关于微分不等式的习题解答解答 杨利军 Jan. 08, 2018

注：以下四道题源于菲利波夫习题 1136-1139 . 这里略作文字方面的修改.

习题1: 证明 Cauchy 问题

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sin x - y^2, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

解 $y(x)$ 的右侧最大存在区间为 $[0, +\infty)$. 进一步证明存在两个正常数 $b > a > 0$, 使得

$$a \le y(x) \le b, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

并给出具体的这样的正数 $a$ 和 $b$.

证明：由于 $-1 \le \sin x \le 1$, 我们考虑两个比较方程 $du/dx = 3 - u^2$ 和 $dv/dx = 1 - v^2$ 是有益的。显然 Cauchy 问题 $du/dx = 3 - u^2$， $u(0) = \sqrt{3}$ 的常数解 $u(x) = \sqrt{3}$, 它是 Cauchy 问题 (1) 的右上解。而 Cauchy 问题 $dv/dx = 1 - v^2$， $v(0) = 1$ 的常数解 $v(x) = 1$, 它是 Cauchy 问题 (1) 的右下解。因此 Cauchy 问题 (1) 解的右侧最大存在区间必为 $[0, +\infty)$，即 $\beta = +\infty$, 并且

$$1 \le y(x) \le \sqrt{3}, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

证毕。

习题2: 证明 Cauchy 问题

$$dy/dx = 2x + 1/y, \quad y(0) = 1 \tag{2}$$

解的右侧最大存在区间为 $[0, +\infty)$. 进一步在 $[0, +\infty)$ 上构造该问题的一个右上解和一个右下解。

解：显然求解 Cauchy 问题 $dv/dx = 2x$, $v(0) = 1$ 即可得到问题 (2) 的一个右下解 $v(x) = 1 + x^2$. 而 Cauchy 问题 $\frac{du}{dx} = 2x + \frac{1}{1+x^2}$, $u(0) = 1$ 的解 $u(x) = 1 + x^2 + \arctan x$ 因此 Cauchy 问题 (2) 解的右侧最大存在区间为 $[0, +\infty)$. 并且关于问题的解 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有如下估计

$$1 + x^2 < y(x) < 1 + x^2 + \arctan x, \quad \forall x \in (0, +\infty),$$

解答完毕.

习题3: 证明 Cauchy 问题

$$dy/dx = x - y^2, \quad y(4) = 2 \tag{3}$$

的解 $y(x)$ 右侧最大存在区间为 $[4, +\infty)$ 并且满足 $\sqrt{x} - 0.07 < y(x) < \sqrt{x}, \forall x > 4$.

证明: 只要说明 $u(x) = \sqrt{x}$ 和 $v(x) = \sqrt{x} - 0.07$ 分别是解 $y(x)$ 的右上解和右下解即可。 因为 $u(4) = 2$ 且

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 = f(x, u(x)), \quad \forall x \geq 4,$$

这里 $f(x, y) = x - y^2$. 故函数 $u(x)$ 是右上解。 我们来说明 $v(x)$ 是有下解。显然 $v(4) = 2 - 0.07 < 2 = y(4)$. 经简单计算可得

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(x, v(x)) = 0.14\sqrt{x} - 0.0049.$$

显然

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0.14\sqrt{x} - 0.0049, \quad \forall x \geq 4,$$

因为上述不等式的左边关于 $x$ 单调下降， 而左边单调上升。 在起点 $x = 4$ 处, 左边等于 $0.25$, 右边为 $0.28 - 0.0049$. 不等式成立。证毕。 ∎

习题4: 考虑 Cauchy 问题

$$dy/dx = x - y^2, \quad y(0) = 0, \tag{4}$$

其解记为 $y(x)$, 解的最大存在区间为 $(\alpha, \beta)$.

i) 证明 $\beta = +\infty$ 且 $\alpha$ 有限.

ii) 对 $\alpha$ 作估计, 即给出 $\alpha$ 的一个上界和一个下界。

iii) (选作) 证明： $\lim_{x \to +\infty} [y(x) - \sqrt{x}] = 0$.

(注：结论 iii) 的证明虽然有相当的难度，但所用工具不超出微积分和微分不等式相关知识。)

解: 记 $f(x, y) = x - y^2$. i) 证 $\beta = +\infty$.

略去右端函数 $f$ 中的项 $-y^2$, 得到容易求解的 Cauchy 问题 $du/dx = x$, $u(0) = 0$。其解 $u(x) = x^2/2$ 显然是问题 (4) 的右上解。另一方面, 易证 $v(x) = 0$ 是问题 (4) 右下解, 因为

$$v'(x) = 0 < x = f(x, v(x)), \quad x > 0.$$

因此我们有 $0 < y(x) < x^2/2, \forall x > 0$. 由此便可得到 $\beta = +\infty$.

