第 4 章作业简答

习题 4.1

3. 有定义直接可证。

6．有正项级数的比较判别法直接可证。

11．对任意 $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus N$, 第$n$项的实部和虚部分别为，

$$a_n = \frac{n-x}{(n-x)^2+y^2}, \quad b_n = \frac{-y}{(n-x)^2+y^2}$$

他们都从某一项开始单调趋于 0， 有交错级数判别法得结论。

13． 这与级数的情形完全一样。只需将记住中的 Sn 换成 fn 进行论证。也可以将写成级数的形式 $f_n = f_1 + \sum_{k=2}^{n} (f_k - f_{k-1})$. 而$\sum_{k=2}^{n} (f_k - f_{k-1})$内闭一致收敛相当于 f_n 一致收敛。f_n 内闭一致收敛于 f 的定义是：对$\forall$ 紧集 $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，对任意 $z \in K$ 都有$| f_n(z) - f(z) | < \varepsilon.$

习题 4.2

1．（i） 任取 $r < \min\{R_1, R_2\}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 都在$|\mathrm{z}| \le \mathrm{r}$ 收敛， 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \mathrm{z}^n$在$|\mathrm{z}| \le \mathrm{r}$ 收敛， 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$的收敛半径不小于 r. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$的收敛半径至少是$\min\{R_1, R_2\}$

（ii）任取$r < R_1 R_2$,存在$r_1 < R_1, r_2 < R_2$ 使得$r < r_1 r_2 < R_1 R_2$ 由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛性我们有 $\lim_{n\to\infty} a_n r_1^{\,n} = \lim_{n\to\infty} b_n r_1^{\,n} = 0.$ 因此有对充分大的 n，$| a_n r_1^{\,n} | < 1, | b_n r_2^{\,n} | < 1$ 进而 $| a_n b_n r_1^{\,n} r_2^{\,n} | < 1$，因此$| a_n b_n r^n | < | a_n b_n r_1^{\,n} r_2^{\,n} | \left(\frac{r}{r_1 r_2} \right)^n < \left(\frac{r}{r_1 r_2} \right)^n$. 所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n b_n r^n |$收敛，由 Abel 判别法（或由 Weierstrass 判别法：定理 4.1.3），$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \mathrm{z}^n$ 在$|\mathrm{z}| \le r$收敛。由 r 的任意性，（ii）得证。

以上两个题目都可以由收敛半径的定义（定理 4.4.2）证明。

2 （i）1， （ii）+∞（iii）1/4， （iv）1/e

3 显然， 只需注意到 $| a_n \mathrm{z}^n | \le | a_n z_0^{\,n} |$, 再 Weierstrass 判别法：定理 4.1.3

7． 由于 f有界， 存在 M>0, $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} d\theta < M$ 进而由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $| z | \le r \ (r < 1)$ 上一直收敛于 f(z). $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n \overline{z}^n$ 在 $| z | \le r \ (r < 1)$ 上一直收敛于 $\overline{f(\mathrm{z})}$. $\sum_{n=1}^{\infty} f(z) \overline{a}_n \overline{z}^n$ 在 $| z | \le r \ (r < 1)$上一直收敛于 $f(z)\overline{f(\mathrm{z})}$ 我们有

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}d\theta=\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{a}_m\ \rho^m e^{-im\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}\right)\overline{a}_m\ r^m e^{-im\theta}d\theta$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}\right)\overline{a}_m\ r^m e^{-im\theta}d\theta$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}a_n r^n e^{in\theta}\overline{a}_m\ r^m e^{-im\theta}d\theta$$

$$=2\pi\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2\ r^{2m}<M.$$

对任意 r<1，任意 N，$2\pi\sum_{m=1}^{N}|a_m|^2\ r^{2m}\le 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2\ r^{2m}<M$. 因而

$$2\pi\sum_{m=1}^{N}|a_m|^2\ <M\Rightarrow 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2<M.$$

8．(i) 有多种证法。例如 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{R}\bullet\ 0=0.$

（ii）似乎应该假设原级数收敛半径大于 R 才对。

10　G 的面积等于

$$(f=u+v)$$

$$\iint_G dudv=\iint_D\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}dxdy=\iint_D|f'|^2dxdy=\iint_D f'\ \overline{f'}\ dxdy$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$ 在 $|z|\le r\ (r<1)$ 上一直收敛于 f'(z). $\sum_{n=1}^{\infty}n\overline{a}_n\overline{z}^{n-1}$ 在 $|z|\le r\ (r<1)$ 上一直收敛于 $\overline{f'(\mathrm{z})}$. $\sum_{n=1}^{\infty}f'(\mathrm{z})n\overline{a}_n\overline{z}^{n-1}$ 在 $|z|\le r\ (r<1)$ 上一直收敛于 $f'(\mathrm{z})\overline{f'(\mathrm{z})}$ 我们有

$$\iint_D|f'|^2dxdy$$

$$\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} f'(re^{i\theta})\overline{f'(re^{i\theta})}d\theta=\int_0^R rdr\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}na_n r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\sum_{m=1}^{\infty}m\overline{a}_m\ r^{m-1}e^{-i(m-1)\theta}d\theta$$

