《数值分析》引论

包承龙

丘成桐数学科学中心

目录

1 课程安排

2 数值分析的研究对象

3 数值计算的误差

4 数值分析的典型问题

5 线性代数中的基本概念

6 矩阵性质

教材、助教及答疑安排

参考书：关治、陆金甫，数值分析基础（第三版），高等教育出版社。

助教安排：

- 李家宏: 周二上午10-11, 18810960910
- 郑棣瀚：周一上午10-11，18010980897
- 李玥瑶: 周三下午4-5，17888825815
- 张跃进：周一下午2-3，18810960897

答疑地点：近春园西楼3层大厅

微信群

分数设置

- 上课考勤 (10%)
- 作业成绩 (40%)：4次作业，每次10%, 通过网络学堂提交
- 课程项目 (20%)：具体要求会在项目任务书中给出
- 期末成绩 (30%)

作业要求：

- 准时提交作业: 截止日期之后，不接收任何提交作业；
- 务必写清楚必要的推导步骤和计算细节；
- 允许讨论，但不能抄袭。

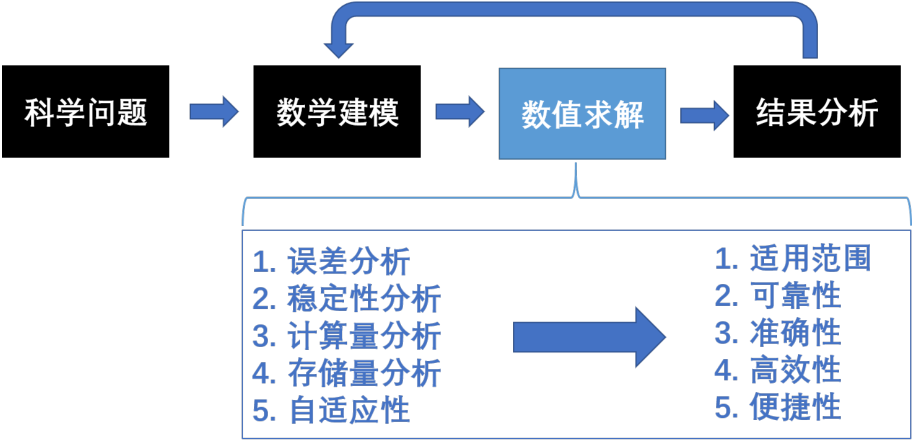
课程项目要求：

- 一人或两人一组，自由组队，请在10月10日之前将组队名单发至邮箱：num_ana_thu@163.com
  邮件名称：姓名1+姓名2-高等数值分析组队；单人组队不需要发送邮件；逾期未提交者，视为单人组队。

目录

1. 课程安排
2. 数值分析的研究对象
3. 数值计算的误差
4. 数值分析的典型问题
5. 线性代数中的基本概念
6. 矩阵性质

科学问题的研究步骤


科学问题
数学建模
数值求解
结果分析
1. 误差分析
2. 稳定性分析
3. 计算量分析
4. 存储量分析
5. 自适应性
1. 适用范围
2. 可靠性
3. 准确性
4. 高效性
5. 便捷性

数值分析的重要性

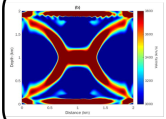
不同应用问题对精度要求不同

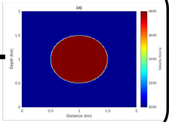
- 图像处理

$A\Bigg($  $-$  $\Bigg) \approx 10^{-2}$

真实图像 复原图像

- 利用偏微分方程进行速度结构反演

$A\Bigg($ 

$-$ 

$\Bigg) \approx 10^{-4}$

- 对不同的问题构造相匹配的数值计算方法

数值分析的重要性

求解相同问题中的等价不等效问题

例：如何计算 $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的20次幂？

- 方法一：

$$\phi^n = \phi \times \phi^{n-1}$$

- 方法二：

$$\phi^n = \phi^{n-2} - \phi^{n-1},$$

由于 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

- 不同方法会导致不同的误差累积效应

本课程主要目的与主要内容

目的：

- 熟悉并掌握典型问题的基本数值分析方法
- 理解文献中关于数值分析方面的推导过程
- 能够将数值分析的思想用于解决各自的科研与应用问题

内容包括：

1. 线性代数问题：方程组、特征值、线性最小二乘问题
2. 非线性方程和方程组的数值解法
3. 函数的插值和逼近
4. 数值积分和数值微分
5. 常微分方程初值问题的数值解法

