约束优化案例及求解

清华大学数学科学系 张立平
Email: lipingzhang@tsinghua.edu.cn
Office: 理科楼A302
Tel: 62798531

二次规划(QP)及有效集方法

$$\min \quad f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + cx$$

$$s.t. \quad Ax \le b$$

当H为对称阵，称二次规划
当H半正定时，称凸二次规划

凸二次规划性质：

最优点⇔KKT点；

局部最优解⇔全局最优解；

等式约束 $Ax = b$ 下的Lagrange乘子法

L函数 $L(x,\lambda) = \frac{1}{2} x^T H x + cx + \lambda^T (Ax - b), \quad \lambda \in R^m$

最优解方程

$$Hx + c^T + A^T \lambda = 0$$

$$Ax - b = 0$$

解二次规划的有效集方法

基本思想：对于不等式约束的二次规划，在某可行点处将不起作用约束去掉，**起作用约束视为等式约束，**通过求解等式约束的二次规划来改进可行点。

$$\min \quad f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx$$
$$s.t. \quad Ax\le b \qquad \textbf{(1)}$$

$$\min \quad f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx \qquad (2)$$
$$s.t. \quad a_j x=b_j, \quad j\in J_1 \quad (a_j\text{是}A\text{的第}j\text{列})$$

基本原理

- 若x为(1)的最优解，则它也是(2)的最优解
- 若x为(1)的可行解，又是(2)的KKT点，且L—乘子非负，则它必是(1)的最优解。

基本步骤　设(1)的可行点为x^*，有效集记作J^*，用L—乘子法求解:

$$\min\ f(x^*+d)=\frac{1}{2}(x^*+d)^T H(x^*+d)+c(x^*+d)$$

$$s.t.\quad a_j d=0,\quad j\in J^*$$

得d^*, λ^*

- 若$d^*=0$, 则x^*为(2)最优解; 当λ^*非负时x^*是(1)最优解

有效集修正　若$d^*=0$, 且$(\lambda^*)_q<0$, $q\in J^*$, 则x^*不是最优解, 有效集修正为$J^*\setminus\{q\}$ 。

若$d^*\neq 0$，以此为方向确定步长α^*使得$a_p(x^*+\alpha^* d^*)=b_p$，$p\notin J^*$，则有效集修正为$J^*\cup\{p\}$。

非线性规划(NLP)的解法

清華大學 Tsinghua University

序列二次规划法(Sequential Quadratic Programming)

SQP的基本原理

$$\min_{x\in\Re^n} \quad f(x)$$

$$s.t. \quad h_i(x)=0,\ i=1,\ldots,m$$

$$g_j(x)\le 0,\ j=1,\ldots,l$$

构造LNP的拉格朗日函数

$$L(x,\mu,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i h_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j g_j(x)$$

用二次函数近似 $L(x,\mu,\lambda)$, NLP化为QP,

再解一系列QP子问题。

QP子问题

$$\min \quad \frac{1}{2} d^T G_k d + \nabla f(x_k)^T d$$
$$s.t. \quad \nabla h_i(x_k)^T d + h_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \cdots m$$
$$\nabla g_j(x_k)^T d + g_j(x_k) \le 0, \quad j = 1, \cdots l$$

x_k 是第k 次迭代的初始点，G_k 是海赛阵$\nabla^2 L$ 的近似。

将最优解d_k作为迭代的搜索方向，令 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

SQP的基本步骤

- 求解QP子问题，得 d_k;
- 用线性搜索计算迭代步长α_k;
- 确定矩阵G_k的迭代公式。

MATLAB优化工具箱

MATLAB求解QP

$$\min \quad z = \tfrac{1}{2} x^T H x + c^T x$$

$$s.t. \quad A_1 x \le b_1, A_2 x = b_2, v_1 \le x \le v_2$$

```
[x,fval,exitflag,output,lambda] =
quadprog(H,c,A1,b1,A2,b2,v1,v2,x0,options)
```

$$\min \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 12x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 \ge -2$$

$$2x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = (1,1), b_2 = 2, v_1 = [0,0]$$

QP01.m
Interior-Point

MATLAB求解约束NLP

$$\min \quad z = f(x)$$
$$s.t. \quad c_1(x) \le 0, c_2(x) = 0,$$
$$A_1 x \le b_1, A_2 x = b_2, v_1 \le x \le v_2$$

[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(@fun,x0,A1,b1,A2,b2,v1,v2,@nlcon,options,P1,P2, ...)

