问题

$$(3.2)\quad \begin{cases} Łu = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

其中

$$Łu \equiv -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

$(\xi^2 u)_{x_i} = 2\xi\xi_{x_i} u + \xi^2 u_{x_i}$

弱解的定义

$$
\begin{aligned}
(3.4) \qquad B(u,v) = \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} \\
+ d^i(x) u) v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + c(x) uv] dx.
\end{aligned}
$$

设$f \in H^{-1}(\Omega)$. 如果$u \in H_0^1(\Omega)$满足

$$
B(u,v) =< f, v >, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),
$$

则称u为问题(3.2)的一个弱解.

条件:

$$(3.1)\quad a^{ij}(x)=a^{ji}(x),\forall i,j=1,2,\cdots,n;\ \sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\lambda|\xi|^2.$$

$$(3.3)\quad \begin{cases} \text{若}n\geq 3,\text{存在}\Lambda=C(n)\text{使得} \\ \sum_{i,j=1}^{n}||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}(||d^i||_{L^n(\Omega)}+||b^i||_{L^n(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{n/2}(\Omega)}\leq\Lambda; \\ \text{若}n=2,\text{存在}p>2\text{和}\Lambda=C(p)\text{使得} \\ \sum_{i,j=1}^{2}||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}(||d^i||_{L^p(\Omega)}+||b^i||_{L^p(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{p/2}(\Omega)}\leq\Lambda. \end{cases}$$

Theorem

3.7 设Ω为有界开， $\L$的系数满足*(3.1)*,*(3.3)*和*(3.7)*, 则
(i) 方程方程$\L u = 0$在空间$H_0^1(\Omega)$中只有零解(即：问题(3.2)对应的齐次问题只有零解);
(ii) 如果 $f \in H^{-1}(\Omega)$, 则问题*(3.2)*存在唯一的弱解.

Q: 这样一个弱解在什么条件下是经典解？ 是光滑解？

§3.3 弱解的局部正则性

把方程$Lu = f$写成

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} = f(x) + \sum_{i=1}^{n}(d^i(x)u)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} - c(x)u. \tag{3.9}$$

可能

形式上看，如果a^{ij}的弱导数存在且有界，而且上式右端属于L^2时，弱解u属于H^2。然后用数学归纳法抬高它的弱解导数阶数，直到得到解的无穷光滑性。本节和下一节将证明这一观察。

1. H^2-局部正则性

注意到$u \in H^1 \hookrightarrow L^{2^*}$，所以我们的条件应该为: 存在$p > 2$使得 $\forall i,j = 1, 2, \cdots, n$,

$$\begin{cases} a^{ij} \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega), \quad d^i, b^i \in L^\infty_{loc}(\Omega) \\ d^i_{x_i}, c \in \begin{cases} L^n_{loc}(\Omega), & if \quad n \geq 3 \\ L^p_{loc}(\Omega), & if \quad n = 2 \end{cases} \end{cases} \tag{3.10}$$

$(d^i_{x_i} - c)u \in L^2$ 而 $u \in L^{2^*}$ $\Rightarrow$ 要$d^i_{x_i} - c \in L^n$

如果$u \in H^1_{loc}(\Omega)$满足 $B(u, \phi) = \int_\Omega f\phi dx$, $\forall \phi \in C^\infty_0(\Omega)$, 则称$u$是方程$Łu = f$的局部解. 其中$B(u, v)$是Ł决定的双线性泛函， 见(3.4).

证明的主要工具：
函数$u(x) = u(x_1, \cdots, x_n)$关于第$i$变量步长为$h$的差商定义为

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}.$$

记$D^h u = (D_1^h u, \cdots, D_n^h u)$.

