抽象代数学(VI)

研究群论的一个重要方法是群的表示理论. 粗略地说,研究群在集合上的作用. 设 S 是一个集合, S 上的一一对应称为变换, 令 $A(S)=\{f: S\to S \mid f \text{是一个双射}\}$

显然, $A(S)$ 是一个群. 称为变换群

设 $S=G$. 定义左平移如下: $\forall a\in G$, $L(a): G\to G$.

$L(a)(g)=ag$. 这是一个双射. $(L(a))^{-1}=L(a^{-1})\Rightarrow L(a)\in A(G)$

令 $L(G)=\{L(a)\mid a\in G\}$, $L(G)\leqslant A(G)$

定理. 任一群 G 同构于 $L(G)$ (即 G 嵌入 $A(G)$)

证明:
$$\begin{aligned} L: G &\longrightarrow L(G) \\ g &\longmapsto L(g) \end{aligned}$$

$\forall h_1,h_2\in G$
$$\begin{aligned} L(h_1h_2)(x) &= h_1h_2x = h_1(h_2x) = h_1(L(h_2)(x)) \\ &= (L(h_1)L(h_2))(x) \quad \forall x\in G. \end{aligned}$$

即 L 是一个群同态, $\mathrm{Im}L=L(G)$
$$\ker L=\{g\mid L(g)=id\} =\{e\}$$

$\Rightarrow L$ 是一个群同构

同理 令 $R(a): G\to G$ $\quad g\mapsto ga^{-1}$. $R(G)=\{R(a)\mid a\in G\}$

则 $G\cong R(G)$. $\quad R(G)\leqslant A(G)$.

若G是有限群，$|G|=n$，则$A(G)\cong S_n$，即G同构于S_n的子群。设$G=\{x_1,\cdots,x_n\}$　$\sigma\in A(G)$

设$\sigma(x_j)=x_{i_j}$　$j=1,\cdots,n$。$\mathrm{Im}\sigma$是G元素的重排。

记$\sigma=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_n}\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$

所以$S_n=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} \middle| \, i_1,\cdots,i_n\text{是}1,\cdots,n\text{的一个排列}\right\}$

$i_k=\sigma(k)$

$|S_n|=n!$　S_n或其子群称为置换群，S_n称为n次对称群

$\forall\sigma,\tau\in S_n$，$x\in G$，令$(\sigma\circ\tau)(x)=\tau[\sigma(x)]$或记作

$$x(\sigma\circ\tau)=(x\sigma)\tau.$$

例如　$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$　$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$\sigma\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$　$\tau\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

$\sigma\tau\neq\tau\sigma$　即S_n是非交换的$(n\geq 3)$。

记号：轮换$\theta=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$表示$\theta(i_1)=i_2$，$\theta(i_2)=i_3\cdots$

其余元素保持恒等。称为k阶轮换（循环）　上例$\tau\sigma=(1\,3)$

2阶轮换称为对换(transposition)

性质：(1) 任意置换可写成不相交轮换之积，表示方法唯一。（不计次序）。

例如：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&1&2&8&6&4&7&5\end{pmatrix}=(1\,3\,2)(5\,6\,4\,8)$

(2) 两轮换若不相交，则可交换.

(3) 轮换可写成对换之积.

$$(i_1 i_2 \cdots i_k)=(i_1\, i_k)(i_2\, i_k)\cdots(i_{k-1}\, i_k)$$
$$=(i_1\, i_2)(i_1\, i_3)\cdots(i_1, i_k).$$

(4) $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ 的周期为 k

$$(i_1, i_2 \cdots i_k)^{-1}=(i_k\, i_{k-1}\cdots i_1)$$

(5) 不相交循环(或轮换)乘积的阶 = 阶的最小公倍数.

例 $P=\begin{pmatrix}e_3^T\\e_4^T\\e_5^T\\e_2^T\\e_1^T\end{pmatrix}$ 对应 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}=(1\,3\,5)(2\,4)$

$P^6=I_5$

定义 一个置换若能写成偶数个对换称为偶置换，否则称为奇置换.

