问题

$$(3.2)\quad \begin{cases} \text{Ł}u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

其中

$$\text{Ł}u \equiv -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

弱解的定义

$$
(3.4) \quad \begin{aligned} B(u,v) = \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} \\ + d^i(x)u) v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + c(x)uv] dx. \end{aligned}
$$

设$f \in H^{-1}(\Omega)$. 如果$u \in H_0^1(\Omega)$满足

$$
B(u,v) =< f, v >, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),
$$

则称$u$为问题(3.2)的一个弱解.

条件:

$$(3.1)\ \ a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \forall i,j = 1,2,\cdots,n;\ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2.$$

把方程$Łu = f$写成(3.9):

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} = f(x)+\sum_{i=1}^{n}(d^i(x)u)_{x_i}-\sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}-c(x)u.$$

$H^2$-局部正则性的条件:

存在$p > 2$使得 $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$,

$$(3.10) \quad \begin{cases} a^{ij} \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega), \quad d^i, b^i \in L^\infty_{loc}(\Omega) \\ d^i_{x_i}, c \in \begin{cases} L^n_{loc}(\Omega), & if \quad n \geq 3 \\ L^p_{loc}(\Omega), & if \quad n = 2 \end{cases} \end{cases}.$$

证明的主要工具：
函数$u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$关于第$i$变量步长为$h$的差商定义为

$$D_i^h u(x)=\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}.$$

记$D^h u=(D_1^h u,\cdots,D_n^h u)$.

**Theorem**

**2.22** *(i)* 设$u\in W^{1,p}(\Omega), p\in[1,\infty], \Omega_1\subset\subset\Omega$, 则

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)}\le\|D^{e_i}u\|_{L^p(\Omega)},\quad \forall h, 0<|h|<dist(\Omega_1,\partial\Omega).$$

*(ii)* 设$p\in(1,\infty), \Omega_1\subset\subset\Omega, u\in L^p(\Omega)$且存在常数$C_i,\delta>0$使得

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)}\le C_i,\quad \forall h, 0<|h|<\delta,$$

则弱导数$D^{e_i}u$存在属于$L^p(\Omega_1)$, 且$\|D^{e_i}u\|_{L^p(\Omega_1)}\le C_i$.

## Theorem

**3.8** 设$\Omega \subset R^n$为开集，$Ł$的系数满足*(3.1)*和*(3.10)*. 如果 $f \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$是方程$Łu = f$的局部解，则$u \in H^2_{loc}(\Omega)$， 且$\forall$ 开集 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 均有

$$||u||_{H^2(\Omega_1)} \leq C(\Omega_1, \Omega_2, n, Ł)[||u||_{L^2(\Omega_2)} + ||f||_{L^2(\Omega_2)}.]$$

## Theorem

**3.9** 设$\Omega\subset R^n$为开集，$m$为非负整数, $Ł$的系数 $d^i$, $a^{ij}\in W^{m+1,\infty}_{loc}(\Omega)$满足*(3.1)*和

$$b^i, c\in W^{m,\infty}_{loc}(\Omega),\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

如果 $f\in H^m_{loc}(\Omega)$, $u\in H^1_{loc}(\Omega)$ 是方程$Łu=f$ 的局部解，则$u\in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$， 且$\forall$ 开集 $\Omega_1\subset\subset\Omega_2\subset\subset\Omega$, 均有

$$(3.13)\ \ ||u||_{H^{m+2}(\Omega_1)}\le C(\Omega_1,\Omega_2,n,m,Ł)[||u||_{L^2(\Omega_2)}+||f||_{H^m(\Omega_2)}].$$

## 3.4 弱解的整体正则性

本节利用有限覆盖和边界拉直技巧，结合上一节的结果和方法， 证明弱解的整体正则性。为此， 我们需要类似(3.10)的条件:

