微分方程1考试A卷试题参考解答 **2017年1月5日**

一. 求下列方程的通解, 每个小题 5 分.

(1) $y'' + y' = 2x$;

(2) $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$, (提示可观察出特解);

(3) $(e^{-y} - x)y' = 1$;

(4) $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

解(1): $y'' + y' = 2x$. 先解对应齐次方程 $y'' + y' = 0$. 其特征方程为 $\lambda^2 + \lambda = 0$. 特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. 因此齐次方程的通解为 $y = c_1 + c_2e^{-x}$. 由于右端项是共振的, 即 $2x = 2xe^{\lambda_1 x}$. 根据非齐次常系数线性高阶方程的的理论可知 方程有形如 $y = x(ax+b)$ 的解. 将其带入方程得 $a = 1, b = -2$. 于是非齐次方程$y'' + y' = 2x$的通解为

$$y = c_1 + c_2e^{-x} + x^2 - 2x.$$

另解**:** 作变换$z = y'$可将方程化为一阶线性方程 $z' + z = 2x$. 由此不难得到方程的通解.

解(2): $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$. 这是 Riccati 型方程. 如果能够已知它的一个解, 则可以求出它的通解. 根据方程的形状, 可猜测方程有解形如 $\frac{a}{x}$, a 为待定常数. 带入方程可知知 $a = 2$. 于是做变换

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z},$$

带入方程$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$, 并加以化简得到关于新的未知函数 z 的方程

$$z' = \frac{5z}{x} + 1.$$

这是一阶线性方程. 根据求解公式不难求得其通解为 $z = Cx^5 - \frac{x}{4}$. 于是原方程 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$ 的通解为

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

另解：作变换 $z = xy$ 得 $z' = xy' + y$. 于是方程 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$ 就化为变量分离型方程

$$xz' + z^2 = 4.$$

由此不难求得方程的通解.

解(3): $(e^{-y} - x)y' = 1$. 不难看出若将 x 看作 y 的函数, 方程等价于一阶线性方程

$$\frac{dx}{dy} = -x + e^{-y}.$$

很容易求得其通解为

$$x = e^{-y}(y + C), \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

这也是原方程$(e^{-y} - x)y' = 1$ 的通解.

另解：关于方程$(e^{-y} - x)y' = 1$两边同乘函数 e^y 并稍加整理得

$$y' = (xe^y)'.$$

由此得方程的通解为 $y = xe^y + C$.

解(4): $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$. 这是齐次方程. 有积分因子

$$\frac{1}{xp(x,y) + yq(x,y)} = \frac{1}{x(x^2 - y^2) + 2xy^2} = \frac{1}{x(x^2 + y^2)}.$$

将这个积分因子乘以方程得

$$\frac{(x^2 - y^2)dx + 2xydy}{x(x^2 + y^2)} = 0.$$

无需验证这是一个恰当方程. 我们对上述微分式作适当组合

$$\frac{(x^2 - y^2)dx + xdy^2}{x(x^2 + y^2)} = \frac{-(x^2 + y^2)dx + xd(x^2 + y^2)}{x(x^2 + y^2)}$$

$$= -d\ln|x| + d\ln(x^2 + y^2) = 0.$$

因此求得方程的通解为

$$-\ln|x| + \ln(x^2+y^2) = C.$$

此即

$$x = C(x^2+y^2).$$

<u>另解</u>：若令 $z=y^2$, 则方程$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ 变为 $(x^2-z)dx+xdz=0$. 这是一个一阶线性方程, 可根据求解公式求得通解. ∎

二. (10分) 考虑 n 阶线性系统 $\dot{x}=A(t)x$, 这里n 阶实方阵 $A(t)$ 假设在 $\in[0,+\infty)$ 上连续. 进一步假设如下广义积分收敛

$$\int_0^{+\infty}\|A(s)\|ds < +\infty, \tag{1}$$

证明系统的每个解 $x(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时均有极限, 即向量值函数 $x(t)$ 的极限 $\lim_{t\to+\infty}x(t)$ 存在. 这里 $\|A(t)\|$ 是一个矩阵范数.

