数学分析讲义: 第十一章 曲面, $\mathbb{R}^n$上的积分(II)

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; **《数学分析》徐森林、薛春华** 编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Oct. 2017

数学分析讲义总目录

第十一章 曲面, $\mathbb{R}^n$上的积分(II)

本章是第八章关于曲面概念和第十章关于一般测度与积分的继续——曲面和曲面积分。

关于曲面, 难点是曲面的定向。这方面大家应多读理论和例题, 多讨论, 争取至少对超曲面的定向与否问题有清楚的理解。据我所知, 在本科数学分析教材中, 把欧空间中一般流形的定向讲授得最清楚的教材是陈天权的《数学分析讲义》第三册第13章。当然无论教材还是学生自己, 都不应企图对与定向相关问题的理解一步到位。合适的学习方法是认真阅读教材、例题, 用心做好习题。本讲义将不在一般曲面的定向问题上花费很多笔墨, 而是将重点放在曲面的更基本的性质和曲面的积分理论上。与其他教材相比, 本讲义的优点是: 由于使用了Brouwer 区域不变性定理(其证明已在上一章给出), 对曲面的某些基本性质的证明就是严格、简短且自然的。

关于曲面积分, 曲面积分就是$\mathbb{R}^n$上的关于Hausdorff测度的积分, 即$\mathbb{R}^n$上的曲线、曲面积分(也称为第一型曲线、曲面积分)。因Hausdorff 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$属于一般完备测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$的特殊情形, 故我们在第十章前半学习的关于一般完备测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$上可测函数和可测函数的积分的所有性质对于Hausdorff 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$ 当然都成立。技术上需要学习的是积分换元公式及其证明。

在数学的学习和研究中, 大家或许已经体会到这样的研究方式: 一个东西能被看见(即有具体表示)与这东西存在, 虽然不能互相替代, 却几乎互相依存。“存在”本身有自己的定义, 而对它的“表示”则只是对它的描述、解释, 且一般有多个表示和解释。“表示”更多的是用于操作、计算等。对一些较难的东西, 它的“存在”有时是用它的“表示”来定义的, 只是必须证明: 所有不同的“表示”的结果(一般用等式表达)是唯一的, 即这个公共结果不依赖于“表示”的选择。我们在学习曲面和曲面积分时就会再次遇到这种现象。

本章频繁出现“曲面”和“流形”字眼, 在涉及流形上的局部分析时二者完全是一回事, 只是表达不同，但在进行曲面或流形上的第一型积分时, 对“曲面”的要求就很弱, 不需要严格满足流形的定义。毕竟, 积分是一个宏观量, 零测集对积分无影响。

关于向量值映射的记号说明: 对于向量值的映射, 我们有时把它写成列向量, 但为了书写方便, 更多时候是写成行向量，同学们在阅读上下文时容易看出这点并在涉及运算时把映射写成列(或行)的形式。

§11.1. 复习相对拓扑和同胚概念

【定义(相对开集、相对闭集、相对邻域)】 设S 是欧空间$\mathbb{R}^n$ 的任一子集。定义S 的开集、闭集如下：

$$\begin{aligned}
&U \text{ 是}S\text{的开集} \iff \text{存在}\mathbb{R}^n\text{的开集}V\text{使得 } U = S \cap V\,.\\
&E \text{ 是}S\text{的闭集} \iff E \subset S \text{ 且 } S \setminus E \text{ 是}S\text{的开集}\\
&\text{或等价地}\\
&E \text{ 是}S\text{的闭集} \iff \text{存在}\mathbb{R}^n\text{的闭集}F\text{使得 } E = S \cap F\,.
\end{aligned}$$

S 的开集、闭集也称为相对于S的开集、闭集 或称为S的相对开集、相对闭集.

设$x \in S$. 称U是x的一个相对邻域如果U是S的开集且$U \ni x$. □

【注】 关于闭集的上述两种定义的等价性是从$\mathbb{R}^n$中开集与闭集的关系得到的: $V \subset \mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$的开集$\iff$ 余集$F = \mathbb{R}^n \setminus V$ 是$\mathbb{R}^n$的闭集.

根据定义, S本身总是S的开集。又易见空集$\emptyset$ 是S的开集。因此S和空集$\emptyset$ 都是S的既开又闭的集合。

易证：

若S自己是$\mathbb{R}^n$的开集, 则U 是S的开集$\iff$ U 是$\mathbb{R}^n$的开集且$U \subset S$.

若S自己是$\mathbb{R}^n$的闭集, 则E 是S的闭集$\iff$ E 是$\mathbb{R}^n$的闭集且$E \subset S$.

在S中, 紧集（具有有限覆盖性质）、闭包、有界集、函数的连续性等的定义与$\mathbb{R}^n$一样, 只要将$\mathbb{R}^n$ 的开集换成S 的开集, 将$\mathbb{R}^n$ 的开球$B(x_0, \delta)$ 换成S 的开球$S \cap B(x_0, \delta)$ 即可。注意, 上述开集、闭集属于相对概念, 但紧性是绝对的概念：设$S \subset \mathbb{R}^n, K \subset S$, 则易证

$$K \text{ 是 } S \text{ 的紧集} \iff K \text{ 是 } \mathbb{R}^n \text{ 的紧集.}$$

【例】 设$S = [0,1)^n$. 由$V = (-\infty, 1/2)^n$是$\mathbb{R}^n$ 的开集和$[0,1/2)^n = S \cap V$ 可知$[0,1/2)^n$是S 的开集, 但显然$[0,1/2)^n$ 不是$\mathbb{R}^n$的开集。

又由定义知S是S自身的有界闭集, 但S显然不是$\mathbb{R}^n$ 的闭集, 从而S不是$\mathbb{R}^n$的紧集, 进而由上面性质知S不是S自身的紧集。这同时说明，如果所考虑的空间S本身不是$\mathbb{R}^n$的闭集, 则按相对拓扑, S的有界闭集不一定是S 的紧集。 □

【记号】为清楚起见, $\mathbb{R}^n$中的区间I有时用I^n 表示; 开球$B(x_0,r)$和闭球$\overline{B(x_0,r)}$ 有时用$B^n(x_0,r),\overline{B^n}(x_0,r)$ 表示, 即

$$B^n(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x-x_0|<r\},\quad \overline{B^n}(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x-x_0|\le r\}.$$

【定义(连续)】设$X\subset\mathbb{R}^n,Y\subset\mathbb{R}^m$. 称映射$f:X\to Y$在点$x_0\in X$连续如果对任意$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 使得当$x\in X\cap B^n(x_0,\delta)$时$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 也即

$$x\in X\cap B^n(x_0,\delta)\quad\Longrightarrow\quad f(x)\in Y\cap B^m(f(x_0),\varepsilon).$$

若f在X中每一点连续, 则称f在X上连续。 □

【连续性的开、闭集刻画】设$X\subset\mathbb{R}^n,Y\subset\mathbb{R}^m$, 映射$f:X\to Y$. 则

f在X上连续$\Longleftrightarrow$ 对于Y的任意开集U, 原像集(包括空集的情形)

$$f^{-1}(U)=\{x\in X\mid f(x)\in U\}$$

是X 的开集。

f在X上连续$\Longleftrightarrow$ 对于Y的任意闭集E, 原像集(包括空集的情形)

$$f^{-1}(E)=\{x\in X\mid f(x)\in E\}$$

是X 的闭集。 □

【定义(同胚)】设$X\subset\mathbb{R}^n,Y\subset\mathbb{R}^m$. 称映射$f:X\to Y$ 是同胚, 如果

$f:X\to Y$为单满射且$f:X\to Y$ 和$f^{-1}:Y\to X$ 皆连续。

此时我们也称X与Y 同胚。 □

【定义(微分同胚)】设$U,V\subset\mathbb{R}^n$ 皆为开集, 或稍一般地, 其每一点皆可定义各阶偏导数(包括只能定义单侧偏导数的点); $r\in\mathbb{N}$ 或$r=\infty$. 称映射$f:U\to V$是C^r类微分同胚如果$f:U\to V$是同胚, 并且$f\in C^r(U,V),f^{-1}\in C^r(V,U)$. 此时也称$U,V$是$C^r$类微分同胚, 简称$U,V$微分同胚。 □

【提醒注意】1. 同胚关系是一个等价关系。特别, 若X 与Y 同胚, 则Y与X 同胚。

2. 设$f:X\subset\mathbb{R}^n\to Y\subset\mathbb{R}^m$是同胚. 则$f$是开映射, 即$f$把$X$的任意开子集映为$Y$的开子集. 换言之, 对于$\mathbb{R}^n$的任意开集$U$, 存在$\mathbb{R}^m$的开集$V$使得$f(X\cap U)=Y\cap V$.

【**Brouwer 区域不变定理**】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 连续且局部一对一。则f是开映射, 即对任意开集$U\subset\Omega$, 象集$f(U)$ 是$\mathbb{R}^n$的开集。特别$f(\Omega)$ 是$\mathbb{R}^n$的开集。 $\Box$

【**Brouwer 区域不变定理的推论**】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$ 的开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为连续单射。则其逆映射$f^{-1}:f(\Omega)\to\Omega$ 也连续。因此Ω 与$f(\Omega)$ 同胚。

【证】由**Brouwer 区域不变定理** 知f 是开映射, 特别象集$f(\Omega)$是$\mathbb{R}^n$ 的开集。因此(注意f是单射) 对于Ω中的任意开集U, f^{-1}的原象$(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$ 是$f(\Omega)$中的开集。据连续性的开集刻画即知f^{-1} 在$f(\Omega)$ 上连续。 $\Box$

【**例**】在曲面(即流形)的概念中将用到$\mathbb{R}^k$ 的一类闭的半空间$\mathbb{H}^k$,

$$\mathbb{H}^k:=\{t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k\mid t_1\le 0\}=(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{k-1}$$

和相应的开的半空间$(\mathbb{H}^k)^\circ$

$$(\mathbb{H}^k)^\circ=\{t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k\mid t_1<0\}=(-\infty,0)\times\mathbb{R}^{k-1}\,.$$

当$k=1$时$\mathbb{R}^{k-1}$不出现. 我们有: $(\mathbb{H}^k)^\circ$与$\mathbb{R}^k$ 同胚, 但$\mathbb{H}^k$与$\mathbb{R}^k$ 不同胚。

【证】第一个结论的证明是直接构造同胚映射:

$$\varphi(t)=(-\log(-t_1),t_2,...,t_k)\,,\quad t=(t_1,t_2,...,t_k)\in(\mathbb{H}^k)^\circ\,.$$

易见

$$\varphi^{-1}(\tau)=(-e^{-\tau_1},\,\tau_2,...,\tau_k)\,,\quad \tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_k)\in\mathbb{R}^k$$

也连续, 故$\varphi:(\mathbb{H}^k)^\circ\to\mathbb{R}^k$ 为同胚映射。

对第二个结论我们用反证法, 假设$\mathbb{H}^k$与$\mathbb{R}^k$ 同胚。则存在连续双射$\varphi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{H}^k$。因$\mathbb{R}^k$是$\mathbb{R}^k$的开集, 根据Brouwer 区域不变定理, 象集$\mathbb{H}^k=\varphi(\mathbb{R}^k)$ 也应是$\mathbb{R}^k$ 的开集, 但显然$\mathbb{H}^k$不是$\mathbb{R}^k$的开集。因此$\mathbb{H}^k$与$\mathbb{R}^k$ 不同胚。 $\Box$

下面例子说明标准参数区间和一般参数区间是C^∞保向同胚的, 因此可以互相转换。

【**例**】设$-\infty<a_i<b_i<\infty$, $i=1,2,...,k$. 则

$\mathbb{R}^k$ 与 $\prod_{i=1}^k(a_i,b_i)$为C^∞保向同胚, $\mathbb{H}^k$ 与 $(a_1,b_1]\times\prod_{i=2}^k(a_i,b_i)$为$C^\infty$保向同胚。

这里“保向同胚”是指同胚映射的Jacobi矩阵的行列式处处大于零。

【证】见第八章. $\square$

【定义(光滑映射)】设D 为$\mathbb{R}^k$ 或$\mathbb{H}^k$ 的开集。映射

$$\varphi : D \to \mathbb{R}^n\,, \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$$

称为光滑的如果存在$r \in \mathbb{N}$ 或$r = \infty$ 使得每个坐标函数$\varphi_i \in C^r(D)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. 此时称φ 在D 上是C^r 类光滑映射[1]。这种r 的最大者称为φ 的光滑次数。 $\square$

注意, 若$D \cap \partial\mathbb{H}^k \neq \emptyset$, 则$\varphi_i(t)$ 在$t \in D \cap \partial\mathbb{H}^k$ 处的偏导数是单侧偏导数。**在本讲义中, 除非特别说明, 我们总假定r足够大使满足所有相关需要。** 这完全是为了陈述简便和突出曲面的主要性质。在掌握了曲面基本理论后, 可以回过头来针对具体性质研究r 的取值范围。

[1]在很多具体问题中要假定$r \geq 2$, 例如力学和几何学中, 要求质点运动的加速度存在, 曲面的曲率存在, 等等。

§11.2. $\mathbb{R}^n$中的曲面(流形)

由于$\mathbb{R}^k$与$I^k=(-1,1)^k$是C^∞同胚的, 我们有时用$\mathbb{R}^k$代替参数域I^k. 这只是为了兼顾其他教科书和数学文献中的记号.

事实上由于存在C^∞-同胚$f:\mathbb{R}^k\to I^k$, 故若$\varphi: I^k\to U$是同胚, 则$\widetilde{\varphi}=\varphi\circ f:\mathbb{R}^k\to U$也是同胚. 因此必要时可以用$\widetilde{\varphi}$代替$\varphi$, 等等. 希望同学们注意转换并逐渐习惯.

【曲面(即流形)的定义】 设$S\subset\mathbb{R}^n$.

(1) 称S 为一个零维曲面(也称为零维流形), 如果S中的每一点都是S的孤立点[2].

(2) 设$k\in\{1,2,...,n\}$. 称S 为一个k维曲面(也称为k维流形), 如果对每个$x\in S$ 都存在x的一个相对邻域$U\subset S$ 使得或者U与$\mathbb{R}^k$ 同胚, 或者U与$\mathbb{H}^k$同胚.

当$k=1$时也称1维曲面(1维流形)为曲线.

(3) 设$S\subset\mathbb{R}^n$ 为k维曲面, $1\le k\le n$. 做分解$S=S^\circ\cup\partial S$, 其中

$$S^\circ:=\{x\in S\,|\text{ 存在}x\text{的一个相对邻域}U\subset S\text{ 使得}U\text{ 与}\mathbb{R}^k\text{ 同胚}\},$$

$$\partial S:=S\setminus S^\circ\,.$$

称S° 为S 的内部, ∂S 称为S的边或S的边界.

如果$\partial S\ne\emptyset$, 则称S 为带边曲面; 如果$\partial S=\emptyset$, 即$S=S^\circ$, 则称S 为无边曲面.

当$k=0$ 时, 即当S 为零维曲面时, 规定$\partial S=\emptyset$. □

【注】 (1) 由于$\mathbb{R}^k$分别与开区间$\prod_{i=1}^k(a_i,b_i)$和开球$B^k(x_0,r)$为C^∞同胚, 而$\mathbb{H}^k$分别与$(a_1,b_1]\times\prod_{i=2}^k(a_i,b_i)$和$(a,b]\times B^{k-1}(x_0,r)$为$C^\infty$同胚, 因此在上述曲面的定义中可以将$\mathbb{R}^k$等价地换成开区间$\prod_{i=1}^k(a_i,b_i)$或开球$B^k(x_0,r)$, 而将$\mathbb{H}^k$ 等价地换成$(a_1,b_1]\times\prod_{i=2}^k(a_i,b_i)$或$(a,b]\times B^{k-1}(x_0,r)$, 等等.

(2) 与一般点集拓扑中定义的边界不同, 这里总有$\partial S\subset S$. 同理注意: 无边的曲面或曲线(即$S=S^\circ$) 作为欧空间中的点集可以是闭集或紧集, 例如$\mathbb{R}^3$中封闭球面、救生圈表面都是无边的二维曲面, 它们也是$\mathbb{R}^3$中的紧集. $\mathbb{R}^n$ $(n\ge 2)$中不自交的有界的封闭连续曲线是无边的曲线, 它是$\mathbb{R}^n$中的紧集. 带边的曲面、曲线更多, 例如圆柱表面(去掉上下底) $S=\mathbb{S}^1\times[0,1]$ 是带边的2维曲面, 其边界是两个不相交的圆周: $\partial S=(\mathbb{S}^1\times\{0\})\cup(\mathbb{S}^1\times\{1\})$.

[2]即对每个$x\in S$ 存在$\varepsilon>0$ 使得$S\cap B^n(x,\varepsilon)=\{x\}$ 是单点集.

(3) (特殊情形): 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$中的一个开集, 则因Ω中的每一点x有一个开球$B^n(x,\delta) \subset \Omega$ 而且$B^n(x,\delta)$ 与$\mathbb{R}^n$是C^∞同胚的, 故$S := \Omega$ 便是一个$\mathbb{R}^n$中的一个n维流形. 进一步, 若Ω的拓扑边界$\partial\Omega$是(例如)光滑的, 例如Ω为$\mathbb{R}^n$中的开球, 或Ω为一个开球挖去其内的一个小闭球,等等, 则$S = \overline{\Omega}$ 便是一个带边的n维流形, 且$\partial S = \partial\Omega$. 而且边界$\partial S$ 是一个$n-1$维的无边流形.

又例如当$k \ge 2$ 时, $\mathbb{H}^k$ 是一个k维的带边流形且$\partial\mathbb{H}^k = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$.

在学习流形的基本性质之前, 我们看一个例题, 它说明一类连续单射决定了一类流形.

【例】设$D \subset \mathbb{R}^k$ 为有界连通开集, 满足对任意$t \in \partial D$, 存在$\delta > 0$ 使得$\overline{D} \cap B^k(t,\delta)$ 与$\mathbb{H}^k$ 同胚且$(\overline{D})^\circ = D$. [例如$D = \prod_{i=1}^k (a_i, b_i)$为有界开区间, $D = B^k(0,R)$为有界开球, 都满足这个条件.]

设$n \ge k, \varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ 为连续单射. 则象集$S = \varphi(\overline{D})$ 是一个紧的带边的k- 维流形且$S^\circ = \varphi(D), \partial S = \varphi(\partial D)$.

【证】由假设条件和紧集上连续单射的逆映射也连续知$\varphi^{-1} : S \to \overline{D}$ 连续. 令$f(x) = \varphi^{-1}(x), x \in S$. 则$f : S \to \overline{D} = f(S)$ 连续. 由连续映射的开集刻画知对任意开集$\Delta \subset \mathbb{R}^k$, 存在开集$V \subset \mathbb{R}^n$ 使得$f^{-1}(f(S) \cap \Delta) = S \cap V$. 因$\varphi = f^{-1}$, $\overline{D} = f(S)$, 故这等式也可写成

$$\varphi(\overline{D} \cap \Delta) = S \cap V.$$

考虑分解

$$S = \varphi(D) \cup \varphi(\partial D).$$

任取$x \in S$. 则存在唯一的$t \in \overline{D}$ 使得$x = \varphi(t)$.

若$x \in \varphi(D)$, 也即$t \in D$, 则存在$\varepsilon > 0$ 使得$B^k(t,\varepsilon) \subset D$. 开集$\Delta = B^k(t,\varepsilon)$ 可知存在开集$V \subset \mathbb{R}^n$ 使得$\varphi(B^k(t,\varepsilon)) = \varphi(\overline{D} \cap B^k(t,\varepsilon)) = S \cap V$. 我们已证过开球$B^k(t,\varepsilon)$与$\mathbb{R}^k$同胚, 即存在连续双射$g : \mathbb{R}^k \to B^k(t,\varepsilon)$. 因$\varphi : \overline{D} \to S$, $\varphi^{-1} : S \to \overline{D}$ 都连续, 故令$\varphi = \varphi \circ g, U = S \cap V$, 则$\varphi : \mathbb{R}^k \to U$ 连续且$\varphi^{-1} = g^{-1} \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}^k$ 也连续. 所以U与$\mathbb{R}^k$ 同胚. 显然U是S的包含$x = \varphi(t)$的开集.

若$x \in \varphi(\partial D)$, 即$t \in \partial D$, 则由假设知存在$\delta > 0$ 使得$\overline{D} \cap B^k(t,\delta)$ 与$\mathbb{H}^k$ 同胚. 仿上可证, 存在x的一个相对邻域$U \subset S$ 使得U与$\mathbb{H}^k$ 同胚.

这证明了$S = \varphi(\overline{D})$ 是一个k-维流形. 显然S是紧集. 下证$S^\circ = \varphi(D), \partial S = \varphi(\partial D)$. 为此只需证明$S^\circ \supset \varphi(D)$ 和$S^\circ \cap \varphi(\partial D) = \emptyset$.

由S°的定义易见$S^\circ\supset\varphi(D)$. 为证$S^\circ\cap\varphi(\partial D)=\emptyset$, 我们用反证法和Brouwer 区域不变定理. 假设存在$x_0\in S^\circ\cap\varphi(\partial D)$. 则存在$x_0$的一个相对邻域$U\subset S$ 使得U 与$\mathbb{R}^k$ 同胚. 设$h:\mathbb{R}^k\to U$为同胚映射. 令$f(t)=\varphi^{-1}(h(t)),t\in\mathbb{R}^k$. 则由复合映射的连续性知$f:\mathbb{R}^k\to\overline{D}\subset\mathbb{R}^k$ 是连续单射. 据Brouwer 区域不变性定理知$f(\mathbb{R}^k)$ 是$\mathbb{R}^k$的开集. 另一方面由$x_0\in\varphi(\partial D)\cap U=\varphi(\partial D)\cap h(\mathbb{R}^k)$ 可写$x_0=\varphi(s_0)=h(t_0),s_0\in\partial D,t_0\in\mathbb{R}^k$. 则有$s_0=\varphi^{-1}(h(t_0))=f(t_0)\in f(\mathbb{R}^k)$. 因$f(\mathbb{R}^k)$ 是$\mathbb{R}^k$的开集, 故存在$\delta>0$使得$B^k(s_0,\delta)\subset f(\mathbb{R}^k)\subset\overline{D}$. 这推出$s_0\in(\overline{D})^\circ=D$, 矛盾于$s_0\in\partial D$. 这矛盾证明了$S^\circ\cap\varphi(\partial D)=\emptyset$ 成立. $\Box$

下面这个定理是Brouwer区域不变定理的推广形式, 是研究$\mathbb{R}^n$中一般流形的一个基本定理且非常好用！定理的证明仍依靠通常的Brouwer区域不变定理.

【定理11.1(流形上的区域不变定理)】设$S\subset\mathbb{R}^n$是一个k 维流形$(1\le k\le n)$, $D\subset\mathbb{R}^k$为$\mathbb{R}^k$的开集, $\varphi:D\to S$为连续单射. 则有:

(a) $\varphi:D\to S$是相对开映射, 即对任意开集$D_1\subset D$, 存在$\mathbb{R}^n$的开集V_1使得$\varphi(D_1)=S\cap V_1$. 此外有等式$\varphi(D_1)=S\cap V_1=\varphi(D)\cap V_1$.

(b) $\varphi:D\to\varphi(D)$ 是同胚, 即逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(D)\to D$ 也连续.

(c) $\varphi(D)$是一个k维流形且$\varphi(D)\subset S^\circ$.

(d) 若还有$\varphi:\overline{D}\to\mathbb{R}^n$ 连续, 则必有$\varphi(D)\cap\varphi(\partial D)=\emptyset$.

【证】(a): 任取开集$D_1\subset D$. 要证$\varphi(D_1)$ 是S的开集.

为此我们先证明: 对任意$x_0\in\varphi(D_1)$, 存在$\delta_{x_0}>0$使得$S\cap B^n(x_0,\delta_{x_0})\subset\varphi(D_1)$.

因S是k维流形, 故存在x_0的一个邻域$S\cap V_{x_0}$ 其中V_{x_0}是$\mathbb{R}^n$的开集, 使得$S\cap V_{x_0}$ 与J^k 同胚, 其中当$x_0\in S^\circ$时$J^k=\mathbb{R}^k$; 当$x_0\in\partial S$ 时$J^k=\mathbb{H}^k$. 设$\psi:J^k\to S\cap V_{x_0}$ 是一个这样的同胚.

写$x_0=\varphi(t_0),t_0=\varphi^{-1}(x_0)\in D_1$. 因$D_1$是开集且$\varphi$连续, 故存在$\eta=\eta_{t_0}>0$使得$B^k(t_0,\eta)\subset D_1$ 且$\varphi(B^k(t_0,\eta))\subset S\cap V_{x_0}$.

由于$\varphi:B^k(t_0,\eta)\to S\cap V_{x_0}$为连续单射, 而逆映射$\psi^{-1}:S\cap V_{x_0}\to J^k\subset\mathbb{R}^k$ 也连续, 故复合映射$\psi^{-1}\circ\varphi:B^k(t_0,\eta)\to\mathbb{R}^k$ 也是连续单射. 据Brouwer区域不变定理知$\psi^{-1}\circ\varphi$在$B^k(t_0,\eta)$上是开映射. 因此$\psi^{-1}(\varphi(B^k(t_0,\eta)))$是$\mathbb{R}^k$的开集. 因$\psi^{-1}(x_0)=\psi^{-1}(\varphi(t_0))\in$

$\psi^{-1}(\varphi(B^k(t_0,\eta)))$, 故存在$\varepsilon=\varepsilon_{x_0}>0$ 使得

$$B^k(\psi^{-1}(x_0),\varepsilon)\subset\psi^{-1}(\varphi(B^k(t_0,\eta))).$$

再由$\psi^{-1}:S\cap V_{x_0}\to J^k$ 连续和$x_0\in S\cap V_{x_0}$ 知存在$\delta_{x_0}>0$ 使得$S\cap B^n(x_0,\delta_{x_0})\subset S\cap V_{x_0}$且$\psi^{-1}(S\cap B^n(x_0,\delta_{x_0}))\subset B^k(\psi^{-1}(x_0),\varepsilon)$. 于是得到

$$\psi^{-1}(S\cap B^n(x_0,\delta_{x_0}))\subset B^k(\psi^{-1}(x_0),\varepsilon)\subset\psi^{-1}(\varphi(B^k(t_0,\eta))).$$

因$S\cap B^n(x_0,\delta_{x_0})$, $\varphi(B^k(t_0,\eta))$ 都是$S\cap V_{x_0}$的子集, 而ψ^{-1} 在$S\cap V_{x_0}$ 上是单射, 故得到

$$S\cap B^n(x_0,\delta_{x_0}))\subset\varphi(B^k(t_0,\eta))\subset\varphi(D_1).$$

因$x_0\in\varphi(D_1)$中的任一点, 如将x_0 写作x, 则我们证明了

$$S\cap B^n(x,\delta_x)\subset\varphi(D_1)\qquad\forall\,x\in\varphi(D_1)$$

其中$\delta_x>0$ 与x有关. 据此得到

$$\varphi(D_1)=\bigcup_{x\in\varphi(D_1)}S\cap B^n(x,\delta_x)=S\cap\bigcup_{x\in\ \varphi(D_1)}B^n(x,\delta_x)=S\cap V_1$$

其中$V_1=\bigcup_{x\in\varphi(D_1)}B^n(x,\delta_x)$显然是$\mathbb{R}^n$的开集. 这就证明了$\varphi$ 是相对开映射.

注意, 由等式$\varphi(D_1)=S\cap V_1$ 和$\varphi(D_1)\subset\varphi(D)\subset S$ 有$\varphi(D_1)=\varphi(D)\cap\varphi(D_1)=\varphi(D)\cap S\cap V_1=\varphi(D)\cap V_1$. 所以得到

$$\varphi(D_1)=S\cap V_1=\varphi(D)\cap V_1.$$

这同时表明：对任意开集$D_1\subset D$, 象集$\varphi(D_1)$ 也是$\varphi(D)$的开集.

(b): 由(a)中的开映射性质和$\varphi:D\to\varphi(D)$为连续单射可知: 对任意开集$D_1\subset D$, $(\varphi^{-1})^{-1}(D_1)=\varphi(D_1)$是$\varphi(D)$的开集. 据连续映射的开集刻画可知逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(D)\to D$连续. 所以$\varphi:D\to\varphi(D)$ 是同胚.

(c): 来证明$\varphi(D)$是一个k维流形且无边并且$\varphi(D)\subset S^\circ$.

任取$x_0\in\varphi(D)$, 写$x_0=\varphi(t_0),t_0\in D$. 因$D$是开集, 故存在$\delta>0$使得$B^k(t_0,\delta)\subset D$. 由对(a)的证明中的结果知: 存在$\mathbb{R}^n$的包含$x_0$的开集$V_{x_0}$使得

$$\varphi(B^k(t_0,\delta))=S\cap V_{x_0}=\varphi(D)\cap V_{x_0}.$$

因当$x \in \varphi(B^k(t_0,\delta))$ 时$(\varphi|_{B^k(t_0,\delta)})^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x)$, 故$\varphi|_{B^k(t_0,\delta)})^{-1} : \varphi(B^k(t_0,\delta)) \to B^k(t_0,\delta)$ 也连续. 因此$\varphi|_{B^k(t_0,\delta)} : B^k(t_0,\delta) \to \varphi(B^k(t_0,\delta)) = \varphi(D)\cap V_{x_0}$ 是同胚映射. 所以$\varphi(D)\cap V_{x_0}$与$B^k(t_0,\delta)$同胚. 再由$B^k(t_0,\delta)$ 与$\mathbb{R}^k$同胚知$\varphi(D)\cap V_{x_0}$与$\mathbb{R}^k$ 同胚. 由$x_0\in\varphi(D)$的任意性即知$\varphi(D)$ 是一个k维流形且无边. 最后由$S\cap V_{x_0} = \varphi(D)\cap V_{x_0}$还知$S\cap V_{x_0}$ 与$\mathbb{R}^k$同胚. 因此$x_0\in S^\circ$. 再由$x_0\in\varphi(D)$的任意性即得$\varphi(D)\subset S^\circ$.

(d): 设φ还在$\overline{D}$上连续. 来证明$\varphi(D)\cap\varphi(\partial D)=\emptyset$.

反证法: 假设$\varphi(D)\cap\varphi(\partial D)\neq\emptyset$. 取$x_0\in\varphi(D)\cap\varphi(\partial D)$, 则可写$x_0=\varphi(s_0)=\varphi(t_0)$其中$s_0\in D, t_0\in\partial D$. 因$|s_0-t_0|>0$, 故可取$r>0$ 充分小使得$r<|s_0-t_0|/2$且$B^k(s_0,r)\subset D$. 对于D中的开集$B^k(s_0,r)$, 由φ是相对开映射知存在$\mathbb{R}^n$的开集V使得$\varphi(B^k(s_0,r)) = S\cap V$. 因$x_0=\varphi(s_0)\in V$, 故存在$\varepsilon>0$使得$B^n(x_0,\varepsilon)\subset V$. 又因$x_0=\varphi(t_0)$ 且φ在$\overline{D}$上连续, 故存在$\delta>0, \delta<r$,使得当$t\in\overline{D}\cap B^k(t_0,\delta)$时有$|\varphi(t)-x_0| = |\varphi(t)-\varphi(t_0)|<\varepsilon$. 也即$\varphi(t)\in B^n(x_0,\varepsilon)$ for all $t\in\overline{D}\cap B^k(t_0,\delta)$. 而由$t_0\in\partial D$知$D\cap B^k(t_0,\delta)\neq\emptyset$. 故可以取一个$t_*\in D\cap B^k(t_0,\delta)$. 于是$\varphi(t_*)\in\varphi(D)\subset S$且$\varphi(t_*)\in B^n(x_0,\varepsilon)$ 从而有

$$\varphi(t_*)\in S\cap B^n(x_0,\varepsilon)\subset S\cap V = \varphi(B^k(s_0,r)).$$

于是存在$s_*\in B^k(s_0,r)$使得$\varphi(t_*)=\varphi(s_*)$. 因$s_*,t_*\in D$ 且φ 在D内为单射, 故必有$s_*=t_*$. 但由此得出

$$|s_0-t_0|\le|s_0-s_*|+|t_*-t_0|<r+\delta<2r<|s_0-t_0|$$

矛盾. 此矛盾证明了必有$\varphi(D)\cap\varphi(\partial D)=\emptyset$. □

【**命题11.2.**】设$S\subset\mathbb{R}^n$ 为k维曲面($1\le k\le n$). 则

(a) $x_0\in\partial S \iff$ 存在x_0的一个相对邻域$U(x_0)\subset S$ 和同胚$\varphi:\mathbb{H}^k\to U(x_0)$ 使得

$$\varphi^{-1}(x_0)\in\partial\mathbb{H}^k=\{0\}\times\mathbb{R}^{k-1}.$$

换言之, $x_0\in\partial S$当且仅当x_0经过同胚映射被映到$\partial\mathbb{H}^k=\{0\}\times\mathbb{R}^{k-1}$ 上.

