**定理 3.2** 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega\in C^{0,1}$, $\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，则由它决定的$B(u,v)$是$H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$是的一个双线性泛函，并且存在正常数$C=C(n,\Omega,\pounds)$和$\mu=C(n,\Omega,\pounds)$使得

$$|B(u,v)|\le ||u||_{H^1(\Omega)}|||v||_{H^1(\Omega)},\quad \forall u,v\in H^1(\Omega),$$

$$|B(u,u)|\ge \frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)}-\mu||u||^2_{L^2(\Omega)},\quad \forall u\in H^1(\Omega). \tag{3.5}$$

**证明.** (1) 不妨设$n\ge 3$, $n=2$的情况留给作业。$\forall u,v\in H^1(\Omega)$, 由(3.3), Hölder不等式和Sobolev嵌入定理2.14，有

$$|\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_i}dx|\le \Lambda||Du||_{L^2(\Omega)}||Dv||_{L^2(\Omega)},$$

$$|\int_\Omega\sum_{i=1}^n d^i(x)uv_{x_i}dx|\le\sum_{i=1}^n||d^i||_{L^n(\Omega)}||Dv||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^{2^*}(\Omega)}\le C(n,\Lambda,\Omega)||u||_{H^1(\Omega)}||Dv||_{L^2(\Omega)}.$$

同样

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v(x)dx|\le C(n,\Lambda,\Omega)||v||_{H^1(\Omega)}||Du||_{L^2(\Omega)},$$

$$|\int_\Omega c(x)uvdx|\le ||c||_{L^{n/2}(\Omega)}||u||_{L^{2^*}(\Omega)}||v||_{L^{2^*}(\Omega)}\le C(n,\Lambda,\Omega)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}.$$

于是第一式得证。

(2) 为证(3.5). 我们回忆：如果$f\in L^p(\Omega), p\in[1,\infty)$，则只要$K$充分大，$\int_E|f(x)|^pdx$就可以任意小, 其中$E=\{x\in\Omega:|f(x)|\ge K\}$. 取$f_1(x)=f(x)\chi_E(x)$. 则$\forall\varepsilon>0$，存在常数$K(\varepsilon)$和可积函数$f_1,f_2$使得$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$且

$$||f_1||_{L^p(\Omega)}\le\varepsilon,\quad ||f_2||_{L^\infty(\Omega)}\le K(\varepsilon).$$

于是存在可积函数$d^j_k, b^j_k, c_k$使得

$$d^j(x)=d^j_1(x)+d^j_2(x),\quad b^j(x)=b^j_1(x)+b^j_2(x),\quad c(x)=c_1(x)+c_2(x)$$

并且

$$\sum_{j=1}^n(||b^j_1||_{L^n(\Omega)}+||d^j_1||_{L^n(\Omega)})+||c_1||_{L^{n/2}(\Omega)}<\varepsilon,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(||b_2^j||_{L^\infty(\Omega)}+||d_2^j||_{L^\infty(\Omega)})+||c_2||_{L^\infty(\Omega)}<K(\varepsilon).$$

利用上面的事实，类似(1)中的计算，我们有

$$\begin{aligned}B_1(u,u) &:= \int_\Omega[\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a^{ij}(x)u_{x_j}+d_1^i(x)u)u_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}b_1^i(x)u_{x_i}u+c_1(x)u^2]dx\\ &\geq \lambda||Du||^2_{L^2(\Omega)}-\varepsilon C(n,\Lambda,\Omega)||u||^2_{H^1(\Omega)},\quad \forall u\in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

而用Young不等式，

$$\begin{aligned}B_2(u,u) &:= \int_\Omega[\sum_{i=1}^{n}(d_2^i+b_2^i(x))u_{x_i}u+c_2(x)u^2]dx\\ &\geq -C(n)K(\varepsilon)\int_\Omega[|Du||u|+u^2]dx\\ &\geq -\frac{\lambda}{4}||Du||^2_{L^2(\Omega)}-C(n)K(\varepsilon)(\frac{C(n)K(\varepsilon)}{\lambda}+1)||u||^2_{L^2(\Omega)},\quad \forall u\in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

现在取$\varepsilon>0$使得$\varepsilon C(n,\Lambda,\Omega)=\frac{\lambda}{4}$. 然后令

$$\mu=\frac{\lambda}{4}+C(n)K(\varepsilon)(\frac{C(n)K(\varepsilon)}{\lambda}+1),$$

立即得

$$B(u,u)=B_1(u,u)+B_2(u,u)\geq\frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)}-\mu||u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

□

由于$H_0^1(\Omega)$是自然嵌入$L^{2^*}(\Omega)$中（见定理2.13），从上面的证明立即有

**推论 3.1** *设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集，$\pounds$的系数满足(3.1)和(3.3)，则由它决定的$B(u,v)$是$H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$是的一个双线性泛函，并且存在正常数$C=C(n,\pounds)$和$\bar{\mu}=C(n,\pounds)$使得*

$$|B(u,v)|\leq||u||_{H^1(\Omega)}|||v||_{H^1(\Omega)},\quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega),$$

$$|B(u,u)|\geq\frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)}-\bar{\mu}||u||^2_{L^2(\Omega)},\quad \forall u\in H_0^1(\Omega).$$

