习题三

1、 对 Markov 链 $x_n, n \geq 0$, 试证条件

$$P(x_{n+1} = j | x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_{n-1}, x_n = i) = P(x_{n+1} = j | x_n = i) \qquad (1)$$

等价于对所有时刻 n,m 及所有状态 $i_0, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m$, 有

$$P(x_{n+1} = j_1, \ldots, x_{n+m} = j_m | x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n) = P(x_{n+1} = j_1, \ldots, x_{n+m} = j_m | x_n = i_n) \qquad (2)$$

证明：$(\Rightarrow)$ $P(x_{n+1} = j_1, \ldots, x_{n+m} = j_m | x_n = i_n)$

$=P(x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n, x_{n+1} = j_1, \ldots, x_{n+m} = j_m) | P(x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n)$

$=P(x_{n+m} = j_m | x_{n+m-1} = j_{m-1}, \ldots, x_n = i_n, \ldots, x_0 = i_0) . P(x_{n+m-1} = j_{m-1}, \ldots, x_n = i_n, \ldots, x_0 = i_0)$

$\div P(x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n)$

利用（1）$=P(x_{n+m} = j_m | x_{n+m-1} = j_{m-1}) \ldots\ldots P(x_{n+1} = j_1 | x_n = i_n) . P(x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n)$

$\div P(x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n)$

$=P(x_{n+m} = j_m | x_{n+m-1} = j_{m-1}) . P(x_{n+m-1} = j_{m-1} | x_{n+m-2} = j_{m-2}) \ldots . P(x_{n+1} = j_1 | x_n = i_n)$

$= P(x_{n+m} = j_m | x_{n+m-1} = j_{m-1}) \ldots . P(x_{n+2} = j_2, x_{n+1} = j_1 | x_n = i_n)$

$=\ldots\ldots.=P(x_{n+m} = j_m, \ldots\ldots x_{n+1} = j_1 | x_n = i_n)$

$(\Leftarrow)$ 在（2）中取 m=1，即得（1)。

2、 考虑状态 0,1,2 上的一个 Markov 链 $x_n, n \geq 0$, 它有转移阵

$$P=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix},$$ 初始分布为 $p_0 = 0.3, p_1 = 0.4, p_2 = 0.3,$

试求概率 $P\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$

解：$P(x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2) = P(x_2 = 2 | x_1 = 1) . P(x_1 = 1 | x_0 = 1) . P(x_0 = 0)$

=0×0.1×0.3=0

注：$P_{11} = P(x_1 = 1 | x_0 = 1)$ =0.1，$P_{12} = P(x_2 = 2 | x_1 = 1)$=0

3.信号传送问题。信号只有 0 和 1 两种，分为多个阶段传输，在每一步上出错的概率为 α。X_0

=0 是送出的信号，而 X_n 是在第 n 步接收到的信号。假定 X_n 为一 Markov 链，它有转移概率矩阵 P=$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$,0<$\alpha$<1

试求：(a) 两步均不出错的概率 P（X_0=0，X_1=0，X_2=0）

(b)试求两步传送后收到正确信号的概率。

(c)试求 5 步之后传送无误的概率 P$(X_5=0\mid X_0=0)$

解：(a) P（X_0=0，X_1=0，X_2=0）=P(X_0=0)P(X_1=0|X_0=0)P(X_2=0|X_1=0)

$= P_{00}^2$.P(X_0=0)= P(X_0=0)$(1-\alpha)^2$

(b)P（X_2=0|X_0=0）=P(X_2=0, X_1=0|X_0=0)+P(X_2=0, X_1=1|X_0=0)

=P X_1=0|X_0=0)P(X_2=0|X_1=0)+P(X_1=1|X_0=0)P(X_2=0|X_1=1)

$=(1-\alpha)^2+\alpha^2$

(c)

$P(X_5=0\mid X_0=0)=P(X_5=0\mid X_1=0)P(X_1=0\mid X_0=0)+P(X_5=0\mid X_1=1)P(X_1=1\mid X_0=0)$

=(1-α)$[P(X_5=0\mid X_2=0)P(X_2=0\mid X_1=0)+P(X_5=0\mid X_2=1)P(X_2=1\mid X_1=0)]$

+$\alpha$$[P(X_5=0\mid X_2=0)P(X_2=0\mid X_1=0)+P(X_5=0\mid X_2=1)P(X_2=1\mid X_1=1)]$

$=(1-\alpha)^2$

$P(X_5=0\mid X_2=0)+\alpha(1-\alpha)P(X_5=0\mid X_2=1)+\alpha^2P(X_5=0\mid X_2=0)+\alpha(1-\alpha)P(X_5=0\mid X_2=1)$

=$[(1-\alpha)^2+\alpha^2]$.$\{P(X_5=0\mid X_3=0)P(X_3=0\mid X_2=0)$

$+P(X_5=0\mid X_3=1)P(X_3=1\mid X_2=0)\}$+2$\alpha$(1-$\alpha$)

$\{P(X_5=0\mid X_3=0)P(X_3=0\mid X_2=1)+P(X_5=0\mid X_3=1)P(X_3=1\mid X_2=1)\}$

=(1-α)$[(1-\alpha)^2$+3$\alpha^2]$ $P(X_5=0\mid X_3=0)+\alpha(3(1-\alpha)^2+\alpha^2)P(X_5=0\mid X_3=1)$

=(1-α)(1-2α+4α^2)

$[P(X_5=0\mid X_4=0)P(X_4=0\mid X_3=0)+P(X_5=0\mid X_4=1)P(X_4=1\mid X_3=0)]$+$\alpha$(3-6$\alpha$

+9α^2)$[P(X_5=0\mid X_4=0)P(X_4=0\mid X_3=1)+P(X_5=0\mid X_4=1)P(X_4=1\mid X_3=1)]$

$=(1-\alpha)^3(1-2\alpha+4\alpha^2)+\alpha^2(1-\alpha)(1-2\alpha+4\alpha^2)+2\alpha^2(1-\alpha)(3-6\ \alpha+4\alpha^2)$

$=(1-\alpha)[1-4\alpha+16\alpha^2-22\alpha^3+16\alpha^4]$

4、A、B 两罐各装 N 个球，做如下试验：在时刻 n 从 n 个球中等概率任取一球，然后从 A、B 两罐中任选一罐，选中 A 的概率为 p，选中 B 的概率为 q，(p+q=1)，之后再将选出的球放入选好的罐中，设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数。试求此 Markov 过程的转移概率。