(b) S° 是S的开集, ∂S 是S 的闭集. (当然是按相对拓扑)

(c) 若S 是$\mathbb{R}^n$ 的闭集(resp. 紧集), 则∂S 也是$\mathbb{R}^n$ 的闭集(resp. 紧集).

【证】(a): "$\Longrightarrow$": 设$x_0\in\partial S$. 由k维流形的定义和$x_0\notin S^\circ$ 知存在x_0的一个邻域$U(x_0)\subset S$ 使得同胚$\varphi:\mathbb{H}^k\to U(x_0)$ 存在. 令$t_0=\varphi^{-1}(x_0)$. 要证$t_0\in\{0\}\times\mathbb{R}^{k-1}$. 假

设$t_0 \notin \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$, 则由$\mathbb{H}^k$的定义知$t_{01} < 0$. 此时对于$0 < \delta < -t_{01}$ 有$B^k(t_0, \delta) \subset \mathbb{H}^k$. 而由$\varphi : B^k(t_0, \delta) \to U(x_0) \subset S$是连续单射和**定理11.1** 知存在$\mathbb{R}^n$的开集$V$ 使得$\varphi : B^k(t_0, \delta) \to S \cap V$ 是同胚. 因$x_0 = \varphi(t_0) \in S \cap V$ 故$S \cap V$ 是x_0的一个邻域. 又因$B^k(t_0, \delta)$与$\mathbb{R}^k$同胚, 故$S \cap V$ 与$\mathbb{R}^k$ 同胚. 据S°的定义知$x_0 \in S^\circ$. 这与$x_0 \in \partial S = S \setminus S^\circ$矛盾. 因此必有$t_0 \in \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$.

"$\Longleftarrow$": 设存在x_0的一个邻域$U(x_0) \subset S$ 和同胚$\varphi : \mathbb{H}^k \to U(x_0)$ 以及$t_0 \in \partial \mathbb{H}^k = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$ 使得$x_0 = \varphi(t_0)$. 要证$x_0 \in \partial S$. 假若$x_0 \notin \partial S$. 则$x_0 \in S^\circ$. 于是存在x_0的一个邻域$W(x_0) \subset S$ 使得同胚$\psi : \mathbb{R}^k \to W(x_0)$存在.

令$I = \varphi^{-1}(U(x_0) \cap W(x_0)), J = \psi^{-1}(U(x_0) \cap W(x_0))$. 则

$$t_0 \in I \subset \mathbb{H}^k, \quad \varphi(I) = U(x_0) \cap W(x_0) = \psi(J), \quad I = \varphi^{-1} \circ \psi(J).$$

因$U(x_0) \cap W(x_0)$ 是S的开集, 故$J = \psi^{-1}(U(x_0) \cap W(x_0))$ 是$\mathbb{R}^k$的开集. 由于$t \mapsto \varphi^{-1} \circ \psi(t)$是$J \subset \mathbb{R}^k$到$\mathbb{R}^k$得的连续单射, 故由Brouwer区域不变性定理知$I = \varphi^{-1} \circ \psi(J)$也是$\mathbb{R}^k$的开集. 于是由$t_0 \in I$ 知存在$\delta > 0$ 使得$B^k(t_0, \delta) \subset I \subset \mathbb{H}^k$. 取$\widetilde{t_0} = t_0 + (\delta/2, 0, ..., 0) = (\delta/2, t_{02}, ..., t_{0k})$ 便应有$\widetilde{t_0} \in \mathbb{H}^k$. 而由$\delta > 0$ 又知$\widetilde{t_0} \notin \mathbb{H}^k$, 矛盾. 这矛盾证明了$x_0 \in \partial S$.

(b): 任取$x \in S^\circ$. 由定义, 存在x 的一个邻域$U_x \subset S$ 使得U_x与$\mathbb{R}^k$ 同胚. 而对任意$y \in U_x$, U_x 都是y的邻域, 故$y \in S^\circ$. 因此$U_x \subset S^\circ$. 由此得到$S^\circ = \bigcup_{x \in S^\circ} U_x$. 所以$S^\circ$是$S$的开集. 根据闭集的定义(开集的补集)知$\partial S = S \setminus S^\circ$是$S$的闭集.

(c): 由(b) 和S的闭集的等价定义知存在$\mathbb{R}^n$的闭集F使得$\partial S = S \cap F$. 现在设S 是$\mathbb{R}^n$的闭集(resp. 紧集), 则$\partial S = S \cap F$ 显然是$\mathbb{R}^n$ 的闭集 (resp. 紧集). □

应用Brouwer区域不变定理我们来证明如下命题:

【命题11.3.】设$S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个k维曲面$(1 \le k \le n)$, U 是S 的一个开集.

(a) 若U 同胚于$\mathbb{R}^k$, 则

$$U = U^\circ \subset S^\circ \quad \text{且} \quad \partial U = \emptyset\,.$$

(b) 若U 同胚于$\mathbb{H}^k$, 则

$$U^\circ \subset S^\circ\,, \quad \partial U \subset \partial S\,, \quad U \cap \partial S = \partial U\,.$$

此外如设$\varphi:\mathbb{H}^k\to U$ 为同胚映射, 则有

$$\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)=(\varphi(\mathbb{H}^k))^\circ=U^\circ\,,\quad \varphi(\partial\mathbb{H}^k)=\partial\varphi(\mathbb{H}^k)=\partial U\,. \tag{2.1}$$

换言之, **同胚映射把内部映为内部, 把边界映为边界**.

【证】首先注意, (a)中的假设蕴含U 是一个无边的k-维曲面；(b) 中的假设蕴含U 是带边的k-维曲面.

(a) 中的结论是S°和∂S 的定义的推论.

以下证明(b). 设$\varphi:\mathbb{H}^k\to U$ 为同胚. 则$U=\varphi(\mathbb{H}^k)$ 且由$\mathbb{H}^k=(\mathbb{H}^k)^\circ\cup\partial\mathbb{H}^k$ 有分解

$$U=\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)\cup\varphi(\partial\mathbb{H}^k)\,,\quad \varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)\cap\varphi(\partial\mathbb{H}^k)=\emptyset\,.$$

记

$$U_1:=\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ).$$

则U_1 是（相对于）U 的开集. 但U 是S 的开集, 故U_1 也是S 的开集.【写$U=S\cap V$, $U_1=U\cap V_1$ 其中V,V_1 都是$\mathbb{R}^n$ 的开集. 故$V\cap V_1$ 仍是$\mathbb{R}^n$ 的开集, 因此$U_1=S\cap(V\cap V_1)$ 是S 的开集.】

由于$\mathbb{R}^k$ 与$(\mathbb{H}^k)^\circ$ 同胚, $(\mathbb{H}^k)^\circ$ 与U_1 同胚, 故$\mathbb{R}^k$ 与U_1 同胚. 因此$U_1\subset U^\circ$ 从而$U_1\subset S^\circ$. 往下我们证明(2.1), 即证

$$U_1=U^\circ\,,\quad \varphi(\partial\mathbb{H}^k)=\partial U\,.$$

首先从$U=\varphi(\mathbb{H}^k)$ 有

$$U\setminus\varphi(\partial\mathbb{H}^k)=\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)=U_1\subset U^\circ=U\setminus\partial U$$

得知$\partial U\subset\varphi(\partial\mathbb{H}^k)$. 来证反向包含$\varphi(\partial\mathbb{H}^k)\subset\partial U$ 也成立. 这等价于证明$U^\circ\subset U_1$. 为此我们将使用Brouwer 区域不变定理. 给定任意$x_0\in U^\circ$. 据曲面内部的定义, 存在x_0 的一个邻域$W\subset U$, 使得W 与$\mathbb{R}^k$同胚. 设$\psi:\mathbb{R}^k\to W$ 为同胚映射. 考虑

$$F=\varphi^{-1}\circ\psi:\mathbb{R}^k\to\varphi^{-1}(W)\subset\mathbb{H}^k\subset\mathbb{R}^k\,.$$

易见F 连续且一对一. 故由Brouwer 区域不变定理知$F(\mathbb{R}^k)$ 是$\mathbb{R}^k$的开集. 由$\varphi^{-1}(W)=F(\mathbb{R}^k)\subset\mathbb{H}^k=\partial\mathbb{H}^k\cup(\mathbb{H}^k)^\circ$ 和$\varphi^{-1}(W)$ 是$\mathbb{R}^k$ 的开集, 易见$\varphi^{-1}(W)\cap\partial\mathbb{H}^k=\emptyset$ （否则易得矛盾）.因此$\varphi^{-1}(W)\subset(\mathbb{H}^k)^\circ$ 从而$W\subset\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)=U_1$. 于是由$x_0\in W\subset U_1$ 知$x_0\in U_1$. 所以$U^\circ\subset U_1$. 至此我们已证明了

$$U_1=U^\circ\subset S^\circ\quad 和\quad \partial\varphi(\mathbb{H}^k)=\varphi(\partial\mathbb{H}^k)=\partial U.$$

最后我们来证明$\varphi(\partial\mathbb{H}^k)\subset\partial S$, 或等价地, 证明$\varphi(\partial\mathbb{H}^k)\cap S^\circ=\emptyset$. 证明方法与上面类似, 就是应用Brouwer 区域不变定理.但这次我们用反证法: 假设有点$x_0\in\varphi(\partial\mathbb{H}^k)\cap S^\circ$. 则据$S^\circ$的定义, 存在$x_0$ 的一个邻域$W_{x_0}\subset S$ 使得W_{x_0} 与$\mathbb{R}^k$ 同胚.令$\psi:\mathbb{R}^k\to W_{x_0}$ 为同胚映射. 由$x_0\in\varphi(\partial\mathbb{H}^k)\subset U$和$U$为$S$的开集知$W_{x_0}\cap U=\psi(\mathbb{R}^k)\cap U$是$S$的开集且非空. 因同胚映射把开集映为开集故$D:=\psi^{-1}(W_{x_0}\cap U)$是$\mathbb{R}^k$的开集(非空). 令$F(t)=\varphi^{-1}(\psi(t)), t\in D$. 则$F:D\to\mathbb{R}^k$ 是连续单射. 据Brouwer 区域不变定理, $F(D)$ 是$\mathbb{R}^k$的开集, 从而由$F(D)=\varphi^{-1}(W_{x_0}\cap U)\subset\mathbb{H}^k$ 可知$F(D)\cap\partial\mathbb{H}^k=\emptyset$ (否则易得矛盾). 因此$\varphi^{-1}(W_{x_0}\cap U)=F(D)\subset(\mathbb{H}^k)^\circ$ 从而$W_{x_0}\cap U\subset\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)$. 于是由$x_0\in W_{x_0}\cap U\subset\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)$ 得出$x_0\in\varphi((\mathbb{H}^k)^\circ)$. 这与$x_0\in\varphi(\partial\mathbb{H}^k)$矛盾. 所以$\varphi(\partial\mathbb{H}^k)\cap S^\circ=\emptyset$. □

下面例子中的性质将在后面用到. 从它的证明大家可以看到, 如果已经是同胚, 则证明几乎没有难度. [这也让我们从反面认识Brouwer 区域不变定理的威力.]

【例】设$U\subset\mathbb{R}^n$, $\varphi:\mathbb{H}^k(\text{resp.}\mathbb{R}^k)\to U$ 为同胚. 则对于$\mathbb{H}^k(\text{resp.}\mathbb{R}^k)$ 的任意开集D, 象集$\varphi(D)$ 是U 的开集. 因此按各自的（相对）拓扑, 同胚映射把开集映为开集.

【证】以$\mathbb{H}^k$ 的情形为例. 任取定$x\in\varphi(D)$. 写$x=\varphi(t), t\in D$. 由D是$\mathbb{H}^k$的开集, 存在$\varepsilon_x>0$ 使得$B^k(t,\varepsilon_x)\cap\mathbb{H}^k\subset D$. 据$\varphi^{-1}:U\to\mathbb{H}^k$ 的连续性, 存在$\delta_x>0$ 使得当$y\in B^k(x,\delta_x)\cap U$ 时$\varphi^{-1}(y)\in B^k(t,\varepsilon_x)\cap\mathbb{H}^k$ 从而$\varphi^{-1}(y)\in D$, 即$y\in\varphi(D)$. 因此$B^k(x,\delta_x)\cap U\subset\varphi(D)$. 由此得到

$$\varphi(D)=\bigcup_{x\in\varphi(D)}B^k(x,\delta_x)\cap U=\Big(\bigcup_{x\in\varphi(D)}B^k(x,\delta_x)\Big)\cap U\,.$$

所以$\varphi(D)$ 是U 的开集. □

下面这个命题显然是基本的:

【命题11.4.】若$S\subset\mathbb{R}^n$ 是一个k维的带边曲面$(1\le k\le n)$, 则其边∂S是一个$k-1$维**无边**曲面. (**图示**)

【证】任取$x_0\in\partial S$. 由**命题11.2** 存在x_0的一个相对邻域$U(x_0)\subset S$ 和同胚$\varphi:\mathbb{H}^k\to U(x_0)$ 使得$\varphi^{-1}(x_0)\in\partial\mathbb{H}^k=\{0\}\times\mathbb{R}^{k-1}$. 而由**命题11.3** 知$\varphi(\partial\mathbb{H}^k)=(\partial S)\cap U(x_0)$. 由相对邻域$U(x_0)$的定义, 存在$\mathbb{R}^n$的开集$V(x_0)\ni x_0$ 使得$U(x_0)=S\cap V(x_0)$. 由此和$\partial S\subset S$便有$(\partial S)\cap U(x_0)=(\partial S)\cap V(x_0)$.

当$k=1$时, $\partial\mathbb{H}_1=\{0\}$. 此时$\varphi(\partial\mathbb{H}_1)=(\partial S)\cap V(x_0)$ 即为单点集关系: $\{x_0\}=$

$(\partial S)\cap V(x_0)$. 因$V(x_0)\ni x_0$ 是$\mathbb{R}^n$的开集, 故存在$\varepsilon>0$ 使得$B^n(x_0,\varepsilon)\subset V(x_0)$. 于是得到$(\partial S)\cap B^n(x_0,\varepsilon)=\{x_0\}$. 这表明$\partial S$ 中的每一点都是∂S的孤立点. 因此∂S 是零维曲面. 因零维曲面的边是空集(这是规定), 故当$k=1$ 时所证成立.

设$k\ge 2$. 令

$$\widetilde{\varphi}(\tau)=\varphi(0,\tau),\quad \tau\in\mathbb{R}^{k-1}.$$

则有

$$\widetilde{\varphi}(\mathbb{R}^{k-1})=\varphi(\{0\}\times\mathbb{R}^{k-1})=\varphi(\partial\mathbb{H}^k)=(\partial S)\cap V(x_0)$$

并由$\varphi:\mathbb{H}^k\to S\cap V(x_0)$ 是同胚易见$\widetilde{\varphi}:\mathbb{R}^{k-1}\to(\partial S)\cap V(x_0)$ 是同胚. 事实上对$t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k$令$P(t)=(t_2,...,t_k)$. 则有

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(x)=P(\varphi^{-1}(x)),\quad x\in(\partial S)\cap V(x_0)$$

从而由$\varphi^{-1}:S\cap V(x_0)\to\mathbb{H}^k$ 连续, 知逆映射$\widetilde{\varphi}^{-1}:(\partial S)\cap V(x_0)\to\mathbb{R}^{k-1}$ 也连续.

这表明, 对于∂S中每一点x_0都存在x_0的一个相对邻域$(\partial S)\cap V(x_0)$ 使得$(\partial S)\cap V(x_0)$与$\mathbb{R}^{k-1}$ 同胚. 据曲面的定义即知∂S 是一个$k-1$维曲面且$\partial S=(\partial S)^\circ$ 即$\partial(\partial S)=\emptyset$, 也即$\partial S$ 无边. $\Box$

【局部图和图册】

【定义】设$k\ge 1$. 在k维曲面S的定义中的同胚映射$\varphi:\mathbb{R}^k\to U$ 和$\varphi:\mathbb{H}^k\to U$ 都称为S 的一个**局部图**或**局部坐标**, 而$\mathbb{R}^k$ 和$\mathbb{H}^k$ 叫做局部图(局部坐标)的参数域, U 叫做局部图在S 上的有效域. 为完整起见我们用三元组$(\mathbb{R}^k,\varphi,U)$ 和$(\mathbb{H}^k,\varphi,U)$ 表示局部图. 曲面S 的局部图的全体

$$\mathcal{A}(S):=\{(\mathbb{R}^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A_1}\bigcup\{(\mathbb{H}^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A_2}$$

称为S 的一个图册. $\Box$

本讲义中, 如不特别说明, 总假定局部图(局部坐标)的参数域为$\mathbb{R}^k$或$\mathbb{H}^k$. 这意味着知道了一个局部图φ及其有效域U, 也就知道了φ的参数域$\varphi^{-1}(U)$. 因此

当且仅当$U\subset S^\circ$时$\varphi^{-1}(U)=\mathbb{R}^k$;

当且仅当$U\cap\partial S\neq\emptyset$ 时$\varphi^{-1}(U)=\mathbb{H}^k$.

因此三元组$(\mathbb{R}^k,\varphi,U)$ **和**$(\mathbb{H}^k,\varphi,U)$ **可以用一个二元组**(φ,U) **代替．于是图册**$\mathcal{A}(S)$ **也可表为**

$$\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}\,.$$

注意脚标集A不要求可数——尽管实际上可用可数集替换. 显然同一个曲面S 可以有不同的图册. 一般希望用局部图个数较少的图册. 然而在一些基本性质(如曲面定向等)的证明中, S的一个方便的图册可取为

$$\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_x,U_x)\}_{x\in S}\qquad \text{其中}U_x\ni x$$

它有不可数多个局部图. 但下列引理和命题说明, 从S的任一图册中都可以抽出S的一个可数图册.

【引理11.5(可数覆盖)】设$\mathbb{R}^n$ 的开集族$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖了集合$E\subset\mathbb{R}^n$. 则存在可数集$A_0\subset A$ 使得$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A_0}$仍然覆盖$E$. 特别若$E$ 为紧集, 则A_0可取为有限集.

【证】当E 为紧集时, 结论实为紧集的定义. 现设E 为一般集合. 对任意$x\in E$, 存在$\alpha_x\in A$ 使得$x\in V_{\alpha_x}$. 由V_{α_x} 是$\mathbb{R}^n$ 的开集, 存在$\varepsilon_x>0$ 使得$B^n(x,\varepsilon_x)\subset V_{\alpha_x}$. 根据有理数的稠密性, 我们先取有理数$\delta_x\in\mathbb{Q}$ 使得$0<\delta_x<\frac{1}{2}\varepsilon_x$. 然后取有理点$q_x\in\mathbb{Q}^n$ 使得$|q_x-x|<\delta_x$. 则$B^n(q_x,\delta_x)\subset V_{\alpha_x}$. 由$x\in B^n(q_x,\delta_x)$ 可见$E\subset\bigcup_{x\in E}B^n(q_x,\delta_x)$. 另一方面, 集合$\{(q_x,\delta_x)\,|\,x\in E\}$ 是有理点集$\mathbb{Q}^{n+1}$的子集. 因$\mathbb{Q}^{n+1}$可数, 故$\{(q_x,\delta_x)\,|\,x\in E\}$可数.于是可写

$$\{(q_x,\delta_x)\,|\,x\in E\}=\{(p_i,r_i)\,|\,i\in\mathbb{N}_0\}$$

其中$\mathbb{N}_0\subset\mathbb{N}$.显然$(p_i,r_i)$ 与$B^n(p_i,r_i)$ 相互唯一确定.这给出

$$E\subset\bigcup_{x\in E}B^n(q_x,\delta_x)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0}B^n(p_i,r_i)$$

且对每个$i\in\mathbb{N}_0$, 集$A_i:=\{\alpha\in A\,|\;B^n(p_i,r_i)\subset V_\alpha\}$非空. 取定$\alpha_i\in A_i$, 则$B^n(p_i,r_i)\subset V_{\alpha_i}$. 令$A_0=\{\alpha_i\,|\,i\in\mathbb{N}_0\}$ 则A_0 是A 的可数子集且$E\subset\bigcup\limits_{\alpha\in A_0}V_\alpha$.　□

【命题11.6.】设$1\le k\le n$, $S\subset\mathbb{R}^n$是一个k维曲面. 则对于S的任何图册$\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, 都存在一个可数子集$A_0\subset A$ 使得$\mathcal{A}_0(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A_0}$ 仍是S的一个图册.

【证】设$\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是曲面S的一个图册. 由图册的定义有

$$S=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\,,\quad U_\alpha=S\cap V_\alpha\quad \text{其中}V_\alpha\text{是}\mathbb{R}^n\text{的开集.}$$

因$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$覆盖了$S$, 故由**引理11.5**, 存在可数子集$A_0\subset A$ 使得$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A_0}$仍然覆盖$S$, 且当$S$为紧集时, A_0可取为有限集. 于是有

$$S=\bigcup_{\alpha\in A_0}S\cap V_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A_0}U_\alpha.$$

因此$\mathcal{A}_0(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A_0}$仍是$S$ 的一个图册. □

【命题11.6的推论】$\mathbb{R}^n$中的每个流形S都是Borel集, 即$S\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 从而是(任意维的)Hausdorff可测集.

【证】设S是$\mathbb{R}^n$中的k维流形(即k维曲面). 当$k=0$时, S是可数集, 从而是$\mathbb{R}^n$中的Borel集. 设$1\le k\le n$. 由**命题11.6**, S 有一个可数图册$\mathcal{A}_0(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A_0}$ 其中A_0 是可数集. 于是有$S=\bigcup_{\alpha\in A_0}U_\alpha$. 因$U_\alpha=\varphi_\alpha(\mathbb{R}^k)$ 或$U_\alpha=\varphi_\alpha(\mathbb{H}^k)$, 而$\mathbb{R}^k,\mathbb{H}^k$都是$\mathbb{R}^k$的闭集, $\varphi_\alpha:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ 是连续单射(相应地$\varphi_\alpha:\mathbb{H}^k\to\mathbb{R}^n$是连续单射), 故由第九章**命题9.8** 知$\varphi_\alpha$把自己的定义域中的Borel集映为$\mathbb{R}^n$中的Borel 集, 因此$\varphi_\alpha$的象集$U_\alpha$是$\mathbb{R}^n$中Borel 集. 所以$S$是$\mathbb{R}^n$中的Borel 集. □

利用上述命题**命题11.6**还可以证明: 每个曲面(流形)都可以被分解成可数个互不相交的连通曲面(流形)的并集.

【命题11.7】设S 是$\mathbb{R}^n$中的k维曲面. 则S可以被分解成可数个互不相交的连通的k维曲面S_i的并：

$$S=\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0}S_i\qquad \text{其中 } \mathbb{N}_0=\{1,2,...,N\}\ \text{ 或 }\ \mathbb{N}_0=\mathbb{N}.$$

【证】当$k=0$ 时, 由零维曲面的定义, S中的每一点都是S的孤立点. 这蕴含S是可数集. 因每个单点集都是连通的零维曲面, 故此时命题显然成立.

设$k\ge 1$. 由第七章**命题7.25(集合按道路连通产生的分类)**知S可被分解成互不相交的道路连通分支的并

$$S=\bigcup_{x\in C}[x]$$

其中C 是S的每个道路连通分支$[x]$的代表元x的集合. 另一方面由**命题11.6** 知S 有一个可数图册$\mathcal{A}_0(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A_0}$, 其中$A_0$ 是一个可数集。因$C\subset S=\bigcup_{\alpha\in A_0}U_\alpha$ 故

$$C=\bigcup_{\alpha\in A_0}U_\alpha\cap C.$$

而由$U_\alpha = \varphi_\alpha(\mathbb{R}^k)$ 或$U_\alpha = \varphi_\alpha(\mathbb{H}^k)$ 知每个U_α 都是道路连通集。于是由C的定义知每个交集$U_\alpha \cap C$ 至多含有一个元素 [否则设$a, b \in U_\alpha \cap C$ 且$a \neq b$, 则由U_α道路连通知a, b 属于同一个道路连通分支, 从而作为道路连通分支的代表元应有$a = b$, 这矛盾于$a \neq b$.] 因可数个有限集的并是可数集, 故C 是可数集。因此存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对于$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, ..., N\}$ 或$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ 有$C = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ 从而有

$$S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i \quad \text{其中} \quad S_i = [x_i].$$

最后证明每个S_i 都是k维曲面。对任意$x \in S_i$, 因$S_i \subset S = \bigcup_{\alpha \in A_0} U_\alpha$, 故存在$\alpha \in A_0$ 使得$x \in U_\alpha$. 因U_α道路连通, 故U_α 与x 位于S的同一个道路连通分支内, 因此$U_\alpha \subset S_i$. 于是$(\varphi_\alpha, U_\alpha)$是$S_i$ 的一个局部图且$x \in U_\alpha$. 由$x \in S_i$的任意性和曲面(流形)的定义即知S_i 是一个k维曲面。 □

但反过来, $\mathbb{R}^n$中两个同维流形的并集未必还是流形, 例如设

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad S_2 = (1, 2] \times \mathbb{R}.$$

则S_1, S_2都是一维流形, 但$S_1 \cup S_2$ 就不是流形因为它含有交叉点.

如果$\mathbb{R}^n$中有限多个同维流形彼此之间的距离都> 0, 则它们的并集还是同维流形. 对于可数多个的情形, 若$S_i \subset \mathbb{R}^n$ 都是k维流形$(i = 1, 2, 3, ...)$ 且$\inf\limits_{i \neq j} \operatorname{dist}(S_i, S_j) > 0$, 则$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$还是$k$维流形.

关于曲面(即流形), 我们将着重学习光滑曲面(即光滑流形).

我们课上多次指出, 无论从定义还是从几何直观上看, "连续"与"可微"都有本质区别。从第八章§**8.9** 关于曲面的定义中大家也看到了, 这种区别导致连续曲面与光滑曲面的定义有很大差异。

为了在数学上处理问题方便, 我们需要建立一个光滑延拓命题.

首先回忆: 函数φ在半闭空间$\mathbb{H}^k = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{k-1}$上的边界上也可以定义偏导数和高阶偏导数因此可以定义光滑函数类$C^r(\mathbb{H}^k, \mathbb{R})$ 和光滑映射类$C^r(\mathbb{H}^k, \mathbb{R}^n)$ $(r \geq 1)$. 下面命题表明, $C^r(\mathbb{H}^k, \mathbb{R}^n)$中的映射可以被保持光滑度地延拓到$\mathbb{R}^k$上:

【命题11.8】 若$r \in \mathbb{N}, \varphi \in C^r(\mathbb{H}^k, \mathbb{R}^n)$, 则$\varphi$可以被$C^r$光滑地延拓到$\mathbb{R}^k$上, 即存在$\Phi \in C^r(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$使得

$$\Phi|_{\mathbb{H}^k} = \varphi, \quad D^\alpha \Phi|_{\mathbb{H}^k} = D^\alpha \varphi \quad \text{for all } |\alpha| \leq r$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (多重指标), $D^\alpha=(\frac{\partial}{\partial t_1})^{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial t_2})^{\alpha_2}\cdots(\frac{\partial}{\partial t_k})^{\alpha_k}$,

$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$.

【证】对任意$t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k$, 令

$$\Phi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & \text{if} \quad t_1\leq 0,\\ \\ \sum_{j=1}^{r+1}\lambda_j\varphi(-jt_1,t_2,...,t_k) & \text{if} \quad t_1>0.\end{cases}$$

其中$(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{r+1})$ 是范德蒙方程组

$$\sum_{j=1}^{r+1}(-j)^i\lambda_j=1, \quad i=0,1,...,r$$

的唯一解.

来证明$\Phi\in C^r(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$且是所求的一个延拓.

易见有$\Phi|_{\mathbb{H}^k}=\varphi$且任意$t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k$ 和任意$|\alpha|\leq r$有

$$D^\alpha\Phi(t)=\begin{cases}D^\alpha\varphi(t) & \text{if} \quad t_1\leq 0,\\ \\ \sum_{j=1}^{r+1}(-j)^{\alpha_1}\lambda_j(D^\alpha\varphi)(-jt_1,t_2,...,t_k) & \text{if} \quad t_1>0.\end{cases}$$

又对任意$|\alpha|\leq r$ 和任意$t_0\in\mathbb{R}^k$, 当$t_{01}\neq 0$时$D^\alpha\Phi$ 显然在t_0连续; 当$t_{01}=0$时, 对任意$t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k$ 有

$$D^\alpha\Phi(t)-D^\alpha\Phi(t_0)=\begin{cases}D^\alpha\varphi(t)-D^\alpha\varphi(t_0) & \text{if } t_1\leq 0,\\ \\ \sum_{j=1}^{r+1}(-j)^{\alpha_1}\lambda_j\Big((D^\alpha\varphi)(-jt_1,t_2,...,t_k)-(D^\alpha\varphi)(0,t_{02},...,t_{0k})\Big) & \text{if } t_1>0\end{cases}$$

从而有

$$|D^\alpha\Phi(t)-D^\alpha\Phi(t_0)|\leq\begin{cases}|D^\alpha\varphi(t)-D^\alpha\varphi(t_0)| & \text{if } t_1\leq 0,\\ \\ \sum_{j=1}^{r+1}j^{\alpha_1}|\lambda_j|\Big|(D^\alpha\varphi)(-jt_1,t_2,...,t_k)-(D^\alpha\varphi)(0,t_{02},...,t_{0k})\Big| & \text{if } t_1>0\end{cases}$$

从而有

$$\lim_{t\to t_0}|D^\alpha\Phi(t)-D^\alpha\Phi(t_0)|=0.$$

这证明了$D^\alpha\Phi$在$\mathbb{R}^k$上处处连续. 所以$\Phi\in C^r(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$. $\Box$

若把$\mathbb{H}^k$ 换成一般集合E, 则不难想象函数φ能否在E上定义偏导数和能否“光滑延拓”都是困难问题。因此对一般的集合E, 人们用下述方式定义E 上的光滑映射类:

【定义(一般集合上的光滑映射)】设$E\subset\mathbb{R}^k$为任一集合, $r\in\mathbb{N}$ 或$r=\infty$. 定义光滑映射类

$$C^r(E,\mathbb{R}^n)=\{\varphi:E\to\mathbb{R}^n \mid \text{存在开集 } G\supset E \ \text{ 和}\,\Phi\in C^r(G,\mathbb{R}^n) \text{ 使得 } \Phi|_E=\varphi\}.$$

换言之, 我们说E上的一个映射φ 属于C^r类, 当且仅当存在一个开集$G\supset E$ 使得φ 能被延拓成G上的一个C^r类映射。 $\Box$

若取$E=\mathbb{H}^k, r\in\mathbb{N}$, 则我们对光滑映射类$C^r(\mathbb{H}^k,\mathbb{R}^n)$ 有了上面两种定义, 而上述**命题11.8**表明, 对于$C^r(\mathbb{H}^k,\mathbb{R}^n)$来说, 这两种定义是一致的.