**作业13:** 对于$n=2$, 证明定理3.2.

**3. 修正问题的弱解**

**定理 3.3** 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集，$\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，$\bar{\mu}=C(n,\pounds)$是推论*3.1*中的数，则对任意的$f\in H^{-1}(\Omega)$和任意的数$\kappa>\bar{\mu}$，*Dirichlet*问题

$$\begin{cases}\pounds u+\kappa u=f \quad in \quad \Omega,\\ u=0 \quad on \quad \partial\Omega.\end{cases} \tag{3.6}$$

在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。 $\pounds u+ku$

**证明.** 考虑算子$T=\pounds+\kappa Id$，记$B_T(u,v),B_\pounds(u,v)$ 分别是算子$T$和$\pounds$决定的双线性泛函，于是

$$B_T(u,v)=B_\pounds(u,v)+\kappa\int_\Omega uvdx.$$

由推论3.1和定理2.13知，$B_T(u,v)$是$H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$上的一个有界，双线性，强制泛函.

又$f\in H^{-1}(\Omega)=[H_0^1(\Omega)]^*$, 故由定理3.1，存在唯一的$u\in H_0^1(\Omega)$使得

$$B_T(u,v)=<f,v>,\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

这等价与说问题（3.6）在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。 □

**注:** 定理3.3中$\Omega$的可以为无界开集，特别可以为$R^n$.

**作业14:**设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$n\geq 3$, $\pounds$的系数满足(3.1), 且$a^{ij}\in L^\infty(\Omega)$, 则存在常数$\delta=C(n,\lambda)>0$, 使得当

$$\sum_{i=1}^n(||d^i||_{L^n(\Omega)}+||b^i||_{L^n(\Omega)})+||c||_{L^{n/2}(\Omega)})\leq\delta$$

时，对任意$f\in H^{-1}(\Omega)$，Dirichlet问题（3.2）在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。

**注:** 作业14的结论对于计算数学非常有用，因为对于可积函数，只要把区域分割得充分小，作业14的条件一定满足。

**4. 利用Fredholm二择一定理**

**定理 3.4** 设$H$是*Hilbert*空间，$Id$为恒等算子，$K:H\to H$为一个线性紧算子，$K^*$为其共轭算子，则

*(i)* 下面两个性质有且只有一个成立:

*(a)* $\forall f\in H$, 方程$u-Ku=f$在$H$中有唯一的解;

*(b)* $u-Ku=0$方程在$H$中有非零的解;

*(ii)* $dimN(Id-K)=dimN(Id-K^*)<\infty$, 此处记$N(A)=\{u\in H:\ Au=0\}$;

*(iii)* $\forall f\in H$, 方程$u-Ku=f$在$H$中有解的充要条件是$f\in N(Id-K^*)^{\perp}$.

该定理的证明可见标准的泛函分析教科书，或见[Evans: p.728-730].

下面利用定理3.4来研究问题(3.2)，为此需要选择合适的空间$H$和构造与$\pounds$有关的紧算子。我们分四步完成。

**(1)** 定义$\pounds$的共轭算子$\pounds^*$: $<\pounds u,v>=<u,\pounds^*v>$, $\forall u,v\in H_0^1(\Omega)$.

因为对$\forall u,v\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}<\pounds u,v> &= \int_\Omega[\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}+d^i(x)u)v_{x_i}+\sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v+c(x)uv]dx\\ &= \int_\Omega[\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)v_{x_j}-d^i(x)v)u_{x_i}-\sum_{i=1}^n b^i(x)v_{x_i}u+(c(x)-\sum_{i=1}^n(d^i_{x_i}+b^i_{x_i}))uv]dx,\end{aligned}$$

这里用到了矩阵$[a^{ij}(x)]$的对称性。所以

$$\pounds v=-\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)v_{x_j}-d^i(x)v)_{x_i}-\sum_{i=1}^n b^i(x)v_{x_i}+[c(x)-\sum_{i=1}^n(d^i_{x_i}+b^i_{x_i})]v.$$

**(2)** $\pounds u=f$的等价形式. 令$H=H^{-1}(\Omega), L_\kappa u=\pounds u+\kappa u$. 由定理3.3, 可选$\kappa>\bar{\mu}$使得$\forall g\in H$, 方程$L_\kappa u=g$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解；即$L_\kappa^{-1}:H_0^1(\Omega)\to H$ 存在, 记$u=L_\kappa^{-1}g$. 于是，方程$\pounds u=f$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow$方程$L_\kappa u=f+\kappa u$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow$方程$u=L_\kappa^{-1}(f+\kappa u)$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow$方程$u-Ku=h$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解, 其中

$$K=\kappa L_\kappa^{-1},\quad h=L_\kappa^{-1}f=\frac{1}{\kappa}Kf\in H_0^1(\Omega).$$

所以, $\forall f\in H$, 方程$\pounds u=f$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow\forall h\in H_0^1(\Omega)$, 方程$u-Ku=h$在$H$中有唯一的解, 此解必属于$H_0^1(\Omega)$中.

