第一章　引言

第二章　Sobolev空间

第三章　二阶散度椭圆型方程

§3.1　问题及其弱解的定义

称算子

$$\pounds u \equiv -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

为**二阶散度形式的偏微分算子**；而称

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

为**二阶非散度形式的偏微分算子**。其中a^{ij}, d^i, b^i, c是已知函数，称为算子的系数。

显然，如果$a^{ij}, d^i \in C^1$, 散度形式的算子一定是非散度形式的；反之不然。

定义 3.1 用$\lambda(x)$表示矩阵函数$[a^{ij}(x)]_{n\times n}$的最小特征值。如果$\lambda(x) > 0\ in\ \Omega$，则称$\pounds$或$L$在$\Omega$ 中是严格椭圆的；如果$\lambda(x) \geq 0\ in\ \Omega$ 且$E = \{x \in \Omega : \lambda(x) = 0\}$非空，则$\pounds$或$L$在$\Omega$ 中是退化椭圆的，而E称为它们的退化集；如果存在正常数λ_0使得$\lambda(x) \geq \lambda_0\ in\ \Omega$，则称$\pounds$或$L$在$\Omega$ 中是一致椭圆的。

为了简单，本书只研究矩阵函数$[a^{ij}(x)]_{n\times n}$是对称且对应的算子是一致椭圆的。即；我们将假设存在正常数λ, 使得$\forall x \in \Omega$和$\forall \xi = (x_1, \cdots, \xi_n) \in R^n$, 均有

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \forall i,j = 1,2,\cdots,n; \quad \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2. \tag{3.1}$$

$\xi^T a \xi \geq \lambda|\xi|^2$

给定函数f和g 求函数u, 满足

$$\begin{cases} \pounds u\ (\text{or}\ Lu) = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

这样的问题称为**Dirichlet边值问题**. 如果边值条件换为$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ on $\partial\Omega$, 或者$\alpha(x)u + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ on $\partial\Omega$, 该问题就分别称为**Neuman边值问题或混合边值问题**. 其中α, β也是给定的函数。当$g = 0$时，就称边值条件是**齐次**的；当$f = 0$时，就称方程是**齐次**的。

由于方程关于u是线性的，故延拓g并做变换$v = u - g$，则边界条件都可化为齐次的，而方程的形式不变。所以，我们一般只考虑齐次边值条件。

如果$u \in W^{2,p}(\Omega)$满足$Lu = f$ a.e. in Ω，则称它是**强解**；如果$u \in C^2(\Omega)$满足$Lu = f$ in Ω，则称它是**经典解**，我们将在下一章研究经典解。本章主要研究散度形式方程的Dirichelet问题，即

$$\begin{cases} \pounds u = f \ \text{ in } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

它的弱解就是在弱导数意义下满足方程和在Sobole空间函数迹的意义下满足边界条件的解。为了简单，我们将把其弱解限制在空间$H_0^1(\Omega)$中，于是问题(3.2)中边界条件自然满足。为了这个空间的函数在弱导数意义下能满足方程，我们需要对系数加些条件。

$$\begin{cases} \text{若}n \geq 3, \text{存在}\Lambda = C(n)\text{使得} \\ \sum_{i,j=1}^n ||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^n(||d^i||_{L^n(\Omega)} + ||b^i||_{L^n(\Omega)}) + ||c||_{L^{n/2}(\Omega)} \leq \Lambda; \\ \text{若}n = 2, \text{存在}p > 2\text{和}\Lambda = C(p)\text{使得} \\ \sum_{i,j=1}^2 ||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)} + + \sum_{i=1}^2(||d^i||_{L^p(\Omega)} + ||b^i||_{L^p(\Omega)}) + ||c||_{L^{p/2}(\Omega)} \leq \Lambda. \end{cases} \tag{3.3}$$

对于$(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$,令

$$B(u, v) = \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv]dx. \tag{3.4}$$

我们在下一节将证：在条件(3.3)下，它是$H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$上的双线性有界泛函。

定义 3.2 *(1)* 称由*(3.4)*定义的$B(\cdot, \cdot)$是算子$\pounds$决定的双线性泛函；

(2) 设$f \in H^{-1}(\Omega)$. 如果$u \in H_0^1(\Omega)$满足

$$B(u, v) = < f, v > \quad (\leq < f, v >, \text{或} \geq < f, v >), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad = \int_\Omega f v \, dx$$

