

运筹学





网络计划与图解评审法

*Network Programming and Graph
Evaluation and Review Technique*

- 用网络分析的方法编制的计划称为**网络计划**。
 - 在调度由许多工作组成的大型复杂项目时，可以把网络模型作为辅助工具。
 - 基本思想
 - 应用网络计划图来表示工程项目中计划要完成的各项工作，表明各项工作间存在的**先后顺序**和**相互依赖**的逻辑关系；
 - 通过对网络计划图时间参数的计算，找出计划中的关键工作和关键线路；
 - 通过不断的改进网络计划，寻求最优方案。
 - 优点
 - 根据以上的最优方案，在计划执行过程中对工程项目进行有效的控制和监督，保证合理的使用人力、物力和财力，以最小的消耗取得最大的经济效益。

- 网络计划技术由以下两种技术组成：
 - 计划评审技术(PERT:Program Evaluation & Review Technique)
 - PERT最早应用于美国海军北极星导弹的研制系统，由于该导弹的系统非常庞大复杂，为找到一种有效的管理技术，设计了PERT这种方法，并使北极星导弹的研制周期缩短了一年半时间。
 - PERT注重计划的评价和审查，活动的时间往往是随机的。
 - 关键路径法(CPM:Critical Path Method)
 - CPM是与PERT十分相似但又是独立发展的另一种技术，是1957年美国杜邦公司的M.R.walker和兰德公司的J.E.Kelley共同研制的。
 - 它借助于网络表示各项工作所需要的时间，以及各项工作的相互关系，通过网络分析研究工程费用与工期的相互关系，并找出再编制计划时及计划执行过程中的关键路线。活动的时间往往是确定的，它特别广泛应用于系统分析和计划的目标管理。

- 网络计划图的定义

- 网络计划图就是在网络图上标注时标和时间参数的进度计划图，其实质是有时序的有向赋权图。

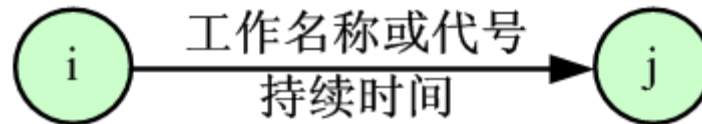
- 基本术语

- 节点和带有箭头的连线是网络计划图的基本组成元素。
 - 工作（也称工序、活动、作业）。

- 两种方式

- 双代号网络计划图

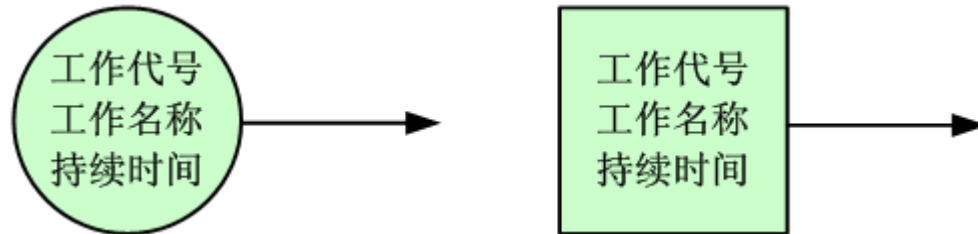
- 计算时间参数时，可以分为工作计算法和节点计算法；
 - 图示：



11.1 网络计划(cont.)

— 单代号网络计划图

- 图示：



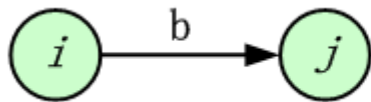
11.1 网络计划(cont.)

- 如何绘制双代号网络图

— 例1 某项研制新产品工程的各个工序与所需时间以及他们之间的相互关系如下表所示，要求编制该项工程的网络计划。

工序	工序代号	所需时间（天）	紧后工序
产品设计与工艺设计	a	60	b,c,d,e
外购配套件	b	45	l
下料、锻件	c	10	f
工装制造1	d	20	g,h
木模、铸件	e	40	h
机械加工1	f	18	l
工装制造2	g	30	k
机械加工2	h	15	l
机械加工3	k	25	l
装配调试	l	35	—

- 分析：在编制该项工程的网络计划之前，需要绘制网络图。
 - **网络图**是由结点（点）、弧及权所构成的有向赋权图。
 - **结点**表示一个事项（或事件），它是一个或若干个工序的开始或结束，是相邻工序在时间上的分界点。
 - **弧**表示一个工序，工序是指为了完成工程项目，在工艺技术和组织管理上相对独立的工作或活动，一项工程由若干个工序组成，工序需要一定的人力、物力等资源和时间。
 - **权**表示为完成某个工序所需要的时间或资源等数据。
 - 在网络图中，用一条弧和两个结点表示一个确定的工序。下图表示一个确定的工序**b**。

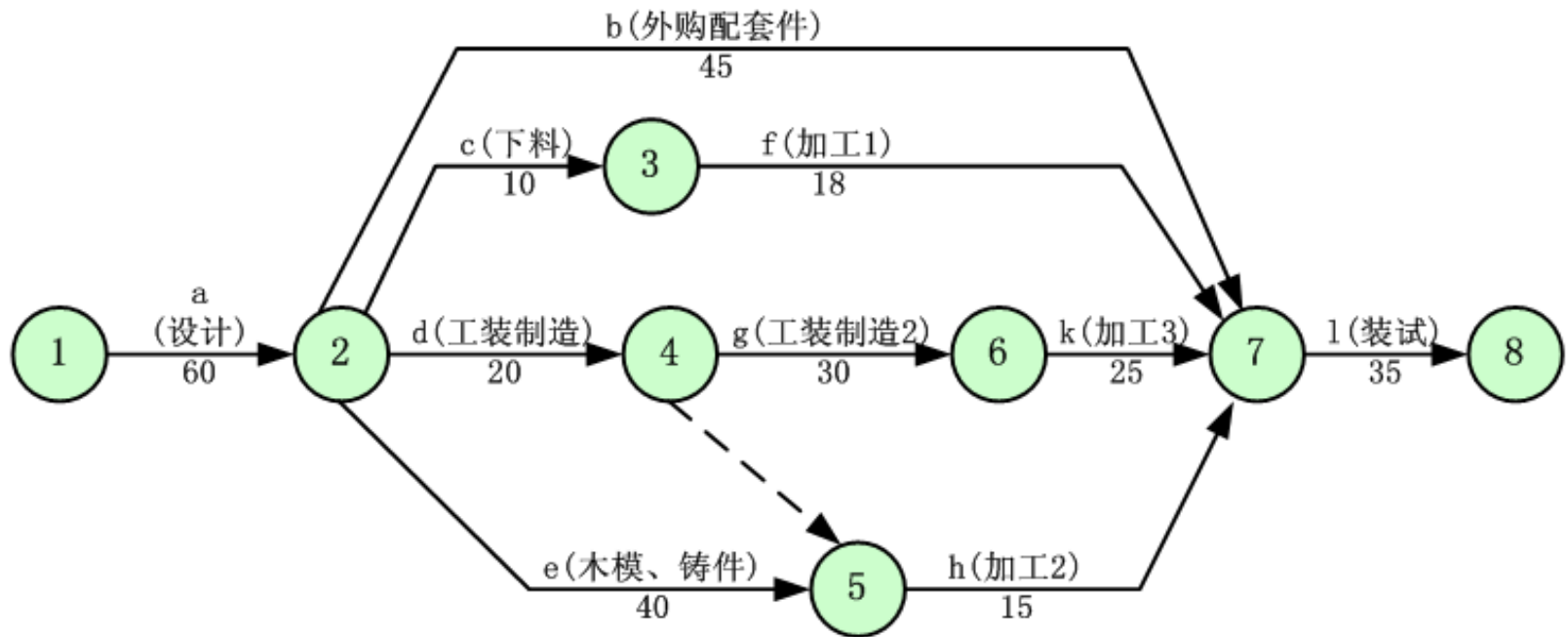


i 称为箭尾事项，用来表示工序开始的结点，称为箭尾结点。

j 称为箭头事项，用来表示工序结束的结点，称为箭头结点。

- 工序的箭尾事项与箭头事项称为该工序的相关事项。在一张网络图上，只能有**始点**和**终点**两个结点，分别表示工程的开始和结束，其它结点既表示上一个（或若干个）工序的结束，又表示下一个（或若干个）工序的开始。

— 根据上表绘制的网络图：



- 在绘制网络图时，应遵循以下规则：
 - 方向、时序与结点编号
 - 网络图是有向图，按照工艺流程的顺序，规定工序从**左向右**排列。网络图中的各个结点都有一个时间（某一个或若干个工序开始或结束的时间），一般按各个结点的时间顺序标号。
 - 线路
 - 在网络图中只能有一个起始节点，表示工程项目的开始。一个终点节点，表示工程项目的完成。从起始节点开始沿着箭头线方向顺序自左向右，通过一系列箭线和节点，最后到达终点节点的通路，称为线路。
 - 紧前工序与紧后工序
 - 紧前工作是指紧排在本工作之间的工作，且开始或完成后，才能开始本工作；紧后工作是指紧排在本工作之后的工作，且本工作开始或完成后，才能开始的工作。

