《微分方程1》第六讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年11月01日

考虑n 阶线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \qquad (*)_{非}$$

其中$a_j(x), f(x)$ 为某开区间J 上的连续函数, $j = 1, 2, \cdots, n$. 与二阶线性方程一样, 考虑非齐方程$(*)_{非}$ 的同时, 需要考虑对应齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

Theorem

对$\forall x_0 \in J$, $\forall y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, Cauchy(初值)问题

$$\begin{cases} y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

的解在整个区间J 上存在唯一. 换言之, 存在一个在J 上n 次连续可微函数$\phi(x)$ 满足方程$(*)_{非}$, 以及初值条件$\phi^{(j)}(x_0) = y_j$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$, 并且这样的解唯一.

Proof.

证明以后给出. □

考虑齐次方程$(*)_{齐}$，即

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

显然齐次方程$(*)_{齐}$ 解的全体构成一个线性空间.

Theorem

n 阶齐次方程$(*)_{齐}$ 解的全体构成一个n 维线性空间.

证明概要：证明思想和方法同二阶情形．固定一点$x_0 \in J$，记$\phi_k(x)$ 为方程$(*)_{齐}$ 满足初值条件$y^{(j)}(x_0) = 0$，$y^{(k)}(x_0) = 1$，$j = 0, 1, \cdots, n-1$，$j \neq k$ 的解，$k = 0, 1, \cdots, n-1$，则不难证明这n 个解构成解空间的一个基底．也就是说，(1) 这n 个解线性无关；(2) 方程$(*)_{齐}$ 的每个解可由这n 个线性表出．定理得证．

Definition

n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

的任意n 个线性无关的解均称为方程$(*)_{齐}$ 的一个基本解组(fundamental solutions).

Definition

设$y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 是n 阶齐次方程$(*)_{齐}$ 的n 个解，称如下n 阶行列式$W(x)$ 为这n 个解所对应的Wronsky 行列式.

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Liouville定理

Theorem

设$W(x)$ 是齐次方程$(*)_齐$，即方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \qquad (*)_齐$$

的任意一个Wronsky 行列式，则$W(x)$ 可表为

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}, \quad \forall x_0, x \in J. \qquad (**)$$

注：公式(**) 常称为Liouville公式．这个公式表明Wronsky 行列式或者恒为零，或者处处非零．

证：设$W(x)$是有n 个解$y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 所确定的Wronsky 行列式，即

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

由行列式求导规则，即各行求导后的行列式之和，得

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

根据方程$(*)_{齐}$，可知$y_k^{(n)}(x)=-a_1(x)y_k^{(n-1)}(x)-\cdots$. 将其带入上述行列式并化简得$W'(x)=-a_1(x)W(x)$. 于是$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(s)ds}$. 定理得证. □

Hill 方程的每个Wronsky 行列式均为常数

Example

考虑Hill方程$y'' + a(x)y = 0$，其中$a(x)$ 是区间(a, b) 上连续函数．不难看出方程的任何Wronsky 行列式均为常数．这是因为对于Hill方程而言，系数函数$a_1(x) \equiv 0$．因此根据Liouville公式立刻得到这个结论．

Theorem

设$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是n 阶齐次方程$(*)_{齐}$ 的n 个解，它们所确定的Wronsky 行列式记作$W(x)$，则这n 个解线性相关(无关)，当且仅当$W(x) \equiv 0$ ($W(x)$ 处处非零).

证明：只证括号外的结论. 必要性$\Rightarrow$ 显然成立. 只证$\Leftarrow$.

设$W(x) \equiv 0$. 任取一点$x_0 \in J$，由$W(x_0) = 0$ 可知行列式$W(x_0)$ 的n 个列线性相关. 于是存在存在n 个不全为零的数c_k, $k = 1, \cdots, n$，使得

$$c_1 Y_1(x_0) + \cdots + c_n Y_n(x_0) = 0, \qquad (**)$$

定理证明续

其中$\mathsf{Y}_k(x_0) := (y_k(x_0), y_k'(x_0), \cdots, y_k^{(n-1)}(x_0))^T$，即$\mathsf{Y}_k(x_0)$为$W(x_0)$的第$k$个列向量，$k = 1, \cdots, n$. 令$y_*(x) := c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$，则$y_*(x)$是齐次方程$(*)_{齐}$的解. 并且由式$(*)_{齐}$可知$y_*(x)$满足初值条件$y_*^{(j)}(x_0) = 0$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$. 根据Cauchy问题解的唯一性可知$y_*(x)$恒为零. 这表明解$y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$线性相关. 证毕. $\square$

