答疑

1.(第一次补充习题2) $G=\{ae_l \mid a\in S\}$, $I=\{b\in S \mid b^2=b\}$

定义 $G\times I \xrightarrow{f} S$

$$(ae_l,\ b)\longmapsto ae_lb$$

(1) f是一个单射，若 $a_1e_lb_1=a_2e_lb_2$，则有

$a_1e_lb_1e_l=a_2e_lb_2e_l$ $\left(b_1e_l=b_1(b_1\overset{b_1\text{的右逆}}{b_{1,r}})=b_1^2b_{1,r}=e_l\right)$

$\Rightarrow a_1e_l=a_2e_l$，因为$G$是一个群 a_1e_l，a_2e_l均有左逆

$(a_1)_re_l$，$(a_2)_re_l$，则 $b_1=b_2$.

(2) f是一个满射，$\forall a\in S$，$f(ae_l,a_ra)=ae_la_ra$

$=aa_ra=e_la=a$.

关键观察：S不是一个群，但G是一个群，e_l右幺元，

a_re_l右逆元. 所以a_re_l也是左逆元 $(a_re_l)\cdot(ae_l)=e_l$.

2.(第一次补充习题5) $N_G(P)$ P为主对角均为1的

n阶上三角阵全体. 设 $A\in N_G(P)$ $I_n+E_{ij}\in P$ $i<j$

(E_{ij}是n阶矩阵，只有一个非零元在(i,j)位置).

$A(I_n+E_{ij})=(I_n+X)A$ X是严格上三角阵.

则 $AE_{ij}=XA$ 令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

$AE_{ij} = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}j\text{列}}}{\alpha_i}, 0, \cdots, 0)$

即有 $XA = (0, \cdots, 0, \alpha_i, 0 \cdots 0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} X\alpha_1 &= 0 \\ &\vdots \\ X\alpha_{j-1} &= 0 \\ X\alpha_j &= \alpha_i \\ X\alpha_{j+1} &= 0 \\ &\vdots \\ X\alpha_n &= 0. \end{aligned}$$

检查 $X\alpha_j = \alpha_i$ $i<j$ 取 $j=n, i=n-1$. 则 α_{n-1} 的最后一分量 $=0$ 令 $j=n-1, i=n-2$ 得 α_{n-2} 的最后两个分量 $=0, \cdots, \Rightarrow A$ 是一个上三角阵，反之 A 是一个上三角阵，则 $AE_{ij} = XA$ $\exists X \in P$. $i<j \Rightarrow A \in N_G(P)$.