数学分析讲义：第十章 $\mathbb{R}^n$上的积分(I)

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; 《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 April 2017

数学分析讲义总目录

第十章 $\mathbb{R}^n$上的积分(I)

本章和下一章我们学习$\mathbb{R}^n$上一般积分的基本概念、基本定理和Lebesgue 积分和Hausdorff 积分(后者是第一型曲线、曲面积分及其推广)的具体性质和计算公式。关于现代积分的发展简介, 请同学们参看陈书第十章前言。作为上一章的继续, 本章仍只讲关于欧空间$\mathbb{R}^n$上完备测度空间的积分理论, 因为一方面这样做容易衔接以往熟悉的概念, 容易理解新概念, 同时已包含了一般理论中的主要实质概念, 另一方面也是由于欧空间$\mathbb{R}^n$上的这类积分最常用, 其中重积分、曲线曲面积分, 即$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度与积分, Hausdorff 测度与积分等, 都是必学内容。此外也是出于这样的考虑: 学习本讲义的同学们已有这样的能力: 对于讲义中不难的定理、命题等, 能看出哪些条件可以放宽(例如在一些定理命题性质中, 把欧空间$\mathbb{R}^n$ 换成一般度量空间X也成立, 只需拓宽相关定义), 因此以后学习一般积分理论时就无障碍。

与上一章一样, 除了陈书以外, 本章其他参考书如下:

[1] 周民强《实变函数》, 北京大学出版社. 此书主要讲经典 Lebesgue 测度和积分, 习题丰富有趣 (90 年代以后的各版本有部分习题解答), 适于作本科生实分析教材.

[2] W. Rudin *Real and Complex Analysis* (《实分析与复分析》)有中译本, 人民教育出版社,1981. 此书为名著,其实分析部分包括了现代测度与积分的主要方法和结果, 适于数学系高年级学生和研究生学习.

[3] Gerald B. Folland *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Jon Wiley & Sons, Inc. , 1984. 该书比较浓缩但是非常清晰地展示了现代测度和积分的基本知识, 使读者能较快地领略并掌握这门学科的主干和应用方法.

[4] 严加安《测度论讲义》(第二版), 科学出版社, 2004. 此书较全面也较浓缩, 是研究测度论和概率论学者的必读教材.

[5] A. Mukherjea and K. Pothoven, *Real and Functional Analysis, Part A: Real Analysis,* Second Edition, 1984, Plenum Press, New York. 此书技术含量较高, 论证严谨, 本讲义对非负简函数积分的定义即参考该书的处理 (见本章下面**§10.1**).

§10.1. 非负可测函数的积分

就像从正项级数开始建立无穷级数理论一样, 积分的建立先从非负函数类开始是方便的, 本身也很重要, 最大好处是: 只涉及加法, 因此不会出现同号无穷大相减: "$\infty-\infty$".

【非负简单函数的积分】为使积分的定义是良定的(well-defined), 我们需要两个引理:

【引理10.1】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $A_1,A_2,...,A_p\in\mathcal{M}$, $a_1,a_2,...,a_p\in[0,+\infty)$. 则存在 $B_1,B_2,...,B_q\in\mathcal{M}$ 和 $b_1,b_2,...,b_q\in[0,+\infty)$ 满足：$B_1,B_2,...,B_q$ 互不相交且

$$\bigcup_{i=1}^{p}A_i=\bigcup_{j=1}^{q}B_j,\qquad \sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{A_i}(x)=\sum_{j=1}^{q}b_j\mathbf{1}_{B_j}(x)\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\mu(A_i)=\sum_{j=1}^{q}b_j\mu(B_j)\,. \tag{1.2}$$

【证】我们对集合A_i的个数p 用归纳法. $p=1$ 时是平凡的：此时可以取$q=1$, $b_1=a_1,B_1=A_1$. 假设在 p 时(1.1),(1.2)成立. 来看 $p+1$ 时. 对于 $A_1,A_2,...,A_p,A_{p+1}$ 中的前 p 个, 由归纳假设, 存在 $B_1,B_2,...,B_q\in\mathcal{M}$ 互不相交, 和 $b_1,b_2,...,b_q\in[0,+\infty)$ 使得(1.1),(1.2)成立. 由特征函数的性质和测度的可加性有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{B_j}(x)=\mathbf{1}_{B_j\setminus A_{p+1}}(x)+\mathbf{1}_{B_j\cap A_{p+1}}(x)\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,\\
&\mathbf{1}_{A_{p+1}}(x)=\mathbf{1}_{A_{p+1}\setminus\cup_{j=1}^{q}B_j}(x)+\sum_{j=1}^{q}\mathbf{1}_{A_{p+1}\cap B_j}(x)\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,\\
&\mu(B_j)=\mu(B_j\setminus A_{p+1})+\mu(B_j\cap A_{p+1}),\\
&\mu(A_{p+1})=\mu(A_{p+1}\setminus\cup_{j=1}^{q}B_j)+\sum_{j=1}^{q}\mu(A_{p+1}\cap B_j)
\end{aligned}$$

以上用到 B_j 互不相交. 因此对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p+1}a_i\mathbf{1}_{A_i}(x)=\sum_{j=1}^{q}b_j\mathbf{1}_{B_j}(x)+a_{p+1}\mathbf{1}_{A_{p+1}}(x)\\
&=\sum_{j=1}^{q}b_j\mathbf{1}_{B_j\setminus A_{p+1}}(x)+\sum_{j=1}^{q}(b_j+a_{p+1})\mathbf{1}_{B_j\cap A_{p+1}}(x)+a_{p+1}\mathbf{1}_{A_{p+1}\setminus\cup_{j=1}^{q}B_j}(x)\\
&:=\sum_{j=1}^{2q+1}\widetilde{b}_j\mathbf{1}_{\widetilde{B}_j}(x),
\end{aligned}$$

同时有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p+1} a_i\mu(A_i) &= \sum_{j=1}^{q} b_j\mu(B_j) + a_{p+1}\mu(A_{p+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{q} b_j\mu(B_j\setminus A_{p+1}) + \sum_{j=1}^{q}(b_j+a_{p+1})\mu(B_j\cap A_{p+1}) + a_{p+1}\mu(A_{p+1}\setminus \cup_{j=1}^{q}B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{2q+1} \widetilde{b}_j\mu(\widetilde{B}_j)
\end{aligned}
$$

其中

$$\widetilde{b}_j = b_j,\quad \widetilde{b}_{q+j} = b_j + a_{p+1},\quad j=1,2,...,q;\qquad \widetilde{b}_{2q+1} = a_{p+1};$$

$$\widetilde{B}_j = B_j\setminus A_{p+1},\quad \widetilde{B}_{q+j} = B_j\cap A_{p+1},\quad j=1,2,...,q;\qquad \widetilde{B}_{2q+1} = A_{p+1}\setminus \cup_{j=1}^{q}B_j.$$

易见 $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = \bigcup_{j=1}^{2q+1}\widetilde{B}_j$ 且 $\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,...,\widetilde{B}_{2q+1}\in\mathcal{M}$ 互不相交. 这证明了在A_i的个数为$p+1$ 时(1.1),(1.2)成立. 据归纳法原理, 引理成立. □

【引理10.2】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, 设 $A_i,B_j\in\mathcal{M}$, $a_i,b_j\in[0,+\infty)$, $i=1,2,...,p$; $j=1,2,...,q$ 满足

$$\sum_{i=1}^{p} a_i\mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{q} b_j\mathbf{1}_{B_j}. \tag{1.3}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{p} a_i\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{q} b_j\mu(B_j). \tag{1.4}$$

【证】为清楚起见我们分别考虑特殊情形和一般情形.

特殊情形: 设 $A_1,A_2,...,A_p$ 互不相交且$B_1,B_2,...,B_q$ 互不相交. 我们对A_i的个数 p 用归纳法证明此时 (1.4) 成立. 设 $p=1$. 这时有

$$a_1\mathbf{1}_{A_1}(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j\mathbf{1}_{B_j}(x)\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

若$a_1=0$, 则对每个$j\in\{1,2,...,q\}$都有$b_j\mathbf{1}_{B_j}(x)\equiv 0$, 即或者$b_j=0$ 或者$B_j=\emptyset$, 从而有$b_j\mu(B_j)=0$. 因此此时有

$$a_1\mu(A_1) = 0 = \sum_{j=1}^{q} b_j\mu(B_j).$$

设$a_1 > 0$. 考虑分解$\{1,2,...,q\} = I \cup J$,

$$I = \{j \in \{1,2,...,q\} \mid b_j > 0 \text{ 且 } B_j \neq \emptyset\}, \quad J = \{j \in \{1,2,...,q\} \mid b_j = 0 \text{ 或 } B_j = \emptyset\}.$$

注意当$j \in J$ 时有$b_j \mathbf{1}_{B_j}(x) \equiv 0$, $b_j \mu(B_j) = 0$, 它们对求和无贡献.

因 $B_1, B_2, ..., B_q$ 互不相交, 故对任意 $j \in I$, 通过取一点$x \in B_j$ 得知

$$0 < b_j = b_j \mathbf{1}_{B_j}(x) = \sum_{k=1}^{q} b_k \mathbf{1}_{B_k}(x) = a_1 \mathbf{1}_{A_1}(x) \implies a_1 = b_j.$$

于是得到

$$\mathbf{1}_{A_1}(x) = \sum_{j=1}^{q} \frac{b_j}{a_1} \mathbf{1}_{B_j}(x) = \sum_{j\in I} \frac{b_j}{a_1} \mathbf{1}_{B_j}(x) = \sum_{j\in I} \mathbf{1}_{B_j}(x) = \mathbf{1}_{\cup_{j\in I} B_j}(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

由特征函数的定义易见这蕴含

$$A_1 = \bigcup_{j\in I} B_j.$$

于是得到

$$a_1 \mu(A_1) = a_1 \mu(\bigcup_{j\in I} B_j) = a_1 \sum_{j\in I} \mu(B_j) = \sum_{j\in I} b_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j).$$

设所证性质在A_i的个数为p 时成立. 来看 $p+1$ 时. 设 $A_i, B_j \in \mathcal{M}$, $a_i, b_j \in [0, +\infty)$, $i = 1,2,...,p+1$; $j = 1,2,...,q$ 满足

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{q} b_j \mathbf{1}_{B_j}. \tag{1.5}$$

令 $S = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. 分别用 $\mathbf{1}_S$, $\mathbf{1}_{A_{p+1}}$ 乘以 (1.5) 两边, 注意 $S \cap A_{p+1} = \emptyset$, $A_i \cap A_{p+1} = \emptyset\,(i \le p)$ 并利用特征函数性质有

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{q} b_j \mathbf{1}_{B_j \cap S}, \qquad a_{p+1} \mathbf{1}_{A_{p+1}} = \sum_{j=1}^{q} b_j \mathbf{1}_{B_j \cap A_{p+1}}.$$

根据归纳假设和 $p=1$ 时的结果分别有

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j \cap S), \qquad a_{p+1} \mu(A_{p+1}) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j \cap A_{p+1})$$

从而有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p+1} a_i \mu(A_i) &= \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j \cap S) + \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j \cap A_{p+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{q} b_j \Big(\mu(B_j \cap S) + \mu(B_j \cap A_{p+1}) \Big) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j \cap (S \cup A_{p+1})) \\
&= \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j \cap \cup_{i=1}^{p+1} A_i) = \sum_{j:\, b_j > 0} b_j \mu(B_j \cap \cup_{i=1}^{p+1} A_i)
\end{aligned}$$

上面第三个等号用到 S, A_{p+1} 不相交. 需要证明当 $b_j>0$ 时 $B_j\subset\cup_{i=1}^{p+1}A_i$. 事实上对任意 $x\in B_j$, 由(1.5) 有 $\sum_{i=1}^{p+1}a_i\mathbf{1}_{A_i}(x)\ge b_j\mathbf{1}_{B_j}(x)=b_j>0$, 因此存在 $i\in\{1,2,...,p+1\}$ 使得 $\mathbf{1}_{A_i}(x)>0$ 从而 $x\in A_i$. 所以 $B_j\subset\cup_{i=1}^{p+1}A_i$. 由此和上面等式即得

$$\sum_{i=1}^{p+1}a_i\mu(A_i)=\sum_{j:\,b_j>0}b_j\mu(B_j)=\sum_{j=1}^{q}b_j\mu(B_j).$$

据归纳法原理, 这证明了 (1.4) 在所考虑的情况下成立.

一般情形:. 根据**引理 10.1**, 存在 $C_1,C_2,...,C_r\,,D_1,D_2,...,D_s\in\mathcal{M}$ 和非负实数 $c_1,c_2,...,c_r\,,d_1,d_2,...,d_s$ 满足 $C_1,C_2,...,C_r$ 互不相交, $D_1,D_2,...,D_s$ 互不相交, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{p}A_i=\bigcup_{j=1}^{r}C_j,\quad \bigcup_{j=1}^{q}B_j=\bigcup_{i=1}^{s}D_i, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{A_i}=\sum_{j=1}^{r}c_j\mathbf{1}_{C_j},\quad \sum_{j=1}^{q}b_j\mathbf{1}_{B_j}=\sum_{i=1}^{s}d_i\mathbf{1}_{D_i}, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\mu(A_i)=\sum_{j=1}^{r}c_j\mu(C_j),\quad \sum_{j=1}^{q}b_j\mu(B_j)=\sum_{i=1}^{s}d_i\mu(D_i). \tag{1.8}$$

由 (1.7) 和条件 (1.3) 知

$$\sum_{j=1}^{r}c_j\mathbf{1}_{C_j}=\sum_{i=1}^{s}d_i\mathbf{1}_{D_i}.$$

于是由(1.8) 和**特殊情形** 的结果 即得

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\mu(A_i)=\sum_{j=1}^{r}c_j\mu(C_j)=\sum_{i=1}^{s}d_i\mu(D_i)=\sum_{j=1}^{q}b_j\mu(B_j).\qquad\square$$

引理10.2主要用于建立非负简单函数的积分: 它保证了积分定义的合理性, 而且提前吸收了积分基本性质证明中的难点, 使证明变得简单流畅.

【定义(非负简单函数的积分)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$. 设f 是E 上的任一非负简单函数. 则对于 f 的表示

$$f(x)=\sum_{k=1}^{p}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x);\qquad E_k\in\mathcal{M},\ \ E_k\subset E,\ \ c_k\in[0,+\infty)$$

定义 f 在 E 上关于测度μ的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x):=\sum_{k=1}^{p}c_k\mu(E_k).$$

此外对于空集 $\emptyset$, 定义

$$\int_{\emptyset} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

□

【注1】由**引理10.2** 易见积分$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 是良好定义的, 即它只由E 和f 确定而与f的上述表示的选择无关. 事实上对于f的任何两个上述表示

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mathbf{1}_{B_j}(x)\,, \quad x \in E$$

其中$A_i, B_j \in \mathcal{M},\ A_i, B_j \subset E,\ a_i, b_j \in [0, +\infty),$ 由$A_i, B_j \subset E$ 易见

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mathbf{1}_{B_j}(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

因此由**引理10.2**知

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mu(B_j).$$

所以积分值$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 只由E 和f 确定而与f的表示法的选择无关.

【注2】根据广义实数的运算法则 $0 \cdot \infty = 0$, 在 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 的定义中, 若某个系数 $a_i = 0$, 则即使 $\mu(A_i) = +\infty$, 也有 $a_i \mu(A_i) = 0$.

【注3】当$f(x) \equiv 1$ 时通常记

$$\int_E \mathrm{d}\mu(x) = \int_E 1\mathrm{d}\mu(x) = \mu(E)\,, \qquad E \in \mathcal{M}\,.$$

【命题10.3(非负简单函数的积分性质)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$, 设 f, g 为E上的非负简单函数. 则

(**a**) 对任意 $A \in \mathcal{M}$ 满足 $A \subset E$ 有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \mathbf{1}_A(x) f(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{1.9}$$

(**b**) 单调性: 若 $f \le g$ 于 E, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

(**c**) 可加性：若 $A, B \in \mathcal{M}, A, B \subset E$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\int_{A\cup B} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_B f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

一般地, 设 $E_k\subset E\,(k=1,2,...)$ 为可数个互不相交的可测集. 则

$$\int_{\bigcup_{k\ge1}E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k\ge1}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(**d**) 线性性：对任意常数 $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ 有

$$\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}\mu(x)=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】将 f,g 表示为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{A_i}(x),\quad g(x)=\sum_{j=1}^{q}b_j\mathbf{1}_{B_j}(x),\quad x\in E \tag{1.10}$$

其中 $A_i,B_j\in\mathcal{M},A_i\cup B_j\subset E,a_i,b_j\in[0,+\infty)$.

(a)：设可测集 $A\subset E$. 若 A 为空集, 则由约定有 $\int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$. 另一方面有 $\mathbf{1}_A(x)f(x)\equiv0=0\cdot\mathbf{1}_E(x),x\in E$, 因此 $\int_E\mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x)=0\cdot\mu(E)=0$. 所以在这种情况下 (1.9) 成立.

设 $A\neq\emptyset$. 则由 f 的表示和特征函数的性质有

$$\mathbf{1}_A(x)f(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{A\cap A_i}(x),\quad x\in E. \tag{1.11}$$

上式是 E 上非负简单函数 $\mathbf{1}_Af$ 的一个表示. 故由积分的定义有

$$\int_E\mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mu(A\cap A_i). \tag{1.12}$$

另一方面, 由 (1.11) 知 f 在 A 上的限制 $f|_A$ 可表示为

$$f|_A(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{1}_{A\cap A_i}(x),\quad x\in A.$$

它说明 $f|_A$ 是 A 上的非负简单函数, 即 $f|_A\in\mathcal{S}^+(A)$. 因此由积分的定义有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\mu(A\cap A_i). \tag{1.13}$$

比较 (1.12) 和 (1.13) 即得 (1.9). 公式 (1.13) 在下面还要用到.

(b): 假设 $f\le g$ 于 E. 则 $g-f$ 也是非负简单函数. 因此可表示为

$$h(x):=g(x)-f(x)=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\mathbf{1}_{C_j}(x)$$

其中 $C_j \in \mathcal{M}$, $C_j \subset E; \lambda_j \in [0,+\infty)$. 从而有

$$g(x) = f(x) + h(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbf{1}_{C_j}(x).$$

再根据积分的定义得到

$$\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\mu(C_j) \geq \sum_{i=1}^{p} a_i\mu(A_i) = \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

(c)：直接证明一般情形. 对任意有限或可数多个互不相交的 $E_k \in \mathcal{M}$, 将公式 (1.13) 应用于 $A = \bigcup_{k\geq 1} E_k$ 并利用测度的可数可加性有

$$\begin{aligned}
&\int_{\bigcup_{k\geq 1} E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i\mu(A_i \cap \bigcup_{k\geq 1} E_k) = \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{k\geq 1} \mu(A_i \cap E_k) \\
&= \sum_{k\geq 1} \Big(\sum_{i=1}^{p} a_i\mu(A_i \cap E_k) \Big) = \sum_{k\geq 1} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.
\end{aligned}$$

(d)：设 $\alpha, \beta \in [0,+\infty)$. 由 f, g 的表示 (1.10) 有

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha a_i \mathbf{1}_{A_i}(x) + \sum_{j=1}^{q} \beta b_j \mathbf{1}_{B_j}(x), \quad x \in E.$$

根据积分的定义立刻得到

$$\begin{aligned}
&\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}\mu(x) = \alpha \sum_{i=1}^{p} a_i\mu(A_i) + \beta \sum_{j=1}^{q} b_j\mu(B_j) \\
&= \alpha \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \beta \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x). \qquad \Box
\end{aligned}$$

【非负可测函数的积分】

【定义(非负可测函数的积分)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 令

$$\mathcal{S}^+(E)\text{为}E\text{上非负简单函数的全体}.$$

对任意非负可测函数 $f : E \to [0,+\infty]$, 称非负广义实数

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) := \sup\Big\{ \int_E \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \ \Big|\ \varphi \in \mathcal{S}^+(E) \ \text{且} \ \varphi \leq f \ \text{于} \ E \Big\} \tag{1.14}$$

为 f 在 E 上的关于测度μ的积分. 进一步, 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$, 则称 f 在 E 上μ-可积, 简称 f 在 E上可积. $\Box$

【**注1**】这个定义与非负简单函数积分的定义是相容的, 即当 $f \in \mathcal{S}^+(E)$ 时, 两个定义中的积分相等, 因为根据非负简单函数积分的单调性(**命题10.3(非负简单函数的积分性质)(b)**) 易见此时 (1.14) 中的上确界是最大值, 它在$\varphi = f$ 达到.

【**注2**】关于积分的记号, 有学生问: 积分记号$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$中的$\mathrm{d}\mu(x)$是什么意思? 为什么有d出现? 是这样的: 英文字母d在这里代表difference(差或差分)的意思, 而$\mathrm{d}\mu(x)$表示是x的微分小的邻域的测度(长度、面积等). 例如对直线上的均匀测度(即$\mathbb{R}$上的Lebesgue 测度)μ, 由于包含x的微小区间$[x, x+\Delta x]$ 等于大区间$[a, x+\Delta x]$ 减去小区间$[a, x]$ 而其长度$\Delta x\,(>0)$也是用差(difference)得到的, 即大区间的长度$\mu([a, x+\Delta x]) = x + \Delta x - a$减去小区间的长度$\mu([a, x]) = x - a$, 故数学上就用$\mathrm{d}\mu(x) = \mu([a, x+\Delta x]) - \mu([a, x]) = \Delta x$表示这个微小测度. 当然在二维和高维的情形, x的邻域(小矩形,小方体等等)不一定总能写成两个大矩形、长方体的差, 但是只要保持差(difference)的上述意义, 即点x的微小邻域的测度(长度,面积,体积等), 数学上就仍沿用了一维时的记号, 即用$\mathrm{d}\mu(x)$ 表示是在x的微小邻域的测度. 此外由于测度元$\mathrm{d}\mu(x)$的大小一般来说与x(即与x的位置)有关, 所以$\mathrm{d}\mu(x)$中的x就应出现.

【**注3**】在不至于困惑的情况下, 为了简便, 我们有时在定理或命题的证明中使用积分的**标准简化记号:**

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{1.15)}$$

【**定理10.4**】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 假设下面出现的集合和函数都是可测的.

(a) (子集上的积分) 若 $f \geq 0$ 于 E, $A \subset E$, 则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \mathbf{1}_A(x) f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(b)(线性性) 若 $f, g \geq 0$ 于 E, $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ 为常数, 则

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}\mu(x) = \alpha \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \beta \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{1.16}$$

(c)(单调性)

$$0 \leq f \leq g \ \text{于} \ E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(d)(单调性) 若 $f \geq 0$ 于 E, 则

$$A \subset B \subset E \quad \Longrightarrow \quad \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_B f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(e) (对测度的估计) 若 $f \ge 0$ 于 E, 则

$$\mu(E(f \ge t)) \le \frac{1}{t}\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall\, t > 0\,.$$

(f) 若 $f \ge 0$ 在 E 上可积, 则 f 在 E 上几乎处处有限, 即 $\mu(E(f = +\infty)) = 0$, 也即

$$f \ge 0 \quad \text{and} \quad \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty \implies f(x) < +\infty \ \text{ a.e. } \ x \in E\,.$$

(g) 如果 $f(x) \equiv 0$ 于 E, 则即使 $\mu(E) = +\infty$, 也有 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0\,.$

(h) 如果 $\mu(E) = 0$, 则即使 $f(x) \equiv +\infty$, 也有 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0\,.$

(i) 若 $f \ge 0$ 于 E 且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0$$

则 $\mu(E(f > 0)) = 0$ 即 $f(x) = 0 \ \text{ a.e. } \ x \in E\,.$

(j) 设 $f > 0$ 于 E. 则

$$\mu(E) > 0 \implies \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0$$

即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \implies \mu(E) = 0.$$

【证】(a): 设 $A \subset E$. 对任意 $\varphi \in \mathcal{S}^+(A)$ 满足 $\varphi(x) \le f(x), x \in A$. 令 $\Phi(x) = \varphi(x)$ 当 $x \in A$; $\Phi(x) = 0$ 当 $x \notin A$. 则 $\Phi \in \mathcal{S}^+(E)$ 且 $\mathbf{1}_A(x)\Phi(x) \le \mathbf{1}_A(x)f(x)$, $x \in E$. 由积分的定义和非负简单函数积分的性质 (1.9) 有

$$\int_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_A \Phi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \mathbf{1}_A(x)\Phi(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

对如此的 φ 的积分取上确界即得

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

另一方面对任意 $\varphi \in \mathcal{S}^+(E)$ 满足 $\varphi \le \mathbf{1}_A f$ 于 E, 由 $\varphi \ge 0$ 得到 $\varphi = \mathbf{1}_A\varphi$ 于 E. 同时有 $\varphi(x) \le f(x)$, $x \in A$. 因此由非负简单函数积分的性质 (1.9) 有

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \mathbf{1}_A(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

对如此的 φ 的积分取上确界即得反向不等式

$$\int_E \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

(b)：这部分的证明要在证明Levi 定理之后才能完成, 此前我们只证明并只用到它的一个特殊情形：即

$$f \ge 0 \ \text{于}\ E \ \text{且}\ c \in [0, +\infty) \quad \Longrightarrow \quad \int_E cf(x)\mathrm{d}\mu(x) = c\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{1.17}$$

上述关系式可由非负简单函数的相应等式并分别讨论 $c = 0$ 和 $c > 0$ 两种情形直接推出.

(c)：设 $0 \le f \le g$ 于 E, 则

$$\left\{ \int_E \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{S}^+(E) \ \text{且}\ \varphi \le f \ \text{于}\ E \right\}$$

$$\subset \left\{ \int_E \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{S}^+(E) \ \text{且}\ \varphi \le g \ \text{于}\ E \right\}.$$

两边取上确界即得积分不等式.

(d)：由 (a), (c) 有

$$A \subset B \ \text{且} f \ge 0 \ \text{于}\ B \implies \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_B \mathbf{1}_A(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_B f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(e)：设 $f \ge 0$. 因当 $x \in E(f \ge t)$ 时 $f(x) \ge t$, 应用 (1.17), (c),(d) 和 $\mu(E(f \ge t)) = \int_{E(f\ge t)} \mathrm{d}\mu(x)$ 有

$$\mu(E(f \ge t)) = \frac{1}{t}\int_{E(f\ge t)} t\mathrm{d}\mu(x) \le \frac{1}{t}\int_{E(f\ge t)} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \frac{1}{t}\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(f)：令

$$E_\infty = E(f = +\infty), \quad E_k = E(f > k)\,.$$

则 $E_\infty \subset E_k$ $(k = 1, 2, 3, ...)$, 且由 (e) 有

$$\mu(E_\infty) \le \mu(E_k) \le \frac{1}{k}\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) \to 0 \ (k \to \infty)\,.$$

所以 $\mu(E_\infty) = 0$.

(g)：设 $f(x) \equiv 0$ 于 E. 则由结论 (d) 和 $0 \cdot \infty = 0$ 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E 0\mathrm{d}\mu(x) = 0\int_E \mathrm{d}\mu(x) = 0\,.$$

(h)：设 $\mu(E) = 0$. 则由非负简单函数积分定义有 $\int_E \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{S}^+(E)$. 因此 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0$.

(i)：设 $f\ge 0$ 于 E 且 $\int_E f\mathrm{d}\mu(x)=0$. 则由 (e) 有

$$\mu(E(f\ge 1/k))\le k\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$$

因此 $\mu(E(f\ge 1/k))=0$, $k=1,2,3,\dots$. 注意到单调增加性

$$E(f\ge 1)\subset E(f\ge 1/2)\subset E(f\ge 1/3)\subset\cdots,\quad E(f>0)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f\ge 1/k)$$

应用测度的单调收敛有

$$\mu(E(f>0))=\lim_{k\to\infty}\mu(E(f\ge 1/k))=0\,.$$

所以 $f=0$ a.e. 于 E.

(j)：假设 $f>0$ 于 E 且 $\mu(E)>0$. 若此时竟然有 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$, 则由结论 (h) $\Longrightarrow$ $\mu(E(f>0))=0$. 但 $E=E(f>0)$, 这便导出矛盾：$\mu(E)=0$.

也可用正证法: 如上有 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(E(f\ge 1/k))=\mu(E(f>0))=\mu(E)>0$, 因此存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\mu(E(f\ge 1/k))>0$, 从而由 (e) 得到

$$0<\mu(E(f\ge 1/k))\le k\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\ \Longrightarrow\ \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)>0\,.\qquad\Box$$

在经典理论中要注意带人名的定理, 因为这些定理一劳永逸地吸收了难点, 也是证明其它定理的基础.

【定理10.5(Levi 单调收敛)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 上非负可测函数列满足

$$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le ...,\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\quad \forall\, x\in E\,.$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】根据上一章**命题9.39**知, 极限函数 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$ 在 E 上可测且非负. 又由 $f_k(x)\le f_{k+1}(x)\le f(x)$ 和积分的单调性有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\le\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}\mu(x)\le\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x),\quad k=1,2,\dots.$$

因此数列$\{\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\}_{k=1}^{\infty}$的极限存在并且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\le\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

下证反向不等式:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x) \ge \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{1.18}$$

若 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=+\infty$, 则反向不等式自动成立. 以下假设

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\,.$$

注意, 这条件避免了 ∞ 参与运算！我们将利用积分的定义, 即从简单函数过渡. 任取 $\varphi\in\mathcal{S}^+(E)$ 满足 $\varphi\le f$ 于 E. 将 φ 表式为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^p a_i\mathbf{1}_{A_i}(x),\quad a_i\ge 0,\quad A_i\subset E.$$

任取 $0<\lambda<1$, 考虑集合 $E_k=E(f_k\ge\lambda\varphi)$, $k=1,2,\ldots$. 由 $f_k(x)\le f_{k+1}(x)$ 和 $f_k(x)\to f(x)\,(k\to\infty)$ 易见

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots,\qquad E=\bigcup_{k=1}^\infty E_k\,. \tag{1.19}$$

事实上 $\forall x\in E$, 若 $\varphi(x)>0$, 则 $f_k(x)\to f(x)\ge\varphi(x)>\lambda\varphi(x)$, 因此存在 k 使得 $f_k(x)\ge\lambda\varphi(x)$ 即 $x\in E_k$; 若 $\varphi(x)=0$, 则显然对任意k有 $f_k(x)\ge 0=\lambda\varphi(x)$ 即$x\in E_k$. 所以 $E=\bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 根据非负简单函数的积分公式(1.13)有

$$\int_{E_k}\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{i=1}^p a_i\mu(A_i\cap E_k),\quad k=1,2,3,\ldots.$$

对每个固定的 $i\in\{1,2,...,p\}$, 由 (1.19)和$A_i\subset E$ 有

$$A_i\cap E_1\subset A_i\cap E_2\subset A_i\cap E_3\subset\cdots,\quad A_i=\bigcup_{k=1}^\infty A_i\cap E_k\,.$$

据测度的单调收敛得

$$\lim_{k\to\infty}\mu(A_i\cap E_k)=\mu(A_i)\,,\quad i=1,2,...,p\,.$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{i=1}^p a_i\lim_{k\to\infty}\mu(A_i\cap E_k)=\sum_{i=1}^p a_i\mu(A_i)=\int_E\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

又由$f_k\ge 0$和$E_k=E(f_k\ge\lambda\varphi)$有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\ge\int_{E_k}f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\ge\int_{E_k}\lambda\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lambda\int_{E_k}\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

取极限得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\ge\lambda\int_E\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

再令 $\lambda\to 1$ 即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\ge\int_E\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

最后由 φ的任意性和积分的定义, 这就证明了反向不等式 (1.18). $\square$

回忆单调增加的数列的极限等于该数列的上确界, 我们得到

【命题10.6】在 Levi 单调收敛定理的条件下有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sup_{k\ge 1}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

因此 f 在 E 上可积(即 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)<+\infty$) 当且仅当$\sup\limits_{k\ge1}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)<+\infty$. $\square$

【注】Levi 单调收敛定理中的 “收敛”只是习惯说法, 实际上这个定理还包括了趋于无穷的情形. 例如取 $f_k(x)\equiv k\,,\,x\in E$ 而 $\mu(E)>0$, 则有$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim\limits_{k\to\infty}k\mu(E)=+\infty$. 由于这个缘故, 也可称 Levi 单调收敛定理为 Levi 单调极限定理. 但数学文献上一直称之为Levi 单调收敛定理(Levi's monotone convergence theorem).

Levi 单调收敛定理假定了函数列的逐点单调性, 但由于不要求其它条件, 在应用上, 特别是在导出积分的其它基本性质时, 还是方便有力的. 我们很快就会看到这一点.

首先我们来完成

【Proof of 定理10.4(b)】

由简单函数逼近定理, 存在 $\{f_k\}_{k=1}^\infty,\{g_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathcal{S}^+(E)$ 使得

$$f_k(x)\nearrow f(x)\,,\quad g_k(x)\nearrow g(x)\quad(k\to\infty)\quad\forall\,x\in E$$

从而有

$$\alpha f_k(x)+\beta g_k(x)\nearrow\alpha f(x)+\beta g(x)\ (k\to\infty)\quad\forall\,x\in E.$$

于是应用 Levi 单调收敛定理和非负简单函数积分的线性性得到

$$\int_E(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\int_E(\alpha f_k+\beta g_k)\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\Big(\alpha\int_E f_k\mathrm{d}\mu+\beta\int_E g_k\mathrm{d}\mu\Big)$$

$$=\alpha\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu+\beta\lim_{k\to\infty}\int_E g_k\mathrm{d}\mu=\alpha\int_E f\mathrm{d}\mu+\beta\int_E g\mathrm{d}\mu\,.\qquad\square$$

【**注**】积分的线性性中的一个性质

$$\int_E c\mathrm{d}\mu(x) = c\mu(E), \qquad c \in [0, +\infty) \text{ 为常数}$$

可以推广成

$$\int_E +\infty \mathrm{d}\mu(x) = +\infty \cdot \mu(E).$$

事实上令$f_k(x) = k, x \in E, k = 1, 2, 3, \ldots$. 则$0 < f_k(x) \nearrow +\infty\,(k \to \infty)$ for all $x \in E$. 因此由Levi 单调极限定理有

$$\int_E +\infty \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E k\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} k\mu(E) = +\infty \cdot \mu(E).$$

【**定理10.7**】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 设 $f, g, f_k\,(k = 1, 2, ..., N)$ 为 E 上非负可测函数. 则

(a)

$$\int_E \sum_{k=1}^N f_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^N \int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(b) 若 $E = A \cup B\,, A, B$ 可测且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_B f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

一般地, 若 $E = \bigcup_{k=1}^N E_k$, 其中 E_k 可测且互不相交, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(c) 若 $f(x) = g(x)$ a.e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【**证**】(a): 对函数 f_k 的个数N应用归纳法并应用积分的线性质(1.16) 易证 (a) 成立.

(b): 设 $E = \bigcup_{k=1}^N E_k$, 其中E_k 可测且互不相交. 由(a)和**定理10.4(a)** (子集上的积分) 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \Big(\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{E_k} f(x)\Big)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{K=1}^N \int_E \mathbf{1}_{E_k}(x) f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

(c): 设 $f=g$ a.e. 于 E, 即 $E(f\neq g)$ 为零测集. 由性质 (b) 和零测集上的积分等于零, 有

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_{E(f=g)}f\mathrm{d}\mu+\int_{E(f\neq g)}f\mathrm{d}\mu=\int_{E(f=g)}g\mathrm{d}\mu+\int_{E(f\neq g)}g\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu\,. \qquad \square$$

【定理10.8(逐项积分)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$. 若 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 上非负可测函数列, 则成立逐项积分：

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】由 f_k 非负, 令 $S_N(x)=\sum_{k=1}^{N}f_k(x)\,,\,S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$, 则有

$$0\le S_N(x)\le S_{N+1}(x)\,,\ N=1,2,3,...,\quad \lim_{N\to\infty}S_N(x)=S(x)\qquad \forall\,x\in E\,.$$

因 S_N 非负可测, 故其极限函数 S 非负可测. 应用 Levi 单调收敛定理, 积分的线性性, 和广义非负项级数的定义得到

$$\int_E S(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{N\to\infty}\int_E S_N(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.\quad\square$$

【定理10.9(可数可加性)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, 设 $E_k\in\mathcal{M}\,(k=1,2,...)$ 是一列可测集且互不相交(或稍一般些: 互不重叠, 即若$i\neq j$ 则$\mu(E_i\cap E_j)=0$.). 设f 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 上非负可测, 则成立可数可加性：

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k}f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】记 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 先设$E_k$互不相交. 由 E_k 互不相交有$1=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_k}(x),x\in E$ 从而有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_k}(x)f(x)\qquad\forall\,x\in E\,.$$

因此由非负可测函数列的逐项积分定理得到

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E\mathbf{1}_{E_k}(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

现在设E_k 互不重叠. 令

$$Z=\bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},i\neq j}E_i\cap E_j.$$

则Z 是可数个零测集的并因而是零测集. 令$\widetilde{E}=E\setminus Z$, $\widetilde{E}_k=E_k\setminus Z$. 则

$$\widetilde{E}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k \quad \text{且}\ \widetilde{E}_k\ \text{互不相交}.$$

因此由互不相交情形的可数可加性有

$$\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

又由$E\setminus\widetilde{E}=Z$, $E_k\setminus\widetilde{E}_k\subset Z$ 知$E\setminus\widetilde{E},E_k\setminus\widetilde{E}_k$ 都是零测集. 因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E\setminus\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_k\setminus\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

代入上式即知所证可加性成立. □

【例(积分与级数)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $f:E\to[0,+\infty]$ 可测且几乎处处有限, 即$\mu(E(f=+\infty))=0$. 则对任意 $0<h<+\infty$ 有

$$\frac{1}{2h}\int_{E(f\ge h)}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E(f\ge kh))\le\frac{1}{h}\int_{E(f\ge h)}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】因

$$E(f\ge kh)=E(\frac{1}{h}f\ge k),\qquad \frac{1}{h}\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_E\frac{1}{h}f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

故以 $\frac{1}{h}f$ 代替 f 可以假定 $h=1$. 由**定理10.4 (e)** 有

$$\mu(E(f\ge k))\le\frac{1}{k}\int_{E(f\ge k)}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\qquad(\,k\ge 1\,)\,.$$

若存在$k_0\ge 1$ 使得$\mu(E(f\ge k_0))=+\infty$, 则$\int_{E(f\ge k_0)}f(x)\mathrm{d}\mu(x)=+\infty$ (从而由$E(f\ge 1)\supset E(f\ge k_0)$ 知$\int_{E(f\ge 1)}f(x)\mathrm{d}\mu(x)=+\infty$)且$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E(f\ge k))=+\infty$. 此时所证不等式自动自动成立.

因此下面可以假设$\mu(E(f\ge k))<+\infty,k=1,2,3,\ldots$. 这个有限性保证了下面推导中不涉及广义实数, 因此不会出现“$\infty-\infty$”. 此外由于零测集对测度和积分无贡献, 故若以$E(f<+\infty)$代替E, 则所有积分值不变. 因此不失一般性可以假定f 处处有限.

在 Abel 分部求和公式

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = \sum_{k=1}^{N-1}\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\Big)(b_k - b_{k+1}) + \Big(\sum_{k=1}^{N} a_k\Big) b_N\,, \quad N \ge 2$$

中取 $a_k = 1$ 和 $b_k = \mu(E(f \ge k))$ 并注意

$$b_k - b_{k+1} = \mu(E(f \ge k)) - \mu(E(f \ge k+1)) = \mu(E(k \le f < k+1))$$

得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} \mu(E(f \ge k)) = \sum_{k=1}^{N-1} k\mu(E(k \le f < k+1)) + N\mu(E(f \ge N)) \\
&\le \sum_{k=1}^{N-1} \int_{E(k \le f < k+1)} f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_{E(f \ge N)} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{E(1 \le f < N)} f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_{E(f \ge N)} f(x) = \int_{E(f \ge 1)} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad (\forall\, N \ge 2)
\end{aligned}$$

这里用到了积分的可加性. 令 $N \to \infty$ 即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E(f \ge k)) \le \int_{E(f \ge 1)} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

另一方面我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} \mu(E(f \ge k)) \ge \sum_{k=1}^{N-1} k\mu(E(k \le f < k+1)) \\
&\ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}(k+1)\mu(E(k \le f < k+1)) \ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\int_{E(k \le f < k+1))} f(x)\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

令$N \to \infty$ 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E(f \ge k)) \ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E(k \le f < k+1))} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

注意f 处处有限: $0 \le f(x) < +\infty$ for all $x \in E$, 我们有分解

$$E(f \ge 1) = E(1 \le f < +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(k \le f < k+1).$$

据积分的可加性便有

$$\int_{E(f \ge 1)} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E(k \le f < k+1))} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E(f\ge k))\ge\frac{1}{2}\int_{E(f\ge 1)}f(x)\mathrm{d}\mu(x). \qquad\Box$$

【定理10.10(积分的扩张)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$. 设f 是 E 上的非负可测函数, E_k 是一列单调增加的可测集:

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots,\quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\,.$$

则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】由假设条件有

$$0\le f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)\le f(x)\mathbf{1}_{E_{k+1}}(x)\,,\ k=1,2,...;\quad \lim_{k\to\infty}f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)=f(x)$$

for all $x\in E$. 【事实上对任意 $x\in E$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in E_N$. 因此当 $k\ge N$ 时 $\mathbf{1}_{E_k}(x)=1$, 从而有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)=f(x)$.】应用 Levi 单调收敛定理即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,. \qquad\Box$$

【定理10.11(积分的收缩)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$. 设E_k 是一列单调减少的可测集:

$$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots,\quad E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\,.$$

若f 是E_1 上的非负可测函数且

$$\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}\mu(x)<+\infty,$$

则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】由假设知

$$E_1\setminus E_k\subset E_1\setminus E_{k+1},\ \ k=1,2,3,...;\qquad \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_1\setminus E_k)=E_1\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=E_1\setminus E.$$

故应用上述积分扩张定理并注意$\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$ 即得

$$\begin{aligned}\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu - \int_E f\mathrm{d}\mu &= \int_{E_1\setminus E} f\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{E_1\setminus E_k} f\mathrm{d}\mu\\ &= \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu - \int_{E_k} f\mathrm{d}\mu\Big) = \int_{E_1} f\mathrm{d}\mu - \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

消去$\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu < +\infty$ 即得所证. $\square$

【例】用积分的方法证明**§9.1的作业题10**:

设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k \in \mathcal{M},\ k = 1,2,3,...$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(E_k) < +\infty$. 则 E 中几乎所有点至多同时属于有限多个 E_k.

【证】根据“几乎处处”的定义, 本题是说 E 中同时属于无限多个 E_k 的点的集合是一个零测集, 即集合

$$Z := \{x\in E \mid \text{存在严格增加的自然数列} \{k_j\}_{j=1}^{\infty}\ \text{使得}\ x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j}\}$$

是零测集. 前面讲过, 特征函数是个好东西, 它把集合与数值联系起来了. 所以我们可以进一步分析：考虑可测函数

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_k}(x), \qquad x\in E\,.$$

则易见 $x\in Z$ 当且仅当有无限多个 $\mathbf{1}_{E_k}(x)$ 等于 1, 即当且仅当 $f(x) = +\infty$. 因此

$$Z = E(f = +\infty).$$

于是为证明 $\mu(Z) = 0$, 充分地我们只要证明 f 在 E 上可积, 即 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$. 由非负可测函数的逐项积分和题目假设有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E \mathbf{1}_{E_k}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k) < +\infty\,.$$

所以 f 的确在 E 上可积. 因此 $\mu(Z) = 0$. $\square$

下面这个Fatou 引理属于那种证明简单但经常使用的一类.

【定理10.12(Fatou 引理)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是E上非负可测函数列. 则

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \le \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

特别若 $f_k(x)\to f(x)$ a.e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\le\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】令 $F_k(x)=\inf\limits_{j\ge k}f_j(x)$. 则

$$0\le F_k(x)\le F_{k+1}(x)\,,\ \ k=1,2,...;\quad \lim_{k\to\infty}F_k(x)=\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\quad \forall\, x\in E\,.$$

由 Levi 单调收敛定理和 $F_k\le f_k$ 得到

$$\int_E\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$=\liminf_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\le\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

这证明了引理的第一部分.

现在设 $f_k(x)\to f(x)$ a.e. $x\in E$, 则由几乎处处的定义, 知

$$Z=\{x\in E\mid f_k(x)\not\to f(x)\ (k\to\infty)\,\}$$

是零测集, 同时由第九章**命题9.39(c)**知f是E上的可测函数. 因零测集对积分无贡献, 故将引理的第一部分应用于$E\setminus Z$ 得到

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_{E\setminus Z}f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_{E\setminus Z}\liminf_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$\le\liminf_{k\to\infty}\int_{E\setminus Z}f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x).\qquad\square$$

作业题

1. 设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间. 对一非负可测函数$g:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$, 令

$$\nu(E)=\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\qquad\forall\, E\in\mathcal{M}\,.$$

证明：(1) $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\nu)$是一个测度空间, 并且当$g(x)>0$ for all $x\in\mathbb{R}^n$ 时, $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\nu)$也是完备的.

(2) 设$E\in\mathcal{M}$. 则对任意非负$\mathcal{M}$-可测函数$f:E\to[0,+\infty]$ 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\nu(x)=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

[(2)的提示: 先证明当f为E的可测子集的特征函数时上式成立. 然后利用第九章**定理9.45(级数表示)**和非负可测函数级数的逐项积分定理.]

2. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ 为$\mathcal{M}$-可测函数. 设映射$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. 令

$$\mathcal{N} = \{E \subset \mathbb{R}^m \,|\, \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}\},$$

$$\nu(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,, \quad E \in \mathcal{N}.$$

证明

(1) $\mathcal{N}$ 是$\mathbb{R}^m$上的一个σ-代数, ν 是$\mathcal{N}$ 上的一个测度, $(\mathbb{R}^m, \mathcal{N}, \nu)$ 是一完备的测度空间.

(2) 若f 在$\mathbb{R}^m$ 上非负$\mathcal{N}$- 可测, 则

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x))g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

[提示: 考虑以下几步

Step 1: 复习与映射$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$有关的记号和性质：

记号：若$E \subset \mathbb{R}^m$, 则定义$\varphi^{-1}(E) = \mathbb{R}^m(\varphi \in E) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \in E\}$.

证明 $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n, \quad \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus E) = \mathbb{R}^n \setminus \varphi^{-1}(E) \quad \forall\, E \subset \mathbb{R}^m\,; \quad \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$

证明 $\mathbf{1}_{\varphi^{-1}(E)}(x) \equiv \mathbf{1}_E(\varphi(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$.

证明 若$E_k \subset \mathbb{R}^m, k = 1, 2, ...,$ 则$\varphi^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi^{-1}(E_k)$. 此外证明当$E_k$ 互不相交时$\varphi^{-1}(E_k)$也互不相交.

Step 2: 用相关的定义证明(1), 即用σ- 代数的三个规定性质和测度的两个规定性质分别证明$\mathcal{N}$ 是$\mathbb{R}^m$上的一个σ-代数, ν 是$\mathcal{N}$ 上的一个测度, 最后证明$(\mathbb{R}^m, \mathcal{N}, \nu)$ 是一完备的测度空间.

Step 3: 先证明(2)中的积分等式当f为可测集的特征函数(即$f(y) = \mathbf{1}_E(y), E \in \mathcal{N}$) 时成立, 然后证明这个积分等式当$f$为非负可测函数时也成立(利用第九章**定理9.45(级数表示)**和非负可测函数级数的逐项积分).

3. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $X \in \mathcal{M}$, $\mu(X) = 1$, 设p, q 为正整数, $1 \le p \le q$, 设可测集$E_1, E_2, ..., E_q \subset X$ 满足：X 中每一点至少同时属于$E_1, E_2, ..., E_q$ 中的p 个集合(当然不同的点可能属于不同的p 个集合). 证明在这些集合中存在一集合E_k 使得

$$\mu(E_k) \ge \frac{p}{q}\,.$$

用概率论的语言这就是说, 至少有一个事件E_k, 它发生的概率不小于$\frac{p}{q}$.

提示：利用**特征函数的基本性质**. [注：当$p = 1$ 或$p = q$ 时可以不用积分. 但当$1 << p << q$ 时, 积分的作用就显示出来了.]

4. 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 设$f_1, f_2, ..., f_N$ 是E上的**非负**可测函数且$0 < \mu(E) < +\infty$. 证明存在$k \in \{1, 2, ..., N\}$和可测子集$E_k \subset E$ 使得
$\mu(E_k) \geq \frac{1}{N}\mu(E)$且

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f_1(x) f_2(x) \cdots f_N(x) \mathrm{d}\mu(x) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\mu(E_k)} \int_{E_k} (f_k(x))^N \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

提示：考虑$E_j = \{x \in E \,|\, f_j(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), ..., f_N(x)\}\}, j = 1, 2, ..., N.$

§10.2. 一般可测函数的积分

设 $f : E \to [-\infty, +\infty]$. 回忆: f 可表示为它的正部和负部之差:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)\,, \quad x \in E$$

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = f(x)\mathbf{1}_{E(f\ge 0)}(x) \ge 0\,,$$

$$f^-(x) := (-f)^+(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = -f(x)\mathbf{1}_{E(f\le 0)}(x) \ge 0\,.$$

【注1】 若 f 在 E 上可测, 则 $f^{\pm}$ 都在 E 上非负可测. 此外易见对每个$x \in E$, $f^+(x)$与$f^-(x)$必有一个为零, 因此在上述分解中不会出现“$\infty - \infty$”.

【注2】 函数$y \mapsto y^+ = \max\{y, 0\}$ 单调不减; 函数$y \mapsto y^- = (-y)^+$ 单调不增. 因此有如下单调关系:

$$f(x) \le g(x) \quad \Longrightarrow \quad f^+(x) \le g^+(x), \quad f^-(x) \ge g^-(x).$$

【定义】 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 设 $f : E \to [-\infty, +\infty]$ 可测.

(i) 如果 f^+ 和 f^- 中至少有一个在E上μ-可积, 即$\int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu(x)\,, \int_E f^-(x)\mathrm{d}\mu(x)$中至少有一个为有限, 则称广义实数

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) := \int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_E f^-(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

为 f 在 E 上关于测度 μ 的积分, 同时称积分 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 存在.

(ii) 若 f^+和f^- 都在 E 上μ-可积, 则称 f 在 E 上μ-可积. 在 E 上μ-可积的函数的全体记为 $L^1(E, \mu)$. 当测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 已确定时, “μ-可积”也简称为“可积”.

