应用统计

第10讲　似然比检验和随机性检验

假设检验的两类错误

	原假设成立	原假设不成立
接受	√	第二类错误（受伪）
拒绝	第一类错误（拒真）	√

上述α称为第一类错误（拒真）概率，

第二类错误（受伪）概率 $\beta = P(\text{接受} H_0 \mid H_1 \text{为真}) = P_\theta(X \in \overline{W})$，$\theta \in \Theta_1$。

功效函数(power function)

一个拒绝域为W的检验的功效函数定义为 $\beta(\theta)=P_\theta(X\in W)$

例 设 $X\sim b(5,p)$,考虑假设检验问题 $H_0: p\le\frac{1}{2}$ vs $H_1: p>\frac{1}{2}$

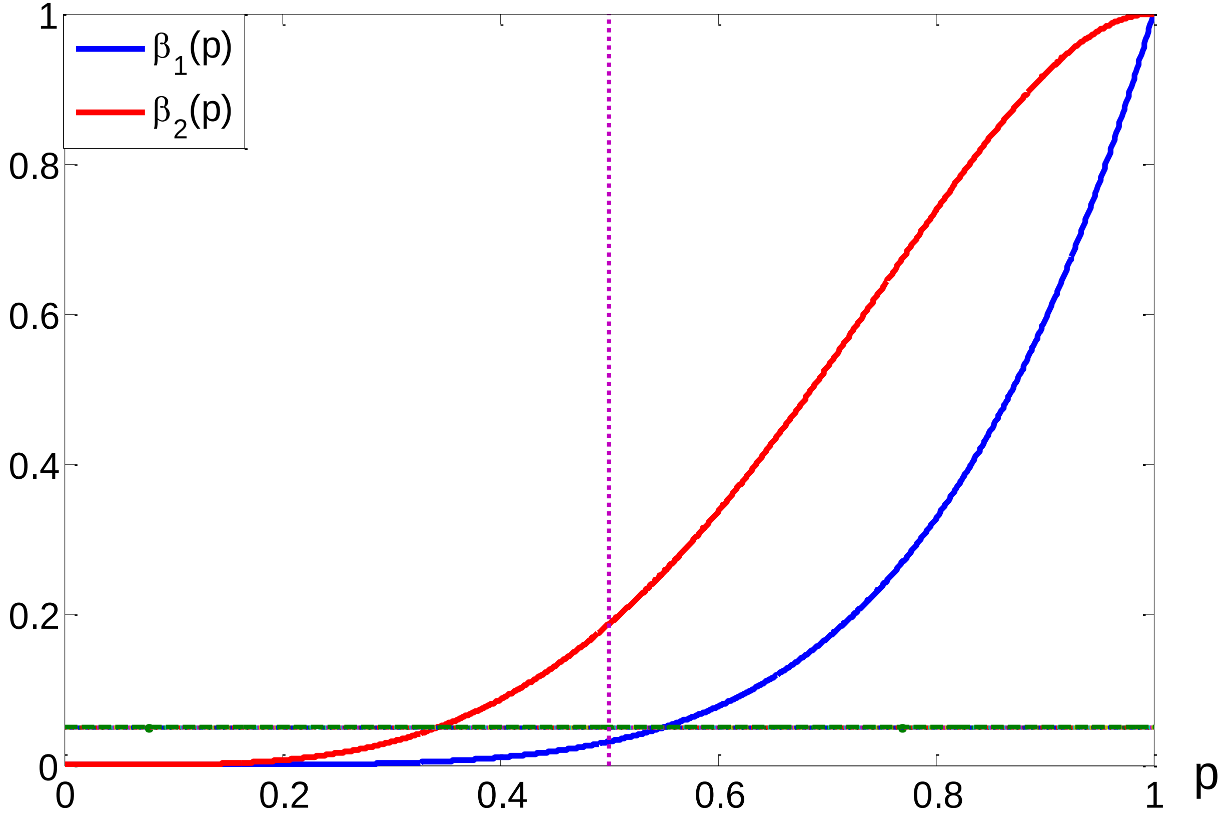
检验1： $W_1=\{X=5\}$

检验2： $W_2=\{X=4,\ X=5\}$

则功效函数 $\beta_1(p)=P_p(X\in W_1)=P_p(X=5)=p^5$

$$\beta_2(p)=P_p(X\in W_2)=P_p(X=4\ \cup X=5)$$

$$=5\cdot p^4(1-p)+p^5$$



β1(p)
β2(p)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p

例 女士品茶问题

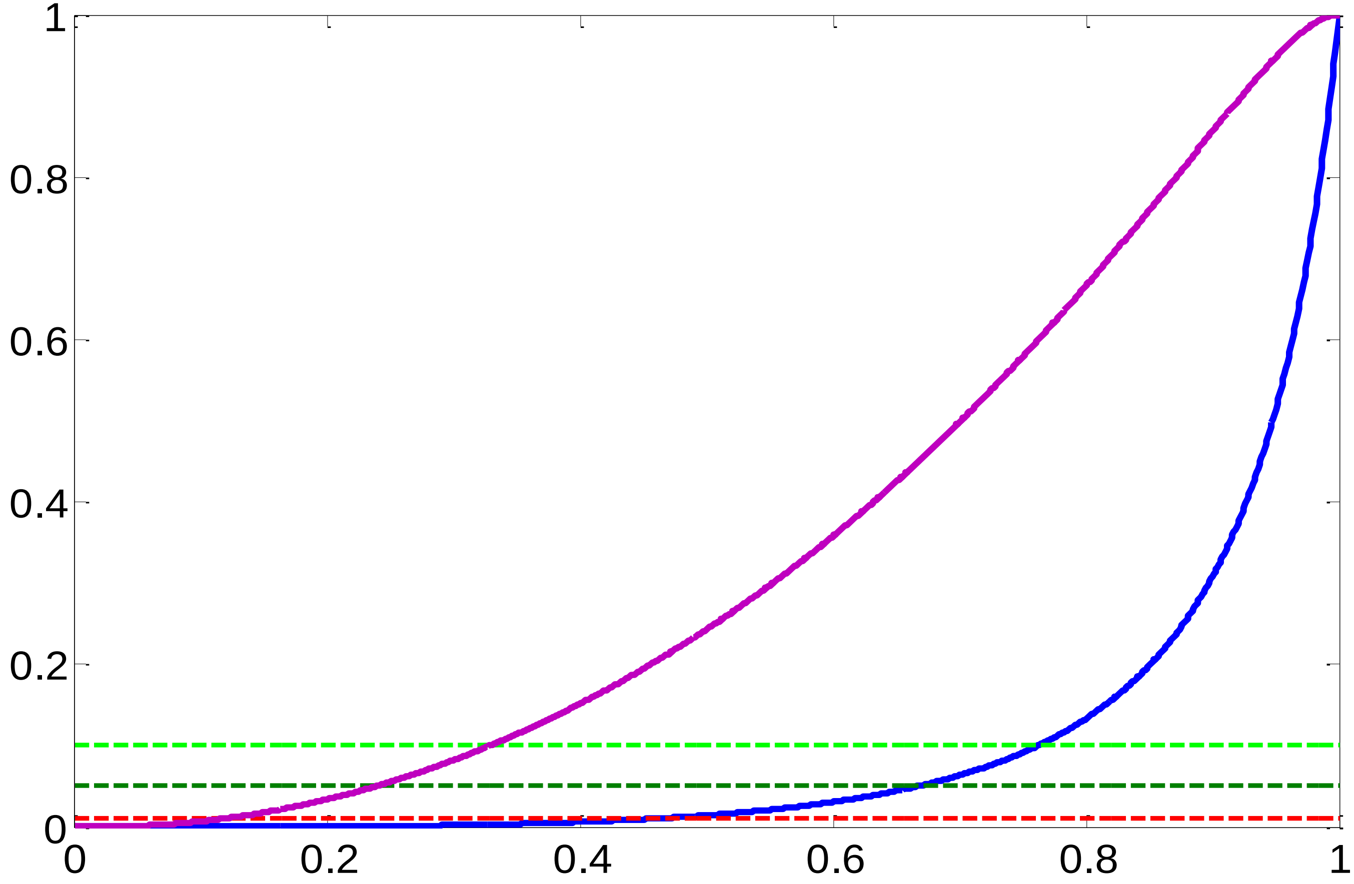
品尝正确的概率为 p，　$H_0: p \le \frac{1}{2}$ vs $H_1: p > \frac{1}{2}$

