《微分方程1》第十四讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年12月27日

Theorem

方程 $y' = \sin(xy)$ 的每个解$y(x)$ 均满足

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \quad 且 \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0.$$

证: 由于方程的每个解都是偶函数, 故只需证明两个极限中的一个即可. 以下我们证明 (*) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$. 若$y(0) = 0$, 则根据解的唯一性知$y(x) \equiv 0$. 式(*)成立. 设$y(0) \neq 0$, 则解$y(x)$ 恒正或者恒负, 因为解曲线不能与x 轴相交. 由于$y(x)$ 是解时, $-y(x)$ 也是解. 故可设$y(0) > 0$.

为清晰计，我们建立如下三个断言.

断言1: 存在 $\bar{x} > 0$，使得$y(\bar{x}) = \bar{x}$.

断言2: $0 < y(x) < x, \forall x > \bar{x}$.

断言3: 存在充分大的正数 $C > 0$，使得$0 < y(x) < \frac{C}{x}, \forall x > \bar{x}$.

根据断言3，我们立刻得到所要证明的结论$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

以下依次证明断言1，断言2 和断言3.

定性分析，续2

证断言1: 要证存在$\bar{x} > 0$，使得$y(\bar{x}) = \bar{x}$. 反证. 若不然，则 $y(x) > x, \forall x > 0$. 对任意$x > x_1 > 0$,

$$y(x) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x} y'(s)ds = \int_{x_1}^{x} \sin[sy(s)]ds.$$

考虑函数$xy(x)$. 由于

$$[xy(x)]' = y(x) + xy'(x) = y(x) + x\sin[xy(x)]$$

$$> x[1 + \sin(xy(x))] \geq 0, \quad \forall x > 0,$$

故函数$z(x) := xy(x)$ 在$(0, +\infty)$ 上严格单调上升. 于是

定性分析，续3

$$y(x)-y(x_1)=\int_{x_1}^{x}\sin[sy(s)]ds$$

$$=\int_{x_1}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z'(s)}=\int_{x_1}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{y(s)+s\sin[z(s)]}.$$

现断言

$$\frac{\sin[z(s)]z'(s)}{y(s)+s\sin[z(s)]}\leq\frac{\sin[z(s)]z'(s)}{y(s)},\qquad\forall s>0$$

这只要分情形 $\sin[z(s)]\geq 0$ 和情形 $\sin[z(s)]<0$ 讨论即可. 根据上述断言得

$$y(x)-y(x_1)\leq\int_{x_1}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{y(s)}=\int_{x_1}^{x}s\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)}.$$

回忆积分第二中值定理：考虑积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$，这里$f(x)$，$g(x)$ 假设在$[a,b]$ 上连续(实际上可积就行)，则

(i) 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上非负且上升，则存在$\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

(ii) 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上非负且下降，则存在$\eta \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\eta g(x)dx.$$

□

对积分

$$\int_{x_1}^{x} s\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)}$$

应用上述第二积分中值定理结论(i)得

$$\int_{x_1}^{x} s\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)} = x\int_{\xi}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)} = x\int_{z_1}^{z_2}\frac{\sin z}{z}dz, (*)$$

这里$\xi \in [x_1, x]$, $z_1 = \xi y(\xi)$, $z_2 = xy(x)$. 回忆广义积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz$$

收敛. 这是著名的Dirichlet 积分, 积分值为$\frac{\pi}{2}$.

因此对于$\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在$M_1 > 0$ 充分大，使得

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin z}{z} dz < \frac{1}{2}, \quad \forall z_1, z_2 \geq M_1. \quad (**)$$

由于$z(x) = xy(x) > x^2 \to +\infty$，故存在充分大的$M_2 > 0$，使得$z(x) \geq M_1$，$\forall x \geq M_2$．于是对于$\forall x > x_1 \geq M_2$，根据式(*)和(**) 得

$$y(x) - y(x_1) \leq x \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin z}{z} dz < \frac{x}{2}, \quad \forall x \geq M_2.$$

固定x_1，取$x > x_1$ 充分大，可使得$y(x) < y(x_1) + \frac{x}{2} < x$．此与假设$y(x) > x$，$\forall x > 0$ 相矛盾．断言1得证． $\square$

断言2：要证 $0 < y(x) < x,\ \forall x > \bar{x}$. 对$\forall x > \bar{x}$,

$$y(x) - y(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{x} y'(s)ds = \int_{\bar{x}}^{x} \sin[sy(s)]ds.$$

若$\sin[sy(s)] \equiv 1,\ \forall s \in [\bar{x}, x]$，则

$$sy(s) \equiv 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad 或 \quad y(s) \equiv \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{s}, \quad \forall s \in [\bar{x}, x].$$

于是一方面

$$y'(s) = \sin[sy(s)] \equiv 1,$$

但是另一方面

$$y'(s) = \frac{-2k\pi - \frac{\pi}{2}}{s^2}.$$

这是一个矛盾. 因此必存在$s_0 \in [\bar{x}, x]$, 使得$\sin[s_0 y(s_0)] < 1$. 由此得

$$y(x) - y(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{x} \sin[sy(s)]ds < \int_{\bar{x}}^{x} 1ds = x - \bar{x}.$$