- 如上图，只有在**a**工序结束后，**b,c,d,e**工序才能开始。**a**工序是**b,c,d,e**工序的紧前工序；**b,c,d,e**工序是**a**工序的紧后工序。

— 先行工作和后继工作

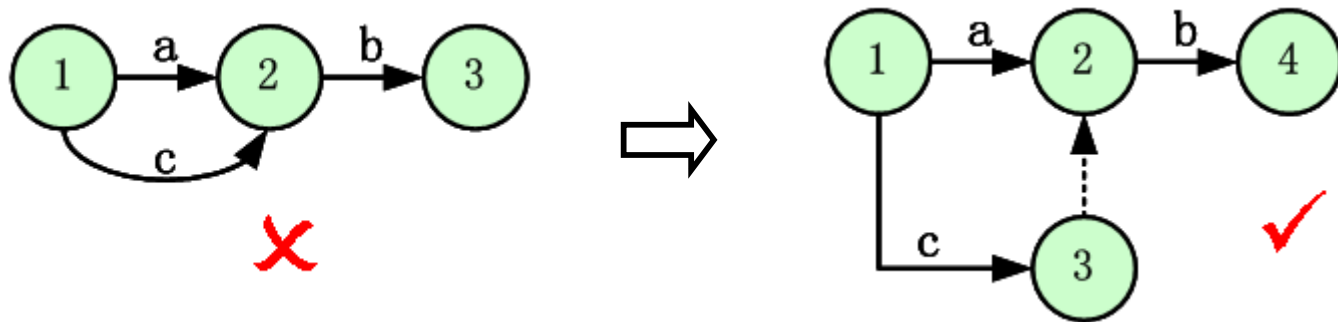
- 在复杂的工程项目中，紧前工作与紧后工作之间有三种关系：结束后才开始，开始后才开始，结束后才结束。
- 从起始节点至本工作之前在同一路径的所有工作，称为**先行工作**；
- 自本工作到终点节点在同一路径的所有工作，成为**后继工作**。
- 如上图，工作**g**的先行工作有**a, d**；工作**g**的后继工作为**k, l**。

— 虚工序

- 为了用来表达相邻工序之间的衔接关系，是实际上并不存在而虚设的工序，用虚箭头线——>表示。虚工序不需要人力、物力等资源和时间。如上图，虚工序④——>⑤只表示在**d**工序结束后，**h**工序才能开始。

— 相邻的两个结点之间只能有一条弧

- 即一个工序用确定的两个相关事项表示，某两个相邻结点只能是一个工序的相关事项，否则在计算各个结点和各个工序的时间参数时将造成逻辑上的混乱。

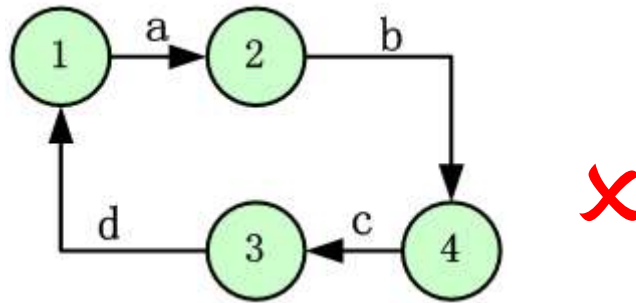


— 网络图中不能有缺口和回路

- 在网络图中，除始点、终点外，其它各结点的前后都应有弧连接，即图中不能有缺口，使网络图从始点经任何路线都可以到达终点。否则将使某些工序失去与其紧前（或紧后）工序应有的联系。

11.1 网络计划(cont.)

- 网络图中不能有回路，即不可有循环现象，否则将使组成回路的工序永远不能结束，工程永远不能完工。



— 平行作业

- 为了缩短工程的完成时间，在工艺流程和生产组织条件允许的情况下，某些工序可以同时进行，即可采用平行作业的方式。如上图中的工序**b**、**c**、**d**、**e**四个工序即可平行作业。
- 在有几个工序平行作业结束后转入下一个工序的情况下，考虑到便于计算网络时间和确定关键路线，选择在平行作业的几个工序中所需时间最长的一个工序，直接与其紧后工序衔接，而其他的工序则通过虚工序与其紧后工序衔接。

- 如上例中工序**d**、**e**平行作业，这两个工序都结束后，它们的紧后工序**h**才能开始，选择要求时间最长的工序**e**（40天）与**h**衔接，而**d**工序（20天）通过虚工序与**h**衔接。

— 交叉作业

- 对需要较长时间才能完成的一些工序，在工艺流程与生产组织条件允许的情况下，可以不必等待工序全部结束后再转入其紧后工序，而是分期分批的转入。交叉作业可以缩短工程周期。如例1中将制造工装分为两批**d**、**g**，分别与紧后工序**h**、**k**连接。

— 始点和终点

- 为表示工程的开始和结束，在网络图中只能有一个始点和一个终点。当工程开始时有几个工序平行作业或在几个工序结束后完工，用一个始点、一个终点表示。若这些工序不能用一个始点或一个终点表示时，可用虚工序把它们与始点或终点连接起来。

— 网络图的分解与综合

- 根据网络图的不同需要，一个工序所包括的工作内容可以多一些，即工序综合复杂度较高；也可以一个工序所包括的工作内容少一些，即工序综合复杂度较低。一般情况下，工程总指挥部指定的网络计划是工序综合复杂度较高的网络图（母网络）；而下一级部门，根据综合程度高网络图的要求，制定本部门的工序综合复杂度较低的网络图（子网络）。
- 将母网络分解为若干个子网络称为网络图的分解；将若干个子网络综合为一个母网络称为网络图的综合。

— 网络计划图的类型

- 总网络计划图：以整个项目为计划对象，供决策领导层使用；
- 分级网络计划图：按管理层次需求，供不同的管理部门使用；
- 局部网络计划图：将项目某部分视为对象，供专业部门使用。

— 网络图的布局

- 网络图中，尽可能将**关键路线**布置在中心位置，并尽量将联系紧密的工作布置在相近的位置。
- 为使网络图清楚和便于在图上填写有关的时间数据与其它数据，弧线尽量用水平线或水平折线表示。
- 网络图上也可以附有时间进度，必要时也可以按照完成各个工序的工作单位布置网络图。

- 网络时间与关键路线

- 路线与关键路线

- 在网络图中，从始点开始，按照各个工序的顺序，连续不断的到达终点的一条通路称为 **路线**。
 - 在各条路线上，完成各个工序的时间之和是不完全相等的，其中，完成各个工序需要时间最长的路线称为 **关键路线**，或称 **主要矛盾线**。
 - 例1中的路线：

路线	路线的组成	各工序所需时间之和
1	①→②→⑦→⑧	$60+45+35=140$
2	①→②→③→⑦→⑧	$60+10+18+35=123$
3	①→②→④→⑥→⑦→⑧	$60+20+30+25+35=170$
4	①→②→④→⑤→⑦→⑧	$60+20+15+35=130$
5	①→②→⑤→⑦→⑧	$60+40+15+35=150$

关键路线

11.2 时间参数的计算(cont.)

- 组成关键路线的工序称为**关键工序**。如果能够缩短关键工序所需的时间，就可以缩短工程的完工时间。而缩短非关键路线上的各个工序所需要的时间，却不能使工程完工时间提前。即使在一定程度上拖长非关键路线上的各个工序所需要的时间，也不至于影响工程的完工时间。

— 编制网络计划的基本思想

- 在一个庞大的网络图中找出关键路线，对各关键工序，优先安排资源，挖掘潜力，采取相应措施，尽量压缩需要的时间。对各非关键路线上的工序，只要在不影响工程完工时间的条件下抽出适当的人力、物力等资源，用在关键工序上，以达到缩短工期、合理利用资源等目的。
- 关键路线是相对的，也是可以变化的，在采取一定的技术组织措施后，关键路线可能变为非关键路线，而非关键路线也有可能变为关键路线。

- 网络时间的计算

- 概念：为了编制网络计划和找出关键路线，要计算网络图中各个事项以及各个工序的有关时间，称这些时间为网络时间。

- 工作持续时间D

- 为完成某一工序所需要的时间称为该工序 $i \rightarrow j$ 的作业时间，用D表示。确定作业时间有两种方法：

- (1) **单时估计法**：在确定作业时间时，只给出一个时间值。在具备劳动定额资料的条件下，或者在具有类似工序的作业时间消耗的统计资料时，可以根据这些资料，用分析对比的方法确定作业时间。

$$D = \frac{Q}{R \cdot S \cdot n}$$

其中：Q——工作量；R——可投入人力的数量；S——每人或每台设备每工作班能完成的工作量；n——每天正常工作班数。

11.2 时间参数的计算(cont.)