8杯饮料中MT与TM各4杯，选出其中的4杯MT，正确的杯数 X，

检验：$W = \{X = 4\}$

$$\beta(p) = P_p(X \in W) = P_p(X = 4)$$

$$= \frac{p^4}{(1-p)^4 + 16 \cdot p(1-p)^3 + 36 \cdot p^2(1-p)^2 + 16 \cdot p^3 (1-p) + p^4}$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

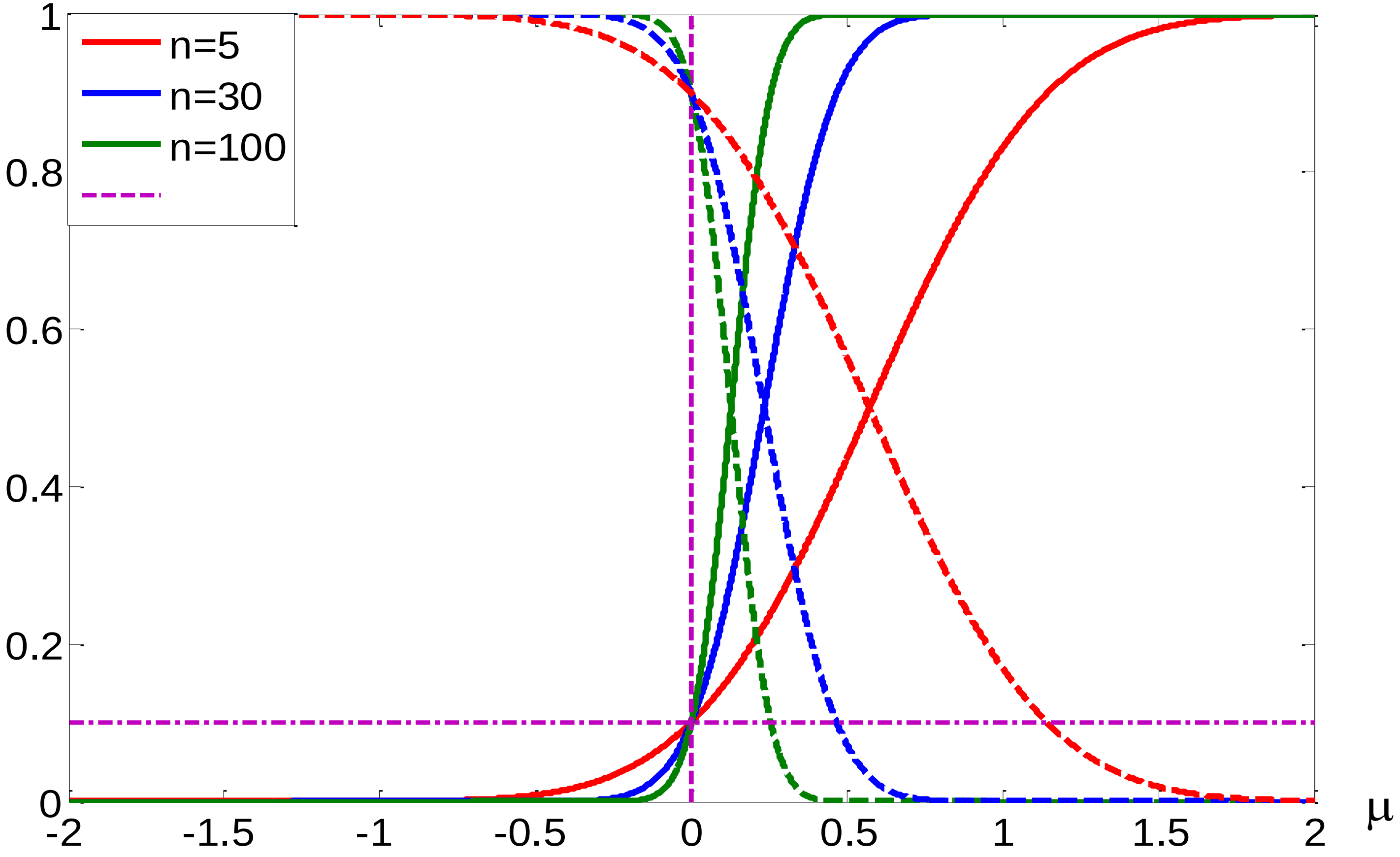
例 正态分布功效函数

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，σ^2已知，考虑假设检验问题 $H_0:\mu\le\mu_0$ vs $H_1:\mu>\mu_0$ ，

如果$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}>u_{1-\alpha}$，则拒绝 H_0，常数$u_{1-\alpha}$为标准正态分布的$1-\alpha$分位点，$u_{0.90}=1.28$。这个检验的功效函数

- $\beta(\mu)=P_\mu(X\in W)=P_\mu\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}>u_{1-\alpha}\right)$
- $=P_\mu\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>u_{1-\alpha}+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=P_\mu\left(Z>u_{1-\alpha}+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

设$\mu_0 = 0$，$\sigma^2 = 1$，取$\alpha = 0.1$，$n = 5, 30, 100$



真实水平为α的检验

设$0 \le \alpha \le 1$，如果$\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta) = \alpha$，称一个功效函数为$\beta(\theta)$的检验是真实水平为α的检验。

设$0 \le \alpha \le 1$，如果$\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta) \le \alpha$，称一个功效函数为$\beta(\theta)$的检验是水平为α的检验。

例如： $H_0: \mu \le \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$ ， 如果$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma} > u_{1-\alpha}$，拒绝 H_0。

