问题

$$(3.2)\quad \begin{cases} \text{Ł}u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

其中

$$\text{Ł}u \equiv -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

弱解的定义

当 $v \in C_0^\infty$ 时

$$B(u,v) = \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} + d^i(x) u) v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + c(x) uv] dx.$$

$$= \int Lu \cdot v \, dx$$

设 $f \in H^{-1}(\Omega)$. 如果 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$B(u,v) = < f, v >, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

则称 u 为问题(3.2)的一个弱解.

条件:

一致椭圆

$$(3.1)\quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \forall i,j = 1,2,\cdots,n; \quad \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2.$$

$$(3.3)\quad \begin{cases} 若 n \geq 3, 存在 \Lambda = C(n) 使得 \\ \sum_{i,j=1}^{n} ||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}(||d^i||_{L^n(\Omega)} + ||b^i||_{L^n(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{n/2}(\Omega)} \leq \Lambda; \\ 若 n = 2, 存在 p > 2 和 \Lambda = C(p) 使得 \\ \sum_{i,j=1}^{2} ||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}(||d^i||_{L^p(\Omega)} + ||b^i||_{L^p(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{p/2}(\Omega)} \leq \Lambda. \end{cases}$$

1. Lax-Milgram定理

Theorem

3.1 设H是一个实空间，$B: H \times H \to R$是一个有界,双线性,强制泛函， 即满足
(i) 存在常数$\alpha > 0$使得$B(u,v) \le \alpha ||u||||v||$， $\forall u, v \in H$;
(ii) $\forall v, u_1, u_2 \in H, a_1, a_2 \in R$, 均有
$B(v, a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 B(v, u_1) + a_2 B(v, u_2)$ 和
$B(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 B(u_1, v) + a_2 B(u_2, v)$;
(iii)存在常数$\beta > 0$, 使得$B(u,u) \ge \beta ||u||^2$， $\forall u \in H$.
如果f是H上的一个有界线性泛函，即$f \in H^*$， 则存在唯一的$u \in H$, 使得

$$B(u,v) = < f, v >, \quad \forall v \in H.$$

2. 能量估计

Theorem

3.2 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， $\partial\Omega$满足线段性质, $\L$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*， 则由它决定的$B(u,v)$是 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$是的一个双线性泛函， 并且存在正常数$C = C(n,\Omega,\L)$和$\mu = C(n,\Omega,\L)$使得

$$|B(u,v)| \leq C||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega),$$

$$B(u,u) \geq \frac{\lambda}{2}||Du||^2_{L^2(\Omega)} - \mu||u||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Corollary

3.1 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$Ł$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，则由它决定的$B(u,v)$是 $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$是的一个双线性泛函，并且存在正常数$C = C(n, Ł)$和$\bar{\mu} = C(n, Ł)$使得

$$|B(u,v)| \leq ||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

$$B(u,u) \geq \frac{\lambda}{2}||Du||_{L^2(\Omega)}^2 - \bar{\mu}||u||_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

3. 修正问题的弱解

Ω无界时 $\|Du\|_{L^2}$ 不能控制 $\|u\|_{H^1(\Omega)}$
于是要求 $\kappa-\bar{\mu}>0$

Theorem

3.3 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$Ł$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*，$\bar{\mu} = C(n, Ł)$是推论*3.1*中的数, 则对任意的$f \in H^{-1}(\Omega)$和任意的数$\kappa > \bar{\mu}$，*Dirichlet*问题

$$\begin{cases} Łu + \kappa u = f & in \quad \Omega, \\ u = 0 & on \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。

证明． 考虑算子$T = Ł + \kappa Id$，记$B_T(u, v), B_Ł(u, v)$ 分别是算子T和$Ł$决定的双线性泛函， 于是

$$B_T(u,v) = B_L(u,v) + \kappa \int_\Omega uvdx.$$

由推论3.1和定理2.13知，$B_T(u,v)$是$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$上的一个有界，双线性，强制泛函.
又$f \in H^{-1}(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^*$, 故由定理3.1， 存在唯一的$u \in H_0^1(\Omega)$使得

$$B_T(u,v) =< f, v >, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

这等价与说问题（3.6）在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。 $\square$

注: 定理3.3中Ω的可以为无界开集， 特别可以为R^n.