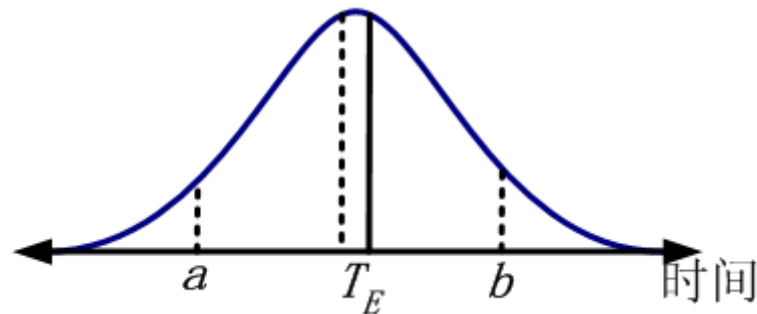
(2) 三时估计法：在不具备劳动定额和类似工序的作业时间消耗的统计资料，且作业时间较长，未知的和难以估计的因素较多的情况下，对完成工序可估计三种时间，之后计算它们的平均时间作为该工序的作业时间。估计的三种时间是：

乐观时间——在顺利情况下完成工序所需要的最少时间，用**a**表示；

最可能时间——在正常情况下完成工序所需要的时间，用**m**表示；

最悲观时间——在不顺利情况下完成工序所需要的最多时间，用**b**表示；

显然，完成工序所需要的上述三种时间都具有一定的概率。根据经验，这些时间的概率分布可以认为近似于正态分布，如下图。



11.2 时间参数的计算(cont.)

一般情况下，可按下列公式计算作业时间：

$$D = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\text{方差为 } \sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

工程完工时间等于各关键工序的平均时间之和。假设所有工序的作业时间相互独立且具有相同分布，若在关键路线上有 s 道工序，则：

工程完工时间可以认为是一个以 $D_E = \sum_{i=1}^s \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}$ 为均值，

以 $\sigma_E^2 = \sum_{i=1}^s \left(\frac{b_i - a_i}{6} \right)^2$ 为方差的正态分布。

根据 D_E 和 σ_E^2 即可计算出工程的不同完工时间的概率。

11.2 时间参数的计算(cont.)

- 例2 已知某项工程，各关键工序的平均作业时间与方差如下表所示，试求完成该项工程的周期以及完工时间为**60**天的概率。

工序	D	σ^2
c	10.50	1.36
d	10.16	0.25
f	20.33	4.00
g	5.16	0.25
h	12.83	14.67

- 解：从上表可以算出，该项工程以 $D_E = \sum D = 58.98$ 为期望值，

以 $\sigma_E^2 = 20.53$ 为方差的正态分布。

设 D_K 为预定的工程完工时间或目标时间，则 $D_K = D_E + \sigma_E u$ ，

在上例中， $D_K = 60$ ，则 $u = \frac{60 - 58.98}{\sqrt{20.53}} = 0.22$

根据正态分布表 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0.22} e^{-x^2/2} dx = 0.587$ ，即工程在60天完成的概率为0.587。

11.2 时间参数的计算(cont.)

— 事项最早开始时间 $T_E(i)$

- 若事项为某一工序或若干工序的箭尾事项时，事项最早时间为各工序的最早可能开始时间**ES**。若事项为某一工序或若干工序的箭头事项时，事项最早时间为各工序的最早可能结束时间**EF**。
- 工序最早开始时间**ES**

任何一个工序都必须在其紧前工序结束结束后才能开始，紧前工序最早结束时间即为工序最早可能开始时间，简称为工序最早开始时间，用**ES**表示，它等于该工序箭尾事项的最早时间。

当同时有两个以上的箭线指向箭头事项时，选择各工序的箭尾事项最早时间与各自工序作业时间之和的最大值：

$$ES_{i-j} = \max_h \{ES_{h-i} + D_{h-i}\}$$

- 工序最早结束时间**EF**

是工序最早可能结束时间的简称，等于工序最早开始时间加上该工序的作业时间，即：

$$EF_{i-j} = ES_{i-j} + D_{i-j}$$

例1中：

$$ES_{1-2} = 0, ES_{2-3} = ES_{2-4} = ES_{2-5} = ES_{2-7} = 60,$$

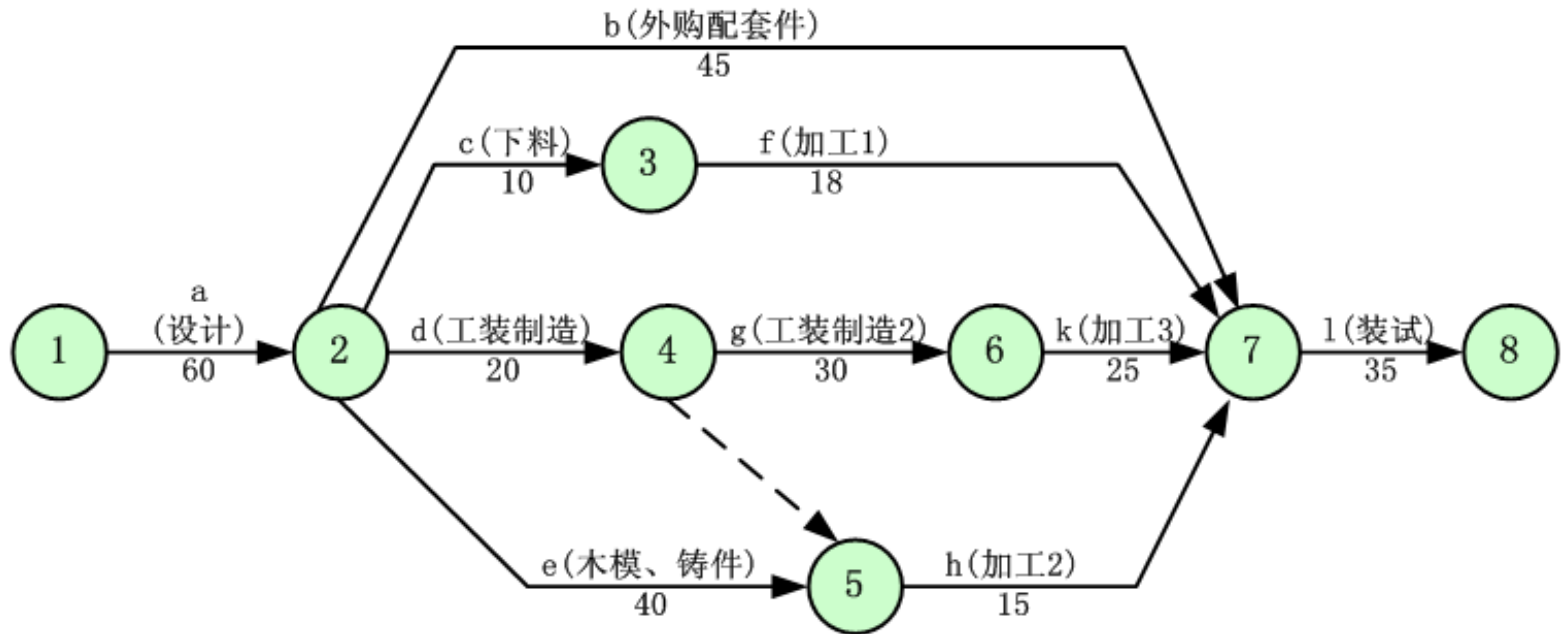
$$ES_{3-7} = 70, ES_{4-6} = ES_{4-5} = 80, ES_{5-7} = 100,$$