真实水平为α的检验

再看女士品茶问题

品尝正确的概率为 p， $H_0: p \le \frac{1}{2}$ vs $H_1: p > \frac{1}{2}$

8杯饮料中MT与TM各4杯，选出其中的4杯MT，正确的杯数 X，

检验：$W = \{X = 4\}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{70} & \frac{16}{70} & \frac{36}{70} & \frac{16}{70} & \frac{1}{70} \end{pmatrix}$

$\sup\limits_{p \le \frac{1}{2}} \beta(p) \le 0.05$，是水平为0.05的检验。显著性水平

未被足量地使用

检验函数和随机化检验

定义函数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mathbf{1}, \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{W}\\ \mathbf{0}, \boldsymbol{x}\notin \boldsymbol{W}\end{cases}$，是拒绝域的示性函数，称为检验函数。

因为拒绝域 $\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})=\mathbf{1}\}$,给出了这样一个函数，就相当于给出了一个检验。

检验的势函数 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X}\in \boldsymbol{W})=\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X})\big)$

$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$仅取**0,1**两个值时，为非随机化检验；否则为随机化检验。

检验函数 $\phi(x)=\begin{cases}1, & X=4\\ r, & X=3\\ 0, & X<3\end{cases}$

则犯第一类错误的概率为

$$\alpha(p)=E_p(\phi(X))\le P\left(X=4|\,p=\frac{1}{2}\right)+r\cdot P\left(X=3|\,p=\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{70}+\frac{16}{70}r$$

- 为使显著性水平$\alpha=0.05$被足量地使用，
- $\frac{1}{70}+\frac{16}{70}r=0.05\ \Rightarrow\ r=0.156$

随机化检验的实施过程

- 随机化检验的实施过程为：
- 若$X=4$则拒绝原假设；若$X=3$，则先做一个成功概率为0.156的伯努利试验，如果试验成功，则拒绝原假设，否则接受原假设。
- 这样就补偿了未被足量地使用的显著性

