数学分析讲义: 第三章 极限与级数

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; 《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Sept. 2016

数学分析讲义总目录

第三章　极限与级数

关于收敛和极限的概念定义我们已在上一章讲过, 包括一些基本原理. 本章我们继续.

我们将直接学习最广泛的情形, 即学习复数序列的收敛和复数级数。为此我们先复习和介绍有界集和有界序列的概念.

【有界集和有界序列】 设$E \subset \mathbb{C}$. 若E 含于一个圆盘中, 即若存在$z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ 使得

$$E \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$$

则称E是一个有界集.

若一个复数序列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为集合是有界集, 即存在$z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ 使得$|z_n - z_0| \le r, n = 1, 2, 3, ...,$ 则称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个有界数列. □

实际上常用的是下列等价的定义: 设$E \subset \mathbb{C}$, 复数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则有

$$E \text{ 有界} \iff \text{存在} R > 0 \text{ 使得 } E \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}.$$

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 有界} \iff \text{存在} R > 0 \text{ 使得 } |z_n| \le R,\ n = 1, 2, 3, \dots .$$

事实上"$\Longleftarrow$"是显然的, 它是$z_0 = 0, r = R$的特殊情形. 对于"$\Longrightarrow$", 取$R = r + |z_0|$ 即知当$z \in E$时有$|z| \le |z - z_0| + |z_0| \le r + |z_0| = R$. 等等.

【无界集和无界序列】 设$E \subset \mathbb{C}$. 若E 不是有界集, 即对任意$R > 0$ 都存在$z \in E$ 使得$|z| > R$, 则称E 是一个无界集.

若一个复数序列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$不是有界序列，即对任意$R > 0$ 都存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$|z_n| > R$, 则称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个无界数列. □

以下如无特别说明, 数列都指的是复数序列, 即实数列和复数列均可.

【无穷小数列, 无穷小量】 若数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{即} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$$

则称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个无穷小数列, 也称之为一个无穷小量. □

易见

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 收敛于} A \iff \{a_n - A\}_{n=1}^{\infty} \text{ 是一个无穷小量.}$$

因此很多时候, 收敛性的研究归结为研究无穷小的行为.

【**趋于无穷, 无穷大量**】若数列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$|z_n| \to +\infty\,(n \to \infty)$, 则称当$n \to \infty$时$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$趋于无穷$\infty$, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 此时也称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个无穷大量. 换言之我们定义

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty. \qquad \Box$$

§3.1 数列极限的基本运算.

首先回忆

【**定义(复数列的收敛)**】设$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个复数序列. 若存在复数$z_0 \in \mathbb{C}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$$

则称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 同时称$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于z_0. 记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad 或 \quad z_n \to z_0 \quad (n \to \infty). \qquad \Box$$

【**命题1(无穷小数列的运算)**】

(1) 有限个无穷小数列的线性组合还是无穷小数列. 详细：以两个无穷小数列为例：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = 0$$

其中 α, β 为常数.

(2) 一个无穷小数列与一个有界数列的乘积还是无穷小数列. 详细：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 而数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(3) 无穷小数列的绝对值的开方还是无穷小数列. 详细：若 $p \in \mathbb{N}$ 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/p} = 0.$$

【证】(1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 对 $\frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|} > 0$ 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|} \quad \forall\, n \ge N_1, \qquad |b_n| < \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|} \quad \forall\, n \ge N_2.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 则当 $n\geq N$ 时有

$$|\alpha a_n+\beta b_n|\leq|\alpha||a_n+|\beta||b_n|\leq(|\alpha|+|\beta|)\frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=0$.

(2) 有假设, 存在 $R>0$ 使得 $|b_n|\leq R, n=1,2,3,\dots$. 对任意 $\varepsilon>0$, 对 $\frac{\varepsilon}{R}>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{R}\qquad\forall\, n\geq N.$$

于是当 $n\geq N$ 时有

$$|a_nb_n|=|a_n||b_n|\leq|a_n|R<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 设 $p\in\mathbb{N}$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 对 $\varepsilon^p>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时 $|a_n|<\varepsilon^p$. 于是当 $n\geq N$ 时有 $|a_n|^{1/p}<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/p}=0$. □

【注】数列的收敛性和极限值与该数列的前有限项无关. 因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无穷小量当且仅当对任意$m\in\mathbb{N}$, 部分序列 $\{a_n\}_{n=m+1}^{\infty}=\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$ 是无穷小量.

命题2 (四则运算、绝对值和开方运算). 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为收敛数列. 则

(1) $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n;\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n.$$

由此特别有：若 α,β 为常数, 则 $\{\alpha a_n+\beta b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}a_n+\beta\lim_{n\to\infty}b_n.$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, 则 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 也收敛且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\lim_{n\to\infty}a_n|.$$

(4) 若 $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, ...$. 则对任意正整数 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/p} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{1/p}.$$

【证】令 $A = \lim_{n\to\infty} a_n, B = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(1): 由极限的定义和上面命题1 有

$$0 \leq |a_n + b_n - A - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

据两边夹原理即知

$$\lim_{n\to\infty} |a_n + b_n - A - B| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

再看乘积:

$$0 \leq |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B|.$$

因**收敛数列必有界**(见 Cauchy 收敛准则的证明), 故由上面命题1 知 $\{|a_n - A||b_n|\}, \{|A||b_n - B|\}$ 都是无穷小数列从而其和 $\{|a_n - A||b_n| + |A||b_n - B|\}$ 也是无穷小数列, 即

$$\lim_{n\to\infty} (|a_n - A||b_n| + |A||b_n - B|) = 0.$$

于是据两边夹原理即知

$$\lim_{n\to\infty} |a_n b_n - AB| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB.$$

因常数序列的极限还是该常数本身, 故应用上述结论即得关于线性组合的关系式.

(2): 由 (1) 和

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

可知只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}.$$

由 $b_n \to B\,(n \to \infty)$ 和 $|B| > 0$ 知存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|b_n - B| < \frac{|B|}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

这蕴含

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

由此得到

$$0 \le \Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\Big| = \Big|\frac{B-b_n}{b_n B}\Big| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \le \frac{2}{|B|^2}|b_n - B|, \quad \forall\, n \ge n_0.$$

由上面命题1 知 $\{\frac{2}{|B|^2}|b_n - B|\}$ 是无穷小数列, 故再由两边夹原理即知

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\Big| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}.$$

(3): 由不等式

$$0 \le \Big||a_n| - |A|\Big| \le |a_n - A|, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

和两边夹即得

$$\lim_{n\to\infty}\Big||a_n| - |A|\Big| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to\infty}|a_n| = |A|.$$

(4): 先证明不等式

$$(x+y)^{1/p} \le x^{1/p} + y^{1/p}; \quad |x^{1/p} - y^{1/p}| \le |x-y|^{1/p}; \quad x, y \ge 0.$$

事实上由二项式展开和 $x, y \ge 0$ 有

$$(x^{1/p} + y^{1/p})^p = x + \cdots + y \ge x + y.$$

故由函数 $x \mapsto x^{1/p}$ 的单调增加性得到

$$x^{1/p} + y^{1/p} = [(x^{1/p} + y^{1/p})^p]^{1/p} \ge (x+y)^{1/p}.$$

利用这一不等式有, 不妨设 $x \le y$,

$$|x^{1/p} - y^{1/p}| = y^{1/p} - x^{1/p} = (y - x + x)^{1/p} - x^{1/p} \le (y-x)^{1/p} = |x-y|^{1/p}.$$

回到数列：设 $a_n \ge 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 则 $A \ge 0$ （保序). 于是

$$0 \le |a_n^{1/p} - A^{1/p}| \le |a_n - A|^{1/p}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

由上面命题1 知 $|a_n - A|^{1/p} \to 0\,(n \to \infty)$ 故再由两边夹可知

$$\lim_{n\to\infty}|a_n^{1/p} - A^{1/p}| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{1/p} = A^{1/p}. \qquad \Box$$

回忆

无界集: $E \subset \mathbb{R}$ 无上界 $\iff \forall\, M > 0\ \exists\, x \in E$ s.t. $x > M \iff \sup E = +\infty$.

$E \subset \mathbb{R}$ 无下界 $\iff \forall\, M > 0\ \exists\, x \in E$ s.t. $x < -M \iff \inf E = -\infty.$

易见 E 无下界 $\iff -E$ 无上界.

无穷大量:

(1) 若实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad a_n > M \quad \forall\, n \geq N.$$

则称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于正无穷, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$

(2) 若实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad a_n < -M \quad \forall\, n \geq N.$$

则称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于负无穷, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

(3) 若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, 则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个 (关于 n 的) 无穷大量, 也称当$n \to \infty$时趋于无穷远, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$ □

【例】设数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 由下面迭代关系给出

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{1+a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad a_1 > 0.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =?$

【解】由归纳法易见a_n单增且恒正, 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在(有限或无限)且$> 0$. 假设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 则它收敛, 也即它的极限$A := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$是正实数. 对上述迭代等式两边取极限, 由极限的四则运算得到

$$A = A + \frac{1}{1+A}.$$

因A是实数, 不是无穷大, 故这个等式不成立. 这证明了$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无上界. 于是由a_n递增即知它趋于$+\infty$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$ □

【命题3】

(1) 设 $a_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots$. 则

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0.$$

(2)

$$\text{设 } a_n > 0\ \ (n=1,2,3,...).\qquad \text{则}\ \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = +\infty.$$

$$\text{设 } a_n < 0\ \ (n=1,2,3,...).\qquad \text{则}\ \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = -\infty.$$

【证】(1): 设 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 对 $1/\varepsilon > 0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得$|a_n| > 1/\varepsilon$ for all $n\ge N$. 因此对所有$n\ge N$都有$\frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = 0$.

反之假设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = 0$. 则对任意$M > 0$, 对$1/M > 0$, 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$时$\frac{1}{|a_n|} < 1/M$, 也即当$n\ge N$ 时$|a_n| > M$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$.

(2): 设$a_n > 0\,(n=1,2,3,...)$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 则对任意$M>0$, 对$1/M>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$ s.t. $a_n < 1/M$. 因一切$a_n > 0$, 故当$n\ge N$时有$\frac{1}{a_n} > M$. 所以$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = +\infty$.

同法可证$a_n < 0\,(n=1,2,3,...)$的情形的结论成立. □

【**命题4**】设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为一个实数列. 则有

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ \text{无上界} \Longleftrightarrow \text{存在严格递增的子列}\ \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\ \text{使得}\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ \text{无下界} \Longleftrightarrow \text{存在严格递减的子列}\ \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\ \text{使得}\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty.$$

【证】据无界的定义易见“$\Longleftarrow$”是显然的.

下证“$\Longrightarrow$”. 只证无上界的情形. 对无下界的情形可以通过考虑 $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 而转化为无上界的情形. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无上界. 则

对于 $M_1 = 1$ 存在 a_{n_1} 使得 $a_{n_1} > 1$.

对于 $M_2 = \max\{2, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_1}\}$, 存在 a_{n_2} 使得 $a_{n_2} > M_2$.

对于 $M_3 = \max\{2, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_2}\}$, 存在 a_{n_3} 使得 $a_{n_3} > M_3$.

运用归纳法可得到正整数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$a_{n_1} > 1,\quad a_{n_k} > \max\{k, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_{k-1}}\},\quad k = 2,3,4,\dots.$$

易见$1\le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. 因此$\{a_{n_k}\}_{k=1}$ 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列并且

$$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \cdots;\qquad a_{n_k} > k,\qquad k = 1,2,3,\dots.$$

对任意 $M>0$, 取 $N>M$, 则当 $k\ge N$ 时有$a_{n_k} > k \ge N > M$. 因此 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.
□

【例】注意数列收敛与否与有限项无关.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{n^2-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+2)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{n}}=\frac{1}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}=\frac{1}{1}=1.$$

或直接看最高项系数而不必因子分解：设 $b_k\neq 0$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{n^{k-1}}+\frac{a_0}{n^k}}{b_k+\frac{b_{k-1}}{n}+\cdots+\frac{b_1}{n^{k-1}}+\frac{b_0}{n^k}}$$

$$=\frac{a_k+\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k-1}}{n}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{n^{k-1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_0}{n^k}}{b_k+\lim_{n\to\infty}\frac{b_{k-1}}{n}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{n^{k-1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_k}. \qquad \square$$

【十个典型极限】

典型极限 1.

$$\forall\,|a|<1\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}a^n=0.$$

$$\forall\,b>1\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}b^n=+\infty.$$

【证】由$|a^n|=|a|^n$ 知可以假设$0\le a<1$. 令$a_n=a^n$. 则有

$$0\le a_{n+1}=aa_n\le a_n,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

根据单调有界数列必收敛知$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在有限. 所以

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a\lim_{n\to\infty}a_n=aA\Longrightarrow A(1-a)=0\Longrightarrow A=0.$$

利用这一结论于$a=1/b<1$ 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^n=0\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}b^n=+\infty.$$

另法证明: 设$b>1$ 并令$h=b-1$. 则由二项式展开看出

$$b^n=(1+h)^n=1+nh+\cdots>nh\to+\infty\quad(n\to\infty).$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}b^n=+\infty$. 将这一结论应用于$b=\frac{1}{|a|}$ with $0<|a|<1$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}|a|^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^n}=0.$$

而$a=0$时的结论是显然的. $\square$

典型极限 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1.$$

【证】只需证第二个极限等式, 因第一个是其倒数. 令$a_n=n^{1/n}-1$. 则对任意$n\geq 2$由二项式展开有

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+>\frac{n(n-1)}{2}a_n^2\geq\frac{n^2}{4}a_n^2$$

$$\Longrightarrow\quad 0<a_n<\frac{2}{\sqrt{n}}\to 0\quad (n\to\infty).$$

根据两边夹原理即知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 也即$\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}=1$.

典型极限 3.

$$\text{对任意}\ \ a>0,\quad \lim_{n\to\infty}a^{1/n}=1.$$

【证】我们有

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}<a^{1/n}<n^{1/n}\qquad \forall\, n>\max\{1/a,a\}.$$

由典型极限2和两边夹原理即知$\lim\limits_{n\to\infty}a^{1/n}=1$.

典型极限 4.

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n}=+\infty\qquad \text{i.e.}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n!)^{1/n}}=0.$$

【证】对任意$n\geq 4$, 令$k=[n/2]+1$. 则有

$$\begin{aligned}
&n-k+1=n-[n/2]-1+1=n-[n/2]\geq n/2,\\
&n!\geq n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)\geq(n-k+1)^k\\
&\geq(n/2)^k=(n/2)^{[n/2]+1}>(n/2)^{n/2}\\
&\Longrightarrow(n!)^{1/n}>(n/2)^{1/2}\to+\infty\quad(n\to\infty).
\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n}=+\infty$. $\square$

<u>**典型极限 5(根式判别法)**.</u>

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}<1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}|a_n|=0.$$
$$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}>1 \quad\Longrightarrow\quad \limsup_{n\to\infty}|a_n|=+\infty.$$

【证】设$A:=\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}<1$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}|a_k|^{1/k}=A<1.$$

则对于$\frac{1-A}{2}>0$, 存在$n_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{k\ge n}|a_k|^{1/k}<A+\frac{1-A}{2}=\frac{1+A}{2}\qquad\forall\, n\ge n_0.$$

因$|a_n|^{1/n}\le\sup_{k\ge n}|a_k|^{1/k}$ 故得到

$$|a_n|^{1/n}<\frac{1+A}{2},\quad 0\le|a_n|<(\frac{1+A}{2})^n,\qquad\forall\, n\ge n_0.$$

因$0<\frac{1+A}{2}<1$, 故由典型极限1 知$(\frac{1+A}{2})^n\to 0\,(n\to\infty)$ 从而由两边夹原理即得$|a_n|\to 0\,(n\to\infty)$.

其次设$A:=\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}>1$, 即

$$A=\lim_{m\to\infty}\sup_{n\ge m}|a_n|^{1/n}>1.$$

则无论$A<+\infty$ 或$A=+\infty$, 总可取到实数λ 满足$1<\lambda<A$. 于是存在$m_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{n\ge m}|a_n|^{1/n}>\lambda\qquad\forall\, m\ge m_0.$$

取$m_1=m_0$, 则存在$n_1\ge m_1$ 使得$|a_{n_1}|^{1/n_1}>\lambda$ 即$|a_{n_1}|>\lambda^{n_1}$.

取$m_2=n_1+1$, 则存在$n_2\ge m_2$ 使得$|a_{n_2}|^{1/n_2}>\lambda$ 即$|a_{n_2}|>\lambda^{n_2}$.

取$m_3=n_2+1$, 则存在$n_3\ge m_3$ 使得$|a_{n_3}|^{1/n_3}>\lambda$ 即$|a_{n_3}|>\lambda^{n_3}$.

....

如此操作我们得到一列严格递增的自然数列$n_1<n_2<n_3<\cdots$ 使得$|a_{n_k}|>\lambda^{n_k}, k=1,2,3,\dots$. 因$\lambda>1$ 故$\lambda^{n_k}\to+\infty\,(k\to\infty)$. 因此$|a_{n_k}|\to+\infty\,(k\to\infty)$. 于是由$n_k\ge k$ 得到$\sup\limits_{n\ge k}|a_n|\ge|a_{n_k}|\to+\infty\,(k\to\infty)$. 所以. $\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$. $\square$

典型极限 6

$$\forall\, q>1, \forall\, k\in\mathbb{N} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n}=0.$$

【证】考虑

$$\left(\frac{n^k}{q^n}\right)^{1/n}=\frac{n^{k/n}}{q}.$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^k}{q^n}\right)^{1/n}=\frac{1}{q}\lim_{n\to\infty}n^{k/n}=\frac{1}{q}[\lim_{n\to\infty}n^{1/n}]^k=\frac{1}{q}<1.$$

因此由典型极限5 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n}=0.$ □

典型极限 7

$$\forall\, a\in\mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

【证】由典型极限4 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(|\frac{a^n}{n!}|\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{(n!)^{1/n}}=0<1.$$

再由典型极限5 即知 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a^n}{n!}|=0.$ □

典型极限 8 若$a_1,a_2,...,a_N\ge 0$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_N^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,...,a_N\}\,.$$

【证】取$s\in\{1,2,...,N\}$ 使得$a_s=\max\{a_1,a_2,...,a_N\}$. 则由$a_k$的非负性和$N^{1/n}\to 1\,(n\to\infty)$ 有

$$a_s\le\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_N^n\right)^{\frac{1}{n}}\le(Na_s^n)^{1/n}=N^{1/n}a_s\to a_s\quad(n\to\infty).$$

据两边夹原理即知所证成立. □

典型极限 9(比值判别法). 设 $a_n>0, n=1,2,3,....$ 若比值极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\quad \text{存在 (有限或无限)}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

【证】记$A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. 显然 $A\ge 0$. 先设 $0<A<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$ (不妨 $\varepsilon<A$, 否则考虑 $\varepsilon_1=\min\{A/2,\varepsilon\}$), 对 $\varepsilon/2>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$A-\varepsilon/2<\frac{a_{n+1}}{a_n}<A+\varepsilon/2,\quad \forall\, n\ge N.$$

由此有: 当 $n\ge N+2$ 时

$$(A-\varepsilon/2)^{n-N}<\frac{a_n}{a_N}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}<(A+\varepsilon/2)^{n-N}$$

即

$$B_{N,\varepsilon}(A-\varepsilon/2)^n=a_N(A-\varepsilon/2)^{n-N}<a_n<a_N(A+\varepsilon/2)^{n-N}=C_N(A+\varepsilon/2)^n$$

其中

$$B_{N,\varepsilon}=a_N(A-\varepsilon/2)^{-N},\quad C_{N,\varepsilon}=a_N(A+\varepsilon/2)^{-N}.$$

开方得到

$$(B_{N,\varepsilon})^{1/n}(A-\varepsilon/2)<(a_n)^{1/n}<(C_{N,\varepsilon})^{1/n}(A+\varepsilon/2),\quad \forall\, n\ge N+2.$$

因 $B_{N,\varepsilon},C_{N,\varepsilon}>0$ 故

$$A-\varepsilon<A-\varepsilon/2=\lim_{n\to\infty}(B_{N,\varepsilon})^{1/n}(A-\varepsilon/2),\quad \lim_{n\to\infty}(C_{N,\varepsilon})^{1/n}(A+\varepsilon/2)=A+\varepsilon/2<A+\varepsilon.$$

因此存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 使当 $n\ge N_1$ 时

$$A-\varepsilon<(B_{N,\varepsilon})^{1/n}(A-\varepsilon/2),\quad (C_{N,\varepsilon})^{1/n}(A+\varepsilon/2)<A+\varepsilon.$$

取 $N_2=\max\{N+2,N_1\}$. 则当 $n\ge N_2$ 时有

$$A-\varepsilon<(a_n)^{1/n}<A+\varepsilon\quad \text{i.e.}\quad |(a_n)^{1/n}-A|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=A$.

其次设 $A=0$. 证明如上, 此时只需考虑右边不等式, 同样得到 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=0$.

最后设 $A=+\infty$. 若在上面证明中只使用左边不等式, 即把上面"$A-\varepsilon/2$"处换成 $2M$ 其中 $M>0$ 是事先任意给定的, 则如上分析, 对 $2M>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N+2$ 时有

$$a_n>D_{N,M}(2M)^n\qquad \text{where}\quad D_{N,M}=a_N(2M)^{-N}.$$

因此

$$(a_n)^{1/n} > (D_{N,M})^{1/n} 2M, \qquad n \geq N+2.$$

因

$$\lim_{n\to\infty} (D_{N,M})^{1/n} 2M = 2M > M$$

故存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使当 $n \geq N_1$ 时 $(D_{N,M})^{1/n} 2M > M$. 于是当 $n \geq \max\{N+2, N_1\}$ 时有

$$(a_n)^{1/n} > M.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = +\infty$. $\square$

【经验之谈】"比值极限"通常用来对付具有**阶乘结构**的数列 a_n. 典型的例子是下面的作业题.

【作业题】令$a_n = \frac{n^n}{n!}$. 试利用**典型极限9(比值判别法)** 求其根式极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} \qquad (\text{答案为 } e).$$

典型极限 10. Stolz 定理 $\frac{*}{\infty}$ 型.