**(3)** 验证$K:H\to H$为一个线性紧算子。 因为$L_\kappa$是线性的, 所以$L_\kappa^{-1}$也是线性的，从而$K$亦是线性的.

任取$g\in H=H^{-1}(\Omega)$. 令$v=Kg$, 则$v\in H_0^1(\Omega)$ 且$L_\kappa v=\kappa g$. 由该式的定义，特别有

$$B_{L_\kappa}(v,v)=<\kappa g,v>\leq|\kappa|||g||_H||v||_{H_0^1(\Omega)},$$

其中$B_{L_\kappa}(u,v)$是由算子$L_\kappa$确定的双线性泛函。由推论3.1和定理2.13知，$B_{L_\kappa}(v,v)\geq\beta||v|||^2_{H_0^1(\Omega)}$ 对某个常数$\beta=C(n,\kappa-\mu,\lambda)>0$成立。所以

$$||Kg||_{H_0^1(\Omega)}=||v|||_{H_0^1(\Omega)}\leq\frac{|\kappa|}{\beta}||g||_H,\quad\forall g\in H=H^{-1}(\Omega).$$

所以$K$将$H^{-1}(\Omega)$中的有界集映为$H_0^1(\Omega)$中的有界集. 又由定理2.20，$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$, 所以$K$将$H^{-1}(\Omega)$中的有界集映为$H^{-1}(\Omega)$中的列紧集. 也就是说$K:H\to H$为一个线性紧算子。

**(4)** 现在利用定理3.4.

(i) 下面两个性质必有一个成立：

(a) $\forall h\in=H^{-1}(\Omega)$, 方程$u-Ku=h$在$H^{-1}(\Omega)$中有唯一的解, 这可推出：方程$\forall f\in H^{-1}(\Omega)$, 方程$\pounds u=f$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解；

(b) 方程$u-Ku=0$在$H$中有非零的解, 这等价于方程$\pounds u=0$在$H_0^1(\Omega)$中有非零的解;

(ii) $dimN(Id-K)=dimN(Id-K^*)<\infty$. 而由定义，

$$N(Id-K)=\{u\in H_0^1(\Omega):\quad \pounds u=0\},\ N(Id-K^*)=\{u\in H_0^1(\Omega):\quad \pounds^*u=0\}.$$

(iii) 如果$f\in H$, 对应$h=\frac{1}{\kappa}Kf$, 于是方程$\pounds u=f$在$H_0^1(\Omega)$中有解$\Leftrightarrow$ 方程在$u-Ku=h$在$H$有解$\Leftrightarrow h\in N(Id-K^*)^\perp\Leftrightarrow<h,v>=0,\forall v\in N(Id-K^*)$.

注意$v\in N(Id-K^*)\Leftrightarrow v=K^*v$, 所以

$$<h,v>=<\frac{1}{\kappa}Kf,v>=\frac{1}{\kappa}<f,K^*v>=\frac{1}{\kappa}<f,v>=\frac{1}{\kappa}\int_\Omega fvdx.$$

综上所述，我们证明了

**定理 3.5** 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集，$\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*, 则

*(i)* 下面两个性质有且只有一个成立:

*(a)* $\forall f\in H^{-1}(\Omega)$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解,

*(b)* 对于$f=0$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中有非零的解;

*(ii)* $dim(\{u\in H_0^1(\Omega):\quad \pounds u=0\})=dim(\{u\in H_0^1(\Omega):\quad \pounds^*u=0\})<\infty$;

*(iii)* $\forall f \in L^2(\Omega)$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中存在弱解的充要条件是

$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \{u \in H_0^1(\Omega): \quad \pounds^* u = 0\}.$$

**5. 弱解的极值原理**

本小节证明：在(3.1), (3.3)以及另外的条件

$$\int_\Omega [c(x)\phi(x) + \sum_{i=1}^n d^i(x)\phi_{x_i}]dx \geq 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0 \tag{3.7}$$

之下，定理3.5 (i)(b)的情况不可能发生，从而得到问题(3.2)弱解的存在唯一性。我们用的方法是著名的De Giorgi弱极值原理, 它依赖于下面的初等引理。

**引理 3.1** 设$F(t)$是$[k_0, \infty)$上的非负非增函数，且存在常数$\gamma > 0, \alpha > 0, \beta > 1$使得

$$F(h) \leq \frac{\gamma}{(h-k)^\alpha} F(k)^\beta, \quad \forall h > k \geq k_0$$

则$F(k_0 + d) = 0$, 其中$d = \gamma^{\frac{1}{\alpha}} F(k_0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}$.