$$ES_{6-7} = 110, ES_{7-8} = 135$$

$$EF_{1-2} = 60, EF_{2-3} = 70, EF_{2-4} = 80, EF_{2-5} = 100,$$

$$EF_{2-7} = 105, EF_{3-7} = 88, EF_{4-6} = 110, EF_{4-5} = 80,$$

$$EF_{5-7} = 115, EF_{6-7} = 135, EF_{7-8} = 170$$



- 通常是按箭头事项计算事项最早时间，既用 $\max\{EF\}$ 表示。

$$T_E(1) = 0$$

$$T_E(2) = EF_{1-2} = 60$$

$$T_E(3) = EF_{2-3} = 70$$

$$T_E(4) = EF_{2-4} = 80$$

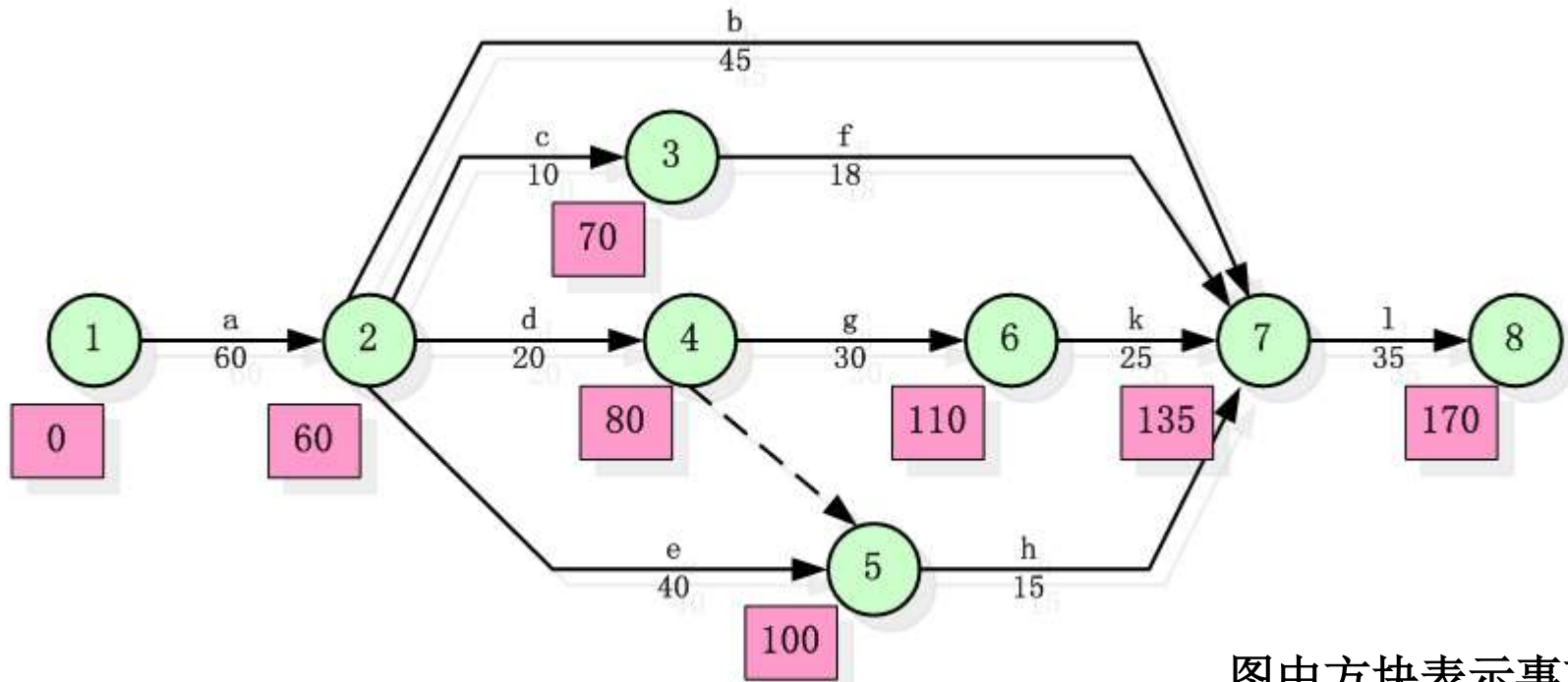
$$T_E(5) = \max\{EF_{2-5}, EF_{4-5}\} = \max\{100, 80\} = 100$$

$$T_E(6) = EF_{4-6} = 110$$

$$T_E(7) = \max\{EF_{2-7}, EF_{3-7}, EF_{6-7}, EF_{5-7}\} = \max\{105, 88, 135, 115\} = 135$$

$$T_E(8) = EF_{7-8} = 170$$

11.2 时间参数的计算(cont.)



图中方块表示事项
最早时间

– 事项最迟时间 $T_L(i)$

- 若事项为某一工序或若干工序的箭尾事项时，事项最迟时间为各工序的最迟必须开始时间 LS 。若事项为某一工序或若干工序的箭头事项时，事项最迟时间为各工序的最迟必须结束时间 LF 。
- 工序最迟开始时间 LS

在不影响工程最早结束时间的条件下，工序最迟必须开始的时间，等于工序最迟结束时间减去工序的作业时间，即：

$$LS_{i-j} = LF_{i-j} - D_{i-j}$$

- 工序最迟结束时间 LF

在不影响工程最早结束时间的条件下，工序最迟必须结束的时间，等于工序的箭头事项的最迟时间，即：

$$LF_{i-j} = \min_k \{LS_{j-k}\}, \text{其中} k \text{为} j \text{的紧后工序}$$

- **LS**和**LF**的计算可从网络图的终点节点开始，逆序计算，直到第一道工序为止。网络图的最后一项工作(***i-n***)的最迟完成时间应由工程的计划工期确定。在未给定时，可令其等于最早完成时间，既：

$$LF_{i-n} = EF_{i-n}$$

- 逆序推导可得例1中的**LS**和**LF**为：

$$LS_{7-8} = 135, LS_{6-7} = 110, LS_{5-7} = 120, LS_{4-6} = 80, LS_{3-7} = 117,$$

$$LS_{2-7} = 90, LS_{2-5} = 80, LS_{2-4} = 60, LS_{2-3} = 107, LS_{1-2} = 0$$

$$LF_{7-8} = 170, LF_{6-7} = LF_{5-7} = LF_{3-7} = LF_{2-7} = 135, LF_{4-6} = 110,$$

$$LF_{2-5} = 120, LF_{2-4} = 80, LF_{2-3} = 117, LF_{1-2} = 60$$

11.2 时间参数的计算(cont.)

- 事项最迟时间 $T_L(i)$ 通常按**LS**计算，从右向左反顺序进行。当箭尾事项同时引出两个以上箭线时，该箭尾事项的最迟时间必须同时满足这些工序的最迟必须开始时间。所以在这些工序的最迟必须开始时间中选一个最早（时间值最小）的时间，即 $\min\{LS+D\}$ 。

$$T_L(8) = LS_{7-8} + D_{7-8} = 170$$

$$T_L(7) = \min\{LS_{2-7} + D_{2-7}, LS_{3-7} + D_{3-7}, LS_{6-7} + D_{6-7}, LS_{5-7} + D_{5-7}\} = 135$$

$$T_L(6) = LS_{4-6} + D_{4-6} = 110$$

$$T_L(5) = LS_{2-5} + D_{2-5} = 120$$

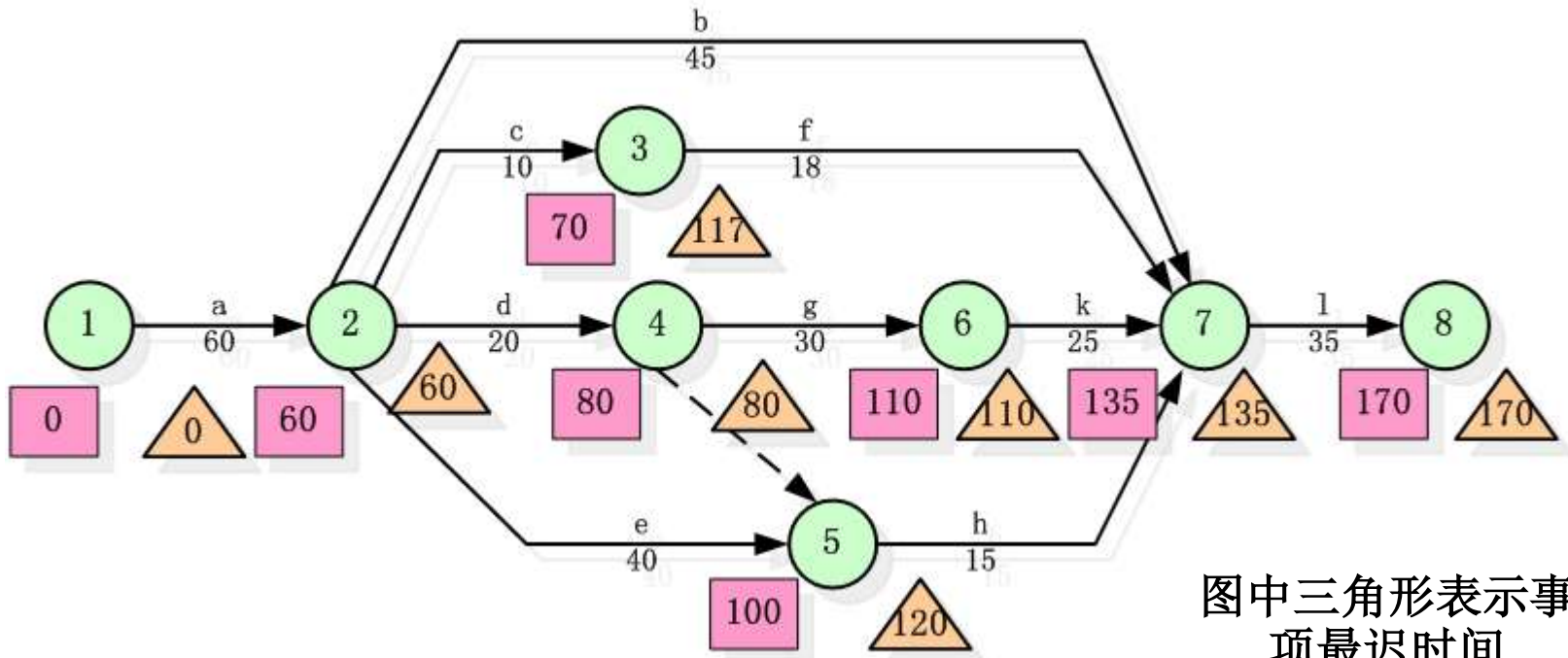
$$T_L(4) = LS_{2-4} + D_{2-4} = 80$$

$$T_L(3) = LS_{2-3} + D_{2-3} = 117$$

$$T_L(2) = LS_{1-2} + D_{1-2} = 60$$

$$T_L(1) = 0$$

11.2 时间参数的计算(cont.)



- 工序总时差 TF_{i-j}

在不影响工程最早结束时间的条件下，工序最早开始（或结束）时间可以推迟的时间，即：

$$TF_{i-j} = LS_{i-j} - ES_{i-j} = LF_{i-j} - EF_{i-j}$$

工序总时差越大，表明该工序在整个网络中的机动时间越大，可以在一定范围内将该工序的人力、物力资源利用到关键工序上去，以达到缩短工程结束时间的目的。

- 工序自由时差 FF_{i-j}

在不影响紧后工序最早开始时间的条件下，工序最早结束时间可以推迟的时间，称为该工序的单时差。

$$FF_{i-j} = ES_{j-k} - EF_{i-j}$$

式中， ES_{j-k} 为工序  的紧后工序的最早开始时间。



11.2 时间参数的计算(cont.)