下面我们给出的光滑曲面的定义:

【光滑曲面(即光滑流形)的定义】设S 为$\mathbb{R}^n$ 中一个k-维曲面. 如果S 的一个图册$\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 满足: 所有局部坐标$\varphi_\alpha:\mathbb{R}^k\to U_\alpha$ 和$\varphi_\alpha:\mathbb{H}^k\to U_\alpha$ (当后者存在时)都是光滑的且在每一点t的秩都等于k, 即

$$\mathrm{rank}\varphi'_\alpha(t)=k\qquad\forall\, t\in\mathbb{R}^k\,(\mathrm{resp.}\,\mathbb{H}^k)\quad\forall\,\alpha\in A$$

则称$\mathcal{A}(S)$ 是k-维曲面S 的光滑图册. 如果S 有一个这样的光滑图册, 则称S 是一个光滑的k维曲面. 当所有局部坐标φ_α的光滑度都至少为$r(\ge 1)$时, 也称S是一个C^r类的k维曲面. $\Box$

【注1】应用**命题11.8**, 我们可以把光滑参数图$\varphi_\alpha\in C^r(\mathbb{H}^k,U_\alpha)$ 延拓成$\varphi_\alpha\in C^r(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$(仍使用同一记号$\varphi_\alpha$). 特别对任意$t_0\in\partial\mathbb{H}^k=\{0\}\times\mathbb{R}^{k-1}$, 存在$\delta>0$使得$\mathrm{rank}\varphi'_\alpha(t)=k$ for all $t\in\prod_{i=1}^k(t_{0i}-\delta,t_{0i}+\delta)$.

【注2】对定义中的图册$\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 应用“可数覆盖”(**命题11.6**)可知存在可数子集$\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}\subset A$ 使得$\mathcal{A}_0(S)=\{(\varphi_{\alpha_i},U_{\alpha_i})\}_{i\in\mathbb{N}_0}$仍是$S$的光滑图册.

【注3】上述定义中的$\mathbb{R}^k$ 和$\mathbb{H}^k$ 还可以等价地分别换成开区间I^k 和半开区间$(-1,0]\times I^{k-1}$.

【注4】上述关于光滑曲面的定义, 表面上与第八章§**8.9**中的光滑曲面的定义略有不同, 但实际上是等价的。这个等价性的证明依靠下面重要的**定理11.9**, 该定理描述了让从低维满秩映射局部地向高维微分同胚的**延拓**(卓里奇第二卷p.150), 或等价地, 描述从高维同胚向低维满秩单射的**浸入**(陈天权第三册引理13.1.1); 提供了构作光滑曲面的一般例子; 为后面引入的**转移映射**的可微性提供了保障。

【定理11.9】 设$1 \le k < n, r \ge 1$, $D \subset \mathbb{R}^k$是$\mathbb{R}^k$的开集或是$\mathbb{H}^k$ 的开集, 映射$\varphi \in C^r(D, \mathbb{R}^n)$ 且满秩即$\mathrm{rank}\varphi'(t) = k \ \forall t \in D$. 则有

(a) 对任意$t_0 \in D$, 存在$\varepsilon > 0$ 和C^r类的微分同胚

$$\Phi : I^k(t_0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-k} \to \Phi(I^k(t_0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-k}) \subset \mathbb{R}^n$$

使得

$$\varphi|_{J^k(t_0,\varepsilon)} = \Phi|_{J^k(t_0,\varepsilon)\times\{0\}} \quad 即 \quad \varphi(t) = \Phi(t, 0) \qquad \forall t \in J^k(t_0, \varepsilon)$$

其中$t_0 = (t_{01}, t_{02}, ..., t_{0k})$, $I^k(t_0, \varepsilon) = \prod_{i=1}^k (t_{0i} - \varepsilon, t_{0i} + \varepsilon)$, 且当$D$是$\mathbb{R}^k$的开集时, $J^k(t_0, \varepsilon) = I^k(t_0, \varepsilon) \subset D$; 当$D$是$\mathbb{H}^k$的开集时, $J^k(t_0, \varepsilon) = \mathbb{H}^k \cap I^k(t_0, \varepsilon) \subset D$.

(b) 对于D是$\mathbb{R}^k$的开集的情形, 假设φ在D上是单射且存在k维流形$S \subset \mathbb{R}^n$ 使得$\varphi(D) \subset S$. 则$\varphi(D)$是一个C^r类的k-维流形且无边。

(c) 假设$\varphi : D \to \varphi(D)$是同胚. 则对于$\mathbb{R}^k$的任意开集$\Omega$ 或$\mathbb{H}^k$的任意开集Ω, 若$\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是可微映射或是C^r类映射且$\psi(\Omega) \subset \varphi(D)$, 则映射

$$s \mapsto \varphi^{-1}(\psi(s)), \quad s \in \Omega$$

在Ω 上可微或属于C^r 类。

【注】 在定理的最开始的假设下, 当$k < n$时, 即便D是$\mathbb{R}^k$的开集且φ在D上是单射, 也不能保证$\varphi : D \to \varphi(D)$是同胚。见后面的**作业题2**。

【定理的证明】 首先说明, 对于D是$\mathbb{H}^k$的开集的情形, D不一定是$\mathbb{R}^k$的开集, 这时$\varphi \in C^r(D, \mathbb{R}^n)$ 表示存在$\mathbb{R}^k$的开集$G \supset D$使得φ 能被延拓成G上的一个C^r类映射, 也即$\varphi \in C^r(G, \mathbb{R}^n)$. 下面约定：当$D$是$\mathbb{R}^k$的开集时, $G = D$.

(a): 我们在**定理8.43(秩定理)**及其证明中已见过类似性质(只是记号不同), 这里我们再复习一下类似证明。

由$\mathrm{rank}\varphi'(t_0) = k$ 知存在一个置换矩阵$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 它只与t_0 有关, 对应于$(1, 2, ..., n)$的一个排列$(i_1, i_2, ..., i_k, ..., i_n)$, 使得置换后的映射

$$\mathrm{A}\varphi(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1(t) \\ \widetilde{\varphi}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{i_1}(t) \\ \varphi_{i_2}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{i_k}(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{i_{k+1}}(t) \\ \varphi_{i_{k+2}}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{i_n}(t) \end{pmatrix}$$

的Jacobi矩阵中的最上面的k阶方阵在$t=t_0$可逆, 即

$$(\mathrm{A}\varphi(t))'=\mathrm{A}\varphi'(t)=\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1'(t)\\ \widetilde{\varphi}_2'(t)\end{pmatrix},\quad \det\widetilde{\varphi}_1'(t_0)\neq 0.$$

由$t\mapsto \det\widetilde{\varphi}_1'(t)$ 的连续性和$\det\widetilde{\varphi}_1'(t_0)\neq 0$以及局部反函数定理知, 存在$\varepsilon>0$使得$I^k(t_0,\varepsilon)\subset G$ 并且$\det\widetilde{\varphi}_1'(t)\neq 0$ for all $t\in I^k(t_0,\varepsilon)$ 且$\widetilde{\varphi}_1$ 在$I^k(t_0,\varepsilon)$上是单射. 由此和矩阵的秩的定义易见$\mathrm{rank}\varphi'(t)=\mathrm{rank}(\mathrm{A}\varphi'(t))=k$ for all $t\in I^k(t_0,\varepsilon)$. 令

$$\Psi(t,s)=\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1(t)\\ \widetilde{\varphi}_2(t)+s\end{pmatrix},\quad (t,s)\in I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}.$$

则易见Ψ在$I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}$上是单射且$\Psi\in C^r(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k};\mathbb{R}^n)$ 且

$$\Psi'(t,s)=\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1'(t) & 0\\ \widetilde{\varphi}_2'(t) & \mathrm{I}_{(n-k)\times(n-k)}\end{pmatrix},$$

$$\det\Psi'(t,s)=\det\widetilde{\varphi_1}'(t)\cdot 1\neq 0\qquad \forall\,(t,s)\in I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}.$$

据光滑映射的反函数定理知$\Psi(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k})$是$\mathbb{R}^n$的开集且$\Psi: I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}\to\Psi(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k})$ 是C^r类的微分同胚, 也即$\Psi: I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}\to\Psi(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k})$和$\Psi^{-1}:\Psi(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k})\to I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}$ 都是C^r类的.

令

$$\Phi(t,s)=\mathrm{A}^{-1}\Psi(t,s),\quad (t,s)\in I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}.$$

则$\Phi: I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}\to\Phi(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k})$也是$C^r$类的微分同胚. 最后由$\Psi$的定义有$\Psi(t,0)=\mathrm{A}\varphi(t), t\in I^k(t_0,\varepsilon)$. 因此

$$\varphi(t)=\mathrm{A}^{-1}\Psi(t,0)=\Phi(t,0)\qquad \forall\, t\in I^k(t_0,\varepsilon).\tag{$*$}$$

当D是$\mathbb{R}^k$的开集时(此时$G=D$)有$J^k(t_0,\varepsilon)=I^k(t_0,\varepsilon)\subset D$, 这证明了(a)中的结果. 当$D$是$\mathbb{H}^k$的开集时, 由相对开集的定义知存在$\mathbb{R}^k$的开集$O$使得$D=\mathbb{H}^k\cap O$. 因$t_0\in D\subset G\cap O$, 故可让$\varepsilon>0$ 充分小使还满足$I^k(t_0,\varepsilon)\subset G\cap O$. 于是有$J^k(t_0,\varepsilon)=\mathbb{H}^k\cap I^k(t_0,\varepsilon)\subset\mathbb{H}^k\cap O=D$. 由$J^k(t_0,\varepsilon)\subset I^k(t_0,\varepsilon)$ 和$(*)$知此时(a)的结论仍成立.

(b): 设D是$\mathbb{R}^k$的开集. 由假设和**定理11.1(流形上的区域不变定理)**知, $\varphi: D\to\varphi(D)$是同胚, 并且对任意$x_0\in\varphi(D)$, 令$t_=\varphi^{-1}(x_0)$, 则$t_0\in D$, 且存在开球$B^k(t_0,\delta)\subset D$和$\mathbb{R}^n$的开集$V_{x_0}\ni x_0$ 使得$\varphi(B^k(t_0,\delta))=U_{x_0}$ 其中$U_{x_0}=\varphi(D)\cap V_{x_0}$. 由$\varphi^{-1}:\varphi(D)\to D$

连续易见$\varphi : B^k(t_0,\delta)\to U_{x_0}$ 是同胚. 取一个光滑的微分同胚映射$\zeta_{x_0}:\mathbb{R}^k\to B^k(t_0,\delta)$, 则复合映射$\psi_{x_0}:=\varphi\circ\zeta_{x_0}:\mathbb{R}^k\to U_{x_0}$ 是同胚. 于是$(\mathbb{R}^k,\psi_{x_0},U_{x_0})$ 是$\varphi(D)$的一张局部图. 因$\psi_{x_0}'(t)=\varphi'(\tau)\zeta_{x_0}'(t)$ 其中$\tau=\psi_{x_0}(t)$, 并注意到$\det(\zeta_{x_0}'(t))\neq 0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$, 故得知

$$\operatorname{rank}\psi_{x_0}'(t)=k\qquad\forall\, t\in\mathbb{R}^k.$$

将x_0 写成一般的x, 我们得到了$\varphi(D)$的一个图册

$$\mathcal{A}(\varphi(D))=\{(\mathbb{R}^k,\psi_x,U_x)\}_{x\in\varphi(D)}$$

这个图册满足**光滑曲面的定义**中的要求. 所以$\varphi(D)$是一个C^r类的无边的k维曲面(流形)。

(c): 设$\varphi : D\to\varphi(D)$为同胚. 设Ω是$\mathbb{R}^k$的开集或是$\mathbb{H}^k$的开集, $\psi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 可微或$\in C^r(\Omega,\mathbb{R}^n)$, 并设$\psi(\Omega)\subset\varphi(D)$. 只需证明:

当Ω 是$\mathbb{R}^k$的开集时, 对任意$s_0\in\Omega$, 存在$\delta>0$ 使得$I^k(s_0,\delta)\subset\Omega$ 且$s\mapsto\varphi^{-1}(\psi(s))$在$I^k(s_0,\delta)$内可微或属于$C^r$类;

当Ω 是$\mathbb{H}^k$的开集时, 对任意$s_0\in\Omega$, 存在$\delta>0$ 使得$\mathbb{H}^k\cap I^k(s_0,\delta)\subset\Omega$ 且$s\mapsto\varphi^{-1}(\psi(s))$在$\mathbb{H}^k\cap I^k(s_0,\delta)$上可微或属于$C^r$类。

设$s_0\in\Omega$. 令$t_0=\varphi^{-1}(\psi(s_0))$. 则$t_0\in D$. 对此$t_0$, 设开区间$I^k(t_0,\varepsilon)$ 和同胚映射Φ如(a)中给出. 对$y=(y_1,y_2,...,y_k,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ 令$P(y)=(y_1,y_2,...,y_k)$ (投影). 由(a)中结果知

$$(t,0)=\Phi^{-1}(\varphi(t))\qquad\forall\, t\in I^k(t_0,\varepsilon).$$

使用投影P得

$$t=P(\Phi^{-1}(\varphi(t)))\qquad\forall\, t\in I^k(t_0,\varepsilon).$$

对任意$x\in\varphi(I^k(t_0,\varepsilon)\cap D)$, 通过取$t=\varphi^{-1}(x)\in I^k(t_0,\varepsilon)\cap D$得到

$$\varphi^{-1}(x)=P(\Phi^{-1}(x))\qquad\forall\, x\in\varphi(I^k(t_0,\varepsilon)\cap D)\subset\Phi(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}).$$

由$\varphi : D\to\varphi(D)$是同胚知$\varphi(I^k(t_0,\varepsilon)\cap D)$是包含$x_0=\varphi(t_0)$的$\varphi(D)$的开集, 即存在$\mathbb{R}^n$的开集$V_{x_0}$使得$\varphi(I^k(t_0,\varepsilon)\cap D)=\varphi(D)\cap V_{x_0}$. 又因$\psi$连续且$\psi(\Omega)\subset\varphi(D)$ 且$\psi(s_0)=x_0\in V_{x_0}$, 故存在$\delta>0$使得当Ω 是$\mathbb{R}^k$的开集时, $I^k(s_0,\delta)\subset\Omega$ 且$\psi(I^k(s_0,\delta))\subset V_{x_0}$ 从而有

$$\psi(I^k(s_0,\delta))\subset\psi(\Omega)\cap V_{x_0}\subset\varphi(D)\cap V_{x_0}=\varphi(I^k(t_0,\varepsilon)\cap D)\subset\Phi(I^k(t_0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^{n-k}).$$

此时有

$$\varphi^{-1}(\psi(s)) = P(\Phi^{-1}(\psi(s))) \qquad \forall\, s \in I^k(s_0,\delta).$$

由复合映射的性质易见这函数在$I^k(s_0,\delta)$内可微或属于C^r类.

当Ω 是$\mathbb{H}^k$的开集时(即存在$\mathbb{R}^k$的开集O使得$\Omega = \mathbb{H}^k \cap O$) 有$\mathbb{H}^k \cap I^k(s_0,\delta) \subset \Omega$ 且$\psi(\mathbb{H}^k \cap I^k(s_0,\delta)) \subset V_{x_0}$ 从而如上有

$$\psi(\mathbb{H}^k \cap I^k(s_0,\delta)) \subset \psi(\Omega) \cap V_{x_0} \subset \varphi(I^k(t_0,\varepsilon) \cap D) \subset \Phi(I^k(t_0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-k}).$$

此时有

$$\varphi^{-1}(\psi(s)) = P(\Phi^{-1}(\psi(s))) \qquad \forall\, s \in \mathbb{H}^k \cap I^k(s_0,\delta).$$

由复合映射的性质知这函数在$\mathbb{H}^k \cap I^k(s_0,\delta)$内可微或属于$C^r$类. $\square$

【命题11.10】设$S \subset \mathbb{R}^n$是一个k-维(光滑)曲面($1 \le k \le n$), $\mathcal{A}(S) = \{(\mathbb{R}^k, \varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A} \cup \{(\mathbb{H}^k, \varphi_\beta, U_\beta)\}_{\beta\in B}$为$S$的可数(光滑)图册. 则有

$$S^\circ = \bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(\mathbb{R}^k) \cup \bigcup_{\beta\in B} \varphi_\beta((\mathbb{H}^k)^\circ), \qquad \partial S = \bigcup_{\beta\in B} \varphi_\beta(\partial\mathbb{H}^k). \tag{2.2}$$

因此当∂S 非空时, ∂S 是$k-1$维的(光滑)的无边曲面; 而当$k \ge 2$时, $\{(\mathbb{R}^{k-1}, \widetilde{\varphi}_\beta, \widetilde{U}_\beta)\}_{\beta\in B}$便是$\partial S$的一个(光滑)图册, 其中$\widetilde{\varphi}_\beta(\cdot) = \varphi_\beta(0,\cdot), \widetilde{U}_\beta = \varphi_\beta(\partial\mathbb{H}^k) = \varphi_\beta(\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1})$.

特别可知每个光滑的k维带边曲面S的边∂S都是光滑的$k-1$维无边曲面.

【注】上面括号“(光滑)”表示命题分别对于光滑曲面和一般曲面都成立.

【证】由图册的定义和$(\mathbb{H}^k)^\circ = (-\infty,0) \times \mathbb{R}^{k-1}$与$\mathbb{R}^k$同胚以及**命题11.3**知$\varphi_\alpha(\mathbb{R}^k) = U_\alpha = U_\alpha^\circ \subset S^\circ$ for all $\alpha \in A$ 和$\varphi_\beta((\mathbb{H}^k)^\circ) = U_\beta^\circ \subset S^\circ, \varphi_\beta(\partial\mathbb{H}^k) \subset \partial S$ for all $\beta \in B$. 因此

$$S^\circ \supset \bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(\mathbb{R}^k) \cup \bigcup_{\beta\in B} \varphi_\beta((\mathbb{H}^k)^\circ), \quad \partial S \supset \bigcup_{\beta\in B} \varphi_\beta(\partial\mathbb{H}^k).$$

但

$$S^\circ \cup \partial S = S = \bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(\mathbb{R}^k) \cup \bigcup_{\beta\in B} \varphi_\beta((\mathbb{H}^k)^\circ) \cup \bigcup_{\beta\in B} \varphi_\beta(\partial\mathbb{H}^k)$$

且S° 与∂S 不相交, 故等式(2.2)成立.

下设$\partial S \ne \emptyset$. 当$k=1$ 时∂S 是零维的, 当然无边.

设$k \ge 2$. 只需就光滑的情形给予证明(连续的情形的证明已含在其中). 令

$$\widetilde{\varphi}_\beta(\tau) = \varphi_\beta(0,\tau), \quad \tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$$

则有

$$\widetilde{\varphi}_\beta(\mathbb{R}^{k-1}) = \varphi_\beta(\{0\}\times\mathbb{R}^{k-1}) = \varphi_\beta(\partial\mathbb{H}^k) = \widetilde{U}_\beta.$$

由$\varphi_\beta:\mathbb{H}^k\to U_\beta$为同胚易见$\widetilde{\varphi}_\beta:\mathbb{R}^{k-1}\to\widetilde{U}_\beta$是同胚. 而由$\mathrm{rank}\varphi_\beta'(t)\equiv k, t\in\mathbb{H}^k$, 知Jacobi矩阵$\varphi_\beta'(t)$的所有$k$个列向量线性无关. 因Jacobi矩阵$\widetilde{\varphi}_\beta'(\tau)$中所有$k-1$个列向量等于$\varphi_\beta'(t)|_{t=(0,\tau)}$中去掉第一列后的$k-1$个列向量, 故$\widetilde{\varphi}_\beta'(\tau)$中所有$k-1$个列向量也线性无关, 因此$\mathrm{rank}\widetilde{\varphi}_\beta'(\tau)\equiv k-1, \tau\in\mathbb{R}^{k-1}$. 综合这些可知$\mathcal{A}(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\widetilde{\varphi}_\beta,\widetilde{U}_\beta)\}_{\beta\in B}$便是$\partial S$的一个光滑图册. 因此$\partial S$是$k-1$维光滑曲面且无边. □

【重要例子(球面、球极投影及应用)】设$n\ge 2$, $\mathbb{S}^{n-1}$为$\mathbb{R}^n$中的单位球面, 即

$$\mathbb{S}^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid |x|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2=1\}.$$

则

(a) $\mathbb{S}^{n-1}$是一个紧的无边的$n-1$维光滑曲面, 且$\mathbb{S}^{n-1}$可以被两张光滑满秩的参数图表示, 但不能被一张参数图表示。

(b) 对任意$x_0\in\mathbb{S}^{n-1}$和任意$0<\delta<2$, $\mathbb{S}^{n-1}\cap B^n(x_0,\delta)$与$\mathbb{R}^{n-1}$同胚。

(c) 任何集合$K\subset\mathbb{R}^{n-1}$都不与$\mathbb{S}^{n-1}$同胚。(**维数的制约!**)

(d) 上半球面$\mathbb{S}^{n-1}_+=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}\mid x_n\ge 0\}$是一个紧的带边的$n-1$维光滑曲面, 其边界为$\partial\mathbb{S}^{n-1}_+=\mathbb{S}^{n-2}\times\{0\}$. 这里$\mathbb{S}^0=\{-1,1\}$. 此外$\mathbb{S}^{n-1}_+$与闭单位球$\mathbb{B}^{n-1}=\overline{B^{n-1}(0,1)}$同胚且从$\mathbb{B}^{n-1}$到$\mathbb{S}^{n-1}_+$的同胚映射可以是$C^\infty$光滑的且处处满秩.

【证】(a): 令$\mathbf{e}_n=(0,...,0,1)\in\mathbb{R}^n$. 考虑两个球极投影映射[3]:

$$x=\varphi_-(t)=\Big(\frac{2t}{1+|t|^2},\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}\Big),\quad t=(t_1,t_2,...,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},$$

$$x=\varphi_+(t)=\Big(\frac{2t}{1+|t|^2},\frac{-1+|t|^2}{1+|t|^2}\Big),\quad t=(t_1,t_2,...,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

显然$\varphi_-,\varphi_+\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^n)$.

$$V_-=\mathbb{R}^n\setminus\{-\mathbf{e}_n\},\quad V_+=\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{e}_n\}.$$

[3]几何地讲, 这里的球极投影映射$\varphi_\pm$应叫做球极投影映射的逆映射. 由于同胚的缘故, 我们把球极投影映射及其逆映射都叫做球极投影映射.

不难证明φ_-,φ_+ 均为$\mathbb{R}^n$上的单射且

$$\varphi_-(\mathbb{R}^{n-1})=\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-\mathbf{e}_n\}=\mathbb{S}^{n-1}\cap V_-,\quad \varphi_+(\mathbb{R}^{n-1})=\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{\mathbf{e}_n\}=\mathbb{S}^{n-1}\cap V_+.$$

φ_-,φ_+的逆映射分别是从南极点$-\mathbf{e}_n$出发向北极点的切平面$\mathbb{R}^{n-1}$的球极投影:

$$t=\varphi_-^{-1}(x)=\frac{\widetilde{x}}{1+x_n},\quad x=(\widetilde{x},x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-\mathbf{e}_n\}$$

和从北极点$\mathbf{e}_n$出发向南极点的切平面$\mathbb{R}^{n-1}$的球极投影:

$$t=\varphi_+^{-1}(x)=\frac{\widetilde{x}}{1-x_n},\quad x=(\widetilde{x},x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{\mathbf{e}_n\}.$$

易见这两个逆映射也是连续的. 因此$\varphi_+:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}\cap V_+,\varphi_-:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}\cap V_-$都是同胚. 因$\mathbb{S}^{n-1}\cap V_-,\mathbb{S}^{n-1}\cap V_+$ 覆盖了$\mathbb{S}^{n-1}$, 故

$$\mathcal{A}(\mathbb{S}^{n-1})=\{(\mathbb{R}^{n-1},\varphi_-,\mathbb{S}^{n-1}\cap V_-),\,(\mathbb{R}^{n-1},\varphi_+,\mathbb{S}^{n-1}\cap V_+)\}$$

是$\mathbb{S}^{n-1}$的一个光滑图册. 这说明$\mathbb{S}^{n-1}$ 可以被两张光滑参数图表示. 由于这里所有参数图的定义域都是$\mathbb{R}^{n-1}$, 故$\mathbb{S}^{n-1}$是一个紧的无边的$n-1$维曲面.

为证$\mathbb{S}^{n-1}$是$n-1$维的C^∞光滑曲面, 只需证明两个光滑映射$\varphi_\pm\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^n)$ 还是满秩的, 即

$$\mathrm{rank}\varphi'_\pm(t)=n-1\qquad\forall\,t\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

为记号简便, 令$\varphi(t)=\varphi_-(t)$. 则$\varphi_+(t)=-\varphi(-t),\ t\in\mathbb{R}^{n-1}$. 将$\varphi(t),t$ 都用列向量表示, 令$\mathrm{I}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$是单位阵, 计算

$$\varphi'(t)=\begin{pmatrix}-\left(\frac{4t_it^j}{(1+|t|^2)^2}\right)_{k\times k}+\frac{2}{1+|t|^2}\mathrm{I}\\ \\ -\frac{4t^\tau}{(1+|t|^2)^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4tt^\tau}{(1+|t|^2)^2}+\frac{2}{1+|t|^2}\mathrm{I}\\ \\ -\frac{4t^\tau}{(1+|t|^2)^2}\end{pmatrix}$$

从而有

$$\begin{aligned}\varphi'(t)^\tau\varphi'(t)&=\begin{pmatrix}-\frac{4tt^\tau}{(1+|t|^2)^2}+\frac{2}{1+|t|^2}\mathrm{I}, & -\frac{4t}{(1+|t|^2)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4tt^\tau}{(1+|t|^2)^2}+\frac{2}{1+|t|^2}\mathrm{I}\\ \\ -\frac{4t^\tau}{(1+|t|^2)^2}\end{pmatrix}\\&=\Big(-\frac{4tt^\tau}{(1+|t|^2)^2}+\frac{2}{1+|t|^2}\mathrm{I}\Big)^2+\frac{16tt^\tau}{(1+|t|^2)^4}\\&=(\frac{2}{1+|t|^2})^2\mathrm{I}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t)) = \Big(\frac{2}{1+|t|^2}\Big)^{2(n-1)} > 0 \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

所以$\varphi'(t)$ 处处满秩. 又因$\varphi_+(t) = -\varphi(-t)$, 故$\varphi_+'(t)$也处处满秩.

由于$\mathbb{S}^{n-1}$是一个紧流形, 故$\mathbb{S}^{n-1}$不能被一个参数图表示.

一般地, 若S 是一个紧的$k(\ge 1)$维流形, 则S 不能被一个参数图表示. 否则, 设S 能被一个参数图表示, 则这个参数图为$(\mathbb{R}^k,\varphi,U)$ 或$(\mathbb{H}^k,\varphi,U)$. 因U 覆盖了S (即$U\supset S$) 且$U\subset S$, 故$U=S$. 于是得到$\varphi:\mathbb{R}^k\to S$ 是同胚或$\varphi:\mathbb{H}^k\to S$ 是同胚, 也即逆映射$\varphi^{-1}: S\to\mathbb{R}^k$ 也是连续的或$\varphi^{-1}: S\to\mathbb{H}^k$也是连续的。但$S$ 是紧集, 故$\varphi^{-1}(S)$ 也应是紧集, 也即$\mathbb{R}^k=\varphi^{-1}(S)$ 是$\mathbb{R}^k$中的紧集或相应地$\mathbb{H}^k=\varphi^{-1}(S)$ 是$\mathbb{H}^k$中的紧集。但显然$\mathbb{R}^k$和$\mathbb{H}^k$都不是紧集。这矛盾证明了S 不能被一张参数图表示。

(b): 设$x_0\in\mathbb{S}^{n-1}$. 将北极旋转到x_0, 即取正交阵$\mathrm{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得$\mathrm{T}\mathbf{e}_n = x_0$. 令

$$x=\psi(t)=\mathrm{T}\varphi_-(t),\quad t\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

则由$\varphi_-(\mathbb{R}^{n-1})=\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-\mathbf{e}_n\}$ 和$\mathrm{T}(-\mathbf{e}_n)=-x_0$ 知

$$\psi(\mathbb{R}^{n-1})=\mathrm{T}(\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-\mathbf{e}_n\})=\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-x_0\}$$

且$\psi:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-x_0\}$ 是同胚, 其逆映射为

$$t=\psi^{-1}(x)=\varphi_-^{-1}(\mathrm{T}^{-1}x),\quad x\in\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-x_0\}.$$

由φ_-,ψ的定义易见

$$\varphi_-(0)=\mathbf{e}_n,\quad \psi(0)=x_0.$$

设$0<\delta<2$. 由$\delta<2$易见$\mathbb{S}^{n-1}\cap B^n(x_0,\delta)\subset\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-x_0\}=\psi(\mathbb{R}^{n-1})$. 来证明

$$\psi(B^{n-1}(0,R))=\mathbb{S}^{n-1}\cap B^n(x_0,\delta)\quad 其中\quad R=\sqrt{\frac{(\delta/2)^2}{1-(\delta/2)^2}}.$$

事实上对任意$t\in\mathbb{R}^{n-1}$ 有

$$|\psi(t)-x_0|^2=|\psi(t)-\psi(0)|^2=|\varphi_-(t)-\varphi_-(0)|^2=2-2\langle\varphi_-(t),\varphi_-(0)=\frac{4|t|^2}{1+|t|^2}$$

从而有

$$|\psi(t)-x_0|<\delta \iff |t|<\sqrt{\frac{(\delta/2)^2}{1-(\delta/2)^2}}=R.$$

所以$\psi(B^{n-1}(0,R))=\mathbb{S}^{n-1}\cap B^n(x_0,\delta)$.

于是限制在$B^{n-1}(0,R)$上, $\psi\Big|_{B^{n-1}(0,R)}: B^{n-1}(0,R)\to\mathbb{S}^{n-1}\cap B^n(x_0,\delta)$ 是同胚. 由于$B^{n-1}(0,R)$ 与$\mathbb{R}^{n-1}$ 同胚, 即存在同胚$\zeta:\mathbb{R}^{n-1}\to B^{n-1}(0,R)$, 因此$\psi\circ\zeta:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}\cap B^n(x_0,\delta)$ 是同胚. 根据曲面(流形)的定义我们再次证明了单位球面$\mathbb{S}^{n-1}$(它显然是紧集)是一个$n-1$维的无边流形.

(c): 反证法: 假设存在集合$K\subset\mathbb{R}^{n-1}$使得K 与$\mathbb{S}^{n-1}$ 同胚. 设$f:K\to\mathbb{S}^{n-1}$为同胚映射. 则由$f^{-1}:\mathbb{S}^{n-1}\to K$ 连续和$\mathbb{S}^{n-1}$ 是紧集知$K=f^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ 是紧集.