(iii) 对一维情形, 当 E 是区间 (有界、无界、开、闭、半开半闭), 也即当 $E = [a, b]$ 或 $E = (a, b), [a, b)$, etc. 时, 由于端点 a, b 对积分没有贡献, 区间上的积分一律记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,. \qquad \Box$$

【注1】 由 $|f| = f^+ + f^-$ 和

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_E f^-(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

易见(当f在E上可测时)

$$f \in L^1(E, \mu) \iff |f| \in L^1(E, \mu) \iff \int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\,.$$

因此对于 Lebesgue 积分而言, **可积等价于绝对可积**. 当 $f \in L^1(E,\mu)$ 时记

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(E,\mu)} = \int_E |f(x)| \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【注2】重复一下, 在不至于困惑的情况下, 为了简便, 我们有时在定理和命题的证明中使用积分的**标准简化记号:**

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \int_E f(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

下面给出积分的基本性质. 由于证明简单, 我们将定理的陈述与证明并行.

【定理10.13(积分的基本性质)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 设 f, g 为 E 上广义实值可测函数.

(a) 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 存在, 则

$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big| \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

实因

$$\Big|\int_E f \mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_E f^+ \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \mathrm{d}\mu\Big| \le \int_E f^+ \mathrm{d}\mu + \int_E f^- \mathrm{d}\mu = \int_E |f|\, \mathrm{d}\mu\,.$$

(b) 若 $\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 存在并且 $f(x) = g(x)$ a.e. $x \in E$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 存在且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

这是因为 $\mu(E(f \neq g)) = 0 \Longrightarrow$

$$\int_E f^\pm \mathrm{d}\mu = \int_{E(f=g)} f^\pm \mathrm{d}\mu = \int_{E(f=g)} g^\pm \mathrm{d}\mu = \int_E g^\pm \mathrm{d}\mu\,.$$

(c) 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$, $\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 都存在并且 $f(x) \le g(x)$ a.e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

这是因为

$$f(x) \le g(x) \quad \Longrightarrow \quad f^+(x) \le g^+(x), \quad f^-(x) \ge g^-(x)$$

因此结合 $\mu(E(f > g)) = 0$ 有

$$\int_E f^+ \mathrm{d}\mu = \int_{E(f\le g)} f^+ \mathrm{d}\mu \le \int_{E(f\le g)} g^+ \mathrm{d}\mu = \int_E g^+ \mathrm{d}\mu\,,$$

$$\int_E f^- \mathrm{d}\mu = \int_{E(f\le g)} f^- \mathrm{d}\mu \ge \int_{E(f\le g)} g^- \mathrm{d}\mu = \int_E g^- \mathrm{d}\mu$$

$\Longrightarrow$

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E f^+\mathrm{d}\mu - \int_E f^-\mathrm{d}\mu \le \int_E g^+\mathrm{d}\mu - \int_E g^-\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu\,.$$

(d) 若 $f \in L^1(E,\mu)$ 而 $A \subset E$ 是可测集, 则 $f \in L^1(A,\mu)$ 且

$$\int_A |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x).$$

这是由于此时 f 也在 A 上可测. 因此不等式属于非负可测函数积分的单调性的结论.

(e) 若 f 在 E 上有界, 且 $\mu(E) < +\infty$, 则 $f \in L^1(E,\mu)$.

这是因为 $\sup\limits_{x\in E}|f(x)| \le M < +\infty$ 和 $\mu(E) < +\infty \Longrightarrow$

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E M\mathrm{d}\mu(x) = M\cdot\mu(E) < +\infty\,.$$

(f) 若 $0 \le g \in L^1(E,\mu)$ 而 $|f(x)| \le g(x)$ a.e. $x \in E$, 则 $f \in L^1(E,\mu)$.

这是因为（由**(c)**）

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\,.$$

(g) 若 $f \in L^1(E,\mu)$, 则 f 在 E 上几乎处处有限, 即 $\mu(E(|f|=\infty)) = 0$.

事实上将非负可测函数积分的**定理10.4(f)** 应用于 $|f|$, 并注意 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$, 即得结论.

(h)(线性性和三角不等式). 可积函数类 $L^1(E,\mu)$ 是一个线性空间, 即若 $f,g \in L^1(E,\mu)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ 为常数, 则 $\alpha f + \beta g \in L^1(E,\mu)$, 并成立线性性：

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}\mu(x) = \alpha\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \beta\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

和三角不等式：

$$\int_E |f(x)+g(x)|\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) + \int_E |g(x)|\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【**(h)**的证明】设 $f,g \in L^1(E,\mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ 为常数. 由结论 (f) 知 f,g 在 E 上几乎处处有限. 因此由可测函数的基本性质知 $\alpha f, f+g$ 都是 E 上的可测函数. 又由

$$|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)|\,, \quad |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$$

和非负可测函数的积分性质有

$$\int_E |\alpha f|\mathrm{d}\mu = |\alpha|\int_E |f|\mathrm{d}\mu < +\infty\,,$$
$$\int_E |f+g|\mathrm{d}\mu \le \int_E (|f|+|g|)\mathrm{d}\mu = \int_E |f|\mathrm{d}\mu + \int_E |g|\mathrm{d}\mu < +\infty\,.$$

因此 αf, $f+g\in L^1(E,\mu)$. 这同时证明了三角不等式.

为证明线性性, 只需证明

$$\int_E \alpha f\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\mathrm{d}\mu\,,\quad \int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu + \int_E g\mathrm{d}\mu\,.$$

根据函数的正、负部的定义易见：当 $\alpha\ge 0$ 时,

$$(\alpha f)^+(x) + \alpha f^-(x) = \alpha f^+(x) + (\alpha f)^-(x)\,,$$

从而有

$$\int_E (\alpha f)^+\mathrm{d}\mu + \alpha\int_E f^-\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f^+\mathrm{d}\mu + \int_E (\alpha f)^-\mathrm{d}\mu < +\infty\,.$$

移项即得

$$\int_E \alpha f\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\mathrm{d}\mu\,.$$

而当 $\alpha < 0$ 时,

$$(\alpha f)^+(x) = \max\{\alpha f(x)\,,0\} = \max\{-(-\alpha)f(x)\,,0\} = (-\alpha f)^-(x)\,,$$
$$(-\alpha)f^+(x) = -\alpha\max\{f(x)\,,0\} = \max\{-\alpha f(x)\,,0\} = (\alpha f)^-(x)$$
$$\Longrightarrow\ (\alpha f)^+(x) + (-\alpha)f^+(x) = (\alpha f)^-(x) + (-\alpha)f^-(x)\,,$$

从而有

$$\int_E (\alpha f)^+\mathrm{d}\mu + (-\alpha)\int_E f^+\mathrm{d}\mu = \int_E (\alpha f)^-\mathrm{d}\mu + (-\alpha)\int_E f^-\mathrm{d}\mu < +\infty\,.$$

移项后同样得到

$$\int_E \alpha f\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\mathrm{d}\mu\,.$$

最后设 $Z = E(|f| = +\infty)\cup E(|g| = +\infty)$. 则 $\mu(Z) = 0$. 于是当 $x\in E\setminus Z$ 时, 以下运算有意义：

$$(f+g)^+(x) - (f+g)^-(x) = f(x) + g(x) = f^+(x) + g^+(x) - f^-(x) - g^-(x)\,,$$
$$\Longrightarrow\ (f+g)^+(x) + f^-(x) + g^-(x) = (f+g)^-(x) + f^+(x) + g^+(x)\,.$$

因零测集对积分没有贡献, 对这些非负函数在整个 E 上取积分得到

$$\int_E (f+g)^+ \mathrm{d}\mu + \int_E f^- \mathrm{d}\mu + \int_E g^- \mathrm{d}\mu = \int_E (f+g)^- \mathrm{d}\mu + \int_E f^+ \mathrm{d}\mu + \int_E g^+ \mathrm{d}\mu < +\infty\,.$$

移项即得所证等式. $\square$

【注】当f 在E上可积时, 由于$E(|f| = +\infty)$是零测集, 即$\mu(E(|f| = +\infty)) = 0$, 而去掉零测集不改变可积性和积分值, 故永远可以用$E(|f| < +\infty)$代替E, 即可以假定f在E上处处有限. 同样, 当f和可数多个函数f_k 在E上可积时,

$$Z := E(|f| = +\infty) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f_k| = +\infty) \quad \text{是零测集}$$

故可以用$E \setminus Z$代替E. 这就使得减法运算$f_k(x) - f(x), f_k(x) - f_j(x)$等等运算有意义。

现在我们可以证明 现代积分理论中最有力最常用的几个定理：Lebesgue 控制收敛定理, 逐项积分定理, 可数可加定理, 积分的绝对连续性, 等.

【定理10.14 Lebesgue 控制收敛(LDC)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 E上的广义实值可测函数列, 满足

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad x \in E,$

(ii) 存在函数 $0 \le F \in L^1(E, \mu)$ 使得

$$|f_k(x)| \le F(x)\,, \quad \forall\, x \in E\,, \quad \forall\, k = 1, 2, 3, \dots\,.$$

则 $f \in L^1(E, \mu)$ 且

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu(x) = 0$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x) \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【注】LDC 是 **Lebesgue Dominated Convergence** (Lebesgue 控制收敛) 的缩写. 条件 (ii) 中的函数 F 称为 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的控制函数. 同一序列的控制函数可以有很多, 例如若 F 是 $\{f_k\}$ 的控制函数, $0 \le G \in L^1(E, \mu)$, 则 $3F$ 和 $F + G$ 也都是 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的控制函数.

【LDC 的证明】证明的关键是设法使用 Fatou 引理. 首先由 (i) 和“可测函数列的极限函数还是可测函数”知f在E上可测, 而由(ii) 知 f_k 在 E 上可积, 因此 f_k 在 E

上几乎处处有限且由$|f(x)|=\lim\limits_{k\to\infty}|f_k(x)|\le F(x)\ \forall\, x\in E$ 知f 也在 E 上可积从而 f 在 E 上几乎处处有限. 为使函数运算处处有意义, 我们考虑 $E\setminus Z$, 其中

$$Z=E(f_k\not\to f)\cup E(|f|=+\infty)\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}E(|f_k|=+\infty)\,.$$

易见 Z 是零测集. 由于去掉一个零测集不改变积分值, 我们可以以 $E\setminus Z$ 代替 E, 也即可以假定 $f(x), f_k(x)$ 在 E 上处处有限. 于是减法$f_k(x)-f(x)$处处有意义. 令 $g_k(x)=|f_k(x)-f(x)|$. 则

$$g_k\in L^1(E,\mu)\,,\quad g_k(x)\to 0\quad (k\to\infty\,)\quad \forall\, x\in E\,,$$

$$0\le g_k(x)\le 2F(x)\quad \forall\, x\in E\,,\quad \forall\, k=1,2,3,\dots.$$

因为 $2F(x)-g_k(x)\ge 0$ 于 E, 故应用 Fatou 引理和数列的上下极限关系, 有

$$\begin{aligned}\int_E 2F(x)\mathrm{d}\mu(x)&=\int_E\lim_{k\to\infty}\Big(2F(x)-g_k(x)\Big)\mathrm{d}\mu(x)\le\liminf_{k\to\infty}\int_{E_1}\Big(2F(x)-g_k(x)\Big)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int_E 2F(x)\mathrm{d}\mu(x)+\liminf_{k\to\infty}\Big(-\int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big)=\int_E 2F(x)\mathrm{d}\mu(x)-\limsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.\end{aligned}$$

消去有限数 $\int_E 2F(x)\mathrm{d}\mu(x)<+\infty$ (这儿用到 F 的可积性!), 即得

$$\limsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\le 0\,.$$

但 $g_k\ge 0$ 于 E 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$ 即

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}\mu(x)=0\,.$$

最后由积分不等式得到

$$\Big|\int_E f_k\mathrm{d}\mu(x)-\int_E f\mathrm{d}\mu(x)\Big|=\Big|\int_E(f_k-f)\mathrm{d}\mu(x)\Big|\le\int_E|f_k-f|\mathrm{d}\mu(x)\to 0\ \ (k\to\infty)\,.$$

□

【重要例题】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}, f\in L^1(E,\mu)$. 则按积分范数, f可以被有界的可积函数逼近. 具体来说, 令$f_M(x)=f(x)\mathbf{1}_{E(|f|\le M)}(x)$, $0<M<+\infty$. 则f_M是有界的可积函数且

$$\int_E|f(x)-f_M(x)|\mathrm{d}\mu(x)=\int_{E(|f|>M)}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x)\to 0\quad (M\to+\infty).$$

【证】易见f_M是可测函数且$|f_M(x)| = |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|\le M)}(x) \le \min\{|f(x)|, M\}, x \in E$. 因此$f_M$ 是有界的可积函数. 同时有$|f(x) - f_M(x)| = |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|>M)}(x)$,

$$\int_E |f(x) - f_M(x)|\mathrm{d}\mu(x) = \int_E |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|>M)}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x).$$

由f 可积知f在E上几乎处处有限, 即$Z = E(|f| = +\infty)$ 是零测集. 令$E_1 = E \setminus Z$. 则$E = E_1 \cup Z$. 因零测集对积分无贡献, 故我们可以以E_1代替E, 即可以假定f在E上处处有限即$E = E(|f| < +\infty)$. 其次我们注意: 只需证明当M取正整数值(即$M = k \in \mathbb{N}$)时有

$$\int_{E(|f|>k)} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{2.1}$$

事实上若(2.1)成立, 令$[M]$ 为不超过M的最大整数, 则由$M \ge [M]$ 有$E(|f| > M) \subset E(|f| > [M])$ 从而由非负函数积分的单调性即得

$$\int_{E(|f|>M)} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \le \int_{E(|f|>[M])} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \to 0 \quad (M \to +\infty).$$

[**证法1:**] 为了保持积分集合是固定的, 即不依赖于k, 从而可使用LDC, 我们使用特征函数：令

$$g_k(x) := |f(x)|\mathbf{1}_{E(|f|>k)}(x), \quad x \in E,\ k = 1, 2, 3, \dots.$$

则有

$$\int_{E(|f|>k)} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) = \int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

对任意$x \in E = E(|f| < +\infty)$有$|f(x)| < +\infty$, 因此当$k > |f(x)|$时, $\mathbf{1}_{E(|f|>k)}(x) = 0$, 从而有$g_k(x) = 0$. 由此可知

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = 0 \quad \forall\, x \in E; \qquad |g_k(x)| \le |f(x)| \quad \forall\, x \in E,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

因$|f| \in L^1(E, \mu)$, 故由LDC 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

所以(2.1)成立.

[**证法2:**]为证(2.1), 令

$$f_k(x) = |f(x)|\mathbf{1}_{E(f\le k)}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

则对任意$x \in E$ 有

$$0 \le f_k(x) \le f_{k+1}(x) \le |f(x)| \ (k = 1, 2, 3, ...) \, ; \quad f_k(x) \to |f(x)| \quad (k \to \infty).$$

对$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 应用 LDC (可取$|f|$为控制函数因为$|f|$可积)或 Levi 单调收敛定理并注意 $|f(x)| - f_k(x) = |f(x)| \mathbf{1}_{E(f>k)}(x)$, 得到

$$\int_{E(f>k)} |f| \mathrm{d}\mu = \int_E (|f| - f_k) \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \mathrm{d}\mu - \int_E f_k \mathrm{d}\mu \to 0 \quad (k \to \infty). \qquad \Box$$

LDC 的一个特殊且常用的情形是下列有界收敛定理:

【定理10.15 Lebesgue有界收敛】 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列可测函数, 满足

(i) $\mu(E) < +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \quad$ a.e. $x \in E$,

(iii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上一致有界, 即存在常数 $0 \le M < +\infty$ 使得

$$|f_k(x)| \le M \qquad \forall\, x \in E\,, \quad \forall\, k = 1, 2, 3, \dots.$$

则 $f \in L^1(E, \mu)$ 且

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu(x) = 0$$

从而有

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x) \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】 由 $\mu(E) < +\infty$ 知常值函数 $F(x) = M$ 在 E 上可积: $\int_E F(x) \mathrm{d}\mu(x) = M\mu(E) < +\infty$. 因此由假设知 F 是 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的控制函数. 这就转化为 LDC, 遂得证. $\Box$

很多情况下我们会遇到带连续参数的函数族. 相应地我们有

【定理10.16 连续参变量的LDC】 设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$, $I \subset \mathbb{R}^m$, 0 是I的一个聚点$\delta > 0$, $\{f_h\}_{h \in I}$是E 上的一族可测函数, 满足

(i) $\lim\limits_{I \ni h \to 0} f_h(x) = f(x) \quad$ a.e. $\quad x \in E\,.$

(ii) 存在函数 $0 \le F \in L^1(E, \mu)$ 使得 $|f_h(x)| \le F(x) \quad \forall\, x \in E\,, \ \forall\, h \in I\,.$

则 $f \in L^1(E,\mu)$ 且

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E |f_h(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu(x) = 0$$

从而有

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E f_h(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x) \mathrm{d}\mu(x) \,.$$

【证】任取点列 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset I$ 满足 $h_k \neq 0, h_k \to 0$ $(k \to \infty)$, 由假设 (i),(ii) 可见 $\{f_{h_k}\}_{k=1}^{\infty}, f, F$ 满足函数列情形的 LDC 的条件. 因此 $f \in L^1(E,\mu)$ 且

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |f_{h_k}(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

再由 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的任意性即得所证. $\square$

【定理10.16之推论: 连续参变量的有界收敛定理】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$, $I \subset \mathbb{R}^m$, 0 是I的一个聚点, $\{f_h\}_{h \in I}$是 E 上的一族可测函数, 满足

- **(i)** $\lim\limits_{I \ni h \to 0} f_h(x) = f(x)$ a.e. $x \in E$.
- **(ii)** $\{f_h\}_{h \in I}$ 一致有界, 即 $\sup\limits_{x \in E,\, h \in I} |f_h(x)| < +\infty$.
- **(iii)** $\mu(E) < +\infty$.

则 $f \in L^1(E,\mu)$ 且

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E |f_h(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu(x) = 0$$

从而有

$$\lim_{I \ni h \to 0} \int_E f_h(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x) \mathrm{d}\mu(x) \,.$$

【证】令$M = \sup\limits_{x \in E,\, h \in I} |f_h(x)|$, 则$0 \le M < +\infty$. 由 $\mu(E) < +\infty$ 知常值函数 $F(x) = M$ 在 E 上可积: $\int_E F(x) \mathrm{d}\mu(x) = M\mu(E) < +\infty$. 因此$F$ 是 $\{f_h\}_{h \in I}$ 的可积的控制函数. 据上一定理即得证. $\square$

【定理10.17 逐项积分】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$. 若 $f_k \in L^1(E,\mu)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)| \mathrm{d}\mu(x) < +\infty$$

则函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处绝对收敛, 且和函数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 在 E 上可积并成立逐项积分:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

和

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |S_k(x) - S(x)|\mathrm{d}\mu(x) = 0$$

其中 $S_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

【证】令 $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$. 则 F 是 E 上非负可测函数. 由非负可测函数的逐项积分定理和假设条件有

$$\int_E F(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\,.$$

因此 $F \in L^1(E,\mu)$. 这蕴涵 F 在 E 上几乎处处有限, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \quad \text{a.e.} \quad x \in E$$

也即函数级数 $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处绝对收敛. 因此 (由级数收敛的定义)

$$S_k(x) \to S(x) \quad (k\to\infty) \quad \text{a.e.} \quad x \in E\,;$$

$$|S_k(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \le F(x)\,, \quad x \in E\,, \quad k = 1,2,3,\ldots\,.$$

应用 LDC (注意 LDC 已蕴涵 $S \in L^1(E,\mu)$) 有 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E |S_k(x) - S(x)|\mathrm{d}\mu(x) = 0$ 从而由积分的线性性和级数收敛的定义得到

$$\int_E S(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E S_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

□

在应用这一定理时, 一般是先对非负函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ 逐项积分, 这一步总是可行的, 除了要求 f_k 可测外, 没有任何限制. 如果 $\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$, 则可以对 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 逐项积分.

【定理10.18 可数可加性】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in \mathcal{M}$ $(k = 1,2,3,...)$ 互不相交(或稍一般些: 互不重叠, 即若$i \neq j$ 则$\mu(E_i \cap E_j) = 0.$).

设 $f\in L^1(E,\mu)$. 则成立可加性：

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】令 $f_k(x)=f(x)\mathbf{1}_{E_k}(x)$. 由非负可测函数的积分可加性有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x)=\int_E|f(x)|\mathrm{d}\mu(x)<+\infty\,.$$

于是应用逐项积分定理得

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

另一方面, 由 E_k 互不相交和 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_k}(x)=\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{\infty}E_k}(x)=\mathbf{1}_E(x)=1\,,\quad x\in E$$

$$\Longrightarrow\qquad \sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)=f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_k}(x)=f(x)\,,\quad x\in E\,.$$

所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

现在设E_k 互不重叠. 令

$$Z=\bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},i\neq j}E_i\cap E_j.$$

则Z 是可数个零测集的并因而是零测集. 令$\widetilde{E}=E\setminus Z$, $\widetilde{E}_k=E_k\setminus Z$. 则

$$\widetilde{E}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k\quad 且\ \ \widetilde{E}_k\ \ 互不相交.$$

因此由互不相交情形的可数可加性有

$$\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

又由$E\setminus\widetilde{E}=Z$, $E_k\setminus\widetilde{E}_k\subset Z$ 知$E\setminus\widetilde{E},E_k\setminus\widetilde{E}_k$ 都是零测集. 因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E\setminus\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_k\setminus\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\widetilde{E}_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

代入上式即知所证可加性成立. $\square$

【并集上的积分的分拆】很多时候我们需要建立一个函数分别在每个特定类型的集合上的积分与这函数在这些特定集合的并集上的积分的关系式. 下面这个定理给出了一种这样的关系式.

【定理10.18*(并集上积分的分拆)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ 为一完备测度空间, $N \in \mathbb{N}, E_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, 3, ..., N$, 并设$f \in L^1(\bigcup_{k=1}^N E_k, \mu)$. 则有

$$\int_{\bigcup_{k=1}^N E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{1\le i<j\le N} \int_{E_i\cap E_j} f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le N} \int_{E_i\cap E_j\cap E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \cdots + (-1)^{N-1} \int_{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_N} f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

即

$$\int_{\bigcup_{k=1}^N E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N} \int_{E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_j}} f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

【证】我们将使用下面的多项展开式, 其证明放在本节附录中: 设$a_k \in \mathbb{C}$, 则有

$$1 - \prod_{k=1}^N (1 - a_k) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}.$$

将这一展开式用于$a_k = 1_{E_k}(x)$ 并用特征函数基本性质

$$1_{\bigcup_{k=1}^N E_k}(x) = 1 - \prod_{k=1}^N \Big(1 - 1_{E_k}(x)\Big),$$
$$1_{E_{k_1}(x)} 1_{E_{k_2}}(x)\cdots 1_{E_{k_j}}(x) = 1_{E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_j}}(x)$$

得到

$$1_{\bigcup_{k=1}^N E_k}(x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N} 1_{E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\cdots\cap E_{k_j}}(x).$$

对这等式两边乘以$f(x)$ 并在$E = \bigcup_{k=1}^N E_k$ 上积分即得所证积分等式. 注意由f在E上可积知上述所有积分都有限, 因此运算是合法的。 $\square$

如何从函数在某类子集上的可积性推测函数在全集上的可积性？下面这个定理给出了一个常用的方法.

【定理10.19(积分的扩张)】设 E_k 是一列单调增加的可测集:

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots, \quad E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k\,.$$

设 f 是 E 上的可测函数. 则

$$f \in L^1(E,\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{k\ge 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\,.$$

此外当 $f \in L^1(E,\mu)$ 时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】若 f 在 E 上可积, 则由非负函数积分的单调性 $\int_{E_k}|f|\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E |f|\mathrm{d}\mu(x)$ 有

$$\sup_{k\ge 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\,.$$

反之假设 $\sup\limits_{k\ge 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$. 将非负可测函数的积分扩张定理分别应用于 f 的正部和负部并注意显然的不等式 $0 \le f^{\pm}(x) \le |f(x)|$, 得到

$$\int_E f^{\pm}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f^{\pm}(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \sup_{k\ge 1}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\,.$$

因此 f 在 E 上可积. 同时对 f 在 E 上可积的情形我们还得到

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}\mu &= \int_E f^+\mathrm{d}\mu - \int_E f^-\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f^+\mathrm{d}\mu - \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f^-\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{E_k} f^+\mathrm{d}\mu - \int_{E_k} f^-\mathrm{d}\mu\Big) = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

□

【定理10.20(积分的收缩)】 设 E_k 是一列单调减少的可测集:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots\,, \quad E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\,.$$

设$f \in L^1(E_1,\mu)$. 则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

【证】留为练习(课堂抽查). 至少有两种证法. □

下面这个定理及其推论揭示了可积函数的一个自然性质：积分 $E \mapsto \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 关于积分集 E 是连续的: 集合的测度越小, 其上积分越小.

【定理10.21(积分的绝对连续性)】 设 $f \in L^1(E,\mu)$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当可测子集 $A \subset E$ 满足 $\mu(A) < \delta$ 时

$$\Big|\int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big| \le \int_A |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon\,.$$

【证】第一个不等式是已知性质. 第二个不等式体现了"绝对"的意义, 它同时表明, 为证明绝对连续性, 我们可以假定 f 非负 (否则以 $|f|$ 代替 f). 数学研究往往先从好的或容易的情形下手. 如果对这种情形, 猜测的结论成立, 则至少得到了部分肯定结果, 然后设法用好的或容易的情形逼近一般情形, 使结论或猜测对一般情形也成立. 对于本题我们那先看 f 有界的情形：假设 $0 \le f(x) \le M \ \forall x \in E$, 其中 M 为有限常数. 则对任何可测子集 $A \subset E$ 有

$$0 \le \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le M\mu(A)\,.$$

由此显见对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon/M > 0$, 则当 $\mu(A) < \delta$ 时就有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) < M\mu(A) < \varepsilon\,.$$

转向一般情形. 令 $f_M(x) = f(x)\mathbf{1}_{E(f\le M)}(x)$, $M > 0$. 则由上面**重要例题** 知

$$\int_E (f(x) - f_M(x))\mathrm{d}\mu(x) = \int_{E(f>M)} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \to 0 \quad (M \to \infty)\,.$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$ 使得

$$\int_E (f(x) - f_M(x))\mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon/2\,.$$

因 f_M 在 E 上有界: $0 \le f_M(x) \le M\,,\ x \in E$. 故由上面分析, 存在 $\delta > 0$ 使得对任何可测子集 $A \subset E$ 满足 $\mu(A) < \delta$ 有 $\int_A f_M(x)\mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon/2$, 从而由 $f - f_M \ge 0$ 有

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_A (f - f_M)\mathrm{d}\mu + \int_A f_M\mathrm{d}\mu \le \int_E (f - f_M)\mathrm{d}\mu + \int_A f_M\mathrm{d}\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

□

下面这个定理是积分绝对连续性的另一表述, 其中集合 A_k 通常取成使被积函数 f 在 A_k 上具有某种较好的性质的集合.

【定理10.22(积分的连续性)】设 $f \in L^1(E, \mu)$, A, A_k 是 E 中的可测子集列满足 $\mu(A_k \Delta A) \to 0\ \ (k \to \infty)$, 其中 $A_k\Delta A := (A_k \setminus A) \cup (A \setminus A_k)$. 则

$$\int_{A_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \to \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad (k \to \infty)\,.$$

【证】由 $\int_{A_k} = \int_{A_k\setminus A} + \int_{A_k\cap A}$, $\int_A = \int_{A\setminus A_k} + \int_{A_k\cap A}$ 和积分的绝对连续性得到

$$\Big|\int_{A_k} f\mathrm{d}\mu - \int_A f\mathrm{d}\mu\Big| \le \int_{A_k\setminus A} |f|\mathrm{d}\mu + \int_{A\setminus A_k} |f|\mathrm{d}\mu = \int_{A_k\Delta A} |f|\mathrm{d}\mu \to 0 \quad (k \to \infty).$$

□

【L^p **空间及其完备性**】 Lebesgue 积分理论的一个主要优点是完备性.

设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$. 对于常数 $1\le p<+\infty$ 定义

$$L^p(E,\mu):=\Big\{f:E\to[-\infty,+\infty]\ \text{可测}\ \Big|\ \int_E|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)<+\infty\Big\}.$$

在$L^p(E,\mu)$ 上定义范数$\|\cdot\|_{L^p}$ 为

$$\|f\|_{L^p}:=\Big(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\Big)^{1/p},\quad f\in L^p(E,\mu)\,.$$

需说明$L^p(E,\mu)$ 是一个实线性赋范空间: 首先在$L^p(E,\mu)$中, **相等**"$=$" 的定义是

$$f=g\quad\text{in}\quad L^p(E,\mu)\quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=g(x)\quad\text{a.e.}\quad x\in E.$$

也即把两个几乎处处相等的函数视为同一个函数. 这等价于说

$$f=g\quad\text{in}\quad L^p(E,\mu)\quad\Longleftrightarrow\quad\|f-g\|_{L^p}=0.$$

由此立即看出：这样定义的相等"$=$" 确实是$L^p(E,\mu)$上的一个**等价关系**, 所以它是合理的、与通常的相等是相容的.【粗略地说, 这不过是说零测集对积分无贡献, 而在$L^p(E,\mu)$中, 一切都是从积分考虑的.】

来看: 若 $f,g\in L^p(E,\mu)$. 则 f,g 几乎处处有限. 因此 $f+g$ 在 E 上可测. 因 $1\le p<+\infty$ 故函数 $t\mapsto t^p$ 在 $[0,+\infty)$ 上为凸函数, 从而有$(\frac{a+b}{2})^p\le\frac{1}{2}(a^p+b^p)$ 即$(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)\,(\forall\,a,b\in[0,+\infty))$. 于是对于几乎所有 $x\in E$ 有

$$|f(x)+g(x)|^p\le(|f(x)|+|g(x)|)^p\le 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p)\,.$$

这蕴涵 $f+g\in L^p(E,\mu)$. 此外对任意常数 $\alpha\in\mathbb{R}$ 有 $|\alpha f|^p=|\alpha|^p|f|^p$. 所以 $\alpha f\in L^p(E,\mu)$. 这证明了 $L^p(E,\mu)$ 是一个实线性空间.

其次来证明$\|\cdot\|_{L^p}$ 确实是$L^p(E,\mu)$上的一个范数(从而$L^p(E,\mu)$ 是一个实线性赋范空间), 也即$\|\cdot\|_{L^p}$满足下面关于范数的三个规定性质(i)-(iii):

(i) 正定性：

$$\|f\|_{L^p}\ge 0\quad\forall\,f\in L^p(E,\mu);\qquad\|f\|_{L^p}=0\iff f=0.$$

(ii) 正齐次性:

$$\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p} \qquad \forall\, f \in L^p(E, \mu),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

(iii) 三角不等式:

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad f, g \in L^p(E, \mu).$$

第(i),(ii)条是显然的, 第(iii)条是主要性质, 我们把它和另一常用不等式(Höledr不等式)列为一个定理:

【定理10.23(Höledr不等式和三角不等式)】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$为一完备测度空间, $E \in \mathcal{M}$.

(a) 设$1 < p, q < +\infty$ 满足$1/p + 1/q = 1$. 设$f \in L^p(E, \mu)$, $g \in L^q(E, \mu)$. 则乘积$fg \in L^1(E, \mu)$ 且成立**Hölder不等式:**

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}\,.$$

即

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}\mu(x) \le \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}.$$

当$p = q = 2$时, Hölder 不等式称为**Cauchy-Schwarz不等式**: 即若$f, g \in L^2(E, \mu)$则$fg \in L^1(E, \mu)$ 且

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

即

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}\mu(x) \le \left(\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_E |g(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/2}.$$

(b) 设$f, g \in L^p(E, \mu)$, $1 \le p < +\infty$. 则成立**三角不等式(也称为Minkowski不等式):**

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\,.$$

即

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \le \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.$$

【证】(a): 若$\|f\|_{L^p}=0$或$\|g\|_{L^q}=0$, 例如设$\|f\|_{L^p}=0$, 则有$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)=0$ 从而有$f(x)=0$ a.e. $x\in E$. 这蕴含$f(x)g(x)=0$ a.e. $x\in E$. 因此$\|fg\|_{L^1}=0$. 此时Hölder不等式变成$0=0$. 设$\|f\|_{L^p}>0$, $\|g\|_{L^q}>0$. 令

$$f_1(x)=\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}},\quad g_1(x)=\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}.$$

则由Young不等式

$$AB\le\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}\qquad\forall\ 0\le A,B\le+\infty\,.$$

有

$$f_1(x)g_1(x)\le\frac{f_1(x)^p}{p}+\frac{g_1(x)^q}{q},\quad x\in E$$

取积分得到

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}}\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}\mu(x)=\int_E f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\le\frac{1}{p}\int_E f_1(x)^p\mathrm{d}\mu(x)+\frac{1}{q}\int_E g_1(x)^q\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)}{(\|f\|_{L^p})^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)}{(\|g\|_{L^q})^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

不等式两边乘以$\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ 即得Hölder 不等式.

(b): 当$p=1$ 时, 这是已证的积分不等式(由$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$ 推出). 设$1<p<+\infty$. 考虑分拆

$$|f(x)+g(x)|^p=|f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\le|f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}.$$

设$1<q<+\infty$为p的相伴数, 即满足$1/p+1/q=1$, 即$q=\frac{p}{p-1}$. 则由Hölder 不等式有

$$\int_E|f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\mathrm{d}\mu(x)\le\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_E|f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$=\|f\|_{L^p}\left(\int_E|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}=\|f\|_{L^p}((\|f+g\|_{L^p})^p)^{1/q}=\|f\|_{L^p}(\|f+g\|_{L^p})^{p-1}\quad.$$

同样有

$$\int_E|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\mathrm{d}\mu(x)\le\|g\|_{L^p}(\|f+g\|_{L^p})^{p-1}.$$

因此

$$(\|f+g\|_{L^p})^p=\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\le(\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})(\|f+g\|_{L^p})^{p-1}.$$

当$\|f+g\|_{L^p}>0$ 时, 两边除以$(\|f+g\|_{L^p})^{p-1}$ 即得三角不等式. 而当$\|f+g\|_{L^p}=0$ 时, 三角不等式显然成立. $\square$

应用归纳法易见三角不等式可推广成多角不等式:

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_{L^p}\le\sum_{k=1}^n\|f_k\|_{L^p}\,,\quad f_k\in L^p(E,\mu)\,,\quad k=1,2,...,n\,.$$

进一步推广到无穷和也是可能的只要具有某种收敛性. 这就是下面定理的内容.

【定理10.24】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $1\le p<+\infty$. 设函数列$\{u_k\}_{k=1}^\infty\subset L^p(E,\mu)$ 满足

$$\sum_{k=1}^\infty\|u_k\|_{L^p}<+\infty.$$

则函数级数

$$\sum_{k=1}^\infty u_k(x),\quad x\in E$$

在E 上几乎处处绝对收敛并且$\sum_{k=1}^\infty u_k\in L^p(E,\mu)$. 此外有

$$\Big\|\sum_{k=1}^\infty u_k\Big\|_{L^p}\le\sum_{k=1}^\infty\|u_k\|_{L^p},\qquad\lim_{N\to\infty}\Big\|\sum_{k=N+1}^\infty u_k\Big\|_{L^p}=0.$$

【证】从非负函数下手总是方便且安全的. 考虑非负函数级数

$$\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|,\quad x\in E.$$

它显然在E上可测:

$$\sum_{k=1}^N|u_k(x)|\nearrow\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|\quad(k\to\infty)\quad\forall\,x\in E.$$

由此有

$$\Big(\sum_{k=1}^N|u_k(x)|\Big)^p\nearrow\Big(\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|\Big)^p\quad(k\to\infty)\quad\forall\,x\in E.$$

因此由Levi单调收敛定理有

$$\int_E\Big(\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|\Big)^p\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int_E\Big(\sum_{k=1}^N|u_k(x)|\Big)^p\mathrm{d}\mu(x).$$

另一方面, 由范数的三角不等式我们计算

$$\int_E\Big(\sum_{k=1}^N|u_k(x)|\Big)^p\mathrm{d}\mu(x)=\Big(\Big\|\sum_{k=1}^N|u_k|\Big\|_{L^p}\Big)^p\le\Big(\sum_{k=1}^N\|u_k\|_{L^p}\Big)^p\le\Big(\sum_{k=1}^\infty\|u_k\|_{L^p}\Big)^p$$

$N=1,2,3,\dots$. 因此

$$\int_E\Big(\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|\Big)^p\mathrm{d}\mu(x)\le\Big(\sum_{k=1}^\infty\|u_k\|_{L^p}\Big)^p<+\infty.$$

这证明了$(\sum_{k=1}^\infty|u_k|)^p$在$E$上可积也即$\sum_{k=1}^\infty|u_k|\in L^p(E,\mu)$. 由此可知$(\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|)^p$从而$\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|$ 在E上几乎处处有限：$\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|<+\infty\ \forall x\in E\setminus Z$ 其中Z 是一个零测集. 如将每个$u_k(x)$ 在$x\in Z$处重新定义为$u_k(x)=0$, 则根据L^p中相等的定义可知u_k与修正前的u_k几乎处处相等, 因此它们在$L^p(E,\mu)$中相等$(k=1,2,3,\dots)$. 于是$\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在E上处处绝对收敛. 再由$|\sum_{k=1}^\infty u_k(x)|\le\sum_{k=1}^\infty|u_k(x)|$ 可知$\sum_{k=1}^\infty u_k\in L^p(E,\mu)$ 且

$$\Big\|\sum_{k=1}^\infty u_k\Big\|_{L^p}\le\Big\|\sum_{k=1}^\infty|u_k|\Big\|_{L^p}\le\sum_{k=1}^\infty\|u_k\|_{L^p}.$$

对函数级数$\sum_{k=N+1}^\infty u_k(x)$, 照搬上面推导同样有

$$\Big\|\sum_{k=N+1}^\infty u_k\Big\|_{L^p}\le\sum_{k=N+1}^\infty\|u_k\|_{L^p}\to0\quad(N\to\infty)$$

其中的零极限是根据数值级数收敛的定义. □

【定理10.25(L^p 空间的完备性)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $1\le p<+\infty$. 则$L^p(E,\mu)$ 按距离$\|f-g\|_{L^p}$ 是完备的, 即:

若序列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $L^p(E,\mu)$ 中的 Cauchy 列, 也即

$$\lim_{m>k\to\infty}\|f_m-f_k\|_{L^p}=0,$$

则$\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 在$L^p(E,\mu)$ 中收敛, 即存在 $f\in L^p(E,\mu)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^p}=0.$$

此外, 还存在子列$\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$使得

$$f(x)=\lim_{j\to\infty}f_{k_j}(x)\quad\text{a.e.}\quad x\in E.$$

【证】设$\{f_k\}$ 为 $L^p(E,\mu)$ 中的 Cauchy 列. 因可积蕴涵几乎处处有限, 故 $Z_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E(|f_k| = \infty)$ 是零测集. 因此以 $E \setminus Z_0$ 代替 E 我们可以假定所有 f_k 在 E 上处处有限. 这使得下面涉及的函数运算处处有意义. 我们先证明存在子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ (即 $1 \le k_1 < k_2 < k_3 < ...$) 使得

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p} \le 2^{-j}\,, \quad j = 1,2,3,\dots. \tag{2.2}$$

由 Cauchy 列的定义易见 $\forall \varepsilon > 0\,, \forall M \in \mathbb{N}$ 存在整数 $k_{\varepsilon,M} > M$ 使得当 $m,k \ge k_{\varepsilon,M}$ 时 $\|f_m - f_k\|_{L^p} < \varepsilon$. 根据这个关系我们有：

对于 $\varepsilon = 1/2$, $M = 1$ 存在整数 $k_1 > 1$ 使得当 $m,k \ge k_1$ 时 $\|f_m - f_k\|_{L^p} < 1/2$;

对于 $\varepsilon = 1/4$, $M = k_1$ 存在整数 $k_2 > k_1$ 使得当 $m,k \ge k_2$ 时 $\|f_m - f_k\|_{L^p} < 1/4$.

假设对于 $\varepsilon = 2^{-j}$ 和 $M = k_{j-1}$ 存在正整数$k_j > k_{j-1}$ 使得当 $m,k \ge k_j$ 时
$\|f_m - f_k\|_{L^p} < 2^{-j}$, 则对于 $\varepsilon = 2^{-j-1}$, $M = k_j$ 仍存在整数 $k_{j+1} > k_j$ 使得当 $m,k \ge k_{j+1}$ 时 $\|f_m - f_k\|_{L^p} < 2^{-j-1}$.
根据归纳法原理, 以上手续对每个正整数 j 均可施行, 所以我们得到正整数序列 $k_1 < k_2 < k_3 < ....$ 满足 $\|f_m - f_k\|_{L^p} \le 2^{-j} \quad \forall m,k \ge k_j$, $j = 1,2,3,\dots$. 取 $m = k_{j+1}, k = k_j$ 即知 (2.2) 成立.

根据这个子列的做法我们有

$$\|f_{k_1}\|_{L^p} + \sum_{j=2}^{\infty} \|f_{k_j} - f_{k_{j-1}}\|_{L^p} \le \|f_{k_1}\|_{L^p} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} < +\infty.$$

将上述**定理10.24** 应用于函数列

$$u_1 = f_{k_1}, \quad u_j = f_{k_j} - f_{k_{j-1}}, \quad j = 2,3,4,...$$

可知和函数

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{j=2}^{\infty} [f_{k_j}(x) - f_{k_{j-1}}(x)], \quad x \in E$$

在E上几乎处处绝对收敛,并且$f \in L^p(E,\mu)$ 以及有

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{j=N+1}^{\infty} [f_{k_j} - f_{k_{j-1}}] \Big\|_{L^p} = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{j=N+1}^{\infty} u_j \Big\|_{L^p} = 0.$$

对任意$N(\ge 2)$ 有

$$f_{k_1}(x) + \sum_{j=2}^{N} [f_{k_j}(x) - f_{k_{j-1}}(x)] = f_{k_N}(x).$$

因此由级数收敛的定义有

$$f(x)=f_{k_1}(x)+\sum_{2=1}^{\infty}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)]=f_{k_N}(x)+\sum_{j=N+1}^{\infty}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)]$$

$x\in E\setminus Z$, 也即

$$f(x)-f_{k_N}(x)=\sum_{j=N+1}^{\infty}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)],\quad x\in E\setminus Z$$

其中Z为一个零测集: $\mu(Z)=0$. 因此有

$$\lim_{N\to\infty}\|f-f_{k_N}\|_{L^p}=\lim_{N\to\infty}\Big\|\sum_{j=N+1}^{\infty}[f_{k_j}-f_{k_{j-1}}]\Big\|_{L^p}=0.$$

注意到$k_N\geq N$, $N=1,2,3,...,$ 以及$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列得到

$$\|f-f_N\|_{L^p}\leq\|f-f_{k_N}\|_{L^p}+\|f_{k_N}-f_N\|_{L^p}\to 0\quad(N\to\infty).$$

换回记号f_k, 这就是$\lim\limits_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L^p}=0$.

最后再看函数级数: 由级数收敛的定义有

$$\begin{aligned}f(x)&=f_{k_1}(x)+\sum_{j=2}^{\infty}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)]=\lim_{N\to\infty}\Big(f_{k_1}(x)+\sum_{j=2}^{N}[f_{k_j}(x)-f_{k_{j-1}}(x)]\Big)\\&=\lim_{N\to\infty}f_{k_N}(x)\qquad\forall\,x\in E\setminus Z.\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{N\to\infty}f_{k_N}(x)=f(x)$ a.e. $x\in E$. □

【注】以上两个定理的证明具有一般性, 将来在学习泛函分析时会遇到类似的论证: 对于一个赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 来说, X 是完备的当且仅当数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛蕴涵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 在 $(X,\|\cdot\|)$ 中收敛.

• **复值函数和实向量值函数的积分**. 有了实值可测函数和积分的定义以及基本性质便可以定义复值函数和实向量值函数的可测性和可积性并得到相关性质.

【定义(对于复值函数)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$. 设 $f=\mathrm{Re}(f)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f):E\to\mathbb{C}$ 其中$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$是$f$的实部和虚部, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

若$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在E 上可测, 则称f 在E 上可测.

若$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ 都在E 上可积, 即$\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)\in L^1(E,\mu)$, 则称$f$ 在E 上可积, 记作$f\in L^1(E,\mu)$, 并定义f在E上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_E \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}\mu(x)+\mathrm{i}\int_E \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}\mu(x). \qquad \square$$

【定义(对于实向量值函数)】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$, $f=(f_1,f_2,...,f_m):E\to\mathbb{R}^n$.

若f 的每个坐标函数$f_1,f_2,...,f_m$ 都在E 上可测, 则称f 在E 上可测.

若f 的每个坐标函数$f_1,f_2,...,f_m$ 都在E 上可积, 即$f_1,f_2,...,f_m\in L^1(E,\mu)$, 则称$f$ 在E 上可积, 并定义f在E上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\Big(\int_E f_1(x)\mathrm{d}\mu(x),\ \int_E f_2(x)\mathrm{d}\mu(x),\ ...,\ \int_E f_m(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big). \qquad \square$$

【注】在复值函数f的可测性和可积性定义中我们要求f的实部和虚部都属于$\mathbb{R}$ 即他们处处有限.这是因为我们不打算处理$a+\mathrm{i}\infty,\infty+\mathrm{i}b,\infty+\mathrm{i}\infty$, etc. 的情形. 对向量值的情形也同样不考虑向量的某些分量是$\pm\infty$的情形.

下面命题给出复值和向量值函数积分的基本不等式.

【命题10.26】设$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ 为一完备测度空间, $E\in\mathcal{M}$. 若复值函数$f:E\to\mathbb{C}$或向量值函数$f:E\to\mathbb{R}^m$ 在E 上可积, 则有

$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big|\le\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \tag{2.3}$$

其中$|\cdot|$ 是复数的模或向量的欧几里德范数.

【证】对于向量的情形, $f=(f_1,f_2,...,f_m)$, 不等式(2.3) 详细写为

$$\left(\sum_{k=1}^m\Big(\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big)^2\right)^{1/2}\le\int_E\Big(\sum_{k=1}^m(f_k(x))^2\Big)^{1/2}\mathrm{d}\mu(x). \tag{2.4}$$

对于复值的情形, 如写$f=f_1+\mathrm{i}f_2$, 则由复数的模的定义$|a+\mathrm{i}b|=(a^2+b^2)^{1/2}$可见, 此时(2.3)的详细表示等于(2.4)中$m=2$的情形. 因此只需证明(2.4), 也即只需对向量值的情形证明(2.3).

任取向量$y=(y_1,y_2,...,y_m)\in\mathbb{R}^m$. 考虑内积并运用积分的线性性和Cauchy不等式有

$$\begin{aligned}\Big\langle y,\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big\rangle&=\sum_{k=1}^m y_k\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_E\Big(\sum_{k=1}^m y_kf_k(x)\Big)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int_E\langle y,f(x)\rangle\mathrm{d}\mu(x)\le\int_E|y||f(x)|\mathrm{d}\mu(x)=|y|\int_E|f(x)|\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

取
$$y=\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$
得到
$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big|^2\le\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big|\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x).$$
当$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\neq 0$ 时(即它是非零向量), 也即当$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big|>0$ 时, 从上面不等式消去它即得(2.3). 而当$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$(零向量)时, (2.3)显然成立. □

根据复值函数和向量值函数的积分的定义和不等式(2.3)易知, 前面得到的所有性质（除了涉及大小顺序的以外) 例如线性性、可加性、逐项积分、LDC、积分的绝对连续性、L^p空间极其完备性, 等等对复值函数和向量值函数的情形都成立.

【附录: 多项展开式】设a_k为实数或复数, $k=1,2,...,N$. 则
$$\prod_{k=1}^N(1+a_k)=1+\sum_{j=1}^N\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j},$$
$$1-\prod_{k=1}^N(1-a_k)=\sum_{j=1}^N(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}.$$
【证】把a_k 换成$-a_k$ 可见这两个等式彼此等价, 故只需证第一个等式. 我们对a_k的下标个数N用归纳法. 当$N=1$ 时, 所证等式显然成立. 假设所证等式当下标个数为N时成立, 看下标个数为$N+1$时. 考虑分解
$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N+1}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}\\&=\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N+1}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}\mathbf{1}_{\{k_j<N+1\}}\\&\quad+\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N+1}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}\mathbf{1}_{\{k_j=N+1\}}.\end{aligned}$$
计算:
$$\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N+1}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}\mathbf{1}_{\{k_j<N+1\}}=\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j<N+1}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}=-1+\prod_{k=1}^N(1+a_k)\quad(\text{最后的等号用了归纳假设}).$$

同时有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N+1} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}\mathbf{1}_{\{k_j=N+1\}}\\
&= a_{k_1}\mathbf{1}_{\{k_1=N+1\}}+\sum_{j=2}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N+1} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}\mathbf{1}_{\{k_j=N+1\}}\\
&= a_{N+1}+\sum_{j=2}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_{j-1}<N+1} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_{j-1}}a_{N+1}\\
&= a_{N+1}+\sum_{j=2}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_{j-1}\le N} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_{j-1}}a_{N+1}\\
&= a_{N+1}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_k\le N} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_k}a_{N+1}\\
&= \Big(1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_k\le N} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_k}\Big)a_{N+1}=\Big(\prod_{k=1}^{N}(1+a_k)\Big)a_{N+1}.
\end{aligned}
$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
&1+\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le N+1} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}\\
&=\prod_{k=1}^{N}(1+a_k)+\Big(\prod_{k=1}^{N}(1+a_k)\Big)a_{N+1}=\Big(\prod_{k=1}^{N}(1+a_k)\Big)(1+a_{N+1})=\prod_{k=1}^{N+1}(1+a_k).
\end{aligned}
$$

所以当下标个数为$N+1$时所证等式也成立. □

作业题 下面的σ-代数$\mathcal{M}$ 和测度μ 都取自完备的测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$, 可测均指$\mathcal{M}$-可测.

1. 设$E\in\mathcal{M}$, f在E上可积或非负可测并且$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\neq 0$. 证明$\mu(E)>0$.

2. 设$E\in\mathcal{M}$, f 在E 上可测且有界. 证明若$\mu(E)<+\infty$ 则$f\in L^1(E,\mu)$ (即f 在E 上可积).

3. 设$E\in\mathcal{M}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为E上非负可测函数列, 满足

$$f_1(x)\ge f_2(x)\ge f_3(x)\ge\cdots\ge 0\,,\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\qquad \forall\, x\in E.$$

证明：若$f_1\in L^1(E,\mu)$则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

[注: 如果去掉可积条件“$f_1 \in L^1(E,\mu)$”, 则结论不总成立. 见**§10.3**的作业题中的反例.]

4. 设$E \in \mathcal{M}$ 满足$\mu(E) < +\infty$, 设$f, f_k : E \to \mathbb{R}$ 为可测函数$(k = 1,2,3,...)$ 且$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ a.e. $x \in E$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \frac{f_k(x)}{1+|f_k(x)|}\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \frac{f(x)}{1+|f(x)|}\mathrm{d}\mu(x).$$

5. 设$E \in \mathcal{M}, \mu(E) > 0$, $0 \le f \in L^1(E,\mu)$, α 为实常数. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E k\log\Big(1+\Big(\frac{f(x)}{k}\Big)^{\alpha}\Big)\mathrm{d}\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ 1<\alpha<+\infty \\ \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) & \text{if } \ \alpha = 1 \\ +\infty & \text{if } \ 0<\alpha<1 \end{cases}$$

这里log 是以e 为底的对数.

