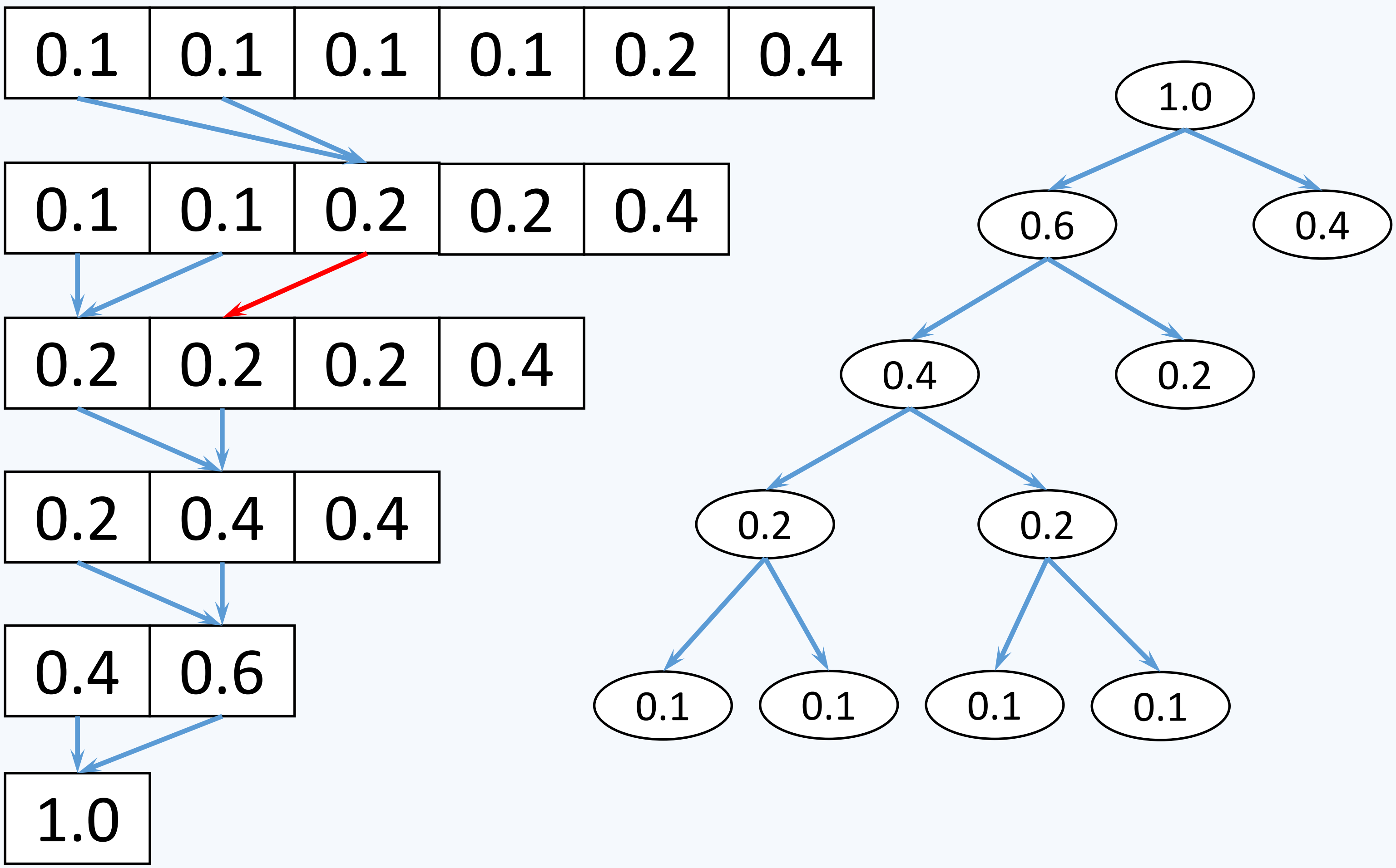
图论习题课

作业3：Ch2 13, 18, 30 Ch3 5, 11

作业6：Ch5 12, 16, 19, 32, 33 Ch6 2

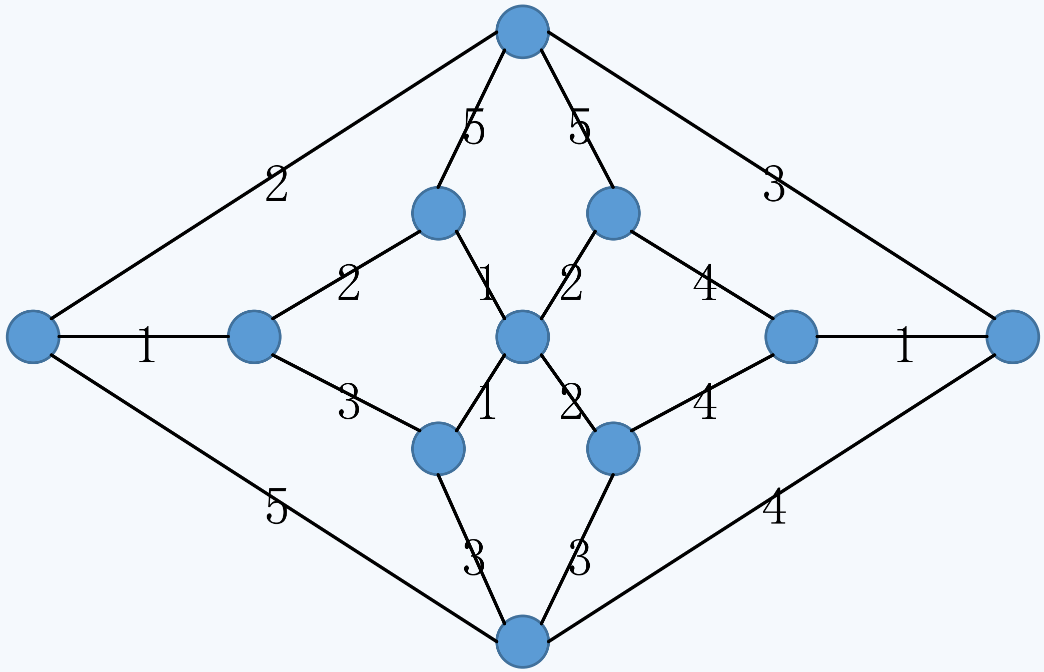
2.13

- 画出带权0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.4的Huffman树



2.18

- 求图2.16中图的最优树
  1. 利用Kruskal算法



2.30

- 若G是加权连通图，且有一个长m的圈C，C上的边的权相等，是E(G)中边权最小值，则G中至少有m颗不同的最优树，试加证明。
  1. 假设最优树选定C上的m-1条边
  2. 共有$C_m^{m-1} = m$种可能性
  3. 所以至少有m颗不同的最优树

3.5

➢ 称G*是平面图G的对偶图，G*如下构造：G的平面嵌入G’的面集F是G*的顶集，仅当G’中两个面有公共边时，在G*中相应的两顶相邻，若e试G’的桥，即G’-e不连通，则在G*上画一个环，此环与e所在的面对应的G*之顶相关联。若平面图G与其对偶图同构，则称G为自对偶图，证明：