**证明.** 考虑$k_s = k_0 + d(1 - \frac{1}{2^s})$, $d$先待定. 利用条件有

$$F(k_{s+1}) \leq \frac{\gamma 2^{\alpha(s+1)}}{d^\alpha} F(k_s)^\beta, \quad \forall s = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

取$d$如引理所示，则

$$\begin{aligned} F(k_1) &\leq \frac{\gamma 2^{\alpha(s+1)}}{d^\alpha} F(k_0)^\beta \\ &= 2^{\alpha - \frac{\alpha\beta}{\beta-1}} F(k_0) \\ &= \frac{F(k_0)}{r}, \end{aligned}$$

其中$r = 2^{\frac{\alpha}{\beta-1}}$. 进一步，利用数学归纳法可证

$$F(k_s) \leq \frac{F(k_0)}{r^s}, \quad \forall s = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

令$s \to \infty$得证。 □

引进记号：

$$U^+(x) = max\{U(x), 0\}, \quad U^-(x) = min\{U(x), 0\};$$

$$sup_\Omega u = inf\{M: \ (u-M)^+(x) = 0 \, a.e. \, x \in \Omega\}, sup_{\partial\Omega} u = inf\{M: \ (u-M)^+(x) \in H_0^1(\Omega)\};$$

$$inf_\Omega u = -sup_\Omega(-u), \quad inf_{\partial\Omega} = -sup_{\partial\Omega}(-u).$$

**定理 3.6** 设$\Omega$为有界开，$\pounds$的系数满足*(3.1),(3.3)*和*(3.7)*，$f = f_0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i} \in H^{-1}(\Omega)$，且存在$p > n$使得

$$f_0 \in L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega), \quad f^i \in L^p(\Omega), i = 1, 2, \cdots, n.$$

如果$u \in H^1(\Omega)$为方程$\pounds u = f$之弱下解，则

$$\begin{aligned} sup_\Omega u &\leq sup_{\partial\Omega} u^+ + C(n,p,\pounds)||u||_{L^2(\Omega)} + C(n,p,\pounds)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n ||f^i||_{L^p(\Omega)}]|\{x \in \Omega : u(x) > 2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}\}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

如果还有$f \equiv 0$，则有

$$sup_\Omega u \leq sup_{\partial\Omega} u^+.$$

**证明.** **(1).** 由下解的定义3.2(3), 条件(3.1),(3.3)和稠密性知

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv]dx \\ &\leq \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i})dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0. \end{aligned}$$

**(2).** 令$l = sup_{\partial\Omega} u^+$，若$l \geq sup_\Omega u$，则结论自然成立，故下设$l < sup_\Omega u$.

欲证$sup_\Omega u \leq l + d_0$. 令$A(k) = \{x \in \Omega : u(x) > k\}$，只要证$|A(l+d_0) = 0$. 为此，任取$k > l$，令$v = u - k)^+$ 则$v \geq 0$ a.e. in $\Omega$，$v \in H_0^1(\Omega)$且由[Evans'book: Problem 18 in Section 5.10],

$$Dv(x) = \begin{cases} Du(x) & if \quad u(x) > k, \\ 0 \quad if & u(x) \leq k. \end{cases}$$

在(1)中取这样的$v$, 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i})dx &\geq \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)v_{x_j} + d^i(x)v)v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x)v_{x_i}v + c(x)v^2]dx \\ &\quad + k\int_\Omega (\sum_{i=1}^n d^i(x)v_{x_i} + c(x)v)dx \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

利用(3.7), $I_2 \geq 0$. 再利用能量估计推论3.1,

$$I_1 \geq \frac{\lambda}{2}||Dv||^2_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu}||v||^2_{L^2(\Omega)}.$$

于是由Hölder不等式，定理2.13 (下面不妨设$n > 2$)和Young不等式,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2}||Dv||^2_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu}||v||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i})dx \\
&= \int_{A(k)} (f_0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i})dx \\
&\leq [||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} ||v||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n ||f^i||_{L^p(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)} |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\
&\equiv F_0 ||Dv||_{L^2(\Omega)} |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\lambda}{8}||Dv||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\lambda} F_0^2 |A(k)|^{1-\frac{2}{p}},
\end{aligned}$$

其中$F_0 = C(n)||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||f^i||_{L^p(\Omega)}$. 因此, 再由Hölder不等式和定理2.13，我们有

$$\begin{aligned}
||Dv||^2_{L^2(\Omega)} &\leq C(n, \pounds)[||v||^2_{L^2(\Omega)} + F_0^2 |A(k)|^{1-\frac{2}{p}}] \\
&\leq C(n, \pounds)[||v||^2_{L^{2^*}(\Omega)} |A(k)|^{\frac{2}{n}} + F_0^2 |A(k)|^{1-\frac{2}{p}}] \\
&\leq C_1(n, \pounds)[||Dv||^2_{L^2(\Omega)} |A(k)|^{\frac{2}{n}} + F_0^2 |A(k)|^{1-\frac{2}{p}}].
\end{aligned}$$

下面不妨取$C_1 \geq 1$. 注意到

$$\int_\Omega u^2 dx \geq \int_{A(k)} k^2 ds = k^2 |A(k)|,$$

可取$k_0 = max\{l,\ (2C_1)^{\frac{n}{4}} ||u||_{L^2(\Omega)}\}$, 于是$C_1 |A(k_0)|^{\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{2}$. 从而有，

$$||Dv||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2(n, \pounds) F_0^2 |A(k)|^{1-\frac{2}{p}}, \quad \forall k \geq k_0,$$