注意$y(\bar{x}) = \bar{x}$. 故$y(x) < x$, $\forall x > \bar{x}$. 断言2得证. $\square$

证断言3：要证存在充分大的正数$C>0$，使得$0<y(x)<\frac{C}{x}$，$\forall x>\bar{x}$. 取充分大的正数$C>\bar{x}^2$，则

$$y(\bar{x})=\bar{x}<\frac{C}{\bar{x}}.$$

由连续函数的性质可知存在$\delta>0$，使得

$$y(x)<\frac{C}{x},\quad \forall x\in(\bar{x},\bar{x}+\delta).$$

以下证明，可取某个适当的$C>\bar{x}^2$，使得

$$y(x)<\frac{C}{x},\quad \forall x\in(\bar{x},+\infty).\quad (**)$$

假设上述不等式(**)对任意正数$C > \bar{x}^2$ 均不成立，则必存在$x_1 > \bar{x}$，使得

$$y(x) < \frac{C}{x}, \quad \forall x \in (\bar{x}, x_1), \quad y(x_1) = \frac{C}{x_1}.$$

记$\tau(x) := \frac{C}{x} - y(x)$，则$\tau(x) > 0$, $\forall x \in (\bar{x}, x_1)$，$\tau(x_1) = 0$. 于是$\tau'(x_1) \le 0$. 此即

$$-\frac{C}{x_1^2} - y'(x_1) \le 0 \quad 即 \quad \sin[x_1 y(x_1)] + \frac{C}{x_1^2} \ge 0.$$

注意$C = x_1 y(x_1)$，我们就得到

$$\sin C + \frac{C}{x_1^2} \ge 0.$$

上式中正常数$C > \bar{x}^2$ 是任意取的. 现取$C = 2m\pi - \frac{\pi}{2}$, m 为充分大的正整数，则有

$$-1 + \frac{C}{x_1^2} = -1 + \frac{x_1 y(x_1)}{x_1^2} = -1 + \frac{y(x_1)}{x_1} \geq 0.$$

由上式立刻得到$y(x_1) \geq x_1$, $x_1 > \bar{x}$. 此与断言2的结论相矛盾. 断言3得证. 从而定理得证. $\square$

例: 考虑 Cauchy 问题$y' = y^2$, $y(0) = y_0$. 不难得到显式解

$$\phi(x, y_0) = \frac{y_0}{1 - xy_0}.$$

记这个解的最大存在区间为$J_{y_0} = (\alpha(y_0), \beta(y_0))$. 不难看出

$$J_{y_0} = \begin{cases} (\frac{1}{y_0}, +\infty), & y_0 < 0, \\ (-\infty, +\infty), & y_0 = 0, \\ (-\infty, \frac{1}{y_0}), & y_0 > 0. \end{cases}$$

例子续

等价地说,

$$\alpha(y_0)=\begin{cases}\frac{1}{y_0}, & y_0<0,\\ -\infty, & y_0\geq 0.\end{cases},$$

$$\beta(y_0)=\begin{cases}\frac{1}{y_0}, & y_0>0,\\ +\infty, & y_0\leq 0.\end{cases}$$

定义：设$g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. (i) 称函数$g(u)$ 在点u_0 处下半连续，如果$\liminf_{u\to u_0} g(u)\geq g(u_0)$. 等价定义：如果对任意$L<g(u_0)$, 存在$\delta>0$, 使得

$$L\leq g(u),\quad \forall u:|u-u_0|<\delta.$$

(ii) 称$g(u)$ 在点u_0 处上半连续，如果$\limsup_{u\to u_0} g(u)\leq g(u_0)$. 等价定义：如果对任意$U>g(u_0)$, 存在$\delta>0$, 使得

$$U\geq g(u),\quad \forall u:|u-u_0|<\delta.$$

不难证明，上例中的$\alpha(y_0)$ 是上半连续，而$\beta(y_0)$ 是下半连续.

<u>定理</u>: 考虑方程 $y' = f(x, y, \lambda)$, 其中 $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, Ω 为 $\mathbb{R}^{n+2}$ 的开区域, f, f_y 于 Ω 上连续. 记 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 为 Cauchy 问题 $y' = f(x, y, \lambda)$, $y(\xi) = \eta$ 的饱和解, 其最大存在区间记作 $J(\xi, \eta, \lambda) = (\alpha(\xi, \eta, \lambda)), \beta(\xi, \eta, \lambda))$. 再记

$$D := \Big\{(x, \xi, \eta, \lambda), x \in J(\xi, \eta, \lambda), (\xi, \eta, \lambda) \in \Omega\Big\} \subset \mathbb{R}^{n+3}.$$

则以下结论成立.