解：$X1=\begin{cases} N,\text{摸中}B \\ N+1,\text{摸中}A \end{cases}$，$X2=\begin{cases} X1,\text{摸中}B \\ X1+1,\text{摸中}A \end{cases}$，$X_{n+1}=\begin{cases} X_n,\text{摸中}B \\ X_n+1,\text{摸中}A \end{cases}$，

$P_{ij}=p(X_{n+1}=j/X_n=i)=\begin{cases} p,\ j=i+1 \\ q,\ j=i \end{cases}$,i=N,N+1,N+2

5、重复掷币一直到连续出现两次正面为止，假定钱币是均匀的，试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链，并求出平均需要掷多少次试验才可以结束。

解：用 X_n 表示第 n 次掷币时连续出息正面的次数，掷出反面的次数为 0，显然，当给定 X_n，时 X_{n+1} 与 X_{n-1}，… X_1 无关，故$\{X_n\}$为 Markov 链，且为时齐的。这是因为，只要没有掷出 2 次正面，过程都与时刻 n 无关，一般转移概率阵，

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$X_{n+1}=\begin{cases} X_n+1,\text{第}n+1\text{次出现正面} \\ X_n,\text{第}n+1\text{次出现反面} \end{cases}$，$N=\inf\{n: X_n=2\}$

$P(N=2)=P(X1=1,X2=2)=\frac{1}{4}$

$P(N=3)=p(x3=2,x2=1,x1=0)=\frac{1}{8}$

$P(N=4)=P(x4=2,x3=1,x2=0,x1=0)+p(x4=2,x3=1,x2=0,x1=1)=p(x4=2,x3=1,x2=0)=\frac{1}{8}$

$$P\{N=5\}=P\{x_5=2,x_4=1,x_3=0,x_2=0,x_1=0\}$$

$$+P\{x_5=2,x_4=1,x_3=0,x_2=0,x_1=1\}$$

$$+P\{x_5=2,x_4=1,x_3=0,x_2=1,x_1=0\}$$

$$=P\{x_5=2,x_4=1,x_3=0,x_2=0\}+P\{x_5=2,x_4=1,x_3=0,x_2=1,x_1=0\}$$

$$=P\{x_5=2\mid x_4=1\}P\{x_4=1\mid x_3=0\}P\{x_3=0\mid x_2=0\}P\{x_2=0\}+$$

$$P\{x_5=2\mid x_4=1\}P\{x_4=1\mid x_3=0\}P\{x_3=0\mid x_2=1\}P\{x_2=1\mid x_1=0\}P\{x_1=0\}$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$$

$$P\{N=6\}=P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=0,x_2=0,x_1=0\}$$

$$+P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=0,x_2=0,x_1=1\}$$

$$+P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=0,x_2=1,x_1=0\}$$

$$+P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=1,x_2=0,x_1=0\}$$

$$+P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=1,x_2=0,x_1=1\}$$

$$=P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=0,x_2=0\}$$

$$+P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=0,x_2=1,x_1=0\}$$

$$+P\{x_6=2,x_5=1,x_4=0,x_3=1,x_2=0\}$$

$$=\frac{1}{32}\times 2+\frac{1}{64}=\frac{5}{2^6}$$

$$EN=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{2^3}+5\times\frac{3}{2^5}+\cdots$$

6.迷宫问题.将小家鼠放入迷宫中作动物的学习试验，如
下图所示。在迷宫的第 7 号小格内放有美味食品而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置。假定当家鼠位于某格时有 K 个出口可以离去，则它总是随机选择一个，概率为 1/k .并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去.令过程 X_n 为家鼠在时刻 n 时所在小格的号码，试写出这一 Markov 过程的转移概率阵，并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.

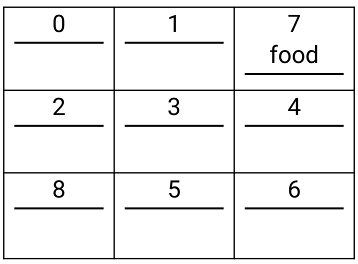


图 3.3 迷宫图

解：据题意，$\{X_n\}$为 Markov 链.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
P = \begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

补充假设 X_0=0，指小鼠最先位于 0 号小格.

τ =inf{n: $X_k \neq 8$, $X_n = 7$,k≤n-1 | $X_0 = 0$ }

P(小鼠未遭到电击而找到食物)= $\sum_{t=1}^{\infty} P\{\tau = t\} = \sum_{n=2}^{\infty}(P_{00}\, P_{01} \ldots P_{06})P_{66}^{n-2}(P_{07}\, P_{17} \ldots P_{67})$，

P_{66} 为 P 中去掉第 8 ，9 两行两列所得到的二子阵.

$P\{\tau = 1\} = 0$， $P\{\tau = 2\} = P\{X_2 = 7, X_1 = 1 \mid X_0 = 0\} = \frac{1}{6}$

$P\{\tau = 3\} = 0$，

$$
\begin{aligned}
P\{\tau = 4\} = {} & P\{X_4 = 7, X_3 = 4, X_2 = 3, X_1 = 2 \mid X_0 = 0\} + \\
& P\{X_4 = 7, X_3 = 4, X_2 = 3, X_1 = 1 \mid X_0 = 0\} + \\
& P\{X_4 = 7, X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 2 \mid X_0 = 0\} + \\
& P\{X_4 = 7, X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1 \mid X_0 = 0\} + \\
& P\{X_4 = 7, X_3 = 1, X_2 = 3, X_1 = 2 \mid X_0 = 0\} + \\
& P\{X_4 = 7, X_3 = 1, X_2 = 3, X_1 = 1 \mid X_0 = 0\} = \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

$P\{\tau=5\}=0$ ，$P\{\tau=6\}=\dfrac{2}{27}$ ，$P\{\tau=7\}=0$，$P\{\tau=8\}=\dfrac{4}{3^4}$

$P\{\tau=9\}=0$ ，$P\{\tau=10\}=\dfrac{13}{2^2\times 3^4}$

7. 记 $Z_i, i=1,2,\ldots$ 为一串独立同分布的离散随机变量，$P(Z_1=\mathrm{k})=P_k\geq 0$，$k=0,1,2\ldots,\ \sum_{K=0}^{\infty}P_K=1$.记 $X_n=Z_n, n=1,2\ldots,$ 试求 $\{Z_n\}$ 转移阵。

Solution. $P(X_n=k\mid X_{n-1}=\mathrm{i})=P(Z_n=k\mid Z_{n-1}=i)=P(Z_n=k)=P_k$，即 $P_{ik}=P_k$, i, k = 0, 1, 2…

8.对第 7 题中的 Z_i，令 $X_n=\min\{Z_1,\ldots, Z_n\}, n=1,2\ldots,$ 并约定 $X_0=0$. $\{X_n\}$是否为 Markov 链? 如果是，其转移阵是什么?

