2.5 Sobolev 空间的稠密性

所谓Sobolev 空间的稠密性， 就是用光滑函数去逼近Sobolev 空间中的任意函数。

1. 光滑函数的局部逼近

Theorem

2.5 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 开集, k为非负整数， $1\le p<\infty$. 那么
(1) 若$u\in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, 则存在$\{u_m\}\subset C^\infty(\Omega_{\frac{1}{m}})$使得
$u_m\to u \quad in \quad W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, 即对任意$K\subset\subset\Omega$,
$\lim_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{u\in W^{k,p}(K)}=0$.
(2) 若$u\in W^{k,p}(\Omega)$且$Supp\, u\subset\subset\Omega$, 则存在$\{u_m\}\subset C_0^\infty(\Omega)$
使得$u_m\to u \quad in \quad W^{k,p}(\Omega)$.

证明： 为证(1), 取$u_m = J_{\frac{1}{m}} * u$.
$\forall \alpha \in Z_n, |\alpha| \le k$, 由命题2.5知，

$$D^\alpha u_m = J_{\frac{1}{m}} * (D^\alpha u),$$

所以利用命题2.3 (4)我们就得到了(1)。
任取集合K使得

$$Supp\, u \subset\subset K \subset\subset \Omega,$$

则由命题2.3 (2)知：只要m充分大，

$$\{u_m\} \subset C_0^\infty(K) \subset C_0^\infty(\Omega),$$

于是由(1)即可得到(2)。 □

2. 单位分解定理

Theorem

2.6 设$E \subset \mathbb{R}^n$为任意集，G为E的一个开覆盖（即：G的元素为开集且$E \subset \bigcup_{\Omega \in G} \Omega$），那么存在一个函数族

$$F = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : 0 \le f \le 1\}$$

使得

- *(i)* 对每一个$f \in F$, 存在$\Omega \in G$使得$Sup\, f \subset \Omega$;
- *(ii)*若K为紧集， 则除最多有限个f外， F中的其它所有函数在K恒为零;
- *(iii)*$\sum_{f \in F} f(x) = 1;$， $\forall x \in E$.

这样的F称为E的从属于G的一个单位分解。

证明： (1) 先证E是紧集的情况。由有限覆盖定理，存在$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_N \in G$, 使得$E \subset \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. 由于$E$是紧集，故可找到开集$E_i \subset\subset \Omega_i$ 使得$E \subset \bigcup_{i=1}^N E_i$. 将每一个$E_i$的特征函数光滑化， 这样可得到函数

$$g_i \in C_0^\infty(\Omega_i) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

且$g_i(x) > 0, \quad \forall x \in E_i, \; i = 1, 2, \cdots, N$.
令$g = \sum_{i=1}^N g_i$, 则$g \in C^\infty(R^n)$且在E的某个邻域内$g > 0$.
再取$h \in C^\infty(R^n)$使得$h = g \quad in \quad E$, $h > 0 \quad in \quad R^n$, 于是令

$$F = \{f_i : \quad f_i = \frac{g_i}{h}, \quad i = 1, 2, \cdots, N\}$$

即可。

(2)* 再证E是开集的情况。 令

$$E_{-1}=E_0=\emptyset,\ \ E_i=\overline{B_i(0)}\bigcap\{x\in E:\ \ dist(x,\partial E\geq\frac{1}{i}\},\ \ i=1,2,\cdot$$

用$int\ E$表示其内点集，则每一个E_i是紧集且$E_i\subset\subset E_{i+1}$满足

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\setminus int\ E_{i-1}).$$

令

$$G_i=\{\Omega\bigcap(int\ E_{i+1}\setminus\overline{E_{i-2}}):\ \ \Omega\in G\}.$$

因为E为开集，G是E的开覆盖， 所以G_i为紧集$E_i\setminus int\ E_{i-1}$的开覆盖. 利用(1)的结论， 可设$F_i$为$E_i\setminus int\ E_{i-1}$从属于$G_i$的单位分解，令

$$S(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{g\in F_i}g(x),\quad x\in E$$

于是容易验证$F=\bigcup_{i=1}^{\infty}f_i$, 其中

$$f_i(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{S(x)},\ g\in F_i, & x\in E\\ 0, & x\in R^n\setminus E\end{cases}$$

就是E的从属于G的一个单位分解.
(3) 对于一般的E，可用开集$\bigcup_{\Omega\in G}\Omega$代替$E$， 再用(2)的结论即可. $\square$

注： 在应用中, 常常G为$\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$，于是$F$为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$，经过重新标注， 可设

$$Sup\, f_i\subset\Omega_i,\quad i=1,2,\cdots,.$$

作业 7： [Evans： 2010] Problem 5.10: 2, 3, 4, 5.