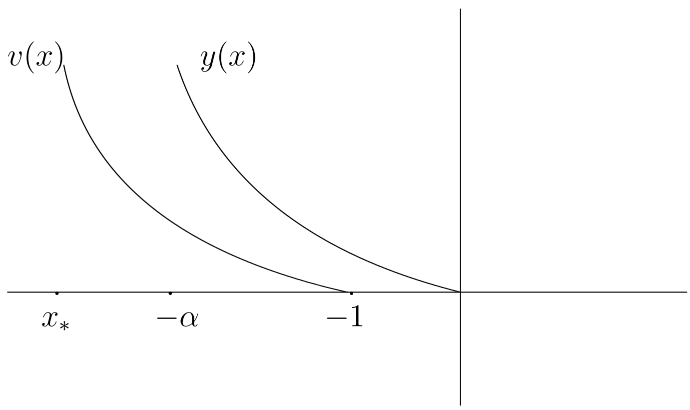
ii) 证 $\alpha$ 有限， 再对 $\alpha$ 作估计. 若 $\alpha \geq -1$, 则 $\alpha$ 自然有限. 设 $\alpha < -1$. 记 $v(x)$ 为 Cauchy 问题

$$dv/dx = -1 - v^2, \quad v(-1) = 0 \tag{5}$$

的解. 不难求出 $v(x) = -\tan(x+1)$. 由于

$$v'(x) = -1 - v(x)^2 > x - v(x)^2 = f(x, v(x)), \quad x < -1.$$

另一方面，$v(-1) = 0 < y(-1)$. 我们注意 $y(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时。这是因为 $y'(x) = x - y^2(x) < 0$, 当 $x < 0$ 时。因此 $v(x)$ 是初值问题 (4) 的左下解, 即 $v(x) < y(x), \forall x < -1$. 见下图.



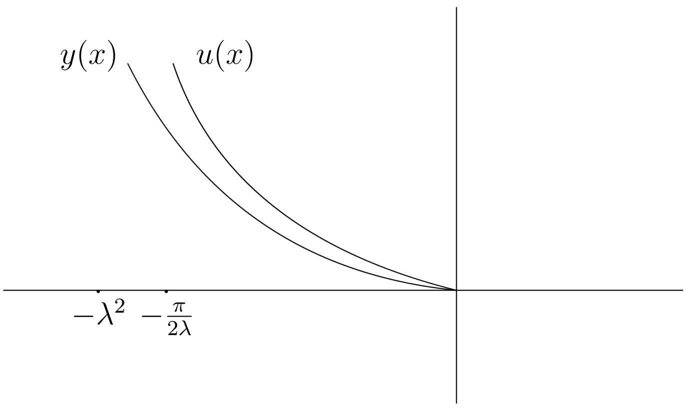

另一方面, 我们不难看出 $v(x)$ 的左侧最大存在区间为 $(x_*, -1]$, 其中 $x_* := -1 - \pi/2$. 由图可知 $x_* \leq \alpha$. 因此 $\alpha$ 有限.

我们来估计 $\alpha$. 我们已经有了一个下界估计 $x_* = -1 - \pi/2$, 即 $x_* \le \alpha$. 另一方面我们还有一个自然的上界 $\alpha < 0$. 但以下我们将通过构造初值问题 (4) 的左侧上下解来对 $\alpha$ 作更精确的估计。

先构造左上解. 由于 $y'(x) = x - y(x)^2 < 0, \forall x < 0$, 因此 $y(x)$ 在 $(\alpha, 0)$ 上严格单调下降. 根据饱和解在端点处的性质可知 $\lim_{x\to\alpha^+} y(x) = +\infty$. 记 $\alpha = -\lambda^2 < 0$, $\lambda > 0$. 考虑初值问题

$$du/dx = -\lambda^2 - u^2, \quad u(0) = 0, \quad x \in (-\lambda^2, 0). \tag{6}$$

不难求得上述问题的解 $u(x) = -\lambda \tan(\lambda x)$, 其左侧最大存在区间为 $(-\pi/(2\lambda), 0)$. 显然 $u(x)$ 是左上解, 即 $y(x) < u(x)$, $x \in (-\lambda^2, 0) \cap (-\pi/(2\lambda), 0)$, 见下图.