Solution. 如果确定了 $\{X_n\}$,$\{X_{n+1}\}$的取值与 $\{X_{n-1}\}$，…，$\{X_1\}$，$\{X_0\}$无关

故 $\{X_n\}$ 为 Markov 链

$$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=0\}=\begin{cases}1, & j=0\\ 0, & j>0\end{cases}$$

$$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=1\}=\begin{cases}P_0 & j=0\\ 1-P_0 & j=1\\ 0 & j>1\end{cases}$$

$$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=\begin{cases}P_0 & j=0\\ P_1 & j=1\\ P_{i-1} & j=i-1, \quad i=1,2,\ldots\\ 1-\sum_{k=0}^{i-1}p_i & j=i\\ 0 & j>i\end{cases}$$

$$P=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & p_1 & 1-p_0-p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & 1-\sum_{k=0}^{i-1} p_k & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{matrix}$$

9.设 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率,试证明: $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)}$

Poorf. $f_{ii}^{(K)}=P\{X_k=i, X_l \neq i, l<k \mid X_0=i\}=P\{T_i=k \mid X_0=i\}$

$$P_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j \mid X_0=i\}=\sum_{t=0} P\{X_n=j, T_i=t \mid X_0=i\}$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty} P\{T_i=t \mid X_0=i\} P\{X_n=j \mid T_i=t\}=\sum_{t=0}^{\infty} f_{ii}^{(t)} \cdot P_{ij}^{(n-t)}$$

$$T_i=\inf\{n: X_n=i, X_k \neq i, k=1,2,\cdots,n-1 \mid X_0=i\}$$

$f_{ii}^{(0)}=0$.

10.对第 7 题中的 Z_i ,定义 $X_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i, n=1,2,\cdots, X_0=0$,试证: $\{X_n\}$ Markov Chain,

并求其转移概率阵.

Proof. $P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1},\cdots, X_1=i_1, X_0=0\}$

$$=P\left\{\sum_{i=1}^{n+1} Z_i=j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} Z_i=i_n, X_{n-1}=i_{n-1},\cdots, X_0=0\right\}$$

$$=P\left\{Z_{n+1}-j-i_n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} Z_i=i_n, X_{n-1}=i_{n-1},\cdots, X_0=0\right\}$$

$=P\{Z_{n+1}=j-i_n\}$ (由 $Z_1,\cdots,Z_n,\cdots$ 的独立性知)

$=P\{Z_{n+1}=j-X_n \mid X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i_n\}$. (还是由独立性得到)

$$p_{ij}=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=P(Z_{n+1}=j-i)=\begin{cases} P_{j-i}, & j \geq i \\ 0, & j<i \end{cases}$$

$$\therefore \ P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_j & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{j-1} & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots & p_{j-2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

11.一 Markov chain 有状态 0,1,2,3 和转移概率阵

P=$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，试求：$f_{00}^{(n)}$，n=1,2,3,4,5.......

Solution: $f_{00}^{(1)}$=P{ x_1 =0| x_0 =0}=0

$f_{00}^{(2)}$ =P{ x_2 =0, x_1 =1| x_0 =0}+P{ x_2 =0, x_1 =2| x_0 =0}+P{ x_2 =0, x_1 =3| x_0 =0}

$$=(P_{01},P_{02},P_{03})(P_{10},P_{20},P_{30})'=(\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{4}$$

$f_{00}^{(3)}$ =P{ x_3 =0, $x_2 \neq 0$, $x_1 \neq 0$| x_0 =0}

$$=(P_{01},P_{02},P_{03})\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \end{pmatrix}=(\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2})\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{8}$$

$$f_{00}^{(4)}=(\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2})\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2^4}$$

$f_{00}^{(5)}=(\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2})\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2^5}$,...... 所以 $f_{00}^{(n)}=\frac{1}{2^n}$,n$\geq$2

12.在成败型的重复试验中,每次试验结果或为成功(S),或为失败(F),同一结果相继出现称为一个游程(run),比如 FSSFFFSF 中共有两个成功游程,三个失败游程,设成功概率为 p,失败概率为 q=1-p,记 x_n 为 n 次试验后成功游程的长度(若第 n 次试验失败, x_n =0).试证{ x_n ,n=1,2,……}为 Markov chain.记 T 为返回状态 0 的时间,试求 T 的分布及均值,并进行分类.。

Solution:

$$X_1=\begin{cases}1,\text{第一次成功}\\0,\text{第一次失败}\end{cases},\quad x_2=\begin{cases}0,\text{第二次失败}\\1,\text{第一次失败, 第二次 成功}\\2,\text{第一、二次都成功}\end{cases}$$

$$\begin{cases}FSSF\ ,X_4=0\\FSSS\ ,X_4=3\end{cases},$$

$$X_{n+1}=\begin{cases}X_n+1,\text{第}n+1\text{次试验成功}\\0,\text{第 }n+1\text{次试验失败}\end{cases}$$,为 Markov 链。

$$P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=\begin{cases}q,\ j=0\\p,\ j=i+1\end{cases}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i+1 & \cdots\end{array} \\
P= & \begin{pmatrix}
q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\
q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\
q & 0 & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\
q & 0 & 0 & 0 & p & \cdots & 0 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots
\end{pmatrix}\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\\vdots\\i\\\vdots\end{array}
\end{array}$$

$$T=\inf\{n:X_n=0,X_{n-1}\neq 0,\cdots,X_2\neq 0,X_1\neq 0\}$$

$$P(T=k)=p^{k-1}q,k=1,2,\cdots$$

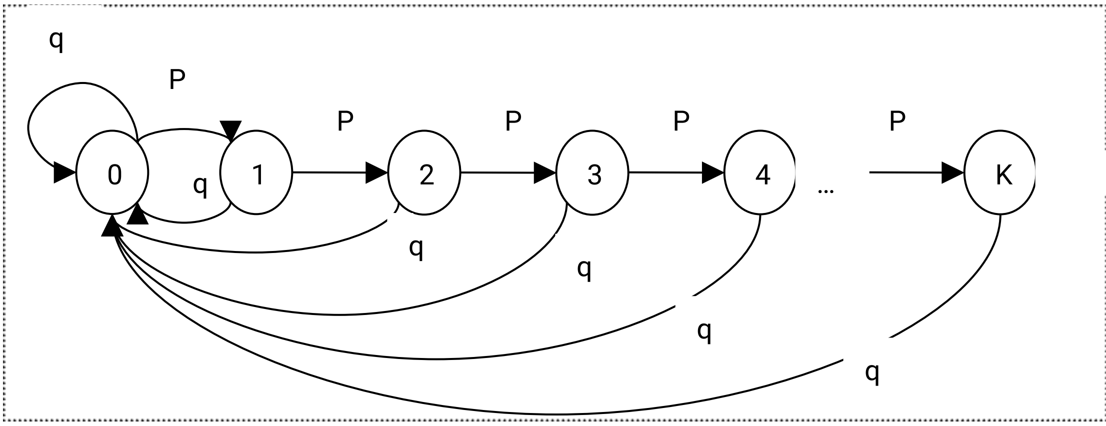
$$ET=1\bullet q+2\bullet pq+3p^2q+4p^3q+\cdots \qquad ①$$

