偏微分方程II

简怀玉

目　录

第一章 引言

一个含有未知多元函数的方程如果还含有该函数的某些偏导函数，它就称为**偏微分方程**。未知函数偏导数的最高阶数称为该偏微分方程的**阶**。如果一个偏微分方程关于其未知函数和未知函数的偏导函数都是线性的，它就称为**线性偏微分方程**；否则统称为**非线性偏微分方程**。

为了叙述偏微分方程的一些经典例子，我们先来回忆多元函数偏导数的有关记号。设Ω是R^n中的一个开区域，$n \geq 2$, $u(x) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是定义在Ω中的一个n元函数，记

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}.$$

$Du(x) = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})$, $D^2u(x) = [u_{x_i x_j}]_{n\times n}$和$\Delta u(x) = divDu = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_j}$分别表示函数$u$的**梯度**, **Hessian 矩阵**和**Laplacian**。

§1.1 二阶线性偏微分方程举例

在大学本科的偏微分方程课程中，我们主要研究如下三个模型：

$$\text{热传导方程} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t),$$

$$\text{波动方程} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t),$$

以及它们的稳态（与时间变量t无关）方程

$$\text{Laplace 方程} \qquad -\Delta u = f(x),$$

其中f是已知函数，而u是未知函数。然而，如果当研究的材料不均匀或研究的问题需要精准的答案不能做过多地简化时，热传导过程和波动现象应该分别用方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,t) \tag{1.1}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(x,t) \tag{1.2}$$

来模拟，其中L是一般形式的二阶线性偏微分算子：

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^n A^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B^i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u, \tag{1.3}$$

式中A^{ij}, B^i, C都是已知函数。方程(1.1)和(1.2)稳态方程是

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \tag{1.4}$$

有趣的是，方程(1.1)在Kolmogorov研究随机过程中起到了重要的作用，所以它称为**Kolmogorov方程**,而方程(1.2)可以称为**一般波动方程**。

如果矩阵函数$[A^{ij}(x,t)]_{n\times n}$或$[a^{ij}(x)]_{n\times n}$是正定的，则方程(1.1),(1.2)和(1.4)分别称为**抛物型,双曲型和椭圆型**。

§1.2 非线性偏微分方程举例

几何上，在给定的空间中给定一个函数，寻找该空间中的超曲面或流形使得其每一点的（平均，高斯等）曲率等于这个给定的函数，这类问题称为**预定（平均，高斯等）曲率问题**，它是几何中非常重要的一类问题。欧式空间中超曲面的**预定平均曲率问题**就是用下列方程刻画的：

$$div(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}) = f(x,u). \tag{1.5}$$

其中div是关于空间变量x的散度算子。如果$f\equiv 0$, 就得到著名的**极小曲面方程**：

$$\sum_{i,j=1}^{n}[\delta_{ij} - \frac{u_{x_i}u_{x_j}}{1+|\nabla u|^2}]u_{x_ix_j} = 0. \tag{1.6}$$

其中$\delta_{ij}=0$如果$i\neq j$, $\delta_{ij}=1$如果$i=j$. 欧空间中超曲面的**预定高斯曲率方程**是

$$detD^2u = f(x,u,Du), \tag{1.7}$$

其中左边表示Hessian矩阵的行列式。这类方程是Monge-Ampere率先研究的，所以称为**Monge-Ampere型方程**，它也源于**最优输运问题**的研究和曲面的Monge曲率。

方程(1.5)和(1.7)的根本区别在于：前者**关于最高阶（二阶）偏导函数是线性的，这类方程称为拟线性方程**; 而后者**关于最高阶（二阶）偏导函数是非线性的，这类方程称为全非线性方程**。

如果研究空间中的超曲面或流形的运动，使得在每一点的法向速度等于该点的给定（平均，高斯等）曲率函数，这样得到的方程叫**（平均，高斯等）曲率流方程**。欧式空间中超曲面的**平均曲率流方程**是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{1+|\nabla u|^2}div(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}) = f(x,u) \tag{1.8}$$

而**高斯曲率流方程**是

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{det(D^2u)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{n+1}{2}}}=f(x,u,Du). \tag{1.9}$$

方程(1.5)-(1.9)的研究，不但解决了相关的几何问题，而且大大地推动了现代偏微分方程理论的发展，几个菲尔茨奖获得者(比如：J. Douglas, E. Bombieri, 丘成桐, S.K. Donaldson, C. Villani, A. Figalli)的工作都是与这些方程中的某个方程研究有密切的关系。

需要指出的是：Hamilton引进的**Ricci曲率流方程**也是一类重要的曲率流方程, Perelman用它解决了著名的Poincare猜想。

应用领域中还有很多类重要的偏微分方程，如

Hamilton-Jacobi方程： $\frac{\partial u}{\partial t}+H(Du,x,t)=0$， 其中$H$为已知函数;

渗流方程： $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u^m=0$， 其中$m$为已知常数;

一维KDV方程： $\frac{\partial u}{\partial t}+uu_x+u_{xxx}=0.$

§1.3 非线性偏微分方程组举例

如果一个偏微分方程中的未知多元函数的是一个向量值函数，它就称为**偏微分方程组**。几何中如果预定曲率问题或曲率流问题的流行是高余维的，就会得到相应的偏微分方程组。应用领域中有很多重要的偏微分方程组，比如：

守恒虑方程组： $\frac{\partial u}{\partial t}=divF(u)$， 其中$u(x,t):\Omega\times[0,\infty)\to R^N$为所求的函数，$F:R^N\to M_{n\times N}$为已知函数;

反应扩散方程组： $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=F(u)$， 其中$u(x,t):\Omega\times[0,\infty)\to R^N$为所求的函数，$F:R^N\to R^N$为已知函数;

Schrodinger方程： $i\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u^m=u|u|^p$， 其中$p$为已知常数, $u=u_1+iu_2$为所求的复值函数;

不可压无粘流体Navier-Stokes方程组：求$(u,P):\Omega\times[0,\infty)\to R^n\times R$满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla P=0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty)\\ divu(\cdot,t))=0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty.\end{cases} \tag{1.10}$$

其中记号$u\cdot\nabla u=(\sum_{j=1}^n u_j u^i_{x_j})_{i=1}^n$.

Clay数学研究所在新的千禧之年召集全世界著名数学家，提出了七个数学难题，其中有三个问题与偏微分方程有关（Poincare猜想，Yang-Mills流和不可压无

粘流体Navier-Stokes方程组）。详见：http://www.claymath.org. 其中关于Navier-Stokes方程组的问题叙述是：**设**$n = 3$**，给定**$u_0 \in C^\infty(\Omega)$**，是否存在唯一的光滑函数**$(u, P) : \Omega \times [0, \infty) \to R^n \times R$**，满足(1.10)和**$u(x, 0) = u_0(x)$

本讲义主要讲述二阶线性偏微分方程的基本理论，包括椭圆型偏微分方程(1.4)，抛物型偏微分方程(1.1)和双曲型方程(1.2)在Sobolev空间中弱解的存在性和唯一性，我们还要研究这样得到的解的正则性（光滑性）。处理方法主要是Galerkin逼近方法，能量估计方法和利用Sobolev嵌入定理。对于椭圆和抛物型偏微分方程，我们也讲述极值原理，Schauder先验估计和De Giorgi-Nash-Morse迭代技巧。

主要参考文献是：

[1] L C Evans, Partial differential equations, Second Edition, American Mathematical Society, 2010 (或2017，高等教育出版社出版). 本书的Part II作为教材

[2] R A Adams, J Fournier, Sobolev Space, Academic Press, 2003.

[3] D Gilbarg, N S Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, First Edition 1977, Second Edition 1998.

[4]陈亚浙, 二阶抛物型偏微分方程, 北京大学出版社，2003.

[5]N V Krylov, Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces, American Mathematical Society, 2008

第二章 Sobolev空间

直接找方程(1.1),(1.2)和(1.4)的经典解（二阶偏导数处处存在）是一件很不容易的事，如果我们用古典方法去寻求解，比如级数展开，那么它的收敛性是需要连续可微函数空间完备性来保证，而后要求函数和它相应阶偏导函数的一致收敛，而这个是不太容易得到的。相反，在积分意义下的收敛性是比较容易得到的，因此我们自然将连续可微函数空间在某种积分意义下的完备化空间作为解的存在空间，这个空间就是Sobolev 空间等.

§2.1 连续可微函数空间

用Z_n表示n-重指标集，即

$$Z_n = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) :\ \ \alpha_i\text{是非负整数},\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

记$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, 它称为$\alpha$的**模**。

如果没有特殊说明，我们总设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是开集（不一定要求有界），$k \geq 0$是整数。如果$K \subset \Omega$是有界集而且它与$\Omega$的边界的距离大于零，则记$K \subset\subset \Omega$。对于定义在$\Omega$中的函数，记

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

我们定义如下的函数空间：

$$C^k(\overline{\Omega}) = \left\{u : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R} :\ D^\alpha u\ \text{在}\overline{\Omega}\text{中一致连续且有界},\ \forall \alpha \in Z_n,\ |\alpha| \leq k\right\},$$

$$C^k(\Omega) = \left\{u : \Omega \mapsto \mathbb{R} :\ u \in C^k(\overline{K}),\ \forall K \subset\subset \Omega\right\}.$$

特别当$k = 0$时，记$C(\Omega) = C^0(\Omega)$, $C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega})$.

在空间$C^k(\overline{\Omega})$引进范数

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{\{\alpha \in Z_n, 0 \leq |\alpha| \leq k\}} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|.$$

下面定理的证明可见[Admas;2003, Th 1.33].