定义：假设$y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 是n 阶齐次方程$(*)_{齐}$ 的一个基本解组，它们所确定的Cauchy 函数定义为

$$H(s,x) := \frac{W(s,x)}{W(s)},$$

这里$W(s)$ 为基本解组$y_1(s), \cdots, y_n(s)$ 所确定的Wronsky 行列式，$W(s,x)$ 是将行列式$W(s)$ 的最后一行元素依次换为$y_1(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 所得到行列式，即

$$
W(s) := \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & \cdots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \cdots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix},
$$

$$
W(s,x) := \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & \cdots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}.
$$

为方便，我们引入如下偏导数记号：

$$H_{ij}(s,x) := \frac{\partial^{i+j}H(s,x)}{\partial s^i \partial x^j},$$

$$W_{ij}(s,x) := \frac{\partial^{i+j}W(s,x)}{\partial s^i \partial x^j}.$$

显然

$$H_{0j}(s,x) = \frac{W_{0j}(s,x)}{W(s)}.$$

定理：设$y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 是n 阶齐次方程$(*)_{齐}$ 的一个基本解组，则它们所确定的Cauchy 函数$H(s,x)$ 是Cauchy问题

$$\begin{cases} y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0, \\ y^{(j)}(s)=0, j=0,1,\cdots,n-2, y^{(n-1)}(s)=1 \end{cases}$$

的唯一解．换言之，Cauchy 函数$H(s,x)$ 满足

$$H_{0j}(s,x)|_{x=s}=0,\quad j=0,1,\cdots,n-2,$$

$$H_{0,n-1}(s,x)|_{x=s}=1.$$

证：注意函数$H(s,x)$ 可以表为$H(s,x)=h_1(s)y_1(x)+\cdots+h_n(s)y_n(x)$. 因此对于任意参数$s\in J$, 函数$H(s,x)$ 均为齐次方程$(*)_{齐}$ 的解. 根据函数$W(s,x)$ 的定义可知

$$W_{0j}(s,x)|_{x=s}=0,\quad j=0,1,\cdots,n-2,$$

$$W_{0,n-1}(s,x)|_{x=s}=W(s).$$

由此可见$H(s,x)$ 满足初值条件$H_{0j}(s,x)|_{x=s}=0$, $j=0,1,\cdots,n-2$, $H_{0,n-1}(s,x)|_{x=s}=1$. 定理得证. $\square$

定理：考虑非齐次n 阶线性方程$(*)_{非}$，即方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x), \qquad (*)_{非}.$$

假设已知对应齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0, \qquad (*)_{齐}$$

的一个基本解组$y_1(x),\cdots,y_n(x)$，则非齐次$(*)_{非}$ 的一般解可表为$y(x)=y_g(x)+y_p(x)$，其中$y_g(x)$ 是$(*)_{齐}$ 的一般解，即$y_g(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)$，$y_p(x):=\int_{x_0}^{x}H(s,x)f(s)ds$ 是$(*)_{非}$ 的一个特解.

<u>证明</u>：只需证明$y_p(x)$ 是非齐次方程$(*)_非$ 的解即可. 我们先来简单计算$y_p(x)$ 的一阶导数:

$$y_p'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} H(s,x)f(s)ds$$

$$= H(x,x)f(x) + \int_{x_0}^{x} H_{01}(s,x)f(s)ds.$$

由于Cauchy 函数$H(s,x)$ 满足$H(s,s) = 0$, $\forall s \in J$. 因此上式的第一项消失. 故

$$y_p'(x) = \int_{x_0}^{x} H_{01}(s,x)f(s)ds.$$

对$y_p'(x)$ 再次求导得

$$y_p''(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} H_{01}(s,x)f(s)ds$$

$$= H_{01}(x,x)f(x) + \int_{x_0}^{x} H_{02}(s,x)f(s)ds.$$

由于Cauchy 函数$H(s,x)$ 满足$H_{01}(s,s)=0,\ \forall s\in J$，故

$$y_p''(x) = \int_{x_0}^{x} H_{02}(s,x)f(s)ds.$$

继续这个做法，我们可以得到

$$y_p^{(j)}(x) = \int_{x_0}^{x} H_{0j}(s,x)f(s)ds, \quad j = 0,1,\cdots,n-1. \qquad (**)$$