目录

1 课程安排

2 数值分析的研究对象

3 数值计算的误差

4 数值分析的典型问题

5 线性代数中的基本概念

6 矩阵性质

误差来源

1. 输入数据的误差
2. 舍入误差：计算机浮点数运算有限
3. 截断误差：简化计算导致的误差

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

4. 累积误差: 多次计算导致的误差累积
   若$x = x_A + \epsilon_x$, $y = y_A + \epsilon_y$, 则

$$\begin{aligned} x + y &= (x_A + y_A) + (\epsilon_x + \epsilon_y) \\ xy &= x_A y_A + (x_A \epsilon_y + y_A \epsilon_x + \epsilon_x \epsilon_y) \end{aligned}$$

误差评判标准

设x_A是x的一个近似值

1. 绝对误差：$|x - x_A|$
2. 相对误差：$\frac{|x-x_A|}{|x|}$,若 $x \neq 0$
3. 误差界：存在$\epsilon_A > 0$,使得

$$|x - x_A| \leq \epsilon_A \quad \text{或者} \quad \frac{|x - x_A|}{|x|} \leq \epsilon_A$$

4. 十进制表示：

$$x_A = \pm 10^k \times 0.d_1 d_2 \cdots d_i \cdots ,$$

   其中$d_1 \neq 0,\ d_i \in \{0, 1 \ldots, 9\}$.
5. 有效数字：若存在n满足：$|x - x_A| \leq 0.5 \times 10^{k-n}$，称$x_A$具有$n$位十进制有效数字。

函数值的误差估计

基本思想：泰勒展式或者中值定理

$$f(x) = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A) + \frac{f''(x_A)}{2}(x - x_A)^2 + \cdots$$

$$f(x) = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_A)^2,\ \xi \in (x, x_A)$$

绝对误差的近似估计：

$$|f(x) - f(x_A)| \leq |f'(x_A)||x - x_A|$$

多元函数的一阶泰勒展式

$$f(x) \approx f(x_A) + \nabla f(x_A)^\top (x - x_A),$$

其中$\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial} x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$

计算机浮点数表示

二进制表示：

$$x_A = \pm 2^J \times 0.d_1 d_2 \cdots d_t,$$

其中$d_1 = 1$, $d_i \in \{0, 1\}$, t称为字长，J为阶。
$t = 23, J \in [-126, 127]$(单精度)， $t = 52, J \in [-1022, 1023]$（双精度）
注意：浮点数呈现非均匀分布，仅在每一个$[2^{k-1}, 2^k)$区间上的浮点个数相同。
定义$\mathrm{fl}(x)$为x的浮点数表示，有如下定理：

定理

设x满足$m \le |x| \le M$, 则存在实数δ满足$|\delta| \le \frac{1}{2} 2^{1-t}$, 使得

$$\mathrm{fl}(x) = x(1 + \delta).$$

同理可知，$\mathrm{fl}(x * y) = (x * y)(1 + \delta)$。

目录

1. 课程安排
2. 数值分析的研究对象
3. 数值计算的误差
4. 数值分析的典型问题
5. 线性代数中的基本概念
6. 矩阵性质

病态问题

输入数据的微小变化导致输出结果的巨大差异

条件数：设$f(x) \neq 0$, 局部相对误差：

$$\underbrace{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|}_{\text{函数值相对误差}} \approx \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \underbrace{\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|}_{\text{条件数}} \quad \underbrace{\left|\frac{h}{x}\right|}_{\text{自变量相对误差}}$$

