1 约束规范缘由

在得到KKT定理中, 已知$\mathcal{L}(x) \supseteq \mathcal{D}(x)$, 需要判定满足约束规范条件

$$\mathcal{L}(x) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\mathcal{D}(x))).$$

核心就是保证

$$-\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x), \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}(x),$$

即

$$\nabla f(x) \in \mathcal{C}_g(x) = \mathrm{cone}\left\{-\nabla g_i(x), i \in \mathcal{I}(x)\right\} = \mathcal{L}^*(x).$$

2 一些方向集

- 可行方向集

$$\mathcal{D}(x) = \left\{d \in \mathbb{R}^n \mid \text{存在}\delta_0 > 0, x + \delta d \in \mathcal{F}, \forall 0 \leq \delta \leq \delta_0\right\}.$$

- 约束方向集

$$\mathcal{L}(x) = \left\{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(x)^T d \leq 0, \forall i \in \mathcal{I}(x)\right\}.$$

- 切方向集

$$\mathcal{T}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid d\text{是}x\text{点的一个切方向}\}.$$

- 内点方向集(set of interior directions)

$$\mathcal{L}^0(x) = \left\{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(x)^T d < 0, \forall i \in \mathcal{I}(x)\right\}.$$

- 可达方向集(set of attainable directions) 存在$0 < \delta_0$和一

条$\mathbb{R}^n$中连续的参数曲线$r(\delta)$, 满足$r(0)=x$和$r(\delta)\in\mathcal{F},\forall 0\le\delta\le\delta_0$, 并使得$d=\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{r(\delta)-r(0)}{\delta}$.

$$\mathcal{A}(x)=\{d\in\mathbb{R}^n\mid d\text{为}x\text{点的可达方向}\}.$$

3 方向集之间的关系

定理 1 对优化问题的任何一个可行解x, 下列关系满足：

$$\mathcal{L}^0(x)\subseteq\mathcal{D}(x)\subseteq\mathcal{A}(x)\subseteq\mathcal{T}(x)\subseteq\mathcal{L}(x).$$

$\mathcal{A}(x)$与$\mathcal{T}(x)$非常相像, 对比定义可以发现, $\mathcal{T}(x)$中的点由$\mathcal{F}$中一些离散点的极限定义, $\mathcal{F}$就可以减弱到是一个离散点集；而$\mathcal{A}(x)$中的点由$\mathcal{F}$的连续曲线定义, 可行解集$\mathcal{F}$至少由一些连续线段组成. 因此, $\mathcal{T}(x)$的定义更一般化.

引理 1 (i) 当$\mathcal{L}^0(x)\neq\emptyset$时, 其为一个开凸锥；

(ii) 当$\mathcal{L}^0(x)\neq\emptyset$时, $\mathcal{L}^0(x)=\mathrm{int}(\mathcal{L}(x))$;

(iii) $\mathrm{cl}(\mathcal{L}^0(x))=\mathcal{L}(x)$当且仅当$\mathcal{L}^0(x)\neq\emptyset$;

(iv) $\mathcal{L}(x)$是一个闭凸锥.

4 约束规范的分类和常见约束规范

- 第一类: $\mathcal{L}^*(x)\supseteq\mathcal{T}^*(x)$,
- 第二类：$\mathcal{L}^*(x)\supseteq\mathcal{A}^*(x)$,
- 第三类：$\mathcal{L}^*(x)\supseteq\mathcal{D}^*(x)$,
- 第四类：$\mathcal{L}^*(x)\supseteq\mathcal{L}^{0*}(x)$.

常见如下的约束规范.

- 线性独立约束规范(简称LICQ): $\{\nabla g_i(x), i \in \mathcal{I}(x)\}$线性无关.
- Slater约束规范: $g_i(x), i \in \mathcal{I}(x)$ 都是$\mathbb{R}^n$ 上的凸函数且存在一点x^0 为严格内点, 即$g_i(x^0) < 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$.
- Cottle约束规范: 存在一个方向d 使得$\nabla g_i(x)^T d < 0, \forall i \in \mathcal{I}(x)$.
- Zangwill约束规范: $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{D}(x))$.
- 可行方向约束规范: $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(D(x)))$.
- Kuhn-Tucker约束规范: $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathrm{cl}(A(x))$.
- 可达方向约束规范: $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(A(x)))$.
- Abadie约束规范: $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathcal{T}(x)$.
- Guignard约束规范: $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\mathcal{T}(x)))$.