[提示：首先说明可以用$E(f>0)$ 代替E. 再注意可积函数是几乎处处有限的, 因此可以用$E(f<+\infty)$ 代替E. 换言之可以假定f恒正且处处有限. 对于$\alpha \ge 1$, 利用不等式$1+y^{\alpha} \le (1+y)^{\alpha}$ 和$\log(1+y) \le y$ $(y \ge 0)$, 结合LDC, etc. 对于$0<\alpha<1$, 利用Fatou 引理.]

6. 设$E \in \mathcal{M}$, $f, f_k \in L^1(E,\mu)$ 皆**非负** $(k = 1,2,3,...)$, 满足

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{a.e. } x \in E\,; \quad \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}\mu(x) = 0\,.$$

提示：证明 $|f_k(x)-f(x)| = f_k(x)-f(x)+2(f(x)-f_k(x))^{+}$, $(f(x)-f_k(x))^{+} \le f(x)$ 其中$(y)^{+} = \max\{y,0\}$.

为使减法有意义, 证明存在零测集$Z \subset E$ 使得$f(x), f_k(x) < +\infty$ $\forall x \in E\setminus Z$ $\forall k = 1,2,3,...$, 且$\lim\limits_{k\to\infty}|f_k(x)-f(x)| = 0$ $\forall x \in E\setminus Z$.

7. (凸函数积分不等式) 设$E \in \mathcal{M}$, $\Phi : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ 为连续凸函数. 设$f \in L^1(E,\mu)$. 证明当$\mu(E) = 1$时

$$\Phi\Big(\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big) \le \int_E \Phi(f(x))\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

一般地, 证明若$0 < \mu(E) < +\infty$, 则

$$\Phi\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big) \le \frac{1}{\mu(E)}\int_E \Phi(f(x))\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

[提示：首先由第九章**命题9.40** 知复合函数$x \mapsto \Phi(f(x))$ 在E上可测. 再由非负性知积分$\int_E \Phi(f(x))\mathrm{d}\mu(x)$ 存在. 其次考虑凸函数不等式(见第五章关于凸函数的性质)

$$\Phi(y) \ge \Phi(y_0) + \Phi'_+(y_0)(y - y_0), \quad y, y_0 \in \mathbb{R}$$

并取合适的y_0.]

8. 设$E \in \mathcal{M}$, 设$L^2(E,\mu)$ 是E上平方可积的实值函数的全体. 在$L^2(E,\mu)$ 上引进内积

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f, g \in L^2(E,\mu).$$

若$\langle f, g\rangle = 0$ 则称f与g 垂直.

证明

(1) 若$f, g \in L^2(E,\mu)$ 则$fg \in L^1(E,\mu)$ (因此$\langle f, g\rangle$ 有意义) 且$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.

(2) 若$f_1, f_2, ..., f_N \in L^2(E,\mu)$ 互相垂直且$\|f_k\|_{L^2} > 0, k = 1, 2, ..., N$, 则$f_1, f_2, ..., f_N$ 线性无关, 即若线性组合$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots c_Nf_N = 0$ a.e. 于E, 则$c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$.

(3) 若对任意$N \in \mathbb{N}$, E中存在互不相交的$\mathcal{M}$-可测集$E_k, k = 1, 2, ..., N$ 满足$0 < \mu(E_k) < +\infty, k = 1, 2, ..., N$, 则$L^2(E,\mu)$ 中必有N的线性无关的函数$f_1, f_2, ..., f_N$. 因此由N的任意性知$L^2(E,\mu)$是无穷维的. [考虑特征函数.]

§10.3. $\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 积分

【关于Lebesgue 测度与积分的记号】设$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 为$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue测度空间. n维Lebesgue测度m还有以下常用记号:

$$m(E) = mes(E) = \mathrm{Vol}(E) = |E|.$$

由于Lebesgue 测度m 保持区间体积(面积)

$$m(I) = |I| \qquad \text{即} \qquad m(I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k) = |I_1||I_2|\cdots|I_k|$$

其中I_i 是一维区间, 故象一维情形一样, 我们可以将测度元$\mathrm{d}m(x)$ 写成古典形式$\mathrm{d}x$, 即

$$\mathrm{d}m(x) = \mathrm{d}x$$

或写成

$$\mathrm{d}m(x_1, x_2, ..., x_k) = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k, \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_k).$$

说明: 测度元$\mathrm{d}m(x)$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k$ 等记号只有放到积分里面去才有数值意义, 否则只是记号. 例如对于$\mathbb{R}^n$ 上的任一L-非负可测函数$f(x)$, 如果使用测度元的记号, 则等式$\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\mathrm{d}x$ 表示μ是由下式

$$\mu(E) := \int_E f(x)\mathrm{d}x, \quad E \in \mathcal{M}$$

定义的$\mathbb{R}^n$ 上的一个测度, 这是因为不难验证这样定义的μ 确实是L-可测集类$\mathcal{M}$ 上的一个测度(见上面**§10.1**的作业题1).

另外要说明, 使用乘积型的记号$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k$ 严格来说是下一节要证明的**Fubini-Tonelli 定理** 的结果, 即它是乘积测度和累次积分的结果.

使用上述记号, 相应的积分可写成

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m(x) = \int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x_1, x_2, ..., x_k)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k, \quad E \subset \mathbb{R}^n$$

当$n = 1$时, 设$-\infty \le a < b \le +\infty$, 则区间$I = [a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$ 上的积分也常写成上下限的形式(即与Riemann 积分的写法一致):

$$\int_I f(x)\mathrm{d}m(x) = \int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对于$n = 2, 3$ 的情形, 也可按习惯将$\int_E f\mathrm{d}m$ 分别写为二重积分和三重积分:

$$\iint_E f(x, y)\mathrm{d}m(x, y) = \iint_E f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad E \subset \mathbb{R}^2;$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}m(x,y,z) = \iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad E \subset \mathbb{R}^3.$$

例如对于$-\infty \le a_i < b_i \le +\infty, i = 1,2$, 区间$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$ 上的二重积分也常写成

$$\iint_{(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

对于Lebesgue 测度m, 我们将可积函数类$L^1(E,m)$以及一般地L^p 可积函数类$L^p(E,m)$简记为$L^1(E)$和$L^p(E)$, 即

$$L^p(E) = L^p(E,m).$$

因Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$属于一般完备测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$的特殊情形, 故上面建立的关于一般完备测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},\mu)$上可测函数和可测函数的积分的所有性质对于Hausdorff 测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$ 当然都成立. 下面我们对Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$ 列出相关定义和常用性质, 这也是对一般测度与积分的基本概念和性质的复习:

可测函数的定义、

若f 在L-可测集E上几乎处处连续, 则f在E 上L-可测、

L-可测函数列的上(下)极限函数、极限函数都是L-可测函数、

简单函数和简单函数逼近、

非负可测函数的级数表示、

"几乎处处"(即"a.e.") 的定义、

L-积分$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}m(x)$的定义、$L$-可积性的定义、

积分的线性性、互不重叠的可数可加性、

非负可测函数的积分的次可加性、

零测集对积分无贡献、

非负可测函数列的Levi 单调收敛、

非负可测函数列的Fatou 引理、

非负可测函数级数总可以逐项积分、

一般可测函数级数的逐项积分定理、

Lebesgue 控制收敛定理(LDC)、

积分的扩张、

积分的绝对连续性、

可积函数空间$L^1(E)=L^1(E,m)$和(一般地) L^p 空间$L^p(E)=L^p(E,m)$ 的完备性、

向量值和复值函数的积分、

积分不等式, 等等.

下面主要学习关于Lebesgue积分的特殊性质. 先学习Lebesgue 积分的简单换元公式和其他基本性质. 一般换元公式将在§**10.5** 中给出.

【定理10.27(平移和线性变换下的积分换元公式)】设f 在$\mathbb{R}^n$ 上L-可积或非负可测. 则对任意$h\in\mathbb{R}^n, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(全空间积分的平移不变性)},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\lambda|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(积分的平移和伸缩关系)},$$

一般地, 对任意可逆矩阵$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\mathrm{det A}|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】只需就f 非负的情形证明即可. 事实上若对非负的情形定理成立, 则对于实值可积函数f, 分别对f 的正部f^+ 和负部f^- 应用定理并结合$f=f^+-f^-$ 以及f^+ 和f^- 的积分皆有限从而可以做减法即知f 具有定理中的性质. 而对复值可积函数f, 分别对f 的实部$\mathrm{Re}(f)$ 和虚部$\mathrm{Im}(f)$ 应用实值可积函数的结果并根据复值函数积分的定义即知f仍具有定理中的性质.

因平移不变性和伸缩关系是$\mathrm{A}=\mathrm{I}$ (单位矩阵) 和$\mathrm{A}=\lambda\mathrm{I}$ 的特殊情形, 故只需证明一般情形.

先设$f(x)=\mathbf{1}_E(x)$ 是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$的特征函数. 则有

$$\mathbf{1}_E(\mathrm{A}x+h)=\mathbf{1}_{\mathrm{A}^{-1}(E-h)}(x).$$

由测度的平移不变性和线性变换下的测度公式有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_E(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{\mathrm{A}^{-1}(E-h)}(x)\mathrm{d}x=m(\mathrm{A}^{-1}(E-h))=|\mathrm{det A}^{-1}|m(E-h)$$
$$=\frac{1}{|\mathrm{det A}|}m(E)=\frac{1}{|\mathrm{det A}|}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}x$$

其次设f 在$\mathbb{R}^n$ 上的非负可测. 由非负可测函数的级数表示, 存在$\mathbb{R}^n$ 上的一列可测集E_k 和常数$c_k > 0$ 使得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{E_k}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

易见

$$f(\mathrm{A}x + h) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{E_k}(\mathrm{A}x + h), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

于是由非负可测函数级数的逐项积分和上面结果即得

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\mathbb{R}^n} 1_{E_k}(\mathrm{A}x+h)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\det \mathrm{A}|}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\mathbb{R}^n} 1_{E_k}(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{|\det \mathrm{A}|}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\det \mathrm{A}|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

【定理10.28(平移和线性变换下的积分换元公式)的推论】

(a) 设$E \subset \mathbb{R}^n$为可测集, $h \in \mathbb{R}^n$, f 在$E+h$上L-可积或非负可测. 则有

$$\int_E f(x+h)\mathrm{d}x = \int_{E+h} f(x)\mathrm{d}x.$$

(b) 设$E \subset \mathbb{R}^n$为可测集, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆, f 在$\mathrm{A}(E)$ 上可积或非负可测. 则有

$$\int_E f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\det \mathrm{A}|}\int_{\mathrm{A}(E)} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

【证】为应用上述定理, 我们将f 零延拓到$\mathbb{R}^n$ 上, 即分别考虑$\mathbf{1}_{E+h}(x)f(x)$ 和 $\mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(x)f(x), x \in \mathbb{R}^n$.

(a): 由$\mathbf{1}_E(x) = \mathbf{1}_{E+h}(x+h)$ 和全空间积分的平移不变性有

$$\int_E f(x+h)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_E(x)f(x+h)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E+h}(x+h)f(x+h)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E+h}(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{E+h} f(x)\mathrm{d}x.$$

(b): 类似地, 由A 可逆有$\mathbf{1}_E(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(\mathrm{A}x)$. 应用全空间积分的线性变换公式即得

$$\int_E f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_E(x)f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(\mathrm{A}x)f(\mathrm{A}x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{|\det \mathrm{A}|}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\mathrm{A}(E)}(x)f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\det \mathrm{A}|}\int_{\mathrm{A}(E)} f(x)\mathrm{d}x\,. \qquad \square$$

【**例**$(n=1)$】设函数f 在$(0,+\infty)$ 上L-可测. 对于常数$a>0$, 作线性换元$x=\frac{t}{a}, t\in(0,+\infty)$, 则有$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}t$, 并在换元后的积分中将字母$t$ 再换成x, 可得以下结果:

(1) 若$\frac{f(x)}{x}\in L^1((0,+\infty))$, 则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\qquad\forall\, a>0.$$

(2) 若$\frac{f(x)}{x}\in L^1((\varepsilon,+\infty))$ for all $\varepsilon>0$. 则有

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\qquad\forall\, a>0,\forall\,\varepsilon>0.$$

□

【**命题10.29(积分中值定理)**】设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为一连通的可测集且$0<m(E)<+\infty$, 设$f:E\to\mathbb{R}$ 连续且有界. 则存在$\xi\in E$ 使得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)m(E).$$

【证】由假设易见f 在E 上L-可积. 事实上f 在E 上连续蕴含f 在E 上可测; 而由f有界知

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\le\Big(\sup_{x\in E}|f(x)|\Big)m(E)<+\infty.$$

所以f 在E 上L-可积. 令

$$a=\inf_{x\in E}f(x),\quad b=\sup_{x\in E}f(x).$$

则有

$$am(E)\le\int_E f(x)\mathrm{d}x\le bm(E).$$

若这两个不等式中有一个是等式, 例如设

$$am(E)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

则由非负性$f(x)-a\ge 0$ for all $x\in E$ 和

$$\int_E(f(x)-a)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x-am(E)=0$$

知$f(x)-a=0$ a.e. $x\in E$, 即$E(f\neq a)$ 是零测集. 因$m(E)>0$ 故$E(f=a)=E\setminus E(f\neq a)$ 非空. 取$\xi\in E(f=a)$ 即知

$$f(\xi)m(E)=am(E)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

现在设

$$am(E) < \int_E f(x)\mathrm{d}x < bm(E) \quad 即 \quad a < \frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x < b.$$

则由确界的定义, 存在$x_0, y_0 \in E$ 使得

$$f(x_0) < \frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x < f(y_0).$$

因E 连通, 故由连通集上的连续函数介值定理即知存在$\xi \in E$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

【命题10.30(Riemann 积分与Lebesgue 积分的关系)】

(a) 设$[a,b] \subset \mathbb{R}$为有界闭区间. 则$\mathcal{R}([a,b]) \subset L^1([a,b])$, 即若$f$ 在$[a,b]$ 上常义Riemann可积, 则f必在$[a,b]$ 上Lebesgue 可积, 且此时有

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

其中左边表示f的Riemann 积分.

(b) 设$I \subset \mathbb{R}$ 为区间(有界,无界,开,闭,半开半闭), 函数$f: I \to \mathbb{R}$ 在I 上内闭常义Riemann 可积. 则f在I上L-可测, 因此: f在I上广义Riemann 绝对可积$\Longleftrightarrow f \in L^1(I)$. 此时(即当$f$在$I$上广义Riemann 绝对可积或$f \in L^1(I)$) 有

$$(\mathrm{R})\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$$

其中左边表示f的广义Riemann 积分.

【证】(a): 设$f \in \mathcal{R}([a,b])$. 由Riemann 常义可积的Lebesgue 准则知f在$[a,b]$ 上几乎处处连续且有界$M := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| < +\infty$. 前者蕴含$f$在$[a,b]$ 上L-可测, 于是有

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a) < +\infty.$$

因此$f \in L^1([a,b])$. 作$[a,b]$ 的一列分划(例如等距分划) $[a,b] = \bigcup_{k=1}^n I_k^{(n)}$:

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_k^{(n)} = b$$

满足$\max\limits_{1\le k\le n}|I_k^{(n)}|\to 0\ (k\to\infty)$, 其中$I_k^{(n)}=[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}],|I_k^{(n)}|=x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)}$. 令

$$u_f(I_k^{(n)})=\sup_{x\in I_k^{(n)}}f(x),\quad l_f(I_k^{(n)})=\inf_{x\in I_k^{(n)}}f(x)$$

则由$I_1^{(n)},I_2^{(n)},...,I_k^{(n)}$互不重叠、积分的可加性和积分不等式有

$$\sum_{k=1}^n l_f(I_k^{(n)})|I_k^{(n)}|\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_{I_k^{(n)}}f(x)\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^n u_f(I_k^{(n)})|I_k^{(n)}|.$$

而由第六章Riemann 可积性的振幅刻画我们知道

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^n l_f(I_k^{(n)})|I_k^{(n)}|=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^n u_f(I_k^{(n)})|I_k^{(n)}|=(\mathrm{R})\int_I f(x)\mathrm{d}x$$

所以$(\mathrm{R})\int_I f(x)\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x$.

(b): 以开区间$I=(a,b)$为例, 其他情形的证明相同. 设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在(a,b)上内闭常义Riemann 可积. 取单调数列$a<a_k<b_k<b$ 满足$a_k\searrow a, b_k\nearrow b\,(k\to\infty)$. 则有$(a,b)=\bigcup_{k=1}^\infty[a_k,b_k]$. 因$f$在每个$[a_k,b_k]$上常义Riemann 可积, 故$f$在每个$[a_k,b_k]$上$L$-可测. 因此由可测函数性质知$f$在$(a,b)$ 上L-可测。分别由非负可测函数的Lebesgue积分的扩张性质和非负函数的广义Riemann积分的定义和性质可知

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{a_k}^{b_k}|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}(\mathrm{R})\int_{a_k}^{b_k}|f(x)|\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{a_k}^{b_k}f^+(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}(\mathrm{R})\int_{a_k}^{b_k}f^+(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{a_k}^{b_k}f^-(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}(\mathrm{R})\int_{a_k}^{b_k}f^-(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x.$$

其中$f^\pm(x)=\frac{|f(x)|\pm f(x)}{2}$ 为f的正、负部. 由此可知

$f\in L^1((a,b))$ 即$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$, 当且仅当$(\mathrm{R})\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$即$f$在$(a,b)$上广义Riemann 绝对可积.

现在设f在(a,b)上广义Riemann 绝对可积 [即等价地, 设$f\in L^1((a,b))$]. 则由$0\le f^\pm\le|f|$ 知$f^\pm$都在(a,b)上广义Riemann 绝对可积 [即等价地, $f^\pm\in L^1((a,b))$]. 于是$f=f^+-f^-$在(a,b)上广义Riemann 可积且由广义积分的运算法则和Lebesgue 积分的线性性有

$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=(\mathrm{R})\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x-(\mathrm{R})\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\qquad\square\end{aligned}$$

类似于一元Riemann 广义积分, 利用边上限积分的收敛性, 可以建立Lebesgue积分的条件收敛。这样一来, Rimeann 积分在数值上就等于Lebesgue 积分, 因此关于Riemann 积分的所有基本性质和计算公式对Lebesgue 积分都成立。但是相比于Riemann积分, 很多积分性质和公式可以在更弱的条件下成立。下面我们以Newton-Leibnitz 公式(即**微积分基本定理**)为例来说明条件可以怎样减弱。在后两节我们还将给出Lebesgue积分的换元公式, 其条件也比Riemann 积分弱得多因而适用范围大得多。

【定理10.31(Newton-Leibniz公式)】

(a) 设函数f在有界闭区间$[a,b]$上连续, 在开区间(a,b) 内可导且导函数f' 在(a,b)上L-可积. 则成立Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b)-f(a).$$

(b) 设f 在无界区间$[a,+\infty)$ 上连续、在开区间$(a,+\infty)$ 内处处可导且导函数f' 在$(a,+\infty)$ 上L-可积. 则极限$f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在有限且成立Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{x=a}^{x=+\infty} = f(+\infty)-f(a)\,.$$

设f 在无界区间$(-\infty,b]$ 上连续、在开区间$(-\infty,b)$ 内处处可导且导函数f' 在$(-\infty,b)$ 上L-可积. 则极限$f(-\infty):=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在有限且成立Newton-Leibniz公式:

$$\int_{-\infty}^{b} f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=b} = f(b)-f(-\infty)\,.$$

(c) 设f在$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$上处处可导且导函数$f'$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上L-可积. 则极限$f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $f(-\infty):=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在有限且成立Newton-Leibniz公式:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = f(+\infty)-f(-\infty)\,.$$

【证】(a): 完整的证明将在实分析课程中给出, 或见W. Rudin *Real and Complex Analysis*中的定理8.21. 下面我们将在补充假设— **并且导函数f'在(a,b) 上内闭有界** — 之下证明Newton-Leibniz公式. 比之Riemann积分体系中的Newton-Leibniz公式, 这样的假设还是很宽松的.

根据复值函数积分和微分的定义, 只需证明f的实部、虚部都满足Newton-Leibniz公式. 因此不失一般性, 可以假定f 是实值的.

先设$f'(x)$ 在整个开区间(a,b)上有界:

$$M=\sup_{x\in(a,b)}|f'(x)|<+\infty.$$

为构造合适的逼近序列, 我们将f连续地延拓到$[a,b+1]$ 上: 当$x\ge b$ 时, 定义$f(x)=f(b)$. 考虑差商

$$f_k(x)=\frac{f(x+1/k)-f(x)}{1/k},\quad x\in[a,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

易见$f_k(x)$在$[a,b]$ 上连续且由导数的定义有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f'(x)\qquad\forall\,x\in[a,b).\tag{3.1}$$

[注意: 我们没有考虑$x=b$这点的极限, 这主要是因为单点集对积分无贡献!]

来计算$\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$. 由积分的平移变换和积分中值定理(见**定理10.28(平移和线性变换下的积分换元公式)的推论** 和**定理10.29(积分中值定理)**) 有

$$\begin{aligned}&\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b\Big(f(x+1/k)-f(x)\Big)\mathrm{d}x=k\int_b^{b+1/k}f(x)\mathrm{d}x-k\int_a^{a+1/k}f(x)\mathrm{d}x\\&=f(b_k)-f(a_k)\qquad\text{for some }\ a_k\in(a,a+1/k),\,b_k\in(b,b+1/k).\end{aligned}$$

令$k\to\infty$ 并注意f 连续即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}f(b_k)-\lim_{k\to\infty}f(a_k)=f(b)-f(a).\tag{3.2}$$

再寻求f_k的一致控制: 由Lagrange 中值定理有

$$|f_k(x)|\le M\qquad\forall\,x\in[a,b),\ \forall\,k\in\mathbb{N}.\tag{3.3}$$

事实上对任意$x\in[a,b)$ 和任意$k\in\mathbb{N}$, 若$x+1/k\le b$, 则存在$\xi\in(x,x+1/k)$ 使得

$$|f_k(x)|=|f'(\xi)|\le M.$$

若$x+1/k>b$, 则$x<b<x+1/k$, 从而由f的延拓方式和中值定理有

$$|f_k(x)|=\frac{|f(b)-f(x)|}{1/k}\le\frac{|f(b)-f(x)|}{b-x}\le M.$$

所以(3.3) 成立.　因$m([a,b])=b-a<+\infty, L<+\infty$, 故由(3.1), (3.3) 和**定理10.15 Lebesgue有界收敛** 知

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$$

联合(3.2) 即证得Newton-Leibniz公式.

其次设$f'(x)$ 在(a,b)上内闭有界. 取单调数列$a<a_k<b_k<b$ 满足$a_k\searrow a, b_k\nearrow b\,(k\to\infty)$. 则对每个$[a_k,b_k]$, 因$f'(x)$ 在$[a_k,b_k]$ 有界, 故由刚才证明的结果有

$$\int_{a_k}^{b_k} f'(x)\mathrm{d}x=f(b_k)-f(a_k),\quad k=1,2,3,\dots.$$

最后由导函数$f'(x)$在(a,b) 上L-可积, 积分的扩张性质和f的连续性即得

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{a_k}^{b_k} f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\Big(f(b_k)-f(a_k)\Big)=f(b)-f(a).$$

(b): 只需证第一个, 第二个证法相同. 在$(a,+\infty)$ 内任取单调增加趋于$+\infty$的点列：$x_k\nearrow+\infty$. 则有

$$[a,x_1]\subset[a,x_2]\subset[a,x_3]\subset\cdots;\qquad [a,+\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}[a,x_k].$$

因此由$f'\in L^1([a,+\infty))$ 和**定理10.19(积分的扩张)**有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^{x_k} f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{[a,x_k]} f'(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,+\infty)} f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x.$$

应用(a)(有界区间上的Newton-Leibniz公式)便得到

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=f(a)+\lim_{k\to\infty}\int_a^{x_k} f'(x)\mathrm{d}x=f(a)+\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x\,.$$

再由$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的任意性和极限的序列刻画知极限$f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在有限且所证公式成立.

(c): 将结果(b)应用于$[0,+\infty),(-\infty,0]$ 可知极限$f(\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x), f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在有限, 且

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x=f(+\infty)-f(0),\quad \int_{-\infty}^0 f'(x)\mathrm{d}x=f(0)-f(-\infty).$$

于是由积分的可加性即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0 f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x=f(+\infty)-f(-\infty).\qquad\square$$

【**例**】设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 且$\alpha>0$.则有

$$\int_0^{+\infty}e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\mathrm{d}x=\frac{e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}}{-\alpha+\mathrm{i}\beta}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{-1}{-\alpha+\mathrm{i}\beta}=\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

从而有

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$
$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

【证】函数$x\mapsto\frac{e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}}{-\alpha+\mathrm{i}\beta}$的导函数为$e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$. 因$|e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}|=e^{-\alpha x}$且$\alpha>0$, 故$e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$在$[0,+\infty)$ 上Lebesgue 可积. 据**定理10.31(Newton-Leibniz公式)** 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=0$ 即得上述等式. □

下面定理说明若导函数f'不变号, 即f单调, 则Newton-Leibniz公式成立:

【**定理10.32**】**(a)** 设函数f在有界闭区间$[a,b]$ 上连续、单调, 在开区间(a,b) 内处处可导. 则成立Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

(b) 一般地, 设$-\infty\le a<b\le+\infty$, 函数f在开区间(a,b)内单调且处处可导. 则成立Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{x=a+}^{x=b-}=f(b-)-f(a+).$$

【证】(a): 不妨设f 单调不减, 即$f'(x)\ge0$ for all $x\in(a,b)$. 根据**定理10.31(Newton-Leibniz公式)**, 只需证明f'在(a,b) 上L-可积.

如上, 做延拓: 当$x\ge b$时定义$f(x)=f(b)$. 令$f_k(x)=k(f(x+1/k)-f(x))$. 则由f单调不减知$f_k(x)\ge0$ for all $x\in[a,b],n\in\mathbb{N}$. 于是由$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f'(x)\ \forall x\in[a,b)$ 和**Fatou引理** 以及(3.2) 得到

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\le\liminf_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)<+\infty.$$

证这证明了非负函数f'在(a,b) 上L-可积.

(b): 不妨设f单调不减, 即$f'(x)\ge0\ \forall x\in(a,b)$. 取单调数列$a<a_k<b_k<b,a_k\searrow a,\ b_k\nearrow b\ (k\to\infty)$. 则有$[a_1,b_1]\subset[a_2,b_2]\subset[a_3,b_3]\subset\cdots;(a,b)=\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$. 应用非负可测函数的积分扩张定理和上述(a) 即得

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\int_{(a,b)}f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{[a_k,b_k]}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty}(f(b_k) - f(a_k)) = f(b-) - f(a+). \qquad \square$$

【例】 设$\alpha > 0$. 则函数$f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$在$[0,1]$上连续, 单调, 在开区间$(0,1)$内处处可导. 据上述命题知$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(0)$, 即

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \frac{x^\alpha}{\alpha}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha}.$$

下面学习积分计算和推导中的重要公式: **分部积分公式**。另一个重要公式— **积分换元公式** —将在**§10.5** 中给出.

【定理10.33(分部积分公式)】

(a) 设函数f, g在有界闭区间$[a,b]$上连续, 在开区间(a,b) 内可导且导函数f', g'在(a,b)上L-可积. 则成立分部积分公式:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

(b) 设函数f, g在无界闭区间$[a,+\infty)$上连续, 在开区间$(a,+\infty)$ 内可导且$f'g, fg'$都在$(a,+\infty)$上L-可积. 则极限$(fg)(+\infty) := \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ 存在有限且成立分部积分公式:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

(c) 同样可建立$(-\infty, a]$ 和$(-\infty,+\infty)$ 上的分部积分公式.

【证】(a): 由假设和$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 可知$f(x)g(x)$ 满足**定理10.31(Newton-Leibniz公式)**中的条件, 因此有

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (f(x)g(x))'\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\Big)\mathrm{d}x.$$

又因f, g 连续故f, g 在$[a,b]$ 上有界：$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|, \max_{x\in[a,b]}|g(x)| \le C < +\infty$. 于是有$|f(x)g'(x)| \le C|g'(x)|, |f'(x)g(x)| \le C|f'(x)|$ for all $x \in [a,b]$. 所以$f(x)g'(x), f'(x)g(x)$都在$[a,b]$ 上L-可积. 因此

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x))\mathrm{d}x.$$

移项即得分部积分公式.

(b): 由假设和**定理10.31(微积分基本定理:Newton-Leibniz公式)** 和$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 以及积分扩张定理知极限

$$\begin{aligned}(fg)(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) &= \lim_{x\to+\infty}\Big(f(a)g(a) + \int_a^x (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\mathrm{d}t\Big) \\ &= f(a)g(a) + \int_a^{+\infty}(f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\mathrm{d}t \\ &= f(a)g(a) + \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

存在有限. 移项即得分部积分公式.

(c) 的证明留作练习. $\square$

【例】Gamma 函数$s \mapsto \Gamma(s)$ 是由积分定义的函数:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x, \quad s > 0.$$

来证明

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall\, s > 0. \qquad \text{特别有} \quad \Gamma(n+1) = n! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

首先易见函数$f(x) = \frac{x^s}{s}, g(x) = e^{-x}$在$[0, +\infty)$ 上连续, 在$(0, +\infty)$ 内可微且$f'(x)g(x) = x^{s-1}e^{-x}, f(x)g'(x) = -\frac{x^s}{s}e^{-x}$都在$(0, +\infty)$ 上L-可积. 事实上由$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{s-1}e^{-x/2} = 0$ 知存在$0 < M_s < +\infty$ 使得$x^{s-1}e^{-x/2} < 1$ for all $x \ge M_s$.由此有

$$x^{s-1}e^{-x} \le e^{-x/2} \qquad \forall\, x \ge M_s.$$

从而有

$$\int_{M_s}^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \le \int_{M_s}^{+\infty} e^{-x/2}\mathrm{d}x = 2e^{-M_s/2} < +\infty.$$

又显然有

$$\int_0^{M_s} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \le \int_0^{M_s} x^{s-1}\mathrm{d}x = \frac{(M_s)^s}{s} < +\infty \quad (s > 0)$$

所以$\Gamma(s) < +\infty$ for all $s > 0$.

因此应用上面的**定理10.33 分部积分公式(b)** 得到

$$\Gamma(s) = \frac{x^s}{s}e^{-x}\Big|_{x=0}^{+\infty} - \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s(-1)e^{-x}\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\Gamma(s+1).$$

所以得到关系式$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall\, s > 0.$ $\square$

本节最后我们再学习Lebesgue 控制收敛(LDC) 的一个重要应用—— 含参变量积分的连续性和积分号下求微商定理.

【**定理10.34 (含参变量积分的连续性和积分号下求微商)**】设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为L-可测集, $I\subset\mathbb{R}$ 为开区间, 函数$f:E\times I\to\mathbb{C}$.

(a) 假设对每个$t\in I$, 函数$x\mapsto f(x,t)$ 在E上L-可积; 对每个$x\in E$, 函数函数$t\mapsto f(x,t)$ 在I上连续且存在$0\le F\in L^1(E)$ 使得

$$|f(x,t)|\le F(x)\qquad\forall\,(x,t)\in E\times I.$$

则函数$t\mapsto\int_E f(x,t)\mathrm{d}x$ 在I 上连续.

(b) 假设对每个$t\in I$, 函数$x\mapsto f(x,t)$ 在E上L-可积; 对每个$x\in E$, 函数$t\mapsto f(x,t)$ 在I上可微且存在$0\le G\in L^1(E)$ 使得

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big|\le G(x)\qquad\forall\,(x,t)\in E\times I.$$

则函数$t\mapsto\int_E f(x,t)\mathrm{d}x$ 在I 上可微, 且对每个$t\in I$, 函数$x\mapsto\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$在$E$上$L$-可积, 并有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x,\quad t\in I.$$

【证】(a),(b)的证明都是连续参变量LDC的直接应用, 故只需证略微复杂的(b). 任取$t_0\in I$. 因I是开区间, 故存在$\delta>0$ 使得$[t_0-\delta,t_0+\delta]\subset I$. 则对任意$0<h|<\delta$, 由积分的线性性有

$$\frac{1}{h}\Big(\int_E f(x,t_0+h)\mathrm{d}x-\int_E f(x,t_0)\mathrm{d}x\Big)=\int_E\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\mathrm{d}x.$$

又由假设和微分中值不等式[1]有

$$\Big|\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\Big|\le\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)\Big|\le G(x)\qquad\forall\,x\in E,\quad\forall\,0<|h|<\delta.$$

其中ξ 介于t_0,t_0+h 之间因而属于$[t_0-\delta,t_0+\delta]\subset I$. 又有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\qquad\forall\,x\in E.$$

对函数族$f_h(x):=\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h},x\in E,h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$, 应用**定理10.16 连续参变量的LDC** 即得

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big(\int_E f(x,t_0+h)\mathrm{d}x-\int_E f(x,t_0)\mathrm{d}x\Big)=\lim_{h\to0}\int_E\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h}\mathrm{d}x$$
$$=\int_E\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}x$$

[1]当f为实值函数时, 是微分中值定理; 当f为复值函数时, 即等价地, 当f为向量值函数时, 是微分中值不等式.

再由导数的定义即知函数$t\mapsto \int_E f(x,t)\mathrm{d}x$ 在t_0 可导, $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ 在E上可积且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x\Big|_{t=t_0}=\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}x.$$

最后由$t_0\in I$的任意性, 定理得证. $\square$

作业题

1. 设函数f 在$\mathbb{R}$上有界、L-可测且在$x=0$ 连续. 证明

$$\lim_{h\to 0+}\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x^2+h^2}\mathrm{d}x=f(0).$$

[用换元公式和连续参变量的LDC.]

2. 设函数f 在$(0,+\infty)$ 上L-可测, $a>0,b>0$. 证明

(1)

$$\text{若}\quad \int_0^{+\infty}\frac{|f(x)|}{x}\mathrm{d}x<+\infty\,,\qquad \text{则}\quad \int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=0.$$

(2) 若

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{|f(x)|}{x}\mathrm{d}x<+\infty\quad \forall\,\varepsilon>0;\qquad \int_0^{+\infty}\frac{|f(ax)-f(bx)|}{x}\mathrm{d}x<+\infty$$

且极限$f(0):=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ 存在有限, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\log(\frac{b}{a}).$$

(3) 证明函数$f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ 满足(2)中条件 (从而有$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a\sqrt{x}}-e^{-b\sqrt{x}}}{x}\mathrm{d}x=\log(b/a)$), 但不满足(1)中条件.

3. 设函数f,g在$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$上处处可导且$f'g,fg'$都在$(-\infty,+\infty)$上$L$-可积. 则极限$(fg)(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x),(fg)(-\infty):=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)g(x)$都存在有限且成立分部积分公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

4. 设$f\in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 且为奇函数. 求积分

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}f(x+y,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=?$$

这里$x,y\in\mathbb{R}^n$.

5. 复习第六章, 然后对本节讲的Lebesgue 测度, 叙述并证明关于非负可测函数列的Fatou 引理、关于非负可测函数列的Levi 单调收敛定理和关于一般可测函数列的Lebesgue 控制收敛定理.

6. 令

$$f_k(x) = \mathbf{1}_{B(0,k)^c}(x) = \mathbf{1}_{\{|x|\ge k\}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

证明

$$f_1(x) \ge f_2(x) \ge f_3(x) \ge \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

但

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x = +\infty > 0 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.$$

本题说明**§10.2**的作业题3 中的条件“$f_1 \in L^1(E,\mu)$”一般不能去掉.

7. 五个逐项积分的题, 测度为Lebesgue 测度, 计算时要用到Newton-Leibinitz 公式。

8. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为Lebesgue 可测集, $f : E \to \mathbb{R}$为任一函数. 令$\omega_f(x)$ 是f在E上的点振幅函数, 即

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \omega(f; E \cap B(x,\delta)) = \inf_{\delta>0} \omega(f; E \cap B(x,\delta)), \quad x \in E$$

其中

$$\omega(f; A) = \sup_{x,y\in A} |f(x) - f(y)|, \quad A \subset E.$$

(1) 证明$x \mapsto \omega_f(x)$ 是E上的Lebesgue 可测函数.

提示: 参见本章后面**§10.6**中的**命题10.49(点振幅的Lebesgue积分)**的证明, 并注意

$$\omega_f(x) = \lim_{k\to\infty} \omega(f; E \cap B(x, 1/k)), \quad x \in E$$

以及可测函数列的极限函数仍是可测函数, 等等.

(2) 令$C_E(f), D_E(f)$分别为f 在E上的连续点的全体和间断点的全体, 即$C_E(f) = \{x \in E \,|\, \omega_f(x) = 0\}$, $D_E(f) = \{x \in E \,|\, \omega_f(x) > 0\}$. 证明$C_E(f), D_E(f)$都是可测集.

(3) 证明

$$\int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x \le \lim_{k\to\infty} \int_E \omega(f; E \cap B(x, 1/k))\mathrm{d}x.$$

(4) 进一步假设$\mu(E) < +\infty$ 且f 在E上有界. 证明

$$\int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E \omega(f; E \cap B(x, 1/k))\mathrm{d}x.$$

§10.4. 重积分和累次积分, Fubini 定理

为了利用一元函数的Newton-Leibniz 公式计算多元函数的积分, 需要把二维区域上的积分(称为重积分) 化为两个一维区间上的累次积分, 把三维区域上的积分(重积分) 化为一个二维区域上和一个一维区间上的累次积分, 等等.

理论上必须保证累次积分的计算结果与累积次序的选择无关. 本节的主要定理是：只要被积函数整体可积或非负可测, 重积分就与累次积分的次序无关.

理解重积分与累积次序无关的一个简单例子是长方形面积的计算. 设$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. I 的面积计算方式(至少)有两种可选择：

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = \int_{a_1}^{b_1} \Big(\int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x,$$

$$|I| = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) = \int_{a_2}^{b_2} \Big(\int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y\,.$$

它说明先计算底后计算高与先计算高后计算底, 结果是一样的: 底× 高= 高× 底= 面积. 而这里“先、后” 即是累积: 两步中的每一步都只涉及一维计算(降维). 同理可解释三维长方体的计算过程.

在重积分的计算和估值方面, 由于被积函数千差万别, 不同的累次积分顺序可能带来不同的难度. 例如为计算函数$(x, y) \mapsto e^{-x^2}$ 在锥形区域$0 \le y \le x < +\infty$ 上的积分, 我们有两种顺序：“先积x 后积y”与“先积y 后积x”, 即

$$I := \iint_{0 \le y \le x} e^{-x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-x^2} \left(\int_0^x \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

如按第一种顺序计算, 则遭遇超越函数的积分$\int_y^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$, 它不是$y$的初等函数(即俗称的“积不出来”). 而若按第二种顺序, 则有

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} x \mathrm{d}x = -\frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2}.$$

从类似的例子中我们还将看到, 重积分的某些重要性质只有在合适的累次积分顺序上才能展现出来. 因此选择合适的累次积分顺序序是重积分计算与应用的要点之一.

需要说明: 在陈天权讲义中或在实分析和研究生课程中, 乘积空间上的重积分是用乘积测度来定义的，即先讲测度的乘积, 然后证明重积分化累次积分(Fubini定理)。我们这里是传统讲法，即先有了高维积分，然后把它分解成两个低维积分(累次积分)的合成, 因此与“乘积测度”的做法在顺序上是相反的。我们认为传统做法的一个重

要优点是它突出了被积函数整体可测的重要性, 因为只有偏可测性未必有整体可测性, 但整体可测必定蕴含部分可测或偏可测。这个性质在理论和应用上都是极为重要的。

为建立重积分与累次积分的关系式, 我们从特征函数的重积分和累次积分开始。

记号: 对于正整数n, 令$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 为$\mathbb{R}^n$ 中的Lebesgue 可测集类, $m_n(\cdot)$ 为$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 测度. 注意若$p, q \in \mathbb{N}$, 则$\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

【集合的截口】对任一集合$E \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, 定义截口$E_x$, E^y 如下:

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^q \,|\, (x,y) \in E\},\ \ x \in \mathbb{R}^p\,; \qquad E^y = \{x \in \mathbb{R}^p \,|\, (x,y) \in E\},\ \ y \in \mathbb{R}^q\,.$$

易见

$$\mathbf{1}_E(x,y) = \mathbf{1}_{E_x}(y) = \mathbf{1}_{E^y}(x) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q\,.$$

给定$x \in \mathbb{R}^p$, 我们考察函数$y \mapsto \mathbf{1}_{E_x}(y)$ 在$\mathbb{R}^q$ 上是否可测, 也即是否$E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$. 如果$E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 则有

$$m_q(E_x) = \int_{\mathbb{R}^q} \mathbf{1}_{E_x}(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^q} \mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

进一步, 如果对每个$x \in \mathbb{R}^p$, 都有$E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 则可以进一步考察函数

$$x \mapsto m_q(E_x) = \int_{\mathbb{R}^q} \mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y$$

的可测性以及当可测时其积分的计算问题. 对于截口E^y, 上述问题和过程是一样的.

下面的命题表明, 假如$E \subset \mathbb{R}^{p+q}$是$p+q$ 维L-可测集, 即$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$, 则上述问题的回答都“几乎”是肯定的.

【命题10.35】设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$. 则$E$具有下列性质:

(i) 对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$ 都有$E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$,

对几乎所有$y \in \mathbb{R}^q$ 都有$E^y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$.

(ii) $x \mapsto m_q(E_x) = \int_{\mathbb{R}^q} \mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y$是$\mathbb{R}^p$ 上的可测函数,

$y \mapsto m_p(E^y) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}x$是$\mathbb{R}^q$ 上的可测函数.

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^q} m_p(E^y)\mathrm{d}y = m_{p+q}(E)$$

也即

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

【证】由于两个截口E_x, E^y地位相同, 故只需证明(例如)关于E_x的上述性质. 令$(\mathrm{i})_x, (\mathrm{ii})_x, (\mathrm{iii})_x$ 表示(i),(ii),(iii)中关于截口E_x的性质. 令

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})=\{E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})\mid E \text{ 具有性质 } (\mathrm{i})_x,(\mathrm{ii})_x,(\mathrm{iii})_x\}.$$

则我们要证明$\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})=\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

为此我们将依次证明: 区间、开集、可数个开集的交都属于$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$ (且此时(i)中的“几乎所有”实为“所有”), 零测集属于$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$, 最后, 任一可测集属于$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

首先由截口的定义容易验证：对任意集合$E_k, A, B, \subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 和任意$x\in\mathbb{R}^p$ 有

$$\begin{aligned}&(\bigcup_{k\ge1}E_k)_x=\bigcup_{k\ge1}(E_k)_x, &&(\bigcap_{k\ge1}E_k)_x=\bigcap_{k\ge1}(E_k)_x\,,\\&(A\setminus B)_x=A_x\setminus B_x, &&A\subset B\Longrightarrow A_x\subset B_x\,.\end{aligned}$$

此外, 空集的截口是空集.

设$Q=I\times J$ 是$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\mathbb{R}^{p+q}$ 中的区间. 则

$$Q_x=\begin{cases}J & \text{if}\quad x\in I\\ \emptyset & \text{if}\quad x\notin I\end{cases}$$

所以$Q_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ for all $x\in\mathbb{R}^p$. 同时由

$$m_q(Q_x)=\begin{cases}m_q(J) & \text{if}\quad x\in I\\ 0 & \text{if}\quad x\notin I\end{cases}$$

可知$x\mapsto m_q(Q_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测且

$$\int_{\mathbb{R}^p}m_q(Q_x)\mathrm{d}x=\int_I m_q(J)\mathrm{d}x=m_p(I)m_q(J)=|I||J|=|Q|=m_{p+q}(Q)\,.$$

所以$Q\in\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

设$\Omega\subset\mathbb{R}^{p+q}$ 是开集. 由开集分解定理有$\Omega=\bigcup_{k=1}^\infty Q_k$ 其中Q_k 是互不相交的(左闭右开的) 区间. 由

$$\Omega_x=\bigcup_{k=1}^\infty(Q_k)_x\,,\quad x\in\mathbb{R}^p\,.$$

知$\Omega_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ for all $x \in \mathbb{R}^p$. 同时由Q_k 互不相交知截口$(Q_k)_x$ 也互不相交. 于是由可加性得

$$m_q(\Omega_x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_q((Q_k)_x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^p\,.$$

因每个函数$x \mapsto m_q((Q_k)_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测, 故$x \mapsto m_q(\Omega_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 对$m_q(\Omega_x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_q((Q_k)_x)$ 逐项积分得到

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(\Omega_x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^p} m_q((Q_k)_x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} m_{p+q}(Q_k) = m_{p+q}(\Omega)\,.$$

所以$\Omega \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

设$H = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$ 其中$\Omega_k \subset \mathbb{R}^{p+q}$ 是开集且$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \dots$. 由$\Omega_k \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$ 有: $H_x = \bigcap_{k=1}^{\infty}(\Omega_k)_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ for all $x \in \mathbb{R}^p$, 且$(\Omega_1)_x \supset (\Omega_2)_x \supset (\Omega_3)_x \supset \dots$.

现假设Ω_1 有界. 则截口$(\Omega_1)_x$ 也有界. 因此由测度的单调收敛定理$\Longrightarrow$

$$m_q(H_x) = \lim_{k\to\infty} m_q((\Omega_k)_x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p\,.$$

因可测函数的极限函数还是可测函数, 故函数$x \mapsto m_q(H_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 注意Ω_1 有界$\Longrightarrow$ 函数$x \mapsto m_q((\Omega_1)_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上L-可积:

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q((\Omega_1)_x)\mathrm{d}x = m_{p+q}(\Omega_1) < +\infty\,.$$

因$m_q((\Omega_k)_x) \le m_q((\Omega_1)_x)$ 故由LDC 和测度的单调收敛定理得

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p} m_q((\Omega_k)_x) = \lim_{k\to\infty} m_{p+q}(\Omega_k) = m_{p+q}(H)\,.$$

如果Ω_1 无界, 则考虑截断逼近: 令

$$H_n = H \cap (-n,n)^{p+q} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_{k,n}, \quad \Omega_{k,n} = \Omega_k \cap (-n,n)^{p+q}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

此时对每个$n \in \mathbb{N}$ 和$x \in \mathbb{R}^p$ 都有$(H_n)_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$. 易见

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots\,, \quad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

从而有

$$(H_1)_x \subset (H_2)_x \subset (H_3)_x \subset \cdots\,, \quad H_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(H_n)_x\,.$$

因此对每个$x \in \mathbb{R}^p$ 都有$H_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(H_n)_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$; 同时由测度的单调收敛定理知$m_q(H_x) = \lim\limits_{n\to\infty} m_q((H_n)_x)$. 因可测函数的极限函数还是可测函数, 故这表明$x \mapsto m_q(H_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 于是由Levi 单调收敛定理和测度的单调收敛定理得到

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p} m_q((H_n)_x) = \lim_{n\to\infty} m_{p+q}(H_n) = m_{p+q}(H)\,.$$

所以$H \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

设$E \subset \mathbb{R}^{p+q}$为零测集. 由Lebesgue 可测集的结构知, 存在一列递减的开集$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \cdots$ 使得$E \subset H := \bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$ 且$m_{p+q}(H) = 0$. 上面已证明了$H \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$. 因此

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x)\mathrm{d}x = m_{p+q}(H) = 0\,.$$

由此可知$m_q(H_x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^p$. 但$E_x \subset H_x$, 故$m_q(E_x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^p$. 意即对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$, E_x 是$\mathbb{R}^q$ 中的零测集. 因此对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$, $E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$. 显然函数$x \mapsto m_q(E_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测(几乎处处$= 0$). 所以$E \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$.

最后设$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$为一般集合. 由Lebesgue 可测集的结构知, 存在一列递减的开集$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \cdots$ 和一个零测集Z 使得$E = H \setminus Z$, 其中$H := \bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$. 上面已证明了$H, Z \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$. 因此由$E_x = H_x \setminus Z_x$ 知对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$ 有$H_x, Z_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ 且$m_q(Z_x) = 0$. 所以对几乎所有$x \in \mathbb{R}^p$ 有$E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ 且$m_q(E_x) = m_q(H_x)$. 因此函数$x \mapsto m_q(E_x)$ 在$\mathbb{R}^p$ 上可测. 再借助$H \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$ 得到

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(H_x)\mathrm{d}x = m_{p+q}(H) = m_{p+q}(E)\,.$$

所以$E \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^{p+q})$. 命题至此证毕. $\square$

【定理10.36(Fubini 定理)】设$p, q \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p), Y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 并设$f(x,y)$ 是$(x,y) \in X \times Y$ 的广义实值函数或复值函数. 若f 在$X \times Y$ 上L-非负可测或者$f \in L^1(X \times Y)$, 则有

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,. \tag{4.1}$$

这里关于f分别对x和y的可测性以及内层积分$x \mapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\,, y \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}x$的可测性有如下详细结果:

(I) 若f 在$X \times Y$ 上非负可测, 则

(I.1) 对于几乎所有$x \in X$, 函数$y \mapsto f(x,y)$ 在Y 上非负可测;

对于几乎所有$y\in Y$, 函数$x\mapsto f(x,y)$ 在X 上可测.

(I.2) 两个内层积分

$$x\mapsto\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\,,\quad y\mapsto\int_X f(x,y)\mathrm{d}x$$

分别在X 上和Y 上非负可测.

(II) 若$f\in L^1(X\times Y)$, 则

(II.1) 对于几乎所有$x\in X$, 函数$y\mapsto f(x,y)$ 在Y 上L-可积;

对于几乎所有$y\in Y$, 函数$x\mapsto f(x,y)$ 在X 上L-可积.

(II.2) 两个内层积分

$$x\mapsto\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\,,\quad y\mapsto\int_X f(x,y)\mathrm{d}x$$

分别在X 和Y 上L-可积.

【注】

1. 由第九章**命题9.19(乘积集合的可测性)**和$X\times Y\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\mathbb{R}^{p+q}$ 知$X\times Y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$, 即$X\times Y$ 是$\mathbb{R}^{p+q}$中的Lebesgue 可测集.

2. 双重积分符号$\iint_{X\times Y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint_{X_1\times X_2}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ 等等, 只是习惯写法, 它们本身还是多元整体积分, 而不是累次积分(虽然有提示累次积分的作用). 因此可以把它们还原成以前的写法, 例如

$$\iint_{X_1\times X_2}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_{X_1\times X_2}f(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q,\qquad \mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\text{ 为}p+q\text{维的}L\text{- 测度元.}$$

3. Fubini 定理不光是处理累次积分的, 它还给出了多元可测函数的"偏" 可测性！这种偏可测性不仅保证了累次积分有意义, 而且有其它用途.

4. 累次积分的另一常用写法为

$$\int_X\mathrm{d}x\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y:=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,\tag{4.2}$$

$$\int_X\mathrm{d}y\int_Y f(x,y)\mathrm{d}x:=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\tag{4.3}$$

这个写法的优点是既保持了累次结构和顺序又不用加括号, 因此适于多层累次积分的表示. 以上两种写法经常同时使用. 初学时建议先使用加括号的形式以确保层次清楚, 待熟悉之后再使用不加括号的形式.