再由定理2.13，

$$||v||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_3(n, \pounds) F_0 |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, \quad \forall k \geq k_0.$$

而$\forall h > k$,

$$\begin{aligned} ||v||_{L^{2^*}(\Omega)} &\geq [\int_{A(h)} (u-k)^{+\frac{2n}{n-2}} dx]^{\frac{n-2}{2n}} \\ &\geq (h-k)|A(h)|^{\frac{n-2}{2n}}, \end{aligned}$$

所以

$$|A(h)| \leq (\frac{C_3 F_0}{h-k})^{\frac{2n}{n-2}} |A(k)|^{\frac{n(p-2)}{p(n-2)}}, \quad \forall h > k \geq k_0.$$

令$\alpha = \frac{2n}{n-2}$, $\beta = \frac{n(p-2)}{p(n-2)}$. 注意到$p > n$, $\beta > 1$. 故由引理3.1有$|A(k_0 + d)| = 0$, 其中

$$d = C_3 F_0 |A(k_0)|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} 2^{\frac{n(p-2)}{2(n-2)}}.$$

注意$C_1 \geq 1$，$2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)} \leq k_0 \leq l + 2^{n/4} C_1 ||u||_{L^2(\Omega)}$, 我们有

$$\begin{aligned} sup_\Omega u &\leq k_0 + d \\ &\leq l + C(n,p,\pounds)||u||_{L^2(\Omega)} + d \\ &\leq l + C(n,p,\pounds)||u||_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C(n,p,\pounds)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||f^i||_{L^p(\Omega)}] |\{x \in \Omega: \ u(x) > 2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

这就证明了(3.8).

**(3).** 如果$f \equiv 0$，此时利用(3.7)及稠密性，有

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{j=1}^n d^j(x) u v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x) v_{x_i} u + c(x) v u] dx \\ &\geq \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x) v_{x_i} u - \sum_{j=1}^n d^j(x) v u_{x_i}] dx \\ &\quad + \int_\Omega [\sum_{j=1}^n d^j(x)(vu)_{x_i} + c(x) v u] dx \\ &\geq \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x) v_{x_i} u - \sum_{j=1}^n d^j(x) v u_{x_i}] dx \equiv I. \end{aligned}$$

令$\Omega(k) = \{x \in \Omega: \ Dv(x) \neq 0\}$，利用$u$和$v$的关系以及推论（3.1），我们有

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega(k)} [\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n (b^i(x) - d^i(x)) v_{x_i} v] dx \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega(k)} |Dv|^2 dx - C(n,\pounds) \int_{\Omega(k)} |v|^2 dx. \end{aligned}$$

于是由Hölder不等式和定理2.13，

$$\begin{aligned}
(\int_{\Omega(k)}|Dv|^2dx)^{\frac{1}{2}} &\geq C(n,\pounds)(\int_{\Omega(k)}|v|^2dx)^{\frac{1}{2}}\\
&\geq C(n,\pounds)[\int_{\Omega(k)}|v|^{2^*}dx]^{\frac{1}{2^*}}|\Omega(k)|^{\frac{1}{n}}\\
&= C(n,\pounds)[\int_{\Omega}|v|^{2^*}dx]^{\frac{1}{2^*}}|\Omega(k)|^{\frac{1}{n}}\\
&\geq C(n,\pounds)[\int_{\Omega}|Dv|^2dx]^{\frac{1}{2}}|\Omega(k)|^{\frac{1}{n}}\\
&= C_4(n,\pounds)[\int_{\Omega(k)}|Dv|^2dx]^{\frac{1}{2}}|\Omega(k)|^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

如果存在$k\in(l,sum_\Omega u)$使得$\int_{\Omega(k)}|Dv|dx|=0$, 则$Dv=0$ a. e. in $\Omega$, 即$(u-k)^+=v\equiv constans\geq 0$, 这是不可能. 因此，我们有

$$|\Omega(k)|\geq\frac{1}{C_4(n,\pounds)},\forall k\in(l,sum_\Omega u).$$

另一方面，

$$\Omega(k)\subset A(k)\setminus\{x\in\Omega:\ Du(x)=0\}\subset A(k)\setminus\{x\in\Omega:\ u(x)=sum_\Omega u\},$$

令$k\to sum_\Omega u$,得$|\Omega(k)|\to 0$, 矛盾! □

注意：若$u\in H^1(\Omega)$为方程$\pounds u=f$之弱上解，则$-u\in H^1(\Omega)$为方程$\pounds u=-f$之弱下解，于是由定理3.6立即有

