选作习题：设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 s 个互异的数(实数或复数), 设 $l_1, \cdots, l_s$ 为 s 个正整数. 证明以下 $l := l_1 + \cdots + l_s$ 个函数在 $\mathbb{R}$ 上线性无关。

$$\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t} & \cdots, & t^{l_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t} & \cdots, & t^{l_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\ \cdots, & \cdots & \cdots, & \cdots, \\ e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t} & \cdots, & t^{l_s-1}e^{\lambda_s t}. \end{array} \tag{1}$$

(提示：可考虑对 s 用归纳法.)

证明：我们对 s 用归纳法来证明结论。 显然当 $s = 1$ 时， 结论成立。 假设结论对正整数 $s-1$ 成立 $(s \geq 2)$。我们来证明结论对 s 也成立。

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 s 个互异的数(实数或复数), 设 $l_1, \cdots, l_s$ 为 s 个正整数. 记 $l := l_1 + \cdots + l_s$. 以下我们来证明表达式 (1) 中的 l 函数在 $\mathbb{R}$ 上线性无关。

令式 (1) 中的 l 个函数的任意一个线性组合恒为零得

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + p_s(t)e^{\lambda_s t} \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

这里 $p_i(t)$ 为 $l_i - 1$ 次多项式。在等式 (2) 两边同除以 $e^{\lambda_s t}$ 得

$$p_1(t)e^{\mu_1 t} + \cdots + p_{s-1}(t)e^{\mu_{s-1} t} + p_s(t) \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

这里 $\mu_i = \lambda_i - \lambda_s, i = 1, \cdots, s-1$ 为 $s-1$ 互异且非零的常数。 对等式 (4) 求导并稍加组合得

$$[\mu_1 p_1(t) + p_1'(t)]e^{\mu_1 t} + \cdots + [\mu_{s_1} p_{s-1}(t) + p_{s-1}'(t)]e^{\mu_{s-1} t} + p_s'(t) \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

这里我们应该注意一个事实：对等式 (4) 作一次求导运算后，指数函数 $e^{\mu_i t}$ 的组合系数函数(它们是多项式)的次数不变，因为 μ_i 非零。 再注意到 $p_s(t)$ 为至多 $l_s - 1$ 次多项式。因此对等式 (4) 经过作 l_s 次求导运算后得

$$q_1(t)e^{\mu_1 t} + \cdots + q_{s-1}(t)e^{\mu_{s-1} t} \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

这里 $q_i(t)$ 均为多项式且次数与 $p_i(t)$ 相同。等式 (5) 和归纳假设表明 $q_i(t) \equiv 0, i = 1, \cdots, s-1$. 由此可知 $p_i(t) \equiv 0, i = 1, \cdots, s-1$. 再根据等式 (2) 可知 $p_s(t) \equiv 0$. 这就证明了函数组 (1) 线性无关。 证毕。