1) 解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 作为四元函数在 D 上连续;

2) D 是 $\mathbb{R}^{n+3}$ 中的开集;

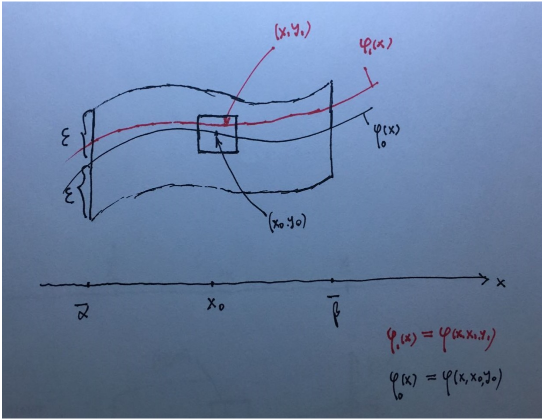
3) 函数 $\alpha(\xi, \eta, \lambda)$ 在 Ω 上半连续, $\beta(\xi, \eta, \lambda)$ 在 Ω 下半连续.

<u>引理</u>: 考虑方程 $y' = f(x, y)$, 其中 $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的开区域, f, f_y 于 Ω 上连续. 记 $\phi(x, x_0, y_0)$ 为 Cauchy 问题 $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的饱和解, 其最大存在区间记作 $J_0 = (\alpha_0, \beta_0)$. 则对任意子闭区间 $\bar{J} = [\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subset (\alpha_0, \beta_0)$, 以及任意小的正数 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意满足 $|x_1 - x_0| < \delta$, $\|y_1 - y_0\| < \delta$ 的点 (x_1, y_1), 以下结论成立.

1) 解 $\phi(x, x_1, y_1)$ 至少在 $\bar{J}$ 上存在;

2) $\|\phi(x, x_1, y_1) - \phi(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon$, $\forall x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$.

解关于初值的连续性基本引理图示



解关于初值的连续性基本引理示意图

定理: 考虑方程 $y' = f(x, y, \lambda)$, 关于映射 f 的假设同上述定理, 再补充一个假设: $f_\lambda(x, y, \lambda)$ 于 Ω 上连续, 解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 以及开区域 $D \subset \mathbb{R}^{n+3}$ 的意义同上, 则以下结论成立.

(i) 饱和解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 作为四元函数在开区域 D 上连续可微;

(ii) 三对二阶混合偏导数 $\phi_{x\xi}$ 和 $\phi_{\xi x}$, $\phi_{x\eta}$ 和 $\phi_{\eta x}$, 以及 $\phi_{x\lambda}$ 和 $\phi_{\lambda x}$ 连续, 从而对应相等, 即 $\phi_{x\xi} = \phi_{\xi x}$, $\phi_{x\eta} = \phi_{\eta x}$, $\phi_{x\lambda} = \phi_{\lambda x}$;

(iii) 偏导数 ϕ_ξ, ϕ_η 和 ϕ_λ 分别是以下三个Cauchy 问题的解,

1. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z,\ z(\xi) = -f(\xi,\eta,\lambda),\quad (z = \phi_\xi);$
2. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z,\ z(\xi) = E,\quad (z = \phi_\eta);$
3. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z + b(x,\xi,\eta,\lambda),\ z(\xi) = 0,\quad (z = \phi_\lambda);$

其中$A(x,\xi,\eta,\lambda) := f_y(x,\phi,\lambda)$, $b(x,\xi,\eta,\lambda) := f_\lambda(x,\phi,\lambda)$, E 代表n 阶单位矩阵.

注：上述三个Cauchy 问题中的线性方程组均称作原方程$y' = f(x,y,\lambda)$ 关于解$y = \phi(x,\xi,\eta,\lambda)$ 的变分方程(variational equations).

结论(iii)的证明

<u>证</u>: 假设定理中的结论(i)和(ii)成立. 我们来证明结论(iii), 即证明三个偏导数ϕ_ξ, ϕ_η 和ϕ_λ 分别是上述三个Cauchy 问题的解. 我们只证明ϕ_ξ 由Cauchy 问题(1)唯一确定. 其余两个偏导数的确定方程可类似推导. 因为$\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 是解, 所以

$$\phi_x = f(x, \phi, \lambda), \ \phi(\xi, \xi, \eta, \lambda) = \eta.$$

注意上式中的第一个等式中, $\phi = \phi(x, \xi, \eta, \lambda)$. 对上述两个等式关于$\xi$ 求偏导数得

$$\phi_{x\xi} = f_y(x, \phi, \lambda)\phi_\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\phi(\xi, \xi, \eta, \lambda) = 0.$$

证明续

由于

$$0=\frac{\partial}{\partial\xi}\phi(\xi,\xi,\eta,\lambda)=\phi_x(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi}+\phi_\xi(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi},$$

而

$$\phi_x(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi}=f(x,\phi,\lambda)\Big|_{x=\xi}=f(\xi,\eta,\lambda).$$

于是 $\phi_\xi(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi}=-f(\xi,\eta,\lambda)$. 又由于$\phi_{x\xi}=\phi_{\xi x}$, 故

$$[\phi_\xi]_x=f_y(x,\phi,\lambda)\phi_\xi,\ \phi_\xi(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi}=-f(\xi,\eta,\lambda).$$

