第一章，线性泛函

第一节：拓扑空间.

定义：$X \neq \phi$，$\tau \subset 2^X$，设

① $\phi, X \in \tau$

② $G_i \in \tau\ (i \in I)$，则 $\bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$

③ $G_1, G_2, \cdots, G_n \in \tau$，则 $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

则称 τ 为 X 上的拓扑，(X, τ) 称为拓扑空间，$G \in \tau$ 称为开集.

例1：$\tau_1 = \{\phi, X\}$，$\tau_2 = 2^X$

例2：度量空间. $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$

① $d(x,y)=0 \iff x=y$, ② $d(x,y)=d(y,x)$

③ $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

$G\in\tau \iff \forall x\in G, \exists r>0$

$B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}\subset G$

则 τ 为 X 上的拓扑.

定义：(X,τ)，称 (X,τ) 为可度量化的，若 $\exists d$ 为 X 上的度量，使得由 d 定义的开集族与 τ 一致

设 $F\subset X$，F 为闭集，若 $F^c=X\setminus F\in\tau$

① ϕ, X 为闭集，② F_i 为闭集 $(i\in I)$. $\bigcap_{i\in I}F_i$ 闭

③ $F_1\cdots F_n$ 闭，则 $\bigcup_{i=1}^{n}F_i$ 闭

(X, τ) $\rho \subset \tau$ 为拓扑基，若 $\forall G \in \tau$，$\exists G_i \in \rho$ $(i \in I)$

使得 $G = \bigcup_{i \in I} G_i$

例. (X, τ) 可度量化，d. 则

$$\rho = \{ B(x, r) : x \in X, r > 0 \}$$

为拓扑基. $\forall G \in \tau$，$\forall x \in G$，$\exists r_x > 0$

$B(x, r_x) \subset G$，$G = \bigcup_{x \in G} B(x, r_x)$

$x_0 \in X$，U 为 x_0 的一个邻域，若 $\exists V \in \tau$

$x_0 \in V \subset U$，V 为开邻域.

$G \in \tau \iff \forall x \in G$，$\exists x$ 的邻域 $U \subset G$

设 $\mathcal{U}$ 为 x_0 的一族邻域，称 $\mathcal{U}$ 为 x_0 的一个邻域基. 若 $\forall$ x_0 的邻域 U, $\exists V \in \mathcal{U}$, $V \subset U$

例 τ 可度量化, d, 则

$\mathcal{U} = \left\{ B(x_0, \frac{1}{n}) : n \geq 1 \right\}$ 为 x_0 处的一个邻域基.

$\forall$ x_0 的邻域 U, $\exists$ V 开, $x_0 \in V \subset U$

$\exists \delta > 0$ $B(x_0, \delta) \subset V$, $\exists n \geq 1$, $\frac{1}{n} < \delta$

$B(x_0, \frac{1}{n}) \subset B(x_0, \delta) \subset V \subset U$

设 U_1, U_2 为 x_0 处的邻域, 则 $U_1 \cap U_2$ 仍为 x_0 处的邻域. $\exists$ V_1, V_2 开, $x_0 \in V_1 \subset U_1$, $x_0 \in V_2 \subset U_2$

令 $V = V_1 \cap V_2$, 则 V 开, $x_0 \in V \subset U_1 \cap U_2$

定义，(X,τ) 给定，$M \subset X$，$x_0 \in M$ 称为内点，若 $\exists x_0$ 的邻域 $U \subset M$，$\mathring{M}$ 为 M 的所有内点之集，M 的内部

$$\overline{M} = \{ y \in X: \ \forall y \text{ 的邻域 } U,\ U \cap M \neq \phi \}$$

为 M 的闭包

注：$\mathring{M} \subset M$，$M \subset \overline{M}$

性质：
① M 为开集 $\Leftrightarrow M = \mathring{M}$
② M 为闭集 $\Leftrightarrow M = \overline{M}$
③ $(\mathring{M})^c = \overline{M^c}$，$(\overline{M})^c = (M^c)^\circ$

τ 为 Hausdorff 的，若 $\forall x, y \in X$，$x \neq y$，则 $\exists V_x, V_y$ 分别为 x, y 的邻域，$V_x \cap V_y = \phi$

例：可度量化的拓扑空间为Hausdorff的，d

$$x \neq y, \quad B\left(x, \frac{d(x,y)}{4}\right) \cap B\left(y, \frac{d(x,y)}{4}\right) = \phi$$

若(X, τ)可度量化，$M \subset X$

$$x_0 \in \overline{M} \iff \exists x_n \in M, \ x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$$