例 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&2&3&8&7&6&1&4\end{pmatrix}=(15)(17)(48)=(17)(57)(48)$

全体偶置换(n元)作成 S_n 的子群，记作 A_n. $|A_n|=\frac{n!}{2}$

注：任意置换不可能既奇又偶，因为否则 $\alpha=\beta_1\cdots\beta_\ell=\gamma_1\cdots\gamma_k$ ℓ奇，k偶，β_i,γ_j 均为对换 $\Rightarrow$ $\beta_1\cdots\beta_\ell\gamma_k\gamma_{k-1}\cdots\gamma_1=id$ 即恒等置换写成奇数个对换乘积，这不可能.

S_n中元素的共轭分类.

设$\sigma\in S_n$, σ可写成不相交轮换之积, 设长为r的轮换有λ_r个 $(1\le r\le n)$ 则称σ的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$

$1\cdot\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n$.

例如: S_4中 $(12)(34)$ 型: $1^0 2^2 3^0 4^0$

(1234) 型 $1^0 2^0 3^0 4^1$

$(1)(2)(3)(4)=$恒等 型 $1^4 2^0 3^0 4^0$

$(123)(4)=(123)$ 型 $1^1 2^0 3^1 4^0$

定理 设$\sigma,\tau\in S_n$ 则σ和τ共轭, 即存在$\nu\in S_n$. $\tau=\nu\sigma\nu^{-1}\iff\sigma$与$\tau$有相同的型.

证明: "$\Rightarrow$" 设 $\sigma=(a_1\cdots a_{i_1})(a_{i_1+1}\cdots a_{i_2})\cdots(a_{i_k+1},\cdots,a_{i_{k+1}})$

则 $\tau=\nu^{-1}\sigma\nu=(\nu(a_1)\cdots\nu(a_{i_1}))(\nu(a_{i_1+1})\cdots\nu(a_{i_2}))\cdots$

(检查 $\tau(\nu(a_1))=(\nu^{-1}\sigma\nu)(\nu(a_1))=\nu[\sigma(a_1)]=\nu(a_2)$).

"$\Leftarrow$" 设σ如上 $\tau=(b_1,\cdots,b_{i_1})(b_{i_1+1}\cdots b_{i_2})\cdots$

令 $\nu:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$ $\nu(a_1)=b_1,\cdots,\nu(a_{i_1+1})=b_{i_1+1}$.

$\nu^{-1}\sigma\nu=\tau$.

例如 ~~$(15)(17)(48)$和$(17)(57)(48)$在S_8中~~.

令 ~~$\nu:\{1,2,\cdots,8\}\to\{1,2,\cdots,8\}$ $\nu(5)=\nu(7)$~~

S_n和A_n的结构.

定理 (1) $S_n=\langle(1\,2),(1,3),\cdots,(1,n)\rangle\quad n\geq 2$

(2) $A_n=\langle(1\,2\,3),(1\,2\,4),\cdots,(1\,2\,n)\rangle\quad n\geq 3$

(3) S_n的中心是$\{id\}\quad n\geq 3$

(4) $[S_n,S_n]=A_n$

(5) $S_n=\langle(1\,2),(1\,2,\cdots,n)\rangle$

证明: (1) $\sigma=(i_1\,i_2\cdots i_k)=(i_1\,i_2)\cdots(i_1\,i_k)$ 取$\nu=(1\,i_1)$

$\nu^{-1}\sigma\nu=(1\,i_2\cdots i_k)=(1\,i_2)\cdots(1\,i_k)$

$\Rightarrow(i_1\,i_2\cdots i_k)=(1\,i_1)(1\,i_2)\cdots(1\,i_k)(1\,i_1)$

(2) 只需展示$(1\,i)(1\,j)$由上述3阶轮换乘积得到

$(1\,i)(1\,j)=(1\,i\,j)$共轭于$(1\,2\,j)\quad(1\,i\,j)=(2\,i)(1\,2\,j)(2\,i)$

$=(2\,i)(2\,1)(1\,j)(2\,i)=(2\,i\,1)(1\,2\,i)(1\,2\,j)$

$(2\,i)(2\,1)(2\,i)(1\,j)=(2\,i)(2\,1)(2\,i)(2\,1)(2\,1)(1\,j)$

(3) 设$\tau\in S_n$且$\tau\in C(S_n)$ 若$\tau\neq id$ 则存在$i\neq j$

$\tau(i)=j$ 取$k\neq i,j$. $\sigma=(j,k)$ 则$\tau\sigma(i)=k$

$\sigma\tau(i)=j$ 从而$\tau\sigma\neq\sigma\tau$ 矛盾 因此$\tau=id$.