证明: 根据Cauchy收敛准则知, 要证极限$\lim_{t\to+\infty}x(t)$ 存在, 即要证当 t_1, t_2 充分大时, $\|x(t_2)-x(t_1)\|$ 可以任意小. 为此我们来考虑 $\|x(t_2)-x(t_1)\|$. 熟知微分方程 $\dot{x}=A(t)x$ 与如下的积分方程等价.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t A(s)x(s)ds, \quad \forall t\geq 0. \tag{2}$$

由此可知

$$x(t_2)-x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\dot{x}(s)ds = \int_{t_1}^{t_2}A(s)x(s)ds.$$

下面我们对 $\|x(t)\|$ 作估计. 于等式 (2) 两边取范数得

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + \int_0^t \|A(s)\|\|x(s)\|ds, \quad \forall t\geq 0.$$

由Gronwall不等式我们就得到不等式

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\|e^{\int_0^t\|A(s)\|ds}, \quad \forall t\geq 0. \tag{3}$$

并由此可知方程的每个解在区间 $[0,+\infty)$ 上有界, 即

$$\|x(t)\| \le M := \|x(0)\| e^{\int_0^{+\infty}\|A(s)\|ds} \quad \forall t \ge 0. \tag{4}$$

由于假设广义积分(1)收敛, 根据Cauchy收敛准则可知对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$ 使得

$$\int_{t_1}^{t_2} \|A(s)\|ds < \varepsilon, \quad \forall t_2 \ge t_1 \ge T.$$

由此得

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \le \int_{t_1}^{t_2} \|A(s)\|\|x(s)\|ds \le M\varepsilon. \tag{5}$$

因此$\lim_{t\to+\infty} x(t)$ 存在. 证毕. ∎

三. (15分) 设二阶常数矩阵 A 和二维向量值函数 $f(x)$ 定义如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) 计算 e^{Ax}. (ii) 求二维齐次方程组 $u' = Au$ 所有在 $[0,+\infty)$ 上有界的解. (iii) 求非齐次方程组 $u' = Au + f(x)$ 满足初值条件 $u(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ 的解.

解: (i) 不难求得矩阵 A 的两个特征值为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. 对应的特征向量为

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由此得到齐次方程 $y' = Ay$ 的一个基本解矩阵如下

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} & -e^{-x} \\ e^{3x} & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

于是

$$e^{Ax} = \Phi(x)\Phi(0)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3x} + e^{-x} & e^{3x} - e^{-x} \\ e^{3x} - e^{-x} & e^{3x} + e^{-x} \end{bmatrix}.$$

注: 利用 Putzer 算法不难计算出 e^{Ax}. 这里我们先求出基本解组而没有用 Putzer 算法, 是为了解答 (ii) 的方便.

(ii) 在上述的解答中，我们已经得到齐次方程组 $y' = Ay$ 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。 由此不难看出解 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 当且仅当 $c_1 = 0$。因此齐次方程组 $y' = Ay$ 所有的在 $[0, +\infty)$ 上有界的解具有形式

$$y(x) = ce^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c\text{ 为任意常数}.$$

(iii) 根据线性常微方程组的求解公式，我们有如下关于方程组 $y' = Ay + f(x)$ 满足初值条件 $y(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ 的解的表达式，

$$y(x) = e^{Ax} \int_0^x e^{-As} f(s) ds = \frac{1}{2}(e^{3x} - e^x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解答完毕.

四. (15分) 考虑周期线性齐次系统

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

计算系统的 Floquet 乘子, 判断系统是否存在非零周期解, 并确定系统在区间 $[0, +\infty)$ 上的稳定性.

解：为了计算Floquet 乘子, 我们需要求得系统的一个基本解矩阵. 由于系统的特殊形式, 我们可以直接求解. 由系统的第一个方程 $x' = (-1 + \cos t)x$ 可解得 $x = c_1 e^{-t + \sin t}$. 再将这个表达式带入第二个方程得

$$y' + y = c_1 (\cos t) e^{-t + \sin t}.$$

这是一阶线性方程, 可由求解公式得到它的通解. 但用以下方式求解更简单. 于上式两边同乘以 e^t (即所谓积分因子) 得

$$(ye^t)' = c_1(\cos t)e^{\sin t}.$$

于是得

$$ye^t = c_1\int \cos t e^{\sin t}dt = c_1 e^{\sin t} + c_2 \quad \text{即} \quad y = c_1 e^{-t+\sin t} + c_2 e^{-t}.$$

