < b$. 则

$$\int_a^b e^{\lambda x}\sin(\mu x)\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2+\mu^2}\Big(\lambda\sin(\mu x) - \mu\cos(\mu x)\Big)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

$$\int_a^b e^{\lambda x}\cos(\mu x)\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2+\mu^2}\Big(\mu\sin(\mu x) + \lambda\cos(\mu x)\Big)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

【证】令

$$I = \int_a^b e^{\lambda x}\sin(\mu x)\mathrm{d}x, \quad J = \int_a^b e^{\lambda x}\cos(\mu x)\mathrm{d}x.$$

则由分部积分有:

$$I = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\sin(\mu x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\cos(\mu x)\mu\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\sin(\mu x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{\mu}{\lambda}J,$$

$$J = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\cos(\mu x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}(-\sin(\mu x))\mu\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\cos(\mu x)\Big|_{x=a}^{x=b} + \frac{\mu}{\lambda}I.$$

利用可逆二阶方阵的逆矩阵公式容易给出I, J的上述结果.

另法: 利用复数.

$$\int_a^b e^{\lambda x}\cos(\mu x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b e^{\lambda x}\sin(\mu x)\mathrm{d}x = \int_a^b e^{(\lambda+\mathrm{i}\mu)x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mathrm{i}\mu}e^{(\lambda+\mathrm{i}\mu)x}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{(\lambda-\mathrm{i}\mu)e^{\lambda x}(\cos(\mu x)+\mathrm{i}\sin(\mu x))}{\lambda^2+\mu^2}\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2+\mu^2}\Big(\lambda\cos(\mu x) + \mu\sin(\mu x) + \mathrm{i}\lambda\sin(\mu x) - \mathrm{i}\mu\cos(\mu x)\Big)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

比较实部虚部即得计算结果. □

【例】设$n \geq 1$ 为任意自然数. 则有

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{当}n\text{为奇数时}, \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{当}n\text{为偶数时}. \end{cases}$$

这里

$$(2m-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-1),\qquad 0!!=1,\quad (2m)!!=2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2m).$$

【证】由严格单调递减的变数替换$x=\frac{\pi}{2}-t, t\in[0,\pi/2]$ 有

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^n\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x.$$

令

$$I_0=\frac{\pi}{2},\qquad I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x.$$

则

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}=1.$$

设$n\ge 2$. 利用分部积分计算

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\sin x\mathrm{d}x=\sin^{n-1}x(-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

$\Longrightarrow\ nI_n=(n-1)I_{n-2}$ 即

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\quad n=2,3,\dots.$$

分别考虑n 为奇数和偶数，利用归纳法即得所证等式. □

【注】上述等式在$n=2$时较常用, 对它有一个很快的记忆法:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(\cos^2 x+\sin^2 x\Big)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

【Wallis 公式】

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

【证】由不等式$0<\sin x<1, x\in(0,\pi/2)$, 有

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x$$

即
$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$
也即
$$\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n}.$$
于是得到
$$\begin{aligned}&\left|\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n+1}-\frac{\pi}{2}\right| < \Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n}-\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n+1}\\ &=\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\Big)=\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2n} < \frac{\pi}{4n}\longrightarrow 0\end{aligned}$$
$(n\to\infty)$. 这就证明了Wallis 公式. □

我们列出几个常用的简单换元公式: 假定$a<b$且$f(x)$在显示的积分区间上可积:

- **平移**:
$$\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{a+h}^{b+h}f(x)\mathrm{d}x.$$

- **平移 + 线性**：设$h\in\mathbb{R}, k>0$. 则在两个替换$h+kt=x$, $h-kt=x$ 下分别有
$$\int_a^b f(h+kt)\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\int_{h+ka}^{h+kb}f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b f(h-kt)\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\int_{h-kb}^{h-ka}f(x)\mathrm{d}x,$$

- **到单位区间$[0,1]$上的线性换元**: 对于x_0,x_1, 做换元$t=x_0+(x_1-x_0)\theta$, $\theta\in[0,1]$:
$$\int_{x_0}^{x_1}f(t)\mathrm{d}t=(x_1-x_0)\int_0^1 f(x_0+\theta(x_1-x_0))\mathrm{d}\theta.$$
这个等式对于$x_1\ge x_0$ 和$x_1\le x_0$ 都成立.

- **对称区间上奇、偶函数的积分**: 设 $0<a\le\infty$. 则
$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$
从而
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x.$$

因此若 $f \in \mathcal{R}([-a,a])$ 为奇函数, 则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

若 $f \in \mathcal{R}([-a,a])$ 为偶函数, 则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

例如对于$f(x) = e^{-x^2/2}$ 有

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

• **周期函数的积分**: 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为周期函数, 周期为 $T > 0$. 假设 f 在 $[0,T]$ 上可积, 则 f 在任何有界区间上可积, 且成立恒等式:

$$\int_{c}^{c+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

【证】由$f(x) \equiv f(x-T)$和 f 在 $[0,T]$ 上可积, 利用平移保持可积知 $f(x)$ 在 $[T,2T]$ 上可积, 进而归纳地f 在$[nT,(n+1)T]$ 上可积, $n = 1,2,3,\dots$. 同理由 $f(x) \equiv f(x+T)$ 和 f 在 $[0,T]$ 上可积, 可知 f 在 $[-T,0]$ 上可积, 进而归纳地f在 $[-(n-1)T,-nT]$ 上可积, $n = 1,2,3,\dots$. 所以对任意 $N \in \mathbb{N}$, f 在 $[-NT,NT]$ 上可积. 而对任意有界闭区间 $[a,b]$ 总存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $[a,b] \subset [-NT,NT]$, 所以 f 在 $[a,b]$ 上可积.

来证上述恒等式. 任取 $c \in \mathbb{R}$. 可设$c \neq 0$. 由平移公式和周期性, 当$c > 0$ 时

$$\int_{T}^{c+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{c} f(x+T)\mathrm{d}x = \int_{0}^{c} f(x)\mathrm{d}x.$$

当$c < 0$ 时

$$\int_{c+T}^{T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{c}^{0} f(x+T)\mathrm{d}x = \int_{c}^{0} f(x)\mathrm{d}x.$$

再由约定 $\int_{T}^{c+T} = -\int_{c+T}^{T}$ 仍得到

$$\int_{T}^{c+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{c} f(x)\mathrm{d}x.$$

据此和可加性便有

$$\begin{aligned}\int_{c}^{c+T} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{c}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{T}^{c+T} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{c}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square\end{aligned}$$

§6.5. 具有积分型余项的Taylor 公式

我们已在第五章已看到了Taylor公式的重要性, 其中对余项的估计是主要工作. 为了获得函数的大范围性质, 需要对余项做合适的估计. 但由于Lagrange 型余项中的点ξ只是定性存在的, 很模糊; 要获得进一步信息, 就必须使用积分型余项, 因为它有显示结构, 利于分析, 且对复值函数也适用.

【定理 6.26】 设$I \subset \mathbb{R}$ 为区间, n为非负整数, $f \in C^{n+1}(I)$ 为实值或复值函数. 则对任意 $x_0, x \in I$ 成立带积分型余项的 Taylor 公式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\mathrm{d}\theta.$$

【证】 任取定 $x_0, x \in I$. 可以假定 $x_0 \neq x$. 先证明

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t. \tag{6.21}$$

当 $n=0$ 时, 由Newton-Leibniz公式知 (6.21) 对于 $f \in C^1(I)$ 成立. 假设 (6.21) 对于 n 和 $f \in C^{n+1}(I)$ 成立. 设 $f \in C^{n+2}(I)$. 应用分部积分我们计算

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t = \frac{-1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)((x-t)^{n+1})'\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{n+1} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

代入 (6.21) 即知 (6.21) 对于 $n+1$ 和 $f \in C^{n+2}(I)$ 也成立. 据归纳法原理可知 (6.21) 对所有整数 $n \geq 0$ 和 $f \in C^{n+1}(I)$ 成立.

对 (6.21) 中的余项做积分换元 $t = x_0 + \theta(x-x_0)$ 便有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t = \frac{x-x_0}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^n(1-\theta)^n \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

因此所证 Taylor 公式成立. $\square$

【注】 如果f是实值的, 则由积分第一中值定理, 存在 $\theta_{x_0,x} \in (0,1)$ 使得

$$\int_0^1 f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n \mathrm{d}\theta = f^{(n+1)}(\xi)\int_0^1 (1-\theta)^n \mathrm{d}\theta = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

其中 $\xi = a + \theta_{x_0,x}(x - x_0)$. 于是

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n\mathrm{d}\theta = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

这表明, 积分型余项蕴含 Lagrange 型余项. 但 Lagrange 型余项 $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$ 中的 ξ 很模糊, 无法用于进一步的估计. 以后在其它课程的学习中将会看到, 积分型余项在应用上几乎是唯一的便于深入估计的形式.

从后续课程(如Sobolev 空间, ODE, PDE 等)和数学研究的论文中(而不是在普通习题中)同学们将看到, 具有积分型余项的 Taylor 公式远比Lagrange 和Cauchy 型余项的 Taylor 公式有用得多. 因此本讲义把它单独列为一节, 希望加深印象!

【例】在积分型余项的 Taylor 公式中取 $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, 则由$f^{(k)}(x) \equiv f(x) = e^x$有

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-\theta)^n e^{\theta x}\mathrm{d}\theta, \quad x \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \dots. \tag{6.22}$$

一般地, 对任意$z \in \mathbb{C}$, 令$g(t) = e^{tz}, t \in \mathbb{R}$, 则

$$g^{(k)}(t) = z^k e^{tz}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

对$g(t)$ 用Taylor 公式于$t_0 = 0, t = 1$ 有

$$g(1) = \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1(1-\theta)^n g^{(n+1)}(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

再以$g^{(k)}(0) = z^k, g^{(n+1)}(\theta) = z^{n+1}e^{\theta z}$ j即得

$$e^z = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} + \frac{z^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-\theta)^n e^{\theta z}\mathrm{d}\theta, \quad x \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \dots.$$

□

【例】在指数函数e^x的幂级数展开(即Taylor级数) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ 中取$x = n \in \mathbb{N}$ 有

$$e^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}.$$

上式右边第二项$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}$是无穷和, 不易分析. 而如果在$e^x$的Taylor 公式(6.22) 中取$x = n$, 则可将无穷级数$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}$缩成一个便于分析的积分: (注意下面出现的$[\cdots]$是中括号)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!} = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1[(1-\theta)e^{\theta}]^n\mathrm{d}\theta. \tag{6.23}$$

因此

$$e^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1[(1-\theta)e^{\theta}]^n\mathrm{d}\theta.$$

概率学家通过研究概率论中的Poisson 分布观察到: $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ 与 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}$ 在渐近意义下相等, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}.$$

由(6.23)知这等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1[(1-\theta)e^{\theta}]^n\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}.$$

待我们学习了Stirling公式和Lebesgue 积分之后才容易证明最后这个等式. □

§6.6. 广义积分

本节我们把有界闭区间上的有界函数的Riemann 积分(称为**常义**积分) 推广到无界区间上的函数的积分和有界区间上的某些无界函数的积分. 被推广的典型的例子有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (\text{积分区间无界}), \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \quad (\text{被积函数无界}).$$

我们把使得被积函数在其附近无界的点叫做被积函数的**暇点**. 例如上面第二个积分, 被积函数$1/\sqrt{x}$在$x=0$ 附近无界, 即$x=0$ 是被积函数$1/\sqrt{x}$的暇点.

本节我们只学习这样一类广义积分：无论积分区间是否有界, 被积函数在积分区间内部无暇点, 即被积函数的暇点(如果有的话)只出现在积分区间的端点.

对于稍复杂的广义积分, 即被积函数在积分区间内部有暇点, 例如

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{|x-2|^{1/3}}, \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1/2|}}$$

则可通过积分的**可加性** 可将积分分成有限段, 使每一段的内部没有暇点, 即

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{|x-2|^{1/3}} = \int_1^{2} \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{|x-2|^{1/3}} + + \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{|x-2|^{1/3}},$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1/2|}} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1/2|}} + \int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1/2|}}.$$

等等. 当然这首先需要对内部有暇点的广义积分给出定义, 然后证明积分的可加性. 事实上定义的建立和证明的过程都不难, 只是耗费篇幅. 同学们在学习了只在端点出现暇点的基本情形的理论和方法后, 完全可以自行导出关于复杂情形的结果.

我们马上会从下面的各种定义看到, 本节讲的广义积分就是前面学习的Riemann积分的变上(下)限积分的极限, 只要这些极限存在. 首先引进一个简称: 内闭可积.

【定义(内闭可积)】设$I\subset\mathbb{R}$为一区间, 函数$f: I\to\mathbb{C}$ 满足对每个有界闭区间$[\alpha,\beta]\subset I$, f都在$[\alpha,\beta]$上常义可积(即Riemann可积), 则称f在I上**内闭可积**. □

易见若f在I上连续, 则f在I上内闭可积. 例如

函数$f(x)=(x(1-x))^{-1/2}$在$I=(0,1)$上内闭可积,

函数$g(x)=e^{-x}$在$I=[0,+\infty)$上内闭可积.

又例如设$[a,b]$ 为有界闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 在$[a,b]$上常义可积, 则f在开区间(a,b)上内闭可积, 并且由变上/下限积分的连续性, 对任一区间序列$[a_n,b_n]\subset(a,b)$ 满足$a_n\to a, b_n\to b\,(n\to\infty)$ 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

事实上取定一点$c\in(a,b)$, 则当n充分大时有$a<a_n<c<b_n<b$, 从而当$n\to\infty$时

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a_n}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\to\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明f在整个闭区间$[a,b]$上的积分可以用f在内闭区间上的积分逼近. 这提示我们: 可以用f在(a,b)的内闭区间上的积分的极限去定义f在区间$(a,b),[a,b),((a,b]$ 上的积分其积分值都等于f在$[a,b]$上的积分.

【记号】(1) 区间$I\subset\mathbb{R}$的内部I° 就是以I的左右端点为自己的左右端点的**开区间**.

(2)为了叙述和推导方便, 数学上规定: 任何函数f在单点集$\{x_0\}$ 和空集$\emptyset$上的Riemann积分为零:

$$\int_{\{x_0\}} f(x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_{\emptyset} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

另外需注意: 两个区间I,J的交$I\cap J$ 还是区间, 但它可能是退化的区间(即单点集)或空集. 根据上面的规定知, 当$I\cap J$是单点集或空集时, 对任何函数f都有$\int_{I\cap J} f(x)\mathrm{d}x=0$. 据此可见, 如果$f$在有界闭区间$[a,b]$ 上常义可积, 则可将f在区间$(a,b),[a,b),(a,b]$ 上的积分定义为f在$[a,b]$ 上的积分:

$$\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,b)} f(x)\mathrm{d}x=\int_{(a,b]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x.$$

【定义(广义积分)】设$I\subset\mathbb{R}$为区间, 函数$f:I\to\mathbb{C}$ 在I上内闭可积. 则我们用下面方式定义f在I上的广义积分：

(1) 设$I=[a,+\infty), a\in\mathbb{R}$. 如果

$$\text{极限}\quad \lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)\mathrm{d}x\quad\text{存在}$$

则称此极限为f在$I=[a,+\infty)$ 上的广义积分, 记之为

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)\mathrm{d}x.$$

进一步, 若这广义积分有限, 即属于$\mathbb{C}$, 则称f在I上广义可积, 同时称$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(2) 设$I = (-\infty, b], b \in \mathbb{R}$. 如果

$$\text{极限} \quad \lim_{y\to-\infty}\int_y^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{存在}$$

则称此极限为f在$I = (-\infty, b]$ 上的广义积分, 记之为

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{y\to-\infty}\int_y^b f(x)\mathrm{d}x.$$

进一步, 若这广义积分有限, 即属于$\mathbb{C}$, 则称f在I上广义可积, 同时称$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(3) 设$I = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. 如果存在$c \in \mathbb{R}$ 使得f的两个广义积分$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$都存在且二者之和有意义(例如二者皆非负, 或二者中至少有一个收敛), 则称

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为f在$(-\infty, +\infty)$ 上的广义积分. 当两个广义积分$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$都收敛时, 称$f$在$(-\infty, +\infty)$ 上广义可积同时称广义积分$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) 设$I = [a, b), -\infty < a < b < +\infty$. 如果

$$\text{极限} \quad \lim_{y\to b-}\int_a^y f(x)\mathrm{d}x \quad \text{存在}$$

则称此极限为f在$I = [a, b)$ 上的广义积分, 记之为

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{y\to b-}\int_a^y f(x)\mathrm{d}x.$$

进一步, 若这广义积分有限, 即属于$\mathbb{C}$, 则称f在I上广义可积, 同时称$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(5) 设$I = (a, b], -\infty < a < b < +\infty$. 如果

$$\text{极限} \quad \lim_{y\to a+}\int_y^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{存在}$$

则称此极限为f在$I = (a, b]$ 上的广义积分, 记之为

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{y\to a+}\int_y^b f(x)\mathrm{d}x.$$

进一步, 若这广义积分有限, 即属于$\mathbb{C}$, 则称f在I上广义可积, 同时称$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(6) 设$I=(a,b), -\infty < a < b < +\infty$. 如果存在$c\in(a,b)$ 使得f 的两个广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在且二者之和有意义(例如二者皆非负, 或二者中至少有一个收敛), 则称

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

为f在$I=(a,b)$ 上的广义积分. 当两个广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$都收敛时, 称$f$在$I=(a,b)$ 上广义可积同时称广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(7) 设$I=[a,b], -\infty < a < b < +\infty$. 此时由假设知$f$在$I=[a,b]$ 上常义可积, 我们也称f的常义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为$f$在$I=[a,b]$上的广义积分.