定理 2.1 *(Ascoli-Arzela 定理)* 设Ω是有界开集，$K \subset C(\overline{\Omega})$是有界等度连续的，即满足：*(i)* 存在常数$M > 0$, 使得$|\phi(x)| \leq M, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \phi \in K$;

(ii) 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$x, y \in \overline{\Omega}$且$|x - y| < \delta$时，均有

$$|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon, \quad \forall \phi \in K.$$

则K是列紧的. 即：对于K中任意的序列，均在$C(\overline{\Omega})$中按照其范数收敛于$C(\overline{\Omega})$的一个函数。

为了研究Hölder连续性，引进量刚

$$[u]_{C^{0,\alpha}}(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

其中$\alpha \in [0, 1]$是给定的常数. 记

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty \right\},$$

则$C^{0,1}(\overline{\Omega})$就是熟悉的Lipschitz函数空间。再定义

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) : [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty, \text{对一切满足}|\beta| = k\text{的多重指标}\beta \right\}.$$

显然，$C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega})$. 在空间$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$引进范数

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{\{\beta\in Z_n, |\beta|=k\}} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

我们有如下的结论。

定理 2.2 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$0 \leq \alpha \leq 1$, 那么

(i) $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})})$ 是*Banach* 空间；

(ii) 如果$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ 且$k \geq 0$是整数，则

$$C^k(\overline{\Omega}) \supset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \supset C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \supset C^{k,1}(\overline{\Omega});$$

(iii) 如果Ω是有界凸集，则

$$C^{k,1}(\overline{\Omega}) \supset C^{k+1}(\overline{\Omega}).$$

作业1：证明定理2.2.

作为本节的结尾，再引进几个常用的空间。

$$C^{k,\alpha}(\Omega)=\left\{u\in C^k(\Omega):\ u\in C^{k,\alpha}(\overline{K}),\,\forall K\subset\subset\Omega\right\}.$$

$$C_0(\Omega)=\{u\in C(\Omega):\mathrm{Supp}\,u\subset\subset\Omega\},$$

这里$\mathrm{Supp}\,u=\overline{\{x\in\Omega:u(x)\neq 0\}}$. 记

$$C_0^k(\Omega)=C^k(\Omega)\bigcap C_0(\Omega),\quad C_0^\infty(\Omega)=C^\infty(\Omega)\bigcap C_0(\Omega):=\mathcal{D}(\Omega);$$

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{k=0}^{\infty}C^k(\Omega),\quad C^\infty(\overline{\Omega})=\bigcap_{k=0}^{\infty}C^k(\overline{\Omega}).$$

§2.2 L^p空间

L^p空间是Soblev空间的基本函数空间，本节主要介绍它的定义和基本性质.

1. 定义和性质

定义 2.1 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是开集，$1\le p<\infty$, $u:\Omega\to\mathbb{R}$, 定义

$$L^p(\Omega)=\left\{u:\,\Omega\to\mathbb{R}\text{在}\Omega\text{中}Lebesque\text{可测且}\int_\Omega|u(x)|^pdx<\infty\right\},$$

$$L^\infty(\Omega)=\left\{u:\,\Omega\to\mathbb{R}\text{在}\Omega\text{中}Lebesque\text{可测且}\inf\{m:|u(x)|\le m,\,a.e.x\in\Omega\}<\infty\right\},$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega|u(x)|^pdx\right)^{\frac1p},\quad\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\inf\{m:|u(x)|\le m,\,a.e.x\in\Omega\},$$

$$L^p_{loc}(\Omega)=\left\{u:\,\Omega\to\mathbb{R}\text{在}\Omega\text{中}Lebesque\text{可测且}u\in L^p(K),\text{对任意可测集}K\subset\subset\Omega\right\}.$$

命题 2.1 *(1) (Höder 不等式) 对于任意的$p,q\ge 1,\frac1p+\frac1q=1,u\in L^p(\Omega),v\in L^q(\Omega)$, 均有*

$$\int_\Omega|uv|dx\le\left(\int_\Omega|u|^pdx\right)^{\frac1q}\left(\int_\Omega|v|^qdx\right)^{\frac1p}.$$

(2) (Minkowski 不等式) 对于任意的$p\in[1,\infty]$, $u,v\in L^p(\Omega)$,, 均有

$$||u+v||_{L^p(\Omega)}\le\|u\|_{L^p(\Omega)}+\|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

(3) 对于任意的$1 \le p < \infty$, 简单函数类和$C_0(\Omega)$都在$L^p(\Omega)$ 空间稠密. 简单函数在$L^\infty(\Omega)$中稠密.

(4) 对于任意的$1 \le p < \infty$, L^p是可分的. 对$1 < p < \infty$, L^p 是自反的*Banach*空间. $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$，$L^\infty(\Omega)$是*Banach*空间，但它既不可分，也不是自反的.

证明. 这些性质的证明都可以在[Admas;2003]中查到，下面只给出(1)和(3)的证明。

(1) 由于$\log x$是凹函数, 对$a, b > 0$,

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} = \log a + \log b = \log ab.$$

我们得到

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.1}$$

于是取$a = \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}}, b = \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}}$, 则

$$\frac{|u(x)||v(x)|}{\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}} \le \frac{|u(x)|^p}{p\|u\|_{L^p}^p} + \frac{|v(x)|^q}{q\|v\|_{L^q}^q},$$

积分得到

$$\frac{1}{\|u\|_{L^p}^p\|v\|_{L^q}^q}\int_\Omega |u(x)||v(x)|dx \le 1.$$

(3) 对任何实函数u, 存在一列简单函数序列$\{s_n\}$收敛到它. 进一步，如果函数u有界, 可以选取简单函数列一致收敛到它.

下证$C_0(\Omega)$在$L^p(\Omega)$中稠密。由于$u = u^+ - u^-$, 可以假设$u \ge 0$. 于是存在一个单调增加的简单函数列$\{s_n\}$点收敛到$u(x)$. 由于$0 \le s_n(x) \le u(x)$, $s_n \in L^p(\Omega)$. 由控制收敛定理$\|s_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. 对任意$\varepsilon > 0$, 存在一个$s_k(x)$ 使得$\|s_k - u\|_{L^p} < \varepsilon$. 因为$s_k$是简单函数, 其支集有有限的体积, 可以假设$s_k(x) = 0, x \in \Omega^c$. 由Lusin定理, 存在一个连续函数$\phi \in C_0(\Omega)$,

$$|\phi(x)| \le \|s_k\|_{L^\infty}, \forall x \in \Omega,$$
$$meas(\{x \in \Omega : \phi(x) \ne s_k(x)\}) \le \left(\frac{\varepsilon}{2\|s_k\|_{L^\infty}}\right)^p.$$

因此

$$\|\phi - s_k\|_{L^p} \le \varepsilon,$$
$$\|u - \phi\|_{L^p} \le \|u - s_k\|_{L^p} + \|s_k - \phi\|_{L^p} \le 2\varepsilon.$$

□

我们还需用到L^p空间的插值不等式。

命题 2.2 *(1)* 对于任意的$p,q,r\geq 1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r},u\in L^p(\Omega),v\in L^q(\Omega)$, 均有$uv\in L^r(\Omega)$且

$$||uv||_{L^r(\Omega)}\leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^q(\Omega)};$$

(2) 对于任意的$1\leq p<r<q,\theta\in(0,1)$满足$\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}=\frac{1}{r}$, $u\in L^p(\Omega)\bigcap L^q(\Omega)$, 均有

$$||u||_{L^r(\Omega)}\leq ||u||^{\theta}_{L^p(\Omega)}\cdot||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

证明. (1)是[Admas;2003，Corol 2.5]，而(2)是[Admas;2003，Th2.11]。

我们还将用到离散形式的Höder不等和Minkowski 不等式：设$a_i,b_i\geq 0,i=1,2,\cdots,m$, $p\geq 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^m a_ib_i\leq(\sum_{i=1}^m a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^m b_i^{p'})^{\frac{1}{p'}},$$

$$[\sum_{i=1}^m(a_i+b_i)^p]^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^m a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^m b_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

其中$p'=\frac{p}{p-1}$称为**p对偶指数**. 当$p=1$时规定$p'=\infty$; 当$p=\infty$时规定$p'=1$.

作业2：利用定积分的几何意义证明不等式(2.1)，并证明如下的Young不等式：对任意$a,b,\varepsilon>0$和$p\geq 1$, 存在只与ε和p 有关的常数$C(p,\varepsilon)>0$, 使得

$$ab\leq\varepsilon\frac{a^p}{p}+C(p,\varepsilon)\frac{b^{p'}}{p'}.$$

§2.3 函数的光滑化

定义 2.2 设$0\leq J\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且对$|x|\geq 1$, $J(x)=0$, $\int_{\mathbb{R}^n}J(x)dx=1$. 则称$J$为光滑子*(Mollifier)*. 对于$\varepsilon>0$, 记 $J_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}J(\frac{x}{\varepsilon})$. 如果$u\in L^p_{loc}(\Omega)$, 定义

$$J_\varepsilon*u(x)=\int_\Omega J_\varepsilon(x-y)u(y)dy:=(u)_\varepsilon(x),\quad\forall x\in\Omega_\varepsilon:=\{x\in\Omega:dist(x,\partial\Omega)>\varepsilon\},$$

它称为u的光滑化或正则化.

这样的J可取：

$$J(x)=\begin{cases}(\int_{|x|<1}J(x)dx)^{-1}\exp\frac{1}{|x|^2-1}, & |x|<1;\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

记号: $f \in L^p_{loc}(\Omega)$表示对于任意的有可测集$K \subset\subset \Omega$，都有$f \in L^p(K)$; 而$f_m \to f \,\mathrm{in}\, L^p_{loc}(\Omega)$ 表示对于任意的有可测集$K \subset\subset \Omega$，都有$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^p(K)} = 0$.

正则化算子有下列基本性质：

命题 2.3 *(1)如果$u \in L^1_{loc}(\Omega)$,则$J_\varepsilon * u(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.*

(2) 假设$\mathrm{Supp}\, u \subset\subset \Omega, \varepsilon < dist(\mathrm{Supp}\, u, \partial\Omega)$, 则$J_\varepsilon * u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

(3) 设$u \in C(\Omega)$, 则当$\varepsilon \to 0$时，$J_\varepsilon * u(x) \to u$ 在Ω内部一致收敛. 如果$u \in C(\overline{\Omega})$且它在$bar\Omega$外延拓为零, 则$J_\varepsilon * u(x) \to u$ 在Ω中一致收敛.

