# 抽象代数学(IX)

下一个目标是刻划有限生成Abel群的结构. 首先, 引入直积的概念

定义 设 $G_1,\cdots,G_n$ 是$n$个群, 令 $G_1\times\cdots\times G_n=\{(g_1,\cdots,g_n)\mid g_i\in G_i, i=1,\cdots,n\}$. 定义乘法:

$$(g_1,\cdots,g_n)\cdot(h_1,\cdots,h_n)=(g_1h_1,\cdots,g_nh_n)$$

则 $G_1\times\cdots\times G_n$ 在以上乘法下构成群. 称为 $G_1,\cdots,G_n$ 的外直积 (external direct product).

例 $G_1=(\mathbb{R},+)$, $G_2=(\mathbb{R}^*,\cdot)$ $G_1\times G_2$ 的乘法:

$$(a,b)(c,d)=(a+c,bd)$$

性质: (1) 令 $G=G_1\times\cdots\times G_n$, 自然投影 $\pi_i: G\longrightarrow G_i$ 是满群同态, $\mu_i: G_i\longrightarrow G$ $\mu_i(g)=(e,\cdots,e,g,e,\cdots,e)$ 是单群同态. $\mathrm{Im}\,\mu_i \lhd G$, $\mathrm{Im}\,\mu_i\simeq G_i$

(2) 令 $\tilde{G}_i=\mathrm{Im}\,\mu_i$, $\forall x\in\tilde{G}_i$, $y\in\tilde{G}_j$, $i\neq j$, 满足 $xy=yx$.

(3) $\forall g=(g_1,\cdots,g_n)\in G$ 的周期 $=\mathrm{l.c.m.}\{o(g_1),\cdots,o(g_n)\}$

证明: $g^k=e\in G \Leftrightarrow g_i^k=e\in G_i$ $i=1,\cdots,n \Leftrightarrow o(g_i)\mid k, i=1,\cdots,n$

另一方面, 若 $l=\mathrm{l.c.m}\{o(g_1),\cdots,o(g_n)\}$ $g^l=e\in G$.

例 $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{mn}\Longleftrightarrow (m,n)=1$ $m,n\in\mathbb{N}$

证明: $\mathbb{Z}_m=\langle a\rangle$, $\mathbb{Z}_n=\langle b\rangle$ $o(a)=m$, $o(b)=n$.

令 $l=l.c.m\{m,n\}$ 由以上性质(3), $o(a,b)=l$, $\langle a,b\rangle\cong\mathbb{Z}_l$

若$(m,n)=1$, 则 $|\langle(a,b)\rangle|=mn=|\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n|\Rightarrow\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_l$

反之, 若 $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{mn}$, 存在 $(c,d)\in\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$, $\langle(c,d)\rangle$ $=\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$, $o(c,d)=mn=l.c.m\{o(c),o(d)\}\Rightarrow(m,n)=1$.

由此结论, 若 $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$, $p_i\neq p_j$ $i\neq j$ 则

$$\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}\times\mathbb{Z}_{p_2^{r_2}}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}.$$

问题: 若一个群同构于若干个群的外直积, 如何识别出$G_i$?

定理 设$H,K$均为$G$的子群满足

(1) $H,K\lhd G$;

(2) $H\cap K=\{e\}$; (3) $G=HK=\{hk\mid h\in H,k\in K\}$

则 $G\cong H\times K$

证明: 由(1),(2), $\forall h\in H,k\in K$, $hkh^{-1}k^{-1}\in H\cap K=\{e\}$

$\Rightarrow hk=kh$. 定义 $H\times K\xrightarrow{\varphi}G$ $\varphi((h,k))=hk$.