fun.m给出函数f，当'SpecifyObjectiveGradient',true时必须给出f的梯度;也可用optimset设置'GrandObj','on'

```
function [f,g,H] = fun(x)
f = ...        % objective function value
if nargout > 1
  g = ...      % gradient of the function
if nargout > 2
  H = ...      % Hessian
end
```

MATLAB求解约束NLP

$$\min \ z = f(x)$$
$$s.t. \ c_1(x) \le 0, c_2(x) = 0,$$
$$A_1 x \le b_1, A_2 x = b_2, v_1 \le x \le v_2$$

nlcon.m给出约束，'SpecifyObjectiveGradient',true时还给出梯度，形式为

```
function [c1,c2,GC1,GC2] = nlcon(x)
c1 = ...      % nonlinear inequalities at x
c2 = ...      % nonlinear equalities at x
if nargout > 2
   GC1 = ...  % gradients of c1
   GC2 = ...  % gradients of c2
end
```

https://ww2.mathworks.cn/help/optim/ug/problems-handled-by-optimization-toolbox-functions.html#tblminprobs 优化工具箱有详细的说明

$$\min \ f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$
$$s.t. \ x_1 + x_2 \ge 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \le 1.5$$

NLP01.m

例1 投资组合

问题

年份	股票A	股票B	股票C
2007	1.300	1.225	1.149
2008	1.103	1.290	1.260
2009	1.216	1.216	1.419
2010	0.954	0.728	0.922
2011	0.929	1.144	1.169
2012	1.056	1.107	0.965
2013	1.038	1.321	1.133
2014	1.089	1.305	1.732
2015	1.090	1.195	1.021
2016	1.083	1.390	1.131
2017	1.035	0.928	1.006
2018	1.176	1.715	1.908

3种股票历年增值信息如左

表中第一个数据1.300的含义是股票A在2007年的年末价值是年初的1.300倍，即年收益率为30%。

假设你在2019年投资这3种股票，希望年收益率至少达到15%，应如何投资？

- 若还可投资年收益率5%的国库券，应如何调整计划？

模型 R_i (i=1,2,3) ~ A, B, C每年的收益率(表中的数据减去1), 随机变量

期望： $ER_1=0.0891$, $ER_2=0.2137$, $ER_3=0.2346$

协方差：

$$\mathrm{cov}(R_1, R_2, R_3) = \begin{pmatrix} 0.0108 & 0.0124 & 0.0131 \\ 0.0124 & 0.0584 & 0.0554 \\ 0.0131 & 0.0554 & 0.0942 \end{pmatrix}$$

决策变量 x_i (i=1,2,3) ~ 投资A, B, C的比例

假设 市场上没有其他投资渠道，且手上资金（不妨假设为1个单位）必须全部用完

约束条件 x_1， x_2 ， $x_3 \geq 0$， $x_1+x_2+x_3 = 1$

模型

年收益 $R=x_1R_1+x_2R_2+x_3R_3$

目标函数

期望： $ER= x_1ER_1+x_2ER_2+x_3ER_3$

方差：$V = D(x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3) = D(x_1R_1) + D(x_2R_2) + D(x_3R_3)$

$$+2\operatorname{cov}(x_1R_1, x_2R_2) + 2\operatorname{cov}(x_1R_1, x_3R_3) + 2\operatorname{cov}(x_2R_2, x_3R_3)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$$

假设你在2019年投资这3种股票，希望年收益率至少达到15%，应如何投资？

Markowitz 模 型

$$\text{Min } V$$

$$\text{s.t. } x_1ER_1+x_2ER_2+x_3ER_3 \ge 0.15$$

$$x_1+x_2+x_3 = 1$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

二次规划模型(QP)

投资理论开创者，1990年获诺贝尔经济学奖

例1 （投资组合）的求解

LINGO软件实现

演示portfolio.lg4

```
MODEL:
Title 简单的投资组合模型;
SETS:
  YEAR/1..12/;
  STOCKS/ A,  B,  C/: Mean,X;
  link(YEAR, STOCKS): R;
  STST(Stocks,stocks): COV;
ENDSETS
```

```
DATA:
  TARGET = 1.15;
! R是原始数据;
  R =
   1.300   1.225   1.149
   1.103   1.290   1.260
   1.216   1.216   1.419
   0.954   0.728   0.922
   0.929   1.144   1.169
   1.056   1.107   0.965
   1.038   1.321   1.133
   1.089   1.305   1.732
   1.090   1.195   1.021
   1.083   1.390   1.131
   1.035   0.928   1.006
   1.176   1.715   1.908;
ENDDATA
```