则称u为问题*(3.2)*的一个弱解（弱下解,或弱上解）。

注：弱解的定义是相对的，要根据实际问题所满足的条件选出合适的空间作为弱解的所在空间。弱解定义中的函数v通常称为**试验函数**，它不一定要取遍弱解所在的函数空间，而往往只要取遍它的一个稠密子空间即可。

§3.2 Dirichlet问题弱解的存在唯一性

1. Lax-Milgram定理

定理 3.1 设H是一个实空间，$B:\ H\times H\to R$是一个有界,双线性,强制泛函，即满足

(i) 存在常数$\alpha>0$使得$B(u,v)\le\alpha||u||||v||,\quad \forall u,v\in H$;

(ii) $\forall v,u_1,u_2\in H, a_1,a_2\in R$, 均有$B(v,a_1u_1+a_2u_2)=a_1B(v,u_1)+a_2B(v,u_2)$和$B(a_1u_1+a_2u_2,v)=a_1B(u_1,v)+a_2B(u_2,v)$;

*(iii)*存在常数$\beta>0$, 使得$B(u,u)\ge\beta||u||^2,\quad \forall u\in H$.

如果f是H上的一个有界线性泛函，即$f\in H^*$，则存在唯一的$u\in H$, 使得

$$B(u,v)=<f,v>,\quad \forall v\in H.$$

证明. 任取$u\in H$,则由条件(i), (ii)知: $B(u,\cdot)\in H^*$. 由Riesz表示定理，存在唯一的$\omega\in H$使得

$$B(u,v)=<\omega,v>_H,\quad \forall v\in H.$$

令$T:\ \ H\to H,\ \ Tu=\omega$. 即$B(u,v)=<Tu,v>_H\quad \forall v\in H$.

另一方面，任取$f\in H^*$, 再由Riesz表示定理，存在唯一的$\bar\omega\in H$使得

$$<f,v>=<\bar\omega,v>_H,\quad \forall v\in H.$$

于是，为证存在性，只要证明算子T是可逆的，且$T^{-1}:\ \ H\to H$. 这一点留给读者练习，详细证明可见[Evans: p.319].

为证唯一性。假设$u_1,u_2\in H$使得$B(u_i,v)=<f,v>,\ \forall v\in H$.则$B(u_1-u_2,v)=0,\ \ \forall v\in H$.取$v=u_1-u_2$, 由强制性条件(ii), 即得$u_1=u_2$. □

2. 能量估计

定理 3.2 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega\in C^{0,1}$, $\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，则由它决定的$B(u,v)$是$H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$是的一个双线性泛函，并且存在正常数$C=C(n,\Omega,\pounds)$和$\mu=C(n,\Omega,\pounds)$使得

$$|B(u,v)|\le||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)},\quad \forall u,v\in H^1(\Omega),$$

$$|B(u,u)|\ge\frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)}-\mu||u||^2_{L^2(\Omega)},\quad \forall u\in H^1(\Omega). \tag{3.5}$$

证明.　(1)　不妨设$n \geq 3$, $n=2$的情况留给作业。$\forall u, v \in H^1(\Omega)$, 由(3.3), Hölder不等式和Sobolev嵌入定理2.14，有

$$|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx| \leq \Lambda ||Du||_{L^2(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)},$$

$$|\int_\Omega \sum_{i=1}^n d^i(x) u v_{x_i} dx| \leq \sum_{i=1}^n ||d^i||_{L^n(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C(n, \Lambda, \Omega) ||u||_{H^1(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)}.$$

同样

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v(x) dx| \leq C(n, \Lambda, \Omega) ||v||_{H^1(\Omega)} ||Du||_{L^2(\Omega)},$$

$$|\int_\Omega c(x) uv dx| \leq ||c||_{L^{n/2}(\Omega)} ||u||_{L^{2^*}(\Omega)} ||v||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C(n, \Lambda, \Omega) ||u||_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)}.$$

于是第一式得证。

(2)　为证(3.5).　我们回忆：如果$f \in L^p(\Omega), p \in [1, \infty)$，则只要$K$充分大，$\int_E |f(x)|^p dx$就可以任意小，其中$E = \{x \in \Omega : |f(x)| \geq K\}$. 取$f_1(x) = f(x)\chi_E(x)$. 则$\forall \varepsilon > 0$，存在常数$K(\varepsilon)$和可积函数$f_1, f_2$使得$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$且

$$||f_1||_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon, \quad ||f_2||_{L^\infty(\Omega)} \leq K(\varepsilon).$$