设$\varphi=\varphi_+:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{\mathbf{e}_n\}$ 为上面定义的球极投影. 取$t_0=f^{-1}(\mathbf{e}_n)$. 则$t_0\in K$. 令$g(t)=f^{-1}(\varphi(t)),t\in\mathbb{R}^{n-1}$. 则$g:\mathbb{R}^{n-1}\to K\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 是连续单射. 据**Brouwer 区域不变定理**知g是开映射, 因此$g(\mathbb{R}^{n-1})$ 是$\mathbb{R}^{n-1}$的开集. 另一方面有

$$g(\mathbb{R}^{n-1})=f^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^{n-1}))=f^{-1}(\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{\mathbf{e}_n\})=f^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})\setminus\{f^{-1}(\mathbf{e}_n)\}=K\setminus\{t_0\}.$$

显然$K\setminus\{t_0\}$非空且由K 是紧集易证$K\setminus\{t_0\}$ 不是$\mathbb{R}^{n-1}$的开集. 这就与$g(\mathbb{R}^{n-1})$是$\mathbb{R}^{n-1}$的开集矛盾.

(d): 考虑球极投影在闭单位球$\mathbb{B}^{n-1}$上的限制:

$$x=\varphi(t):=\varphi_-(t)=\Big(\frac{2t}{1+|t|^2},\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}\Big),\quad t\in\mathbb{B}^{n-1}.$$

其逆映射为

$$t=\varphi^{-1}(x)=\frac{\widetilde{x}}{1+x_n},\qquad x=(\widetilde{x},x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}_+.$$

由此可见$\varphi:\mathbb{B}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}_+$ 是同胚且由上面结果知φ 在$\mathbb{B}^{n-1}$ 上是C^∞光滑的并处处满秩.

[注: 如令

$$\psi(t)=(t,\sqrt{1-|t|^2}),\quad t\in\mathbb{B}^{n-1}.$$

则易见$\psi:\mathbb{B}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}_+$是同胚. 但$\psi$在$\mathbb{B}^{n-1}$上不是光滑的, 事实上$\psi$在$\partial\mathbb{B}^{n-1}$ 上每一点不可微.]

下证$\mathbb{S}^{n-1}_+$是一个紧的带边的$n-1$维光滑曲面, 其边界为$\partial\mathbb{S}^{n-1}_+=\mathbb{S}^{n-2}\times\{0\}$.

任取$x_0=(\widetilde{x}_0,x_{0n})\in\mathbb{S}^{n-1}_+$. 令$t_0=\varphi^{-1}(x_0)$ ($\in\mathbb{B}^{n-1}$), 则

$$x_0=(\widetilde{x}_0,x_{0n})=\varphi(t_0)=\Big(\frac{2t_0}{1+|t_0|^2},\frac{1-|t_0|^2}{1+|t_0|^2}\Big).$$

考虑两种情形.

Case 1: $x_0 \in \mathbb{S}_+^{n-1} \setminus (\mathbb{S}^{n-2} \times \{0\})$, 即$x_{0n} > 0$. 此时有$1-|t_0|^2 > 0$ 即$|t_0| < 1$. 取$0 < \delta < 1-|t_0|$, 则易见开球$B^{n-1}(t_0,\delta) \subset (\mathbb{B}^{n-1})^\circ \subset \mathbb{B}^{n-1}$. 因$\varphi : \mathbb{B}^{n-1} \to \mathbb{S}_+^{n-1}$ 是同胚且$x_0 = \varphi(t_0)$, 故存在$\mathbb{R}^n$的开集$V_{x_0} \ni x_0$使得$\varphi(B^{n-1}(t_0,\delta)) = \mathbb{S}_+^{n-1} \cap V_{x_0}$. 周知$B^{n-1}(t_0,\delta)$ 与$\mathbb{R}^{n-1}$为同胚, 设$\zeta_{x_0} : \mathbb{R}^{n-1} \to B^{n-1}(t_0,\delta)$ 为同胚且$\zeta_{x_0} \in C^\infty$. 则$\varphi\circ\zeta_{x_0} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}_+^{n-1} \cap V_{x_0}$ 是同胚且$\varphi\circ\zeta_{x_0} \in C^\infty$.

令$\psi_{x_0}(\tau) = \varphi\circ\zeta_{x_0}(\tau), \tau \in \mathbb{R}^{n-1}; U_{x_0} = \mathbb{S}_+^{n-1} \cap V_{x_0}$. 则$(\mathbb{R}^{n-1}, \psi_{x_0}, U_{x_0})$ 是$\mathbb{S}_+^{n-1}$的一个包含x_0的一个光滑的局部图. 由流形的内部的定义知$x_0 \in (\mathbb{S}_+^{n-1})^\circ$.

Case 2: $x_0 \in \mathbb{S}^{n-2} \times \{0\}$, 即$x_{0n} = 0$. 此时有$1-|t_0|^2 = 0$ 即$|t_0| = 1$. 如上, 因$\varphi : \mathbb{B}^{n-1} \to \mathbb{S}_+^{n-1}$ 是同胚且$x_0 = \varphi(t_0)$, 故存在$\mathbb{R}^n$的开集$V_{x_0} \ni x_0$使得

$$\varphi(\mathbb{B}^{n-1} \cap B^{n-1}(t_0,1)) = \mathbb{S}_+^{n-1} \cap V_{x_0}.$$

取一个正交阵$\mathrm{T}_{x_0} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得$\mathrm{T}_{x_0}\mathbf{e}_1 = t_0$, 其中$\mathbf{e}_1 = (1,0,...,0)$. 由正交变换的保距性质易见

$$\mathrm{T}_{x_0}(\mathbb{B}^{n-1} \cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1)) = \mathbb{B}^{n-1} \cap B^{n-1}(t_0,1).$$

这给出

$$\varphi\circ T_{x_0}(\mathbb{B}^{n-1} \cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1)) = \mathbb{S}_+^{n-1} \cap V_{x_0}.$$

下证存在同胚映射$g : \mathbb{H}^{n-1} \to \mathbb{B}^{n-1} \cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1)$ 且$g \in C^\infty(\mathbb{H}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$. 如果此事成立, 则得到同胚$\varphi\circ T_{x_0}\circ g : \mathbb{H}^{n-1} \to \mathbb{S}_+^{n-1} \cap V_{x_0}$ 且$\varphi\circ T_{x_0}\circ g \in C^\infty$.

为构造这个同胚, 先构造同胚$f : (0,1] \times B^{n-2}(0,\frac{\sqrt{3}}{2}) \to \mathbb{B}^{n-1} \cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1)$.

首先易证

$$t = (t_1,\widetilde{t}) \in \mathbb{B}^{n-1} \cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1) \iff |\widetilde{t}| < \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1-\sqrt{1-|\widetilde{t}|^2} < t_1 \le \sqrt{1-|\widetilde{t}|^2}.$$

这里$\widetilde{t} = (t_2,t_3,...,t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$. 当$n=2$时$\mathbb{R}^{n-2}$ 和$\widetilde{t}$都不出现, 此时$t = t_1$ (下同).

令

$$t = f(s) := \Big(s_1(2\sqrt{1-|\widetilde{s}|^2}-1)+1-\sqrt{1-|\widetilde{s}|^2},\ \widetilde{s}\Big), \quad s = (s_1,\widetilde{s}) \in (0,1]\times B^{n-2}(0,\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

这也写成

$$t = (t_1,\widetilde{t}), \quad t_1 = s_1(2\sqrt{1-|\widetilde{s}|^2}-1)+1-\sqrt{1-|\widetilde{s}|^2}, \quad \widetilde{t} = \widetilde{s}.$$

易见
$$|\widetilde{s}|<\frac{\sqrt{3}}{2}\iff 2\sqrt{1-|\widetilde{s}|^2}-1>0.$$
易见映射f的逆映射为
$$\widetilde{s}=\widetilde{t},\quad s_1=\frac{t_1-1+\sqrt{1-|\widetilde{t}|^2}}{2\sqrt{1-|\widetilde{t}|^2}-1},\quad t=(t_1,\widetilde{t})\in\mathbb{B}^{n-1}\cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1).$$
即
$$s=f^{-1}(t)=\left(\frac{t_1-1+\sqrt{1-|\widetilde{t}|^2}}{2\sqrt{1-|\widetilde{t}|^2}-1},\ \widetilde{t}\right),\quad t=(t_1,\widetilde{t})\in\mathbb{B}^{n-1}\cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1).$$
于是从结构上可见$f:(0,1]\times B^{n-2}(0,\frac{\sqrt{3}}{2})\to\mathbb{B}^{n-1}\cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1)$ 是同胚且$f\in C^\infty((0,1]\times B^{n-2}(0,\frac{\sqrt{3}}{2}),\mathbb{R}^{n-1})$. 此外易见$\mathbf{e}_1=f(\mathbf{e}_1)$. 令
$$s=\zeta(\tau)=\left(\frac{1}{1-\tau_1},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\widetilde{\tau}}{\sqrt{1+|\widetilde{\tau}|^2}}\right),\quad \tau=(\tau_1,\widetilde{\tau})\in\mathbb{H}^{n-1}=(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-2}.$$
则$\zeta:\mathbb{H}^{n-1}=(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-2}\to(0,1]\times B^{n-2}(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 是同胚且$\zeta\in C^\infty(\mathbb{H}^{n-1},\mathbb{R}^{n-1})$. 此外有$\mathbf{e}_1=\zeta(\mathbf{0})$. 令$g(\tau)=f\circ\zeta(\tau),\tau\in\mathbb{H}^{n-1}$. 则$g:\mathbb{H}^{n-1}\to\mathbb{B}^{n-1}\cap B^{n-1}(\mathbf{e}_1,1)$是同胚且$g\in C^\infty(\mathbb{H}^{n-1},\mathbb{R}^{n-1})$, $g(\mathbf{0})=\mathbf{e}_1$.

令$\psi_{x_0}(\tau)=\varphi\circ\mathrm{T}_{x_0}\circ g(\tau),\tau\in\mathbb{H}^{n-1}$; $U_{x_0}=\mathbb{S}_+^{n-1}\cap V_{x_0}$. 则$(\mathbb{H}^{n-1},\psi_{x_0},U_{x_0})$ 是$\mathbb{S}_+^{n-1}$的一个包含x_0的光滑的局部图且$x_0=\psi_{x_0}(\mathbf{0})$, 即$\psi_{x_0}^{-1}(x_0)=\mathbf{0}\in\partial\mathbb{H}^{n-1}$.

综合以上两种情况我们得到了$\mathbb{S}_+^{n-1}$的一个光滑图册
$$\mathcal{A}(\mathbb{S}_+^{n-1})=\{(\mathbb{R}^{n-1},\psi_{x_0},U_{x_0})\}_{x_0\in\mathbb{S}_+^{n-1}\setminus(\mathbb{S}^{n-2}\times\{0\})}\cup\{(\mathbb{H}^{n-1},\psi_{x_0},U_{x_0})\}_{x_0\in\mathbb{S}^{n-2}\times\{0\}}.$$
因此$\mathbb{S}_+^{n-1}$是一个紧的带边的$n-1$维光滑曲面 ($\mathbb{S}_+^{n-1}$的紧性是显然的).

而从以上两种情况的分析中得到的结果和**命题11.2**以及流形的内部与边界的定义还知分别有
$$\mathbb{S}_+^{n-1}\setminus(\mathbb{S}^{n-2}\times\{0\})\subset(\mathbb{S}_+^{n-1})^\circ,\quad \mathbb{S}^{n-2}\times\{0\}\subset\partial\mathbb{S}_+^{n-1}.$$
再注意$(\mathbb{S}_+^{n-1})^\circ$与$\partial\mathbb{S}_+^{n-1}$不相交(它们都是$\mathbb{S}_+^{n-1}$的子集), 就得到
$$(\mathbb{S}_+^{n-1})^\circ=\mathbb{S}_+^{n-1}\setminus(\mathbb{S}^{n-2}\times\{0\}),\quad \partial\mathbb{S}_+^{n-1}=\mathbb{S}^{n-2}\times\{0\}.\qquad\square$$

§11.3. 光滑曲面的定向

【转移映射】 设$k\ge 1$, $\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是光滑k-维曲面$S\subset\mathbb{R}^n$的一个图册. 据**定理11.9 (c)**可知：若$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, 则映射

$$T_{\alpha\beta}:=\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha:\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta),\quad T_{\alpha\beta}(t)=\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t))$$

及其逆映射

$$T_{\beta\alpha}:=\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta:\varphi_\beta^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta),\quad T_{\beta\alpha}(t)=\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(t))$$

都是光滑的. 由于$T_{\alpha\beta}$ 及其逆映射$T_{\beta\alpha}$都是光滑的, 故它们的Jacobi 行列式都非零：

$$\det T'_{\alpha\beta}(t)\neq 0\quad \forall\, t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\,,$$

$$\det T'_{\beta\alpha}(t)\neq 0\quad \forall\, t\in\varphi_\beta^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\,.$$

映射$T_{\alpha\beta},T_{\beta\alpha}$ 给出了曲面S 的局部坐标之间的转移, 故称它们为坐标间的**转移映射**.

【定义(光滑曲面的定向)】 设S为一光滑曲面. 我们称S的两个局部图$(\varphi_\alpha,U_\alpha)$, (φ_β,U_β)是相容的如果$U_\alpha\cap U_\beta=\emptyset$, 或者当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$时坐标转移映射$T_{\alpha\beta}$ 有**正的**Jacobi行列式:

$$\det T'_{\alpha\beta}(t)>0\quad \forall\, t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\,.$$

如果S 的一个图册$\mathcal{A}(S)$是由两两相容的局部图组成的, 则称$\mathcal{A}(S)$是S的一个定向图册.

如果S有一个定向图册, 则称S是可定向的或定向曲面, 否则称S不是可定向的. □

【命题11.11】 $\mathbb{R}^n$中的一个可定向的带边光滑曲面S 的边∂S仍是可定向的.

具体来说, 设$2\le k\le n$, $S\subset\mathbb{R}^n$为一个k-维带边的光滑的定向曲面, $\mathcal{A}(S)=\{(\mathbb{R}^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}\cup\{(\mathbb{H}^k,\varphi_\beta,U_\beta)\}_{\beta\in B}$ 为S的一个定向图册. 对每个$\beta\in B$ 令

$$\widetilde{U}_\beta=(\partial S)\cap U_\beta,\quad \widetilde{\varphi}_\beta(\tau)=\varphi_\beta(0,\tau),\quad \tau\in\mathbb{R}^{k-1}.$$

则$\mathcal{A}(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\widetilde{\varphi}_\beta,\widetilde{U}_\beta)\}_{\beta\in B}$ 便是∂S的一个定向图册.

【证】 首先由**命题11.10**的证明可知$\mathcal{A}(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\widetilde{\varphi}_\beta,\widetilde{U}_\beta)\}_{\beta\in B}$ 是∂S的一个光滑图册. 其次我们强调: $\mathbb{H}^k$中向量的第一个坐标≤ 0, 即$\mathbb{H}^k=(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{k-1}$.

任取$\alpha,\beta\in B$ 满足$\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta\neq\emptyset$. 设$\widetilde{T}_{\alpha\beta}$ 是转移映射

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta}:=\widetilde{\varphi}_\beta^{-1}\circ\widetilde{\varphi}_\alpha:\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta)\to\widetilde{\varphi}_\beta^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta),\quad \widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau):=\widetilde{\varphi}_\beta^{-1}(\widetilde{\varphi}_\alpha(\tau)).$$

来证明

$$\det\widetilde{T}'_{\alpha\beta}(\tau)>0\quad\forall\,\tau\in\widetilde{\varphi_\alpha}^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta).\tag{3.1}$$

由$(\partial S)\cap U_\alpha\cap U_\beta=\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta\neq\emptyset$ 知$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$. 因$\mathcal{A}(S)$ 是定向图册, 故对于转移映射$T_{\alpha\beta}(t)=\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t))$ 有

$$\det T'_{\alpha\beta}(t)>0\qquad\forall\,t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta).$$

注意到$\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta)\iff(0,\tau)\in\varphi_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta)=\varphi_\alpha^{-1}((\partial S)\cap U_\alpha\cap U_\beta)$, 故得到

$$\det T'_{\alpha\beta}(t)\Big|_{t=(0,\tau)}>0\qquad\forall\,\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta).\tag{3.2}$$

而由转移映射的定义有

$$\varphi_\beta(T_{\alpha\beta}(t))\equiv\varphi_\alpha(t),\quad t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\subset\mathbb{H}^k.$$

$$\widetilde{\varphi}_\beta(\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau))\equiv\widetilde{\varphi}_\alpha(\tau),\quad \tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta)\subset\mathbb{R}^{k-1}$$

即

$$\varphi_\beta(0,\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau))\equiv\varphi_\alpha(0,\tau),\quad \tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta).$$

因同时有

$$\varphi_\beta(T_{\alpha\beta}(0,\tau))\equiv\varphi_\alpha(0,\tau),\quad \tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta)$$

故得到关系式

$$T_{\alpha\beta}(0,\tau)=(0,\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau))\qquad\forall\,\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta).$$

为了计算Jacobi矩阵的行列式, 我们使用列向量. 写

$$T_{\alpha\beta}(t)=\begin{pmatrix}T_{\alpha\beta,1}(t)\\T_{\alpha\beta,2}(t)\\\vdots\\T_{\alpha\beta,k}(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{H}^k,\quad \begin{pmatrix}T_{\alpha\beta,1}(0,\tau)\\T_{\alpha\beta,2}(0,\tau)\\\vdots\\T_{\alpha\beta,k}(0,\tau)\end{pmatrix}=T_{\alpha\beta}(0,\tau)=\begin{pmatrix}0\\\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau)\end{pmatrix}.$$

于是有

$$T_{\alpha\beta,1}(0,\tau)=0\qquad\forall\,\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta),\tag{3.3}$$

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau)=\begin{pmatrix} T_{\alpha\beta,2}(0,\tau)\\ \vdots\\ T_{\alpha\beta,k}(0,\tau)\end{pmatrix},\quad \tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta).$$

从恒等式(3.3)和**偏导数的定义**易见

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_j}(0,\tau)=0\quad \forall\tau=(t_2,t_3,...,t_k)\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta),\quad j=2,3,...,k.$$

由此有

$$T'_{\alpha\beta}(t)\Big|_{t=(0,\tau)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_1}(0,\tau) & 0 & \cdots & 0\\ \frac{\partial T_{\alpha\beta,2}}{\partial t_1}(0,\tau) & \frac{\partial T_{\alpha\beta,2}}{\partial t_2}(0,\tau) & \cdots & \frac{\partial T_{\alpha\beta,2}}{\partial t_k}(0,\tau)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial T_{\alpha\beta,k}}{\partial t_1}(0,\tau) & \frac{\partial T_{\alpha\beta,k}}{\partial t_2}(0,\tau) & \cdots & \frac{\partial T_{\alpha\beta,k}}{\partial t_k}(0,\tau)\end{pmatrix}$$

从而有

$$\det T'_{\alpha\beta}(t)\Big|_{t=(0,\tau)}=\frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_1}(0,\tau)\det\begin{pmatrix} \frac{\partial T_{\alpha\beta,2}}{\partial t_2}(0,\tau) & \cdots & \frac{\partial T_{\alpha\beta,2}}{\partial t_k}(0,\tau)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial T_{\alpha\beta,k}}{\partial t_2}(0,\tau) & \cdots & \frac{\partial T_{\alpha\beta,k}}{\partial t_k}(0,\tau)\end{pmatrix},$$

$$0<\det T'_{\alpha\beta}(t)\Big|_{t=(0,\tau)}=\frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_1}(0,\tau)\det\widetilde{T}'_{\alpha\beta}(\tau)\qquad\forall\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta).\tag{3.4}$$

这里“$0<$”是由于正性(3.2). 由此得知$\frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_1}(0,\tau)\neq 0,\det\widetilde{\varphi}'_{\alpha\beta}(\tau)\neq 0$ for all $\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta)$. 又因$T_{\alpha\beta,1}(t)\le 0$ for all $t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\subset\mathbb{H}^k$ 且$T_{\alpha\beta,1}(0,\tau)=0$ for all $\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta)$, 故有

$$\text{当}h<0\text{ 时}\quad \frac{T_{\alpha\beta,1}(h,\tau)-T_{\alpha\beta,1}(0,\tau)}{h}=\frac{T_{\alpha\beta,1}(h,\tau)}{h}\ge 0$$

从而有

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_1}(0,\tau)=\lim_{h\to 0-}\frac{T_{\alpha\beta,1}(h,\tau)-T_{\alpha\beta,1}(0,\tau)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{T_{\alpha\beta,1}(h,\tau)}{h}\ge 0.$$

再结合$\frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_1}(0,\tau)\neq 0$ 即知

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta,1}}{\partial t_1}(0,\tau)>0\qquad\forall\tau\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\widetilde{U}_\alpha\cap\widetilde{U}_\beta).\tag{3.5}$$

联合(3.4),(3.5) 即知(3.1) 成立. 所以$\mathcal{A}(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\widetilde{\varphi}_\beta,\widetilde{U}_\beta)\}_{\beta\in B}$ 便是∂S的一个定向图册. $\square$

【**曲面及其边界定向的和谐**】设$\mathcal{A}(S)=\{(\mathbb{R}^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}\cup\{(\mathbb{H}^k,\varphi_\beta,U_\beta)\}_{\beta\in B}$ 为带边的光滑曲面S的一个定向图册. 根据**命题11.11**, $A(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\widetilde{\varphi}_\beta,\widetilde{U}_\beta)\}_{\beta\in B}$ 是边界∂S的定向图册. 边界∂S 的由上述$\mathcal{A}(\partial S)$确定的定向称为是与S的定向相容的定向, 也称为是由S的定向诱导的定向. $\Box$

下面讲一个常用的简单命题, 它表明: 光滑曲面的任何非空开子集仍属于同类曲面.

【**命题11.12**】设$S\subset\mathbb{R}^n$ 为k-维光滑曲面, $U\subset S$ 是S的任一非空开集[4]. 则U 也是k-维光滑曲面. 并且若S是可定向的, 则U也是可定向的.

【证】我们将利用S的图册$\mathcal{A}(S)=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 来构造U的图册. 这里假定: 若S是定向的, 则$\mathcal{A}(S)$取为定向图册. 由S的光滑性, 可设所有参数映射φ_α在自己的定义域$\mathbb{R}^k$ 或$\mathbb{H}^k$上属于C^r 类$(r\ge 1)$.

任取$x_0\in U$. 由$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖了S知存在S 的局部图$(\varphi_\alpha,U_\alpha),\alpha=\alpha_{x_0}$, 使得$x_0\in U_\alpha$. 令$t_0=\varphi_\alpha^{-1}(x_0)$.

若$x_0\in S^\circ$, 则$t_0\in\varphi_\alpha^{-1}(U\cap S^\circ\cap U_\alpha)\subset\mathbb{R}^k$ 或$\subset(\mathbb{H}^k)^\circ$. 因$U$ 是S的开集, 故$\varphi_\alpha^{-1}(U\cap S^\circ\cap U_\alpha)$ 是$\mathbb{R}^k$的开集或$(\mathbb{H}^k)^\circ$的开集, 从而存在$\delta=\delta_{t_0}>0$ 使得

$$Q_{t_0}:=\prod_{i=1}^k(t_{0i}-\delta,t_{0i}+\delta)\subset\varphi_\alpha^{-1}(U\cap S^\circ\cap U_\alpha)\,.$$

由**定理11.1(流形上的区域不变定理)**知$\varphi_\alpha(Q_{t_0})$是S的开集. 因$\varphi_\alpha(Q_{t_0})\subset U$, 故$\varphi_\alpha(Q_{t_0})$也是$U$的开集且包含$x_0$. 由第八章例题知存在$C^\infty$光滑同胚$F:\mathbb{R}^k\to Q_{t_0}$ 并且$\det F'(t)>0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$. 因此映射$\psi_\alpha:=\varphi_\alpha\circ F:\mathbb{R}^k\to\varphi_\alpha(Q_{t_0})$是光滑的且逆映射$\psi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(Q_{t_0})\to\mathbb{R}^k$ 连续. 此外由$\psi_\alpha'(t)=\varphi_\alpha'(\tau)F'(t)$, 其中$\tau=F(t)$, 可知$\mathrm{rank}(\psi_\alpha'(t))=\mathrm{rank}(\varphi_\alpha'(\tau))=k\ \ \forall\,t\in\mathbb{R}^k$.

其次设$x_0\in\partial S$, 则由$x_0\in U_\alpha$知$\partial U_\alpha=U_\alpha\cap\partial S\neq\emptyset$. 因此$(\varphi_\alpha,U_\alpha)$的参数域为$\mathbb{H}^k$且$t_0\in\varphi_\alpha^{-1}(U\cap\partial S\cap U_\alpha)=\varphi_\alpha^{-1}(U\cap\partial U_\alpha)\subset\partial\mathbb{H}^k$. 于是由$U$ 是S的开集知$\varphi_\alpha^{-1}(U\cap U_\alpha)$是$\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)=\mathbb{H}^k$的开集. 因此存在$\delta=\delta_{t_0}>0$ 使得半开矩形

$$\widetilde{Q}_{t_0}:=(-\delta,0]\times\prod_{i=2}^k(t_{0i}-\delta,t_{0i}+\delta)\subset\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U)\,.$$

因$\varphi_\alpha(\widetilde{Q}_{t_0})$是$S$的开集且$\varphi_\alpha(\widetilde{Q}_{t_0})\subset U$, 故$\varphi_\alpha(\widetilde{Q}_{t_0})$也是$U$的开集且包含$x_0$. 易见存在$C^\infty$光滑同胚$\widetilde{F}:\mathbb{H}^k\to\widetilde{Q}_{t_0}$ (并且$\det\widetilde{F}'(t)>0\ \forall\,t\in\mathbb{H}^k$). 因此映射$\psi_\alpha:=\varphi_\alpha\circ\widetilde{F}$:

[4]**这里当然是指S 的相对开集, 即存在$\mathbb{R}^n$的开集V 使得$U=S\cap V$.**

$\mathbb{H}^k \to \varphi_\alpha(\widetilde{Q}_{t_0})$是光滑的且逆映射$\psi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(\widetilde{Q}_{t_0}) \to \mathbb{H}^k$ 连续. 此外由$\psi'_\alpha(t) = \varphi'_\alpha(s)\widetilde{F}'(t)$, 其中$s = \widetilde{F}(t)$, 可知$\mathrm{rank}(\psi'_\alpha(t)) = \mathrm{rank}(\varphi'_\alpha(s)) = k\ \ \forall\, t \in \mathbb{H}^k$.

综上, 我们得到了U的一个图册$\mathcal{A}(U) = \{(\psi_x, W_x)\}_{x\in U}$, 其中$\psi_x : \mathbb{R}^k \to W_x$是同胚且$\psi_x$属于$C^r$类, 或者$\psi_x : \mathbb{H}^k \to W_x$是同胚且$\psi_x$属于$C^r$类, 并且这图册满足光滑曲面定义中的要求. 因此$U$是$C^r$类的曲面.

最后假定S是可定向的. 注意, 从上面的分析知每个局部参数映射ψ_x 都可以写成

$$\psi_x(t) = \varphi_{\alpha_x} \circ F_x(t)$$

的形式, 其中F_x 从$\mathbb{R}^k$ 或$\mathbb{H}^k$ 到$\mathbb{R}^k$中的开区间或半开区间上的C^∞ 同胚且$\det F'_x(t) > 0$ for all $t \in \mathbb{R}^k$ 或for all $t \in \mathbb{H}^k$. 于是对任意W_x, W_y, 若$W_x \cap W_y \neq \emptyset$, 则从关系式

$$\psi_y^{-1} \circ \psi_x(t) = F_y^{-1}\Big(\varphi_{\alpha_y}^{-1} \circ \varphi_{\alpha_x}(F_x(t))\Big), \quad t \in \psi_x^{-1}(W_x \cap W_y)$$

和复合映射微分的锁链法则有

$$(\psi_y^{-1} \circ \psi_x)'(t) = (F_y^{-1})'(s)(\varphi_{\alpha_y}^{-1} \circ \varphi_{\alpha_x})'(\tau)F'_x(t)$$

其中$s = \varphi_{\alpha_y}^{-1} \circ \varphi_{\alpha_x}(F_x(t))$, $\tau = F_x(t)$. 由S 可定向知$\det((\varphi_{\alpha_y}^{-1} \circ \varphi_{\alpha_x})'(\tau)) > 0$. 又有

$$\det((F_y^{-1})'(s)) = \frac{1}{\det(F'_y(t_s))}\Big|_{t_s = F_y^{-1}(s)} > 0, \quad \det F'_x(t) > 0$$

因此上式右边三个Jacobi 矩阵的行列式均> 0, 从而有$\det((\psi_y^{-1} \circ \psi_x)'(t)) > 0$ for all $t \in \psi_x^{-1}(W_x \cap W_y)$. 这证明了$\mathcal{A}(U) = \{(\psi_x, W_x)\}_{x\in U}$ 是U的一个定向图册。所以U是可定向的。 □

• 关于曲面的定向, 要认真搞清楚的话, 可以学习陈天权《数学分析讲义》第三册§**13.4 定向**, 或卓里奇《数学分析》第二卷pp.156-165, 或学习后续选修课程《微分流形》。曲面的定向问题很复杂, 这里我们只能介绍一维情形的结果 并对超曲面和由隐函数方程确定的曲面证明关于可定向的性质.

由于每个流形都可以被分解成可数多个互不相交的连通流形的并(**命题11.7**), 故我们**只需考察连通流形.**

【定理11.13】若$S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个连通的可定向的曲面, 则S 恰有两个不同的定向, 也称它们为S的两个相反的定向. □

一维情形: 一维流形的分类与定向已有完整结果, 可以介绍如下.

【定理11.14(一维流形的分类与定向)】设$S\subset\mathbb{R}^n$ 为一个连通的一维流形. 则S必与下面四种标准的一维流形之一同胚:

(1) 若S 是紧致的无边的一维流形, 则S 与圆周$\mathbb{S}^1$ 同胚.

(2) 若S 是紧致的有边的一维流形, 则S 与闭区间$[0,1]$ 同胚, 此时∂S是两元素集.

(3) 若S 是非紧的无边的一维流形, 则S 与直线$\mathbb{R}$ 同胚.

(4) 若S 是非紧的有边的一维流形, 则S 与闭射线$[0,+\infty)$ 同胚, 此时∂S是单点集.

以上“紧致”是指S是$\mathbb{R}^n$中的紧集.

因此连通的一维流形总是可定向的, 并恰有两个相反的定向: 对于情形(1), S的一个定向是“逆时针”走向，另一个定向是“顺时针”走向; 对于情形(2),(3),(4), S的一个定向是从“起点”到“终点”, 另一个定向是从“终点”到“起点”。 □

该定理的证明参见下面两个参考文献:

D.B.Fuks and V.A.Rokhlin, *Beginner's course in topology*, Geometric chapters. Translated from the Russian by A. Iacob. Universitext. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

D.Gale, The Teaching of Mathematics: The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam, *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), no.2, 170-175. □

顺便指出, 应用上述一维流形的分类定理我们再次看到: 自交的曲线, 如“8”字形曲线, 分叉的曲线, 如“X, Y”字形曲线, 都不是一维流形.