于是

$$y_p^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} H_{0,n-1}(s,x)f(s)ds$$

$$= H_{0,n-1}(x,x)f(x) + \int_{x_0}^{x} H_{0,n}(s,x)f(s)ds$$

$$= f(x) + \int_{x_0}^{x} H_{0,n}(s,x)f(s)ds.$$

最后一个等式成立是因为$H_{0,n-1}(x,x) = 1$.

于是
$$y_p^{(n)}+a_1(x)y_p^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y_p=f(x)+$$
$$\int_{x_0}^{x}\Big[H_{0,n}(s,x)+a_1(x)H_{0,n-1}(s,x)+\cdots+a_n(x)H_{00}(s,x)\Big]f(s)ds.$$

回忆$H(s,x)$ 是对应齐次方程$(*)_{齐}$ 的解. 故上述被积函数的方括弧部分为零，从而积分为零. 这就证明了$y_p(x)$ 是非齐方程$(*)_{非}$ 的一个特解. 证毕. □

注：由式(**)，即式$y_p^{(j)}(x)=\int_{x_0}^{x}H_{0j}(s,x)f(s)ds$, $j=0,1,\cdots,n-1$ 知特解$y_p(x)=\int_{x_0}^{x}H(s,x)f(s)ds$ 有初值条件$y_p^{(j)}(x_0)=0$, $j=0,1,\cdots,n-1$.

考虑高阶线性常系数方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \qquad (*)_{非}$$

以及对应的齐次方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

这里$a_1, \cdots, a_n$ 均为常数. 我们将给出齐次方程$(*)_{非}$ 的一个显式的基本解组.

关于齐次方程$(*)_{齐}$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

有以下几个简单事实：

(i) 每个解在$(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一;

(ii) 解空间是n 维线性空间;

(iii) 每个Wronsky行列式$W(x)$ 可表为$W(x) = W(0)e^{-a_1 x}$.

为方便，记

$$L(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$

并称之为齐次方程$(*)_{齐}$ 的特征多项式，方程$L(\lambda) = 0$ 称为特征方程，其根称为特征根．记$D := \frac{d}{dx}$ 为微分算子，并且定义

$$L(D) := D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n,$$

于是上述非齐方程$(*)_{非}$ 和齐次方程$(*)_{齐}$ 可分别记作

$$L(D)y := D^ny + a_1D^{n-1}y + \cdots + a_ny = f(x),$$

$$L(D)y := D^ny + a_1D^{n-1}y + \cdots + a_ny = 0.$$

Theorem

指数函数$e^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程$L(D)y=0$ 的解$\Longleftrightarrow L(\lambda_0)=0$.

Proof.

$$L(D)e^{\lambda_0 x}=(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)e^{\lambda_0 x}$$

$$=(\lambda_0^n+a_1\lambda_0^{n-1}+\cdots+a_n)e^{\lambda_0 x}=L(\lambda_0)e^{\lambda_0 x}.$$

因此$e^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程$L(D)y=0$ 的解$\Longleftrightarrow L(\lambda_0)=0$. □

基本解组，特征根互异情形

定理：如果n 阶齐次方程$L(D)y=0$ 的n 个特征根$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$互异，则方程有基本解组$e^{\lambda_1 x},\cdots,e^{\lambda_n x}$.

证明：由之前定理知这n 个指数函数都是解. 要证它们构成基本解组，只要证明它们线性无关即可. 简单计算可知它们对应的Wronsky 行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}.$$

证明续

易见行列式$W(x)$ 在$x=0$ 处的值为Vandermonde 行列式

$$W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

由假设特征根$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异，故$W(0)\neq 0$. 因此这n 个指数函数解线性无关. 定理得证. □

Example

求齐次方程$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$ 的基本解组.

