图论第四次习题解答

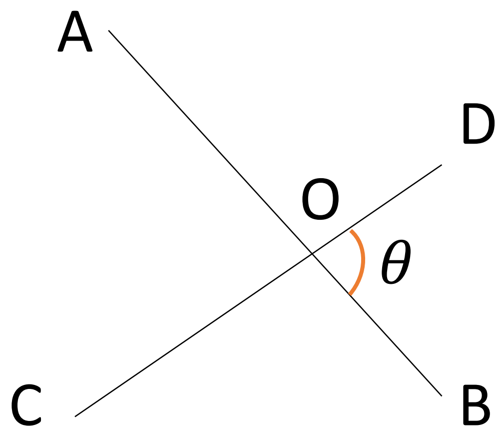
3.7 平面图G的顶点数不少于11个，则G^c不是平面图

- 由于G为平面图，故$\varepsilon(G) \le 3v(G) - 6$
- 若G^c也是平面图，则也有$\varepsilon(G^c) \le 3v(G^c) - 6$
- 因此有$\varepsilon(G) + \varepsilon(G^c) \le 3v(G) + 3v(G^c) - 12$
- 由于K_n的边数为$\frac{n(n-1)}{2}$，故由补图的定义可得，$v(G^c)$=$v(G)$=n，$\varepsilon(G) + \varepsilon(G^c)$= $\frac{n(n-1)}{2}$，代入上面的不等式得到
- $\frac{n(n-1)}{2} \le 6n - 12$，即$n^2 - 13n + 24 \le 0$
- 求解该不等式得到$n \le 10$，与题设矛盾，故G^c不是平面图。

3.8 S={$x_1,x_2,\ldots,x_n$}是平面上的点组成的集合，n>=3,S中任二点距离至少为1，则距离恰为1的顶对在S中最多3n-6对。

解：

以点集S构成V(G)，在距离恰为1的顶对之间连边构成E(G),下面用反证法证明图G是平面图：若G不是平面图，则存在两边除端点外有公共点，设为边AB、CD，公共点为O。



则不失一般性可以设OD<=1/2，OB<=1/2

$$BD = \sqrt{OD^2 + OB^2 - 2OD \times OB \times \cos\theta}$$

$$< \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times (-1)} = 1$$

与任两点距离至少为1矛盾，所以图G是平面图，因此$\varepsilon \le 3v - 6 = 3n - 6$，而图G的边数对应距离为1的顶对，所以距离恰为1顶对在S中最多3n-6对。

4.2 树上是否可能有两个不同的完备匹配？

- 不可能，若树有两个不同的完备匹配M_1，M_2，
- 则$M_1 \ominus M_2 \neq \emptyset$，子图$T[M_1 \ominus M_2]$的每个顶点的次数为2，存在圈，与$T$是树矛盾，因此树不可能有两个不同的完备匹配。

4.11 证明0-1矩阵中含所有1的线集合的最小阶数等于没有在同一线上1的最大个数

- 令X, Y分别表示矩阵的行与列的集合，当矩阵中行x_i与列y_i所在元素为1时，让x_i与y_i相邻，则该图为二分图
- 含所有1的线集合的最小阶数，为该图的最小覆盖数
- 没有在同一线上1的最大个数，为该图的最大匹配边数
- 由König定理可知结论成立

4.14 用König定理证明Hall定理

- 设M是二分图G的最大匹配，X与Y是G的顶划分
- 由于$(X-S)\cup N(S)$是G的一个覆盖，故下式为G的最小覆盖数
- $min_{s\subseteq X}\{(|X|-|S|)+|N(S)|\}=|X|-max_{s\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$，
- 因此由König定理可得，$|M|=|X|-max_{s\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$

- 必要性：M将X中的顶皆许配$\Rightarrow|M|=|X|$

$\Rightarrow max_{s\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}=0\ \Rightarrow\ |S|\le|N(S)|$

- 充分性：$|S|\le|N(S)|\Rightarrow max_{s\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}\le 0$

$\Rightarrow|M|\ge|X|$，故$|M|=|X|$，即M将X中的顶皆许配

4.17 写出树有完备匹配的充要条件并加以证明

- 证明：树有完备匹配的充要条件是对$\forall v \in V(G)$，$O(G-v)=1$
- 必要性：若树G有完备匹配，则$V(G)=$ 偶数，$V(G-v)=$ 奇数，故$G-v$的所有分支不可能都是偶分支，因此$O(G-v)\geq 1$，由Tutte定理即可得$O(G-v)=1$
- 充分性：对$\forall v \in V(G)$，$O(G-v)=1$，即$G-v$存在唯一的奇分支$C(v)$，令v 与$C(v)$在G中关联的边为$e(v)=vu$，显然当v确定后，u与$e(v)$都被唯一确定，且易知对u用同样方式得到的$e(u)=uv$。于是$M=\{e(v)\}$构成G的一个完备匹配。

4.19 求矩阵的最小权对角线

- 用矩阵中的最大元素13减去矩阵中的每一个元素，得矩阵A’，
- 则矩阵A的最小权的对角线⇔矩阵A’的最大权的对角线
- 将A’表示成二分图，利用KM算法求出矩阵A’的最大权对角线
- 得矩阵A的最小权对角线大小为30