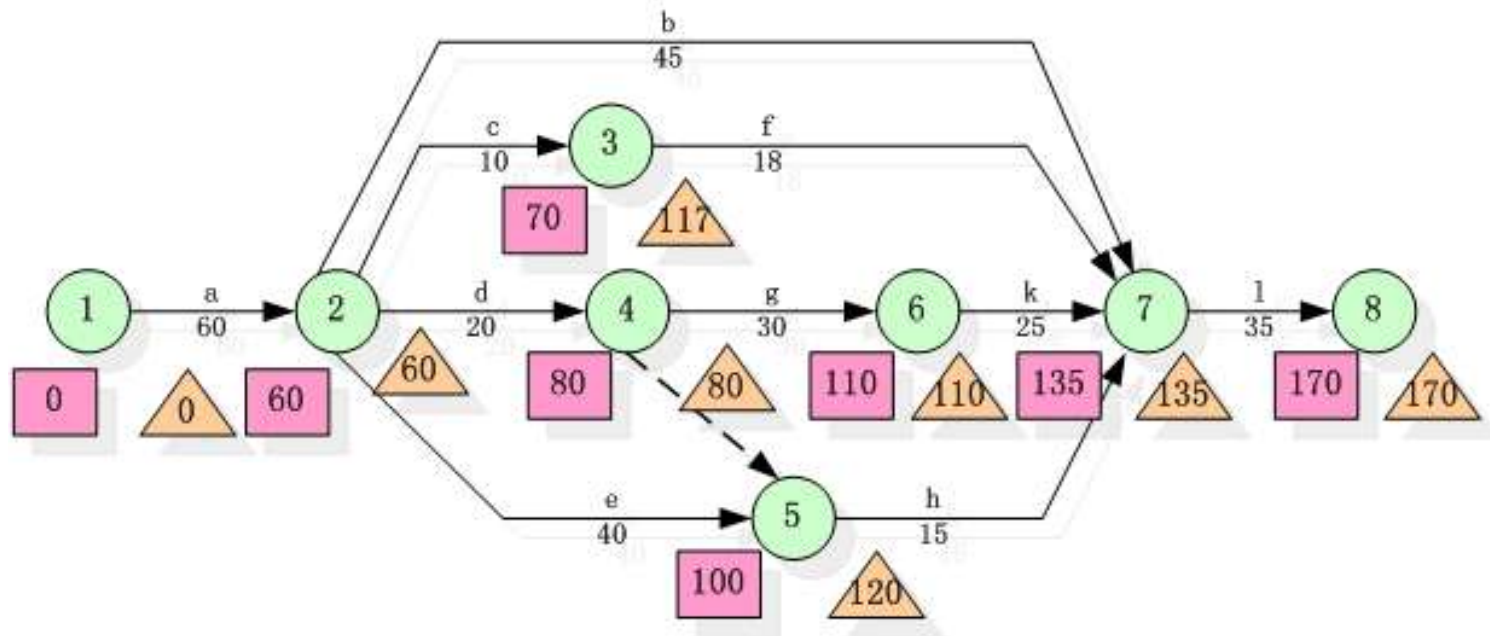
- 总时差为零的工序，开始和结束时间没有一点机动的余地。由这些工序组成的路线就是网络图中的关键路线，这些工序就是关键工序。用计算工序总时差的方法确定网络中的关键工序和关键路线是确定关键路线的最常用方法。在只要求确定关键路线时，可以用寻求最小树的原理和方法，只不过是求最大树。

- 网络优化

- 绘制网络图、计算网络时间和确定关键路线以后，会得到一个初始的计划方案。但通常还要对初始计划方案进行完善和调整。
- 工期优化：根据对计划进度的要求，缩短工程完工时间。
 - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
 - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量以及人力、物力资源，缩短关键工序的作业时间。
- 资源优化：在项目的工期不变的条件下，均衡的利用资源。
 - 优先安排关键工序所需要的资源；
 - 利用非关键工序的总时差，错开各工序的开始时间，拉平资源需要量的高峰；
 - 在确定收到资源限制，或者在考虑综合经济效益的条件下，也可以适当的推迟工程完工时间。

11.3 网络计划的优化(cont.)

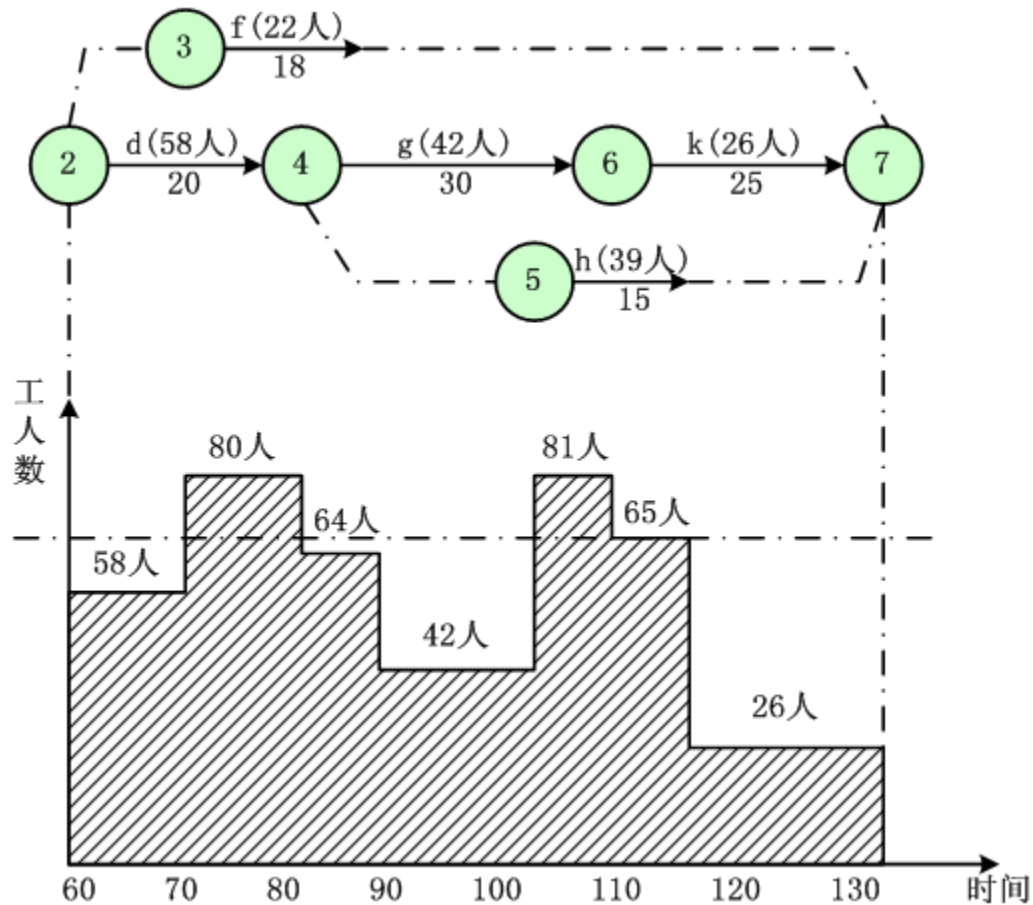
- 例3：在例1网络图（见下图）中，若完成工序d、f、g、h、k的机械加工工人人数有限制时，并已知现有机械加工工人人数为65人，并假定这些工人可以完成上述五个工序中的任何一个工序，各工序所需要的工人人数及上述工序的总时差如下表所示。