(4) 如果$u \in L^p_{loc}(\Omega), 1 \le p < \infty$, 则对于任意的可测集$\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 有

$$\|J_\varepsilon * u\|_{L^p(\Omega_1)} \le \|u\|_{L^p(\Omega_2)}, \quad \forall \varepsilon \in (0, dist(\Omega_1, \partial\Omega_2)),$$

并且对任意的可测集$K \subset\subset \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p(K)} = 0.$$

即：$J_\varepsilon * u \to u \, in \, L^p_{loc}(\Omega)$.

(5) 对于u的每个Lebesgue 点x, 则当$\varepsilon \to 0$时，$J_\varepsilon * u(x) \to u(x)$. 特别地,

$$J_\varepsilon * u(x) \to u(x), a.e. x \in \Omega.$$

证明. (1),(2)的证明是显然的。而从不等式

$$|J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \le \sup_{|x-y|<\varepsilon} |u(y) - u(x)|,$$

容易证明(3). 详见[Admas: 2003, Th2.29].

先证(4)的第一个结论：

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon * u(x)| &\le \int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|dy \\
&\le \left(\int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y) dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

由Fubini定理,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |J_\varepsilon * u(x)|^p dx &\le \int_{\Omega_1} dx \int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy \\
&\le \int_{\Omega_2} |u(y)|^p dy.
\end{aligned}$$

为证(4)的第二个结论，取定$u \in L^p_{loc}(\Omega)$和可测集$K \subset\subset \Omega$, 只要证明：$\forall \delta > 0$, 只要$\varepsilon << 1$ (表示充分小)，就有$\|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p(K)} < \delta$.

为此取可测集$K \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 由命题2.1（2-3），存在$v \in C_0(\Omega_2)$使得

$$\|v - u\|_{L^p(\Omega_2)} < \frac{\delta}{3}.$$

由Minkowski不等式和(4)的第一个结论，我们有

$$\begin{aligned} \|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p(K)} &\leq \|J_\varepsilon * u - J_\varepsilon * v\|_{L^p(K)} + \|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(K)} + \|v - u\|_{L^p(K)} \\ &= \|J_\varepsilon * (u - v)\|_{L^p(K)} + \|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(K)} + \|v - u\|_{L^p(K)} \\ &\leq 2\|v - u\|_{L^p(\Omega_2)} + \|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(K)}. \end{aligned}$$

于是结合(3)我们就证明了(4)。

对于(5),假设$u \in L_{loc}(\Omega)$, 则对每个Lebesgue点x, 当$\varepsilon \to 0$时

$$|J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \leq c(n)\|J\|_{L^\infty(R^n)} ⨍_{B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)|dy \to 0,$$

这里$⨍_A f(x)dx = \frac{1}{|A|}\int_A f(x)dx$ 表示f在A上的积分平均. □

利用命题2.3容易证明

定理 2.3 *(1)* 对$1 \leq p < \infty$, $C_0^\infty(\Omega)$在$L^p(\Omega)$ 中稠密.

*(2)*如果$u \in L^1_{loc}(\Omega)$满足

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则$u(x) = 0, \quad a.e. x \in \Omega$.

证明. 做为**作业3**. □

§2.4 Sobolev 空间的定义及简单性质

1. 弱导数的定义及性质

如果$u\in C^1(\Omega)$, 则$\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 取$C^1$区域$\Omega_1$使得$supp\ \phi\subset\subset\Omega_1\subset\subset\Omega$. 由散度定理，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{x_i}\phi dx &= \int_{\Omega_1}[div(u\phi\mathbf{e_i})-u\phi_{x_i}]dx\\ &= \int_{\partial\Omega_1}u\phi\mathbf{e_i}\cdot\overrightarrow{n}ds_x-\int_{\Omega_1}u\phi_{x_i}dx\\ &= -\int_\Omega u\phi_{x_i}dx.\end{aligned}$$

其中$\mathbf{e_i}$是第个分量为1其余分量全为0的n-维向量，而$\overrightarrow{n}$ 是$\partial\Omega_1$的单位外法向量。重复这样的推导我们有：如果$u\in C^m(\Omega)$, 则$\forall\alpha\in Z_n, |\alpha|\le m$, 均有

$$\int_\Omega D^\alpha\phi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\phi dx,\quad\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega).\tag{2.2}$$

定义 2.3 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是开集，$u\in L^1_{loc}(\Omega)$, 如果存在$v\in L^1_{loc}(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi dx,\quad\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega),$$

则称v为u的α阶弱导数，仍记为$v=D^\alpha u$.

由(2.2)和定义2.3，容易得到

命题 2.4 *(1)* 如果$u\in C^m(\Omega)$, 则$\forall\alpha\in Z_n, |\alpha|\le m$, 弱导数$v=D^\alpha u$存在，且与经典的偏$\alpha$阶导数一致。

(2) 如果u_i的α阶弱导数存在，λ_i是常数，$(i=1,2)$, 则$D^\alpha(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2).=\lambda_1D^\alpha u_1+\lambda_2D^\alpha u_2$.

(3) 在弱导数意义下：如果$v_i=D^\alpha u$, $(i=1,2)$, 则$v_1=v_2$; 如果$\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}$存在，则$\frac{\partial^2u}{\partial x_j\partial x_i}$也存在，而且这两者相等。

(4) 如果弱导数$\frac{\partial u}{\partial x_i}$存在，$\eta\in C^\infty(\Omega)$, 则$\frac{\partial(\eta u)}{\partial x_i}$也存在，而且

$$\frac{\partial(\eta u)}{\partial x_i}=u\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+\eta\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

作业4： 证明命题2.4 (4).

利用(4)和数学归纳法可证**Leibniz 公式**: 如果$\alpha\in Z_n$, 对所有满足$\beta|<\le\alpha$的$\beta\in Z_n$, 弱导数$D^\beta u$都存在，$\eta\in C^\infty(\Omega)$, 则$D^\beta(\eta u)$也存在，并且

$$D^\alpha(\eta u)=\sum_{\beta\in Z_n,\beta|<\le\alpha}C_\alpha^\beta D^\beta\eta D^{\alpha-\beta}u,\tag{2.3}$$

此处

$$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdot \alpha_n!, \quad \beta| <\le \alpha \Leftrightarrow \beta_i \le \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

其完整可见[Evans: pp264].

命题 2.5 若$u, D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 则$\forall \varepsilon > 0$, 有

$$(D^\alpha u)_\varepsilon = D^\alpha (u)_\varepsilon \quad in \quad \Omega_\varepsilon.$$

证明. 注意当$x \in \Omega_\varepsilon$时，作为y的函数$J_\varepsilon(x-y)$属于$C_0^\infty(\Omega)$, 于是我们有

$$\begin{aligned} D^\alpha (u)_\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= \int_\Omega D_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha J_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{2|\alpha|} \int_\Omega J_\varepsilon(x-y) D_y^\alpha u(y)dy \\ &= (D^\alpha u)_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

命题 2.6 *(1)* 如果$v, u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 且弱导数$D^\alpha u$存在且等于$v$, 则存在$\{u_m\} \subset C^\infty(\Omega)$使得$u_m \to u \, in \, L^1_{loc}(\Omega)$且$D^\alpha u_m \to v \, in \, L^1_{loc}(\Omega)$。

(2) 如果$v, u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 并存在$\{u_m\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$使得$\{D^\alpha u_m\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$，$u_m \to u \, in \, L^1_{loc}(\Omega)$且$D^\alpha u_m \to v \, in \, L^1_{loc}(\Omega)$，则弱导数$D^\alpha u$存在且等于$v$。

(3) 如果$f \in C^1(R)$, $f' \in L^\infty(R)$, u的弱导数$\frac{\partial u}{\partial x_i}$存在, 则弱导数

$$\frac{\partial (f \circ u)}{\partial x_i} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

证明. (1)的证明可由命题2.3 (4)和由命题2.5容易得到。事实上，取$u_m = J_{\frac{1}{m}} * u$即可。

(2)可直接证明。因为对任意的$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 我们有

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \phi dx = \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_m \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx.$$

(3)的证明可由(1)和(2)得到。事实上，由(1)可选$\{u_m\} \subset C^\infty(\Omega)$使得$u_m \to u \,\mathrm{in}\, L^1_{loc}(\Omega)$且$D^\alpha u_m \to v \,\mathrm{in}\, L^1_{loc}(\Omega)$。而对于任意的有界闭集$K \subset\subset \Omega$，我们有

$$\int_K |f(u_m) - f(u)|dx \le \|f'\|_{L^\infty(R)} \int_K |u_m - u|dx \le C < \infty,$$

$$\int_K |f'(u_m)D^\alpha u_m - f'(u)D^\alpha u|dx \le 2\|f'\|_{L^\infty(R)} \int_K [|D^\alpha u_m - D^\alpha u| + |D^\alpha u|]dx \le C < \infty,$$

其中常数C只与$\|f'\|_{L^\infty}$, $\|u\|_{L^1(K)}, \|D^\alpha u\|_{L^1(K)}$有关. 于是由控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{m\to\infty} \int_K |f(u_m) - f(u)|dx = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \int_K |f'(u_m)D^\alpha u_m - f'(u)D^\alpha u|dx = 0.$$

利用(2)，我们就证明(3)。 □

定义2.3，命题2.4和2.6是求弱导数的基本工具。

例 2.1 求一阶弱导数$D^\alpha |x|^\gamma$, 其中$\gamma > 1 - n$为常数，$\alpha \in Z_n, |\alpha| = 1.$

解： 不妨设$\alpha = e_i$, $\forall \phi \in C_0^\infty(R^n)$, 取$\delta > 0$使得$Suup\ \phi \subset\subset B_\delta(0)$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_{R^n} |x|^\gamma D^{e_i}\phi dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B_\delta(0)\setminus B_\varepsilon(0)} |x|^\gamma D^{e_i}\phi dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B_\delta(0)\setminus B_\varepsilon(0)} [div(|x|^\gamma \phi) - \gamma |x|^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|}\phi]dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B_\delta(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \gamma |x|^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|}\phi dx \\
&= -\int_{B_\delta(0)} v(x)\phi dx,
\end{aligned}$$

其中第三，四个等式用到了$\gamma > 1 - n$，而

$$v(x) = \begin{cases} \gamma |x|^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|}, & x \ne 0 \\ \text{任意值}, & x = 0 \end{cases}$$

所以由定义2.3，$D^{e_i}|x|^\gamma = v(x)$.