此外若积分区间I的一个属于$\mathbb{R}$的端点a 或b (如果有的话)使得f在其一个邻域内无界, 则这样的端点为被积函数f的一个**暇点**.

最后, 如果f在I上的广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x$ 不存在或存在但不属于$\mathbb{C}$, 则称广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(8) 记号约定: 与常义积分一样, 对于广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 我们约定

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{当} a\in\mathbb{R}\text{时}. \qquad \square$$

【注1】因为上述定义是建立在内闭可积的函数类上的, 故当我们说f在I上的广义积分存在时, 首先意味着f在I上内闭可积.

【注2】必须说明(3) 和(6)中的广义积分的存在性和积分值不依赖于内点c的选择. 为了概括(3),(6) 我们设$-\infty \le a < b \le +\infty$ 并设存在$c_0\in(a,b)$ 使得f 的两个广义积分$\int_a^{c_0} f(x)\mathrm{d}x, \int_{c_0}^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在且二者之和有意义. 我们来证明, 此时对任意$c\in(a,b)$ 都有f 的两个广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在且二者之和有意义并且

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{c_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_0}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

不妨设$c<c_0$. 则由常义积分的可加性有

$$\int_y^c f(x)\mathrm{d}x = \int_y^{c_0} f(x)\mathrm{d}x - \int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x, \quad y\in(a,c)$$

$$\int_c^y f(x)\mathrm{d}x = \int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_0}^y f(x)\mathrm{d}x, \quad y \in (c_0, b).$$

分别令$y \to a+$ 和$y \to b-$ 可知极限

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x := \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{c_0} f(x)\mathrm{d}x - \int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{y\to b-}\int_c^y f(x)\mathrm{d}x = \int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_0}^b f(x)\mathrm{d}x$$

皆存在. 因$\int_a^{c_0} f(x)\mathrm{d}x, -\int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x, \int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x, \int_{c_0}^b f(x)\mathrm{d}x$ 之间的加法有意义, 故由上式知加法$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 有意义且

$$\begin{aligned}
&\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{c_0} f(x)\mathrm{d}x - \int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{c_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_0}^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{c_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_0}^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

【注3】让我们把函数极限存在的Cauchy 收敛准则用于变上下限的积分: 设f在区间I上内闭可积. 以$I=[a,b)$为例, 其中$-\infty < a < b \le +\infty$. 令

$$F(y) = \int_a^y f(x)\mathrm{d}x, \quad y \in [a, b).$$

则由广义积分收敛的定义 和 函数具有有限的极限的Cauchy 收敛准则知

广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\iff$ 极限$\lim\limits_{y\to b-} F(y)$ 存在有限

$\iff$ $F(y)$ 满足$y \to b-$时的Cauchy条件: 对任意$\varepsilon > 0$, 对于$b \in \mathbb{R}$的情形, 存在$\delta > 0$

使得当$0 < b - y_1 < \delta, 0 < b - y_2 < \delta$时, 以及对于$b = +\infty$的情形, 存在$R > a$

使得当$y_1, y_2 > R$时, 分别都有

$$|F(y_2) - F(y_1)| = \left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

【例】设$0 < \alpha < 2$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}, \quad x \in (0, +\infty).$$

则f在$(0,+\infty)$上广义可积, 即

$$\text{广义积分} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x \quad \text{收敛} \qquad (0 < \alpha < 2).$$

【证】首先由f在$(0,+\infty)$上连续知f在$(0,+\infty)$上内闭可积. 由不等式

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

知当$\alpha > 1$时, 左端点$x = 0$ 是f的唯一暇点; 当$0 < \alpha \le 1$ 时, f没有暇点. 不管哪种情形, 我们只需证明f分别在$(0, 1]$ 和$[1, +\infty)$上广义可积.

对任意$\varepsilon > 0$, 取$0 < \delta < 1$ 使得$\frac{\delta^{2-\alpha}}{2-\alpha} < \varepsilon$. 则当$0 < y_1, y_2 < \delta$时, 不妨设$y_1 < y_2$, 有

$$\Big|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\mathrm{d}x\Big| = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x \le \int_{y_1}^{y_2} x^{1-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big|_{x=y_1}^{x=y_2} < \frac{y_2^{2-\alpha}}{2-\alpha} < \frac{\delta^{2-\alpha}}{2-\alpha} < \varepsilon.$$

这表明函数$y \mapsto \int_y^1 f(x)\mathrm{d}x$ 满足$y \to 0+$时的Cauchy条件. 因此极限$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x := \lim\limits_{y\to 0+} \int_y^1 f(x)\mathrm{d}x$存在有限, 所$f$在$(0, 1]$上广义可积.

另一方面, 对任意$\varepsilon > 0$, 取$R > 1$ 使得$\frac{2}{R^\alpha} < \varepsilon$. 则当$y_1, y_2 > R$时, 不妨设$y_2 > y_1$, 由积分第二中值定理有(注意函数$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ 非负非增)

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{y_1^\alpha}\int_{y_1}^{\xi} \sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{y_1^\alpha}(\cos y_1 - \cos\xi)$$

其中$\xi \in (y_1, y_2)$. 于是有

$$\Big|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\mathrm{d}x\Big| \le \frac{2}{y_1^\alpha} \le \frac{2}{R^\alpha} < \varepsilon.$$

这表明函数$y \mapsto \int_1^y f(x)\mathrm{d}x$ 满足$y \to +\infty$时的Cauchy条件. 因此极限$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim\limits_{y\to+\infty} \int_1^y f(x)\mathrm{d}x$存在有限, 所$f$在$[1, +\infty)$上广义可积. $\square$

【命题6.27(内闭逼近)】设$I \subset \mathbb{R}$为一区间, 函数$f : I \to \mathbb{C}$在I 上的广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 则对于任意一列有界闭区间$I_n = [a_n, b_n]$ 满足

$$I_n \subset I_{n+1} \subset I,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf I,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \sup I$$

都有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】令$a = \inf I, b = \sup I$. 则$- \le a < b \le +\infty$.

先设$I = [a, b), a \in \mathbb{R}$. 取定$c \in (a, b)$. 因$f$在$[a, b)$ 上内闭可积, 故f在$[a, c]$ 上可积(即常义可积). 因此由Riemann 积分关于积分限的连续性有(设$n >> 1$ 使得$a_n < c$)

$$\int_a^{a_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_{a_n}^c f(x)\mathrm{d}x \to \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (n \to \infty).$$

于是得到

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^{b_n} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^{a_n} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\Big)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{I_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

同法可证$I=(a,b]$的情形.

其次设$I=(a,b)$. 此时存在$c\in(a,b)$ 使得广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在且至少有一个收敛. 由$a_n\to a, b_n\to b$ 知当$n>>1$ 时$a_n<c<b_n$, 并由广义积分的定义有

$$\int_{I_n} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a_n}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x$$
$$\longrightarrow\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x\quad (n\to\infty).$$

最后设$I=[a,b]$ 即I是有界闭区间. 此时f在I 上常义可积, 故所证极限等式实为变上下限积分的连续性. □

【命题6.28(非负函数广义积分的基本性质)】设$I\subset\mathbb{R}$为区间, $f,g:I\to[0,+\infty)$是在I上内闭可积的任意两个非负函数. 则有:

(a)(存在性) 广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x$ 必存在且≥ 0 (可能为$+\infty$).

(b)(非负线性)

$$\int_I cf(x)\mathrm{d}x=c\int_I f(x)\mathrm{d}x,\quad \text{其中}\, c\ge 0\,\text{是常数}.$$
$$\int_I (f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x+\int_I g(x)\mathrm{d}x.$$

(c)(单调性) 设$f(x)\le g(x)\ \ \forall\, x\in I$. 则有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x\le\int_I g(x)\mathrm{d}x.$$

因此

当$\int_I g(x)\mathrm{d}x$收敛时, $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 当$\int_I f(x)\mathrm{d}x$发散时, $\int_I g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(d) 对每个区间$J\subset I$ 有

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x=\int_I 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x$$

从而由(b)有**单调性**:

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x \le \int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

(e) (可加性) 对于I的任意分解$I=\bigcup_{n\ge1} J_n$, 其中J_n 是区间且互不相交, 都有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\ge1}\int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】(a): 以$I=(a,b)$ 为例其中$-\infty\le a<b\le+\infty$. 取$c\in I$. 则由$f\ge0$ 知

$$b_1\mapsto\int_c^{b_1} f(x)\mathrm{d}x\quad \text{单调增加于}b_1\in[c,b)$$

$$a_1\mapsto\int_{a_1}^{c} f(x)\mathrm{d}x\quad \text{单调减少于}a_1\in(a,c]$$

因此极限$\lim\limits_{b_1\to b-}\int_c^{b_1} f(x)\mathrm{d}x$, $\lim\limits_{a_1\to a+}\int_{a_1}^c f(x)\mathrm{d}x$都存在且都$\ge 0$ 所以广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

(b),(c): 根据广义积分的定义和极限运算规则(或直接应用**命题6.27(内闭逼近)**): 和的极限等于极限的和, 数乘的极限等于极限的数乘, 以及极限的保序性即知(b),(c) 成立.

(d): 取一列有界闭区间$[a_n,b_n]$ 满足$[a_n,b_n]\subset[a_{n+1},b_{n+1}]\subset I$, $n=1,2,3,...$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf I$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sup I$. 设$J\subset I$. 设$J$的左右端点为$\alpha,\beta$. 则有$\inf I\le\alpha,\beta\le\sup I$ 从而有

$$[a_n,b_n]\cap[\alpha,\beta]=[a_n\vee\alpha,b_n\wedge\beta]\subset[a_{n+1}\vee\alpha,b_{n+1}\wedge\beta]\subset[\alpha,\beta]\cap\mathbb{R},\quad n=1,2,3,...$$

以及$a_n\vee\alpha\to\alpha, b_n\wedge\beta\to\beta\,(n\to\infty)$. 再注意由常义积分的性质有

$$\int_{[a_n,b_n]\cap[\alpha,\beta]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a_n,b_n]\cap J} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a_n,b_n]} 1_{[a_n,b_n]\cap J}(x)f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{[a_n,b_n]} 1_{[a_n,b_n]}(x)1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a_n,b_n]} 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

于是由**命题6.27(内闭逼近)**有

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{[a_n,b_n]\cap[\alpha,\beta]} f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{[a_n,b_n]} 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_I 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

注: 当$\beta=+\infty$ 时, $[\alpha,+\infty]\cap\mathbb{R}=[\alpha,+\infty)$, 当$\alpha=-\infty$ 时, $[-\infty,\beta]\cap\mathbb{R}=(-\infty,\beta]$,等等.

(e): 不妨是可数无限并: $I=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$; 对有限并的情形的证明, 已含在下面的证明中.

来证明
$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n}f(x)\mathrm{d}x.$$
由J_n 互不相交易见对任意$N\in\mathbb{N}$ 有
$$1=\sum_{n=1}^{\infty}1_{J_n}(x)\ge\sum_{n=1}^{N}1_{J_n}(x)\qquad\forall\,x\in I$$
从而有
$$f(x)\ge\sum_{n=1}^{N}1_{J_n}(x)f(x)\qquad\forall\,x\in I$$

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x\ge\int_I\sum_{n=1}^{N}1_{J_n}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N}\int_I 1_{J_n}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}f(x)\mathrm{d}x.$$
令$N\to\infty$ 得到
$$\int_I f(x)\mathrm{d}x\ge\sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n}f(x)\mathrm{d}x.$$
下证反向不等式:
$$\int_I f(x)\mathrm{d}x\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n}f(x)\mathrm{d}x.$$
当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{J_n}f(x)\mathrm{d}x=+\infty$时, 反向不等式显然成立.

下设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{J_n}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$. 这蕴含$\int_{J_n}f(x)\mathrm{d}x<+\infty, n=1,2,3,....$

由**命题6.27(内闭逼近)**知存在一列渐升的有界闭区间序列$[a_m,b_m]\subset I$ 使得$\int_{a_m}^{b_m}f(x)\mathrm{d}x\to\int_I f(x)\mathrm{d}x\,(m\to\infty)$. 由$[a_m,b_m]\subset I=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$ 知对每个$m\in\mathbb{N}$ 有
$$[a_m,b_m]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_m,b_m]\cap J_n.$$
设J_n的左右端点为α_n,β_n. 则对任意$\delta>0$ 有$J_n\subset(\alpha_n-\delta,\beta_n+\delta)$ 从而有$[a_m,b_m]\cap J_n\subset[a_m,b_m]\cap(\alpha_n-\delta,\beta_n+\delta)$. 由常义积分关于变上/下限积分的连续性知
$$\int_{[a_m,b_m]\cap(\alpha_n-\delta,\beta_n+\delta)}f(x)\mathrm{d}x\to\int_{[a_m,b_m]\cap J_n}f(x)\mathrm{d}x\quad\text{as}\quad\delta\to0+.$$

因此对任意$\varepsilon > 0$ 存在$\delta_{n,m} = \delta_{n,m,\varepsilon} > 0$ 使得对于开区间

$$J_{n,m} = (\alpha_n - \delta_{n,m}, \beta_n + \delta_{n,m})$$

有

$$\int_{[a_m,b_m]\cap J_{n,m}} f(x)\mathrm{d}x < \int_{[a_m,b_m]\cap J_n} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

这同时产生了$[a_m, b_m]$的开覆盖:

$$[a_m, b_m] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_m, b_m] \cap J_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{n,m}.$$

据紧集的有限覆盖定理知存在$N_m = N_{m,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ 使得

$$[a_m, b_m] \subset \bigcup_{n=1}^{N_m} J_{n,m} \quad \text{从而有} \quad [a_m, b_m] = \bigcup_{n=1}^{N_m}[a_m, b_m] \cap J_{n,m},$$

$$1 \le \sum_{n=1}^{N_m} 1_{[a_m,b_m]\cap J_{n,m}}(x) \qquad \forall\, x \in [a_m, b_m].$$

两边乘以$f(x)$ 并取积分得到

$$\begin{aligned}
&\int_{a_m}^{b_m} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{a_m}^{b_m} \sum_{n=1}^{N_m} 1_{[a_m,b_m]\cap J_{n,m}}(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N_m} \int_{a_m}^{b_m} 1_{[a_m,b_m]\cap J_{n,m}}(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N_m} \int_{[a_m,b_m]\cap J_{n,m}} f(x)\mathrm{d}x \\
&< \sum_{n=1}^{N_m} \Big(\int_{[a_m,b_m]\cap J_n} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2^n} \Big) = \sum_{n=1}^{N_m} \int_{[a_m,b_m]\cap J_n} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{N_m} \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&\le \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon.
\end{aligned}$$

令$m \to \infty$ 得到

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_{a_m}^{b_m} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

再令$\varepsilon \to 0+$ 即得反向不等式:

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

□

要看清一个(内闭可积的)函数f是否广义可积, 最常用的办法是先看$|f|$是否广义可积. 这一点与数值级数的情形一样.

【定义(绝对收敛的广义积分和条件收敛的广义积分)】

设$I\subset\mathbb{R}$为区间. 函数$f:I\to\mathbb{C}$ 在I 上内闭可积.

若

$$\int_I|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$$

则称f在I上绝对广义可积(absolutely generalized integrable), 也称广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛(absolutely convergent).