**推论 3.2** 设$\Omega$为有界开, $\pounds$的系数满足*(3.1),(3.3)*和*(3.7)*, $f=f_0-\sum_{i=1}^n f^i_{x_i}\in H^{-1}(\Omega)$, 且存在$p>n$使得$f_0\in L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)$, $\quad f^i\in L^p(\Omega),i=1,2,\cdots,n$. 如果$u\in H^1(\Omega)$为方程$\pounds u=f$之弱上解，则

$$\begin{aligned}
inf_\Omega u &\geq sup_{\partial\Omega}u^- - C(n,p,\pounds)||u||_{L^2(\Omega)}\\
&\quad -C(n,p,\pounds)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)}+\sum_{i=1}^n||f^i||_{L^p(\Omega)}]|\{x\in\Omega:\ u(x)<-2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}\}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

如果还有$f\equiv 0$, 则有

$$inf_\Omega u\geq\inf_{\partial\Omega}u^-.$$

**注1:** 注意定理3.6及其推论中的常数与无关，这一事实可以将它们用于无界区域. 比如$\Omega$为$R^n$, $R^n_+$, 或一个有界区域的外区域，此时定理3.6的结论修改为

$$\begin{aligned} sup_{\Omega}u &\le max\{sup_{\partial\Omega}u^+, \limsup_{x\to\infty} u^+(x)\} + C(n,p,\pounds)||u||_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C(n,p,\pounds)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||f^i||_{L^p(\Omega)}]|\{x\in\Omega:\ u(x) > 2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}\}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

注意$u\in L^2(\Omega)$, 最后一项几何的测度一定是有限的，除非$u=0$ a. e in $\Omega$.

**注2:** 通过选取更加复杂的对数型试验，定理3.6及其推论中含$||u||_{L^2(\Omega)}$可以用零代替，但此时常数$C(n,p,\pounds)$要换成$C(n,p,\Omega,\pounds)$, 详见[Gilbarg-Trudinger, Theorem 8.16]. 注意$\frac{np}{n+p}\in(\frac{n}{2},n)$, 这一结论比著名的Alexandrov极值原理还要强。

现在将定理3.8及其推论用于问题(3.2), 并利用定理3.5(i), 我们终于得到

**定理 3.7** *设$\Omega$为有界开，$\pounds$的系数满足(3.1),(3.3)和(3.7), 则*

**(i)** *方程方程$\pounds u=0$在空间$H^1_0(\Omega)$中只有零解(即：问题(3.2)对应的齐次问题只有零解);*

**(ii)** *如果$f=f_0-\sum_{i=1}^n f^i_{x_i}\in H^{-1}(\Omega)$, 且存在$p>n$使得*

$$f_0\in L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega),\quad f^i\in L^p(\Omega), i=1,2,\cdots,n,$$

*则问题(3.2)存在唯一的弱解.*

**注1:** 利用定理3.5和推论3.2的注1，可以得到如推论3.2的注1所示的无界区域上的问题（3.2）在预定$\limsup_{x\to\infty}u^+(x)$条件下的弱解的存在唯一性。

## §3.3 弱解的局部正则性

把方程$\pounds u=f$写成

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} = f(x) + \sum_{i=1}^{n}(d^i(x)u)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} - c(x)u. \tag{3.9}$$

形式上看，如果$a^{ij}$的弱导数存在且有界，而且上式右端属于$L^2$时，弱解$u$应当属于$H^2$。然后用数学归纳法抬高它的弱解导数阶数，直到得到解的无穷光滑性。本节和下一节将证明这一观察。

**1. $H^2$-局部正则性**

注意到$u \in H^1 \hookrightarrow L^{2^*}$，所以我们的条件应该为: 存在$p > 2$使得$\forall i, j = 1, 2, cdots, n$,

$$a^{ij} \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega), \quad d^i, b^i \in L^\infty_{loc}(\Omega), \quad d^i_{x_i}, c \in \begin{cases} L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega), & if \quad n \geq 3 \\ L^p_{loc}(\Omega), & if \quad n = 2 \end{cases} . \tag{3.10}$$

如果$u \in H^1_{loc}(\Omega)$满足$B(u, \phi) = \int_\Omega f\phi dx$, $\forall \phi \in C^\infty_0(\Omega)$, 则称$u$**是方程**$\pounds u = f$**的局部解.** 其中$B(u, v)$是$\pounds$决定的双线性泛函，见(3.4).

**引理 3.2** 设$\Omega \subset R^n$为开集，$\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.10).* 如果$f \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$是方程$\pounds u = f$的局部解，则$u \in H^2_{loc}(\Omega)$，且$\forall$ 开集 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 均有

$$||u||_{H^2(\Omega_1)} \leq C(\Omega_1, \Omega_2, n, \pounds)[||u||_{H^1(\Omega_2)} + ||f||_{L^2(\Omega_2)}].$$

**证明.** **(1).** 由Hölder不等式和条件(3.10)知: 方程(3.9)右端属于$L^2$，因此只要对$d^i, b^i, c \equiv 0$的情况证明该引理即可。

**(2).** 由定理2.2(ii), 只要证：$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\forall h, 0 < |h| < dist(\Omega_1, \partial\Omega_2)$, 均有

$$||D^h_k u||_{L^2(\Omega_1)} \leq C(\Omega_1, \Omega_2, n, \pounds)[||u||_{H^1(\Omega_2)} + ||f||_{L^2(\Omega_2)}]. \tag{3.11}$$