关于超曲面的定向, 我们有一条定理。在引入这条定理之前, 我们介绍一个确定单位向量的公式——这个单位向量垂直于一些给定的向量:

【引理11.15(单位法向量的构造)】设$2\le n\in\mathbb{N}$, 设

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad \mathbf{a}_{n-1}=\begin{pmatrix}a_{1,n-1}\\a_{2,n-1}\\\vdots\\a_{n,n-1}\end{pmatrix}$$

是$\mathbb{R}^n$中的$n-1$个线性无关的向量, 即满足$\det(A^\tau A)>0$ 其中

$$A=A_{n\times(n-1)}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_{n-1})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

令A_i 是从矩阵A 中去掉第i行得到的$(n-1)\times(n-1)$ 阶方阵, $i=1,2,...,n$ 并令(行列式按第一列展开)

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{\det(A^\tau A)}}\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \mathbf{e}_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{e}_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\det(A^\tau A)}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\det(A_i)\mathbf{e}_i$$

其中

$$\mathbf{e}_1=(1,0,...,0)^\tau\,,\ \mathbf{e}_2=(0,1,0,...,0)^\tau\,,\ ...,\ \ \mathbf{e}_n=(0,0,...,0,1)^\tau.$$

则$\mathbf{n}$是一个**单位**向量且它与所有$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_{n-1}$都垂直, 即

$$|\mathbf{n}|=1,\quad \langle\mathbf{n},\mathbf{a}_j\rangle=0,\quad j=1,2,...,n-1.$$

于是还有

$$\det(A^\tau A)=\sum_{i=1}^{n}[\det(A_i)]^2, \tag{3.6}$$

$$\det(\mathbf{n},\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ ...,\mathbf{a}_{n-1})=\sqrt{\det(A^\tau A)}>0. \tag{3.7}$$

由于这个行列式>0的缘故, 我们也称这个单位法向量$\mathbf{n}$ 是由标架序组$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_{n-1})$张成的超平面的单位**正**法向量.

【证】首先由$\mathbf{n}$的定义和A 满秩知$\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$. 由行列式性质和按第一列展开有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{\det(A^\tau A)}}\det\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(A^\tau A)}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\det(A_i)a_{ij} \\ &= \langle\mathbf{n},\mathbf{a}_j\rangle,\quad j=1,2,...,n-1. \end{aligned}$$

这表明$\mathbf{n}$与所有$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_{n-1}$都垂直. 令$n_i$ 为$\mathbf{n}$的第i个分量并令

$$H=(\mathbf{n},A)=(\mathbf{n},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_{n-1})=\begin{pmatrix} n_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}\\ n_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ n_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}\end{pmatrix}.$$

则由

$$n_i=\frac{1}{\sqrt{\det(A^\tau A)}}(-1)^{i-1}\det(A_i),\quad i=1,2,...,n$$

和行列式按第一列展开有

$$\det(H)=\sum_{i=1}^{N}n_i(-1)^{i-1}\det(A_i)=\sqrt{\det(A^\tau A)}\sum_{i=1}^{n}(n_i)^2=\sqrt{\det(A^\tau A)}\,|\mathbf{n}|^2 \qquad (3.8).$$

另一方面注意$\mathbf{n}$ 与A中每个列向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_{n-1}$都垂直, 有

$$H^\tau H=\begin{pmatrix}\mathbf{n}^\tau\\ A^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{n}, & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\mathbf{n}|^2 & 0\\ 0 & A^\tau A\end{pmatrix}$$

因此

$$[\det(H)]^2=\det(H^\tau H)=|\mathbf{n}|^2\det(A^\tau A).$$

再结合$\det(H)=\sqrt{\det(A^\tau A)}\,|\mathbf{n}|^2$ 得到

$$\det(A^\tau A)|\mathbf{n}|^4=|\mathbf{n}|^2\det(A^\tau A).$$

消去$\det(A^\tau A)>0,|\mathbf{n}|>0$ 得知$|\mathbf{n}|=1$. 所以$\mathbf{n}$ 是单位向量. 再结合(3.8)即得(3.7). 最后再由$\mathbf{n}$的定义和$|\mathbf{n}|=1$ 即得等式(3.6). 引理证毕. □

【定理11.16(超曲面的定向)】设$n\ge 3$, $S\subset\mathbb{R}^n$是一个连通的光滑的超曲面(即$S\subset\mathbb{R}^n$是一个连通的光滑的$n-1$维曲面). 则

$$S \text{ 可定向} \iff \text{在}S\text{上存在连续的单位法向量场}$$

后者表示: 对任意$x\in S$, 可以确定唯一的单值的单位向量$\mathbf{n}(x)\in\mathbb{S}^{n-1}$使得$\mathbf{n}(x)$ 垂直于S 在x处的切空间TS_x, 并且$x\mapsto\mathbf{n}(x)$ 在S上连续.

【证】先做些准备. 由假设知$\dim(S)=n-1$ 且S 有一个光滑的图册$\mathcal{A}(S)=\{(I_\alpha^{n-1},\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 其中$\varphi_\alpha:I_\alpha^{n-1}\to U_\alpha\subset S$ 是同胚且是光滑的, $\mathrm{rank}(\varphi_\alpha'(t))\equiv n-1$, $t\in I_\alpha^{n-1}$, 并且$I_\alpha^{n-1}=\mathbb{R}^{n-1}$ 或$I_\alpha^{n-1}=\mathbb{H}^{n-1}=(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-2}$.

对每个参数映射$\varphi_\alpha(t)=(\varphi_{\alpha,1}(t),\varphi_{\alpha,2}(t),...,\varphi_{\alpha,n}(t))$, 令$\Phi'_{\alpha,i}(t)$是Jacobi 矩阵$\varphi'_\alpha(t)$ 中去掉第i行得到的$(n-1)\times(n-1)$阶方阵, 也即$\Phi'_{\alpha,i}(t)$是$\Phi_{\alpha,i}(t)$的Jacobi矩阵, 其中

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\alpha,1}(t)=(\varphi_{\alpha,2}(t),\varphi_{\alpha,3}(t),...,\varphi_{\alpha,n}(t)),\\
&\Phi_{\alpha,2}(t)=(\varphi_{\alpha,1}(t),\varphi_{\alpha,3}(t),...,\varphi_{\alpha,n}(t)),\\
&.........\\
&\Phi_{\alpha,n}(t)=(\varphi_{\alpha,1}(t),\varphi_{\alpha,2}(t),...,\varphi_{\alpha,n-1}(t)).
\end{aligned}$$

因$\mathrm{rank}(\varphi'_\alpha(t))\equiv n-1$, 故$\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau\varphi'_\alpha(t))>0$ for all $t\in I_\alpha^{n-1}$. 令

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau\varphi'_\alpha(t))}}\det\begin{pmatrix}
\mathbf{e}_1 & \frac{\partial\varphi_{\alpha,1}}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_{\alpha,1}}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{\alpha,1}}{\partial t_{n-1}}(t)\\
\mathbf{e}_2 & \frac{\partial\varphi_{\alpha,2}}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_{\alpha,2}}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{\alpha,2}}{\partial t_{n-1}}(t)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
\mathbf{e}_n & \frac{\partial\varphi_{\alpha,n}}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_{\alpha,n}}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{\alpha,n}}{\partial t_{n-1}}(t)
\end{pmatrix}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\det\Phi'_{\alpha,i}(t)}{\sqrt{\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau\varphi'_\alpha(t))}}\,\mathbf{e}_i\,,\qquad t\in I_\alpha^{n-1}.
\end{aligned}$$

则由上面**引理11.15(单位法向量的构造)**知单位向量$\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)$ 与每个向量$\frac{\partial}{\partial t_j}\varphi_\alpha(t)$ 都是垂直的**:** $\left\langle\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)\,,\,\frac{\partial}{\partial t_j}\varphi_\alpha(t)\right\rangle=0$, $j=1,2,...,n-1$.

设$x=\varphi_\alpha(t)$. 则由切空间表示(**定理**)知$TS_x=\{\varphi'_\alpha(t)h\,|\,h\in\mathbb{R}^{n-1}\}$. 因$\varphi'_\alpha(t)$满秩, 故$\frac{\partial}{\partial t_1}\varphi_\alpha(t)\,,\,\frac{\partial}{\partial t_2}\varphi_\alpha(t)\,,\,...,\,\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}\varphi_\alpha(t)$ 是TS_x的一组基. 同时上式表明n个向量 $\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t),\frac{\partial}{\partial t_1}\varphi_\alpha(t)\,,\,\frac{\partial}{\partial t_2}\varphi_\alpha(t)\,,\,...,\,\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}\varphi_\alpha(t)$ 线性无关从而是$\mathbb{R}^n$的一组基. 于是可见: 若$\mathbf{N}(x)$ 是S上在点$x=\varphi_\alpha(t)$处的单位法向量, 也即若$\mathbf{N}(x)\perp TS_x$, 也即若

$$|\mathbf{N}(x)|=1\quad 且\quad \left\langle\mathbf{N}(x)\,,\,\frac{\partial}{\partial t_j}\varphi_\alpha(t)\right\rangle=0\,,\quad j=1,2,...,n-1$$

则$\mathbf{N}(x)$ 与$\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)$必线性相关从而有

$$\mathbf{N}(x)=\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)\quad 或\quad \mathbf{N}(x)=-\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)$$

也即

$$\langle\mathbf{N}(\varphi_\alpha(t))\,,\,\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)\rangle=\pm1\qquad\forall\,t\in I_\alpha^{n-1}$$

其中正负号$\pm$ 可能依赖于$t\in I_\alpha^{n-1}$.

“$\Longrightarrow$”: 现在设S 是可定向的. 则由可定向的定义知若$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, 则在

$$I_{\alpha,\beta}^{n-1}:=\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\subset I_\alpha^{n-1}\quad 和\quad I_{\beta,\alpha}^{n-1}:=\varphi_\beta^{-1}(U_\beta\cap U_\alpha)\subset I_\beta^{n-1}$$

之间的互逆的微分同胚(即**转移映射**)

$$T_{\alpha,\beta}: I_{\alpha,\beta}^{n-1} \to I_{\beta,\alpha}^{n-1}\,, \quad T_{\alpha,\beta}(t) = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t))\,;$$

$$T_{\beta,\alpha}: I_{\beta,\alpha}^{n-1} \to I_{\alpha,\beta}^{n-1}\,, \quad T_{\beta,\alpha}(\tau) = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(\tau))$$

具有正的Jacobian: $\det T'_{\alpha,\beta}(t) > 0\,, \det T'_{\beta,\alpha}(\tau) > 0.$

依据这个性质我们定义S上的单位法向量场$\mathbf{N}(\cdot)$ 如下:

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \quad 当\, x \in U_\alpha\, 时,$$

$$即 \quad \mathbf{N}(x) = \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) \quad 当 x \in U_\alpha\ 且 x = \varphi_\alpha(t), t \in I_\alpha^{n-1}\ 时.$$

当然必须证明这样的$\mathbf{N}(\cdot)$ 是良好定义的(well-defined), 也即必须证明$\mathbf{N}(x)$是单值的、只由$x \in S$ 确定而与局部图$(I_\alpha^{n-1}, \varphi_\alpha, U^\alpha)$的选择无关, 也即必须证明

$$\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) = \mathbf{n}_{\varphi_\beta}(s) \quad 当\ \varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(s) = x \in S\, 时.$$

而这就正好需要S的可定向性.

事实上对任意$x \in S$, 若$x = \varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(s)$ for some $t \in I_\alpha^{n-1}\,, s \in I_\beta^{n-1}$, 则有

$$t \in I_{\alpha,\beta}^{n-1}, \quad \tau = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t)) = T_{\alpha,\beta}(t), \quad \varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(T_{\alpha,\beta}(t)).$$

考虑$I_{\alpha,\beta}^{n-1}$上的映射$\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ T_{\alpha,\beta}$ 在t的微分得到

$$\varphi'_\alpha(t) = \varphi'_\beta(s) T'_{\alpha,\beta}(t) \qquad 其中 \quad s = T_{\alpha,\beta}(t).$$

根据矩阵运算法则, 这就给出

$$\Phi'_{\alpha,i}(t) = \Phi'_{\beta,i}(s) T'_{\alpha,\beta}(t)\,, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad s = T_{\alpha,\beta}(t).$$

注意$\det T'_{\alpha,\beta}(t) > 0$, 得到

$$\sqrt{\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau \varphi'_\alpha(t))} = \sqrt{\det(\varphi'_\beta(s)^\tau \varphi'_\beta(s))}\ \det T'_{\alpha,\beta}(t)\,,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\det \Phi'_{\alpha,i}(t)}{\sqrt{\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau \varphi'_\alpha(t))}}\ \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\det \Phi'_{\beta,i}(s) \det T'_{\alpha,\beta}(t)}{\sqrt{\det(\varphi'_\beta(s)^\tau \varphi'_\beta(s))}\ \det T'_{\alpha,\beta}(t)}\ \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\det \Phi'_{\beta,i}(s)}{\sqrt{\det(\varphi'_\beta(s)^\tau \varphi'_\beta(s))}}\ \mathbf{e}_i = \mathbf{n}_{\varphi_\beta}(s)\,. \end{aligned}$$

这证明了$\mathbf{N}(x)$在S上是良好定义的. 当然, 这同时保证了$x \mapsto \mathbf{N}(x)$是单值的.

其次证明$\mathbf{N}(x)$在S上连续. 任取$x_0 \in S$ 和S中收敛于x_0的序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. 因$S = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, 故$x_0 \in$某个$U_{\alpha_0}$. 又注意$U_{\alpha_0}$是$S$的(相对)开集, 故存在$\delta > 0$ 使得$S \cap B^n(x_0,\delta) \subset U_{\alpha_0}$. 因$x_k \to x_0\,(k \to \infty)$, 故存在$k_0 \in \mathbb{N}$使得当$k > k_0$时, $x_k \in S \cap B^n(x_0,\delta)$ 从而$x_k \in U_{\alpha_0}$. 令$t_0 = \varphi_{\alpha_0}^{-1}(x_0), t_k = \varphi_{\alpha_0}^{-1}(x_k)$. 则由$\varphi_{\alpha_0}^{-1}(x)$ 和$\varphi'_{\alpha_0}(t)$的连续性我们有

$$t_k \to t_0 \quad \text{且} \quad \mathbf{N}(x_k) = \mathbf{n}_{\varphi_{\alpha_0}}(t_k) \to \mathbf{n}_{\varphi_{\alpha_0}}(t_0) = \mathbf{N}(x_0) \quad (k \to \infty)\,.$$

所以$\mathbf{N}(x)$ 在S上处处连续.

"$\Longleftarrow$": 反过来假设S上有一个单值的连续的单位法向量场$\mathbf{N}(\cdot)$.

对每个参数映射$\varphi_\alpha(t)$, 我们**取定一点**$t_\alpha \in I_\alpha^{n-1}$并令$x_\alpha = \varphi_\alpha(t_\alpha)$.

如果$\langle \mathbf{N}(x_\alpha)\,,\, \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t_\alpha)\rangle = 1$, 则我们不对$\varphi_\alpha$作修改;

如果$\langle \mathbf{N}(x_\alpha)\,,\, \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t_\alpha)\rangle = -1$, 则我们把$\varphi_\alpha$修改成

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(t) = \varphi_\alpha(\widetilde{t}), \quad t = (t_1, t_2, ..., t_{n-1}) \in I_\alpha^{n-1}, \quad \text{其中} \quad \widetilde{t} = (t_1, t_2, ..., t_{n-2}, -t_{n-1})$$

也即将t的最后分量t_{n-1}反号. 注意, 由于$n \ge 3$, 故这样的修改即便对于$I_\alpha^{n-1} = \mathbb{H}^{n-1} = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-2}$的情形, 也保持$I_\alpha^{n-1}$ 的结构不变, 也即$\varphi_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha$ 的定义域都是I_α^{n-1}. 由复合函数求导和行列式运算法则知

$$\det(\widetilde{\varphi}'_\alpha(t)^\tau \widetilde{\varphi}'_\alpha(t)) = \det(\varphi'_\alpha(\widetilde{t})^\tau \varphi'_\alpha(\widetilde{t})),$$
$$\det\widetilde{\Phi}'_{\alpha,i}(t) = -\det\Phi'_{\alpha,i}(\widetilde{t})\,, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

再回忆

$$\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\det\Phi'_{\alpha,i}(t)}{\sqrt{\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau \varphi'_\alpha(t))}}\ \mathbf{e}_i\,, \qquad t \in I_\alpha^{n-1},$$
$$\mathbf{n}_{\widetilde{\varphi}_\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\det\widetilde{\Phi}'_{\alpha,i}(t)}{\sqrt{\det(\widetilde{\varphi}'_\alpha(t)^\tau \widetilde{\varphi}'_\alpha(t))}}\ \mathbf{e}_i\,, \qquad t \in I_\alpha^{n-1}$$

得到

$$\mathbf{n}_{\widetilde{\varphi}_\alpha}(t) = -\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(\widetilde{t}) \quad \forall\, t \in I_\alpha^{n-1}, \quad \text{等价地} \quad \mathbf{n}_{\widetilde{\varphi}_\alpha}(\widetilde{t}) = -\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) \quad \forall\, t \in I_\alpha^{n-1}.$$

特别有

$$\langle \mathbf{N}(x_\alpha)\,,\, \mathbf{n}_{\widetilde{\varphi}_\alpha}(\widetilde{t}_\alpha)\rangle = 1.$$

以下我们把修改后的参数映射$\widetilde{\varphi}_\alpha(t)$ 仍记作$\varphi_\alpha(t)$ 并把$\widetilde{t}_\alpha$ 仍记作t_α. 易见修改后的图册$\mathcal{A}(S) := \{(I_\alpha^{n-1}, \varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 仍是S的一个光滑图册. 我们来证明这个$\mathcal{A}(S)$还是一个定向图册, 从而即知S是可定向的.

我们先证明

$$\langle \mathbf{N}(\varphi_\alpha(t)), \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)\rangle = 1 \qquad \forall\, t\in I_\alpha^{n-1}, \quad \forall\, \alpha\in A. \tag{3.9}$$

事实上由我们的修改方式知

$$\langle \mathbf{N}(\varphi_\alpha(t_\alpha)), \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t_\alpha)\rangle = 1 \qquad \forall\, \alpha\in A. \tag{3.10}$$

而由证明开头部分的准备知

$$\langle \mathbf{N}(\varphi_\alpha(t)), \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)\rangle = \pm 1 \qquad \forall\, t\in I_\alpha^{n-1}, \quad \forall\, \alpha\in A.$$

因I_α^{n-1}是连通集且$\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)$ 和$\mathbf{N}(\varphi_\alpha(t))$ 都在I_α^{n-1} 上连续, 故根据连续函数介值定理和(3.10)即知(3.9) 成立.

由于$\mathbf{N}(\varphi_\alpha(t))$ 和$\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)$都是单位向量, 故(3.9) 也可写成

$$\mathbf{N}(\varphi_\alpha(t)) = \mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) \qquad \forall\, t\in I_\alpha^{n-1}, \quad \forall\, \alpha\in A. \tag{3.11}$$

来证明转移映射$T_{\alpha,\beta}(t)$的Jacobian $\det T'_{\alpha,\beta}(t)$总是正的. 任取$\alpha,\beta\in A$ 满足$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$. 则有

$$\varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(s) \quad \text{其中} \quad s = T_{\alpha,\beta}(t), \quad t\in I_{\alpha,\beta}^{n-1}$$

从而由复合映射的微分法则有

$$\varphi'_\alpha(t) = \varphi'_\beta(s)T'_{\alpha,\beta}(t).$$

这给出

$$\Phi'_{\alpha,i}(t) = \Phi'_{\beta,i}(s)T'_{\alpha,\beta}(t), \quad t\in I_{\alpha,\beta}^{n-1}, \quad i=1,2,...,n\,.$$

由于$I_{\alpha,\beta}^{n-1}$ 是连通集而$\det T'_{\alpha,\beta}(t)\neq 0$ 于$I_{\alpha,\beta}^{n-1}$ (这是因为$T_{\alpha,\beta}$的逆映射$T_{\beta,\alpha}$ 也是光滑的), 故从$\det T'_{\alpha,\beta}(t)$ 的连续性可知其符号

$$\lambda_{\alpha,\beta} := \mathrm{sign}(\det T'_{\alpha,\beta}(t)) \equiv \text{常数} \neq 0, \quad t\in I_{\alpha,\beta}^{n-1}.$$

如前计算我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\det\Phi'_{\alpha,i}(t)}{\sqrt{\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau\varphi'_\alpha(t))}}\ \mathbf{e}_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\det\Phi'_{\beta,i}(s)\det T'_{\alpha,\beta}(t)}{\sqrt{\det(\varphi'_\beta(s)^\tau\varphi'_\beta(s))}\ |\det T'_{\alpha,\beta}(t)|}\ \mathbf{e}_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\det\Phi'_{\beta,i}(s)}{\sqrt{\det(\varphi'_\beta(s)^\tau\varphi'_\beta(s))}}\lambda_{\alpha,\beta}\ \mathbf{e}_i=\lambda_{\alpha,\beta}\,\mathbf{n}_{\varphi_\beta}(s)\,.
\end{aligned}
$$

因$\varphi_\alpha(t)=\varphi_\beta(s)=:x$, 故结合(3.11)得到

$$
\mathbf{N}(x)=\mathbf{n}_{\varphi_\alpha}(t)=\lambda_{\alpha,\beta}\,\mathbf{n}_{\varphi_\beta}(s)=\lambda_{\alpha,\beta}\mathbf{N}(x)\quad\text{从而有}\quad\lambda_{\alpha,\beta}=1\,.
$$

这就证明了$\det T'_{\alpha,\beta}(t))>0$ 于$I^{n-1}_{\alpha,\beta}$ for all $\alpha,\beta\in A$ with $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$. 所以$S$是可定向的. $\square$

如果$S\subset\mathbb{R}^n$ 是一个可定向的超曲面, 则当$\mathbf{n}(x)$是S上的连续单位法向量场时, 其反号$-\mathbf{n}(x)$也是S上的连续单位法向量场. 由于切空间$TS_x\subset\mathbb{R}^n$ 是$n-1$维的, 即

$$
\dim TS_x=n-1=S\text{的维数}\qquad\forall\,x\in S
$$

故TS_x的正交补是一维的, 因此对任何满足$\mathbf{u}\perp TS_x$的单位向量$\mathbf{u}$ 都只能有$\mathbf{u}=\mathbf{n}(x)$或$\mathbf{u}=-\mathbf{n}(x)$. 这表明：若$x\mapsto\mathbf{u}(x)$ 是S上的任一连续单位法向量场, 则必有

$$
\mathbf{u}(x)\equiv\mathbf{n}(x),\quad x\in S;\qquad\text{或者}\qquad\mathbf{u}(x)\equiv-\mathbf{n}(x),\quad x\in S.
$$

这一方面说明$\mathbf{n}(\cdot)$ 和$-\mathbf{n}(\cdot)$是S 上的仅有的两个连续单位法向量场, 同时说明了超曲面恰有“两侧”：一侧由$\mathbf{n}(\cdot)$在某一点x_0 的指向确定, 即由$\mathbf{n}(x_0)$的方向确定, 另一侧则由$-\mathbf{n}(x_0)$的方向确定; 这两侧互为反面. 因此人们也把连通的**可定向的超曲面叫做双侧曲面.**

例如设S是一个可定向的超曲面S, 则当S无边且为紧集时, 例如S是完整球面或轮胎表面, 则根据S上的法向量的指向可将S的定向也即S的侧分为S 的“内”侧和S的“外”侧; 当S有边时, 例如S是半个球面, 则S的侧可被分为S 的“上”侧和S的“下”侧, 或S 的“左”侧和S的“右”侧, 等等.

常见的曲面是有方程或方程组确定的, 即是有隐函数方程确定的. 对这类曲面我们有下面定理:

【**定理11.17(由隐函数方程确定的定向曲面)**】设开集$\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

(a) (**超曲面**) 设$F:\Omega\to\mathbb{R}$ 是C^r类的光滑函数且

$$S:=\{x\in\Omega\mid F(x)=0\}\neq\emptyset,\qquad \nabla F(x)\neq 0\quad \forall\, x\in S.$$

则S是一个C^r类的$n-1$维无边的定向曲面, 且对任意$x\in S$, S在x的切空间可表示为

$$TS_x=\{\xi\in\mathbb{R}^n\mid \langle\nabla F(x),\xi\rangle=0\}.$$

因此

$$\mathbf{n}(x)=\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$$

是S上的连续单位法向量场.

(b) 一般地, 设$1\le k<n$, 映射

$$F=(F_1,F_2,...,F_{n-k}):\Omega\to\mathbb{R}^{n-k}\quad 属于C^r\ 类(r\geq 1)\quad 并且$$

$$S:=\{x\in\Omega\,|\,F(x)=0\}\neq\emptyset,\qquad \mathrm{rank}F'(x)=n-k\quad \forall\, x\in S.$$

则S是一个C^r类的k维无边的定向曲面, 且对任意$x\in S$, S在x的切空间可表示为

$$TS_x=\{\xi\in\mathbb{R}^n\mid F'(x)\xi=0\}.$$

【证】除了S的可定向性外, 其他性质是第八章**命题8.45, 命题8.47, 命题8.48**的结论. 下面只证S的可定向性(这是卓里奇《数学分析》习题).

(a): 此时S是一个超曲面且其上有连续的单位法向量场$x\mapsto\mathbf{n}(x)=\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$, 故由**定理11.16(超曲面的定向)** 知S可定向.

(b): 此时的证明方法与**定理11.16(超曲面的定向)**的证明类似. 我们再学习一下.

由S是k维的C^r- 类无边曲面可知S 有一个图册$\mathcal{A}(S)=\{(\mathbb{R}^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 其中每个$\varphi_\alpha=(\varphi_{\alpha,1},\varphi_{\alpha,2},...,\varphi_{\alpha,n}):\mathbb{R}^k\to U_\alpha$ 都是同胚且都是C^r类的且处处满秩.

为证S可定向, 我们考虑一族n阶方阵

$$H_{\varphi_\alpha}(t):=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_{\alpha,1}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_{\alpha,1}(t)}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{\alpha,1}(t)}{\partial t_k}\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial\varphi_{\alpha,2}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_{\alpha,2}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{\alpha,2}(t)}{\partial t_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial\varphi_{\alpha,n}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_{\alpha,n}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{\alpha,n}(t)}{\partial t_k}\end{pmatrix}_{x=\varphi_\alpha(t)}$$

$$=(F'(x)^\tau\quad \varphi_\alpha'(t))\,|_{x=\varphi_\alpha(t)}\,,\quad t\in\mathbb{R}^k,\quad \alpha\in A.$$

我们将调整参数$t=(t_1,t_2,...,t_k)$ 使得对所有调整后的参数图φ_α都满足对任意$t\in\mathbb{R}^k$ 有$\det H_{\varphi_\alpha}(t)>0$.

为此先证明$\det H_{\varphi_\alpha}(t)\neq 0\ \ \forall\, t\in\mathbb{R}^k$.

由$\varphi_\alpha(t)\in S$ 有$F(\varphi_\alpha(t))\equiv 0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$. 因此$F'(\varphi_\alpha(t))\varphi'_\alpha(t)\equiv 0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$. 这给出

$$F'(x)\varphi'_\alpha(t)\Big|_{x=\varphi_\alpha(t))}=0\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}^k\,.$$

现在固定$t\in\mathbb{R}^k$, 令$x=\varphi_\alpha(t)$, 并注意$F'(x)^\tau\in\mathbb{R}^{n\times(n-k)}$, $\varphi'_\alpha(t)\in\mathbb{R}^{n\times k}$ 和$F'(x)\varphi'_\alpha(t)=0$. 令$(y,z)\in\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^k$ 是齐次方程组

$$F'(x)^\tau y+\varphi'_\alpha(t)z=(F'(x)^\tau\quad \varphi'_\alpha(t))\begin{pmatrix} y\\ z\end{pmatrix}=0$$

的任意解. 由满秩条件有$\mathrm{rank}(F'(x)^\tau)=n-k$, $\mathrm{rank}(\varphi'_\alpha(t))=\mathrm{rank}(\varphi'_\alpha(t))=k$ 从而有$\det(F'(x)F'(x)^\tau)\neq 0$, $\det(\varphi'_\alpha(t)^\tau\varphi'_\alpha(t))\neq 0$. 将$F'(x)$左乘上述方程两边并注意$F'(x)\varphi'_\alpha(t)=0$得到$F'(x)F'(x)^\tau y=F'(x)F'(x)^\tau y+F'(x)\varphi'_\alpha(t)z=0$. 这蕴含$y=0$ 从而$\varphi'_\alpha(t)z=0$. 于是有$\varphi'_\alpha(t)^\tau\varphi'_\alpha(t)z=0$ 从而得到$z=0$. 这证明了上述齐次方程组只有零解. 于是由线代数知$\det H_{\varphi_\alpha}(t)=(F'(x)^\tau\quad \varphi'_\alpha(t))\Big|_{x=\varphi_\alpha(t)}\neq 0$.

因$\mathbb{R}^k$ 连通且$t\mapsto \det H_{\varphi_\alpha}(t)$ 连续, 故由连续函数介值定理知函数$t\mapsto\det H_{\varphi_\alpha}(t)$ 在$\mathbb{R}^k$上不变号, 即要么$\det H_{\varphi_\alpha}(t)>0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$, 要么$\det H_{\varphi_\alpha}(t)<0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$.

若$\det H_{\varphi_\alpha}(t)>0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$, 则不对φ_α 作调整.

若$\det H_{\varphi_\alpha}(t)<0$ for all $t\in\mathbb{R}^k$, 则将$\varphi_\alpha(t)$调整为$\widetilde{\varphi}_\alpha(t)$:

$$当k\geq 2时\quad \widetilde{\varphi}_\alpha(t):=\varphi_\alpha(t_1,...,t_{k-1},-t_k),\quad t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k$$

$$当k=1时\quad \widetilde{\varphi}_\alpha(t):=\varphi_\alpha(-t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

在这个调整下, 对于

$$H_{\widetilde{\varphi}_\alpha}(t)=(F'(x)^\tau\quad \widetilde{\varphi}'_\alpha(t))\Big|_{x=\widetilde{\varphi}_\alpha(t)}$$

我们有(见上面关于矩阵$H_{\varphi_\alpha}(t)$的详细表示和复合映射微分法则以及行列式计算规则)

$$\det H_{\widetilde{\varphi}_\alpha}(t)>0\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}^k.$$

此外易见$\widetilde{\varphi}_\alpha(\mathbb{R}^k)=\varphi_\alpha(\mathbb{R}^k)=U_\alpha$, $\widetilde{\varphi}_\alpha:\mathbb{R}^k\to U_\alpha$ 仍是同胚且是C^r类的且处处满秩. 为记号方便, 我们把调整后的参数映射$\widetilde{\varphi}_\alpha$仍记作$\varphi_\alpha$. 则易见调整后的图

册$\mathcal{A}(S)=\{(\mathbb{R}^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 仍是S的C^r类的图册并有性质

$$\det H_{\varphi_\alpha}(t)>0 \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}^k,\quad \forall\,\alpha\in A\,.$$

下证$\mathcal{A}(S)$中的图卡是两两相容的, 也即证明对任意$\alpha,\beta\in A$ 满足$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 者, 转移映射

$$T_{\alpha,\beta}: I^k_{\alpha,\beta}\to\mathbb{R}^k\,,\quad T_{\alpha,\beta}(t)=\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t)),\quad t\in I^k_{\alpha,\beta}:=\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$$

有正的Jacobian:

$$\det T'_{\alpha,\beta}(t)>0 \qquad \forall\, t\in I^k_{\alpha,\beta}.$$

如果此事成立, 则由定义知$\mathcal{A}(S)$是S的一个定向图册, 也即S是可定向的.