5. 当被积函数$f \ge 0$ 时, Fubini 定理也称为Tonelli 定理. 所以有些教科书将非负可测函数的Fubini 定理称为Fubini-Tonelli 定理.

6. 对于$X \times Y$ 上的非负可测函数$f(x, y)$, 根据Fubini 定理, 内层积分$F_f(x) := \int_Y f(x, y)\mathrm{d}y$ 对所有$x \in X \setminus Z$ 存在, 其中Z 是一个零测集. 如果我们在Z 上对F_f 补充定义, 例如当Z 中的每一点都是$X \setminus Z$ 的极限点时定义

$$F_f(x) := \liminf_{X\setminus Z \ni \tilde{x} \to x} F_f(\tilde{x}), \quad x \in Z .$$

或对一般情形干脆定义

$$F_f(x) := 0, \quad x \in Z .$$

则F_f 在X 上处处有定义. 结论(I.2) 的精确说法是: 补充定义后的函数F_f 在X 上非负可测. 因零测集对积分没有贡献, 故

$$\int_X F_f(x)\mathrm{d}x = \int_{X\setminus Z} \left(\int_Y f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x .$$

同样由于Z 是零测集, 我们可以将F_f 在$x \in Z$ 处的值**形式上**仍记为$\int_Y f(x, y)\mathrm{d}y$, 从而有

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{X\setminus Z} \left(\int_Y f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x .$$

对于$f \in L^1(X \times Y)$ 的情形, 因f 的正部f^+, 负部f^- 都是$X \times Y$ 上的非负可测函数, 所以上述修正过程可用于$\int_Y f^+(x, y)\mathrm{d}y$ 和$\int_Y f^-(x, y)\mathrm{d}y$.

实际上, 根据可测函数的性质我们知道, 可测函数可以在一个零测集上没有定义, 这是因为在零测集上无论怎样补充定义或任意修改其值, 都不影响可测性. 因此, 由于零测集对积分无贡献, 无论是否做上述修正都不影响Fubini定理的结论.

【Fubini 定理的证明】如果将$f(x, y)$零延拓到$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上, 也即以

$$\widetilde{f}(x, y) = \mathbf{1}_{X\times Y}(x, y) f(x, y) = \mathbf{1}_X(x)\mathbf{1}_Y(y) f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

代替$f(x, y)$, 则我们可以不失一般性地假定$X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q$.

由于Fubini 定理中两个累次积分和相应的可测性地位对称, 我们只需就其中一种累次积分和相关的可测性进行证明即可.

(I) 非负可测的情形. 设$f(x,y)$ 在$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上非负可测. 由非负可测函数的级数表示, 在一列常数$0<c_k<+\infty$和可测集$E_k\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 使得

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\,.$$

对每个E_k, 由**命题10.35**, 存在零测集$Z_k\subset\mathbb{R}^p$ 使得对每个$x\in\mathbb{R}^p\setminus Z_k$, 截口$(E_k)_x\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 且函数

$$x\mapsto F_k(x):=m_q((E_k)_x)=\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}y$$

在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测. 此外还有

$$\int_{\mathbb{R}^p}F_k(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x=\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

令$Z=\bigcup_{k=1}^{\infty}Z_k$, 则$Z$ 是$\mathbb{R}^p$ 中的零测集且$\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus Z$, 所有函数$y\mapsto\mathbf{1}_{E_k}(x,y)$ 都在$\mathbb{R}^q$ 上非负可测. 因此由非负可测的函数级数是可测函数知$\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus Z$, 函数

$$y\mapsto f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathbf{1}_{E_k}(x,y)$$

在$\mathbb{R}^q$ 上非负可测. 应用非负可测函数的逐项积分有

$$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(x)\,,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^p\setminus Z\,.$$

同理, 由于所有函数$F_k\,(k=1,2,...)$ 都在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测且零测集不影响可测性, 所以函数

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(x)$$

在$\mathbb{R}^p$ 上非负可测并由非负可测函数级数的逐项积分得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^p}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{\mathbb{R}^p}F_k(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{E_k}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

(II) 可积的情形. 设实值函数$f\in L^1(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$. 因$f$ 的正、负部f^+,f^- 都是非负可测函数, 故上面第(I) 部分对于f^+ 和f^- 成立. 又因$f^\pm\le|f|$, 故

$$\int_X\mathrm{d}x\int_Y f^\pm(x,y)\mathrm{d}y=\iint_{X\times Y}f^\pm(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty\,.\tag{4.4}$$

因此存在零测集$Z^{\pm} \subset \mathbb{R}^p$ 使得内层积分存在有限：

$$\int_{\mathbb{R}^q} f^{\pm}(x,y)\mathrm{d}y < +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p \setminus Z^{\pm}\,.$$

因可积函数的线性组合还是可积函数, 故

$\forall\, x \in \mathbb{R}^p \setminus (Z^+ \cup Z^-)\,,\quad$ 函数$y \mapsto f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$ 在$\mathbb{R}^q$ 上L-可积,

又由第(I)部分和可积性(4.4)有: 内层积分

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\,,\quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y$$

在$\mathbb{R}^p$ 上L-可积, 因此内层积分

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y$$

在$\mathbb{R}^p$ 上L-可积. 于是有

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f^+\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f^-\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f^+\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^q} f^-\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q}[f^+(x,y) - f^-(x,y)]\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

最后设复值函数$f \in L^1(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. 因$f$ 的实部$\mathrm{Re}(f)$ 和虚部$\mathrm{Im}(f)$ 都是实值可积函数, 故将上面关于实值可积函数的性质应用于$\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$, 并根据复值函数的积分的定义即知定理中的性质(II) 和(4.1) 对于复值可积函数也成立. $\Box$

作为Fubini 定理的重要推论, 下面三个性质在判断整体可积方面是经常使用的.

【**Fubini 定理的推论1**】设$p, q \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p), Y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, 并设$f(x,y)$ 是$X \times Y$ 上的(实值或复值)可测函数, 满足

$$\text{或者}\ \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x < +\infty, \quad \text{或者}\ \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < +\infty.$$

则f 在$X \times Y$ 上L-可积, 即$f \in L^1(X \times Y)$. 因此f 具有Fubini 定理中的所有性质(即f具有部分可测性且重积分等于累次积分的叠加).

【证】将Fubini 定理应用于非负可测函数$|f(x,y)|$ 有

$$\iint_{X\times Y} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < +\infty\,.$$

因f 已在$X\times Y$ 上可测, 故$f\in L^1(X\times Y)$. $\qquad\Box$

下面例子说明Fubini定理中的条件—— 整体可积或整体非负可测——不能再减弱.

【例】 设

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\quad (x,y)\in(0,1)\times(0,1)\,.$$

则f 连续从而可测. 同时有

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}\,,\quad x\in(0,1)\,;\quad \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{-1}{1+y^2}\,,\quad y\in(0,1)$$

因此

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}\,.$$

因此

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

根据Fubini 定理知$f(x,y)$ 必定不是整体可积的, 也即必定有

$$\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\infty\,.$$

【证】对任意$0<x,a\le 1$ 计算

$$\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^a\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=a}=\frac{a}{x^2+a^2}.$$

有这一结果有

$$\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(y,x)\mathrm{d}x=-\frac{a}{y^2+a^2}\,.$$

取$a=1$就得到例题中两个单层积分的结果.

为证f 在$(0,1)\times(0,1)$ 上不可积, 我们取$a=x\in(0,1)$. 此时有

$$\begin{aligned}&\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}\implies\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}y\ge\int_0^x|f(x,y)|\mathrm{d}y\ge\frac{1}{2x}\\&\implies\int_0^1\left(\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\ge\int_0^1\frac{1}{2x}\mathrm{d}x=+\infty\,.\end{aligned}$$

因此由非负可测函数的Fubini 定理有

$$\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=+\infty\,.\qquad\Box$$

【注】 Fubini 定理的一个大前提是函数$(x,y)\mapsto f(x,y)$ 的整体可测性! 这一点有时容易被忽略. 相关的问题是：如果对于几乎所有$x\in X$, 函数$y\mapsto f(x,y)$ 在Y 上非负可

测; 同时对于几乎所有$y\in Y$, 函数$x\mapsto f(x,y)$ 在X 上可测, 这时函数$(x,y)\mapsto f(x,y)$ 一定整体可测吗？两个特殊情形是

1° 若$f(x,y)$ 关于一个变量连续, 关于另一个变量可测, 则$(x,y)\mapsto f(x,y)$ 可测. 这是经典习题, 参见本节作业题**1.**

2° 若$f(x),g(y)$ 分别在X 和X 上可测, 则$(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ 可测. 这是下面推论中的结论之一.

【Fubini定理的推论2】设$X\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^p),Y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$.

(a) 设实值或复值函数$f(x),g(y)$ 分别在X 和Y 上可测. 则函数$(x,y)\mapsto f(x)$, $(x,y)\mapsto g(y)$ 都是$X\times Y$ 上的可测函数. 因此线性组合$\alpha f(x)+\beta g(y)$ 和乘积$f(x)g(y)$ 也都是$X\times Y$ 上的可测函数.

则函数$(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ 在$X\times Y$ 上可测. 特别分别取$f(x)\equiv 1,g(y)\equiv 1$ 知

$$(x,y)\mapsto g(y) \text{ 和 } (x,y)\mapsto f(x)\,\text{都在}\,X\times Y \text{ 上可测.}$$

(b) 若f,g 非负或$f\in L^1(X),g\in L^1(Y)$, 则

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_Y g(y)\mathrm{d}y\,. \tag{4.5}$$

特别有

$$m_{p+q}(X\times Y)=m_p(X)m_q(Y)\,. \tag{4.6}$$

【证】首先由第九章**命题9.19(乘积集合的可测性)**知$X\times Y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$.

(a): 先设f 是实值的. 定义$F(x,y)=f(x)$, $(x,y)\in X\times Y$. 则对任意$t\in\mathbb{R}$ 我们有

$$(X\times Y)(F>t)=X(f>t)\times Y\,.$$

因$X(f>t)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$, 故由乘积集合的可测性知$(X\times Y)(F>t)\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$ 中的可测集. 所以F 是$X\times Y$ 上的可测函数, 意即$(x,y)\mapsto f(x)$是$X\times Y$ 上的可测函数。当f是复值函数时, 将实值的结论用于f的实部虚部即知$(x,y)\mapsto f(x)$ 是$X\times Y$ 上的可测函数. 同理可证$(x,y)\mapsto g(y)$ 是$X\times Y$ 上的可测函数.

(b): 假设f,g 非负. 则由Fubini 定理有

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X f(x)\Big(\int_Y g(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x=\Big(\int_X f(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_Y g(y)\mathrm{d}y\Big)\,.$$

若$f\in L^1(X), g\in L^1(Y)$, 则应用上面结果于$|f(x)|, |g(y)|$ 得

$$\iint_{X\times Y}|f(x)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Big(\int_X|f(x)|\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_Y|g(y)|\mathrm{d}y\Big)<+\infty\,.$$

所以$f(x)g(y)$ 在$X\times Y$ 上L-可积. 于是由Fubini 定理可知(4.5) 成立. 最后由$\mathbf{1}_{X\times Y}(x,y)=\mathbf{1}_X(x)\mathbf{1}_Y(y)$ 即得(4.6). $\square$

【非乘积型集合上的重积分化累次积分】下面这个推论告诉我们, 对于一般可测集(特别对于非乘积型的可测集)上的重积分, 怎样把重积分化成累次积分:

【Fubini 定理的推论3】设$E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^1(E)$ 或f 在E 上非负可测. 假设$E\subset X\times Y$ 其中$X\subset\mathbb{R}^p, Y\subset\mathbb{R}^q$ 为可测集, $p+q=n$. 则有

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X\left(\int_Y\mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_Y\left(\int_X\mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

利用截口记号和

$$\mathbf{1}_E(x,y)=\mathbf{1}_{E_x}(y)=\mathbf{1}_{E^y}(x)$$

上式也可写成

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X\left(\int_{E_x}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_Y\left(\int_{E^y}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

满足$E\subset X\times Y$的集合X,Y包括它们的维数, 可以根据E的结构和需要任意选取.

【证】将Fubini 定理应用于f的零延拓$\mathbf{1}_E(x,y)f(x,y), (x,y)\in X\times Y$, 即知所证成立.
$\square$

【例】设$n\ge 2, X\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 为L-可测集, $\varphi,\psi: X\to\mathbb{R}$ 是L-可测函数(例如φ,ψ 都在X 上连续). 令

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\mid x\in X,\,\varphi(x)\le y\le\psi(x)\}.$$

则E 是L-可测集并且当$f\in L^1(E)$ 或f在E上非负L-可测时有

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_X\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

【证】令$g(x,y)=\varphi(x)-y,\ h(x,y)=\psi(x)-y,\ (x,y)\in X\times\mathbb{R}$, 则由**Fubini定理的推论2 (a)**知g,h都是$X\times\mathbb{R}$上的L-可测函数. 由E的定义易见

$$E=(X\times\mathbb{R})(g\le 0)\cap(X\times\mathbb{R})(h\ge 0)$$

因此E是L-可测集. 易见

$$\mathbf{1}_E(x,y)=\mathbf{1}_X(x)\mathbf{1}_{\{\varphi(x)\le y\le\psi(x)\}}\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^n$$

特别有

$$\mathbf{1}_E(x,y)=\mathbf{1}_{\{\varphi(x)\le y\le\psi(x)\}}\qquad\forall\,(x,y)\in X\times\mathbb{R}.$$

应用**Fubini定理**即知当$f\in L^1(E)$ 或f在E上非负L-可测时有

$$\begin{aligned}&\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{X\times\mathbb{R}}\mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_X\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y=\int_X\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{\varphi(x)\le y\le\psi(x)\}}f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_X\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

【强调】为了导出各种各样的累次积分,同学们务必认真学习特征函数的性质并灵活且准确地使用这些性质. 这件事并不难, 但效益巨大! 特征函数的表示举例:

$$\begin{aligned}&0\le a<b,p>0\implies\mathbf{1}_{(a,b]}(t)=\mathbf{1}_{\{a<t\le b\}}=\mathbf{1}_{\{a^p<t^p\le b^p\}}=\mathbf{1}_{\{a<t\}}\mathbf{1}_{\{t\le b\}}=\cdots;\\&0\le f(x)\le b\implies f(x)=\int_0^{f(x)}\mathrm{d}t=\int_0^b\mathbf{1}_{\{0\le t\le f(x)\}}\mathrm{d}t=\int_0^b\mathbf{1}_{\{t\le f(x)\}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后的等号是因为积分区间$[0,b]\ni t$ 的限制已经蕴含$0\le t$. 还有

$$m(E(a<f\le b))=\int_E\mathbf{1}_{E(a<f\le b)}(x)\mathrm{d}x=\int_E\mathbf{1}_{\{a<f(x)\le b\}}\mathrm{d}x$$

等等.

【例】再看特征函数的应用. 为了改变累次积分的顺序, 可以先画出整体重积分集合的图形, 然后根据图形确定累次积分的内层积分区间和外层积分区间。但是当你很难画出图形时(例如积分区域是高维集合), 则唯一可行的办法是使用特征函数. 例如试改变下面累次积分的顺序:

$$I:=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{3y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这里假定f在相应的二重积分区域上非负可测或可积.

【解】将被积函数作零延拓并使用特征函数, 我们有

$$I=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{\{y^2\le x\le 3y\}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^6\mathbf{1}_{\{y^2\le x\le 3y\}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{[0,6]\times[0,2]} \{\cdots\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{ 然后用Fubini 定理保证可换序}) \\
&= \int_0^6 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathbf{1}_{\{y^2\le x\le 3y\}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^6 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathbf{1}_{\{\frac{x}{3}\le y\le \sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\min\{2,\sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y \qquad (\text{到此已可以结束}) \\
&= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\min\{2,\sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_4^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\min\{2,\sqrt{x}\}} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_4^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

从这个积分顺序不难画出整体积分区域的图形(图示). □

下面的例题及其证明再次展示特征函数和Fubini 定理的作用.

【例】设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为L-可测集, $f: E\to[0,+\infty)$为L-可测函数, $b\in(0,+\infty)$, 使得$m(E(f\le b))<+\infty$ 且函数$t\mapsto F(t):=m(\mathbb{R}^n(f\le t))$属于$C^1([0,b])$. 证明: 对任意$p\in(0,+\infty)$ 有

$$\int_{E(f\le b)} (f(x))^p\mathrm{d}x = \int_0^b t^p F'(t)\mathrm{d}t.$$

【证】首先对任意$0\le s<t\le b$ 有$E(f\le s)\subset E(f\le t)$ 从而有$m(E(f\le s))\le m(E(f\le t))\le m(E(f\le b))<+\infty$, 因此$F(t)$处处有限且单调不减. 同时由

$E(s<f\le t)=E(f\le t)\setminus E(f\le s)$ 有

$$m(E(s<f\le t)) = m(E(f\le t)) - m(E(f\le s)) = F(t)-F(s).$$

下面利用特征函数和Fubini 定理 推导和计算积分:

$$
\begin{aligned}
&\int_{E(f\le b)} (f(x))^p\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}}(f(x))^p\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}}\Big(\int_0^{(f(x))^p}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}}\Big(\int_0^{b^p}\mathbf{1}_{\{0\le s<(f(x))^p\}}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{b^p}\Big(\int_E \mathbf{1}_{\{f(x)\le b\}}\mathbf{1}_{\{0\le s<(f(x))^p\}}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s \qquad (\text{by Fubini Theorem}) \\
&= \int_0^{b^p}\Big(\int_E \mathbf{1}_{\{0\le s^{1/p}<f(x)\le b\}}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s = \int_0^{b^p}\Big(\int_E \mathbf{1}_{\{s^{1/p}<f(x)\le b\}}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

(这是因为外层积分的限制$s\in[0,b^p]$ 已经蕴含$0\le s^{1/p}$)

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{b^p} m(E(s^{1/p}<f\le b))\mathrm{d}s = \int_0^{b^p}(F(b)-F(s^{1/p}))\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{b^p}\Big(\int_{s^{1/p}}^b F'(t)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}s = \int_0^{b^p}\Big(\int_0^b F'(t)\mathbf{1}_{\{s^{1/p}\le t\le b\}}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^b F'(t)\Big(\int_0^{b^p} \mathbf{1}_{\{s^{1/p}\le t\le b\}}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t = \int_0^b F'(t)\Big(\int_0^{b^p} \mathbf{1}_{\{s\le t^p\}}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t$$
(这是因为外层积分的限制$t\in[0,b]$ 已经蕴含$t\le b$)
$$= \int_0^b F'(t)t^p\mathrm{d}t. \qquad \square$$

【函数的卷积(convolution)】Fubini 定理的一个重要应用是建立函数的卷积：设f,g 在$\mathbb{R}^n$ 上皆非负可测或$f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 称

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\,, \quad x\in\mathbb{R}^n$$

为函数f 和g 的卷积(convolution).

需要说明定义的合理性：设f,g 在$\mathbb{R}^n$ 上可测. 则由**Fubini定理的推论2(a)**知$(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ 在$\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上可测. 因线性变换$(x,y)\to(x-y,y)$可逆, 故它保持集合和函数的可测性, 因此函数$(x,y)\mapsto f(x-y)g(x)$ 在$\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上可测(详细证明见第九章**§9.9 可测函数**中的例题). 当f,g 皆非负时, 由Fubini 定理, 函数$x\mapsto(f*g)(x)$ 在$\mathbb{R}^n$ 上非负可测且有(重积分化累次积分)

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\mathrm{d}y\right) \tag{4.7}$$

这里内层积分中用到了全空间积分的平移不变性:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\, y\in\mathbb{R}^n.$$

当f,g 不一定非负时, 考虑绝对值(!!) $|f(x)|,|g(y)|$, 对它们应用非负情形的上述结果有

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\mathrm{d}y\right).$$

由此可见, 若$f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < +\infty\,.$$

这同时说明$(x,y)\mapsto f(x-y)g(y)$ 在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上L-可积, 于是应用Fubini 定理知函数$x\mapsto(f*g)(x)$ 在$\mathbb{R}^n$ 上L-可积且(4.7) 成立. 此时还有$|f*g|\le|f|*|g|$ 从而由上面推导有$f*g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\|f*g\|_{L^1} \le \|\,|f|*|g|\,\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\,. \tag{4.8}$$

根据卷积的定义和积分换元公式(反射加平移) 易见卷积**可交换：**$f*g=g*f$, 即

$$(f*g)(x)=(g*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\,.$$

卷积的意义和作用 —— 卷积是由积分定义的函数, 而积分是平均效应, 好坏分享, 因此卷积后的函数(即由卷积定义的函数) 便具某种连续性或改善连续性, 如变得光滑. 卷积还有重要的代数性质, 这在将来学习Fourier 变换时可以看到.

作业题

1. 设$X\subset\mathbb{R}^p, Y\subset\mathbb{R}^q$ 分别是$\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q$中的$L$-可测集, 设$f:X\times Y\to\mathbb{R}$ 满足:

对每个$x\in X$, 函数$y\mapsto f(x,y)$ 在Y上连续;

对每个$y\in Y$, 函数$x\mapsto f(x,y)$ 在X上L-可测.

证明f 是$X\times Y$ 上的L-可测函数.

提示: 回忆第九章**命题9.19(乘积集合的可测性)**: 若A,B分别是$\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q$中的$L$-可测集, 则$A\times B$是$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\mathbb{R}^{p+q}$中的$L$-可测集. 可以假定$X\times Y$不是$L$-零测集(因在完备测度空间中, 零测集上的任何函数都是可测的). 由$m_{p+q}(X\times Y)=m_p(X)m_q(Y)$ 知Y有正测度从而Y是无限集。对无限集Y, 由第七章习题课知Y有一个可数稠密子集$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. 对任意$t\in\mathbb{R}$ 令

$$X_{n,k}=\{x\in X\mid f(x,y_n)>t-1/k\},\quad Y_{n,k}=Y\cap B(y_n,1/k).$$

根据题中的假设, 证明

$$\{(x,y)\in X\times Y\mid f(x,y)\ge t\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_{n,k}\times Y_{n,k})\Big).$$

2. 乘积集合上的乘积函数的积分(**Fubini定理的推论2**的一般情形): 设$E_1,E_2,...,E_k$分别是$\mathbb{R}^{n_1},\mathbb{R}^{n_2},...,\mathbb{R}^{n_k}$中的$L$-可测集. 设每个$f_i$都是$E_i$ 上的非负L-可测函数或每个f_i都是E_i上的L-可积函数, $i=1,2,...,k$. 证明$x=(x_1,x_2,...,x_k)\mapsto\prod_{i=1}^k f_i(x_i)$是$\prod_{i=1}^k E_i$上的非负$L$-可测函数或$L$-可积函数且

$$\int_{\prod_{i=1}^k E_i}\prod_{i=1}^k f_i(x_i)\,\mathrm{d}x=\prod_{i=1}^k\int_{E_i}f_i(x_i)\mathrm{d}x_i$$

3. 本题用Fubini 定理来证明C^2类函数的混合偏导数可换序： 设实值二元函数$f(x,y)$在开集$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 内属于C^2 类. 对任意有界区间$[a,b]\times[c,d]\subset\Omega$, 证明

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]\times[c,d]}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由此证明混合偏导数可换序：对任意$(x_0,y_0)\in\Omega$ 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

4. (1) 设$n\ge 2, D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 为L-可测集, $f,g:D\to[0,+\infty)$ 为L-可测函数且$\int_D f(x)\mathrm{d}x=1,\int_D g(x)\mathrm{d}x=2, f(x)\le g(x), x\in D$. 令

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\,|\,x\in D,\,2f(x)\le y\le 3g(x)\}.$$

证明E 是L-可测集并求$m(E)=?$.

(2) 设f 是$\mathbb{R}^p$上的实值L-可测函数, g 是$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$上的实值$L$-可测函数, 设$a<b$. 证明

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\,|\,a\le f(x)\le b, a\le g(x,y)\le f(x)\}$$

是L-可测集且

$$m_{p+q}(E)=\int_{\mathbb{R}^p}\mathbf{1}_{\{a\le f(x)\le b\}}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}\mathbf{1}_{\{a\le g(x,y)\le f(x)\}}\mathrm{d}y.$$

5. 在下列积分中假定被积函数f在相应的二重积分区域上非负可测或可积。

(1) 化二重积分为两个累次积分:

$$I_1=\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad I_2=\iint_{Rx\le x^2+y^2\le R^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

(2) 在下列积分中改变累次积分的顺序

$$I_3=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\ \ (a>0),\qquad I_4=\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\log x}f(x,y)\mathrm{d}y\,,$$
$$I_5=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{y/2}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x,\qquad I_6=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r\,,$$
$$I_7=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y,\qquad I_8=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}y\int_{\sin\frac{y}{2}}^{\sin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

6. 计算下列重积分：

$$I_1 = \iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy$$

其中D 是平面$\mathbb{R}^2$ 上由直线$x=0, y=1$ 及$y=x$ 所围成的闭区域,

$$I_2 = \int_0^1 y\mathrm{d}y \int_0^y \frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad I_3 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \frac{ye^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y\,,$$

$$I_5 = \iint_{a^2 \le x^2+y^2 \le b^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (0 \le a < b < +\infty\ ),$$

$$I_6 = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(\int_0^{x^2+y^2} \frac{e^z}{1-z}\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

7. 求下列立体Ω的体积:

(1) Ω位于第一象限$(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$内, 由两曲面$z = xy, x+y+z = 1$ 和围成. (本题有两个解)

(2) Ω 由$z = \cos x \cos y, z = 0, |x+y| \le \frac{\pi}{2}$ 和$|x-y| \le \frac{\pi}{2}$ 围成.

[注意: 解题时需要把Ω 用不等式写成集合形式.]

8. 设

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,; \qquad f(0,0) = 0\,.$$

证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad \forall\, x \ne 0\,; \quad \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, y \ne 0\,,$$

因而

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad (= 0\,)$$

但

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty\,.$$

9. 设$(a,b) \subset \mathbb{R}$ 为有界开区间, $f, g \in L^2((a,b))$, 且$f(x), g(x)$ 在(a,b) 上单调并有相同的单调性(同增或同减). 利用Fubini 定理证明切比谢夫不等式:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \right).$$

[提示: 考虑二元函数$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$.]

10. 设$1 < p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 定义卷积$(f * g)(x)$ 如上. 证明$f * g$ 在$\mathbb{R}^n$ 上有意义、可测且属于$L^p(\mathbb{R}^n)$ 并有

$$\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}\,.$$

[提示：考虑分解$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)||g(y)|^{1/p} \cdot |g(y)|^{1/q}$ 其中$1/p + 1/q = 1$.]

11. 对任意$0 < b < +\infty$ 考虑

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\,, \quad \frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-yx}\mathrm{d}y\,, \quad x > 0\,.$$

利用Fubini 定理(和LDC) 再次计算Riemann 广义积分$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

12. (1) 设f 在$\mathbb{R}^1$ 上处处可导且$f, f' \in L^1(\mathbb{R}^1)$. 试利用Fubini 定理证明证明 $\int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x = 0\,.$
提示：写

$$f(x+1) - f(x) = \int_0^1 f'(x+t)dt\,, \quad x \in \mathbb{R}^1\,.$$

并用平移不变性. 注意导数概念：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x+t)) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f)(x+t) = f'(x+t)\,.$$

(2) 设$f(x,y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 上关于x 处处可偏导且$f(x,y), \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. 证明

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\,.$$

注意导数概念：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x+t,y)) = (\frac{\partial}{\partial x}f)(x+t,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(\tilde{x},y)\Big|_{\tilde{x}=x+t}\,.$$

13. 用Fubini定理证明$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ 在$(0,1)\times(0,1)$ 上可积.

14. 设f 是$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$上的实值Lebesgue可测函数, g是$\mathbb{R}^p$上的实值Lebesgue可测函数, 设$a < b, c < d$. 证明

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \,|\, a \le f(x,y) \le b, c \le g(x) \le d\}$$

是Lebesgue可测集且

$$m_{p+q}(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbf{1}_{\{c \le g(x) \le d\}}\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^q} \mathbf{1}_{\{a \le f(x,y) \le b\}}\mathrm{d}y.$$

15. 设$0\le f\in L^1(E)$. 令

$$f_*(t)=m(E(f>t))=m(\{x\in E\mid f(x)>t\})\,,\quad t\in[0,+\infty)\,.$$

证明

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f_*(t)\mathrm{d}t\,.$$

提示：用本讲义已证的命题说明函数$f_1(x,t)=f(x), f_2(x,t)=t$ 从而$F(x,t)=f_1(x,t)-f_2(x,t)$ 都是可测集$E\times[0,+\infty)$ 上的可测函数, 因而$E\times[0,+\infty)(F>0)$ 是可测集. 这蕴含

$$(x,t)\mapsto \mathbf{1}_{E\times[0,+\infty)(F>0)}(x,t)=\mathbf{1}_{E(f>t)}(x)\quad 是E\times[0,+\infty)上的可测函数.$$

然后将$f(x)$ 表示成

$$f(x)=\int_0^{f(x)}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{(0,\,f(x))}(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{E(f>t)}(x)\mathrm{d}t\,.$$

16(本节例题的推广). 设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为L-可测集, $b\in(0,+\infty)$, $f:E\to[0,+\infty)$ 为L-可测函数, 使得$m(E(f\le b))<+\infty$ 且函数$t\mapsto F(t):=m(E(f\le t))$ 属于$C^1([0,b])$. 设$\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$严格单调增加且$\Phi(0)=0$. 证明

$$\int_{E(f\le b)}\Phi(f(x))\mathrm{d}x=\int_0^b\Phi(t)F'(t)\mathrm{d}t.$$

17. (1) 设实系数二元多项式

$$P(x,y)=\sum_{i+j\le n}a_{ij}x^iy^j$$

不恒等于零(等价地, 系数a_{ij} 不全为零). 证明

$$\mu(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,P(x,y)=0\})=0.$$

(2) 对于多元多项式的情形, 用$(\mathbb{Z}_{\ge0})^n$ 中的元素$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ 常用来作多重指标. 记$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ 并对于$x=(x_1,x_2,...,x_k)\in\mathbb{R}^n$ 记$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}$. 次数不超过$n$ 的实系数n 元多项式定义为

$$P(x)=\sum_{|\alpha|\le n}c_\alpha x^\alpha\,,\quad c_\alpha\in\mathbb{R}^1\,.$$

假设$P(x)\not\equiv 0$ (这等价于系数c_α 不全为零). 证明

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^n \mid P(x)=0\})=0\,.$$

提示：$n=1$ 时是显然的. 对于$n\ge 2$, 写$x=(y,t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^1$. 则$P(x)$ 可表为$P(y,t)=\sum_{k=0}^n q_k(y)t^k$. 然后利用Fubini 定理.

18. 设$p,q\in\mathbb{N}$, 做分解$\mathbb{R}^{p+q}=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$.

(1) 证明: 若$E\subset\mathbb{R}^{p+q}$ 是$\mathbb{R}^{p+q}$中的开集/闭集/紧集, 则对任意$x\in\mathbb{R}^p$, 截口$E_x=\{y\in\mathbb{R}^q \mid (x,y)\in E\}$ 是$\mathbb{R}^q$中的开集/闭集/紧集. [注: 根据规定, 空集同时是开集、闭集、紧集.]

(2) 设$K\subset\mathbb{R}^{p+q}$为紧集, $D\subset\mathbb{R}^p$ 是K向$\mathbb{R}^p$的投影, 即

$$D=\{x\in\mathbb{R}^p \mid \exists\, y\in\mathbb{R}^q \ \text{ s.t. } (x,y)\in K\}.$$

证明: D是紧集且

$$m_p(D)\le C_p(\mathrm{diam}(K))^p$$

其中$C_p=m_p(\mathbb{B}^p)$, m_p是$\mathbb{R}^p$上的Lebesgue 测度.

19*(选做题). 设$U=B(0,1)$ 为$\mathbb{R}^2$中的单位开圆盘. 根据**Vitali覆盖引理的推论** 知存在一列闭圆盘$B_k=\overline{B}(x_k,r_k)\subset U, k=1,2,3,...,$ 使得

$$B_k\ \text{互不相交 且}\quad m\Big(U\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\Big)=0.$$

试证明这些小圆盘的半径之和发散, 即证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}r_k=+\infty.$$

20*.(选做题, 第19*题的推广) 设$n\ge 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$为非空开集, $B_k\subset\Omega$ 为非空闭集, $k=1,2,3,\dots$. 证明:

$$\text{若 } m(\Omega\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=0,\quad \text{则}\quad \sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(B_k))^p=+\infty \qquad \forall\, p\in\{1,2,...,n-1\}.$$

§10.5. 积分换元公式

积分换元公式与Fubini 定理和Newton-Leibniz 公式一起是研究积分和计算积分的主要工具. 回想不定积分的计算, 如果没有积分换元公式, 很多不定积分将难以"积出". 从证明的难度上看, 积分换元公式也是分析学中较难的从而是能量较大的定理之一: 在较长篇幅的证明中一劳永逸地吸收了很多公共难点.

积分换元公式是宏观量之间的等量转换, 但是它的证明过程却着力于微观、局部分析. 我们马上看到, 测度和积分在一点附近的行为由换元映射的线性主部决定, 也即是"微分"的行为. 简单地说, 换元公式的证明过程就是化整为零、积零为整的过程.

让我们从C^1 映射下的测度估计开始. 如前, 我们用

$$\varphi'(x)=\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\Big)_{n\times n}$$

表示映射$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)^\tau$在$x$点的微分即Jacobi 矩阵.

【定理10.38(C^1 变换下的测度估计)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为C^1 映射. 则对任何可测集$E\subset\Omega$ 有

$$m(\varphi(E))\le\int_E|\det\varphi'(x)|{\rm d}x\,. \tag{5.1}$$

【证】首先由C^1 映射把零测集映为零测集、把可测集映为可测集(第九章**命题9.22**) 知φ 把Ω 中的零测集映为零测集, 把Ω 中的可测集映为可测集. 不等式(5.1)的证明分几步进行.

Step 1. 证明局部性质：对任意$x\in\Omega$ 和包含x 的任意闭方体族$\{Q\}$ 都有

$$\limsup_{Q\ni x,\,l(Q)\to 0}\frac{m(\varphi(Q))}{m(Q)}\le|\det\varphi'(x)|. \tag{5.2}$$

意即$\forall\,x\in\Omega,\forall\,\varepsilon>0\,,\exists\,\delta>0$ 使得对于Ω 中所有满足$Q\ni x$ 且棱长$l(Q)<\delta$ 的闭方体Q 都有

$$\frac{m(\varphi(Q))}{m(Q)}<|\det\varphi'(x)|+\varepsilon\,.$$

为证明这个估计, 给定任一$x_0\in\Omega$, 记$A=\varphi'(x_0)$. 取$\delta_0>0$ 充分小使得$B(x_0,\delta_0)\subset\Omega$. 考虑闭单位方体$[0,1]^n$ 在变换$x\mapsto Ax$ 下的象$K:=A([0,1]^n)$. 由Lebesgue 可测集的正则性(**定理9.17(L-测度空间的特征和正则性)**), 对任意$\varepsilon>0$, 存在开集G 使得$K\subset G$ 且$m(G)<m(K)+\varepsilon$. 因K 是紧集, G^c 是闭集, 且K,G^c 不相交, 故${\rm dist}(G^c,K)>0$. 取$0<r<{\rm dist}(G^c,K)$, 则易见有

$$\{x\in\mathbb{R}^n\mid{\rm dist}(x,K)\le r\}\subset G\,. \tag{5.3}$$

由φ可微知, 存在$0 < \delta < \delta_0/\sqrt{n}$ 使得

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)| \le \frac{r}{\sqrt{n}}|x-x_0| \qquad \forall\, |x-x_0| < \sqrt{n}\,\delta\,. \tag{5.4}$$

设Q是满足$Q \ni x_0$ 且棱长$\lambda := l(Q) < \delta$ 的任一闭方体. 则有

$$\forall\, x \in Q \implies |x-x_0| \le \sqrt{n}\lambda < \sqrt{n}\,\delta < \delta_0 \implies x \in B(x_0,\delta_0) \subset \Omega.$$

这表明$Q \subset \Omega$. 写$Q = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i+\lambda]$ 并令$a = (a_1, a_2, ..., a_k)^\tau$. 则对任意$x \in Q$ 有 $\frac{x-a}{\lambda} \in [0,1]^n$ 从而有$A(\frac{x-a}{\lambda}) \in A([0,1]^n) = K$. 于是由(5.4) 有（注意$x \mapsto Ax$是线性映射!）

$$\mathrm{dist}\Big(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(a-x_0)}{\lambda}\,,\,K\Big) \le \Big|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(a-x_0)}{\lambda} - A(\frac{x-a}{\lambda})\Big|$$
$$= \frac{1}{\lambda}|\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(x-x_0)| \le \frac{1}{\lambda}\frac{r}{\sqrt{n}}|x-x_0| \le \frac{1}{\lambda}\frac{r}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}\,\lambda = r\,.$$

据(5.3)知

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)-A(a-x_0)}{\lambda} \in G \qquad \text{即} \quad \varphi(x) \in \lambda G + h$$

其中$h = \varphi(x_0) + A(a-x_0)$. 这表明$\varphi(Q) \subset \lambda G + h$. 于是由平移不变性和线性变换下的测度计算公式(第九章**命题9.23**) 以及$m(Q) = \lambda^n$ 和$m(K) = m(A([0,1]^n) = |\mathrm{det}A|$ 得到

$$m(\varphi(Q)) \le m(\lambda G) = \lambda^n m(G) < \lambda^n(m(K)+\varepsilon) = m(Q)(|\mathrm{detA}|+\varepsilon)\,.$$

这就给出所要的估计

$$\frac{m(\varphi(Q))}{m(Q)} < |\mathrm{det}A| + \varepsilon\,.$$

Step 2. 证明：对任意闭方体$Q \subset \Omega$ 都有

$$m(\varphi(Q)) \le \int_Q |\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{5.5}$$

反证法: 假设存在闭方体 $Q \subset \Omega$ 使(5.5) 不成立. 令

$$\delta = \frac{1}{m(Q)}\left(m(\varphi(Q)) - \int_Q |\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\right).$$

则$\delta > 0$ 且

$$m(\varphi(Q)) = \int_Q (|\mathrm{det}\varphi'(x)| + \delta)\,\mathrm{d}x\,.$$

将Q 的每条棱2 等分, 得到2^n 个互不重叠的闭子方体$I_1, I_2, ..., I_{2^n}$, $Q = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_i$. 由$\varphi(Q) = \bigcup_{i=1}^{2^n} \varphi(I_i)$ 和测度的次可加性和积分的可加性得到

$$\sum_{i=1}^{2^n} m(\varphi(I_i)) \geq m(\varphi(Q)) = \sum_{i=1}^{2^n} \int_{I_i} (|\det\varphi'(x)| + \delta) \, \mathrm{d}x \, .$$

由此可知存在某个I_i, 记之为Q_1, 使得

$$m(\varphi(Q_1)) \geq \int_{Q_1} (|\det\varphi'(x)| + \delta) \, \mathrm{d}x \ , \quad l(Q_1) = \frac{1}{2} l(Q).$$

再将Q_1 的每条棱2 等分, 得到2^n 个互不重叠的闭子方体$J_1, J_2, ..., J_{2^n}$, $Q_1 = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i$. 由$\varphi(Q_1) = \bigcup_{i=1}^{2^n} \varphi(J_i)$ 和如上分析得到

$$\sum_{i=1}^{2^n} m(\varphi(J_i)) \geq m(\varphi(Q_1)) \geq \sum_{i=1}^{2^n} \int_{J_i} (|\det\varphi'(x)| + \delta) \, \mathrm{d}x \, .$$

因此存在某个J_i, 记之为Q_2, 使得

$$m(\varphi(Q_2)) \geq \int_{Q_2} (|\det\varphi'(x)| + \delta) \, \mathrm{d}x \, , \quad l(Q_2) = \frac{1}{2} l(Q_1) = \frac{1}{4} l(Q) \, .$$

如此操作下去我们得到Q中的闭方体套

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_k \supset \cdots \, ; \quad l(Q_k) = 2^{-k} l(Q), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

满足

$$m(\varphi(Q_k)) \geq \int_{Q_k} (|\det\varphi'(x)| + \delta) \, \mathrm{d}x \, , \quad k = 1, 2, 3, \dots \, .$$

根据紧集套定理, 存在$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. 另一方面, 由中值定理(因$x \mapsto \det\varphi'(x)$ 连续)

$$\exists \, x_k \in Q_k \ \text{ s.t.} \quad \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} (|\det\varphi'(x)| + \delta) \, \mathrm{d}x = |\det\varphi'(x_k)| + \delta \, , \quad k = 1, 2, 3, \dots \, .$$

于是有

$$\frac{m(\varphi(Q_k))}{m(Q_k)} \geq |\det\varphi'(x_k)| + \delta \, , \quad k = 1, 2, 3, \dots \, .$$

因$|x_k - x_0| \leq \mathrm{diam}(Q_k) = \sqrt{n} \, l(Q_k) \to 0 \, (k \to \infty)$, 故由**Step 2** 得到矛盾：

$$|\det\varphi'(x_0)| \geq \limsup_{k \to \infty} \frac{m(\varphi(Q_k))}{m(Q_k)} \geq |\det\varphi'(x_0)| + \delta > |\det\varphi'(x_0)| \, .$$

Step 3. 证明：对任意闭方体$Q \subset \Omega$ 和任意可测集$E \subset Q$ 都有

$$m(\varphi(E)) \leq \int_E |\det\varphi'(x)| \mathrm{d}x \, . \tag{5.6}$$

给定Q, E 如上. 我们有$\varphi(E) \subset \varphi(E \cap Q^\circ) \cup \varphi(\partial Q)$. 因$\partial Q$是$\Omega$中的零测集, 故$\varphi(\partial Q)$是零测集. 于是有$m(\varphi(E)) = m(\varphi(E \cap Q^\circ))$. 这表明, 以$E \cap Q^\circ$代替$E$, 我们可以假定$E \subset Q^\circ$. 我们先证明(5.6) 对于$Q^\circ$ 中的开集成立. 设开集$G \subset Q^\circ$. 由开集分解(定理1.3) 可写$G = \bigcup_{k=1}^\infty \overline{Q}_k$, 其中$\overline{Q}_k$ 是互不重叠的2-进闭方体. 应用测度的次可加性、**Step 2**、和互不重叠时的积分可加性有

$$m(\varphi(G)) \le \sum_{k=1}^\infty m(\varphi(\overline{Q}_k)) \le \sum_{k=1}^\infty \int_{\overline{Q}_k} |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x = \int_{\bigcup_{k=1}^\infty \overline{Q}_k} |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x = \int_G |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x.$$

对于一般的可测集$E \subset Q^\circ$, 应用开集逼近, 存在一列开集G_k 满足$E \subset G_k \subset Q^\circ$ 使得$m(G_k \setminus E) \to 0\,(k \to \infty)$. 注意到闭方体$Q \subset \Omega$ 蕴含$\int_Q |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x < +\infty$, 于是应用可积函数的积分的连续性(**定理10.21(积分的绝对连续性)**) 得到

$$m(\varphi(E)) \le m(\varphi(G_k)) \le \int_{G_k} |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x \to \int_E |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x \ \ (k \to \infty)\,.$$

这证明了(5.6).

Step 4. 由开集的方体分解定理知$\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \overline{Q}_k$ 其中$\overline{Q}_k$ 是互不重叠的2-进闭方体. 对任意可测集$E \subset \Omega$, 考虑分解

$$E = \bigcup_{k=1}^\infty E \cap \overline{Q}_k\,, \quad \varphi(E) = \bigcup_{k=1}^\infty \varphi(E \cap \overline{Q}_k)\,.$$

则由**Step 3** 并注意$E \cap \overline{Q}_k$ 也是互不重叠的, 得到

$$\begin{aligned} m(\varphi(E)) &\le \sum_{k=1}^\infty m(\varphi(E \cap \overline{Q}_k)) \le \sum_{k=1}^\infty \int_{E \cap \overline{Q}_k} |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^\infty E \cap \overline{Q}_k} |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x = \int_E |\mathrm{det}\varphi'(x)| \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$ □

作为上述定理的重要推论, 我们立即得到

【Sard 定理】设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为C^1 映射. 设$S = \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{det}\varphi'(x) = 0\}$, 即$S$是$\varphi$ 的临界点的集合. 则$\varphi(S)$ 是零测集, 即$m(\varphi(S)) = 0$. 换言之, φ 的临界值的集合$\varphi(S)$ 是零测集.

【证】在**定理10.38(C^1 变换下的测度估计)**中取$E = S$ 即得证. □

有了以上准备, 我们可以叙述并证明重积分换元公式.

【**定理10.39(积分换元公式)**】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为C^1类的单射.

(a) 若$f\in L^1(\varphi(\Omega))$ 或f在$\varphi(\Omega)$上非负可测, 则成立换元公式:

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y=\int_{\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x \tag{5.7}$$

(b) 一般地, 设可测集$E\subset\Omega$, 函数$f\in L^1(\varphi(E))$ 或f 在$\varphi(E)$ 上非负可测. 则有

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\mathrm{d}y=\int_{E} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{5.8}$$

以上**(a),(b)** 分别包含了函数$x\mapsto f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|$ 在Ω 和E上的可积性和相应的非负可测性. 特别在**(b)**中取$f\equiv 1$ 有

$$m(\varphi(E))=\int_{E}|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{5.9}$$

【证】先证明(a) 蕴含(b). 设$E\subset\Omega$ 为可测集. 由$\varphi\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 和C^1 映射把可测集映为可测集(第九章**命题9.22**) 知$\varphi(E)$ 是可测集. 因此$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)$ 是可测函数. 设$f(y)$在$\varphi(E)$ 上L-可积或非负可测. 则函数$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)f(y)$在$\varphi(\Omega)$ 上L-可积或非负可测. 于是将(a) 应用于被积函数$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)f(y)$ 并注意φ 是单射蕴含$\mathbf{1}_{\varphi(E)}(\varphi(x))=\mathbf{1}_E(x)$ 即知函数

$$x\mapsto \mathbf{1}_{\varphi(E)}(\varphi(x))f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|=\mathbf{1}_E(x)f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|,\quad x\in\Omega$$

在Ω上的可积性和相应的非负可测性. 这就蕴含了函数$x\mapsto f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|$ 在E上的可积性和相应的非负可测性. 同时由(5.7) 有

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(E)} f(y)\mathrm{d}y&=\int_{\varphi(\Omega)}\mathbf{1}_{\varphi(E)}(y)f(y)\mathrm{d}y=\int_{\Omega}\mathbf{1}_{\varphi(E)}(\varphi(x))f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{\Omega}\mathbf{1}_E(x)f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_{E}f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面证明(a). 分两步进行.

Step 1. 假设φ 满足$\mathrm{det}\varphi'(x)\neq 0\ \forall\, x\in\Omega$. 来证明此时换元公式(5.7)成立. 注意此时$\varphi(\Omega)$ 是开集且逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(\Omega)\to\Omega$ 也是C^1 的. 因此再由C^1 映射把可测集映为可测集(第九章**命题9.22**)知φ^{-1} 把$\varphi(\Omega)$ 中的可测集映为可测集并且当$f(y)$在$\varphi(\Omega)$ 上可测时, 函数$x\mapsto f(\varphi(x))$ 在Ω 上可测.

首先先证明: 对于$\varphi(\Omega)$ 上的任意非负可测函数f, 换元公式(5.7) 成立. 为此我们先证明

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y\le\int_{\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{5.10}$$

为证明(5.10), 先考虑简单情形: $f(y) = \mathbf{1}_A(y)$ 其中$A \subset \varphi(\Omega)$ 是可测集. 由**定理10.38(C^1 变换下的测度估计)** 有

$$\int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{1}_A(y)\mathrm{d}y = m(A) = m(\varphi(\varphi^{-1}(A)) \le \int_{\varphi^{-1}(A)} |\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(A)}(x)|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

现在设f是$\varphi(\Omega)$上的任一非负可测函数. 由非负可测函数的级数表示知存在一列可测集$A_k \subset \varphi(\Omega)$ 和一列常数$c_k > 0$ 使得

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{A_k}(y), \quad y \in \Omega.$$

由非负可测函数级数的逐项积分和关于特征函数的结果得到

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{1}_{A_k}(y)\mathrm{d}y \le \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\Omega} \mathbf{1}_{A_k}(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\Omega} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{A_k}(\varphi(x)) \Big) |\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

将这一结论应用于C^1单射$\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$得到: 对于$\Omega$上的任意非负可测函数$g(x)$ 有

$$\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(\Omega))} g(x)\mathrm{d}x \le \int_{\varphi(\Omega)} g(\varphi^{-1}(y))|\det(\varphi^{-1})'(y)|\mathrm{d}y\,.$$

回忆

$$|\det\varphi'(\varphi^{-1}(y))||\det(\varphi^{-1})'(y)| \equiv 1, \quad y \in \varphi(\Omega)\,.$$

取$g(x) = f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|$ 即得

$$\int_{\Omega} f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x \le \int_{\varphi(\Omega)} f(\varphi(\varphi^{-1}(y)))|\det\varphi'(\varphi^{-1}(y))||\det(\varphi^{-1})'(y)|\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y\,.$$

结合(5.10) 即知换元公式对于非负可测函数成立.

其次对于任意实值函数$f \in L^1(\varphi(\Omega))$, 将上述结果应用于$f$ 的正部和负部得到(由可积性, 以下减法有意义！)

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\varphi(\Omega)} f^+(y)\mathrm{d}y - \int_{\varphi(\Omega)} f^-(y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\Omega} f^+(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x - \int_{\Omega} f^-(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\Omega} [f^+(\varphi(x)) - f^-(\varphi(x))]|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,.$$

最后于任意复值函数$f\in L^1(\varphi(\Omega))$, 将实值的结果应用于$f$ 的实部、虚部并注意复值函数积分的定义即知换元公式对于复值可积函数也成立.

