《初等概率论》第 3 讲

邓 婉 璐

清华大学
统计学研究中心

September 28, 2018

邓婉璐

目录

一、条件概率

在引入“条件概率”概念之前，先看 3 个例子.

例

设某家庭中有两个孩子. 已知其中有一个是男孩，求另一个也是男孩的概率（假设男、女孩出生概率相同）.

解：A 表示“至少有一个男孩”，B 表示“两个都是男孩”. 如果去掉条件 A，这时该家庭的两个孩子将是 bb, bg, gb, gg 四种情况之一，即这时 $\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$，$B = \{bb\}$，$A = \{bb, bg, gb\} \neq \Omega$，从而 $\mathbb{P}(B) = 1/4$.

在已知“至少有一个男孩”条件下，该家庭的两个孩子只可能是 bb, bg, gb 三种情况之一，其中 b, g 表示男、女孩. 故 $\Omega = \{bb, bg, gb\} = A$，而 $B = \{bb\}$，所以所求概率为 $1/3$，记此概率为 $\mathbb{P}(B|A)$，即 $\mathbb{P}(B|A) = 1/3$. 可见 $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B)$.

进一步，$\mathbb{P}(A) = 3/4$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = 1/4$，所以

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A).$$

一、条件概率

例

掷一颗骰子，已知掷出了偶数点，求掷出的是点数 2 的概率.

解：A 表示掷出偶数点，B 表示掷出点数 2.

如果去掉条件"掷出了偶数点"，则 $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2\}$, 从而 $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$, $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

已知事件 A 发生后，样本空间为 $\{2, 4, 6\}$，且每个样本点具有等可能性。$B = \{2\}$, 所以 $\mathbb{P}(B|A) = 1/3$.

如下关系：

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

一、条件概率

例

52 张扑克中任取一张，在已知抽到梅花的条件下，求抽到梅花 5 的概率.

解：A 表示抽到梅花，B 表示抽到 5.
如果去掉条件，则 $\mathbb{P}(A) = 13/52$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/52$.

已知事件 A 发生后，样本空间为 $\{1, 2, ..., 13\}$，且每个样本点具有等可能性。所以 $\mathbb{P}(B|A) = 1/13$.

如下关系：

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{13} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

一、条件概率

从上面三个例子中，可以看到：给定一个试验、与这个试验相对于的样本空间和概率 (测度), 假设已经知道给定的事件 A 发生了，而希望知道另外一个给定的事件 B 发生的可能性，则可以构造一个新的概率 (测度)，它顾及了事件 A 发生的信息，求出任何事件 B 发生的概率. 这个概率就是给定 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记作 $\mathbb{P}(B|A)$.

定义：条件概率 (conditional probability)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$A, B \in \mathscr{F}$, 且 $\mathbb{P}(A) > 0$, 则在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的**条件概率**定义为：

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

♣ 当 $\mathbb{P}(A) = 0$ 时，相应的条件概率没有定义，有时候可以根据需要把 $\mathbb{P}(B|A)$ 定义为 $[0, 1]$ 中的任意常数.

一、条件概率

♣ $\mathbb{P}(B|A)$ 和 $\mathbb{P}(B)$ 大小关系.

1. 当 $B \subset A$，则
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \geq \mathbb{P}(B).$$

2. 当 $A \cap B = \emptyset$, 则 $\mathbb{P}(B|A) = 0 \leq \mathbb{P}(B)$.

故 $\mathbb{P}(B|A)$ 和 $\mathbb{P}(B)$ 的大小关系不确定.

♣ 条件概率依然是一个概率测度.

$P(B\,C|A)$

一、条件概率

定理

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$A \in \mathscr{F}$ 且 $\mathbb{P}(A) > 0$，则

1. 对任意的 $B \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(B|A) \geq 0$;
2. $\mathbb{P}(\Omega|A) = 1$;
3. 对互不相容的事件列 $\{B_i\}$，有 $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i|A)$.

用 $\mathbb{P}_A(\cdot)$ 表示在事件 A 发生的条件下的条件概率，即 $\mathbb{P}_A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$. 则 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_A)$ 也是一个概率空间.

由于 $P(A|A) = 1$，条件概率完全集中在 A 上，这样，我们也可以将 A 以外的结果排除掉，并将 A 看成新的样本空间 $(A, A \cap \mathscr{F}, \mathbb{P}_A)$

♣ 所有关于概率的性质对条件概率都成立.

