清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程： 微分方程1　　　A 卷　　　　　2017 年 1 月 5 日

说明： (1) 本试卷共有八道大题, 每道题的分值已分别给出. 总分为 110 分. (2) 解答请写在答题纸上. 不必抄题, 只标题号. (3) 书写表达不清楚或不整洁对评分会有负面影响. (4) 若对试题题意有疑问, 可询问主考教师. (5) 鼓励画图来表达解题思想. (6) 函数 $x(t)$ 的导数用符号 $\dot{x}, \ddot{x}$ 等来表示； 而函数 $y(x)$ 的导数用 y', y'' 等来表示；(7) 建议按照先易后难的顺序解答试题； (8) 祝大家考试顺利, 寒假愉快.

一. 求下列方程的通解, 每个小题 5 分.

(1) $y'' + y' = 2x$;

(2) $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$, (提示可观察出特解);

(3) $(e^{-y} - x)y' = 1$;

(4) $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

二. (10分) 考虑 n 阶线性系统 $\dot{x} = A(t)x$, 这里n 阶实方阵 $A(t)$ 假设在 $[0, +\infty)$ 上连续. 进一步假设如下广义积分收敛

$$\int_0^{+\infty} \|A(t)\| dt < +\infty,$$

证明系统的每个解 $x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时均有极限, 即向量值函数 $x(t)$ 的极限 $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ 存在. 这里 $\|A(t)\|$ 是一个矩阵范数.

三. (15分) 设二阶常数矩阵 A 和二维向量值函数 $f(x)$ 定义如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) 计算 e^{Ax}. (ii) 求二维齐次方程组 $u' = Au$ 所有在 $[0, +\infty)$ 上有界的解. (iii) 求非齐次方程组 $u' = Au + f(x)$ 满足初值条件 $u(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ 的解.

四. (15分) 考虑周期线性齐次系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

计算系统的 Floquet 乘子, 判断系统是否存在非零周期解, 并确定系统在区间 $[0,+\infty)$ 上的稳定性.

五. (15分) 记 $\phi(x,\xi,\eta)$ 为初值问题

$$y' = \sin(xy), \quad y(\xi) = \eta$$

的解. 计算解 $\phi(x,\xi,\eta)$ 在初始点 $(\xi,\eta) = (0,0)$ 处的两个偏导数

$$\left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)} \quad \text{和} \quad \left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)}.$$

六. (10分) 考虑二阶线性齐次方程 $\ddot{u} + a(t)u = 0$， 其中函数 $a(t)$ 是开区间 I 上的连续函数. 设$[a,b] \subset I$ 是 I 的一个有界闭子区间. 证明方程存在一个解在 $[a,b]$ 上无零点, 当且仅当方程的每个非零解在 $[a,b]$ 上至多有一个零点.

七. (10分) 计算矩阵指数 e^A 的行列式 $\det e^A$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

八. (15分) 记 $y(x)$ 为 Cauchy 问题 $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$ 的饱和解, 回答以下问题, 并说明理由.

(i) 解 $y(x)$ 的最大存在区间 (α,β) 有界或无界(单边或双边无界)?

(ii) 解 $y(x)$ 是奇函数, 或偶函数, 或不确定?

(iii) 确定解$y(x)$单调区间.

(iv) 显式给出两个 (α,β) 上的函数 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得 $v(x) \le y(x) \le u(x)$, $\forall x \in (\alpha,\beta)$.