由此得系统的通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} e^{-t+\sin t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{-t+\sin t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

于是我们得到系统的一个基本解矩阵

$$\Phi(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} e^{\sin t} & e^{\sin t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这个基本解矩阵对应的转移矩阵为

$$C = \Phi(0)^{-1}\Phi(2\pi) = e^{-2\pi}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{-2\pi}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由此可见转移矩阵 C 的两个特征值, 即系统的两个 Floquet 乘子为 $\lambda_1 = \lambda_2 = e^{-2\pi}$. 它们按模均小于1. 因此系统没有非零的周期解, 并且系统的每个解均渐近稳定, 即每个解满足 $(x(t), y(t)) \to (0,0)$, 当 $t \to +\infty$. ∎.

五. (15分) 记 $\phi(x,\xi,\eta)$ 为初值问题

$$y' = \sin(xy), \quad y(\xi) = \eta$$

的解. 计算解 $\phi(x,\xi,\eta)$ 在初始点 $(\xi,\eta) = (0,0)$ 处的两个偏导数

$$\left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)} \quad \text{和} \quad \left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)}.$$

解；考虑解 $\phi(x,\xi,\eta)$ 所满足的微分方程以及初值条件

$$\phi'(x,\xi,\eta)=\sin[x\phi(x,\xi,\eta)],\quad \phi(\xi,\xi,\eta)=\eta. \tag{6}$$

对上式关于 ξ 和 η 分别求偏导数得

$$\phi'_\xi(x,\xi,\eta)=\cos[x\phi(x,\xi,\eta)]x\phi_\xi(x,\xi,\eta),\quad \phi'(\xi,\xi,\eta)+\phi_\xi(\xi,\xi,\eta)=0, \tag{7}$$

$$\phi'_\eta(x,\xi,\eta)=\cos[x\phi(x,\xi,\eta)]x\phi_\eta(x,\xi,\eta),\quad \phi_\eta(\xi,\xi,\eta)=1, \tag{8}$$

这里$'$ 表示$\phi(x,\xi,\eta)$ 关于第一个变量的导数. 由于 $\phi'(\xi,\xi,\eta)=\sin[\xi\phi(\xi,\xi,\eta)]=\sin[\xi\eta]$, 因此式 (7) 可写作

$$\phi'_\xi(x,\xi,\eta)=\cos[x\phi(x,\xi,\eta)]x\phi_\xi(x,\xi,\eta),\quad \phi_\xi(\xi,\xi,\eta)=-\sin[\xi\eta]. \tag{9}$$

注意到当 $\eta=0$ 时, $\phi(x,\xi,0)\equiv 0$. 这是由解的唯一性所得. 为表述清楚起见, 记

$$u(x):=\left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)},\quad v(x):=\left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)},$$

我们就得到关于待求函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的 Cauchy问题

$$u'(x)=xu(x),\quad u(0)=0,$$

$$v'(x)=xv(x),\quad v(0)=1.$$

解之得 $u(x)\equiv 0$, $v(x)=e^{x^2/2}$. 即

$$\left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)}\equiv 0,\quad \left.\frac{\partial\phi(x,\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)}=e^{x^2/2}.$$

解答完毕.

注：许多同学在推导方程(7)和(8)时丢掉了因子 x, 从而导致错误结果.

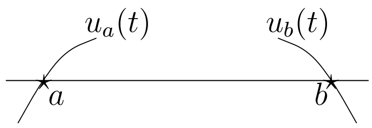
六. (10分) 考虑二阶线性齐次方程 $\ddot{u}+a(t)u=0$， 其中函数 $a(t)$ 是开区间 I 上的连续函数. 设$[a,b]\subset I$ 是开区间 I 的一个有界闭子区间. 证明方程存在一个解在 $[a,b]$ 上无零点, 当且仅当方程的每个非零解在 $[a,b]$ 上至多有一个零点。