它是~~的~~一个群同态. $\varphi((h,k)(h',k'))=\varphi((hh',kk'))=hh'kk'$

$= hkh'k' = \varphi((h,k))\cdot\varphi((h',k'))$

由(3)，$\varphi$是一个满同态．若$\varphi((h,k))=e$，则$hk=e$．

$h=k^{-1} \Rightarrow h\in H\cap K=\{e\} \Rightarrow (h,k)=(e,e)\in H\times K$

因此，$\varphi$是一个群同构．

定义 若$H,K$满足定理条件，则称$G$是$H$和$K$的内直积(Internal direct product)．

定理 设$G$是一个群，$G_i\leq G$ $i=1,\cdots,n$．则

$G\cong G_1\times\cdots\times G_n \overset{①}{\Longleftrightarrow}$ (1) $G_i\lhd G$ $i=1,\cdots,n$．

(2) $G_i\cap(G_1\cdots G_{i-1}G_{i+1}\cdots G_n)=\{e\}$

(3) $G=G_1G_2\cdots G_n=\{g_1\cdots g_n \mid g_i\in G_i\}$

$\Updownarrow$ ②

(1) $G_i\lhd G$ $i=1,\cdots,n$．

(2) $G=G_1\cdots G_n$．

(3) $\forall g\in G$，$g$写成$G_i$元素乘积表示方法唯一．

($G\overset{\phi}{\cong}G_1\times G_2$

$\Downarrow$

$G$是$\phi^{-1}(G_1\times\{e\})$和$\phi^{-1}(\{e\}\times G_2)$的内直积)

证明：①的证明类似上一定理，我们证明②

"$\Rightarrow$" 设$g=g_1\cdots g_n=g_1'\cdots g_n'$ $\quad g_1,g_1'\in G_1,\cdots,g_n,g_n'\in G_n$

首先，设$a\in G_i$，$b\in G_j$ $i\neq j$ $\quad aba^{-1}b^{-1}\in G_i\cap G_j=\{e\}$

则$ab=ba$，$(g_1\cdots g_n)(g_1'\cdots g_n')^{-1}=e$，即$g_1g_2\cdots g_n(g_n')^{-1}\cdots(g_1')^{-1}$

$=e$

由 扫描全能王 扫描创建

$\Rightarrow g_2\cdots g_n(g_n')^{-1}\cdots(g_2')^{-1}\in G_1\cap G_2\cdots G_n=\{e\}$

$\Rightarrow g_2\cdots g_n=g_2'\cdots g_n'$，$g_1=g_1'$，递归地可得 $g_i=g_i'$ $i=1,\cdots,n$

"$\Leftarrow$" 设 $x\in G_i\cap G_1\cdots G_{i-1}G_{i+1}\cdots G_n$

即存 $x_1\in G_1,\cdots,x_{i-1}\in G_{i-1},x_{i+1}\in G_{i+1},\cdots,x_n\in G_n$

$x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n=x\in G_i$

即 $x_1x_2\cdots x_{i-1}x\,x_{i+1}\cdots x_n=e\in G\Rightarrow x_1=e\in G_1$ $\cdots x=e\in G_i,\cdots$

例 设 $p$ 是一个素数，$n\in\mathbb{N}$. 定义 $E_{p^n}=\mathbb{Z}_p\underbrace{\times\cdots\times}_{n个}\mathbb{Z}_p$

显然，$\forall x\in E_{p^n}$，$px=0$，$E_{p^n}$ 是 Abel 群.

$E_{p^n}$ 有 $p^n-1$ 个非幺元，$\forall x\neq e\in E_{p^n}$，$\{e,x,2x,\cdots,(p-1)x\}$ 是一个 $p$ 阶子群，$E_{p^n}$ 可分成 $\frac{p^n-1}{p-1}$ 个子群($p$阶)的并.

~~任取两个 $G$ $n$ 个 $p$ 阶子群~~

~~$G_1=\{e,x_1,\cdots,(p-1)x_1\},\cdots,G_n=\{e,x_n,\cdots,(p-1)x_n\}$~~

例如 $p=3,n=2$ $E_{3^2}=\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ 有 4 个 3 阶子群

$\langle(\bar1,\bar0)\rangle=\{(\bar0,\bar0),(\bar1,\bar0),(\bar2,\bar0)\}$

$\langle(\bar0,\bar1)\rangle=\{(\bar0,\bar0),(\bar0,\bar1),(\bar0,\bar2)\}$

$\langle(\bar1,\bar1)\rangle=\{(\bar0,\bar0),(\bar1,\bar1),(\bar2,\bar2)\}$

$\langle(\bar2,\bar1)\rangle=\{(\bar0,\bar0),(\bar2,\bar1),(\bar1,\bar2)\}$.