若

$$\text{若广义积分}\ \int_I f(x)\mathrm{d}x\ \text{收敛, 但}\ \int_I|f(x)|\mathrm{d}x=+\infty$$

则称f在I上条件广义可积(conditionally generalized integrable), 也称广义积分$\int_I f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛(conditionally convergent). □

【命题6.29】设$I\subset\mathbb{R}$为区间, 函数$f:I\to\mathbb{C}$. 则有:

(**a**) f在I上广义可积$\Longleftrightarrow$ f的实部虚部$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在I上广义可积.

而在广义可积时有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\int_I\mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_I\mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x.$$

(b) 若f在I上绝对广义可积, 则f在I上广义可积.

(c) f在I上绝对广义可积$\Longleftrightarrow$ f的实部虚部$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在I上绝对广义可积.

(d) 若f 是实值的, 则 f在I上绝对广义可积

$\Longleftrightarrow$ f的正部负部$f_+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$ 都在I上广义可积. 而在f绝对广义可积时有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\int_I f_+(x)\mathrm{d}x-\int_I f_-(x)\mathrm{d}x.$$

【证】首先易见f在I上内闭可积$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在I上内闭可积$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 的正负部$\mathrm{Re}(f)_\pm,\mathrm{Im}(f)_\pm$都在$I$上内闭可积.

(a): 这是因为一个复值函数收敛当且仅当该函数的实部虚部都收敛. 而在收敛时有: 复值极限等于实部极限加上i 乘以虚部极限.

(b): 以$I=[a,b)$ 为例, 其中$-\infty<a<b\le+\infty$. 对任意$y_1,y_2\in[a,b)$, 不妨设$y_1<y_2$, 则由f在$[a,b)$ 上内闭可积和常义积分的不等式有

$$\Big|\int_{y_1}^{y_2}f(x)\mathrm{d}x\Big|\le\int_{y_1}^{y_2}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

因$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$, 即$|f|$广义可积, 故变上限函数$y\mapsto\int_a^y|f(x)|\mathrm{d}x$ 满足$y\to b-$时的Cauchy 条件, 因此可知$y\mapsto\int_a^y f(x)\mathrm{d}x$也满足$y\to b-$时的Cauchy 条件. 所以极限$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{y\to b-}f(x)\mathrm{d}x$ 存在有限, 所以f在I上广义可积.

(c): 由

$$|\mathrm{Re}(f(x))|,\ |\mathrm{Im}(f(x))|\le|f(x)|\le|\mathrm{Re}(f(x))|+|\mathrm{Im}(f(x))|$$

和非负函数广义积分的单调性和线性性有

$$\int_I|\mathrm{Re}(f(x))|\mathrm{d}x,\ \int_I|\mathrm{Im}(f(x))|\mathrm{d}x\le\int_I|f(x)|\mathrm{d}x\le\int_I|\mathrm{Re}(f(x))|\mathrm{d}x+\int_I|\mathrm{Im}(f(x))|\mathrm{d}x.$$

由此即知上述关于绝对广义可积的等价性成立.

(d): 对于实值函数f, 类似地有双边控制:

$$f_+(x),f_-(x)\le|f(x)|=f_+(x)+f_-(x).$$

因此由非负函数广义积分的单调性和线性性有

$$\int_I f_+(x)\mathrm{d}x,\ \int_I f_-(x)\mathrm{d}x\le\int_I|f(x)|\mathrm{d}x=\int_I f_+(x)\mathrm{d}x+\int_I f_-(x)\mathrm{d}x.$$

所以上述关于绝对广义可积的等价性成立.

现在设f在I 上绝对广义可积. 则$f_+(x),f_-(x)$ 都在I上广义可积. 于是由$f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ 和积分的线性性即得上述等式. □

【命题6.30(广义积分的基本性质)】设$I\subset\mathbb{R}$为区间, 函数$f,g:I\to\mathbb{C}$ 在I上广义可积. 则有

(a)(线性性) 对任意常函数$c\in\mathbb{C}$, 函数$cf,f+g$ 也在I 上广义可积且

$$\int_I cf(x)\mathrm{d}x=c\int_I f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_I(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x+\int_I g(x)\mathrm{d}x.$$

(b)(不等式)

$$\Big|\int_I f(x)\mathrm{d}x\Big| \le \int_I |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(c)(单调性) 若f,g是实值函数且$f(x)\le g(x)\ \ \forall\, x\in I$, 则有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x \le \int_I g(x)\mathrm{d}x.$$

(d) 对每个区间$J\subset I$, $f(x)$在J上广义可积, $1_J(x)f(x)$ 在I上广义可积, 且

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x = \int_I 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

(e) (有限可加性) 对于I的任意有限分解$I=\bigcup_{n=1}^{N} J_n$, 其中J_n 是区间且互不相交, 都有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

(f) (绝对收敛时的可加性) 若$\int_I f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛, 则对于I的任意可数分解$I=\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, 其中$J_n$ 是区间且互不相交, 都有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】(a),(c): 根据广义积分的定义和极限运算规则: 和的极限等于极限的和, 数乘的极限等于极限的数乘, 以及极限的保序性即知(a),(c) 成立.

(b): 对任意有界闭区间$[\alpha,\beta]\subset I$ 由常义积分的不等式和非负函数积分的单调性有

$$\Big|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\Big| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_I |f(x)|\mathrm{d}x.$$

然后应用广义积分的定义和极限运算规则(极限的绝对值≤绝对值的极限)即知所证不等式成立.

(d): 首先由常义积分的性质知函数$1_J(x)f(x)$ 在I上内闭可积. 下面以$I=[a,b)$ 为例进行证明, 其中$-\infty<a<b\le+\infty$. 此时对任意$y\in[a,b)$, f在$[a,y]$ 上常义可积. 记$\alpha=\inf J, \beta=\sup J$. 则$a\le\alpha<\beta\le b$.

先设$\beta<b$. 此时$[\alpha,\beta]$ 是I 中的有界闭区间. 由f在$[\alpha,\beta]$ 上常义可积知f在J 上常义可积从而广义可积. 而对任意$y\in(\beta,b)$ 有$1_J(x)f(x)$ 在$[a,y]$ 上常义可积且

$$\int_a^y 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,y]\cap J} f(x)\mathrm{d}x = \int_J f(x)\mathrm{d}x.$$

因此当$y\to b-$时极限存在有限且等式成立:

$$\int_I 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to b-}\int_a^y 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_J f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明$1_J f$ 在I 上广义可积且所证积分等式成立.

其次设$\beta=b$. 对任意$y\in(\alpha,b)$, f在$[a,y]$ 上常义可积. 由常义积分的性质和$a\le\alpha<y$有

$$\int_\alpha^y f(x)\mathrm{d}x=\int_a^y f(x)\mathrm{d}x-\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x.$$

因此当$y\to b-$时极限存在且有限:

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to b-}\int_\alpha^y f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明f 在J 上广义可积. 对任意$y\in(\alpha,b)$有

$$\int_a^y 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,y]\cap J} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[\alpha,y]} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^y f(x)\mathrm{d}x.$$

令$y\to b-$即得积分等式:

$$\int_I 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b 1_J(x)f(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to b-}\int_\alpha^y f(x)\mathrm{d}x=\int_J f(x)\mathrm{d}x.$$

(e): 由假设有

$$1=\sum_{n=1}^N 1_{J_n}(x),\quad x\in I.$$

因此

$$f(x)=\sum_{n=1}^N 1_{J_n}(x)f(x),\quad x\in I.$$

于是有积分的线性性和性质(d) 得到

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\int_I\sum_{n=1}^N 1_{J_n}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^N\int_I 1_{J_n}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^N\int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

(f): 先设f是实值函数. 因f在I上绝对广义可积, 故其正负部$f_+(x),f_-(x)$ 都在I 上广义可积, 即$\int_I f_\pm(x)\mathrm{d}x<+\infty$. 而据非负广义积分的可加性有

$$\int_I f_\pm(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\int_{J_n} f_\pm(x)\mathrm{d}x\quad(<+\infty).$$

这些有限性允许我们做作减法, 从而得到

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_I f_+(x)\mathrm{d}x - \int_I f_-(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} f_+(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} f_-(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{J_n} f_+(x)\mathrm{d}x - \int_{J_n} f_-(x)\mathrm{d}x\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

其次设$f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f)$为复值函数. 此时由前面证明的性质知$\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ 都是绝对广义可积的. 因此由积分的线性性和实函数的结果便得

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_I \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_I \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{J_n} \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{J_n} \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

【命题6.31(积分不等式)】设$I \subset \mathbb{R}$为区间, $f, g : I \to \mathbb{C}$ 在I 上内闭可积. 则成立

(a) Cauchy-Schwartz 不等式:

$$\int_I |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \Big(\int_I |f(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_I |g(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

一般地有**Hölder 不等式:** 若$p > 1, q > 1$且$1/p + 1/q = 1$, 则

$$\int_I |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \Big(\int_I |f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_I |g(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}.$$

(b) 三角不等式 (也称为**Minkowski不等式**): 若$1 \le p < \infty$, 则

$$\Big(\int_I |f(x) + g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \le \Big(\int_I |f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p} + \Big(\int_I |g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

【证】首先由假设知函数$|f|, |g|, |fg|, |f+g|$ 以及它们的幂$|f|^p, |g|^q$ 等等都在I上内闭可积因此(由非负性) 上述广义积分$\int_I$皆存在.

取一列有界闭区间$I_n = [a_n, b_n]$ 满足

$$I_n \subset I_{n+1} \subset I,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf I,\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \sup I.$$

则由广义积分的内闭逼近性质有

$$\int_I |f(x)g(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{I_n} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x,$$

$$\int_I |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x.$$

而在每个I_n 上, 由常义积分的Hölder 不等式、三角不等式以及非负函数的广义积分关于积分区间的单调性有

$$\int_{I_n} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \Big(\int_{I_n} |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \Big(\int_{I_n} |g(x)|^q \mathrm{d}x\Big)^{1/q}$$
$$\le \Big(\int_I |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \Big(\int_I |g(x)|^q \mathrm{d}x\Big)^{1/q},$$

$$\Big(\int_{I_n} |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \le \Big(\int_{I_n} |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} + \Big(\int_{I_n} |g(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}$$
$$\le \Big(\int_I |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} + \Big(\int_I |g(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

令$n \to \infty$ 即得所证不等式. $\Box$

在常义和广义积分计算和估值中, 常用方法是: 积分换元, 分部积分, Newton-Leibnitz 公式, 积分区间的分解, 等等.

【命题6.32(换元公式)】

(a) $I \subset \mathbb{R}$为区间, 函数$f: I \to \mathbb{C}$ 连续. 设$J = [\alpha, \beta), -\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, 函数$\varphi: J \to I = \varphi(J)$ 可微且导函数$\varphi'(t)$ 在J上连续. 假设极限$\varphi(\beta-) := \lim\limits_{\beta > t \to \beta} \varphi(t)$存在. 则有:

$$\text{广义积分} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在} \iff \text{广义积分} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \text{ 存在.}$$

而当两端之一满足(从而两端都满足)时有

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注意: 这里已包括$\beta = +\infty$的情形.

(b) $I \subset \mathbb{R}$为区间, 函数$f: I \to \mathbb{C}$ 连续. 设$J = (\alpha, \beta], -\infty \le \alpha < \beta < +\infty$, 函数$\varphi: J \to I = \varphi(J)$ 可微且导函数$\varphi'(t)$ 在J上连续. 假设极限$\varphi(\alpha+) := \lim\limits_{\alpha < t \to \alpha} \varphi(t)$存在. 则有:

$$\text{广义积分} \int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在} \iff \text{广义积分} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \text{ 存在.}$$

而当两端之一满足(从而两端都满足)时有

$$\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注意: 这里已包括$\alpha = -\infty$的情形.

【证】(a), (b) 的证明相同, 这里只证(a).

首先对任意$s \in (a, \beta)$ 有$[\varphi(\alpha), \varphi(s)] \subset \varphi(J) = I$ 或$[\varphi(s), \varphi(\alpha)] \subset \varphi(J) = I$. 因此由常义积分的换元公式有

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{s} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

如果$\varphi(\beta-) \in I = \varphi(J)$, 则由区间的定义可知$[\varphi(\alpha), \varphi(\beta-)] \subset I$ 或$[\varphi(\beta-), \varphi(\alpha)] \subset I$ 从而f在$[\varphi(\alpha), \varphi(\beta-)]$或$[\varphi(\beta-), \varphi(\alpha)]$ 常义可积, 因此广义积分$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$存在.

一般地设广义积分$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$存在. 则有

$$\lim_{s\to\beta-}\int_{\alpha}^{s} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \lim_{s\to\beta-}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{y\to\varphi(\beta-)}\int_{\varphi(\alpha)}^{y} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

这表明左边极限存在. 因此由广义积分的定义知广义积分$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$存在且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

反过来设广义积分$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$存在, 来证广义积分$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$存在且二者相等. 由上面结果知只需考虑$\varphi(\beta-) \notin I$ 的情形.

此时由连续函数介值定理和$I = \varphi(J)$ 知必有$\varphi(\beta-) = \sup I$ 或$\varphi(\beta-) = \inf I$. 不妨是$\varphi(\beta-) = \sup I$. 则由$\varphi(\beta-) \notin I$ 有$\varphi(t) < \varphi(\beta-)\ \forall t \in J$. 同时由介值定理知$[\varphi(\alpha), \varphi(\beta-)) \subset \varphi(J) = I$.

为证广义积分$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\mathrm{d}x$存在且所证等式成立, 只需证明对于$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta-))$中的任意序列$y_n \to \varphi(\beta-)\,(n\to\infty)$ 都有极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\varphi(\alpha)}^{y_n} f(x)\mathrm{d}x$ 存在且$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

任取数列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\varphi(\alpha), \varphi(\beta-))$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \varphi(\beta-)$. 对每个$n \in \mathbb{N}$, 由$y_n \in (\varphi(\alpha), \varphi(\beta-)) \subset \varphi(J) = I$ 知存在$s_n \in J = [\alpha, \beta)$使得$y_n = \varphi(s_n)$. 来证明$s_n \to \beta\,(n\to\infty)$. 因$s_n < \beta\,(n = 1, 2, 3, ...)$, 故只需证明$s_* := \liminf\limits_{n\to\infty} s_n = \beta$. 取子列$\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得$\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = s_*$. 假设$s_* \neq \beta$, 则必是$s_* \in [\alpha, \beta) = J$ 从而有

$$\varphi(\beta-) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\varphi(s_{n_k}) = \varphi(s_*) \in \varphi(J) = I$$

与$\varphi(\beta-)\notin I$ 矛盾. 因此必有$s_*=\beta$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$. 由此便得到

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{y_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s_n)}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{s_n}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,3,...,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\varphi(\alpha)}^{y_n}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{s_n}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.\qquad\square$$

【命题6.33(换元公式)】设$I\subset\mathbb{R}$为区间, 函数$f:I\to\mathbb{C}$ 连续. 设$J=(\alpha,\beta),-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty$, 函数$\varphi:J\to I=\varphi(J)$ 可微且导函数$\varphi'(t)$ 在J上连续. 假设极限$\varphi(\alpha+):=\lim\limits_{\alpha<t\to\alpha}\varphi(t)$, $\varphi(\beta-):=\lim\limits_{\beta>t\to\beta}\varphi(t)$ 都存在. 设$\gamma\in J$ 使得$\varphi(\alpha+)<\varphi(\gamma)<\varphi(\beta-)$ 或$\varphi(\alpha+)>\varphi(\gamma)>\varphi(\beta-)$ 并且

$$\text{广义积分}\ \int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\gamma)}f(x)\mathrm{d}x,\quad\int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\beta-)}f(x)\mathrm{d}x\quad\text{都存在并且}$$

$$\text{二者之和}\quad\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\gamma)}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\beta-)}f(x)\mathrm{d}x\quad\text{有意义}$$

或者

$$\text{广义积分}\ \int_{\alpha}^{\gamma}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,\quad\int_{\gamma}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\quad\text{都存在并且}$$

$$\text{二者之和}\quad\int_{\alpha}^{\gamma}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t+\int_{\gamma}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\quad\text{有意义.}$$

则

$$\text{广义积分}\ \int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)}f(x)\mathrm{d}x,\quad\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\quad\text{都存在}$$

且相等:

$$\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注意: 这里已包括$\alpha=-\infty$ 或$\beta=+\infty$的情形. 此外注意若f 还是非负的, 则以上关于$f(x)$的积分条件均满足.