Theorem

2.22 *(i)* 设$u \in W^{1,p}(\Omega), p \in [1, \infty], \Omega_1 \subset\subset \Omega$, 则

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)} \leq \|D^{e_i} u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall h, 0 < |h| < dist(\Omega_1, \partial\Omega).$$

(ii) 设$p \in (1, \infty), \Omega_1 \subset\subset \Omega, u \in L^p(\Omega)$且存在常数$C_i, \delta > 0$使得

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)} \leq C_i, \quad \forall h, 0 < |h| < \delta,$$

则弱导数$D^{e_i} u$存在属于$L^p(\Omega_1)$, 且$\|D^{e_i} u\|_{L^p(\Omega_1)} \leq C_i$.

Lemma

3.2 设$\Omega \subset R^n$为开集，Ł的系数满足*(3.1)*和*(3.10)*. 如果 $f \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$是方程$Łu = f$的局部解，则$u \in H^2_{loc}(\Omega)$，且$\forall$ 开集 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 均有

$$||u||_{H^2(\Omega_1)} \leq C(\Omega_1, \Omega_2, n, Ł)[||u||_{H^1(\Omega_2)} + ||f||_{L^2(\Omega_2)}].$$

证明. **(1).** 由Hölder不等式和条件(3.10)知：方程(3.9)右端属于L^2，因此只要对$d^i, b^i, c \equiv 0$的情况证明该引理即可。

此时 $F = f$ 记为 $f + \sum d^i_{x_i}(\ ,\ )\cdots$

不为0时 多的项可被 f 与 $||u||_{H^1(\Omega)}$ 的组合控制

(2). 由定理2.22(ii), 只要证：$\forall k \in \{1,2,\cdots,n\}$, $\forall h, 0<|h|<dist(\Omega_1,\partial\Omega_2)$, 均有

$||D_k^h Du||$

$$||\cancel{D_k^h u}||_{L^2(\Omega_1)} \le C(\Omega_1,\Omega_2,n,\text{Ł})[||u||_{H^1(\Omega_2)} + ||f||_{L^2(\Omega_2)}]. \quad (3.11)$$

(3). 由局部解的定义及稠密性， 我们有

$$\int_{\Omega_2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i}dx = \int_{\Omega_2} fvdx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega_2). \qquad (3.12)$$

现在选实验函数$v=-D_k^{-h}(\xi^2(x)D_k^h u(x))$代入，其中$\xi$满足

$DV \in C_0^\infty(\Omega_2)$

$$\xi\in C_0^\infty(\Omega_2), \quad \xi\equiv 1 \ \ in \ \ \Omega_1, \quad 0\le\xi\le 1 \ \ in \ \ \Omega_2.$$

利用推论2.1， (3.1)和定理2.22(i), 则(3.12)的左边为

$\int_\Omega f D_k^h (g)_{x_i} dx = \int_\Omega D_k^h(f) g_{x_i} dx$?

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i}\, dx &= \int_{\Omega_2} D_k^h\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_j}\Big)(\xi^2(x) D_k^h u(x))_{x_i}\, dx \\
&= \int_{\Omega_2} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} D_k^h a^{ij}(x) u_{x_j} + a^{ij}(x+he_k)(D_k^h u(x))_{x_j}\Big]\big[\xi^2 (D_k^h u)_{x_i} + 2\xi \xi_{x_i} D_k^h u\big]\, dx \\
&= \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x+he_k)(D_k^h u(x))_{x_j} (D_k^h u)_{x_i} \xi^2\, dx \\
&+ \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{n} \big[D_k^h a^{ij}(x) u_{x_j} \xi^2 (D_k^h u)_{x_i} \\
&+ 2\xi \xi_{x_i} D_k^h a^{ij}(x) u_{x_j} D_k^h u + 2a^{ij}(x+he_k)(D_k^h u(x))_{x_j} \xi \xi_{x_i} D_k^h u\big]\, dx \\
&\geq \lambda \int_{\Omega_2} \xi^2 |D_k^h D u(x)|^2\, dx \\
&- C(\Omega_1, \Omega_2, n, \text{Ł}) \int_{\Omega_2} \big[\xi^2 \cancel{|D_k^h u|}\,|Du| + \xi |D_k^h u|\,|Du| + \xi |D_k^h D u|\,|D_k^h u|\big]\, dx \\
&\geq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_2} \xi^2 |D_k^h D u(x)|^2\, dx - C(\Omega_1, \Omega_2, n, \text{Ł}) \int_{\Omega_2} |Du|^2\, dx.
\end{aligned}
$$