设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$为实数列. 假设$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格单调增加且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A \quad \text{存在 (有限或无限)}$$

则$\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

【证】首先注意上述差商极限也可写成

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \quad \text{存在 (有限或无限)}.$$

(1) 先设 A 为有限数. 由假设, 对任意 $\varepsilon > 0$, 对 $\varepsilon/2 > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$A - \varepsilon/2 < \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} < A + \varepsilon/2 \quad \forall k \geq N \quad \text{and} \quad b_k > 1 \quad \forall k \geq N.$$

因 $b_k - b_{k-1} > 0$, 故得到

$$(A - \varepsilon/2)(b_k - b_{k-1}) < a_k - a_{k-1} < (A + \varepsilon/2)(b_k - b_{k-1}) \qquad \forall k \geq N.$$

设 $n \geq N+2$. 对上面不等式两边求和得

$$(A-\varepsilon/2)\sum_{k=N+1}^{n}(b_k-b_{k-1}) < \sum_{k=N+1}^{n}(a_k-a_{k-1}) < (A+\varepsilon/2)\sum_{k=N+1}^{n}(b_k-b_{k-1}).$$

而由差和公式有

$$\sum_{k=N+1}^{n}(a_k-a_{k-1}) = a_n-a_N, \qquad \sum_{k=N+1}^{n}(b_k-b_{k-1}) = b_n-b_N.$$

故

$$(A-\varepsilon/2)(b_n-b_N) < a_n-a_N < (A+\varepsilon/2)(b_n-b_N) \qquad \forall\, n \geq N+2.$$

将 a_N 加到两边, 然后两边除以 b_n 得

$$(A-\varepsilon/2)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (A+\varepsilon/2)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n} \qquad \forall\, n \geq N+2.$$

因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_N}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_N}{b_n} = 0 \quad (\text{because } \ b_n \to +\infty)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left((A-\varepsilon/2)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n}\right) = A-\varepsilon/2,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left((A+\varepsilon/2)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n}\right) = A+\varepsilon/2.$$

故存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$(A-\varepsilon/2)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n} > A-\varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_1$$

$$(A+\varepsilon/2)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n} < A+\varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_2.$$

取 $N_3 = \max\{N+2, N_1, N_2\}$. 则有

$$A-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A+\varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_3.$$

即

$$\Big|\frac{a_n}{b_n}-A| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_3.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A$.

(2) 现设 $A=+\infty$. 若在上面证明中只使用左边不等式, 即把上面“$A-\varepsilon/2$”处换成 $2M$ 其中 $M>0$ 是事先任意给定的, 则如上分析, 对 $2M>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{a_n}{b_n} > 2M(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n} \qquad \forall\, n \geq N+2.$$

于是由

$$\lim_{n\to\infty}\left(2M(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n}\right)=2M>M$$

知存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$2M(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n}>M\qquad\forall\, n\geq N_1$$

令 $N_2=\max\{N+2,N_1\}$. 则有

$$\frac{a_n}{b_n}>M\qquad\forall\, n\geq N_2.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$$

(3) 最后设 $A=-\infty$. 令 $c_n=-a_n$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty.$$

故 (2) 中的结论有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=+\infty\quad\text{i.e.}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\infty.\qquad\square$$

【特殊情形】设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\quad\text{存在 (有限或无限)}.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A\,.$$

【证】在 Stolz 定理中取 $a_n=x_1+x_2+\cdots+x_n, b_n=n$. 则 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 Stolz 定理条件且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{1}=A.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.\qquad\square$$

应用上述结果和“几何平均值小于等于算术平均值”我们有

$$0<\Big(\frac{1}{n!}\Big)^{1/n}\leq\frac{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

于是我们再次证得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n!})^{1/n}=0$.

§3.2 实数列的上下极限

【**定义**】设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界实数列. 则由包含关系

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \supset \{a_n\}_{n=2}^{\infty} \supset \{a_n\}_{n=3}^{\infty} \supset \cdots$$

知部分序列的上确界构成的数列

$$n \mapsto \sup_{k\ge n} a_k \quad \text{单调减少:} \quad \sup_{k\ge n+1} a_k \le \sup_{k\ge n} a_k, \quad n=1,2,3,...;$$

下确界构成的数列

$$n \mapsto \inf_{k\ge n} a_k \quad \text{单调增加:} \quad \inf_{k\ge n+1} a_k \ge \inf_{k\ge n} a_k, \quad n=1,2,3,... .$$

根据单调数列必有极限可知极限

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k$$

都存在且有限. 分别称之为数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上下极限. $\square$

注意显然有

$$\inf_{k\ge n} a_k \le \sup_{k\ge n} a_k, \quad n=1,2,3,... .$$

故由极限的保序性知

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

记号上也记

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

【**命题1**】设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界实数列. 则存在两个子列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

换言之, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的上下极限可以分别被 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列达到.

【证】先证关于下极限的结论. 记 $A = \liminf_{n\to\infty} a_n$, $A_n = \inf_{k\ge n} a_k$. 则由定义有

$$A_1 \le A_2 \le A_3 \le \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

由下确界的定义, 存在 $n_1 \ge 1$ 使得 $A_1 \le a_{n_1} < A_1 + 1$.

令 $m_2 = n_1 + 1$. 则再有下确界的定义, 存在 $n_2 \ge m_2$ 使得 $A_{m_2} \le a_{n_2} < A_{m_2} + 1/2$.

令 $m_3=n_2+1$. 则再有下确界的定义, 存在 $n_3\ge m_3$ 使得 $A_{m_3}\le a_{n_3}<A_{m_3}+1/3$.

假设行至第 k 步我们得到了 $m_k=n_{k-1}+1$ 和 $n_k\ge m_k$ 使得 $A_{m_k}\le a_{n_k}<A_{m_k}+1/k$. 令 $m_{k+1}=n_k+1$.

则再又下确界的定义, 存在 $n_{k+1}\ge m_{k+1}$ 使得 $A_{m_{k+1}}\le a_{n_{k+1}}<A_{m_{k+1}}+\frac{1}{k+1}$.

根据操作程序的归纳法原理, 上述手续对每个自然数 k 均可施行. 于是我们得到自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty},\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ （$m_1=1$) 具有性质

$$m_1=1,\quad m_k=n_{k-1}+1, k=2,3,4,...;\quad n_k\ge m_k,\ k=1,2,3,...;$$
$$A_{m_k}\le a_{n_k}<A_{m_k}+1/k,\quad k=1,2,3,\dots.$$

易见

$$n_1<n_2<n_3<\cdots;\quad m_1<m_2<m_3\cdots.$$

因此 $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty},\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 分别是 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty},\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列. 于是由两边加原理和$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛即知$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$也收敛且

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim_{k\to\infty}A_{n_k}=A=\lim\inf_{n\to\infty}a_n.$$

同法可证 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个收敛到其上极限的子列. $\square$

【注】上面命题还给出了关于实数列的Weierstrass 极限点定理的一个不同的证明, 并且还有进一步性质:

若实数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界但不收敛, 则$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的所有收敛子列的极限值的最小者为下极限$\lim\inf\limits_{n\to\infty}a_n$, 最大者为上极限$\lim\sup\limits_{n\to\infty}a_n$. $\square$

【命题2 (收敛与上下极限的关系)】设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一有界实数列. 则

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ 收敛 }\iff \liminf_{n\to\infty}a_n=\limsup_{n\to\infty}a_n.$$

而当两边之一(从而两边都)成立时有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n=\limsup_{n\to\infty}a_n.$$

【证】由上面命题1, 存在两个子列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\liminf_{n\to\infty}a_n,\quad \lim_{k\to\infty}a_{m_k}=\limsup_{n\to\infty}a_n.$$

现在假设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. 则它的子列也收敛且有相同极限. 因此

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

反之设 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. 则由

$$\inf_{k\ge n} a_k \le a_n \le \sup_{k\ge n} a_k, \quad n=1,2,3,...$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} a_k \quad \text{i.e.} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

以及两边夹原理可知 $\{a_n\}$ 收敛并且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \qquad \Box$$

由于有界数列的上下极限总存在且有限, 而数列收敛当且仅当其上下极限相等, 因此很多时候利用上下极限研究收敛性是方便的. 将来在学习其他收敛和测度与积分的时候会看到一个共同的模式: 考察一族变量的升降两个单调过程, 分别从“不足近似”和“过剩近似”出发向中间地带无限靠拢; 由于是单调过程, 故这两个过程的极限都存在, 但一般来说不相等, 所以按相等和不相等对问题进行分类.... 数学研究多是这样, 逐步深入. 下面先给出关于上下极限运算的基本性质, 然后举两个应用例子.

【命题3 (上下极限的基本运算)】 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均为有界实数列. 则有

(1) 平移不变性: 对任意$m\in\mathbb{N}$ 有

$$\liminf_{n\to\infty} a_{n+m} = \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_{n+m} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(2) 反号关系:

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n, \quad \limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

(3) 保序性:

$$\text{若} \;\; a_n \le b_n \quad \forall\, n\ge n_0, \quad \text{则} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(4) (最常用)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)\,,$$

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(5) 若$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n; \quad \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(6) 若 $a_n \ge 0, b_n \ge 0\,(n=1,2,3,...)$ 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty} a_n b_n\,,$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n b_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n b_n\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(7) 若 $a_n \ge 0, b_n \ge 0\,(n=1,2,3,...)$ 且 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n; \quad \limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(8) 若$a_n \ge 0\,(n=1,2,3,...)$, 则对于任意正整数p 有

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n)^p = (\liminf_{n\to\infty} a_n)^p, \quad \limsup_{n\to\infty}(a_n)^p = (\limsup_{n\to\infty} a_n)^p.$$

【证】只证 (4),(6) 中上下极限混合的两块. 命题的其它部分不难从上下确界和上下极限的定义直接推出, 其中 (5),(7) 可分别从 (4),(6)推出.

来证明对任意固定的$n \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{k\ge n}(a_k+b_k) \le \sup_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k \le \sup_{k\ge n}(a_k+b_k). \tag{$*$}$$

事实上, 对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $j \ge n$ 使得 $b_j < \inf\limits_{k\ge n} b_k + \frac{1}{m}$. 因此

$$\inf_{k\ge n}(a_k+b_k) \le a_j + b_j \le \sup_{k\ge n} a_k + b_j < \sup_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k + \frac{1}{m}.$$

令 $m \to \infty$ 即得

$$\inf_{k\ge n}(a_k+b_k) \le \sup_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k.$$

同理, 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 存在 $j\ge n$ 使得 $a_j>\sup\limits_{k\ge n}a_k-\frac{1}{m}$. 因此

$$\sup_{k\ge n}a_k+\inf_{k\ge n}b_k<a_j+\frac{1}{m}+\inf_{k\ge n}b_k\le a_j+b_j+\frac{1}{m}\le\sup_{k\ge n}(a_k+b_k)+\frac{1}{m}.$$

令 $m\to\infty$ 即得

$$\sup_{k\ge n}a_k+\inf_{k\ge n}b_k\le\sup_{k\ge n}(a_k+b_k).$$

这证明了 $(*)$ 成立. 因 $(*)$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 故对 $(*)$ 两边取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 即得相应的不等式.

现设 $a_n\ge 0, b_n\ge 0\,(n=1,2,3,...)$. 来证明 (**固定**任意 $n\in\mathbb{N}$)

$$\inf_{k\ge n}a_kb_k\le(\sup_{k\ge n}a_k)(\inf_{k\ge n}b_k)\le\sup_{k\ge n}a_kb_k. \tag{$**$}$$

事实上对任意 $m\in\mathbb{N}$, 存在 $j\ge n$ 使得 $b_j<\inf\limits_{k\ge n}b_k+\frac{1}{m}$. 因此

$$\inf_{k\ge n}a_kb_k\le a_jb_j\le(\sup_{k\ge n}a_k)(\inf_{k\ge n}b_k+\frac{1}{m})=(\sup_{k\ge n}a_k)(\inf_{k\ge n}b_k)+(\sup_{k\ge n}a_k)\frac{1}{m}.$$

令 $m\to\infty$ 即得

$$\inf_{k\ge n}a_kb_k\le(\sup_{k\ge n}a_k)(\inf_{k\ge n}b_k).$$

同理, 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 存在 $j\ge n$ 使得 $a_j>\sup\limits_{k\ge n}a_k-\frac{1}{m}$. 因此

$$(\sup_{k\ge n}a_k)(\inf_{k\ge n}b_k)\le(a_j+\frac{1}{m})(\inf_{k\ge n}b_k)\le(a_j+\frac{1}{m})b_j=a_jb_j+\frac{1}{m}b_j\le\sup_{k\ge n}a_kb_k+\frac{1}{m}\sup_{k\ge n}b_k.$$

令 $m\to\infty$ 即得

$$(\sup_{k\ge n}a_k)(\inf_{k\ge n}b_k)\le\sup_{k\ge n}a_kb_k.$$

这证明了 $(**)$ 成立. 因 $(**)$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 故对 $(**)$ 两边取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 即得相应的不等式. □

【例】设$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$为非负的收敛数列, $B=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 令

$$a_1>0,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+b_n},\quad n=1,2,3,\dots.$$

证明$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛并求其极限值.

【证】[先从结果出发做分析以期找到论证线索: 假设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 记$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 则在关系式$a_{n+1}^2=a_n+b_n$中让$n\to\infty$ 得到$A^2=A+B$. 我们猜测A 严格大于零, 故解得$A=\frac{1+\sqrt{1+4B}}{2}$. 为证$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 需要证明$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$有界. 而从$A=\frac{1+\sqrt{1+4B}}{2}$ 看

出$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$或许以$\frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}$ 为上界, 其中$C = \sup\limits_{n\geq 1} b_n$. 但是$a_n$ 的初始项a_1 可能很大, 因此我们考虑较大的量$M = \max\{a_1,\ \frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}\}$ 它可能就是$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的一个上界. 如果此事成立,则可以利用数列上下极限的运算法则得到进一步的信息...]

先证$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 令$C = \sup\limits_{n\geq 1} b_n$. 由$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$非负且收敛知$0 \leq C < +\infty$. 考虑二次方程$x^2 = x + C$. 它的最大实根为$\frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}$. 因此易见$x^2 \geq x + C$ for all $x \geq \frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}$. 特别对于$x = M := \max\{a_1,\ \frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}\}$ 有$M^2 \geq M + C$, 也即$\sqrt{M+C} \leq M$. 来证明$0 < a_n \leq M$ for all $n \in \mathbb{N}$. 首先由M的取法知$0 < a_1 \leq M$. 假设已有$0 < a_n \leq M$, 则

$$0 < a_{n+1} = \sqrt{a_n + b_n} \leq \sqrt{M+C} \leq M.$$

据归纳法原理, 不等式$0 < a_n \leq M$ 对所有$n \in \mathbb{N}$ 成立.

令

$$\underline{A} = \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \overline{A} = \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

则由$b_n = a_{n+1}^2 - a_n$ 和上下极限的运算法则有

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}^2 - a_n) \geq \limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}^2) + \liminf_{n\to\infty}(-a_n) \\
&= \limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}^2) - \limsup_{n\to\infty} a_n = (\limsup_{n\to\infty} a_{n+1})^2 - \limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{A}^2 - \overline{A}, \\
B &= \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty}(a_{n+1}^2 - a_n) \leq \liminf_{n\to\infty}(a_{n+1}^2) + \limsup_{n\to\infty}(-a_n) \\
&= \liminf_{n\to\infty}(a_{n+1}^2) - \liminf_{n\to\infty} a_n = (\liminf_{n\to\infty} a_{n+1})^2 - \liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{A}^2 - \underline{A}.
\end{aligned}$$

也即我们得到$\overline{A}^2 - \overline{A} \leq B \leq \underline{A}^2 - \underline{A}$, 从而有

$$(\overline{A} + \underline{A})(\overline{A} - \underline{A}) = \overline{A}^2 - \underline{A}^2 \leq \overline{A} - \underline{A}.$$

来估计$\overline{A} + \underline{A}$: 我们有

$$a_{n+1} \geq (a_n)^{\frac{1}{2}} \geq (a_{n-1})^{\frac{1}{4}} \geq \cdots \geq (a_1)^{\frac{1}{2^n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

因$a_1 > 0$, 故

$$\underline{A} = \liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty}(a_1)^{\frac{1}{2^n}} = 1.$$

因此$\overline{A} + \underline{A} \geq 2\underline{A} \geq 2$. 这就导出

$$(0 \leq)\ \ 2(\overline{A} - \underline{A}) \leq \overline{A} - \underline{A}. \qquad 因此 \quad \overline{A} - \underline{A} = 0$$

即$\overline{A}=\underline{A}$. 所以$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 令$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 则在关系式$a_{n+1}^2=a_n+b_n$中让$n\to\infty$得到$A^2=A+B$. 因已证明了$A=\underline{A}\geq 1$, 故解得$A=\frac{1+\sqrt{1+4B}}{2}$. $\quad\Box$

【**例**】设数列$T_n\geq 0$ 满足

$$T_{n+m}\leq T_nT_m,\qquad n,m=1,2,3,\dots.$$

则$\{T_n^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}T_n^{1/n}=\inf_{n\geq 1}T_n^{1/n}.$$

[本题来源于矩阵分析和泛函分析中特征值和谱 半径公式的发现与证明.]

【证】首先易见$0\leq\inf\limits_{n\geq 1}T_n^{1/n}\leq T_1<+\infty$. 由归纳法易证

$$T_n\leq T_1^n,\quad n=1,2,3,...,\,.$$

一般地, 利用归纳法, 例如固定任意n,m而对k 用归纳法, 易证

$$T_{kn+m}\leq T_n^kT_1^m,\quad n,k=1,2,3,...,;\;\; m=0,1,2,\dots.$$

[注意这不等式当$m=0$时确实成立.] 由此可见若某项$T_{n_0}=0$ 则$T_n=0$ for all $n\geq n_0$. 此时自然有$\lim\limits_{n\to\infty}T_n^{1/n}=0=\inf\limits_{n\geq 1}T_n^{1/n}$.

以下假设$T_n>0$ for all $n\in\mathbb{N}$. 对任意自然数N和$n>N$, 由带余除法知存在$k\in\mathbb{N}$和$r\in\{0,1,...,N-1\}$ 使得$n=kN+r$. 应用上面不等式并写$\frac{k}{n}=\frac{n-r}{nN}=\frac{1}{N}-\frac{r}{Nn}$ 得到

$$\begin{aligned}
&T_n=T_{kN+r}\leq T_N^kT_1^r,\\
&T_n^{1/n}\leq T_N^{k/n}T_1^{r/n}=T_N^{\frac{1}{N}-\frac{r}{Nn}}T_1^r=T_N^{1/N}\Big(\frac{T_1}{T_N^{1/N}}\Big)^{r/n}\\
&\leq T_N^{1/N}\Big(1+\frac{T_1}{T_N^{1/N}}\Big)^{(N-1)/n}=T_N^{1/N}B_N^{1/n}\quad\text{其中}\quad B_N=\Big(1+\frac{T_1}{T_N^{1/N}}\Big)^{N-1}.
\end{aligned}$$

对n取上极限并注意$(B_N)^{1/n}\to 1\ (n\to\infty)$ 得到

$$\limsup_{n\to\infty}T_n^{1/n}\leq T_N^{1/N}\limsup_{n\to\infty}B_N^{1/n}=T_N^{1/N}.$$

注意这不等式对任意$N\in\mathbb{N}$ 成立, 故它表明$\limsup\limits_{n\to\infty}T_n^{1/n}$ 是$\{T_N^{1/N}\}_{N=1}^{\infty}$的一个下界. 于是有

$$\limsup_{n\to\infty}T_n^{1/n}\leq\inf_{N\geq 1}T_N^{1/N}=\inf_{n\geq 1}T_n^{1/n}.$$

另一方面显然有

$$\inf_{n\geq 1} T_n^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} T_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} T_n^{1/n}.$$

因此

$$\liminf_{n\to\infty} T_n^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} T_n^{1/n} = \inf_{n\geq 1} T_n^{1/n}.$$

所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n^{1/n}$ 存在有限且等于 $\inf\limits_{n\geq 1} T_n^{1/n}$. $\square$

§3.3 数 e

伟大的数学家欧拉(Euler)最先发现和使用了这个数; 它和π 一样, 属于科学界使用频率最高的少数几个常数. 后面将看到, e和π 这两个最重要的实数与三个平凡的数$0,1$以及虚数单位$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 竟然极为有简单和漂亮的关系: $e^{\mathrm{i}\pi}+1=0$.

【命题】数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格递增、$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 严格递减, 并且二者有相同的极限:

$$e:=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}=2.718281828459045...$$

【证】先证明 $(1+\frac{1}{n})^n$ 严格单调增加: 由几何平均值小于算术平均值有

$$\begin{aligned}\Big[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big]^{\frac{1}{n+1}}&=\Big(\underbrace{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n\ \text{factors}}\cdot 1\Big)^{\frac{1}{n+1}}\\&<\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}=\frac{n+1+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}\\&\Longrightarrow\quad\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n<\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}.\end{aligned}$$

所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 严格单调增加. 同样论证有:

$$\begin{aligned}\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n\Big]^{\frac{1}{n+1}}&=\Big(\underbrace{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{1}{n})}_{n\ \text{factors}}\cdot 1\Big)^{\frac{1}{n+1}}\\&<\frac{n(1-\frac{1}{n})+1}{n+1}=\frac{n-1+1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\\&\Longrightarrow\quad\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n<\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}\end{aligned}$$

也即 $(1-\frac{1}{n})^n$ 也严格单调增加. 由此可得

$$\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{n+2})^{n+2}}<\frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}.$$

所以 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 严格单调减少.

根据以上单调性我们有

$$2\le\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n<\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}\le 2^2=4,\quad n=1,2,3,\dots.$$

由此还有

$$0<\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\frac{1}{n}\le\frac{4}{n}\longrightarrow 0\ \ (n\to\infty).$$

这就证明了 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 都是单调有界的且有相同极限, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad \square$$

【注】由 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格递增, $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 严格递减, 我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n=1,2,3,\dots.$$

【作业题】证明

$$\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

由此证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n!)^{1/n}}=e.$$

参见**典型极限9(比值判别法)**下面的作业题.