例 2.2 设$a, b \in R, a \ne 0$, 则$H(x) = \begin{cases} a, & x > b \\ 0, & x \le b \end{cases}$没有弱导数。

解： 反之，记δ是它的弱导数, 由于它是δ是局部可积的, 则由定义，对任意$\varphi \in C_0^\infty(b-1,b) \subset C_0^\infty(R)$,

$$\int_{b-1}^{b} \delta\varphi dx = \int_R \delta\varphi dx = -\int_R H\varphi' dx = 0,$$

由定理2.3(2)推出$\delta(x) = 0$, $a.e. x \in (b-1,b)$.

类似地, $\delta = 0$, $a.e. x \in (b, b+1)$. 因此$\delta(x) = 0$, $a.e.\ x \in (b-1, b+1)$. 故

$$0 = \int_{b-1}^{b+1} \delta\varphi dx = -\int_{b-1}^{b+1} H\varphi' dx = -a\varphi(b), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(b-1, b+1),$$

矛盾!

注： 数学上称$C_0^\infty(R^n)$的线性连续泛函为广义函数，引进广义函数$\delta_b(x)$,

$$< \delta_b, \varphi >:= \delta_b(\varphi) = \varphi(b), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n),$$

则$H(x)$的广义导函数为$a\delta_b(x)$.

2. Sobolev空间的定义

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集, k为非负整数，$1 \le p \le \infty$, 记

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in Z_n, |\alpha| \le k \right\}.$$

由弱导数的线性运算性质及L^p是一线性空间这一事实知: 按照通常的线性运算$W^{k,p}(\Omega)$是一线性空间。在其中引进范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} [\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p]^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}], & p = \infty. \end{cases}$$

则$W^{k,p}(\Omega)$是**一线性赋范空间**。再记$W_0^{k,p}(\Omega)$ 是$C_0^\infty(\Omega)$ 在$W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包，即

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists \{u_m\} \subset C_0^\infty(\Omega) \ \lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \}.$$

定义 2.4 $W^{k,p}(\Omega)$和$W_0^{k,p}(\Omega)$都称为*Sobolev*空间。

最后记

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \quad H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega).$$

引入数对

$$< u, v >_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx, \quad \forall u, v \in H^k(\Omega), \tag{2.4}$$

则$H^k(\Omega)$和$H_0^k(\Omega)$都是**线性内积空间**，且$< u, u >_{H^k(\Omega)} = \|u\|^2_{H^k(\Omega)}$, 即**内积诱导的范数与原范数一致**。

3. Sobolev空间的一些简单性质

定理 2.4 *设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集, k为非负整数*，$1 \le p \le \infty$. *那么*

(1) $W^{k,p}(\Omega)$和$W_0^{k,p}(\Omega)$都是Banach空间;

(2) $H^k(\Omega)$和$H_0^k(\Omega)$按照内积(2.4)都是Hilbert空间.

证明. 由Hilbert空间的定义和第2小节的论述知，只要证明$W^{k,p}(\Omega)$ 的完备性。为此任取$W^{k,p}(\Omega)$中的一Cauchy序列$\{u_m\}$, 由$W^{k,p}(\Omega)$中范数的定义知: $\forall \alpha \in Z_n, |\alpha| \le k$, $\{D^\alpha u_m\}$是$L^p(\Omega)$中的Cauchy序列, 由于它是Banach空间（命题2.1），故存在$u_\alpha \in L^p(\Omega)$使得$\{D^\alpha u_m\}$在$L^p(\Omega)$中（按范数）收敛于u_α。记$u = u_{(0,0,\cdots,0)}$. 则由命题2.6 (2)知：$D^\alpha u = u_\alpha$. 所以，$\{u_m\}$在$W^{k,p}(\Omega)$中按范数收敛于u。 □

利用L^p空间的性质，弱导数的定义和性质以及Leibniz公式(2.3), 容易证明

命题 2.7 *设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集, k为非负整数*，$1 \le p \le \infty$，*$u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $\alpha \in Z_n, |\alpha| \le k$. 那么*

(1) 对任意开集$\Omega_1 \subset \Omega$, $\quad u \in W^{k,p}(\Omega_1)$;

(2) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, 且对满足$|\alpha| + |\beta| \le k$的$\beta \in Z_n$,均有

$$D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u;$$

(3) $\forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \quad \eta u \in W^{k,p}(\Omega)$.

作业5： 证明命题2.7 (2).

例 2.3 *试确定γ的值, 使得函数$u(x, y) = |ln(x^2+y^2)|^\gamma \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$, 其中$B_r = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le r\}$.*

解： 可以像例2.1一样由弱导数的定义直接求弱导数，然后验证之。但我们想利用命题2.6 (2)来解题。为此令$u_m(x, y) = |ln(\frac{1}{3m} + x^2 + y^2)|^\gamma$. 显然$u_m$在$B_{\frac{1}{2}}$中几乎处处收

敛于u. 又

$$\|u_m\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})} \leq \sqrt{|B_{\frac{1}{2}}|}\|u_m\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \leq \begin{cases} \|u\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})}, & \gamma > 0 \\ \|u_1\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})}, & \gamma \leq 0, \end{cases}$$

而$\int_{B_{\frac{1}{2}}} |u|^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} |2lnr|^{2\gamma} r dr < \infty$. 所以由控制收敛定理,对任意的$\gamma$,$u_m$在$^1(B_{\frac{1}{2}})$中(按范数)收敛于$u$, 并且$u \in L^2(B_{\frac{1}{2}})$.

因为

$$Du_m = \gamma |ln(\frac{1}{3m} + r^2)|^{\gamma-1} \frac{2r}{\frac{1}{3m} + r^2}(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

类似地，由控制收敛定理，对任意的γ, Du_m在$^1(B_{\frac{1}{2}})$中（按范数）收敛于

$$v = \gamma |ln(r^2)|^{\gamma-1} \frac{2}{r}(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}),$$

因此由命题2.6(2)得到$Du = v$.

于是，$u(x, y) \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$等价于$v \in L^2(B_{\frac{1}{2}})$. 而

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} |v|^2 dx = 2^{2\gamma} \pi \gamma^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|lnr|^{2(\gamma-1)}}{r} dr = 2^{2\gamma} \pi \gamma^2 \int_{ln2}^{\infty} s^{2(\gamma-1)} ds.$$

该积分收敛当且仅当$\gamma < \frac{1}{2}$. 所以，函数$u \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$当且仅当$\gamma < \frac{1}{2}$.

作业6： 在例2.3的记号下，试确定γ的值, 使得函数$u(x, y) = |ln(x^2 + y^2)|^\gamma \in H^1(B_1 \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}})$. （答案：$\gamma = 0$或$\gamma > \frac{1}{2}$）

§2.5 Sobolev 空间的稠密性

所谓Sobolev 空间的稠密性，就是用光滑函数去逼近Sobolev 空间中的任意函数。

1. 光滑函数的局部逼近

定理 2.5 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集, k为非负整数, $1 \le p < \infty$. 那么

(1) 若$u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, 则存在$\{u_m\} \subset C^\infty(\Omega_{frac1m})$使得$u_m \to u \;\; in \;\; W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, 即对任意$K \subset\subset \Omega$, $\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{u \in W^{k,p}(K)} = 0$.

(2) 若$u \in W^{k,p}(\Omega)$且$Supp\, u \subset\subset \Omega$, 则存在$\{u_m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ 使得$u_m \to u \;\; in \;\; W^{k,p}(\Omega)$.

证明：为证(1), 取$u_m = J_{\frac{1}{m}} * u$. $\forall \alpha \in Z_n, |\alpha \le k$, 有命题2.5知，$D^\alpha u_m = J_{\frac{1}{m}} * (D^\alpha u)$, 所以利用命题2.3 (4)我们就得到了(1)。

任取集合K使得$Supp\, u \subset\subset K \subset\subset \Omega$, 则由命题2.3 (2)知: 只要$m$充分大，$\{u_m\} \subset C_0^\infty(K) \subset C_0^\infty(\Omega)$, 于是由(1)即可得到(2)。 □

2. 单位分解定理

定理 2.6 设$E \subset \mathbb{R}^n$为任意集，G为E的一个开覆盖（即: G的元素为开集且$E \subset \bigcup_{\Omega \in G} \Omega$）, 那么存在一个函数族$F = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : 0 \le f \le 1\}$使得

*(i)*对每一个$f \in F$, 存在$\Omega \in G$使得$Sup\, f \subset \Omega$;

*(ii)*若K为紧集，则除最多有限个f外，F中的其它所有函数在K恒为零;

(iii)$\sum_{f \in F} f(x) = 1;, \quad \forall x \in E$.

这样的F称为E的从属于G的一个单位分解。

证明：不妨假设E 开集，否则用$\bigcup_{\Omega \in G} \Omega$代替$E$即可.