似然比检验（likehood ratio test，LRT）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体 X 的样本，总体的概率函数为$f(x,\theta)$，似然函数 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \theta)$

对假设检验问题 $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$，引入似然比统计量

- $\lambda(x) = \frac{sup_{\theta \in \Theta_0} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)}{sup_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)}$

- 拒绝域形式为$\{x: \lambda(x) \le c\}$的检验叫做似然比检验（**LRT**）。

例 正态LRT，方差已知

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2已知，考虑检验 $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$。

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \mu) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x_k - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu)^2\right]\right)$$

例 正态LRT，方差已知

- $sup_{\mu=\mu_0} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu_0)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2\right]\right)$$

- $sup_{\mu\in R} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2\right]\right)$

- $\lambda(x) = \frac{sup_{\mu=\mu_0} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu)}{sup_{\mu\in R} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu)} = exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$

- 拒绝域形式为$\{x: \lambda(x) \le c\}$, $\left\{x: |\bar{x} - \mu_0| \ge \sqrt{\frac{-2\sigma^2 lnc}{n}}\right\}$

例 正态LRT，方差未知

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2未知，考虑检验 $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$。

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \mu) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

对数似然函数为

$$\ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]$$

$$= n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$$

例 正态LRT，方差未知

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$$

分别对μ,σ^2求偏导，并令其为0

$$\frac{\partial\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)=0$$

$$\frac{\partial\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)}{\partial\sigma^2}=\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2=0$$

$$\hat{\mu}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\bar{x},\qquad \widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

例 正态LRT，方差未知

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu. \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu)^2\right]$$

$$sup_{\mu\in R,\sigma^2\geq 0} = \left(2\pi\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$$

$\mu = \mu_0$时， $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_0)^2$,

$$sup_{\mu=\mu_0} = \left(2\pi\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_0)^2\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$$

例 正态LRT，方差未知

$$\lambda(x)=\frac{sup_{\mu=\mu_0,\sigma^2\geq 0}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu.\sigma^2)}{sup_{\mu\in R,\sigma^2\geq 0}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu.\sigma^2)}=\frac{\left(2\pi\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(x_k-\mu_0)^2\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{n}{2}}}{\left(2\pi\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(x_k-\overline{x})^2\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{n}{2}}}$$

$$=\left(\frac{\sum_{k=1}^n(x_k-\mu_0)^2}{\sum_{k=1}^n(x_k-\overline{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{\sum_{k=1}^n(x_k-\overline{x})^2+\sum_{k=1}^n(\overline{x}-\mu_0)^2}{\sum_{k=1}^n(x_k-\overline{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{\sum_{k=1}^n(\overline{x}-\mu_0)^2}{\sum_{k=1}^n(x_k-\overline{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

例 正态LRT，方差未知

当$H_0: \mu = \mu_0$成立时，$\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(\overline{x}-\mu_0)^2}{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n}(\overline{x}-\mu_0)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2 / \sigma^2}{(n-1)s^2 / n-1}$$

$$\lambda(x) = \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$P(\lambda(x) \le c) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad |t| \le t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

利用充分统计量做检验统计量

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是一个样本，记 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$，总体的概率函数为 $f(x, \theta)$，如果 $T(X)$ 是一个关于参数θ的充分统计量，则根据因子分解定理

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta) = g(T(x_1, x_2, \cdots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中$g(t, \theta)$为统计量 T 的概率函数，则

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \theta) = g(T(x_1, x_2, \cdots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$L^*(t; \theta) = g(T(x), \theta)$$

利用充分统计量做检验统计量

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \theta) = g(T(x_1, x_2, \cdots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$L^*(t; \theta) = g(T(x), \theta)$$

$$\lambda(x) = \frac{sup_{\theta \in \Theta_0} L(x; \theta)}{sup_{\theta \in \Theta} L(x; \theta)} = \frac{sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \theta)}{sup_{\theta \in \Theta} \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \theta)}$$

$$= \frac{sup_{\theta \in \Theta_0} g(T(x), \theta) h(x)}{sup_{\theta \in \Theta} g(T(x), \theta) h(x)} = \frac{sup_{\theta \in \Theta_0} g(T(x), \theta)}{sup_{\theta \in \Theta} g(T(x), \theta)}$$

$$= \frac{sup_{\theta \in \Theta_0} L^*(t; \theta)}{sup_{\theta \in \Theta} L^*(t; \theta)} = \lambda^* \left(T(x)\right)$$