【数 e 的累加表示 (级数)】

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,.$$

【证】令

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

回忆牛顿二项式:

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k+\cdots+x^n.$$

取 $x=\frac{1}{n}$ 有

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\
&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\
&+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&\le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}=S_n.
\end{aligned}$$

因此

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\lim_{n\to\infty}S_n.$$

而对任意 $k\in\mathbb{N}$ 当 $n>k$ 时有

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\cdots+\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big).$$

固定 k 令 $n\to\infty$ 得到

$$\begin{aligned}&e\ge 1+\frac{1}{1!}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\cdots+\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\\&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}=S_k.\end{aligned}$$

因 k 是任意的, 这就得到$e\ge\lim\limits_{k\to\infty}S_k$. 所以$e=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. $\Box$

§3.4 利用数列的极限定义正实数的幂.

【命题(正实数的幂及其基本性质)】

(I) 对任意实数$a>0,x\in\mathbb{R}$, 定义

$$a^x:=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}$$

其中$\{r_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{Q}$是任一收敛于$x$的有理数列. 则$a^x>0$且它与有理数列$\{r_n\}_{n=1}^\infty$的选取无关, 因此是由$(a,x)$唯一确定的正实数. 特别当$x\in\mathbb{Q}$时, 取$r_n\equiv x$可知$a^x$与前面定义的正实数的有理数幂相同.

(II) 单调关系:

$$设\quad a>1.\qquad 则\qquad x<y\quad\Longleftrightarrow\quad a^x<a^y.$$

$$设\quad 0<a<1.\ \ 则\qquad x<y\quad\Longleftrightarrow\quad a^x>a^y.$$

(III) 基本运算法则: 设$a,b>0,x,y\in\mathbb{R}$. 则

$$1^x=1,\quad a^{x+y}=a^xa^y,\quad (a^x)^y=(a^y)^x=a^{xy},\quad (ab)^x=a^xb^x.$$

【证】(I): 当$a=1$时, 极限1^x显然存在且$1^x=1$. 设$0<a\neq1$. 因$a^r=(a^{-1})^{-r}$ $(r\in\mathbf{Q})$ 故可以假设$a>1$.

为了不中断证明, 先证明如下不等式: 设$r,s\in\mathbf{Q}$和$M\in\mathbb{N}$满足$r,s\le M,|r-s|<1$. 则有

$$|a^r-a^s|\le 2a^{M-1}|r-s|. \qquad (*)$$

当$r=s$时显然成立. 设$r\neq s$. 取$N=[\frac{1}{|r-s|}]$. 则有$\frac{1}{N+1}<|r-s|\leq\frac{1}{N}$. 因此有(例如设$r>s$)

$$|a^r-a^s|=a^s(a^{r-s}-1)\leq a^M(a^{\frac{1}{N}}-1)\leq a^{M-1}\frac{1}{N}\leq 2a^{M-1}|r-s|.$$

这里用到不等式$a^{\frac{1}{N}}-1\leq\frac{a}{N}$. 事实上记$\delta=a^{\frac{1}{N}}-1$ 则$\delta>0$ 且由二项式展开可知$a=(1+\delta)^N>N\delta$, 即$\delta<\frac{a}{N}$.

任取两个收敛于x的有理数列$\{r_n\}_{n=1}^\infty,\{s_n\}_{n=1}^\infty$. 取$M,n_0\in\mathbb{N}$满足$M>\sup\limits_{n\geq 1}(|r_n|+|s_n|)$ 且当$m,n\geq n_0$时$|r_m-r_n|<1,|s_m-s_n|<1$, 以及当$n\geq n_0$ 时$|r_n-s_n|<1$. 则由$(*)$ 有

$$|a^{r_m}-a^{r_n}|\leq 2a^{M-1}|r_m-r_n|,\quad\forall\, m,n\geq n_0,$$

$$|a^{s_m}-a^{s_n}|\leq 2a^{M-1}|s_m-s_n|,\quad\forall\, m,n\geq n_0,$$

$$|a^{r_n}-a^{s_n}|\leq 2a^{M-1}|r_n-s_n|,\quad\forall\, n\geq n_0.$$

由此可知$\{a^{r_n}\}_{n=1}^\infty$, $\{a^{s_n}\}_{n=1}^\infty$都是Cauchy列因而都收敛, 且二者的极限相等. 注意, 收敛的数列的极限当然是有限的.

为证$a^x>0$, 取自然数$N>|x|$. 则$x>-N$. 取有理数列$r_n\to x$ $(n\to\infty)$. 则当$n>>1$时有$r_n>-N$ 从而有$a^{r_n}>a^{-N}$. 因此

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\geq a^{-N}>0.$$

(II): 设$a>1$. 取有理数列$\{r_n\}_{n=1}^\infty,\{s_n\}_{n=1}^\infty$分别收敛于$x,y$.

假设$x<y$. 取有理数r,s满足$x<r<s<y$. 则由极限的保序性知存在$N\in\mathbb{N}$使得当$n\geq N$时有$r_n<r,s_n>s$ 从而有$a^{r_n}<a^r<a^s<a^{s_n}$. 因此

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\leq a^r<a^s\leq\lim_{n\to\infty}a^{s_n}=a^y.$$

反之假设$a^x<a^y$. 则首先由a^x 由(a,x) 唯一确定可知$x\neq y$. 取实数C 满足$a^x<C<a^y$. 则由极限的保序性知存在$N\in\mathbb{N}$使得当$n\geq N$时有$a^{r_n}<C<a^{s_n}$. 这蕴含$r_n<s_n$ $(\forall\, n\geq N)$. 因此$x=\lim\limits_{n\to\infty}r_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}s_n=y$. 但$x\neq y$, 故得$x<y$.

同理可证$0<a<1$的情形.

(III): 当x,y均为有理数时, 这是已知结论. 对一般情形, 取有理数列$\{r_n\}_{n=1}^\infty,\{s_n\}_{n=1}^\infty$分别收敛于$x,y$. 则$r_n+s_n\to x+y\,(n\to\infty)$. 由极限的四则运算有

$$a^{x+y}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n+s_n}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}a^{s_n}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\lim_{n\to\infty}a^{s_n}=a^xa^y,$$

$$(ab)^x=\lim_{n\to\infty}(ab)^{r_n}\lim_{n\to\infty}a^{r_n}b^{r_n}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\lim_{n\to\infty}b^{r_n}=a^xb^x.$$

据此和归纳法有

$$a^{x_1+x_2+\cdots+x_m}=a^{x_1}a^{x_2}\cdots a^{x_m}.$$

特别有$(a^x)^m=a^{mx}$, $m\in\mathbb{N}$. 而当$m\in\mathbb{Z}$ 且$m<0$ 时有

$$(a^x)^m(a^x)^{-m}=(a^x)^0=1 \quad\Longrightarrow\quad (a^x)^m=\frac{1}{(a^x)^{-m}}=\frac{1}{a^{-xm}}=a^{xm}.$$

因此

$$(a^x)^m=a^{mx}=a^{xm}\qquad \forall\, m\in\mathbb{Z}.$$

又对任意$n\in\mathbb{N}$, 有

$$((a^x)^{\frac{1}{n}})^n=a^x,\quad (a^{\frac{x}{n}})^n=a^x.$$

根据正根的唯一性即知

$$(a^x)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{x}{n}}.$$

于是对任意$n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}$ 有

$$(a^x)^{\frac{m}{n}}=((a^x)^{\frac{1}{n}})^m=(a^{\frac{x}{n}})^m=a^{\frac{x}{n}m}=a^{x\frac{m}{n}}.$$

这证明了

$$(a^x)^r=a^{xr}\qquad \forall\, r\in\mathbf{Q}.$$

取有理数列$\{r_n\}_{n=1}^\infty$, $\{s_n\}_{n=1}^\infty$分别收敛于x,y. 则得

$$(a^x)^y=\lim_{n\to\infty}(a^x)^{s_n}=\lim_{n\to\infty}a^{xs_n}=\lim_{n\to\infty}a^{(x-r_n)s_n}a^{r_ns_n}=\lim_{n\to\infty}a^{(x-r_n)s_n}\lim_{n\to\infty}a^{r_ns_n}=1\cdot a^{xy}=a^{xy}.$$

这里我们提前用到了这样的事实: 对任意满足$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$的实数列$\{h_n\}_{n=1}^\infty$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}a^{h_n}=a^0=1$. 将这一事实应用于$h_n=(x-r_n)s_n$ 即得$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(x-r_n)s_n}=1$.

最后来证明上述事实. 对每个$n\in\mathbb{N}$, 取有理数β_n,γ_n 满足$\beta_n\in(h_n-\frac{1}{n},h_n),\gamma_n\in(h_n,h_n+\frac{1}{n})$. 则有$\beta_n<h_n<\gamma_n$ 且$\beta_n\to 0$, $\gamma_n\to 0$ $(n\to\infty)$. 而由单调关系(不妨设$a>1$) 有

$$a^{\beta_n}<a^{h_n}<a^{\gamma_n},\quad n=1,2,3,\ldots.$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\beta_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\gamma_n}=a^0=1$, 故由两边夹即得$\lim\limits_{n\to\infty}a^{h_n}=1$. $\square$

在进入下一节之前, 我们引进二元序列及其收敛概念, 它有助于进一步理解Cauchy序列和其他收敛行为.

【二元数列及其收敛】任何映射 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 都叫做一个二元数列, 其通项自然是 $f(m,n)$. 一般也记 $a_{m,n}=f(m,n), a_{m,n}=f(m,n)$ 等等. 二元数列也写成 $\{a_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 或 $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$.

一般地若 $D\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是一个无限集, 则映射 $f:D\to\mathbb{C}$ 也叫做一个二元数列, 记作 $\{f(m,n)\}_{(m,n)\in D}$ 或 $\{a_{m,n}\}_{(m,n)\in D}$, 等等.

例如对于 $D=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,|\,m>n\}$ 和数列 $f:D\to\mathbb{C}$, 则可记此数列为 $\{f(m,n)\}_{m>n\ge1}$ 或 $\{a_{m,n}\}_{m>n\ge1}$, 等等.

【定义】(1) 设 $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ 是一个二元数列, $A\in\mathbb{C}$ 为常数. 若对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $m,n\ge N$ 时恒有 $|a_{m,n}-A|<\varepsilon$, 则称 $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 A, 记作

$$\lim_{m,n\to\infty}a_{m,n}=A.$$

(2) 设 $\{a_{m,n}\}_{m>n\ge1}$ 是一个二元数列, $A\in\mathbb{C}$ 为常数. 若对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $m,n\ge N$ 时恒有 $|a_{m,n}-A|<\varepsilon$, 则称 $\{a_{m,n}\}_{m,n\ge1}$ 收敛于 A, 记作

$$\lim_{m,n\to\infty}a_{m,n}=A.\qquad\square$$

应用二元数列及其收敛概念于$a_{m,n}=a_m-a_n$, 易见

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ 收敛}\iff\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ 是 Cauchy 列}\iff\lim_{m,n\to\infty}(a_m-a_n)=0$$
$$\iff\lim_{m>n\to\infty}(a_m-a_n)=0.$$

最后这个等价性是因为当 $m=n$ 时有 $a_m-a_n\equiv0$, 所以只需考察 $m\ne n$ 的情形. 于是有（注意: 趋于零等价于绝对值趋于零!)

$$\lim_{m,n\to\infty}|a_m-a_n|=0\iff\lim_{m\ge n\to\infty}|a_m-a_n|=0\iff\lim_{m>n\to\infty}|a_m-a_n|=0.$$

以后我们将遇到不少二元数列的重要例子.

§3.5 数值级数

数值级数和函数级数是一类特殊的数列的极限, 也是数学分析必学的基础知识. 它的好处是: 在级数表示中, 每个出现的项都是确定的不动的, 而不像数列的一般项那样永远在变动. 例如比较一下

e的数列表示: $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

e的级数表示: $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots$.

【定义】设 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一数列(实的或复的).

(1) **形式级数** 称

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots.$$

是一个形式级数. 令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad n=1,2,3,...$$

称a_k 为这级数的第k项或通项, 称S_n 为形式级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的第 n 部分和, 简称**部分和**.

(2) **收敛与发散** 若部分序列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛并定义

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n\qquad \text{即}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

若$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$不收敛, 则称$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$发散.

(3) 设通项a_n均为**实数**. 若部分和序列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于$+\infty$ 或$-\infty$, 即

$$\text{若}\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=+\infty\quad\text{或}\quad\lim_{n\to\infty}S_n=-\infty$$

则相应的记

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty\,,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=-\infty.$$

此时称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 有意义但发散到$+\infty$或$-\infty$.

(4) 若级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$收敛或只是按(3)中说的发散, 则都称级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ **有意义**.

(5) 对于通项a_k为复数的一般情形, 我们只考虑(2)中的情形, 即只定义$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛和$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$发散. [这是因为对于复数序列$\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty} |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| = +\infty$ 可以包含很多情况, 比实数序列的情形复杂得多.] $\square$

【注1】按上述定义,

对于通项a_k为复数的级数, 发散级数一般只有一类, 即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$**不存在**.

对于通项a_k为实数的级数, 发散级数有两类: 一类是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$**不存在**, 另一类是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 存在但等于 $+\infty$ 或 $-\infty$.

【注2】从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 的结构看出, 诸项 $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ 被相加之后就永远在那了、不动了, 它们决定了级数的数值大小. 这一点与数列的极限不同, 数列的极限值与该数列的任何前有限项无关; 数列总是在动荡中. 这就是人们愿意使用级数的一个重要原因 —- 尽管数列和级数可以互相转化：$S_n - S_{n-1} = a_n$; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 将来在学习泛函分析、函数空间等理论时会见到空间分解和函数分解, 那时大家将对级数的优点有深切体会.

【注3】在级数的定义中, 初始项的下标可以取为 0 或任意正整数, 即 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$. 这相当于下标平移:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}, \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

它显然不改变级数的敛散性和级数的值. 同上, 我们可以谈论$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$ 收敛,发散, 以及通项为实数的级数的有意义与否问题. 例如当a_k均为实数时, $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$有意义是指

$$\text{极限} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n} a_k =: \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \quad \text{存在.}$$

【注4】$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛或者a_k均为实数且$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$有意义, 则对任意$N \in \mathbb{N}$, 级数 $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$相应地也收敛和有意义且

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k.$$

这是因为由部分和$\sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ 当$m\to\infty$时有极限可知当$m\to\infty$ 时, 部分和 $\sum\limits_{n=N+1}^{m} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n - \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ 也有极限. 于是由极限和级数的定义不难得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{m} a_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=N+1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

□

【命题1】(级数收敛的一个必要条件)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则其通项趋于零, 即 $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

【证】设极限 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 存在有限. 则由

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

和 $S\in\mathbb{R}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \square$$

【定理1(Cauchy 收敛准则)】 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充分必要条件是它满足Cauchy 条件:

$$\lim_{m>n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m} a_k = 0$$

也即

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Big| < \varepsilon\ \text{ holds for all }\ m>n\ge N.$$

【证】令$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. 则由级数收敛的定义和数列收敛的 Cauchy 准则有:

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{m,n\to\infty}(S_m - S_n) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{m>n\to\infty}(S_m - S_n) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\varepsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $m>n\ge N$ 时 $|S_m - S_n|<\varepsilon$ 即当 $m>n\ge N$ 时 $\Big|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\Big| = |S_m - S_n| < \varepsilon$, 也即 $\lim\limits_{m>n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k = 0.$ □

由Cauchy 收敛准则也能得到级数收敛的必要条件是其通项趋于零, 这是因为

$$\lim_{m>n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m} a_k = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0\ \text{ i.e. }\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

• 虽然一般而言通项趋于零是数收敛的必要条件而非充分条件, 但当通项趋零的速度足够快时, 可以保证级数收敛. 何谓足够快？这是后面要讲的主要内容之一.

【定义(正项级数)】. 若 $a_n \ge 0, n = 1, 2, 3, \dots$. 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一个正项级数或非负项级数. □

正项级数是最重要的一类级数!! 它的几个优点马上就会看到. 对变号级数的研究, 通常是先把它变成正项级数 (即把 a_n 换成 $|a_n|$) 然后进行研究. 很多情况下这是成功的. 如果失败, 就寻找其它对付变号级数的办法. 整个级数理论的定性分析就是干这件事.

【定理2(正项级数基本定理)】设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为任一正项级数. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛充分必要条件是它的部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有上界, 即存在 $0 < M < \infty$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le M, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \qquad \text{此时有} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le M.$$

因此正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 总有意义并且

$$\text{要么} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \qquad \text{要么} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

于是对于正项级数有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

【证】由一切 $a_n \ge 0$ 知 S_n 单调增加, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在且要么 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n < +\infty$ (收敛), 要么 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$总有意义. 又由 S_n 单调增加知: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n < +\infty$ 当且仅当 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界.

设 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界 $M(< +\infty)$: $S_n \le M, n = 1, 2, 3, , \dots$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\ge 1} S_n \le M. \qquad \square$$

【例】(1) 根据级数的定义和上节结果有 (注意 n 从 0 出发!)

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

(2) 设 $2 \le q \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1)$. 则 x 的 q- 进表示即为无穷级数:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{q^n} = 0.a_1a_2a_3\dots; \qquad a_n \in \{0,1,...,q-1\}.$$

【证】只需证(2). 由教学讲义第二章第9节学习的实数的q进制表示知：对任意实数$0 \le x < 1$, 存在**唯**一的整数列$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{0,1,...,q-1\}$ 使得对任意$n \in \mathbb{N}$ 有

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q^k} + \frac{\varepsilon_n(x)}{q^n}$$

其中$0 \le \varepsilon_n(x) < 1$. 因

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q^k} \le (q-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} = (q-1)\frac{1/q-(1/q)^{n+1}}{1-1/q} < 1, \quad n = 1,2,3,...$$

故由“正项级数收敛的充要条件是其部分和有上界”可知正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{q^k}$收敛. 又显然$\frac{\varepsilon_n(x)}{q^n} \to 0\,(n \to \infty)$, 于是令$n \to \infty$ 即得x的q进展开式:

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q^k} + \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{q^k}. \qquad \square$$

【通项趋零而级数发散的例子】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

【证】考察部分和：我们有

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Longrightarrow S_{2n} - S_n \not\longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

据 Cauchy 准则知 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛. 根据上述**定理2(正项级数基本定理)** 即知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. $\square$

【定义(绝对收敛和条件收敛 important)】设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为复数列.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, 则称原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

换言之: 条件收敛 = 收敛但不绝对收敛. $\square$

【定理3】绝对收敛的级数一定收敛.

【证】设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. 由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{m>n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = 0.$$

因

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Big| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

故应用两边夹原理即得

$$\lim_{m>n\to\infty} \Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Big| = 0.$$

再由 Cauchy 收敛准则即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. $\square$

收敛而不绝对收敛的例子将在后面给出.

【命题2】(**收敛级数的简单运算**) 设两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, α, β 为常数. 则

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 也收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} \beta b_n.$$

(2)

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

(3) 设a_n, b_n均为实数.

$$\text{若}\ \ a_n \le b_n,\ \ n = 1, 2, 3, ...,\ \ \text{则}\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(4) 设a_n, b_n均为实数.

$$\text{若}\ \ a_n \le b_n,\ \ n = 1, 2, 3, ...\ \text{且}\ \exists N\ \ \text{s.t.}\ \ a_N < b_N,\ \ \text{则}\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(5) **常用性质**. 收敛的级数的尾巴趋于零, 即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0.$$

【证】(1)：由级数收敛的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\alpha a_n+\beta b_n)=\lim_{m\to\infty}\left(\alpha\sum_{n=1}^{m}a_n+\beta\sum_{n=1}^{m}b_n\right)\\&=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{m}a_n+\beta\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{m}b_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n.\end{aligned}$$

(2)：对任意 $m\in\mathbb{N}$ 有

$$\Big|\sum_{n=1}^{m}a_n\Big|\le\sum_{n=1}^{m}|a_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

因此

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Big|=\lim_{m\to\infty}\Big|\sum_{n=1}^{m}a_n\Big|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

(3)：这个证明与(1)的证明类似, 即从部分和出发并使用级数收敛的定义.

(4)：由假设有

$$\sum_{n=1}^{m}(b_n-a_n)\ge b_N-a_N\qquad\forall\, m>N.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(b_n-a_n)\ge b_N-a_N>0$$

从而由(1) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)>0$$

也即

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n>\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

(5)：令$S=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. 对任意$n\in\mathbb{N}$, 由$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}a_k&=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k=S-\sum_{k=1}^{n}a_k.\end{aligned}$$

因此由级数收敛的定义知$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ 收敛且

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=S-\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

然后再由级数收敛的定义即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S - S = 0. \qquad \square$$

【例】

(1) 发散的正项级数之间无法比较：

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \quad 且 \quad 0 < \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 < +\infty$$

$$但两个级数皆为无穷大: \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

原因是关于无穷大的运算, 没有消去律. 例如对任意实数a 恒有$+\infty + a = +\infty$.

(2) 收敛级数之间的比较:

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \quad 也确实有 \quad 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

以后我们在学习 Fourier 级数时将能算出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. $\square$

• **级数敛散性的常用判别法**.

【**定理4(正项级数的比较原理)**】设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数.

(1)

$$若 \quad a_n \le b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \quad 则 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2)假设存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge N$ 时 $a_n \le b_n$. 则

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

换言之, 大的级数收敛蕴含小的级数收敛；小的级数发散蕴含大的级数发散.

【证】(1): 由假设有$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} b_k, n = 1, 2, 3, \ldots.$ 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

(2): 将(1)应用于级数 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n.$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ 是实数(不是无穷大), 这就给出(2)中的结论. $\square$

【定理5(Weierstrass 优级数判别法)】设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为收敛的正项级数.

若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge N$ 时 $|a_n| \le b_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

【证】由假设有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$收敛, 也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. $\square$

优级数判别法简单且最常用.

【例】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ 绝对收敛.

