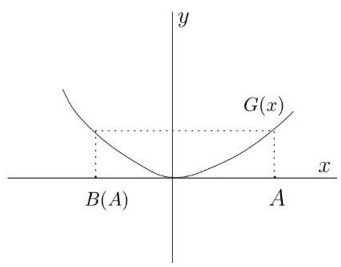
第一讲选作题解答 杨利军 2017年9月20日

<u>软硬弹簧问题</u>: 假设 $g(x)$ 在整个实轴上连续且满足 $xg(x)>0$, $x\neq 0$, 并且 $G(x)\to+\infty$, 当 $x\to\pm\infty$, 这里 $G(x):=\int_0^x g(s)ds$. 证明

1). 对于任意 $A\in(0,+\infty)$, 存在唯一的 $B=B(A)<0$, 使得 $G(B(A))=G(A)$, 如图所示.



2). 对任意 $A>0$, 定义

$$T(A):=\sqrt{2}\int_{B(A)}^{A}\frac{dx}{\sqrt{G(A)-G(x)}},\quad A\in(0,+\infty). \tag{1}$$

并证明

(i) 当函数 $\frac{g(x)}{x}$ 关于 $|x|\in(0,+\infty)$ 严格单调上升时, 则 $T(A)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调下降;

(ii) 当函数 $\frac{g(x)}{x}$ 关于 $|x|\in(0,+\infty)$ 严格单调下降时, 则 $T(A)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调上升.

<u>注记</u>: 二阶方程 $x''+g(x)=0$ 称为振子 (oscillator), 即振动方程. 可以证明, 它的每个解都是周期解. 问题中的 $T(A)$ 即表示解 $x_A(t)$ 的运动周期, 这里 $x_A(t)$ 是方程满足初值条件 $x(0)=A$, $x'(0)=0$ 的唯一解.

当 $g(x)=\sin x$ 时, 方程为单摆的运动方程. 文献里常称函数 $g(x)$ 为弹簧. 特别当函数 $g(x)$ 满足情形 (i) 的条件时, 称它为作硬的 (hard); 而 $g(x)$ 满足情形 (ii) 的条件时, 称它为软的 (soft).

证(i). 根据假设 $xg(x)>0, \forall x\neq 0$ 可知 $g(0)=0$, 对于 $x<0$, $g(x)<0$; 对于 $x>0$, $g(x)>0$. 再根据函数 $G(x)$ 的定义 $G(x)=\int_0^x g(s)ds$ 得 $G'(x)=g(x)<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$. 因此函数 $y=G(x)$ 关于 $x\in(-\infty,0)$ 上有连续可微的反函数 $x=G^{-1}(y)<0$, $y\in(0,+\infty)$. 显然 $B(A)=G^{-1}(G(A))$, $A\in(0,+\infty)$. 并且 $|B(A)|$ 是严格单调上升的 C^1 函数.

(ii) 为了研究 $T(A)$ 的单调性, 我们将 $T(A)$ 的表示式 (1) 改写为如下形式

$$\frac{T(A)}{\sqrt{2}}=\int_0^A\frac{dx}{\sqrt{G(A)-G(x)}}+\int_B^0\frac{dx}{\sqrt{G(B)-G(x)}},\quad A\in(0,+\infty), \tag{2}$$

上式中 $B=B(A)<0$. 对述两个积分作换元变换得

$$\frac{T(A)}{\sqrt{2}}=\int_0^1\frac{Adu}{\sqrt{G(A)-G(Au)}}+\int_0^1\frac{|B|du}{\sqrt{G(B)-G(Bu)}}.$$

于是

$$\frac{T(A)}{\sqrt{2}}=\int_0^1\left[\frac{A}{\sqrt{G(A)-G(Au)}}+\frac{|B|}{\sqrt{G(B)-G(Bu)}}\right]du. \tag{3}$$

对于 $0<A<A_1<+\infty$, 记 $B_1=B(A_1)$. 我们来考虑 $T(A_1)-T(A)$. 利用 Cauchy 中值定理得

$$\frac{G(A)-G(Au)}{G(A_1)-G(A_1u)}=\frac{Ag(A\xi)}{A_1g(A_1\xi)}=\frac{\frac{g(A\xi)}{A\xi}}{\frac{g(A_1\xi)}{A_1\xi}}\frac{A^2}{A_1^2},\quad \xi\in(0,u).$$

同理有

$$\frac{G(B)-G(Bu)}{G(B_1)-G(B_1u)}=\frac{Bg(B\eta)}{B_1g(B_1\eta)}=\frac{\frac{g(B\eta)}{B\eta}}{\frac{g(B_1\eta)}{B_1\eta}}\frac{B^2}{B_1^2},\quad \eta\in(0,u).$$

于是对于情形(i), 当函数 $\frac{g(x)}{x}$ 关于 $|x|\in(0,+\infty)$ 严格单调上升时, 我们有

$$\frac{g(A\xi)}{A\xi}<\frac{g(A_1\xi)}{A_1\xi}\quad 和 \quad\frac{g(B\eta)}{B\eta}<\frac{g(B_1\eta)}{B_1\eta}.$$

由此得

$$\frac{G(A)-G(Au)}{G(A_1)-G(A_1u)}<\frac{A^2}{A_1^2}\quad 和 \quad\frac{G(B)-G(Bu)}{G(B_1)-G(B_1u)}<\frac{B^2}{B_1^2}.$$

进一步得

$$\frac{A_1}{\sqrt{G(A_1)-G(A_1u)}}<\frac{A}{\sqrt{G(A)-G(Au)}},$$
$$\frac{|B_1|}{\sqrt{G(B_1)-G(B_1u)}}<\frac{|B|}{\sqrt{G(B)-G(Bu)}}.$$

于是根据等式 (3) 可知 $T(A_1)<T(A)$, 即 $T(A)$ 严格单调下降. 同理可证, 对于情形(ii), 当函数 $\frac{g(x)}{x}$ 关于 $|x|\in(0,+\infty)$ 严格单调下降时, $T(A)$ 严格单调上升. 证毕.

注一：不难证明, 当 $g''(x)\geq 0$ 但不恒为零时, 条件 (i) 成立, 即函数 $\frac{g(x)}{x}$ 关于 $|x|\in(0,+\infty)$ 严格单调上升. 而当 $g''(x)\leq 0$ 但不恒为零时, 条件 (ii) 成立, 即函数 $\frac{g(x)}{x}$ 关于 $|x|\in(0,+\infty)$ 严格单调下降.

注二：有多种方式证明周期 $T(A)$ 的单调性. 例如在作了积分换元后可直接求导, 然后证明被积函数大于零或小于零. 上述证法比较简洁, 无繁杂计算.