$$=\int_0^R rdr\int_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_n r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right)m\overline{a}_m\ r^{m-1}e^{-i(m-1)\theta}d\theta$$

$$=\int_0^R rdr\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_n r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right)m\overline{a}_m\ r^{m-1}e^{-i(m-1)\theta}d\theta$$

$$=\int_0^R rdr\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}mna_n r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\overline{a}_m\ r^{m-1}e^{-i(m-1)\theta}d\theta$$

$$=2\pi\int_0^R\sum_{m=1}^{\infty}m^2|a_m|^2\ r^{2m-1}dr=\pi\sum_{m=1}^{\infty}m|a_m|^2\ R^{2m}.$$

习题 4.3

1．课堂上讲过的。这个题意应该理解为：证明在适当规定 ***f*** 在 ***a*** 的值以后，***f*** 全纯。

$$F(z)=\begin{cases}(z-a)f(z),\ z\in D\setminus\{a\}\\ 0\end{cases}$$

在D上连续，在$D\setminus\{a\}$上全纯。因而由 **Morera** 定理，F 在 **D** 上全纯。因而有 **Taylor** 展式$F(z)=a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+...$。进而在某个$B^*(a,\delta)$上有

$$F(z)=(z-a)f(z)=a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+...,$$

即在$B^*(a,\delta)$上有 $f(z)=a_1+a_2(z-a)+a_3(z-a)^2+...,$ 只要规定 $f(a)=a_1$，**f** 便在 **D** 全纯。

5.（**i**）（**iii**）存在，（**ii**）（**iv**）不存在。

8．恒等式有很多。可按这个思路理解就可以了：三角恒等式可理解为等式 $f(\sin\theta,\cos\theta)\equiv 0.$一般来说 **f** 是一个解析函数。这就是说 $f(\sin z,\cos z)$在 实轴上很等于零。由解析函数的唯一性，$f(\sin z,\cos z)$ 在$\mathbb{C}$上恒等于零

13．假如 **f** 的零点有无穷多个，则由定理 **1.5.7**，这些零点有聚极限点 ***a***. 也就是说，在 ***a*** 的任何邻域中都有无穷多 **f** 的零点。由非常值解析函数在定义域内部零点的孤立性，这个极限点 ***a*** 必然在∂D上。由于 **f** 在$\overline{D}$连续， 必有 $f(a)=0$，与题设矛盾。

习题 4.4

2．设

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_0$$

是 **n** 次多项式（$a_0\neq 0$）。显然 $\frac{1}{2\pi}\Delta_{|z|=R}Arg(az^n)=n.$ 而对充分大的 R，$|f(z)/(az^n)-1|<1/2,$ 因而对充分大的 ***R***，

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{|z|=R}Arg(f(z))-\frac{1}{2\pi}\Delta_{|z|=R}Arg(az^n)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{|z|=R}Arg(\frac{f(z)}{az^n})=0.$$

所以$\frac{1}{2\pi}\Delta_{|z|=R}Arg(f(z))=n.$ 由辐角原理，f 有n个零点。

3．显然$z-\lambda$在由半平面仅有一单根 λ（重数为 **1** 的根）。任取$R>\lambda+1,$有

$$|e^{-z}|<1<|z-\lambda|,\forall\ z=ir,r\in[-R,R],\ 和\ \forall z=\mathrm{Re}^{i\theta},\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

由 Rouche 定理，$z-\lambda$和$z-\lambda+e^{-z}$在半圆盘$\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<R,\mathrm{Re}\,z>0\}$有相同的零点个数。由此得出结论。

5．设

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_0$$

是 **n** 次多项式（$a_0\neq 0$）。用 **Rouche** 定理比较a_0z^n和 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_0$。

7．对充分大的n，$|1+z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n!}-e^z|<e^{-1}<|e^z|=e^{r\cos\theta},z=re^{i\theta},\theta\in[0,1].$ 即

$$|1+z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n!}-e^z|<|e^z|,z\in\partial B(0,r)。$$

由 **Rouche** 定理， $1+z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n!}$和$e^z$ 在 $B(0,r)$有相同零点个数。但是e^z没有零点，由此得到结论。

8． 假设 **f(D)**不是单点集**{0}**。则 **f** 只能在 **D** 有孤立零点（**f** 是全纯的）。我们来证 **f** 在 **D** 没

有零点。如果 $a\in D$ 是 **f** 的一个零点，则存在 $\delta>0$ 使得 $\overline{B(a,\delta)}\subset D$且$a$是$f$在$\overline{B(a,\delta)}$ 的唯一零点。由于 $f_n(z)$ 在 $\overline{B(a,\delta)}\subset D$且$a$是$f$在$\overline{B(a,\delta)}$ 上一致收敛到 **f,** 有 **Hurwitz** 定理，f与f_n 在 $\overline{B(a,\delta)}$ 有相同的零点个数。所以 f_n 在 **D** 有零点，矛盾。