【定理6(Cauchy 根式判别法)】给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 令

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

若 $\alpha < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

若 $\alpha > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

若 $\alpha = 1$, 则无法判别: 收敛和发散都有可能.

【证】取 q 满足 $\alpha < q < 1$, 例如 $q = \frac{\alpha+1}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} |a_k|^{1/k} = \alpha < q$$

可知存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge n_0$ 是时有 $\sup\limits_{k\ge n} |a_k|^{1/k} < q$. 于是当 $n \ge n_0$ 有 $|a_n|^{1/n} \le \sup\limits_{k\ge n} |a_k|^{1/k} < q$ 从而 $|a_n| < q^n$. 因 $0 < q < 1$ 故等比级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} < \infty.$$

据比较原理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

设 $\alpha > 1$. 此时由**典型极限 5(根式判别法)**知$\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ 从而$a_n \not\to 0\,(n\to\infty)$.
因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 事实上在**典型极限 5(根式判别法)**的证明中我们得到了一个子列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$它趋于无穷大: $\lim\limits_{k\to\infty} |a_{n_k}| = +\infty$.

最后我们举出满足 $\alpha = 1$ 的发散级数和收敛级数.

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. 但

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1.$$

又已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. 但也有

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right]^2 = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right]^2 = 1. \qquad \square$$

【定理7(达朗贝尔比值判别法)】设数列 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足

$$a_n \ne 0,\ \ n = 1, 2, 3, ...; \qquad \text{极限} \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{存在.}$$

则

当 $\alpha < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当 $\alpha = 1$ 时, 无法判别: 收敛和发散都有可能.

【证】由假设和**典型极限 9** 知

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \alpha.$$

于是达朗贝尔比值判别法便是 Cauchy 根式判别法的推论. 换言之, **能用比值判别的必定能用根式判别.** 再由典型极限 9 还知上面对 $\alpha = 1$ 即临界情形举出的发散和收敛的两个例子在此也完全适用. $\square$

【例】利用根式判别法或比值判别法易见级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都绝对收敛, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}<\infty\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

事实上

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{|x|^n}{n!})^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n!)^{1/n}}=0<1\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}.\qquad\Box$$

【例】在研究集合之间对等问题时, 我们的助教赖力(2014级直博生)得到了下面结果:

【引理(赖力2014)】若$x,y\in[0,1)$, 则下面蕴含关系成立:

$$x\neq y\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[nx]}{(2n)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[ny]}{(2n)!}\in\mathbb{R}\setminus\mathbf{Q}.$$

这里$[t]$ 表示不超过实数t的最大整数.

由这一结果即可证明实数集$\mathbb{R}$按“差为有理数分类”的等价类的集合C 与$\mathbb{R}$ 有相同基数.

【证】(by Lai Li). 首先由根式判别法易见上述级数收敛. 设$x,y\in[0,1)$ 且$x\neq y$. 可以假设$x>y$. 因函数$t\mapsto[t]$ 单调不减且$x>y$, 故对任意$n\in\mathbb{N}$ 有$[nx]\geq[ny]$. 为证明这一引理我们用反证法. 假设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[nx]}{(2n)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[ny]}{(2n)!}$ 是有理数: 即存在$q\in\mathbb{N}$ 和$p\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[nx]}{(2n)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[ny]}{(2n)!}=\frac{p}{q}.$$

则

$$0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!}=\frac{p}{q}$$

从而有

$$0\leq\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!}=\frac{p}{q}-\sum_{n=1}^{q}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!},\tag{$*$}$$

$$\begin{aligned}
0&\leq(2q)!\frac{p}{q}-(2q)!\sum_{n=1}^{q}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!}=(2q)!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!}\\
&\leq(2q)!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}=(2q)!\frac{q+1}{(2(q+1))!}+(2q)!\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2q)!\frac{q+1}{(2q+2)(2q+1)(2q)!} + (2q)!\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{n}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)!}\\
&= \frac{1}{2(2q+1)} + (2q)!\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{n}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)!}\\
&\le \frac{1}{2(2q+1)} + (2q)!\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{n}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2q)!}\\
&= \frac{1}{2(2q+1)} + \frac{1}{2}\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}
\end{aligned}
$$

其中我们用到了$n \ge q+2 \Longrightarrow 2n-4 \ge 2(q+2)-4 = 2q \Longrightarrow (2n-4)! \ge (2q)!$.

因

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \le \sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-3)} = \sum_{n=q+2}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\Big)\\
&= \sum_{n=q+2}^{\infty}\Big(\frac{1}{2(n-1)-1}-\frac{1}{2n-1}\Big) = \frac{1}{2(q+1)-1} = \frac{1}{2q+1}
\end{aligned}
$$

故

$$
0 \le (2q)!\frac{p}{q} - (2q)!\sum_{n=1}^{q}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!} \le \frac{1}{2(2q+1)} + \frac{1}{2(2q+1)} < 1. \qquad (**)
$$

但易见

$$
(2q)!\frac{p}{q} \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \frac{(2q)!}{(2n)!} \in \mathbb{N}, \quad n = 1, 2, , ..., q
$$

所以$(**)$ 的左边是一个非负整数. 于是必有

$$
(2q)!\frac{p}{q} - (2q)!\sum_{n=1}^{q}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!} = 0
$$

从而由$(*)$得到

$$
(2q)!\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{[nx]-[ny]}{(2n)!} = 0.
$$

因$[nx]-[ny] \ge 0$ for all $n \ge 1$, 故得到

$$
[nx]-[ny] = 0 \qquad \forall\, n \ge q+1.
$$

再注意$nx < [nx]+1, ny \ge [ny]$, 我们得到

$$
n(x-y) = nx - ny < [nx]-[ny]+1 = 1, \quad n = q+1, q+2, q+3, \ldots .
$$

因此

$$
0 < x-y < \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

这矛盾于$x-y>0$ (它与n 无关). 这个矛盾便证明了本引理成立. $\square$

• **变号的级数的收敛性**.

【引理1(Abel分部求和公式)】：对于数a_k,b_k 和$n\ge 2$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{k}a_j\Big)(b_k-b_{k+1})+\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)b_n.$$

一般地设 $p<q$ 为整数. 则

$$\sum_{k=p}^{q}a_kb_k=\sum_{k=p}^{q-1}\Big(\sum_{j=p}^{k}a_j\Big)(b_k-b_{k+1})+\Big(\sum_{k=p}^{q}a_k\Big)b_q.$$

【证】 令 $A_k=\sum\limits_{j=p}^{k}a_j$, 并令 $A_{p-1}=0$. 则 $a_k=A_k-A_{k-1}, k=p,p+1,...,q$. 由此我们计算

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}a_kb_k&=\sum_{k=p}^{q}(A_k-A_{k-1})b_k=\sum_{k=p}^{q}A_kb_k-\sum_{k=p}^{q}A_{k-1}b_k\\&=\sum_{k=p}^{q}A_kb_k-\sum_{k=p-1}^{q-1}A_kb_{k+1}=\sum_{k=p}^{q}A_kb_k-\sum_{k=p}^{q-1}A_kb_{k+1}\\&=A_qb_q+\sum_{k=p}^{q-1}A_kb_k-\sum_{k=p}^{q-1}A_kb_{k+1}=\sum_{k=p}^{q-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_qb_q.\end{aligned}$$

最后这个等号就是我们要证明的. $\square$

【注】Abel 分部求和公式是处理难题的一个重要手段. 将来在学习积分理论时会看到, 分部求和公式对应于分部积分公式. 其作用是: 将问题转化为能处理的情形. 人们常说: "当你走头无路时, 想想分部求和(分部积分)". 下面的结果和例题属于分部求和公式的应用.

【引理2】：设 $p<q$ 为整数,

$$b_p\ge b_{p+1}\ge\cdots\ge b_q\qquad\text{或}\qquad b_p\le b_{p+1}\le\cdots\le b_q.$$

又设

$$\Big|\sum_{j=p}^{k}a_j\Big|\le C,\quad k=p,p+1,...,q.$$

则

$$\Big|\sum_{k=p}^{q}a_kb_k\Big|\le 2C(|b_p|+|b_q|).$$

【证】可以假定 b_k 单调下降, 否则以 $-b_k$ 代替 b_k. 据 Abel 分部求和公式和对 a_k 的假定有

$$\Big|\sum_{k=p}^{q}a_kb_k\Big|\le\sum_{k=p}^{q-1}\Big|\sum_{j=p}^{k}a_j\Big|(b_k-b_{k+1})+\Big|\sum_{k=p}^{q}a_k\Big||b_q|\le C\Big(\sum_{k=p}^{q-1}(b_k-b_{k+1})+|b_q|\Big)$$
$$=C\Big(b_p-b_q+|b_q|\Big)\le C(|b_p|+2|b_q|)\le 2C(|b_p|+|b_q|).\qquad\square$$

【定理8(Dirichlet 判别法)】设形式级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有界:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}a_k\Big|\le C,\quad n=1,2,3,\dots.$$

又设

$$b_1\ge b_2\ge b_3\ge\cdots\ge b_n\ge\cdots\ge 0;\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

【证】对任意 $m>n\in\mathbb{N}$ 有

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\Big|\le\Big|\sum_{k=1}^{m}a_k\Big|+\Big|\sum_{k=1}^{n}a_k\Big|\le 2C.$$

因此由引理 1 和 b_n 的单调减少、非负且趋于零有

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k\Big|\le 4C(b_{n+1}+b_m)\le 8Cb_{n+1}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty).$$

所以

$$\lim_{m>n\to\infty}\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k\Big|=0.$$

据 Cauchy 收敛准则即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛. $\square$

下面这个引理在后面也要用到.

【引理3】设 $b_1\ge b_2\ge b_3\ge\cdots\ge b_n\ge 0$. 则

$$0\le\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k\le b_1.$$

【证】首先指出: 利用归纳法易证

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}=\begin{cases}1 & \text{if}\quad m\quad\text{is}\quad\text{odd},\\ 0 & \text{if}\quad m\quad\text{is}\quad\text{even}.\end{cases}\qquad(*)$$

对于引理的证明, 可以假定 $n \geq 2$. 则由 Abel 分部求和公式、b_k 单调减少且非负以及上面等式 $(*)$ 有

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\Big)(b_k - b_{k+1}) + \Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big)b_n \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) + b_n = b_1 - b_n + b_n = b_1. \qquad \square \end{aligned}$$

收敛而不绝对收敛的例子:

【例】

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \log 2 = 0.6971....;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

由 Dirichlet 判别法 (或下面作业 1) 知这两个级数收敛; 其和分别等于$\log 2$ 和$\pi/4$ 的计算将在以后学习Taylor 级数时给出. 这儿要说明这两个级数都只是条件收敛的: 例如对第二个, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\Big| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty. \qquad \square$$

【作业题】

1. 证明交错级数的 Leibnitz 判别法: 若 $b_n > 0$ 单调下降且 $b_n \to 0\,(n \to \infty)$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛. 此外证明 $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n < b_1$.

2. 证明下列级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin(\frac{1}{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

【综合例题】(或纳入习题课). 设$a_n > 0, n = 1, 2, 3, \ldots$. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

【证】充分地来证明对任意$N \geq 2$ 有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}. \tag{$*$}$$

如果$(*)$ 成立, 则令$N\to\infty$ 即得所证不等式.

当$N=2$时, $(*)$显然成立. 下设$N\geq 3$.

- 先假设$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_N$. 令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 变形并使用Cauchy 不等式有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{S_n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{S_n}\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{n}{S_n}\Big)^2a_n}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}}. \tag{$**$}$$

来证明

$$\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{n}{S_n}\Big)^2a_n<2\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{S_n}.$$

没有别的办法, 我们考虑Abel分部求和公式. 首先由单调性$a_1\leq a_2\leq a_3\leq\cdots\leq a_N$ 易证

$$\frac{n+1}{S_{n+1}}\leq\frac{n}{S_n},\quad n=1,2,...,N-1.$$

由这一不等式和Abel分部求和公式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{n}{S_n}\Big)^2a_n=\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\left(\Big(\frac{n}{S_n}\Big)^2-\Big(\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)^2\right)+\Big(\sum_{k=1}^{N}a_k\Big)\Big(\frac{N}{S_N}\Big)^2\\
&=\sum_{n=1}^{N-1}S_n\left(\Big(\frac{n}{S_n}\Big)^2-\Big(\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)^2\right)+S_N\Big(\frac{N}{S_N}\Big)^2\\
&=\sum_{n=1}^{N-1}S_n\Big(\frac{n}{S_n}-\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)\Big(\frac{n}{S_n}+\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)+\frac{N^2}{S_N}\\
&\leq\sum_{n=1}^{N-1}S_n\Big(\frac{n}{S_n}-\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)2\frac{n}{S_n}+\frac{N^2}{S_N}\\
&=2\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\frac{n}{S_n}-\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)n+\frac{N^2}{S_N}.
\end{aligned}$$

对最后这个和式, 再次使用Abel分部求和公式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\frac{n}{S_n}-\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)n=\sum_{n=1}^{N-2}\left(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{S_k}-\frac{k+1}{S_{k+1}}\Big)\right)(-1)+\left(\sum_{k=1}^{N-1}\Big(\frac{k}{S_k}-\frac{k+1}{S_{k+1}}\Big)\right)(N-1)\\
&=\sum_{n=1}^{N-2}\Big(\frac{1}{S_1}-\frac{n+1}{S_{n+1}}\Big)(-1)+\Big(\frac{1}{S_1}-\frac{N}{S_N}\Big)(N-1)\\
&=\sum_{n=2}^{N-1}\frac{n}{S_n}-\frac{N-2}{S_1}+\frac{N-1}{S_1}-\frac{N(N-1)}{S_N}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{S_n}-\frac{N^2}{S_N}.
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{n}{S_n}\Big)^2a_n\leq 2\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{S_n}-2\frac{N^2}{S_N}+\frac{N^2}{S_N}<2\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{S_n}.$$

由这一不等式和(∗∗) 即得(∗).

- 回到一般情形. 对于$a_1, a_2, ..., a_N$, 取一置换$\sigma : \{1, 2, ..., N\} \to \{1, 2, ..., N\}$ 使得$a_{\sigma(1)} \le a_{\sigma(2)} \le \cdots \le a_{\sigma(N)}$. 则由第二章关于实数排序的结果有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(n)}, \quad n = 1, 2, ..., N.$$

于是应用单调情形的结果有

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(n)}} < 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_{\sigma(n)}} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}.$$

所以不等式(∗) 对所有$N \ge 2$成立. □

上述例题也可翻译成: 对任意$a_n > 0, n = 1, 2, 3, ...$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

这表明, 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (即收敛), 则其调和平均值级数也收敛.

回忆不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

瑞典数学家Carleman证明了更强的结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

这里$e = 2.71828....$ 证明见**习题课**.

再回忆

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

但显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$$

除非一切$a_n = 0$.

§3.6 二重级数

二重级数是指通项$a_{i,j}$ 有两个下标且对双下标i,j求和的级数$\sum\limits_{i,j} a_{i,j}$. 与单重级数(一个下标的级数) 很不相同的是, 二重级数$\sum\limits_{i,j} a_{i,j}$中对双下标$i,j$求和的方式很多！到底采取哪种求和方式合适? 是矩形求和还是三角形求和? 不同的求和方式对于级数的值有影响吗?, 等等, 这些问题可以很复杂. 但是如果通项$a_{i,j}$均为非负实数, 则结论就很简单: 级数的值与求和方式无关! 对于通项a_{ij}为复数的二重级数, 则可先考察通项为$|a_{ij}|$的二重级数$\sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|$, 利用正项级数的结果和"绝对收敛蕴含收敛", 来计算二重级数$\sum\limits_{i,j} a_{i,j}$.

回忆复数的有限矩形求和及其换序:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\Big) = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Big).$$

利用这一关系式我们可以定义非矩形的求和方式:

为了以后应用方便(特别是在幂级数理论的学习中), 我们让下标i,j 从0出发求和. 以下令

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

【定义】设 $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$ 为一个二元数列, $E \subset \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ 为有限集. 取 $n, m \in \mathbb{N}$ 充分大使得 $E \subset \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,|\, i \le n, j \le m\}$. 定义 $a_{i,j}$ 在 E 上的和为

$$\sum_{(i,j)\in E} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} 1_E(i,j)$$

其中 $1_E(i,j)$ 是 E 的特征函数. $\square$

【注1】不难证明上面定义的和式与 n, m 的选取无关, 也即它只由上式左边出现的东西 $E, a_{i,j}$ 唯一决定. 事实上若 $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ 都满足

$$E \subset \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,|\, i \le n_1,\ j \le m_1\},$$

$$E \subset \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,|\, i \le n_2,\ j \le m_2\},$$

则取 $n = \min\{n_1, n_2\}, m = \min\{m_1, m_2\}$, 便有

$$E \subset \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,|\, i \le n,\ j \le m\}.$$

易见当 $i>n$ 时 $(i,j)\notin E, j=0,1,2,,...,$ 从而 $1_E(i,j)=0,\ j=0,1,2,...;$ 而当 $j>m$ 时有 $(i,j)\notin E, i=0,1,2,,...,$ 从而 $1_E(i,j)=0,\ i=0,1,2,....$ 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{m_1}a_{i,j}1_E(i,j)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_1}a_{i,j}1_E(i,j)+\sum_{i=n+1}^{n_1}\sum_{j=0}^{m_1}a_{i,j}1_E(i,j)\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_1}a_{i,j}1_E(i,j)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}1_E(i,j)+\sum_{j=m+1}^{m_1}a_{i,j}1_E(i,j)\Big)\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}1_E(i,j).\end{aligned}$$

把 n_1,m_1 换成 n_2,m_2 上述等式同样成立. 因此

$$\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{m_1}a_{i,j}1_E(i,j)=\sum_{i=0}^{n_2}\sum_{j=0}^{m_2}a_{i,j}1_E(i,j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}1_E(i,j).$$

【这种性质叫做被"良好定义的"(well-defined). 就像我们说极限符号 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是由 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $n\to\infty$ 唯一决定的一样, 不依赖其它东西. 如果还不得不依赖其它因素, 就应把那个因素也写进符号中去, 或必须伴随文字说明. 例如下面关于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}$ 的定义中, 由于"E_n 递增到 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$"这个前提条件的文字太长无法浓缩到记号 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}$ 中, 故只能另外用文字说明. 等等. 希望大家认真体会这点.】

【注2】由非负性$a_{i,j}\ge 0$ 可知成立单调性:

$$A\subset B\implies \sum_{(i,j)\in A}a_{i,j}\le\sum_{(i,j)\in B}a_{i,j}.$$

事实上取取 $n,m\in\mathbb{N}$ 充分大使得 $B\subset\{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\,|\,i\le n,j\le m\}$. 则由$A\subset B$ 有$1_A(i,j)\le 1_B(i,j)$ 从而有

$$\sum_{(i,j)\in A}a_{i,j}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}1_A(i,j)\le\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}1_B(i,j)=\sum_{(i,j)\in B}a_{i,j}.\qquad\square$$

二重求和的另一常见方式是三角形求和.

【命题1(三角形求和)】对于自然数N 和任一组数$a_{i,j},\ i,j=0,1,2,...;i+j\le N$, 有

$$\sum_{i,j\ge 0,\,i+j\le N}a_{i,j}=\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}\Big).$$

【证】我们将利用二重求和的定义和特征函数的性质. 令

$$E=\{(i,j)\,|\,i,j=0,1,2,...;i+j\le N\},\quad E_n=\{(i,j)\in E\,|\,i+j=n\},\quad n=0,1,...,N.$$

则$E=\bigcup_{n=0}^N E_n$ 且由E_n 互不相交有

$$1_E(i,j)=\sum_{n=0}^N 1_{E_n}(i,j)\qquad \forall\, i,j\in\mathbb{N}^*\cup\{0\}.$$

又由E_n的取法易见

$$\sum_{i=0}^N\sum_{j=0}^N a_{i,j}1_{E_n}(i,j)=\sum_{i,j\ge 0,\,i+j=n}a_{i,j}=\sum_{k=0}^{n-k}a_{k,n-k}$$

$n=0,1,2,\dots N$. 据此我们计算

$$\sum_{i,j\ge 0,\,i+j\le N}a_{i,j}=\sum_{(i,j)\in E}a_{i,j}=\sum_{i=0}^N\sum_{j=0}^N a_{i,j}1_E(i,j)=\sum_{i=0}^N\sum_{j=0}^N\Big(\sum_{n=0}^N a_{i,j}1_{E_n}(i,j)\Big)$$

$$=\sum_{n=0}^N\Big(\sum_{i=0}^N\sum_{j=0}^N a_{i,j}1_{E_n}(i,j)\Big)=\sum_{n=0}^N\Big(\sum_{i,j\ge 0,\,i+j=n}a_{i,j}\Big)=\sum_{n=0}^N\Big(\sum_{k=0}^{n-k}a_{k,n-k}\Big).$$

另法(直观法). 将$a_{i,j}$ 排成三角阵使得每一行元素的下标之和不变:

$a_{0,0}$

$a_{0,1},\quad a_{1,0}$

$a_{0,2},\quad a_{1,1},\quad a_{2,0}$

....

$a_{0,n},\quad a_{1,n-1},\quad a_{2,n-2},\quad \dots,\quad a_{n,0}$

....