这表明 $z=\phi_\xi$ 是Cauchy 问题(1)的解. 证毕. □

例子

菲利波夫习题1067: 记$\phi(t,\mu)$ 为Cauchy 问题$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}+\mu te^{-x}$, $x(1)=1$ 的解, 求

$$\left.\frac{\partial}{\partial\mu}\phi(t,\mu)\right|_{\mu=0}.$$

解: 由于$\phi(t,\mu)$ 是上述Cauchy 问题的解, 故

$$\phi_t=\frac{\phi}{t}+\mu te^{-\phi},\ \phi(1,\mu)=1.$$

对上述两个等式关于μ 求偏导数得到

$$\phi_{t\mu}=\frac{\phi_\mu}{t}+te^{-\phi}+\mu te^{-\phi}\phi_\mu,\quad \phi_\mu(1,\mu)=0.$$

例子续1

于上式中令$\mu=0$, 得

$$\phi_{t\mu}=\frac{\phi_\mu}{t}+te^{-\phi},\quad \phi_\mu(1,\mu)=0,\quad \mu=0.$$

记$z(t)=\phi_\mu(t,\mu)\Big|_{\mu=0}$, 则 $z(t)$ 是如下Cauchy 问题的唯一解.

$$z'=\frac{z}{t}+te^{-\phi(t,0)},\quad z(1)=0.\quad (*)$$

为了求解(*), 我们需要先求解$\phi(t,0)=\varphi(t,\mu)\Big|_{\mu=0}$. 为此需求解原 Cauchy 问题当$\mu=0$ 时的解, 即求解 $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}$, $x(1)=1$.

很容易得到其解为$x(t)=t$, 即$\phi(t,0)=t$.

例子续2

于是Cauchy 问题(*) 为

$$z' = \frac{z}{t} + te^t, \quad z(1) = 0.$$

这是一阶线性方程的Cauchy 问题. 根据求解公式得

$$z(t) = t\left[z(1) + \int_1^t \frac{1}{\tau}\tau e^{-\tau} d\tau\right] = t\int_1^t e^{-\tau} d\tau = t(e^{-1} - e^{-t}).$$

于是所求的导数为

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mu}\phi(t, \mu)\right|_{\mu=0} = t(e^{-1} - e^{-t}).$$

解答完毕.

例二

求解菲利波夫习题1070. 设

$$\begin{cases} x = \phi(t, \xi, \eta), \\ y = \psi(t, \xi, \eta), \end{cases}$$

是方程组

$$\begin{cases} x' = xy + t^2, & x(1) = \xi, \\ y' = -\frac{y^2}{2}, & y(1) = \eta, \end{cases}$$

的解. 求

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(t, \xi, \eta)\right|_{(\xi,\eta)=(3,2)}.$$

解: **Step I.** 导出$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$ 的确定方程组. 对解$(\mathsf{x},\mathsf{y})=(\phi,\psi)$ (这里略去独立变量t) 所满足的方程组, 以及及其初值条件

$$\begin{cases} \phi'=\phi\psi+\mathsf{t}^2, & \phi(1,\xi,\eta)=\xi, \\ \psi'=-\frac{\psi^2}{2}, & \psi(1,\xi,\eta)=\eta. \end{cases}$$

关于η 求导得

$$(*)\quad \begin{cases} \phi_\eta'=\phi_\eta\psi+\phi\psi_\eta, & \phi_\eta(1,\xi,\eta)=0, \\ \psi_\eta'=-\psi\psi_\eta, & \psi_\eta(1,\xi,\eta)=1. \end{cases}$$

Step II. 求解$\phi(t,\xi,\eta)$ 和$\psi(t,\xi,\eta)$ 当$(\xi,\eta)=(3,2)$ 时的表达式. 也就是求解方程组

$$\begin{cases} x' = xy + t^2, & x(1) = 3, \\ y' = -\frac{y^2}{2}, & y(1) = 2. \end{cases}$$

由第二个方程及其初值条件不难求得$y=\frac{2}{t}$. 将其带入第一个方程得$x'=\frac{2x}{t}+t^2$, $x(1)=3$. 根据一阶线性方程的求解公式得$x(t)=t^2\left(3+\int_1^t s^2\frac{1}{s^2}ds\right)=t^2(t+2)$. 这表明

$$\begin{cases} \phi(t,3,2) = t^2(t+1), \\ \psi(t,3,2) = \frac{2}{t}. \end{cases}$$

Step III. 求 $\left.\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(t,\xi,\eta)\right|_{(\xi,\eta)=(3,2)}$. 在方程组(*) 即

$$(*)\quad \begin{cases} \phi'_\eta = \phi_\eta\psi + \phi\psi_\eta, & \phi_\eta(1,\xi,\eta) = 0, \\ \psi'_\eta = -\psi\psi_\eta, & \psi_\eta(1,\xi,\eta) = 1. \end{cases}$$

中，令$(\xi,\eta) = (3,2)$，并记

$$\begin{cases} u(t) = \phi_\eta(t,3,2), \\ v(t) = \psi_\eta(t,3,2), \end{cases}$$

则得到关于u, v 的方程组及其初值条件

$$\begin{cases} u' = t^2(t+2)v + \frac{2u}{t}, & u(1) = 0, \\ v' = -\frac{2v}{t}, & v(1) = 1. \end{cases}$$

容易解出上述方程组的第二个方程得$v(t)=t^{-2}$. 再将其带入第一个方程得$u'=\frac{2u}{t}+(t+2)$, $u(1)=0$. 再由一阶线性方程的求解公式得$u(t)=t^2\ln t+2t^2-2t$. 于是所求的偏导数为

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(t,\xi,\eta)\Big|_{(\xi,\eta)=(3,2)}=t^2\ln t+2t^2-2t.$$

解答完毕.