(1) 先证E是紧集的情况。由有限覆盖定理，存在$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_N \in G$, 使得$E \subset \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. 由于$E$是紧集，故可找到开集$E_i \subset\subset \Omega_i$ 使得$E \subset \bigcup_{i=1}^N E_i$. 将每一个$E_i$的特征函数光滑化，这样可得到函数$g_i \in C_0^\infty(\Omega_i) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$且$g_i(x) > 0, \quad \forall x \in E_i$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 令$g = \sum_{i=1}^N g_i$, 则$g \in C^\infty(R^n)$且在E的某个邻域内$g > 0$. 再取$h \in C^\infty(R^n)$使得$h = g \;\; in \;\; E$, $h > 0 \;\; in \;\; R^n$, 于是令

$$F = \{f_i : \quad f_i = \frac{g_i}{h}, \quad i = 1, 2, \cdots, N\}$$

即可。

(2) 再证E是开集的情况。令

$$E_{-1}=E_0=\emptyset,\quad E_i=\overline{B_i(0)}\bigcap\{x\in E:\ \ dist(x,\partial E)\geq\frac{1}{i}\},\quad i=1,2,\cdots,$$

用$int\ E$表示其内点集，则每一个E_i是紧集且$E_i\subset\subset E_{i+1}$满足

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\setminus int\ E_{i-1}).$$

令

$$G_i=\{\Omega\bigcap(int\ E_{i+1}\setminus\overline{E_{i-2}}):\ \ \Omega\in G\}.$$

因为E为开集，G是E的开覆盖，所以G_i为紧集$E_i\setminus int\ E_{i-1}$的开覆盖. 利用(1)的结论，可设$F_i$为$E_i\setminus int\ E_{i-1}$从属于$G_i$的单位分解，令

$$S(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{g\in F_i}g(x),\quad x\in E$$

于是容易验证

$$F=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{f:f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{S(x)},\ g\in F_i, & x\in E\\ 0, & x\in R^n\setminus E\end{cases}$$

就是E的从属于G的一个单位分解.

(3) 对于一般的E，可用开集$\bigcup_{\Omega\in G}\Omega$代替$E$，再用(2)的结论即可. □

注：在应用中, 常常G为$\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$，于是$F$为$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$，经过重新标注，可设$Sup\,f_i\subset\Omega_i,\ i=1,2,\cdots,$.

作业7： [Evans：2010] Problem 5.10: 2, 3, 4, 5.

3. 光滑函数的整体逼近

定理 2.7 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, $u\in W^{k,p}(\Omega)$, $1\le p<\infty$, 则存在$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}\subset C^{\infty}(\Omega)\bigcap W^{k,p}(\Omega)$, 使得$u_m\to u\ \ in\ \ W^{k,p}(\Omega)$. 即: 空间$C^{\infty}(\Omega)\bigcap W^{k,p}(\Omega)$ 在$W^{k,p}(\Omega)$中稠密。

证明: 只要证: $\forall\varepsilon>0$, $\exists v\in C^{\infty}(\Omega)$使得

$$||u-v||_{W^{k,p}(K)}\le\varepsilon,\quad \forall K\subset\subset\Omega, (K \text{ 与}\varepsilon\text{无关}). \tag{2.5}$$

(1) 令$\Omega_i=\{x\in\Omega:\ dist(x,\partial\Omega)>\frac{1}{i}\}\bigcap\{x\in R^n:\ |x|<i\}$, 则

$$\Omega_i\subset\Omega_{i+1},\quad \Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega_i=\Omega_3\bigcup\bigcup_{i=1}^{\infty}(\Omega_{i+3}\setminus\overline{\Omega}_{i+1}):=\bigcup_{i=0}^{\infty}E_i.$$

设$\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$是$\Omega$从属于$\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$的一个单位分解，即

$$0\le\eta_i\le1,\quad \eta_i\in C_0^{\infty}(E_i),\quad \sum_{i=0}^{\infty}\eta_i\equiv1\ \ in\ \ \Omega.$$

则$u(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\eta_i(x)u(x)$ for all $x\in\Omega$.

(2) 现在来证明(2.5). 注意$\eta_i u\in W^{k,p}(E_i)$ 且$Sup\,(\eta_i u)\subset\subset E_i$，由定理2.5 (2)知: $\exists v_i\in C_0^{\infty}(E_i)$ 使得

$$||\eta_i u-v_i||_{W^{k,p}(E_i)}\le\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

令$v(x)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i(x)$, 由于$E_i$的取法, 此和在$\Omega$的任意有界闭集上实际上均为有限项之和，故$v\in C^{\infty}(\Omega)$，且$\forall K\subset\subset\Omega$, 有

$$||u-v||_{W^{k,p}(K)}=||\sum_{i=0}^{\infty}(\eta_i u-v_i)||_{W^{k,p}(K)}\le\sum_{i=0}^{\infty}||\eta_i u-v_i||_{W^{k,p}(E_i)}<\varepsilon.$$

□

利用单位分解定理，我们可以证明下面常用的基本性质，其详细证明可见【陈省身，陈维桓著: 微分几何讲义，北大出版社】的P26引理2.

命题 2.8 设$\Omega_2\subset\subset\Omega_1\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$k$为非负整数，则$\exists\eta\in C_0^{\infty}(\Omega_1)$ 使得

$$\eta\equiv1\,in\ \ \Omega_2,\qquad |D^k\eta(x)|\le C(n,k)[dist(\Omega_2,\partial\Omega_1)]^{-k}\ \ \forall x\in\Omega_1.$$

注在命题2.8的条件下，容易证明: $\exists\eta\in C^{\infty}(\overline{\Omega_1})$ 使得

$$\eta\equiv a\,\text{in}\ \ \Omega_2,\ \ \eta\equiv b\,\text{on}\ \ \partial\Omega_1,\ \ |D^k\eta(x)|\le C(n,k)|b-a|^{-1}[dist(\Omega_2,\partial\Omega_1)]^{-k}\ \ \forall x\in\Omega_1,$$

其中a,b是两个不相等的实数。

命题 2.9 设k为非负整数，$1 \le p < \infty$, 那么$C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})\bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$在$W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$中稠密。

证明： 对于$u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$, 考虑它的光滑化

$$J_\varepsilon * u(x+2\varepsilon\mathbf{e}_n) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \varepsilon^{-n} J(\frac{x+2\varepsilon\mathbf{e}_n - y}{\varepsilon}) u(y) dy.$$

则可直接验证$J_\varepsilon * u(x+2\varepsilon\mathbf{e}_n)) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$。进一步，类似于命题2.3，易证

$$\|J_\varepsilon * u(x+2\varepsilon\mathbf{e}_n) - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0.$$

□

这个证明一个关键的地方是：对于区域$\mathbb{R}^n_+$边界附近的任一点x，线段$\{x+t\mathbf{e}_n : t \in [0,1]\}$都在该区域中. 为此我们引入

定义 2.5 称一个区域Ω满足线段性质，如果对任一点$x \in \partial\Omega$, 存在x的邻域U_x和一个非零向量y_x, 使得对每一$z \in \bar{\Omega}\bigcap U_x$, 开线段$\{z+ty_x :\ t \in (0,1)\} \subset \Omega$.

利用命题2.8，光滑化和单位分解技巧，可以证明

定理 2.8 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，它满足线段性质，$u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, 则存在$\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得$u_m \to u \ \ in \ \ W^{k,p}(\Omega)$. 即：空间$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在$\bar{\Omega}$上的限制所得的集合在$W^{k,p}(\Omega)$中稠密。

证明： 见【Adams, 2003: Theorem 3.22】

§2.6 Sobolev 空间的延拓定理

命题 2.10 设k为非负整数，$1 \le p \le \infty$, 那么存在一个延拓$E_0 : W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ 和常数$C(k,n)$ 使得$E_0 u(x) = u(x), a.e.\, x \in \Omega$, 且

$$\|E_0 u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \le C(k,n,p)\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

证明： 可设$p \in [1,\infty)$，因为$p = \infty$时可作类似处理。由命题2.9，只要对$u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})\bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$证明即可。为此，定义扩充算子$E_0$，

$$E_0 u(x) = \begin{cases} u(x), & x_n > 0; \\ \sum_{j=1}^k c_i u(x', -x_n/j), & x_n < 0. \end{cases}$$

显然导数间断的地方只可能出现在超平面$\{x_n=0\}$上。而由于

$$D^{\alpha}_{x_n}E_0u(x',x_n)=\begin{cases}D^{\alpha}_{x_n}u(x',x_n), & x_n>0,\\ \sum\limits_{j=1}^{k}c_j\left(\frac{-1}{j}\right)^{|\alpha|}D^{\alpha}_{x_n}u(x',-x_n/j), & x_n<0,\end{cases}$$

为了使得$E_0u(x)$及其小于k的所有偏导数在超平面$\{x_n=0\}$上连续，我们选取常数c_i满足

$$\sum_{j=1}^{k}c_j\left(\frac{-1}{j}\right)^m=1,\quad m=0,1,\cdots,k-1.$$

因为$u\in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}^n_+})\bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$，可直接验证于是$E_0u\in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n)\cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, 而且

$$\|E_0u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}\le C(k,n,p)\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

□

为了研究一般区域的延拓定理，我们需要利用边界拉直技巧。

定义 2.6 *(1) 如果对每个点$x_0\in\partial\Omega$ 存在$r>0$ 和一个$C^{k,\alpha}$ 函数$\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ 使得有可能需要重新改变坐标轴的标号和定向后，有*

$$\Omega\cap B_r(x_0)=\{x\in B_r(x_0)|x_n>\gamma(x_1,\cdots,x_{n-1})\},$$

则称区域$\Omega\in C^{k,\alpha}$.

(2) 局部拉直边界: 在$C^{k,\alpha}$区域的每一个边界点x_0处，可定义$C^{k,\alpha}$映射$\Phi:\Omega\cap B_r(x_0)\to\mathbb{R}^n_+$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}y_i&=&x_i=:\Phi^i(x),1\le i\le n-1,\\ y_n&=&x_n-\gamma(x_1,\cdots,x_{n-1})=:\Phi^n(x).\end{array}\right.\qquad y=\Phi(x),$$

则$\Phi:\partial\Omega\cap B_r(x_0)\to\{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n:y_n=0\}$. 易知该映射有逆映射$x=\Psi(y)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_i&=&y_i=:\Psi^i(y),1\le i\le n-1,\\ x_n&=&y_n+\gamma(y_1,\cdots,y_{n-1})=:\Psi^n(y).\end{array}\right.$$

显然是Ψ也是$C^{k,\alpha}$映射，它们的定义域都是$\mathbb{R}^n$, 而且$detD\Phi=detD\Psi=1$.