【证】由$\alpha<\gamma<\beta$ 可知$\varphi((\alpha,\gamma])\subset\varphi((\alpha,\beta)),\varphi([\gamma,\beta))\subset\varphi((\alpha,\beta))$, 因此可将上一个命题中的换元公式分别用于$(\alpha,\gamma],[\gamma,\beta)$上. 根据广义积分的定义即知广义积分$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\mathrm{d}x,\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 都存在且

$$\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\gamma)}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\beta-)}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t+\int_{\gamma}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.\qquad\square$$

【**命题6.34(分部积分)**】以$I = [a,b)$为例, 其中$-\infty < a < b \le +\infty$. 设函数$F,G,f,g: I\to\mathbb{C}$ 在I 上内闭可积且F,G 分别是f,g的原函数, 又设$\int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x$收敛, 极限

$F(b)G(b) := \lim\limits_{b>y\to b} F(y)G(y)$ 存在. 则积分$\int_a^b g(x)F(x)\mathrm{d}x$ 存在且

$$\int_a^b g(x)F(x)\mathrm{d}x = F(x)G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

注意:这里已包括$b=+\infty$的情形.

【证】对任意$y\in(a,b)$, 由假设和常积分中的分部积分公式有

$$\int_a^y g(x)F(x)\mathrm{d}x = F(y)G(y) - F(a)G(a) - \int_a^y f(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

让$y\to b$ 知右边有极限, 因此左边有极限且极限等式成立. 这就是命题中的公式. □

【**例**】设$\alpha<1, x_0\in[0,1]$. 则有

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|x-x_0|^\alpha} = \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(1-x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

事实上不妨设$0<x_0<1$, 此时瑕点x_0位于$(0,1)$内部. 据前面说明, 这时广义积分的定义为

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|x-x_0|^\alpha} = \int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{|x-x_0|^\alpha} + \int_{x_0}^1 \frac{\mathrm{d}x}{|x-x_0|^\alpha}.$$

应用Newton-Leibniz公式(在取了内闭积分的极限之后)有

$$\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{|x-x_0|^\alpha} = \int_0^{x_0} (x_0-x)^{-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{-(x_0-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=0}^{x=x_0} = \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$\int_{x_0}^1 \frac{\mathrm{d}x}{|x-x_0|^\alpha} = \int_{x_0}^1 (x-x_0)^{-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{(x-x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=x_0}^{x=1} = \frac{(1-x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

所以

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|x-x_0|^\alpha} = \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(1-x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \qquad \square$$

【例】计算定积分.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$$

计算: 因被积函数非负, 故广义积分存在. 因此可以使用换元公式:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x=\sin t,\, t\in[0,\pi/2);\ (\sin t)'=\cos t\,) \\
&= \int_{\sin 0}^{\sin(\pi/2)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad (x=\tan t,\, t\in[0,\pi/2);\ (\tan t)'=\frac{1}{\cos^2 t}\,) \\
&= \int_{\tan 0}^{\tan(\pi/2)} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (x=t^2\,) = \int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$$

□

【例(Gamma 函数的积分)】函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x, \quad s>0.$$

称为Gamma函数. 这一函数具有下面性质:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s>0.$$

特别有

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(n+1)=n!, \quad n\in\mathbb{N}.$$

【证】利用分部积分, 计算对任意$s>0$

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} x^s e^{-x}\mathrm{d}x = x^s(-e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{\infty} sx^{s-1}(-e^{-x})\mathrm{d}x \\
&= s\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x = s\Gamma(s).
\end{aligned}$$

由此有对任意$n\in\mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1) = n!\Gamma(1).$$

而

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=1.$$

所以$\Gamma(n+1)=n!$. $\square$

关于Γ 函数的重要性质我们将在后面专门学习.

下面给出广义积分收敛性的Dirichlet判别法, 它用于研究变号函数或乘积型函数的广义积分, 其作用与数值级数中的Dirichlet判别法相同.

【命题6.35(Dirichlet判别法)】设$I=[a,b),-\infty<a<b\le+\infty$, 函数$f,g:I\to\mathbb{R}$在$I$上内闭可积且

$$\sup_{y\in(a,b)}\Big|\int_a^y g(x)\mathrm{d}x\Big|<+\infty,\quad f\text{ 在}I\text{ 上单调且 }\lim_{b>x\to b}f(x)=0.$$

则广义积分$\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

【证】令$M=\sup\limits_{y\in(a,b)}|\int_a^y g(x)\mathrm{d}x|$. 则对任意$y_1,y_2\in(a,b)$ 有

$$\Big|\int_{y_1}^{y_2}g(x)\mathrm{d}x\Big|=\Big|\int_a^{y_2}g(x)\mathrm{d}x-\int_a^{y_1}g(x)\mathrm{d}x\Big|\le 2M.$$

对函数f,g 在$[y_1,y_2]$ 上应用积分第二中值定理有

$$\int_{y_1}^{y_2}f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(y_1)\int_{y_1}^{\xi}g(x)\mathrm{d}x+f(y_2)\int_{\xi}^{y_2}g(x)\mathrm{d}x$$

其中$\xi\in(y_1,y_2)$. 因此

$$\Big|\int_{y_1}^{y_2}f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big|\le 2M(|f(y_1)|+|f(y_2)|),\quad y_1,y_2\in(a,b).$$

因$f(y)\to 0$ as $b>y\to b$, 故对任意$\varepsilon>0$存在$R\in(a,b)$ 使得当$y\in(R,b)$ 时有$|f(y)|<\varepsilon/(4M+1)$. 于是当$y_1,y_2\in(R,b)$ 时

$$\Big|\int_{y_1}^{y_2}f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big|\le 2M\cdot 2\frac{\varepsilon}{4M+1}<\varepsilon.$$

据广义积分收敛的Cauchy 收敛准则知$\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛. $\square$

【例】设$0<\alpha<2,p>1$. 则

$$\text{广义积分}\quad\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\quad\text{当}0<\alpha\le 1\text{时条件收敛, 当}1<\alpha<2\text{时绝对收敛.}$$

$$\text{对任意}p>1,\text{广义积分}\quad\int_0^{+\infty}\sin(x^p)\mathrm{d}x\quad\text{条件收敛.}$$

【证】前面已证明了$\int_0^1\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x<+\infty$. 为证条件收敛/绝对收敛, 只需证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$条件收敛/绝对收敛. 我们有

$$\sup_{y>1}\Big|\int_1^y\sin x\mathrm{d}x\Big|\le 2<+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0.$$

因此由Dirichlet 判别法知广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$收敛.

设$0<\alpha\le 1$. 据非负函数的积分的可加性和$[\pi,+\infty)=\bigcup_{n=1}^\infty[n\pi,(n+1)\pi)$ 有

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x\ge\int_\pi^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\quad(\text{换元}x=t+n\pi)$$
$$=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\frac{|\sin(x+n\pi)|}{x+n\pi}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\frac{\sin x}{x+n\pi}\mathrm{d}x$$
$$\ge\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n+1}=+\infty.$$

所以$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x=+\infty$. 因此当$0<\alpha\le 1$ 时$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

设$\alpha>1$. 则

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x\le\int_1^{+\infty}x^{-\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=+\infty}=\frac{1}{\alpha-1}<+\infty.$$

所以当$1<\alpha<2$ 时$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

对第二个积分, 只需考虑$\int_1^{+\infty}\sin(x^p)\mathrm{d}x$. 作变数替换$x=t^{1/p}$ 有

$$\int_1^\infty\sin(x^p)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\sin t\cdot\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t.$$
$$\int_1^\infty|\sin(x^p)|\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}|\sin t|\cdot\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t.$$

据第一个积分关于$0<\alpha\le 1$的结果知$\int_1^\infty\sin(x^p)\mathrm{d}x$ 是条件收敛的从而$\int_0^\infty\sin(x^p)\mathrm{d}x$ 是条件收敛的. $\square$

下面利用广义积分给出正项级数敛散性判别和估值.

【命题6.36(正项级数的积分判别法和估值)】设非负函数$f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 单调不增. 则有估计

$$\int_1^{N+1}f(x)\mathrm{d}x\le\sum_{n=1}^N f(n)\le f(1)+\int_1^N f(x)\mathrm{d}x,\quad N\in\mathbb{N};$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

特别可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

【证】因f在$[1,+\infty)$ 单调, 故f在$[1,+\infty)$ 上内闭可积. 由f 单调不增易见当$N=1$ 时有$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \le f(1) = f(1) + \int_1^1 f(x)\mathrm{d}x$. 以下设$N \ge 2$. 由$f$单调不增有

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)\mathrm{d}x \le \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x, \quad n \ge 2,$$

$$f(n) = \int_{n}^{n+1} f(n)\mathrm{d}x \ge \int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x, \quad n \ge 1.$$

由此和$[1,N) = \bigcup_{n=2}^{N}[n-1,n)$以及非负函数的广义积分的可加性有

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = f(1) + \sum_{n=2}^{N} f(n) \le f(1) + \sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = f(1) + \int_1^N f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \ge \sum_{n=1}^{N}\int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{N+1} f(x)\mathrm{d}x.$$

同样由$[1,+\infty) = \bigcup_{n=2}^{\infty}[n-1,n)$有

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \le f(1) + \sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ge \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \Box$$

利用上述估值法我们可以对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 和其部分和$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$ 给出比较精确的估值. 它对应的函数为$f(x) = x^{-\alpha}$.

当$0 < \alpha < 1$ 时,

$$\int_1^N x^{-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=N} = \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha},$$

因此有

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \le \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \le 1 + \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, \qquad N \in \mathbb{N}.$$

当$\alpha=1$ 时,

$$\int_1^N x^{-1}\mathrm{d}x=\log x\Big|_{x=1}^{N}=\log N,$$

因此有

$$\log(N+1)\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\le 1+\log N,\qquad N\in\mathbb{N}.$$

当$\alpha>1$ 时,

$$\int_1^N x^{-\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=N}=\frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\frac{1-N^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

因此有

$$\frac{1-(N+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}\le 1+\frac{1-N^{1-\alpha}}{\alpha-1},\qquad N\in\mathbb{N}.$$

令$N\to\infty$ 得到

$$\frac{1}{\alpha-1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\le 1+\frac{1}{\alpha-1},\qquad \alpha>1.$$

【例】设$f:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 单调不增. 则对任意$h>0$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)h\le\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】由假设知f 在$(0,+\infty)$上内闭可积且非负, 因此广义积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$存在. 对任意$n\in\mathbb{N}$ 有

$$f(nh)h=\int_{(n-1)h}^{nh}f(nh)\mathrm{d}x\le\int_{(n-1)h}^{nh}f(x)\mathrm{d}x.$$

于是由$(0,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}((n-1)h,nh]$ 和积分的可加性得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)h\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)h}^{nh}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.\qquad\Box$$

【作业题】证明对任意$m\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\sqrt{\frac{m}{n}}\le\pi.$$

【例: 积分在数论研究中的应用】法国数学家Charles Hermite (1822−1901) 最先证明了e不是代数数, 即e是超越数. [回忆：一个实数(或复数)如果是一个整系数多项式的根, 则称它为是一个代数数.] Hermite的证明如下:

假设e 是代数数, 则存在$n \in \mathbb{N}$ 和整数$a_0, a_1, ..., a_n$ 使得

$$\sum_{j=0}^{n} a_j e^j = 0 \tag{1}$$

其中$a_0 \neq 0, a_n \neq 0$. 考虑积分

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$

其中$f(x)$ 是一个待定的整系数多项式. 对每个j 我们将积分分成两块

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{j} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x + \int_j^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

将此积分乘以(1)式两边得到

$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j e^j \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} a_j e^j \int_j^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{n} a_j e^j \int_0^{j} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$

即

$$\sum_{j=0}^{n} a_j e^j \int_j^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x = -\sum_{j=0}^{n} a_j e^j \int_0^{j} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x. \tag{2}$$

选取整系数多项式$f(x)$ 使(2)的左边为非零整数, 而右边的绝对值小于1, 从而得到矛盾. Hermite考虑下列整系数多项式

$$f(x) = x^k \prod_{i=1}^{n} (i-x)^{k+1}$$

其中$k \in \mathbb{N}$ 根据需要来确定. 注意$f(x)$是一个$k+n(k+1)$次多项式, 最低阶项x^k的系数为$\prod_{i=1}^{n} i^{k+1} = (n!)^{k+1}$, 故可将$f(x)$展开成

$$f(x) = (n!)^{k+1}x^k + \sum_{i=k+1}^{k+n(k+1)} b_{0,i}x^i, \quad x \in \mathbb{R}.$$

其中$b_{0,i}$皆为整数. 而对于$1 \leq j \leq n$, 有

$$f(x+j) = (x+j)^k \prod_{i=1}^{n} (i-x-j)^{k+1} = (-x)^{k+1}(x+j)^k \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq j} (i-j-x)^{k+1}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{k+n(k+1)} b_{j,i}x^i \quad \text{其中 } b_{j,i} \text{ 为整数.}$$

利用Gamma函数$\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma(k+1) = k!$ 我们计算:

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x = (n!)^{k+1}\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x + \sum_{i=k+1}^{k+n(k+1)} b_{0,i}\int_0^{+\infty} x^i e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= (n!)^{k+1}k! + \sum_{i=k+1}^{k+n(k+1)} b_{0,i}i! = (n!)^{k+1}k! + c_0(k+1)!,$$

$$e^j\int_j^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \int_j^{+\infty} f(x)e^{-(x-j)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x+j)e^{-x}\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{i=k+1}^{k+n(k+1)} b_{j,i}\int_0^{+\infty} x^i e^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{i=k+1}^{k+n(k+1)} b_{j,i}i! = c_j(k+1)!,\quad 1\le j\le n.$$

以上$c_0, c_1, ..., c_n$均为整数. 因此

$$\sum_{j=0}^{n} a_j e^j\int_j^{\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x = a_0(n!)^{k+1}k! + \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j c_j\Big)(k+1)!.$$

将这一等式代入(2)并对(2)两边除以$k!$ 得到

$$a_0(n!)^{k+1} + (k+1)\sum_{j=0}^{n} a_j c_j = -\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n} a_j e^j\int_0^{j} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

另一方面

$$x\in[0,n] \implies |f(x)| = x^k\prod_{i=1}^{n}|i-x|^{k+1} \le n^k n^{(k+1)n} = n^n n^{(n+1)k}.$$

故

$$\Big|\int_0^{j} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x\Big| \le n^n n^{(n+1)k}\int_0^{j} e^{-x}\mathrm{d}x \le n^n n^{(n+1)k}.$$

于是由(3)得到

$$\Big|a_0(n!)^{k+1} + (k+1)\sum_{j=0}^{n} a_j c_j\Big| \le \Big(\sum_{j=0}^{n}|a_j e^j|\Big)n^n\frac{n^{(n+1)k}}{k!}.$$

因

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n^{(n+1)k}}{k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{(n^{n+1})^k}{k!} = 0$$

故

$$\Big|a_0(n!)^{k+1} + (k+1)\sum_{j=0}^{n} a_j c_j\Big| \to 0\quad (k\to\infty).$$

取$k+1=p$为充分大的素数满足$p>\max\{|a_0|, n\}$ 且

$$\Big|a_0(n!)^p + p\sum_{j=0}^{n} a_j c_j\Big| < 1.$$

则由a_j, c_j 均为整数可知

$$a_0(n!)^p + p\sum_{j=0}^{n} a_j c_j = 0 \qquad 从而有 \qquad p\Big|\sum_{j=0}^{n} a_j c_j\Big| = |a_0|(n!)^p\ \ (>0).$$

由算数基本定理知这蕴含要么p是$|a_0|$的一个素数因子要么p是$(n!)^p$的一个素数因子,后者蕴含p 是$\{2,3,...,n\}$中的一个素数. 但这两者都不成立因为素数$p > \max\{|a_0|, n\}$. 这个矛盾便证明了e 是一个超越数. $\square$

§6.7. 积分学在几何学、力学与物理学中的应用

1. 曲线的弧长. 设一个质点在三维欧空间$\mathbb{R}^3$中运动, 其运动轨迹是一条曲线(或道路) $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3, t \in [a, b]$. 我们把$t$叫做这曲线$\gamma$ 的参数也就是时间, $[a, b]$ 称为参数区间或时间区间. 通常以时间t增加的方向为曲线γ 的正向. 因此分别称$A = \gamma(a) = (x(a), y(a), z(a)), B = \gamma(b) = (x(b), y(b), z(b))$ 为曲线γ 的起点和终点. 当起点和终点重合即$\gamma(a) = \gamma(b)$时, 称γ 是一条闭曲线或闭路. 而若γ满足$t_1, t_2 \in [a, b)$ 且$t_1 \neq t_2$ 则$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, 则称$\gamma$ 为一条简单曲线. 此外如果$\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^3)$, 即$t \mapsto \gamma(t)$在$[a, b]$ 上连续(即$x(t), y(t), z(t)$ 都在$[a, b]$ 上连续), 则称γ 是一条连续曲线. 如果$t \mapsto \gamma(t)$在$[a, b]$ 上可微(即等价地, 每个坐标函数$x(t), y(t), z(t)$ 都在$[a, b]$ 上可微), 则称γ 是一条可微曲线. 进一步如果可微曲线γ 的导数(即质点速度) $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ 在$[a, b]$上连续, 即$\gamma' \in C([a, b], \mathbb{R}^3)$, 则称$\gamma$ 属于C^1类或称γ是(1次)光滑曲线, 记作$\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^3)$. 类似地可以定义二阶导数(加速度) $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ 和C^2类曲线, 等等.