$a_{0,N},\quad a_{1,N-1},\quad a_{2,N-2},\quad \dots,\quad a_{n,N-n},\quad \dots,\quad a_{N,0}.$

则按三角阵的行求和有

$$\sum_{i,j\ge 0,\,i+j\le N}a_{i,j}=\sum_{n=0}^N\Big(\sum_{i,j\ge 0,\,i+j=n}a_{i,j}\Big)=\sum_{n=0}^N\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}\Big).\qquad\square$$

【定义(正项二重级数)】设 $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ 为一个**非负**二元数列. 设 $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ 的非空子集序列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 满足：每个 E_n 都是**有限集**且 E_n 递增到 $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, 即

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots;\qquad \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*=\bigcup_{n=1}^\infty E_n.$$

由非负性$a_{i,j}\ge 0$ 可知数列$n\mapsto \sum\limits_{(i,j)\in E_n} a_{i,j}$是单调增加的. 因此极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(i,j)\in E_n} a_{i,j}$存在. 我们定义 $a_{i,j}$ 在 $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ 上的求和为

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}:=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}a_{i,j}:=\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}.$$

并称上式左边$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{i,j}$ 即 $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}a_{i,j}$ 为一个以 $a_{i,j}$ 为通项的正项二重级数. □

下面这个定理说明上面定义的二重级数, 其数值与子集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的选择无关, 并给出了计算二重级数的累次求和及换序公式. 在叙述和证明这个定理前我们需要引进 $[0,+\infty]$ 中的运算：对任意 $0\le a<+\infty$ 定义

$$\begin{aligned}
&a+(+\infty)=+\infty+a=+\infty,\quad +\infty+(+\infty)=+\infty,\\
&a\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot a=+\infty\quad \text{if } a>0,\\
&(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty\,,\\
&0\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot 0=0.
\end{aligned}$$

因此在$[0,+\infty]$ **中, 加法和乘法总有意义!**

【定理1(正项二重级数的求和与求和方式无关; 累次求和换序定理)】

设 $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ 为一个**非负**二元数列. 则

(a) 极限值

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}:=\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}$$

与满足

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots,\quad \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

的非空有限子集序列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$的选取方式无关, 即该极限值对任意这样的集合列$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$不变.

(b) 成立累次求和换序公式:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

上式右端理解为部分和的累次极限: 例如 (根据单重级数的定义)

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}\Big).$$

(c) 成立三角形求和公式:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}\Big).$$

【证】(a),(b): 先证明

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).\tag{1*}$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$, 由一重级数的定义和有限和换序性质有

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}\Big)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}\Big)=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}\Big(\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}\Big)$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}\Big)\le\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)\le\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

同样可证

$$\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)\le\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

所以 (1∗) 成立.

其次证明

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).\tag{2*}$$

首先由$E_k\subset E_{k+1}$ 知$k\mapsto\sum\limits_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}$ 是单调增加的数列, 因此极限$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}$存在.

对每个 $k\in\mathbb{N}$, 因 E_k 是有限集, 故可取 $n_k,m_k\in\mathbb{N}$ 充分大使得

$$E_k\subset\{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\,|\,i\le n_k,\ j\le m_k\}.$$

则应用求和换序并注意 $0\le a_{i,j}1_{E_k}(i,j)\le a_{i,j}$ 有

$$\sum_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}=\sum_{i=0}^{n_k}\sum_{j=0}^{m_k}a_{i,j}1_{E_k}(i,j)=\sum_{i=0}^{n_k}\Big(\sum_{j=0}^{m_k}a_{i,j}1_{E_k}(i,j)\Big)\le\sum_{i=0}^{n_k}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)\le\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

因 k 是任意的, 令 $k\to\infty$ 即得

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}\le\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

反之对任意 $n,m\in\mathbb{N}$, 由 $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}E_k$ 知对满足 $i\le n,\ j\le m$ 的任何 $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, 都存在 $k_{i,j}\in\mathbb{N}$ 使得 $(i,j)\in E_{k_{i,j}}$. 令

$$p=\max\{k_{i,j}\mid i\le n,\ j\le m\}.$$

则由 E_k 递增有

$$\{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\,|\,i\le n,\ j\le m\}\subset\bigcup_{i\le n,\,j\le m}E_{k_{i,j}}=E_p.$$

由此有

$$1_{E_p}(i,j)=0\qquad\forall\, i\le n,\ \forall\, j\le m.$$

另一方面取 $n_p>n, m_p>m\in\mathbb{N}$ 充分大使得

$$E_p\subset\{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\,|\,i\le n_p,\ j\le m_p\}.$$

于是得到 (注意 $a_{i,j}\ge 0$)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}\Big)&=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}1_{E_p}(i,j)\Big)\le\sum_{i=0}^{n_p}\Big(\sum_{j=0}^{m_p}a_{i,j}1_{E_p}(i,j)\Big)\\&=\sum_{(i,j)\in E_p}a_{i,j}\le\lim_{k\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}.\end{aligned}$$

因 n,m 是任意的, 故先令 $m\to\infty$ 得到

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}\Big)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}\Big)\le\lim_{k\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}.$$

再令 $n\to\infty$ 得到

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)\le\lim_{k\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}.$$

这就证明了 (2$*$) 成立.

联合 (1$*$), (2$*$) 即完成了证明.

由(2$*$) 和(1$*$)可知极限值$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{(i,j)\in E_k}a_{i,j}$ 与$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$的选取无关. 这就证明了(a)和(b).

(c): 令$E_N=\{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\,|\,i+j\le N\}$, $N\in\mathbb{N}$. 则E_n 都是有限集且

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots;\quad \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*=\bigcup_{N=1}^{\infty}E_N.$$

由上面引理知

$$\sum_{(i,j)\in E_N} a_{i,j} = \sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k}\Big), \quad N=1,2,3,\dots.$$

故由上面结果和级数的定义即得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \lim_{N\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_N} a_{i,j} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k}\Big). \qquad \Box$$

【定义(绝对收敛的二重级数)】设 $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ 为一个二元复数列. 若

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_{i,j}| < +\infty$$

则称二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$绝对收敛. 如果二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$绝对收敛, 则定义

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} := \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} a_{i,j} := \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n} a_{i,j}$$

其中$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ 为任一非空子集序列, 满足：每个 E_n 都是**有限集**且 E_n 递增到 $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, 即

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots; \qquad \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \qquad \Box$$

下面定理说明, 如果二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$绝对收敛, 则部分和序列$n\mapsto \sum\limits_{(i,j)\in E_n} a_{i,j}$必收敛从而极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(i,j)\in E_n} a_{i,j}$存在. 此外上面的累次求和公式等等也都成立.

【定理2(绝对收敛的二重级数的求和与求和方式无关; 累次求和换序定理)】

设二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$绝对收敛. 则

(a) 极限值

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} := \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n} a_{i,j}$$

是一个复数且与满足

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots, \quad \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

的非空有限子集序列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$的选取方式无关, 即该极限值对任意这样的集合列$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$不变.

(b) 成立累次求和换序公式:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j}\Big).$$

上式右端理解为部分和的累次极限: 例如 (根据单重级数的定义)

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\Big(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}\Big).$$

(c) 成立三角形求和公式:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}\Big).$$

【证】首先引进一个实数$x\in\mathbb{R}$的正部$(x)_+$ 和负部$(x)_-$:

$$x^{(+)}=\max\{x,0\}=\frac{|x|+x}{2},\quad x^{(-)}=(-x)^{(+)}=\max\{-x,0\}=\frac{|x|-x}{2}.$$

易见

$$x^{(\pm)}\ge 0,\quad x=x^{(+)}-x^{(-)},\quad |x|=x^{(+)}+x^{(-)}.$$

先设一切$a_{i,j}$皆为实数. 则由$a_{i,j}^{(\pm)}\le|a_{i,j}|$ 知

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}^{(\pm)}\le\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_{i,j}|<+\infty.$$

任取有限非空子集序列$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ 满足$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$; $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 由非负性$a_{i,j}^{(\pm)}\ge 0$ 和正项二重级数的累次求和换序定理有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}^{(\pm)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}^{(\pm)}=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}^{(\pm)}\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}^{(\pm)}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}^{(\pm)}\Big).$$

因这些级数都有限(不是无穷大), 故它们之间可以做减法, 从而可知原二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{i,j}$收敛:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}=\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}=\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}\left(a_{i,j}^{(+)}-a_{i,j}^{(-)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}^{(+)}-\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}^{(-)}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}^{(+)}-\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j}^{(-)}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}^{(+)}\Big) - \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}^{(-)}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(a_{i,j}^{(+)} - a_{i,j}^{(-)})\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\Big).$$

同理有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\Big)$$

和

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n} a_{i,j} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k}\Big).$$

因右端的级数与$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$无关, 故以上同时证明了绝对收敛的实二重级数的求和与求和方式无关.

其次看一般情形即$a_{i,j}$为复数. 写

$$a_{i,j} = \mathrm{Re}(a_{i,j}) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(a_{i,j}), \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

由

$$|\mathrm{Re}(a_{i,j})|, |\mathrm{Im}(a_{i,j})| \le |a_{i,j}|$$

知

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{Re}(a_{i,j})|,\ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{Im}(a_{i,j})| \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_{i,j}| < +\infty.$$

任取有限非空子集序列$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ 满足$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$; $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 由绝对收敛的实二重级数的结果我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Re}(a_{i,j}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}\mathrm{Re}(a_{i,j})\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Re}(a_{i,j})\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{Re}(a_{i,j})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(a_{i,j})\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Im}(a_{i,j}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}\mathrm{Im}(a_{i,j})\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big).\end{aligned}$$

因这些级数都有限(不是无穷大), 故它们的线性组合有意义, 从而可知原二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$收敛:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n} a_{i,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}\Big(\mathrm{Re}(a_{i,j}) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{(i,j)\in E_n}\mathrm{Re}(a_{i,j}) + \mathrm{i}\sum_{(i,j)\in E_n}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}\mathrm{Re}(a_{i,j}) + \mathrm{i}\lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}\mathrm{Im}(a_{i,j})\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Re}(a_{i,j})\Big) + \mathrm{i}\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Re}(a_{i,j}) + \mathrm{i}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\mathrm{Re}(a_{i,j}) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(a_{i,j})\Big)\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\Big).
\end{aligned}
$$

同理可证

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}\Big)$$

和

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(i,j)\in E_n}a_{i,j} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}\Big).$$

因右端的级数与$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$无关, 故以上同时证明了绝对收敛的复二重级数的求和与求和方式无关. □

【矩形求和与三角形求和的关系】矩形求和与三角形求和各有特点, 应用时刻根据需要确定采取哪种求和. 但为了得到某种结果, 需要估计这两种求和的差. 我们以正方形求和为例作一观察. 结果是:

【命题(正方形求和与三角形求和的差)】设$N \in mN$, $a_{i,j}$为复数$i, j \in \{0, 1, 2, ..., N\}$. 则有

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}a_{i,j} - \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}a_{n,N+k-n}.$$

【证】利用特征函数, 我们将有限求和化为无限求和从而可利用上面得到的公式. 注意在下面推导中所有级数都是绝对收敛的. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}1_{\{i\le N\}}1_{\{j\le N\}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}1_{\{k\le N\}}1_{\{n-k\le N\}}\\
&= \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}1_{\{k\le N\}}1_{\{n-k\le N\}}\\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}1_{\{k\le N\}}1_{\{n-k\le N\}} + \sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k}1_{\{k\le N\}}1_{\{n-k\le N\}}\\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}a_{k,n-k} + \sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{k=1}^{n}a_{k,n-k}1_{\{k\le N\}}1_{\{n-k\le N\}}.
\end{aligned}
$$

计算最后z这项:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{k=1}^{n} a_{k,n-k}1_{\{k\le N\}}1_{\{n-k\le N\}} = \sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{k=1}^{N} a_{k,n-k}1_{\{n-k\le N\}}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=N+1}^{2N} a_{k,n-k}1_{\{n-k\le N\}} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=N+1}^{N+k} a_{k,n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} a_{k,N+j-k} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} a_{n,N+j-n} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_{n,N+k-n}. \qquad \square
\end{aligned}$$

将这一公式用于$a_{i,j} = a_i b_j$ 便有

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N} b_n\Big) - \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=1}^{n} b_{N+k-n}.$$

对于从1出发的求和, 作平移$\widetilde{a}_n = a_{n+1}, \widetilde{b}_n = b_{n+1}, n = 0, 1, ..., N-1$, 利用上面结果容易算得

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{N} b_n\Big) - \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = \sum_{n=2}^{N} a_n \sum_{k=1}^{n-1} b_{N+k-n}.$$

§3.6 级数的重排和级数的乘法

本节是二重级数理论的重要应用. 我们学习单重级数的重排和单重级数的乘法.

【级数的重排】与有限和不同, 对于一个无穷级数, 改变其通项的求和顺序后, 新的级数的和是否保持不变？这是个问题. 对于正项级数或绝对收敛的级数, 回答是肯定的; 对于条件收敛的级数, 回答是否定的. 后者是 Riemann 的一个一般结果, 放在习题课上介绍. 我们下面只考虑肯定的结果, 即只考虑正项级数和绝对收敛的级数. 这方面的应用很多, 习题有趣.

利用上述定理我们可以研究单重级数的求和与重排问题.

【定义 (子集上的求和)】设 $A \subset \mathbb{N}$ 非空. 设 $1_A(n)$ 为 A 的特征函数. 对任意复数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 定义$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$在A上的求和为形式级数

$$\sum_{n\in A} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(n).$$

进一步,

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(n)$收敛, 即极限$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(n) = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n 1_A(n)$存在有限, 称$\sum\limits_{n\in A} a_n$收敛.

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(n)$有意义, 即极限$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(n) = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n 1_A(n)$存在但可能无限(例如$a_n$皆非负时), 称$\sum\limits_{n\in A} a_n$有意义. □

记号上注意, 当 $A = \mathbb{N}$ 时便回到前面定义的级数, 即

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

【命题1(有限项求和)】设 a_n 为复数, $n = 1, 2, 3, \dots$. 则对任意有限集$A = \{n_1, n_2, ..., n_N\} \subset \mathbb{N}$ 都有

$$\sum_{n\in A} a_n = \sum_{k=1}^{N} a_{n_k}$$

并且上式右端的数值与A的元素的排列方式无关.

【证】引进 Kroneker 符号

$$\delta_{i,j} = \delta_{j,i} = 1_{\{i=j\}} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j, \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j. \end{cases}$$

对有限集A 的元素的任何编号 $A=\{n_1,n_2,...,n_N\}$, 据特征函数的定义易见有

$$1_A(n)=\sum_{k=1}^{N}\delta_{n,n_k},\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

从而有

$$a_n1_A(n)=\sum_{k=1}^{N}a_n\delta_{n,n_k},\quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

特别有

$$a_n1_A(n)=0\qquad \forall\, n>M:=\max\{n_1,n_2,...,n_N\}.$$

这蕴含

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n1_A(n)|=\sum_{n=1}^{M}|a_n1_A(n)|<+\infty.$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n1_A(n)$绝对收敛从而收敛. 于是有

$$\sum_{n\in A}a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}a_n1_A(n)=\sum_{n=1}^{M}a_n1_A(n)$$
$$=\sum_{n=1}^{M}\Big(\sum_{k=1}^{N}a_n\delta_{n,n_k}\Big)=\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{n=1}^{M}a_n\delta_{n,n_k}\Big)=\sum_{k=1}^{N}a_{n_k}.$$

设$A=\{m_1,m_2,...,m_N\}$ 是A的另一排列. 则由第二章证明的"有限多个数的等权求和与排列顺序无关"可知

$$\sum_{k=1}^{N}a_{m_k}=\sum_{k=1}^{N}a_{n_k}.\qquad\qquad \Box$$

【定理1(正项级数重排不变)】设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是任一正项级数.

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$在任意重排下不变, 即对于$\mathbb{N}$的任意重排$\mathbb{N}=\{n_1,n_2,n_3,...\}$ 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}.$$

一般地, 对于$\mathbb{N}$的任意无限子集A, 级数$\sum\limits_{n\in A}a_n$在A的元素的任意重排下不变, 即对于A的任何两个排列$A=\{n_1,n_2,n_3,...\}=\{m_1,m_2,m_3,...\}$ 都有

$$\sum_{n\in A}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{m_k}.$$

【证】只需证一般情形. 设$A=\{n_1,n_2,n_3,...\}$. 则

$$1_A(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{n,n_k},\quad a_n1_A(n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_n\delta_{n,n_k},\qquad n=1,2,3,\dots.$$

由$\sum\limits_{n\in A}^{\infty}a_n$的定义和正项二重级数的累次求和换序定理有

$$\sum_{n\in A}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_A(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_n\delta_{n,n_k}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\delta_{n,n_k}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}.$$

同理可证上式对于另一排列$A=\{m_1,m_2,m_3,...\}$也成立. □

【定理2(绝对收敛的级数重排不变)】设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$.

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$在任意重排下不变, 即对于$\mathbb{N}$的任意重排$\mathbb{N}=\{n_1,n_2,n_3,...\}$ 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}.$$

一般地, 对于$\mathbb{N}$的任意无限子集A, 级数$\sum\limits_{n\in A}^{\infty}a_n$在$A$的元素的任意重排下不变, 即对于$A$的任何两个排列$A=\{n_1,n_2,n_3,...\}=\{m_1,m_2,m_3,...\}$ 都有

$$\sum_{n\in A}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{m_k}.$$

【证】只需证一般情形. 设$A=\{n_1,n_2,n_3,...\}$.

先设a_n 均为实数. 令$a_n^{(+)}\ge 0, a_n^{(-)}\ge 0$为$a_n$的正部和负部. 则由上面关于正项级数重排不变的结果, 并注意由级数绝对收敛可知下面的减法有意义, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}^{\infty}a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_A(n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(+)}1_A(n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(-)}1_A(n)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}^{(+)}-\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}^{(-)}=\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}^{(+)}-a_{n_k}^{(-)})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}.\end{aligned}$$

其次设a_n为复数. 则对a_n的实部和虚部应用上面结果有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}^{\infty}a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_A(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}(a_n)1_A(n)+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}(a_n)1_A(n)\\&=\sum_{n\in A}^{\infty}\mathrm{Re}(a_n)+\mathrm{i}\sum_{n\in A}^{\infty}\mathrm{Im}(a_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(a_{n_k})+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Im}(a_{n_k})\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathrm{Re}(a_{n_k})+\mathrm{i}\mathrm{Im}(a_{n_k})\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}.\end{aligned}$$

同理可证上式对于另一排列$A=\{m_1,m_2,m_3,...\}$也成立. $\square$

【例】$A=\{2^k\,|\,k=1,2,3,...\}, B=\{2k-1\,|\,k=1,2,3,...\}$ 则

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1;\quad \sum_{n\in B}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=+\infty.$$

【定理3 (正项级数的分组求和)】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为任一正项级数. 则对于 $\mathbb{N}$ 的任意分解[1]

$$\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\qquad A_k \text{ 非空且互不相交}$$

都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n\in A_k}a_n\Big).$$

一般情形: 设 $A\subset\mathbb{N}$ 为无限集. 则对于 A 的任意分解

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\qquad A_k \text{ 非空且互不相交}$$

都有

$$\sum_{n\in A}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n\in A_k}a_n\Big).$$

【证】只需证一般情形. 由 A 的分解和特征函数的定义有

$$1_A(n)=\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(n)\,,\quad n\in\mathbb{N}.$$

因此

$$a_n1_A(n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_n1_{A_k}(n),\quad n\in\mathbb{N}.$$

此外由 $\sum\limits_{n\in A_k}a_n$ 的定义有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_{A_k}(n)=\sum_{n\in A_k}a_n,\quad k\in\mathbb{N}.$$

于是应用正项二重级数累次求和可换序即得

$$\sum_{n\in A}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_A(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_n1_{A_k}(n)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_{A_k}(n)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n\in A_k}a_n\Big).\qquad\square$$

[1]集合的分解是指该集合被写成若干非空的互不相交的子集的并.

【定理4 (绝对收敛的级数的分组求和)】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$.
则对于 $\mathbb{N}$ 的任意分解

$$\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\qquad A_k\ \text{非空且互不相交}$$

级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{n\in A_k}a_n\Big)$ 也绝对收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n\in A_k}a_n\Big).$$

一般情形: 设 $A\subset\mathbb{N}$ 为一无限集, 它有分解

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\qquad A_k\ \text{非空且互不相交}.$$

则级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{n\in A_k}a_n\Big)$也绝对收敛且有

$$\sum_{n\in A}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n\in A_k}a_n\Big).$$

【证】只需证一般情形. 由正项二重级数累次求和可换序和绝对收敛的假设有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|1_{A_k}(n)&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|1_{A_k}(n)\Big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(n)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|1_A(n)\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty.\end{aligned}$$

这里用到$\sum\limits_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(n)=1_A(n)$. 这说明二重级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_n|1_{A_k}(n)$绝对收敛. 于是由绝对收敛的二重级数累次求和可换序便有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_A(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(n)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_n1_{A_k}(n)\Big)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_{A_k}(n)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n\in A_k}a_n\Big).\end{aligned}$$

最后需说明上式右端级数是绝对收敛的. 事实上, 如上, 由假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$ 和正项二重级数累次求和可换序有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{n\in A_k}a_n\Big|&\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n\in A_k}|a_n|\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|1_{A_k}(n)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|1_{A_k}(n)\Big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(n)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|1_A(n)\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty.\end{aligned}$$ □

【注】由恒等式(下标平移)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}, \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k-1}$$

可知如果所考虑的数或集合的下标是从0出发的, 那么通过这一恒等式并将$\mathbb{N}$换成$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, 易见以上所有定理对于下标从 0 出发的情形显然也成立.

