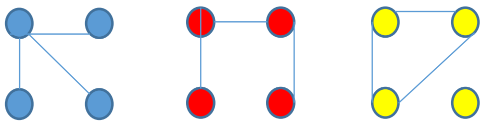
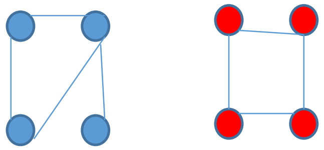
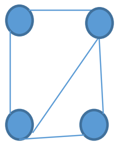
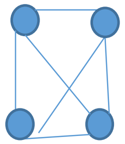
图论第一次作业

1.1 举出两个可以化成图论模型的实际问题

略

1.2 证明$|E(G)| \le \binom{\upsilon}{2}$,其中$G$是单图

证明：（思路）根据单图无环无重边的特点，所以|E(G)|最大的情形为任意两个顶点间有一条边相连，即极端情况为$\binom{\upsilon}{2}$。

- 1.4 画出不同构的一切四顶单图
- 0条边： 1条边：
- 2条边： 3条边：
- 4条边： 5条边：
- 6条边：

1.10 $G \cong H$当且仅当存在可逆映射$\theta: V(G) \to V(H)$，使得$uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$，其中$G$和$H$是单图。

- 必要性
  - 若$G \cong H$，由定义可得，存在可逆映射$\theta: V(G) \to V(H)$, $\varphi: E(G) \to E(H)$, 使得对任意$e = uv \in E(G)$时，有 $\varphi(e) = \theta(u)\theta(v) \in E(H)$，所以当$uv \in E(G) \Rightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$。
  - 当$\theta(u)\theta(v) \in E(H)$，由$\varphi$的可逆性，存在唯一的$e'$使得$\varphi(e') = \theta(u)\theta(v)$，易知$e' = uv$，所以$\theta(u)\theta(v) \in E(H) \Rightarrow uv \in E(G)$
- 充分性
  - 对任意$e = uv \in E(G)$，定义$\varphi: E(G) \to E(H)$，使得$\varphi(e) = \theta(u)\theta(v)$，则只需证$\varphi$是一一映射即可。
  - 由于θ是一一映射，故对$\theta(u)\theta(v) \in E(H)$，有唯一的$e = uv \in E(G)$与之对应，因此$\varphi$为单射。
  - 对任意$xy \in E(H)$，存在$u, v \in V(G)$，使得$\theta(u) = x, \theta(v) = y$，则$e = uv \in E(G)$，且$\varphi(e) = \theta(u)\theta(v) = xy$，故$\varphi$为满射，因此$\varphi$是一一映射，故$G \cong H$

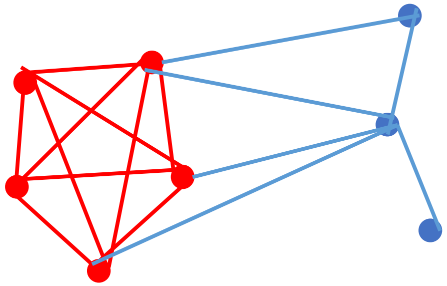
1.12求证(a)$\epsilon(K_{m,n}) = mn$，(b)G是完全二分图，则$\epsilon(G) \leq \frac{1}{4}[v(G)]^2$

- (a)对于$K_{m,n}$，将顶集分为X和Y，使得$X \cup Y = V(K_{m,n})$，$X \cap Y = \emptyset$，$|X| = m$，$|Y| = n$，对于X中的每一顶点，都和Y中所有顶点相连，所以$\epsilon(K_{m,n}) = mn$
- (b)设G的顶划分为X, Y，$|X| = m, |Y| = v - m$，则$\epsilon(G) \leq$
- $\epsilon(K_{m,v\text{-}m})$=$(v - m)m \leq \frac{v^2}{4}$

1.35 证明：（a）7，6，5，4，3，3，2和 6，6，5，4，3，3，1不是单图的次数序列。（b）若 $d_1, d_2, \cdots, d_n$是单图的次数序列且 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$，则 $\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数，且对 $1 \leq k \leq n$，

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$$

- 证明：
  - (a)第一个序列考虑度数7,第二个序列考虑6,6,1
  - (b)将顶点v分成两部分v’和v’’
  - $v' = \{v \mid v = v_i, 1 \leq i \leq k\}$,
  - $v'' = \{v \mid v = v_i, k < i \leq n\}$
  - 以v’点为顶的原图的导出子图度数之和小于 $k(k-1)$
  - 然后考虑剩下的点贡献给这k个点的度数之和最大可能为 $\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$



- 1.37：证明无环图G含二分生成子图H，使得$d_{H(v)} \geq \frac{1}{2} d_{G(v)}$对每个$v \in V(G)$成立。
- 证明：
  - 任取X, Y满足$X \cup Y = V(G)$， $X \cap Y = \emptyset$， 且令X,Y中的顶两两不相邻，所得的图是H且是二分子图，令H是G边数最多的二分生成子图，若存在$v \in V(G)$，使得$d_H(v) < \frac{1}{2} d_G(v)$，不妨设$v \in X$，则将v所连的边取消，换成$d_G(v) - d_H(v)$条边，且将v加入Y中，于是H的边数增加了$d_G(v) - 2d_H(v)$条，与H边数最多矛盾，故原命题成立。