考虑初值问题 $y' = f(x, y)$，$y(x_0) = y_0$，这里 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. 假设在平面开域 Ω 上满足标准假设. 记 $y(x)$ 为初值问题的解，其最大存在区间记作 (α, β). 希望(i) 对区间 (α, β) 作估计. 例如判断 α, β 是否有限或无穷. 当它们有限时，求出具体的数 α_1, α_2，β_1, β_2，使得 $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$，$\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$. (ii) 对解 $\phi(x)$ 作估计，即寻求具体的函数 $u(x)$，$v(x)$，使得 $v(x) \leq y(x) \leq u(x)$，$\forall x \in J$，这里区间 $J \subset (\alpha, \beta)$ 是函数 $u(x)$，$v(x)$ 和 $y(x)$ 共同存在的区间. 参阅: (1) Wolfgang Walter, Ordinary Differential equations, Springer Verlag, 1998, p. 89-93. (2) 丁同仁李承治，常微分方程教程，第二版，p. 89-98.

右侧严格微分不等式情形

Theorem

定理一：(i) 若函数$u(\cdot) \in C^1(J)$, $J = [x_0, b)$ 满足微分不等式

$$u'(x) > f(x, u(x)), \quad \forall x \in J, \quad u(x_0) \geq y_0,$$

则 $y(x) < u(x)$, $\forall x \in (x_0, b) \cap (x_0, \beta)$.

(ii) 若函数$v(\cdot) \in C^1(J)$, $J = [t_0, b)$ 满足

$$v'(x) < f(x, v(x)), \quad \forall x \in J, \quad v(x_0) \leq x_0,$$

则$v(x) < y(x)$, $\forall x \in (x_0, b) \cap (x_0, \beta)$.

右上解和右下解

Definition

定理一中的函数$u(x)$ 和$v(x)$ 分别称为初值问题$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的一个右上解(an upper solution to the right) 和一个右下解(a lower solution to the right).

Theorem

定理二：将定理一中的严格不等号改为相应非严格不等号，结论同样成立. 即

(i) 若函数$u(\cdot) \in C^1(J)$, $J = [x_0, b)$ 满足微分不等式

$$u'(x) \geq f(x, u(x)), \quad \forall x \in J, \quad u(x_0) \geq x_0,$$

则 $y(x) \leq u(x)$, $\forall x \in (x_0, b) \cap (x_0, \beta)$.

(ii) 若函数 $v(\cdot) \in C^1(J)$, $J = [t_0, b)$ 满足微分不等式

$$v'(x) \leq f(x, v(x)), \quad \forall x \in J, \quad v(x_0) \leq x_0,$$

则 $v(x) \leq y(x)$, $\forall x \in (x_0, b) \cap (x_0, \beta)$.

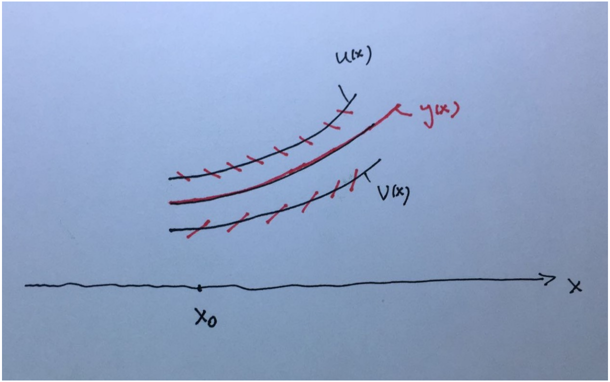
非严格右上解和右下解

Definition

定理二中的函数$u(x)$ 和$v(x)$ 也分别称为初值问题$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的一个右上解和右下解. 有时称为非严格的右上解和右下解, 以示区别于定理一中的右上解右下解.

考虑右上解的几何意义. 不等式 $u'(x) > f(x, u(x))$, $x \in [x_0, b)$ 表明, 在 $u(x)$ 的函数曲线 $\Gamma_u = \{(x, u(x), x \in J)\}$ 上, 解的斜率小于函数 $u(x)$ 的斜率. 因此随着变量 x 的增加, 解曲线族从曲线 Γ_u 的上方穿过 Γ_u 进入其下方. 对于右下解, 也有类似的几何解释.