利用充分统计量做检验统计量

例 正态LRT， 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2已知，考虑检验 $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \qquad L^*(\bar{x}; \mu) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\lambda^*(\bar{x}) = \frac{sup_{\mu=\mu_0} L^*(\bar{x}; \mu)}{sup_{\mu \in R} L^*(\bar{x}; \mu)} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)}{sup_{\mu \in R} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$= exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

伪随机数列的均匀性检验

如果 $u_1, u_2, \cdots$ 是一均匀的随机数列，则

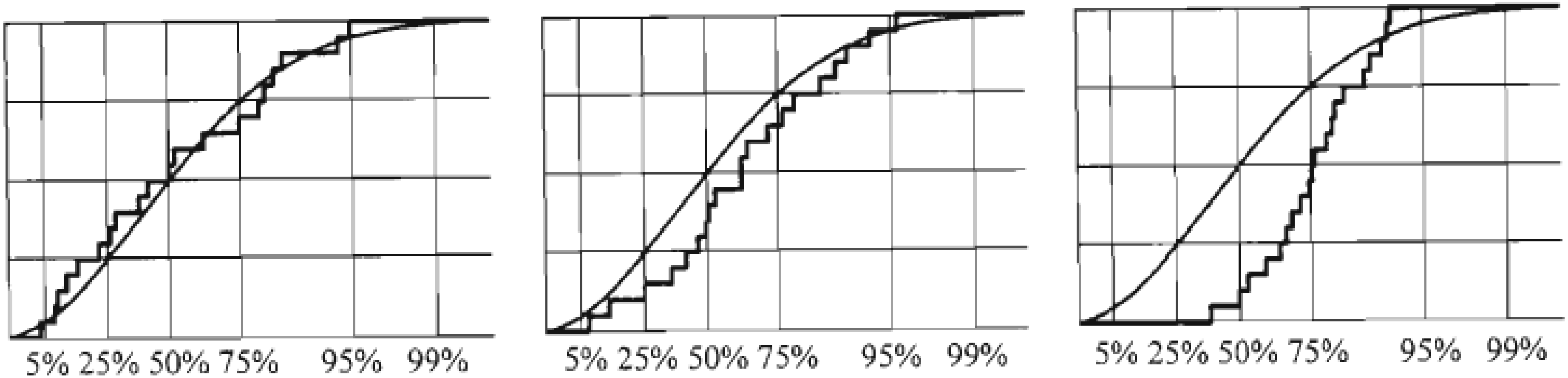
$$(u_1, u_2, \cdots, u_k), (u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots, u_{2k}), (u_{2k+1}, u_{2k+2}, \cdots, u_{3k}), \cdots$$

在 k 维空间也是应满足均匀分布

$$\chi_N^2 = \frac{16}{N} \sum_{i=1}^{16} \left(\nu_i - \frac{N}{16} \right)^2 \qquad \chi_N^2 = \frac{125}{N} \sum_{i,j,k=1}^{5} \left(\nu_{ijk} - \frac{N}{125} \right)^2$$

$$\chi_N^2 = \frac{64}{N} \sum_{i,j=1}^{8} \left(\nu_{ij} - \frac{N}{64} \right)^2 \qquad \chi_N^2 = \frac{256}{N} \sum_{i,j,k,l=1}^{4} \left(\nu_{ijkl} - \frac{N}{256} \right)^2$$

Kolmogorov-Smirnov 检验 $F_n(x) = \dfrac{\text{小于或等于 } x \text{ 的 } X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ 的数目}}{n}$



(a) (b) (c)

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - F(x))$$
$$K_n^- = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F(x) - F_n(x)) \quad (11)$$