作业8： 证明C^1-区域一定满足线段性质。

定理 2.9 假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是$C^{k-1,1}$-区域且其边界是有界集$(k \geq 1)$, $1 \leq p \leq \infty$. 则对任意开集$\Omega' \supset\supset \Omega$ 存在一个延拓$E: W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega')$ 和常数$C = C(n,k,p,\Omega,\Omega')$ 使得$Eu(x) = u(x), a.e. x \in \Omega$, 而且

$$\|Eu\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

注1：由Stein的延拓定理，对有界局部Lipshitz区域（不需要边界点有界）上面的延拓定理仍然成立，[Stein E M: Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ Press, 1970].

证明. 因为$\Omega \in C^{k-1,1}$且其边界是有界集, 故由定义2.6，存在边界$\partial\Omega$的有限覆盖：$\Omega_j \subset \Omega', j = 1, 2, \cdots, N$ 和映射$\Phi_j : \Omega_j \to B(0)$ 使得

(i) $\Phi_j(\Omega_j \cap \Omega) = B^+ = B \cap \mathbb{R}^n_+$;

(ii) $\Phi_j(\Omega_j \cap \partial\Omega) = B \cap \partial\mathbb{R}^n_+$;

(iii) Φ_j, $\Phi_j^{-1} \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

选择$\Omega_0 \subset\subset \Omega$, 使得$\{\Omega_j\}_{j=0}^N$是$\Omega$ 的有限覆盖，设$\{\eta_j\}_{j=0}^N$ 是Ω的从属于这个覆盖的单位分解, 对于$j \geq 1$,因为$Sup\, \eta_j \subset \Omega_j$, 则$(\eta_j u) \circ \Phi_j^{-1} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$ 且$E_0\left[(\eta_j u) \circ \Phi_j^{-1}\right] \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, 此处$E_0$是命题2.10中的延拓算子。从而$E_0\left[(\eta_j u) \circ \Phi_j^{-1}\right] \circ \Phi_j \in W_0^{k,p}(\Omega_j) \bigcap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. 于是定义扩充映射$E: W^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\Omega')$

$$Eu = u\eta_0 + \sum_{j=1}^N E_0\left[(\eta_j u) \circ \Phi_j^{-1}\right] \circ \Phi_j$$

满足$Eu \in W_0^{k,p}(\Omega'), Eu(x) = u(x), \forall x \in \Omega$,

$$\|Eu\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C(k,\Omega,\Omega')\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

$\square$

注2：从证明中可以看出：$Eu \in C_0^k(\Omega')$ if $u \in C^k(\bar{\Omega})$.

§2.7 Sobolev 空间函数的迹

如果$u \in C(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega}$可能没有意义，但u 如果在有界区域Ω中一致连续，则可定义$u|_{\partial\Omega}$。注意$W^{1,1}(-1,1)$中的函数是一致连续的，所以可以在边界点赋予这类函数的值，这就是迹的概念。

定理 2.10 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega\in C^1$, $1\le p<\infty$, 则存在一个线性算子$\mathrm{T}:\ W^{1,p}(\Omega)\to L^p(\partial\Omega)$, 使得

(i) $\|\mathrm{T}u\|_{L^p(\partial\Omega)}\le C(n,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\quad\forall u\in W^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $\mathrm{T}u=u|_{\partial\Omega}\quad\forall u\in C(\bar\Omega)\bigcap W^{1,p}(\Omega)$.

证明. 我们先证

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)}\le C(p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},\quad\forall u\in C^1(\bar\Omega). \tag{2.6}$$

因为Ω为有界开集，则存在$\partial\Omega$的相对开集$\Gamma_i, i=1,2,\cdots,m$, 使得$\partial\Omega=\bigcup_{i=1}^m\Gamma_i$，于是(2.6)可化为证明

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)}\le C(n,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},\quad\forall u\in C^1(\bar\Omega),\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{2.7}$$

取定$\Gamma=\Gamma_i$，如果$\Gamma\subset\{x_n=0\}$是平坦的，则选$x_0\in\Gamma, r>0$使得$\Gamma\subset\partial\Omega\bigcap B_1, B_1:=B_r(x_0)$. 令$B_2:=B_{2r}(x_0)$. 不妨设$B_2^+\subset\Omega$ (否则事先可将$\partial\Omega$ 分成更小相对开集之并). 由命题2.8，取截断函数$\xi\in C_0^\infty(B_2)$, $0\le\xi\le1$, $\xi\equiv1$ in B_1. 则

$$\begin{aligned}\int_\Gamma|u|^p dx' &\le \int_{\{x_n=0\}}\xi|u|^p dx'=-\int_{R_+^n}(\xi|u|^p)_{x_n}dx=-\int_{B_2^+}(\xi|u|^p)_{x_n}dx \\ &= -\int_{B_2^+}(\xi_{x_n}|u|^p+\xi p|u|^{p-1}u_{x_n}Sign\ u)dx \\ &\le C(n,r)\int_{B_2^+}|u|^p dx+p\int_{B_2^+}(\frac{|u|^p}{p'}+\frac{|u_{x_n}|^p}{p})dx\qquad(p'=\frac{p}{p-1}) \\ &\le C(n,p,\Omega)\int_{B_2^+}(|u|^p+|Du|^p)dx.\end{aligned} \tag{2.8}$$

如果Γ不是平坦的，利用边界拉直，则存在可逆的C^1-映射$\Phi:\ R^n\to R^n$, 使得$\Phi(\Gamma)\subset\{x_n=0\}\bigcap B_r(y_0)$ 且$\Phi^{-1}(B_{2r}(y_0)^+)\subset\Omega$. 于是利用积分变换和(2.8), 有

$$\begin{aligned}\int_\Gamma|u(x)|^p dS_x &\le C(\Phi)\int_{\Phi(\Gamma)}|u(\Phi^{-1}(y))|^p dS_y \\ &\le C(n,p,\Omega)\int_{B_2^+}(|u(\Phi^{-1}(y))|^p+|D_y u(\Phi^{-1}(y))|^p)dy \\ &\le C(n,p,\Omega)\int_\Omega(|u(x)|^p+|Du(x)|^p)dx.\end{aligned}$$

这样，我们就证明了(2.7)。

现在来定义算子T并证明(i)。设$u \in W^{1,p}(\Omega)$, 由定理2.8，存在$\{u_m\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$使得$u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. 由(2.6)知,

$$\|u_m - u_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(n,p,\Omega)\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall m,\ l = 1, 2, \cdots,$$

即$\{u_m\}$是$L^p(\partial\Omega)$中的Cauchy序列。定义算子

$$\mathrm{T}u = \lim_{m\to\infty} u_m|_{\partial\Omega} \ \text{ in } \ L^p(\partial\Omega),$$

则易知T与$\{u_m\}$的选择无关，且它是$W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$的线性算子，再由(2.6)知，它显然满足(i)。

最后我们来证明(ii). 如果$u \in C(\bar{\Omega}) \bigcap W^{1,p}(\Omega)$,取有界开$\Omega_1 \supset\supset \Omega$, 则由延拓定理之注2，$Eu \in C_0(\Omega_1) \bigcap W^{1,p}(\Omega_1)$. 令$u_m = J_{\frac{1}{m}} * (Eu)$, 则由命题2.3和2.5知：$u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$且在$\bar{\Omega}$上一致收敛于$Eu = u$, 同时$\{u_m\}$也在$W^{1,p}(\Omega)$中依范数收敛于$Eu = u$。从而，由上面算子T的定义，$\mathrm{T}u = \lim_{m\to\infty} u_m = u$, 即满足(ii). □

由定义知：$\mathrm{T}u = 0$ if $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 进一步我们有(证明见[Evans，Theorem 2, P275])

定理 2.11 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega \in C^1$, $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. 则$\mathrm{T}u = 0$的充要条件是$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

作业9： 空间$H_0^2(\Omega)$与$H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$是否相同，为什么？

§2.8 Sobolev 不等式

如$u\in C_0^1(\Omega)$, 则

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_i}u_{x_i}(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)dy_i.$$

于是

$$|u(x)|^n=\prod_{i=1}^n\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i. \tag{2.9}$$

进一步我们有下面Gagliardo-Nirenberg-Sobolev的不等式.

定理 2.12 *设$1\le p<n$, 则存在正常数$C=C(n,p)$, 使得*

$$\|u\|_{L^{p*}(R^n)}\le C\|Du\|_{L^p(R^n)},\quad \forall u\in C_0^1(R^n), \tag{2.10}$$

其中$p*:=\frac{np}{n-p}$称为$W^{1,p}$的Sobolev(共轭)指数.

证明. (1) 先设$p=1$, 此时$p*=\frac{n}{n-1}$, 由(2.9)得

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}=\prod_{i=1}^n(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i)^{\frac{1}{n-1}}.$$

对此式关于x_1积分，并利用Hölder不等式，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 &= (\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\prod_{i=2}^n(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i)^{\frac{1}{n-1}}\\ &\le (\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^n[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dx_1dy_i]^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

再将此式关于x_2积分，并利用Hölder不等式，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 &\le (\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1dx_2)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}dx_2(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1)^{\frac{1}{n-1}}\\ &\cdot \prod_{i=3}^n[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dx_1dy_i)^{\frac{1}{n-1}}\\ &\le (\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1dx_2)^{\frac{2}{n-1}}\\ &\cdot \prod_{i=3}^n[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dx_1dx_2dy_i)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

如果$n=2$，最后一项不会出现。如果$n\geq 3$，则依次下去，直到关于x_n积分，最后得到

$$\int_{R^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx\leq[\int_{R^n}|Du|dx]^{\frac{n}{n-1}},\quad \forall u\in C_0^1(R^n). \tag{2.11}$$

这就是(2.10)在$p=1$的情况.