存在$p > 2$使得 $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$,

$$\begin{cases} a^{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad d^i, b^i \in L^\infty(\Omega) \\ d^i_{x_i}, c \in \begin{cases} L^n(\Omega), & \text{if} \quad n \geq 3 \\ L^p(\Omega), & \text{if} \quad n = 2 \end{cases} \end{cases} \tag{3.15}$$

**Theorem**

**3.10** 设$\Omega \subset R^n$为有界开集，$\partial\Omega \in C^2$, $Ł$的系数满足*(3.1)*和*(3.15)*. 如果 $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$是方程$Łu = f$的解*(*即问题*(3.2)*的弱解*)*，则$u \in H^2(\Omega)$，且

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega, n, Ł)[||u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}].$$

**证明. (1).** 因为$\Omega$有界，条件(3.15)比(3.10)强, 故由推论3.1,

$$\frac{\lambda}{2}||Du||_{L^2(\Omega)} - C(n, Ł)||u||_{L^2(\Omega)} \leq B(u, u) = \int_\Omega fudx,$$

故

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C(n, Ł)[||u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}],$$

于是只要证

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C(n,\Omega,Ł)[||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}].$$

转化为 之后才可以. 因为右侧 被 u $H^1(\Omega)$ 和 f 控制

由Hölder 不等式和条件(3.15)知：方程(3.9)右端属于$L^2(\Omega)$，因此只要对$d^i, b^i, c \equiv 0$的情况证明上式即可。 后面的证明总是做这个假设。而由定理3.8和有限覆盖定理， 只要证明：$\forall x_0 \in \partial\Omega$, 存在$\delta > 0$ 使得

$$||u||_{H^2(\Omega \bigcap B(x_0,\delta))} \leq C(n,\Omega,Ł)[||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}]. \quad (3.16)$$

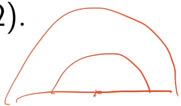
得到去掉一些球之后
的内部关系

**(2).** 先设

$$\Omega = B_s^+ \equiv B(0,s) \bigcap R_+^n, \quad s > 0$$

并设$u \in H^1(\Omega)$, $u = 0$ $on$ $\partial\Omega \bigcap \{x_n = 0\}$满足

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$



令$\Omega_1 = B_{s/2}^+$, 欲证$u \in H^2(\Omega_1)$且

$$||u||_{H^2(\Omega_1)} \leq C(n, \Omega, \L)[||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}]. \qquad (3.17)$$

使用引理3.2类似的证明方法。 取$v(x) = -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$，其中

$$\xi \in C_0^\infty(B(0,s)), \quad 0 \le \xi \le 1, \quad \xi \equiv 1 \quad in \quad B(0,s/2).$$

因为

- $u = 0 \quad on \quad \partial\Omega \bigcap \{x_0 = 0\}$,
- 当$k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$时, $v = 0$ $on$ $\partial\Omega$ if $|h| < \frac{1}{2n} dist(Supp\, \xi, \partial B(0,s))$.

于是 $v \in H_0^1(\Omega)$, 代入上式， 类似引理3.2的证明， 可得

$$\left(\int_{\Omega_1} |D_k^h Du|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le C(n, s, Ł)[||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}].$$

所以，由定理2.22(ii)知$\frac{\partial u}{\partial x_k} \in H^1(\Omega_1)$, 且

$$\sum_{2n > l+k \geq 2} ||u_{x_l x_k}||_{L^2(\Omega_1)} \leq C(n, \Omega, \text{Ł})[||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}]. \tag{3.18}$$

因此， 为证(3.17), 只要证

$$||u_{x_n x_n}||_{L^2(\Omega_1)} \leq C(n, \Omega, \text{Ł})[||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}].$$

为此， 只要利用(3.18)可将方程$\text{Ł} u = f$写为

$$a^{nn} u_{x_n x_n} = -f - \sum_{l,k=1}^{n} a^{lk}_{x_k} u_{x_l} - \sum_{2n > l+k \geq 2} a^{lk} u_{x_l x_k},$$