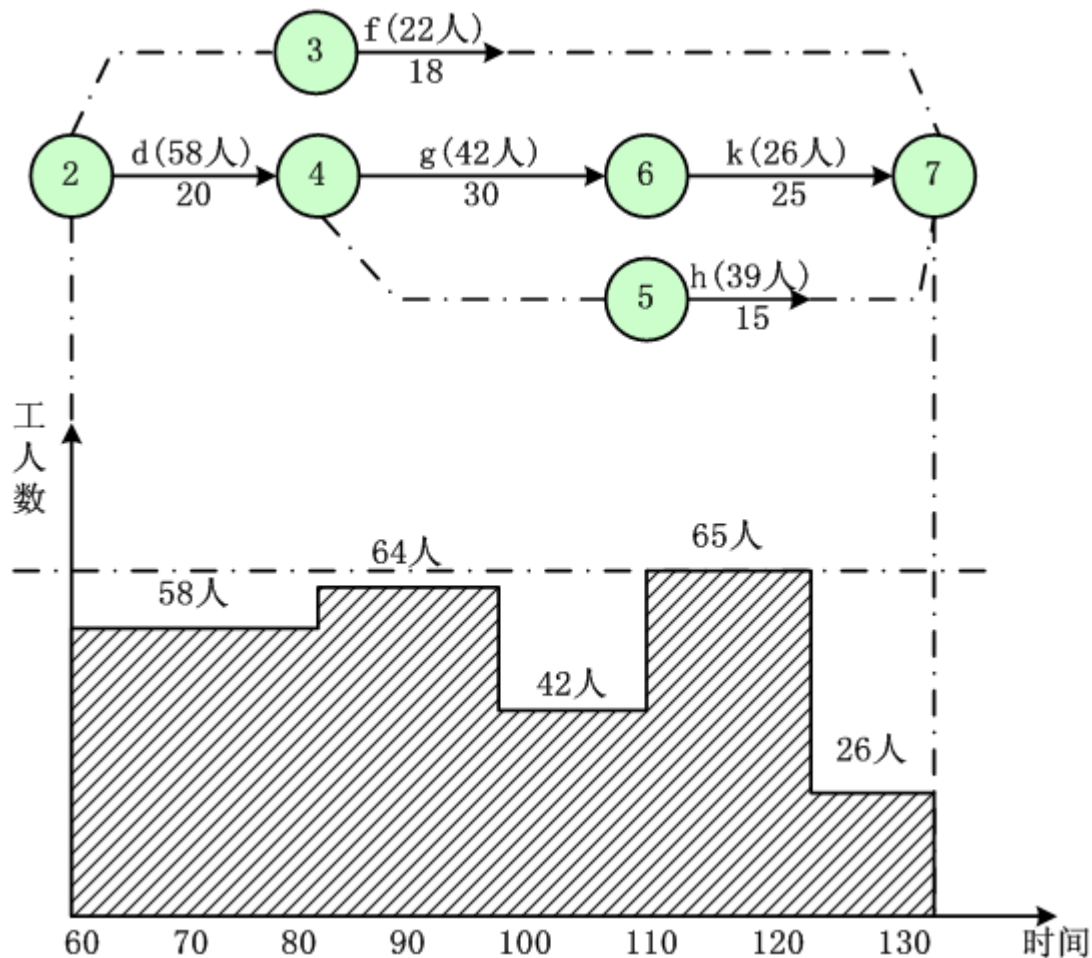
工序	作业时间 (天)	需要的机械加工人数	总时差
d	20	58	0
f	18	22	47
g	30	42	0
h	15	39	20
k	25	26	0

- 若上述工序均按最早开始时间安排时，在完成各关键工序的**75**天中，所需要的机械加工工人数如下图所示。
- 分析：
 - 在图的上半部中，— · — · — 线表示非关键工序总时差的长度。
 - 图的下半部是不同时间内所需要的机械加工工人数，一般称为资源负荷图。
 - 显然左图中有两个时段工人数远远超过了现有工人数，而又有两个时段工人数远远小于现有工人数，这种安排是不合适的。

11.3 网络计划的优化(cont.)



11.3 网络计划的优化(cont.)

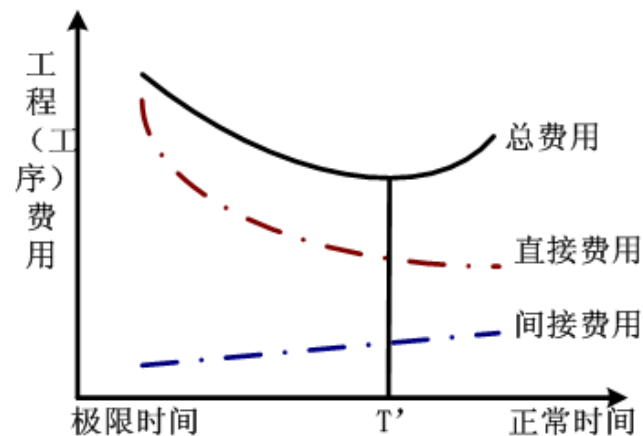


用非关键工序**f**、**h**的总时差，序**f**从第**80**天开始，工序**h**从**120**天开始，就可以拉开资源荷的高峰，保证了整个工程期内各工序所需要的工人人。

11.3 网络计划的优化(cont.)

— 时间—费用优化

- 使得工程完工时间短、费用少；或在保证既定的工程完工时间的条件下，所需要的费用最少；或在限制费用的条件下，工程完工时间最短。
- 一项工程所需要的费用：



- **正常时间**：在现有的生产技术条件下，由各工序的作业时间所构成的工程完工时间。
- **极限时间**：为了缩短各工序的作业时间而采取一切可能的技术组织措施后，可能达到的最短的作业时间和完成工程项目的最短时间。

- **直接费用**：包括直接生产工人的工资及附加费，设备、能源、工具及材料消耗等直接与完成工序有关的费用。为了缩短工序的作业时间，需要采取一定的技术组织措施，相应的要增加一部分直接费用。
- **间接费用**：包括管理人员的工资、办公费等。在一定的生产规模内，工序作业时间越短，分摊的间接费用就越少。
- 在进行时间—费用优化时，需要计算在采取各种技术组织措施之后工程项目的不同完工时间所对应的工序总费用和工程项目总费用。使得工程费用最低的完工时间称为最低成本日程（即上图中的**T'**值）。
- **例3**：以例1中的网络图为例，已知各道工序的正常时间和极限时间以及对应的直接费用和每缩短一天所需要增加的直接费用。已知间接费用为**400元/天**。

11.3 网络计划的优化(cont.)

工序	正常情况下		采取各种措施后		缩短一天工期增加的 直接费用(费用变动率) (元/天)
	正常时间(天)	工序的直接费用(元)	极限时间(天)	工序的直接费用(元)	
a	60	10000	60	10000	-
b	45	4500	30	6300	120
c	10	2800	5	4300	300
d	20	7000	10	11000	400
e	40	10000	35	12500	500
f	18	3600	10	5440	230
g	30	9000	20	12500	350
h	15	3750	10	5750	400
k	25	6250	15	9150	290
l	35	12000	60	12000	-

- 分析：表中，缩短一天工期增加的直接费用称为费用增加率，通常可表示为：

$$\Delta C_{i-j} = \frac{CC_{i-j} - CN_{i-j}}{DN_{i-j} - DC_{i-j}}$$

ΔC_{i-j} : 工作 $i-j$ 的费用率；

CC_{i-j} : 将工作 $i-j$ 持续时间缩短为最短持续时间后，完成该工作所需费用；

CN_{i-j} : 在正常条件下完成 $i-j$ 所需要的直接费用；

DN_{i-j} : 工作 $i-j$ 的正常持续时间；

DC_{i-j} : 工作 $i-j$ 最短持续时间。

— 费用优化步骤：

- 计算费用增加率；
- 在图中找出费用增加率最低的一项关键工作或一组关键工作作为缩短持续时间的对象。其缩短后的值不能小于最短持续时间，不能成为非关键工作；
- 计算相应增加的费用，然后考虑由于工期变动导致的间接费用的变化，计算项目总费用。

— 上例的优化步骤：

- 工序a，I由于某种原因正常时间不能缩短，不存在直接费用变动率。又已知每天的间接费用为**400**元，按网络图以及上表的资料可得，若按照网络图安排，工程工期为**170**天，则工程的总费用为：

$$68900 + 400 \times 170 = 136900 \text{元 (方案I)}$$

- 若要缩短第I方案的完工时间，首先要缩短关键路线上直接费用变动率最低的工序的作业时间，已知关键工序中k、g可以缩短10天，而且费用变动率较低，缩短其作业时间，工程工期为150天，总费用有如下变动：

$$68900 + (10 \times 290 + 10 \times 350) + 400 \times 150 = 135300 \text{元 (方案II)}$$

- 在方案II的基础上缩短d工序10天，h工序5天，e工序缩短5天，则工程周期为140天，工序的总费用变动为：

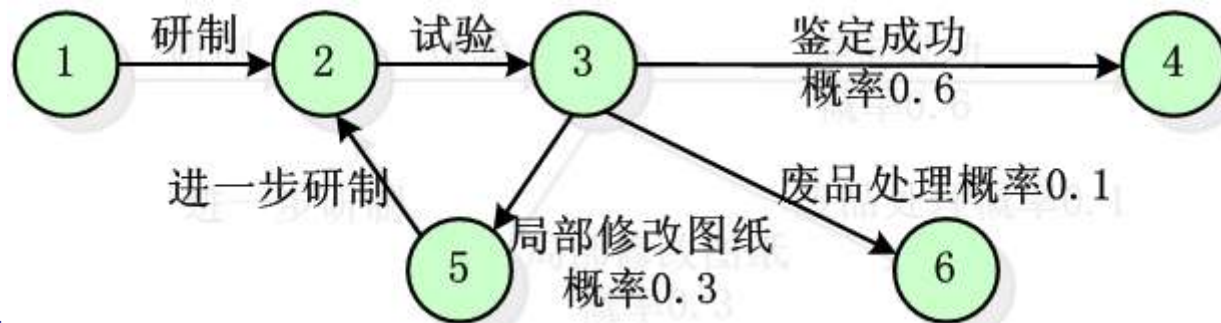
$$75300 + 400 \times 10 + 400 \times 5 + 500 \times 5 + 400 \times 140 = 139800 \text{元 (方案III)}$$

11.4 图解评审法——GERT

- 网络评审法的基本原理

- 网络评审法与随机网络

- 在网络计划中的事项及工序之间的相互关系都是确定的，但在生产科研实践中，有些事项及工序之间的相互关系却是随机的。
- 例4：新产品研制成功的概率与时间问题。研制某一新产品的过程为：研制，试验，经试验后研制或成功(鉴定，概率**0.6**)，或失败(废品处理，概率**0.1**)，或局部修改图纸(概率**0.3**)。若研制成功或失败，则研制过程结束；否则修改图纸以后做进一步研制和试验。若给出各个工序的作业时间，求出研制过程所需的时间及研制成功的概率。
- 分析：若用前面的网络图来表示可得：














- 但是，求解这类问题显然不能应用上述网络图：
 - 1) 试验、局部修改图纸、进一步研制三道工序构成了一个闭回路②→③→⑤→②，因为③→⑤出现的概率为**0.3**，因此，在网络上可能会出现两次或更多次的循环；
 - 2) 实验工序完成后，紧后工序不是确定的，而是随机的，三个事件只能出现一个，而不是经过所有事件研制才能结束；
 - 3) 网络图中有两个终点——研制成功或失败，并都有一定概率；
 - 4) 研制经试验工序后要经过哪些工序，或需要修改几次图纸，都是随机的。
- 综上所述，由于给定问题的条件和要求不同，**1966年A.Pritsker**提出了图解评审法（**GERT: Graphical Evalvation and Review Techinue**）。

11.4 图解评审法——GERT(cont.)