$$PET=pq+2p^2q+3p^3q+\cdots \qquad ②$$

①-②有

$$qET=q+pq+p^2q+p^3q+\cdots=q\bullet\frac{1}{1-p}=\frac{q}{q}=1$$

$$ET = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}$$



所有状态可以互通，共为一类。

13. 试证向各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的，而在三维时却是瞬时的。

Proof: ⑴ 二维时的对称随机游动

状态空间为：$\{(i, j) \mid i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

$X_n = (i, j)$ 意指在 n 时刻过程所处的状态（位置）

由于所有的状态都是互通的，不妨设 $X_0 = (0,0)$，显然给定了

X_n，X_{n+1} 与 $X_{n-1}, \cdots X_1$，X_0 无关，故 $\{x_n\}$ 为 markoo chain。

$$P(X_{n+1} = (k, l) \mid X_n = (i, j)) = \begin{cases} \frac{1}{4}, i = k, j = l+1 \\ \frac{1}{4}, i = k, j = l-1 \\ \frac{1}{4}, i = k-1, j = l \\ \frac{1}{4}, i = k+1, j = l+1 \end{cases}$$

假设过程从状态（0,0）出发经过 2n 步返回，则其中有 2k 步是向左，向右运动，2（n-k）步是上、下运动，从而有 $P_{(0,0),(0,0)}^{(2n)} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \cdot C_{2k}^{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} \cdot C_{2(n-k)}^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2(n-k)}$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot (2n)! \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{(n-k)!}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}C_{2n}^n=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\cdot\frac{((2n)!)^2}{(n!)^4}$$

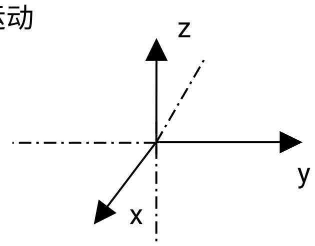
$(2n)!\sim(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-2n}\sqrt{2\pi}$ ， $n!\sim n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}\sqrt{2\pi}$ （stirling 公式）

从而 $P_{(0,0),(0,0)}^{(2n)}=\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)$， $P_{(0,0),(0,0)}^{(2n+1)}=0$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}P_{(0,0),(0,0)}^{(2n)}=+\infty$ 故 $\{x_n\}$ 为常返的。

(2)三维时的随机分布同二维随机分布一样，每个点有 6 个方向运动

$X_n=(i,j,k),i,j,k=0,\pm1,\pm2,\ldots x$



$$P(X_{n+1}=(i,j,k)\mid X_n=(a,b,c))=\begin{cases}\frac{1}{6}, & a=i,\ j=b,k=c\pm1\\ \frac{1}{6}, & i=a,k=c,\ j=b\pm1\\ \frac{1}{6}, & j=b,k=c,i=a\pm1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$\sum_{k+l=n}1=n+1\qquad\sum_{k+l+m=n}1=(n+1)^2$$

$$P_{(0,0,0),(0,0,0)}^{(2n)}=\sum C_{2n}^{2k}\cdot C_{2(n-k)}^{2m}\cdot C_{2k}^{k}\cdot\frac{1}{6}\cdot C_{2m}^{m}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2m}\cdot C_{2(n-k-m)}^{n-k-m}\left(\frac{1}{6}\right)^{2(n-k-m)}$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\sum_{k+m\le n}\frac{(2n)!}{(k!)^2(m!)^2((n-k-m)!)^2}$$ 记 $(l=n-k-m)$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k+m+l=n}\left(\frac{n!}{k!m!l!}\right)^2$$

$$=(3^{2n})^{-1}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\cdot\sum_{k+m+l=n}\left(\frac{n!}{k!\,m!\,l!}\right)^2$$

$$\le\frac{1}{3^{2n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\cdot\frac{(n+1)^2}{n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\approx\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$\sum P^{(2n)}_{(0,0,0),(0,0,0)}\le\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{\pi}<+\infty$$

故（0,0,0）为瞬过的。

Remark. $$\sum_{k+m+l=n}\left(\frac{n!}{k!\,m!\,l!}\right)^2=\sum_{k+m+l=n}\left[\frac{n!\cdot(m+l)!}{k!\,m!\,l!}\cdot\frac{1}{(m+l)!}\right]^2$$

$$=\sum_{k+m+l=n}^{n}(C_n^k\cdot C_{m+l}^m)^2\le\sum_{k+m+l=n}(C_n^kC_n^m)^2$$

$$\le\frac{(n+1)^2}{n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

14、某厂商对该厂生产的同类产品的三种型号调查顾客的消费习惯，并把它们归为 markov 模型，记顾客消费在 A、B、C 三种型号间的转移概率分别为下列四种，请依据这些转移阵所提供的信息对厂家提出关于 A，B 两种型号的咨询意见。

（1）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\\0.5&0.5&0\end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

Solution：(1) $P_{AA}=1,P_{BB}=1,$ 并不为转移矩阵，最后一行加起来应为 1.

（2）$P^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,说明所有状态 A、B、C 互通，且为遍历链。

设（π_A,π_B,π_C）为经过长时期后，三个产品在市场的占有额，则由极限定理知

$$(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix}0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\\0.5&0.5&0\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C),\quad\pi_A+\pi_B+\pi_C=1$$

知：$\pi_A=\frac{1}{3},\pi_B=\frac{1}{3},\pi_C=\frac{1}{3}$，各品牌竞争力差不多，可以继续生产，但不要生产太多。

(3) $P^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，可以看出，$P^n$ 中仍有元素为零，说明状态可分为 $\{B\},\{A,C\}$.

$\pi_B=\lim\limits_{n\to\infty}P_{BB}{}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$， $(\pi_A,\pi_C)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_C),\pi_A+\pi_C=1$

$\pi_A=\frac{1}{2},\pi_C=\frac{1}{2}$,B 产品将逐步淡出市场，建议停止对 B 生产，扩大 A 的生产。

(4) $P_{AA}{}^{(3)}=P(X_3=A\,|\,X_0=A)=1,P_{AA}{}^{(6)}=1,\cdots P_{AA}{}^{(3n+1)}=0,P_{AA}{}^{(3n+2)}=0$

$f_{AA}{}^{(3)}=1,\ f_{AA}{}^{(k)}=0,k\neq 3,T_A$ 为从状态 A 出发首次返回状态 A 的时间。

$\pi_A=\pi_B=\pi_C=\frac{1}{3}$.