3. 光滑函数的整体逼近

Theorem

2.7 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$u \in W^{k,p}(\Omega)$，$1 \le p < \infty$，则存在

$$\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\Omega) \bigcap W^{k,p}(\Omega)$$

使得$u_m \to u \quad in \quad W^{k,p}(\Omega)$. 即：空间$C^{\infty}(\Omega) \bigcap W^{k,p}(\Omega)$ 在$W^{k,p}(\Omega)$中稠密。

证明： 只要证：$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in C^{\infty}(\Omega)$使得

$$||u - v||_{W^{k,p}(K)} \le \varepsilon, \quad \forall K \subset\subset \Omega, (K \text{ 与}\varepsilon\text{无关}). \tag{2.5}$$

(1) 令 $\Omega_i=\{x\in\Omega:\ dist(x,\partial\Omega)>\frac{1}{i}\}\bigcap\{x\in R^n:\ |x|<i\}$,
则

$$\Omega_i\subset\Omega_{i+1},\quad \Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega_i=\Omega_3\bigcup\bigcup_{i=1}^{\infty}(\Omega_{i+3}\setminus\overline{\Omega}_{i+1}):=\bigcup_{i=0}^{\infty}E_i.$$

设$\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$是$\Omega$从属于$\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$的一个单位分解， 即

$$0\le\eta_i\le 1,\quad \eta_i\in C_0^{\infty}(E_i),\quad \sum_{i=0}^{\infty}\eta_i\equiv 1\ \ in\ \ \Omega.$$

则$u(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\eta_i(x)u(x)$ for all $x\in\Omega$.

(2) 现在来证明 (2.5). 注意$\eta_i u \in W^{k,p}(E_i)$ 且 $Sup\,(\eta_i u) \subset\subset E_i$， 由定理2.5 (2)知：$\exists v_i \in C_0^\infty(E_i)$ 使得

$$\|\eta_i u - v_i\|_{W^{k,p}(E_i)} \le \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

令$v(x) = \sum_{i=0}^\infty v_i(x)$, 由于$E_i$的取法, 此和在$\Omega$的任意有界闭集上实际上均为有限项之和， 故$v \in C^\infty(\Omega)$，且$\forall K \subset\subset \Omega$, 有

$$\begin{aligned}\|u - v\|_{W^{k,p}(K)} &= \|\sum_{i=0}^\infty(\eta_i u - v_i)\|_{W^{k,p}(K)} \\ &\le \sum_{i=0}^\infty \|\eta_i u - v_i\|_{W^{k,p}(E_i)} < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

利用单位分解定理， 我们可以证明下面常用的基本性质，其详细证明可见[陈省身，陈维桓著：微分几何讲义， 北大出版社]的P.26引理2.

命题 2.8 设$\Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$为有界开集，$k$为非负整数，则 $\exists \eta \in C_0^\infty(\Omega_1)$ 使得

$$\eta \equiv 1 \text{ in } \Omega_2, \quad |D^k\eta(x)| \leq C(n,k)[dist(\Omega_2, \partial\Omega_1)]^{-k} \ \ \forall x \in \Omega_1.$$

注：在命题2.8的条件下， 容易证明： $\exists \eta \in C^\infty(\overline{\Omega_1})$ 使得 $\eta \equiv a \text{ in } \Omega_2$， $\eta \equiv b \text{ on } \partial\Omega_1$, 且满足

$$|D^k\eta(x)| \leq C(n,k)|b-a|^{-1}[dist(\Omega_2, \partial\Omega_1)]^{-k} \ \ \forall x \in \Omega_1,$$