(4) 首先$\forall\,\rho\tau\rho^{-1}\tau^{-1}\in A_n$ 即$[S_n,S_n]\subseteq A_n$, 反之. 由(2)

$(1\,2\,i)=(1\,i)(1\,2)(1\,i)^{-1}(1\,2)$ 得$A_n\subseteq[S_n,S_n]$

(5) 令$\sigma=(1\,2\cdots n)$ 注意

$[\sigma^{-1}(1\,i)\sigma](1\,i)[\sigma^{-1}(1\,i)\sigma]=(1\,i+1)$

A_n是单群$(n\geq 5)$

$|A_3|=\frac{3!}{2}=3$ 　　A_3是3阶循环群.

A_4的换位子群 $[A_4,A_4]\cong K_4$ (klein四元群)

$K_4=\{(1)\ (12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$.

证明: $(12)(34)=(143)(132)(143)^{-1}(132)^{-1}$

$(14)(23)=(123)(234)(123)^{-1}(234)^{-1}$

$(13)(24)=(12)(34)(14)(23)\Rightarrow K_4\leq[A_4,A_4]$

(实际上,若置换$\sigma=\rho\tau$,且ρ,τ共型,则σ是一个换位子

因为ρ与τ^{-1}共型,令$\rho=\lambda^{-1}\tau^{-1}\lambda$ 得$\rho\tau=\lambda^{-1}\tau^{-1}\lambda\tau$)

反之,$\forall\sigma\in S_4$, $(i\ j)(k\ l)\in K_4$, $\sigma^{-1}(i\ j)(k\ l)\sigma$

$=(\sigma(i)\ \sigma(j))(\sigma(k)\ \sigma(l))\in K_4$ 　$\Rightarrow K_4\triangleleft S_4\Rightarrow K_4\triangleleft A_4$.

A_4/K_4是3阶循环群,则$[A_4,A_4]\leq K_4$.

定理 A_n是单群 $(n\geq 5)$(或$n\neq 4$).

证明:由A_n的结构 任意3-轮换(a_1,a_2,a_3)和$(1\ 2\ 3)$

共轭,存在τ, $\tau^{-1}(1\ 2\ 3)\tau=(a_1\ a_2\ a_3)$ 或$\tau^{-1}(4\ 5)(123)(45)$

$\tau=(a_1\ a_2\ a_3)\Rightarrow\tau$或$(4\ 5)\tau\in A_n$,只需证$\forall N\triangleleft A_n$

$N\neq\{e\}$或A_n 则N包含一个3-轮换

设 $\sigma\neq(1)\in N$ 是满足被固定的 i 的个数极大 $i=1,\cdots,n$

我们展示 σ 是一个3-轮换. 令 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$ $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 是互不相交轮换. $m\geq 2$.

Case-1. $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 均为对换

设 $\sigma_1=(i\ j)$, $\sigma_2=(k,l)$ 取 $s\neq i,j,k,l$. $\tau=(k\ l\ s)$. $\in A_n$, $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}\in N$, 但是

$\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}\neq(1)$ 且固定被 σ 固定的数. 且固定 i,j.

这与 σ 的选择矛盾.

Case-2. σ_r 是一个长度 ≥ 3 的轮换 $1\leq r\leq m$.

σ 至少移动两个数, 记作 p,q. 不妨设 $r=1$ $\sigma_1=(i\ j\ k\cdots)$

$\tau=(k,p,q)$. 则 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}\in N$

① $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}\neq(1)$ 因为 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}(k)\neq k$.

② $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ 固定所有 σ 固定的数.

③ $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ 固定 j.

例 S_4 的真非平凡正规子群只有 A_4, K_4.

$n\geq 5$ S_n 的非平凡正规子群只有 A_n

Page42

作业: 2. 4. 6. 8. 10. 11. 13.