Step 2. 去掉"$\det\varphi'(x)\neq 0\ \forall x\in\Omega$" 的假设(只保持单射条件). 设$f\in L^1(\varphi(\Omega))$ 或f 在$\varphi(\Omega)$ 上非负可测. 令

$$S=\{x\in\Omega\,|\,\det\varphi'(x)=0\}\,,\quad \Omega_0=\Omega\setminus S=\{x\in\Omega\,|\,\det\varphi'(x)\neq 0\}\,.$$

由**Sard 定理** 知$\varphi(S)$ 为零测集. 因此有

$$\int_{\varphi(S)}f(y)\mathrm{d}y=0=\int_S f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{5.11}$$

由此可知若$\Omega=S$, 则换元公式成立. 设$\Omega\neq S$, 即$\Omega_0\neq\emptyset$. 则由$x\mapsto\det\varphi'(x)$ 连续知Ω_0 是非空开集. 因$\det\varphi'(x)\neq 0$ for all $x\in\Omega_0$, 故由开映射定理知$\varphi(\Omega_0)$ 是开集从而是$\varphi(\Omega)$的可测子集. 这蕴含f在$\varphi(\Omega_0)$上L-可积或相应地非负可测. 于是由**Step 1** 知知$x\mapsto f(\varphi(x))$ 在Ω_0 上可测且

$$\int_{\varphi(\Omega_0)}f(y)\mathrm{d}y=\int_{\Omega_0}f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x. \tag{5.12}$$

另一方面, 由$m(\varphi(S))=0$ 有$\int_{\varphi(S)}f(y)\mathrm{d}y=0$. 因此由$\varphi(\Omega)=\varphi(\Omega_0)\cup\varphi(S)$ (不交并) 有

$$\int_{\varphi(\Omega)}f(y)\mathrm{d}y=\int_{\varphi(\Omega_0)}f(y)\mathrm{d}y. \tag{5.13}$$

而由$\det\varphi'(x)=0$于S知$f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|=0$ for all $x\in S$. 这蕴含函数$x\mapsto f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|$在$\Omega=\Omega_0\cup S$ 上可测且

$$\int_{\Omega}f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x=\int_{\Omega_0}f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x. \tag{5.14}$$

联合(5.11)-(5.14) 即得换元公式(5.7). $\square$

【注1】在上面的证明中我们从逻辑上考虑了$\Omega=S$ 的情形. 实际上这种情形不会出现: 根据**Brouwer 区域不变性定理**[2]知$\varphi(\Omega)$ 是开集从而其测度>0. 因$\varphi(S)$ 是零测集, 故$\varphi(\Omega)\setminus\varphi(S)$ 非空. 而由φ 为单射知$\varphi(\Omega\setminus S)=\varphi(\Omega)\setminus\varphi(S)$, 所以$\Omega\setminus S$ 非空.

[2]这一定理的证明将在本章最后一节给出. 实际上对这些相关的定理的证明也可以这样进行: 先对φ 没有临界点的情形建立上述换元公式, 然后用这种情形的换元公式证明Brouwer 不动点定理, 进而证明Brouwer 区域不变性定理. 最后对φ 有临界点的情形, 用Brouwer 区域不变性定理说明$\Omega\setminus S$ 非空.

【**注2**】在换元公式的应用中,“单射”是主要条件. 由于整体反函数问题是分析学中的一个难点, 单射的验证并不容易. 但对一些常用的变换(如球极坐标变换, 线性变换等), 单射条件不难验证.

很多情况下积分集合是闭区域. 对此我们有下列常用的换元公式, 其中不要求换元$x \mapsto \varphi(x)$ 在整个闭区域上是单射, 而只要求它在闭区域的**内部**是单射.

【**定理10.40(闭区域上的积分换元公式)**】设$V \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ 为C^1 映射. 设开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 满足

(i) $\overline{\Omega} \subset V$ 且$m(\partial\Omega) = 0$;　**(ii)** $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为单射.

则对任意可测集$E \subset \overline{\Omega}$ 有

$$m(\varphi(E)) = \int_E |\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{5.15}$$

一般地, 对任何$f \in L^1(\varphi(\overline{\Omega}))$ 或f 在$\varphi(\overline{\Omega})$ 上非负可测, 成立换元公式:

$$\int_{\varphi(\overline{\Omega})} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\overline{\Omega}} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{5.16}$$

【证】首先由假设条件知φ在Ω上满足**定理10.39(积分换元公式)**中的条件, 因此换元公式(5.7)成立.

由闭包的定义和Ω 为开集知$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 且$\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$. 因$\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ 为C^1 映射, $\partial\Omega \subset V$ 且$\partial\Omega$ 为零测集, 故$\varphi(\partial\Omega)$ 也是零测集. 对任意可测集$E \subset \overline{\Omega}$, 由$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 有

$$\begin{aligned}
&E = (E \cap \Omega) \cup (E \cap \partial\Omega), \quad m(E \cap \partial\Omega) = 0,\\
&\varphi(E) = \varphi(E \cap \Omega) \cup \varphi(E \cap \partial\Omega), \quad m(\varphi(E \cap \partial\Omega) = 0
\end{aligned}$$

从而在换元公式(5.7)中取$f(y) = \mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(y)$ 并注意φ 在Ω 上是单射蕴含

$$\mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(\varphi(x)) \equiv \mathbf{1}_{E\cap\Omega}(x), \quad x \in \Omega$$

便有

$$\begin{aligned}
m(\varphi(E)) &= m(\varphi(E \cap \Omega)) = \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathbf{1}_{\varphi(E\cap\Omega)}(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega \mathbf{1}_{E\cap\Omega}(x)|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{E\cap\Omega} |\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \int_E |\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

一般地, 对任意$f \in L^1(\varphi(\overline{\Omega}))$ 或f 在$\varphi(\overline{\Omega})$ 上非负可测, 由**定理10.39(积分换元公式)**知

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x.$$

而由$\varphi(\overline{\Omega}) = \varphi(\Omega) \cup Z$, $Z = \varphi(\partial\Omega) \setminus \varphi(\Omega)$, $m(Z) = m(\partial\Omega) = 0$ 有

$$\int_{Z} f(y)\mathrm{d}y = 0, \quad \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x = 0$$

于是由积分的可加性即得所证公式(5.14):

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(\overline{\Omega})} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y + \int_{Z} f(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x \\
&= \int_{\overline{\Omega}} f(\varphi(x))|\mathrm{det}\varphi'(x)|\mathrm{d}x. \qquad \square
\end{aligned}$$

【奇、偶函数的积分】

• 设可测集$E \subset \mathbb{R}^n$关于某个$n-1$维坐标平面对称, 即存在$i \in \{1, 2, ..., n\}$ 使得

$$x = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_k) \in E \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_k) \in E.$$

(图示) 设函数f 在E 上有定义.

(a) 假设$f \in L^1(E)$ 且$f(x)$ 关于x的第i个变量x_i 是奇函数, 即

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_k) = -f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_k).$$

则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(b) 假设$f(x)$ 关于x的第i个变量x_i 是偶函数, 即

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_k).$$

则当$f \in L^1(E)$ 或f 在E 上非负可测时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{E_i^-} f(x)\mathrm{d}x.$$

其中

$$E_i^+ = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in E \,|\, x_i \geq 0\}, \quad E_i^- = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in E \,|\, x_i \leq 0\}.$$

【证】考虑线性变换$\varphi(x)=(x_1,...,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},...,x_k),x\in\mathbb{R}^n$. 显然$|\mathrm{det}\varphi'(x)|\equiv 1$且由$E$的定义有

$$\varphi(E)=E,\quad \varphi(E_i^+)=E_i^-,\quad \varphi(E_i^-)=E_i^+.$$

(a): 设f是上述奇函数. 则由换元公式(5.8) 和$f(\varphi(x))=-f(x)$ 得到(在换元公式的左边, 将变量记号y也换成x)

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(E)} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(x))\mathrm{d}x=-\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

因$\int_E f(x)\mathrm{d}x$是有限数(即不是无穷大), 故$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

(b): 设f是上述偶函数. 则应用换元公式(5.8) 和$E_i^+=\varphi(E_i^-)$ 以及$f(\varphi(x))=f(x)$ 得到

$$\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(E_i^-)} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_i^-} f(\varphi(x))\mathrm{d}x=\int_{E_i^-} f(x)\mathrm{d}x.$$

因$E=E_i^+\cup E_i^-$ 且易见E_i^+,E_i^- 不重叠, 即$m(E_i^+\cap E_i^-)=0$, 故有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_i^-} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{E_i^+} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

• 设可测集$E\subset\mathbb{R}^n$关于每个$n-1$维坐标平面都对称, 即

$$x=(x_1,x_2,...,x_k)\in E \iff (\pm x_1,\pm x_2,...,\pm x_k)\in E.$$

设E上的函数$f(x)$ 关于x的每个分量都是偶函数, 即

$$f(x_1,x_2,...,x_k)=f(\pm x_1,\pm x_2,...,\pm x_k),\quad x\in E.$$

则当$f\in L^1(E)$ 或f 在E 上非负可测时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=2^n\int_{E\cap\mathbb{R}_+^n} f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.17}$$

其中$\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$. 特别, 当$E=\mathbb{R}^n$时有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x=2^n\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.18}$$

【证】公式(5.17) 可以用和上面相同的方法给予证明. 但较快的证法是利用Fubini 定理先证(5.18) 然后由(5.18)推出(5.17). 当$n=1$ 时, (5.18) 是熟知的偶函数在对称区间

上的积分等式. 假设当维数为$n-1$时(5.18)成立, 则当维数等于n 时, 由Fubini 定理和归纳假设有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\Big)\mathrm{d}x_k\\ &= 2^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\Big)\mathrm{d}x_k\\ &= 2^{n}\int_{\mathbb{R}_+}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\Big)\mathrm{d}x_k = 2^n\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以(5.18) 成立.

对一般情形, 将已证的结果用于$\mathbb{R}^n$上的函数$\mathbf{1}_E(x)f(x)$ (它在$\mathbb{R}^n$ 上显然满足上述偶函数条件)便有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_E(x)f(x)\mathrm{d}x = 2^n\int_{\mathbb{R}_+^n}\mathbf{1}_E(x)f(x)\mathrm{d}x = 2^n\int_{E\cap\mathbb{R}_+^n} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

【Jacobi 矩阵行列式的其他记号】

对于光滑映射$y=(y_1,y_2,...,y_n)=\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ 很多文献和教科书中常用下列比较直观的记号:

$$\det\varphi'(x) = \frac{\partial(y_1,y_2,...,y_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

相应的换元公式为

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y_1,y_2,...,y_n)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n = \int_{\Omega} f(\varphi(x_1,x_2,...,x_n))\Big|\frac{\partial(y_1,y_2,...,y_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}\Big|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

例如对于$(x,y)=\varphi(u,v)$ 则有

$$\det\varphi'(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix},$$

$$\iint_{\varphi(\Omega)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(\varphi(u,v))\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

对于$(x,y,z)=\varphi(u,v,w)$ 则有

$$\det\varphi'(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix},$$

$$\iiint_{\varphi(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(\varphi(u,v,w))\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

【极坐标变换$(n=2)$**和球坐标变换** $(n=3)$**】**我们在第八章**命题8.39(球极坐标变换)**一般性地已经证明极坐标和球坐标变换在所示区域上是单射：

极坐标变换:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r\in(0,+\infty),\quad \theta\in(0,2\pi) \text{ 或 } \theta\in(-\pi,\pi).$$

$$\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\Big| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = r$$

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{(0,+\infty)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint_{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

对一般集合$\Omega\subset\mathbb{R}^2$, 可用特征函数$\mathbf{1}_\Omega(x,y)$ 化成全空间的情形:

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{(0,+\infty)\times(0,2\pi)} \mathbf{1}_\Omega(r\cos\theta, r\sin\theta) f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)} \mathbf{1}_\Omega(r\cos\theta, r\sin\theta) f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

球坐标变换:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r\in(0,+\infty),\ \theta\in(0,\pi),\ \ \phi\in(0,2\pi).$$

$$\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\Big| = \left|\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right| = r^2\sin\theta\,,$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{(0,+\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)} \widetilde{f}(r,\theta,\phi) r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

其中

$$\widetilde{f}(r,\theta,\phi) = f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$

对一般区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 使用特征函数, 则公式右边的被积函数为$\mathbf{1}_\Omega f$的对应者, 即

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{(0,+\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)} \widetilde{\mathbf{1}_\Omega f}(r,\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

注意$\theta \in (0,\pi) \implies \sin\theta \ge 0$.

【例】设$a>0$. 试做适当的变换将下面棱形区域上的积分 (图示)

$$I = \iint_{|x|+|y|\le a} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成$[-a,a]^2$上的积分.

【解】考虑线性变换: $x+y=u, x-y=v$, 即$x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$. 我们有

$$\begin{aligned}
&|x|+|y|\le a \iff |u+v|+|u-v|\le 2a \iff u^2+v^2+|u^2-v^2|\le 2a^2\\
&\iff \max\{u^2,v^2\} = \frac{u^2+v^2+|u^2-v^2|}{2} \le a^2\\
&\iff |u|\le a,\, |v|\le a \iff (u,v)\in[-a,a]^2.
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{[-a,a]^2} f\Big(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\Big)\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \iint_{[-a,a]^2} f\Big(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\Big)\Big|\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iint_{[-a,a]^2} f\Big(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\Big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

验证: 取$f=1$. 则$I = 4\cdot\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(2a)^2$. □

【例】计算二重积分

$$I = \iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中D 是由四条抛物线$x^2=y, x^2=ay, y^2=x, y^2=bx$ (其中$a>1, b>1$为常数) 围成的有界区域.

【解】由题意有

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid y\le x^2\le ay,\, x\le y^2\le bx\}. \qquad \text{(由此容易画出图形)}$$

注意当$(x,y)\in D$ 且$x>0$ (或等价地, $y>0$) 时有

$0<y\le x^2\le y^4$, $0<x\le y^2\le x^4$, $x^4\le a^2y^2\le a^2bx$, $y^4\le b^2x^2\le b^2ay$

$\implies 1\le x\le (a^2b)^{1/3}, 1\le y\le (b^2a)^{1/3}$. 所以

$$D = \{(0,0)\}\cup\{(x,y)\in[1,(a^2b)^{1/3}]\times[1,(b^2a)^{1/3}]\,|\,y\le x^2\le ay, x\le y^2\le bx\}.$$

因单点集是L-零测集, 对积分无贡献, 故$I = \iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中

$$D_1 = \{(x,y) \in [1,(a^2b)^{1/3}] \times [1,(b^2a)^{1/3}] \,|\, y \le x^2 \le ay, x \le y^2 \le bx\}.$$

下面计算积分: 一种方法是把重积分化成累次积分(Fubini定理):

$$I = \int_1^{(a^2b)^{1/3}} x\Big(\int_{\sqrt{x}\vee\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{bx}\wedge x^2} y\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{(a^2b)^{1/3}} x\left(\Big(\sqrt{bx}\wedge x^2\Big)^2 - \Big(\sqrt{x}\vee\frac{x^2}{a}\Big)^2\right)\mathrm{d}x$$

其中$\alpha\vee\beta = \max\{\alpha,\beta\}, \alpha\wedge\beta = \min\{\alpha,\beta\}$. 通过解不等式可以把积分限定下来化成分段的幂函数的积分.

另一种方法是利用积分换元: 令

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_{>0}.$$

则易见$(u,v) \in [1,a]\times[1,b] \iff (x,y) \in D_1$. 由$u^2v = x^3, uv^2 = y^3$ 解得

$$x = u^{2/3}v^{1/3}, \quad y = u^{1/3}v^{2/3}, \quad (u,v) \in [1,a]\times[1,b].$$

计算

$$\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3}\end{pmatrix}\right| = \Big|\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\Big| = \frac{1}{3},$$

$$I = \iint_{[1,a]\times[1,b]} u^{2/3}v^{1/3}u^{1/3}v^{2/3}\frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\Big(\int_1^a u\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_1^b v\mathrm{d}v\Big) = \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{12}. \quad \square$$

【例】设$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$具有需要的可积性, $a,b,c>0$ 为常数. 将下列三重积分

$$(1) \qquad I = \iiint_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_{\ge 0}} f\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$(2) \qquad J = \iiint_{x,y,z\ge 0,\, xy+yz+zx\le 1} f(xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

化成一维定积分.

【解】(1): 先作伸缩变换: $x = au, y = bv, z = cw$, 后做球坐标变换, 则有

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3_{\ge 0}} f(u^2+v^2+w^2)abc\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= abc\iiint_{(0,+\infty)\times(0,\pi/2)\times(0,\pi/2)} f(r^2)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= abc\Big(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\Big)\Big(\int_0^{+\infty}f(r^2)r^2\mathrm{d}r\Big)\\
&= abc\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}f(r^2)r^2\mathrm{d}r \qquad (\,r=\sqrt{t}\,,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}t^{-1/2}\mathrm{d}t\,)\\
&= \frac{\pi}{4}abc\int_0^{+\infty}f(t)\sqrt{t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

(2): 因$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_{\ge 0}\mid x=0$ 或 $y=0$或 $z=0\}$是零测集, 对积分无贡献, 故有

$$
J=\iiint_{x,y,z>0,\,xy+yz+zx\le 1}f(xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
$$

令

$$
xy=u^2,\quad yz=v^2,\quad zx=w^2,\qquad u,v,w>0,\,u^2+v^2+w^2\le 1
$$

则有$(xyz)^2=xyyzzx=u^2v^2w^2, xyz=uvw,\ x=\frac{u^2}{y}=\frac{u^2zx}{yzx}=\frac{u^2w^2}{uvw}=\frac{uw}{v},\ y=\frac{v^2}{z}=\frac{v^2xy}{zxy}=\frac{v^2u^2}{uvw}=\frac{uv}{w},\ z=\frac{w^2}{x}=\frac{w^2yz}{xyz}=\frac{w^2v^2}{uvw}=\frac{vw}{u}$ 所以

$$
x=\frac{uw}{v},\quad y=\frac{uv}{w},\quad z=\frac{vw}{u},\qquad u,v,w>0,\quad u^2+v^2+w^2\le 1.
$$

这个(x,y,z) 与(u,v,w) 之间的变换是(x,y,z) 的积分区域与(u,v,w)的积分区域(即第一卦限中的单位球) 之间的光滑同胚. 计算

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\Big| &= \left|\det\begin{pmatrix}\frac{w}{v} & \frac{-uw}{v^2} & \frac{u}{v}\\ \frac{v}{w} & \frac{u}{w} & \frac{-uv}{w^2}\\ \frac{-vw}{u^2} & \frac{w}{u} & \frac{v}{u}\end{pmatrix}\right| \qquad (\text{按第一行展开})\\
&= \Big|\frac{w}{v}\Big(\frac{u}{w}\frac{v}{u}+\frac{w}{u}\frac{uv}{w^2}\Big)+\frac{uw}{v^2}\Big(\frac{v}{w}\frac{v}{u}-\frac{vw}{u^2}\frac{uv}{w^2}\Big)+\frac{u}{v}\Big(\frac{v}{w}\frac{w}{u}+\frac{vw}{u^2}\frac{u}{w}\Big)\Big|=4.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
J &= \iint_{u,v,w>0,u^2+v^2+w^2<1}f(u^2+v^2+w^2)4\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
&= 4\iint_{u,v,w>0}\mathbf{1}_{\{u^2+v^2+w^2<1\}}f(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \qquad (\text{ 然后用(1) })\\
&= 4\cdot\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{\{t<1\}}f(t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^1 f(t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t. \qquad\qquad \Box
\end{aligned}
$$

【例】设$a>0,b>0,c>0,R>0,\ \Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是由椭圆抛物面$z=a^2x^2+b^2y^2$ 和曲面$z=R^2-c^2y^2$ 所包围的有界区域. 求Ω的体积$\mathrm{Vol}(\Omega)=m(\Omega)=?$

【解】本题关键是把集合Ω用正确的不等式表达出来. 注意集合

$A:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid a^2x^2+b^2y^2\le z\}$ 是椭圆抛物面$z=a^2x^2+b^2y^2$包围的区域, 而集合$B:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z\le a^2x^2+b^2y^2\}$ 则是这椭圆抛物面包围的区域A的外部. 因此据本题题意知应有$\Omega\subset A$ 而不是$\Omega\subset B$. 又因Ω 有界, 故应有

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid a^2x^2+b^2y^2\le z\le R^2-c^2y^2\}.$$

这是因为另一个不等式集合$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid a^2x^2+b^2y^2\le R^2-c^2y^2\le z\}$ 无界, 不符合题意。

下面计算$m(\Omega)$. 注意

$$(x,y,z)\in\Omega\Longrightarrow a^2x^2+b^2y^2\le R^2-c^2y^2\quad\text{即}\quad a^2x^2+(b^2+c^2)y^2\le R^2$$

因此

$$\mathbf{1}_\Omega(x,y,z)=\mathbf{1}_{\{a^2x^2+(b^2+c^2)y^2\le R^2\}}\mathbf{1}_\Omega(x,y,z)=\mathbf{1}_{\{a^2x^2+(b^2+c^2)y^2\le R^2\}}\mathbf{1}_{\{a^2x^2+b^2y^2\le z\le R^2-c^2y^2\}}.$$

由重积分化累次积分(Fubini 定理)有

$$\begin{aligned}
m(\Omega)&=\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathbf{1}_\Omega(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_\Omega(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{a^2x^2+(b^2+c^2)y^2\le R^2\}}\mathbf{1}_{\{a^2x^2+b^2y^2\le z\le R^2-c^2y^2\}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{\{a^2x^2+(b^2+c^2)y^2\le R^2\}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{a^2x^2+b^2y^2\le z\le R^2-c^2y^2\}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{a^2x^2+(b^2+c^2)y^2\le R^2}\left(\int_{a^2x^2+b^2y^2}^{R^2-c^2y^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{a^2x^2+(b^2+c^2)y^2\le R^2}\left(R^2-a^2x^2-(b^2+c^2)y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{做线性变换}(x,y)=\left(\tfrac{u}{a},\ \tfrac{v}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)\\
&=\iint_{u^2+v^2\le R^2}\left(R^2-u^2-v^2\right)\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\iint_{u^2+v^2\le R^2}\left(R^2-u^2-v^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\qquad\big(\,(u,v)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\big)\\
&=\frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\int_0^R\int_0^{2\pi}\left(R^2-r^2\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\Big(\int_0^R\left(R^2-r^2\right)r\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\Big)\\
&=\frac{2\pi}{a\sqrt{b^2+c^2}}\int_0^R\left(R^2r-r^3\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{2a\sqrt{b^2+c^2}}.
\end{aligned}$$

□

【例】设$a>0$为常数, D是由"∞"型的曲线(即双纽线) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 围成的两个有界区域中的右侧区域(即$x\ge 0$). 试导出

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的计算公式, 并计算D的面积$m(D)$.

【解】区域D 是由不等式

$(x^2+y^2)^2\ge a^2(x^2-y^2)\,(x\ge 0)$ 或 $(x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)\,(x\ge 0)$

给出的有界集合. 因第一个不等式确定的集合无界, 第二个有界, 故D只能是由第二个不等式确定的集合, 即

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid (x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2),\ x\ge 0\}.$$

考虑极坐标换元: $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi, r\ge 0, -\pi/2\le\phi\le\pi/2$. 则有$r^4\le a^2r^2(\cos^2\phi-\sin^2\phi)$, 即$r^2\le a^2\cos(2\phi)$. 注意$\cos(2\phi)\ge 0$, 故$\phi$的变化范围是$-\pi/4\le\phi\le\pi/4$. 因此$0\le r\le a\sqrt{\cos(2\phi)}$, $-\pi/4\le\phi\le\pi/4$. 所以由极坐标换元公式有

$$\begin{aligned}I&=\iint_{(0,+\infty)\times(-\pi/4,\pi/4)}\mathbf{1}_{\{r\le a\sqrt{\cos(2\phi)}\}}f(r\cos\phi,r\sin\phi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\\&=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big(\int_0^{a\sqrt{\cos(2\phi)}}f(r\cos\phi,r\sin\phi)r\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

取$f\equiv 1$ 得到

$$\begin{aligned}m(D)&=\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big(\int_0^{a\sqrt{\cos(2\phi)}}r\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}\phi=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{a^2\cos(2\phi)}{2}\mathrm{d}\phi\\&=a^2\int_0^{\pi/4}\cos(2\phi)\mathrm{d}\phi=a^2\Big(\frac{\sin(2\phi)}{2}\Big|_0^{\pi/4}\Big)=\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$ □

【例】设$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(-1,+\infty)$ 为常数, 计算积分

$$I=\iiint_{x,y,z>0,x+y+z<1}x^\alpha y^\beta z^\gamma(1-x-y-z)^\delta\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【解】考虑换元

$$x=r(1-u-v),\quad y=ru,\quad z=rv,\qquad 0<r<1,\ u,v>0,\ u+v<1.$$

则

$$r=x+y+z,\quad u=\frac{y}{x+y+z},\quad v=\frac{z}{x+y+z},\qquad x,y,z>0,\,x+y+z<1.$$

这表明上述变换是(x,y,z)的积分区域与(r,u,v)的积分区域之间的光滑同胚. 计算

$$\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,v)}\Big| = \left|\det\begin{pmatrix} 1-u-v & -r & -r \\ u & r & 0 \\ v & 0 & r \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(按第一行展开)}$$
$$= |(1-u-v)r^2 + rur - r(-vr)| = r^2.$$

所以

$$I = \int_{r=0}^{r=1} \iint_{u,v>0,u+v<1} (r(1-u-v))^{\alpha}(ru)^{\beta}(rv)^{\gamma}(1-r)^{\delta} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \Big(\int_0^1 r^{\alpha+\beta+\gamma+2}(1-r)^{\delta}\mathrm{d}r\Big)\iint_{u,v>0,u+v<1}(1-u-v)^{\alpha}u^{\beta}v^{\gamma}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

对(u,v)的二重积分再作换元:

$$u = x(1-y), \quad v = xy, \quad 0<x<1, 0<y<1.$$

则可反解出$x = u+v, y = \frac{v}{u+v}$. 所以它们之间是光滑同胚. 计算

$$\Big|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big| = \left|\det\begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{pmatrix}\right| = |(1-y)x + xy| = x,$$

$$\iint_{u,v>0,u+v<1}(1-u-v)^{\alpha}u^{\beta}v^{\gamma}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{(0,1)\times(0,1)}(1-x)^{\alpha}(x(1-y))^{\beta}(xy)^{\gamma}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{(0,1)\times(0,1)}(1-x)^{\alpha}x^{\beta+\gamma+1}(1-y)^{\beta}y^{\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \Big(\int_0^1 (1-x)^{\alpha}x^{\beta+\gamma+1}\mathrm{d}x\Big)\int_0^1(1-y)^{\beta}y^{\gamma}\mathrm{d}y$$
$$= \mathrm{B}(\alpha+1, \beta+\gamma+2)\mathrm{B}(\gamma+1,\beta+1)$$

这里$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ $(p>0, q>0)$ 是Beta 函数. 对它的计算可以利用它与Gamma 函数的关系$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $(p,q>0)$ 和Gamma 函数的数值结果, 例如$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 等等(见下面). 最后得出: 本题的积分等于

$$I = \mathrm{B}(\alpha+\beta+\gamma+3, \delta+1)\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+\gamma+2)\mathrm{B}(\gamma+1,\beta+1). \qquad \square$$

【$\mathbb{R}^n$ 上的球极坐标换元公式和球面测度(不妨设$n\ge 3$)】

设映射

$$\Psi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1}) \mapsto x = \Psi(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1})$$

的表达式为

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \Psi_1(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1}) = r\cos\theta_1\,,\\
&x_2 = \Psi_2(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1}) = r\sin\theta_1\cos\theta_2\,,\\
&x_3 = \Psi_3(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1}) = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\,,\\
&\cdots\cdots\\
&x_{n-1} = \Psi_{n-1}(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1}) = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\,,\\
&x_n\ = \Psi_k(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1}) =\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

球极坐标变换被定义为是映射Ψ 在$[0,+\infty)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]$ 上的限制.

由第八章**命题8.39(球极坐标变换)** 知球极坐标变换$\Psi:[0,+\infty)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^n$ 是满射, 而Ψ 在开区间$(0,+\infty)\times(0,\pi)^{n-2}\times(0,2\pi)$ 上是单射. 因$\Psi\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 且$(0,+\infty)\times(0,\pi)^{n-2}\times(0,2\pi)$ 的边界是零测集, 故由**定理10.40(闭区域上的换元公式)** 知对任意$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 或f 在$\mathbb{R}^n$ 上非负可测有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{[0,+\infty)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]} f(\Psi(r,\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}))|\mathrm{det}\Psi'(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1})|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

经计算有(见陈天权《数学分析讲义》第二册§ 8.8 习题3(iv))

$$|\mathrm{det}\Psi'(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1})| = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\,.$$

令

$$\Phi(\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}) = \Psi(1,\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1})$$

则Ψ 可写为

$$\Psi(r,\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}) = r\Phi(\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}).$$

我们在**命题8.39(球极坐标变换)**的证明中已证明了$\Phi:[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]\to\mathbb{S}^{n-1}$ 是满射且Φ在开区间$(0,\pi)^{n-2}\times(0,2\pi)$ 上是单射. 这里

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\omega\in\mathbb{R}^n\mid|\omega| = 1\}$$

是单位球面. 从上面导出的结果可知, 球极坐标换元公式可以概括为下面定理

【定理10.41】设$n\ge 3$, $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 或f 在$\mathbb{R}^n$ 上非负可测. 则

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_{[0,+\infty)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]} f(r\Phi(\theta_1,....,\theta_{n-1}))r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}.
\end{aligned}
$$

应用Fubini定理, 上述公式还可表为累次积分的形式:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{\infty}\left(\int_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]} f(r\Phi(\theta_1,....,\theta_{n-1}))\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}\right)r^{n-1}\mathrm{d}r\\
=&\int_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]}\left(\int_0^{\infty} r^{n-1}f(r\Phi(\theta_1,....,\theta_{n-1}))\mathrm{d}r\right)\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}.
\end{aligned}
$$

□

如果积分区域为Ω, 则借助

$$\int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{\Omega}(x)f(x)\mathrm{d}x$$

即得到$\int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x$ 的换元公式.

为了将上述球极坐标换元公式表示成紧凑、直观的形式, 我们引进

【$n-1$维的球面测度和球面积分($n\ge 3$)】 令

$$\mathcal{M}_{n-1}=\{E\subset\mathbb{R}^n\mid \Phi^{-1}(E\cap\mathbb{S}^{n-1})\ \text{是}\ [0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]\ \text{中的}L\text{-可测集}\},$$

$$\sigma(E)=\int_{\Phi^{-1}(E\cap\mathbb{S}^{n-1})}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1},\quad E\in\mathcal{M}_{n-1}.$$

【命题10.42】设$n\ge 3$. 则

(a) $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_{n-1})$是一个可测空间.

(b) $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_{n-1},\sigma)$ 是一个完备的测度空间. 此外对任意$E\in\mathcal{M}_{n-1}$ 有

$$\sigma(E)=0\quad\Longleftrightarrow\quad m_{n-1}(\Phi^{-1}(E\cap\mathbb{S}^{n-1}))=0$$

其中m_{n-1} 是$\mathbb{R}^{n-1}$ 上的Lebesgue 测度.

(c)

$$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})=\int_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}<+\infty.$$

(d) 设f 是$\mathbb{S}^{n-1}$ 上的实值或复值函数. 则

f 在$\mathbb{S}^{n-1}$ 上$\mathcal{M}_{n-1}$-可测

$\Longleftrightarrow$ 函数$(\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1})\mapsto f(\Phi(\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}))$ 在$[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]$ 上L-可测

$\Longleftrightarrow$ 函数$(\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1})\mapsto f(\Phi(\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}))\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$ 在$[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]$ 上L- 可测.

(e) 若$f\in L^1(\mathbb{S}^{n-1},\sigma)$或$f$ 在$\mathbb{S}^{n-1}$ 上非负$\mathcal{M}_{n-1}$-可测, 则有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)\\&=\int_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]}f(\Phi(\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}))\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}.\end{aligned}$$

【证】(a): 来证明$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_{n-1})$满足可测空间的三条规定性质(见第九章**§9.2**).

(i): 因$\Phi:[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]\to\mathbb{S}^{n-1}$ 是满射, 故

$$\Phi^{-1}(\mathbb{R}^n\cap\mathbb{S}^{n-1})=\Phi^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})=[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]\quad\text{是}L\text{-可测集.}$$

所以$\mathbb{R}^n\in\mathcal{M}_{n-1}$.

(ii): 设$E\in\mathcal{M}_{n-1}$. 因$E^c=\mathbb{R}^n\setminus E$, 故由$\Phi^{-1}(\mathbb{S}^{n-1}),\Phi^{-1}(E\cap\mathbb{S}^{n-1})$ 是L-可测集知

$$\Phi^{-1}(E^c\cap\mathbb{S}^{n-1})=\Phi^{-1}(\mathbb{S}^{n-1}\setminus E\cap\mathbb{S}^{n-1})=\Phi^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})\setminus\Phi^{-1}(E\cap\mathbb{S}^{n-1})\ \text{是}L\text{-可测集.}$$

所以$E^c\in\mathcal{M}_{n-1}$.

(iii): 设$E_k\in\mathcal{M}_{n-1},k=1,2,3,\dots$. 则由$\Phi^{-1}(E_k\cap\mathbb{S}^{n-1})$ 是L-可测集有

$$\Phi^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\cap\mathbb{S}^{n-1}\Big)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Phi^{-1}(E_k\cap\mathbb{S}^{n-1})\ \text{是}L\text{-可测集.}$$

所以$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathcal{M}_{n-1}$.   这就证明了$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_{n-1})$是一个可测空间.

(b): 先证明$(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_{n-1},\sigma)$ 是一个测度空间, 即证明σ 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个测度.

(i): 由σ的定义和$\Phi^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ 知$\sigma(\emptyset)=0$.

(ii): 设$E_k\in\mathcal{M}_{n-1}$ 互不相交$(k=1,2,3,,...)$. 则$\Phi^{-1}(E_k\cap\mathbb{S}^{n-1})$ 互不相交$(k=1,2,3,,...)$. 再由$\Phi^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\cap\mathbb{S}^{n-1})=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Phi^{-1}(E_k\cap\mathbb{S}^{n-1})$ 有

$$\sigma\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)=\int_{\Phi^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\cap\mathbb{S}^{n-1})}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Phi^{-1}(E_k \cap \mathbb{S}^{n-1})} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(E_k).$$

所以σ 具有可数可加性. 所以σ 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个测度.

其次证明$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n-1}, \sigma)$ 是完备的, 即证明σ-零测集的子集也属于$\mathcal{M}_{n-1}$.

为此我们先证明, 若$E \in \mathcal{M}_{n-1}$ 则有:

$$\sigma(E) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m_{n-1}(\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1})) = 0.$$

事实上假如$\sigma(E) = 0$, 则由$\sigma(E)$的定义和

$$\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} > 0 \qquad \forall\, (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \in (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$$

以及**定理10.4(j)**可知

$$m_{n-1}\Big(\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1}) \cap ((0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi))\Big) = 0.$$

因

$$\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1}) \setminus \Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1}) \cap ((0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)) \subset \partial([0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi])$$

且$m_{n-1}(\partial([0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]) = 0$, 所以

$$m_{n-1}\Big(\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1}) \setminus \Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1}) \cap ((0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi))\Big) = 0$$

从而得到

$$m_{n-1}(\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1})) = m_{n-1}\Big(\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1}) \cap ((0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi))\Big) = 0.$$

反之假如$m_{n-1}(\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1})) = 0$, 则由$\sigma(E)$的定义显然有$\sigma(E) = 0$.

看完备性: 设$E \in \mathcal{M}_{n-1}$ 且$\sigma(E) = 0$. 则对任意子集$Z \subset E$, 有$\Phi^{-1}(Z \cap \mathbb{S}^{n-1}) \subset \Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1})$. 由$m_{n-1}(\Phi^{-1}(E \cap \mathbb{S}^{n-1})) = 0$ 和L- 测度空间的完备性知$\Phi^{-1}(Z \cap \mathbb{S}^{n-1})$ 也是L-可测集. 因此$Z \in \mathcal{M}_{n-1}$. 所以$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n-1}, \sigma)$ 是完备的.

(c)：这是显然的.

(d)-(e) 的证明: 因一个复值函数的可测性/可积性等价于该函数的实部虚部的可测性/可积性. 因此只需考虑实值函数. 又因一个实值函数的可测性/可积性等价于该函数的正部负部的可测性/可积性. 因此只需非负的实值函数. 再因一个非负函数f是可

测函数当且仅当f可以表示成可数个可测集的特征函数的正线性组合(即正项函数级数), 于是再结合非负可测函数的逐项积分定理即知为证(d)-(e), 我们只需考虑f是集合的特征函数的情形.

我们将用到一个周知的事实: 一个集合的可测性等价于该集合的特征函数的可测性; 一个可测集的测度等于该集合的特征函数的积分.

设$E \subset \mathbb{S}^{n-1}$. 则有:

函数$\omega \mapsto \mathbf{1}_E(\omega)$ 在$\mathbb{S}^{n-1}$ 上$\mathcal{M}_{n-1}$-可测$\iff$ $E \in \mathcal{M}_{n-1}$ $\iff$ $\Phi^{-1}(E)$ 是L-可测集

$\iff$函数$(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \mapsto \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(E)}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$ 在$[0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ 上L-可测

$\iff$函数$(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \mapsto \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(E)}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$ 在$(0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ 上L-可测

$\iff$函数$(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \mapsto \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(E)}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}$ 在$(0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ 上L-可测

$\iff$函数$(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \mapsto \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(E)}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}$ 在$[0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ 上L- 可测.

以上用到了事实: $[0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ 与$(0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$相差一个零测集以及$\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}$ 在开区间$(0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$上严格大于零.

最后由恒等式

$$\mathbf{1}_E(\Phi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})) \equiv \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(E)}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \tag{5.19}$$

即知当$f(\omega) = \mathbf{1}_E(\omega)$时(d)成立.

现在设$\omega \mapsto \mathbf{1}_E(\omega)$ 在$\mathbb{S}^{n-1}$ 上$\mathcal{M}_{n-1}$-可测. 则由上面已证的结果和$\sigma(E)$的定义以及恒等式(5.19)即得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbf{1}_E(\omega) \mathrm{d}\sigma(\omega) = \sigma(E) \\
&= \int_{[0,\pi]^{n-1}\times[0,2\pi]} \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(E)}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1} \\
&= \int_{[0,\pi]^{n-1}\times[0,2\pi]} \mathbf{1}_E(\Phi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})) \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1}.
\end{aligned}$$

这证明了(e)对于可测集的特征函数成立. □

根据以上两个命题和Fubini定理, 我们可将$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 积分表示成沿球面的积分与沿径向的积分的合成:

【**定理10.43**】设$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 或f 在$\mathbb{R}^n$ 上非负可测. 则有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)\right)r^{n-1}\mathrm{d}r=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty} r^{n-1}f(r\omega)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\sigma(\omega).$$

以上累次积分的详细性质为:

对于几乎所有$r>0$, 函数$\omega\mapsto f(r\omega)$ 在$\mathbb{S}^{n-1}$ 上σ-可积或相应地$\mathcal{M}(\mathbb{S}^{n-1})$-非负可测,

函数$r\mapsto r^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)$ 在$(0,+\infty)$ 上L-可积或相应地非负可测;

对于σ-几乎所有$\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$, 函数$r\mapsto r^{n-1}f(r\omega)$ 在$(0,+\infty)$ 上L-可积或相应地非负可测,

函数$\omega\mapsto\int_0^{+\infty} r^{n-1}f(r\omega)\mathrm{d}r$ 在$\mathbb{S}^{n-1}$上σ-可积或相应地$\mathcal{M}(\mathbb{S}^{n-1})$-非负可测. $\Box$

注: 如果积分区域为一般区域Ω, 则借助特征函数得到

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathbf{1}_\Omega(r\omega)f(r\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)\right)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

例如对于$0\le a<b$ 有

$$\int_{a\le|x|\le b} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)\right)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

由这一定理特别可知: 若f 是径向函数, 即$f=f(|x|)$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\mathrm{d}x=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{+\infty} r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r.$$

$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$的计算将在下面给出. 但对$n=3$, 容易算出

$$\sigma(\mathbb{S}^2)=\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=4\pi\qquad(\text{单位球面的面积}).$$

【**Gauss 函数和Gauss 积分**】

指数函数$\exp(-\frac{|x-x_0|^2}{2a})$ $(a>0)$ 称为Gauss 函数, 它在数学分析, 概率统计, 统计物理等经常出现, 联系着Fourier 变换, 正态分布(或Gauss 分布), 热力学平衡态等. 经平移和伸缩变换后$\exp(-\frac{|x-x_0|^2}{2a})$的积分变成了标准形式$e^{-|x|^2/2}$的积分(称为Gauss积分):

$$\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\frac{|x-x_0|^2}{2a})\mathrm{d}x=a^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2}\mathrm{d}x\,.$$

为计算Gauss 积分, 我们先利用乘积型函数的累次积分(见**Fubini定理的推论2**) 导出

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2}\mathrm{d}x=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2/2}\mathrm{d}x_i=\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t\Big)^n.$$

然后利用二维积分和极坐标换元公式计算一维Gauss 积分:

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\Big)^2=\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\mathrm{d}y\Big)=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\pi\int_0^{+\infty} re^{-r^2/2}\mathrm{d}r=-2\pi e^{-r^2/2}\Big|_0^{+\infty}=2\pi.$$

两边开方得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\,.$$

这就给出

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2}=(2\pi)^{n/2}. \qquad \square$$

回忆Gamma 函数:

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t,\quad s>0\,.$$

则有

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$

[计算:

$$\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\mathrm{d}t=\ (t=x^2/2)\ =\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{x^2}}e^{-x^2/2}x\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.\qquad]$$

【单位球面面积$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$与单位球体积$m(\mathbb{B}^n)$的计算】

利用Gauss积分和球极坐标换元公式我们有

$$(2\pi)^{n/2}=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2}\mathrm{d}x=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{+\infty} r^{n-1}e^{-r^2/2}\mathrm{d}r\,.$$

作变量替换$r=\sqrt{2t}$ 计算

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1}e^{-r^2/2}\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}(2t)^{(n-1)/2}\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2^{n/2}}{2}\int_0^{+\infty} t^{n/2-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2^{n/2}}{2}\Gamma(n/2)$$

其中$\Gamma(\cdot)$ 为Gamma 函数. 于是得到

$$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}=n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,.$$

最后令

$$\mathbb{B}^n=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|\le 1\}\quad (n \text{ 维单位球}).$$

则有$\mathbf{1}_{\mathbb{B}^n}(x)=\mathbf{1}_{[0,1]}(|x|)$. 应用球极坐标换元公式我们得到$m(\mathbb{B}^n)$ 与$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$的关系:

$$m(\mathbb{B}^n)=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{+\infty}r^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(r)\mathrm{d}r=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r=\frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{n}$$

从而有

$$m(\mathbb{B}^n)=\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,.$$

联合$m(\mathbb{B}^n)$ 与$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$的关系我们得到

$$m(\mathbb{B}^n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},\qquad \sigma(\mathbb{S}^{n-1})=nm(\mathbb{B}^n).$$

注意 这个关系式对于$n=2$ 也成立, 其中定义$\sigma(\mathbb{S}^1)=2\pi$ 为单位圆周$\mathbb{S}^1$ 的周长.

利用球极坐标换元公式易证闭球$\overline{B}(x_0,R)$和开球$B(x_0,R)$ 有相同的体积, 因此它们的的边界$\partial B(x_0,R)$是零测集, 即

$$m(\partial B(x_0,R))=0.$$

事实上由平移不变性和球极坐标换元公式有

$$\begin{aligned}
&m(\overline{B}(x_0,R))=m(x_0+\overline{B}(0,R))=m(\overline{B}(0,R))=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{[0,R]}(|x|)\mathrm{d}x\\
&=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{+\infty}r^{n-1}\mathbf{1}_{[0,R]}(r)\mathrm{d}r=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^R r^{n-1}\mathrm{d}r=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\frac{R^n}{n}\\
&=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{+\infty}r^{n-1}\mathbf{1}_{[0,R)}(r)\mathrm{d}r=m(B(0,R))=m(x_0+B(0,R))=m(B(x_0,R)).
\end{aligned}$$

从这一推导还得到

$$m(\overline{B}(x_0,R))=m(B(x_0,R))=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\frac{R^n}{n}=m(\mathbb{B}^n)R^n.$$

现在我们介绍一个有趣且有用的性质:

【命题10.44(等径不等式 isodiametric inequality)】

设$n\in\mathbb{N}, m_n$ 为$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue测度. 则对任一Lebesgue 可测集$E\subset\mathbb{R}^n$有

$$m_n(E)\le\alpha_n\Big(\frac{\mathrm{diam}(E)}{2}\Big)^n$$

其中

$$\alpha_n=m_n(\mathbb{B}^n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

换言之,E的体积不超过闭球$\overline{B}(0,\frac{1}{2}\mathrm{diam}(E))$的体积:

$$m_n(E)\le m_n\Big(\overline{B}(0,\frac{1}{2}\mathrm{diam}(E))\Big).$$

这里约定$\mathrm{diam}(\emptyset)=0, \overline{B}(0,r)|_{r=0}=\{0\}, \overline{B}(0,r)|_{r=+\infty}=\mathbb{R}^n$.

【证】易见当$n=1$时等径不等式成立. 事实上令$a=\inf E, b=\sup E$. 则$E\subset[a,b]$且$b-a=\mathrm{diam}(E)$. 因此

$$m_1(E)\le b-a=\mathrm{diam}(E)=2\cdot\frac{\mathrm{diam}(E)}{2}=m_1(\mathbb{B}^1)\frac{\mathrm{diam}(E)}{2}.$$

下面我们对维数n用归纳法. 假设等径不等式当维数等于$n-1\,(\ge 1)$时成立. 如上, 我们m_k 表示$\mathbb{R}^k$ 上的Lebesgue 测度.

任取Lebesgue可测集$E\subset\mathbb{R}^n$. 考虑E的截口E_x, E^y (它们可以是空集):

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}\,|\,(x,y)\in E\},\ x\in\mathbb{R}^{n-1};\quad E^y=\{x\in\mathbb{R}^{n-1}\,|\,(x,y)\in E\},\ y\in\mathbb{R}.$$

定义E的**Steiner** 对称化$\mathcal{S}E$ 和E的**Schwarz** 对称化$\mathcal{T}E$如下:

$$\mathcal{S}E=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\ \Big|\ |y|<\frac{m_1(E_x)}{2}\Big\},$$

$$\mathcal{T}E=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\,\Big|\ |x|<\Big(\frac{m_{n-1}(E^y)}{m_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1})}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big\}.$$

由**命题10.35**或**Fubini 定理** 知$x\mapsto m_1(E_x)=\int_{\mathbb{R}}1_E(x,y)\mathrm{d}y$是$\mathbb{R}^{n-1}$上的$L$-可测函数, $y\mapsto m_{n-1}(E^y)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}1_E(x,y)\mathrm{d}x$是$\mathbb{R}$ 上的L-可测函数. 因此函数

$$f(x,y):=|y|-\frac{m_1(E_x)}{2},\qquad g(x,y):=|x|-\Big(\frac{m_{n-1}(E^y)}{m_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1})}\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

都是$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ 上的L-可测函数. 于是由

$$\mathcal{S}E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\,|\,f(x,y)<0\},\quad\mathcal{T}E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\,|\,g(x,y)<0\}$$

可知$\mathcal{S}E,\mathcal{T}E$ 都是L-可测集. 此外有恒等式:

$$m_n(E)=m_n(\mathcal{S}E)=m_n(\mathcal{T}E). \tag{5.20}$$

事实上由**Fubini 定理** 并注意截口的定义有

$$m_n(E)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_E(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{E_x}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}m_1(E_x)\mathrm{d}x.$$

而注意到$(\mathcal{S}E)_x=(-\frac{m_1(E_x)}{2},\ \frac{m_1(E_x)}{2})$, 得到$m_1((\mathcal{S}E)_x)=m_1(E_x)$ 从而有

$$m_n(\mathcal{S}E)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}m_1((\mathcal{S}E)_x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}m_1(E_x)\mathrm{d}x=m_n(E).$$

类似地, 注意到

$$(\mathcal{T}E)^y=B\Big(0,\Big(\frac{m_{n-1}(E^y)}{m_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1})}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big)\qquad(\mathbb{R}^{n-1}\text{中的球}),$$

$$\Longrightarrow\quad m_{n-1}((\mathcal{T}E)^y)=m_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1})\cdot\frac{m_{n-1}(E^y)}{m_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1})}=m_{n-1}(E^y)$$

得到

$$m_n(\mathcal{T}E)=\int_{\mathbb{R}}m_{n-1}((\mathcal{T}E)^y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}}m_{n-1}(E^y)\mathrm{d}y=m_n(E).$$

所以(5.20) 成立.

由恒等式(5.20)我们得到恒等式:

$$m_n(\mathcal{T}\mathcal{S}E)=m_n(\mathcal{S}E)=m_n(E). \tag{5.21}$$

来看集合$\mathcal{T}\mathcal{S}E$. 为保证论证的严格性, 我们进一步假设E 是紧集. 此时易见对每个$x\in\mathbb{R}^{n-1}$, 截口E_x 也是紧集从而是可测集. 因此函数$x\mapsto m_1(E_x)$ 在$\mathbb{R}^{n-1}$ 上处处有定义且在$\mathbb{R}^{n-1}$ 上L-可测.

根据**Schwarz**对称化和**Steiner** 对称化的定义有

$$\mathcal{T}\mathcal{S}E=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\,\Big|\,|x|<\Big(\frac{m_{n-1}((\mathcal{S}E)^y)}{m_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1})}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big\},$$

$$(\mathcal{S}E)^y=\Big\{x\in\mathbb{R}^{n-1}\,\Big|\,|y|<\frac{m_1(E_x)}{2}\Big\},\quad y\in\mathbb{R}.$$

来证明

$$\mathcal{T}\mathcal{S}E\subset\overline{B}\Big(0,\,\frac{1}{2}\mathrm{diam}(E)\Big). \tag{5.22}$$

任取$(x,y)\in\mathcal{TS}E$. 由$\mathcal{TS}E$的定义和归纳假设有

$$|x|<\Big(\frac{m_{n-1}(\mathcal{S}E)^y)}{m_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1})}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\le\frac{\mathrm{diam}(\mathcal{S}E)^y)}{2}.$$

注意上面第一个严格不等号蕴含$(\mathcal{S}E)^y$ 非空. 因紧集E有界, 故当$|x|$ 充分大时E_x为空集. 由此可知$(\mathcal{S}E)^y$ 有界. 对任意$\varepsilon>0$, 由直径的定义, 存在$x_1,x_2\in(\mathcal{S}E)^y$ 使得$\mathrm{diam}((\mathcal{S}E)^y)<\sqrt{|x_1-x_2|^2+\varepsilon}$. 因此有$|x|<\frac{1}{2}\sqrt{|x_1-x_2|^2+\varepsilon}$. 又由截口的定义知$(x_1,y),(x_2,y)\in\mathcal{S}E$. 因此

$$|y|<\frac{1}{2}m_1(E_{x_1})\le\frac{1}{2}\mathrm{diam}(E_{x_1}),\quad |y|<\frac{1}{2}m_1(E_{x_2})\le\frac{1}{2}\mathrm{diam}(E_{x_2}).$$

上面两个严格不等号保证了E_{x_1},E_{x_2} 非空. 因E 是紧集, 故易见E的截口也是紧集. 于是存在$y_1^{(1)},y_1^{(2)}\in E_{x_1},y_2^{(1)},y_2^{(2)}\in E_{x_2}$使得

$$\mathrm{diam}(E_{x_1})=|y_1^{(1)}-y_1^{(2)}|,\quad \mathrm{diam}(E_{x_2})=|y_2^{(1)}-y_2^{(2)}|.$$

这给出

$$|y|<\frac{1}{2}\min\{|y_1^{(1)}-y_1^{(2)}|,|y_2^{(1)}-y_2^{(2)}|\}.$$

注意到$y_i^{(j)}$是实数, 故不难证明

$$\min\{|y_1^{(1)}-y_1^{(2)}|,|y_2^{(1)}-y_2^{(2)}|\}\le\max_{i,j\in\{1,2\}}|y_1^{(i)}-y_2^{(j)}|. \tag{5.23}$$

事实上若$y_1^{(1)}\wedge y_1^{(2)}\le y_2^{(1)}\wedge y_2^{(2)}$, 则

$|y_2^{(1)}-y_2^{(2)}|=y_2^{(1)}\vee y_2^{(2)}-y_2^{(1)}\wedge y_2^{(2)}\le y_2^{(1)}\vee y_2^{(2)}-y_1^{(1)}\wedge y_1^{(2)}$从而(5.23)成立;

若$y_1^{(1)}\wedge y_1^{(2)}\ge y_2^{(1)}\wedge y_2^{(2)}$, 则

$|y_1^{(1)}-y_1^{(2)}|=y_1^{(1)}\vee y_1^{(2)}-y_1^{(1)}\wedge y_1^{(2)}\le y_1^{(1)}\vee y_1^{(2)}-y_2^{(1)}\wedge y_2^{(2)}$从而(5.23)仍成立.

