补充习题(2)

1. 令 $SU(2)=\{A\in M_2(\mathbb{C})\mid A^HA=I_2,\ \det(A)=1\}$, $SO(3)=\{A\in M_3(\mathbb{R})\mid A^TA=I_3,\ \det(A)=1\}$

$R_x(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$

(1) 设 $R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $R_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta\\0&1&0\\-\sin\beta&0&\cos\beta\end{pmatrix}$

证明: $\forall A\in SO(3)$, 则存在 α,β,γ, 使得 $A=R_z(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma)$

(2) $SU(2)=\left\{U=\begin{pmatrix}a&b\\-\bar b&\bar a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{C},\ |a|^2+|b|^2=1\right\}$

($SU(2)$ 可看成 $\mathbb{R}^4$ 中三维球面 S^3)

(3) 令 $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, H_0 是2阶 Hermite阵(且迹=0)的全体. H_0 作为 $\mathbb{R}$ 上向量空间的基为 $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$

(4) 任意 $U\in SU(2)$, 定义 $H_0\xrightarrow{f_U}H_0$, $M\longmapsto UMU^H$

$f_U(x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3)=x_1'\sigma_1+x_2'\sigma_2+x_3'\sigma_3$, 则 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$

(5) 由(4)给定 $U\in SU(2)$, 定义 $\mathbb{R}^3\xrightarrow{g_U}\mathbb{R}^3$ $g_U\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$

则 g_U 是一个正交矩阵 $\in SO(3)$, 展示

$$\begin{aligned}SU(2)&\longrightarrow SO(3)\\U&\longmapsto g_U\end{aligned}$$

是一个群满同态, $\text{kernel}=\{I_2,-I_2\}$

2. U_n 的结构　　Un表示n的缩系所构成的群

(1) 设 $n=p$ 素数，$\mathbb{Z}_p^*=\mathbb{Z}_p\setminus\{\bar{0}\}$，则 $\mathbb{Z}_p^*$ 关于乘法是一个循环群.

(2) 设 $n=p^r$，$r>1$，p 是奇素数，则 U_n 是一个循环群

(3) 设 $n=2^r$，$r>2$　$H=\{\bar{a}\in U_n \mid a\equiv 1 \pmod 4\}$

则 H 是一个循环群，$|H|=2^{r-2}$.

(4) $U_{2^r}\simeq \mathbb{Z}_2\oplus H$

(5) 设 $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$，$p_1<\cdots<p_k$ 均为素数，$r_i>0$　$\forall i=1,\cdots,k$

由有限交换群结构，~~有~~ $U_n\simeq U_{p_1^{r_1}}\oplus\cdots\oplus U_{p_k^{r_k}}$

(中国剩余定理)

(6) 正如(5)，$a\in\mathbb{Z}$，$\bar{a}$ 在 U_n 中的周期是 $\bar{a}$ 在 $U_{p_i^{r_i}}$ 中的周期的最小公倍数.

3. 求 D_{2n} 的所有正规子群.