15．考虑一有限状态的 Markov 链，试证明

(a) 至少有一个状态是常返的。

(b) 任何常返状态必定是正常返的。

解答：(a) (反证法) 如果所有的状态都是瞬过的，过程将永远离开它的任一状态，这显然不可能，因为过程是在这些状态间进行转移的，最多经过有限步，就要返回一次，故至少有一个状态是常返的。

(b) 假设状态 0 是常返的，$\mu_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}$

$f_{00}^{(n)}=P(X_n=0,X_k\neq 0,k=1,2,\dots n-1\mid X_0=0)$

因为状态是有限个，而状态 0 是常返的，状态 0 返回一定是经有限步就会回来，当 $n>N$ 时，

$f_{00}^{(n)}=0$，故 $\mu_0=\sum\limits_{n=1}^{N}nf_{00}^{(n)}<+\infty$，从而知，常返状态为正常返状态。

16．考虑一生长与灾害模型，这类 Markov 链有状态 0,1,2，……，当过程处于状态 i 是它即可能以概率 p_i 转移到 $i+1$ (生长) 也能以概率 $q_i=1-p_i$ 落回到状态 0 (灾害)，而从状态“0”又比如“无中”生有，即 $p_{01}\equiv 1$。

(a) 试证明所有状态为常返的条件是 $\lim_{n\to\infty}(p_1 p_2 \cdots\cdots p_n)=0$。

(b) 若此链为常返的，试求其为零常返的条件。

解答：(a) $p=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$，记 $e_0=(1,0,\cdots)$

$e_0^*=(q_1,q_2,\cdots)$

$p_0=\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

$f_{00}^{(b)}=e_0 p^{(n-2)}\bullet e_0^*, n\ge 2$，易知 $f_{00}^{(2)}=q_1=1-p_1$，$f_{00}^{(3)}=p_1q_2=p_1-p_1p_2$，

$f_{00}^{(n)}=p_1p_2\cdots p_{n-2}q_{n-1}=p_1p_2\cdots p_{n-1}-p_1\cdots p_{n-2}$

$f_{00}=\sum_{n=2}^{\infty}f_{00}^{(n)}=1-\lim_{n\to\infty}p_1\cdots p_{n-1}=1$。

(b) 零常返的充要条件为

$$\sum_{n=2}^{\infty} nf_{00}{}^{(n)}=2(1-p_1)+3(1-p_1p_2)+4(p_1p_2-p_1p_2p_3)+\cdots=2+p_1+p_1p_2+p_1p_2p_3+\cdots=+\infty$$

其通项为 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $o(n^{-1})$. 从而有：$\lim_{n\to\infty}P_1P_2\ldots P_n=0$

17.试计算转移概率矩阵 $p^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 的极限分布。

Solution. $p^2=\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{36} & \frac{5}{12} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$,每个元素都大于 0，故其状态为遍历的。

从而有：$(\pi_0,\pi_1,\pi_2)P=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$, $\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$

即：$\pi_0=\frac{5}{14},\pi_1=\frac{3}{7},\pi_2=\frac{3}{14}$.

18.假定在逐日的天气变化中每天的阴晴与前两天的状况关系很大，于是可考虑 4 状态的 Markov 链：接连两天晴天，一晴一阴，一阴一晴，以及接连两阴天，分别记为 (s,s)， (s,c),(c,s),(c,c).该链的转移概率阵为

$$\begin{array}{c} \\ (s,s) \\ (s,c) \\ (c,s) \\ (c,c) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (s,s) & (s,c) & (c,s) & (c,c) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布，并求出长期平均的晴朗天数。

Solution $p^2 = \begin{bmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.08 & 0.12 \\ 0.24 & 0.16 & 0.06 & 0.54 \\ 0.48 & 0.12 & 0.16 & 0.24 \\ 0.06 & 0.04 & 0.09 & 0.81 \end{bmatrix}$ 所有元素全大于 0，设平稳分布为(π_0,π_1,π_2,π_3)

则由(π_0,π_1,π_2,π_3)P=(π_0,π_1,π_2,π_3)，知：$\pi_0=\frac{3}{11},\pi_1=\pi_2=\frac{1}{11},\pi_3=\frac{6}{11}$.

对于一年来说，平均晴天的天数为：$365\times\left(\frac{3}{11}\times 2+\frac{1}{11}\times 1+\frac{1}{11}\times 1+\frac{6}{11}\times 0\right)$

$$=365\times\frac{8}{11}$$

19.某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返，如某天他在家时（办公室时）下雨了，而且家（办公室）中有伞，他就带一把伞去上班（回家），不下雨时，他从不带伞，如果每天与以往独立地早上（或晚上）下雨的概率为 p，试定义一个 M+1 状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会。

Solution：设 X_n 为此人在 n 时刻身边有伞的数目，状态空间为 $S=\{0,1,2,\ldots,M\}$

$$X_{n+1}=\begin{cases} M-X_n\text{，如果 n 时刻天没有下雨} \\ M-X_{n+1}\text{，如果 n 时刻天下雨} \end{cases}$$

$$P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=\begin{cases} p,\ \ j=M-i+1,\ i\ge 1 \\ q,\ j=M-i \\ 1,\ \ i=M,\ i=0 \\ 0,\ \ \text{else} \end{cases}$$

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdots \\ M-1 \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & M-2 & M-1 & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q & p \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & q & p & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & q & p & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & q & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

易验证此 markov 链为不可约的非周期遍历链，设 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_M)$ 为其平稳分布，则 $\pi p=\pi$。有

$\pi_0=\pi_M,\pi_1=\pi_2=\ldots=\pi_M,\pi_0=\frac{q}{M+q},\pi_M=\frac{1}{M+q}$ π_0 为身边无伞被雨淋湿的机会。

20.血液培养在 0 时刻从一个红细胞开始，一分钟之后红细胞死亡可能出现下面几种情况：以 $\frac{1}{4}$ 的概率再生 2 个细胞，以 $\frac{1}{2}$ 的概率再生一个红细胞和一个白细胞，也可以 $\frac{1}{4}$ 的概率生 2 个白细胞，再过一分钟后，每个红细胞以同样的规律再生下一代，而白细胞则不再生，并假定每个细胞的行为是独立的。

(a) 从培养开始 n+1 分钟不出现白细胞的概率是多少？

(b) 整个培养过程停止的概率是多少？

Solution:设 X_n 为 n 时刻血液中的红细胞数，显然 X_{n+1}, 在 X_n 给定后，与 X_{n-1}，…X_1,X_0 无关，

则{X_n}为 Markov 链。

p_{ij}=p{ X_{n+1}=j| X_n =i},j=2*I,2*i-1,….1,0.