将(5.23)的右边写为$|y_1^{(i_0)}-y_2^{(j_0)}|$ for some $i_0,j_0\in\{1,2\}$. 则$|y|<\frac{1}{2}|y_1^{(i_0)}-y_2^{(j_0)}|$. 于是由上面得到的不等式和$(x_1,y_1^{(i_0)}),(x_2,y_2^{(j_0)})\in E$ 得到

$$|(x,y)|=\sqrt{|x|^2+|y|^2}<\frac{1}{2}\sqrt{|x_1-x_2|^2+\varepsilon+|y_1^{(i_0)}-y_2^{(j_0)}|^2}$$

$$\le\frac{1}{2}|(x_1,y_1^{(i_0)})-(x_2,y_2^{(j_0)})|+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\le\frac{1}{2}\mathrm{diam}(E)+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}.$$

据$\varepsilon>0$的任意性知

$$|(x,y)|\le\frac{1}{2}\mathrm{diam}(E).$$

所以(5.22)成立.

于是当E是紧集时, 由(5.21), (5.22)得到

$$m_n(E)=m_n(\mathcal{TS}E)\le m_n(\mathbb{B}^n)\Big(\frac{\mathrm{diam}(E)}{2}\Big)^n.$$

对于一般情形, 由Lebesgue 可测集的结构定理知存在一列紧集$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset E$ 和一个零测集Z使得$E=Z\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$. 因$K_j$ 是紧集且含于E中, 故

$$m_n(K_j)\le m_n(\mathbb{B}^n)\Big(\frac{\mathrm{diam}(K_j)}{2}\Big)^n\le m_n(\mathbb{B}^n)\Big(\frac{\mathrm{diam}(E)}{2}\Big)^n,\quad j=1,2,3,\dots.$$

因此

$$m_n(E)=m_n\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)=\lim_{j\to\infty}m_n(K_j)\le m_n(\mathbb{B}^n)\Big(\frac{\mathrm{diam}(E)}{2}\Big)^n.$$

这证明了当维数等于n时等径不等式也成立. □

本节最后我们学习关于Gauss 积分和Lebesgue 控制收敛的一个重要应用——

【Laplace 积分渐近式的主项定理】设$-\infty\le a<c<b\le+\infty$.

设$\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ 属于C^2 类, 满足

$$\varphi(c)=\varphi'(c)=0\,,\quad \varphi''(x)<0\quad \forall x\in(a,b);\quad \int_a^b e^{\varphi(x)}\mathrm{d}x<+\infty.$$

则分别有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_a^c e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_c^b e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(c)}},$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_a^b e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(c)}}\,.$$

【证】由假设条件知φ 在(a,b) 上非正且φ 在$(a,c]$ 上严格递增, 在$[c,b)$ 上严格递减. 取$r>0$ 充分小使得$[c-r,c+r]\subset(a,b)$. 由积分型余项的Taylor公式有

$$\varphi(x_0+t)=\frac{-A}{2}t^2+\psi(t)t^2,\quad t\in[-r,r]\tag{5.24}$$

其中

$$A=-\varphi''(c),\quad \psi(t)=\int_0^1(1-\theta)(\varphi''(c+\theta t)-\varphi''(c))\mathrm{d}\theta\,,\quad t\in[-r,r].$$

由$\varphi\in C^2((a,b))$ 易见ψ在$[-r,r]$ 上连续. 注意$\psi(0)=0$. 故存在$0<\delta<r$使得

$$|\psi(t)|\le \frac{A}{4}\qquad \forall\, t\in[-\delta,\delta]. \tag{5.25}$$

作分解

$$\sqrt{\lambda}\int_a^c e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\sqrt{\lambda}\int_a^{c-\delta} e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x+\sqrt{\lambda}\int_{c-\delta}^{c} e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x.$$

令$\alpha=-\varphi(c-\delta),\beta=-\varphi(c+\delta)$, 则$\alpha>0,\beta>0$ 且当$x\in(a,c-\delta]$ 时$\varphi(x)\le\varphi(x_0-\delta)=-\alpha$; 当$x\in[c+\delta,b)$ 时$\varphi(x)\le\varphi(c+\delta)=-\beta$. 因此当$\lambda\ge 2$ 时

$$\sqrt{\lambda}\int_a^{c-\delta} e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x\le\sqrt{\lambda}\int_a^{c-\delta} e^{-\lambda\alpha/2}e^{\lambda\varphi(x)/2}\mathrm{d}x\le\frac{\sqrt{\lambda}}{e^{\lambda\alpha/2}}\int_a^{c-\delta} e^{\varphi(x)}\mathrm{d}x\to 0\quad(\lambda\to+\infty).$$

$$\sqrt{\lambda}\int_{c+\delta}^{b} e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x\le\sqrt{\lambda}\int_{c+\delta}^{b} e^{-\lambda\alpha/2}e^{\lambda\varphi(x)/2}\mathrm{d}x\le\frac{\sqrt{\lambda}}{e^{\lambda\alpha/2}}\int_{c+\delta}^{b} e^{\varphi(x)}\mathrm{d}x\to 0\quad(\lambda\to+\infty).$$

对积分$\int_{c-\delta}^{c}$, 作换元$x=c-\frac{u}{\sqrt{\lambda}}$; 对积分$\int_{c}^{c+\delta}$, 作换元$x=c+\frac{u}{\sqrt{\lambda}}$, 则有

$$\sqrt{\lambda}\int_{c-\delta}^{c} e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\varphi(c-\frac{u}{\sqrt{\lambda}})}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty} f_\lambda^{(-)}(u)\mathrm{d}u,$$

$$\sqrt{\lambda}\int_{c}^{c+\delta} e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\varphi(c+\frac{u}{\sqrt{\lambda}})}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty} f_\lambda^{(+)}\mathrm{d}u,$$

其中

$$f_\lambda^{(\pm)}(u)=\mathbf{1}_{[0,\delta\sqrt{\lambda}]}(u)e^{\lambda\varphi(c\pm\frac{u}{\sqrt{\lambda}})},\quad u\in[0,+\infty).$$

注意由(5.24), (5.25) 有

$$\lambda\varphi(c\pm\frac{u}{\sqrt{\lambda}})=\frac{-A}{2}u^2+\psi(\pm\frac{u}{\sqrt{\lambda}})u^2\le\frac{-A}{4}u^2\qquad\forall\, u\in[0,\,\delta\sqrt{\lambda}]$$

因此对于被积函数$f_\lambda^{(\pm)}(u)$ 有

$$0\le f_\lambda^{(\pm)}(u)=\mathbf{1}_{[0,\,\delta\sqrt{\lambda}]}(u)e^{\lambda\varphi(c\pm\frac{u}{\sqrt{\lambda}})}\le e^{-\frac{A}{4}u^2}\qquad\forall\, u\in[0,+\infty),\ \forall\,\lambda\ge 2,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}f_\lambda^{(\pm)}(u)=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathbf{1}_{[0,\,\delta\sqrt{\lambda}]}(u)e^{-\frac{A}{2}u^2+\psi(\pm\frac{u}{\sqrt{\lambda}})u^2}=e^{-\frac{A}{2}u^2}\quad\forall\, u\in[0,+\infty).$$

于是由Lebesgue 控制收敛定理[3]和上面的零极限有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_a^c e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_{c-\delta}^c e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_\lambda^{(-)}(u)\mathrm{d}u,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_c^b e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_{c}^{c+\delta} e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_\lambda^{(+)}(u)\mathrm{d}u,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_\lambda^{(\pm)}(u)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{A}{2}u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{A}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{A}}.$$

[3]**在定理10.16(连续参变量的LDC) 中取**$h=1/\lambda$ **并注意** $\lambda\to+\infty\iff h\to 0+$.

所以得到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_a^c e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_c^b e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{A}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(c)}},$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_a^b e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_a^c e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x+\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_c^b e^{\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(c)}}.$$

□

【例】回忆Gamma 函数: $\Gamma(\lambda)=\int_0^{+\infty}x^{\lambda-1}e^{-x}\mathrm{d}x,\lambda>0$. 证明

$$\Gamma(\lambda+1)\sim\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\sqrt{2\pi\lambda}\quad(\lambda\to+\infty)\qquad\text{即}\quad\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\sqrt{2\pi\lambda}}=1.\tag{5.26}$$

特别对于自然数n 有

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}\qquad(n\to\infty).\tag{5.27}$$

【证】作换元$x=\lambda(1+t),t\in(-1,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda+1)&=\int_0^{+\infty}x^{\lambda}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{+\infty}\lambda^{\lambda}(1+t)^{\lambda}e^{-\lambda-\lambda t}\lambda\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\lambda\int_{-1}^{+\infty}(1+t)^{\lambda}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\lambda\int_{-1}^{+\infty}e^{\lambda\varphi(t)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中

$$\varphi(t)=\log(1+t)-t,\quad t\in(-1,+\infty).$$

因此

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\sqrt{2\pi\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\lambda}\int_{-1}^{+\infty}e^{\lambda\varphi(t)}\mathrm{d}t.\tag{5.28}$$

计算

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=0,\quad\varphi'(t)=\frac{1}{1+t}-1,\quad\varphi'(0)=0,\\&\varphi''(t)=-(1+t)^{-2}<0,\ t\in(-1,+\infty),\quad\varphi''(0)=-1.\end{aligned}$$

同时有

$$\int_{-1}^{+\infty}e^{\varphi(t)}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{+\infty}(1+t)e^{-t}\mathrm{d}t<+\infty.$$

因此由**Laplace 积分渐近式的主项定理**知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_{-1}^{+\infty}e^{\lambda\varphi(t)}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}.$$

联合(5.28) 即得(5.26). $\square$

作业题

1. 设$\mathbb{B}^3=\overline{B}(0,1)$是$\mathbb{R}^3$中的闭单位球. 设$E\subset\mathbb{B}^3$为Lebesgue 可测集, $\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2,...,\mathrm{T}_N\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ 是一些旋转变换(正交矩阵), 满足:

$$\forall\, x\in\mathbb{B}^3\ \ \exists\, k\in\{1,2,...,N\}\ \ \text{s.t.}\ \ \mathrm{T}_k x\in E.$$

证明

$$\frac{4\pi}{3N}\le m(E)\le\frac{4\pi}{3}.$$

2. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界开集, $\varphi:\Omega\to\Omega$ 为C^1 **单射** 且$|\det\varphi'(x)|\equiv 1, x\in\Omega$. 给定可测集$U\subset\Omega$ 满足$m(U)>0$, 其中m 是$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 测度. 设正整数$N>\frac{m(\Omega)}{m(U)}$. 证明存在$k\in\{1,2,...,N-1\}$ 使得$m(U\cap\varphi^k(U))>0$.

这里$\varphi^2(x)=\varphi\circ\varphi(x)=\varphi(\varphi(x))$, 一般地$\varphi^k=\varphi\circ\varphi\circ\cdots\circ\varphi$ 表示φ 与自身的k 次复合. 规定$\varphi^0=\mathrm{id}$ (恒等映射), 即$\varphi^0(x)\equiv x$.

提示: 需证明存在$i,j\in\{0,1,2,...,N-1\}$, $i\ne j$, 使得$m(\varphi^i(U)\cap\varphi^j(U))>0$.

注. 本题是庞加莱回归定理: 对于有界质点系统中的任一质点x_0, 无论它的邻域$U(x_0)$多么小, $U(x_0)$ 中总有某些质点x 经过有限次“刚体”运动$x\to\varphi(x)\to\varphi^2(x)\to\cdots\to\varphi^k(x)$ 回到$U(x_0)$ 内.

3. (1) 设$a>0$, $f\in L^1([0,a])$或f 在$[0,a]$上非负可测. 证明

$$\iint_{0\le x\le y\le a} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\Big(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\Big)^2.$$

一般地证明: 对任意$2\le n\in\mathbb{N}$ 有

$$\int_{0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le a} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n!}\Big(\int_{[0,a]} f(t)\mathrm{d}t\Big)^n.$$

特别取$f(t)\equiv 1$ 得到“三角形”集合

$$K=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid 0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le a\}$$

的体积的计算公式. [参见第九章**§9.1**的作业题最后一题, 注意那里的集合Z是L-零测集.]

4. 计算积分

$$I_1 = \iint_{x^4+y^4\le 1} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2(x+y)^2-(x-y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_3 = \iint_{y\ge x^2+1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}, \qquad I_4 = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left|\frac{x+y}{2} - x^2 - y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$I_5 = \iiint_{x^2+y^4+z^6\le 1} \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$I_6 = \iiint_{|x|+|y|+|z|\le 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{1-|x|-|y|-|z|}}.$$

对I_4, 建议利用恒等式: $|a-b| = b-a+2(a-b)\mathbf{1}_{\{a\ge b\}}$.

5. 设$D = \{(x,y) \mid x \le y \le 2x,\ 1 \le xy \le 4\}$. 将二重积分

$$I = \iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成一维定积分 (假设f 在$[1,4]$ 上L-可积或非负L-可测).

6. 计算积分

$$I_1 = m(D) = \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中D是由$x^2+y^2=1, y=0, y=x\ge 0$ 围成的有界区域(即连通开集).
$$I_2 = \iint_D \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中D是由曲线$y=0, y=x, \sqrt{x}+\sqrt{y}=1, \sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 围成的有界集.
$$I_3 = \iiint_\Omega (x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中Ω是由曲面$z=x^2+y^2, z=4, z=16$ 围成的有界区域.
$$I_4 = \iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中Ω由是曲面$x^2+y^2=z^2, x^2+y^2+z^2=8$ 围成的有界区域.
$$I_5 = \iiint_\Omega x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中Ω由是曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与$z=x^2+y^2$ 围成的有界区域.
$$I_6 = \iiint_\Omega x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中Ω 是由曲面$z=\frac{x^2+y^2}{a}$, $z=\frac{x^2+y^2}{b}$, $xy=c$, $xy=d$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$

围成的有界区域, 其中$0<a<b, 0<c<d, 0<\alpha<\beta$.

7. 证明积分等式 (假设f连续或有界可测, $-\infty < a < b < +\infty, R > 0$):

$$\int_a^b \mathrm{d}y \int_a^y (y-x)^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\,,$$
$$\int_{-R/2}^{R/2}\int_{-R/2}^{R/2} f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-R}^{R} f(t)(R-|t|)\mathrm{d}t.$$

8. 证明

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(2z\sin\theta\sin\phi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \Big(\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\theta)\mathrm{d}\theta\Big)^2, \quad z\in\mathbb{R}.$$

9. 设$a, b, c > 0$ 为常数, $f \in C^1((0,+\infty))$ 满足$|f(r)| \le e^{-r}$ for all $r > 0$. 令

$$F(t) = \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\ge t^2} f\Big(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad t\in(0,+\infty).$$

证明$F \in C^1((0,+\infty))$ 并求$F'(t)$的表达式.

10. 设实值或复值函数f 在$B(x_0,\delta)$内连续, 设$E_k \subset B(x_0,\delta) (k = 1, 2, 3, ...)$ 是具有正测度的Lebesgue 可测集, 满足$E_k \ni x_0, \mathrm{diam}(E_k) \to 0\,(k\to\infty)$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m(E_k)}\int_{E_k}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{m(E_k)}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = f(x_0).$$

11. 设$x = x(u,v), y = y(u,v)$ 是区域Ω到D上的C^1双射, 满足$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$. 设$f = f(x,y)$ 是D上的可微函数. 证明

$$\iint_D \Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega \Bigg(\Big(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\Big)^2\Bigg)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中$\widetilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

12. 设函数$f(x,y)$ 在闭圆盘$\overline{B} = \overline{B}(0,R)$ 上连续, 在开圆盘$B = B(0,R)$内可微且$f|_{\partial B} = 0$. 证明

$$\iint_B |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \frac{1}{2}\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,|\nabla f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

一般地, 设函数$f(x)$ 在闭球$\overline{B} = \overline{B}(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ 上连续, 在开球$B = B(0,R)$内可微且$f|_{\partial B} = 0$. 证明

$$\int_B |f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_B |x||\nabla f(x)|\mathrm{d}x.$$

[提示: $n=1$时单独证明. 设$n\ge 2$. 此时利用球极坐标换元公式, 并注意当$\omega\in \mathbb{S}^{n-1}, 0\le r\le R$ 时, $f(r\omega)=f(r\omega)-f(R\omega)=$ 导数的积分....]

13. 由积分定义的函数

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\quad p,q>0;\quad \Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x,\quad s>0$$

分别叫做Beta 函数和Gamma 函数. 由$\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)^{s-1}\mathrm{d}t<+\infty$ for all $s>0$ 可知这两个函数是良好定义的且恒正. 试利用Fubini 定理和换元公式证明这两个函数的转换关系:

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\qquad p,q>0.$$

[提示: 从$\Gamma(p)\Gamma(q)$ 出发, 化成二重积分, 然后考虑换元$(x,y)=(tu,(1-t)u),(t,u)\in(0,1)\times(0,+\infty)$.]

14. 设f在$[0,1]$ 上L-可积(例如f在$[0,1]$上连续). 证明Liouville 公式:

$$\begin{aligned}&\int_{x\in\mathbb{R}^n_{\ge 0},x_1+x_2+\cdots+x_n\le 1} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x\\ &=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

其中$x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $p_1>0,p_2>0,...,p_n>0$.

15. 设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定矩阵. 对于二次型$x^\tau Ax$ 计算

$$I=\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\frac{x^\tau Ax}{2})\mathrm{d}x=?$$

16. 证明：以$r>0$ 为半径的n- 维球体$B(0,r)$ 的体积$m(B(0,r))=m(\mathbb{B}^n)r^n$ 当维数n趋于无穷时趋于零. 事实上有

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(\mathbb{B}^{2n})r^{2n}=e^{\pi r^2}-1\qquad\forall\, r>0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(\mathbb{B}^{n})r^{n}\le(2r+1)e^{\pi r^2}-1\qquad\forall\, r>0.$$

17. 记$\alpha(n)=m(\mathbb{B}^n)$, $\beta(n)=n\alpha(n)=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$. 证明对任意$0\le a<b<+\infty$ 有

$$m(\,\{x\in\mathbb{R}^n\mid a\le|x|\le b\})=\alpha(n)(b^n-a^n)\le\beta(n)b^{n-1}(b-a)\,.$$

18. (1) 设$Z_0 \subset [0,+\infty)$ 是1 维Lebesgue 零测集, 即$m_1(Z_0)=0$. 证明

$$m_n(\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\in Z_0\})=0\,.$$

(提示：分解$Z_0=\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_0\cap[0,n]$ 有$\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\in Z_0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\in Z_0\cap[0,n]\}$. 因此可假定$Z_0$ 有界. 然后用有界开集覆盖Z_0 并用上一题中的估计.)

(2) 设$E\subset[0,+\infty)$ 是1 维Lebesgue 可测集. 证明$\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, |x|\in E\}$ 是n 维Lebesgue 可测集.

(3) 设$f(r)$ 在$[0,+\infty)$ 上Lebesgue 可测. 证明$x\mapsto f(|x|)$ 在$\mathbb{R}^n$ 上Lebesgue 可测.

(4) 设$f(r)$ 在$[0,R)$ 上Lebesgue 可积或非负可测. 证明

$$\int_{|x|\le R} f(|x|)\mathrm{d}x=\int_{|x|<R} f(|x|)\mathrm{d}x=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r\,.$$

19. 设$f\in L^1(\mathbb{S}^{n-1},\sigma)$. 设$\mathrm{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交阵. 证明

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\mathrm{T}\omega)d\sigma(\omega)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)\,.$$

说明: 可直接计算. 另法: 考虑$x\mapsto f(\frac{x}{|x|})$ 承认它在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上可测[4], 然后利用球极坐标换元公式.

20. 设$f\in L^1(\mathbb{S}^{n-1},\sigma)$. 设$\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可逆矩阵. 证明

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)=|\mathrm{det A}|\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\mathrm{A}\omega|^{-n} f\Big(\frac{\mathrm{A}\omega}{|\mathrm{A}\omega|}\Big)\mathrm{d}\sigma(\omega)\,.$$

[提示: 考虑零次齐次函数$\varphi(x)=f(\frac{x}{|x|})$. 利用单位球体的特征函数，$\mathbb{R}^n$ 上积分的线性换元公式, 球极坐标换元公式和Fubini 定理.]

21. 设$f\in L^1([-1,1])$ 或f 在$[-1,1]$ 上非负可测. 对于$n\ge 2$ 证明

$$\int_{|x|\le 1} f(\mathbf{e}\cdot x)\mathrm{d}x=m(\mathbb{B}^{n-1})\int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{(n-1)/2}\mathrm{d}t \qquad \forall\,\mathbf{e}\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

[注意根据**Fubini定理的推论2**知函数$x=(x_1,x_2,...,x_n)\mapsto f(x_1)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x_1)$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.]

22. 设$\mathbb{B}^n$ 是$\mathbb{R}^n$中的单位球, f,g分别在$\mathbb{R}^n,\mathbb{B}^n$ 上L-可积或非负L-可测. 证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{B}^n} f\Big(\frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{(1-|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}},$$

[4] **函数$x\mapsto f(\frac{x}{|x|})$在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上的L-可测性的证明较繁, 但可测性的结论是肯定对的.**

$$\int_{\mathbb{B}^n} g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} g\Big(\frac{y}{\sqrt{1+|y|^2}}\Big)\frac{\mathrm{d}y}{(1+|y|^2)^{\frac{n}{2}+1}}.$$

[应用**定理10.43**及其**注**, 从右边出发往左边证.]

23. (1)求下列极限

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^\lambda\mathrm{d}\theta = ?, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^1(1-x^2)^\lambda\mathrm{d}x = ?$$

(2) 证明对任意$\lambda > 0$ 有不等式:

$$\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^\lambda\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^\lambda\mathrm{d}\theta < \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \quad \int_0^1(1-x^2)^\lambda\mathrm{d}x < \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}.$$

[(2) 的提示: 对第一个不等式, 利用导数和$\tan\theta \ge \theta, \theta \in (0,\pi/2)$, 证明

$e^{\theta^2/2}\cos\theta \le 1, \theta \in [0,\pi/2]$; 对第二个, 利用基本不等式$1+t \le e^t$ for all $t \in \mathbb{R}$.]

§10.6. $\mathbb{R}^n$上的Riemann积分

在第六章我们已学习了一维区间上的Riemann积分并用Lebesgue 测度和积分给出了Riemann积分的基本性质. 本节我们将一维Riemann积分推广到n维. 由于已有$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度和积分理论, 我们可以直接在所谓Jordan 可测集上定义Riemann和与Riemann积分. 在引入Jordan可测集之前, 我们先看一个例子.

【引例】 设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为一有界集. 取一个有界闭区间$I\subset\mathbb{R}^n$ 包含E. 考察E的特征函数$\mathbf{1}_E(x)$在I 上的Riemann 和: 设$P=\{I_k\}_{k=1}^N$ 是I的一个区间分划, 即$N\in\mathbb{N}$ 且

$$I=\bigcup_{k=1}^N I_k \quad \text{其中}I_k\text{是互不重叠的闭区间.}$$

对每个子区间I_k 任取一点$\xi_k\in I_k$. 我们称$\xi:=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_N\}$ 为相应于分划$P=\{I_k\}_{k=1}^N$的一个标志点组. 记做$\xi_k\in I_k, k=1,2,...,N$. 做Riemann 和

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k)m(I_k).$$

令$\lambda(P)=\max\limits_{1\le k\le N}\operatorname{diam}(I_k)$. 我们来看下面是否成立:

$$\text{存在常数}A\text{使得当}\lambda(P)\to 0\text{ 时}\quad \sup_{\xi_k\in I_k,1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k)m(I_k)-A\Big|\to 0. \tag{6.1}$$

我们先求(6.1)成立的必要条件. 假设(6.1)成立, 则对任意$\varepsilon>0$ 存在I 的分划$P=\{I_k\}_{k=1}^N$使得

$$\sup_{\xi_k\in I_k,1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k)m(I_k)-A\Big|<\varepsilon/2$$

这给出

$$A-\varepsilon/2<\inf_{\xi_k\in I_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k)m(I_k)\le \sup_{\xi_k\in I_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k)m(I_k)<A+\varepsilon/2$$

从而有

$$\sup_{\xi_k\in I_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k)m(I_k)-\inf_{\xi_k\in I_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k)m(I_k)<\varepsilon.$$

另一方面, 考虑分解$\{1,2,...,N\}=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3$ 其中

$$\Lambda_1=\{k\in\{1,2,...,N\}\,|\,I_k\subset E\},$$

$$\Lambda_2=\{k\in\{1,2,...,N\}\,|\,I_k\not\subset E\text{ 且 }I_k\cap E\neq\emptyset\},$$

$$\Lambda_3=\{k\in\{1,2,...,N\}\,|\,I_k\cap E=\emptyset\}.$$

易见对任意$\xi_k \in I_k, k = 1, 2, ..., N$ 有

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) = \sum_{k\in\Lambda_1} m(I_k) + \sum_{k\in\Lambda_2} \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) \tag{6.2}$$

并且

$$\text{当}k \in \Lambda_2\text{时}, \qquad \mathbf{1}_E(\xi_k) = 1 \text{ if } \xi_k \in I_k \cap E; \quad \mathbf{1}_E(\xi_k) = 0 \text{ if } \xi_k \in I_k \setminus E.$$

由此得知

$$\sup_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) = \sum_{k\in\Lambda_1} m(I_k) + \sum_{k\in\Lambda_2} m(I_k),$$

$$\inf_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) = \sum_{k\in\Lambda_1} m(I_k)$$

从而有

$$\sum_{k\in\Lambda_2} m(I_k) = \sup_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) - \inf_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) < \varepsilon.$$

来证明

$$\partial E \subset \bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k \cup \bigcup_{k=1}^{N} \partial I_k. \tag{6.3}$$

由$\partial E \subset \overline{E} \subset I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ 知对任意$x \in \partial E$, 存在$k \in \{1, 2, ..., N\}$使得$x \in I_k$. 若$x \in \partial I_k$, 则x 属于(6.3)的右边; 若$x \notin \partial I_k$, 则$x \in I_k^\circ$, 从而存在$r > 0$ 使得$B(x, r) \subset I_k$. 因$x \in \partial E$, 故由边界点的定义知$B(x, r) \cap E \ne \emptyset$且$B(x, r) \cap E^c \ne \emptyset$ 从而$I_k \cap E \ne \emptyset$且$I_k \cap E^c \ne \emptyset$. 由$\Lambda_2$的定义知$k \in \Lambda_2$从而$x$ 属于(6.3)的右边. 所以(6.3)成立.

由(6.3)和$m(\partial I_k) = 0, k = 1, 2, ..., N$ 得到

$$m(\partial E) \le \sum_{k\in\Lambda_2} m(I_k) < \varepsilon.$$

由$\varepsilon > 0$的任意性知$m(\partial E) = 0$.

反之设$m(\partial E) = 0$. 则由分解式$E = E^\circ \cup (E \cap \partial E)$ 知E等于一个开集与一个Lebesgue零测集的并. 因此E 是Lebesgue 可测集. 来证明

$$\text{当}\lambda(P) \to 0 \text{ 时} \qquad \sup_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N} \Big| \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) - m(E) \Big| \to 0. \tag{6.4}$$

对任意$\varepsilon > 0$, 由Lebesgue测度的正则性, 存在开集$G \subset \partial E$ 使得$m(G) < \varepsilon$. 因∂E 是非空紧集, 故$\delta := \mathrm{dist}(G^c, \partial E) > 0$. 任取$I$的区间分划$P = \{I_k\}_{k=1}^N$ 满足$\lambda(P) < \delta$. 设$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ 如上. 则由$E \subset I$ 有

$$E = \bigcup_{k\in\Lambda_1} I_k \cup \bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k \cap E \cup \bigcup_{k\in\Lambda_3} I_k \cap E.$$

因I_k互不重叠且当$k \in \Lambda_3$时$m(E \cap I_k) = 0$, 故得到

$$m(E) = \sum_{k\in\Lambda_1} m(I_k) + \sum_{k\in\Lambda_2} m(I_k \cap E).$$

将这一等式与(6.2)比较可知任意$\xi_k \in I_k, k = 1, 2, ..., N$ 有

$$\Big|\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) - m(E)\Big| \le \sum_{k\in\Lambda_2} m(I_k)$$

从而有

$$\sup_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N} \Big|\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) - m(E)\Big| \le \sum_{k\in\Lambda_2} m(I_k) = m\Big(\bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k\Big)$$

其中最后的等号用到$I_1, I_2, ..., I_N$ 互不重叠. 来证明$\bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k \subset G$. 设$x \in \bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k$. 则对某个$k \in \Lambda_2$有$x \in I_k$. 据$\Lambda_2$的定义知$I_k \cap E^c \neq \emptyset$ 且$I_k \cap E \neq \emptyset$. 据第七章第**§7.4**节中的一个关于连通集的例题知这蕴含$I_k \cap \partial E \neq \emptyset$. 取$y \in I_k \cap \partial E$ 则有

$$\mathrm{dist}(x, \partial E) \le |x - y| \le \mathrm{diam}(I_k) \le \lambda(P) < \delta.$$

因$\delta = \mathrm{dist}(G^c, \partial E)$, 故必有$x \notin G^c$, 即$x \in G$. 所以$\bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k \subset G$. 于是得到

$$m\Big(\bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k\Big) \le m(G) < \varepsilon$$

从而

$$\sup_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N} \Big|\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_E(\xi_k) m(I_k) - m(E)\Big| < \varepsilon.$$

这证明了(6.4). 由(6.4)即知(6.1)对于$A = m(E)$成立.

综上证明我们得到结论: (6.1)成立的充分必要条件是$m(\partial E) = 0$. □

【定义(Jordan可测集)】若集合$E \subset \mathbb{R}^n$有界且其边界∂E 是Lebesgue 零测集, 则称E 是一个Jordan 可测集. □

【**例**】$\mathbb{R}^n$中的任一有界区间、开球、闭球等, 其边界是Lebesgue零测集, 故它们都是Jordan可测集. $\Box$

【命题10.45(Jordan可测集的基本性质)】

(a) 空集是Jordan可测集. 若A,B都是$\mathbb{R}^n$中的Jordan可测集, 则$A\cup B, A\cap B, A\setminus B$ 也是Jordan可测集. 因此任意有限多个Jordan可测集经过有限次的并、交、差运算后产生的集合仍是Jordan可测集.

(b) $\mathbb{R}^n$中的每个Jordan可测集都是Lebesgue 可测集.

(c) 若$E\subset\mathbb{R}^n$是Jordan可测集, 则$\partial E, E^\circ, \overline{E}$ 都是Jorda可测集并有

$$m(\overline{E})=m(E)=m(E^\circ),\quad m(E\setminus E^\circ)=m(\overline{E}\setminus E^\circ)=0.$$

【证】(a): 由第七章**【关于边界的基本性质】**知$\partial\emptyset=\emptyset$, 且

$$\partial(A\cup B),\,\partial(A\cap B),\,\partial(A\setminus B)\subset(\partial A)\cup(\partial B).$$

因此若A,B都是Jordan可测集, 即A,B 有界且$\partial A,\partial B$ 是零测集, 则$A\cup B)$, $A\cap B$, $A\setminus B$ 也都是有界集且$\partial(A\cup B)$, $\partial(A\cap B)$, $\partial(A\setminus B)$ 都是零测集, 所以$A\cup B, A\cap B, A\setminus B$ 也都是Jordan可测集.

(b): 设E为Jordan可测集. 则$m(\partial E)=0$ 从而有$m(E\cap\partial E)=0$. 于是由分解式$E=E^\circ\cup(E\cap\partial E)$ 和E°是开集(从而是Lebesgue 可测集)即知E是Lebesgue 可测集.

(c): 设E为Jordan可测集. 因∂E 是闭集, 而闭集包含了自己的边界, 故$\partial(\partial E)\subset\partial E$. 所以$m(\partial(\partial E))=0$. 所以$\partial E$ 是Jordan可测集. 由此和(a) 知$E\cap\partial E$ 是Jordan可测集. 而由分解式$E=E^\circ\cup(E\cap\partial E)$(不交并) 有$E^\circ=E\setminus(E\cap\partial E)$, 于是由(a)知$E^\circ$ 是Jordan可测集. 此外还有$m(E)=m(E^\circ)$. 最后由分解式$\overline{E}=E^\circ\cup\partial E$ 和(a)知$\overline{E}$是Jordan可测集, 同时有$m(\overline{E})=m(E^\circ)=m(E)$. 注意到$E$有界从而$m(E)<+\infty$, 故得$m(E\setminus E^\circ)=m(\overline{E}\setminus E^\circ)=0$. $\Box$

【命题10.46(Jordan可测集的特征函数刻画)】设$E\subset\mathbb{R}^n$为一有界集. 则

E是Jordan 可测集$\iff$ 特征函数$\mathbf{1}_E$ 在$\mathbb{R}^n$上几乎处处连续.

【证】由空间分解$\mathbb{R}^n=E^\circ\cup(E^c)^\circ\cup\partial E$ 和$E^\circ,(E^c)^\circ$均为开集且

$x\in\partial E \iff$ 存在序列$\{x_k\}_{k=1}^\infty\subset E$, $\{y_k\}_{k=1}^\infty\subset E^c$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\lim\limits_{k\to\infty}y_k=x$

可知特征函数$x \mapsto \mathbf{1}_E(x)$在$\mathbb{R}^n$中的连续点的集合等于$E^\circ \cup (E^c)^\circ$, 间断点的集合等于$\partial E$. 因此$E$是Jordan 可测集$\iff m(\partial E) = 0 \iff \mathbf{1}_E$ 在$\mathbb{R}^n$上几乎处处连续. $\square$

不难看出, Jordan 可测集类只是Lebesgue可测集类的一小部分. 每个其**闭包** 含有内点的可数集都不是Jordan 可测集！这是因为由一般等式$\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$ 可知若E 为可数集, 则$E^\circ = \emptyset$ 从而有$\overline{E} = \partial E$. 因此如果$\overline{E}$ 有内点, 即$(\overline{E})^\circ \neq \emptyset$, 则由$\partial E = \overline{E} \supset (\overline{E})^\circ$ 知∂E 的Lebesgue 测度大于零. 所以E 不是Jordan可测集.

典型例子是$E = I \cap \mathbb{Q}^n$, 即E为有界区间I中的全体有理点. 它是可数集. 根据有理数点的稠密性知$\partial E = I$. 故E 不是Jordan 可测集. 另一方面注意每个单点集合显然是Jordan 可测集. 将可数集$E = I \cap \mathbb{Q}^n$ 写为单点集的并

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k = \{r_k\} \ (\text{单点集})$$

则由E不是Jordan 可测集可知: 即便只考虑有界闭区间I中的Jordan可测集类, I 中的Jordan 可测集关于可数并运算也不封闭.

【Jordan可测集的分划和标志点组】设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为一Jordan 可测集. E的一个Jordan可测分划$P = \{E_k\}_{k=1}^N$ 是指E的一个有限分割系统, 即$N \in \mathbb{N}$ 且

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k \quad \text{其中}E_k\text{为非空的Jordan可测集且互不重叠}$$

[回忆: $E_1, E_2, E_3, ...$ 互不重叠是指当$i \neq j$ 时$m(E_i \cap E_j) = 0$]. 称

$$\lambda(P) = \max\{\mathrm{diam}(E_1), \mathrm{diam}(E_2), ..., \mathrm{diam}(E_N)\}$$

为分划P 的模. 在每个子集E_k 中任取一点ξ_k, 称$\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N\}$ 为从属于分划P 的一个**标志点组**.

显然$\lambda(P)$ 的作用在于度量E 被分割的疏密程度：$\lambda(P)$ 越小则E 被分割得越细密. 特别注意: 当$E_k \neq \emptyset$时, 分点$\xi_k \in E_k$可以取E_k中的任一点！这是Riemann 积分传统定义的关键点.

此外我们需要证明: 对任一Jordan 可测集E, 满足$\lambda(P)$可以任意小的Jordan可测分划P 是大量存在的. 例如取定一个包含E的有界闭区间I. 对任意$\delta > 0$, 可将I分割成$I = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$ 其中I_k 是互不重叠的闭区间满足$\mathrm{diam}(I_k) < \delta, k = 1, 2, ..., M$.

由$E\subset I$ 有$E=\bigcup_{k=1}^M I_k\cap E$. 将这$M$个集合中的所有非空集合重新编号成$E_k=I_k\cap E, k=1,2,...,N$. 则$E_k$是非空的互不重叠的Jordan可测集且$E=\bigcup_{k=1}^N E_k$. 易见$\mathrm{diam}(E_k)<\delta, k=1,2,...,N$. 因此$P=\{E_k\}_{k=1}^N$ 是E的一个分划且满足$\lambda(P)<\delta$.

为叙述简便, 本节下面所说的“分划”皆为“Jordan可测分划”.

【定义(Riemann 积分)】设$E\subset\mathbb{R}^n$为一Jordan可测集.

(i) Riemann 和. 设$f:E\to\mathbb{C}$. 对于E 的任意分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$ 和任意标志点组$\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_N)\in P$, 称和式

$$\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)$$

为f 在E 上的一个Riemann 和.

(ii) Riemann 积分. 设f 是E 上的一个实值或复值函数. 我们称f在E 上Riemann 可积, 如果存在常数A 使得对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$ 满足: 只要E 的分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$的模$\lambda(P)<\delta$, 就有

$$\sup_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)-A\Big|<\varepsilon.$$

以上也可写成: 存在常数A 使得

$$\sup_{\xi_k\in I_k, 1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)-A\Big|\to 0\quad \text{as}\quad \lambda(P)\to 0.$$

如果f 在E 上Riemann 可积, 则称Reimann和的极限A为f在E上的Riemann积分, 记作

$$A=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) Riemann可积函数类. 我们把在E上Riemann可积的函数类记做$\mathcal{R}(E)$. □

几点说明:

1. Riemann 和的优点: 直观、线性.

Riemann积分的优点体现在Reiamm和$\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)$上. Reiamm和的这个显示结构使得它具有直观的几何、力学、物理意义. 因此Reimann积分适合用于

建立数学模型(物理、力学、几何,...).

定积分的近似计算(各种算法格式, 包括随机算法...).

一些纯数学问题例如数论问题的研究也得益于Riemann 和的好结构.

另外注意, Riemann 和关于被积函数是线性的, 即

$$\sum_{k=1}^{N}(\alpha f+\beta g)(\xi_k)m(E_k)=\alpha\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)+\beta\sum_{k=1}^{N}g(\xi_k)m(E_k).$$

这些就是Riemann 积分值得保留的主要原因.

2. 关于Riemann 和的极限：对于E 上的一列的分划$P_N=\{E_k\}_{k=1}^{N}$, 一般来说有$\lambda(P_N)\to 0 \iff N\to\infty$. 因此相应于$P_N$ 的子区间I_k 必定依赖于N. 所以分划的严格写法应为$P_N=\{E_k^{(N)}\}_{k=1}^{N}$. 假如$f$在$E$上Riemann可积, 那么对任意取定相应于$P_N$的标志点组$\{\xi_1^{(N)},\xi_2^{(N)},...,\xi_N^{(N)}\}, N=1,2,3,...$ 都有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k^{(N)})m(E_k^{(N)})=\int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.5}$$

这种和式极限就是Riemann积分的特征, 也是其应用价值所在.

【例】设二元函数$f(x,y)$ 在$[0,1]^2$ 上连续. 根据下面讲的Lebesgue 准则知f 在$[0,1]^2$上Riemann 可积, 且其Riemann积分等于Lebesgue积分. 于是根据Riemann 积分的定义便有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{m}\Big)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad \square$$

3. 在Riemann积分的上述定义中, 我们使用了与Lebesgue 积分相同的记号$\int_E f(x)\mathrm{d}x$. 这是因为若$f\in\mathcal{R}(E)$, 则$f\in L^1(E)$ 且f的两个积分相等. 见后面**定理10.51**.

4. 因复数的收敛等价于该复数的实部虚部分别收敛, 故易见

$$\text{复值函数} f\in\mathcal{R}(E) \iff \mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)\in\mathcal{R}(E).$$

并且当两边之一(从而两边都)满足时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_E \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x.$$

因此在研究函数的Riemann 可积性和积分的基本性质时, 只需考虑实值函数.

5. **Jordan 零测集和空集上的积分:** 若E是一个Jordan 可测集且$m(E)=0$, 则称E是一个Jordan 零测集. 由Riemann 积分的定义易见若E是一个Jordan零测集, 则E上的

任何函数f都在E 上Riemann 可积且$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$, 也即若$E$是一个Jordan零测集，则对于$E$上的任何函数$f$都有$f \in \mathcal{R}(E)$. 当$E = \emptyset$ (空集)时, 我们规定: 对任何函数f都有$f \in \mathcal{R}(\emptyset)$且$\int_\emptyset f(x)\mathrm{d}x = 0$.

6. 设$A, B \subset \mathbb{R}^n$ 为Jordan 可测集, 则不难证明(见后面) 蕴含关系成立:

$f \in \mathcal{R}(A \cup B) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ 且$f \in \mathcal{R}(B)$.

但与Lebesgue 积分不同的是, 我们有:

$f \in \mathcal{R}(A)$ 且$f \in \mathcal{R}(B) \not\Longrightarrow f \in \mathcal{R}(A \cup B)$.

【例】(2014级 王志涵) 设$n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&A = [0,1]^n \setminus B, \quad B = (0,1] \times \{(0,0,...,0)\}, \\
&f(x) = 0 \quad \text{当}\, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A; \quad f(x) = \frac{1}{(x_1)^\alpha}, \quad x \in B.
\end{aligned}$$

其中$\alpha > 0$. 易见$m(\partial B) = m(\overline{B}) = 0$ 因此B是一个Jordan零测集. 这蕴含A是Jordan可测集. 易见f分别在A, B 上Riemann可积. 来证明f在$A \cup B = [0,1]^n$上不是Riemann可积的. 为此只需证明f在$[0,1]^n$上的Riemann和无界. 将$[0,1]^n$的每条棱$N(\geq 2)$等分得到$[0,1]^n$的一列分划

$$P_N: \ [0,1]^n = \bigcup_{k=1}^{N^n} E_k^{(N)}, \ E_1^{(N)} = [0,1/N]^n, \ m(E_k^{(N)}) = (1/N)^n, \ \mathrm{diam}(E_k^{(N)} = \sqrt{2}/N.$$

取分点$\xi_1^{(N)} = (x^1, 0, ..., 0) \in E_1^{(N)}$ 使得$f(\xi_1^{(N)}) = \frac{1}{(x_1)^\alpha} \geq N^{n+1}$, 此外取定$\xi_k^{(N)} \in E_k^{(N)} \cap (0,1)^n (\neq \emptyset), k = 2, 3, ..., N^n$. 则有

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \lambda(P_N) = 0, \\
&\sum_{k=1}^{N^n} f(\xi_k^{(N)}) m(E_k^{(N)}) = f(\xi_1^{(N)}) m(E_1^{(N)}) = \frac{1}{(x^1)^\alpha}(1/N)^n \geq N, \\
&\Longrightarrow \ \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N^n} f(\xi_k^{(N)}) m(E_k^{(N)}) = +\infty.
\end{aligned}$$

这表明f在$A \cup B$ 上不是Riemann可积的.

7. 设$n \geq 2$. 与区间I 的情形不同, 对于一般的连通的Jordan可测集$E \subset \mathbb{R}^n$ 我们有:

$f \in \mathcal{R}(E) \not\Longrightarrow f$在$E$上界.

【例】(2014级 徐凯) 设$n \geq 2$,

$$E = [0,1]^n \cup Z, \quad Z = [1,3] \times \{(0,0,...,0)\}$$
$$Z_1 = [1,2] \times \{(0,0,...,0)\}, \quad Z_2 = (2,3] \times \{(0,0,...,0)\}.$$

定义$f : E \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f(x) = 0 \quad \text{当 } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]^n \cup Z_1; \quad f(x) = \frac{1}{x_1 - 2} \quad \text{当 } x \in Z_2.$$

易见E是Jordan可测集且连通, 而f在E非负且上无界.

来证明f在E上Riemann可积且积分为零. 事实上对于E 的满足$\lambda(P) < 1$的任意分划$P = \{E_k\}_{k=1}^N$和任意标志点组$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in P$ 都有$\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k) = 0$. 这是因为$E_k \cap Z_2 = \emptyset \iff E_k \subset [0,1]^n \cup Z_1$; 而当$E_k \cap Z_2 \neq \emptyset$时, 由$\mathrm{diam}(E_k) \leq \lambda(P) < 1$ 易见$E_k \subset Z$ 从而有$m(E_k) = 0$. 因此由$E = [0,1]^n \cup Z_1 \cup Z_2$ 和f的定义有

$$\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k) = \sum_{E_k \subset [0,1]^n \cup Z_1} f(\xi_k)m(E_k) + \sum_{E_k \cap Z_2 \neq \emptyset} f(\xi_k)m(E_k) = 0.$$

因此f在E上Riemann可积且$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$. 但$f$在$E$上无界. □

教学相长! 在研究函数Riemann可积的充分必要条件时, **2014级王志涵**同学得到了下面的结果: **命题10.47**, 它给出了函数Riemann可积性与函数有界性的某种关系: f在E上Riemann可积$\Longrightarrow$ f 在E上是“本质有界的”. 为叙述这一结果我们引进

【Jordan开集】若$\mathbb{R}^n$的一个开集U 同时还是Jordan 可测集, 则称U是一个Jordan开集. □

【本质有界】设$E \subset \mathbb{R}^n$为一Jordan可测集, $f : E \to \mathbb{R}$. 若$m(E) = 0$ 或者若$m(E) > 0$且存在一个Jordan开集$U \supset \overline{E^\circ}$ 使得f在$E \cap U$上有界, 则称f在E上本质有界. □

易见若f在E上有界, 则f在E上本质有界. 事实上若f在E上有界, 则取U为一个包含$\overline{E}$的有界开区间, 则U是Jordan开集, $U \supset \overline{E} \supset \overline{E^\circ}$, 且$f$在$E = E \cap U$上有界.

【命题10.47】设$E \subset \mathbb{R}^n$为一Jordan可测集. 则

$$f \in \mathcal{R}(E) \iff f\text{在}E\text{上本质有界且}f \in \mathcal{R}(E^\circ).$$

当两边之一(从而两边都)满足时有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{E^\circ} f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

【证】不失一般性可假定f是实值函数. 当$m(E)=0$时显然第一个结论成立且(6.6)的两边均为零. 下设$m(E)>0$. 由Jordan可测集性质可知此时E° 非空.

"$\Longrightarrow$": 先证f本质有界. 由$f\in\mathcal{R}(E)$知存在$\delta>0$ 使得对于E的任意分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$ 满足$\lambda(P)<\delta$ 都有

$$\sup_{\xi_k\in I_k,1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)-\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|<1.$$

取定$r>0$ 满足$\sqrt{n}2r<\delta$. 任取$a=(a_1,a_2,...,a_n)\in E^\circ$, 令

$$I(a,r)=\prod_{i=1}^n[a_i-r,a_i+r]=a+[-r,r]^n,\quad I^\circ(a,r)=\prod_{i=1}^n(a_i-r,a_i+r)$$

则有$a\in E^\circ\cap I^\circ(a,r)$ 因此$E^\circ\cap I^\circ(a,r)$是非空开集从而有$m(E^\circ\cap I^\circ(a,r))>0$. 再由$E=E^\circ\cup(E\cap\partial E), m(\partial E)=0$ 可知$m(E\cap I(a,r))>0$. 考虑分割

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)\in\mathbb{Z}^n}Q_{\mathbf{p}}\quad 其中\quad Q_{\mathbf{p}}=a+2r\mathbf{p}+[-r,r]^n.$$

易证诸方体$Q_{\mathbf{p}}$互不重叠. 这给出E的有限分划(这里"有限"是因为E有界而$\mathbf{p}$ 整数值向量):

$$E=\bigcup_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^n,E\cap Q_{\mathbf{p}}\neq\emptyset}E\cap Q_{\mathbf{p}}=\bigcup_{k=1}^N E_k$$

其中$E_1=E\cap Q_{\mathbf{0}}=E\cap I(a,r)$. 注意$\mathrm{diam}(E_k)\le\sqrt{n}2r<\delta$, $k=1,2,...,N$. 取定$x_k\in E_k, k=2,3,...,N$. 任取$x=x_1\in E_1$. 则由上面不等式有

$$|f(x)|m(E_1)=\Big|\sum_{k=1}^N f(x_k)m(E_k)-\sum_{k=2}^N f(x_k)m(E_k)\Big|\le 1+\int_E|f(x)|\mathrm{d}x+\sum_{k=2}^N|f(x_k)|m(E_k)$$

$\Longrightarrow$

$$\sup_{x\in E\cap I(a,r)}|f(x)|\le\frac{1}{m(E\cap I(a,r))}\Big(1+\int_E|f(x)|\mathrm{d}x+\sum_{k=2}^N|f(x_k)|m(E_k)\Big)<+\infty.$$

这表明: 对任意$a\in E^\circ$, 函数f在$E\cap I(a,r)$上有界. 易见$\overline{E^\circ}\subset\bigcup_{b\in\overline{E^\circ}}I^\circ(b,r/2)$. 因$\overline{E^\circ}$ 是紧集, $I^\circ(b,r/2)$ 是开区间, 故存在有限多个$b_1,b_2,...,b_N\in\overline{E^\circ}$使得$\overline{E^\circ}\subset\bigcup_{k=1}^N I^\circ(b_k,r/2)$. 对每个$b_k$, 取$a_k\in E^\circ$ 使得$|a_k-b_k|<r/2$, 则易见$I^\circ(b_k,r/2)\subset I^\circ(a_k,r)$. 因此

$$\overline{E^\circ}\subset\bigcup_{k=1}^N I^\circ(a_k,r)=:U.$$

显然U 是开集且是Jordan可测集. 此外由f在每个$E\cap I(a_k,r)$ 上有界$(k=1,2,...,N)$ 可知f在$E\cap U=\bigcup_{k=1}^{N}E\cap I^\circ(a_k,r)$上有界. 所以$f$在$E$上本质有界.