并注意(3.1)推出 $a^{nn} \geq \lambda$, 于是

$$|u_{x_n x_n}| \leq \frac{C(n, \text{Ł})}{\lambda}[|f| + |Du| + \sum_{2n > l+k \geq 2} |u_{x_l x_k}|,$$

由此和(3.18)立即可得所需的结论(3.17)。

**(3).** 下证(3.16). $\forall x_0 \in \partial\Omega$, 因为$\partial\Omega \in C^2$, 故存在$r > 0$和可逆的映射

$$\phi:\ \Omega\bigcap B(x_0,r) \to \phi(\Omega\bigcap B(x_0,r)) \subset B^+_{\frac{1}{2}}$$

使

$$\phi(x_0) = 0,\quad \phi(\overset{\partial\Omega}{\cancel{\Omega}}\bigcap B(x_0,r)) \subset \{x_n = 0\}.$$

选择$s > 0$ 使得 $B^+_s \subset \phi(\Omega\bigcap B(x_0,r))$, 令$\psi = \phi^{-1}$, 则

$$\phi \in C^2(\overline{\Omega\bigcap B(x_0,r)}), \psi \in C^2(\overline{B^+_s}).$$

令$v(y) = u(\psi(y))$, 则$u(x) = v(\phi(x))$ 且当$y \in B^+_s$时, 有弱导数的连锁规则

$$\frac{\partial v}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}.$$

所以$v \in H^1(\Omega)$， $v = 0$ on $\partial B_s^+ \cap \{y_n = 0\}$, 而且$v(y)$ 在$B_s^+$上满足与 方程$Łu = f$相同类型的方程。 事实上，记$E = \psi(B_s^+)$, 则$E \subset \Omega \bigcap B(x_0, r)$是开集。 由于$Łu = f$ in $\Omega$, 所以

$$\int_E \sum_{l,k=1}^n a^{lk} u_{x_l} \eta_k dx = \int_E f \eta dx, \quad \forall \eta \in H_0^1(E).$$

而令$x = \psi(y)$,我们有

$$\begin{aligned} \int_E f(x)\eta(x)dx &= \int_{B_s^+} f(\psi(y))\eta(\psi(y))|detD\psi(y)|dy \\ &= \int_{B_s^+} F(y)\varphi(y)dy, \end{aligned}$$

其中$F(y) \equiv f(\psi(y))|detD\psi(y)|$, $\varphi(y) \equiv \eta(\psi(y))$; 同样

$$\begin{aligned}
\int_E \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_j} \eta_{x_i} dx &= \int_{B_s^+} \sum_{i,j=1,l,m}^{n} a^{ij}(\psi(y)) v(y)_{y_l} (\phi_l)_{x_j} \\
&\cdot \quad \eta_{y_m} (\phi_m)_{x_i} |detD\psi(y)| dy \\
&= \int_{B_s^+} \sum_{l,m} A^{lm}(y) v_{y_l} \varphi_{y_m} dy,
\end{aligned}$$

其中$v(y) \equiv u(\psi(y))$

$$A^{lm}(y) \equiv \sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(\psi(y))(\phi_l)_{x_j}(\phi_m)_{x_i} |\det D\psi(y)|.$$

因为$\psi, \phi \in C^2$互为可逆， 所以$F \in L^2(B_s^+)$且存在常数$\lambda_1 > 0$使得

$$\lambda_1 \le |\det D\psi(y)| \le \frac{1}{\lambda_1} \quad in \quad B_s^+.$$

又$A(y)=[A_{lm}(y)]=|\det D\psi(y)|D\phi[a^{ij}](D\phi)^{\top}$, 所以由条件（3.1）知:
$A(y)\in W^{1,\infty}(B_s^+)$, 在$B_s^+$中为半正定对称矩阵。
由于

$$detA(y)=|detD\psi|^{n-2}det[a^{ij}]\geq\lambda_1^{n-2}\lambda^n,\forall y\in B_s^+$$