一、条件概率

例

在连续两次抛掷均匀的有 4 个面的骰子的试验中，假定所有 16 中试验结果是等可能的，分别记 X 和 Y 为第一次和第二次抛掷的结果，计算条件概率 $\mathbb{P}(A|B)$，其中 $A=\{\max(X,Y)=m\}$，$m=1,2,3,4$，$B=\{\min(X,Y)=2\}$.

解. $\Omega=\{(i,j): i,j=1,2,3,4\}$. 由于硬币两面均匀，可以假定这 16 个试验结果是等可能的. $B=\{(i,j):\min(i,j)=2\}$, $\#(B)=5$. $A\cap B=\{(i,j):\max(i,j)=m,\min(i,j)=2\}$, 所以

$$\#(A\cap B)=\begin{cases}0, & \text{if } m=1,\\ 1, & \text{if } m=2,\\ 2, & \text{if } m=3 \text{ or } 4,\end{cases}$$

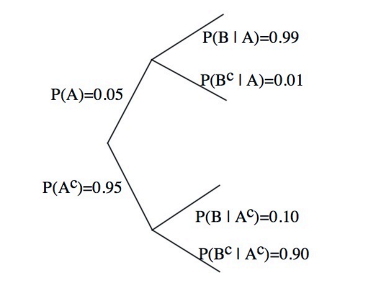
因此

$$\mathbb{P}(A|B)=\begin{cases}0, & \text{if } m=1,\\ 1/5, & \text{if } m=2,\\ 2/5, & \text{if } m=3 \text{ or } 4.\end{cases}$$

一、基于条件概率的概率模型

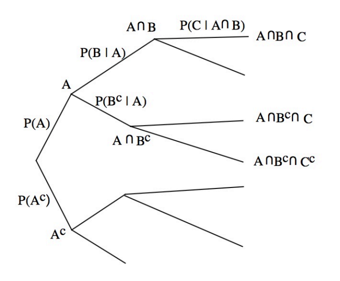
例

有一台雷达探测设备在探测是否其上空区域有飞机。分别标记两个事件 $A = \{$ 飞机出现 $\}$, $B = \{$ 雷达报警 $\}$.



- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.05 * 0.99 = 0.0495.$
- $P(B) = 0.05 * 0.99 + 0.95 * 0.1 = 0.1445.$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.34.$

二、乘法公式



♣ 利用序贯树形图计算概率，规则如下：

1. 设立一个序贯树形图，让关心的事件处于图的末端（叶子），由根节点一直到叶子的路径上每一个节点代表一个事件，而我们关心的事件的发生是由根节点一直到叶子的一系列事件发生的结果；
2. 在路径的每个分枝上写上相应的条件概率；
3. 叶子所代表的事件发生的概率是相应的分枝上的条件概率的乘积.

二、乘法公式

$P(A\cap B\cap C)$
$= P(A)P(BC|A)$
$P($

定理

（乘法公式）设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$A_i \in \mathscr{F}$，$i = 1, \ldots, n$，且 $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$，则

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}(A_i|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{i-1}).$$

证明： 因为 $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$，所以

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_1\cap A_2) \geq \cdots \geq \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}) > 0,$$

即定理中的条件概率都有意义。由条件概率的定义，可知结论成立。 ■

♣ 可任意换序，所以其实是 $n!$ 个公式.

二、乘法公式

例

（配对问题）某人写了 n 封信，将其装入 n 个信封，并在每个信封上分别任意地写上 n 个收信人的一个地址（不重复），求

1. 没有一个信封上所写的地址正确的概率 q_0；
2. 恰有 r 个信封上所写的地址正确的概率 $q_r(r \le n)$.

解. 设 $A_i =$ "第 i 个信封上所写的地址正确"，$i = 1, 2, ..., n$，则 $\cup_{i=1}^n A_i$ 表示 "n 个信封上至少有一个信封上所写的地址正确"，故 $q_0 = 1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i)$.

对任意的 $1 \le i \le n$，有 $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}$.

对任意的 $1 \le i < j \le n$，有

$$\mathbb{P}(A_iA_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j|A_i) = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} = \frac{(n-2)!}{n!}.$$

对任意的 $1 \le i < j < k \le n$，有 $\mathbb{P}(A_iA_jA_k) = \frac{(n-3)!}{n!}$.