设$\alpha,\beta\in A$ 满足$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$. 令$\tau=T_{\alpha,\beta}(t)\,,t\in I^k_{\alpha,\beta}$. 则

$$\varphi_\alpha(t)=\varphi_\beta(s)=\varphi_\beta(T_{\alpha,\beta}(t))\Longrightarrow \varphi'_\alpha(t)=\varphi'_\beta(s)T'_{\alpha,\beta}(t)$$

从而由$\varphi_\alpha(t)=\varphi_\beta(s)=:x$ 我们有

$$\begin{aligned}&H_{\varphi_\alpha}(t)=\big(F'(x)^T \quad \varphi'_\alpha(t)\big)=\big(F'(x)^T \quad \varphi'_\beta(s)T'_{\alpha,\beta}(t)\big)\\&=\big(F'(x)^T \quad \varphi'_\beta(s)\big)\begin{pmatrix} I_{(n-k)\times(n-k)} & 0_{(n-k)\times k}\\ 0_{k\times(n-k)} & T'_{\alpha,\beta}(t)\end{pmatrix}=H_\beta(s)\begin{pmatrix} I_{(n-k)\times(n-k)} & 0_{(n-k)\times k}\\ 0_{k\times(n-k)} & T'_{\alpha,\beta}(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\det H_{\varphi_\alpha}(t)=\det H_{\varphi_\beta}(s)\cdot\det T'_{\alpha,\beta}(t)\,.$$

因$\det H_{\varphi_\alpha}(t)>0$, $\det H_{\varphi_\beta}(s)>0$, 故得知

$$\det T'_{\alpha,\beta}(t)>0 \qquad \forall\, t\in I^k_{\alpha,\beta}\,.$$

这就完成了证明. $\Box$

【例(再看球面)】设$n\geq 2$. 则:

单位球面$\mathbb{S}^{n-1}$是一个紧的光滑的无边的$n-1$维定向曲面.

上半单位球面$\mathbb{S}^{n-1}_+$是一个紧的光滑的带边的$n-1$ 维定向曲面.

这里$\mathbb{S}^{n-1}_+=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}\mid x_n\geq 0\}$.

【证】令$F(x)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1,\ x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$. 则$F\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 且由球面的定义有

$$\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid F(x)=0\},\qquad \nabla F(x)=2x\neq 0\quad \forall\, x\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

因此由**定理11.17(由隐函数方程确定的定向曲面)**知$\mathbb{S}^{n-1}$ 是一个紧的C^∞ 光滑的无边的$n-1$维定向曲面，$\mathbb{S}^{n-1}$上的朝外方向的连续的单位法向量即为$\mathbb{S}^{n-1}$中每一点: $\mathbf{n}(x)=\nabla F(x)/|\nabla F(x)|=x\in\mathbb{S}^{n-1}$.

对于半球面$\mathbb{S}^{n-1}_+$, 由于集合$\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n\geq 0\}$ 不是开集, 我们无法直接使用**定理11.17(由隐函数方程确定的定向曲面)**。但我们在上面**重要例题** 中已证明了$\mathbb{S}^{n-1}_+$是一个紧的光滑的带边的$n-1$ 维曲面. 现只需证明它可定向. 首先说明: 带边的光滑曲面在其边界点处仍可以定义切空间。因此可见单位向量场$\mathbf{n}(x)=\nabla F(x)/|\nabla F(x)|=x\in\mathbb{S}^{n-1}$ 在半球面$\mathbb{S}^{n-1}_+$上的限制便是$\mathbb{S}^{n-1}_+$上的连续的单位法向量场, 于是据**定理11.16(超曲面的定向)** 即知$\mathbb{S}^{n-1}_+$是定向曲面. □

例如$\mathbb{R}^3$中的上半球面$\mathbb{S}^2_+=\{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\,|\,z\geq 0\}$ 是带边的2-维的C^∞ 光滑曲面, 其边界$\partial\mathbb{S}^2_+=\mathbb{S}^1\times\{0\}$ 是一个圆周, 它是无边的1-维的C^∞光滑曲线.

存在大量的超曲面, 它们不是可定向的. 典型的例子是默比乌斯带.

【默比乌斯(Möbius)带】 考察$\mathbb{R}^3$中的默比乌斯带, 它是一个连通的光滑的2维曲面(图示). 从陈天权《数学分析讲义》第三册第13章例题§**13.1.6** 和上述**定理11.16(超曲面的定向)** 可以证明默比乌斯带不是可定向的. 下面描述一下证明的直观解释: 我们把一个底部位于默比乌斯带上的小铅笔当作默比乌斯带上的单位法向量, 其中笔尖的方向代表法向量的方向. 如果我们将铅笔的底部从默比乌斯带上的任一点出发, 在默比乌斯带上连续移动一大圈后再回到出发点, 则我们发现铅笔尖的方向与出发时的方向相反. 这就说明默比乌斯带上的连续单位法向量场在任一点都是二值的(从而不是单值的). 因此默比乌斯带不是可定向的. 【可能有人觉得这个直观解释不令人满意. 欢迎同学讨论, 给出更有说服力的直观解释.】

• 分片光滑的曲面及其定向

以下“光滑的”表示“至少是C^1类的”, 即“是C^r类的, $r\geq 1$”.

【定义(分片光滑的曲面)】设$1 \le k \le n$. 我们称一个k维曲面$S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个分片光滑的k维曲面如果S满足

(i) 存在可数多个光滑的带边或不带边的k维曲面$S_i\,(i \in \mathbb{N}_0)$ 使得$S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} S_i$,

(ii) 当$i \neq j$时, $S_i \cap S_j$ 是空集或者是维数$\le k-1$的光滑曲面(流形). □

【定义(分片光滑的可定向曲面)】设$1 \le k \le n$. 我们称一个k维曲面$S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个分片光滑的可定向的k维曲面如果S满足

(i) 存在可数多个光滑的带边或不带边的定向k维曲面$S_i\,(i \in \mathbb{N}_0)$ 使得

$S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} S_i$,

(ii) 当$i \neq j$且$S_i \cap S_j \neq \emptyset$时, $S_i \cap S_j$是维数$\le k-1$的光滑的定向曲面(流形)

并且S_i和S_j在$S_i \cap S_j$上诱导的定向相反. (此处给图示) □

【注】对于$k=1$的情形, 分片光滑的一维曲面S也叫做分段光滑的曲线. 回忆: 一维连通流形都是可定向的. 因此如果S还是连通的, 则S必是可定向的. 很多时候分段光滑的连通曲线可以被分成有限个相邻的光滑连通曲线的并: $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_N$ 且使得S_i的终点等于S_{i+1}的起点, $i = 1, 2, ..., N-1$.

§11.1-3 作业题

1. 画出下面三个集合的草图

$$E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2-y^2=0\},\quad E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z^2=x^2+y^2\},$$
$$E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=x^2+y^2\}$$

然后标明哪个是曲面, 哪个不是曲面, 并给出证明。[要求对“是”者给出严格证明, 对“不是”者至少给出描述性的证明.]

2. 考虑C^∞ 参数映射$\varphi(t)=(t^2-1,t^3-t),t\in\mathbb{R}$. 易见$\mathrm{rank}(\varphi'(t))=1\quad\forall\,t\in\mathbb{R}$. [这是因为$\varphi'(t)=(2t,3t^2-1)\neq(0,0)$.] 令$D=(-2,1)$. 学习**定理11.1(流形上的区域不变定理)** 然后做下面

(1) 证明: 限制在D 上, φ 是单射, 但逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(D)\to D$ 不连续, 因此$\varphi:D\to\varphi(D)$不是同胚, 从而$\varphi(D)$不是流形. [考察点$(0,0)\in\varphi(D)$.]

(2) 令

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2=x^2(1+x)\}.$$

证明$\varphi(D)\subset S$ 而S不是流形.

【注】本题取自Invariance of domain - Wikipedia 维基百科, 那里给出了这参数曲线的图像. 本题说明了: (1) Brouwer 区域不变定理中, 映射的定义域和值域位于同一个欧空间, 是很重要的条件。(2)对于流形上的区域不变定理, 即便对于光滑的满秩的映射, 条件“$\varphi(D)$ 含于一个流形S内”也是不能去掉的。

3. 设$1\le k\le n, S$ 是一个紧的k维流形. 证明S的任何参数图册中都至少有两张图.

4. 设自然数$1\le m<n$. 证明任何集合$K\subset\mathbb{R}^m$ 都不能与$\mathbb{S}^{n-1}$ 同胚。

5* 设$f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 满足$f\circ f=f$. 证明象集$f(\mathbb{R}^n)$ 是C^1的无边流形. [提示: 应用**秩定理**.]

[注意, 为使$f(\mathbb{R}^n)$是一个无边的流形, f的光滑性是本质条件. 如果f 只是连续而非光滑, 则$f(\mathbb{R}^n)$ 可以有边. 例如设

$$f(x)=\frac{x}{\max\{|x|,\,1\}},\quad x\in\mathbb{R}^n$$

则$f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 且满足$f(f(x)) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. 事实上由定义我们有$f(x) \in \mathbb{B}^n$ for all $x \in \mathbb{R}^n$, 以及$f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{B}^n$. 这就蕴含$f(f(x)) \equiv f(x)$. 易见$f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{B}^n$. 因此$f(\mathbb{R}^n)$是一个$n$-维带边流形.]

6. 在上面**【重要例子(球面、球极投影及应用)】**中给出的图册

$$\mathcal{A}(\mathbb{S}^{n-1}) = \{(\mathbb{R}^{n-1}, \varphi_-, \mathbb{S}^{n-1} \cap V_-),\, (\mathbb{R}^{n-1}, \varphi_+, \mathbb{S}^{n-1} \cap V_+)\}$$

是定向图册吗? [为了计算行列式, 可以参照本章后面讲授曲面积分时的给出的**【附录: 一类特殊矩阵的行列式计算公式】**中的计算方法。]

7. $\mathbb{R}^3$中的默比乌斯带是否可以表示成下面的形式?

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega \mid F(x, y, z) = 0\}, \quad \nabla F(x, y, z) \neq 0 \quad \forall\, (x, y, z) \in S$$

其中$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是开集, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. 利用这个例子来解释: 为什么$\mathbb{R}^3$中**不是**每个二维光滑曲面都能用光滑的隐函数方程$F(x, y, z) = 0$ 表示, 这里F满足当$F(x, y, z) = 0$时$\nabla F(x, y, z) \neq 0$。

8. 在$\mathbb{R}^3$中举出这样的例子: 曲面S不可定向, 但其边界∂S 可定向。

9. 设$S \subset \mathbb{R}^n$是一个k-维带边的(光滑)曲面, 其中$2 \leq k \leq n$. 问: 是否∂S 也带边? 即是否有$\partial(\partial S) \neq \emptyset$?

10. 设想地球为闭球体$\overline{B^3}(0, r) \subset \mathbb{R}^3$. 考虑地球外固定高度的大气层$\mathbb{S}^2(R) = \partial B^3(0, R)$ 其中$R > r (> 0)$. 问题: 能否造出这样的飞行器, 它只在$\mathbb{S}^2(R)$中飞行且飞行的速度$\mathbf{V}$ 可以连续地由$\mathbb{S}^2(R)$上朝外的单位法向量$\mathbf{n}(x)$决定, 也即使得$\mathbf{n} \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{n})$ 是连续的?

11. 设开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F \in C^r(\Omega, \mathbb{R})\, (r \geq 1)$,

$$S = \{x \in \Omega \mid F(x) = 0\} \neq \emptyset, \quad \nabla F(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in S.$$

直接证明S可定向.

§11.4. $\mathbb{R}^n$上的曲线曲面积分

本节学习关于Hausdorff测度的积分, 即$\mathbb{R}^n$上的曲线、曲面积分.

因Hausdorff 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$属于一般完备测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$的特殊情形, 故我们在第十章前半学习的关于一般完备测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$上可测函数和可测函数的积分的所有性质对于Hausdorff 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$ 当然都成立. 下面我们对Hausdorf 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k, H_k)$ 列出相关定义和常用性质, 这也是对一般积分的基本概念和性质的复习:

可测函数的定义、

若f 在H_k-可测集E上几乎处处连续, 则f在E 上H_k-可测(习题)、

H_k-可测函数列的上(下)极限函数、极限函数都是H_k-可测函数、

简单函数和简单函数逼近、

非负可测函数的级数表示、

“几乎处处”(即“a.e.”) 的定义、H_k-积分

$$\int_E f(x)\mathrm{d}H_k(x)$$

的定义、H_k-可积性的定义、积分的线性性、可数可加性、

非负可测函数的积分的次可加性、

零测集对积分无贡献、

非负可测函数列的Levi 单调收敛、非负可测函数列的Fatou 引理、

非负可测函数级数总可以逐项积分、

一般可测函数级数的逐项积分定理、

Lebesgue 控制收敛定理(LDC)、

积分的扩张、

积分的绝对连续性、

L^p 空间$L^p(E,\mu)$的完备性, 其中$\mu = H_k, 1 \le p < \infty$、

向量值和复值函数的积分、

积分不等式, 等等.

由上面**【命题11.6的推论】**知: $\mathbb{R}^n$中的每个曲面(流形)S都是Borel集, 从而是任意维的Hausdorff可测集.

下面主要学习关于Hausdorff测度的积分——即曲线积分, 曲面积分, 高维空间中低维集合上的积分—— 的计算公式。这首先需要借助Hausdorff测度对曲线长度和曲面面积给出定义. 我们先从平行四边形开始.

- $\mathrm{A}([0,1]^k)$**的几何意义**.

设$1 \le k \le n$为自然数, 矩阵$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 的列向量为$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$. 则

$$\mathrm{A}x = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{a}_i.$$

因此

$$\mathrm{A}([0,1]^k) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{a}_i \,\Big|\, x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in [0,1]^k \Big\}.$$

这表明, $\mathrm{A}([0,1]^k)$ 是由向量$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ 张成的位于$\mathbb{R}^n$中的“平行四边形”, 即它是斜的k维区间(包括$k = n$的情形).

另一方面,

$$\mathrm{A}^\tau \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\tau \\ \mathbf{a}_2^\tau \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \rangle \end{pmatrix}$$

或简写为

$$\mathrm{A}^\tau \mathrm{A} = (\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle)_{k\times k}.$$

由第九章**命题9.36** 和$m_k([0,1]^k) = 1$ 知$\mathrm{A}([0,1]^k$ 的k 维Hausdorff 测度为

$$H_k(\mathrm{A}([0,1]^k)) = \sqrt{\det(\mathrm{A}^\tau \mathrm{A})} = \sqrt{\det(\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle)_{k\times k}}.$$

因此可以想象, $\mathrm{A}([0,1]^k)$ 的k 维Hausdorff 测度$H_k(\mathrm{A}([0,1]^k)$ 便是“平行四边形”$\mathrm{A}([0,1]^k)$的“面积”.

例如当$k = 1$ 时, $\mathrm{A}([0,1])$是向量$\mathbf{a}_1$对应的位于$\mathbb{R}^n$中的直线段, 其长度等于$\mathbf{a}_1$的长度, 即$\sqrt{\det(\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle)_{1\times 1}} = |\mathbf{a}_1|$.

当$k=2$ 时, $\mathrm{A}([0,1]^2)$是由向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 张成的位于$\mathbb{R}^n$中的平行四边形, 其面积等于$\sqrt{\det(\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j\rangle)_{2\times 2}}$.

当$k=3$ 时, $\mathrm{A}([0,1]^3)$是由向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 张成的位于$\mathbb{R}^n$中的平行六面体, 其体积等于$\sqrt{\det(\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j\rangle)_{3\times 3}}$. 等等.

在很多文献中称矩阵$(\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j\rangle)_{k\times k}$ 是向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_k$ 的**格拉姆(Gram)矩阵**.

• **光滑曲线的长度和曲面面积的定义**.

【定义】设$k\in\{1,2,...,n\}$, $S\subset\mathbb{R}^n$. 若S是一个k 维光滑曲面, 则称S的k维Hausdorff测度$H_k(S)$为S的面积. 当$k=1$ 时, 即当S是一个光滑曲线时, $H_1(S)$ 称为S的长度.

一般地, 设$D\subset\mathbb{R}^k$ 为开集, $\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且满秩即$\mathrm{rank}(\varphi'(t))=k$ for all $t\in D$. 则称$\varphi(D)$的k维Hausdorff 测度$H_k(\varphi(D))$为$\varphi(D)$的面积. 当$k=1$ 时, $H_1(\varphi(D))$称为曲线$\varphi(D)$的长度. $\Box$

由光滑曲面的定义知, S至少有局部参数表示, 即对任意$x_0\in S$, 存在x_0的一个邻域$U(x_0)\subset\mathbb{R}^n$ 使得$S\cap U(x_0)$ 有参数表示. 以$S\cap U(x_0)$代替S, 我们不妨假设S具有参数表示, 即$S=\varphi(D)$, 其中(例如) $D=(-1,1)^k$, $D\ni t\mapsto\varphi(t)=x\in S$是光滑的单满射且$\mathrm{rank}\varphi'(t)\equiv k$, $t\in D$. 对于这种情形我们将证明

$$H_k(S)=\int_D\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t.$$

首先说明: 由$1\le k\le n$ 可知对于$t\in D$ 有

$$\mathrm{rank}\varphi'(t)=k\quad\Longleftrightarrow\quad\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0.$$

因此我们可以用容易操作的"$\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0$"表示映射$\varphi$是满秩的.

【定理11.18(曲线长度和曲面面积公式)】设$k\in\{1,2,...,n\}$, $D\subset\mathbb{R}^k$ 为开集, $\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且$\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0$ for all $t\in D$. 则对任意$S\subset\varphi(D)$ 有

$$S\text{ 是}H_k\text{-可测集}\iff\varphi^{-1}(S)\text{ 是}L\text{-可测集};$$

而当S是H_k-可测集时有

$$H_k(S)=\int_{\varphi^{-1}(S)}\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t.$$

特别有

$$H_k(\varphi(D))=\int_D\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t.$$

【证】定理中的可测性部分是第九章**命题9.35**的结论. 此外由该命题还知若$Z\subset D$是L-零测集, 即$m_k(Z)=0$, 则$\varphi(Z)$ 是H_k-零测集, 即$H_k(\varphi(Z))=0$.

下证积分等式. 为记号简便，令

$$J_{\varphi}(t)=\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))},\quad t\in D.$$

只需证明: 对任意L-可测集$A\subset D$ (即等价地, 对任意集合$A\subset D$满足$\varphi(A)$ 是H_k-可测集者) 有

$$H_k(\varphi(A))=\int_A J_{\varphi}(t)\mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

让我们先把证明等价地归结到一个特殊情形. 令

$$D_j=\{t\in\mathbb{R}^k\mid \mathrm{dist}(t,D^c)>1/j\}\cap B(0,j),\quad j=1,2,3,\dots.$$

则易见D_j 是有界开集且

$$\overline{D}_j\subset\{t\in\mathbb{R}^k\,|\,\mathrm{dist}(t,D^c)\ge 1/j\}\cap\overline{B}(0,j)\subset D,$$

$$D_1\subset D_2\subset D_3\subset\cdots,\quad D=\bigcup_{j=1}^{\infty}D_j$$

其中最后的等号“=”用到了D 是开集, 它蕴含$D=\{t\in\mathbb{R}^k\mid \mathrm{dist}(t,D^c)>0\}$.

对任意L-可测集$A\subset D$, 有分解

$$A=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j,\quad \varphi(A)=\bigcup_{j=1}^{\infty}\varphi(A_j),\quad 其中\ A_j=A\cap D_j.$$

易见$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$, $\varphi(A_1)\subset\varphi(A_2)\subset\varphi(A_3)\subset\cdots$. 由测度的单调收敛定理和积分的扩张定理分别有

$$H_k(\varphi(A))=H_k\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\varphi(A_j)\Big)=\lim_{j\to\infty}H_k(\varphi(A_j)),$$

$$\int_A J_{\varphi}(t)\mathrm{d}t=\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j}J_{\varphi}(t)\mathrm{d}t=\lim_{j\to\infty}\int_{A_j}J_{\varphi}(t)\mathrm{d}t.$$

由此看见, 为证(4.1), 只需证明$H_k(\varphi(A_j))=\int_{A_j}J_{\varphi}(t)\mathrm{d}t, j=1,2,3,\dots$. 意即只需证明对任意有界开集$D_0$ 满足$\overline{D_0}\subset D$ 和任意L-可测集$A\subset D_0$ 有(4.1)成立.

分四步证明.

Step 1. 对任意$t_0 \in D$, 令Q 为含于D内的包含t_0的闭方体. 证明

$$\lim_{Q\ni t_0, \mathrm{diam}(Q)\to 0} \frac{H_k(\varphi(Q))}{m_k(Q)} = J_\varphi(t_0). \tag{4.2}$$

为证这一极限, 注意到$J_\varphi(t_0) > 0$, 只需证明对任意$0 < \varepsilon < 1$ 存在$\delta > 0$ 使得当$Q \subset D$ 满足$Q \ni t_0$ 和$\mathrm{diam}(Q) < \delta$ 时

$$(1-\varepsilon)^k \le \frac{H_k(\varphi(Q))}{J_\varphi(t_0)m_k(Q)} \le (1+\varepsilon)^k. \tag{4.3}$$

令$\mathrm{T} = \varphi'(t_0)$. 由第九章**引理9.34(a)**知, 对任意$0 < \varepsilon < 1$ 存在$\delta > 0$ 使得$B(x_0, \delta) \subset D$ 且

$$(1-\varepsilon)|\mathrm{T}(t-s)| \le |\varphi(t) - \varphi(s)| \le (1+\varepsilon)|\mathrm{T}(t-s)| \quad \forall\, t, s \in B(t_0, \delta).$$

对任意闭方体Q 满足$Q \ni t_0$ 且$\mathrm{diam}(Q) < \delta$, 易见$Q \subset B(t_0, \delta)$, 故由上一行不等式有

$$(1-\varepsilon)|\mathrm{T}t - \mathrm{T}s| \le |\varphi(t) - \varphi(s)| \le (1+\varepsilon)|\mathrm{T}t - \mathrm{T}s| \quad \forall\, t, s \in Q.$$

应用第九章**命题9.27(Hausdorff外测度保持距离不等式)**得到

$$(1-\varepsilon)^k H_k(\mathrm{T}(Q)) \le H_k(\varphi(Q)) \le (1+\varepsilon)^k H_k(\mathrm{T}(Q)).$$

而由**命题9.36** 和$\mathrm{T} = \varphi'(t_0) \in \mathbb{R}^{n\times k}$知

$$H_k(\mathrm{T}(Q)) = \sqrt{\det(\mathrm{T}^\tau \mathrm{T})}\, m_k(Q) = J_\varphi(t_0) m_k(Q).$$

因此

$$(1-\varepsilon)^k J_\varphi(t_0) m_k(Q) \le H_k(\varphi(Q)) \le (1+\varepsilon)^k J_\varphi(t_0) m_k(Q).$$

这就证明了(4.3). 所以极限式(4.2)成立.

Step 2. 证明对于满足$\overline{Q} \subset D$的任意方体Q 有

$$H_k(\varphi(Q)) = \int_Q J_\varphi(t)\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

由$\overline{Q} = Q \cup \partial Q$有$\varphi(\overline{Q}) = \varphi(Q) \cup \varphi(\partial Q)$. 因$\partial Q \subset D$ 且$m_k(\partial Q) = 0$, 故由证明的开头所言知$H_k(\varphi(\partial Q)) = 0$. 于是有

$$H_k(\varphi(\overline{Q})) = H_k(\varphi(Q)), \quad \int_{\overline{Q}} J_\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_Q J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

因此为证(4.4), 只需证明

$$H_k(\varphi(\overline{Q}))=\int_{\overline{Q}}J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

换言之, 只需证明(4.4)对任意闭方体$Q\subset D$成立.

反证法: 假设存在闭方体$Q_0\subset D$ 使得

$$H_k(\varphi(Q_0))\neq\int_{Q_0}J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

先设

$$H_k(\varphi(Q_0))<\int_{Q_0}J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

此时对于某个$\varepsilon>0$ 有

$$H_k(\varphi(Q_0))\le\int_{Q_0}[J_\varphi(t)-\varepsilon]\mathrm{d}t.$$

将Q_0的每条棱二等分得到Q_0的2^k个互不重叠的闭子方体: $I_1,I_2,...,I_{2^k}$. 这里“互不重叠”是因为当$i\neq j$时$I_i\cap I_j\subset\partial I_j$ 而$m_k(\partial I_j)=0$.

注意φ 是单射, 故当$i\neq j$ 时$\varphi(I_i)\cap\varphi(I_j)=\varphi(I_i\cap I_j)$. 由证明开头所言知 $\varphi(I_1),\varphi(I_2),...,\varphi(I_{2^k})$ 关于测度H_k 也是互不重叠的, 即$H_k(\varphi(I_i)\cap\varphi(I_j))=0,\ i\neq j$. 由关于互不重叠情形的测度和积分的可加性得到

$$\sum_{j=1}^{2^k}H_k(\varphi(I_j))=H_k\Big(\bigcup_{j=1}^{2^k}\varphi(I_j)\Big)=H_k\Big(\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{2^k}I_j\Big)\Big)$$

$$=H_k(\varphi(Q_0))\le\int_{Q_0}[J_\varphi(t)-\varepsilon]\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{2^k}\int_{I_j}[J_\varphi(t)-\varepsilon]\mathrm{d}t.$$

这蕴含存在$j_0\in\{1,2,...,2^k\}$ 使得$Q_1:=I_{j_0}$ 满足

$$H_k(\varphi(Q_1))\le\int_{Q_1}[J_\varphi(t)-\varepsilon]\mathrm{d}t,\quad \mathrm{diam}(Q_1)=\frac{1}{2}\mathrm{diam}(Q_0).$$

对Q_1 重复上述过程得到Q_1的闭子方体Q_2使得

$$H_k(\varphi(Q_2))\le\int_{Q_2}[J_\varphi(t)-\varepsilon]\mathrm{d}t,\quad \mathrm{diam}(Q_2)=\frac{1}{2}\mathrm{diam}(Q_1).$$

应用归纳操作原理我们得到闭方体套

$$Q_0\supset Q_1\supset Q_2\supset\cdots,\quad \mathrm{diam}(Q_j)=\frac{1}{2^j}\mathrm{diam}(Q_0),\quad j=1,2,3,\dots.$$

使得

$$H_k(\varphi(Q_j))\le\int_{Q_j}[J_\varphi(t)-\varepsilon]\mathrm{d}t,\qquad j=1,2,3,\dots.$$

写$\bigcap_{j=0}^{\infty} Q_j = \{t_0\}$, 则$t_0 \in D$. 由中值定理, 对任意$j \in \mathbb{N}$ 存在$t_j \in Q_j$使得

$$\int_{Q_j} [J_\varphi(t) - \varepsilon]\mathrm{d}t = [J(\varphi'(t_j)) - \varepsilon] m_k(Q_j).$$

于是由$t \mapsto J_\varphi(t)$ 连续和$t_j \to t_0$ 得到

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{H_k(\varphi(Q_j))}{m_k(Q_j)} \le \lim_{j\to\infty} [J(\varphi'(t_j)) - \varepsilon] = J_\varphi(t_0) - \varepsilon.$$

这与极限式(4.2)矛盾.

其次设

$$H_k(\varphi(Q_0)) > \int_{Q_0} J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

此时对于某个$\varepsilon > 0$ 有

$$H_k(\varphi(Q_0)) \ge \int_{Q_0} [J_\varphi(t) + \varepsilon]\mathrm{d}t.$$

如上, 将Q_0等分成2^k个互不重叠的闭子方体: $I_1, I_2, ..., I_{2^k}$. 则如上论证得到

$$\sum_{j=1}^{2^k} H_k(\varphi(I_j)) \ge \sum_{j=1}^{2^k} \int_{I_j} [J_\varphi(t) + \varepsilon]\mathrm{d}t.$$

因此存在$Q_1 := I_{j_0}$ 使得

$$H_k(\varphi(Q_1)) \ge \int_{Q_1} [J_\varphi(t) + \varepsilon]\mathrm{d}t, \quad \mathrm{diam}(Q_1) = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(Q_0).$$

余下论证如上, 最后仍得到与极限式(4.2)矛盾的结果.

这些矛盾证明了(4.4)对于D中的任一闭方体Q成立, 从而证明了(4.4)对于D中满足$\overline{Q} \subset D$的任一方体Q成立.

Step 3. 证明对任意开集$G \subset D$ 有

$$H_k(\varphi(G)) = \int_G J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

当G为空集时, 显然成立. 设G非空. 将开集G分解成$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ 其中Q_j 是互不相交的左闭右开的2-进方体且$\overline{Q}_j \subset G$. 则由$\varphi(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(Q_j)$ 和可加性(注意φ 是单射) 以及**Step 2** 即知

$$H_k(\varphi(G)) = \sum_{j=1}^{\infty} H_k(\varphi(Q_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} J_\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_G J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Step 4. 证明对任意有界开集D_0 满足$\overline{D_0} \subset D$ 和任意L-可测集$A \subset D_0$ 有(4.1)成立.

由L-可测集的结构(见第九章**定理9.17(L-测度空间的特征和正则性)**)知存在一列递降的开集$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots \supset A$ 使得$(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j) \setminus A$ 是L-零测集. 注意开集$D_0 \cap G_j \supset A$ 且也是递降的且$(\bigcap_{j=1}^{\infty} D_0 \cap G_j) \setminus A$ 也是L-零测集, 因此可以以$D_0 \cap G_j$代替G_j, 换言之可以假设$G_j \subset D_0, j = 1, 2, 3, \ldots$. 令$Z = (\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j) \setminus A$, 则$m_l(Z) = 0$且$\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j = A \cup Z$. 注意$\overline{D_0}$是$D$中的紧集, 因此连续函数$t \mapsto J_\varphi(t)$在$\overline{D_0}$上有界. 这给出

$$H_k(\varphi(G_j)) = \int_{G_j} J_\varphi(t)\mathrm{d}t \le \int_{D_0} J_\varphi(t)\mathrm{d}t \le \int_{\overline{D_0}} J_\varphi(t)\mathrm{d}t < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

于是应用测度的单调极限定理和积分的收缩定理并注意$\varphi(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \varphi(G_j)$ (因为φ 是单射) 以及$m_k(Z) = 0, H_k(\varphi(Z)) = 0$, 得到

$$\begin{aligned}
&H_k(\varphi(A)) = H_k(\varphi(A) \cup \varphi(Z)) = H_k(\varphi(A \cup Z)) = H_k(\varphi(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j)) \\
&= H_k(\bigcap_{j=1}^{\infty} \varphi(G_j)) = \lim_{j\to\infty} H_k(\varphi(G_j)) = \lim_{j\to\infty} \int_{G_j} J_\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j} J_\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{A\cup Z} J_\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_A J_\varphi(t)\mathrm{d}t. \qquad \Box
\end{aligned}$$

在建立数学模型和进行数值计算时, 经常采用积分的Riemann 和, 因为它直观、有利于导出正确结论, 并且至少对连续函数来说Riemann和收敛于相应的积分。

【**定理11.19(积分作为Riemann和的极限)**】设$k \in \{1, 2, ..., n\}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ 为紧的H_k-可测集且$H_k(S) < +\infty$. 设$f : S \to \mathbb{C}$ 连续. 作S的分划$S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$ 其中S_i是互不重叠的H_k-可测集。则对任意$\varepsilon > 0$ 存在$\delta > 0$ 使得只要$\max\limits_{1\le i\le N} \mathrm{diam}(S_i) \le \delta$ 就有

$$\sup_{\xi_i\in S_i, i=1,2,\ldots,N} \Big| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) H_k(S_i) - \int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x) \Big| \le \varepsilon.$$

【证】由积分的可加性有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} f(x)\mathrm{d}H_k(x)$$

从而对任意$\xi_i \in S_i, i = 1, 2, ..., N$ 有

$$\Big| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) H_k(S_i) - \int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x) \Big| = \Big| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) H_k(S_i) - \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} f(x)\mathrm{d}H_k(x) \Big|$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i}\Big(f(\xi_i)-f(x)\Big)\mathrm{d}H_k(x)\Big| \le \sum_{i=1}^{N}\int_{S_i}\Big|f(\xi_i)-f(x)\Big|\mathrm{d}H_k(x)\\
&\le \omega(f,\lambda)\sum_{i=1}^{N}H_k(S_i)=\omega(f,\lambda)H_k(S)
\end{aligned}
$$

其中$\omega(f,\delta)=\sup\limits_{x,y\in S,|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|\,(\delta\ge 0)$, $\lambda=\max\limits_{1\le i\le N}\mathrm{diam}(S_i)$. 因$S$ 是紧集, 故f在S上一致连续, 即$\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega(f,\delta)=0$. 因此对任意$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 使得$\omega(f,\delta)<\varepsilon/(1+H_k(S))$. 于是当$\lambda\le\delta$ 时, 对任意$\xi_i\in S_i, i=1,2,...,N$ 有

$$
\Big|\sum_{i=1}^{N}f(\xi_i)H_k(S_i)-\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)\Big|\le\omega(f,\lambda)H_k(S)\le\omega(f,\delta)H_k(S)<\varepsilon.
$$

将不等式左边对一切$\xi_i\in S_i$ 取上确界即得要证的不等式. □

【定理11.20(平移、伸缩、反射与旋转)】设$k\in\{1,2,...,n\}$, $S\subset\mathbb{R}^n$ 为H_k-可测集. 设$h\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 而$\mathrm{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$为正交阵. 假设$f$ 分别在$S+h$, λS, $\mathrm{T}(S)$, $\lambda\mathrm{T}(S)+h$ 上非负H_k-可测或H_k-可积, 则分别有

$$
\int_{S+h}f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_S f(x+h)\mathrm{d}H_k(x),
$$
$$
\int_{\lambda S}f(x)\mathrm{d}H_k(x)=|\lambda|^k\int_S f(\lambda x)\mathrm{d}H_k(x),
$$
$$
\int_{\mathrm{T}(S)}f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_S f(\mathrm{T}x)\mathrm{d}H_k(x),
$$
$$
\int_{\lambda\mathrm{T}(S)+h}f(x)\mathrm{d}H_k(x)=|\lambda|^k\int_S f(\lambda\mathrm{T}x+h)\mathrm{d}H_k(x).
$$

【证】只需证最后一个, 即证一般情形. 令$\varphi(x)=\lambda\mathrm{T}x+h$. 则只需证明对$\varphi(S)$ 上的任意非负H_k-可测函数或H_k-可积函数f 有

$$
\int_{\varphi(S)}f(x)\mathrm{d}H_k(x)=|\lambda|^k\int_S f(\varphi(x))\mathrm{d}H_k(x).
$$

事实上对任意H_k-可测集$E\subset\varphi(S)$ 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varphi(S)}\mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}H_k(x)=H_k(\varphi(S)\cap E)=H_k(\varphi(S\cap\varphi^{-1}E))\\
&=|\lambda|^kH_k(S\cap\varphi^{-1}(E))=|\lambda|^k\int_S\mathbf{1}_{\varphi^{-1}(E)}(x)\mathrm{d}H_k(x)=|\lambda|^k\int_S\mathbf{1}_E(\varphi(x))\mathrm{d}H_k(x).
\end{aligned}
$$

由此和非负可测函数的级数表示和逐项积分可知当f 是非负H_k-可测函数时, 所证等式成立. 余下的证明如前. □

【**定理11.21(换元公式I)**】设$S\subset\mathbb{R}^n$, $k\in\{1,2,...,n\}$, $D\subset\mathbb{R}^k$为开集, $\varphi:D\to\mathbb{R}^n$是S的光滑参数表示, 即$S=\varphi(D)$ 且φ在D上为C^1类的单射且满秩, 即$\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))>0$ for all $t\in D$. 设f为S上的实或复值函数. 则

(a) f 在S上H_k-可测$\Longleftrightarrow t\mapsto f(\varphi(t))$在$D$上$L$-可测.