讨论国库券收益率5%(无风险)修改程序：

```
[ONE] @SUM(STOCKS: X) + xx= 1;
[TWO] @SUM(stocks: mean*x) +1.05*xx >= TARGET;
```

```
CALC: !计算均值向量Mean与协方差矩阵COV;
@for(stocks(i): Mean(i) =
                    @sum(year(j): R(j,i)) / @size(year) );
@for(stst(i,j): COV(i,j) = @sum(year(k):
    (R(k,i)-mean(i))*(R(k,j)-mean(j))) / (@size(year)-1) );
ENDCALC
[OBJ] MIN = @sum(STST(i,j): COV(i,j)*x(i)*x(j));
[ONE] @SUM(STOCKS: X) = 1;
[TWO] @SUM(stocks: mean*x) >= TARGET;
END
```

例1（投资组合）的求解

LINGO软件实现

ABC各占53.01%，35.64%，11.35%；
风险（收益方差）0.0224，标准差0.1497

扩展讨论

国库券收益率5%(无风险)

期望收益率15%

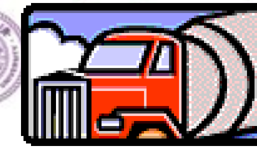
A: 8.69%
B: 42.85%
C: 14.34%，
券：34.12%；
方差：0.0208

期望收益率10%

A: 4.34%,
B: 21.43%
C: 7.17%
券：67.06%；
方差：0.0052

“分离定理”：
风险资产之间
相对比例不变
(Tobin----获1981
诺贝尔经济学奖)

例2　选址问题



问题 某公司有6个建筑工地，位置坐标为(a_i, b_i)(单位：公里), 水泥日用量d_i (单位：吨）

i	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

需建2料场：日储量e_j不超过20吨, j=1,2;

市中心(5,5)：料场不能建在距离市中心5km的范围内

制定每天的供应计划，使总的吨公里数最小。

模型　　2料场：位于 $(x_j,y_j), j=1,2$

决策变量　　c_{ij} (料场j到工地i的运量）~ 12个变量

假设　两点之间的距离采用的是欧氏距离

目标函数

$$\min \quad \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

约束条件

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij} = d_i, \quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij} \le e_j, \quad j=1,2$$

$$(x_j-a_0)^2+(y_j-b_0)^2 \ge l^2, \quad j=1,2$$

$$c_{ij} \ge 0, \quad i=1,\ldots,6;\ j=1,2$$

$a_0=b_0=5=l$

非线性规划模型(NLP)

清華大學 Tsinghua University

例2 （选址问题）的求解

location.lg4

```
MODEL:
Title Location Problem;
sets:    demand/1..6/:a,b,d;
    supply/1,2/:x,y,e;
    link(demand,supply):c;
endsets
data:
!locations for the demand(需求点的位置);
a=1.25,8.75,0.5,5.75,3,7.25;
b=1.25,0.75,4.75,5,6.5,7.75;
!quantities of the demand and supply（供需量）；
d=3,5,4,7,6,11; e=20,20;
enddata
!Objective function（目标）；
[OBJ] min=@sum(link(i,j): c(i,j)*((x(j)-a(i))^2+(y(j)-b(i))^2)^(1/2) );
!demand constraints（需求约束）；
@For(demand(i):[DEMAND_CON] @sum(supply(j):c(i,j)) =d(i););
!supply constraints（供应约束）；
@for(supply(i):[SUPPLY_CON] @sum(demand(j):c(j,i)) <=e(i); );
@for(supply(i):  (x(i)-5)^2+(y(i)-5)^2>25;
        @free(x(i));@free(y(i)); );
END
```

例2（选址问题）的求解

LINGO软件实现

演示location.lg4

料场位于：
(0.01,4.71),
(8.80,8.25)

最小值：
124.4吨千米

供应计划：

C(1, 1)	3.000000	0.000000
C(1, 2)	0.000000	7.915121
C(2, 1)	0.000000	0.7983841
C(2, 2)	5.000000	0.000000
C(3, 1)	4.000000	0.000000
C(3, 2)	0.000000	9.803577
C(4, 1)	3.000000	0.000000
C(4, 2)	4.000000	0.000000
C(5, 1)	6.000000	0.000000
C(5, 2)	0.000000	3.858592
C(6, 1)	0.000000	4.937938
C(6, 2)	11.00000	0.000000

非线性规划小结

• 规划模型的三要素：决策变量、目标函数、约束条件.

• 建模时尽可能利用原始的数据信息；尽量保持问题的数据结构和逻辑结构.

• 对非线性规划，影子价格和灵敏性分析的输出结果意义不大.

• 用LINGO求解，需注意分辨局部最优解与全局最优解；选择好的初值对求解有帮助.