答疑

关于有限Abel群分类的可能性

设 G 有限Abel群 $|G| = n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$，$p_1, \cdots, p_s$ 互异素数，$r_1, \cdots, r_s \geq 1$ 对于 $\forall i = 1, \cdots, s$ G 存在 $p_i^{r_i}$ 阶子群 H_i，$G = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s$

H_i 的可能性 设 $r_i = r_{i1} + \cdots + r_{ik_i}$，$r_{i1}, \cdots, r_{ik_i} \in \mathbb{N}$

则 $\mathbb{Z}_{p_i^{r_{i1}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{r_{ik_i}}}$ 是一种可能性. 对应初等因子 $\{p_i^{r_{i1}}, \cdots, p_i^{r_{ik_i}}\}$ 因此 H_i 的可能性对应着 r_i 的划分可能性. 一般地，将 $m \in \mathbb{N}$ 分成若干自然数的和的可能性 $\Longleftrightarrow$ 求解 $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + m \cdot x_m = m$ 的解的个数

例如 $4 = 4 + 0 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$

对应解为 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Euler的方法：考虑 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x^3}\right) \cdots \left(\frac{1}{1-x^m}\right) = A(0) + A(1)x + A(2)x^2 + \cdots$$

这里 $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + m \cdot x_m = m$ 解的个数记 $A(m)$

也可以递推计算：

$$\text{令 } F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}$$

$$\ln F(x) = \ln\left(\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^j}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1-x^j)$$

求导 $\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{jx^{j-1}}{1-x^j}\right)\cdot F(x) = F'(x)$

即 $\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{jx^{j-1}}{1-x^j}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}A(n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} nA(n)x^{n-1}$

比较两边 x^k 的系数，可得到 $A(n)$ 的递推关系.

(以上讨论不严格，形式上的讨论，有兴趣同学可以试推出这个递推关系)

第二种~~的~~递推

设 $A_k(m)$ 是将m分成至多k个正整数之和的可能性

$A_1(m)=1$ $\qquad A_m(m)=A(m)$

则 $A_k(m)=A_{k-1}(m)+A_k(m-k)$

例 $A_{14}(14)=A_{13}(14)+1=A_{12}(14)+1+1=A_{11}(14)+A_{12}(2)+2$

$=A_{11}(14)+4=A_{10}(14)+A_{11}(3)+4=A_{10}(14)+7=A_9(14)+A_{10}(4)$

$+7=A_9(14)+12=A_8(14)+A_9(5)+12=A_8(14)+19$

$=\cdots=135$