所以$A(y)$的最小特征值在$B_s^+$中一定有正的下界。 即$A_{lm}(y)$在$B_s^+$中满足条件(3.1).
这就证明了$A_{lm}(y)$在$B_s^+$中满足的条件和$a_{ij}(x)$在$\Omega$中满足的条件是相同的。 由于$\eta$的任意性和$\psi\in C^2$的可逆性知$\varphi$也可以在$H_0^1(B_s^+)$中任意， 所以

$v \in H^1(B_s^+)$, $v = 0$ on $\partial B_s^+ \bigcap \{y_n = 0\}$满足

$$\int_{B_s^+} \sum_{i,j=1}^{n} A^{lm}(y) v_{y_l} \varphi_{y_m} dy = \int_{B_s^+} F(y)\varphi(y)dy, \quad \forall \varphi \in H_0^1(B_s^+).$$

现在对函数$v(y)$利用**(2)**的结论(3.17)， 有$v \in H^2(B_{s/2}^+)$且

$$||v||_{H^2(B_{s/2}^+)} \leq C(n, s, \text{Ł})[||v||_{H^1(B_s^+)} + ||F||_{L^2(B_s^+)}].$$

因为$u(x) = v(\phi(x))$, $\phi \in C^2(\bar{E})$, 故有

$$||u||_{H^2(E_{1/2})} \leq C(n, \Omega, \text{Ł})[||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}], \qquad (3.19)$$

其中$E_{1/2} = \psi(B_{s/2}^+)$. 因为$E_{1/2} \bigcap \partial\Omega \ni x_0$为$\partial\Omega$的非空相对开集， 故可取$\delta_0 > 0$使得$B(x_0, \delta_0) \cap \Omega \subset E_{1/2}$, 从而由(3.19)立即得到(3.16). □

利用定理3.10， 完全类似定理3.9的证明， 可证

**Theorem**

**3.11** 设$m$为非负整数，$\Omega \subset R^n$为有界开集， $\partial\Omega \in C^{m+2}$，$Ł$的系数$a^i$，$a^{ij} \in W^{m+1,\infty}(\Omega)$满足 *(3.1)*，$b^i, c \in W^{m,\infty}(\Omega)$，$i,j = 1,2,\cdots,n$. 如果 $f \in H^m(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ 是方程$Łu = f$的弱解（即问题（*3.2*）之解）， 则$u \in H^{m+2}(\Omega)$， 且

$$||u||_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, m, Ł)[||u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{H^m(\Omega)}].$$

最后考虑散度形式方程非齐次的Dirichelet边值问题， 即

$$\begin{cases} \text{Ł}u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

其中$g \in H^{m+2}(\Omega)$.
令$v = u - g$则$v \in H_0^1(\Omega)$且$\text{Ł}v = F := f - \text{Ł}g \in H^m(\Omega)$， 于是问题(3.20)与问题(3.2)是等价的。

所以由定理3.7和定理3.11，立即有

**Corollary**

**3.4** 设$g \in H^{m+2}(\Omega)$，$u$是问题*(3.20)*之弱解， 其它条件同定理*3.11*， 则$u \in H^{m+2}(\Omega)$， 且

$$||u||_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, m, Ł)[||u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{H^m(\Omega)} + ||g||_{H^{m+2}(\Omega)}.]$$

如果还有条件（*3.7*）成立， 则问题（*3.20*）在空间$H^{m+2}(\Omega)$中存在唯一的解。

由推论3.4和Sobolev嵌入定理， 我们立即得到

**Corollary**

**3.5** 设$\Omega \subset R^n$为有界开集, $\partial\Omega \in C^\infty$, $Ł$的系数$a^{ij}$满足*(3.1)*, $a^{ij}$, $d^i$, $b^i, c \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 如果 $f, g \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u \in H^1(\Omega)$ 是问题（*3.20*）之弱解，则$u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. 如果还有条件（*3.7*）成立， 则问题（*3.20*）在空间 $C^\infty(\bar{\Omega})$中存在唯一的解。