(b) f 在S 上H_k-可积或非负H_k-可测$\Longleftrightarrow t\mapsto f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))}$ 在D 上L-可积或非负L-可测. 此时有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_D f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t. \tag{4.5}$$

【证】(a): 这是第九章**命题9.41(C^1 变换下函数的可测性)**的结论.

(b): 我们将多次使用(a), 即f 在S上H_k-可测当且仅当$f\circ\varphi$在D上L-可测. 如前, 记

$$J_\varphi(t)=\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))}.$$

先考虑f为非负函数的情形. 设$E\subset S$为H_k-可测集. 则由**定理11.18(面积公式)** 有

$$\int_S \mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}H_k(x)=H_k(E)=\int_{\varphi^{-1}(E)}J_\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_D \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(E)}(t)J_\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_D \mathbf{1}_E(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

其中用到恒等式$\mathbf{1}_{\varphi^{-1}(E)}(t)=\mathbf{1}_E(\varphi(t))$.

设f 在S 上非负H_k-可测. 则由非负可测函数的级数表示有

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\mathbf{1}_{E_j}(x),\quad x\in S$$

其中$E_j\subset S$ 是H_k-可测集, $c_j>0$.

由非负可测函数级数的逐项积分即得

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\int_S\mathbf{1}_{E_j}(x)\mathrm{d}H_k(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\int_D\mathbf{1}_{E_j}(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_D\Big(\sum_{j=1}^{\infty}c_j\mathbf{1}_{E_j}(\varphi(t))\Big)J_\varphi(t)\mathrm{d}x=\int_D f(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

其次设f是S上实值或复值H_k-可测函数, 即$f\circ\varphi$是D上的实值或复值L-可测函数. 则由非负情形有

$$\int_S|f(x)|\mathrm{d}H_k(x)=\int_D|f(\varphi(t))|J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

由此知f 在S上H_k-可积当且仅当$t\mapsto f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}$ 在D上L-可积.

设已满足可积性. 则当f为实值函数时有

$$\int_S f_\pm(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_D f_\pm(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t<+\infty$$

因此

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_S f_+(x)\mathrm{d}H_k(x)-\int_S f_-(x)\mathrm{d}H_k(x)$$
$$=\int_D f_+(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_D f_-(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_D f(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

而当f复值函数时, f的实部虚部$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在S 上H_k-可积. 因此

$$\begin{aligned}\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)&=\int_S \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}H_k(x)+\mathrm{i}\int_S \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}H_k(x)\\&=\int_D \mathrm{Re}(f(\varphi(t)))J_\varphi(t)\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_D \mathrm{Im}(f(\varphi(t)))J_\varphi(t)\mathrm{d}t\\&=\int_D f(\varphi(t))J_\varphi(t)\mathrm{d}t.\qquad\qquad\Box\end{aligned}$$

很多k-维曲面S虽然不能用一个参数映射φ完全表示, 即$\varphi(D)\subset S,\varphi(D)\neq S$, 但二者之差的面积为零, 即$H_k(S\setminus\varphi(D))=0$. 因零测集对积分无贡献, 故对这类情形上述定理依然成立. 因此下面两个定理更常用.

【定理11.22(换元公式II)】设$k\in\{1,2,...,n\}$, $D\subset\mathbb{R}^k$为开集, $\varphi:D\to\mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射且$\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0$ for all $t\in D$. 设集合$S\supset\varphi(D)$ 满足$H_k(S\setminus\varphi(D))=0$. 设$f$为$S$上的实或复值函数. 则

(a) f 在S上H_k-可测$\Longleftrightarrow t\mapsto f(\varphi(t))$在$D$上$L$-可测.

(b) f 在S 上H_k-可积或非负H_k-可测$\Longleftrightarrow t\mapsto f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}$ 在D 上L-可积或非负L-可测. 此时有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_D f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t.\tag{4.6}$$

【证】令$S_0=\varphi(D)$.

(a): 设函数$f:S\to\mathbb{C}$. 由上一定理和$H_k(S\setminus S_0)=0$ 知:

f 在S上H_k-可测$\Longleftrightarrow$ f 在S_0上H_k-可测$\Longleftrightarrow$ $f\circ\varphi$ 在D上L-可测.

(b): 由$H_k(S\setminus S_0)=0$ 知:

f 在S 上H_k-可积或非负H_k-可测

$\Longleftrightarrow$ f 在S_0 上H_k-可积或非负H_k-可测

$\Longleftrightarrow$ $t\mapsto f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}$ 在D 上L-可积或非负L-可测.

应用**定理11.21(换元公式I)** 即知当非负可测或可积时有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_{S_0} f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_D f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

【定理11.23(换元公式III)】 设$k\in\{1,2,...,n\}$, $D\subset\mathbb{R}^k$ 为开集, 其边界为L-零测集, 即$m_k(\partial D)=0$. 设$\varphi\in C^1(\overline{D},\mathbb{R}^n)$ 且φ 在开集D 上为单射且满秩, 即$\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0$ for all $t\in D$. 设

$$S=\varphi(\overline{D}),\quad \text{或一般地设}\quad S\supset\varphi(\overline{D})\ \text{ 且 }\ H_k(S\setminus\varphi(\overline{D}))=0.$$

则对于S上的任一实或复值函数f有:

(a) f 在S上H_k-可测$\Longleftrightarrow t\mapsto f(\varphi(t))$在$\overline{D}$上$L$-可测.

(b) f 在S 上H_k-可积或非负H_k-可测$\Longleftrightarrow t\mapsto f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}$ 在$\overline{D}$ 上L-可积或非负L-可测. 此时有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x)=\int_{\overline{D}} f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t. \tag{4.7}$$

【证】 首先说明$\varphi(\partial D)$ 是H_k-零测集. 事实上由假设知存在开集$\Omega\supset\overline{D}$ 使得$\varphi\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. 因此由第九章**命题9.35(a)** 和$\partial D\subset\Omega$, $m_k(\partial D)=0$ 知$\varphi(\partial D)$ 是H_k-零测集. 于是在分解

$$S=(S\setminus\varphi(\overline{D}))\cup\varphi(D)\cup\varphi(\partial D),\quad \overline{D}=D\cup\partial D$$

中$S\setminus\varphi(\overline{D}),\varphi(\partial D)$ 都是H_k-零测集, ∂D 是L-零测集. 结合**定理11.21(换元公式II)**) 即知:

f 在S上H_k-可测$\Longleftrightarrow$ f 在$\varphi(D)$上H_k-可测$\Longleftrightarrow$ $f\circ\varphi$在D上L-可测$\Longleftrightarrow$ $f\circ\varphi$在$\overline{D}$上L-可测;

f在S上H_k-可积或非负H_k-可测$\Longleftrightarrow$ f在$\varphi(D)$上H_k-可积或非负H_k-可测$\Longleftrightarrow$ $t\mapsto f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}$ 在D上L-可积或非负L-可测$\Longleftrightarrow t\mapsto f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}$ 在$\overline{D}$ 上L-可积或非负L-可测.

应用**定理11.21(换元公式I)**) 和零测集对积分无贡献即知当非负可测或可积时有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}H_k(x) = \int_{\varphi(D)} f(x)\mathrm{d}H_k(x) = \int_D f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\overline{D}} f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

§11.5. 一些常见的积分, 应用例题

本节我们学习曲线曲面积分的计算和应用。首先来了解曲线曲面积分的常用记号。

【测度记号的转换】为了与教科书和数学文献衔接, 我们把$S \subset \mathbb{R}^n$的k-维Hausdorff测度$H_k(S)$ 记做$\sigma_k(S)$ 或$\sigma(S)$, 即

$$\sigma(S) = \sigma_k(S) = H_k(S).$$

相应的测度元, 也称为面积元(当$k = 1$ 时也称为弧长微元), 记做

$$\mathrm{d}\sigma(x) = \mathrm{d}\sigma_k(x) = \mathrm{d}H_k(x) \quad \text{或} \quad \mathrm{d}\sigma(\omega) = \mathrm{d}\sigma_k(\omega) = \mathrm{d}H_k(\omega), \quad \text{等等}.$$

设T 为正交变换(即正交矩阵), λ 为非零实数, $h \in \mathbb{R}^n$为向量. 则按上述记号, k维曲面的平移、伸缩与旋公式和相应的积分公式写成

$$\begin{aligned}
&\sigma(S+h) = \sigma(S), \quad \sigma(\lambda S)) = |\lambda|^k \sigma(S), \quad \sigma(\mathrm{T}(S)) = \sigma(S),\\
&\int_{S+h} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_S f(x+h)\mathrm{d}\sigma(x),\\
&\int_{\lambda S} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = |\lambda|^k \int_S f(\lambda\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega),\\
&\int_{\mathrm{T}(S)} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_S f(\mathrm{T}x)\mathrm{d}\sigma(x),\\
&\int_{\lambda\mathrm{T}(S)+h} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = |\lambda|^k \int_S f(\lambda\mathrm{T}\omega + h)\mathrm{d}\sigma(\omega).
\end{aligned}$$

而曲面面积和积分计算的换元公式写成

$$S = \varphi(D), \quad \sigma(S) = \int_D \sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t))}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_D f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t))}\,\mathrm{d}t,$$

其中只需记住: 区域D所在空间$\mathbb{R}^k$的维数k 等于曲面测度$\sigma = H_k$的维数k.

记号说明: 测度元记号$\mathrm{d}\sigma(x)$中的x 表示$\mathrm{d}\sigma(x)$ 是包含x的那一片微分小的曲面(或曲线)的测度.

【具有对称性的曲面的积分】设$\mathbb{R}^n$中的曲面S关于(例如)第n个坐标是对称的, 即

$$(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \in S \iff (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, -x_n) \in S.$$

设线性变换$\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 由下式给出:

$$\mathrm{T}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)^\tau = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, -x_n)^\tau \quad \forall\, (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

则T是正交变换. 令

$$S_+ = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \in S \mid x_n \ge 0\}, \quad S_- = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \in S \mid x_n \le 0\}.$$

则有

$$\mathrm{T}(S_+) = S_- \quad \text{从而有} \quad \sigma(S_-) = \sigma(S_+).$$

于是由$S = S_+ \cup S_-$ 且S_+, S_- 互不重叠(即$\sigma(S_+ \cap S_-) = 0$) 有

$$\sigma(S) = \sigma(S_-) + \sigma(S_+) = 2\sigma(S_+).$$

设f在S上σ-可积. 则有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{S_+} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) + \int_{S_-} f(x)\mathrm{d}\sigma(x),$$

$$\int_{S_-} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\mathrm{T}(S_+)} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{S_+} f(\mathrm{T}x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{S_+} f(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)\mathrm{d}\sigma(x).$$

从而得到

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{S_+} \Big(f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) + f(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)\Big)\mathrm{d}\sigma(x).$$

于是: 若f关于分量x_n是偶函数, 则

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = 2\int_{S_+} f(x)\mathrm{d}\sigma(x).$$

若f关于分量x_n是奇函数, 则

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = 0.$$

把x_n 换成第i分量x_i, 结论同样成立. $\square$

下面学习一些常见情形中的曲线曲面积分计算公式. 首先说明: 欧空间中的点或向量也常用黑体字$\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ 等表示.

• **曲线长度和曲线积分的计算公式**. 对于曲线的情形, 记号上曲线S常用Γ或C表示, 且通常用l 或s 表示弧长测度, 即

$$l(C) = \sigma_1(C) = H_1(C), \quad l(\Gamma) = \sigma_1(\Gamma) = H_1(\Gamma), \quad \text{etc.}$$

相应地用$\mathrm{d}l(x), \mathrm{d}s(x)$ 表示弧长微元, 即

$$\mathrm{d}l(x) = \mathrm{d}s(x) = \mathrm{d}\sigma_1(x) = \mathrm{d}H_1(x).$$

如用$\mathbf{r}$ 表示空间中的点(向量), 则弧长微元写作$\mathrm{d}l(\mathbf{r}) = \mathrm{d}s(\mathbf{r}) = \mathrm{d}\sigma_1(\mathbf{r})$, 而对参数曲线的情形可写作

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \\
&\mathrm{d}l(\mathbf{r}) = \mathrm{d}s(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t, \quad t \in [\alpha, \beta], \\
&l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}\,\mathrm{d}t, \\
&\int_\Gamma f(\mathbf{r})\mathrm{d}l(\mathbf{r}) = \int_\Gamma f(\mathbf{r})\mathrm{d}s(\mathbf{r}) = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

例如在$\mathbb{R}^3$ 中, 参数曲线写作

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}s(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} = \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t, \quad t \in [\alpha, \beta], \\
&l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t, \\
&\int_\Gamma f(\mathbf{r})\mathrm{d}s(\mathbf{r}) = \int_\alpha^\beta f((x(t), y(t), z(t))\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

又例如对于**平面曲线的极坐标表示**

$$\begin{aligned}
&\Gamma: \quad r = r(\theta) \ge 0, \quad \theta \in [\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi] \qquad \text{即} \\
&\Gamma: \quad x = x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta), \quad y = y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]
\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}, \\
&\mathrm{d}l(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=(x(\theta),y(\theta))} = \mathrm{d}s(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=(x(\theta),y(\theta))} = \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}\mathrm{d}\theta, \\
&l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}\mathrm{d}\theta, \\
&\int_\Gamma f(\mathbf{r})\mathrm{d}s(\mathbf{r}) = \int_\alpha^\beta f\Big(r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta)\Big)\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

【例】计算曲线积分

$$I = \int_\Gamma f(x, y, z)\mathrm{d}s \quad \text{其中}\Gamma\text{为圆柱螺线：} (x, y, z) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ t \in [0, 2\pi].$$

$(a>0,b>0)$ 并对$f(x,y,z)=1$ 和$f(x,y,z)=\frac{z^2}{x^2+y^2}$ 给出数值解.

【解】直接代公式得

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi} f(a\cos t,a\sin t,bt)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\mathrm{d}t\\
&=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} f(a\cos t,a\sin t,bt)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

取$f=1$ 得到圆柱螺线的长为

$$l(\Gamma)=2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

取$f(x,y,z)=\frac{z^2}{x^2+y^2}$有

$$I=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{b^2t^2}{a^2}\mathrm{d}t=\frac{8}{3}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\pi^3. \qquad \Box$$

- **曲线的自然参数——曲线的弧长**.

设$\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ 是一条光滑的或分段光滑的曲线(一维流形). 对于分段光滑的情形, 因只有有限多个光滑段, 故只需考虑每个光滑段, 意即不失一般性可以假定Γ 是光滑的.

设Γ的一个参数表示为

$$\mathbf{r}=\widetilde{\mathbf{r}}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

它属于C^1类且$\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\neq 0$ for all $t\in[\alpha,\beta]$. 令

$$s(t)=\int_\alpha^t|\widetilde{\mathbf{r}}'(\tau)|\mathrm{d}\tau,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

则

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|>0\qquad \forall\, t\in[\alpha,\beta].$$

这蕴含$t\mapsto s(t)$ 严格单调增加, 其反函数

$$s\mapsto t(s),\ \ s\in[0,L],\qquad \text{其中}\ \ L=\int_\alpha^\beta|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|\mathrm{d}t$$

也是C^1类的：回忆反函数的求导公式知

$$\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}}\Big|_{t=t(s)}=\frac{1}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|}\Big|_{t=t(s)},\quad s\in[0,L].$$

令$\mathbf{r}(s)=\widetilde{\mathbf{r}}(t(s))$, $s\in[0,L]$. 则$\mathbf{r}(s)$ 是同一曲线Γ的**以弧长为参数**的参数表示. 注意此时有

$$\mathbf{r}'(s)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}(t(s))}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t(s)}\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\widetilde{\mathbf{r}}'(t)}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|}\Big|_{t=t(s)}$$

从而有

$$|\mathbf{r}'(s)|=\Big|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}\Big|=1\qquad\forall\, s\in[0,L].\tag{5.1}$$

这就是以弧长为参数的参数曲线$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 的优点。几何意义是: $\mathbf{r}'(s)$ 等于曲线在点$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$处的**单位切向量**.

【在物理力学上的应用】设空间$\mathbb{R}^n$中有一质点和力场$\mathbf{F}(\mathbf{r})$. 设这个质点从点A 出发运动到点B, 其运动轨迹为上述曲线Γ. 试求在这个运行中力场$\mathbf{F}(\mathbf{r})$对这个质点所做的功W.

【解】考虑Riemann 和: 对参数曲线$\mathbf{r}=\widetilde{\mathbf{r}}(t)$的参数区间$[\alpha,\beta]$ 作分划$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=\beta$. 在每个子区间$[t_{k-1},t_k]$对应的曲线段上, 力场$\mathbf{F}(\mathbf{r})$对质点所做的功近似等于

$$\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)),\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)-\widetilde{\mathbf{r}}(t_{k-1})\rangle=\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)),\widetilde{\mathbf{r}}'(\tau_k)\rangle\Delta t_k,\quad \tau_k\in(t_{k-1},t_k)$$

其中$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. 因功是可加量, 故得到

$$W\approx\sum_{k=1}^{N}\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)),\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)-\widetilde{\mathbf{r}}(t_{k-1})\rangle=\sum_{k=1}^{N}\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)),\widetilde{\mathbf{r}}'(\tau_k)\rangle\Delta t_k.$$

令$\max\limits_{1\le k\le N}\Delta t_k\to 0$ 得到

$$W=\lim_{\max\limits_{1\le k\le N}\Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{N}\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)),\widetilde{\mathbf{r}}(t_k)-\widetilde{\mathbf{r}}(t_{k-1})\rangle=\int_\alpha^\beta\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)),\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\rangle\mathrm{d}t.$$

如希望使用自然参数(即以弧长为参数的)曲线, 则对弧长区间$[0,L]$ 作分划同样得到

$$W=\int_0^L\langle\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)),\mathbf{r}'(s)\rangle\mathrm{d}s.$$

或者利用积分变量替换$t=t(s), s\in[0,L]$, 也得到

$$\begin{aligned}W&=\int_\alpha^\beta\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)),\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\rangle\mathrm{d}t=\int_0^L\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)),\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\rangle\frac{1}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|}\Big|_{t=t(s)}\mathrm{d}s\\&=\int_0^L\Big\langle\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)),\frac{\widetilde{\mathbf{r}}'(t)}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|}\Big\rangle\Big|_{t=t(s)}\mathrm{d}s=\int_0^L\langle\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)),\mathbf{r}'(s)\rangle\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

直接解释: 在$[s, s+\mathrm{d}s]$这段路程中力场$\mathbf{F}$对质点所做的功等于$\mathbf{F}$在点$\mathbf{r}(s)$处的切向力乘以路程长度$\mathrm{d}s$, 即等于$\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)), \mathbf{r}'(s)\rangle \mathrm{d}s$. 再求和(积分)即得总功$W$. $\square$

• **超曲面上的曲面积分计算公式**.

设$n \geq 2, S \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$为开集, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ 是S的光滑参数表示, 即$S = \varphi(D)$且φ在D上为C^1类的单射且满秩, 即$\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t)) > 0$ for all $t \in D$. 设f为S上的实或复值函数. 则

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_D f(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t))}\,\mathrm{d}t.$$

确定单位法向量: 写$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$, 令

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \widehat{\varphi}_i, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t_1, t_2, ..., t_{n-1})}(t) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{pmatrix}_{\text{去掉第}i\text{ 行}}$$

$i = 1, 2, ..., n$, 其中“$\widehat{\varphi}_i$”表示第i项“φ_i”不出现.

由前面关于单位法向量的构造知曲面S在点$x \in S$处的单位法向量可以取为

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t))}}\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{pmatrix}_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t))}}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \widehat{\varphi}_i, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t_1, t_2, ..., t_{n-1})}(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

【在物理力学上的应用】 计算$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$中的一流体通过超曲面S 的流量$Q(S)$.

设开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 向量场

$$x \mapsto \mathbf{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), ..., V_n(x)) \quad \text{在}\Omega\text{上连续}.$$

对比于$n = 3$的情形, 我们可以将此向量场$\mathbf{V}$ 看成是空间区域Ω内的一个稳定流动的流体(即液体或气体)的速度场. 这里“稳定流动”是指速度场$x \mapsto \mathbf{V}(x)$连续. 在Ω内取一块紧的光滑的定向超曲面S (此时有$\sigma(S) < +\infty$). S的定向可以由S上的连续单位

法向量场$\mathbf{n}(x)$ 确定. 假定我们已确定了$\mathbf{n}(x)$ 的方向: 例如当S不是封闭曲面时, $\mathbf{n}(x)$ 在S 上的某点处是从S的一侧指向另一侧, 而当S是封闭曲面时, $\mathbf{n}(x)$ 是从S的内侧指向S的外侧, 等等. 注意: 因S是可定向的, 故$\mathbf{n}(x)$ 在S 上某点处的方向确定后, 它在整个S上各处的方向就都确定了.

现在我们要计算流体沿着单位法方向$\mathbf{n}(x)$穿过曲面S的流量. 这里当$n=2$时, 自然理解为平面流体穿过曲线S的流量.

注: 流量在工程上是指**单位时间内**流经封闭管道或明渠有效**截面**的流体量, 又称瞬时流量. 当流体量以体积表示时称为体积流量; 当流体量以质量表示时称为质量流量. 单位时间通过流管内某一**横截面**的流体的体积, 称为该横截面的体积流量. 简称为流量.

也就是说我们来计算在**单位时间内**有多少流体从曲面S的一侧流到法向量$\mathbf{n}$指向的一侧. 意即我们要计算上述流体在时间区间$[t_0, t_0+h]$内从曲面S的一侧流到法向量$\mathbf{n}$指向的一侧的流量然后除以所用的时间h. 如果让时间间隔h取得很小(如秒), 则流量便在是流体在t_0时刻在曲面S上的瞬时行为. 这就是下面我们使用流体速度$\mathbf{V}(x,t_0)$的原因. 由于对指定的时刻t_0, 在计算过程中, t_0不参与积分, 故将其省略, 而将速度写作$\mathbf{V}(x)$. 需要注意, 按照上述确定的流动方向, 对于S上的大多数点x来说, 流速$\mathbf{V}(x)$与单位法向量$\mathbf{n}(x)$ 成锐角关系, 即$\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle>0$. 这里我们使用“大多数”而不是使用“所有”是因为曲面S可能是弯曲的, 流速$\mathbf{V}(x)$的方向在某些地方也可能有较大偏转从而可能有$\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\le 0$的情况出现. 但是如上所说, 只要$\mathbf{n}(x)$ 在S 上某点处的方向确定了, 例如选取一点$x_0\in S$ 使得$\langle\mathbf{V}(x_0),\mathbf{n}(x_0)\rangle>0$, 那么$\mathbf{n}(x)$在整个$S$上各处的方向就都确定了.

为了计算流量$Q(S)$, 我们对曲面S 作分割

$$P:\quad S=\bigcup_{j=1}^{N}S_j,\quad S_j\ \text{互不重叠}$$

即当$i\neq j$ 时$\sigma(S_i\cap S_j)=0$. 因(明显地)流量$Q(S)$关于S是可加量, 故有

$$Q(S)=\sum_{j=1}^{N}Q(S_j).$$

当$\lambda(P)=\max\limits_{1\le j\le N}\mathrm{diam}(S_j)<<1$ 时, 流速$\mathbf{V}(x)$ 和单位法向量$\mathbf{n}(x)$在每一块S_j上分别近似等于常向量$\mathbf{V}(x_j),\mathbf{n}(x_j)$ 其中$x_j\in S_j$是取定的点. 如果$\mathbf{V}(x_j)$与$\mathbf{n}(x_j)$ 共线且同

向, 则由对流量的描述有$Q(S_j)\approx\sigma(S_j)|\mathbf{V}(x_j)|$ (即底面积乘以高). 对一般情形则是$Q(S_j)$近似等于底面积$\sigma(x_j)$乘以$\mathbf{V}(x_j)$在方向$\mathbf{n}(x_i)$上的投影(**图示**):

$$Q(S_j)\approx\sigma(S_j)\langle\mathbf{V}(x_j),\mathbf{n}(x_j)\rangle.$$

于是得到

$$Q(S)\approx\sum_{j=1}^{N}\langle\mathbf{V}(x_j),\mathbf{n}(x_j)\rangle\sigma(S_j).$$

上式右边是连续函数$x\mapsto\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle$在紧光滑曲面$S$上的Riemann 和. 因此

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{j=1}^{N}\langle\mathbf{V}(x_j),\mathbf{n}(x_j)\rangle\sigma(S_j)=\int_S\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x).$$

于是得到

$$Q(S)=\int_S\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x).\tag{5.2}$$

这就是流速为$\mathbf{V}(x)$的流体从曲面S的一侧流向另一侧(即沿着单位法向$\mathbf{n}(x)$)的流量.

流量的计算: 设S有参数表示$S=\varphi(D),x=\varphi(t),t\in D$, 其中$\varphi$在$D$上为$C^1$类的单射且满秩, 即$\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))>0$ for all $t\in D$. 作换元$x=\varphi(t)$ 并注意单位法向量可表示为

$$\mathbf{n}(x)\Big|_{x=\varphi(t)}=\frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\widehat{\varphi}_i,\cdots,\varphi_n)}{\partial(t_1,t_2,...,t_{n-1})}(t)\mathbf{e}_i$$

从而有

$$\begin{aligned}Q(S)&=\int_S\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\int_D\langle\mathbf{V}(\varphi(t)),\mathbf{n}(\varphi(t))\rangle\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\,\mathrm{d}t\\&=\int_D\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}V_i(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\widehat{\varphi}_i,\cdots,\varphi_n)}{\partial(t_1,t_2,...,t_{n-1})}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意: 如果计算流体沿着与S的指定方向相反的方向的流量, 也即计算沿着$-\mathbf{n}(x)$方向通过S的流量, 则有

$$Q(S)=\int_S\langle\mathbf{V}(x),-\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=-\int_S\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x).\tag{5.3}$$

• **显式超曲面的面积计算公式**.

设显示超曲面为

$$S:\quad x_n=\psi(\widetilde{x}),\quad \widetilde{x}=(x_1,x_2,...,x_{n-1})\in D,\quad \psi\in C^1(D,\mathbb{R}).$$

它也可写成

$$S:\quad x=\varphi(\widetilde{x})=\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \psi(\widetilde{x})\end{pmatrix},\quad \widetilde{x}=(x_1,x_2,...,x_{n-1})\in D.$$

此时有

$$\varphi'(\widetilde{x})^{\tau}\varphi'(\widetilde{x})=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & (\nabla\psi(\widetilde{x}))^{\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I}\\ \nabla\psi(\widetilde{x})\end{pmatrix}.$$

其中梯度$\nabla\psi(\widetilde{x})=\psi'(\widetilde{x})=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\frac{\partial\psi}{\partial x_2},...,\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\right)$是行向量. 据线代数我们有(见后面**【附录】**)

$$\det(\varphi'(\widetilde{x})^{\tau}\varphi'(\widetilde{x}))=1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2=1+\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_i}\Big)^2$$

因此

$$\mathrm{d}\sigma(x)=\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2}\,\mathrm{d}\widetilde{x},\qquad \sigma(S)=\int_D\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2}\,\mathrm{d}\widetilde{x},$$

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x)=\int_D f(\widetilde{x},\psi(\widetilde{x}))\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2}\,\mathrm{d}\widetilde{x}.$$

为了求得S上的连续单位法向量, 可以用上面给出的一般超曲面上的单位法向量的表示公式, 也可以利用隐函数方程的方法得出: 将这曲面写成隐函数方程的解的集合:

$$S=\{x=(\widetilde{x},x_n)\in D\times\mathbb{R}\mid F(x)=0\}\qquad \text{其中}\quad F(x)=\psi(\widetilde{x})-x_n.$$

计算F的梯度:

$$\nabla F(x)=(\nabla\psi(\widetilde{x}),-1),\quad x=(\widetilde{x},x_n).$$

于是S上在点$x=(\widetilde{x},x_n)$ 处的连续单位法向量为

$$\mathbf{n}(x)=\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}=\frac{(\nabla\psi(\widetilde{x}),-1)}{\sqrt{|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2+1}}.$$

一般情形的显式曲面:

$$S:\quad x_i=\psi(\widetilde{x}),\quad \widetilde{x}=(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)\in D,\quad \psi\in C^1(D,\mathbb{R}).$$

它也可写成

$$S:\quad \varphi(\widetilde{x})=(x_1,...,x_{i-1},\psi(\widetilde{x}),x_{i+1},...,x_n),\quad \widetilde{x}=(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)\in D.$$

此时仍有(见后面**【附录】**)

$$\det(\varphi'(\widetilde{x})^{\tau}\varphi'(\widetilde{x}))=1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2.$$

因此

$$\mathrm{d}\sigma(x)=\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2}\,\mathrm{d}\widetilde{x},\qquad \sigma(S)=\int_D\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2}\,\mathrm{d}\widetilde{x},$$

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x)=\int_D f(x_1,...,x_{i-1},\psi(\widetilde{x}),x_{i+1},...,x_n)\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2}\,\mathrm{d}\widetilde{x}.$$

S上的连续单位法向量的确定: 如上, 可将S写成隐函数方程的解的集合:

$$S=\{x\in\Omega\,|\,F(x)=0\}\qquad \text{其中}\quad F(x)=\psi(\widetilde{x})-x_i,$$

$$\Omega=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,\widetilde{x}:=(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)\in D\}.$$

计算F的梯度:

$$\nabla F(x)=\Big(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_{i-1}},-1,\,\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_{i+1}},...,\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_n}\Big)$$

则S上在点$x=(x_1,x_2,...,x_n)$处的连续单位法向量为

$$\mathbf{n}(x)=\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}=\frac{\Big(\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_1},...,\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_{i-1}},-1,\,\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_{i+1}},...,\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial x_n}\Big)}{\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{x})|^2}}$$

其中$\widetilde{x}=(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)\in D$.