$(\forall x_0$ 的邻域 U，$\exists N$，$\forall n \geq N$，$x_n \in U)$

若 τ 不可度量化，则 "$\Leftarrow$" 仍然成立

"$\Longrightarrow$" 一般不成立

定义：I中，"≤"为X中某些元素间的一个关系，设

① $i \le i$ ，② $i \le j$，$j \le k$，则 $i \le k$

③ $\forall i, j \in I$，$\exists k \in I$，$i \le k$，$j \le k$

则称I为一个定向集

例：$I = \mathbb{N}$，"≤"为通常的大小关系

$I = \mathbb{R}^2$，$(a_1, a_2) \le (b_1, b_2) \iff a_1 < b_1$ 或者

$a_1 = b_1$，$a_2 \le b_2$ 字典顺序

(X, τ) 给定，I为定向集，$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ 为X中的一个网

若 $x_\alpha \in X$，$x \in X$

称 $x_\alpha \to x$，若 $\forall x$ 的一个邻域U，$\exists \alpha_0 \in I$，$\forall \alpha_0 \le \alpha$

则 $x_\alpha \in U$

例：x_0 处所有的邻域为 Φ，$U, V \in \Phi$，$U \le V \Leftrightarrow V \subseteq U$

$\forall U_1, U_2 \in \Phi$，则 $U_1 \cap U_2 \in \Phi$

$U_1 \le U_1 \cap U_2$，$U_2 \le U_1 \cap U_2$

例：x_0 处所有邻域为 Φ，$\forall U \in \Phi$，固定 $x_U \in U$

则 x_U 为 X 中的网，则 $x_U \to x_0$

Proof：$\forall U$ 为 x_0 的邻域，$\forall U \le V$，则 $V \subset U$

则 $x_V \in V \subset U$，即 $x_V \to x_0$

只取 x_0 的一个邻域基可.

定理: (X,τ), $x_0 \in \overline{M} \Longleftrightarrow \exists$ M 中的网 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$

$x_\alpha \to x_0$

Proof: "$\Rightarrow$": $x_0 \in \overline{M}$, $\forall$ U 为 x_0 的邻域 $U\cap M \neq \phi$

$x_U \in U\cap M$, $x_U \in M$, $x_U \in U$

$x_U \to x_0$

"$\Leftarrow$": 设 $\exists$ M 中的网 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$. $x_\alpha \to x_0$

下证 $x_0 \in \overline{M}$, $\forall$ U 为 x_0 的邻域

$\exists\ \alpha_0 \in I$, $\forall\ \alpha_0 \le \alpha$, 则 $x_\alpha \in U$

$x_{\alpha_0} \in U\cap M$, $U\cap M \neq \phi$

$\Rightarrow x_0 \in \overline{M}$

例: $[a,b]$ 的分划 D: $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$

$\mathcal{D}$ 为 $[a,b]$ 所有的分划, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$

$D_1 \le D_2 \iff D_2$ 为 D_1 的加细

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 有界

D 为 $[a,b]$ 的分划, $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

$\forall\ 1\le i\le n$ $\quad M_i = \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t)$

$m_i = \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t)$, $\quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i M_i$, $D\in\mathcal{D}$, $S(f,D)$ 为 $\mathbb{R}$ 中的网

$S(f,D) \longrightarrow \overline{\int_a^b} f(t)\,dt$ $\qquad s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i m_i$

$\hookrightarrow \underline{\int_a^b}$

f Riemann 可积 $\iff \overline{\int} = \underline{\int}$

定义: (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), $T: X_1 \to X_2$, $x_0 \in X_1$

称 T 在 x_0 处连续, 若 $\forall U$ 为 Tx_0 的邻域, $\exists V$ 为 x_0 的邻域, 使得 $T(V) = \{Tx : x \in V\} \subset U$

若 T 处处连续, 则称 T 为连续映射.