【定义(曲线的弧长)】对于任意一条曲线$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$, 作$[a, b]$ 的任意分划
$\mathcal{C} : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, 并对由分划$\mathcal{C}$确定的$\gamma$的内接折线的长度求上确界

$$l(\gamma) = \sup_{\mathcal{C}} \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

称$l(\gamma)$ 为曲线γ的长或弧长. 如果$l(\gamma) < +\infty$, 则称γ是可求长的曲线或γ是有界变差的曲线. □

此处回忆两点间的距离公式知

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| = \sqrt{(x(t_2) - x(t_1))^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2 (z(t_2) - z(t_1))^2}, \quad t_1, t_2 \in [a, b].$$

在进一步分析之前我们先证明：对任意曲线$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ 存在一列分划
$\mathcal{C}_n : a = t_0^n < t_1^{(n)} < \cdots < t_{N_n}^{(n)} = b$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le N_n} \Delta t_k^{(n)} = 0 \quad 且 \quad l(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} |\gamma(t_k^{(n)}) - \gamma(t_{k-1}^{(n)})|$$

这里$\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$.

事实上由上确界的定义知存在一列分划$\widetilde{\mathcal{C}}_n : a = \tau_0^n < \tau_1^{(n)} < \cdots < \tau_{M_n}^{(n)} = b$ 使得

$$l(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{M_n} |\gamma(\tau_j^{(n)}) - \gamma(\tau_{j-1}^{(n)})|.$$

设$n>2$. 将每个子区间$[\tau_{j-1}^{(n)},\tau_j^{(n)}]$ 做n等分, 得到$[a,b]$的新分划

$\mathcal{C}_n$: $a=t_0^n<t_1^{(n)}<t_2^{(n)}<\cdots<t_{N_n}^{(n)}=b$, 其中$N_n=M_nn$,

$$t_{(j-1)n}^{(n)}=\tau_{j-1}^{(n)}<t_{(j-1)n+1}^{(n)}<t_{(j-1)n+2}^{(n)}<\cdots<t_{jn}^{(n)}=\tau_j^{(n)},\quad j=1,2,...,M_n.$$

因

$$|\gamma(\tau_j^{(n)})-\gamma(\tau_{j-1}^{(n)})|=|\sum_{k=(j-1)n+1}^{jn}(\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|\le\sum_{k=(j-1)n+1}^{jn}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|$$

故

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{M_n}|\gamma(\tau_j^{(n)})-\gamma(\tau_{j-1}^{(n)})|\\&\le\sum_{j=1}^{M_n}\sum_{k=(j-1)n+1}^{jn}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|=\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|\le l(\gamma)\end{aligned}$$

$(N_n=M_nn)$. 因当$n\to\infty$时上式左边趋于$l(\gamma)$, 故有$\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|\to l(\gamma)$ as $n\to\infty$. 最后由$t_k^{(n)}$的取法易见

$$\max_{1\le k\le N_n}\Delta t_k^{(n)}\le\frac{b-a}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

下面命题说明C^1类曲线总是可求长的, 并给出弧长的计算公式.

【命题6.37】设曲线$\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^3)$. 则$\gamma$ 可求长且

$$l(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

【证】由假设知$x'(t),y'(t),z'(t)$在有界闭区间$[a,b]$ 上连续从而一致连续. 因此若令

$$\omega(\delta)=\sup_{t_1,t_2\in[a,b],|t_1-t_2|\le\delta}\max\{|x'(t_1)-x'(t_2)|,|y'(t_1)-y'(t_2)|,|z'(t_1)-z'(t_2)|\},\quad\delta>0$$

就有

$$\omega(\delta)\to 0\quad\text{as}\quad\delta\to 0+.$$

作$[a,b]$ 的任意分划$\mathcal{C}:a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{N-1}<t_N=b$, 令$\delta=\max\limits_{1\le k\le N}\Delta t_k$ 其中$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. 来估计: 利用中值定理有

$$\begin{aligned}&|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})-\gamma'(t_k)\Delta t_k|\\&=\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1})-x'(t_k)\Delta t_k)^2+\cdots+(z(t_k)-z(t_{k-1})-z'(t_k)\Delta t_k)^2}\\&=\sqrt{(x'(\xi_k)-x'(t_k))^2+(y'(\zeta_k)-y'(t_k))^2+(z'(\tau_k)-z'(t_k))^2}\,\Delta t_k\\&\le\sqrt{3}\omega(\delta)\Delta t_k.\end{aligned}$$

再由欧空间中距离的三角不等式$|X+Y|\le|X|+|Y|$ 和$|\gamma'(t_k)\Delta t_k|=|\gamma'(t_k)|\Delta t_k$ 便得到

$$|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|\le|\gamma'(t_k)|\Delta t_k+\sqrt{3}\omega(\delta)\Delta t_k,$$

$$|\gamma'(t_k)|\Delta t_k\le|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|+\sqrt{3}\omega(\delta)\Delta t_k,$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{N}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|\le\sum_{k=1}^{N}|\gamma'(t_k)|\Delta t_k+\sqrt{3}\omega(\delta)(b-a),$$

$$\sum_{k=1}^{N}|\gamma'(t_k)|\Delta t_k\le\sum_{k=1}^{N}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|+\sqrt{3}\omega(\delta)(b-a).$$

而由上面分析知存在一列分划$\mathcal{C}_n\,:\,a=t_0^n<t_1^{(n)}<\cdots<t_{N_n}^{(n)}=b$ 使得$\delta_n:=\max\limits_{1\le k\le N_n}\Delta t_k^{(n)}\to0\,(n\to\infty)$ 且$\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|\to l(\gamma)\,(n\to\infty)$. 将上面估计用于这列分划有

$$\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|\le\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma'(t_k^{(n)})|\Delta t_k^{(n)}+\sqrt{3}\omega(\delta_n)(b-a),$$

$$\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma'(t_k^{(n)})|\Delta t_k\le\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|+\sqrt{3}\omega(\delta_n)(b-a).$$

因$t\mapsto|\gamma'(t)|$在$[a,b]$ 上连续从而Riemann 可积, 又因$\omega(\delta_n)\to0\,(n\to\infty)$, 故令$n\to\infty$ 即得

$$\int_a^b|\gamma'(t)|\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma'(t_k^{(n)})|\Delta t_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n}|\gamma(t_k^{(n)})-\gamma(t_{k-1}^{(n)})|=l(\gamma).$$

这同时证明了$l(\gamma)<+\infty$ 即γ 是可求长的. $\Box$

下面命题说明曲线的长度只由曲线作为$\mathbb{R}^3$中的集合确定从而与曲线参数的选择无关. 在陈述命题之前, 先看一个典型的情形: 假设$\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^3)$是简单曲线, 为清楚起见假设$\gamma$ 不是闭曲线, 意即$t\mapsto\gamma(t)$在$[a,b]$ 上是单射. 设$\gamma_1\in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^3)$是同一曲线的另一参数式且与$\gamma$有相同的起点和终点　即$\gamma(a)=\gamma_1(\alpha),\gamma(b)=\gamma_1(\beta)$. 则对任意$\tau\in[\alpha,\beta]$ 存在$t\in[a,b]$ 使得$\gamma(t)=\gamma_1(\tau)$. 这给出$t=\gamma^{-1}(\gamma_1(\tau))$. 令$t(\tau)=\gamma^{-1}(\gamma_1(\tau))$, $\tau\in[\alpha,\beta]$. 则由曲线的光滑性可以想象$t(\tau)$ 也是连续地可微的. 因为两个参数表示的起点终点相同故两个参数的增加和减少是一致的, 也即$\tau\mapsto t(\tau)$ 单调增加. 于是得到关系$\gamma_1(\tau)=\gamma(t(\tau)),\tau\in[\alpha,\beta]$ 其中$\tau\mapsto t(\tau)$是C^1的且单调增加.

在下面命题中我们就直接考虑这种情形, 即两个参数之间有单调增加的函数关系.

【命题6.38】 设曲线$\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^3)$. 设$\gamma_1 \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^3)$ 是同一曲线的另一参数表示且$\gamma_1(\tau) = \gamma(t(\tau)), \tau \in [\alpha,\beta]$, $\tau \mapsto t(\tau)$属于C^1类且$t(\alpha) = a, t(\beta) = b, t'(\tau) \geq 0, \tau \in [\alpha,\beta]$. 则有

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) \qquad \text{即} \quad \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |\gamma_1'(\tau)|\mathrm{d}\tau.$$

【证】由复合函数求导(例如对每个坐标函数用复合函数求导)有

$$\gamma_1'(\tau) = (\gamma(t(\tau)))' = \gamma'(t(\tau))t'(\tau), \quad \tau \in [\alpha,\beta].$$

于是有积分换元公式和$t'(\tau) \geq 0$ 有

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} |\gamma'(t)|\mathrm{d}t \quad (t = t(\tau)\,) \quad = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t(\tau))|t'(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_\alpha^\beta |\gamma'(t(\tau))t'(\tau)|\mathrm{d}\tau = \int_\alpha^\beta |\gamma_1'(\tau)|\mathrm{d}\tau. \qquad \Box$$

上面的定义和结果对任意维数的欧空间都成立. 特别对于二维欧空间$\mathbb{R}^2$ 中的C^1 曲线$[a,b] \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ 有

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

例如对于显式曲线$[a,b] \ni x \mapsto \gamma(x) = (x, f(x)), f \in C^1([a,b])$ 有

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

从上面的分析和结果我们看到了Riemann 积分的几何意义.

2. 力的做功

设$\mathbb{R}^3$中有一个力场(也称为力)$F = (P,Q,R)$, 又设有一个质点$\gamma = (x,y,z)$从点A 移动到点B. 试计算在质点的这个移动过程中, 力场F 对该质点所做的功W. 为能计算, 我们假设质点运动轨迹是光滑的并赋予γ 以参数式$\gamma = \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$, $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$. 相应地写$F = F(t) = (P(t), Q(t), R(t))$. 作分划$\mathcal{C}: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. 设$\lambda(\mathcal{C}) = \max\limits_{1\leq k\leq n} \Delta t_k$ 充分小使得$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \approx \gamma'(t_k)\Delta t_k$.

在中学我们知道一个常力对物体的做功等于这个力的与物体运动方向同向的分力乘以物体移动的位移. 据此可知力F 在时间段$[t_{k-1}, t_k]$内对质点所做的功近似为

$$\langle F(t_k), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\rangle \approx \langle F(t_k), \gamma'(t_k)\rangle\Delta t_k.$$

于是所求的功近似等于

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \langle F(t_k), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle \approx \sum_{k=1}^{n} \langle F(t_k), \gamma'(t_k) \rangle \Delta t_k.$$

让$\lambda(\mathcal{C}) \to 0$ 就得到准确值(**看做力场做功的定义**):

$$W = \lim_{\lambda(\mathcal{C}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \langle F(t_k), \gamma'(t_k) \rangle \Delta t_k = \int_a^b \langle F(t), \gamma'(t) \rangle \mathrm{d}t.$$

也即

$$W = \int_a^b \Big(P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t) \Big) \mathrm{d}t.$$

如果质点是在水平平面内运动, 例如在$xy-$平面运动, 即$\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$, 则有

$$W = \int_a^b \Big(P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) \Big) \mathrm{d}t.$$

显见此时等价于平面行为, 即平面运动和平面力场, 即$\gamma(t) = (x(t), y(t)), F(t) = (P(t), Q(t))$ 的情形.

进一步设γ是显式曲线$\gamma = \gamma(x) = (x, \varphi(x))$, 相应地记$F = F(x) = (f(x), g(x))$, 则由$\gamma'(x) = (1, \varphi'(x))$ 有

$$W = \int_a^b \Big(f(x) + g(x)\varphi'(x) \Big) \mathrm{d}x.$$

再进一步, 设力F的方向与x-轴同向, 例如$F(x) = (f(x), 0)$, 则有

$$W = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

或者假设质点只是沿着平行于x-轴的直线段运动，即$\gamma(x) = (x, c)$其中c 是常数, 则也有$W = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. 此刻我们再次看到了Riemann 定积分的物理意义.

3. 旋转体的体积和侧面积

设$[a, b]$ 为有界闭区间, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. 我们要求出曲线$[a, b] \ni x \mapsto (x, f(x))$围绕$x$-轴一周后所形成的曲边圆柱面所包围的曲边圆柱体的体积V. 换言之要计算位于x-轴上方的平面图形$\{(x, y) \,|\, x \in [a, b],\, 0 \le y \le |f(x)|\}$ 绕x-轴一周后所形成的立体图形的体积V. 为了能计算, 我们假定f 或f^2 在$[a, b]$ 上Riemann 可积. 作分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 根据公式: 半径为$r$、高为$h$的圆柱体的体积为$\pi r^2 h$, 我们有

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi |f(x_k)|^2 \Delta x_k.$$

由此可知所求的旋转体的体积为(**看做定义**)

$$V = \lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi|f(x_k)|^2\Delta x_k = \int_a^b \pi(f(x))^2\mathrm{d}x.$$

再看侧面积: 此时不是一般性我们假定f在$[a,b]$ 上非负. 我们要求计算曲线$[a,b]\ni x\mapsto (x,f(x))$绕$x$-轴一周后所形成的曲边圆柱面的面积$S$. 为了能计算, 我们进一步假定曲线是光滑的即$f\in C^1([a,b])$. 作分划$\mathcal{C}: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 在$[x_{k-1},x_k]$ 这段上的曲线近似等于$(x_{k-1},f(x_{k-1}),(x_k,f(x_k)$ 为端点的弦, 该弦绕x-轴一周后所形成的图形是一个圆锥台, 其侧面积为

$$\pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2} = 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1+(f'(\zeta_k))^2}\,\Delta x_k$$

其中(根据介值定理和中值定理) $\xi_k,\zeta_k\in(x_{k-1},x_k), \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. 于是得到近似值

$$S\approx\sum_{k=1}^{n}2\pi f(\xi_k)\sqrt{1+(f'(\zeta_k))^2}|I_k|. \tag{6.24}$$

因$f(x), \sqrt{1+(f'(x))^2}$ 都在$[a,b]$ 上连续从而可积, 故由下面的习题**2** 可知

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^{n}2\pi f(\xi_k)\sqrt{1+(f'(\zeta_k))^2}|I_k| = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{6.25}$$

联合(6.24),(6.25) 即知所求的旋转面的面积为(**看做定义**)

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

最后需要说明: 在上述旋转体的侧面积的计算公式的建立中, 如果在小段$[x_{k-1},x_k]$ 上不是以圆锥台的侧面积作为近似, 而是以圆柱的侧面积$2\pi f(x_k)\Delta x_k$作为近似, 则将得到不正确的面积值$\int_a^b 2\pi f(x)\mathrm{d}x$,它少算了一块:

$$S-\int_a^b 2\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)(\sqrt{1+(f'(x))^2}-1)\,\mathrm{d}x\ge 0.$$

不难证明: 当且仅当f不恒为常数时, 严格不等号>0 成立(见下面习题**6**).

本章部分作业题和练习题(含习题课部分习题, 其他习题见陈书第6章)

1. 设$[a,b]$为有界闭区间, $\mathcal{C}_n : a = x_0^n < x_1^{(n)} < \cdots < x_{N_n}^{(n)} = b$ 是某一列分划, 满足$\lambda(\mathcal{C}_n) := \max\limits_{1\le k\le N_n} \Delta x_k^{(n)} \to 0\ (n \to \infty)$. 令$I_k^{(n)} = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}], k = 1,2,...,N_n$. 设$f$在$[a,b]$上有界. 证明

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} \omega_f(I_k^{(n)})|I_k^{(n)}| = 0.$$

本题说明(对有界函数来说), “特殊分划的振幅和趋于零”与“一般分划的振幅和趋于零”是等价的.