右上解右下解图示



右上解和右下解的示意图

Theorem

<u>定理三</u>: (i) 若函数$u(\cdot) \in C^1(J)$, $J = (a, x_0]$ 满足微分不等式

$$u'(x) < f(x, u(x)), \quad \forall x \in J, \quad u(x_0) \geq y_0,$$

则$y(x) < u(x)$, $\forall x \in (a, x_0) \cap (\alpha, x_0)$.

(ii) 若函数$v(\cdot) \in C^1(J)$, $J = (a, x_0]$ 满足

$$v'(x) > f(x, v(x)), \quad \forall x \in J, \quad v(x_0) \leq y_0,$$

则$v(x) < y(x)$, $\forall x \in (a, x_0) \cap (\alpha, x_0)$.

左上解和左下解

Definition

定理三中的函数$u(x)$ 和$v(x)$ 分别称为初值问题$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的一个左上解(an upper solution to the left) 和一个左下解(a lower solution to the left).

Theorem

定理四：定理三中的严格不等号改为相应非严格不等号，则定理三的结论同样成立.

Definition

定理四中的函数$u(x)$ 和$v(x)$ 也分别称为初值问题$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的(非严格)左上解和(非严格)左下解.

定理一证明：证(i). 先证存在$\delta > 0$，使得$u(x) > y(x)$，$\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$. 因为若$u(x_0) > y_0 = y(x_0)$，则由连续函数性质知这样的$\delta$ 存在. 若$u(x_0) = y_0 = y(x_0)$，则$u'(x_0) > f(x_0, u(x_0)) = y'(x_0)$，即$u'(x_0) > y'(x_0)$. 故这样$\delta$ 存在. 现证$u(x) > y(x)$，$\forall x \in (x_0, b) \cap (x_0, \beta)$. 反证. 若不然则$\exists x_1 \in (x_0, b) \cap (x_0, \beta)$，使得$y(x) < u(x)$，$\forall x \in (x_0, x_1)$，$y(x_1) = u(x_1)$. 由此不难证明$y'(x_1) \geq u'(x_1)$. 另一方面$u'(x_1) > f(x_1, u(x_1)) = f(x_1, y(x_1)) = y'(x_1)$. 这就导出一个矛盾. 说明结论(i) 成立. 结论(ii)的证明类似. 定理得证. $\square$

证：考虑Cauchy问题$y'=f(x,y)+\lambda$，$y(x_0)=y_0$，其解记作$y(x,\lambda)$，最大存在区间记为$J_\lambda=(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)$．对$\forall x_1\in(x_0,b)\cap(x_0,\beta)$，根据解对初值连续性的基本引理可知，存在$\delta>0$，使得当$|\lambda|<\delta$时，解$y(x,\lambda)$至少在闭区间$[x_0,x_1]$上存在．于是根据定理一可知对于$\lambda\in(-\delta,0)$，

摄动法

$$y(x,\lambda)<u(x),\quad \forall x\in(x_0,x_1]\subset J_\lambda\cap(x_0,b).$$

任意固定 $x \in (x_0, x_1]$，在上式令 $\lambda \to 0^-$，即得 $y(x, 0) \le u(x)$.
这表明 $y(x) \le u(x)$, $\forall x \in [x_0, x_1]$. 注意 x_1 是 $(x_0, b) \cap (x_0, \beta)$ 中任意一点，故 $y(x) \le u(x)$, $\forall x \in [x_0, b) \cap [x_0, \beta)$. 定理二的结论(i)得证. 结论(ii)类似证明. 定理二得证. $\square$

Theorem

设函数$f(x,y)$ 和$g(x,y)$ 在平面开域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上满足标准假设，并且$f(x,y) \le g(x,y), \forall (x,y) \in \Omega$. 记$\phi(x)$ 和$\psi(x)$ 分别是如下两个Cauchy 问题的解，

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$
$$y' = g(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

解$\phi(x)$ 和$\psi(x)$ 的共同存在区间记作(a,b)，则

$$\text{(i)}\ \phi(x) \le \psi(x), \quad \forall x \in [x_0, b),$$
$$\text{(ii)}\ \psi(x) \le \phi(x), \quad \forall x \in (a, x_0].$$

Proof.

证: 由假设条件$f(x,y) \le g(x,y)$ 知对于任意$x \in (a,b)$

$$\psi'(x) = g(x,\psi(x)) \ge f(x,\psi(x)), \quad \psi(x_0) = y_0.$$

根据微分不等式定理可知$\psi(x)$ 在区间$[x_0,b)$ 上是初值问题 $(*)\ y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$, 的右上解, 故不等式(i)成立. 再注意到 $\psi(x)$ 在区间$[x_0,b)$ 上是问题(*)的左下解, 故不等式(ii)成立. 定理得证. □

例一：记 Cauchy 问题 $(*)\ y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1$，的饱和解为 $y(x)$，其右侧最大存在区间记作$[0, \beta)$. 证明β 有限，并给出β 的上下界.