解：特征方程为$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$. 作分解因式得$(\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 + 1] = 0$. 由此求得到三个互异的特征根$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. 于是方程有的一组复函数基本解组e^{2x}, $e^{(1+i)x}$ 和$e^{(1-i)x}$. 取复函数解的实部和虚部就得到一组实的基本解祖e^{2x}, $e^x \cos x$ 和$e^x \sin x$. 解答完毕.

重根情形下的Euler 方法

如果特征根有重根，那么我们得到的指数函数解的个数小于n，故不能构成方程的基本解组．考虑如何补充新的线性无关解．以下是Euler 的思想方法．(参见课本第127页problem 8)．假设λ_1，λ_2 是方程的两个互异的特征值．于是$e^{\lambda_1 x}$，$e^{\lambda_2 x}$ 为方程的解．它们的差也是解．进而差商

$$\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

也是解．于上式令$\lambda_2 \to \lambda_1$，我们得到

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} = xe^{\lambda_1 x}.$$

故可期待，当λ_1 是方程的重特征值时，函数$xe^{\lambda_1 x}$ 也是解．

Theorem

设λ_1 是齐次方程$L(D)y=0$ 的$k\geq 1$ 重特征根，则$e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, $\cdots$, $x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$ 是方程的k 个线性无关解.

证明：定理中的k 个函数的线性无关性显而易见. 往下来证明它们是解. 即要证

$$L(D)[x^j e^{\lambda_1 x}]=0,\quad j=0,1,\cdots,k-1. \qquad (**)$$

根据假设λ_1 是$k\geq 1$ 重特征根，可知特征多项式$L(\lambda)$ 可表为$L(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^k L_1(\lambda)$，其中$L_1(\lambda_1)\neq 0$.

证明，续1

为证明式(**)，观察知$xe^{\lambda x}$ 可以表示为$xe^{\lambda x} = D_\lambda e^{\lambda x}$，这里$D_\lambda$ 代表关于λ 的微分算子，即$D_\lambda := \frac{d}{d\lambda}$. 由于函数$e^{\lambda x}$ 足够光滑，故$DD_\lambda(e^{\lambda x}) = D_\lambda D(e^{\lambda x})$. 即二阶混合导数相等. 进一步不难证明

$$L(D)D_\lambda^j(e^{\lambda x}) = D_\lambda^j L(D)(e^{\lambda x}).$$

于是

证明，续2

$$L(D)[x^j e^{\lambda_1 x}] = L(D)[x^j e^{\lambda x}]\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$= L(D)[D_\lambda^j e^{\lambda x}]\Big|_{\lambda=\lambda_1} = D_\lambda^j L(D) e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$= D_\lambda^j L(\lambda) e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = D_\lambda^j \Big[(\lambda-\lambda_1)^k L_1(\lambda)\Big] e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = 0.$$

这就证明了$x^j e^{\lambda_1 x}$ k 都是解, $j = 0, 1, \cdots, k-1$. □

定理：设n 阶线性齐次方程$L(D)y=0$ 有s 个互异的特征根$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，对应的重数为$k_1,\cdots,k_s$，$k_1+\cdots+k_s=n$，则如下函数组构成了齐次方程$L(D)y=0$ 的一个基本解组.

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x} & \cdots, & x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x} & \cdots, & x^{l_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x} & \cdots, & x^{l_s-1}e^{\lambda_s t}.
\end{array}$$

证明：根据前一个定理可知上述n 个函数都是解. Oct18wx中选作习题的结论表明，这n 个函数线性无关. 证毕. □

例子

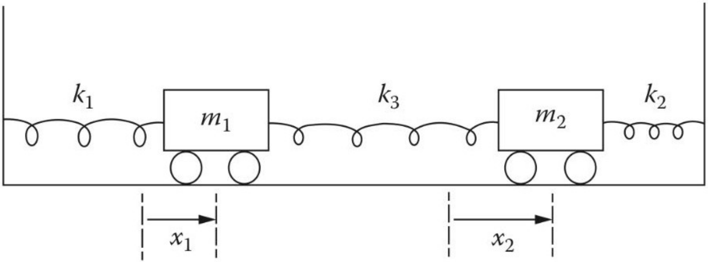
Example

例：求方程$y^{(5)}-2y^{(4)}-16y'+32y=0$ 的基本解组.