其中a, b是两个不相等的实数。

命题 2.9 设 k为非负整数， $1 \leq p < \infty$, 那么$C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$在 $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$中稠密。

证明： 对于$u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$, 考虑它的光滑化

$$J_\varepsilon * u(x + 2\varepsilon \mathbf{e}_n) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \varepsilon^{-n} J(\frac{x + 2\varepsilon \mathbf{e}_n - y}{\varepsilon}) u(y) dy.$$

则可直接验证$J_\varepsilon * u(x + 2\varepsilon \mathbf{e}_n) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$。 进一步，类似于命题2.3， 易证

$$\| J_\varepsilon * u(x + 2\varepsilon \mathbf{e}_n) - u \|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0.$$

□

这个证明一个关键的地方是：对于区域$\mathbb{R}^n_+$边界附近的任一点x， 线段$\{x + t\mathbf{e}_n : t \in [0, 1]\}$都在该区域中. 为此我们引入

Definition

2.5 称一个区域Ω满足线段性质， 如果对任一点$x \in \partial\Omega$, 存在x的邻域U_x和一个非零向量y_x, 使得对每一$z \in \bar{\Omega} \bigcap U_x$, 开线段$\{z + ty_x : t \in (0, 1)\} \subset \Omega$.

利用命题2.8，光滑化和单位分解技巧， 可以证明见([Adams, 2003: Theorem 3.22])

Theorem

2.8 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，它满足线段性质， $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, 则存在$\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，使得$u_m \to u \ \ in \ \ W^{k,p}(\Omega)$. 即：空间$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 在$\bar{\Omega}$上的限制所得的集合在$W^{k,p}(\Omega)$中稠密。

自然在$C^{\infty}(\bar{\Omega})$中

2.6 Sobolev 空间的延拓定理

命题 2.10 设 k为非负整数， $1 \le p \le \infty$, 那么存在一个延拓

$$E_0 : W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

和常数$C(k,n)$ 使得

- $E_0 u(x) = u(x), a.e. \, x \in \Omega$, 且 $\mathbb{R}^n_+$
- $\|E_0 u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \le C(k,n,p)\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)}$.

证明*： 可设$p \in [1,\infty)$， 因为$p = \infty$时可作类似处理。由命题2.9， 只要对$u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$证明即可。 为此， 定义扩充算子$E_0$，

$$E_0 u(x) = \begin{cases} u(x), & x_n > 0; \\ \sum_{j=1}^{k} c_j u(x', -x_n/j), & x_n < 0. \end{cases}$$

显然导数间断的地方只可能出现在超平面$\{x_n=0\}$上。 而由于

$$D_{x_n}^{\alpha}E_0u(x',x_n)=\begin{cases}D_{x_n}^{\alpha}u(x',x_n), & x_n>0,\\ \sum\limits_{j=1}^{k}c_j\left(\frac{-1}{j}\right)^{|\alpha|}D_{x_n}^{\alpha}u(x',-x_n/j), & x_n<0,\end{cases}$$

为了使得$E_0u(x)$及其小于k的所有偏导数在超平面$\{x_n=0\}$上连续， 我们选取常数c_i满足

$$\sum_{j=1}^{k}c_j\left(\frac{-1}{j}\right)^{m}=1,\quad m=0,1,\cdots,k-1.$$

因为$u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$， 可直接验证$E_0 u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, 而且

$$\|E_0 u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \le C(k,n,p)\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

$\square$

为了研究一般区域的延拓定理， 我们需要利用边界拉直技巧。

Definition

2.6 (1) 如果对每个点$x_0 \in \partial\Omega$ 存在 $r > 0$ 和一个 $C^{k,\alpha}$ 函数 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 使得有可能需要重新改变坐标轴的标号和定向后，有

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) | x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\},$$

则称区域$\Omega \in C^{k,\alpha}$.