(a)p(X_{n+1}=2^{n+1}| X_0=1)=$(1/4)^{n+1}$

(b)令 T_0=inf(n: X_n=0, X_k≠0,k=1,2,…,n-1| X_0=1)

P(ζ_0=1)=1/4, P(ζ_0=2)=1/4*1+1/2*1/4+1/4*1/4*1/4=$5^2/2^6$=$\sum^2_{k=0}$(X_2=0,X_1=k|X_0=1)

P(ζ_0=3)=p(X_3=0 ,X_2≠0 X_1≠0 |X_0=1)=231/(64*8)

21．分支过程中一个个体产生的后代的分布过程为 p_0=q,p_1=p(p+q=1)，试求第 n 代总体的均值和方差及群体消亡的概率。如产生后代的分布为 p_0=1/4,p_1=1/2,p_2=1/4 及 p_0=1/8，p_1=1/2，p_2=1/4，p_3=1/8，试回答同样的问题。

Solution: p_0=q 指一个个体不产生后代的概率。p_1 指产生一个后代的概率

Zi	0	1
	p_0	p_1

Z_i 为第 n 代中第 i 个个体所繁衍的后代，则 $X_{n+1}=\sum_{i=1}^{x_n} z_i=\begin{cases}1 & x_n=1\\ 0 & x_n=0\end{cases}$

$$P_{ij}=P\{x_{n+1}=j\mid x_n=i\}=P\left\{\sum_{k=1}^{i} Z_k=j\right\}$$

$EZ_i=P_1\qquad D(Z_i)=pq\qquad p\{x_{n+1}=1\mid x_0=1\}=p^{n+1}\qquad p\{x_{n+1}=0\mid x_0=1\}=1-p^{n+1}$

$$E(X_{n+1})=E\left[E\left(\sum_{i=1}^{x_n}Z_i\mid x_n\right)\right]=E\left[x_n\cdot E(Z_i)\right]=p\cdot EX_n=p^{n+1}$$

$$D(x_{n+1})=p^{n+1}(1-p^{n+1})\qquad \Phi(s)=q+ps=s\Rightarrow s=1,\pi=1$$

(1)

Zi	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$EZ_i=1=\mu\qquad DZ_i=\frac{1}{2}\qquad Ex_{n+1}=1$$

$$Var(x_{n+1})=Ex_n\cdot Var(z_1)+Var(x_n)\cdot(Ez_1)^2=(n+1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\phi(s)=p_0+p_1s+p_2s^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}s^2=s\Rightarrow\pi=1=s$$

也就是说群体一定要消亡

(2)

Zi	0	1	2	3
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$EZ_i=\frac{11}{8},D(Z_i)=\frac{47}{64},EX_{n+1}=\left(\frac{11}{8}\right)^{n+1},D(x_{n+1})=\frac{47}{64}\cdot\left(\frac{11}{8}\right)^{n}\cdot\frac{8}{3}\cdot\left[\left(\frac{11}{8}\right)^{n+1}-1\right]$$

$$\phi(s)=p_0+p_1s+p_2s^2+p_ss^3=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{8}s^3=s\Rightarrow s_1=1,s_2=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

则$\pi=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$为群体消亡的概率

22、若单一个体产生后代的分布为 $p_0=q,\ p_1=p\quad(p+q=1)$，并假定过程开始时的祖先数为 1，试求分支过程第 3 代的总数分布。

Solution：

$$P(x_3=1\mid x_0=1)=P(x_3=1,x_2=1,x_1=1\mid x_0=1)=p^3$$

$$P(x_3=0\mid x_0=1)=P(x_3=0,x_2=1\mid x_0=1)+P(x_3=0,x_2=0\mid x_0=1)$$

$$=P(x_3=0\mid x_2=1)P(x_2=1,x_1=1\mid x_0=1)+$$

$$P(x_3=0\mid x_2=0)\{P(x_2=0,x_1=1\mid x_0=1)+P(x_2=0,x_1=0\mid x_0=1)\}$$

$$=p_0\cdot P^2+1\times\{p\cdot q+q\cdot 1\}=q+pq+qp^2=1-p^3$$

23、一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态，在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda>0$及$\mu>0$ 的指数分布，试求在时刻 0 从状态 0 起始，t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$。

Solution:设 $x(t)$ 为 t 时刻所处状态，记

$$P_{00}(t)=P(x(t)=0 \mid x(0)=0),\ P_{01}(t)=P(x(t)=1 \mid x(0)=0)$$

易知：$P_{00}(t)+P_{01}(t)=1$，采用无穷小分析法

$$P_{00}(t+\Delta t)=P(x(t+\Delta t)=0 \mid x(0)=0)=P(x(t+\Delta t)=0, x(t)=0 \mid x(0)=0)$$

$$+P(x(t+\Delta t)=0, x(t)=1 \mid x(0)=0)$$

$$=P_{00}(t)\cdot P(x(t+\Delta t)=0 \mid x(t)=0)+P_{01}(t)\,P(x(t+\Delta t)=0 \mid x(t)=1)$$

$$=P_{00}(t)(1-\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t))+(1-P_{00}(t))\cdot\mu\cdot\Delta t$$

$$\frac{P_{00}(t+\Delta t)-P_{00}(t)}{\Delta t}=-(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow P'_{00}(t)=-(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu \Rightarrow P_{00}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

24、在第 23 题中，如果 $\lambda=\mu$, 定义 $N(t)$ 为过程在 $[0,t]$ 中改变状态的次数，试求 $N(t)$ 的概率分布。

Solution: $P_{01}(t)=1-P_{00}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}=\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda t}),(\lambda=\mu)$

$$P_{00}(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda t}),\ P_{11}(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda t}),\ P_{10}(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda t})$$