例如设一切 $a_n \geq 0$, 或者$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$. 设 $A \subset \mathbb{N}$ 为无限集. 则对 A 的任意分解

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k, \qquad A_k \text{ 非空且互不相交}$$

都有

$$\sum_{n \in A} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n \in A_k} a_n \Big).$$

【应用】一类正项级数的 Cauchy 估计: 设 $a_n \geq 0$ 单调减少. 则有Cauchy估计:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty.$$

【证】考虑 $\mathbb{N}$ 的分解:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k, \quad A_k = \{2^k, 2^k + 1, 2^k + 2, ..., 2^{k+1} - 1\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

即

$$A_0 = \{1\}, \quad A_1 = \{2, 3\}, \quad A_2 = \{4, 5, 6, 7, \}, \quad A_3 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, \ldots.$$

易见A_k 互不相交. 应用正项级数的重排定理有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n \in A_k} a_n \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \Big).$$

因 a_n 单调减少, 故

$$2^k a_{_{2^{k+1}}} \leq 2^k a_{_{2^{k+1}-1}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq 2^k a_{_{2^k}}.$$

所以

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k+1}a_{_{2^{k+1}}}\le\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}.$$

这就证明了上述 Cauchy 估计. $\square$

【例】

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=+\infty\qquad\text{if}\quad p\le 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\frac{1}{1-2^{1-p}}<+\infty\quad\text{if}\quad p>1.$$

【证】当 $p\le 1$ 时 $n^p\le n$ 从而 $\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$ 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

设 $p>1$. 则由 Cauchy 估计有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2^k)^p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2^k)^{p-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^k}=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{1-p})^k=\frac{1}{1-2^{1-p}}.$$

对这个估计也可不用 Cauchy 方法而直接论证如下: 设 $n\ge 2$, 令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}.$$

考虑奇、偶分别求和我们有

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}<1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k)^p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}\\&<1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=1+\lambda S_n\end{aligned}$$

其中 $\lambda=\frac{1}{2^{p-1}}$. 因此我们得到

$$S_n<S_{2n}<1+\lambda S_n\quad\text{and so}\quad S_n<\frac{1}{1-\lambda},\quad n=2,3,4,\dots.$$

这说明 S_n 有上界 $\frac{1}{1-\lambda}$. 因 S_n 单调增加, 令 $n\to\infty$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_n\le\frac{1}{1-\lambda}=\frac{1}{1-2^{1-p}}.$$

严格不等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\frac{1}{1-2^{1-p}}$ 的证明留作练习 (用定理 4 并注意该定理下面的注). $\square$

【作业题】设$3 \le q \in \mathbb{N}$, $p \in \{0,1,...,q-1\}$. 设A是所有这样的自然数的集合, 这些自然数的q-进制表示中不含数字p. 证明

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < q(q-2).$$

(为论证方便, 不妨设$p = q-1$. 在证明中应注意, 在长度为k的自然数q-进制表示$n = a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0 = \sum_{i=0}^{k-1} a_i q^i$中, 要求最高位$a_{k-1}$ 大于零, 这里$a_i \in \{0,1,...,q-1\}$.)

【评论】一个很有代表性的问题是, 既然已有了似乎更好的技术, 不用级数重组、不用 Cauchy 估计等理论就能直接解决问题, 为何还要引进级数重组理论和 Cauchy 方法之类的东西 (尤其是学时很紧张的时候)? 关于这点, 我们可以这样回答：研究中永远都有“一般方法”和“特案特办”的区别. 虽然特案处理的方式很巧, 但其使用范围较窄, 反之一般理论虽然不那么有针对性, 但它毕竟可用. 至少当你走投无路的时候, 可以求助于一般理论. 而且事实上理论是经过把很多个别技术进行了综合, 抽出的最本质的部分而形成的, 其中有些本质部分是以往没有意识到的！因而它的作用有时候甚至比貌似高超的技巧还好. 很多大师同时具有技术突破和综合构建理论这两种能力. 此外理论的作用也是解放生产力, 例如微积分理论的建立, 使得我们不必用小作坊式的技术、高超的人为技巧解决貌似不同的个别问题. 记住这个讨论, 它可以解释类似事情.

【级数的乘法】级数的乘法有巨大丰富的应用；复杂的计算如乘法, 在问题研究中成为主要难点. 无限多个数两两相乘后再求和, 方式可以很多, 属于二重级数行为. 通常使用两种二重级数求和法: 矩形法和三角形法. 基本思想是: 无限大的矩形等于无限大的直角三角形. 为了后面应用方便, 我们考虑下标从0出发的情形, 它当然不失一般性.

【定义 (级数的 Cauchy 乘法)】设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 为两个形式级数, 其中a_n, b_n为复数. 定义$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$的 Cauchy 乘法为一个以$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$为通项的级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

当它的收敛或发散未知时, 它仍是一个形式级数. $\square$

【定理5(正项级数的Cauchy乘法)】设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 为任意两个正项级数. 则有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

[注意: 由非负性$a_n \ge 0, b_n \ge 0$ 可知上面三个级数都是正项级数因此都有意义.]

【证】对正项二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_i b_j$, 应用正项二重级数的累次求和换序性质和三角形求和法有

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(a_i\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

□

【定理6(绝对收敛的级数的Cauchy乘法)】设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 为两个**绝对**收敛的级数. 则它们的 Cauchy 乘法也绝对收敛且有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

【证】由假设知

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

对正项二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_i||b_j|$, 应用正项二重级数的累次求和换序性质和三角形求和法有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_i||b_j| = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\Big) < +\infty$$

这说明二重级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_i b_j$ 绝对收敛, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ 绝对收敛. 由绝对收敛的二重级数的累次求和换序性质和三角形求和法便有

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(a_i\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

□

【下标平移】如果所考虑的级数的求和是从 $n = 1$ 出发的, 则上述定理可写为 (在相同的收敛性假设下)

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}\,.$$

事实上 a_n 从 $n=1$ 出发等效于 a_{n+1} 从 $n=0$ 出发. 同理 c_n 从 $n=0$ 出发等效于 c_{n-1} 从 $n=1$ 出发. 记住这一点, 我们计算

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\Big)&=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}b_{n-k+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_{n-k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-(k-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}.\end{aligned}$$

另法证明: 补充 $a_0=b_0=0$. 则利用 $n=0$ 出发的结果有 (在后几步的计算中去掉含有 a_0,b_0 的项)

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\Big)&=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\\&=a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1}a_kb_{n+1-k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}.\end{aligned}$$

上面倒数第二个等号用到下标平移, 最后等号用到 $b_0=0$. □

例如当满足相关收敛条件时有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}$$

上面右边的因子 $(-1)^{n-1}$ 与 k 无关是因为

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k(-1)^{n+1-k-1}b_{n+1-k}=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}.$$

这些细节方面要在做题中积累经验.

【例】假设 $a_n\geq 0, b_n\geq 0$ 都**单调减少且趋于零** $(n\to\infty)$. 证明两个交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 的 Cauchy 乘法

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k} \tag{1*}$$

收敛的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\Big(a_n\sum_{k=1}^{n}b_k+b_n\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)=0. \tag{2*}$$

此外, 当 (1$*$) 收敛或等价地当 (2$*$) 满足时, 有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}. \tag{3$*$}$$

【证】回忆: 根据交错级数的 Leibnitz 判别法 (见前面作业题) 知两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n \quad \text{都收敛.}$$

我们先证明

$$(1*)\ \text{收敛} \iff \sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=0. \tag{4$*$}$$

设(1$*$)收敛. 则由级数收敛的必要条件是通项趋于零知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=\lim_{n\to\infty}\Big|(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}\Big|=0.$$

反之设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=0.$

往下我们将使用§**3.5** 末尾处建立的方形求和与三角形求和的误差关系：

$$\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{N}\beta_n\Big)-\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n+1-k}=\sum_{n=2}^{N}\alpha_n\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{N+k-n}.$$

将这一关系式用于$\alpha_n=(-1)^{n-1}a_n,\beta_n=(-1)^{n-1}b_n$ 得到

$$\begin{aligned}
&\left|\Big(\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}b_n\Big)-\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}\right|\\
&=\left|\sum_{n=2}^{N}(-1)^{n-1}a_n\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{N-n+k-1}b_{N+k-n}\right|.\\
&\le\sum_{n=2}^{N}a_n\left|\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_{N+k-n}\right|=\sum_{n=2}^{N}a_n\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_{N+k-n}\right)\\
&\le\sum_{n=2}^{N}a_nb_{N+1-n}\longrightarrow 0\quad (N\to\infty).
\end{aligned}$$

由此可知 Cauchy 乘法 (1$*$) 收敛同时有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}\\
&=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}b_n\Big)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n\Big).
\end{aligned}$$

以上证明了(4∗)成立且当(1∗)收敛时(3∗)成立.

最后, 为完成证明, 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=0 \iff \lim_{n\to\infty}\left(a_n\sum_{k=1}^{n}b_k+b_n\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=0. \tag{5∗}$$

事实上假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=0$. 则由 a_k, b_k 单调减少得到

$$\begin{aligned}
&a_n\sum_{k=1}^{n}b_k+b_n\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_nb_k+\sum_{k=1}^{n}a_kb_n\\
&\le\sum_{k=1}^{n}a_{n+1-k}b_k+\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=2\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

反之假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\sum\limits_{k=1}^{n}b_k+b_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)=0.$ 对任意$n\ge 4$, 看分解

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=\sum_{k=1}^{[n/2]}a_kb_{n+1-k}+\sum_{k=[n/2]+1}^{n}a_kb_{n+1-k}.$$

其中 $[n/2]$ 为 $n/2$ 的整数部分. 通过讨论 n 的奇偶性易见

$$n+1-[n/2]\ge[n/2];\quad n-[n/2]\le[n/2]+1.$$

由此和 a_k, b_k 的单调性有

$$\sum_{k=1}^{[n/2]}a_kb_{n+1-k}\le\Big(\sum_{k=1}^{[n/2]}a_k\Big)b_{n+1-[n/2]}\le b_{[n/2]}\sum_{k=1}^{[n/2]}a_k,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=[n/2]+1}^{n}a_kb_{n+1-k}&\le a_{[n/2]+1}\sum_{k=[n/2]+1}^{n}b_{n+1-k}\\
&=a_{[n/2]+1}\sum_{k=1}^{n-[n/2]}b_k\le a_{[n/2]+1}\sum_{k=1}^{[n/2]+1}b_k.
\end{aligned}$$

由假设知

$$b_{[n/2]}\sum_{k=1}^{[n/2]}a_k\longrightarrow 0,\quad a_{[n/2]+1}\sum_{k=1}^{[n/2]+1}b_k\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty).$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}\to 0\ (n\to\infty)$. 这就证明了 (5∗) 成立. □

【作业题(选自吉米多维奇习题集)】设 $\alpha > 0, \beta > 0$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}$ 的 Cauchy 乘法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}$ 收敛的充分必要条件是 $\alpha+\beta > 1$. 而在它收敛时有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}.$$

[提示: 可以使用事实: 若$0 \neq x_n \to 0\,(n \to \infty)$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha$.]

§3.7 幂级数

幂级数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 函数类不仅包含了多项式$P(z)=\sum\limits_{n=0}^{m}a_nz^n$ 函数类, 还包含了很多初等函数, 如指数函数, 对数函数, 三角函数, 幂函数等等. 一个函数若在一点z_0附近可以表示成收敛的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, 则称这函数在$z_0$点是解析的. 如果一个函数在某集合上是处处解析的, 则称该函数在这个集合上是解析的. 同学们以后学习的复变函数论课程主要就是研究解析函数类. 幂级数函数有很好的类似于多项式的代数性质. 例如若两个幂级数若在某点微小邻域内处处相等, 则可推知这两个幂级数处处相等, 而后者又等价于两个幂级数的系数完全相同. 这个性质被广泛地用于组合数学和相关领域. 因此幂级数理论值得好好学习. 本节我们将用上面建立的一些性质来导出幂级数的基本性质. 为了使本课程与复变函数论在记号上尽量一致, 我们将用z表示幂级数的自变量(多数情况下是复数), 也常用x,y 表示幂级数的实的或复的自变量.

【定义】设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一数列(实的或复的). 设$z\in\mathbb{C}$. 我们称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

为一个幂级数或形式幂级数. 一般地, 对于$z,z_0\in\mathbb{C}$, 称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

为一个幂级数或形式幂级数. $\Box$

把z 换成$z-z_0$ 可知我们只需研究第一种幂级数.

下面学习幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$的收敛性. 显然当$z=0$ 时, 幂级数收敛且

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n0^n=a_0\qquad(\text{用到规定: }0^0=1.)$$

为了确定最大收敛范围, 我们考察$|a_n|^{1/n}$ 的上极限: $\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$.

【定理1(Cauchy-Hadamard收敛半径公式)】对任一幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,

$$\text{称}\quad \rho:=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}\quad \text{为幂级数}\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\quad \text{的收敛半径}$$

这里定义

$$\rho=+\infty\quad\text{当}\ \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=0,\quad \rho=0\quad\text{当}\ \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=+\infty.$$

则我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ 只在} z=0 \text{ 收敛} \iff \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty \text{ 即 } \rho = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ 对任意} z\in\mathbb{C} \text{ 绝对收敛} \iff \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0 \text{ 即 } \rho = +\infty.$$

中间情形: 设$0<\rho<+\infty$. 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ 当} |z|<\rho \text{ 时绝对收敛,} \quad \text{当} |z|>\rho \text{ 时发散,}$$

当$|z|=\rho$ 时可能收敛也可能发散; 而即便对同一个幂级数, 对于满足$|z|=\rho$的不同的z, 收敛和发散都可以发生.

【证】令$M := \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在$z=0$收敛. 若$M<+\infty$, 则对满足$M|z|<1$ 的任意$z\neq 0$有

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| = M|z| < 1.$$

据Cauchy 根式判别法知级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 绝对收敛(从而收敛). 这与$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在$z=0$收敛矛盾. 因此必有$M=+\infty$.

反之设$M=+\infty$. 假设存在$0\neq z_0\in\mathbb{C}$ 使得级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 收敛. 则由收敛的必要条件知$a_n z_0^n \to 0\,(n\to\infty)$. 特别这蕴含$\{a_n z_0^n\}_{n=0}^{\infty}$有界: 存在$0<B<+\infty$ 使得$|a_n z_0^n|\le B$, $n=1,2,3,....$ 这蕴含

$$|a_n|^{1/n}|z_0| = |a_n z_0^n|^{1/n} \le B^{1/n}, \quad |a_n|^{1/n} \le \frac{1}{|z_0|}B^{1/n}, \quad n=1,2,3,\dots.$$

从而有

$$M = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|z_0|}B^{1/n} = \frac{1}{|z_0|}\lim_{n\to\infty} B^{1/n} = \frac{1}{|z_0|} < +\infty.$$

与$M=+\infty$矛盾. 这矛盾说明$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只能在$z=0$收敛.

其次设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 对任意$z\in\mathbb{C}$ 收敛. 则对任意$\varepsilon>0$, 取$z\in\mathbb{C}$ 使得$|z|=1/\varepsilon$. 由收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n z^n|=0$. 因此存在$N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n||z|^n = |a_n z^n| \le 1 \quad \forall\, n\ge N. \implies |a_n|^{1/n}|z| \le 1 \quad \text{i.e.} \quad |a_n|^{1/n} \le \frac{1}{|z|} = \varepsilon \quad \forall\, n\ge N.$$

这给出

$$M=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\le\limsup_{n\to\infty}\varepsilon=\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$的任意性即知$M=0$.

反之设$M=0$. 则对任意$z\in\mathbb{C}$ 有

$$\limsup_{n\to\infty}|a_nz^n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}|z|=M|z|=0<1.$$

据Cauchy 根式判别法知级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 绝对收敛从而收敛. 因z是任意的, 这证明了$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在$\mathbb{C}$上处处收敛.

现在设$0<M<+\infty$ 即$0<\rho<+\infty$. 对任意$z\in\mathbb{C}$ 有

$$\limsup_{n\to\infty}|a_nz^n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}|z|=M|z|=\frac{|z|}{\rho}.$$

据Cauchy 根式判别法知当$|z|<\rho$ 时即$\limsup\limits_{n\to\infty}|a_nz^n|^{1/n}<1$ 时, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$绝对收敛, 当$|z|>\rho$ 时即$\limsup\limits_{n\to\infty}|a_nz^n|^{1/n}>1$ 时, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$发散.

最后看临界的情形. 令$a_n=\rho^{-n}, n=0,1,2,\dots$. 则显然相应的幂级数的收敛半径等于$\rho$. 此时对于$|z|=\rho$ 有$|a_nz^n|=(|z|/\rho)^n=1\not\to 0\,(n\to\infty)$ 从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z/\rho)^n$ 发散. 这说明对于临界情形$|z|=\rho$ 有发散的例子.

又若令$a_0=0,\ a_n=\frac{1}{n^2}\rho^{-n},\ n=1,2,3,...,$. 则相应的幂级数的收敛半径也等于$\rho$ (这里用到$\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)^{1/n}=1$.) 此时对于$|z|=\rho$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|z|/\rho)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

这说明临界情形$|z|=\rho$也有收敛的例子.

而若取$a_0=0, a_n=\frac{1}{n}\rho^{-n}, n=1,2,3,\dots$. 则(如上) 相应的幂级数的收敛半径也等于$\rho$ 此时对于$z=\rho$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z/\rho)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,\quad \text{发散}.$$

而对于$z=-\rho$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z/\rho)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},\quad \text{收敛}.$$

这说明对同一个幂级数, 在临界情形中, 收敛和发散都可能发生. $\square$

【例】

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ \text{对任意}z\in\mathbb{C}\ \text{绝对收敛},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}n!z^n\quad\text{只在}z=0\ \text{收敛}.$$

事实上早先例题中已证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n!)^{1/n}}=0\qquad\text{即}\quad \lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n}=+\infty.$$

因此上面第一个幂级数的收敛半径为$+\infty$, 即这幂级数在$\mathbb{C}$上处处绝对收敛, 第二个幂级数的收敛半径为0, 因此这幂级数只在$z=0$收敛. $\square$

幂级数基本性质中最常用的是下面给出的幂级数乘法定理.

【定理2(幂级数的乘法)】设两个幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 在点$z\in\mathbb{C}$处绝对收敛. 则二者的Cauchy乘法也绝对收敛且等于二者的乘积, 也即

$$\text{若}\quad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<+\infty,\ \sum_{n=0}^{\infty}|b_n||z|^n<+\infty\quad\text{则}\quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n||z|^n<+\infty$$

并且

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\,,\qquad\text{其中}\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\,.$$

【证】由假设条件和上面的**定理6(绝对收敛的级数的Cauchy乘法)** 可知本定理中的绝对收敛性成立, 并有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kz^kb_{n-k}z^{n-k}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)z^n.\qquad\square$$

【例】设 $|z|<1$. 则

$$\Big(\frac{1}{1-z}\Big)^2=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\,.$$

事实上

$$|z|<1\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n=\frac{1}{1-|z|}<+\infty\quad\text{(绝对收敛)}$$

$$\Longrightarrow \Big(\frac{1}{1-z}\Big)^2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}\,. \qquad \Box$$

【作业题】假设

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n < +\infty, \quad |z| < 1\,.$$

令

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1\,.$$

证明

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)z^n\,, \quad |z| < 1\,.$$

【例(指数函数)】称由幂级数

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

定义的函数$\exp(z)$为**指数函数**. 这个名称来自于它具有的下面关于“指数函数”的特性:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2), \quad \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \qquad \forall\, z_1, z_2, z \in \mathbb{C},$$

$$\exp(0) = 1\,; \quad \text{对任意数列} z_n \to 0\,(n \to \infty) \ \text{都有} \ \lim_{n\to\infty} \exp(z_n) = 1.$$

此外我们有

$$\exp(1) = e = 2.71828..., \quad \exp(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

【证】在前面的例子中我们已证明了这个幂级数在$\mathbb{C}$上处处绝对收敛. 于是由幂级数乘法的Cauchy乘法定理有: 对任意 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2).$$

又对任意$z \in \mathbb{C}$ 有

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\bar{z})^n}{n!}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots .$$

令$N \to \infty$ 得到

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \exp(\bar{z}).$$

显然有

$$\exp(0) = 1, \quad \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

易见当$x \geq 0$ 时$\exp(x) \geq 1$. 由这些结果有

$$1 = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z) \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$x \leq y \implies 1 \leq \exp(y - x) = \exp(y)\exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)} \implies \exp(x) \leq \exp(y).$$

$$|\exp(z) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|\exp(|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

注意当$|z| \leq 1$时$\exp(|z|) \leq \exp(1) = e$. 因此对任意趋于零的数列$z_n \to 0\,(n \to \infty)$, 不妨对一切$n$ 有$|z_n| \leq 1$, 则有

$$|\exp(z_n) - 1| \leq |z_n|\exp(|z_n|) \leq |z_n|e \to 0 \quad (n \to \infty).$$

下证 $\exp(x) = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

对任意 $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$有

$$\exp(mx) = \exp(x + (m-1)x) = \exp(x)\exp((m-1)x) = \cdots = (\exp(x))^m,$$

$$\exp(-mx)(\exp(x))^m = \exp(-mx)\exp(mx) = \exp(0) = 1 \Longrightarrow \exp(-mx) = (\exp(x))^{-m}.$$

因此

$$\exp(mx) = (\exp(x))^m \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

取 $x = 1$ 得到

$$\exp(m) = e^m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

取 $x = \frac{1}{n}$ 得到

$$e = \exp(n\frac{1}{n}) = (\exp(\frac{1}{n}))^n \quad \Longrightarrow \quad \exp(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

由此得到

$$\exp(\frac{m}{n}) = (\exp(\frac{1}{n}))^m = (e^{\frac{1}{n}})^m = e^{\frac{m}{n}}, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}.$$

这证明了

$$e^r = \exp(r) \qquad \forall\, r \in \mathbb{Q}.$$

由此, 对任意$x \in \mathbb{R}$, 取有理数列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$使得$r_n \to x$ 即$|r_n - x| \to 0 (n \to \infty)$. 则有

$$|\exp(r_n - x) - 1| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

从而有

$$|e^{r_n} - \exp(x)| = |\exp(r_n) - \exp(x)| = |\exp(x)||\exp(r_n - x) - 1| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$e^x = \lim_{n \to \infty} e^{r_n} = \exp(x). \qquad \square$$

我们已证明了

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

因此可以把$x \mapsto e^x$延拓到整个复数域, 即定义

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

称$z \mapsto e^z$ 是以e为底的指数函数.

§3.7. 指数函数、对数函数、幂函数和三角函数

上节我们定义了指数函数$z \mapsto e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 并证明了限制在实数域$\mathbb{R}$上, $x \mapsto e^x$ 就是我们在前面用更基本的方式定义的(以$a = e$为底的)指数函数.

本节我们将证明所有指数函数、对数函数、幂函数和三角函数都可由固定的指数函数$x \mapsto e^x$生成或由它定义, 例如

与对数函数的关系: 对数函数$y \mapsto \log(y), y > 0$, 是指数函数$y = e^x$的反函数;

与一般指数函数的关系: 对任意$a > 0$ 有$a^x = e^{x \log a}, \quad x \in \mathbb{R}$;

与三角函数的关系：$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \qquad x \in \mathbb{R}$;

与幂函数的关系：$x^\alpha = e^{\alpha \log x}, \quad x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$. 等等.

