2. 边界点引理和强极值原理

令 反过来若 在边界上达极大(小)值则 边界外法向导数 >0 $(<)$

$\langle \nabla \cdot , \vec{n} \rangle$

如：
$$w(x) = e^{\theta(|x-x_0|^2 - r^2)} - 1, \quad x \in B_r(x_0) := B_r, \ \theta > 0.$$

则
$$w(x) < 0 = w|_{\partial B_r}, \quad \forall x \in \Omega, = B_r$$

且对于∂B_r上的向量场ν, 只要它与Ω的外单位法向场$\vec{n}$的夹角小于$\frac{\pi}{2}$， 均有

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = e^{\theta(|x-x_0|^2-1)} 2\theta (x - x_0) \cdot \nu > 0, \quad on \quad \partial B_r.$$

计算 反过来考虑 w 满足的方程

$$
\begin{aligned}
Lw &= [-4\theta^2 \sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(x-x_0)_i(x-x_0)_j - (\sum_{i=1}^{n} 2\theta a^{ii} - C) \\
&\quad +2\theta \sum_{i=1}^{n} b^i (x-x_0)_i] e^{\theta(|x-x_0|^2-r^2)} - C \\
&\leq \lambda(x)[-4\theta^2 \sum_{ij=1}^{n} \frac{a^{ij}}{\lambda(x)}(x-x_0)_i(x-x_0)_j \\
&\quad -(\sum_{i=1}^{n} 2\theta \frac{a^{ii}}{\lambda(x)} - \frac{C}{\lambda(x)}) \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{n} \theta \frac{b^i}{\lambda(x)}(x-x_0)_i] e^{\theta(|x-x_0|^2-r^2)} \\
&< 0 \quad in \quad B_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0). \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

有正下界

上式最后一个不等式需要取$\theta > 0$充分大, 并且需要假设L的系数满足(4.1)和条件

$$\frac{a^{ii}(x)}{\lambda(x)}, \frac{b^{i}(x)}{\lambda(x)} \text{ 和 } \frac{C(x)}{\lambda(x)} \text{均在}\Omega\text{有界}, i = 1, 2, \cdots, n,$$
$$C(x)\text{在}\Omega\text{中非负}. \tag{4.4}$$

受此启发， 我们有 若 $Lu<0$ 且 边界取极值

则 边界外法向导数有性质

与 Newman 条件问题联系

Lemma

(*Hopf: proc Amer Math Soc, 3 (1952), 781-793*)**4.3**
设$\Omega \subset R^n$为开集, 它在$y_0 \in \partial\Omega$满足内部球条件, L的系数满足(4.1)和(4.4), 并且存在$\delta > 0$使得

$u \in C^2(\Omega \cap B_\delta(y_0)) \cap C(\overline{\Omega \cap B_\delta(y_0)})$ 满足$Lu \leq 0$ *in* $\Omega \cap B_\delta(y_0)$.

如果 $u(y_0) > u(x)$, $C(x)u(y_0) \geq 0$, $\forall x \in \Omega \cap B_\delta(y_0)$, 则

$$\liminf_{t \to 0^-} \frac{u(y_0) - u(y_0 + t\nu)}{|t|} > 0,$$

直接 lim 可能不存在

严格>0

其中向量场ν与Ω的外单位法向场$\vec{n}$的夹角小于$\frac{\pi}{2}$. 特别当$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{x=y_0}$存在时，则它一定大于零。

证明 Ω在$y_0 \in \partial\Omega$处满足内部球条件的意思是: 存在$B_r(x_0) \subset \Omega$使得$\overline{B_r(x_0)} \cap \partial\Omega = \{y_0\}$. 不妨设$B_r(x_0) \subset B_\delta(y_0)$, 否则取更小的$r > 0$即可.
我们希望构造$\bar{w} \in C^2(\overline{B_r(x_0)})$使得$\forall 0 < \varepsilon << 1$,

(a) $u + \varepsilon\bar{w} \le u(y_0), \ in\ B_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0)$

(b) $(u + \varepsilon\bar{w})|_{x=y_0} = u(y_0)$.

由此立即得

$$\liminf_{t\to 0^-}\frac{u(y_0)-u(y_0+t\nu)}{|t|}\geq -\varepsilon\frac{\partial\bar{w}}{\partial\nu}|_{x=y_0},$$

于是只要$\bar{w}$ 满足

$$(c)\qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial\nu}|_{x=y_0}<0.$$

受上述函数$w(x)$的性质之启发, 可设

$$\bar{w}(x)=e^{\theta(r^2-|x-x_0|^2)}-1,\ ;x\in B_r(x_0),\ \theta>0.$$

则$\bar{w}$满足(b)和(c).

类似于(4.3)，我们有

$$
\begin{aligned}
L\bar{w} &= [-4\theta^2\sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(x-x_0)_i(x-x_0)_j + (\sum_{i=1}^{n} 2\theta a^{ii} + C) \\
&\quad -2\theta\sum_{i=1}^{n} b^i(x-x_0)_i]e^{\theta(r^2-|x-x_0|^2)} - C \\
&\leq \lambda(x)[-4\theta^2\sum_{ij=1}^{n}\frac{a^{ij}}{\lambda(x)}(x-x_0)_i(x-x_0)_j \\
&\quad +(\sum_{i=1}^{n} 2\theta\frac{a^{ii}}{\lambda(x)} + \frac{C}{\lambda(x)}) \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n}\theta\frac{b^i}{\lambda(x)}(x-x_0)_i]e^{\theta(r^2-|x-x_0|^2-1)} \\
&< 0 \quad in \quad B_r(x_0)\backslash B_{r/2}(x_0).
\end{aligned}
$$