这里 K_n^+ 度量当 F_n 大于 F 时的最大偏离量，而 K_n^- 度量当 F_n 小于 F 时的极大偏离。对于图 4 的例子的统计是

	图 4(a)	图 4(b)	图 4(c)
K_{20}^+	0.492	0.134	0.313
K_{20}^-	0.536	1.027	2.101

(12)

经验检验

每一个检验都旨在应用于 0 和 1 之间独立和一致分布的一个实数序列

$$\langle U_n \rangle = U_0, U_1, U_2, \cdots \tag{1}$$

某些检验并不是为实数序列(1),而主要是为取整数值的序列设计的。在这种情况下,检验中使用的辅助序列

$$Y_n = Y_0, Y_1, Y_2, \cdots \tag{2}$$

由规则

$$\langle Y_n \rangle = \lfloor dU_n \rfloor \tag{3}$$

A. 等分布检验(频率检验) 序列(1)必须满足的第一个要求是它的数实际上一致分布于 0 与 1 之间。有两种方式进行这种检验:(a)对 $F(x)=x, 0\leqslant x\leqslant 1$,用 KS 检验。(b)命 d 是一个方便的数,例如在一台十进制计算机上的 100,在一台二进制计算机上的 64 或 128,而且使用序列(3)来代替序列(1)。对于每个整数 $r, 0\leqslant r<d$ 及 $0\leqslant j<n$,计算 $Y_j=r$ 的次数,而后对于每个范畴利用 $k=d$ 和概率 $p_s=1/d$,应用 χ^2 检验。

这个检验背后的理论已在 3.3.1 节叙述过了。

B. 序列检验 更一般地,我们要求相继的数偶独立地一致分布。太阳升起的次数总是与它落下的次数一样多,但这并不使它的运动成为随机的。

为进行序列检验,我们只需计算对于 $0\leqslant j<n$,数偶$(Y_{2j}, Y_{2j+1})=(q, r)$出现的次数;这些计数是对 $0\leqslant q, r<d$ 的每个整数偶(q, r)进行的,而 χ^2 检验被应用于这些 $k=d^2$ 个范畴上,其中每个范畴的概率是 $1/d^2$。和等分布检验一样,d 可以是任何方便的数,但它将稍微小于上面提议的值,因为一个有效的 χ^2 检验应当使 n 相对于 k 说来足够大(比如说,至少 $n\geqslant 5d^2$)。

显然,我们可以把这个检验推广到三元组、四元组等等,以代替数偶(见习题 2);然而,必须急剧地减小 d 的值以避免范畴太多。因此,当考虑四元组和更大量的相邻元素时,我们利用像下边所述的扑克检验或极大值检验这类精确度较差的检验。

G. 运行检验 一个序列也可以做“上行运行”和“下行运行”检验。这意味着，我们考察原来序列的单调子序列的长度，即递增或递减的区段的长度。

作为运行的精确定义的一个例子，我们来考虑十个数的序列“1298536704”。在左端和右端，以及每当 $X_j > X_{j+1}$ 时在 X_j 和 X_{j+1} 之间置一竖线，我们得到

$$|1\quad 2\quad 9\,|\,8\,|\,5\,|\,3\quad 6\quad 7\,|\,0\quad 4\,| \tag{9}$$

它显示了“上行运行”：有一个长度为 3 的运行，后边跟着长度为 1 的两个运行，后边又接着长度为 3 的另一个运行，再接着长度为 2 的一个运行，习题 12 的算法说明怎样来造“上行运行”长度的表。

不像间隔检验和集券检验那样(在许多方面它们类似于这个检验)，我们将不应用 χ^2 检验于运行计算，因为相邻的运行不是独立的。一个长的运行势必跟随一个短的运行，而且反过来也是一样。这种独立性的缺乏，足以使一个直截了当的 χ^2 检验失效。替代的是当运行长度已经如习题 12 那样确定时，可以计算下面的统计量：

$$V = \frac{1}{n-6}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 6}(\mathrm{COUNT}[i] - nb_i)(\mathrm{COUNT}[j] - nb_j)a_{ij} \tag{10}$$

