答疑

1. 三次多项式在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域 K

设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\in\mathbb{Q}[x]$ 作变量代换 $y=x+\frac{a}{3}$，得 $f(x)=y^3+py+q$，因此，考虑 $f(x)=x^3+px+q$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域，设 $f(x)=0$ 有三个根 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{C}$. 有 $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=K\subseteq\mathbb{C}$

令 $\delta=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\alpha_1^2&\alpha_2^2&\alpha_3^2\end{pmatrix}=\det(A)$

$\delta^2=\det(AA^T)=\det\begin{pmatrix}3&0&\sum\alpha_i^2\\0&\sum\alpha_i^2&\sum\alpha_i^3\\\sum\alpha_i^2&\sum\alpha_i^3&\sum\alpha_i^4\end{pmatrix}=-4p^3-27q^2$（韦达定理）

δ^2 是 f 的判别式，刻划是否有重根. $\delta\in\mathbb{Q}$

Case-1 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Q}$ 或 $\alpha_1\in\mathbb{Q}$, α_2,α_3 是 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 的共轭根，$g(x)$ 满足 $f(x)=(x-\alpha_1)g(x)$ $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 不可约，则 $K=\mathbb{Q}(\alpha_2)$ $[K:\mathbb{Q}]=2$.

Case-2. $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 不可约. 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\notin\mathbb{Q}$ 且互异 ~~(否则~~ 否则，

~~设 $\alpha_1=\alpha_2$，则 $\alpha_3=-2\alpha_1$，$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=p\Rightarrow\alpha_1^2-2\alpha_1^2-2\alpha_1^2$ $=p^2$ 同理 $-3\alpha_2^2=p^2\Rightarrow\alpha$~~. 考虑 $f'(x)$，若 $f(x)$ 在 K 中有重根，则 $(f(x),f'(x))\neq1$. 由 $f(x)$ 不可约 $\Rightarrow f(x)\mid f'(x)$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha_1) \subseteq K$, $[\mathbb{Q}(\alpha_1):\mathbb{Q}]=3$.

$K=\mathbb{Q}(\alpha_1) \Longleftrightarrow \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}(\alpha_1) \Longleftrightarrow \alpha_2-\alpha_3 \in \mathbb{Q}(\alpha_1)$ (因为 $\alpha_2+\alpha_3=-\alpha_1 \in \mathbb{Q}(\alpha_1)$)

$\delta=(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)=(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_1^2-(\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1+\alpha_2\alpha_3\right]$

$=(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_1^2+\alpha_1^2+(-q)\cdot\frac{1}{\alpha_1}\right]$

$\Rightarrow \alpha_3-\alpha_2=\dfrac{\alpha_1\delta}{2\alpha_1^3-q}$ $(\delta\neq 0 \Rightarrow 2\alpha_1^3-q\neq 0)$.

$\alpha_3-\alpha_2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1) \Longleftrightarrow \delta \in \mathbb{Q}(\alpha_1) \Longleftrightarrow \sqrt{-4p^3-27q^2} \in \mathbb{Q}(\alpha_1)$

若 $\delta \in \mathbb{Q}(\alpha_1)$，则 $\delta \in \mathbb{Q}$. 因为若 $\delta \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\delta) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha_1)$

$\delta^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow [\mathbb{Q}(\delta):\mathbb{Q}]=2$ $\quad 2 \nmid 3=[\mathbb{Q}(\alpha_1):\mathbb{Q}]$ 矛盾！

若 $\delta \notin \mathbb{Q}(\alpha_1)$，则 $\delta \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\delta) \subseteq K \Rightarrow [K:\mathbb{Q}]$ 有因子 2，同理 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha_1) \subseteq K \Rightarrow 3 \mid [K:\mathbb{Q}]$

因此 $6 \mid [K:\mathbb{Q}]$，但是习题11 展示 $[K:\mathbb{Q}] \leq 3!=6$

即 $[K:\mathbb{Q}]=6$ $\quad K=\mathbb{Q}(\alpha_1, \delta)$