PDE 第三至六周作业部分答案

1 第三，四周作业

1.1 8

分离变量考虑 u_i 的方程满足

$$\begin{cases} u^1_t = a^2\Delta u^1 = a^2 u^1_{xx} \\ u^1_y = u^1_z = 0 \\ u^1|_{t=0} = f(x) \\ u^1_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2_t = a^2\Delta u^2 = a^2 u^2_{yy} \\ u^2_z = u^2_x = 0 \\ u^2|_{t=0} = g(y) \\ u^2_t|_{t=0} = \varphi(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3_t = a^2\Delta u^3 = a^2 u^3_{zz} \\ u^3_x = u^3_y = 0 \\ u^3|_{t=0} = 0 \\ u^3_t|_{t=0} = \psi(z). \end{cases}$$

从而解得

$$u(x,y,z,t) = u^1(x,t) + u^2(y,t) + u^3(z,t).$$

$$= \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2}[(y-at) + g(y+at)] + \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at} \varphi(y)dy + \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at} \psi(z)dz$$

1.2 9

唯一性由能量估计可证，或参考第六周 28 题；方程解法采用升维法，注意新版本中 c 为常数，令

$$w(x,y,t) = u(x,t)v(y)$$

取 $v(y)$ 使 $v_y y + cv = 0, v(0) = 1$ 则方程变为

$$w_t - a^2(w_{xx} + w_{yy}) = v(y)[u_t - a^2 u_{xx} + cu] + uv_{yy} = vf.$$

解相应边界值条件下的二维波动方程,带回原方程解出 u，注意 v 不恒为 0.

1.3 12

不妨设边界值条件为 0，将 u 沿 y 轴作奇延拓，得到函数 v, 此时

$$v \in C^1(closure \qquad of \qquad R \times R_+) \bigcap C^2(R \backslash \{0\} \times R_+)$$

然后用通常的能量积分即证。(注意这时 v 在 y 轴上不是 C^2 的，但由于 v 在 y 轴上为 0，所以分部积分到 y 轴上的部分为 0，不影响能量等式。) 也可以直接用能量积分去证明

2 第五，六周作业

2.1 25(2)

先作变换 $v(x,t) = u(x,t) - \frac{B}{l}x$ 齐次化方程，分离变量 $v(x,t) = X(x)T(t)$ 得到特征函数系的方程

$$X\frac{dT}{dt} - a^2\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{T'}{a^T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

这里解 X 时自然推出 $\lambda \geq 0$, 且解得 $X_n(x) = sin\beta_n x, \beta_n = \frac{n\pi}{l}, \lambda_n = \beta_n^2$.
令 $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$. 代入边界条件得

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)(T_n'' + \lambda_n a^2 T_n) = A,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n'(0) = 0.$$

解得

$$T_n'' + \lambda_n a^2 T_n = A_n, T_n(0) = T_n'(0) = 0,$$

$$A_n = \frac{\int_0^l A sin\beta_n x dx}{\int_0^l sin\beta_n x dx} = \frac{2A(1-(-1)^n}{n\pi}.$$

从而 $T_n(t) = \frac{A_n}{a^2\beta_n^2} + C_1 cos(a\beta_n t) + C_2 sin(a\beta_n t)$. 解得 $C_2 = 0$

$$C_2 = 0, n = 2k; C_2 = \frac{4Al^2}{a^2n^2\pi^2}, n = 2k+1.$$

整理得

$$u(x,t) = \frac{B}{l}x + \sum_{n=1,odd}^{\infty} \frac{4Al^2}{a^3n^3\pi^2}(1 - cos\frac{an\pi}{l})sin\frac{n\pi}{l}.$$

2.2 第一题

方法一：注意第三边界值条件为

$$-u_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) = 0, u_x(l,t) + \alpha_2 u(l,t) = 0, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0.$$