作业14:设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， $n \geq 3$, Ł的系数满足(3.1), 且$a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$, 则存在常数 $\delta = C(n,\lambda) > 0$, 使得当

$$\sum_{i=1}^{n}(||d^i||_{L^n(\Omega)} + ||b^i||_{L^n(\Omega)}) + ||c||_{L^{n/2}(\Omega)}) \leq \delta$$

时， 对任意$f \in H^{-1}(\Omega)$，Dirichlet问题（3.2）在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解。

注: 作业14的结论对于计算数学非常有用， 因为对于可积函数， 只要把区域分割得充分小， 作业14中的条件一定满足。另外， 如果选择$< u, v >= \int_\Omega Du \cdot Dvdx$作为$H_0^1(\Omega)$的内积， 则作业14对于无界连通区域也是成立的。

4. 利用Fredholm二择一定理

Theorem

3.4 设H是Hilbert空间，Id为恒等算子，$K: H \to H$为一个线性紧算子，K^*为其共轭算子，则

(i) 下面两个性质有且只有一个成立：

(a) $\forall f \in H$, 方程$u - Ku = f$在H中有唯一的解； 有唯一解

(b) $u - Ku = 0$方程在H中有非零的解；$\longrightarrow$ 只有零解

(ii) $dimN(Id - K) = dimN(Id - K^*) < \infty$， 此处记

$$N(A) = \{u \in H: \ Au = 0\};$$

(iii) $\forall f \in H$, 方程$u - Ku = f$在H中有解的充要条件是$f \in N(Id - K^*)^{\perp}$.

该定理的证明可见标准的泛函分析教科书， 或见[Evans: p.728-730].

下面利用定理3.4来研究问题(3.2)，为此需要选择合适的空间H和构造与Ł有关的紧算子。我们分四步完成。

(1) 定义Ł的共轭算子Ł^*:

$$< \text{Ł}u, v >=< u, \text{Ł}^* v >, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

因为对$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$, 有

由 $C_0^\infty(\Omega)$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密 以及 弱导数定义

由 a_{ij} 对称性

$$\begin{aligned}
< \text{Ł}u, v > &= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} + d^i(x) u) v_{x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + c(x) uv] dx \\
&= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_j} - d^i(x) v) u_{x_i} \\
&- \sum_{i=1}^n b^i(x) v_{x_i} u + (c(x) - \sum_{i=1}^n (d^i_{x_i} + b^i_{x_i})) uv] dx,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{Ł}^* v &= -\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x) v_{x_j} - d^i(x) v\Big)_{x_i} \\ &- \sum_{i=1}^{n} b^i(x) v_{x_i} + \Big[c(x) - \sum_{i=1}^{n}(d^i_{x_i} + b^i_{x_i})\Big] v. \end{aligned}$$

(2) $\text{Ł}u = f$的等价形式. 令

$$H = H^{-1}(\Omega), \qquad L_\kappa u = \text{Ł}u + \kappa u.$$

由定理3.3, 可选$\kappa > \bar{\mu}$使得$\forall g \in H$, 方程$L_\kappa u = g$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解；即$L_\kappa^{-1} : H \to H_0^1(\Omega) \subset H$ 存在, 记$u = L_\kappa^{-1} g$.

于是，

- 方程Ł$u = f$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow$
- 方程$L_\kappa u = f + \kappa u$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow$
- 方程$u = L_\kappa^{-1}(f + \kappa u)$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow$
- 方程$u - Ku = h$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解

其中

$$K = \kappa L_\kappa^{-1}, \quad h = L_\kappa^{-1} f = \frac{1}{\kappa} K f \in H_0^1(\Omega).$$

所以, $\forall f \in H$, 方程$Łu = f$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解$\Leftrightarrow$
$\forall h \in H_0^1(\Omega)$, 方程$u - Ku = h$在$H$中有唯一的解, 此解必属于$H_0^1(\Omega)$中. → $u = Ku + h$. $Ku \in H_0^1$, $h \in H_0^1 \Rightarrow u \in H_0^1$

(3) 验证$K: H \to H$为一个线性紧算子。 因为L_κ是线性的, 所以L_κ^{-1}也是线性的， 从而K亦是线性的.
任取$g \in H = H^{-1}(\Omega)$. 令$v = Kg$, 则$v \in H_0^1(\Omega)$ 且$L_\kappa v = \kappa g$.
由该式的定义， 特别有

$$B_{L_\kappa}(v, v) =< \kappa g, v >\leq |\kappa|||g||_H||v||_{H_0^1(\Omega)},$$

其中$B_{L_\kappa}(u, v)$是由算子L_κ确定的双线性泛函。

由推论3.1和定理2.13知，

$$B_{L_\kappa}(v,v) \geq \beta ||v|||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

对某个常数$\beta = C(n, \kappa - \mu, \lambda) > 0$成立。所以

$$||Kg||_{H_0^1(\Omega)} = ||v|||_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{|\kappa|}{\beta} ||g||_H, \quad \forall g \in H = H^{-1}(\Omega).$$

因此， K将$H^{-1}(\Omega)$中的有界集映为$H_0^1(\Omega)$中的有界集. 又由定理2.20，

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

所以 K将$H^{-1}(\Omega)$中的有界集映为$H^{-1}(\Omega)$中的列紧集. 也就是说$K : H \to H$为一个线性紧算子。

(4) 现在利用定理3.4.