这些表明指数函数e^z是最重要的初等函数, 值得学习掌握它的各种性质.

• **指数函数**.

【定理1(指数函数基本性质)】对于指数函数$e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 我们有下列性质:

(i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(ii) $e^z \neq 0, \quad (e^z)^{-1} = e^{-z}, \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

(iii) $e^{\mathbb{R}} = (0, +\infty)$ 即指数函数$x \mapsto e^x\ (x \in \mathbb{R})$的值域等于$(0, +\infty)$.

(iv) $(e^x)^y = (e^y)^x = e^{xy} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(v) $x < y \quad \Longrightarrow \quad e^x < e^y$.

(vi) $|e^z| \le e^{|z|}, \quad |e^z - 1| \le |z|e^{|z|} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} e^{z_n} = e^z$.

【证】性质(i),(ii) 已在前面证过. 性质(iv),(v) 属于**§3.4**中**命题(正实数的幂及其基本性质)**中的结论. 事实上(v)还可直接证明如下:

$$y > x \quad \Longrightarrow \quad e^y e^{-x} = e^{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-x)^n}{n!} > 1 \quad \Longrightarrow \quad e^y > e^x.$$

(vi)的证明已在上节关于指数函数的例子中给出. 再看一遍:

$$|e^z| = \Big|\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big| \le \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

由性质(vi)易得(vii): 设$z_n\to z\,(n\to\infty)$. 可设$|z_n-z|<1, n=1,2,3,\dots$. 则由(vi) 有

$$|e^{z_n}-e^z|=|e^z(e^{z_n-z}-1)|=|e^z||e^{z_n-z}-1|\le e^{|z|}|z_n-z|e^{|z_n-z|}\le e^{|z|+1}|z_n-z|\to 0$$

$(n\to\infty)$. 性质(vii)也称为指数函数的连续性.

最后证明(iii). 由$e^x>0$ $(x\in\mathbb{R})$ 知$e^{\mathbb{R}}\subset(0,+\infty)$. 下证$(0,+\infty)\subset e^{\mathbb{R}}$.

任取$y_0\in(0,\infty)$. 要证存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得$y_0=e^{x_0}$. 由$e^n\to+\infty(n\to\infty)$ 知存在 $N\in\mathbb{N}$ $e^N>\max\{y_0,1/y_0\}$. 这蕴含$e^{-N}<y_0<e^N$. 因此 $-N\in\{x\in\mathbb{R}\,|\,e^x\le y_0\}$. 又由 $x\mapsto e^x$ 单调增加可知当 $x\ge N$ 时 $e^x\ge e^N>y_0$. 因此 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,e^x\le y_0\}\subset(-\infty,N)$. 所以 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,e^x\le y_0\}$ 非空且有上界. 令

$$x_0=\sup\{x\in\mathbb{R}\,|\,e^x\le y_0\}.$$

来证明 $e^{x_0}=y_0$. 由上确界的定义, 易见存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\{x\in\mathbb{R}\,|\,\exp(x)\le y_0\}$ 使得 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$. 因此由(vii) 有

$$e^{x_0}=\lim_{n\to\infty}e^{x_n}\le y_0.$$

另一方面, 由于 x_0 是上确界, 故对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $x_0+1/n\notin\{x\in\mathbb{R}\,|\,e^x\le y_0\}$ 即 $e^{x_0+1/n}>y_0$. 因此

$$e^{x_0}=\lim_{n\to\infty}e^{x_0+1/n}\ge y_0.$$

这就证明了 $y_0=e^{x_0}$. 所以$(0,+\infty)\subset e^{\mathbb{R}}$. 因此$e^{\mathbb{R}}=(0,+\infty)$. $\square$

- **对数函数**. 因 $y\mapsto e^y$ 严格单调增加, 故它有反函数 $x\mapsto\log x$, $x\in(0,+\infty)$, 即

$$y=\log x\quad\Longleftrightarrow\quad x=e^y.$$

称 log 为以 e 为底的对数函数. 易见 $x\mapsto\log x$ 也是严格增加的, 它的值域为 $\mathbb{R}$.

对数函数运算法则:

$$\log(xy)=\log x+\log y,\qquad x>0,y>0.$$

$$\log(x^y)=y\log x,\qquad x>0,y\in\mathbb{R}.$$

事实上由恒等式

$$a\equiv e^{\log a},\qquad a>0$$

有

$$e^{\log(xy)} = xy = e^{\log x}e^{\log y} = e^{\log x+\log y} \quad \Longrightarrow \quad \log(xy) = \log x + \log y.$$

而由等式$(e^a)^b = e^{ab}$ 还有

$$e^{\log(x^y)} = x^y = (e^{\log x})^y = e^{y\log x} \quad \Longrightarrow \quad \log(x^y) = y\log x.$$

以a为底的指数函数和对数函数.

设$a > 0$. 由恒等式$a = e^{\log a}$有$a^r = (e^{\log a})^r = e^{r\log a}, r \in \mathbf{Q}$. 因此由$a^x$的定义(见§3.3)和$z \mapsto e^z$的连续性(见定理15 之(vii))有

$$a^x = e^{x\log a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

注意到$e^{z\log a} = \exp(z\log a), z \in \mathbb{C}$, 指数函数$x \mapsto a^x$可以扩展到复数域, 也即可以定义

$$a^z = e^{z\log a}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

称$z \mapsto a^z$为以a为底的指数函数.

以上当$a = 1$时, 由$\log 1 = 0$ 知$1^z \equiv 1$.

设$0 < a \neq 1$. 由$a^x = (a^{-1})^{-x}$. 可知**只需考虑$a > 1$的情形**. 此时(即$a > 1$时), 由$\log a > 0$知指数函数$y \mapsto a^y = e^{y\log a}$ 在$\mathbb{R}$ 上严格单调增加且值域等于$(0, +\infty)$. 其反函数$y = \log_a x\,(x \in (0, +\infty))$ 称为是以a为底的对数函数.

由恒等式

$$a^{\log_a x} = x = e^{\log x}, \quad a^{\log_a x} = e^{(\log a)\log_a x}$$

得知

$$\log x = (\log a)\log_a x \quad 即 \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad x \in (0, +\infty).$$

以上表明, 为研究一般的指数函数和对数函数, 只需研究以e为底的指数函数和对数函数即可.

- **幂函数**.

对任意实数α, 称函数$x \mapsto x^\alpha, x \in (0, +\infty)$ 为以α为幂的幂函数.

由对数函数性质我们有

$$x^\alpha = e^{\alpha\log x}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

当$\alpha > 0$时, $x \mapsto x^\alpha$的定义域为$[0,+\infty)$ 且$0^\alpha = 0$, 其中$0^\alpha = 0$ 是因为当$\alpha = \frac{1}{n}$ 时有(由根式的定义) $0^{1/n} = 0$ 从而当$\alpha = m/n\,(m,n \in \mathbb{N})$ 有$0^{m/n} = (0^{1/n})^m = 0$, 也即$0^r = 0$对所有正有理数成立.因此利用极限可定义$0^\alpha = 0$, 也即对任意正有理数列$r_n \to \alpha\,(n\to\infty)$ 有$0^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} 0^{r_n} = 0$.

当$\alpha = 0$ 时，我们定义

$$x^0 \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

运算法则(当每一项都有意义时)：

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

- **三角函数**. 余弦、正弦函数可以被定义为指数函数 $e^{\mathrm{i}x}$ 的实部和虚部:

$$\cos x := \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x := \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

在这个定义下我们有

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

【定理2】按上面定义的函数 $\cos x, \sin x$ 就是我们通常用到的余弦、正弦函数. 此外有

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x4}{4!} - \cdots,$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

【证】对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $\overline{\mathrm{i}x} = -\mathrm{i}x$, 于是

$$\overline{e^{\mathrm{i}x}} = e^{\overline{\mathrm{i}x}} = e^{-\mathrm{i}x}, \quad |e^{\mathrm{i}x}|^2 = e^{\mathrm{i}x}\overline{e^{\mathrm{i}x}} = e^{\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}x} = e^0 = 1.$$

所以

$$\cos^2 x + \sin^2 x = |e^{\mathrm{i}x}|^2 = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

计算

$$\mathrm{i}^{2m} = (-\mathrm{i})^{2m} = (\mathrm{i}^2)^m = (-1)^m, \quad \mathrm{i}^{2m+1} = (-1)^m\mathrm{i}, \quad (-\mathrm{i})^{2m+1} = -(-1)^m\mathrm{i}$$

$\Longrightarrow$

$$(\mathrm{i})^n + (-\mathrm{i})^n = 2(-1)^m \quad \text{if} \quad n = 2m; \quad (\mathrm{i})^n + (-\mathrm{i})^n = 0 \quad \text{if} \quad n = 2m+1;$$
$$(\mathrm{i})^n - (-\mathrm{i})^n = 0 \quad \text{if} \quad n = 2m; \quad (\mathrm{i})^n - (-\mathrm{i})^n = 2\mathrm{i}(-1)^m \quad \text{if} \quad n = 2m+1.$$

于是应用收敛的级数的代数运算我们有

$$\cos x=\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}+\frac{(-\mathrm{i}x)^n}{n!}\Big)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big((\mathrm{i})^n+(-\mathrm{i})^n\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big(\mathrm{i}^{2n}+(-\mathrm{i})^{2n}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x=\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}+\frac{(-\mathrm{i}x)^n}{n!}\Big)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big((\mathrm{i})^n-(-\mathrm{i})^n\Big)$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big(\mathrm{i}^{2n+1}-(-\mathrm{i})^{2n+1}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$\cos x$ 和 $\sin x$ 的其它性质, 如周期性 (周期 2π), 在特定区间上的单调性, 等等, 相关证明可以参见陈天权《数学分析讲义》第一册§4.2 中的练习题(pp.139-140). $\square$

【定理2(一些常用的不等式)】

$$1+x\le e^x,\qquad x\in\mathbb{R}\,. \tag{1}$$

$$\frac{x}{1+x}\le\log(1+x)\le x,\qquad x>-1\,. \tag{2}$$

$$(1+x)^\alpha\le 1+\alpha x,\quad x>-1,\quad 0<\alpha\le 1. \tag{3}$$

$$(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x,\quad x>-1,\quad \alpha\ge 1. \tag{4}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!},\quad 0\le x\le 1. \tag{5}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}\le\cos x\le 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!},\quad -1\le x\le 1. \tag{6}$$

注: 上述(3)-(4) 也称为贝努力(Bernulli)不等式.

【证】(1): 设 $x\in\mathbb{R}$. 若 $x\ge 0$, 则显然

$$1+x\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\,.$$

若 $x\le -1$, 则

$$1+x\le 0\le e^x\,.$$

设 $-1<x<0$. 令 $t=-x$ 则 $0<t<1$ 因而

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\le\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}\Longrightarrow 1-t\le e^{-t}\quad \text{i.e.}\quad 1+x\le e^x\,.$$

(2): 由不等式 (1) 和对数函数 log 单调增加有: 对任意 $x > -1$

$$
\begin{aligned}
&\log(1+x) \le \log(e^x) = x\,,\\
&1 - \frac{x}{1+x} \le e^{-\frac{x}{1+x}} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{1+x} \le e^{-\frac{x}{1+x}} \quad \text{i.e.} \quad e^{\frac{x}{1+x}} \le 1+x\\
&\Longrightarrow \frac{x}{1+x} = \log(e^{\frac{x}{1+x}}) \le \log(1+x)\,.
\end{aligned}
$$

(3)-(4): 可以假定 $\alpha \ne 0, 1$. 设 $x > -1$. 先证明当 α 是有理数数时不等式成立. 设 $m, n \in \mathbb{N}, m < n$. 利用几何平均值小于算术平均值有

$$
\begin{aligned}
&(1+x)^{\frac{m}{n}} = \Big(\underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdots(1+x)}_{m\text{个}}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-m\text{个}}\Big)^{1/n}\\
&\le \frac{m(1+x)+n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x.
\end{aligned}
$$

对任意 $0 < \alpha < 1$, 可取有理数列 $\{r_k\}, \{s_k\}$ 满足 $0 < r_k \le \alpha \le s_k < 1$ 使得 $r_k \to \alpha$, $s_k \to \alpha$ $(k \to \infty)$. 若 $-1 < x < 0$, 则 $0 < 1+x < 1$ 从而有

$$(1+x)^\alpha \le (1+x)^{r_k} \le 1 + r_k x, \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

令 $k \to \infty$ 得到

$$(1+x)^\alpha \le \lim_{k\to\infty}(1 + r_k x) = 1 + \alpha x.$$

若 $x \ge 0$, 则 $1 + x \ge 1$ 从而有

$$(1+x)^\alpha \le (1+x)^{s_k} \le 1 + s_k x, \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

令 $k \to \infty$ 得到

$$(1+x)^\alpha \le \lim_{k\to\infty}(1 + s_k x) = 1 + \alpha x.$$

而对任意 $\alpha > 1$, 有 $0 < 1/\alpha < 1$. 利用上面结果, 当 $\alpha x > -1$ 时有

$$\Big(1+\alpha x\Big)^{1/\alpha} \le 1 + \frac{1}{\alpha}\cdot \alpha x = 1 + x \quad \text{i.e.} \quad (1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x.$$

当 $\alpha x \le -1$ 时有 $1 + \alpha x \le 0$ 从而有

$$(1+x)^\alpha \ge 0 \ge 1 + \alpha x.$$

(5)-(6): 首先易证若 $a_n \searrow 0$ 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_{2n} - a_{2n+1}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_{2n-1} - a_{2n}\Big).$$

因此特别有

$$a_0 - a_1 \le \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \le a_0 - a_1 + a_2.$$

取 $a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, 0 \le x \le 1$, 则有 $a_n \searrow 0$ 因而

$$x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

再取 $a_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}, |x| \le 1$, 则有 $a_n \searrow 0$ 因而

$$1 - \frac{x^2}{2!} \le \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}. \qquad \square$$

最后作为指数函数和对数函数的应用, 我们证明下列关于数列的较为复杂的极限. 其它函数 (幂函数、三角函数) 的数列极限也可类似证明.

【定理3(一些复杂数列的极限)】

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in [-\infty, +\infty]$ 则

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^A.$$

这里定义 $e^{+\infty} = +\infty, e^{-\infty} = 0.$

(2) 若 $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in [0, +\infty]$ 则

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log A.$$

这里定义 $\log(+\infty) = +\infty, \log(0) = -\infty.$

(3) 若 $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in [0, +\infty]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in [-\infty, +\infty]$, 则

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B \quad \text{if} \quad 0 < A < +\infty \quad \text{and} \quad -\infty < B < +\infty;\\
&\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = 0 \quad \text{if} \quad 0 < A < 1 \quad \text{and} \quad B = +\infty;\\
&\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = +\infty \quad \text{if} \quad 0 < A < 1 \quad \text{and} \quad B = -\infty;\\
&\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = +\infty \quad \text{if} \quad 1 < A < +\infty \quad \text{and} \quad B = +\infty;\\
&\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = 0 \quad \text{if} \quad 1 < A < +\infty \quad \text{and} \quad B = -\infty;\\
&\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = 0 \qquad \text{if} \quad A = 0, \quad 0 < B \le +\infty;
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = +\infty \quad \text{if} \quad A=0, \quad -\infty \le B < 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = +\infty \quad \text{if} \quad A=+\infty, \quad 0 < B \le +\infty;$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B = 0 \qquad \text{if} \quad A=+\infty, \quad -\infty \le B < 0.$$

对其它情形, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ 是否存在、极限值等于什么, 不确定.

【证】(1): 先设 $-\infty < A < \infty$. 则存在 n_0 使得 $|a_n - A| < 1$. 于是当 $n \ge n_0$ 时有

$$|e^{a_n} - e^A| = e^A|e^{a_n - A} - 1| \le e^A|a_n - A|e^{|a_n - A|} \le e^{1+A}|a_n - A| \to 0\,(n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^A$.

其次设 $A=+\infty$. 则有

$$e^{a_n} \ge 1 + a_n \to +\infty \quad (n\to\infty). \quad \text{So} \quad \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = +\infty = e^{+\infty}.$$

最后设 $A=-\infty$. 则存在 n_0 使得当 $n\ge n_0$ 时 $a_n < 0$ 从而当 $n \ge n_0$ 时有

$$0 < e^{a_n} = \frac{1}{e^{-a_n}} \le \frac{1}{1-a_n} \to 0 \quad (n\to\infty). \quad \text{So} \quad \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = 0 = e^{-\infty}.$$

(2): 先设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in (0,+\infty)$. 令 $x_n = \frac{a_n}{A} - 1 = \frac{a_n - A}{A}$. 则 $x_n \to 0\,(n\to\infty)$. 故存在 n_0 使得当 $n \ge n_0$ $x_n > -1/2$. 于是当 $n \ge n_0$ 时有

$$\frac{x_n}{1+x_n} \le \log(1+x_n) = \log a_n - \log A \le x_n.$$

据两边夹原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = \log A$.

其次设 $A=+\infty$. 则对任意 $M>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使当 $n\ge N$ 时 $a_n > e^M$. 于是使当 $n \ge N$ 时 $\log a_n > \log e^M = M$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = +\infty = \log +\infty$.

最后设 $A=0$. 则对任意 $M>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使当 $n\ge N$ 时 $a_n < e^{-M}$. 于是使当 $n \ge N$ 时 $\log a_n < \log e^{-M} = -M$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = -\infty = \log 0$.

(3): 考虑变形

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}.$$

设 $0 < A < +\infty$, $B\in\mathbb{R}$ 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = B\log A$$

因此由 (1) 知

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n\log a_n} = e^{B\log A} = A^B.$$

设 $0 < A < 1$, $B = +\infty$ 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = +\infty \log(A) = -\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{-\infty} = 0.$$

设 $0 < A < 1$, $B = +\infty$ 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = -\lim_{n\to\infty} b_n \log(\frac{1}{a_n}) = -\infty \log(\frac{1}{A}) = -\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{-\infty} = 0.$$

设 $0 < A < 1$, $B = -\infty$ 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = \lim_{n\to\infty} (-1) b_n \log(\frac{1}{a_n}) = +\infty \log(\frac{1}{A}) = +\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{+\infty} = +\infty.$$

$1 < A < +\infty$, $B = +\infty$ 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \log(a_n) = +\infty \log(A) = +\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{+\infty} = +\infty.$$

$1 < A < +\infty$, $B = -\infty$ 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = -\lim_{n\to\infty} (-b_n) \log(a_n) = -\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{-\infty} = 0.$$

设 $A = 0$, $0 < B < +\infty$. 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = B \log(0) = -\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{-\infty} = 0.$$

设 $A = 0$, $-\infty \le B < 0$. 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = \lim_{n\to\infty} (-b_n) \log(\frac{1}{a_n}) = +\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{+\infty} = +\infty.$$

设 $A = +\infty$, $0 < B \le +\infty$. 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \log(a_n) = +\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{+\infty} = +\infty.$$

最后设 $A = +\infty$, $-\infty \le B < 0$. 则由 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n = -\lim_{n\to\infty} (-b_n) \log(a_n) = -\infty$$

so that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{-\infty} = 0. \qquad \square$$

【复习练习题(不上交, 抽查1/3 的学生的练习情况)】

1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. 又设 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个正整数序列. 问数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是否收敛? 若收敛, 是否有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0 \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

问数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否收敛?

3. 设 $0 < \lambda < 1$,

$$a_n \le a_{n+1} \le 1 + \lambda a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

证明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \frac{1}{1-\lambda}$.

4. 求下列数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 的上下极限 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n, \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$:

$$a_n = (1+(-1)^n)^{1/n}, \quad a_n = (2+(-1)^n)^{1/n}, \quad a_n = \Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^n.$$

5. 设 $-\infty < a < b < +\infty$, 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 被称为在 $[a,b]$ 上连续, 如果对 $[a,b]$ 中的**每个**收敛的数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 都有 $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

假设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调. 设 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset [a,b]$ 使得 $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ 收敛. 证明 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛. [提示: 考虑上、下极限和收敛到上、下极限的子列.]

6. 设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足

$$|f(x)-f(y)| \le \lambda|x-y|, \quad x,y\in[0,1]$$

其中 $0<\lambda<1$. 任取 $x_0\in[0,1]$, 做迭代序列

$$x_1 = f(x_0), \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n=1,2,3,,\dots.$$

证明 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛且极限值 $x_* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与初始点 x_0 的选取无关, 并且 $x_*\in[0,1]$ 以及 $f(x_*) = x_*$.

7. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足 $f(a)<0<f(b)$ 且 $f(x)\ne 0$ $\forall x\in[a,b]$. 试构造一个闭区间套

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots, \quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}, \quad n=1,2,3,\dots.$$

使得

$$f(a_n)<0<f(b_n), \quad n=1,2,3,\dots.$$

8. 设集合$E\subset[0,+\infty)$ 非空且满足: $x\in E \Longrightarrow x+1\in E$.

假设 $[0,h]\subset E$ 其中 $0<h\le 1$. 证明 $\bigcup_{k=0}^\infty [k,k+h]\subset E$.

9. 设 $E_n\subset[0,1], n=1,2,3,\dots$ 满足

$$\sum_{n=1}^\infty 1_{E_n}(x) > 0 \qquad \forall\, x\in[0,1].$$

证明至少有一个集合 E_n 含有无理数. [事实上同理证明至少有一个集合 E_n 不是可数集.]

10. 求下列集合 E 的聚点的全体:

$$E=\{\frac{(-1)^n}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\};\quad E=\{\frac{m}{n}\,|\,m<n,m,n\in\mathbb{N}\};\quad E=(0,1]\cup[2,3).$$

11. 设非空集合 $E\subset\mathbb{R}$ 满足

$$\text{If}\;\;x,y\in E\;\;\text{and}\;\;x\neq y\;\;\text{then}\;\;|x-y|\geq\frac{1}{100}.$$

证明 E 必是无界集或有限集.

12. 利用不等式

$$\frac{1}{k+1}\leq\log(\frac{k+1}{k})\leq\frac{1}{k}\,,\quad k=1,2,\ldots;$$

证明

$$\log(n+1)\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq 1+\log n\,,\quad n=1,2,\ldots.$$

13. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n}=0.$$

[注意 $\frac{1}{n}\log n=\log(n^{1/n})$ 和换底公式: $\log_2 x=\frac{\log x}{\log 2}$.]

