习题5.4: 2, 4, 7(i, iii, iv, vi, viii), 8(i, v, vi, viii), 10(i, iii). 11(ii) > 见讲稿.

第4节 留数定理

设 $a\in\mathbb{C}$ 是 f 的孤立奇点，则 f 在 a 附近可以表示为 (∃δ, 使得)

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots,\quad z\in B^*(a,\delta) \qquad (1)$$

负一次项系数 c_{-1} 叫做 f 在 a 的留数(残数)，记做

$$\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}.$$

展式(1)在 $B^*(a,\delta)$ 内内闭一致收敛，因而对 $\forall\rho\in(0,\delta)$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^n=c_{-1}.$$

即

$$\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz.$$

若 a 为 f 的可去奇点，则 f 可以看成 $B(a,\delta)$ 上的全纯函数，因而 $\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}=0$.

命题 5.4.2. 若 a 为 f 的 m 级极点，则

$$\mathrm{Res}(f,a)=[f(z)(z-a)^m]^{(m-1)}/(m-1)! \qquad (2)$$

证. $\exists\delta>0$, s.t.

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m},\quad z\in B^*(a,\delta),\quad g\in H(B(a,\delta)),\ g(a)\neq0.$$

因而 $g(z)$ 在 a 的 Taylor 展式的 $m-1$ 次项系数即为 f 在 a 的留数. 即

$$\mathrm{Res}(f,a)=g^{(m-1)}(a)/(m-1)!$$

从而

$$\mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}[f(z)(z-a)^m]^{(m-1)}/(m-1)!$$

证毕.

(重要)注记: 只要 a 是 f 的极点，f 可以表示成

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m},\quad g(z)\in H(B(a,\delta)),$$

则不论 $g(a)$ 是否为 0，(2)式仍然正确. 这也就是说，当 a 是 f 的阶小于 m 的极点时，(2)仍是正确的. 这有个好处:

$\frac{\sin z}{z^6}$ 以 0 为 5 阶极点，则也由命题5.4.2

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z^6},0\right)=\lim_{z\to0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{(4)}/4!$$

但这很麻烦. 而用下面的法则相当简单:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z^6}, 0\right) = \lim_{z\to 0} (\sin z)^{(5)}/5! = \frac{1}{5!}.$$

命题 5.4.3. 若 $f(z)$ 以 a 为一阶极点, 则

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z\to a} (z-a)f(z).$$

例: $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = \lim_{z\to i} (z-i)/[(z+i)(z-i)] = \frac{1}{2i}.$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, -i\right) = -\frac{1}{2i}.$

命题 5.4.4. 若 $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, $g, h\in H(B(a,\delta))$, $g(a)\neq 0$, 且 a 是 h 的一阶零点. 则

$$\mathrm{Res}(f(z), a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

证: 由命题5.4.2直接得到.

设 ∞ 是 f 的孤立奇点, 即 $\exists R>0$, s.t. $f\in B^*(\infty, R)$. 这时 f 在 ∞ 的留数指的是复数

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} f(z)\,dz \quad (\rho > R)$$

记之为 $\mathrm{Res}(f,\infty)$. 注意与有限点 a 留数的定义相比较, 这里 ρ 要充分大, 且多了个"负号". 另外 ∞ 的留数是 f 在 ∞ 处 Laurent 展式中的负一次项系数 C_{-1} 的反号数 $-C_{-1}$. 即

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -C_{-1}$$

*关于 ∞ 的留数, 有公式

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}, 0\right).$$

证: 设 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$, $|z|>R$. 则 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-C_{-1}$.

又

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+2},\quad |z|<\frac{1}{R},$$

可见 $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=C_{-1}$. 从而有

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right).$$

证之：

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)\,dz \quad (逆时针)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{\rho}}f\left(\frac{1}{w}\right)\cdot -\frac{1}{w^2}\,dw \quad (顺时针)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{\rho}}f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\,dw \quad (逆时针)$$

$$=-\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right).$$

例. $\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{\sin z},0\right)=\left.\frac{e^z}{(\sin z)'}\right|_0=1.$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2},-i\right)=\left[\frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\right]'_{z=-i}$$

$$=\left[e^{iz-\log z-\log(z-i)^2}\right]'_{-i}$$

$$=\left(i-\frac{1}{z}-\frac{2}{z-i}\right)\left(\frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\right)\Big|_{z=-i}$$

$$=\left(i-i+\frac{2}{+2i}\right)\left(\frac{e}{-i(-4)}\right)$$

$$=(-i)\times\frac{e}{4i}=-\frac{e}{4}.$$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{Log}\frac{1-\alpha z}{1-\beta z},0\right)$ (习题7(iv))

易见 0是 $f(z)=\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{Log}\frac{1+\alpha z}{1-\beta z},0)$ 的本性奇点. 这时, 上述方法失效. 易见在 $B^*(0,\delta)$, $\delta=\min\{\frac{1}{|\alpha|},\frac{1}{|\beta|}\}$, 上 $f(z)$ 全纯. 下面来求 f 在 $B^*(0,\delta)$ 上的 Laurent 展式.