- 病态问题：条件数远大于1
- 例：设$f(x) = x^8$, 则

$$\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = 8.$$

算法稳定性

计算过程中的微小扰动对于输出结果的影响

设$\epsilon_0 > 0$为初始误差，ϵ_n为第n步的误差

1. 线性型：$|\epsilon_n| \approx Cn\epsilon_0$, 通常不可避免
2. 指数型: $|\epsilon_n| \approx C^n\epsilon_0$，尽量避免$C > 1$（数值不稳定）

例：计算$x_n = \frac{1}{3^n}$

- 方法1：$x_0 = 1$, $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$ （稳定）
- 方法2: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_n = \frac{4}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3}x_{n-2}$ （不稳定）
- 方法3：$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_n = \frac{10}{3}x_{n-1} - x_{n-2}$ （不稳定）

避免误差的手段

1. 避免有效数字的损失
   - 相近数相减：转换等价（近似）形式
     计算方程$x^2-16x+1=0$的根

$$x_1=8+\sqrt{63},\quad x_2=8-\sqrt{63}=\frac{1}{x_1}$$

   - 大数吃小数：调整计算次序

$$100+\delta_1+\cdots+\delta_{100}=100+\underbrace{(\delta_1+\cdots+\delta_{100})}_{\text{调整计算次序}}$$

2. 减少运算次数
   - 秦九韶算法：$p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$$u_n=a_n,\quad u_k=u_{k+1}x+a_k,k=n-1,n-2,\ldots,0,\quad p_n(x)=u_0$$

     运算次数：n 次乘法 $+$ n次加法

目录

1 课程安排

2 数值分析的研究对象

3 数值计算的误差

4 数值分析的典型问题

5 线性代数中的基本概念

6 矩阵性质

矩阵特征值

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 复的$n \times n$的方阵，若存在$\lambda \in \mathbb{C}$和$x \neq 0$, 满足

$$Ax = \lambda x$$

其中λ为特征值，x为特征向量。
特征多项式：

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

设$\sigma(A)$为A的全体特征值的集合，则

$$\rho(A) = \max\{|\lambda||\lambda \in \sigma(A)\},$$

称为A的谱半径。
矩阵A的迹：$\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

基本性质

- 若A的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，则

$$\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

- 矩阵A与矩阵B相似：存在可逆矩阵P，使得$A = P^{-1}BP$
- A可对角化$\Leftrightarrow$ A与某个对角阵相似 $\Leftrightarrow$ A 有n个线性无关的特征向量
- 特征多项式：$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$且满足$n_1 + \cdots + n_s = n$
- n_i称为特征值λ_i的代数重数，λ_i所对应的特征向量所构成的线性空间维数m_i为其几何重数，且$1 \le m_i \le n_i$
- A可对角化$\Leftrightarrow$对任意i满足$n_i = m_i$

Jordan标准形

设矩阵A有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, 则存在可逆矩阵$P$, 使得

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中$J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$且具有$m_i$块对角结构, 满足

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{im_i} \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad J_{ik} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

其中， J_{ik}称为Jordan块

线性空间

设$\mathbb{P}$为一个数域，V为一个非空集合，在V上定义运算

- 加法：存在零元素、负元素，满足交换律、结合律
- 数乘：对任意的$u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$, 满足

$$1u = u,\ \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

- 称V为数域$\mathbb{P}$上的线性空间

重要概念： 设$v_1, \ldots, v_p \in V$

- 线性相关：$\mathbb{P}$中存在不全为零的$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, 使得

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$$

- 基，维数，子空间，...