14. 设 $f(n)$ 是自然数 $n\geq 2$ 的素因子的个数,【即若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 其中 $(2\leq)\,p_1<p_2<\cdots<p_k$ 为素数, $\alpha_i\geq 1$ 为整数, 则定义 $f(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$.】证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=0.$$

此外证明

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{2^{f(n)}}=1,\quad\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{2^{f(n)}}=+\infty.$$

15. 设 $0<a_n\leq\frac{1}{n}, n=1,2,3,\ldots$. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{2/n}<+\infty.$$

16. 设数列$a_n>0$ 单调减少. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}na_n=0\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1}).$$

17. 证明

$$|e^x-1-x|\leq\frac{x^2}{2}e^{|x|},\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

18 (1). 设$0 < a_n < a_{2n-1} + a_{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots.$ 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

(2)(改进的版本). 设$0 < a_n \le a_{2n-1} + a_{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots.$ 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

19. (级数乘法) 证明

$$\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{-nx}, \quad x > 0.$$

20. (级数乘法) 设集合 A_n非空且互不相交 $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, 集合 B_n非空且互不相交 $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 1_{A_k \cap B_{n-k}}(x) \equiv 1, \quad x \in \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big).$$

由此证明

$$\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big) = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{n} A_k \cap B_{n-k}.$$

【提示: 利用 $1_{A\cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x)$ 以及可数个互不相交的集合的并的特征函数等于这些集合各自的特征函数之和.】

21. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为一个正项级数. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n} \le C\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

其中$C > 0$为一个常数, 例如可以取$C = 3$. (最佳值为$C = 1$.)

为证本题需利用特征函数$1_{\{n \le k \le 2n-1\}}$ 将该级数写成二重级数, 然后利用正项二重级数的累次求和可换序.

22*. 设$a_n > 0, n = 1, 2, 3, \ldots$. 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^2 a_n < +\infty.$$

23*. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n} = 1 - 2x \qquad \forall\, x \in [0, 1).$$

§3.8 函数的极限.

与数列 $x_n=f(n)$ 的极限类似, 对于一般函数 $f(x)$ 我们可以建立当自变量 x 趋于某定点或趋于无穷时 $f(x)$ 的极限的概念.

在引进函数极限的定义之前, 我们需要单侧聚点, 单侧极限等概念, 这些概念原本应放在第二章**§2.5**末尾, 因编写时疏忽忘记了, 现在将其补充在下面. (更新后的版本已将其放到第二章**§2.5**末尾.)

下面这个命题联系着单侧聚点、确界、和单调收敛三方面, 以后经常用到.

【命题A(单侧聚点, 单侧极限)】设 $E\subset\mathbb{R}$ 非空.

(a) 设 $x_0\in\mathbb{R}$ 满足: 对任意 $\varepsilon>0$, 区间 $(x_0-\varepsilon,x_0)$ 内总含有 E 中的点, 即 $(x_0-\varepsilon,x_0)\cap E$总非空. 则 x_0 是 E 的一个聚点 (**称为左聚点**) 从而存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 使得

$$x_n<x_{n+1}<x_0,\ n=1,2,3,...;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

(b) 设 $x_0\in\mathbb{R}$ 满足: 对任意 $\varepsilon>0$, 区间 $(x_0,x_0+\varepsilon)$ 内总含有 E 中的点, 即 $(x_0,x_0+\varepsilon)\cap E$总非空. 则 x_0 是 E 的一个聚点 (**称为右聚点**) 从而存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 使得

$$x_n>x_{n+1}>x_0,\ n=1,2,3,...;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

(c) 假设 E 有上界. 则存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 使得

$$x_n\le x_{n+1}\le\sup E,\ n=1,2,3,...;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\sup E.$$

进一步, 若 $\sup E$ 是 E 的一个聚点 [注意: 这包括了 $\sup E\in E$ 和 $\sup E\not\in E$ 的两种情形] , 则上述数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 还可以选择成为严格单调增加的, 也即存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 使得

$$x_n<x_{n+1}<\sup E,\ n=1,2,3,...;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\sup E.$$

[注: 这严格递增性还说明$\sup E$ 是E的一个左聚点.]

(d) 假设 E 有下界. 则存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 使得

$$x_n\ge x_{n+1}\ge\inf E,\ n=1,2,3,...;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\inf E.$$

进一步, 若 $\inf E$ 是 E 的一个聚点 [注意: 这包括了 $\inf E \in E$ 和 $\inf E \notin E$ 的两种情形], 则上述数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 还可以选择成为严格单调减少的, 也即存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得

$$x_n > x_{n+1} > \inf E,\ n = 1, 2, 3, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \inf E.$$

[注: 这严格递减性还说明$\inf E$ 是E的一个右聚点.]

【证】(a)-(b): 设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$, 区间 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 内总含有 E 中的点.

取 $\varepsilon_1 = 1$, 则存在 $x_1 \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_0$.

取 $\varepsilon_2 = \min\{1/2, x_0 - x_1\} > 0$, 则存在 $x_2 \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_2 < x_2 < x_0$.

取 $\varepsilon_3 = \min\{1/3, x_0 - x_2\} > 0$, 存在 $x_3 \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_3 < x_3 < x_0$.

易见 $x_1 < x_2 < x_3 < x_0$ 且 $0 < x_0 - x_k < 1/k, k = 1, 2, 3$.

假设已得到

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_0, \quad x_k \in E, \quad 0 < x_0 - x_k < 1/k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

那么取 $\varepsilon_{n+1} = \min\{\frac{1}{n+1}, x_0 - x_n\}$. 则同理存在 $x_{n+1} \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon_{n+1} < x_{n+1} < x_0$. 易见 $x_n < x_{n+1}, 0 < x_0 - x_{n+1} < \frac{1}{n+1}$.

根据归纳原理, 我们得到序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 满足 $x_n < x_{n+1} < x_0, n = 1, 2, 3, \ldots$;
$0 < x_0 - x_n < 1/n, n = 1, 2, 3, \ldots$. 因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格单调增加且趋于 x_0.

于是对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时 $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0$. 也即 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset (x_0 - \varepsilon, x_0)$. 因 x_n 互不相同, 这就证明了 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 内含有 E 的无限多个点. 据 $\varepsilon > 0$ 的任意性即知 x_0 是 E 的一个左聚点.

同法可证 (b) 中的结论.

(c)-(d): 由 $\inf E = -\sup(-E)$ 可知我们只需证明 (c).

令 $x_0 = \sup E$. 我们先考虑 x_0 是 E 的聚点的情形. 设 x_0 是 E 的聚点. 由聚点的定义知对任意 $\varepsilon > 0$, 区间 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 内含有 E 的无限多个点. 这蕴含 $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ 中含有 E 的点. 但 x_0 是 E 的上确界, 故 $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ 内没有 E 中的点, 因此必是 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 内含有 E 的点. 于是根据 (a) 即得所证结论.

其次我们证明若 x_0 不属于 E, 则 x_0 必是 E 的一个聚点. 事实上由上确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $x' \in E$ 使得 $x_0 - \varepsilon < x' \leq x_0$. 但 $x_0 \notin E$ 故必是 $x_0 - \varepsilon < x' < x_0$. 这

证明了对任意 $\varepsilon > 0$, 交集 $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cap E$ 非空. 于是根据 (a) 即知 x_0 为 E 的一个聚点 (实为左聚点).

最后设 x_0 不是 E 的聚点. 则由上面结果知 $x_0 \in E$. 于是我们可以取 $x_n = x_0, n = 1, 2, 3, \ldots$. 这个常值数列当然是单调趋于 x_0 的. $\square$

最后讲一个与上一命题类似的性质, 它也较为常用.

【命题B】设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为实数列.

(a) 令$A = \sup\limits_{n\ge 1} a_n$ (包括$A = +\infty$的情形) 并设

$$a_n < A, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

则对任意实数$a < A$, 存在子列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$a \le a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \cdots; \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

(a) 令$A = \inf\limits_{n\ge 1} a_n$ (包括$A = -\infty$的情形) 并设

$$a_n > A, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

则对任意实数$a > A$, 存在子列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$a \ge a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \cdots; \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

【证】由反射变换$\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 易见(a)与(b)等价. 因此只需证明(a).

设$a < A$. 考虑

$$A_n = \max\{a, \max_{1\le k\le n} a_k\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

易见A_n 单调不减; 又因对每个$n \in \mathbb{N}$ 都有$a_n < A$, 于是有

$$A_n \le A_{n+1} < A, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

由上确界的定义易证$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (包括$A = +\infty$的情形).

对于$A_1 < A$, 由上确界的定义, 存在$n_1 \in \mathbb{N}$ 使得$A_1 < a_{n_1} < A$.

对于$A_{n_1} < A$, 由上确界的定义, 存在$n_2 \in \mathbb{N}$ 使得$A_{n_1} < a_{n_2} < A$.

设在第$k\,(\ge 2)$步, 对于$A_{n_{k-1}} < A$, 存在$n_k \in \mathbb{N}$ 使得$A_{n_{k-1}} < a_{n_k} < A$.

则对于$A_{n_k} < A$, 由上确界的定义, 存在$n_{k+1} \in \mathbb{N}$ 使得$A_{n_k} < a_{n_{k+1}} < A$.

据归纳法原理, 上述手续对所有自然数k 均可施行. 于是我们得到自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$满足

$$A_{n_k} < a_{n_{k+1}} < A, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{$*$}$$

由$(*)$和A_n的定义易见$n_{k+1} \notin \{1, 2, ..., n_k\}$. 因此$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 严格单调增加:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

因此**根据子序列的定义**, $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 分别是$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列. 此外由$(*)$ 易见$a \le a_{n_k} < a_{n_{k+1}}, k = 1, 2, 3, \ldots$. 最后再由$(*)$和两边夹法则还知$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.
□

【例】设$\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ 是一个整数序列, 无上界. 则由上述命题, 从$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中可以抽取一个严格单调增加的子列$\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, 从而有$1 \le p_{n_k} \nearrow +\infty$ $(k \to \infty)$. □

现在我们转向函数极限.

因在前面我们已对数列极限部分做了大量分析和练习, 函数极限的问题就相对容易把握了. 基于这点, 我们可以一开始就把函数极限的各种可能都展现在下面两个定义中.

【定义(函数在聚点处的极限)】设 $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ 为 E 的一个聚点.

(1) 设$f : E \to \mathbb{C}$. 若存在 $A \in \mathbb{C}$ 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ 使得只要 $0 < |x - a| < \delta$ 且 $x \in E$ 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称当 x 沿着 E 趋于 a 时 $f(x)$ 收敛于 A, 并称 A 是 $f(x)$ 当 x 沿 E 趋于 a 时的极限, 记作

$$\lim_{E\ni x, |x-a|\to 0} f(x) = A \quad \text{或} \quad \lim_{E\ni x\to a} f(x) = A.$$

(2) 设$f : E \to \mathbb{R}$. 若对任意 $M > 0$ 都存在 $\delta = \delta(M, a) > 0$ 使得只要 $0 < |x-a| < \delta$ 且 $x \in E$ 就有 $f(x) > M$, 则称当 x 沿着 E 趋于 a 时 $f(x)$ 趋于 $+\infty$, 记作

$$\lim_{E\ni x, |x-a|\to 0} f(x) = +\infty \quad \text{或} \quad \lim_{E\ni x\to a} f(x) = +\infty.$$

据此我们定义

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{E\ni x\to a} (-f(x)) = +\infty.$$

设$f: E\to\mathbb{C}$. 若$\lim\limits_{E\ni x\to a}|f(x)|=+\infty$ 则称当$E\ni x\to a$ 时$f(x)$ 趋于无穷远点, 记作$\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)=\infty$. 换言之我们定义

$$\lim_{E\ni x\to a}f(x)=\infty \iff \lim_{E\ni x\to a}|f(x)|=+\infty.$$

(3) 设f为E上的实值或复值函数.

设 $a\in\mathbb{R}$ 为 E 的一个左聚点. 如果当x沿$(-\infty,a)\cap E$ 趋于a时$f(x)$ 有极限(包括极限为无穷大的情形), 也即$\lim\limits_{(-\infty,a)\cap E\ni x\to a}f(x)$ 存在(包括极限为无穷大的情形), 则称这极限为f在点a的左极限, 记作$f(a-)$, 即

$$f(a-)=\lim_{(-\infty,a)\cap E\ni x\to a}f(x)\qquad \text{或记为}\qquad f(a-)=\lim_{E\ni x\to a-}f(x).$$

设 $a\in\mathbb{R}$ 为 E 的一个右聚点. 如果当x沿$(a,+\infty)\cap E$ 趋于a时$f(x)$ 有极限(包括极限为无穷大的情形), 也即$\lim\limits_{(a,+\infty)\cap E\ni x\to a}f(x)$ 存在(包括极限为无穷大的情形), 则称这极限为f在点a的右极限, 记作$f(a+)$, 即

$$f(a+)=\lim_{(a,+\infty)\cap E\ni x\to a}f(x)\qquad \text{或记为}\qquad f(a+)=\lim_{E\ni x\to a+}f(x).\qquad \square$$

【定义(无限远点处的极限)】设 $E\subset\mathbb{R}$ 为一无界集.

(1) 设 E 无上界.

设$f: E\to\mathbb{C}$. 若存在$A\in\mathbb{C}$ 满足: 对任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $R=R(\varepsilon,a)>0$ 使得只要 $x>R$ 且 $x\in E$ 就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称当 x 沿着 E 趋于 $+\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于 A, 并称 A 是 $f(x)$ 当 x 沿 E 趋于 $+\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{E\ni x\to+\infty}f(x)=A.$$

设$f: E\to\mathbb{R}$. 若对任意 $M>0$ 都存在 $R=R_M>0$ 使得只要 $x>R$ 且 $x\in E$ 就有 $f(x)>M$, 则称当 x 沿着 E 趋于 $+\infty$ 时 $f(x)$ 趋于 $+\infty$, 记作

$$\lim_{E\ni x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

据此我们定义

$$\lim_{E\ni x\to+\infty}f(x)=-\infty \quad\iff\quad \lim_{E\ni x\to+\infty}(-f(x))=+\infty.$$

设$f:E\to\mathbb{C}$. 若$\lim\limits_{E\ni x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$, 则称则称当$E\ni x\to+\infty$ 时$f(x)$ 趋于无穷远点, 记作$\lim\limits_{E\ni x\to+\infty}f(x)=\infty$, 也即我们定义

$$\lim_{E\ni x\to+\infty}f(x)=\infty\iff\lim_{E\ni x\to+\infty}|f(x)|=+\infty.$$

(2) 设 E 无下界.

设$f:E\to\mathbb{C}$. 若存在$A\in\mathbb{C}$ 满足: 对任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $R=R(\varepsilon,a)>0$ 使得只要 $x<-R$ 且 $x\in E$ 就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称当 x 沿着 E 趋于 $-\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于 A, 并称 A 是 $f(x)$ 当 x 沿 E 趋于 $-\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{E\ni x\to-\infty}f(x)=A.$$

设$f:E\to\mathbb{R}$. 若对任意 $M>0$ 都存在 $R=R_M>0$ 使得只要 $x<-R$ 且 $x\in E$ 就有 $f(x)>M$, 则称当 x 沿着 E 趋于 $-\infty$ 时 $f(x)$ 趋于 $+\infty$, 记作

$$\lim_{E\ni x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

据此我们定义

$$\lim_{E\ni x\to-\infty}f(x)=-\infty\quad\iff\quad\lim_{E\ni x\to-\infty}(-f(x))=+\infty.$$

设$f:E\to\mathbb{C}$. 若$\lim\limits_{E\ni x\to-\infty}|f(x)|=+\infty$, 则称则称当$E\ni x\to-\infty$ 时$f(x)$ 趋于无穷远点, 记作$\lim\limits_{E\ni x\to-\infty}f(x)=\infty$, 也即我们定义

$$\lim_{E\ni x\to-\infty}f(x)=\infty\iff\lim_{E\ni x\to-\infty}|f(x)|=+\infty.$$

□

【注1(关于极限的一个重要观点)】大家观察到, 在极限的定义中我们总是要求 $x\neq a$. 为何这样要求? 原因是我们真正关心的是 x 在趋向 a 时是**真正运动的**, 也就是说我们关心的是 x 趋于 a 而没到达 a 的这段过程. 即便 $f(x)$ 在 $x=a$ 有定义甚至 $f(a)=$ 极限值, 我们仍然只对 $f(x)$ 在这段过程中的行为感兴趣, 因为 $x=a$ 不属于这段过程, 并且 $f(x)$ 在定点 $x=a$ 处的值是静态的, 与动态过程无关. 这就是“极限”概念中最本质的部分.

回想数列 $f(n)$, 如果 (例如) $n_k=3+(-1)^k, k=1,2,3,...$ 则 $f(n_k)$ 便不是 $f(n)$ 的子列, 因为 n_k 几乎原地不动, 故当 $k\to\infty$ 时n_k不可能趋于 $+\infty$.

【**注2**】与数列情形的证明相同, 借助任意 $\varepsilon > 0$ 易证若函数的极限存在则极限值是唯一的.

【**定理1**】设 $a \in \mathbb{R}$ 为 $E \subset \mathbb{R}$ 的一个聚点, f是在E上有定义的一个实值或复值函数. 下面所说的“极限存在”包括极限为无穷大的情形.

(1) 设极限$\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$存在.

若 a 是 E 的左聚点, 则左极限 $\lim\limits_{E \ni x \to a-} f(x)$ 也存在且

$$\lim_{E \ni x \to a-} f(x) = \lim_{E \ni x \to a} f(x).$$

若 a 是 E 的右聚点, 则右极限 $\lim\limits_{E \ni x \to a+} f(x)$也存在且

$$\lim_{E \ni x \to a+} f(x) = \lim_{E \ni x \to a} f(x).$$

(2) 若 a只是 E左聚点而非右聚点, 则左极限$\lim\limits_{E \ni x \to a-} f(x)$(如果存在的话) 就是总极限$\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$.

若 a只是 E右聚点而非左聚点, 则右极限$\lim\limits_{E \ni x \to a+} f(x)$(如果存在的话) 就是总极限$\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$.

(3) 若 a 既是 E 的左聚点又是 E 的右聚点, 则

极限 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$ 存在 $\iff$ $\lim\limits_{E \ni x \to a-} f(x) = \lim\limits_{E \ni x \to a+} f(x)$ 即二者均存在且相等.

而当两边之一满足时, 三个极限相等.

【证】(1): 这是显然的, 因为由极限的定义易见总体极限的存在已经包含了单侧极限的存在, 且二者的极限值相等.

(2): 只需证明“左”的情形; “右”的情形的证明雷同.

设 a 是 E 的左聚点而非右聚点. 由 (1), 只需证明：若左极限 $\lim\limits_{E \ni x \to a-} f(x)$ 存在, 则总体极限 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$ 存在且 $= \lim\limits_{E \ni x \to a-} f(x)$.

因 a 不是 E 的右聚点, 故存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $(a, a + \delta_0)$ 内没有 E 中的点. 设左极限 $A := \lim\limits_{E \ni x \to a-} f(x)$ 存在. 先设 $A \in \mathbb{C}$. 由定义, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\eta = \eta(\varepsilon, a) > 0$ 使得只要 $a - \eta < x < a$ 且 $x \in E$ 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 取 $0 < \delta < \min\{\eta, \delta_0\}$. 则对任何满足 $0 < |x - a| < \delta$ 的 $x \in E$, 必有 $x \notin (a, a + \delta)$ 因此必有 $a - \delta < x < a$ 从而

有 $a-\eta<x<a$ 进而有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 所以, 由定义, $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)$ 存在且 $=A$. 同理可证当 $A=\infty$时以及当f为实值而$A=+\infty$ 或$-\infty$ 时结论仍成立.

(3): 根据 (1) 只需证明若左右极限 $\lim\limits_{E\ni x\to a-}f(x)$, $\lim\limits_{E\ni x\to a+}f(x)$ 都存在且**相等**, 则 (总体) 极限 $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)$ 存在.

记 $A=:\lim\limits_{E\ni x\to a-}f(x)=\lim\limits_{E\ni x\to a+}f(x)$. 先设 $A\in\mathbb{C}$. 由定义, 对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta_1,\delta_2>0$ 使得当 $a-\delta_1<x<a$ 且 $x\in E$ 时就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$; 当 $a<x<a+\delta_2$ 且 $x\in E$ 时就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 则 $\delta>0$ 且当 $0<|x-a|<\delta$ 且 $x\in E$ 时有 $a-\delta_1\le a-\delta<x<a$ 或 $a<x<a+\delta\le a+\delta_2$, 从而有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 因此 (总体) 极限 $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)$ 存在且等于 A.

同理可证当 $A=\infty$时以及当f为实值而$A=+\infty$ 或$-\infty$ 时结论仍成立. $\square$

【例】看符号函数

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad x>0\\ 0 & \text{if}\quad x=0\\ -1 & \text{if}\quad x<0\end{cases}$$

易见有

$$\text{左极限}\ \operatorname{sign}(0-)=-1,\qquad \text{右极限}\ \operatorname{sign}(0+)=+1.$$

由定理1 知总体极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sign}(x)$ 不存在. 这也可直接证明如下: 假设$A:=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sign}(x)$存在. 则由$\operatorname{sign}(x)$ 为有界函数可知A不是无穷大. 因此$A\in\mathbb{C}$. 于是对于$\varepsilon=1/2$, 存在$\delta>0$ 使得当$0<|x|<\delta$ 时有$|\operatorname{sign}(x)-A|<1/2$. 于是

当$-\delta<x_1<0<x_2<\delta$ 时有

$$2=|\operatorname{sign}(x_1)-\operatorname{sign}(x_2)|\le|\operatorname{sign}(x_1)-A|+|A-\operatorname{sign}(x_2)|<1/2+1/2=1$$

矛盾. 所以极限$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sign}(x)$不存在. $\square$

下面两个定理使我们能用熟悉的序列语言理解和证明函数极限及其基本性质.