• $\mathbb{R}^3$**中参数曲面积分公式的常见表示:**

设

$$S:\quad (x,y,z)=\varphi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in D.$$

此时有

$$\varphi'(u,v)^\tau\varphi'(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&F\\ F&G\end{pmatrix}$$

其中

$$E=\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial y}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\Big)^2,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\quad G=\Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2+\Big(\frac{\partial y}{\partial v}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial v}\Big)^2.$$

此时有

$$\det(\varphi'(u,v)^\tau\varphi'(u,v))=EG-F^2=\Big|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big|^2+\Big|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big|^2+\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|^2$$

其中

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix},\quad \text{等等}.$$

面积元和积分:

$$\mathrm{d}\sigma(z,y,z)=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\qquad \sigma(S)=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

S上的连续单位法向量为(行列式按第一列展开)

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2}}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \mathbf{e}_3 & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\\ &= \frac{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)}{\sqrt{\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2}}\Bigg|_{(u,v)=\varphi^{-1}(x,y,z)}\end{aligned}$$

其中用到行列式性质: 两行交换后行列式反号:

$$-\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}.$$

常用情形: $\mathbb{R}^3$中的球面球坐标换元:

设S 是一个以$R>0$为半径的二维球面$\mathbb{S}^2(R)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=R^2\}$上的一部分. S的参数表示为

$$S:\quad (x,y,z)=(R\sin\theta\cos\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\cos\theta)^\tau,\qquad (\theta,\phi)\in D\subset[0,\pi]\times[0,2\pi].$$

此时有

$$\begin{aligned}&E=R^2,\quad F=0,\quad G=R^2\sin^2\theta\,,\quad \sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\theta,\quad (\theta,\phi)\in D,\\ &\mathrm{d}\sigma=R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad \sigma(S)=R^2\iint_D\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\\ &\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)=R^2\iint_D f(R\sin\theta\cos\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

这公式也可利用特征函数写成

$$\begin{aligned}&\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)=\iint_{\mathbb{S}^2(R)}1_S(x,y,z)f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)\\ &=R^2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}1_S(R\sin\theta\cos\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\cos\theta))\\ &\qquad\qquad\times f(R\sin\theta\cos\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

【**球面积分的显式换元公式**】以上半球面为例. 球面的上半球面为 $\mathbb{S}^2_+(R) := \{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2(R)\,|\,z\ge 0\}$, 它有显式表示

$$z=\psi(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in\overline{D}$$

或写成参数图的形式:

$$\varphi(x,y)=(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2}),\quad (x,y)\in\overline{D}$$

其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<R^2\}$ 是开圆盘. 容易算出

$$\sqrt{1+|\nabla\psi(x,y)|^2}=\sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad (x,y)\in D$$

且$\sigma(\mathbb{S}^2_+(R)\setminus\varphi(D))=0$. 因此由换元公式有

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{S}^2_+(R)} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)=\iint_D f(x,y,\psi(x,y))\sqrt{1+|\nabla\psi(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=R\iint_{x^2+y^2<R^2} f\Big(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2}\Big)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.\end{aligned}$$

如用球坐标换元公式, 则有

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{S}^2_+(R)} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)\\&=R^2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\mathbf{1}_{\{\cos\theta\ge 0\}}f(R\sin\theta\cos\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\&=R^2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}f(R\sin\theta\cos\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

【**类似的例子**】设函数$\psi,g\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ 其中$g\ge 0$ 且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y)=+\infty$. 求曲面$z=\psi(x,y)$ 被柱面$g(x,y)=C$ 截下的部分的面积, 其中$C>0$为常数.

【解】所谓"被截下的部分", 数学上表示就是曲面$z=\psi(x,y)$上满足$g(x,y)\le C$的那块曲面S. [注意$g\ge 0$.] 因此这块显式曲面可表示为

$$S:\quad z=\psi(x,y),\quad (x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)\le C\}.$$

根据显式曲面面积的计算公式有

$$\sigma(S)=\iint_{(x,y)\in D}\sqrt{1+|\nabla\psi(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由对g的假设易见D是紧集, 因此

$$\sigma(S)\le \max_{(x,y)\in D}\sqrt{1+|\nabla\psi(x,y)|^2}\,m(D)<+\infty.$$

【**例**】计算球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被柱面$x^2+y^2=ax$所截下的部分S的面积$\sigma(S)$.

【**解**】易见S关于分量z对称, 即$(x,y,z)\in S\iff(x,y,-z)\in S$.

令$S_+=\{(x,y,z)\in S\,|\,z\ge 0\}$. 则有$\sigma(S)=2\sigma(S_+)$.

易见S_+是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$被圆柱面$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$所截下的部分. 根据上面的分析我们有

$$\begin{aligned}
\sigma(S_+) &= \iint_{(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}}\sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint_{x^2+y^2\le ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\ (x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\ )\\
&= \iint_{(r,\theta)\in[0,a]\times[-\pi,\pi],\,r^2\le ar\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&= \iint_{(r,\theta)\in[0,a]\times[-\pi/2,\pi/2],\,r\le a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&= a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r=2a\int_0^{\pi/2}\Big(-(a^2-r^2)^{1/2}\Big|_{r=0}^{r=a\cos\theta}\Big)\mathrm{d}\theta\\
&= 2a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=a^2(\pi-2).
\end{aligned}$$

因此所求面积为$\sigma(S)=2a^2(\pi-2)$. □

• **用球极投影计算单位球面上的积分:**

设$n\ge 2$, $\mathbb{S}^{n-1}=\mathbb{S}^{n-1}(1)=\partial B(0,1)$ 为单位球面. 取$D=\mathbb{R}^{n-1}$, φ 为球极投影$\varphi:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-\mathbf{e}_n\}$,

$$\varphi(t)=\Big(\frac{2t}{1+|t|^2},\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}\Big),\qquad t=(t_1,t_2,...,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

易见φ 是单射且计算得到(见前面【**重要例子(球面、球极投影及应用)**】)

$$\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}=\Big(\frac{2}{1+|t|^2}\Big)^{n-1}.$$

由$\varphi(\mathbb{R}^{n-1})=\mathbb{S}^{n-1}\setminus\{-\mathbf{e}_n\}$ 可知$\mathbb{S}^{n-1}\setminus\varphi(\mathbb{R}^{n-1})=\{-\mathbf{e}_n\}$ 是单点集. 因此有
$\sigma((\mathbb{S}^{n-1}\setminus\varphi(\mathbb{R}^{n-1}))=0$. 应用上述换元公式定理便有

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(x)\mathrm{d}\sigma(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f\Big(\frac{2t}{1+|t|^2},\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}\Big)\Big(\frac{2}{1+|t|^2}\Big)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

例如对于$n=2$ 有

$$\int_{x^2+y^2=1} f(x,y)\mathrm{d}l(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

对于$n=3$ 有

$$\begin{aligned}&\iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)\\&=\iint_{\mathbb{R}^2} f\Big(\frac{2u}{1+u^2+v^2},\frac{2v}{1+u^2+v^2},\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\Big)\Big(\frac{2}{1+u^2+v^2}\Big)^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

【例(旋转体的侧面积)】 设$f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$. 求曲线$y=f(x)$ 绕x-轴一周后形成的曲面S的面积.

【解】从xyz-直角坐标中不难看出对于S上的任一点(x,y,z) 有关系式: $y^2+z^2=f(x)^2$. 因此S 可以表示成

$$S=\{(x,y,z)\in[a,b]\times\mathbb{R}^2 \mid y^2+z^2=f(x)^2\}.$$

易见$(x,y,z)\in S \iff (x,y,-z)\in S$. 因此若$S$分解成不重叠的上下两块曲面: $S=S_+\cup S_-$,

$$S_+=\{(x,y,z)\in S\,|\,z\ge 0\},\quad S_-=\{(x,y,z)\in S\,|\,z\le 0\}.$$

则由对称性有$\sigma(S_-)=\sigma(S_+)$ 从而有

$$\sigma(S)=\sigma(S_+)+\sigma(S_-)=2\sigma(S_+).$$

下面计算$\sigma(S_+)$. 易见S_+ 有显式表示:

$$\begin{aligned}&S_+:\quad z=z(x,y)=\sqrt{f(x)^2-y^2},\quad (x,y)\in D,\\&\text{其中}\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\, y\in[-|f(x)|,|f(x)|]\,\}.\end{aligned}$$

由于零面积集对面积无贡献, 故在计算时只需考虑S_+中坐标满足$|y|<|f(x)|$的点. 此时计算:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-y^2}},\quad \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\\&\Longrightarrow 1+\Big(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\Big)^2=\frac{f(x)^2(1+(f'(x))^2)}{f(x)^2-y^2}.\end{aligned}$$

于是有

$$\sigma(S_+) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2)}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b 1_{\{|f(x)|>0\}}|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2)}\left(\int_{-|f(x)|}^{|f(x)|}\frac{1}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

内层积分计算:

$$R>0 \implies \int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \arcsin t\Big|_{t=-1}^{t=1} = \pi.$$

所以

$$\sigma(S_+) = \pi\int_a^b 1_{\{|f(x)|>0\}}|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2)}\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2)}\,\mathrm{d}x.$$

最后由$\sigma(S)=2\sigma(S_+)$得到

$$\sigma(S) = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2)}\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

【例(球壳状的物体对质点的引力)】设有一个球壳状的均匀物体$S\subset\mathbb{R}^3$, 球壳很薄, 其厚度忽略不计, 故可将这物体看成球面, 即$S=\mathbb{S}^2(R)$. 设有一质点$\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3$ 其质量为m. 求这物体S对这个质点$\mathbf{p}$ 的引力$\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}}$.

【解】回忆万有引力公式：位于空间$\mathbf{r}_1$处的质量为M_1的质点对于位于空间$\mathbf{r}_2$处的质量为M_2的质点的引力等于

$$\mathbf{F}_{1\leftarrow 2} = -GM_1M_2\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} = GM_1M_2\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$$

其中系数上的负号“$-$”表示是引力(而不是斥力), $G>0$是万有引力常数.

由题中的说明知可设球壳为球面$\mathbb{S}^2(R)$ (因此球壳中心为坐标原点$\mathbf{0}=(0,0,0)$). 设那个质量为m的质点位于正z-轴处, 即$\mathbf{p}=(0,0,L), L>0$. 对于球面$\mathbb{S}^2(R)$上的任意一点$\mathbf{r}=(x,y,z)$, 球面上以该点为中心的面积为$\mathrm{d}\sigma(\mathbf{r})$的微小圆片的质量等于$\rho_0\mathrm{d}\sigma(\mathbf{r})$. 由万有引力公式知, 这微小圆片对质点$\mathbf{p}$ 的引力等于

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mathbf{r}\leftarrow\mathbf{p}} &= G\rho_0\mathrm{d}\sigma(\mathbf{r})m\frac{\mathbf{r}-\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{p}|^3}\\ &= G\rho_0 m\frac{(x,y,z-L)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)}{(x^2+y^2+(z-L)^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

因力是叠加量, 故对$\mathbf{F}_{\mathbf{r}\leftarrow\mathbf{p}}$取积分即知所求的引力等于　　(注意: 向量的积分等于该向量的每个分量积分后构成的向量)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}} &= \iint_{\mathbb{S}^2(R)} G\rho_0 m \frac{(x,y,z-L)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)}{(x^2+y^2+(z-L)^2)^{3/2}} \\
&= \Big(0,\,0,\,G\rho_0 m \iint_{\mathbb{S}^2(R)} \frac{(z-L)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)}{(x^2+y^2+(z-L)^2)^{3/2}}\Big) \\
&= G\rho_0 m \iint_{\mathbb{S}^2(R)} \frac{(z-L)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)}{(x^2+y^2+(z-L)^2)^{3/2}}\mathbf{e}_3,
\end{aligned}
$$

$\mathbf{e}_3=(0,0,1)$, 其中用到球面的对称性和奇函数的积分等于零.

作球坐标换元计算:

$$
\begin{aligned}
& G\rho_0 m \iint_{\mathbb{S}^2(R)} \frac{(z-L)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)}{(x^2+y^2+(z-L)^2)^{3/2}} \\
&= G\rho_0 m \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{(R\cos(\theta)-L)R^2\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{(R^2+L^2-2RL\cos(\theta))^{3/2}} \\
&= G\rho_0 m 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{(R\cos(\theta)-L)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta}{(R^2+L^2-2RL\cos(\theta))^{3/2}} \\
&= G\rho_0 m 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} \frac{(Rt-L)\mathrm{d}t}{(R^2+L^2-2RLt)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

计算积分: 当$R=L$时,

$$
I(R,L) := \int_{-1}^{1} \frac{(Rt-L)\mathrm{d}t}{(R^2+L^2-2RLt)^{3/2}} = -\frac{1}{2^{3/2}L^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{L^2}.
$$

当$R\neq L$时, 作换元$s=(R^2+L^2-2RLt)^{1/2}$. 则$t=\frac{R^2+L^2-s^2}{2RL}$,

$$
\begin{aligned}
I(R,L) &= \int_{-1}^{1} \frac{(Rt-L)\mathrm{d}t}{(R^2+L^2-2RLt)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2RL^2}\int_{-|R-L|}^{R+L}\Big(\frac{R^2-L^2}{s^2}-1\Big)\mathrm{d}s = \frac{\min\{R,L\}}{RL^2}\Big(\frac{R-L}{|R-L|}-1\Big)
\end{aligned}
$$

其中用到等式

$$
R+L-|R-L| = 2\min\{R,L\}.
$$

由此得到

$$
I(R,L) = -\frac{2}{L^2}\quad \text{if}\;\; R<L; \qquad I(R,L)=0 \quad \text{if}\;\; R>L.
$$

最后令M为球壳的质量, 则由于球壳的质量密度是均匀的, 有$M=4\pi R^2\rho_0$. 代入以上计算我们得到

$$
\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}} = \begin{cases} -GmM\frac{1}{L^2}\mathbf{e}_3 & \text{if}\quad L>R \\ -\frac{1}{2}GmM\frac{1}{L^2}\mathbf{e}_3 & \text{if}\quad L=R \\ \mathbf{0} & \text{if}\quad L<R. \end{cases}
$$

点评:

(1) 最后这个$\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}}=\mathbf{0}$ (零向量) 应该理解为: 当质点$\mathbf{p}$被球壳严格包围时, 球壳对它的引力由于互相抵消而等于零.

(2) 我们看到这个引力$\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}}$对于质点距球心的距离$L$的变化来说有大间断。

(3) 当质点$\mathbf{p}$位于球壳之外时(即$L>R$时), 所得结果$\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}}=-GmM\frac{1}{L^2}\mathbf{e}_3$ 等效于一个质量为M的位于球心(原点)的质点对于质点$\mathbf{p}$的引力。 □

【注】我们知道, 库伦力(一种排斥力) 与牛顿引力的结构完全一样只是方向相反. 因此这一例题的解法对于库伦力完全适用, 因此只需在结果中把负号换成正号.

【附录】一类特殊矩阵的行列式计算.

设$n\ge 2, \mathrm{I}=\mathrm{I}_{n-1}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ 为单位阵, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{n-1}$ 为行向量. 则有

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathbf{a}^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I}\\ \mathbf{a}\end{pmatrix}\right)=1+|\mathbf{a}|^2.$$

一般地, 设$\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{k-1}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^{n-k}$ 为行向量. 则

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathbf{a}^\tau & 0\\ 0 & \mathbf{b}^\tau & \mathrm{J}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0\\ \mathbf{a} & \mathbf{b}\\ 0 & \mathrm{J}\end{pmatrix}\right)=1+|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$$

其中$\mathrm{I}=\mathrm{I}_{k-1}\in\mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}, \mathrm{J}=\mathrm{I}_{n-k}\in\mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ 为单位阵.

【证】由矩阵块乘法则有

$$\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathbf{a}^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I}\\ \mathbf{a}\end{pmatrix}=\mathrm{I}+\mathbf{a}^\tau\mathbf{a}.$$

取正交阵$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得$\mathbf{a}\mathrm{A}=|\mathbf{a}|\mathbf{e}_1$ 其中$\mathbf{e}_1=(1,0,...,0)$. 则有

$$\mathrm{A}^\tau(\mathrm{I}+\mathbf{a}^\tau\mathbf{a})\mathrm{A}=\mathrm{I}+(\mathbf{a}\mathrm{A})^\tau\mathbf{a}\mathrm{A}=\mathrm{I}+|\mathbf{a}|^2\mathbf{e}_1^\tau\mathbf{e}_1=\mathrm{diag}\{1+|\mathbf{a}|^2,1,...,1\}.$$

两边取行列式得到

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathbf{a}^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I}\\ \mathbf{a}\end{pmatrix}\right)=\det(\mathrm{I}+\mathbf{a}^\tau\mathbf{a})=\det(\mathrm{A}^\tau(\mathrm{I}+\mathbf{a}^\tau\mathbf{a})\mathrm{A})=1+|\mathbf{a}|^2.$$

第二个等式的证明可以归结为第一个: 两者之间只差一个(初等)正交变换. 令

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{J}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}=(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

则

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0\\ \mathbf{a} & \mathbf{b}\\ 0 & \mathrm{J}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & \mathrm{J}\\ \mathbf{a} & \mathbf{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{I}_{n-1}\\ \mathbf{c}\end{pmatrix},\qquad \mathrm{P}^{\tau}\mathrm{P}=\mathrm{I}_n$$

从而有

$$\begin{pmatrix}\mathrm{I}_{n-1} & \mathbf{c}^{\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I}_{n-1}\\ \mathbf{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathbf{a}^{\tau} & 0\\ 0 & \mathbf{b}^{\tau} & \mathrm{J}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0\\ \mathbf{a} & \mathbf{b}\\ 0 & \mathrm{J}\end{pmatrix}.$$

因$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$, 故从第一个等式即得第二个等式. $\square$

§11.4-5 作业题

1. 计算曲线积分: 以下$\mathrm{d}s=\mathrm{d}s(x,y)$ 或$\mathrm{d}s(x,y,z)$ 为弧长测度元.

$$I_1=\int_\Gamma z\mathrm{d}s,\quad \Gamma:\ \text{圆锥螺线}\ (x,y,z)=(t\cos t,t\sin t,t),\ t\in[0,2\pi].$$
$$I_2=\int_\Gamma y^2\mathrm{d}s,\quad \Gamma:\ \text{旋轮线的一拱}\ (x,y)=a(t-\sin t,1-\cos t),\ t\in[0,2\pi],a>0.$$
$$I_3=\int_\Gamma z\mathrm{d}s,\quad \Gamma:\ x^2+y^2=z^2,y^2=ax,\ \text{从}(0,0,0)\text{到}(a,a,\sqrt{2}a)\text{之间的一段},a>0.$$
$$I_4=\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s,\quad \Gamma:\ \text{圆周}\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0;\ \ a>0.$$

[I_4的另一解法是这样的思路: $\int_0^{\pi/2}\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}$.]

2. 设$a\ge b>0$, 考虑椭圆$\Gamma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 令$k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ 称之为椭圆Γ的离心率. 试用a,k 和定积分来表示椭圆的周长$l(\Gamma)$. [注: 与圆周不同, 椭圆的周长没有初等公式.]

3. 求下列曲面的面积:

(1) 锥面$z^2=x^2+y^2$被圆柱面$x^2+y^2=2x$ 截下的部分的上半部(即$z\ge 0$的那部分).

(2) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 截下的部分, 其中$0<b\le a$.

(3) 圆柱面$x^2+y^2=a^2$介于平面$x+z=0$ 和$x-z=0$之间的部分.

(4) 马鞍面$z=xy$被圆柱面$x^2+y^2=1$ 截下的部分.

(5) 旋转抛物面$x^2+y^2=2az$ 被柱面$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 截下的部分$(a>0)$.

(6) 螺旋面

$$\begin{cases} x=r\cos(\theta), \\ y=r\sin(\theta), \qquad (r,\theta)\in[0,a]\times[0,2\pi]. \\ z=h\theta, \end{cases}$$

$a>0, h>0$.

4. 以下$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}\sigma(x,y,z)$ 为面积元. 计算下列曲面积分:

$$I_1=\iint_{\mathbb{S}^2(R)} x^2\mathrm{d}\sigma, \quad R>0.$$

$$I_2=\iint_S \frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x+y)^2} \quad \text{其中}S\text{是四面体 } x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0 \text{ 的边界.}$$

$$I_3=\iint_S |xyz|\mathrm{d}\sigma \quad \text{其中 } S:\ z=x^2+y^2\le 1.$$

$$I_4=\iint_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}\sigma \quad \text{其中}S\text{是锥面}z=\sqrt{x^2+y^2} \text{ 被圆柱面}x^2+y^2=2x$$

截下的部分.

5. 证明Poisson 公式: $(a,b,c$为常数$)$

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\mathrm{d}t.$$

6. 设S_t 是平面$x+y+z=t$ 被球面$x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分. 令$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2)$. 证明当$|t|\le\sqrt{3}$ 时有

$$\iint_{S_t} F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

7. 设Γ 是右半yoz-平面中的C^1 曲线(一维C^1流形): $(y,z)=(\psi(u),\varphi(u)), u\in[a,b], \psi(u)>0$. 让$\Gamma$ 绕z-轴旋转一周得到旋转曲面S, 其参数表示为

$$S:\ (x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(\psi(u)\cos v,\psi(u)\sin v,\varphi(u)),\ (u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi].$$

试给出面积元$\mathrm{d}\sigma$的相应的换元公式, 并证明S的面积

$$\sigma(S)=2\pi\int_a^b \psi(u)\sqrt{(\psi'(u))^2+(\varphi'(u))^2}\,\mathrm{d}u.$$

8. 设在某一时刻空间$\mathbb{R}^3$中一流体以速度$\mathbf{V}(x,y,z)$流过一块曲面

$$S:\quad (x,y,z)=\varphi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in D$$

其中$D\subset\mathbb{R}^2$是开集, $\varphi\in C^1(D,\mathbb{R}^3)$ 为单射且$\mathrm{rank}\varphi'(u,v)=2\ \forall\,(u,v)\in D$. 试给出该流体流过曲面$S$的流量$Q(S)$的计算公式. [可以假定被积函数具有可积性.]

9. 设$2\le n\in\mathbb{N}$, $\sigma=H_{n-1}$ 为$\mathbb{R}^n$上的$n-1$ 维Hausdorff 测度.

(1) 设$r>0$, $\mathbb{S}^{n-1}(r)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|=r\}$. 证明

$$\sigma(\mathbb{S}^{n-1}(r))=r^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\frac{2}{1+|t|^2}\Big)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

(2) 试用单位球面面积$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$的几分之几表示下面积分

$$I=\int_{t\in\mathbb{R}^{n-1},|t|\le 1}\Big(\frac{2}{1+|t|^2}\Big)^{n-1}\mathrm{d}t=?$$

10. 设空间中一物体S 的形状为一块紧的二维曲面$S\subset\mathbb{R}^3$, 物体的质量密度函数为$\rho(x,y,z),(x,y,z)\in S$. 对于位于S 之外的一个质量为m的质点$\mathbf{p}=(a,b,c)$, 试给出S 对于$\mathbf{p}$的引力$\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}}$的计算公式, 并证明

$$|\mathbf{F}_{S\leftarrow\mathbf{p}}|\le GmM\frac{1}{[\mathrm{dist}(\mathbf{p},S)]^2}$$

其中M是物体S的质量.

11. 区间上的余面积公式 (本题是为证明著名的“余面积公式”而作的准备).

设$n\ge 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, $u\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ 满足$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\neq 0$ for all $x=(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)\in\Omega$. 设$Q\subset\Omega$ 为有界闭区间, 作分解$Q=I\times J$, 其中$I\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 是$n-1$维区间, $J\subset\mathbb{R}$是一维区间. 注意由连续函数性质知象集$u(Q)$是$\mathbb{R}$中的有界闭区间.

以下我们将$x=(x_1,x_2,...,x_n)$ 写成$x=(\widetilde{x},x_n)$ 其中$\widetilde{x}=(x_1,x_2,...,x_{n-1})$.

(1) 令

$$D=\{(\widetilde{x},t)\in I\times u(Q)\mid \exists\, x_n\in J\ \text{ s.t. }\ u(\widetilde{x},x_n)=t\}.$$

证明存在唯一的函数$\varphi:D\to J$ 满足

$$u(\widetilde{x},\varphi(\widetilde{x},t))=t\qquad \forall\,(\widetilde{x},t)\in D.$$

此外证明$\varphi \in C^1(D,\mathbb{R})$ 并有

$$\nabla_{\widetilde{x}}\varphi(\widetilde{x},t) = -\frac{\nabla_{\widetilde{x}}u(\widetilde{x},x_n)}{\frac{\partial u(\widetilde{x},x_n)}{\partial x_n}}\Big|_{x_n=\varphi(\widetilde{x},t)}, \quad \frac{\partial \varphi(\widetilde{x},t)}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial u(\widetilde{x},x_n)}{\partial x_n}}\Big|_{x_n=\varphi(\widetilde{x},t)}, \quad (\widetilde{x},t)\in D.$$

这里$\nabla_{\widetilde{x}}$ 表示对变量$\widetilde{x}$的梯度算符.

(2) 证明对任意$f \in L^1(Q)$ 成立换元公式和累次积分:

$$\begin{aligned}\int_Q f(x)\mathrm{d}x &= \int_D f(\widetilde{x},\varphi(\widetilde{x},t))\frac{1}{\left|\frac{\partial u(\widetilde{x},x_n)}{\partial x_n}\right|}\Big|_{x_n=\varphi(\widetilde{x},t)}\mathrm{d}\widetilde{x}\mathrm{d}t \\ &= \int_{u(Q)}\mathrm{d}t\int_{D_t} f(\widetilde{x},\varphi(\widetilde{x},t))\frac{1}{\left|\frac{\partial u(\widetilde{x},x_n)}{\partial x_n}\right|}\Big|_{x_n=\varphi(\widetilde{x},t)}\mathrm{d}\widetilde{x}\end{aligned}$$

其中

$$D_t = \{\widetilde{x}\in I \mid (\widetilde{x},t)\in D\} = \{\widetilde{x}\in I \mid u(\widetilde{x},\varphi(\widetilde{x},t)) = t\}.$$

(3) 令

$$S_t = Q(u=t) = \{x\in Q \,|\, u(x) = t\}, \quad t\in u(Q).$$

证明

$$\int_{S_t}\frac{f(x)}{|\nabla u(x)|}\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{D_t} f(\widetilde{x},\varphi(\widetilde{x},t))\frac{1}{\left|\frac{\partial u(\widetilde{x},x_n)}{\partial x_n}\right|}\Big|_{x_n=\varphi(\widetilde{x},t)}\mathrm{d}\widetilde{x}.$$

这里$\sigma = H_{n-1}$ 为$\mathbb{R}^n$上的$n-1$维Hausdorff 测度.

(4) 证明对任意$f\in L^1(Q)$ 成立余面积公式:

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(Q)}\mathrm{d}t\int_{Q(u=t)}\frac{f(x)}{|\nabla u(x)|}\mathrm{d}\sigma(x).$$

这里∇ 是关于$x=(x_1,x_2,...,x_n)$的梯度算符.

【注】应用这一结果易证对任意固定的$i\in\{1,2,...,n-1\}$, 上述余面积公式对于u 满足$\frac{\partial u}{\partial x_i}\neq 0$ for all $x\in\Omega$ 的情形也成立. 事实上令正交变换$\mathrm{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是将x的第i个分量与第n个对调, 即

$$\mathrm{T}(x_1,x_2,...,x_n)^\tau = (x_1,...,x_{i-1},x_n,x_{i+1},...,x_{n-1},x_i)^\tau.$$

设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, $u\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ 满足$\frac{\partial u}{\partial x_i}\neq 0$ for all $x\in\Omega$. 设$Q\subset\Omega$为有界闭区间. 令$u^*(x) = u(\mathrm{T}x), x\in\mathrm{T}^{-1}(\Omega)$. 则$u^*\in C^1(\mathrm{T}^{-1}(\Omega),\mathbb{R})$ 且$\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_n} = (\frac{\partial u}{\partial x_i})(\mathrm{T}x)\neq 0$ for all

$x \in \mathrm{T}^{-1}(\Omega)$. 注意$\mathrm{T}^{-1}(Q)$ 也是有界闭区间且$\mathrm{T}^{-1}(Q) \subset \mathrm{T}^{-1}(\Omega)$. 据变量替换公式和上面结果有

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{T}^{-1}(Q)} f(\mathrm{T}x)\mathrm{d}x = \int_{u^*(\mathrm{T}^{-1}(Q))} \mathrm{d}t \int_{\mathrm{T}^{-1}(Q)(u^*=t)} \frac{f(\mathrm{T}x)}{|\nabla u^*(x)|}\mathrm{d}\sigma(x).$$

易证$u^*(\mathrm{T}^{-1}(Q)) = u(Q)$, $\mathrm{T}^{-1}(Q)(u^* = t) = \mathrm{T}^{-1}(Q(u = t))$, 并由复合映射微分法有$(u^*)'(x) = (u(\mathrm{T}x))' = u'(\mathrm{T}x)\mathrm{T}$ 从而有 (因T是正交阵)

$$|\nabla u^*(x)| = |(u^*)'(x)| = |u'(\mathrm{T}x)| = |(\nabla u)(\mathrm{T}x)|.$$

于是再由T^{-1}是正交变换得到

$$\int_{\mathrm{T}^{-1}(Q)(u^*=t)} \frac{f(\mathrm{T}x)}{|\nabla u^*(x)|}\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\mathrm{T}^{-1}(Q(u=t))} \frac{f(\mathrm{T}x)}{|(\nabla u)(\mathrm{T}x)|}\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{Q(u=t)} \frac{f(x)}{|\nabla u(x)|}\mathrm{d}\sigma(x).$$

代入上式即得

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(Q)} \mathrm{d}t \int_{Q(u=t)} \frac{f(x)}{|\nabla u(x)|}\mathrm{d}\sigma(x).$$

利用区间上的余面积公式和区域分解不难证明一般区域上的**余面积公式**:

设$n \ge 2, \Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集, $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ 满足$\nabla u(x) \neq 0$ for all $x \in \Omega$. 又设$f \in L^1(\Omega)$. 则有

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(\Omega)} \mathrm{d}t \int_{\Omega(u=t)} \frac{f(x)}{|\nabla u(x)|}\mathrm{d}\sigma(x)$$

.