因此我们得到 $-\lambda^2 \le -\pi/(2\lambda)$, 即 $\lambda \ge (\pi/2)^{1/3}$. 由此我们得到 $\alpha$ 的一个上界:

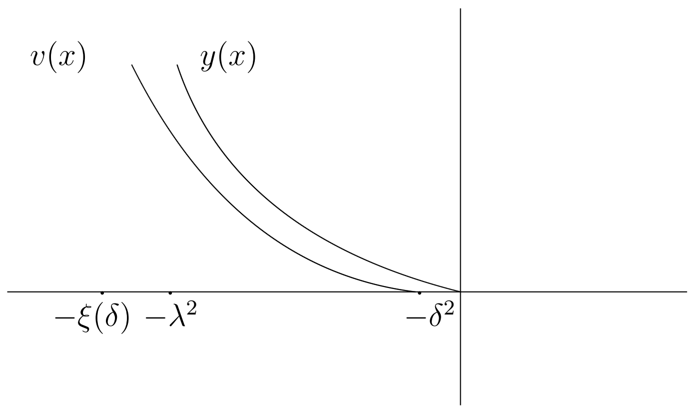
$$\alpha = -\lambda^2 \le -(\pi/2)^{2/3}.$$

下面我们来构造左下解. 对于 $\delta \in (0, \lambda)$, 我们考虑初值问题

$$dv/dx = -\delta^2 - v^2, \quad v(-\delta^2) = 0, \quad x < -\delta^2, \tag{7}$$

不难求得上述问题的解 $v(x) = -\delta \tan(\delta(\delta^2 + x))$, 其左侧最大存在区间为 $(-\xi(\delta), -\delta^2)$, 其中 $\xi(\delta) = \delta^2 + \pi/(2\delta)$. 另一方面, 由于 $v'(x) = -\delta^2 - v(x)^2 > x - v(x)^2 = f(x, v(x))$, 当 $x < -\delta^2$

时， 且 $v(-\delta^2)=0<y(-\delta^2)$. 因此 $v(x)$ 是 Cauchy 问题 (4) 在 $x<-\delta^2$ 上的左下解, 即 $v(x)<y(x), \forall x\in(-\lambda^2,-\delta^2)\cap(-\xi(\delta),-\delta^2)$, 解 $y(x)$ 和左下解 $v(x)$ 如下图.




于是对于 $\forall\,\delta\in(0,\lambda)$, 均有 $-\xi(\delta)<-\lambda^2$, 即 $-\xi(\delta)$ 是 $\alpha$ 的一个下界. 为了得到比较大的下界, 我们考虑 $\sup\{-\xi(\delta),\delta\in(0,\lambda)\}=-\inf\{\xi(\delta),\delta\in(0,\lambda)\}$. 令 $\xi'(\delta)=2\delta-\pi/(2\delta^2)=0$, 得 $\delta=\delta_0:=(\pi/4)^{1/3}$. 注意 $\delta_0\in(0,\lambda)$, 因为 $\delta_0=(\pi/4)^{1/3}<(\pi/2)^{1/3}<\lambda$. 这样我们就得到 $\alpha$ 的一个下界 $-\xi(\delta_0)=-3(\pi/4)^{2/3}$. 综上所述, 我们得到如下 $\alpha$ 的估计:

$$-3(\pi/4)^{2/3}\le\alpha\le-(\pi/2)^{2/3}.$$

iii) (选作) 证明 $\lim_{x\to+\infty}[y(x)-\sqrt{x}]=0$.

很容易证明 $u(x)=\sqrt{x}$ 是初值问题 (4) 在 $[0,+\infty)$ 上的右上解. 这是因为 $u(0)=0=y(0)$, 并且

$$u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0=f(x,u(x)),\quad \forall\,x\in(0,+\infty).$$

以下我们将证明，当 $c>0$ 充分大时， $v(x)=\sqrt{x-c}$ 是初值问题 $dy/dx=x-y^2, y(0)=0$ 在 $[x_c,+\infty)$ 上的右下解， 这里 $x_c:=c+\frac{1}{4c^2}$. 于是我们得到

$$\sqrt{x-c}<y(x)<\sqrt{x},\quad \forall\,x\in(x_c,+\infty).$$

由此进一步得到

$$\sqrt{x-c}-\sqrt{x}<y(x)-\sqrt{x}<0,\quad \forall\, x\in(x_c,+\infty).$$

根据极限的两面夹法则立即得到结论 $\lim_{x\to+\infty}[y(x)-\sqrt{x}]=0$.

我们来证明 $v(x)=\sqrt{x-c}$ 是右下解. 简单计算得

$$v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-c}},\quad f(x,v(x))=x-(x-c)=c.$$

令 $v'(x)<f(x,v(x))$，得 $x>x_c=c+\frac{1}{4c^2}$. 另一方面，由于 $v(x_c)=\frac{1}{2c}$ 当 $c>0$ 充分大时可以任意小， 而初值问题 $dy/dx=x-y^2$, $y(0)=0$ 的解 $y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上大于零且严格单调上升。因此当 $c>0$ 充分大时，$v(x_c)\le y(x_c)$. 这就证明了， 当 $c>0$ 充分大时，$v(x)=\sqrt{x-c}$ 是初值问题 $dy/dx=x-y^2$, $y(0)=0$ 在 $[x_c,+\infty)$ 上的右下解。证毕.