2. 设$[a,b]$为有界闭区间, 函数$f,g \in \mathcal{R}([a,b])$. 作任意分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 任取$\xi_k, \zeta_k \in I_k := [x_{k-1}, x_k]$. 令$|I_k| = \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. 证明

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\zeta_k)|I_k| = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

3. 令$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 当$x \neq 0; f(0) = 1$. 设$0 < R < +\infty$. 证明f 在$[0,R]$ 上可积. 又若定义$f(0) = -1$, 问f 在$[0,R]$ 上是否可积?

4. 设$p > 0$为常数, $f \in \mathcal{R}([a,b])$. 证明$|f|^p \in \mathcal{R}([a,b])$.

5. 设f是有界闭区间$[a,b]$上的单调函数. 证明f在$[a,b]$上可积.

6. 设实函数f在有界闭区间$[a,b]$上非负、可微且导函数$f'(x)$ 在$[a,b]$ 上连续. 证明

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \iff f \text{ 在}[a,b] \text{ 上恒等于常数.}$$

7*: 设$[a,b]$为有界闭区间. 试构造$[a,b]$上的一个有界的实值函数f, 使得f的点振幅函数$x \mapsto \omega_f(x)$ 在$[a,b]$上不是Riemann 可积的.

[此题曾以问题的形式留给2014级同学作为有奖征解题(当是我不知道结论), 它在两天内就由该年级的**王志涵**同学给出否定的回答, 他考虑了**命题6.12**下面的例题中那类紧集K. 需说明, 任何有界函数f的点振幅函数$x \mapsto \omega_f(x)$ 都是在现代积分(即Lebesgue积分)意义下可积的.]

8. 先用第五章的方法求$\frac{1}{3+\sin x}$的原函数, 然后计算积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}.$$

9. 计算

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=?$$

10. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha},\quad \alpha\geq 0.$$

11. 设$I_1,I_2,...,I_n$ 是含于$[0,1]$中的区间, m 为自然数, $1\leq m<n$, 满足：$[0,1]$中每个x都至少同时属于$I_1,I_2,...,I_n$中的某m个区间 (当x不同时, 这m个区间可能也不同). 证明存在$k\in\{1,2,...,n\}$ 使得

$$|I_k|\geq\frac{m}{n}.$$

[提示: “特征函数是个宝, 不会用它, 积分就学不好”.]

12. 设$f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ 满足: 对于一个有限集$\{c_1,c_2,...,c_n\}\subset[a,b]$ 有

$$f(x)<g(x)\qquad\forall\, x\in[a,b]\setminus\{c_1,c_2,...,c_n\}.$$

证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

13. 试做两个函数$f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足:

(1) f,g 在$[0,1]$上几乎处处相等, (2) f在$[0,1]$上可积但g在$[0,1]$上不可积.

[注意: 本题与**命题6.14** 无矛盾.]

14. (定积分与不定积分的区别) (1) 设$f\in\mathcal{R}([0,\pi])$. 证明

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(2) 计算

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

15. 设实函数$f\in C^1([0,1])$ 满足$f(0)=0, 0\leq f'(t)\leq 1, t\in[0,1]$. 证明

$$\int_0^1(f(t))^3\mathrm{d}t\leq\Big(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\Big)^2.$$

提示: 考虑变上限积分.

16. 设$[a,b]$ 为有界闭区间, $f\in C^1([a,b])$. 证明

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

17. 设$[a,b]$ 为有界闭区间, $f_n,f\in C^1([a,b])$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}f_n(a)=f(a),\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n'(x)-f'(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证明f_n 一致收敛于f 即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

18. (好条件下的积分第二值定理) 设$[a,b]$ 为有界闭区间, 实函数$f\in C^1([a,b]),g\in C([a,b])$. 假设$f$在$[a,b]$ 上单调. 试直接证明存在$\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

提示: 利用分部积分, 不妨设f非减.

19.(分部积分法) 计算下列积分($n,m\in\mathbb{N}$):

$$(1)\ \int_0^1\log(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x,\qquad (2)\ \int_0^\pi x^2\sin(nx)\mathrm{d}x,$$
$$(3)\ \int_0^1 x^2e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\qquad (4)\ \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x.$$

20.(分部积分法的应用) 假若π 是有理数, 令$\pi=\frac{a}{b}$ 其中$a,b\in\mathbb{N}$ 互质. 令

$$f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!},\quad n\in\mathbb{N}.$$

证明

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\quad \text{为一整数.}$$

由此证明π 不可能为一有理数.

提示: 证明(1) $f(\frac{a}{b}-x)=f(x)$; (2) 导函数$f^{(k)}(x)$ $(k\in\{0,1,...,2n\})$ 当$x=0$ 和$x=\frac{a}{b}$ 时取值为整数.

21. 试利用积分的一般性质、被积函数的性质和极限的定义(不需要把积分积出来)证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^{n/2}\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$$

22. 设$f:[a,b]\to[A,B]$ 常义可积, $\Phi:[A,B]\to\mathbb{R}$ 是连续凸函数且在(A,B)内可导. 证明**Jensen不等式:**

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(f(x))\mathrm{d}x \ge \Phi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big).$$

23. 设$[a,b]$ 为有界闭区间, 实函数$f\in\mathcal{R}([a,b])$. 证明

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{g(x)}\mathrm{d}x.$$

24. (北大《数学分析习题集》7.4.13) 设$a>0,b>0$, $0\le f\in\mathcal{R}([a,b])$ 且

$$\int_{-a}^b xf(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明

$$\int_{-a}^b x^2 f(x)\mathrm{d}x \le ab\int_{-a}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

25. (北大《数学分析习题集》7.6.15) 设

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos(nx)}{\cos^n(x)}\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

证明

$$I_n=2^{n-1}\Big(\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{k2^{k/2}}\Big),\quad n=2,3,\ldots.$$

26. 设$[a,b]$ 为有界闭区间, m 为非负整数, 实函数$f\in C([a,b])$ 满足

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0,\quad n=0,1,...,m.$$

证明f在开区间(a,b)内至少有$m+1$个互异零点.

27. 设实函数$f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ 满足f单调不增, $0\le g\le 1$. 令

$$\lambda=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明

$$\int_{b-\lambda}^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

28. 设实值函数f 在有界闭区间$[a,b]$ 上可导且导函数f' 在$[a,b]$ 上单调(这蕴含f'在$[a,b]$上连续) 且$|f'(x)|\ge m>0$ for all $x\in[a,b]$. 证明

$$\Big|\int_a^b \cos(f(x))\mathrm{d}x\Big| \le \frac{2}{m}.$$

29. 写出函数$f(x)=\log(1+x)$, $g(x)=(1+x)^\alpha$ 的具有积分型余项的Taylor 公式($x_0=0, x>-1$).

30. 设函数f在闭区间$[0,2\pi]$上单调. 证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x=0.$$

31. (1) 设函数f在闭区间$[0,2\pi]$上单调不增, 证明

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\geq 0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

(2) 设函数f是闭区间$[0,2\pi]$上可微的凸函数且$f'(x)$ 有界. 证明

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x\geq 0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

32. 试举例说明, 一般而言积分第二中值定理中f的单调性不能去掉.

33. 设$-\infty\leq a<b\leq+\infty$, 函数$f$在区间$(a,b)$内可导且导函数连续, 又设

$$\text{极限}\quad f(a+)=\lim_{a<x\to a} f(x),\quad f(b-)=\lim_{b>x\to b} f(x)\quad\text{存在}$$

且减法$f(b-)-f(a+)$ 有意义. 证明广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在且成立广义Newton-Leibnitz 公式:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b-)-f(a+).$$

34. 设$f\in C^1([0,\infty))$ 满足$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 证明广义积分$\int_0^{+\infty} f(x)f'(x)\mathrm{d}x$收敛且

$$\int_0^{+\infty} f(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{f(0)^2}{2}.$$

35. 计算广义积分积分(先证可积性)

$$\int_0^{\pi/2}\log(\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

36. 设$a_n\geq 0, n=1,2,3,....$ 证明

$$\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{na_n}{n^2+m^2}\leq\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty a_n.$$

37. 证明对任意$m \in \mathbb{N}$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n}\sqrt{\frac{m}{n}} \le \pi.$$

38. (1) 设$\alpha > -1$. 证明

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 2^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-t}\mathrm{d}t < +\infty.$$

(2) 设$f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ 连续且广义积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 证明下式右端的广义积分存在且

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\tan\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}.$$

39. 设$1 < p < +\infty, 0 \le f \in C([0, +\infty))$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明Hardy 不等式

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p \mathrm{d}x \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^{+\infty} (f(x))^p \mathrm{d}x.$$

[提示：利用分部积分. 同时注意当$\int_0^{+\infty}(f(x))^p\mathrm{d}x = +\infty$ 时不等式自动成立. 因此可以假设$\int_0^{+\infty}(f(x))^p\mathrm{d}x < +\infty$.]

40*. 设实函数$f \in C^2([0, 1])$ 满足$f(0) = f(1) = 0$, $f(x) \ne 0 \quad \forall x \in (0, 1)$. 证明

$$\int_0^1 \Big|\frac{f''(x)}{f(x)}\Big|\mathrm{d}x \ge 4.$$

41. 求极限

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{m+n}}{m+n}.$$

[提示: 利用定积分.]

注: 在答疑时, 汪圣同学指出作业题第1题中原来的提示似乎无用。分析后发现确实不妥。下面给出该题的解答, 我们把解答写成命题的形式:

【命题6.A】 设$[a, b] \subset \mathbb{R}$为有界闭区间, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$在$[a, b]$ 上有界. 则以下(a), (b)等价:

(a) 对任意$\varepsilon > 0$ 存在$[a, b]$的分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ 使得

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_f(I_k)|I_k| < \varepsilon, \quad 其中 \quad I_k = [x_{k-1}, x_k].$$

(b) 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得对$[a,b]$上的任意分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,

$$\text{只要}\lambda(\mathcal{C}) < \delta \text{ 就有} \quad \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| < \varepsilon, \quad \text{其中} \quad I_k = [x_{k-1}, x_k].$$

也即

$$\lim_{\lambda(\mathcal{C})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| = 0.$$

【证】因(a)是(b)的特殊情形, 故"$(b) \Longrightarrow (a)$"显然成立. 下证

"$(a) \Longrightarrow (b)$:"取定一个正数$M \ge \omega_f([a,b])$. 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/2 > 0$, 由假设存在$[a,b]$的分划$\mathcal{C}^* : a = x_0^* < x_1^* < x_2^* < \cdots < x_N^* = b$ 使得

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_f(J_i)|J_i| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{其中} \quad J_i = [x_{i-1}^*, x_i^*].$$

以下我们将用到约定:空集的长度为零: $|\emptyset| = 0$, 对空集的求和等于零: $\sum\limits_{k\in\emptyset} a_k = 0$.

任取$[a,b]$的一个分划$\mathcal{C} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 令$I_k = [x_{k-1}, x_k]$. 由$I_k \subset [a,b] = \bigcup_{i=1}^{N} J_i$有(根据**引理6.3**)

$$I_k = \bigcup_{i=1}^{N} I_k \cap J_i, \quad |I_k| = \sum_{i=1}^{N} |I_k \cap J_i|, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

据此有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| &= \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k) \sum_{i=1}^{N} |I_k \cap J_i| = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k\in A_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| + \sum_{k\in B_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k\in A_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k\in B_i} \omega_f(I_k)|I_k \cap J_i| \Big)
\end{aligned}$$

其中

$$A_i = \{k \in \{1, 2, ..., n\} \mid I_k \subset J_i\}, \quad B_i = \{k \in \{1, 2, ..., n\} \mid I_k \cap J_i \neq \emptyset,\ I_k \not\subset J_i\}.$$

因当$k \in A_i$时$I_k \subset J_i$, 故有$\omega_f(I_k) \le \omega_f(J_i)$. 同时由**引理6.4** 有

$$\sum_{k\in A_i} |I_k| \le |J_i|.$$

于是有

$$\sum_{k\in A_i}\omega_f(I_k)|I_k\cap J_i| = \sum_{k\in A_i}\omega_f(I_k)|I_k| \le \omega_f(J_i)\sum_{k\in A_i}|I_k| \le \omega_f(J_i)|J_i|.$$

而由B_i的定义易见B_i至多只有两个元素. 因为若有$k_1,k_2,k_3\in B_i$, 不妨设$k_1<k_2<k_3$. 取$y_1\in I_{k_1}\cap J_i, y_3\in I_{k_3}\cap J_i$, 则有$x_{k_1-1}\le y_1\le x_{k_1}\le x_{k_2-1}<x_{k_2}\le x_{k_3-1}\le y_3\le x_{k_3}$, 从而有$I_{k_2}\subset[y_1,y_3]\subset J_i$, 这与$k_2\in B_i$ 矛盾. 所以B_i至多只有两个元素。据此我们得到

$$\sum_{k\in B_i}\omega_f(I_k)|I_k\cap J_i| \le \sum_{k\in B_i}M|I_k| \le \sum_{k\in B_i}M\lambda(\mathcal{C}) \le 2M\lambda(\mathcal{C}).$$

令$\delta=\frac{\varepsilon}{4NM}$. 将这两个估计式代入上面得到：当$\lambda(\mathcal{C})<\delta$ 时

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)|I_k| \le \sum_{i=1}^{N}\omega_f(J_i)|J_i| + \sum_{i=1}^{N}2M\lambda(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{N}\omega_f(J_i)|J_i| + 2NM\lambda(\mathcal{C}) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{\lambda(\mathcal{C})\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)|I_k|=0.$ $\Box$

[**这个命题已放在本讲义§6.1 中**]

习题课题目

1 (此题已经留为学生的作业题, 这里给出详细证明).

证明**逐项积分定理**: 设$[a,b]$ 为有界闭区间, $u_k \in \mathcal{R}([a,b])$ 且函数级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛. 则$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \in \mathcal{R}([a,b])$ 且成立逐项积分:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x.$$

【证】令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}.$$

则由假设和一致收敛的定义知当$n \to \infty$时f_n 在$[a,b]$上一致收敛于f, 即

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{$*$}$$

需要证明$f \in \mathcal{R}([a,b])$ 且成立逐项积分. 让我们暂且承认$f \in \mathcal{R}([a,b])$, 来证明可以逐项积分. 对任意$\varepsilon > 0$, 因f_n一致收敛于f, 故对$\varepsilon/(b-a) > 0$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得当$n \ge N$ 时 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$. 于是当$n \ge N$ 时

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x\Big| \\ &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}x = \varepsilon.\end{aligned}$$

所以, 由极限的定义,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面由积分的线性性有

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x.$$

因此由级数收敛的定义知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\mathrm{d}x.$$

这证明了逐项积分成立.

下面证明$f \in \mathcal{R}([a,b])$. 令D_f, C_f分别为f在$[a,b]$ 上的间断点的集合和连续点的集合即

$$D_f = \{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) > 0\}, \quad C_f = [a,b] \setminus D_f = \{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) = 0\}.$$

为证$f \in \mathcal{R}([a,b])$, 据Lebesgue 准则, 只需证明f在$[a,b]$ 上有界且在$[a,b]$ 上几乎处处连续, 后者等价于D_f是零集.

因$u_k \in \mathcal{R}([a,b]), k=1,2,3,...$　故由Riemann可积性质知$f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \in \mathcal{R}([a,b])$. 因此, 由Riemann可积的必要条件和Lebesgue 准则知f_n在$[a,b]$ 上有界且几乎处处连续, 即D_{f_n} 是零集,$n=1,2,3,\ldots$.

由$(*)$ 知存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_N(x) - f(x)| < 1.$$

这蕴含对任意$x \in [a,b]$ 有$|f(x)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < 1 + |f_N(x)|$ 从而有

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le 1 + \sup_{x\in[a,b]} |f_N(x)| < +\infty.$$

所以f在$[a,b]$ 上有界.

为证D_f 是零集, 只需证明

$$D_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{f_n} \qquad \text{i.e.} \qquad C_f \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{f_n}.$$

因为如果这个包含关系成立, 则由零集的性质即知D_f 也是零集.