- 随机网络（**GERT**网络）

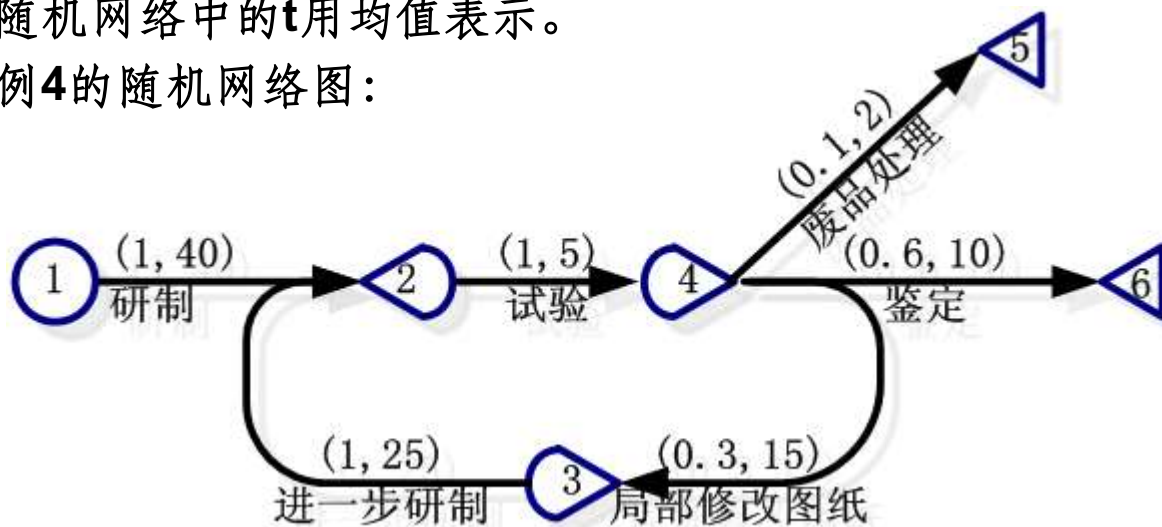
- 例4中的问题需要用随机网络来描述。随机网络是由一些逻辑结点和连接两个结点之间的弧组成。逻辑结点包括输入侧和输出侧。输入侧有三种逻辑关系，输出侧有两种逻辑关系，可得到六种不同的结点。

<div> <div>输入侧</div> <div>输出侧</div> </div>		异或型	或型	与型
				
确定型				
概率型				

- 输入侧：
 - 异或 (**Exclusive or**)：表示引至该结点的任一条弧实现了则该结点即实现；但在给定时间内仅只有一条引入该结点，弧才能被实现。
 - 或 (**Inclusive or**)：表示引至该结点的任一条弧实现则该结点即实现；实现的时间是由引至该结点所有的工序中完工最短的时间。
 - 与 (**and**)：表示仅当至该结点的所有弧实现后结点才实现；实现的时间是引至该结点所有的工序中完工最长的时间。
- 输出侧：
 - 确定型：若结点已实现，则从该结点射出的弧都要实现，即所有弧实现的概率均为1。
 - 概率型：若结点已实现，则只能有一条从该结点射出的弧实现。

11.2 图解评审法——GERT(cont.)

- 每条弧上赋予两个参数：
 - 给定的结点实现时，该弧出现的概率为 p ；
 - 弧上表示的工序的作业时间为 t ，它是个随机变量或者是一个常数。如果是随机变量，应给出理论分布的密度函数、均值和方差。在随机网络中的 t 用均值表示。
- 例4的随机网络图：



例如：局部修改图纸的(0.3,15)中，0.3即为该弧出现的概率 p ，15是该工序的作业时间。

11.2 图解评审法——GERT(cont.)

— 图解评审法的一般程序：

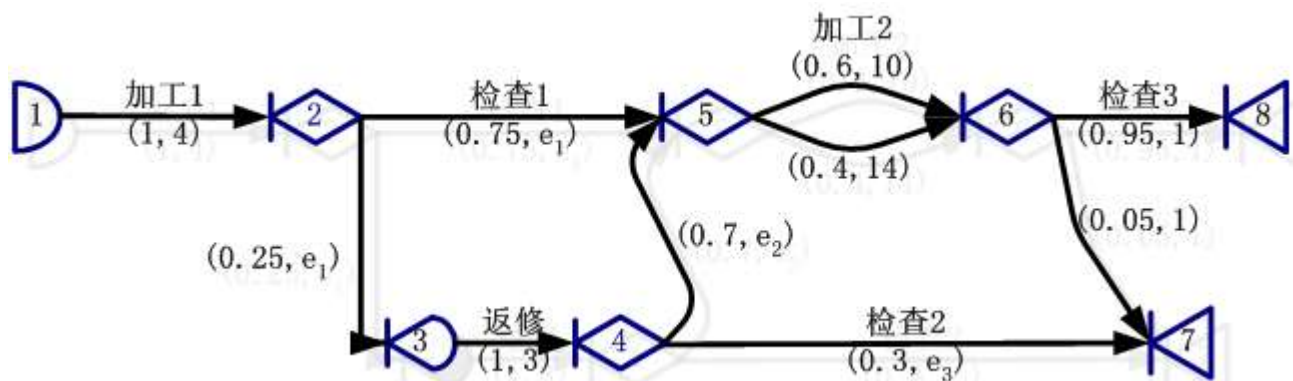
- 系统分析，明确问题求解的要求；
- 绘制随机网络图；
- 参数的确定与估计；
- 随机网络的计算或模拟；
- 综合评价与审定。

• 图解评审的基本方法

- 解析法：用随机网络中给定的参数，把概率问题和随机问题化为确定性问题求解，或者采用信流图理论，用等效函数法求解。
 - 例5：成批生产，每个成品的生产时间与成品率问题。生产一批零件，其中各道工序完成的概率、作业时间及各工序的相互关系如下表所示。试求成批生产这种零件，每个成品需要的时间和成品率。

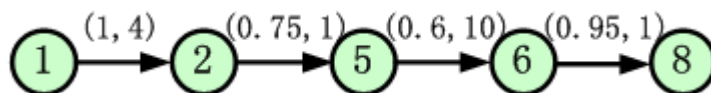
11.2 图解评审法——GERT(cont.)

工序名称	工序代号	完成概率	作业时间	紧后工序
加工1	1-2	1	4 (常数)	检查1
检查1	2-3	0.25	e_1 : 均值=1, 方差=1($\mu=0, \lambda=1$, 指数分布)	不合格, 转返修
	2-5	0.75		合格, 转加工2
返修	3-4	1	3 (常数)	检查2
检查2	4-5	0.7	e_2 : 均值=2, 方差=0.25($\mu=0, \lambda=0.5$, 指数分布)	加工2
	4-7	0.3	e_3 : 均值=2, 方差=0.25($\mu=0, \lambda=0.5$, 指数分布)	报废
加工2	5-6	0.6	10 (常数)	检查3
		0.4	14 (常数)	
检查3	6-7	0.05	1 (常数)	报废
	6-8	0.95	1 (常数)	成品



- 从上面的随机网络图可以看出，零件加工为成品的生产过程可能经过以下四条路线，其中作业时间为指数分布的按均值计算：

第一条路线：

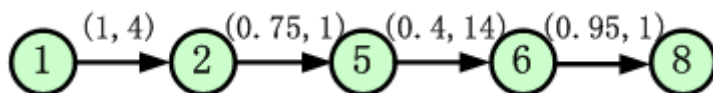


该路线的实现概率为： $p_1 = 1 \times 0.75 \times 0.6 \times 0.95 = 0.4275$

所需要的时间为： $t_1 = 4 + 1 + 10 + 1 = 16$

11.2 图解评审法——GERT(cont.)