椭圆条件

ξ_x 由 Ω_1, Ω_2 控制

$|D D_k^h u|$

$\leq \xi |D_k^h D u|^2 + |Du|^2$

为得到最后一式， 我们利用Hölder和Young不等式以及定理2.22(i)。
而利用Young不等式以及定理2.22(i), (3.12)的右边为

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} fv dx &= -\int_{\Omega_2} f D_k^{-h}(\xi^2(x) D_k^h u(x)) dx \\
\|D_k^{-h}(\ )\| \le \|D(\ )\| \quad &\le \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_2} f^2 dx + \frac{\lambda}{4}\int_{\Omega_2} |D(\xi^2 D_k^h u)|^2 dx \\
&\le \frac{\lambda}{4}\int_{\Omega_2} \xi^2 |D_k^h Du|^2 dx \\
&+ C(\Omega_1, \Omega_2, n, \text{Ł}) \int_{\Omega_2} (f^2| + |Du|^2) dx.
\end{aligned}
$$

将上面两个估计代入(3.12)即得(3.11). □

Theorem

3.8 设$\Omega \subset R^n$为开集，$Ł$的系数满足(3.1)和(3.10). 如果$f \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$是方程$Łu = f$的局部解，则$u \in H^2_{loc}(\Omega)$，且$\forall$ 开集 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 均有

$$||u||_{H^2(\Omega_1)} \leq C(\Omega_1, \Omega_2, n, Ł)[||u||_{L^2(\Omega_2)} + ||f||_{L^2(\Omega_2)}.]$$

证明. 由引理3.2，只要证明:
$\forall$ 开集 Ω_3，$\Omega_1 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 均有

$$||Du||_{L^2(\Omega_3)} \leq C(\Omega_3, \Omega_2, n, Ł)[||u||_{L^2(\Omega_2)} + ||f||_{L^2(\Omega_2)}.]$$

(此式称为Caciopolli不等式).

在$B(u,v)=\int_\Omega fvdx$中取$v=\xi^2 u$，其中ξ满足

$$\xi \in C_0^\infty(\Omega_2), \quad \xi \equiv 1 \quad in \quad \Omega_3, \quad 0 \le \xi \le 1 \quad in \quad \Omega_2.$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\lambda \int_{\Omega_2} \xi^2 |Du|^2 dx \le C(\Omega_3, \Omega_2, n, \text{Ł}) \int_\Omega [\xi^2 \\
&\cdot (|u||f| + \overset{\xi u}{|u|}\,\overset{\xi Du}{|Du|} + |u|^2) + \xi |Du| |u|] dx \\
\le \quad & \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega_2} \xi^2 |Du|^2 dx + C(\Omega_3, \Omega_2, n, \text{Ł}) \int_\Omega [|f|^2 + |u|^2)] dx.
\end{aligned}
$$

移项整理即得所证。 $\square$

2. 高阶局部正则性

Theorem

3.9 设$\Omega \subset R^n$为开集，m为非负整数, $Ł$的系数 d^i，$a^{ij} \in W^{m+1,\infty}_{loc}(\Omega)$满足*(3.1)*和

$$b^i, c \in W^{m,\infty}_{loc}(\Omega), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

如果 $f \in H^m_{loc}(\Omega)$, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ 是方程$Łu = f$ 的局部解，则$u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$， 且$\forall$ 开集 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 均有

$$||u||_{H^{m+2}(\Omega_1)} \leq C(\Omega_1, \Omega_2, n, m, Ł)[||u||_{L^2(\Omega_2)} + ||f||_{H^m(\Omega_2)}]. \tag{3.13}$$