内积空间

设V是数域$\mathbb{P}$上的线性空间，内积$(\cdot,\cdot):V\times V\mapsto\mathbb{P}$满足：

- $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$, $\forall u,v,w\in V$
- $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$, $\forall u,v\in V$, $\alpha\in\mathbb{P}$
- $(u,v)=\overline{(v,u)}$, $\forall u,v\in V$，$\overline{a}$为共轭复数
- $(u,u)\geq 0$, $\forall u\in V$且 $(u,u)=0\Leftrightarrow u=0$

权函数：定义在$[a,b]$上的可积函数ρ满足：

1. $\rho(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$
2. 在$[a,b]$上的任意子区间上，ρ不恒为零

例：设ρ为$[a,b]$上的权函数，对任意$f,g\in C([a,b])$, 定义内积

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

内积的基本性质

若$(u,v)=0$，则称u与v正交

Cauchy-Schwartz不等式： $|(u,v)^2| \leq (u,u)(v,v)$, 等号成立当且仅当$u,v$线性相关

Gram矩阵： 设$u_1,\dots,u_n \in V$

$$G = \begin{bmatrix} (u_1,u_1) & (u_2,u_1) & \cdots & (u_n,u_1) \\ (u_1,u_2) & (u_2,u_2) & \cdots & (u_n,u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1,u_n) & (u_2,u_n) & \cdots & (u_n,u_n) \end{bmatrix} \text{非奇异} \Leftrightarrow u_1,\dots u_n\text{线性无关}$$

Gram-Schmidt正交化：设$u_1,\dots,u_n \in V$ 线性无关

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_i = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(u_i,u_k)}{(v_k,v_k)} v_k, \quad i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

则有$(v_i,v_j)=0,\ \forall i \neq j$

赋范线性空间

设V是$\mathbb{P}$上的线性空间，定义$\|\cdots\|: V \mapsto \mathbb{R}$,满足

- 正定性： $\|u\| \geq 0, \forall u \in V$ 且 $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- 齐次性： $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{P}, u \in V$
- 三角不等式： $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$

称$\|\cdot\|$为V的范数

推广：

- $\|u-v\| \geq |\|u\| - \|v\||, \forall u, v \in V$
- 若V为内积空间，则其诱导出一个范数$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in V$
- 若V存在两种范数$\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$, 称$\|\cdot\|_a$与$\|\cdot\|_b$等价，若存在$C_2 > C_1 > 0$, 满足

$$C_1\|u\|_a \leq \|u\|_b \leq C_2\|u\|_a, \quad \forall u \in V$$

$\mathbb{R}^n$上的向量范数

设$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top\in\mathbb{R}^n$，有定义：

1. 1-范数：$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$
2. 2-范数：$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$
3. ∞-范数：$\|x\|_\infty=\max\{|x_i||1\le i\le n\}$

定理

$\mathbb{R}^n$上的所有范数是相互等价的。

设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\|\cdot\|$是$\mathbb{R}^n$上的一种范数，则$\|Ax\|$是关于$x$的连续函数

$$\big|\|A(x+h)\|-\|Ax\|\big|\le\|Ah\|=\left\|\sum_{j=1}^n h_ja_j\right\|\le\sum_{j=1}^n|h_j|\|a_j\|$$

$\mathbb{R}^{n\times n}$上的矩阵范数

$\mathbb{R}^{n\times n}$的范数满足如下四个条件：

- $\|A\| \geq 0,\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,且$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ （矩阵乘法的相容性）

Frobenius范数：$\mathbb{R}^{n^2}$上的向量范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{Tr}(A^\top A)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathrm{Tr}(A^\top B)$

不等式：$a_i^\top$为第i行向量，b_j为第j列向量

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i^\top b_j)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} (\|a_i\|_2\|b_j\|_2)^2 = \|A\|_F^2\|B\|_F^2$$

算子范数

向量范数与矩阵范数相容：$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n$
给定向量范数$\|\cdot\|$, 定义相应的矩阵范数，也称为**算子范数**：