于是存在可积函数d_k^j, b_k^j, c_k使得

$$d^j(x) = d_1^j(x) + d_2^j(x), \quad b^j(x) = b_1^j(x) + b_2^j(x), \quad c(x) = c_1(x) + c_2(x)$$

并且

$$\sum_{j=1}^n (||b_1^j||_{L^n(\Omega)} + ||d_1^j||_{L^n(\Omega)}) + ||c_1||_{L^{n/2}(\Omega)} < \varepsilon,$$

$$\sum_{j=1}^n (||b_2^j||_{L^\infty(\Omega)} + ||d_2^j||_{L^\infty(\Omega)}) + ||c_2||_{L^\infty(\Omega)} < K(\varepsilon).$$

利用上面的事实，类似(1)中的计算，我们有

$-\int (\Sigma \quad)_{x_i} u\, dx$

$$\begin{aligned} B_1(u,u) &:= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} + d_1^i(x) u) u_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_1^i(x) u_{x_i} u + c_1(x) u^2] dx \\ &\geq \lambda ||Du||_{L^2(\Omega)}^2 - \varepsilon C(n, \Lambda, \Omega) ||u||_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

而用Young不等式，

$$\begin{aligned} B_2(u,u) &:= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (d_2^i + b_2^i(x)) u_{x_i} u + c_2(x) u^2] dx \\ &\geq -C(n)K(\varepsilon) \int_\Omega [|Du||u| + u^2] dx \\ &\geq -\frac{\lambda}{4} ||Du||^2_{L^2(\Omega)} - C(n)K(\varepsilon)(\frac{C(n)K(\varepsilon)}{\lambda} + 1)||u||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

现在取$\varepsilon > 0$使得$\varepsilon C(n, \Lambda, \Omega) = \frac{\lambda}{4}$. 然后令

$$\mu = \frac{\lambda}{4} + C(n)K(\varepsilon)(\frac{C(n)K(\varepsilon)}{\lambda} + 1),$$

立即得

$$B(u,u) = B_1(u,u) + B_2(u,u) \geq \frac{\lambda}{2} ||Du||^2_{L^2(\Omega)} - \mu ||u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

□

由于$H_0^1(\Omega)$是自然嵌入$L^{2^*}(\Omega)$中（见定理2.13），从上面的证明立即有

推论 3.1 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，则由它决定的$B(u,v)$是$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$是的一个双线性泛函，并且存在正常数$C = C(n, \pounds)$和$\bar{\mu} = C(n, \pounds)$使得

$$|B(u,v)| \leq ||u||_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

$$|B(u,u)| \geq \frac{\lambda}{2} ||Du||^2_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu} ||u||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

作业12: 对于$n = 2$, 证明定理3.2.

3. 修正问题的弱解

定理 3.3 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，$\bar{\mu} = C(n, \pounds)$是推论*3.1*中的数，则对任意的$f \in H^{-1}(\Omega)$和任意的数$\kappa \geq \mu$，*Dirichlet*问题

$$\begin{cases} \pounds u + \kappa u = f \quad in \quad \Omega, \\ u = 0 \quad on \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。

证明. 考虑算子$T = \pounds + \kappa Id$，记$B_T(u,v), B_\pounds(u,v)$ 分别是算子T和$\pounds$决定的双线性泛函，于是

$$B_T(u,v) = B_\pounds(u,v) + \kappa \int_\Omega uvdx.$$

由推论3.1和定理2.13知，$B_T(u,v)$是$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$上的一个有界，双线性，强制泛函.

又$f \in H^{-1}(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^*$, 故由定理3.1，存在唯一的$u \in H_0^1(\Omega)$使得

$$B_T(u,v) =< f, v >, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

这等价与说问题（3.6）在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。 □

注: 定理3.3中Ω的可以为无界开集，特别可以为R^n.

作业13:设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$\pounds$的系数满足(3.1), 且$a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$, 则存在常数$\delta = C(n,\lambda) > 0$, 使得当

$$\sum i = 1^n(||d^i||_{L^n(\Omega)} + ||b^i||_{L^n(\Omega)} + ||c||_{L^{n/2}(\Omega)} \leq \delta$$

时，对任意$f \in H^{-1}(\Omega)$，Dirichlet问题（3.2）在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。

注: 作业13的结论对于计算数学非常有用，因为对于可积函数，只要把区域分割得充分小，作业13的条件一定满足。