解：方程的特征多项式为$L(\lambda)=\lambda^5-2\lambda^4-16\lambda+32$. 为求特征值，需对$L(\lambda)$ 作分解因式得$L(\lambda)=\lambda^4(\lambda-2)-16(\lambda-2)$ $=(\lambda-2)(\lambda^4-16)=(\lambda-2)^2(\lambda+2)(\lambda^2+4)$. 于是特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$, $\lambda_4=2i$, $\lambda_5=-2i$. 进而得到方程实的基本解组为e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, $\cos 2x$, $\sin 2x$. 解答完毕.

高阶方程的来源：耦合调和振子

课本第158页,Example 4: 设两个推车的质量分别是m_1 和m_2，推车1与左墙用弹簧1连接，推车2与右墙用弹簧2连接．再用弹簧3连接这两个推车．如图．



假设这两个推车水平滚动过程中无阻尼力，并记推车i的位移为x_i．于是根据Newton第二定律得到

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_3(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1). \end{cases}$$

不难证明，可以从上述方程消去一个未知函数，得到关于另一个未知函数的四阶常系数线性方程，从而求得方程的解．见课本第160页，problems 17，18．

回忆对非齐次方程$L(D)y = f(x)$，若已知齐次方程$L(D)y = 0$的一个基本解组，那么$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)f(s)(s)ds$ 就是非齐方程一个特解．这里$H(s,x)$ 是基本解组所对应的Cauchy 函数．以下针对函数类$f(x) = e^{\lambda_0 x}\phi(x)$，用待定系数法，直接求方程$L(D)y = f(x)$ 的特解，这里$\phi(x)$ 为多项式．待定系数法可能比计算Cauchy 形式的特解$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(x,s)f(s)ds$ 来得更简单快捷．方法的理论基础是如下的两个定理．

理论基础

定理1：若λ_0 不是齐次方程$L(D)y=0$ 的特征值，则非齐次方程$L(D)y=e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解具有形式$y_p(x)=e^{\lambda_0 x}\psi(x)$，其中$\psi(x)$ 为多项式，且$\deg\psi(x)=\deg\phi(x)$.

定理1的证明稍后给出.

定理2：设λ_0 是齐次方程$L(D)y=0$ 的k 重特征值，则非齐次方程$L(D)y=e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解具有形式$y_p(x)=e^{\lambda_0 x}x^k\psi(x)$，其中$\psi(x)$ 为多项式，且$\deg\psi(x)=\deg\phi(x)$.

定理2的证明留作习题.

例一：求方程$y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征多项式为$L(\lambda) = \lambda^2 - 1$，特征值为$\lambda_{1,2} = \pm 1$. $\lambda_0 = 2$ 不是特征值. 根据定理1可知方程有唯一解具有形式$y_p(x) = e^{2x}(ax^2+bx+c)$，其中$a, b, c$ 为待定常数. 将$y_p(x)$ 代入方程$y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$，约去指数函数并加以整理得$3ax^2 + (8a+3b)x + (2a+4b+3c) = x^2 + 1$. 比较两边的系数得到关于$a, b, c$ 的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解之得$a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{-8}{9}$, $c = \frac{35}{27}$. 于是$y_p(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right)$.
因此非齐次方程$y'' - y = e^{2x}(x^2 + 1)$ 的通解为

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right).$$

解答完毕.

例二: 求方程 $(*)\, y'' - y = e^{-x}(x+1)$ 的一般解.

解: 对应齐次方程的特征多项式为$L(\lambda) = \lambda^2 - 1$, 特征值为$\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$, $\lambda_0 = -1$ 是单重特征值. 由定理2可知方程有唯一解具有形式$y_p(x) = e^{-x}x(ax+b)$, 其中a, b 为待定常数. 将$y_p(x)$ 代入方程$(*)$, 约去e^{-x} 得$-4ax + 2(a-b) = x+1$. 比较两边的系数得到关于$a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{3}{4}$. 故所求特解为$y_p(x) = -e^{-x}(\frac{x^2}{4} + \frac{-3x}{4})$. 于是非齐次方程$(*)$ 的一般解为

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - e^{-x}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4}\right).$$

解答完毕.