其中 n 是这个序列的长度，系数矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 6}$ 和 $B=(b_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ 由

12.[20] 设 $U_0, U_1, \cdots, U_{n-1}$ 是 n 个不同的数，写出一个算法，确定序列中所有递增运行的长度。当这个算法终止时，对于 $1\leqslant r\leqslant 5$，COUNT[r]应是长度为 r 的运行的个数，，而 COUNT[6]应该是长度为 6 或更大的运行的个数。

其中 n 是这个序列的长度，系数矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 6}$和 $B=(b_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$由

$$A=\begin{pmatrix} 4529.4 & 9044.9 & 13568 & 18091 & 22615 & 27892 \\ 9044.9 & 18097 & 27139 & 36187 & 45234 & 55789 \\ 13568 & 27139 & 40721 & 54281 & 67852 & 83685 \\ 18091 & 36187 & 54281 & 72414 & 90470 & 111580 \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & 139476 \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{24} \\ \frac{11}{120} \\ \frac{19}{720} \\ \frac{29}{5040} \\ \frac{1}{840} \end{pmatrix} \tag{11}$$

值。)当 n 很大时，式(10)中的统计量 V 应具有自由度 6(不是 5)的 χ^2 分布。比如说，n 的值应当是 4000 或更大。同样的检验可应用于“下行运行”。

J. 生日间隔检验 George Marsaglia 在 1984 年引进了一个新型的检验：如同在冲突检验一样，我们把 n 个球投入到 m 个瓮中，但现在我们把瓮想像为"一年的每一天"，而把球想像为"生日"。假设生日是 $(Y_1, \cdots, Y_n)$，其中 $0 \leqslant Y_k < m$。按非递减次序对这些生日排序 $Y_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant Y_{(n)}$；然后定义 n 个"间隔" $S_1 = Y_{(2)} - Y_{(1)}, \cdots, S_{n-1} = Y_{(n)} - Y_{(n-1)}, S_n = Y_{(1)} + m - Y_{(n)}$；最后对这些间隔排序，$S_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant S_{(n)}$。令 R 是间隔相等的个数，即使得 $1 < j \leqslant n$ 且 $S_{(j)} = S_{(j-1)}$ 的下标 j 的个数。当 $m = 2^{25}$ 和 $n = 512$ 时，我们将有

$R=$	0	1	2	3 或以上
概率	.368801577	.369035243	.183471182	.078691997

这样一个生日间隔检验之所以重要是由于这样一个奇怪的事实，即延搁的斐波那契生成程序一致地不能通过它，尽管它们都很好地通过其它传统的检验。[这样的失败的引人注目的例子是由 Marsaglia，Zaman 和 Tsang 在*Stat. and Prob. Letters* **9** (1990)，35～39 上报告的。]例如考虑式 3.2.2-(7)的序列

$$X_n = (X_{n-24} + X_{n-55}) \bmod m$$

总体分布的正态性检验

1）Jarque-Bera检验

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{1}{4}K^2\right)$$

正态分布的偏度$g_1 = 0$，峰度$g_2 = 3$，对于一个样本计算其g_1和g_2，若样本来自正态总体，则g_1和g_2应分别在0和3附近。基于这个思想，构造一个包含g_1，g_2的 χ^2统计量。

Jarque, C. M., and A. K. Bera. "A test for normality of observations and regression residuals." International Statistical Review. Vol. 55, No. 2, 1987, pp. 163–172.

$$S = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}}$$

$$K = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} - 3$$

总体分布的正态性检验

2）Kolmogorov-Smirnov检验

通过样本的经验分布函数与给定分布函数的比较，推断该样本是否来自给定分布函数的总体。（相应的Matlab命令的功能只针对标准正态总体进行检验）

3）Lilliefors检验

它将Kolmogorov-Smirnov检验改进用于一般的正态性检验。

Lilliefors, H. (June 1967), "On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown", Journal of the American Statistical Association, Vol. 62. pp. 399–402.