注1：在结论 iii) 的证明中，我们从右上解 $u(x)=\sqrt{x}$ 作适当修改得到了右下解 $v(x)=\sqrt{x-c}$. 这实际上是构造上下解一个常用方法, 即对已知的上（下）解作适当的修改而得到具有相同形状的下（上）解。 例如，对于 Cauchy 问题 $dy/dx=x^2+y^2$, $y(0)=1$, 去掉 $x^2$ 并求解所得 Cauchy 问题，容易得到一个右下解 $v(x)=\frac{1}{1-x}$. 根据这个右下解，我们可以尝试构造形如

$$u(x)=\frac{1}{1-cx},\quad x\in(0,1/c)$$

的右上解, 这里 $c>1$ 是一个可调节的参数. 详见 page 92, Example, Wolfgang Walter, ”Ordinary Differential Equations”, Springer, 1998.

注2： 构造右下解的另外两个可能性。

(1) 考虑 $v(x)=\sqrt{x}-\frac{c}{x}$. 我们希望取适当的正数 $c>0$, 使得 $v(x)$ 是右下解。简单计算可知

$$v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2},\quad f(x,v(x))=\frac{2c}{\sqrt{x}}-\frac{c^2}{x^2}.$$

令 $v'(c)<f(x,v(x))$ 得 $x>x_c$, 这里

$$x_c:=\left(\frac{2c^2+2c}{4c-1}\right)^{2/3}.$$

为使得 $v(x)$ 是右下解，还必须让 $v(x)$ 满足一个初值条件. 为此考虑值 $v(x_c)$.

$$v(x_c)=\left(\frac{2c^2+2c}{4c-1}\right)^{-2/3}\frac{(3-2c)c}{4c-1}.$$

由此可见，当 $c \geq 3/2$ 时，我们有 $v(x_c) \leq 0 \leq y(x_c)$. 若取 $c = 3/2$， 则 $x_c = (3/2)^{2/3}$. 于是

$$\sqrt{x} - \frac{3}{2x} < y(x) < \sqrt{x}, \quad \forall x > (3/2)^{2/3}.$$

根据极限的两面夹法则可知 $\lim_{x\to+\infty}[y(x) - \sqrt{x}] = 0$.

(2) 考虑 $v(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. 简单计算得

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^{3/2}}, \quad f(x, v(x)) = 2 - \frac{1}{x}.$$

显然 $v'(x) < f(x, v(x)), \forall x > 1$. 另一方面， $v(1) = 0 < y(1)$. 因此 $v(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ 是在区间 $[1, +\infty)$ 上的右下解。 于是

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} < y(x) < \sqrt{x}, \quad \forall x > 1.$$

根据极限的两面夹法则可知 $\lim_{x\to+\infty}[y(x) - \sqrt{x}] = 0$.

注3: 证明结论 iii) 的另一方法。记 $\eta(x) = \sqrt{x} - y(x)$, 则 $\eta(0) = 0$, $\eta(x) > 0$, $\forall x > 0$. 我们要证 $\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = 0$. 考虑 $\eta'(x)$.

$$\eta'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - (x - y(x)^2) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \eta(x)(\sqrt{x} + y(x)).$$

注意 $\eta(x)y(x) > 0, \forall\, x \in (0, +\infty)$, 我们就得到

$$\eta'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} - \eta(x)\sqrt{x}. \quad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

我们来解这个微分不等式。将上式写作

$$\eta'(x) + \sqrt{x}\eta(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

于上式两边同乘以指数函数(可看做积分因子) $e^{\int_0^x \sqrt{s}ds} = e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}$ 得

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}\eta(x)\right) \leq \frac{e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{x}}, \quad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

对上式在 $[0, x]$ 上积分并注意到 $\eta(0) = 0$, 我们就得到

$$e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}\eta(x) \leq \int_0^x \frac{e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}ds}{2\sqrt{s}}, \quad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

于是

$$0<\eta(x)\le e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}\int_0^x \frac{e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}ds}{2\sqrt{s}},\quad \forall\, x\in(0,+\infty).$$

利用 L'Hôspital 法则, 我们不难求得上述不等式右边的极限是零, 当 $x\to+\infty$. 这样我们就证明了结论: $\lim_{x\to+\infty}\eta(x)=0$. 证毕.

注4: 对于 $x_0\ge 0$, $y_0\ge 0$, 可以类似证明, 初值问题 $dy/dx=x-y^2$, $y(x_0)=y_0$ 解 $y(t)$ 的右侧最大存在区间为 $[x_0,+\infty)$, 且满足 $\lim_{x\to+\infty}(y(x)-\sqrt{x})=0$.