(2) 当$p>1$时，对函数$|u|^\gamma$ ($\gamma>1$ 待定)使用(2.11)得

$$\begin{aligned}(\int_{R^n}|u|^{\gamma\frac{n}{n-1}}dx)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{R^n}|D|u|^\gamma|dx=\gamma\int_{R^n}|u|^{\gamma-1}|Du|dx \\ &\leq \gamma[\int_{R^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}dx]^{\frac{p-1}{p}}[\int_{R^n}|Du|^pdx]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

选$\gamma>1$使得

$$\gamma\frac{n}{n-1}=(\gamma-1)\frac{p}{p-1}=p*,$$

即$\gamma=\frac{p(n-1)}{n-p}$. 又$\frac{n-1}{n}-\frac{p-1}{p}=\frac{1}{p*}$, 所以，化简(2.12)即得（2.10） □

定理 2.13 *(Sobolev-Poincaré不等式)* 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集，$1\leq p<n$, 则存在正常数$C=C(n,p,\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{L^{p*}(\Omega)}\leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)},\quad \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.13}$$

证明. 任取$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 则存在

$$u_m\in C_0^\infty(\Omega),\quad \|u_m-u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\to 0\,\mathrm{as}\,m\to\infty.$$

令

$$\bar{u}_m=\begin{cases}u_m, & x\in\Omega\\ 0, & x\in R^n\setminus\Omega.\end{cases}$$

则$\bar{u}_m\in C_0^\infty(R^n)$, 由定理2.12知

$$\|u_m||_{L^{p*}(\Omega)}=\|\bar{u}_m||_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}\leq C(n,p)\|D\bar{u}_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)}=\|Du_m|_{L^p(\Omega)},$$

令$m\to\infty$得之。 □

定理 2.14 *(Sobolev不等式)* 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega\in C^{0,1}$, $1\leq p<n$, 则对任意$q\in[1,p*]$, 都存在正常数$C=C(n,p,q,\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},\quad \forall u\in W^{1,p}(\Omega). \tag{2.14}$$

证明. 由于Ω为有界集, 运用Hölder不等式，只需对$q=p*$证明(2.13)即可.

任取$u\in W^{1,p}(\Omega)$，由延拓定理，存在$\bar u=u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$使得$Sup\ u$是有界集，而且

$$u=\bar u\,\mathrm{in}\,\Omega,\quad \|\bar u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le C(p,n,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{2.15}$$

令$u_m=J_{\frac1m}*\bar u$, 则

$$u_m\in C_0^\infty(R^n),\quad \|u_m-\bar u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\to 0\,\mathrm{as}\,m\to\infty.$$

由定理2.12知$\{u_m\}$是$L^{p*}(R^n)$中的Cauchy序列，于是

$$\|u_m-\bar u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}\to 0\,\mathrm{as}\,m\to\infty.$$

再由定理2.12知

$$\|u_m|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}\le C(n,p)\|Du_m|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)},$$

令$m\to\infty$得

$$\|\bar u|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}\le C(n,p)\|D\bar u|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)},$$

结合(2.15)我们就得到(2.14)。 □

注： 从定理的证明可以看出, 将q 换成$p*$时，只要区域满足定理延拓定理的条件，定理2.13仍然成立。

§2.9 Morrey 不等式

当$p>n$时,对应Gagliardo-Nirenberg-Sobolev的不等式,我们有下面的Morrey不等式.

定理 2.15 设$n<p\le\infty$,则存在正常数$C=C(n,p)$, 使得对任意$u\in C^1(\Omega)$和任意的球$B(x,r)$,

$$|u(y)-u(z)|\le c(n,p)|y-z|^{m_p}\|Du\|_{L^p(\Omega)},\quad \forall y,z\in B(x,r).$$

其中$m_p:=\begin{cases}1-\frac{n}{p}, & p<\infty\\ (0,1)\text{中的任意数}, & p=\infty\end{cases}$称为$W^{1,p}$的*Morrey*指数.

证明. 以$n < p < \infty$为例。$u \in C^1(\bar{\Omega})$, 则对$y, z \in B(x,r)$, 将函数u在处w作展开, 我们有

$$\begin{aligned}
|u(y) - u(z)| &= \fint_{B(x,r)} |u(y) - u(z)| dw \\
&\leq \fint_{B(x,r)} (|u(y) - u(w)| + |u(w) - u(z)|) dw \\
&\leq c(n) \int_{B(x,r)} |Du(w)|(|y-w|^{1-n} + |z-w|^{1-n}) dw \\
&\leq c(n) \left(\int_{B(x,r)} \left(|y-w|^{1-n} + |z-w|^{1-n}\right)^{\frac{p}{p-1}} dw \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_{B(x,r)} |Du(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c(n) r^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

利用定理2.15，类似于定理2.13的证明，我们有

定理 2.16 *(Morrey不等式)* 设$n < p \leq \infty$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega \in C^{0,1}$, 则存在正常数$C = C(n, p, \Omega)$, 使得对任意$u \in W^{1,p}(\Omega)$, 都存在$\bar{u} \in C^{0,m_p}(\bar{\Omega})$，使得$u = \bar{u}\, a.e\, in \Omega$且

$$\|\bar{u}\|_{C^{0,m_p}(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

再利用定理2.15，类似于定理2,13的证明，我们有

定理 2.17 设$n < p \leq \infty$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集，则存在正常数$C = C(n, p, \Omega)$, 使得对任意$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 都存在$\bar{u} \in C^{0,m_p}(\bar{\Omega})$，使得$u = \bar{u}\, a.e\, in \Omega$且

$$[\bar{u}]_{C^{0,m_p}(\bar{\Omega})} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

作业10： 证明定理2.17

作业11： Evans's Book: Problem 5.10: 11,14,,16,18.

§2.10 Sobolev嵌入定理

1. 嵌入

定义 2.7 设X,Y均为线性赋范空间，如果$X\subset Y$且恒等算子$Id: X\mapsto Y$ 是线性有界的，则称X嵌入Y中，记为$X\hookrightarrow Y$.

例如：(1) 当$m\le k$, $\beta\le\alpha$ 时, $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)\hookrightarrow C^{m,\beta}(\bar\Omega)$;

(2) 当$p\le q$且Ω为有界开集时, $L^q(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$;

(3) 当$p<n$, $q\in[1,p*]$, Ω为有界开集且$\partial\Omega\in C^{0,1}$,时, $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(4) 当$p\in(n,\infty]$，Ω为有界开集且$\partial\Omega\in C^{0,1}$,时, $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{m_p}(\bar\Omega)$.

反复利用定理2.14和2.16，类似（3）和（4），我们容易得到

定理 2.18 *(Sobolev嵌入定理)* 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega\in C^{0,1}$, $1\le p$, $k\ge 1$为整数。

(i) 如果$kp<n, q\in[1,p_k^*]$, 则$W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 其中$p_k^*=\frac{np}{n-kp}$;

(ii) 如果$kp=n$, 则*(i)*中的q可取任意正数;

(iii) 如果$kp>n$, 则$W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,m_{k,p}}(\bar\Omega)$, 其中

$$m_{k,p}:=\begin{cases}[\frac{n}{p}]+1-\frac{n}{p}, & \frac{n}{p}\text{不是整数}\\ (0,1)\text{中的任意数}, & \frac{n}{p}\text{是整数}\end{cases}.$$

注：Ω的条件可以减弱，而(ii)的结论可以加强，详见[Admas: 2003] Ch.4.

2. 紧嵌入

定义 2.8 设X,Y均为线性赋范空间，且$X\hookrightarrow Y$. 如果恒等算子$Id: X\mapsto Y$ 是紧线性的,（即将X中的有界集映为Y中的准（列）紧集），则称X紧嵌入Y中，记为$X\hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

定理 2.19 设Ω是有界区域, 则空间$W_0^{1,p}(\Omega)$嵌入到$L^q(\Omega), q<p^*, p<n$是紧的; 对$p>n$, 空间$W_0^{1,p}(\Omega)$嵌入到$C^0(\overline{\Omega})$是紧的.

证明. 由Morrey的嵌入定理，第二种情形成立. 我们证明第一种情形. 设$A\subset C_0^1(\Omega), \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le 1,\forall u\in A$, 固定$\varepsilon>0$,

$$|J_\varepsilon * u(x)|\le\int_{|z|\le 1}J(z)|u(x-\varepsilon z)|dz\le\varepsilon^{-n}\sup J\cdot\|u\|_{L^1},\forall u\in A,$$

$$|D(J*u(x))| \le \varepsilon^{-1}\int_{|z|\le 1}|DJ(z)u(x-\varepsilon z)|dz \le \varepsilon^{-n-1}\sup|DJ|\|u\|_{L^1},\ \forall u\in A.$$

于是$\{J_\varepsilon * u, u\in A\}$在$C^0(\overline{\Omega})$上有界, 等度连续, 从而在$C^0(\overline{\Omega}), L^1(\Omega)$中准紧. 现在

$$\begin{aligned}|u(x)-J_\varepsilon * u(x)| &\le \int_{|z|\le 1} J(z)|u(x)-u(x-\varepsilon z)|dz\\ &\le \int_{|z|\le 1}\int_0^{\varepsilon|z|}|D_r u(x-r\omega)|drdz,\ \omega=\frac{z}{|z|};\end{aligned}$$

因此

$$\int_\Omega |u(x)-J_\varepsilon * u(x)|dx \le \varepsilon\frac{\omega_n}{n}\int_\Omega |Du|dx \le \frac{\omega_n}{n}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\varepsilon.$$

我们看到在$q=1$时成立. 而用不等式

$$\|u\|_{L^q}\le \|u\|_{L^1}^\lambda \|u\|_{L^{p^*}}^{1-\lambda}\le C\|u\|_{L^1}^\lambda\|\nabla u\|_{L^p}^{1-\lambda}$$

我们能证明在L^q的准紧性质. □

例 2.4 设

$$u_k(x)=\begin{cases}k^{\frac{n-p}{p}}(1-k|x|), & |x|<\frac{1}{k};\\ 0, & 1\ge |x|\ge \frac{1}{k}.\end{cases}$$

我们看到:

$$\int_B |\nabla u_k|^p dx = \omega_n k^n\int_0^{1/k} r^{n-1}dr=\frac{\omega_n}{n},$$

$$\int |u_k|^{p^*}dx=\omega_n k^n\int_0^{1/k}(1-kr)^{p^*}r^{n-1}dr=\omega_n\int_0^1 t^{p^*}(1-t)^{n-1}dt,$$

而

$$u_k(x)\to 0,\ a.e.\, x\in B,$$

我们看到u_k不能在$L^{p^*}(B)$中强收敛. □

定理 2.20 *(Sobolev紧嵌入定理)* 设$\Omega, p, k, p_k^*, m_{k,p}$ 如定理*2.18*所示, 那么

(i) 如果$kp<n$, 则$\forall q\in[1,p_k^*)$, $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(ii) 如果$kp=n$, 则$\forall q\in[1,\infty)$, $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(iii) 如果$kp>n$, 则$\forall\gamma\in[0,m_{k,p})$, $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{\Omega})$.