其次证明f在E° 上Riemann可积其积分等于$\int_E f(x)\mathrm{d}x$. 可以假设$E^\circ\neq E$. 由$f\in\mathcal{R}(E)$知: 对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$ 使得对于E的任意分划$E=\bigcup_{k=1}^{N}E_k$ 满足 $\max\limits_{1\le k\le N}\mathrm{diam}(E_k)<\delta$ 都有

$$\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big|<\varepsilon.$$

任取E°的分划$E^\circ=\bigcup_{k=1}^{N}E_k$ 满足$\max\limits_{1\le k\le N}\mathrm{diam}(E_k)<\delta$. 同时做$E\setminus E^\circ$的分划$E\setminus E^\circ=\bigcup_{k=N+1}^{M}E_k$ 满足$\max\limits_{N+1\le k\le M}\mathrm{diam}(E_k)<\delta$. 由$E\setminus E^\circ\subset\partial E$ 可知$m(E_k)=0,k=N+1,N+2,...,M$. 于是有

$$\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)=\sum_{k=1}^{M}f(\xi_k)m(E_k)\qquad\forall\,\xi_k\in E_k,\quad k=1,2,...,M.$$

因此有

$$\sup_{\xi_k\in E_k,k\le N}\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-\int_E f\mathrm{d}x\Big|=\sup_{\xi_k\in E_k,k\le M}\Big|\sum_{k=1}^{M}f(\xi_k)m(E_k)-\int_E f\mathrm{d}x\Big|<\varepsilon.$$

所以f在E° 上Riemann可积且$\int_{E^\circ}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

"$\Longleftarrow$": 由假设知存在Jordan开集$U\supset\overline{E^\circ}$ 使得f在$E\cap U$上有界:

$$C:=\sup_{x\in E\cap U}|f(x)|<+\infty.$$

由U是开集且$U\supset\overline{E^\circ}$ 和$\overline{E^\circ}$ 是紧集知$\mathrm{dist}(U^c,\overline{E^\circ})>0$. 又因$m(\partial E)=0$, 故对任意$\varepsilon>0$, 存在开集$G\supset\partial E$使得$m(G)<\varepsilon$. 但$\partial E$是紧集, 故$\mathrm{dist}(G^c,\partial E)>0$. 由$f\in\mathcal{R}(E^\circ)$知, 存在$\delta>0$ 使得对于E°的任意分划$E^\circ=\bigcup_{k=1}^{N}E_k$ 满足$\max\limits_{1\le k\le M}\mathrm{diam}(E_k)<\delta$ 都有

$$\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-\int_{E^\circ}f(x)\mathrm{d}x\Big|<\varepsilon.$$

以$\min\{\delta,\mathrm{dist}(U^c,\overline{E^\circ}),\mathrm{dist}(G^c,\partial E)\}$代替$\delta$ 我们可以假设$\delta\le\min\{\mathrm{dist}(U^c,\overline{E^\circ}),\mathrm{dist}(G^c,\partial E)\}$. 现在任取$E$的分划$P=\{E_k\}_{k=1}^{N}$

$$E=\bigcup_{k=1}^{N}E_k=\bigcup_{k=1}^{L}E_k\cup\bigcup_{k=L+1}^{M}E_k\cup\bigcup_{k=M+1}^{N}E_k\quad\text{满足}\quad\max_{1\le k\le N}\mathrm{diam}(E_k)<\delta$$

其中

$$E_k \subset E^\circ, \quad k=1,2,...,L;$$
$$E_k \not\subset E^\circ,\ E_k\cap E^\circ \neq \emptyset, \quad k=L+1,L+2,...,M;$$
$$E_k\cap E^\circ = \emptyset, \quad k=M+1,M+2,...,N.$$

这里如果例如上面后两种情形不出现, 则定义$L=M=N$, 等等.

对于$L+1\le k\le M$, 由$E_k\subset E\subset E^\circ\cup\partial E$和$E_k\not\subset E^\circ$知存在$x_k\in E_k$使得$x_k\in\partial E$. 而由$E_k\cap E^\circ\neq\emptyset$ 知存在$y_k\in E_k$ 使得$y_k\in E^\circ\subset\overline{E^\circ}$. 因此对任意$x\in E_k$, 由$|x-x_k|\le \operatorname{diam}(E_k)<\delta\le \operatorname{dist}(G^c,\partial E)$ 知$x\in G$, 再由$|x-y_k|\le\operatorname{diam}(E_k)<\delta\le\operatorname{dist}(U^c,\overline{E^\circ})$ 知$x\in U$. 因此$E_k\subset G\cap U\cap E, k=L+1,L+2,...,M$.

而对于$M+1\le k\le N$, 由$E_k\cap E^\circ=\emptyset$知$E_k\subset E\setminus E^\circ\subset\partial E$从而$m(E_k)=0$.

由上面的分类我们得到E°的一个分划:

$$E^\circ=\bigcup_{k=1}^{L}E_k\bigcup\bigcup_{k=L+1}^{M}E_k\cap E^\circ.$$

于是对任意$\xi_k\in E_k, k=1,2,...,N$, 并且对于$L+1\le k\le M$ 取定$\widetilde{\xi}_k\in E_k\cap E^\circ$, 我们有

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-\int_{E^\circ}f(x)\mathrm{d}x\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{M}f(\xi_k)m(E_k)-\int_{E^\circ}f(x)\mathrm{d}x\Big|\\&\le\Big|\sum_{k=1}^{L}f(\xi_k)m(E_k)+\sum_{k=L+1}^{M}f(\widetilde{\xi}_k)m(E_k\cap E^\circ)-\int_{E^\circ}f(x)\mathrm{d}x\Big|\\&+\Big|\sum_{k=L+1}^{M}f(\xi_k)m(E_k)-\sum_{k=L+1}^{M}f(\widetilde{\xi}_k)m(E_k\cap E^\circ)\Big|\\&<\varepsilon+2C\sum_{k=L+1}^{M}m(E_k)=\varepsilon+2Cm\Big(\bigcup_{k=L+1}^{M}E_k\Big)\le\varepsilon+2Cm(G)<(1+2C)\varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\text{当}\lambda(P)<\delta\text{时}\qquad\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le N}\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-\int_{E^\circ}f(x)\mathrm{d}x\Big|\le(1+2C)\varepsilon.$$

这证明了f在E上Riemann可积且$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E^\circ}f(x)\mathrm{d}x$. $\square$

根据这一命题(本质有界性), 我们可以将Riemann 可积性与否的研究重点放在有界函数上.

• **有界函数Riemann 可积性的振幅刻画.**

设实函数f在$E\subset\mathbb{R}^n$上有界. 回忆

函数的振幅: 对任一非空子集$A\subset E$, 称

$$\omega(f;A)=\sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)|=\sup_{x\in A}f(x)-\inf_{x\in A}f(x)$$

为f 在A 上的振幅.

振幅的单调性: 设$A,B\subset E$ 非空. 由上确界的定义易见

$$A\subset B\implies\omega(f;A)\le\omega(f;B)\,.$$

【**引理10.47**】设实函数f 在Jordan可测集$E\subset\mathbb{R}^n$ 上有界.

(a) 对于E 的任意分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$, 令

$$s(E_k)=\sup_{x\in E_k}f(x)\,,\quad i(E_k)=\inf_{x\in E_k}f(x)\,.$$

则有

$$\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)=\sum_{k=1}^N s(E_k)m(E_k)\,,\tag{6.7}$$

$$\inf_{\xi_k\in E_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)=\sum_{k=1}^N i(E_k)m(E_k)\,,\tag{6.8}$$

(b) 对于E 的任意两个分划$\{A_k\}_{k=1}^N$ 和$\{B_j\}_{j=1}^M$ 都有

$$\sum_{k=1}^N i(A_k)m(A_k)\le\sum_{j=1}^M s(B_j)m(B_j)\tag{6.9}$$

从而有

$$\sup_P\sum_{k=1}^N i(E_k)m(E_k)\le\inf_P\sum_{k=1}^N s(E_k)m(E_k)\tag{6.10}$$

其中上下确界中的$P=\{E_k\}_{k=1}^N$ 各自遍取E 的所有分划.

【证】当$m(E)=0$ 时引理显然成立. 下设$m(E)>0$.

(a): 由上下确界的定义, 对任意标志点组$\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_N)\in P$ 有

$$\sum_{k=1}^N i(E_k)m(E_k)\le\sum_{k=1}^N f(\xi_k)m(E_k)\le\sum_{k=1}^N s(E_k)m(E_k)$$

且对任意$\varepsilon > 0$ 和任意$k \in \{1,2,...,N\}$, 存在$\xi_k', \xi_k'' \in E_k$ 使得

$$f(\xi_k') > s(E_k) - \frac{\varepsilon}{m(E)}, \quad f(\xi_k'') < i(E_k) + \frac{\varepsilon}{m(E)}.$$

注意到$\sum\limits_{k=1}^{N} m(E_k) = m(E)$, 对于标志点组$(\xi_1', \xi_2', ..., \xi_N'), (\xi_1'', \xi_2'', ..., \xi_N'') \in P$ 有

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k')m(E_k) > \sum_{k=1}^{N} s(E_k)m(E_k) - \varepsilon,$$

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k'')m(E_k) < \sum_{k=1}^{N} i(E_k)m(E_k) + \varepsilon.$$

由确界的定义即知(6.7),(6.8)成立.

(b): 给定E 的任意两个分划$\{A_k\}_{k=1}^N, \{B_j\}_{j=1}^M$. 因$B_1, B_2, ..., B_M$ 互不重叠故对任意$k \in \{1,2,...,N\}$, 集合$A_k \cap B_1, A_k \cap B_2, ..., A_k \cap B_M$也互不重叠, 从而有

$$A_k = \bigcup_{j=1}^{M} A_k \cap B_j, \quad m(A_k) = \sum_{j=1}^{M} m(A_k \cap B_j), \quad k = 1,2,...,N.$$

同理有

$$B_j = \bigcup_{k=1}^{N} A_k \cap B_j, \quad m(B_j) = \sum_{k=1}^{N} m(A_k \cap B_j), \quad j = 1,2,...,M.$$

于是有

$$\sum_{k=1}^{N} i(A_k)m(A_k) = \sum_{k=1}^{N} i(A_k) \sum_{j=1}^{M} m(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} i(A_k)m(A_k \cap B_j),$$

$$\sum_{j=1}^{M} s(B_j)m(B_j) = \sum_{j=1}^{M} s(B_j) \sum_{k=1}^{N} m(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} s(B_j)m(A_k \cap B_j).$$

为证(6.9) 只需证明对任意$k \in \{1,2,...,N\}, j \in \{1,2,...,M\}$ 有

$$i(A_k)m(A_k \cap B_j) \le s(B_j)m(A_k \cap B_j). \tag{6.11}$$

事实上对任意$k \in \{1,2,...,N\}, j \in \{1,2,...,M\}$, 若$A_k \cap B_j = \emptyset$, 则$m(A_k \cap B_j) = 0$, 此时(6.11)显然成立; 若$A_k \cap B_j \ne \emptyset$, 则由上下确界的定义有

$$i(A_k) \le i(A_k \cap B_j) \le s(A_k \cap B_j) \le s(B_j)$$

从而(6.11)成立. $\square$

在下面的研究中我们将证明：对于Jordan可测集E上的任何有界函数f, 其振幅和的极限

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)$$

总存在有限. 这里极限的定义为: 存在常数L满足 对任意$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 使得对于E的任意分划$P=\{E_k\}_{k=1}^{N}$, 只要$\lambda(P)<\delta$ 就有

$$\Big|\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)-L\Big|<\varepsilon.$$

我们把这个常数L记作

$$L=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k).$$

类似地可定义极限

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k),\qquad \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k).$$

【命题10.48(有界函数Riemann可积性的振幅刻画)】

设函数f 在Jordan可测集$E\subset\mathbb{R}^n$ 上有界. 则

$$f\ \text{在}E\ \text{上Riemann可积}\iff \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)=0.$$

此外当f在E上Riemann 可积时有

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】“$\Longrightarrow$”: 设f 在E 上Riemann 可积. 记$A=\int_E f(x)\mathrm{d}x$. 由定义, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得对于I 的满足$\lambda(P)<\delta$ 任一分划$P=\{E_k\}_{k=1}^{N}$ 成立一致估计：

$$A-\varepsilon/2<\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)<A+\varepsilon/2\qquad\forall\,\xi\in P\,.$$

取确界得到

$$A-\varepsilon/2\le\inf_{\xi_k\in E_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)\le\sup_{\xi_k\in E_k,1\le k\le N}\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)\le A+\varepsilon/2\,.$$

因此据**引理10.47**, 上式即为

$$A-\varepsilon/2\le\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k)\le\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)\le A+\varepsilon/2.$$

这给出

$$\Big|\sum_{k=1}^{N} i(E_k)m(E_k)-A\Big|\le \varepsilon/2,\quad \Big|\sum_{k=1}^{N} s(E_k)m(E_k)-A\Big|\le \varepsilon/2 \tag{6.12}$$

同时由$\omega(f;E_k)=s(E_k)-i(E_k)$ 还得到

$$\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)=\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)-\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k)\le\varepsilon\,.$$

所以

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)=A,$$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)=0.$$

“$\Longleftarrow$”: 证明的关键是确定Riemann 和的极限. 为此我们考虑

$$A_*:=\sup_P\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k),\quad A^*:=\inf_P\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)$$

其中上下确界中的$P=\{E_k\}_{k=1}^N$各自遍取I 的所有分划.

来证明$A_*=A^*$ 并且公共值$A:=A_*=A^*$ 即为f 在I 上的Riemann 积分.

首先由**引理10.47(b)** 知$A_*\le A^*$. 其次对于任意分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$, 据A_*,A^* 的定义有

$$0\le A^*-A_*\le\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)-\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k)=\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)\,.$$

而由假设知上式右端可以任意小. 这就迫使$A^*-A_*=0$. 所以$A^*=A_*$ 成立.

记$A:=A^*=A_*$. 来证明对任意分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$ 成立一致估计:

$$\sup_{\xi\in P}\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-A\Big|\le\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k). \tag{6.13}$$

由此和$\lim\limits_{\lambda(P)\to 0+}\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)=0$ 即知f 在E 上Riemann 可积且$\int_E f(x)\mathrm{d}x=A$.

由**引理10.47** 和$A=A_*=A^*$ 我们有: $\forall\,\xi\in P$

$$\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-A\le\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)-\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k)=\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k),$$

$$A-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)\le\sum_{k=1}^{N}s(E_k)m(E_k)-\sum_{k=1}^{N}i(E_k)m(E_k)=\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)$$

也即

$$\Big|\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)m(E_k)-A\Big|\le\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k)\qquad\forall\,\xi\in P.$$

所以(6.13) 成立. $\Box$

函数在一点处的振幅: 设函数$f(x)$ 在集合$E\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义且有界. 设$x\in E$. 由振幅的单调性可知$\omega(f;E\cap B(x,\delta))$关于$\delta\in(0,+\infty)$单调不减, 即

$$0<\delta_1<\delta_2\implies\omega(f;E\cap B(x,\delta_1))\le\omega(f;E\cap B(x,\delta_2)).$$

因此极限

$$\omega_f(x)=\lim_{\delta\to0+}\omega(f;E\cap B(x,\delta))=\inf_{\delta>0}\omega(f;E\cap B(x,\delta))\ \ \text{存在有限.}$$

我们称$\omega_f(x)$ 为f 在点x 处的振幅.

易见f 在x 连续当且仅当$\omega_f(x)=0$. 等价地, f 在x 不连续当且仅当$\omega_f(x)>0$.

【**注意**】函数f的振幅和点振幅的数值大小严重依赖于对f的定义域的大小! 我们以点振幅为例给予说明. 设$E=[0,1]^n$, $A=E\cap\mathbb{Q}^n$, $f(x)=\mathbf{1}_A(x),x\in E$. 则易见$f$在$E$上处处间断(不连续), 而当限制在$A$上时, $f|_A$在A上处处连续:

$$\omega_f(x)>0\quad\forall\,x\in E;\qquad\omega_{f|_A}(x)=0\quad\forall\,x\in A.$$

因此在使用振幅和点振幅时, 要注意所考虑的函数的定义域的范围!

【**命题10.49(点振幅的Lebesgue积分)**】设$E\subset\mathbb{R}^n$ 为一Jordan可测集, f是E上的一个有界函数. 则点振幅函数$x\mapsto\omega_f(x)$在E上Lebesgue可积且按Lebesgue积分有

$$\int_E\omega_f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(P)\to0+}\sum_{k=1}^{N}\omega(f;E_k)m(E_k).\tag{6.14}$$

【证】先证明对任意$\delta>0$, 函数$x\mapsto\omega(f;E\cap B(x,\delta))$ 在I上Lebesgue可测. 为此只需证明对任意$t\in\mathbb{R}$, 集合

$$E^t:=\{x\in E\mid\omega(f;E\cap B(x,\delta))\le t\}$$

是Lebesgue可测集. 由Lebesgue可测集的结构知存在一列紧集$K_j,j=1,2,3....$ 和一个零测集Z使得$E=Z\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$. 由此有

$$E^t=\{x\in Z\mid\omega(f;E\cap B(x,\delta))\le t\}\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x\in K_j\mid\omega(f;E\cap B(x,\delta))\le t\}.$$

上式右边第一项是零测集. 为证E^t 是可测集, 只需证明每个$\{x \in K_j \mid \omega(f;E\cap B(x,\delta)) \le t\}$ 是可测集. 一般地我们证明对任意闭集$K \subset E$, 集合

$$K^t := \{x \in K \mid \omega(f;E\cap B(x,\delta)) \le t\}$$

是闭集. 因振幅$\omega(f;E\cap B(x,\delta))$ 非负, 故可设$t \ge 0$. 任取收敛序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K^t$. 令$x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. 由$K$ 为闭集知$x_0 \in K$. 对任意$x, y \in E\cap B(x_0,\delta)$ 有$|x-x_k| \to |x-x_0| < \delta, |y-x_k| \to |y-x_0| < \delta\,(k\to\infty)$. 因此$\exists\, k \in \mathbb{N}$ 使得$|x-x_k| < \delta, |y-x_k| < \delta$. 这表明$x, y \in E\cap B(x_k,\delta)$ 于是有$|f(x)-f(y)| \le \omega(f;E\cap B(x_k,\delta) \le t$. 再由$x, y \in E\cap B(x_0,\delta)$的任意性即知$\omega(f;E\cap B(x_0,\delta)) \le t$. 所以$x_0 \in K^t$. 这证明了$K^t$ 是闭集从而证明了E^t是可测集. 所以$x \mapsto \omega(f;E\cap B(x,\delta))$ 在E上Lebesgue可测.

由假设知$M := \sup\limits_{x\in I} |f(x)| < +\infty$. 据振幅的定义易见

$$\omega(f;E\cap B(x,\delta)) \le 2M \quad \forall\, x \in E,\ \forall\, \delta > 0.$$

因$m(E) < +\infty$ 且对任意$x \in E$ 有$\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega(f;E\cap B(x,\delta)) = \omega_f(x)$, 故函数族$\{\omega(f;E\cap B(\cdot,\delta))\}_{\delta\in(0,1)}$ 满足**定理10.16之推论:连续参变量的有界收敛定理** 的条件. 因此函数$\omega_f(x)$在E 上Lebesgue 可积且

$$\int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0+} \int_E \omega(f;E\cap B(x,\delta))\mathrm{d}x. \tag{6.15}$$

为证(6.14), 借助(6.15), 只需证明对任意$\varepsilon > 0$ 存在$\delta > 0$ 使得对于E的任意分划$P = \{E_k\}_{k=1}^N$, 只要$\lambda(P) < \delta$, 就有

$$\int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^N \omega(f;E_k)m(E_k) < \int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon. \tag{6.16}$$

由此即知(6.14)成立.

对于E的任意分划$P = \{E_k\}_{k=1}^N$, 由E_k 互不重叠和$m(\partial E_k) = 0$有

$$\int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \omega_f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^N \int_{E_k^\circ} \omega_f(x)\mathrm{d}x.$$

这里E_k° 是E_k的内部. 对每个$k \in \{1,2,...,N\}$, 若E_k° 非空, 则对任意$x \in E_k^\circ$ 存在$r = r_x > 0$ 使得$B(x,r) \subset E_k$. 因此$\omega_f(x) \le \omega(f;E_k\cap B(x,r)) \le \omega(f;E_k)$. 这就导出

$$\int_{E_k^\circ} \omega_f(x)\mathrm{d}x \le \omega(f;E_k)m(E_k).$$

若E_k°为空集, 则$m(E_k^\circ)=0$, 上式自动成立. 由此得到

$$\int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^N \omega(f;E_k)m(E_k)\,. \tag{6.17}$$

另一方面, 对任意$\varepsilon>0$, 由(6.14)知存在$\delta>0$ 使得

$$\int_E \omega(f;E\cap B(x,\delta))\mathrm{d}x < \int_E \omega_f(x)\mathrm{d}x+\varepsilon. \tag{6.18}$$

现在任取E的分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$满足$\lambda(P)<\delta$. 我们断言:

$$\omega(f;E_k)m(E_k)\le \int_{E_k}\omega(f;E\cap B(x,\delta))\mathrm{d}x, \qquad k=1,2,...,N. \tag{6.19}$$

事实上, 固定任意$k\in\{1,2,...,N\}$, 设$x\in E_k$, 则对任意$y\in E_k$ 有$|y-x|\le \mathrm{diam}(E_k)\le \lambda(P)<\delta$, 这蕴含$y\in E\cap B(x,\delta)$. 所以$E_k\subset E\cap B(x,\delta)$. 因此$\omega(f;E_k)\le\omega(f;E\cap B(x,\delta))$. 这证明了当$x\in E_k$ 时$\omega(f;E_k)\le\omega(f;E\cap B(x,\delta))$. 对$x\in E_k$ 取积分即得

$$\omega(f;E_k)m(E_k)\le \int_{E_k}\omega(f;E\cap B(x,\delta))\mathrm{d}x\,.$$

所以(6.19)成立. 于是得到

$$\sum_{k=1}^N\omega(f,E_k)m(E_k)\le\sum_{k=1}^N\int_{E_k}\omega(f;E\cap B(x,\delta))\mathrm{d}x=\int_E\omega(f;E\cap B(x,\delta))\mathrm{d}x. \tag{6.20}$$

联合(6.17),(6.20),(6.18) 即得(6.16):

$$\int_E\omega_f(x)\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^N\omega(f;E_k)m(E_k)\le\int_{E_k}\omega(f;E\cap B(x,\delta))\mathrm{d}x<\int_E\omega_f(x)\mathrm{d}x+\varepsilon. \qquad \Box$$

有了以上两个命题我们立即得到关于Riemann可积性的Lebesgue准则:

【定理10.50(Lebesgue准则)】设$E\subset\mathbb{R}^n$为一Jordan可测集, $f:E\to\mathbb{C}$. 则

$$f\in\mathcal{R}(E)\iff f\ 在E上本质有界且几乎处处连续.$$

【证】如前, 可以假定f是实值的. 若$m(E)=0$, 则上式两边同时成立. 以下设$m(E)>0$. 回忆: 这蕴含E°非空且$m(E^\circ)=m(E)$.

由**命题10.47** 知为证本定理可以假定f已在E上本质有界, 然后只需证明: $f\in\mathcal{R}(E^\circ)\iff f$在$E$上几乎处处连续.

注意f在E上本质有界蕴含f在E°上有界. 因此由**命题10.48(有界函数Riemann可积性的振幅刻画)**, **命题10.49(点振幅的Lebesgue积分)** 和点振幅$\omega_f(x)$ 的定义有

$$
\begin{aligned}
& f \in \mathcal{R}(E^\circ) \iff \lim_{\lambda(P)\to 0+} \sum_{k=1}^{N} \omega(f;E_k)m(E_k) = 0 \iff \int_{E^\circ} \omega_f(x)\mathrm{d}x = 0 \\
& \iff \omega_f(x) = 0 \ \text{ a.e. } \ x \in E^\circ \iff \omega_f(x) = 0 \ \text{ a.e. } \ x \in E \\
& \iff f \text{ 在} E \text{ 上几乎处处连续.}
\end{aligned}
$$

这里倒数第二个"$\iff$"用到了E° 是开集而E只比E° 多一个零测集. □

应用Lebesgue准则, 我们容易建立Riemann积分的基本性质.

【**定理10.51**】设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为一Jordan 可测集. 则有

(a) $\mathcal{R}(E) \subset L^1(E)$, 并且Riemann积分与Lebesgue 积分数值相同, 即当$f \in \mathcal{R}(E)$时,

$$
(\mathrm{R})\int_E f(x)\mathrm{d}x = (\mathrm{L})\int_E f(x)\mathrm{d}x =: \int_E f(x)\mathrm{d}x.
$$

这里R=Riemman, L=Lebesgue.

(b) 若$f, g \in \mathcal{R}(E)$, α, β 为常数, 则$\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(E)$, $fg \in \mathcal{R}(E)$. 因此是一个线性空间且关于函数的乘法封闭. 此外有

$$
\int_E \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\mathrm{d}x = \alpha \int_E f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_E g(x)\mathrm{d}x. \tag{6.21}
$$

进一步, 若$|g|$在E 上有正的下界, 则也有$f/g \in \mathcal{R}(E)$.

(c) 若$f \in \mathcal{R}(E)$, 则对任一Jordan可测集$A \subset E$有$f \in \mathcal{R}(A), \mathbf{1}_A f \in \mathcal{R}(E)$ 且

$$
\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E \mathbf{1}_A(x) f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.22}
$$

(d) 设$A, B \subset \mathbb{R}^n$ 为Jordan可测集, f在$A \cup B$上有定义. 则

$f \in \mathcal{R}(A \cup B) \iff f \in \mathcal{R}(A), f \in \mathcal{R}(B)$ 且f 在$A \cup B$ 上本质有界.

此外当$f \in \mathcal{R}(A \cup B)$且$A, B$ 不重叠时有

$$
\int_{A \cup B} f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_B f(x)\mathrm{d}x.
$$

【证】当$m(E) = 0$ 时, (a), (b), (c) 显然成立. 以下设$m(E) > 0$.

(a): 任取$f \in \mathcal{R}(E)$. 由**命题10.47**知f在E上本质有界, 因$E^\circ \subset \overline{E^\circ} \cap E$, 故$f$在$E^\circ$上有界. 又由Lebesgue 准则知$f$在$E$上几乎处处连续. 据可测函数性质(**命题9.40**)

知f是E上的Lebesgue可测函数. 又因$m(E^\circ)=m(E)<+\infty$, 故f在E° 上Lebesgue可积从而在E上Lebesgue 可积且

$$(\mathrm{L})\int_{E^\circ} f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

对于E° 的任意分划$P=\{E_k\}_{k=1}^N$, 由Lebesgue 积分的可加性和积分不等式有

$$\sum_{k=1}^N i(E_k)m(E_k)\le(\mathrm{L})\int_{E^\circ} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^N(\mathrm{L})\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^N s(E_k)m(E_k).$$

令$\lambda(P)\to 0$, 则由**命题10.48(有界函数Riemann可积性的振幅刻画)**知上式两端都趋于(R) $\int_{E^\circ} f(x)\mathrm{d}x$ (也见估计式(6.12)). 因此

$$(\mathrm{R})\int_{E^\circ} f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_{E^\circ} f(x)\mathrm{d}x.$$

于是结合

$$(\mathrm{R})\int_{E} f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_{E^\circ} f(x)\mathrm{d}x\qquad(\textbf{命题10.47})$$

得到

$$(\mathrm{R})\int_{E} f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_{E} f(x)\mathrm{d}x.$$

(b): 设$f,g\in\mathcal{R}(E)$. 令$D_E(f)$表示f在E上的间断点的集合. 由Lebesgue 准则知$D_E(f)$, $D_E(g)$是零测集且存在Jordan 开集$U_f\supset\overline{E^\circ}, U_g\supset\overline{E^\circ}$ 使得f,g 分别在$E\cap U_f, E\cap U_g$上有界. 令$U=U_f\cap U_g$, 则U仍是Jordan 开集且$U\supset\overline{E^\circ}$ 并且f,g 都在$E\cap U$上有界. 设α,β 为常数. 则易见$\alpha f+\beta g, fg$ 都在$E\cap U$上有界且

$$D_E(\alpha f+\beta g), D_E(fg)\subset D_E(f)\cup D_E(g).$$

因$D_E(f)\cup D_E(g)$是零测集, 所以$D_E(\alpha f+\beta g), D_E(fg)$ 也是零测集. 因此由Lebesgue准则知$\alpha f+\beta g$和fg都属于$\mathcal{R}(E)$. 积分的线性性(6.21)可由(a)和Lebesgue积分的线性性直接导出.

其次假设还存在常数$c>0$ 使得$|g(x)|\ge c>0$ for all $x\in E$. 则易见f/g 在$E\cap U$ 上有界且$D_E(f/g)\subset D_E(f)\cup D_E(g)$. 因此$D_E(f/g)$是零测集. 所以再由Lebesgue 准则知$f/g\in\mathcal{R}(E)$.

(c): 由$f\in\mathcal{R}(E)$ 知存在Jordan 开集$U\supset\overline{E^\circ}$ 使得f在$E\cap U$ 上有界. 设Jordan可测集$A\subset E$. 由**命题10.46** 知$\mathbf{1}_A$ 在$\mathbb{R}^n$上几乎处处连续从而在E上几乎处处连续. 又$\mathbf{1}_A$是

有界函数, 故由Lebesgue 准则知$\mathbf{1}_A \in \mathcal{R}(E)$. 因此由(b) 知$\mathbf{1}_A f \in \mathcal{R}(E)$. 下面分两种情形来证明$f \in \mathcal{R}(A)$.

Case 1: $m(A) = 0$. 此时当然有$f \in \mathcal{R}(A)$.

Case 2: $m(A) > 0$. 此时由$A^\circ \subset E^\circ$知$U \supset \overline{A^\circ}$, 且显然$f$在$A \cap U$上有界. 由Lebesgue 准则,为证$f \in \mathcal{R}(A)$, 只需证明$f$在$A$上几乎处处连续. 而为证这点, 只需证明

$$D_A(f) \subset D_E(f) \cup \partial A.$$

对任一$x \in A \setminus (D_E(f) \cup \partial A)$, 有$x \in A^\circ$, 因此存在$\delta > 0$ 使得$B(x, \delta) \subset A^\circ \subset A \subset E$. 于是有$f|_A(y) = f(y)$ for all $y \in B(x, \delta)$, 从而由f 在x连续知$f|_A$也在x 连续. 这证明了$A \setminus (D_E(f) \cup \partial A)$中每一点都是$f|_A$ 的连续点. 因此$D_A(f) \subset D_E(f) \cup \partial A$. 所以$f \in \mathcal{R}(A)$.

最后由$\mathcal{R}(E) \subset L^1(E)$, 两类积分值相同, 和Lebesgue 积分的可加性即得

$$\int_E \mathbf{1}_A(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_{E \setminus A} \mathbf{1}_A(x) f(x) \mathrm{d}x + \int_A \mathbf{1}_A(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_A f(x) \mathrm{d}x.$$

(d): 设$f \in \mathcal{R}(A \cup B)$. 则有**命题10.47**知$f$在$A \cup B$上本质有界且由(c) 知$f \in \mathcal{R}(A), f \in \mathcal{R}(B)$.

反之设$f \in \mathcal{R}(A)$, $f \in \mathcal{R}(B)$ 且f 在$A \cup B$ 上本质有界. 为证$f \in \mathcal{R}(A \cup B)$, 据Lebesgue 准则, 只需证明$f$在$A \cup B$上几乎处处连续, 即证$m(D_{A \cup B}(f)) = 0$. 对任意$x \in (A \cup B) \setminus (\partial A \cup \partial B \cup D_A(f) \cup D_B(f))$ 有$x \in A^\circ \cup B^\circ$ 且$x \notin D_A(f) \cup D_B(f)$. 不妨设$x \in A^\circ$. 则存在$\delta > 0$使得$B(x, \delta) \subset A$. 因此$f(y) = f|_A(y)\ \forall\, y \in B(x, \delta)$. 因$f|_A$在$x$连续, 故$f$在$x$连续. 这证明了$(A \cup B) \setminus (\partial A \cup \partial B \cup D_A(f) \cup D_B(f))$ 中的每一点都是f在$A \cup B$上的连续点. 因此$D_{A \cup B}(f) \subset \partial A \cup \partial B \cup D_A(f) \cup D_B(f)$. 而由假设知$\partial A, \partial B, D_A(f), D_B(f)$都是零测集, 故$D_{A \cup B}(f)$是零测集.

最后设$f \in \mathcal{R}(A \cup B)$且$m(A \cap B) = 0$, 则由Riemann积分与Lebesgue积分数值相同和Lebesgue 积分的可加性即得所证等式. $\square$

关于Riemann 积分与Lebesgue 积分的关系, 我们最后说明: 既然Riemann 可积函数都是Lebesgue可积函数且两类积分数值恒等, 关于Riemann 积分的任何基本性质、运算公式、各种极限关系等等就都属于前面已证明了的Lebesgue 积分的相应部分(如线性性、可加性、积分不等式、中值公式、积分换元、分部积分、极限与积分的

交换顺序、控制收敛、逐项积分、重积分划为累次积分、积分换元公式, 等等), 意即都可归结为Lebesgue积分问题. 此外, 如果要求在Jordan可测集类中和在Riemann可积函数类中解决问题, 那么只需保证出现的所有集合(特别是$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$中的$E_k$和$E$) 都是Jordan 可测集以及被积函数(特别是极限函数$f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ 和函数级数$u(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 中的f_k, f, u_k, u)都是Riemann 可积函数即可. (同学们可以自己设计相关习题...)

作业题

1. 试构造一个有界开集$G \subset \mathbb{R}^n$ 使得G不是Jordan 可测集, 从而说明“非Jordan开集”的开集是大量存在的.

2. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为一Jordan可测集, f是E上的一个有界函数. 设有E的一列分划$\{E_k^{(N)}\}_{k=1}^{N}, N = 1, 2, 3, ...$, 满足

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\le k\le N} \mathrm{diam}(E_k^{(N)}) = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \omega(f; E_k^{(N)}) m(E_k^{(N)}) = 0.$$

证明$f \in \mathcal{R}(E)$.

3. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为一Jordan可测集, 实函数f在E上有界且Riemann 可积. 证明对于任意连续函数$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 复合函数$\Phi \circ f$ 在E上Riemann 可积. 由此可知复合函数$e^{f(x)}, \log(1 + |f(x)|), |f(x)|^p \,(p > 0), \cos(f(x)), \sin(f(x))$ 等等都在E上Riemann 可积.

4. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为一Jordan可测集, f_k, f是E上的有界函数. 假设$f_k \in \mathcal{R}(E), k = 1, 2, 3, ...$ 且f_k 在E上一致收敛于f, 即$\sup\limits_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \,(k \to \infty)$. 证明$f \in \mathcal{R}(E)$ 且$\lim\limits_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

5. 设$E \subset \mathbb{R}^n$ 为一Jordan可测集, 函数列$f_k \in \mathcal{R}(E), k = 1, 2, 3, ...$ 在E上处处收敛于一个函数$f \in \mathcal{R}(E)$, 即$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \,(k \to \infty)$ for all $x \in E$ 且f在E上Riemann 可积. 此外假设存在$0 \le F \in L^1(E)$ 使得$|f_k(x)| \le F(x)$ for all $x \in E, k \in \mathbb{N}$. 证明$\lim\limits_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$为$[0, 1]^n$中的可数稠密集(其中$a_1, a_2, a_3, ...$ 互不相同). 令$A_k = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, 证明$\mathbf{1}_{A_k} \in \mathcal{R}([0, 1]^n), k = 1, 2, 3, ...$ 且$\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) = \mathbf{1}_A(x)$ for all

$x \in [0,1]^n$. 但$\mathbf{1}_A \in L^1([0,1]^n) \setminus \mathcal{R}([0,1]^n)$.

7. 设实函数$f(x,y,z)$ 在闭球$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ 上有界且几乎处处连续. 将f零延拓至$\mathbb{R}^3$上. 求下列极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} \sum_{k=-n}^{n} f\Big(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\Big).$$

(要说明理由.)

§10.7. 重积分的应用: Brouwer不动点定理和区域不变定理的证明

利用测度和积分, 本节我们证明Brouwer[5] 的极为重要、常用、易懂的两个定理:

【Brouwer 不动点定理】设$K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧凸集, $f: K \to K$ 连续. 则f在K 上有不动点, 即存在$x_* \in K$ 使得$f(x_*) = x_*$.

【Brouwer 区域不变定理】设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为连续映射且局部一对一, 则f是开映射.

【说明】我们已学过一般度量空间中的Banach压缩映射不动点定理, 该定理的优点是对映射$f: E \to E$ 的定义域E 除了要求为闭集外不加任何限制, 而且对于无穷维空间也适用, 缺点是要求映射f是压缩的, 因此大多数连续自映射被排除在外. Brouwer不动点定理只要求连续自映射的定义域是有限维空间$\mathbb{R}^n$中的紧凸集. 但这里"有限维"的限制一般不能去掉, 否则有反例: 例如令

$$X = \Big\{x = (x_1, x_2, x_3, ...) \;\Big|\; x_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty\Big\}, \quad \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

不难证明$(X, \|\cdot\|)$ 是一个完备的赋范线性空间. 由于$e_1 = (1, 0, 0, 0, , ...)$,
$e_2 = (0, 1, 0, 0, ...), ..., e_k = (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...), ...$都属于$X$且任意$k$个向量$e_1, e_2, ..., e_k$ 都是线性无关的($k = 1, 2, 3, ...$), 因此X不是有限维的, 也即X是一个无穷维线性空间. 考虑X中的闭单位球

$$B = \{x \in X \,|\, \|x\| \le 1\}.$$

易见B 是闭凸集. 令

$$f(x) = (1 - \|x\|, x_1, x_2, x_3, ...), \quad x \in B.$$

则不难验证

$$\|f(x)\| = |1 - \|x\|\,| + \|x\| = 1 - \|x\| + \|x\| = 1 \qquad \forall\, x \in B,$$
$$\|f(x) - f(y)\| \le 2\|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in B.$$

因此$f: B \to B$ 且连续. 但f没有不动点. 否则设$x \in B$ 是f的不动点：$x = f(x)$, 则由f的定义有

$$x_1 = 1 - \|x\|,\ x_2 = x_1,\ x_3 = x_2,\ ...,\ x_k = x_{k-1},\ k = 1, 2, 3, ...$$

[5]**L.E.J.Brouwer(布劳威尔, 1881-1966), 荷兰数学家, 伟大的拓扑学家, 证明了Brouwer 不动点定理, 维数的拓扑不变性和区域的拓扑不变性, 进一步发展了作为一种拓扑工具的映射度概念.**

因此$x_k = 1 - \|x\|, k = 1, 2, 3, \ldots$. 另一方面又有$\|x\| = \|f(x)\| = 1$, 于是得到$x_k = 0, k = 1, 2, 3 \ldots$. 从而有$x = 0$. 这与$\|x\| = 1$矛盾.

Brouwer区域不变定理中的“局部一对一”是指: 对任意$x \in \Omega$ 存在$\delta = \delta_x > 0$ 使得$B(x, \delta) \subset \Omega$ 且f在$B(x, \delta)$ 内是单射. 区域是指连通开集. 由于连续映射把连通集映为连通集, 故根据**Brouwer 区域不变定理** 即知在定理的条件下, 若Ω 是区域, 则$f(\Omega)$ 也是区域. 因每个开集可以分解成可数个连通分支, 故不失一般性, 可以假定Ω 是连通开集即是一个区域. 但证明时完全不需要连通性!

这两个定理的证明当$n = 1$时是容易的: 因为$\mathbb{R}$ 是全序集！此时K是一个有界闭区间, Brouwer不动点定理是连续实函数的介值定理的简单应用; 而此时连通开集$\Omega = (a, b)$是一个开区间, 不难证明定理中的f 在(a, b)上严格单调.于是$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 是严格单调的连续函数, 因此是开映射. 但当$n \geq 2$时, 即对于无序集的情形, 证明的难度立刻陡增, 某些基本方法, 例如对维数n用归纳法等, 完全不工作. 为证明Brouwer 不动点定理, 通常是先对K为闭单位球$\mathbb{B}^n$ 的特殊情形进行证明, 然后证明这个特殊情形蕴含一般情形.

我们从下面这个命题开始. 以下用$m(\cdot)$表示$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度, 用$B^n(a, r)$ 表示$\mathbb{R}^n$中的以a为中心、$r > 0$为半径的开球.

【命题10.52】设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集, $E \subset \Omega$ 为非空紧集, $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 属于C^1 类. 令

$$\Phi_t(x) = x + t\psi(x), \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

则ψ 在E 上满足Lipschitz 条件, 并且存在$\delta > 0$ 使得对任意$t \in [-\delta, \delta]$, 映射$x \mapsto \Phi_t(x)$ 在E 上是单射, $\det\Phi_t'(x) > 0$ for all $x \in E$, 并且

$$m(\Phi_t(E)) = P(t), \quad t \in [-\delta, \delta]$$

其中$P(t)$是t的多项式:

$$P(t) = \int_E \det(\mathrm{I} + t\psi'(x))\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}$$

I是单位矩阵.

【证】令$\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(E, \Omega^c)$. 由假设可知$0 < \varepsilon < +\infty$. 考虑开集

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{dist}(E, x) < \varepsilon\}.$$

易见有

$$E \subset \Omega_\varepsilon \subset \overline{\Omega_\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{dist}(E, x) \le \varepsilon\} \subset \Omega$$

且$\overline{\Omega_\varepsilon}$ 是紧集. 因$\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 且$\overline{\Omega_\varepsilon}$ 是Ω内的紧集, 故利用有限覆盖定理或用列紧性(反证法) 不难证明ψ 在$\overline{\Omega_\varepsilon}$上满足Lipschitz 条件, 即存在$0 < L < +\infty$ 使得

$$|\psi(x) - \psi(y)| \le L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in \overline{\Omega_\varepsilon}.$$

取$\delta = 1/(2L) > 0$, 则当$t \in [-\delta, \delta]$ 时对任意$x, y \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ 有

$$|\Phi_t(x) - \Phi_t(x)| = |x - y + t(\psi(x) - \psi(y))| \ge |x - y| - |t|L|x - y| \ge \frac{1}{2}|x - y|.$$

这表明当$t \in [-\delta, \delta]$ 时Φ_t 在$\overline{\Omega_\varepsilon}$ 上是单射, 特别Φ_t 在开集Ω_ε 上是单射. 由上式知对任意$t \in [-\delta, \delta]$ 有

$$|\Phi_t(x) - \Phi_t(x)| \ge \frac{1}{2}|x - y| \qquad \forall\, x, y \in \Omega_\varepsilon.$$

作为一个不难的习题, 易证这蕴含

$$\det\Phi_t'(x) \ne 0 \qquad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon \qquad (\,\forall\, t \in [-\delta, \delta]\,). \tag{7.1}$$

来证明

$$\det\Phi_t'(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon, \quad \forall\, t \in [-\delta, \delta]. \tag{7.2}$$

事实上我们有

$$\Phi_t'(x) = \mathrm{I} + t\psi'(x), \quad x \in \Omega. \tag{7.3}$$

因此对每个固定的$x \in \Omega_\varepsilon$, 行列式$t \mapsto g(t) := \det\Phi_t'(x) = \det(\mathrm{I} + t\psi'(x))$ 是t的多项式(见下面的证明)从而连续. 由(7.1) 知$g(t)$ 在$[-\delta, \delta]$ 上无零点. 因当$t = 0$ 时$g(0) = \det\Phi_0'(x) = 1 > 0$, 故由连续函数介值定理知$g(t) > 0$ for all $t \in [-\delta, \delta]$. 这证明了(7.2)成立.

由(7.2),(7.3), $E \subset \Omega_\varepsilon$ 和积分换元公式我们有

$$m(\Phi_t(E)) = \int_E \det\Phi_t'(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \det(\mathrm{I} + t\psi'(x))\,\mathrm{d}x, \quad t \in [-\delta, \delta].$$

下证上式右边是t的多项式:

$$P(t) = \int_E \det(\mathrm{I} + t\psi'(x))\,\mathrm{d}x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_E a_{n-k}(x)\mathrm{d}x\Big)t^k, \quad t \in \mathbb{R} \tag{7.4}$$

其中$a_0(x), a_1(x), ..., a_{n-1}(x)$是$E$上的某些可积函数, 与$t$ 无关.

当$t=0$ 时等式(7.4)显然成立. 设$t\neq 0$. 则对任意$x\in E$ 有

$$\mathrm{I}+t\psi'(x)=t(\lambda\mathrm{I}+A(x))\quad \text{其中}\quad \lambda=\frac{1}{t},\quad A(x)=\psi'(x)$$

从而计算得到

$$\begin{aligned}&\det(\mathrm{I}+t\psi'(x))=t^n\det(\lambda\mathrm{I}+A(x))\\&=t^n\Big(\lambda^n+a_{n-1}(x)\lambda^{n-1}+\cdots+a_1(x)\lambda+a_0(x)\Big)\\&=1+a_{n-1}(x)t+\cdots+a_1(x)t^{n-1}+a_0(x)t^n.\end{aligned}$$

对$x\in E$ 取积分得到

$$P(t)=\int_E\det(\mathrm{I}+t\psi'(x))\,\mathrm{d}x=1+\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_E a_{n-k}(x)\mathrm{d}x\Big)t^k.$$

这证明了(7.4) 成立. 因此$m(\Phi_t(E))=P(t)$ 是$t\in[-\delta,\delta]$的多项式. □

【命题10.53】设$\mathbb{B}^n=\overline{B^n}(0,1)\subset\mathbb{R}^n$为闭单位球, 开集$\Omega\supset\mathbb{B}^n$, 映射$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 属于C^1 类, 满足$\varphi(\mathbb{B}^n)\subset\partial\mathbb{B}^n$. 则存在$x_0\in\partial\mathbb{B}^n$ 使得$\varphi(x_0)\neq x_0$.

【证】令$\psi(x)=\varphi(x)-x$,

$$\Phi_t(x)=x+t\psi(x)=(1-t)x+t\varphi(x),\quad x\in\Omega,\, t\in\mathbb{R}.$$

由**命题10.52** 知存在$\delta>0$ 使得对任意$t\in[-\delta,\delta]$, 映射$x\mapsto\Phi_t(x)$ 在$\mathbb{B}^n$ 上是单射, $\det\Phi_t'(x)>0$ for all $x\in\mathbb{B}^n$, 并且

$$m(\Phi_t(\mathbb{B}^n))=P(t),\quad t\in[-\delta,\delta] \tag{7.5}$$

其中$P(t)$是t的多项式:

$$P(t)=\int_{\mathbb{B}^n}\det\Big(\mathrm{I}+t\psi'(x)\Big)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{B}^n}\det\Big((1-t)\mathrm{I}+t\varphi'(x)\Big)\,\mathrm{d}x,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{7.6}$$

根据光滑映射的开映射定理知对每个$t\in[-\delta,\delta]$, 映射$x\mapsto\Phi_t(x)$在$(\mathbb{B}^n)^\circ$ 上是开映射, 特别有$\Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ)$ 是$\mathbb{R}^n$的开集.

下面我们用反证法: 假设$\varphi(x)=x$ for all $x\in\partial\mathbb{B}^n$. 我们将导出矛盾.

首先我们证明对每个$t\in[-\delta,\delta]$, 映射$x\mapsto\Phi_t(x)$在$\mathbb{B}^n$上还是满射, 即

$$\Phi_t(\mathbb{B}^n)=\mathbb{B}^n\qquad\forall\, t\in[-\delta,\delta]. \tag{7.7}$$

为此我们需要证明对任意$t \in [-\delta, \delta]$ 有

$$(\mathbb{B}^n)^\circ \cap \Phi_t(\mathbb{B}^n) = \Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ). \tag{7.8}$$

因$\Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ) \subset (\mathbb{B}^n)^\circ$ 故$\Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ) \subset (\mathbb{B}^n)^\circ \cap \Phi_t(\mathbb{B}^n)$. 反之对任意$x \in (\mathbb{B}^n)^\circ \cap \Phi_t(\mathbb{B}^n)$, 写$x = \Phi_t(y)$ 其中$y \in \mathbb{B}^n$. 若$y \notin (\mathbb{B}^n)^\circ$, 则$y \in \partial\mathbb{B}^n$ 从而得$x = \Phi_t(y) = y \in \partial\mathbb{B}^n$, 与$x \in (\mathbb{B}^n)^\circ$ 矛盾. 所以必有$y \in (\mathbb{B}^n)^\circ$ 从而有$x = \Phi_t(y) \in \Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ)$. 所以$(\mathbb{B}^n)^\circ \cap \Phi_t(\mathbb{B}^n) \subset \Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ)$. 这证明了(7.8)成立.

由(7.8)和集合分解$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ 得到

$$(\mathbb{B}^n)^\circ = [(\mathbb{B}^n)^\circ \setminus \Phi_t(\mathbb{B}^n)] \cup \Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ).$$

因$(\mathbb{B}^n)^\circ \setminus \Phi_t(\mathbb{B}^n)$ 和$\Phi_t((\mathbb{B}^n)^\circ)$ 都是开集且不相交, 而$(\mathbb{B}^n)^\circ$是连通开集, 故$(\mathbb{B}^n)^\circ \setminus \Phi_t(\mathbb{B}^n)$ 必是空集, 也即$(\mathbb{B}^n)^\circ \subset \Phi_t(\mathbb{B}^n)$. 又因$\Phi_t(\mathbb{B}^n)$ 是紧集(从而是闭集), 故两边取闭包得到$\mathbb{B}^n \subset \Phi_t(\mathbb{B}^n)$. 再结合$\Phi_t(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{B}^n$ 即得$\Phi_t(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$. 所以(7.7) 成立.