11．（i）1 个　（ii）2 个　（iii）4 个　（iv）n 个

12．利用在单位圆周上有$|-z-(f(z)-z)|<|z|$和 Rouche 定理。

16．任取 $a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$，易见 $\Delta_{\partial D}Arg(f(z)-a)=0.$ 因而有辐角原理，$f(z)\neq a.$ 这就有 f(D) $\subset\mathbb{R}$,因而 f(D)不能是开集。所以由开映射定理，f 是常数。

17．由题目条件，对 Γ 所围区域 Ω 中的任意一点 *a*，$\Delta_{\partial D}Arg(f(z)-a)=1.$ 而对 $\overline{\Omega}$ 之外任意一点 *b*，$\Delta_{\partial D}Arg(f(z)-b)=0.$ 所以辐角原理有 $f(D)=\Omega$，而且 *f* 是单叶的。

习题 4.5

1. 这道题目的 D 应为 $\mathbb{C}$ 中的域，$\bar{D}$ 要理解成 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的闭包，而 ∂D 应理解为 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的边界（否则结论不成立。例如取 $D=\mathbb{C}$，如将 $\bar{D}$ 理解成 $\mathbb{C}$ 中的闭包，而 ∂D 应理解为 $\mathbb{C}$ 中的边界的话，$\bar{D}=\mathbb{C}$ 而 $\partial D=\varnothing$。这时 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$\partial D$上一致收 就没有意义)。这样 $f\in C(\bar{D})$ 就应该理解成：对任意 $a\in\bar{D},\lim_{\substack{z\to a\\ z\in\bar{D}}}f(z)=f(a)\in\mathbb{C}$.

任取 $f\in C(\bar{D})\cap H(D)$，

先证明对任意 $f\in C(\bar{D})\cap H(D)$，

$$\sup_{z\in\bar{D}}|f(z)|=\sup_{z\in\partial D}|f(z)|. \tag{1}$$

如果 D 有界，则由最大模原理，(1)显然。

现在设 D 无界。则 $\infty\in\partial D,$ 且

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\bar{D}}}f(z)=f(\infty)\in\mathbb{C} \qquad (2)。$$

如果$|f(\infty)|=\sup_{z\in\bar{D}}|f(z)|$，则（1）自然成立。如果$|f(\infty)|<\sup_{z\in\bar{D}}|f(z)|$，则由（2），存在 $R>0$ 使得

$$|f(z)|<\sup_{z\in\bar{D}}|f(z)|,\forall z\in B(\infty,R)\cup\{\infty\}$$

这样我们有

$$\sup_{z\in\overline{B(0,R)}\cap\bar{D}}|f(z)|=\sup_{z\in\bar{D}}|f(z)|.$$

而 $\overline{B(0,R)}\cap\bar{D}$ 是一个紧集，因而存在 $a\in\overline{B(0,R)}\cap\bar{D}$ 使得

$$|f(a)|=\sup_{z\in\overline{B(0,R)}\cap\bar{D}}|f(z)|=\sup_{z\in\bar{D}}|f(z)|.$$

由最大模原理，$a\in\partial D$. 这就证明了（1）。

由假设，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 ∂D 上一致收敛，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，使得 $\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^*$ 有

$$|f_n(z)+f_{n+1}(z)+...+f_{n+p}(z)|<\varepsilon,\forall z\in\partial D.$$

由(1)我们有

$$|f_n(z)+f_{n+1}(z)+...+f_{n+p}(z)|<\varepsilon,\forall z\in\bar{D}.$$

这就证明了一致收敛性。

4．这是最大模原理的直接推论

5．如果 n (≥ 1) 次多项式 f 没有零点，则$1/f(z)$在$\mathbb{C}$全纯且$\lim_{z\to\infty} 1/|f(z)|=0$, 因此$1/|f(z)|$在$\mathbb{C}$取得最大值，由最大模原理，$f(z)$为常数，矛盾。

7．考虑 1/f(z).

8． 由 $f(0)=0$, 可知在$B(0,\delta)$上有

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n+...=zg(z),$$
$$g(z)=a_1+a_2z^1+...+a_nz^{n-1}+...\in H(B(0,1)).$$

令 $M=\max\{|g(z)|;|z|\leq 1/2\}$, 则$|f(z)|<M|z|, \forall z\in B(0,1/2)$. 对任意$r\in(0,1)$, 存在 N，使得$n>N$时$r^n<1/2.|$因而对任意$n>N$有

$$|f(z^n)|<M|z^n|\leq Mr^n,\ \forall z\ with\ |z|\leq r.$$

由此结论显然。

10． 对 f(z)/M 应用 Schwarz 引理。

11． 考虑$F(z)=\dfrac{f(z)}{f(z)-2A}$。 易见 $F(B(0,1))\subset B(0,1)$,F(0)=0. 由 Schwarz 引理我们有

$$|F(z)|=|\frac{f(z)}{f(z)-2A}|\leq|z|, \forall z\in B(0,1).$$

进而$\dfrac{|f(z)|}{|f(z)|+2A}\leq|z|, \forall z\in B(0,1)$. 由此推的结论。