证明. 详见[Admas: 2003] Ch.4. □

3. Poincaré不等式

定理 2.21 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界连通开区域，$\partial\Omega \in C^{0,1}$, $p \geq 1$, 则有

$$||u - u_\Omega||_{L^q(\Omega)} \leq C(p,n,q,\Omega)||Du||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

其中$u_\Omega := \frac{1}{\Omega}\int_\Omega u(x)dx$称为$u$在$\Omega$上的平均值，而$q \in \begin{cases} [1, \frac{np}{n-p}) & if \ \ p < n \\ [1,\infty), & if \ \ p = n \\ [1,\infty], & if \ \ p > n \end{cases}$.

证明. （Blow up 方法）不妨设$p < n$，其它情况类似，详见[E. H. Lieb , M. Loss: Analysis, AMS, 2001]. 此时$q \in [1, \frac{np}{n-p})$. 利用Hölder不等式，只要对$q \in [p, \frac{np}{n-p})$证明即可. 反设结论不正确，则存在$\{u_m\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ 使得

$$||u_m - (u_m)_\Omega||_{L^q(\Omega)} > m||Du_m||_{L^p(\Omega)}.$$

令$v_m = \frac{u_m-(u_m)_\Omega}{\|u_m-(u_m)_\Omega||_{L^q(\Omega)}}$, 则

$$\|v_m||_{L^q(\Omega)} = 1, \quad ||Dv_m||_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \cdots$$

因为Ω有界且$p \leq q$, 所以v_m为$W^{1,p}(\Omega)$中的有界序列. 由定理2.20，存在子列（仍记为本身）和$v \in L^q(\Omega)$ 使得$v_m \to v$ in $L^q(\Omega)$ $(m \to \infty)$. 故有

$$v_\Omega = \lim_{m\to\infty}(v_m)_\Omega = 0, \tag{2.16}$$

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} = \lim_{m\to\infty}\|v_m\|_{L^q(\Omega)} = 1. \tag{2.17}$$

另一方面，$Dv_m \to 0$ in $L^p(\Omega)$, 所以由命题2.6(2)知Dv存在，且$Dv = 0$ in Ω, 即$v \in W^{1,p}(\Omega)$. 又Ω连通，不难证明: $v = constant$ a.e. in Ω ([Evans, Problem 11 in Section 5.10])。再由(2.16), $v = 0$ a.e. in Ω 这与(2.17)矛盾。 □

注: 由[Gilbarg-Trudinger]的(7.45)知：如果Ω是有界凸, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 对于Ω的任何可测集E，均有

$$||u - u_E||_{L^p(\Omega)} \leq (\frac{\omega_n}{|E|})^{1-\frac{1}{n}}d^n||Du||_{L^p(\Omega)}, \tag{2.18}$$

其中$d = diam(\Omega), \omega_n = |B(0,1)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$. 特别，当$S = \Omega = B(x,r)$时, 有

$$||u - u_{B(x,r)}||_{L^p(B(x,r))} \leq 2^n r||Du||_{L^p(B(x,r))}. \tag{2.19}$$

§2.11 差商与弱导数

函数$u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$关于第i变量步长为h的差商定义为$D_i^h u(x)=\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$. 记$D^h u=(D_1^h u,\cdots,D_n^h u)$.

先设$u\in C^1(\Omega)$, 取$\Omega_1\subset\subset\Omega$, 当$|h|<dist(\Omega_1,\partial\Omega)$时，$\forall x\in\Omega_1$, 有

$$
\begin{aligned}
|D_i^h u(x)| &= |\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{du(x+te_i)}{dt}dt| \\
&\le \int_0^1 |D_{x_i}u(x+te_i)|dt.
\end{aligned}
$$

所以利用Hölder不等式，有

$$\int_{\Omega_1}|D_i^h u(x)|^p dx \le \int_\Omega |D_{x_i}u(x)|^p dx. \tag{2.20}$$

定理 2.22 *(i)* 设$u\in W^{1,p}(\Omega), p\in[1,\infty), \Omega_1\subset\subset\Omega$, 则

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)}\le\|D^{e_i}u\|_{L^p(\Omega)},\quad \forall h, 0<|h|<dist(\Omega_1,\partial\Omega).$$

(ii) 设$p\in(1,\infty), \Omega_1\subset\subset\Omega, u\in L^p(\Omega)$且存在常数$C_i,\delta>0$使得

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)}\le C_i,\quad \forall h, 0<|h|<\delta,$$

则弱导数$D^{e_i}u$存在属于$L^p(\Omega_1)$, 且$\|D^{e_i}u\|_{L^p(\Omega_1)}\le C_i$.

证明. 利用(2.20)和定理2.7，我们立即得到(i). 下面证明(ii).

$\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega_1)$, 则

$$\int_{\Omega_1}u(x)\phi(x)dx=\lim_{h\to0}\int_{\Omega_1}u(x)D_i^h\phi(x)dx.$$

而$\forall h, 0<|h|<dist(Supp\,\phi,\partial\Omega_1)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}u(x)D_i^h\phi(x)dx &= -\frac{1}{h}\int_{\Omega_1}u(x)\phi(x)dx+\frac{1}{h}\int_{\Omega_1}u(x)\phi(x+he_i)dx \\
&= -\frac{1}{h}\int_{\Omega_1}u(x)\phi(x)dx+\frac{1}{h}\int_{\Omega_1+he_i}u(x-he_i)\phi(x)dx \\
&= -\int_{\Omega_1}D_i^{-h}u(x)\phi(x)dx,\quad \forall h, 0<|h|<dist(Supp\,\phi,\partial\Omega_1). \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

因为(ii)的条件说集合$\{D_i^{-h}u, 0<|h|<\delta\}$ 是$L^p(\Omega_1)$的有界集，而当$p>1$时它自是反的空间，其有界集为列紧集。即：存在子列$h_k\to 0$使得$D_i^{-h_k}u\to v_i$ in $L^p(\Omega_1)$, 且$\|v_i\|_{L^p(\Omega_1)}\le C_i$. 于是由(2.21)得

$$\int_{\Omega_1} u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_{\Omega_1} v_i(x)\phi(x)dx, \quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega_1).$$

即$D^{e_i}u=v_i$且$\|D^{e_i}u\|_{L^p(\Omega_1)}\le C_i$. □

注: 当$p=1$时, (ii)不一定正确，可见[Evans, Problem 12 in Section 5.10].

为了以后方便，我们把(2.21)写成一个推论。

推论 2.1 如果$u\in L^1_{loc}(\Omega), \Omega_1\subset\subset\Omega$, 则$\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega_1)$,有

$$\int_{\Omega_1} u(x)D_i^h\phi(x)dx = -\int_{\Omega_1} D_i^{-h}u(x)\phi(x)dx, \quad \forall h, 0<|h|<dist(Supp\,\phi, \partial\Omega_1).$$

§2.12 空间$H^{-1}(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$上的全体有界线性泛函记为$H^{-1}(\Omega)$. 对于$f\in H^{-1}(\Omega)$, 定义

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = sup\{<f,u>:=f(u): \quad u\in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le 1\}.$$

则$\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$为线性空间$H^{-1}(\Omega)$的范数，且$H^{-1}(\Omega)$是一个Bananch空间。

例 2.5 如果$f_0, f^1, \cdots, f^n\in L^2(\Omega)$, 定义

$$f(u) = \int_\Omega (f_0 u + \sum_{i=1}^n f^i u_{x_i})dx, \quad \forall u H_0^1(\Omega), \tag{2.22}$$

则$f\in H^{-1}(\Omega)$.

定理 2.23 若$f\in H^{-1}(\Omega)$，则存在$f_0, f^1, \cdots, f^n\in L^2(\Omega)$, 使得*(2.22)*成立。而且

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = inf\{[\int_\Omega (f_0^2 + \sum_{i=1}^n (f^i)^2)dx]^{\frac{1}{2}}: \quad f_0, f^1, \cdots, f^n\in L^2(\Omega)\text{满足}(2.22)\}. \tag{2.23}$$

证明. 因为$H_0^1(\Omega)$是Hilbert空间，由其表示定理，存在唯一的$v \in H_0^1(\Omega)$使得

$$f(u) =< v, u >_{H_0^1(\Omega)}= \int_\Omega (vu + \sum_{i=1}^n v_{x_i} u_{x_i}) dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

于是取$f_0 = v, f^i = v_{x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$, 即得(2.22)。等式(2.23)的证明可见[Evans, P.302]. □

注1: 采用弱导数的记号，上述定理的结论可记为$f = f_0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}$.
注2: 显然$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$; 以后规定: 当$f \in L^2(\Omega)$时，

$$f(u) :=< f, u >= \int_\Omega f u dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$