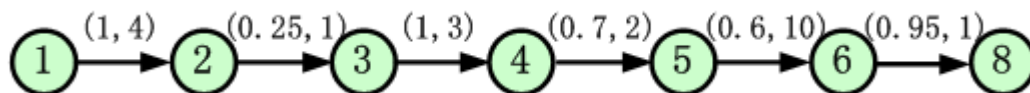
第二条路线：



该路线的实现概率为： $p_2=1 \times 0.75 \times 0.4 \times 0.95=0.285$

所需要的时间为： $t_2=4+1+14+1=20$

第三条路线：



该路线的实现概率为： $p_3=1 \times 0.25 \times 1 \times 7 \times 0.6 \times 0.95=0.09975$

所需要的时间为： $t_3=4+1+3+2+10+1=21$

第三条路线：



该路线的实现概率为： $p_3=1 \times 0.25 \times 1 \times 7 \times 0.4 \times 0.95=0.0665$

所需要的时间为： $t_3=4+1+3+2+14+1=25$

11.2 图解评审法——GERT(cont.)

- 由上述四条路线可得出零件加工的成品率和每个零件需要的平均时间分别为：

$$P_c = \sum_i P_i = 0.4275 + 0.285 + 0.9975 + 0.0665 = 0.87875 (\approx 87.88\%)$$

$$T_c = \frac{1}{P_c} \sum_i P_i t_i = \frac{1}{0.87875} (0.4275 \times 16 + 0.285 \times 20 + 0.9975 \times 21 + 0.0665 \times 25) \approx 18.546 \text{ 小时}$$

由 P_c 可得零件的废品率为：

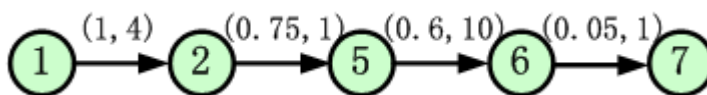
$$P_f = 1 - P_c = 0.12125 (\approx 12.12\%)$$

— 计算机模拟解法

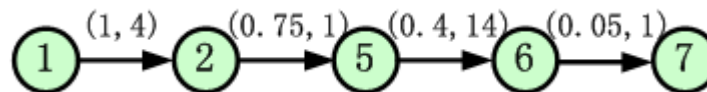
- 从解析法可以看出：

1) 零件加工过程有多种可能性，除了上述列举的四条加工成成品路线，还有五条路线在加工过程中零件称为废品。

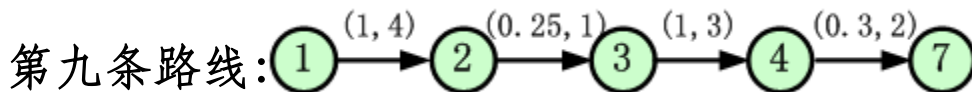
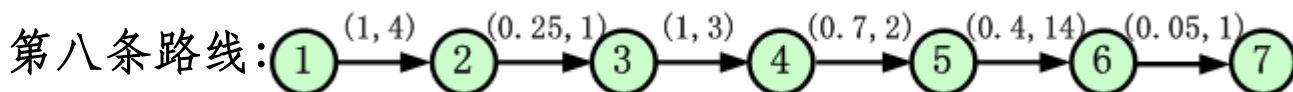
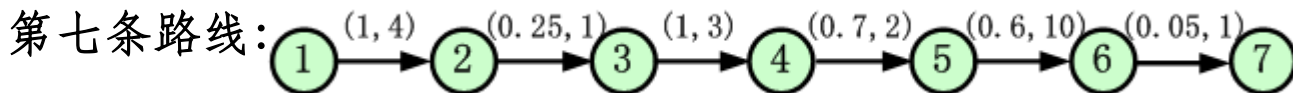
第五条路线：



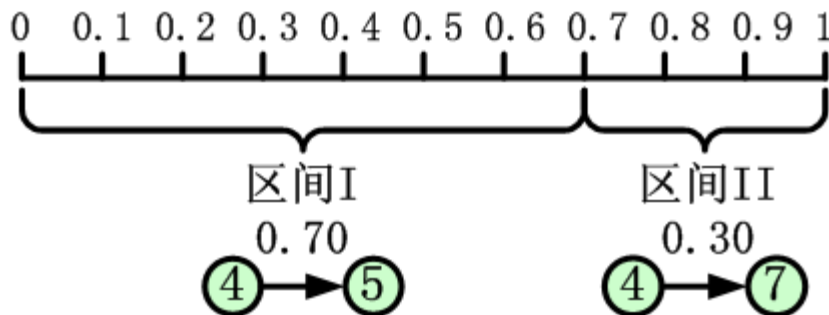
第六条路线：



11.2 图解评审法——GERT(cont.)



每个零件经过的加工路线是由始点事项开始，每个工序以概率 P_i 转移到紧后工序。若各工序转移到紧后工序的概率 P_i 服从 $(0 \leq P_i \leq 1)$ 均匀分布，每个零件经过的加工路线就可以在计算机上经随机数来模拟。下面的工序为例：



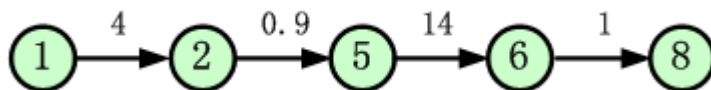
用计算机产生0、1之间的随机数，随机数落在哪个区间，则执行哪道工序。

11.2 图解评审法——GERT(cont.)

- 2) 不同的加工路线，各工序所需要的时间，是服从某种分布密度函数的随机变量，将服从**(0,1)**均匀分布的随机数，通过公式逆变或者逐段逼近的方法，可以产生所需要的分布密度函数的随机数。
- 3) 由上面两点1)、2)得知，每个零件的加工路线与所需要的时间是随机网络的子网络。在计算机上每模拟一次就得出一个子网络，这个子网络各个工序实现的概率都是**1**，每个工序所需要的时间是个确定量，则该子网络所需要的时间也是确定量。

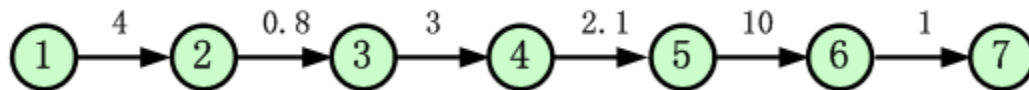
例如：

第一次模拟（第一个零件的加工过程）——成品1



$t_{11}=4+0.9+14+1=19.9$ （小时），出现的结点为1，2，5，6，8

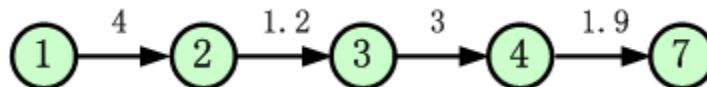
第二次模拟（第二个零件的加工过程）——废品1



$t_{21}=4+0.8+3+2.1+10+1=20.9$ （小时），出现的结点为1，2，3，4，5，6，7

11.2 图解评审法——GERT(cont.)

第三次模拟（第三个零件的加工过程）——废品2



$t_{22}=4+1.2+3+1.9=10.1$ （小时），出现的结点为1，2，3，4，7

继续模拟下去直到第N次……

4) 第N次模拟，得出需要的总的时间T和成品零件个数K，二者之比即是每个成品零件所占用的平均时间，即：

$$T_c = \frac{T}{K} = \frac{\sum_{i=1}^K t_i + \sum_{j=1}^{N-K} t_j}{K}$$

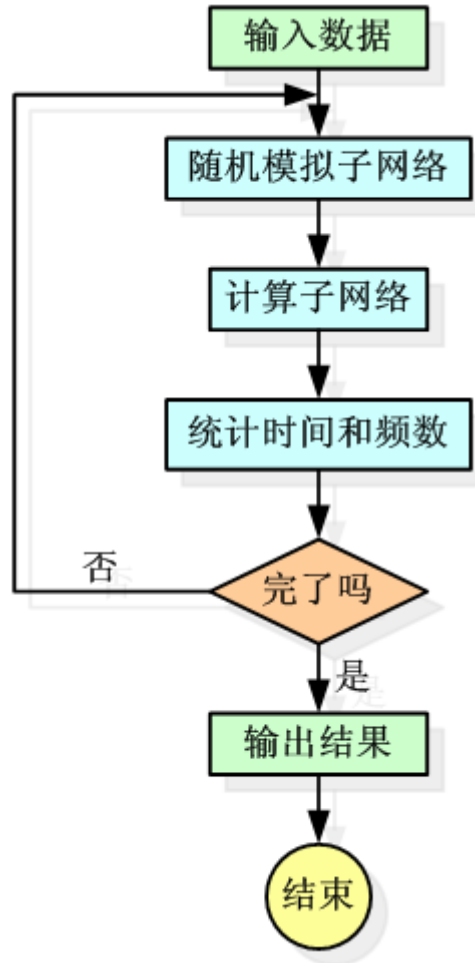
其中， t_i 为第*i*件成品零件的加工时间 t_j 为第*j*件废品零件的加工时间

一批零件的成品率 P_c 等于成品零件个数与这批零件总个数的百分比 即：

$$P_c = \frac{K}{N} \%$$

11.2 图解评审法——GERT(cont.)

— 综上所述，用计算机模拟随机网络的程序框图如下图：





本章完
The end