记 $P_k(t)=P(N(t)=k \mid x(0)=0)$

$$P_k(t+\tau)=P(N(t+\tau)=k \mid x(0)=0)=\sum_{j=0}^{k}P(N(t+\tau)=k, N(t)=j \mid x(0)=0)$$

$$=P(N(t+\tau)=k \mid N(t)=k)\,P_k(t)+P(N(t+\tau)=k \mid N(t)=k-1)\ P_{k-1}(t)$$

$$=(1-2\lambda\cdot\tau)\cdot P_k(t)+2\lambda\cdot\Delta t P_{k-1}(t)+o(\tau)$$

$$\Rightarrow P_k'(t)=-2\lambda P_k(t)+2\lambda P_{k-1}(t)\text{，}\ P_0'(t)=-2\lambda P_0(t),\ P_0(t)=e^{-2\lambda t},\ P_0(0)=1$$

$$P_1'(t)=-2\lambda P_1(t)+2\lambda e^{-2\lambda t},\ P_1(t)=2\lambda t e^{-2\lambda t},\ \ldots\ldots$$

$$P_k(t)=\frac{(2\lambda t)^k}{k!}e^{-2\lambda t},\ k=0,1,2\ldots$$

(3)记 $x(t)$ 为纯生过程，且有

$P\{x(t+h)-x(t)=1 \mid x(t)\text{为奇数}\}=\partial h+o(h)$

$P(x(t+h)-x(t)=1 \mid x(t)\text{为偶数})=\beta h+o(h)$

及 $x(0)=0$，试分别求条件"$x(t)$为偶数"和"$x(t)$为奇数"的概率

Solution:记 $P_0(t)=P(x(t)=\text{偶数}|x(0)=0)$, $P_1(t)=P(x(t)=\text{奇}|X(0)=0)$

易知：$P_1(t)=1-P_0(t)$

$$P_0(t+h)=P(x(t+h)=\text{偶}|x(0)=0)=P(x(t+h)=\text{偶，}x(t)=\text{奇}|X(0)=0)$$

$$+P(x(t+h)=\text{偶，}x(t)=\text{偶}|x(0)=0)$$

$$=P(x(t+h)=\text{偶}|x(t)=\text{奇})\cdot P_1(t)+P(x(t+h)=\text{偶}|x(t)=\text{偶})P_0(t)$$

$$\partial h\cdot(1-P_0(t))+(1-\beta h)\cdot P_0(t)+o(h)$$

$$\Rightarrow P_0^{'}(t)=-(\partial+\beta)P_0(t)+\partial\Rightarrow P_0(t)=\frac{\partial}{\partial+\beta}+\frac{\beta}{\partial+\beta}e^{-(\partial+\beta)t}$$

$$P_1(t)=\frac{\beta}{\partial+\beta}-\frac{\beta}{\partial+\beta}e^{-(\partial+\beta)t}$$

26 考虑状态 0,1,...,N 上的纯生过程 X（t），假定 X（0）=0 以及λ_k=（N-k）λ，k=0,1,...,N,其中λ_k满足 P（x（t+h）-x（t）=1｜x(t)=k）=$\lambda_k h+o(h)$,

试求 P_n（t）=P（X（t）=n），这是新生率受群体总数反馈作用二例子。

Solution。设 P_k（t）=P（X（t）=k｜X（0）=0）

P_k（t+h）=P（X（t+h）=k｜X（0）=0）

$=\sum_{j=0}^{N}P$（X（t+h）=k，X（t）=j｜X（0）=0）

$=\sum_{j=0}^{N}P$（X（t+h）=k｜X（t）=j）$*P_j$（t）

=P（X（t+h）=k｜X（t）=k）P_k（t）+ P（X（t+h）=k｜X（t）=k-1）P_{k-1}（t）+o（h）

=（1-λ_kh）P_k（t）+$\lambda_{k-1}hP_{k-1}$（t）+o（h）

=>P'_k（t）=$-\lambda_k P_k(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)$

P'_0（t）=$-\lambda_0 P_0(t)$,　　　　　P_0（t）=$e^{-\lambda Nt}$= $e^{-\lambda 0t}$

P'_1（t）=$-\lambda_1 P_1(t)+\lambda_0 e^{-\lambda 0t}$　　　P_1（t）=$Ne^{-\lambda 1t}$（1-　$e^{-\lambda t}$）

可类推测 P_k（t）=C^k_N+ $e^{-\lambda kt}$（1- $e^{-\lambda t}$）^{k}，k=0,1,...,N

27 在某化学反应中，由分子 A 与 B 发生反应而产生分子 C。假定在很小时间 h 之内一个分子 A 与 B 接近到能发生化学反应的概率与 h 及 A、B 当前的分子数成正比。假定在反应开始时 A，B 分子数相同，并记过程 X（t）为 A 分子在时刻 t 的数目，试建立起随机模型。

Solution 记 $P_n(t)=P(X(t)=n \mid X(0)=N)$，N 为反应分子 A 的数目。

为纯灭过程 $P(X(t+h)=k \mid X(t)=k+1)=\lambda(k+1)h$

$P_n(t+h)=P(X(t+h)=n, X(t)=n \mid X(0)=N)$

$\quad +P(X(t+h)=n, X(t)=n+1 \mid X(0)=N)$

$\quad =(1-\lambda_n h)P_n(t)+\lambda(n+1)hP_{n+1}(t)+o(h)$

$\Rightarrow P_n'(t)=-\lambda nP_n(t)+\lambda(n+1)P_{n+1}(t)$

$P_N'(t)=-\lambda NP_N(t) \qquad P_N(t)=e^{-\lambda Nt} \qquad P_N(0)=1$

$P_{N-1}'(t)=-\lambda(N-1)P_{N-1}(t)+\lambda Ne^{-\lambda Nt} \qquad P_{N-1}(0)=0$

$P_{N-1}(t)=Ne^{-\lambda(N-1)t}(1-e^{-\lambda t})$

$P_{N-2}'(t)=-\lambda(N-2)P_{N-2}(t)+\lambda(N-1)Ne^{-\lambda(N-1)t}(1-e^{-\lambda t})$

$P_{N-2}(t)=C_N^2 e^{-\lambda(N-2)t}(1-e^{-\lambda t})^2$

$P_{N-k}(t)=C_N^k e^{-\lambda(N-k)t}(1-e^{-\lambda t})^k$ ， k=0,1,2,.....,N

28.有无穷多个服务员的排队系统，假定顾客以参数为 的 poisson 过程到达，而服务员的数量巨大，可理想化为无穷多个，顾客一到就与别二顾客相互独立地接受服务，并在时间 h 内完成服务的概率近似为 。记 x(t)为在时刻 t 正接受服务的顾客总数，试建立此过程的转移机制的模型。

Solution. 记 $P_n(t)=P(x(t)=n \mid x(0)=0)$

$P_0(t+h)=P(x(t+h)=0 \mid x(0)=0)$

$=P(x(t+h)=0, x(t)=0 \mid x(0)=0)+P(x(t+h)=0, x(t)=1 \mid x(0)=0)$

$=(1-\lambda h-\alpha h)P_0(t)+\alpha hP(\ t)+o(h)$

$\Rightarrow P_0'(t)=-(\lambda+\alpha)P_0(t)+\alpha P_1(t)$

同理有：$P_n'(t)=-(\lambda+\alpha)P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\alpha P_{n+1}(t)$ ， n≧1