解：考虑 $v' = v^2,\ v(0) = 1$. 解之得$v(x) = \frac{1}{1-x},\ x \in [0, 1)$. 显然$v(x)$ 是问题(*) 的一个右下解，故

$$\frac{1}{1-x} \le y(x), \quad \forall x \in [0, \beta) \cap [0, 1).$$

断言$\beta \le 1$. 反证. 若不然，即$\beta > 1$. 于是由上述不等式的两边令$x \to 1^-$ 得$+\infty \le y(1)$. 这是个矛盾. 因此β 有限且$\beta \le 1$.

显然$\beta > 0$. 这是一个平凡下界. 以下求β 的一个非平凡下界. 为此考虑 Cauchy 问题$(**)$ $u' = 1 + u^2$, $u(0) = 1$. 解之得 $u(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4})$. 显然 $u(x)$ 是问题(*) 的一个右上解，于是

$$y(x) \le \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad \forall x \in [0, \beta) \cap [0, \frac{\pi}{4}). \quad (***)$$

例子续2

现断言$\beta \geq \frac{\pi}{4}$. 反证. 假设$\beta < \frac{\pi}{4}$. 由饱和解的端点性质知饱和解 $y(x)$ 在$x = \beta$ 的左侧无界. 因$y'(x) = x^2 + y(x)^2 > 0$, 故解$y(x)$ 在其存在区间上严格单调上升. 因此$y(x) \to +\infty$, 当$x \to \beta^-$ 时. 在不等式(***) 两边令$x \to \beta^-$ 取极限得 $+\infty \leq \tan\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$. 这是个矛盾. 于是我们得到$\beta$ 的一个下界$\beta \geq \frac{\pi}{4}$. 综上得 $\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 1$.

以下对β 作更精确的估计. (参见Wolfgang Walter, Ordinary Differential Equations, Springer Verlag, 1998, page 92-93). 已证 $v(x)=\frac{1}{1-x}$ 是问题(*)的右下解. 为改进β 的下界. 尝试如下形式的右上解

$$u_c(x)=\frac{1}{1-cx},\quad x\in\left[0,\frac{1}{c}\right),$$

其中$c>1$ 待定. 令$u_c'(x)\geq x^2+u_c^2(x)$, 即

$$\frac{c}{(1-cx)^2}\geq x^2+\frac{1}{(1-cx)^2}\quad 即\quad c-1\geq [x(1-cx)]^2.$$

熟知二次函数$x(1-cx)$ 在$x=\frac{1}{2c}$ 处达最大值$\frac{1}{2c}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4c}$.

于是令 $c-1\ge\frac{1}{16c^2}$，即

$$16c^2(c-1)\ge 1. \quad (\Delta)$$

这表明当 c 满足条件(Δ) 时，$u_c(x)$ 是右上解. 故

$$y(x)\le\frac{1}{1-cx},\quad \forall x\in[0,\beta)\cap\left[0,\frac{1}{c}\right).$$

因此 $\beta\ge\frac{1}{c}$. 由此可得到 β 的更精确的下界，其中 c 满足条件 (Δ). 例如取 $c=\frac{n+1}{n}$ 代入(Δ) 得 $16(n+1)^2\ge n^3$. 于是可取 $n=16$，即取 $c=\frac{17}{16}$ 时，条件(Δ) 成立.

例子续5

这样我们得到了β 更好的下界

$$\beta \geq \frac{16}{17} = 0.941\cdots.$$

为作比较，原下界为$\beta \geq \frac{\pi}{4} = 0.785\cdots.$

用类似的方法可以得到关于β 更精确的估计$\beta \in [b_0, b_1]$，其中

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = 0.96981065393 \begin{bmatrix} 13 \\ 04 \end{bmatrix}.$$

解答完毕.

例二：考虑Cauchy 问题$y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, 其饱和解记作$y(x)$, 其最大存在区间记作(α, β). (i) 证明解$y(x)$ 是奇函数, 从而$\alpha = -\beta$. (ii) 估计β, 即给出β 的上下界.

解：(i) 证明$y(x)$ 是奇函数. 令$z(x) = -y(-x)$, 则$z(0) = 0$ $= y(0)$, 并且$z'(x) = y'(-x) = (-x)^2 + y^2(-x) = x^2 + z^2(x)$. 这表明$z(x)$ 是解且和解$y(x)$ 有相同初值. 根据解的唯一性知$z(x) \equiv y(x)$). 即$y(-x) = -y(x)$, $y(x)$ 是奇函数.

(ii) 求 β 的一个上界. 为此我们来寻找问题的一个右下解. 对任意正数 $p \in (0, \beta)$, 考虑Cauchy 问题 $v' = p^2 + v^2$, $v(p) = 0$. 解之得解 $v(x) = p \cdot \tan[p(x-p)]$, $x \in [p, p + \frac{\pi}{2p}]$. 显然 $v(x)$ 是区间 $[p, p + \frac{\pi}{2p}) \cap [p, \beta)$ 上的右下解. 于是

待定β

$$p \cdot \tan[p(x-p)] \le y(x), \forall x \in \left[p, p + \frac{\pi}{2p}\right) \cap [p, \beta). \qquad (*)$$