任取$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{f_n}$, 即$f_n$ 都在$x = x_0$ 连续，$n = 1,2,3,\ldots$. 来证f也在$x = x_0$连续. 考虑关系:

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x)(x_0) - f(x_0)| \\
&\le 2 \sup_{y\in[a,b]} |f_N(y) - f(y)| + |f_N(x) - f_N(x_0)|.
\end{aligned}$$

对任意$\varepsilon > 0$, 因f_n一致收敛于f, 故对$\varepsilon/3 > 0$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得$\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. 而$f_N(x)$在$x_0$ 连续, 故存在$\delta > 0$ 使得当$x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$时$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$. 因此当$x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$时

$$|f(x) - f(x_0)| \le 2 \sup_{y\in[a,b]} |f_N(y) - f(y)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

所以f在$x = x_0$ 连续, 即$x_0 \in C_f$. 由$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{f_n}$的任意性, 这就证明了$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{f_n} \subset C_f$, 即$D_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{f_n}$. 所以$D_f$ 是零集.　这就证明了$f \in \mathcal{R}([a,b])$.　□

2. 计算下列积分

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x) \mathrm{d}x.$$

(回忆以前习题课的结果并利用上题中的定理.)

【解】上次习题课我们证明了

$$e^{\cos x}\cos(\sin x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!},\quad e^{\cos x}\sin(\sin x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

由Weierstrass 优势级数判别法易见这两个函数级数在$\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛从而一致收敛. 而通项是连续函数, 因此由上一题知可以进行逐项积分:

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos(\sin x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\sin(\sin x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x=0$$

其中用到

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x=0,\quad\int_0^{2\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,3,\ldots.\qquad\square$$

3. 证明

$$\frac{4}{3\sqrt{n}}\le\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x<\frac{\pi}{\sqrt{n}},\quad n=1,2,3,\ldots.$$

【证】因

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=2\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x$$

故只需证明

$$\frac{2}{3\sqrt{n}}\le\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2\sqrt{n}},\quad n=1,2,3,\ldots.$$

先证下界: 由贝努力不等式有

$$(1-x^2)^n\ge 1-nx^2$$

从而有

$$\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x\ge\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$$
$$\ge\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)\mathrm{d}x=\Big(x-n\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{2}{3\sqrt{n}}.$$

再看上界: 由基本不等式

$$1+t \le e^t \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

有

$$1-x^2 \le e^{-x^2} \qquad \text{从而有} \quad (1-x^2)^n \le e^{-nx^2} \quad \forall\, x\in[0,1],$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ & \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \le \int_0^1 e^{-nx^2}\mathrm{d}x \quad (\text{换元 } x=\frac{t}{\sqrt{n}},\quad \mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{d}t\ ) \\
&= \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{e^{t^2}}\mathrm{d}t \qquad (\ e^{t^2}\ge 1+t^2\ ) \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\arctan(t)\Big|_{t=0}^{t=\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\arctan(\sqrt{n}) < \frac{\pi}{2\sqrt{n}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

4. Weierstrass 逼近定理(即连续函数可被多项式一致逼近)的Landau 证明

[Landau, 全称为Edmund Georg Herman Landau (1877年2月14日-1938年2月19日), 是德国数学家, 生于柏林，卒于同地.]

即证明: 若函数f在有界闭区间$[a,b]$ 上连续, 则存在一列多项式$\{P_n\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$\max_{x\in[a,b]}|P_n(x)-f(x)| \to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

【证】如前, 借助线性变换, 只需对$[a,b]=[0,1]$的情形进行证明即可.

设f在$[0,1]$ 上连续. 先说明我们可以假设$f(0)=f(1)=0$. 事实上如果对这种情形所证逼近定理成立, 则对一般情形, 令$g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$. 则$g$ 在$[0,1]$上连续且$g(0)=g(1)=0$ 从而g 能被一列多项式P_n一致逼近. 但

$$P_n(x)-g(x)=P_n(x)+f(0)(1-x)+f(1)x-f(x)$$

且$P_n(x)+f(0)(1-x)+f(1)x$ 仍是多项式, 故$f(x)$能被多项式序列$P_n(x)+f(0)(1-x)+f(1)x$ 一致逼近. 因此我们只需对$f(0)=f(1)=0$ 的情形证明多项式逼近定理.

为了分析方便, 我们将f连续地延拓到整个实数域：

$$\text{定义 } f(x)=0 \ \text{ 当 } \ x\le 0 \text{ 或 } x\ge 1.$$

易见延拓后的f 在$\mathbb{R}$上连续. 对每个$n\in\mathbb{N}$ 令

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n, \quad x\in\mathbb{R}$$

其中常数$c_n > 0$ 由归一化条件

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\mathrm{d}x = 1$$

决定, 也即$c_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}$. 令

$$P_n(x) = \int_0^1 f(y)Q_n(x-y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

由二项式展开

$$(1-(x-y)^2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k(x-y)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j x^j(-y)^{2k-j}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j(-1)^{3k-j}x^j y^{2k-j}$$

有

$$f(y)Q_n(x-y) = c_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j(-1)^{3k-j}x^j f(y)y^{2k-j}$$

从而由积分的线性性有

$$P_n(x) = c_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j(-1)^{3k-j}x^j \int_0^1 f(y)y^{2k-j}\mathrm{d}y.$$

这说明$P_n(x)$ 是x的多项式. 下证P_n在$[0,1]$上一致收敛于f. 为此我们作一番整理: 由f在$[0,1]$ 之外等于零和Q_n 是偶函数有: 当$x \in [0,1]$时

$$P_n(x) = \int_0^1 f(y)Q_n(x-y)\mathrm{d}y = \int_{x-1}^{x+1} f(y)Q_n(x-y)\mathrm{d}y \quad (\, x-y=-t \quad \text{即} \quad y=x+t\,)$$
$$= \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(-t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t.$$

于是由归一化条件$\int_{-1}^{1} Q_n(t)\mathrm{d}t = 1$ 有

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)Q_n(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1]$$

从而有

$$|P_n(x) - f(x)| \le \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1]$$

这里用到非负性: 当$t \in [-1,1]$ 时$Q_n(t) \ge 0$.

因f在紧集$[-1,2]$上连续故f在其上一致连续且有界. 令$M = \sup\limits_{x\in[-1,2]}|f(x)|\,(< +\infty)$. 对任意$\varepsilon > 0$, 由$f$在$[-1,2]$上一致连续, 存在$0 < \delta < 1$ 使得对所有$x, y \in [-1,2]$满

足$|x-y|\le\delta$者都有$|f(x)-f(y)|\le\varepsilon/2$. 于是对任意$x\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}
&|P_n(x)-f(x)|\le\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t\\
&+\int_{-1}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t\\
&\le\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}Q_n(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{-\delta}2MQ_n(t)\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{1}2MQ_n(t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)\mathrm{d}t+2M\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)\mathrm{d}t+2M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\mathrm{d}t\\
&\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}Q_n(t)\mathrm{d}t+4M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}+4M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

因这不等式对所有$x\in[0,1]$成立, 故得到

$$\max_{x\in[0,1]}|P_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+4M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,3,\dots.$$

另一方面由上一习题有

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\ge\frac{4}{3\sqrt{n}}\quad\text{因此}\quad c_n=\frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\le\frac{3\sqrt{n}}{4}.$$

这给出估计

$$4M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\mathrm{d}t=4Mc_n\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t<3M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n.$$

在极限学习中我们知道对任意$k\ge0,0<a<1$ 有

$$\lim_{n\to\infty}n^ka^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{b^n}=0,\qquad\text{这里}\quad b=\frac{1}{a}>1.$$

因此

$$3M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n\to0\quad\text{as}\quad n\to\infty.$$

因此存在$N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$时

$$4M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\mathrm{d}t\le3M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当$n\ge N$时

$$\max_{x\in[0,1]}|P_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以当$n\to\infty$时, P_n在$[0,1]$ 上一致收敛于f. $\square$

5. 证明可积函数可以被连续函数逼近: 设$f \in \mathcal{R}([a,b])$, $A,B\in\mathbb{C}$ 满足$|A|,|B| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 则对任意$\varepsilon>0$ 存在$f_\varepsilon\in C([a,b])$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

且

$$f_\varepsilon(a)=A, f_\varepsilon(b)=B,\quad \max_{x\in[a,b]}|f_\varepsilon(x)|\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

【证】令

$$M(f)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

由f Riemann 可积知$M(f)<+\infty$.

先假设$f(a)=A, f(b)=B$.

对任意$\varepsilon>0$, 由可积函数的振幅刻画知, 存在分划

$\mathcal{C}: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)|I_k|<\varepsilon$$

其中$I_k=[x_{k-1},x_k], |I_k|=\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0, k=1,2,...,N$,

$$\omega_f(I_k)=\sup_{x,y\in I_k}|f(x)-f(y)|.$$

作连续折线函数

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases} f(x_{k-1})+\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1}) & \text{当 } x\in[x_{k-1},x_k] \text{ 时}\\ k=1,2,...,N. \end{cases}$$

注意f_ε在任何两个相邻的子区间的交接点x_k 处的值是唯一确定的, 即$f_\varepsilon(x_k)=f(x_k), k=0,1,2,...,N$. 因此$f_\varepsilon$在整个$[a,b]$ 上是被良好定义的且在每个子区间$[x_{k-1},x_k]$ 是连续的. 因此f_ε在$[a,b]$ 上连续。**黑板上给出f_ε的几何图像(它是f的线性插值).**

看逼近: 由f_ε的定义有: 当$x\in[x_{k-1},x_k]$时

$$f_\varepsilon(x)=f(x_{k-1})+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1})=\Big(1-\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\Big)f(x_{k-1})+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}f(x_k)$$

它表明$f_\varepsilon(x)$是$f(x_{k-1}),f(x_{k-1})$的凸组合. 于是有

$$\begin{aligned}&|f_\varepsilon(x)|\le\Big(1-\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\Big)|f(x_{k-1})|+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}|f(x_k)|\le M(f)\\&\text{for all } x\in[x_{k-1},x_k],\quad k=1,2,...,N.\end{aligned}$$

所以得到$M(f_\varepsilon)\le M(f)$.

同时对任意$x\in[x_{k-1},x_k]$ 有

$$\begin{aligned}&|f(x)-f_\varepsilon(x)|=\Big|\Big(1-\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\Big)\Big(f(x)-f(x_{k-1})\Big)+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\Big(f(x)-f(x_k)\Big)\Big|\\&\le\Big(1-\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\Big)|f(x)-f(x_{k-1})|+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}|f(x)-f(x_k)|\le\omega_f(I_k),\end{aligned}$$

$k=1,2,...,N.$ 于是得到估计(运用积分的可加性和积分不等式)

$$\begin{aligned}&\int_a^b|f(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_N}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^N\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x\\&\le\sum_{k=1}^N\int_{x_{k-1}}^{x_k}\omega_f(I_k)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^N\omega_f(I_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^N\omega_f(I_k)|I_k|<\varepsilon.\end{aligned}$$

最后由$x_0=a,x_N=b$和$f_\varepsilon(x_k)=f(x_k)$ 可知$f_\varepsilon(a)=f(a)=0,f_\varepsilon(b)=f(b)=0.$

其次对一般情形, 令

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}A & x=a,\\ f(x) & x\in(a,b),\\ B & x=b.\end{cases}$$

根据Riemann积分的性质—— 对可积函数在有限多个点处的函数值作任意修改, 既不影响可积性也不改变积分值—— 知$\widetilde{f}$ 也在$[a,b]$ 上可积. 因$\widetilde{f}(a)=A,\widetilde{f}(b)=B$, 故由上面结果知存在$f_\varepsilon\in C([a,b])$ (此处因不会产生混乱, 故我们仍用同一记号f_ε 代替$\widetilde{f}_\varepsilon$) 使得$\int_a^b|\widetilde{f}(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$ 且$f_\varepsilon(a)=A,f_\varepsilon(b)=B$, $M(f_\varepsilon)\le M(\widetilde{f})$. 由

$$|f(x)-f_\varepsilon(x)|=|\widetilde{f}(x)-f_\varepsilon(x)|\qquad\forall\,x\in(a,b)$$

可见两个可积函数$|f(x)-f_\varepsilon(x)|,|\widetilde{f}(x)-f_\varepsilon(x)|$ 至多在两点a,b 处不等, 因此二者是几乎处处相等. 因此据积分的性质便有

$$\int_a^b|f(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b|\widetilde{f}(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

最后由$\widetilde{f}$与f的关系易见$M(\widetilde{f})\le M(f)$. 于是有$M(f_\varepsilon)\le M(f)$. $\square$

6. 证明**Riemann-Lebesgue 引理**: 对任意$f \in \mathcal{R}([a,b])$ 有

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x = \lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.$$

这里λ 是实数.

【证】由

$$\cos(\lambda x) = \frac{e^{\mathrm{i}\lambda x}+e^{-\mathrm{i}\lambda x}}{2}, \quad \sin(\lambda x) = \frac{e^{\mathrm{i}\lambda x}-e^{-\mathrm{i}\lambda x}}{2\mathrm{i}}$$

有

$$\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_a^b f(x)e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x.$$

因此只需证明

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = 0.$$

对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/2 > 0$, 由上一题知存在$f_\varepsilon \in C([a,b])$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon/2, \quad f_\varepsilon(a) = f_\varepsilon(b) = 0, \quad M(f_\varepsilon) \le M(f)$$

其中$M(f) = \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 由此有

$$\Big|\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x - \int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_a^b (f(x)-f_\varepsilon(x))e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big|$$
$$\le \int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)||e^{\mathrm{i}\lambda x}|\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon/2 \qquad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}.$$

从而有

$$\Big|\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big|$$
$$\le \Big|\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x - \int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| \qquad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}.$$

将f_ε作零延拓: $f_\varepsilon(x) = 0$ 当$x \le a$ 或$x \ge b$. 则由$f_\varepsilon(a) = 0, f_\varepsilon(b) = 0$ 可知延拓后的f_ε在$\mathbb{R}$上连续从而在任何有界闭区间上可积. 此外易见有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_\varepsilon(x)| = \max_{x\in[a,b]}|f_\varepsilon(x)| = M(f_\varepsilon) \le M(f).$$

设$|\lambda|\geq 1$. 来估计：利用$e^{\mathrm{i}\pi}=-1$ 有

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \quad (\ x=t+\frac{\pi}{\lambda}\ ) \quad =\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(t+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda t+\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(t+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda t}e^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}t=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(t+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x.$$

注意由定积分的可加性有

$$\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x+\int_a^b f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x+\int_b^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x-\int_a^b f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x-\int_b^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

这给出

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_b^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b \Big(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_b^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ （通过讨论$\lambda>0$ 和$\lambda<0$)

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big|\\
&\leq\frac{1}{2}\Big|\int_a^b \Big(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big|\\
&+\frac{1}{2}\Big|\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big|+\frac{1}{2}\Big|\int_b^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big|\\
&\leq\frac{1}{2}\int_a^b \Big|f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big|\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\Big|\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} |f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})|\mathrm{d}x\Big|+\frac{1}{2}\Big|\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} |f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})|\mathrm{d}x\Big|.
\end{aligned}$$

进一步, 通过讨论$\lambda > 0$ 和$\lambda < 0$ 并注意$|f_\varepsilon(\cdot)| \le M(f)$ 易见有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big|\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a}|f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})|\mathrm{d}x\Big| + \frac{1}{2}\Big|\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b}|f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})|\mathrm{d}x\Big| \\ &\le \frac{1}{2}\Big|\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a}M(f)\mathrm{d}x\Big| + \frac{1}{2}\Big|\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b}M(f)\mathrm{d}x\Big| = M(f)\frac{1}{2}\frac{\pi}{|\lambda|} + M(f)\frac{1}{2}\frac{\pi}{|\lambda|} = M(f)\frac{\pi}{|\lambda|}.\end{aligned}$$

所以得到

$$\Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| \le \frac{1}{2}\int_a^b \Big|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big|\mathrm{d}x + M(f)\frac{\pi}{|\lambda|}, \quad |\lambda| \ge 1.$$

取$R_1 > 1$ 使得

$$M(f)\frac{\pi}{R_1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

因函数$x \mapsto f_\varepsilon$ 在有界闭区间$[a-\pi,\, b+\pi]$ 上连续从而一致连续, 故存在$R > R_1$ 使得

$$\text{当 } |\lambda| > R \text{ 时} \quad \Big|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

于是当$|\lambda| > R$ 时有

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| \le \frac{1}{2}\int_a^b \Big|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x+\frac{\pi}{\lambda})\Big|\mathrm{d}x + M(f)\frac{\pi}{\lambda} \\ &< \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\mathrm{d}x + M(f)\frac{\pi}{R} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

从而联合前面的估计有

$$\Big|\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = 0. \qquad \Box$$

习题课

1(应用题). 设一个均匀细棒AB的长度为$L = |AB|$, 质量为M. 设在AB的延长线上有一个质点O, 其质量为m. 假设O与A距离最近并设它们的距离为$a = |OA| > 0$. 求细棒AB与质点O之间的引力F .