1. 若G为自对偶图，则$\varepsilon(G) = 2v(G) - 2$
2. 对于任意$n \in N, n \geq 4$，构作一个n顶自对偶图

3.5

1. **证明**

   Euler公式$v-\varepsilon+\phi=2$

   对于G，$v(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2$

   对于G*，$v(G^*)-\varepsilon(G^*)+\phi(G^*)=2$

   对偶图，$v(G^*)=\phi(G)$

   同构，$v(G)=v(G^*)$

   得到，$v(G)=\phi(G)$

   所以，$\varepsilon(G)=2v(G)-2$

2. **n顶轮是自对偶图**

3.11

- 设ω是平面图G的连通片个数，则

$$v(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=\omega+1$$

证明：

Euler公式：对于连通平面图$v-\varepsilon+\phi=2$

所有连通片相加：$v-\varepsilon+\phi=2\omega$

对于图G所有连通片共享的面多算$\omega-1$次

所以$v(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2\omega-(\omega-1)$

$$=\omega+1$$

5.12

- 试叙述一个单图的$\Delta+1$正常顶着色的算法
  1. 将单图的顶点按照度数由大到小排序
  2. 按照由大到小的顺序，依次给不相邻的顶着相同颜色
  3. 重复2直到循环结束
  4. 若颜色数小于$\Delta+1$，做适当调整

  言之有理即可！

- 5.16 设图G的次数序列为$d_1, d_2, \dots, d_v$，且此序列单调下降，即 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$，则$\mathcal{X}(G) \leq \max_i min\{d_i + 1, i\}$。
- 解：将G的顶点按度下降的顺序排列，记为$v_1, v_2, \dots, v_v$，不同颜色用不同大小的色号表示。

从v_1开始依次给顶点着色，第i次着色时，用v_i的邻点尚未使用的颜色中色号最小的颜色对v_i着色。由于对v_i着色时，下标比i大的顶点尚未着色，而下标比i小的顶点中与i相邻的顶点数不超过$\min_i\{d_i, i-1\}$个。

所以已使用的颜色数不超过$\min_i\{d_i, i-1\}$，所以v_i着色的色号不会超过$\min_i\{d_i, i-1\}$+1。

所以将G全部着色的颜色数不超过$max(\min_i\{d_i, i-1\}+1)$。

所以$\mathcal{X}(G) \leq \max(\min\{d_i, i-1\}+1) = \max_i min\{d_i + 1, i\}$。

5.19

- 如果图G的任一子图H皆有$\chi(H) < \chi(G)$，则称G是色临界图，$\chi(G) = k$时，称G是k色临界图。求证：仅有的1色临界图是K_1，仅有的2色临界图是K_2，仅有的3色临界图是k阶奇圈，$k \geq 3$

① K_1是1色临界图

1色临界图G由n个孤立的点组成，K_1是其正子图，有$\chi(G) = \chi(K_1)$

② K_2是2色临界图

设G是2色临界图

那么K_2是其真子图，得$\chi(G) = \chi(K_2)$

5.19

③ 易证k阶奇圈是3色临界图

设图G中没有奇圈

那么图G是二分图（定理1.2）

二分图的顶色数为2，不是3色图

所以奇圈C是任意3色临界图G的子图

$\chi(C) = \chi(G)$矛盾

∴k阶奇圈是仅有的3色临界图

5.32

- 求$\alpha(k$维立方体)，$\beta(k$维立方体)

  K维立方体定义：顶点集$V = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) | a_i = 0\ or\ 1\}$，两顶相邻当且仅当两个k维序列恰好有一个对应位不同

  解：$\alpha(k$维立方体$) = \beta(k$维立方体$) = 2^{k-1}$

  思路：采用数学归纳法推导

5.33

- 求证：对G的任一子图H，$\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)| \Leftrightarrow$ G是二分图

证明

①对G的任一子图H，$\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)| \Rightarrow G$是二分图

反证，设G不是二分图，则图中有奇圈H，对于奇圈$\alpha(H) = \frac{V(H)-1}{2} < \frac{k}{2}$

矛盾，所以G是二分图

②G是二分图，对G的任一子图H，$\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$

G的任一子图是二分图，$V(H) = X' \cup Y'$，且$X' \cap Y' = \phi$，则X’或者Y’是H的一个最大独立集，$\alpha(H) \geq \max\{|X|, |Y|\} \geq \frac{1}{2}|V(H)|$

6.2

- 对于k维立方体，k维何值时它是Euler图

由k维立方体的定义

k维立方体的每个顶点恰好有k个顶点与其相邻

即每个顶点的度为k

因此当且仅当k为偶数时

K维立方体时Euler图

Thank you