断言: $\beta \le p + \frac{\pi}{2p}$, $\forall p \in (0, \beta)$. 反证. 若不然, 则 $\beta > p + \frac{\pi}{2p}$. 对不等式(*)两边令 $x \to [p + \frac{\pi}{2p}]^-$ 得 $+\infty \le y(p + \frac{\pi}{2p})$. 矛盾. 故断言成立. 由断言知

$$\beta \le \inf\left\{p + \frac{\pi}{2p}, p > 0\right\} = \sqrt{2\pi} = 2.4957\cdots.$$

(iii) 求β 的一个下界. 显然$\beta > 0$ 是一个平凡的估计. 下面来求一个正的下界. 已证$\beta \le \sqrt{2\pi}$. 考虑初值问题$u' = 2\pi + u^2$, $u(0) = 0$. 解之得

待定β!!

$$u(x) = \sqrt{2\pi}\tan\left(\sqrt{2\pi}x\right), \quad x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right).$$

显然$u(x)$ 是一个右上解. 故

$$y(x) \le \sqrt{2\pi}\tan(\sqrt{2\pi}x), \quad x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right) \cap [0, \beta).$$

由此不难看出$\beta \ge \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

(iv) 求β 下界的另一个方法. 考虑问题$u' = \beta^2 + u^2$, $u(0) = 0$. 解之得

$$u(t) = \beta \tan(\beta x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2\beta}\right).$$

显然$u(t)$ 是一个右上解. 故

$$y(x) \le \beta \tan(\beta x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2\beta}\right) \cap [0, \beta).$$

由此可知$\beta \ge \frac{\pi}{2\beta}$, 即$\beta \ge \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 综上得$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \le \beta \le \sqrt{2\pi}$. 解答完毕.

例三. 考虑 Cauchy 问题 $y' = x^4 - y^4$, $y(0) = 0$, 其饱和解记作$\phi(x)$. 证明

(i) 解 $\phi(x)$ 是奇函数;

(ii) 解 $\phi(x)$ 的最大存在区间为$(-\infty, +\infty)$;

(iii) 解 $\phi(x)$ 满足

$$0 < \phi(x) < x, \quad \forall x > 0,$$

$$x < \phi(x) < 0, \quad \forall x < 0.$$

解: (i) 可用例二中的方法证明$\phi(x)$ 是奇函数. 细节略.

例三续1

证(ii)和(iii). 由于$\phi(x)$ 是奇函数, 故解$\phi(x)$ 的最大存在区间是对称的, 即为$(-\beta,\beta)$. 为了估计β, 先来构造一个右下解. 显然 $v(x)\equiv 0$ 是右下解. 因为

$$v'(x)\equiv 0 < x^4 = f(x,0), \quad \forall x>0,$$

这里 $f(x,y):=x^4-y^4$. 因此 $\phi(x)>0$, $\forall x\in(0,\beta)$.

例三续2

再来构造一个右上解. 由观察知 $u(x)=x$ 是一个右上解. 这是因为 $u'(x)=1>0=f(x,x)$, $\forall x>0$. 因此

$$0<\phi(x)<x, \quad x\in(0,\beta). \quad (*)$$

若$\beta<+\infty$, 则$\phi(x)$ 在$x=\beta$ 左侧无界. 此与式(*)相矛盾. 故$\beta=+\infty$. 因此得

$$0<\phi(x)<x, \quad \forall x\in(0,+\infty).$$

根据上述不等式可知, $0<\phi(-x)<-x$, $\forall x<0$. 由于$\phi(x)$ 是奇函数, 故

$$0>\phi(x)>x, \quad \forall x<0.$$

结论(ii)和(iii)得证. 解答完毕. □

习题一. 菲利波夫习题集, 题1064, 1065, 1066, 1068.

注: 以下四道题源于菲利波夫习题集1136-1139. 这里略作文字方面的修改.

习题二. 证明Cauchy 问题$dy/dx = 2 + \sin x - y^2$, $y(0) = 1$ 解$y(x)$ 的右侧最大存在区间为$[0, +\infty)$. 进一步证明存在两个正常数$b > a > 0$, 使得$a \le y(x) \le b$, $\forall x \in [0, +\infty)$, 并给出具体的这样的正数$a$ 和b.

习题三. 证明Cauchy 问题$dy/dx = 2x + 1/y,\ y(0) = 1$ 解的右侧最大存在区间为$[0, +\infty)$. 进一步在$[0, +\infty)$ 上构造该问题的一个右上解和一个右下解.

习题四. 证明Cauchy 问题$dy/dx = x - y^2,\ y(4) = 2$ 的解$y(x)$右侧最大存在区间为$[4, +\infty)$ 且满足$\sqrt{x} - 0.07 < y(x) < \sqrt{x}$, $\forall x > 4$.

习题五. 考虑Cauchy 问题$dy/dx = x - y^2$, $y(0) = 0$. 记解为$y(x)$, 解的最大存在区间为(α, β).

i) 证明$\beta = +\infty$ 且α 有限.

ii) 对α 作估计, 即给出α 的一个上界和一个下界。

iii) (选作部分) 证明: $\lim_{x\to+\infty}[y(x) - \sqrt{x}] = 0$.

Happy New Year 2018