【解】先画图. 以O为原点建立坐标轴, 方向是A,B在原点O的右侧. 则A的坐标为a, B的坐标为$a+L$. 将区间$[a,a+L]$ 作分划

$$\mathcal{C}: \quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=a+L.$$

因细棒是均匀的, 故细棒在$[x_{k-1},x_k]$上的质量等于$\frac{\Delta x_k}{L}M$. 设这些子区间的最大长度$\lambda(\mathcal{C})<<1$. 则有$\Delta x_k\le\lambda(\mathcal{C})<<1$, 从而可以认为细棒在$[x_{k-1},x_k]$上的质量集中在点$x_k$ 处. 于是质点O与位于$[x_{k-1},x_k]$上的细棒之间的引力F_k 就近似等于质点O与距离为x_k、质量为$\frac{\Delta x_k}{L}M$的另一个质点之间的引力, 也即根据牛顿万有引力公式有

$$F_k\ \approx G\frac{m\frac{\Delta x_k}{L}M}{x_k^2}=G\frac{mM}{L}\cdot\frac{\Delta x_k}{x_k^2},\quad k=1,2,...,n.$$

这里G 是万有引力常数. 由于力是可加量, 故有

$$\text{所求的引力}\ F=\sum_{k=1}^{n}F_k\ \approx\sum_{k=1}^{n}G\frac{mM}{L}\cdot\frac{\Delta x_k}{x_k^2}.$$

令$\lambda(\mathcal{C})\to 0$ 即得

$$\begin{aligned}F&=\int_a^{a+L}G\frac{mM}{L}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=G\frac{mM}{L}\int_a^{a+L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=G\frac{mM}{L}\Big(-x^{-1}\Big|_{x=a}^{x=a+L}\Big)\\&=G\frac{mM}{L}\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+L}\Big)=G\frac{mM}{a(a+L)}.\end{aligned}$$

□

2. 设实函数$f\in C^1([0,1])$ 满足$f(0)=0,f(1)=1$. 证明对任意$\lambda>0$ 有

$$\int_0^1|f'(x)-\lambda f(x)|\mathrm{d}x>e^{-\lambda}.$$

【证】考虑

$$(f(x)e^{-\lambda x})'=f'(x)e^{-\lambda x}+f(x)e^{-\lambda x}(-\lambda)=\Big(f'(x)-\lambda f(x)\Big)e^{-\lambda x},\quad x\in[0,1].$$

由此有

$$\begin{aligned}e^{-\lambda}&=f(x)e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x=1}=\int_0^1(f(x)e^{-\lambda x})'\mathrm{d}x=\int_0^1\Big(f'(x)-\lambda f(x)\Big)e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\&\le\int_0^1|f'(x)-\lambda f(x)|e^{-\lambda x}\mathrm{d}x<\int_0^1|f'(x)-\lambda f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最后的严格不等号的证明如下: 首先由$\lambda > 0$易见

$$\int_0^1 |f'(x) - \lambda f(x)| e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f'(x) - \lambda f(x)| \mathrm{d}x.$$

假设等号成立:

$$\int_0^1 |f'(x) - \lambda f(x)| e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \int_0^1 |f'(x) - \lambda f(x)| \mathrm{d}x.$$

则有

$$\int_0^1 |f'(x) - \lambda f(x)|(1 - e^{-\lambda x}) \mathrm{d}x = 0.$$

由被积函数的连续性和非负性得到

$$|f'(x) - \lambda f(x)|(1 - e^{-\lambda x}) \equiv 0, \quad x \in [0, 1].$$

这$\Longrightarrow$

$$|f'(x) - \lambda f(x)| = 0 \qquad \forall\, x \in (0, 1].$$

从而有

$$f'(x) - \lambda f(x) \qquad \forall\, x \in [0, 1].$$

于是由证明开头的计算知

$$(f(x) e^{-\lambda x})' = 0 \qquad \forall\, x \in [0, 1].$$

从而$f(x)e^{-\lambda x} \equiv$ 常数. 但由假设知这函数不是常数: $f(1)e^{-\lambda} = e^{-\lambda} > 0 = f(0)e^0$. 这矛盾证了上述严格不等号成立. $\square$

3. 证明下面极限存在有限:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \cos(t^2) \mathrm{d}t.$$

【证】令

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2) \mathrm{d}t, \quad x > 0.$$

则对任意$y > x > 0$ 有

$$F(y) - F(x) = \int_x^y \cos(t^2) \mathrm{d}t \quad (\, t = \sqrt{u},\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} u^{-1/2} \mathrm{d}u\ )$$
$$= \int_{x^2}^{y^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \frac{1}{2x} \int_{x^2}^{\xi} \cos(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{2x} (\sin(\xi) - \sin(x^2))$$

其中用到积分第二中值定理. 这给出

$$|F(y)-F(x)|\le \frac{1}{x}\qquad \forall\, y>x>0.$$

因此对任意$\varepsilon>0$ 有

$$|F(y)-F(x)|\le \frac{1}{x}<\varepsilon\qquad \forall\, y>x>\frac{1}{\varepsilon}.$$

所以$F(x)$ 满足当$x\to+\infty$ 时的Cauchy 条件. 因此极限$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$存在有限. $\square$

4. 求下面极限:

$$(1)\quad \lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t}{x},\qquad\qquad (2)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t}{x}.$$

【解】(1) 由“$\frac{0}{0}$”型的洛必达法则和变上限积分求导有

$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\cos(x^2)}{1}=\cos 0=1.$$

(2) 先考虑“$\frac{*}{\infty}$”型的洛必达法则. 由变上限积分求导有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x^2)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\cos(x^2)\qquad \textbf{但此极限不存在!}$$

这说明这个比值不定型的极限不满足洛必达法则的条件, 因此无法使用洛必达法则。

而事实上在上题中我们已证明了当$x\to+\infty$ 时$\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t$ 收敛. 因此由连续函数性质知函数$x\mapsto\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t$在$[0,+\infty)$ 上有界. 于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t}{x}=0.$$

$\square$

3. 研究问题:

(1)

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x>0\,?\quad 或\quad \int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x\le 0\,?$$

(2)

$$\int_0^{\pi}e^{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta>\frac{3\pi}{2}\,?\quad 或\quad \int_0^{\pi}e^{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\le\frac{3\pi}{2}\,?$$

【解】(1) 定义

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\Big|_{t=0}=0.$$

则函数$t\mapsto\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$在$\mathbb{R}$ 上连续, 从而在任何闭区间上可积. 对任意$0<\varepsilon<1$, 计算

$$\int_{\varepsilon}^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x\quad(x=\sqrt{t}\,)\;=\int_{\varepsilon^2}^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\varepsilon^2}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

由此和变下限积分的连续性有

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{\varepsilon}^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{2}\int_{\varepsilon^2}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

来估计积分$\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. 由积分的可加性和平移变换有

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+\pi)}{\sqrt{t+\pi}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\Big(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}-\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}\Big)\mathrm{d}t>0\end{aligned}$$

其中“>0”是因为被积函数在$(0,\pi)$内严格大于零. 结论是: $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x>0.$

(2) 回忆不等式

$$e^x>1+x\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

由这不等式有

$$e^{\sin^2\theta}>1+\sin^2\theta\qquad\forall\,\theta\in(0,\pi).$$

因此有严格不等式:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}e^{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta>\int_0^{\pi}\Big(1+\sin^2\theta\Big)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\Big(1+\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\Big)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\pi}\Big(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\Big)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

结论是: $\int_0^{\pi}e^{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta>\frac{3\pi}{2}.$ $\qquad\square$

5. 设$1\le p<+\infty, f_k\in\mathcal{R}([a,b]), k=1,2,...,n.$ 证明

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x\Big|^p\Big)^{1/p}\le\int_a^b\Big(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|^p\Big)^{1/p}\mathrm{d}x.$$

【证】(**注意方法**) 当$p=1$时由简单的积分不等式可知所证不等式成立:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x\Big|\le\sum_{k=1}^{n}\int_a^b|f_k(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\,\mathrm{d}x.$$

以下设$1 < p < +\infty$. 令$q = p/(p-1)$ 即$q > 1$ 使得$1/p + 1/q = 1$. 令

$$A_k = \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

只需对满足$A_k \neq 0$ 的A_k 证明上述不等式. 因此不失一般性可设一切$A_k \neq 0$. 这使得$|A_k|^{p-2}$ 有意义. 令$\overline{A_k}$为A_k的共轭. 则有

$$|A_k|^p = |A_k|^{p-2}|A_k|^2 = |A_k|^{p-2}\overline{A_k}A_k = |A_k|^{p-2}\overline{A_k}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b |A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n |A_k|^p = \sum_{k=1}^n \int_a^b |A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^n |A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(|A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x))\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(|A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(|A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x))\mathrm{d}x \qquad \text{(因实数的虚部为零)} \\
&\le \int_a^b \sum_{k=1}^n \Big|\mathrm{Re}(|A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x))\Big|\mathrm{d}x \le \int_a^b \sum_{k=1}^n \Big||A_k|^{p-2}\overline{A_k}f_k(x)\Big|\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \sum_{k=1}^n |A_k|^{p-1}|f_k(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b \Big(\sum_{k=1}^n |A_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\Big(\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^p\Big)^{1/p}\mathrm{d}x \\
&= \Big(\sum_{k=1}^n |A_k|^p\Big)^{1/q}\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^p\Big)^{1/p}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

以上用到了离散形式的Hölder 不等式和$(p-1)q = p$. 再注意$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, 这就给出

$$\Big(\sum_{k=1}^n |A_k|^p\Big)^{1/p} \le \int_a^b \Big(\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^p\Big)^{1/p}\mathrm{d}x.$$

这就是要证的不等式. □

6. 设实值或复值函数$g(x)$ 在$(0, +\infty)$ 上有定义且满足: 对任意$[a, b] \subset (0, +\infty)$, g在$[a, b]$ 上Riemann 可积并且存在$A \in \mathbb{C}$ 使得对**任意**数列$0 < \delta_n < R_n < +\infty$ 满足$\delta_n \to 0, R_n \to +\infty\,(n \to \infty)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n}^{R_n} g(x)\mathrm{d}x = A.$$

则称g在$(0, +\infty)$ 上广义可积并记

$$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = A = \lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n}^{R_n} g(x)\mathrm{d}x.$$

称之为g在$(0,+\infty)$ 上的广义积分.

现在设实值或复值函数f在$[0,+\infty)$上连续且$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在有限. 设$0<a<b<+\infty$. 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\Big(f(0)-f(+\infty)\Big)\log(\frac{b}{a}).$$

然后据此证明: 对任意$\lambda\in\mathbb{C}$ 满足其实部$\mathrm{Re}\lambda>0$, 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a\lambda x}-e^{-b\lambda x}}{x}\mathrm{d}x=\log(\frac{b}{a}).$$

【证】设$0<\delta<R<+\infty$. 分别使用线性变换$x=\frac{t}{a},x=\frac{t}{b}$ 和积分的可加性我们计算

$$\begin{aligned}&\int_\delta^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_\delta^R\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_\delta^R\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_{a\delta}^{aR}\frac{f(t)}{\frac{t}{a}}\frac{1}{a}\mathrm{d}t-\int_{b\delta}^{bR}\frac{f(t)}{\frac{t}{b}}\frac{1}{b}\mathrm{d}t=\int_{a\delta}^{aR}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{b\delta}^{bR}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\
&=\int_{a\delta}^{b\delta}+\int_{b\delta}^{bR}+\int_{bR}^{aR}-\int_{b\delta}^{bR}=\int_{a\delta}^{b\delta}+\int_{bR}^{aR}=\int_{a\delta}^{b\delta}-\int_{aR}^{bR}\\
&=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{aR}^{bR}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

另一方面有

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\log t\Big|_{t=a\delta}^{t=b\delta}=\log(\frac{b}{a}),\quad\int_{aR}^{bR}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\log(\frac{b}{a})$$

从而有

$$[f(0)-f(+\infty)]\log(\frac{b}{a})=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(0)}{t}\mathrm{d}t-\int_{aR}^{bR}\frac{f(+\infty)}{t}\mathrm{d}t$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}&\Big|\int_\delta^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x-\Big(f(0)-f(+\infty)\Big)\log(\frac{b}{a})\Big|\\
&=\Big|\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)-f(0)}{t}\mathrm{d}t-\int_{aR}^{bR}\frac{f(t)-f(+\infty)}{t}\mathrm{d}t\Big|\\
&\le\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{|f(t)-f(0)|}{t}\mathrm{d}t+\int_{aR}^{bR}\frac{|f(t)-f(+\infty)|}{t}\mathrm{d}t\\
&\le\sup_{0<t<b\delta}|f(x)-f(0)|\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\sup_{x>aR}|f(x)-f(+\infty)|\int_{aR}^{bR}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\
&=\Big(\sup_{0<t<b\delta}|f(x)-f(0)|+\sup_{x>aR}|f(x)-f(+\infty)|\Big)\log(\frac{b}{a}).\end{aligned}$$

任取数列$0<\delta_n<R_n<+\infty$ 满足$\delta_n\to0,R_n\to+\infty\,(n\to\infty)$. 由假设条件有

$$\sup_{0<t<b\delta_n}|f(x)-f(0)|\to0,\qquad\sup_{x>aR_n}|f(x)-f(+\infty)|\to0\quad\text{as}\quad n\to\infty.$$

于是得到

$$\Big|\int_{\delta_n}^{R_n}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x-\Big(f(0)-f(+\infty)\Big)\log(\frac{b}{a})\Big|$$
$$\le\Big(\sup_{0<t<b\delta_n}|f(x)-f(0)|+\sup_{x>aR_n}|f(x)-f(+\infty)|\Big)\log(\frac{b}{a})\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n}^{R_n}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\Big(f(0)-f(+\infty)\Big)\log(\frac{b}{a}).$$

因δ_n, R_n 是任取的, 这就证明了$\frac{f(ax)-f(bx)}{x}$ 在$(0,+\infty)$ 上广义可积且

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\Big(f(0)-f(+\infty)\Big)\log(\frac{b}{a}).$$

最后取$f(x)=e^{-\lambda x}$, 其中$\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta,\alpha>0,\beta\in\mathbb{R}$, 则有$f(x)=e^{-\alpha x}(\cos(\beta x)+\mathrm{i}\sin(\beta x))$, 从而易见有$f(0)=1, f(+\infty)=0$. 代入上面公式就得到要证的结果. □

7. 计算定积分

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

误差小于$\frac{1}{3000}$.

【解】被积函数$e^{-x^2/2}$ 没有初等原函数, 即$\int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ "积不出来". 因此需要数值计算. 设$y\in[0,1]$. 由指数函数的Taylor级数有

$$e^{-y}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{y^k}{k!}=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\frac{y^k}{k!}.$$

注意$0\le y\le 1$ 蕴含$k\mapsto\frac{y^k}{k!}\ge 0$ 单调减少. 因此由**交错级数的性质**有

$$0\le(-1)^{n+1}\Big(e^{-y}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{y^k}{k!}\Big)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-n-1}\frac{y^k}{k!}=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{y^{n+j}}{(n+j)!}\le\frac{y^{n+1}}{(n+1)!}.$$

取$y=x^2/2$ 有

$$0\le(-1)^{n+1}\Big(e^{-x^2/2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!2^k}\Big)\le\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!2^{n+1}},\quad 0\le x\le 1.$$

设例如n为奇数, 则有

$$0\le e^{-x^2/2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!2^k}\le\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!2^{n+1}},\quad 0\le x\le 1.$$

误差估计:

$$\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!2^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}(2n+3)}.$$

于是当n为奇数时

$$\begin{aligned}0 &\le \int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!2^k(2k+1)} = \int_0^1 \left(e^{-x^2/2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!2^k}\right)\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!2^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}(2n+3)}.\end{aligned}$$

取$n=3$. 则

$$\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}(2n+3)}\Big|_{n=3} = \frac{1}{4!\cdot 2^4\cdot 9} = \frac{1}{3456}.$$

所以

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k!2^k(2k+1)} + E, \qquad 0 \le E \le \frac{1}{3456}.$$

□