**(3).** 由局部解的定义及稠密性，我们有

$$\int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} dx = \int_{\Omega_2} f v dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega_2). \tag{3.12}$$

现在选实验函数$v = -D^{-h}_k(\xi^2(x) D^h_k u(x))$代入，其中$\xi$满足

$$\xi \in C^\infty_0(\Omega_2), \quad \xi \equiv 1 \ \ in \ \ \Omega_1, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \ \ in \ \ \Omega_2.$$

则(3.12)的左边为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i}dx=\int_{\Omega_2}D_k^h(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j})(\xi^2(x)D_k^hu(x))_{x_i}dx \quad (\text{利用推论2.1})\\
=\;&\int_{\Omega_2}[\sum_{i,j=1}^n D_k^ha^{ij}(x)u_{x_j}+a^{ij}(x+he_k)(D_k^hu(x))_{x_j}][\xi^2(D_k^hu)_{x_i}+2\xi\xi_{x_i}D_k^hu]dx\\
=\;&\int_{\Omega_2}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x+he_k)(D_k^hu(x))_{x_j}(D_k^hu)_{x_i}\xi^2dx+\int_{\Omega_2}\sum_{i,j=1}^n[D_k^ha^{ij}(x)u_{x_j}\xi^2(D_k^hu)_{x_i}\\
&+2\xi\xi_{x_i}D_k^ha^{ij}(x)u_{x_j}D_k^hu+2a^{ij}(x+he_k)(D_k^hu(x))_{x_j}\xi\xi_{x_i}D_k^hu]dx\\
\geq\;&\lambda\int_{\Omega_2}\xi^2|D_k^hDu(x)|^2dx \quad \text{利用(3.1)}\\
&-C(\Omega_1,\Omega_2,n,\pounds)\int_{\Omega_2}[\xi^2|D_k^hu||Du|+\xi|D_k^hu||Du|+\xi|D_k^hDu||D_k^hu|]dx \quad (\text{利用定理2.2(i)})\\
\geq\;&\frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_2}\xi^2|D_k^hDu(x)|^2dx-C(\Omega_1,\Omega_2,n,\pounds)\int_{\Omega_2}|Du|^2dx.
\end{aligned}
$$

为得到最后一式，我们利用Hölder和Young不等式以及定理2.2(i)。

而(3.12)的右边为

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2}fvdx &= -\int_{\Omega_2}fD_k^{-h}(\xi^2(x)D_k^hu(x))dx\\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_2}f^2dx+\frac{\lambda}{4}\int_{\Omega_2}|D(\xi^2D_k^hu|^2dx \quad \text{利用Young不等式以及定理2.2(i)}\\
&\leq \frac{\lambda}{4}\int_{\Omega_2}\xi^2|D_k^hDu|^2dx+C(\Omega_1,\Omega_2,n,\pounds)\int_{\Omega_2}(f^2|+|Du|^2)dx.
\end{aligned}
$$

将上面两个估计代入(3.12)即得(3.11). □

**定理 3.8** 设$\Omega\subset R^n$为开集，$\pounds$的系数满足*(3.1)*和*(3.10)*. 如果$f\in L^2_{loc}(\Omega)$, $u\in H^1_{loc}(\Omega)$是方程$\pounds u=f$的局部解，则$u\in H^2_{loc}(\Omega)$，且$\forall$ 开集 $\Omega_1\subset\subset\Omega_2\subset\subset\Omega$, 均有

$$||u||_{H^2(\Omega_1)}\leq C(\Omega_1,\Omega_2,n,\pounds)[||u||_{L^2(\Omega_2)}+||f||_{L^2(\Omega_2)}.]$$

**证明.** 由引理3.2，只要证明: $\forall$ 开集 $\Omega_3$, $\Omega_1\subset\subset\Omega_3\subset\subset\Omega_2\subset\subset\Omega$, 均有

$$||Du||_{L^2(\Omega_3)}\leq C(\Omega_3,\Omega_2,n,\pounds)[||u||_{L^2(\Omega_2)}+||f||_{L^2(\Omega_2)}.] \quad (\text{Caciopolli不等式})$$

在$B(u,v)=\int_\Omega fvdx$中取$v=\xi^2u$, 其中$\xi$满足

$$\xi\in C_0^\infty(\Omega_2),\quad \xi\equiv 1\ \ in\ \ \Omega_3,\quad 0\le\xi\le 1\ \ in\ \ \Omega_2.$$

则有

$$\begin{aligned}\lambda\int_{\Omega_2}\xi^2|Du|^2dx &\le C(\Omega_3,\Omega_2,n,\pounds)\int_\Omega[\xi^2(|u||f|+|u||Du|+|u|^2)+\xi|Du||u|]dx\\ &\le \frac{\lambda}{4}\int_{\Omega_2}\xi^2|Du|^2dx+C(\Omega_3,\Omega_2,n,\pounds)\int_\Omega[|f|^2+|u|^2)]dx.\end{aligned}$$