由(7.7) 和(7.5) 知

$$P(t) = m(\mathbb{B}^n) \qquad \forall\, t \in [-\delta, \delta].$$

再由$P(t)$ 是多项式知

$$P(t) = m(\mathbb{B}^n) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

特别对于$t = 1$ 有

$$\int_{\mathbb{B}^n} \det\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = P(1) = m(\mathbb{B}^n).$$

另一方面由假设有$|\varphi(x)|^2 \equiv 1$, $x \in \mathbb{B}^n$. 对此恒等式两边取梯度运算得到

$$2\varphi(x)^\tau \varphi'(x) = (|\varphi|^2)'(x) \equiv 0, \quad x \in (\mathbb{B}^n)^\circ.$$

这蕴含Jacobi 矩阵$\varphi'(x)$在$(\mathbb{B}^n)^\circ$上处处不可逆, 即

$$\det\varphi'(x) \equiv 0, \qquad x \in (\mathbb{B}^n)^\circ.$$

因$x \mapsto \det\varphi'(x)$ 在Ω内连续, 故得$\det\varphi'(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{B}^n$ 从而有

$$P(1) = \int_{\mathbb{B}^n} \det\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

这就与$P(1) = m(\mathbb{B}^n) > 0$ 矛盾. 这矛盾证明了命题成立. $\square$

【**命题10.54**】设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个多项式映射满足$f(\mathbb{B}^n)\subset\mathbb{B}^n$. 则$f$ 在$\mathbb{B}^n$上有不动点, 即存在$x_*\in\mathbb{B}^n$ 使得$f(x_*)=x_*$.

【证】反证法. 假设f 在$\mathbb{B}^n$上没有不动点, 即

$$f(x)\neq x\qquad\forall\,x\in\mathbb{B}^n.\tag{7.9}$$

对每个$x\in\mathbb{B}^n$, 从$f(x)$ 出发沿着方向$x-f(x)$做射线交于$\partial\mathbb{B}^n$ 上的一点$\varphi(x)$ (**图示**), 即

$$\varphi(x)=x+\theta(x)(x-f(x)),\qquad\theta(x)\ge 0.\tag{7.10}$$

$\theta(x)\ge 0$的确定: 设$x\in\mathbb{B}^n$. 则

$$\begin{aligned}&|\varphi(x)|=1\iff|x|^2+2\theta(x)\langle x,\,x-f(x)\rangle+\theta(x)^2|x-f(x)|^2=1\\&\iff\theta(x)^2|x-f(x)|^2+2\theta(x)\langle x,\,x-f(x)\rangle-(1-|x|^2)=0\end{aligned}$$

即当且仅当

$$\theta(x)=\frac{-\langle x,x-f(x)\rangle+\sqrt{\langle x,x-f(x)\rangle^2+|x-f(x)|^2(1-|x|^2)}}{|x-f(x)|^2}.\tag{7.11}$$

需证明

$$\langle x,x-f(x)\rangle^2+|x-f(x)|^2(1-|x|^2)>0\qquad\forall\,x\in\mathbb{B}^n.\tag{7.12}$$

假设存在$x\in\mathbb{B}^n$使得$\langle x,x-f(x)\rangle^2+|x-f(x)|^2(1-|x|^2)=0$. 则由$|x-f(x)|>0$ 得到$|x|^2=1,\langle x,x-f(x)\rangle=0$ 从而有

$$\begin{aligned}&1-\langle x,f(x)\rangle=|x|^2-\langle x,f(x)\rangle=\langle x,x-f(x)\rangle=0,\\&0<|x-f(x)|^2=1-2\langle x,f(x)\rangle+|f(x)|^2=-1+|f(x)|^2\le 0\end{aligned}$$

矛盾. 所以(7.12) 成立.

由(7.9),(7.12) 和紧性论证易见存在开集$\Omega\supset\mathbb{B}^n$ 使得

$$|x-f(x)|>0,\quad\langle x,x-f(x)\rangle^2+|x-f(x)|^2(1-|x|^2)>0\qquad\forall\,x\in\Omega.\tag{7.13}$$

对每个$x\in\Omega$, 设$\varphi(x)$由(7.10),(7.11)定义. 则$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$在$\Omega$上是光滑的(即至少属于$C^1$类) 并且$\varphi(\mathbb{B}^n)\subset\partial\mathbb{B}^n$. 此外有

$$|x|=1\implies\langle x,x-f(x)\rangle=1-\langle x,f(x)\rangle\ge 1-|f(x)|\ge 0\implies\theta(x)=0.$$

这表明$\varphi(x)=x$ for all $x\in\partial\mathbb{B}^n$. 然而由**命题10.53** 知存在$x_0\in\partial\mathbb{B}^n$ 使得$\varphi(x_0)\neq x_0$, 矛盾. 这矛盾证明了f 在$\mathbb{B}^n$上必有不动点. □

【Brouwer 不动点定理的证明】

Step 1. 证明这定理对闭单位球成立. 设$f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ 连续. 通过对$f=(f_1,f_2,...,f_n)^\tau$的每个坐标函数f_i 应用Weierstrass 多项式一致逼近定理可知存在一列多项式映射$P_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$\max_{x\in\mathbb{B}^n}|P_k(x)-f(x)|<\frac{1}{k}.$$

由$|f(x)|\le 1$ for all $|x|\le 1$ 知当$|x|\le 1$时$|P_k(x)|\le|P_k(x)-f(x)|+|f(x)|\le\frac{1}{k}+1$. 令

$$f_k(x)=\frac{P_k(x)}{1+\frac{1}{k}},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

则f_k 是多项式映射且当$|x|\le 1$时$|f_k(x)|\le 1$. 因此f_k是$\mathbb{B}^n$ 上的多项式自映射. 由**命题10.54** 知存在$x_k\in\mathbb{B}^n$ 使得$f_k(x_k)=x_k$, 即

$$P_k(x_k)=x_k+\frac{1}{k}x_k,\quad k=1,2,3,\dots.$$

由此有

$$|f(x_k)-x_k|\le|f(x_k)-P_k(x_k)|+|P_k(x_k)-x_k|\le\frac{2}{k}$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}(f(x_k)-x_k)=0.$$

另一方面因$\mathbb{B}^n$ 是紧集, 故存在子列$\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ 和$x_*\in\mathbb{B}^n$ 使得$x_{k_j}\to x_*\,(j\to\infty)$. 据此便有

$$f(x_*)=\lim_{j\to\infty}f(x_{k_j})=\lim_{j\to\infty}x_{k_j}=x_*.$$

所以f在$\mathbb{B}^n$上有不动点.

Step 2. 对一般情性的证明. 设$K\subset\mathbb{R}^n$ 为紧凸集, $f:K\to K$ 连续. 因K 是紧集, 故存在$r>0$ 使得$K\subset\overline{B^n}(0,r)$. 这蕴含

$$\forall\,x\in K\implies f(x)\in K\implies\frac{f(x)}{r}\in\mathbb{B}^n.$$

设$\mathbb{R}^n\ni x\mapsto P(x)\in K$ 是$\mathbb{R}^n$中的点x到K中的最近点, 即

$$|x-P(x)|=\mathrm{dist}(x,E)\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}^n.$$

我们在第七章的习题课上已证明P 是良好定义的且连续:

$$|P(x)-P(y)|\le|x-y|\qquad\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n.$$

考虑映射

$$g(x)=\frac{1}{r}f(P(rx)),\quad x\in\mathbb{B}^n.$$

易见$g:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ 且由复合函数连续性知g在$\mathbb{R}^n$上连续. 因此由**Step 1** 知存在$x_*\in\mathbb{B}^n$ 使得

$$g(x_*)=x_*\qquad\text{即}\qquad f(P(rx_*))=rx_*.$$

因$f(K)\subset K$, 故$rx_*=f(P(rx_*))\in K$. 于是由$P(\cdot)$的定义知$P(rx_*)=rx_*$. 所以$f(rx_*)=rx_*$. 所以f在K 上有不动点. $\square$

Brouwer 不动点定理由于只要求f 连续, 故其应用极为广泛深刻. 为说明Brouwer 不动点定理的威力, 我们举一个实用例子. 引进记号

$$\mathbb{R}_{\ge0}=[0,\infty),\quad(\mathbb{R}_{\ge0})^n=\mathbb{R}_{\ge0}\times\mathbb{R}_{\ge0}\times\cdots\times\mathbb{R}_{\ge0}\ (n\text{ 个因子}).$$

【例(非负矩阵特征值的Perron定理)】设

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

为一个非负矩阵(即A的每个元素$a_{ij}\ge0$) 满足: A的每一列中都有一个元素>0. 则A有正的特征值和非负特征向量, 即存在$\lambda>0$和$\xi\in(\mathbb{R}_{\ge0})^n\setminus\{0\}$, 使得$A\xi=\lambda\xi$.

【证】为论证方便, 我们对$\mathbb{R}^n$使用1-范数: $\|x\|_1=\sum_{j=1}^n|x_j|$, 其中$x=(x_1,x_2,...,x_n)^\tau\in\mathbb{R}^n$ 是列向量. 考虑集合

$$K=\{x\in\mathbb{R}^n_{\ge0}\,|\,\|x\|_1=1\}.$$

易见K是紧集. 又对任意$t\in(0,1)$ 和任意$x,y\in K$ 有 (注意分量的非负性!)

$$(1-t)x+ty\in\mathbb{R}^n_{\ge0},\quad\|(1-t)x+ty\|_1=(1-t)\|x\|_1+t\|y\|_1=1$$

所以$(1-t)x+ty\in K$. 所以K 是紧凸集. 来证明

$$x\in K\implies Ax\in\mathbb{R}^n_{\ge0}\ \text{且}\ \|Ax\|_1>0.$$

事实上对任意$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\tau \in K$, 由$A$为非负矩阵和$x$为非负向量有

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

所以$Ax \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$. 又由$\|x\|_1 = 1$ 知存在$j_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ 使得$x_{j_0} > 0$, 同时由假设知A的第j_0列中有一个元素$a_{i_0 j_0} > 0$. 因此有

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i \ge (Ax)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j \ge a_{i_0 j_0} x_{j_0} > 0.$$

令

$$f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}, \quad x \in K.$$

则由$\|Ax\|_1 > 0$ for all $x \in K$ 知f在K 上连续, 同时由范数的性质有

$$\|f(x)\|_1 = \Big\| \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \Big\|_1 = \frac{1}{\|Ax\|_1} \|Ax\|_1 = 1 \quad \forall x \in K.$$

因此$f(x) \in K$ for all $x \in K$. 换言之我们证明了$f : K \to K$ 且连续. 据Brouwer 不动点定理, 存在$\xi \in K$ 使得$f(\xi) = \xi$, 即$A\xi = \|A\xi\|_1 \xi$. 令$\lambda = \|A\xi\|_1$. 则$\lambda > 0$, $A\xi = \lambda\xi$ 且$\|\xi\|_1 = 1$. 所以λ 和ξ 就是A的一个正特征值和相应的非负特征向量. $\square$

下面转向**Brouwer 区域不变定理**的证明. 捷克教授Władysław Kulpa 在他的论文Poincaré and domain invariance theorem, *Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica*, **Vol. 39** (1998), No. 1-2, 127–136 中已经对这一定理给了一个证明: “An elementary proof is given of Brouwer's theorem on the invariance of a domain. It is shown that this theorem is an easy consequence of the Bolzano-Poincaré intermediate value theorem.” 这就是说Brouwer 区域不变定理可以由Bolzano-Poincaré (向量值的)介值定理直接导出. 我们下面的证明就是按照Władysław Kulpa这篇文章的思路进行的, 只是我们将用Brouwer不动点定理来代替Bolzano-Poincaré (向量值的)介值定理. 多少年来我们一直想把这个本科大一学生就完全明白、但只能在数学系研究生课程中才能证明的重要定理, 下放到数学分析里进行证明, 直到Władysław Kulpa 上述文章出现, 才看到这是可以实现的. 不过由于仍然使用了Brouwer不动点定理这类更加深刻的定理, 本讲义给出的证明还不算初等. 这或许就是第四守恒律的缘故: 难度守恒律—— 无论采用何种方法, 对真正困难问题的研究都有固有的绕不过去的障碍.

我们从三个引理开始.

【引理10.55】设$K, Z\subset \mathbb{R}^n$ 为非空的紧集且$m(Z)=0$, 其中m 是$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue测度. 设$f: K\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 连续. 则f可以保持无零点地连续延拓到$K\cup Z$ 上, 即存在连续映射$F: K\cup Z\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 使得$F|_K=f$.

【证(**2011级蔡书哲**)】由假设知

$$r:=\frac{1}{3}\min_{x\in K}|f(x)|>0.$$

据连续映射的延拓定理(见第七章**定理7.44(连续映射延拓定理)**), 存在连续映射$\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足$\Phi|_K=f$. 因K为紧集, 故存在有界开集D使得$K\subset D$. 令

$$\Omega=\{x\in D\mid |\Phi(x)|>2r\}.$$

则Ω 是有界开集且由$K\subset D$ 和$|\Phi(x)|=|f(x)|\ge 3r>2r$ for all $x\in K$ 知$K\subset\Omega$.

当$Z\subset\Omega$ 时, Φ 即为f的一个满足引理要求的延拓.

下设$Z\not\subset\Omega$, 即$Z\setminus\Omega\neq\emptyset$. 对于紧集$\overline{\Omega}$, 由Weierstrass多项式一致逼近定理, 存在多项式映射$P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|P(x)-\Phi(x)|<r.$$

由P光滑和$m(Z)=0$ 知$m(P(Z))=0$(见第九章**命题9.22(b)**或上面**定理10.38(C^1变换下的测度估计)**). 因此$B^n(0,r)\setminus P(Z)$ 非空. 取$y_0\in B^n(0,r)\setminus P(Z)$ 并令

$$F(x)=\frac{\operatorname{dist}(x,K)(P(x)-y_0)+\operatorname{dist}(x,Z\setminus\Omega)\Phi(x)}{\operatorname{dist}(x,K)+\operatorname{dist}(x,Z\setminus\Omega)},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

则由两个非空紧集$K, Z\setminus\Omega$不相交知F在$\mathbb{R}^n$ 是良好定义的且连续. 当$x\in K$ 时$F(x)=\Phi(x)=f(x)$, 因此F是f的连续延拓. 这同时表明当$x\in K$ 时$F(x)\neq 0$. 当$x\in Z\setminus K$时, 若$x\in Z\setminus\Omega$, 则$F(x)=P(x)-y_0\neq 0$ 这是因为$y_0\notin P(Z)$; 若$x\in(Z\setminus K)\cap\Omega$ 则也有$F(x)\neq 0$, 这是因为若$F(x)=0$, 则有

$$\begin{aligned}
y_0&=P(x)+\frac{\operatorname{dist}(x,Z\setminus\Omega)}{\operatorname{dist}(x,K)}\Phi(x)=P(x)-\Phi(x)+\Big(1+\frac{\operatorname{dist}(x,Z\setminus\Omega)}{\operatorname{dist}(x,K)}\Big)\Phi(x)\\
&\Longrightarrow\ |y_0|\ge\Big(1+\frac{\operatorname{dist}(x,Z\setminus\Omega)}{\operatorname{dist}(x,K)}\Big)|\Phi(x)|-|P(x)-\Phi(x)|>2r-r=r
\end{aligned}$$

这与$|y_0|<r$ 矛盾. 这就证明了$F(x)\neq 0$ for all $x\in K\cup Z$. 所以F是f的一个满足引理要求的延拓. $\Box$

【引理10.56】设$r>0$, 设$f:\overline{B^n}(0,r)\to\mathbb{R}^n$ 连续且满足

$$\langle f(x),x\rangle\ge 0\qquad\forall\, x\in\partial B^n(0,r).$$

则存在$\xi \in \overline{B^n}(0,r)$ 使得$f(\xi)=0$.

【证】反证法: 假设$f(x)\neq 0$ for all $x\in \overline{B^n}(0,r)$. 令

$$g(x)=-r\frac{f(x)}{|f(x)|},\quad x\in \overline{B^n}(0,r).$$

则$g:\overline{B^n}(0,r)\to \partial B^n(0,r)\subset \overline{B^n}(0,r)$ 连续. 据Brouwer 不动点定理知存在$x_0\in \overline{B^n}(0,r)$使得$g(x_0)=x_0$. 因$x_0=g(x_0)\in \partial B^n(0,r)$, 故由假设条件便导出矛盾:

$$0<r^2=|x_0|^2=\langle g(x_0),x_0\rangle=\frac{-r}{|f(x_0)|}\langle f(x_0),x_0\rangle\le 0.$$

这矛盾证明了引理成立. □

【引理10.57】设$r>0, f:\overline{B^n}(0,r)\to \mathbb{R}^n$ 为连续单射. 则$f(0)$ 是$f(\,\overline{B^n}(0,r)\,)$的内点, 即存在$\delta>0$使得

$$B^n(f(0),\delta)\subset f(\,\overline{B^n}(0,r)\,).$$

【证】简记$B^n=B^n(0,r), \overline{B^n}=\overline{B^n}(0,r)$. 由$f:\overline{B^n}\to \mathbb{R}^n$为连续单射知$f(\overline{B^n})$是紧集且$f^{-1}:f(\overline{B^n})\to \overline{B^n}$ 连续. 同时由$\partial B^n\subset \overline{B^n}$ 是紧集知$f(\partial B^n)$ 是紧集且$f(0)\notin f(\partial B^n)$. 取$\delta$ 满足

$$0<\delta<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(f(0),f(\partial B^n)).$$

来证明$B^n(f(0),\delta)\subset f(\overline{B^n})$.

反证法: 假设$B^n(f(0),\delta)\not\subset f(\overline{B^n})$. 则可取出一点$y_0\in B^n(f(0),\delta)\setminus f(\overline{B^n})\neq\emptyset$. 我们有

$$f(x)\neq y_0\quad \forall\, x\in \overline{B^n};\qquad \mathrm{dist}(y_0,f(\partial B^n))>\delta. \tag{7.14}$$

事实上由$y_0\notin f(\overline{B^n})$ 知$f(x)\neq y_0$ for all $x\in \overline{B^n}$. 而对某个$x_0\in\partial B^n$有

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(y_0,f(\partial B^n))=|y_0-f(x_0)|\ge |f(0)-f(x_0)|-|f(0)-y_0|\\&>\mathrm{dist}(f(0),f(\partial B^n))-\delta>\delta\quad \text{后者是因为}\,\mathrm{dist}(f(0),f(\partial B^n))>2\delta.\end{aligned}$$

所以(7.14) 成立.

易见当$y\in f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta)$ 时$f^{-1}(y)\neq 0$. 否则, 存在$y\in f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta)$ 使得$f^{-1}(y)=0$, 则$y=f(0)\notin B^n(y_0,\delta)$ 即$|f(0)-y_0|\ge\delta$. 这与$y_0\in B^n(f(0),\delta)$ 矛盾.

将**引理10.55** 用于紧集$K=f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta)$ 和紧的零测集$Z=\partial B^n(y_0,\delta)$ 以及连续映射$f^{-1}:f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta)\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 则存在连续映射

$$F:[f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta)]\cup\partial B^n(y_0,\delta)\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \tag{7.15}$$

使得

$$F(y)=f^{-1}(y)\qquad \forall\, y\in f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta).$$

令

$$\Phi(y)=y_0+\max\{|y-y_0|,\,\delta\}\frac{y-y_0}{|y-y_0|},\qquad y\in\mathbb{R}^n\setminus\{y_0\}.$$

则Φ在$\mathbb{R}^n\setminus\{y_0\}$上连续. 由(7.14)易见复合映射$x\mapsto\Phi(f(x))$ 在$\overline{B^n}$上连续. 来证明

$$\text{当 } x\in\overline{B^n} \text{ 时 } \Phi(f(x))\in[f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta)]\cup\partial B^n(y_0,\delta), \tag{7.16}$$

$$\text{当 } x\in\partial B^n \text{ 时 } \Phi(f(x))=f(x)\in f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta). \tag{7.17}$$

事实上对任意$x\in\overline{B^n}$, 由Φ的定义有

$$|f(x)-y_0|<\delta\implies\Phi(f(x))=y_0+\delta\frac{f(x)-y_0}{|f(x)-y_0|}\in\partial B^n(y_0,\delta);$$

$$|f(x)-y_0|\ge\delta\implies\Phi(f(x))=y_0+f(x)-y_0=f(x)\in f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta). \tag{7.18}$$

所以(7.16) 成立, 同时由(7.14)中的第二个不等式知当$x\in\partial B^n$ 时$|f(x)-y_0|=|y_0-f(x)|\ge\mathrm{dist}(y_0,f(\partial B^n))>\delta$ 从而结合(7.18) 知(7.17) 成立.

由(7.15), (7.16) 可见, 如令

$$g(x)=F(\Phi(f(x))),\quad x\in\overline{B^n}$$

则$g:\overline{B^n}\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 连续并且由(7.17)和F是f^{-1}在$f(\overline{B^n})\setminus B^n(y_0,\delta)$上的延拓知

$$\text{当}x\in\partial B^n\text{时}\ \ g(x)=F(f(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

从而有

$$\langle g(x),x\rangle=|x|^2>0\qquad\forall\,x\in\partial B^n.$$

据**引理10.56** 知存在$\xi\in\overline{B^n}$ 使得$g(\xi)=0$, 但这与$g:\overline{B^n}\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 无零点矛盾. 这矛盾证明了必有$B^n(f(0),\delta)\subset f(\overline{B^n})$ 成立. □

【Brouwer 区域不变性定理的证明】设开集$U\subset\Omega$. 要证$f(U)$ 是$\mathbb{R}^n$的开集. 任取$y_0\in f(U)$, 写$y_0=f(x_0),x_0\in U$. 因f 局部一对一, 故存在$r=r_{x_0}>0$ 使得$\overline{B^n}(x_0,r)\subset U$ 且$f:\overline{B^n}(x_0,r)\to\mathbb{R}^n$ 为连续单射. 令$f_1(x)=f(x+x_0),x\in\overline{B^n}(0,r)$. 则$f_1:\overline{B^n}(0,r)\to\mathbb{R}^n$ 为连续单射. 据**引理10.57** 知存在$\delta>0$ 使得$B^n(f_1(0),\delta)\subset f_1(\overline{B^n}(0,r))$. 于是得到

$$B^n(y_0,\delta)=B^n(f_1(0),\delta)\subset f_1(\overline{B^n}(0,r))=f(\overline{B^n}(x_0,r))\subset f(U).$$

这证明了y_0 是$f(U)$的内点. 由$y_0 \in f(U)$的任意性知$f(U)$是$\mathbb{R}^n$的开集. $\square$

【Brouwer 区域不变定理的推论】设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$ 的开集, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为连续单射. 则其逆映射$f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ 也连续. 因此Ω 与$f(\Omega)$ 同胚.

【证】由**Brouwer 区域不变定理** 知f 是开映射, 特别象集$f(\Omega)$是$\mathbb{R}^n$ 的开集. 因此(注意f是单射) 对于Ω中的任意开集U, f^{-1}的原象$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ 是$f(\Omega)$中的开集. 据连续性的开集刻画即知f^{-1} 在$f(\Omega)$ 上连续. $\square$

- **球面上非零的连续切向量场的存在性与不存在性, 毛绒球定理:**

不失一般性, 只考虑单位球面.

【定义】若映射$\mathbf{v} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$满足

$$\mathbf{v}(x) \perp x \quad \text{即} \quad \langle \mathbf{v}(x), x \rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{S}^{n-1}$$

则称$\mathbf{v}$ 是$\mathbb{S}^{n-1}$上的一个切向量场. 若$\mathbf{v}$ 是$\mathbb{S}^{n-1}$上的一个切向量场且在$\mathbb{S}^{n-1}$ 上连续, 则称$\mathbf{v}$ 是$\mathbb{S}^{n-1}$上的一个连续切向量场. 若进一步还有$\mathbf{v}(x) \neq 0$ for all $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, 则称$\mathbf{v}$ 是$\mathbb{S}^{n-1}$上的一个非零的连续切向量场. $\square$

这个定义的几何意义是明显的: 因为每个$x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 都是$\mathbb{S}^{n-1}$ 在点x 处的切平面的单位法向量, 即$\mathbf{n}(x) = x$, 故$\mathbf{v}(x) \perp x \iff \mathbf{v}(x) \perp \mathbf{n}(x) \iff \mathbf{v}(x)$ 是$\mathbb{S}^{n-1}$ 在点x 处的一个切向量.

当$n-1$ 为奇数即n为偶数时, $\mathbb{S}^{n-1}$上有非零的连续切向量场. 例如设$n = 2k$, 令

$$\mathbf{v}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2k}$$

其中$\mathrm{I} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ 为单位矩阵. 写

$$x^\tau = (y^\tau, z^\tau), \quad y^\tau = (x_1, x_2, ..., x_k), \quad z^\tau = (x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{2k}).$$

则有

$$\langle x, \mathbf{v}(x) \rangle = (y^\tau, z^\tau) \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = (y^\tau, z^\tau) \begin{pmatrix} z \\ -y \end{pmatrix} = \langle y, z \rangle - \langle z, y \rangle = 0$$

即$\mathbf{v}(x) \perp x$ for all $x \in \mathbb{R}^n$ $(n = 2k)$. 因此$\mathbf{v}$ 是$\mathbb{S}^{n-1}$上的一个切向量场.

但是当$n-1$为偶数即n为奇数时, $\mathbb{S}^{n-1}$上便没有非零的连续切向量场. 这里我们介绍John Milnor 的证明方法, 参见

John Milnor, Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol.**85**, No.7(Aug.-Sep.,1978), pp.521-524. (John Milnor 是美国数学家, 曾于1962年获得菲尔兹奖.)

【命题10.58】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, $\mathbb{S}^{n-1}\subset\Omega$, $\mathbf{v}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为C^1 类映射且是$\mathbb{S}^{n-1}$上的单位切向量场, 即

$$\mathbf{v}(x)\in\mathbb{S}^{n-1},\quad \mathbf{v}(x)\perp x\qquad \forall\, x\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

则$\mathbb{S}^{n-1}$必为奇数维球面, 也即$n-1$ 必为奇数.

【证】令

$$\psi(x)=|x|\mathbf{v}(x/|x|),\quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

则由假设和光滑映射的复合性质知$\psi:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ 属于C^1类. 令

$$K=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \frac{1}{4}\le|x|\le 2\},\quad E=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \frac{1}{2}\le|x|\le\frac{3}{2}\}$$

$$\Phi_t(x)=x+t\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\quad t\in\mathbb{R}.$$

则由**命题10.52**知ψ 在K 上满足Lipschitz 条件, 并且存在$\delta>0$ 使得

$$m(\Phi_t(E))=P(t)\qquad\forall\, t\in[-\delta,\delta]\tag{7.14}$$

其中$P(t)$是t的多项式:

$$P(t)=\int_E\det(\mathrm{I}+t\psi'(x))\mathrm{d}x,\quad t\in\mathbb{R}.$$

往下证明存在$0<\delta_1\le\delta$ 使得

$$m(\Phi_t(E))=(1+t^2)^{n/2}m(E)\qquad\forall\, t\in[-\delta_1,\delta_1].\tag{7.15}$$

让我们先看结果: 如果(7.15) 成立, 则比较(7.14) 可知

$$P(t)=A(1+t^2)^{n/2}\qquad\forall\, t\in[-\delta_1,\delta_1]\tag{7.16}$$

其中$A=m(E)>0$. 据多项式的性质易见这蕴含n 不能是奇数 [细节: 由多项式性质易见(7.16) 蕴含$P(t)\equiv P(-t)\,(t\in\mathbb{R})$ 从而$P(t)$是t^2的多项式: $P(t)=P_1(t^2)\,(t\in\mathbb{R})$. 于是再由(7.16)得到$P_1(\tau)=A(1+\tau)^{n/2}\ \forall\,\tau\in[0,\delta_1^2]$. 如果$n$是奇

数, 写$n = 2m+1$, 则得$P_1(\tau) = A(1+\tau)^{m+\frac{1}{2}}\ \forall \tau \in [0, \delta_1^2]$. 进而由多项式性质得到$(P_1(\tau))^2 = A^2(1+\tau)^{2m+1}\ \forall \tau \in \mathbb{R}$. 但此式左边恒$\geq 0$, 右边却可以取到负数, 矛盾.]
因此n 必是偶数, 也即$n-1$ 必是奇数.

下证(7.15). 为此只需证明存在$0 < \delta_1 \leq \delta$ 使得

$$\Phi_t(E) = \sqrt{1+t^2}E \qquad \forall\, t \in [-\delta_1, \delta_1]. \tag{7.17}$$

令$L > 0$ 是ψ 在K 上的Lipschitz 常数. 取

$$\delta_1 = \min\Big\{\delta,\ \frac{1}{2L},\ \frac{4-\frac{3}{2}}{4+\frac{3}{2}},\ \frac{1}{16}\Big\}.$$

来证明这个$\delta_1 > 0$ 满足(7.17). 任取定$t \in [-\delta_1, \delta_1]$.

首先注意对任意$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 有$\mathbf{v}(x/|x|) \perp x$, 即有$\langle x, \psi(x)\rangle = 0$ 从而有

$$|\Phi_t(x)| = \sqrt{|x|^2 + 2t\langle x, \psi(x)\rangle + t^2|\psi(x)|^2} = \sqrt{|x|^2 + t^2|x|^2} = \sqrt{1+t^2}\,|x|. \tag{7.18}$$

由此知对任意$y \in \Phi_t(E)$, 写$y = \Phi_t(x) = x + t\psi(x), x \in E$, 则有$|y|\sqrt{1+t^2}\,|x|$ 从而有$|\frac{y}{\sqrt{1+t^2}}| = \frac{|y|}{\sqrt{1+t^2}} = |x| \in [1/2, 3/2]$, 所以$\frac{y}{\sqrt{1+t^2}} \in E$, 即$y \in \sqrt{1+t^2}E$. 这证明了$\Phi_t(E) \subset \sqrt{1+t^2}E$.

反之任取$y \in \sqrt{1+t^2}E$, 为证明$y \in \Phi_t(E)$, 我们将使用压缩映射不动点定理. 令

$$f(x) = y - t\psi(x), \quad x \in K.$$

来证明$f : K \to K$ 且是压缩的. 计算：当$x \in K$ 时

$$|f(x)| \leq |y| + |t||\psi(x)| \leq \sqrt{1+t^2}\frac{3}{2} + |t||x| \leq \frac{3}{2} + |t|(\frac{3}{2}+4) \leq \frac{3}{2} + \delta_1(\frac{3}{2}+4) \leq 4,$$
$$|f(x)| \geq |y| - |t||\psi(x)| \geq \sqrt{1+t^2}\frac{1}{2} - |t||x| \geq \frac{1}{2} - |t|4 \geq \frac{1}{2} - \delta_1 4 \geq \frac{1}{4}.$$

所以$f(x) \in K$. 又对任意$x_1, x_2 \in K$ 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |t||\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq \delta_1 L|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

所以$f : K \to K$是压缩的. 因K是闭集, 故由压缩映射不动点定理知存在$x_* \in K$ 使得$f(x_*) = x_*$. 此即

$$y = x_* + t\psi(x_*) = \Phi_t(x_*).$$

于是由(7.18)和$y \in \sqrt{1+t^2}\,E$得到

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|y|}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{|\Phi_t(x_*)|}{\sqrt{1+t^2}} = |x_*| \leq \frac{3}{2}.$$

因此$x_* \in E$. 所以$y = \Phi_t(x_*) \in \Phi_t(E)$. 这证明了$\sqrt{1+t^2}\,E \subset \Phi_t(E)$. 所以等式(7.17)成立. 命题证毕. $\Box$

【评注】为了证明包含关系$\sqrt{1+t^2}\,E \subset \Phi_t(E)$, J. Milnor 发现, 方程$y = \Phi_t(x)$的任何非零解$x$ 都必定属于E, 因此可以考虑E的扩大集K, 它使证明变得容易.

【定理10.59】偶数维球面$\mathbb{S}^{n-1}$上没有非零的连续切向量场. 也即等价地, 若$n-1$为偶数, $\mathbf{v}$ 是$\mathbb{S}^{n-1}$上的连续切向量场, 则$\mathbf{v}$在$\mathbb{S}^{n-1}$上必有零点, 即存在$x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ 使得$\mathbf{v}(x_0) = 0$.

【证】反证法. 设$n-1$为偶数且$\mathbb{S}^{n-1}$上存在非零的连续切向量场$\mathbf{v}$. 令

$$\alpha = \min_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} |\mathbf{v}(x)|.$$

则$\alpha > 0$. 由第七章讲的**Weierstrass 多项式一致逼近定理** 知对于紧集$\mathbb{S}^{n-1}$ 存在多项式映射$P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ 使得

$$\max_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} |P(x) - \mathbf{v}(x)| < \alpha/2.$$

令

$$\mathbf{u}(x) = P(x) - \langle P(x), x\rangle x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.19}$$

则有

$$\langle \mathbf{u}(x), x\rangle = \langle P(x), x\rangle - \langle P(x), x\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{S}^{n-1} \tag{7.20}$$

且

$$\mathbf{u}(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{7.21}$$

事实上由$\mathbf{v}(x) \perp x$ for all $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 知若存在$x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 使得$\mathbf{u}(x) = 0$, 则有
$P(x) = \langle P(x), x\rangle x$ 从而有$P(x) \perp \mathbf{v}(x)$,

$$\alpha/2 > |P(x) - \mathbf{v}(x)| = \sqrt{|P(x)|^2 + |\mathbf{v}(x)|^2} \geq |\mathbf{v}(x)| \geq \alpha$$

这矛盾于$\alpha > 0$. 所以(7.21)成立. 令

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u}(x) \neq 0\}, \quad \mathbf{w}(x) = \frac{\mathbf{u}(x)}{|\mathbf{u}(x)|}, \quad x \in \Omega.$$

则Ω 是开集且$\mathbb{S}^{n-1} \subset \Omega$ 并由(7.19)-(7.21) 知$\mathbf{w} : \Omega \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 属于C^1类且是$\mathbb{S}^{n-1}$ 上的单位切向量场. 于是由**命题10.58**知$n-1$ 必为奇数, 与$n-1$为偶数矛盾. 这矛盾证明了定理成立. $\Box$

上述定理也叫做毛绒球定理, 其几何直观解释如下: 假设二维球面$\mathbb{S}^2$上每一点都长了头发, 理发师试图梳理修剪头发使得所有头发都平顺地躺在球面上, 则要么有一处的头发没有平顺地躺在球面上(即该头发不是球面的切向量), 要么所有头发都平顺地躺在球面上但有一根头发被剪成长度为零.

利用这个定理我们来看地球表面上的风: 对于任一指定的时刻, 地球表面$\mathbb{S}^2$上的风可以被粗略地视为地球表面上的连续切向量场, 于是由上述定理可知: 地球表面上总有一处是完全无风的.

最后我们提醒注意: 卓里奇的《数学分析》第十二章§**2** 曲面定向的练习题3 c) [第二卷 中译本page 161] 就与上述毛绒球定理有关, 它也是我们介绍和证明毛绒球定理的目的之一.

作业题

1. 设$R > 0, \overline{B}(0, R)$ 为$\mathbb{R}^n$中以原点为中心的闭球, $f : \overline{B}(0, R) \to \mathbb{R}^n$ 连续, 满足

$$\langle f(x), x\rangle \ge 0 \qquad \forall\, x \in \partial B(0, R).$$

证明f 在$\overline{B}(0, R)$上有零点, 即存在$x_0 \in \overline{B}(0, R)$ 使得$f(x_0) = 0$.

2. 对复变函数建立并证明Brouwer 不动点定理: 设$K \subset \mathbb{C}$ 为紧凸集, $f : K \to K$ 连续. 则f 在K 上有不动点, 即存在$z_0 \in K$ 使得$f(z_0) = z_0$.

3. 设f 是复平面单位圆周$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$上的恒等映射, 即

$$f(z) = z \qquad \forall\, z \in \mathbb{S}^1.$$

证明f不能被连续地延拓到$\mathbb{C}$上而保持无零点, 也即不存在连续映射$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$使得$F|_{\mathbb{S}^1} = f$. [注: 由本题可知, 网上搜索的用Brouwer 不动点定理证明代数基本定理的某些论文(中文), 其证明方法是错误的.]

4. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为C^1映射且局部一对一. 证明φ的正则点的集合Ω_r非空. 这里φ的正则点的集合Ω_r就是φ的非临界点的集合:

$$\Omega_r = \{x \in \Omega \mid \det\varphi'(x) \ne 0\}.$$

5. 找一个关于Brouwer 不动点定理或Brouwer区域不变定理的应用, 十一假期后的一周内上来。

§10.8. Gamma函数的Stirling公式

我们已知道由积分定义的函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x,\quad s>0;\qquad \mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\quad p,q>0$$

分别叫做Gamma 函数和Beta 函数. 由$\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)^{s-1}\mathrm{d}t<+\infty$ for all $s>0$ 可知这两个函数是良好定义的且恒正. 在**§10.5** 的作业题中我们已证明了(利用Fubini定理和换元公式) 这两个函数有下列转换关系:

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\qquad p,q>0. \tag{8.1}$$

因此只需着重研究Gamma函数.

Gamma函数在实数的连续乘积的研究中起重要作用, 特别可以导出并推广关于阶乘的Stirling公式. 本节我们将用Lebesgue积分理论学习并证明这个著名公式(见下面(8.2),(8.3)). 我们在**§10.3** 的例题中已证明了$\Gamma(s)$ 具有递推关系:

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad s>0.$$

这个关系式是**Gamma函数的特征性质**. 特别有

$$\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(n+1)=n!,\quad n=0,1,2,\dots.$$

大家知道, 阶乘$n!$的增长比指数增长还要快, 取对数计算的话, 也要计算n项. 但阶乘又是在组合、概率、统计、分析中频繁出现的量. 十八世纪早期, 英国数学家James Stirling 天才地发现, 阶乘$n!$ 有一个幂结构, 而且竟然与两个最著名的超越数e,π有关:

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,e^{\frac{\theta_n}{12n}},\qquad 0<\theta_n<1. \tag{8.2}$$

后来人们将Stirling的这个结果推广到Gamma 函数$\Gamma(\cdot)$上. 这就是本节要证明的

【定理10.60. Gamma 函数的Stirling公式】设$\Gamma(s)$ 为Gamma 函数. 则有

$$\Gamma(s+1)=\left(\frac{s}{e}\right)^s\sqrt{2\pi s}\,e^{\frac{\theta(s)}{12s}}\qquad \forall\, s>0 \tag{8.3}$$

其中$0<\theta(s)<1$ 是一个具体函数. 特别取$s=n\in\mathbb{N},\theta_n=\theta(n)$, 即得上述关于$n!$ 的Stirling公式(8.2).

为证明这个定理, 我们需要两个准备.

【命题10.61. Gamma函数的唯一性(Bohr & Mollerup)】

设$(0,+\infty)$ 上的函数$f(s)$ 满足下列三个条件:

(i) $f(s)>0$ for all $s>0$; $f(1)=1$.

(ii) $f(s+1)=sf(s)$ for all $s>0$.

(iii) 函数$s\mapsto \log(f(s))$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数.

则$f(s)\equiv\Gamma(s)$ 于$(0,+\infty)$.

【证】先证Gamma函数Γ 满足(i),(ii), (iii). 前面已证明了Γ满足(i),(ii). 为证Γ满足(iii), 根据凸函数的定义, 须证明

$$\log(\Gamma((1-\alpha)s_1+\alpha s_2))\le(1-\alpha)\log(\Gamma(s_1))+\alpha\log(\Gamma(s_2)),\quad \forall\, s_1,s_2>0,\forall\,\alpha\in(0,1).$$

如令$p=\frac{1}{1-\alpha},q=\frac{1}{\alpha}$, 则$p,q>1$ 且$1/p+1/q=1$. 于是等价地只需证明

$$\Gamma(s_1/p+s_2/q)\le(\Gamma(s_1))^{1/p}(\Gamma(s_2))^{1/q},\quad \forall\, s_1,s_2>0.$$

因$\Gamma(s)$ 是由积分定义的, 故上述不等式实为Hölder 不等式的特例:

$$\Gamma(s_1/p+s_2/q)=\int_0^{+\infty}x^{s_1/p+s_2/q-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\Big(x^{s_1-1}e^{-x}\Big)^{1/p}\Big(x^{s_2-1}e^{-x}\Big)^{1/q}\mathrm{d}x$$
$$\le\Big(\int_0^{+\infty}x^{s_1-1}e^{-x}\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_0^{+\infty}x^{s_2-1}e^{-x}\mathrm{d}x\Big)^{1/q}=(\Gamma(s_1))^{1/p}(\Gamma(s_2))^{1/q}.$$

现在设f是满足(i)-(iii)的任一函数. 由(i),(ii) 知$f(n+1)=n!$, $n=0,1,2,....$ 因此为证$f(s)=\Gamma(s)$ for all $s\in(0,+\infty)$, 只需证明$f(s)=\Gamma(s)$ for all $s\in(0,1)$.

设$s\in(0,1)$. 对任意$2\le n\in\mathbb{N}$, 由凸函数的斜率不等式有

$$\frac{\log(f(n))-\log(f(n-1))}{n-(n-1)}\le\frac{\log(f(n+s))-\log(f(n))}{n+s-n}\le\frac{\log(f(n+1))-\log(f(n))}{n+1-n}$$

即（因$f(n)=(n-1)!$）

$$\log((n-1)!)-\log((n-2)!)\le\frac{\log(f(n+s))-\log(f(n))}{s}\le\log(n!)-\log((n-1)!).$$

即

$$s\log(n-1)\le\log(f(n+s))-\log(f(n))\le s\log(n).$$

即

$$\log((n-1)^s(n-1)!)\le\log(f(n+s))\le\log(n^s(n-1)!).$$

即
$$(n-1)^s(n-1)! \le f(n+s) \le n^s(n-1)!.$$
以$n+1$ 代替n, 上式写成
$$n^s n! \le f(n+1+s) \le (n+1)^s n!.$$
另一方面由条件(ii) 知
$$f(n+1+s) = (n+s)f(n+s) = \cdots = (n+s)(n-1+s)\cdots(1+s)sf(s).$$
带入上式得到
$$\frac{n^s n!}{(n+s)(n-1+s)\cdots(1+s)s} \le f(s) \le \frac{(n+1)^s n!}{(n+s)(n-1+s)\cdots(1+s)s}$$
也即
$$\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^s f(s) \le \frac{n^s n!}{(n+s)(n-1+s)\cdots(1+s)s} \le f(s), \quad n\in\mathbb{N}.$$
据极限的两边夹原理知以上数列收敛且
$$f(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{(n+s)(n-1+s)\cdots(1+s)s}, \quad s\in(0,1).$$
因Gamma 函数Γ 也满足(i)-(iii), 故这个极限等式对$\Gamma(s)$ 也成立. 所以$f(s)=\Gamma(s)$ for all $s\in(0,1)$. 这就证明了$f=\Gamma$. $\Box$

【引理10.62】

(a)
$$0 < (s+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{s}) - 1 < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right), \quad \forall\, s>0.$$
(b) 令
$$g(s) = (s+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{s}) - 1, \quad \varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n+s), \quad s>0.$$
则$0<\varphi(s)<\frac{1}{12s}$ for all $s>0$ 且φ 是$(0,+\infty)$ 上的凸函数. 此外有
$$\varphi(s)-\varphi(s+1) = g(s), \quad s>0; \qquad \varphi(1) = \log\Big(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\Big).$$

【证】(a): 设$s>0$. 令$t=\frac{1}{2s+1}$. 则$0<t<1, s=\frac{1-t}{2t}$, 从而由对数函数的Taylor 展开有
$$(s+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{s}) = \frac{1}{2t}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{1}{2t}\Big(\log(1+t)-\log(1-t)\Big)$$
$$= \frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n\Big((-1)^{n-1}+1\Big) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1} = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{2n-2}}{2n-1}.$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
0 &< (s+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{s})-1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+2}}{2n+3}\\
&< \frac{t^2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}=\frac{t^2}{3}\cdot\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2s+1)^2-1}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right).
\end{aligned}
$$

(b): 由(a) 知$0<g(s)<\frac{1}{12}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1})$ for all $s>0$. 因此

$$
0<\varphi(s)<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{12}\Big(\frac{1}{n+s}-\frac{1}{n+1+s}\Big)=\frac{1}{12s}\,,\quad s>0.
$$

为证明φ 是$(0,+\infty)$上的凸函数, 只需证明每个$g(n+s)$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数, 而这只需证明$g(s)$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数. 为计算g的导数, 我们把g 写成

$$
g(s)=(s+\frac{1}{2})\Big(\log(s+1)-\log(s)\Big)-1,\qquad s>0.
$$

计算

$$
g'(s)=\log(s+1)-\log(s)+(s+\frac{1}{2})\Big(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\Big)=\log(s+1)-\log(s)-\frac{s+\frac{1}{2}}{s(s+1)};
$$

$$
\begin{aligned}
g''(s)&=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}-\frac{s(s+1)-(s+\frac{1}{2})(2s+1)}{(s(s+1))^2}=\frac{-1}{s(s+1)}-\frac{s^2+s-2s^2-2s-\frac{1}{2}}{(s(s+1))^2}\\
&=\frac{s(s+1)+\frac{1}{2}}{(s(s+1))^2}-\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s(s+1)}\Big(\frac{s(s+1)+\frac{1}{2}}{s(s+1)}-1\Big)>0,\quad s>0.
\end{aligned}
$$

所以g 是凸函数.

由φ 与g的关系有

$$
\varphi(s)-\varphi(s+1)=\sum_{n=0}^{\infty}g(n+s)-\sum_{n=0}^{\infty}g(n+1+s)=g(s),\quad s>0.
$$

最后计算$\varphi(1)$. 由φ 和g 的定义有

$$
\varphi(1)=\sum_{n=0}^{\infty}g(n+1)=\sum_{k=1}^{\infty}g(k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g(k),
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}g(k)&=\sum_{k=1}^{n}(k+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{k})-n=\sum_{k=1}^{n}\Big((k+\frac{1}{2})\log(1+k)-(k+\frac{1}{2})\log k\Big)-n\\
&=\sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)\log(1+k)-k\log k-\frac{1}{2}\log(1+k)-\frac{1}{2}\log k\Big)-n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)\log(1+k) - k\log k\Big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log(1+k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log k - n \\
&= (n+1)\log(n+1) - \frac{1}{2}\log(n+1)! - \frac{1}{2}\log n! - n \\
&= (n+1)\log(n+1) - \frac{1}{2}\log(n+1) - \log n! - n \\
&= (n+\frac{1}{2})\log(n+1) - \log n! - n = \log\Big(\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}\Big).
\end{aligned}
$$

令

$$\rho_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$$

则我们在**§10.5** 中的例题中已证明了$\rho_n \to 1\,(n\to\infty)$. 因此结合$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n = e$ 有

$$\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} = \frac{1}{\rho_n}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \longrightarrow \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \quad (n\to\infty).$$

因此

$$\varphi(1) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(k) = \lim_{n\to\infty}\log\Big(\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}\Big) = \log\Big(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\Big). \qquad \square$$

有了以上准备, 现在可以进行

【Proof of 定理10.60.Gamma函数的Stirling公式】

由$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 可见Gamma 函数的Stirling公式(8.3) 等价于

$$\Gamma(s) = \Big(\frac{s}{e}\Big)^s\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\,e^{\frac{\theta(s)}{12s}}, \qquad s>0. \tag{8.4}$$

设$\varphi(s)$ 是**引理10.62** 中定义的函数. 由该引理知$\forall\, s>0$ 有$0<\varphi(s)<\frac{1}{12s}$. 因此若令

$$\frac{\theta(s)}{12s} = \varphi(s) \qquad 即 \qquad \theta(s) = 12s\varphi(s), \qquad s>0$$

则有$0<\theta(s)<1$ for all $s>0$. 于是为得到(8.4), 只需证明

$$\Gamma(s) = \Big(\frac{s}{e}\Big)^s\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\,e^{\varphi(s)}, \qquad s>0. \tag{8.5}$$

而为证这一等式, 利用Gamma 函数的唯一性(**命题10.61**) 只需验证函数

$$f(s) := \Big(\frac{s}{e}\Big)^s\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\,e^{\varphi(s)}, \qquad s>0$$

满足Gamma 函数唯一性(**命题10.61**)中的三个条件(i)-(iii).

(i): 显然$f(s)>0$ for all $s>0$. 而由$\varphi(1)=\log(\frac{e}{\sqrt{2\pi}})$ 知

$$f(1)=\frac{1}{e}\sqrt{2\pi}\,e^{\varphi(1)}=1.$$

(ii): $f(s+1)=sf(s)$ 等价于$\log(f(s+1))-\log f(s))=\log(s)$. 由$f$的定义有

$$\log(f(s))=\log(\sqrt{2\pi})+(s-\frac{1}{2})\log(s)-s+\varphi(s),\quad s>0 \tag{8.5}$$

设$g(s)$ 是**引理10.62** 中定义的函数, 即$g(s)=(s+\frac{1}{2})(\log(s+1)-\log(s))-1$. 计算:

$$\begin{aligned}
&\log(f(s+1))-\log f(s))\\
&=(s+\frac{1}{2})\log(s+1)-s-1+\varphi(s+1)-(s-\frac{1}{2})\log(s)+s-\varphi(s)\\
&=(s+\frac{1}{2})(\log(s+1)-\log(s))-1+\varphi(s+1)-\varphi(s)+\log(s)\\
&=g(s)+\varphi(s+1)-\varphi(s)+\log(s)=\log(s),\quad s>0
\end{aligned}$$

其中最后的等号用到了**引理10.62(b)**. 所以$\log(f(s+1))-\log f(s))=\log(s)$ for all $s>0$. 这证明了f满足条件(ii).

(iii): 通过计算二阶导数易见$s\mapsto(s-\frac{1}{2})\log(s)-s$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数. 又由**引理10.62** 知φ 也是$(0,+\infty)$上的凸函数. 所以由(8.5) 知$s\mapsto\log(f(s))$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数.

据Gamma 函数的唯一性(**命题10.61**) 知$f(s)=\Gamma(s)$ for all $s>0$. 因此公式(8.5)成立从而完成了Gamma 函数Stirling公式(8.3)的证明. □

作业题

1. 已知$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. 试导出$\Gamma(n+\frac{1}{2})$的计算公式, 其中$n\in\mathbb{N}$.

2. 利用Gamma 函数和Beta 函数的关系(8.1), 求渐近式

$$\int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x\ \sim\ ?\,,\quad \int_0^1 x^p(1-x^2)^p\mathrm{d}x\ \sim\ ?\qquad(p\to+\infty).$$

这里$f(p)\sim g(p)$ $(p\to+\infty)$ 表示$f(p)/g(p)\to1$ $(p\to+\infty)$.

3. 令$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s>1$, $\zeta(s)$叫做Riemann-Zeta 函数. 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^s}{e^x-1}\mathrm{d}x=\zeta(s+1)\Gamma(s+1),\quad s>0.$$

[提示: 对$R>1$, 将$\frac{1}{R-1}=\frac{R^{-1}}{1-R^{-1}}$ 展成R^{-1}的幂级数.]

4. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}}{e^n}=\frac{1}{2}.$$

[提示: 由$e^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}$ 知只需证明第二个等号成立. 在在原点0展开的具有积分型余项的Taylor公式中, 取$x=n$ 有

$$e^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-\theta)^n e^{\theta n}\mathrm{d}\theta,\quad n\in\mathbb{N}$$

然后对$n!$ 用Stirling公式(8.2), 而对积分$\int_0^1\{\cdots\}\mathrm{d}\theta$ 用**§10.5** 中的**Laplace 积分渐近式的主项定理**(建议同时复习那里的例题).]