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{1}$$

典型范数：

- $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (列范数)
- $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ （~~列~~范数）
- $\|A\|_2 = [\rho(A^\top A)]^{\frac{1}{2}}$ (谱范数) (A为实对称矩阵$\Leftrightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$)
- 设$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$且非奇异，$\|\cdot\|_\alpha$为 $\mathbb{R}^n$上的向量范数，则P诱导向量范数$\|x\|_{P,\alpha} = \|Px\|_\alpha$，且此范数诱导矩阵范数

$$\|A\|_{P,\alpha} = \|PAP^{-1}\|_\alpha \tag{2}$$

算子范数的重要性质

定理

1. 设$\|\cdot\|$为$\mathbb{R}^{n\times n}$上的任一种范数，则 $\rho(A)\le\|A\|,\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$
2. 对任意$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$\epsilon>0$, 至少存在一种算子范数$\|\cdot\|$, 使得

$$\|A\|\le\rho(A)+\epsilon$$

证明.

1. 设$|\lambda|=\rho(A)$, $x\neq 0$为其对应的特征向量。存在向量y，使得$xy^\top$为非零矩阵，且有

$$\rho\|xy^\top\|=\|\lambda xy^\top\|=\|Axy^\top\|\le\|A\|\|xy^\top\|$$

2. 设非奇异矩阵P，使得$P^{-1}AP$具有Jordan标准形，构造

$$D_\epsilon=\mathrm{diag}(1,\epsilon,\ldots,\epsilon^{n-1})$$

定理

设$\|\cdot\|$为$R^{n\times n}$上的一种算子范数，矩阵B满足$\|B\|<1$, 则$I+B$非奇异，且

$$\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$$

证明.

若$I+B$奇异，则有$x\neq 0$,使得$(I+B)x=0 \Rightarrow Bx=-Ix \Rightarrow \rho(B)\geq 1$
记$D=(I+B)^{-1}$, 有不等式

$$1=\|I\|=\|(I+B)D\|=\|D+BD\|\geq \|D\|(1-\|B\|)$$

由$\|B\|<1$可知结论 □

推论： 若$A,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, A可逆，且$\|A^{-1}\|\leq\alpha$, $\|A-C\|\leq\beta$, $\alpha\beta<1$, 则C可逆，且$\|C^{-1}\|\leq\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$.

目录

1 课程安排

2 数值分析的研究对象

3 数值计算的误差

4 数值分析的典型问题

5 线性代数中的基本概念

6 矩阵性质

正交矩阵和酉矩阵

正交矩阵：$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$满足$A^\top A = I$

- $A^{-1} = A^\top$, $A^\top$也是正交矩阵
- $\|a_j\|_2 = 1, \forall j = 1, \ldots, n$
- $|\det A| = 1$
- 若A, B都是正交矩阵，则AB与BA都是正交矩阵

酉矩阵：$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$满足$A^H A = I$

- $A^{-1} = A^H$, A^H也是正交矩阵
- $\|a_j\|_2 = 1, \forall j = 1, \ldots, n$
- $|\det A| = 1$
- 若A, B都是酉矩阵，则AB与BA都是酉矩阵

备注： $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$且$m > n$, 则$A^\top A = I$只能保证矩阵$A$为列正交

对称矩阵和对称正定矩阵

实对称矩阵：$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$且$A = A^\top$

- A的特征值均为试数，且A有n个线性无关的特征向量
- 存在正交矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵
- $\|A\|_2 = \rho(A)$

对称正定矩阵：$(x, Ax) > 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$

- 顺序主子式：i阶顺序主子式$\Delta_i = \det A_i$，其中

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i\times i}$$

- A对称正定$\Leftrightarrow \Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow A$的所有特征值都大于零

A对称半正定：$(x, Ax) \geq 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$的所有主子式$\geq 0$

正规矩阵

正规矩阵：$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$且$A^H A = AA^H$

- 等价于A酉相似于对角矩阵（存在酉矩阵U,使得UAU^H为对角阵）
- A为正规矩阵，与A酉相似的矩阵为正规矩阵
- A为正规矩阵，A有n个线性无关的特征向量

性质：

- 正规矩阵A的全部特征值为实数时，$A = A^H$(厄米特)
- 正规矩阵A的全部特征值为零或者虚数时，$A = -A^H$（反厄米特）
- 正规矩阵A的全部特征值的模长为1时，A为酉矩阵