定理1之证明

证明: 定义$m+1$ 维线性空间

$$\mathcal{S} := \mathrm{span}\left\{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}\right\},$$

以及映射$L(D):\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, $p(x)\mapsto L(D)p(x)$, $\forall p(\cdot)\in\mathcal{S}$. 显然$L(D)$ 是线性的. 记映射$L(D)$ 在基底$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}$下的表示矩阵记作$A$, 即

$$L(D)(e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}) = (e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x})A.$$

证明续

经过一些初等但有些繁琐的计算可知，矩阵A 为如下$\mathsf{m}+1$ 阶的上三角矩阵

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix} \mathsf{L}(\lambda_0) & * & \cdots & * \\ & \mathsf{L}(\lambda_0) & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathsf{L}(\lambda_0) \end{bmatrix}.$$

矩阵A 中的元素$*$ 代表某些我们目前并不感兴趣的常数. 由于λ_0 不是特征值，即$\mathsf{L}(\lambda_0)\neq 0$. 故矩阵$\mathsf{A}$ 可逆. 于是线性映射$\mathsf{L}(\mathsf{D})$ 可逆. 定理1得证. 证毕. □

形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \quad x > 0,$$

的方程称为Euler 型方程，其中$a_1, \cdots, a_n$ 为常数. Euler 型的线性方程可以通过变量替换$x = e^u$ 或$u = \ln x$ 化为常系数线性方程. 理由基于如下引理.

Lemma

设$y(x)$ 在$(0,+\infty)$ 无穷连续可微函数，记$z(u) := y(e^u)$，$u \in (-\infty,+\infty)$，则对任意正整数$k \geq 1$ 下式成立

$$x^k \frac{d^k y(x)}{dx^k}\Big|_{x=e^u} = \left(\frac{d}{du} - (k-1)\right)\cdots\left(\frac{d}{du} - 1\right)\left(\frac{d}{du} - 0\right) z(u).$$

Proof.

证明留作习题. □

例: 求方程$y''+\frac{1}{4x^2}y=0\ (x>0)$ 的基本解组.

解: 上述方程等价于Euler 方程$x^2y''+\frac{y}{4}=0$. 作变换$x=e^u$, 并记$z(u):=y(e^u)$. 简单计算得$z'(u)=e^uy'(e^u)$. 进一步求导得$z''(u)=[e^uy'(e^u)]'=e^{2u}y''(e^u)+e^uy'(e^u)$. 由此得$x^2y''(x)|_{x=e^u}=e^{2u}y''(e^u)=z''(u)-z'(u)$. 将上式带入方程$x^2y''+\frac{y}{4}=0$, 即得到关于函数$z(u)$ 的方程$z''-z'+\frac{z}{4}=0$. 这是常系数线性方程.

其特征方程为$\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$，即$(\lambda-\frac{1}{2})^2=0$. 特征值为$\lambda_1=\frac{1}{2}$，二重. 于是常系数线性方程$z''-z'+\frac{z}{4}=0$ 有基本解组$e^{\frac{u}{2}}$, $ue^{\frac{u}{2}}$. 再换回变量$u=\ln x$，即得原方程$y''+\frac{1}{4x^2}y=0$ 的基本解组为$\sqrt{x}$, $\sqrt{x}\ln x$. 解答完毕.

课本习题：page 160–161， problems 17, 18, 23,

菲利波夫习题 533, 535, 546, 547, 624, 625, 626, 668, 670, 671, 672, 717, 718, 720.

补充题. 考虑二阶线性齐次方程$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. 问是否存在区间$(-\infty, +\infty)$上连续的函数$a_1(x)$, $a_2(x)$, 使得方程有基本解组$y_1 = x$, $y_2 = \sin x$. 若存在，则求出这样的函数，若不存在，则说明理由.

<u>选作习题</u>: 设函数$\mathbf{q(t)}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续且恒正，即$\mathbf{q(t)} > \mathbf{0}, \forall \mathbf{t} \in (-\infty,+\infty)$. 证明二阶线性齐次方程$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{q(t)y} = \mathbf{0}$ 的任何解必有零点. (注：可只用微积分知识证明，无需常微理论)