Definition

(2) 局部拉直边界: 在$C^{k,\alpha}$区域的每一个边界点x_0处， 可定义$C^{k,\alpha}$映射$\Phi : \Omega \cap B_r(x_0) \to \mathbb{R}^n_+$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_i &=& x_i =: \Phi^i(x), 1 \le i \le n-1, \\ y_n &=& x_n - \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x). \end{array}\right. \qquad y = \Phi(x),$$

则$\Phi : \partial\Omega \cap B_r(x_0) \to \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$. 易知该映射有逆映射 $x = \Psi(y)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_i &=& y_i =: \Psi^i(y), 1 \le i \le n-1, \\ x_n &=& y_n + \gamma(y_1, \cdots, y_{n-1}) =: \Psi^n(y). \end{array}\right.$$

显然是Ψ也是$C^{k,\alpha}$映射， 它们的定义域都可以看作是 $\mathbb{R}^n$, 而且$det D\Phi = det D\Psi = 1$.

作业 8: 证明$C^{0,1}$-区域一定满足线段性质。

Theorem

2.9 假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是$C^{k-1,1}$-区域且其边界是有界集 $(k \geq 1)$, $1 \leq p \leq \infty$. 则 对任意开集$\Omega' \supset\supset \Omega$ 存在一个延拓$E : W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega')$ 和常数$C = C(n, k, p, \Omega, \Omega')$ 使得 $Eu(x) = u(x), a.e. x \in \Omega$, 而且

$$\|Eu\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

证明*. 因为$\Omega \in C^{k-1,1}$且其边界是有界集, 故由定义2.6，存在边界$\partial\Omega$的有限覆盖

$$\Omega_j \subset \Omega', j = 1, 2, \cdots, N$$

和映射 $\Phi_j : \Omega_j \to B(0)$ 使得

(i) $\Phi_j(\Omega_j \cap \Omega) = B^+ = B \cap \mathbb{R}^n_+$;
(ii) $\Phi_j(\Omega_j \cap \partial\Omega) = B \cap \partial\mathbb{R}^n_+$;
(iii) $\Phi_j,\ \Phi_j^{-1} \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n)$.
选择$\Omega_0 \subset\subset \Omega$, 使得$\{\Omega_j\}_{j=0}^N$是$\Omega$ 的有限覆盖，设$\{\eta_j\}_{j=0}^N$ 是Ω的从属于这个覆盖的单位分解, 对于$j \geq 1$,因为$Sup\ \eta_j \subset \Omega_j$, 则

$$(\eta_j u) \circ \Phi_j^{-1} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$$

且 $E_0\left[(\eta_j u) \circ \Phi_j^{-1}\right] \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, 此处$E_0$是命题2.10中的延拓算子。

从而

$$E_0\left[(\eta_j u)\circ\Phi_j^{-1}\right]\circ\Phi_j \in W_0^{k,p}(\Omega_j)\bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

于是定义扩充映射$E : W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega') :$

$$Eu = u\eta_0 + \sum_{j=1}^{N} E_0\left[(\eta_j u)\circ\Phi_j^{-1}\right]\circ\Phi_j$$

满足$Eu \in W_0^{k,p}(\Omega'), Eu(x) = u(x), \forall x \in \Omega,$ 且

$$\|Eu\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C(k,\Omega,\Omega')\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

$\square$

注1： 从证明中可以看出： $Eu \in C_0^k(\Omega')$ if $u \in C^k(\bar{\Omega})$.

注2： 由Stein的延拓定理， 对有界局部Lipshitz区域（不需要边界点有界）上面的延拓定理仍然成立， 详见[Stein E M: Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ Press, 1970].

2.7 Sobolev 空间函数的迹

如果$u \in C(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega}$可能没有意义， 但u 如果在有界区域Ω中一致连续， 则可定义$u|_{\partial\Omega}$. 注意$W^{1,1}(-1,1)$中的函数是一致连续的， 所以可以在边界点赋予这类 函数的值，这就是迹的概念。

Theorem

2.10 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leq p < \infty$, 则存在一个线性算子

$$\mathrm{T}: \ W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

使得

(i) $\|\mathrm{T}u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(n,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $\mathrm{T}u = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C(\bar{\Omega}) \bigcap W^{1,p}(\Omega)$.