对约束规范进行分类将用到以下引理.

引理 2 若集合$\mathcal{X} \neq \emptyset$, 则$(\mathrm{cl}(\mathcal{X}))^* = (\mathrm{conv}(\mathcal{X}))^* = \mathcal{X}^*$.

- 第四类约束规范$\mathcal{L}^*(x) = \mathcal{L}^{0*}(x)$: 线性独立约束规范, Slater约束规范和Cottle约束规范
- 第三类约束规范$\mathcal{L}^*(x) = \mathcal{D}^*(x)$: Zangwill约束规范, 可行方向约束规范.
- 第二类约束规范$\mathcal{L}^*(x) = \mathcal{A}^*(x)$: Kuhn-Tucker约束规范, 可达方向约束规范.
- 第一类约束规范$\mathcal{L}^*(x) = \mathcal{T}^*(x)$: Abadie约束规范, Guignard约束规范.

5 约束规范使用的难易度

- 线性独立约束规范的判断简单, 解线性方程组

$$\sum_{i\in\mathcal{I}(x)} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0. \tag{1}$$

  当解变量$\{\lambda_i, i\in\mathcal{I}(x)\}$只有零解时, 则有$\{\nabla g_i(x), i\in\mathcal{I}(x)\}$线性无关.

- Slater约束规范比较简单.

- Cottle约束规范与Slater约束规范具有类似之处, 要求约束的梯度在积极集上存在一个严格的内点方向.

- 其余的约束规范多用于理论, 实际应用中较难操作.

6 相互关系

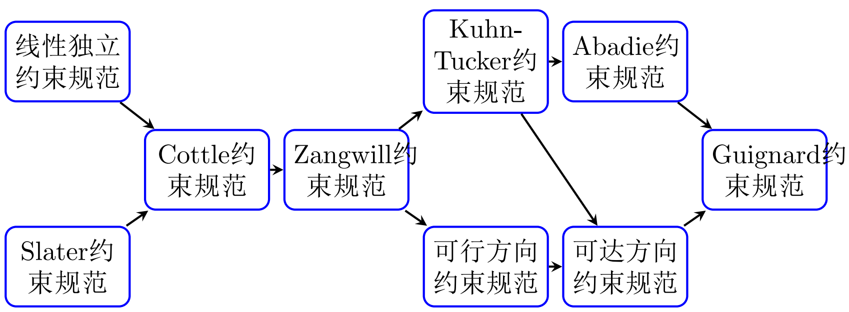

Figure 1: 约束规范关系图

7 具有等式约束优化问题

具有等式约束的优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \ldots, m \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p, \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $p \ge 0$为整数, $h_j(x), j = 1, 2 \ldots, p$, 为$\mathbb{R}^n$上的实函数.

特别在此处定义：

$$\widehat{\mathcal{L}(x)} = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_j(x)^T d = 0, j = 1, 2, \ldots, p; \nabla g_i(x)^T d \le 0, \forall i \in \mathcal{I}(x)\}.$$

约束规范.

- 线性独立约束规范: $\{\nabla g_i(x), i \in \mathcal{I}(x); \nabla h_j(x), j = 1, 2, \ldots, p\}$线性无关.
- Slater约束规范: $\{g_i(x), i \in \mathcal{I}(x)\}$ 都是$\mathbb{R}^n$上的凸函数, $\{h_j(x), j = 1, 2, \ldots, p\}$ 为线性函数且存在一点x^0为相对内点, 即$g_i(x^0) < 0,\ i = 1, 2, \ldots, m; h_j(x^0) = 0, j = 1, 2, \ldots, p$.
- Mangasarian-Fromovitz约束规范: $\{\nabla h_j(x), j = 1, 2, \ldots, p\}$线性无关且存在一个方向$d$使得$\nabla g_i(x)^T d < 0, \forall i \in \mathcal{I}(x); \nabla h_j(x)^T d = 0, j = 1, 2, \ldots, p$.
- Abadie约束规范: $\widehat{\mathcal{L}(x)} \subseteq \mathcal{T}(x)$.
- Guignard约束规范: $\widehat{\mathcal{L}(x)} \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\mathcal{T}(x)))$.