3. De Giorgi定理

1957年, De Giorgi首先证明了：有界可测系数散度形式的椭圆型方程的H^1-弱解是Höder连续的. 为证此定理， 我们需要弱解的Harnack 不等式。

Theorem

3.13' 设$\Omega \subset R^n$为开集, $u \in H^1(\Omega)$是*(3.21)*之非负弱解, *(3.22)*满足, 并存在$q > n$使得 C, $f \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$. 如果$\tau \in (1,2)$如定理*3.13*所示， $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, 则$\forall \theta \in (1, \tau)$, 存在正常数 $C = C(\lambda, n, q, R, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)})$, 使得

$$Sup_{B_{\theta R/2}} u \le C[\inf_{B_{R/2}} u + R^{2(1-n/q)}||f||_{L^{q/2}(B_R)}].$$

此处及下面的证明中, 总是记$B_r := B_r(x_0)$, $B = B_1$.

证明. 利用定理3.12的方法， 通过选截断试验函数$\eta(x)G(W)$, 其中

$$\eta \in C_0^\infty(B_R), \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \eta \equiv 1 \; in \; B_{\theta R/2}$$

可以证明： 存在正常数 $C = C(\lambda, n, \theta, p, q, R, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)})$ 使得

$$||u||_{L^\infty(B_{\theta R/2})} \le C[R^{-\frac{n}{p}}||u||_{L^p(B_{\frac{\tau R}{2}})} + R^{2(1-\frac{n}{q})}||f||_{L^{\frac{q}{2}}(B_R)}]. \quad (3.30)$$

注意$u \ge 0$, 上式和定理3.13立即推出定理3.13'。

Theorem

3.14 设$\Omega \subset R^n$为开集, $u \in H^1(\Omega)$是方程

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} = 0 \tag{3.31}$$

之弱解, 其系数满足*(3.22)*, 则存在正常数α 使得 $u \in C^\alpha(\Omega)$, 并且$\forall B_{3R}(\bar{x}) \subset \Omega$, 有

$$||u||_{C^\alpha(B_R(\bar{x}))} \leq C(\lambda, n, R)||u||_{L^2(\Omega)}.$$

注. 此定理对一般形式的(3.2)方程的弱解也是成立的, 详见[G-T: Theorem8.24, 8.29]

证明 任取$x_0 \in B_R(\bar{x})$, 记$B_r = B_r(x_0)$. 令

$$M_r = Sup_{B_r} u, \quad m_r = inf_{B_r} u,$$

$$\omega(r) = osc_{B_r} u := M_r - m_r.$$

则$M_{\theta R/2} - u(x)$和$u(x) - m_{r/2}$ 都是方程(3.31)的弱解。注意只要$r \leq 2R$, 就有$B_r \subset \Omega$. 由定理3.13'知:

$$M_{\theta r/2} - u(x) \leq C \inf_{Br/2} (M_{\theta r/2} - u(x)), \quad \forall x \in B_{\theta r/2},$$

即

$$\frac{1}{|B_{\theta r/2}|} \int_{B\theta r/2} [M_{\theta r/2} - u(x)]dx \leq C[M_{\theta r/2} - M_{r/2}].$$

同样有

$$\frac{1}{|B_{\theta r/2}|}\int_{B\theta r/2}[u(x)-m_{\theta r/2}]dx \le C[m_{r/2}-m_{\theta r/2}].$$

上两式相加，得

$$M_{\theta r/2}-m_{\theta r/2} \le C[\omega(\theta r/2)-\omega(r/2)].$$

即

$$\omega(r/2) \le \frac{C-1}{C}\omega(\theta r/2) := K\omega(\theta r/2).$$

这样， 我们得到了$\theta > 1$和$K \in (0,1)$使得

$$\omega(r) \le K\omega(\theta r), \quad \forall r \in (0,R]. \tag{3.32}$$

现在$\forall r \in (0, R]$, 选正整数k使得

$$\frac{R}{\theta^{k+1}} < r \le \frac{R}{\theta^k}.$$

于是利用ω的单增性和(3.32)进行迭代,

$$\begin{aligned}
\omega(r) &\le \omega(\frac{R}{\theta^k}) \\
&\le K\omega(\frac{R}{\theta^{k-1}}) \\
&\le K^2\omega(\frac{R}{\theta^{k-2}}) \le \cdots \\
&\le K^k\omega(R).
\end{aligned}$$

又

$$\frac{\ln R/r}{\ln \theta} \geq k > \frac{\ln R/r}{\ln \theta} - 1, \quad 0 < K < 1$$

所以

$$\begin{aligned} K^k &\leq K^{-1} K^{\frac{\ln R/r}{\ln \theta}} = K^{-1} (e^{lnK})^{\frac{\ln R/r}{\ln \theta}} \\ &= K^{-1} e^{-\ln K \frac{\ln r/R}{ln\theta}} \\ &= K^{-1} (e^{\ln r/R})^{-\frac{\ln K}{\ln \theta}} \\ &= K^{-1} (\frac{r}{R})^{\alpha}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = -\frac{\ln K}{\ln \theta}$

所以

$$\omega(r) \le K^{-1}(\frac{r}{R})^{\alpha}\omega(R), \quad \forall r \in (0, R]. \qquad (3.33)$$

注意， 由(3.30)有

$$\omega(R) \le C(n, \lambda, R)||u||_{L^2(\Omega)}.$$

从而， 由球$B_r(x_0) \subset B_R(\bar{x})$的任意性得

$$||u||_{C^{\alpha}(B_R(\bar{x}))} \le C(\lambda, n, R)||u||L^2(\Omega).$$

$\det D^2 u = 1$ 解为二次型

推论3.6 (Liouville type Theorem)

设$u \in H^1(R^n) \cap L^\infty(R^n)$是方程(3.31)在$R^n$中之弱解， 其系数满足(3.22)， 则$u(x)$在$R^n$中几乎处处是常数。

证明 对任意的$x_0 \in R^n$和任意的$r > 0$, 则对于任意的$R > r$ (3.33)成立. 由于

$$0 \leq \omega(R) \leq 2||u||_{L^\infty(R^n)}.$$

在(3.33)式中令$R \to \infty$ 得

$$\omega(r) \equiv 0, \quad \forall x_0 \in R^n, \forall r > 0,$$

从而推论得证。

作业17：

Evans book: Problem 6.6: 2, 12