答疑

问题1. R是含幺环，一般$R[x]$的定义代入$x=a$需要考虑R的交换性.

例如：高等代数中λ-矩阵$A(\lambda)$，任一$A(\lambda)$可写成

$$A(\lambda)=A_n\lambda^n+A_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+A_1\lambda+A_0$$，A_i是m阶方阵

若令$R=M_m(\mathbb{R})$，则$A(\lambda)\in R[\lambda]$　给定$\lambda=N\in M_m(\mathbb{R})$

此时，存在左、右代入的不同

$$A_r(N)=A_n\cdot N^n+A_{n-1}N^{n-1}+\cdots+A_1N+A_0$$，若写$A(\lambda)$如下

$$A(\lambda)=\lambda^nA_n+\cdots+\lambda A_1+A_0$$

则$A_l(N)=N^n\cdot A_n+\cdots+N\cdot A_1+A_0$

一般地　$A_r(N)\neq A_l(N)$

另外，考虑$A(\lambda)B(\lambda)$　　$A(\lambda),B(\lambda)\in R[\lambda]$，$N\in M_m(\mathbb{R})$

令$A(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$　则$C_l(N)\neq$可能不等于$A_l(N)B_l(N)$

$C_r(N)\neq A_r(N)B_r(N)$

注记：λ-矩阵也可以看作主理想整环上矩阵.

例如 $\begin{pmatrix}\lambda^2+1 & \lambda-1\\ 2\lambda & \lambda^3+3\end{pmatrix}$　$\mathbb{F}[\lambda]=D$，$M_{2\times2}(D)$中元素.($\mathbb{F}$域)

给定域$\mathbb{F}$上n阶阵$M\in M_n(\mathbb{F})$，M可看成一个线性变换$T: V=\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{F}^n=V$，这诱导了一个多项式$p(T)$看成$V$上线性变换（$T^m=T\circ T\circ\cdots\circ T$）$\Rightarrow$ V是一个$\mathbb{F}[T]$-模（即一个环同态$\mathbb{F}[T]\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$）设$\{v_1,\cdots,v_n\}$是$V$的一组基（$V$作为向量空间的基），设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是自由模$(\mathbb{F}[T])^n$的标准基（作为自由模的基）定义$\phi:(\mathbb{F}[T])^n\longrightarrow V$

$\phi(e_i)=v_i$ $i=1,\cdots,n$，它是$\mathbb{F}[T]$-模同态

定理 $\ker\phi$是一个自由模，基为$f_i=Te_i-\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j, i=1,\cdots,n$

这里$A=(a_{ij})$是T关于基$\{v_1,\cdots,v_n\}$的表示矩阵

证明：因为$T(v_i)=\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$

$$\phi(f_i)=\phi(Te_i)-\sum a_{ij}\phi(e_j)=T(v_i)-\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j=0$$

$\Rightarrow f_i\in\ker\phi$ $i=1,\cdots,n$

$\forall z\in\ker\phi$，$z=\sum_{i=1}^n b_i(T)e_i$，$b_i(T)\in\mathbb{F}[T]$.

因为$Te_i=f_i+\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ $i=1,\cdots,n$，

$$z=\sum_{i=1}^n g_i(T)f_i+\sum_{i=1}^n c_ie_i,\ c_i\in\mathbb{F}\quad i=1,\cdots,n.$$

但是$\phi(z)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^n c_iv_i=0\Rightarrow c_i=0$ $i=1,\cdots,n$

即$z=\sum_{i=1}^n g_i(T)f_i\Rightarrow\{f_1,\cdots,f_n\}$是$\ker\phi$的生成元

它们也是$\mathbb{F}[T]$-无关的，即

若 $\sum_{i=1}^{n} b_i(T) f_i = 0$ 代入 $f_i = Te_i - \sum a_{ij} e_j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i(T) T e_i = \sum_{i,j=1}^{n} b_i(T) a_{ij} e_j$$

由 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是基，得 $b_i(T) T = \sum_{j=1}^{n} b_j(T) a_{ij}$

$\Rightarrow b_i(T) = 0 \quad i = 1, \cdots, n$ （取 $b_i(T)$ 中次数最大的，得到矛盾）.

由定理，得（令 $R = \mathbb{F}[T]$），正合列，令 $T = \lambda$.

$$R^n \xrightarrow{\lambda I - A} R^n \xrightarrow{\phi} V$$

若存在 λ-矩阵 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ 给出自由模同构

$$P(\lambda): R^n \longrightarrow R^n, \quad Q(\lambda): R^n \longrightarrow R^n$$

得

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "\lambda I - A"] \arrow[d, "P(\lambda)"'] & R^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "Q(\lambda)"] & V \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{F}[\lambda]\text{-模同构.} \arrow[l] \\
R^n \arrow[r, "M(\lambda)"] & R^n \arrow[r, "\phi"] & V &
\end{tikzcd}$$

$M(\lambda) = Q^{-1}(\lambda)(\lambda I - A) P(\lambda)$

特别地 $\lambda I - A$ 和 $\lambda I - B$ 相抵 $\Leftrightarrow$ A 与 B 相似，因为

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "\lambda I - A"] \arrow[d, "P(\lambda)"'] & R^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "Q(\lambda)"] & V \arrow[d, "\wr"] & \lambda\text{的作用} \arrow[l] \\
R^n \arrow[r, "\lambda I - B"] & R^n \arrow[r, "\phi"] & V & \lambda\text{的作用} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\lambda(v_1, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_n) A$

$\lambda(v_1, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_n) B$

因为主理想整环 $\mathbb{F}[\lambda]$ 上 n 阶矩阵有 Smith 标准形，

$$\Rightarrow M(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r.$$

$$\Rightarrow V \cong \frac{\mathbb{F}[\lambda]}{(d_1(\lambda))} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{F}[\lambda]}{(d_r(\lambda))}.$$ 令 $\deg d_i(\lambda)=s_i$, $V_i=$

$\frac{\mathbb{F}[\lambda]}{(d_i(\lambda))}$ 是个 s_i 维 $\mathbb{F}$-空间 $V\cong V_1\oplus\cdots\oplus V_r$.

$\Rightarrow$ 取 V_i 上的基 $\{\bar{1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \cdots, \bar{\lambda}^{s_i-1}\} \Rightarrow A$ 相似于 $\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_r \end{pmatrix}$

M_i Frobenius 友阵.

注：主理想环上模结构可参考"代数学引论".