证明：$\Longrightarrow$: 假设方程存在一个解 $u^*(t)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点。那么对于方程的任意非零解 $u(t)$, 若 $u(t)$ 与 $u^*(t)$ 线性相关， 那么 $u(t)$ 在 $[a,b]$ 上也没有零点。若 $u(t)$ 与 $u^*(t)$ 线性无关，那么 $u(t)$ 在 $[a,b]$ 上至多有一个零点。因为若 $u(t)$ 在 $[a,b]$ 上有两个零点，则根据 Sturm 分离定理可知，解 $u^*(t)$ 在这两个零点之间有一个零点。此与假设 $u^*(t)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点相矛盾。

$\Longleftarrow$: 假设方程的每个非零解在 $[a,b]$ 上至多有一个零点。我们来构造一个在 $[a,b]$ 无零点的解。 记 $u_a(t), u_b(t)$ 为方程的解分别满足初值条件：$u_a(a)=0,\ u_a'(a)=1$ 和 $u_b(b)=0,\ u_b'(b)=-1$. 解 $u_a(t), u_b(t)$ 的局部图像见下图。 根据假设和初值条件不难看出

$$u_a(t)>0, \quad \forall t\in(a,b] \quad 和 \quad u_b(t)>0, \quad \forall t\in[a,b).$$

于是这两个解的和 $u_a(t)+u_b(t)$ 就是一个在 $[a,b]$ 上没有零点的解。 证毕。



七. (10分) 计算矩阵指数 e^A 的行列式 $\det e^A$, 其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

解: 根据 Liouville 公式得 $\det e^{At}=e^{\int_0^t (trA)dt}=e^{t(trA)}$. 令 $t=1$ 得

$$\det e^A=e^{trA}=e^{15}.$$

$\blacksquare$

八. (15分) 记 $y(x)$ 为 Cauchy 问题 $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$ 的饱和解. 回答以下问题, 并说明理由.

(i) 解的最大存在区间 (α, β) 有界或无界(单边或双边无界);

(ii) 解 $y(x)$ 是奇函数, 偶函数, 或不确定;

(iii) 确定解$y(x)$的单调区间.

(iv) 显式给出两个 (α, β) 上的函数 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得 $v(x) \le y(x) \le u(x)$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

解：先回答问题 (ii). 我们断言 $y(x)$ 是奇函数. 理由如下. 令 $z(x) := -y(-x)$, 则 $z(0) = 0 = y(0)$, 并且

$$z'(x) = y'(-x) = (-x)^2 + y^2(-x) = x^2 + z^2(x).$$

这表明 $z(x)$ 是解, 并且有和解 $y(x)$ 相同的初值. 根据解的唯一性知 $z(x) \equiv y(x)$. 即 $y(-x) = -y(x)$, $y(x)$ 是奇函数.

由于解 $y(x)$ 是奇函数, 故它的最大存在区间是对称的, 即为 $(-\beta, \beta)$. 为了判断 β 是否有限, 我们先来构造一个右下解. 显然 $v(x) \equiv 0$ 是右下解. 因为

$$v'(x) \equiv 0 < x^2 = f(x, v(x)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

这里 $f(x, y) := x^2 - y^2$. 因此 $y(x) > 0$, $\forall x \in (0, \beta)$.

再来构造一个右上解. 由观察知 $u(x) := x$ 是一个右上解. 这是因为

$$u'(x) = 1 > 0 = f(x, u(x)), \quad \forall x > 0.$$

因此

$$0 < y(x) < x, \quad t \in (0, \beta). \tag{10}$$

若 $\beta < +\infty$, 则 $y(x)$ 在$x=\beta$左侧无界. 此与式(10) 向矛盾. 故 $\beta = +\infty$. 这就回答问题(i), 解 $y(x)$ 的最大存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.
根据不等式(10)可知,

$$0 < y(-x) < -x, \quad \forall x < 0.$$

由于$y(x)$ 是奇函数, 故

$$0 > y(x) > x, \quad \forall x < 0. \tag{11}$$

于是我们得到了两个显式函数

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad v(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases},$$

使得 $v(x) \leq y(x) \leq u(x)$, $\forall x \in (\infty, +\infty)$. 根据不等式(10) 和 (11), 以及解 $y(x)$ 所满足的微分方程 $y'(x) = x^2 - y(x)^2$, 可知 $y'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. 由此可见解 $y(x)$ 在整个实轴上严格单调上升. 这就回答了问题 (1),(iii),(iv).

∎