子群和陪集（补充）

群元素的阶（或周期）

定理 设G是一个群，$g,h\in G$，$o(g)=m$，$o(h)=n$，

则 (1) $\forall\, l\in\mathbb{N}$，$o(g^l)=\dfrac{m}{(m,l)}$；

(2) 若$gh=hg$，且$(m,n)=1$，则$o(gh)=mn$.

证明：设$o(g^l)=N$，$(g^l)^N=g^{lN}=e$，因此$m\mid lN$

$\Rightarrow \dfrac{m}{(m,l)}\Big|\dfrac{l}{(m,l)}N$，但$\dfrac{m}{(m,l)}$和$\dfrac{l}{(m,l)}$互素，$\Rightarrow \dfrac{m}{(m,l)}\Big|N$.

另一方面，$(g^l)^{\frac{m}{(m,l)}}=(g^m)^{\frac{l}{(m,l)}}=e$，所以，$N\Big|\dfrac{m}{(m,l)}$

综上，$\dfrac{m}{(m,l)}=N$.

(2) 设$o(gh)=N$，$(gh)^{mn}=g^{mn}\cdot h^{mn}=e$，则$N\mid mn$.

$(gh)^m=g^mh^m=h^m$ $(gh)^N=e\Rightarrow g^N=h^{-N}$

由(1) g^N的阶为$\dfrac{m}{(N,m)}$，h^{-N}的阶为$\dfrac{n}{(N,n)}$

$\Rightarrow\dfrac{m}{(N,m)}=\dfrac{n}{(N,n)}\Rightarrow m(N,n)=n\cdot(N,m)$ 但是$(m,n)=1$

即$m\mid(N,m)\Rightarrow m\mid N$，同理$n\mid N$，$\Rightarrow mn\mid N$

综上，$mn=N$.

注：(2)中若g和h不交换，则结论不正确. 可举置换群为例