(i) 下面两个性质必有一个成立：

(a) $\forall h \in= H^{-1}(\Omega)$, 方程$u - Ku = h$在$H^{-1}(\Omega)$中有唯一的解, 这可推出：方程$\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, 方程$\text{Ł}u = f$在$H_0^1(\Omega)$中有唯一的解；

(b) 方程$u - Ku = 0$在H中有非零的解, 这等价于方程$\text{Ł}u = 0$在$H_0^1(\Omega)$中有非零的解;

(ii) $dimN(Id - K) = dimN(Id - K^*) < \infty$. 而由定义，

$$N(Id - K) = \{u \in H_0^1(\Omega): \quad \text{Ł}u = 0\},$$

$$N(Id - K^*) = \{u \in H_0^1(\Omega): \quad \text{Ł}^*u = 0\}.$$

(iii) 如果$f \in H$, 对应$h = \frac{1}{\kappa}Kf$, 于是

- 方程Ł$u = f$在$H_0^1(\Omega)$中有解 $\Leftrightarrow$
- 方程在$u - Ku = h$在H有解 $\Leftrightarrow$
- $h \in N(Id - K^*)^{\perp} \Leftrightarrow < h, v >= 0, \forall v \in N(Id - K^*)$.

注意$v \in N(Id - K^*) \Leftrightarrow v = K^*v$, 所以

$$
\begin{aligned}
< h, v > &= < \frac{1}{\kappa}Kf, v >= \frac{1}{\kappa} < f, K^*v > \\
&= \frac{1}{\kappa} < f, v > = \frac{1}{\kappa}\int_{\Omega} fvdx.
\end{aligned}
$$

注意上式最后一项只有$f \in L^2(\Omega)$时才成立。

综上所述， 我们证明了

Theorem

3.5 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$Ł$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*， 则
(i) 下面两个性质有且只有一个成立：
  (a) $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解,
  (b) 对于$f = 0$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中有非零的解；
(ii) $dim(\{u \in H_0^1(\Omega): \ Łu = 0\}) = dim(\{u \in H_0^1(\Omega): Ł^*u = 0\}) < \infty$;
(iii) $\forall f \in L^2(\Omega)$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中存在弱解的充要条件是

$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \{u \in H_0^1(\Omega): \ Ł^*u = 0\}.$$

5. 弱解的极值原理

本小节证明： 在(3.1), (3.3)以及另外的条件

$$\int_\Omega [c(x)\phi(x) + \sum_{i=1}^{n} d^i(x)\phi_{x_i}]dx \geq 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0 \tag{3.7}$$

之下， 定理3.5 (i)(b)的情况不可能发生， 从而得到问题(3.2)弱解的存在唯一性。我们用的方法是著名的De Giorgi弱极值原理, 它依赖于下面的初等引理。

Lemma

3.1 设$F(t)$是$[k_0,\infty)$上的非负非增函数， 且存在常数$\gamma>0,\alpha>0,\beta>1$使得

$$F(h)\le \frac{\gamma}{(h-k)^\alpha}F(k)^\beta,\quad \forall h>k\ge k_0$$

则$F(k_0+d)=0$，其中

$$d=\gamma^{\frac{1}{\alpha}}F(k_0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}}2^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

证明. 考虑$k_s=k_0+d(1-\frac{1}{2^s})$, d先待定. 利用条件有

$$F(k_{s+1})\le \frac{\gamma 2^{\alpha(s+1)}}{d^\alpha}F(k_s)^\beta,\quad \forall s=0,1,2,3,\cdots,$$

取d如引理所示，则

$$
\begin{aligned}
F(k_1) &\leq \frac{\gamma 2^{\alpha(s+1)}}{d^\alpha} F(k_0)^\beta \\
&= 2^{\alpha - \frac{\alpha\beta}{\beta-1}} F(k_0) \\
&= \frac{F(k_0)}{r},
\end{aligned}
$$

其中$r = 2^{\frac{\alpha}{\beta-1}}$. 进一步，利用数学归纳法可证

$$
F(k_s) \leq \frac{F(k_0)}{r^s}, \quad \forall s = 0, 1, 2, 3, \cdots,
$$

令$s \to \infty$得证。 □

引进记号：

$$U^+(x)=max\{U(x),0\},\quad U^-(x)=min\{U(x),0\};$$

$$sup_\Omega u=inf\{M:\ (u-M)^+(x)=0\,a.e.\,x\in\Omega\},$$

$$sup_{\partial\Omega}u=inf\{M:\ (u-k)^+(x)\in H_0^1(\Omega),\forall k\geq M\};$$

$$inf_\Omega u=-sup_\Omega(-u),\quad inf_{\partial\Omega}u=-sup_{\partial\Omega}(-u).$$