注1: T 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_\alpha \in X_1$ 为网, $x_\alpha \to x_0$

则 $Tx_\alpha \to Tx_0$

Proof: "$\Longrightarrow$": 设 T 在 x_0 处连续, $x_\alpha \in X_1$, $x_\alpha \to x_0$

下证 $Tx_\alpha \to Tx_0$, 设 U 为 Tx_0 的邻域, $\exists V$ 为 x_0 的邻域, $T(V) \subset U$

$\exists \alpha_0$, $\forall \alpha_0 \le \alpha$, $x_\alpha \in V$, $Tx_\alpha \in U$

即 $Tx_\alpha \to Tx_0$

$\Leftarrow$：若T不在x_0处连续，则$\exists$ U为Tx_0的邻域

$\forall V$为x_0的邻域，$T(V)\not\subset U$，$\exists x_V\in V$

$Tx_V\notin U$，$x_V\to x_0$

但$Tx_V\not\to Tx_0$

注2： T为连续映射 $\Leftrightarrow$ $\forall x_\alpha\in X$，$\forall x$，设$x_\alpha\to x$

则$Tx_\alpha\to Tx$

$\Leftrightarrow$ $\forall G\in\tau_2$，$T^{-1}(G)=\{x\in X_1: Tx\in G\}$

$\in\tau_1$

$\Leftrightarrow$ $\forall F\subset X_2$为闭集，

$T^{-1}(F)$为X_1的闭集

ρ为τ_2的一个子基

$\Leftrightarrow$ $\forall G\in\rho$，$T^{-1}(G)\in\tau_1$

设 (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) 为拓扑空间 $T: X_1 \to X_2$ 双射

T 为同胚 $\Leftrightarrow$ T, T^{-1} 都连续

T 为同胚 $\Leftrightarrow$ $\forall x_\alpha \in X_1$, 若 $x_\alpha \to x$

则 $Tx_\alpha \to Tx$

$\forall y_\alpha \in X_2$, $y_\alpha \to y$

则 $T^{-1}y_\alpha \to T^{-1}y$

特别的, X 中, τ_1, τ_2 为 X 上的拓扑

$\tau_1 = \tau_2$ $\Leftrightarrow$ $Id_X: (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ 同胚

$x \longmapsto x$

$\Leftrightarrow$ $\forall x_\alpha \in X$, $x_\alpha \xrightarrow{\tau_1} x \Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{\tau_2} x$

$x_\alpha \xrightarrow{\tau_2} x \Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{\tau_1} x$

$X \neq \emptyset$, τ_1, τ_2 为 X 上的拓扑, τ_1 弱于 $\tau_2 \iff \tau_1 \subset \tau_2$

例: $\{\emptyset, X\}$ 最弱, 2^X 最强

例: 设 $(\tau_i)_{i \in I}$ 为 X 上的一族拓扑, 则 $\bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$ 仍为 X 上的拓扑.

$G_j \in \bigcap_{i \in I} \tau_i$, $j \in J$, 即 $\forall i \in I$

$G_j \in \tau_i \qquad \bigcup_{j \in J} G_j \in \tau_i$

则 $\bigcup_{j \in J} G_j \in \bigcap_{i \in I} \tau_i$

$X \neq \emptyset$，$\Phi \subset 2^X$，则存在一个包含 Φ 的最弱的拓扑 τ

τ 称为由 Φ 生成的拓扑　　唯一的

Proof: Σ 为所有包含 Φ 的拓扑，$2^X \in \Sigma$

$\tau = \bigcap_{\rho \in \Sigma} \rho$ 为仍 X 上的拓扑，$\Phi \subset \bigcap_{\rho \in \Sigma} \rho$

τ 为包含 Φ 的拓扑，最弱！

$\forall$ τ' 包含 Φ 的拓扑．$\tau' \in \Sigma$　　$\tau \subset \tau'$

τ 为包含 Φ 最弱的拓扑．

定理：$X \neq \phi$，$\Phi \subset 2^X$，$\bigcup_{A \in \Phi} A = X$，则形如

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n, \quad n \geq 1, \quad S_i \in \Phi$$

构成了由 Φ 生成的拓扑的拓扑基. G 为开集

$$\Leftrightarrow G = \bigcup_{i \in I} \left[S_1^{(i)} \cap \cdots \cap S_{n_i}^{(i)} \right], \quad \tau$$

$$S_j^{(i)} \in \Phi, \quad n_i \geq 1$$

① $\phi, X \in \tau$

② $G_j \in \tau$, $(j \in J)$, $\bigcup_{j \in J} G_j \in \tau$

③ $G_1 \cdots G_n \in \tau$，则 $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

$$G_1 = \bigcup_{i \in I} [S_1^{(i)} \cap \cdots \cap S_{n_i}^{(i)}]$$

$$G_2 = \bigcup_{j \in J} [T_1^{(j)} \cap \cdots \cap T_{m_j}^{(j)}]$$

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{i \in J} [S_1^{(i)} \cap \cdots \cap S_{n_i}^{(i)} \cap T_1^{(j)} \cap \cdots \cap T_{m_j}^{(j)}]$$

$$\in \tau$$