若$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则所有结论均为实矩阵形式

初等矩阵

实初等矩阵：

$$E(\mathbf{u},\mathbf{v},\sigma)=\mathbf{I}-\sigma\mathbf{u}\mathbf{v}^\top,\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n,\sigma\in\mathbb{R},\sigma\neq 0$$

设$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)^\top$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)^\top$, 则

$$E(\mathbf{u},\mathbf{v},\sigma)=\begin{bmatrix}1-\sigma u_1v_1 & -\sigma u_1v_2 & -\sigma u_1v_3\\ -\sigma u_2v_1 & 1-\sigma u_2v_2 & -\sigma u_2v_3\\ -\sigma u_3v_1 & -\sigma u_3v_2 & 1-\sigma u_3v_3\end{bmatrix}$$

例：初等置换矩阵: 记$\mathbf{I}_{ij}=E(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,1)$, 则有$I_{ij}A$为交换$A$的第$i$行与第$j$行，$\mathbf{AI}_{ij}$为交换A的第$i$列与第$j$列
性质：$\mathbf{I}_{ij}^{-1}=\mathbf{I}_{ij}$ 且 $\det\mathbf{I}_{ij}=-1,\ \forall i\neq j$
排列矩阵$\mathbf{P}$: 若干置换矩阵的乘积，且有$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^\top$, $\det\mathbf{P}=1$或-1

设$\mathbf{l}_j = (0, \cdots, 0, l_{j+1,j}, \cdots, l_{n,j})^\top$
高斯变换矩阵：

$$\mathbf{L}_j(\mathbf{l}_j) = \mathbf{I} + \mathbf{l}_j \mathbf{e}_j^\top = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{j+1,j} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,j} & & & 1 \end{bmatrix}$$

容易知道，$\mathbf{L}_j(\mathbf{l}_j)^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{l}_j \mathbf{e}_j^\top = \mathbf{L}_j(-\mathbf{l}_j)$ 且 $\det(L_j(\mathbf{l}_j)) = 1$
左乘$\mathbf{L}_j(\mathbf{l}_j)\mathbf{A}$:第1行至第$j$行与$\mathbf{A}$相同；第$k(k = j+1, \ldots, n)$行是$\mathbf{A}$的第$j$行乘以$l_{k,j}$加上$\mathbf{A}$的第$k$行
右乘有类似结论，将行换成列即可。

性质：$\mathbf{e}_i^\top \mathbf{l}_j = 0, \forall i < j$,
任何单位下三角形矩阵有如下表示：

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1(\mathbf{l}_1)\mathbf{L}_2(\mathbf{l}_2)\cdots\mathbf{L}_{n-1}(\mathbf{l}_{n-1}) = \mathbf{I} + [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \cdots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{0}]$$

下（上）三角矩阵性质：

- 下（上）三角矩阵的乘积为下（上）三角矩阵
- 可逆下（上）三角矩阵的逆为下（上）三角矩阵

可约矩阵与对角占优矩阵

可约矩阵: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 存在排列矩阵$\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{P}^\top\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$不可约$\Leftrightarrow$ 方向图$G(\mathbf{A})$是强连接的

严格对角占优: $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \forall i = 1, \ldots, n$

弱对角占优: $|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \forall i = 1, \ldots, n$

重要性质:

- $\mathbf{A}$为严格对角占优矩阵$\Rightarrow a_{ii} > 0, \forall i$且$\mathbf{A}$非奇异
- $\mathbf{A}$为不可约的弱对角占优矩阵$\Rightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$且$\mathbf{A}$非奇异
- 若$\mathbf{A}$满足
  - $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, $a_{ii} > 0$, $\forall i$
  - $\mathbf{A}$严格对角占优或者不可约弱对角占优

  则$\mathbf{A}$对称正定