任两个的direct积同构于 $E_{3^2}$.

例 设$G$是有限群，$G$是Sylow子群的直积（外）$\Leftrightarrow$所有Sylow子群均是正规子群.

证明："$\Rightarrow$"显然

"$\Leftarrow$"设~~$G=S_{p_1}\times S_{p_2}\times\cdots\times S_{p_n}$，则~~ $S_{p_i}\lhd G$, $i=1,\cdots,n$.

$(|S_{p_i}|,|S_{p_j}|)=1 \quad i\neq j$.

由Lagrange定理 $S_{p_i}\cap S_{p_1}S_{p_2}\cdots S_{p_{i-1}}S_{p_{i+1}}\cdots S_n=\{e\}$ $i=1,\cdots,n$.

$|S_{p_1}\cdots S_{p_n}|=|G| \Rightarrow G=S_{p_1}\cdots S_{p_n}$.

$\Rightarrow G\simeq S_{p_1}\times\cdots\times S_{p_n}$

自然推论：若$G$是有限交换群，$|G|=p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n}$，$p_i$素数

则 $G=S_{p_1}\times\cdots\times S_{p_n}$.

记号：加法群的（外）直积称为直和，记作$\oplus$，上式

$G=S_{p_1}\oplus\cdots\oplus S_{p_n}$.

因为外直积$\cong$内直积，统称为直积

例 设$G$有限群，$G=G_1\times\cdots\times G_n$，证明：若$H\leq G$

$H=(H\cap G_1)\times\cdots\times(H\cap G_n)\Leftrightarrow|G_1|,\cdots,|G_n|$两两互素

证明：(1)充分性，设$h\in H$，$h=a_1\cdots a_n$，$a_i\in G_i$ $a_ia_j=a_ja_i$

$o(a_i)=n_i$，则 $n_i \mid |G_i|$，因为 $|G_1|,\cdots,|G_n|$ 两两互素.

$\Rightarrow n_1,\cdots,n_n$ 两两互素. $o(h)=n_1\cdots n_n$

若 $h=a_1'\cdots a_n'$ $o(a_i')=n_i'$，显然 $n_i=n_i'$, $i=1,\cdots,n$

$h^{(n_2\cdots n_n)t}=(a_1')^{(n_2\cdots n_n)t}=(a_1)^{(n_2\cdots n_n)t}$

因为 $\exists x,y\in\mathbb{Z}$ $xn_1+yn_2\cdots n_n=1$ $a_i\in H\cap G_i$

$h^{(n_2\cdots n_n)y}=(a_1')^{1-xn_1}=(a_1)^{1-xn_1}\Rightarrow a_1=a_1'$ 同理 $a_i=a_i'$ $i=1,\cdots,n.$

$h$ 表达式唯一 $\Rightarrow H=(H\cap G_1)\times\cdots\times(H\cap G_n)$

(2) 必要性，设 $(|G_1|,|G_2|)=d>1$，则存在素数 $p\mid d$.

$a\in G_1$, $b\in G_2$, $o(a)=o(b)=p$，令 $H=\langle ab\rangle\neq\{e\}$

设 $x\in H\cap G_1$ $x=(ab)^m=a^mb^m$ $a^m\in G_1$ $b^m\in G_2$

$b^m=a^{-m}x\in G_1\cap G_2=\{e\}\Rightarrow b^m=e$ 但 $o(b)=p$,

同理 $a^m=e$ $o(a)=p$.

$p\mid m\Rightarrow x=a^mb^m=e$

同理 $H\cap G_2=\{e\}\Rightarrow H=(H\cap G_1)\times(H\cap G_2)=\{e\}$ 矛盾!

作业. 习题2.9 3, 6, 7, 8, 10, 12, 13