初始条件：$P_0(0)=1$ ，$P_n(0)=0$ ，n≧1

29. 一个由 N 个部件组成的循环装置，从 C_1，C_2，…，到 C_N 顺时针排列。第 K 个部件会持续工作一段时间，其分布是以 λ_k 为参数的指数分布。一旦它停止工作，顺时针方向的下一个元件就立即接替它开始运行。假定各部件及同一部件的不同次运行都是相互独立的。记 $X(t)$ 为时刻 t 正在的部件的序号。试写出模型及转移概率所满足的微分方程，当 N=2，$\lambda_1=\lambda_2=1$，初始状态为 1 时试求解 $P_{11}(t)$ 及 $P_{12}(t)$

Solution. 记 $P_k(t)=P(X(t)=k \mid X(0)=1)$，$P_1(0)=1$，$P_k(0)=0$，$k\neq 1$

$$P_k(t+h)=P(X(0)=1)=\sum_{j=1}^{N}P(X(t+h)=k,\ X(t)=j\mid X(0)=1)$$

$$=P(X(\mathrm{t}+h)=k,\ X(t)=k\mid X(0)=1)+P(X(t+h)=k,\ X(t)=k-1\mid X(0)=1)+\mathrm{o}(h)$$

$$=(1-\lambda_k h)P_k(t)+\lambda_{k-1}h\bullet P_{k-1}(t)+o(h)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P_k^{'}(t)=-\lambda_k P_k(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t) & P_k(0)=0,\ k>1\\ P_1^{'}(t)=-\lambda_1 P_1(t)+\lambda_N P_N(t),\ P_1(0)=1\end{cases}$$

当 $N=2,\lambda_1=\lambda_2=1,\ P_1(t)+P_2(t)=1$

$$\begin{cases}P_1^{'}(t)=-\lambda P_1(t)+\lambda P_2(t)\\ P_2^{'}(t)=-\lambda P_2(t)+\lambda P_1(t)\end{cases}$$

$P_1^{'}(t)=-\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda t})$ ， $P_2^{'}(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda t})$

30 试写出純生过程；kolmogrou 向前微分方程，在初始條件 P_{ii} (0）=1，試求出 P_{ii} (t）及 P_{ij} (t)滿足方程，对 yule λ_j =iλ 过程求出 P_{ij} (t)的明显表达式

Solution ；kolmogrou 向前微分方程

P_{ij} (t)=P{X(t+u)=j I X(u)=i}

P_{ij} (t)= μ_{j+1} $P_{i,j+1}$ (t)-()- ($\lambda_j+\mu_j$) P_{ij} (t)+ λ_{j-1} $P_{i,j-1}$ (t)

P_{i0} (t)=- λ_0 P_{i0} (t)+ μ_i P_{i1} (t)

Yule 过程见 P_{53} ，例 3.12 μ_j =0， λ_j =jλ

从而有

P_{ij} (t)=- λ_j P_{ij} (t)+ λ_{j-1} $P_{i,j-1}$ (t)， j≥i+1

P_{ii} (t)=- λi P_{ii} (t) P_{ii} (0)=1

$\Rightarrow$

P_{ii} (t) =$e^{-\lambda it}$

$P_{i,i+1}$ (t)=- λ (i+1) $P_{i,i+1}$ (t)+ λ i $e^{-\lambda it}$

知　$P_{i,i+1}$ (t)=ie$^{-\lambda i9t0}$(1-e$^{-\lambda t}$)

类似可知　$P_{i,i+1}$ (t)=i(i+1)/2　e$^{-\lambda it}$(1--e$^{-\lambda t}$)^2=C$_{i+1}$^{2}　e$^{-\lambda it}$(1--e$^{-\lambda t}$)^2

$P_{i,i+k}$(t)=C$i+k+1$　e$^{-\lambda it}$(1--e$^{-\lambda t}$)^k,　k=0,1,2,　........

为负二项分布

31　两个通讯卫星放入轨道，每个卫星的工作寿命都是以μ为参数的指数分布，一旦失效就再放射颗卫星替换它，所需的发射时间服从以λ为参数的指数分布,记X(t)为时刻t时在轨道中工作的卫星数,假定它是一个状态空间为{0,1,2}的连续时间 Markov 链模型，试建立 kolmogrou 向前向后微分方程

Solution: 设 $X(t)$ 不是 t 时刻轨道中工作的卫星数. $X(0)=0$ 。

$P_n(t)=(X(t)=n \mid X(0)=0)$, n=0,1,2

先考虑向前微分方程.

$$P_n(t+h)=\sum_0^2 P\left(X(t+\tau)=n,\ X(t)=k \mid X(0)=0\right)$$

$$=P\left(X(t+\tau)=n \mid X(t)=n\right)\bullet P_n(t)+P\left(X(t+\tau)=n \mid X(t)=n-1\right)\bullet P_{n-1}(t)$$

$$+P\left(X(t+\tau)=n \mid X(t)=n+1\right)\bullet P_{n+1}(t)$$

$$P_0(t+h)=1-2\lambda h\bullet P_0(t)+uh\bullet P_1(t)+o(h)$$

$$\Rightarrow P_0'(t)=-2\lambda\bullet P_0(t)+u\bullet P_1(t) \qquad ①$$

$$P_1(t+h)=(1-\lambda-u)\ h\bullet P_1(t)+2\lambda h\bullet P_{n-1}(t)+C_2'uh\bullet P_1(t)+o(h)$$

$$\Rightarrow P_1'(t)=-(\lambda+u)\bullet P_1(t)+2\lambda\bullet P_0(t)+2u\bullet P_2(t) \qquad ②$$

$$P_2(t+h)=(1-2uh)\bullet P_2(t)+\lambda h\bullet P_1(t)+o(h)$$

$$\Rightarrow P_2'(t)=-2u\bullet P_2(t)+\lambda\bullet P_1(t) \qquad ③$$

$P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)=1$　　　$P_0(0)=1$　　$P_1(0)=0$　　$P_2(0)=0$

$$\begin{cases} P_0'(t)=-2\lambda\bullet P_0(t)+u\bullet P_1(t) \\ P_1'(t)=-(\lambda+u)\bullet P_1(t)+2\lambda\bullet P_0(t)+2u\bullet P_2(t) \\ P_2'(t)=-2u\bullet P_2(t)+\lambda\bullet P_1(t) \end{cases}$$

同样可以写出 kolmogorov 向后微分方程.