$\mathrm{Log}\frac{1-\alpha z}{1-\beta z}$ 在 $B^*(0,\delta)$ 上有单值分支, 且无论取哪个分支, 不影响 $f(z)$ 在0的留数 (即不影响 $f(z)$ 的 Laurent 展式的 C_{-1}. 事实上由

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right)\mathrm{Log}\frac{1-\alpha z}{1-\beta z}$$

可以看出 $\mathrm{Log}\frac{1-\alpha z}{1-\beta z}$ 的每一个分支在0的值只影响 $z^{-n}, n\geq 2$，的系数。取 $\mathrm{Log}\frac{1-\alpha z}{1-\beta z}$ 在 $B(0,\delta)$ 的分支 g，s.t. $g(0)=0$。则

$$g(z)=\log(1-\alpha z)-\log(1-\beta z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{n}z^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n-\alpha^n}{n}z^n$$

故

$$f(z)=\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{3!z^5}+\cdots+\frac{1}{n!z^{n+2}}+\cdots\right)\left((\beta-\alpha)z+\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}z^2+\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}z^3+\cdots\right)$$

因而 $\mathrm{Res}(f,0)=(\beta-\alpha)+\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\frac{\beta^3-\alpha^3}{3!}+\cdots+\frac{\beta^n-\alpha^n}{n!}+\cdots$

$$=e^{\beta}-e^{\alpha}.$$

留数定理：设 D 是复平面上由有限条可求长 Jordan 曲线围成的有界区域，f 在 D 上除去孤立奇点 $z_1,\cdots,z_n$ 外处处全纯，并在 $\overline{D}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上连续。则

$$\int_{\partial D}f(z)\,dz=2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Res}(f,z_j).$$

证：这是 Cauchy 积分定理的另一表述（定理3.2.5）.

例（习题11(iii)）. 求 $\int_{|z|=R}z^n\log\frac{z-a}{z-b}dz$ $(a\neq b,\ R>\max\{|a|,|b|\})$.

解. $\log\frac{z-a}{z-b}=\log\frac{1-a/z}{1-b/z}=\log(1-\frac{a}{z})-\log(1-\frac{b}{z})$

（这里用了题设导致的条件：$|\arg\frac{a}{z}|<\frac{\pi}{2}, |\arg\frac{b}{z}|<\frac{\pi}{2}$. 因而右端主值之差仍是左端主值. 即 $|\mathrm{Im}\log\frac{z-a}{z-b}|<\pi$）

$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b^k-a^k}{kz^k}$. 这是 $\log\frac{z-a}{z-b}$ 在 $|z|>R$ 的L展式.

从而当 $n\geq 0$ 时

$$\mathrm{Res}(z^n\log\frac{z-a}{z-b},\infty)=-C_{-1}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}.$$

$z^n\log\frac{z-a}{z-b}$ 的在 ∞ 的L展式的负一次系数

而积分值则为

$$2\pi i\times\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

当 $n\leq -1$ 时，易见 $z^n\log\frac{z-a}{z-b}$ 在 ∞ 的L展式 $C_{-1}=0$.

故积分为0.

辐角原理：设 D 是由有限条可求长曲线所围有界区域，f 在 $\overline{D}$ 上亚纯，在 ∂D 上没有极点和零点. 则：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg f(z)=\text{零点个数}-\text{极点个数}.$$

证：设 f 在 D 内所有 0 点为 $a_1,\cdots,a_m$，重数为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，
又设 f 在 D 内所有极点为 $b_1,\cdots,b_n$，重数为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，

对每个 a_i，f 在某个 $B(a_i,\delta)$ 上有表示

$$f(z)=(z-a_i)^{\alpha_i}g(z),$$

其中 $g\in H(B(a_i,\delta))$，$g(z)\neq 0$. 从而

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},a_j\right)=\alpha_j.$$

对每个 b_j，f 在某个 $B(b_j,\delta)$ 上有表示

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-b_j)^{\beta_j}},$$ 其中 $g(z)\in H(B(b_j,\delta))$. 从而

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},b_j\right)=\mathrm{Res}\left(\frac{-\beta_j}{z-b_j}+\frac{g'(z)}{g(z)},b_j\right)=-\beta_j$$

从而
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},a_j\right)+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},b_j\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j.$$

Rouche 定理：设 D 是由有限条可求长 Jordan 曲线围成的有界区域，f,g 在 $\overline{D}$ 亚纯，都在 ∂D 无极点，如果

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|,\quad z\in\partial D,$$

则 f 的零点数与极点数之差与 f 的一样.

证：留作练习.

研究型思考题：设 $a_i\in\mathbb{C}$，$|a_i|<1$，$i=1,2,3$.

$$f(z)=\frac{z-a_1}{1-\overline{a}_1 z}\cdot\frac{z-a_2}{1-\overline{a}_2}\cdot\frac{1-\overline{a}_3 z}{z-a_3}.$$

$f'(z)$ 总共有几个零点？ $f'(z)$ 有没有可能在 $|z|=1$ 上有零点？

证明：当 $f'(z)$ 在 $|z|=1$ 上无零点时，$f|_{\partial B(0,1)}$ 是保向同胚.