所以, $\forall \varepsilon \in (0,1)$, 有

$$\begin{aligned} L(\varepsilon \bar{w} + u - u(y_0)) &= \varepsilon L\bar{w} + Lu - C(x)u(y_0) \\ &< 0 + 0 - C(x)u(y_0) \\ &\leq 0 \quad in \quad B_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0). \end{aligned}$$

又

$$u(y_0) > u(x), \quad \forall x \in \Omega \cap B_\delta(y_0),$$

故可取$\varepsilon \in (0,1)$使得

$$\varepsilon \bar{w} + u - u(y_0) < 0, \quad on \quad \partial B_{r/2}(x_0).$$

而

$$\varepsilon \bar{w} + u - u(y_0) \leq \varepsilon \bar{w} = 0, \quad on \quad \partial B_r(x_0).$$

所以由弱极值原理(定理4.3)有,

$$\max_{\overline{B}_r(x_0) \backslash B_{r/2}(x_0)} \varepsilon \bar{w} + u - u(y_0) \leq 0,$$

因此(a)成立.

Theorem

4.5 设$\Omega \subset R^n$为连通开集, L的系数满足(4.1)和(4.4), $u \in C^2(\Omega)$ 满足

$$Lu \le 0 \quad (or\ Lu \ge 0) \quad in \quad \Omega.$$

如果存在$x_0 \in \Omega$使得

$$u(x_0) = \max_{\Omega} u \quad (or\ \ u(x_0) = \min_{\Omega} u),$$

且

$$C(x)u(x_0) \ge 0 \quad (or\ \ C(x)u(x_0) \le 0) \quad in \quad \Omega,$$

则 $u(x) = u(x_0)$ in Ω.

证明. 只要对$\max_\Omega u$的情况证明即可。反设

$$M := \{x \in \Omega : \; u(x) = u(x_0)\} \neq \Omega,$$

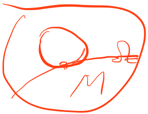
则

$$\Omega \backslash M = \{x \in \Omega : \; u(x) < u(x_0)\}$$

为非空开集. 因为Ω是连通的， 可 取$\bar{x} \in \Omega \backslash M$使得

$$dist(\bar{x}, \partial M \cap \Omega) < dist(\bar{x}, \partial\Omega),$$

则存在球$B_r(\bar{x})$和点$y_0 \in \partial B_r(\bar{x}) \cap \partial M \cap \Omega$使得



$$u(x) < u(y_0) = u(x_0), \quad in \quad B_r(\bar{x}),$$

于是由引理4.4，$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{x=y_0} > 0$. 另一方面$y_0$是极大值点，故$\nabla u(y_0) = 0$, 从而矛盾。

球的外法向

Corollary

4.3 设Ω为有界连通开且在其边界每一点都满足内部球条件， L的系数满足(4.1)和(4.4), $\alpha(x) \geq 0$ *on* $\partial\Omega$. 如果$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$满足

$$\begin{cases} Lu \leq 0 & in \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha(x) u \leq 0 & on \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

则$u(x) \leq 0$ *in* Ω, 或$u \equiv$ *a constant in* Ω.

证明. 反设$\max_{\bar{\Omega}} u > 0$, 令

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : \ u(x) < \max_{\bar{\Omega}} u\}.$$

分两种情况讨论之。
若$\Omega_1 = \Omega$，因为Ω有界， 则存在$x_0 \in \partial\Omega$使得$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u > 0$, 由边界点引理知$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{x=x_0} > 0$, 这与边界条件矛盾。
若$\Omega_1 \neq \Omega$且$\Omega_1 \neq$空集， 则存在$x_0 \in \Omega \cap \partial\Omega_1$使得$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u > 0$, 从而由定理4.5知：
$u \equiv$ a constant in Ω.

Corollary

4.4 条件同*Corollary 4.3* 一样。 考虑混合边值问题

$$\begin{cases} Lu = f(x) \quad in \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha(x)u = g(x) \quad on \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

(i) 问题*(4.5)*在$C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$中的解除相差一个常数外是唯一的;
(ii) 如果存在$x_0 \in \Omega$使得$C(x_0) > 0$, 或存在$x_0 \in \partial\Omega$使得$\alpha(x_0) > 0$, 则问题*(4.5)*在$C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$中的解是唯一的.

证明. (i) 设有两个解u_1, u_2. 对函数$u_1 - u_2$和$u_2 - u_1$应用Corollary4.3即可。

(ii) 反设有两个解， 由(1)可设这两个解之差为一常数c, 代入(4.5)得

$$C(x)c = 0, \forall x \in \Omega; \quad \alpha(x)c = 0, \forall x \in \partial\Omega.$$

由此得$c = 0$.

作业18:

Evans' Book: Problem 6.6: 5,6,10, 13, 15.

最后介绍著名的Alexandrov极值原理.

Theorem

4.6 设$\Omega \subset R^n$为有界开集, L的系数满足(4.1), $C(x) \geq 0 \ in \ \Omega$ 和

$$b^i(x)/D^*(x),\ f(x)/D^*(x) \in L^n(\Omega), i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中$D^*(x) = [\det(a^{ij}(x))]^{1/n}$. 如果$u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{2,n}_{loc}(\Omega)$满足

$$Lu \leq 0 \quad a.e. \quad in \quad \Omega,$$

则

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \bar{C}||\frac{f}{D^*(x)}||_{L^n(\Omega)},$$

其中$\bar{C} = C(n, diam(\Omega), \max_{1\leq i\leq n}||\frac{b^i}{D^*(x)}||_{L^n(\Omega)})$.