移项整理即得所证。 □

## 2. 高阶局部正则性

**定理 3.9** 设$\Omega\subset R^n$为开集, $m$为非负整数, $\pounds$的系数$d^i$, $a^{ij}\in W_{loc}^{m+1,\infty}(\Omega)$满足*(3.1)*, $b^i,c\in W_{loc}^{m,\infty}(\Omega)$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 如果$f\in H_{loc}^m(\Omega)$, $u\in H_{loc}^1(\Omega)$ 是方程$\pounds u=f$的局部解, 则$u\in H_{loc}^{m+2}(\Omega)$, 且$\forall$ 开集 $\Omega_1\subset\subset\Omega_2\subset\subset\Omega$, 均有

$$||u||_{H^{m+2}(\Omega_1)}\le C(\Omega_1,\Omega_2,n,m,\pounds)[||u||_{L^2(\Omega_2)}+||f||_{H^m(\Omega_2)}]. \tag{3.13}$$

**证明.** 由定理3.8，定理3.9对$m=0$正确。设定理3.9对$m=l$正确。下证它对$m=l+1$也成立. 此时

$$d^i,\ a^{ij}\in W_{loc}^{l+2,\infty}(\Omega),\quad b^i,c\in W_{loc}^{l+1,\infty}(\Omega),f\in H_{loc}^{l+1}(\Omega)\ \ i,j=1,2,\cdots,n,$$

且$u\in H_{loc}^{l+2}(\Omega)$，(3.13)对$m=l$ 成立，满足

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n[a^{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i}+\sum_{i=1}^n d^iuv_{x_i}+\sum_{i=1}^n b^iu_{x_i}v+cuv]dx=\int_\Omega fvdx,\quad\forall v\in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.14}$$

任取$\alpha\in Z^n,|\alpha|=1$. 对任意$\eta\in C_0^\infty(\Omega)$, 取$v=D^\alpha\eta$代入(3.14), 得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i}dx &= \int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}D^\alpha\eta_{x_i}\\ &= -\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D^\alpha u_{x_j}\eta_{x_i}+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n(D^\alpha a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}\eta.\end{aligned}$$

类似有

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n d^i u v_{x_i} dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n (D^\alpha d^i u)_{x_i} \eta dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^n d^i D^\alpha u \eta_{x_i};$$

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n D^\alpha (b^i u_{x_i}) \eta dx;$$

$$\int_\Omega cuv dx = -\int_\Omega D^\alpha (cu) \eta dx, \quad \int_\Omega fv dx = -\int_\Omega D^\alpha f \eta dx.$$

代入(3.14)中知: $D^\alpha u$是方程$\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) w_{x_j} d^i w)_{x_i} = \bar{f}$的局部弱解，其中

$$\bar{f} = D^\alpha f + D^\alpha (cu) + \sum i = 1^n D^\alpha (b^i u_{x_i}) - \sum i = 1^n (D^\alpha d^i u)_{x_i} - \sum_{i,j=1}^n (D^\alpha a^{ij}(x) u_{x_j})_{x_i}.$$

由$m = l+1$的条件和归纳假设，容易验证$\bar{f} \in H^l_{loc}(\Omega)$. 于是对这个特殊的方程用归纳假设，就有$D^\alpha u \in H^{l+2}_{loc}(\Omega)$, 且$\forall$ 开集 $\Omega_3$, $\Omega_1 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 均有

$$\begin{aligned} ||D^\alpha u||_{H^{l+2}(\Omega_1)} &\le C(\Omega_1, \Omega_3, n, m, \pounds)[||D^\alpha u||_{L^2(\Omega_3)} + ||\bar{f}||_{H^l(\Omega_3)}] \\ &\le C(\Omega_1, \Omega_3, n, m, \pounds)[||u||_{H^{l+2}(\Omega_3)} + ||f||_{H^{l+1}(\Omega_3)}] \\ &\le C(\Omega_1, \Omega_2, n, m, \pounds)[||u||_{L^2(\Omega_2)} + ||f||_{H^{l+1}(\Omega_2)}]. \end{aligned}$$

由于$\alpha$的任意性，我们就证明了(3.13)对$m = l+1$也成立.

□

**注:** 与定理3.8的条件（3.10）类似，定理3.9的条件中$d^i$和$c$的条件可以适当减弱。

利用定理3.9和嵌入定理2.18，我们立即得到

**推论 3.3** *设$\Omega \subset R^n$为开集，$\pounds$的系数$a^{ij}$满足(3.1)，$a^{ij}$，$d^i$，$b^i, c \in C^\infty(\Omega)$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$. 如果$f \in C^\infty(\Omega)$，$u \in H^1_{loc}(\Omega)$ 是方程$\pounds u = f$ 的局部解，则$u \in C^\infty(\Omega)$.*

**作业15：** 给出方程$\pounds u = f$ 的局部解$u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$的一个充分条件，该条件你要尽力做到最佳。

**作业16：** Evans's book, Problem 6.6: 3, 4, 7, 11.