证明. 由定理3.8， 定理3.9对$m = 0$正确。 设定理3.9对$m = l$正确。

下证它对$m = l + 1$也成立. 此时

$$d^i,\ a^{ij} \in W^{l+2,\infty}_{loc}(\Omega), \quad b^i, c \in W^{l+1,\infty}_{loc}(\Omega), f \in H^{l+1}_{loc}(\Omega)$$

$\forall i, j = 1, \cdots, n$ 且$u \in H^{l+2}_{loc}(\Omega)$，(3.13)对$m = l$ 成立， 满足

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n [a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n d^i u v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv] dx$$

$$= \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.14}$$

任取$\alpha \in Z^n, |\alpha| = 1$. 对任意$\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, 取$v = D^\alpha \eta$ 代入(3.14), 得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} dx &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_j} D^\alpha \eta_{x_i} \\ &= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) D^\alpha u_{x_j} \eta_{x_i} \\ &+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (D^\alpha a^{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} \eta.\end{aligned}$$

类似有:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n d^i u v_{x_i} dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n (D^\alpha d^i u)_{x_i} \eta dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^n d^i D^\alpha u \eta_{x_i};$$

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v dx = - \int_\Omega \sum_{i=1}^n D^\alpha (b^i u_{x_i}) \eta dx;$$

$$\int_\Omega cuvdx = - \int_\Omega D^\alpha (cu) \eta dx,$$

$$\int_\Omega fvdx = - \int_\Omega D^\alpha f \eta dx.$$

代入(3.14)中知: $D^\alpha u$是方程

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)w_{x_j} + d^i w)_{x_i} = \bar{f}$$

的局部弱解， 其中

$$\begin{aligned}\bar{f} &= D^\alpha f + D^\alpha(cu) + \sum_{i=1}^{n} D^\alpha(b^i u_{x_i}) \\ &- \sum_{i=1}^{n}(D^\alpha d^i u)_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(D^\alpha a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}.\end{aligned}$$

由$m=l+1$的条件和归纳假设， 容易验证$\bar{f}\in H^l_{loc}(\Omega)$. 于是对这个特殊的方程用归纳假设，就有$D^\alpha u\in H^{l+2}_{loc}(\Omega)$, 且 $\forall$ 开集 Ω_3， $\Omega_1\subset\subset\Omega_3\subset\subset\Omega_2\subset\subset\Omega$, 均有

$$\begin{aligned}||D^\alpha u||_{H^{l+2}(\Omega_1)} &\le C(\Omega_1,\Omega_3,n,m,Ł)[||D^\alpha u||_{L^2(\Omega_3)}+||\bar{f}||_{H^l(\Omega_3)}]\\ &\le C(\Omega_1,\Omega_3,n,m,Ł)[||u||_{H^{l+2}(\Omega_3)}+||f||_{H^{l+1}(\Omega_3)}]\\ &\le C(\Omega_1,\Omega_2,n,m,Ł)[||u||_{L^2(\Omega_2)}+||f||_{H^{l+1}(\Omega_2)}].\end{aligned}$$

由于α的任意性， 我们就证明了(3.13)对$m=l+1$也成立. $\square$

注: 与定理3.8的条件（3.10）类似， 定理3.9的条件中d^i和c的条件可以适当减弱。

利用定理3.9和嵌入定理2.18， 我们立即得到

Corollary

3.3 设$\Omega \subset R^n$为开集，$Ł$的系数a^{ij}满足*(3.1)*以及

$$a^{ij},\ d^i,\ b^i, c \in C^\infty(\Omega) \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

如果 $f \in C^\infty(\Omega)$, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ 是方程$Łu = f$ 的局部解，则$u \in C^\infty(\Omega)$.

作业15： 给出方程$Łu = f$ 的局部解$u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$的一个充分条件， 该条件你要尽力做到最佳。

作业16： Evans's book, Problem 6.6: 3, 4, 7, 11.