证明：我们先证

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C(p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}). \tag{2.6}$$

因为Ω为有界开集，则存在 ∂Ω的相对开集$\Gamma_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 使得

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i,$$

于是(2.6)可化为证明

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \le C(n,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.7}$$

取定$\Gamma = \Gamma_i$，如果$\Gamma \subset \{x_n = 0\}$是平坦的，则选$x_0 \in \Gamma$, $r > 0$, 使得

$$\Gamma \subset \partial\Omega \bigcap B_1, \quad B_1 := B_r(x_0).$$

令 $B_2 := B_{2r}(x_0)$. 不妨设$B_2^+ \subset \Omega$ (否则事先可将$\partial\Omega$ 分成更小相对开集之并).
由命题2.8，取截断函数$\xi \in C_0^\infty(B_2)$， $0 \leq \xi \leq 1, \xi \equiv 1$ in B_1. 则

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^p dx' &\leq \int_{\{x_n=0\}} \xi |u|^p dx' = -\int_{R_+^n} (\xi |u|^p)_{x_n} dx \qquad (2.8)\\
&= -\int_{B_2^+} (\xi |u|^p)_{x_n} dx \\
&= -\int_{B_2^+} (\xi_{x_n} |u|^p + \xi p |u|^{p-1} u_{x_n} Sign\ u) dx \\
&\leq C(n,r) \int_{B_2^+} |u|^p dx + p \int_{B_2^+} \left(\frac{|u|^p}{p'} + \frac{|u_{x_n}|^p}{p}\right) dx \\
&\leq C(n,p,\Omega) \int_{B_2^+} (|u|^p + |Du|^p) dx.
\end{aligned}
$$

$\xi|_{\partial B_2} = 0$

如果Γ不是平坦的，利用边界拉直， 则存在可逆的C^1-映射$\Phi: R^n \to R^n$, 使得$\Phi(\Gamma) \subset \{x_n = 0\} \bigcap B_r(y_0)$
且$\Phi^{-1}(B_{2r}(y_0)^+) \subset \Omega$. 于是利用积分变换和(2.8), 有

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma |u(x)|^p dS_x &\le C(\Phi) \int_{\Phi(\Gamma)} |u(\Phi^{-1}(y))|^p dS_y \\
&\le C(n,p,\Omega) \int_{B_2^+} (|u(\Phi^{-1}(y))|^p \\
&+ |D_y u(\Phi^{-1}(y))|^p) dy \\
&\le C(n,p,\Omega) \int_\Omega (|u(x)|^p + |Du(x)|^p) dx.
\end{aligned}
$$

这样， 我们就证明了(2.7)。

现在来定义算子T并证明(i)。 设$u \in W^{1,p}(\Omega)$, 由定理2.8，存在 $\{u_m\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ 使得 $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. 由(2.6)知,

$$\|u_m - u_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C(n,p,\Omega)\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall m,\ l = 1, 2, \cdots,$$

即$\{u_m\}$是$L^p(\partial\Omega)$中的Cauchy序列。定义算子

$$\mathrm{T}u = \lim_{m\to\infty} u_m|_{\partial\Omega} \quad \text{in} \quad L^p(\partial\Omega),$$

则易知T与$\{u_m\}$的选择无关， 且它是$W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$的线性算子，再由(2.6)知，它显然满足(i)。

最后我们来证明(ii). 如果$u \in C(\bar{\Omega}) \bigcap W^{1,p}(\Omega)$,取有界开$\Omega_1 \supset\supset \Omega$, 则由延拓定理之注2，$Eu \in C_0(\Omega_1) \bigcap W^{1,p}(\Omega_1)$. 令$u_m = J_{\frac{1}{m}} * (Eu)$, 则由命题2.3和2.5知： $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$且在$\bar{\Omega}$上一致收敛于$Eu = u$, 同时$\{u_m\}$也在$W^{1,p}(\Omega)$中依 范数收敛于$Eu = u$。 从而， 由上面算子T的定义，
$\mathrm{T}u = \lim_{m\to\infty} u_m = u$, 即满足(ii). □

由定义知：$\mathrm{T}u = 0$ if $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 进一步我们有(证明见[Evans， Theorem 2, P275])

Theorem

2.11 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. 则 $\mathrm{T}u = 0$ 的充要条件是$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

作业 9: 空间$H_0^2(\Omega)$与$H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$是否相同， 为什么？