(只有这种情况下才有解得唯一性，此时极大值原理使解的最大值在区域边界或底部上，且去最大值时外法向导数严格正，若在边界上由第三边界条件知最大值为 0，从而 u 非正，对-u 类似，从而解唯一。)

由于方程是线性的，为了证明唯一性，对两解做差只需证明当边界值为 0 时方程只含有 0 解。取试验函数 $\phi = u_t$ 得

$$\int_0^s\int_0^l u_{tt}u_t dxdt - a^2\int_0^s\int_0^l u_{xx}u_t dxdt = 0.$$

注意边界值和初值均为 0，有

$$\int_0^s\int_0^l u_{tt}u_t dxdt = \int_0^s\int_0^l (\frac{u_t^2}{2})_t dxdt = \int_0^l \frac{u_t^2(l,s)}{2}dx,$$

$$\int_0^s\int_0^l u_{xx}u_t dxdt = \int_0^s u_x u_t|_{x=0}^{x=l}dt - \int_0^s\int_0^l u_{xt}u_x dxdt,$$

有第三边界值条件

$$\int_0^s u_x u_t|_{x=0}^{x=l}dt = \int_0^s -\alpha_2 u(l,t)u_t(l,t) - \alpha_1 u(0,t)u_t(0,t)ds = -\frac{\alpha_2 u(l,s)^2 + \alpha_1 u(l,0)^2}{2},$$

$$\int_0^s\int_0^l u_{xt}u_x dxdt = \int_0^l \frac{u_x^2(x,s)}{2}dx,$$

整理得

$$\int_0^l (u_t^2(x,s) + a^2u_x^2(x,s))dx + a^2(\alpha_2 u(l,s)^2 + \alpha_1 u(l,0)^2) = 0.$$

由 $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. 即证。

方法二：直接令 $G(s) = \int_0^l (u_t^2(x,s)^2 + a^2u_x(x,s)^2)dx$ 注意 $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. 类似上面得到一个 Gronwall 型不等式，从而有解得唯一性。

方法三：可做变换将方程化为第二边界值条件，但方程变为 $u_t - a_x^u + cu = 0$, 其中 $c = c(x) \geq 0$ 同理可证。

2.3 补充题

$$\int_{R^n} u\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_n} = \lim_{s\to 0}\int_{R^n\setminus B_s(0)} u\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_n} = \lim_{s\to 0}(\int_{\partial B_s(0)} u\frac{\partial\phi}{\partial x_1}v_n dS - \int_{R^n\setminus B_s(0)}\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial\phi}{\partial x_1})$$

$$= \lim_{s\to 0} - \int_{R^n\setminus B_s(0)}\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}.$$

其中 $\forall\phi\in C_0^\infty, v_n$ 为外发向量在 x_n 方向的投影,第一个极限与第三个等号是因为

$$|\lim_{s\to 0}\int_{B_s(0)} u\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_n}| \leq \lim_{s\to 0}\int_{B_s(0)} |x|^{-r}\|\phi\|_{C^2} = \lim_{s\to 0}\int_0^s t^{n-1-r}ds = 0,$$

$$|\lim_{s\to 0}(\int_{\partial B_s(0)} u\frac{\partial\phi}{\partial x_1}v_n dS| \leq \lim_{s\to 0}\int_{\partial B_s(0)} s^{-r}\|\phi\|_{C^1} = 0.$$

同理可证

$$\lim_{s\to 0} - \int_{R^n\setminus B_s(0)}\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \lim_{s\to 0}(\int_{\partial B_s(0)} \phi\frac{\partial u}{\partial x_n}v_1 dS - \int_{R^n\setminus B_s(0)}\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial\phi}{\partial x_1})$$

$$= \lim_{s\to 0}\int_{R^n\setminus B_s(0)} \phi\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n} = \int_{R^n}\phi\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n}.$$

从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n} = r(r+2)|x|^{-r-4}x_1x_n, x\neq 0; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n} = \forall, x = 0.$