二、乘法公式

$\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$.

从而

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{P}(A_iA_j)\\
&\quad+\sum_{1\le i<j<k\le n}\mathbb{P}(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}A_i)\\
&=\binom{n}{1}\mathbb{P}(A_1)-\binom{n}{2}\mathbb{P}(A_1A_2)+\cdots+(-1)^{n-1}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}A_i)\\
&=\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\
&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

二、乘法公式

因此

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

进一步，由于 q_0 跟 n 有关，故一般记为 $q_0(n)$。从而

$$\lim_{n\to\infty} q_0(n) = e^{-1} = 0.3678794411714423\cdots,$$

即，当 n 非常大的时候，$q_0 \approx 0.37.$

二、乘法公式

(2). 因为在指定的“某 r 个 (不妨设前 r 个) 信封上所写的地址是正确的”这一事件的概率相对于“从 n 个不同编号的球中无放回摸取 r 个正好依次摸得前 r 号”的概率，即

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)},$$

而其余“$(n-r)$ 个信封上所写地址都不正确”的概率为 (由 (1))

$$q_0(n-r)=\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

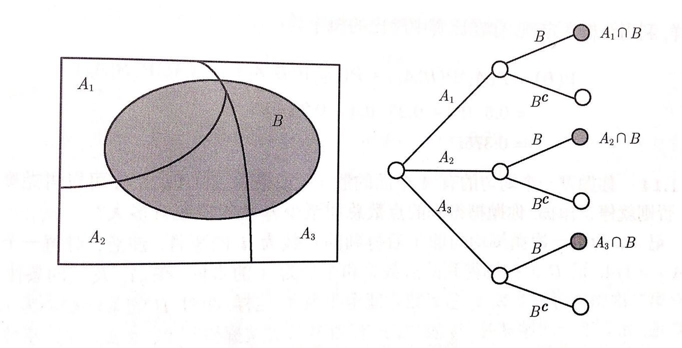
又从 n 个信封里取 r 个组合，共 $\binom{n}{r}$ 种取法，故所求概率为

$$q_r(n)=\binom{n}{r}\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

三、全概率公式

- 将 Ω 分割成事件 A_1, A_2, A_3 的并.
- 对每个 i, 得到 $P(B|A_i)$.
- 计算 $P(B)$ 的方法之一：$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)$.



三、全概率公式

定理 (Total Probability Theorem)

(全概率公式)设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间,$B, A_i \in \mathscr{F}$,$i = 1, ..., n$,且 $\mathbb{P}(A_i) > 0$,$\{A_i\}$ 是 Ω 的一个分割,则

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n).$$

特别地,如果 $0 < \mathbb{P}(A) < 1$,则

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c).$$

♣ 在定理中,n 可以换成 ∞。

♣ 该定理的一个主要应用:计算事件 B 的概率.关键是找到合适的分割 $A_1, ..., A_n$.通常,分割跟实际问题的背景有关.

三、全概率公式

例

设 1000 件产品中有 200 件是不合格品，现从中**无放回**抽取 2 件，求第二次抽到的是**不合格品**的概率.

解. 设 $A_i=$“第 i 次抽到的是不合格品”，$i=1,2$，由全概率公式得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)+\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2|A_1^c)\\
&= \frac{200}{1000}\times\frac{199}{999}+\frac{800}{1000}\times\frac{200}{999}\\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

三、全概率公式

例

设一袋中有 n 个白球与 m 个黑球，现从中**无放回**连续抽取 k 个球，求第 k 次取得黑球的概率 $(1 \le k \le m+n)$.

设 $A_k =$ “第 k 次摸的黑球”, $k = 1, 2, ..., n+m$.

解法 1. 把球看成是编了号的，从 $n+m$ 个球中摸取 k 个排成一行，有 $P_{n+m}^{k} := (n+m)(n+m-1)\cdots(n+m-k+1)$ 种取法，即该试验的基本事件总数为 P_{n+m}^{k}. 因为第 k 个位置上是黑球，有 P_m^1 种取法，而前 $k-1$ 个位置上可以是其余 $n+m-1$ 个球中任意 $k-1$ 个球，共有 P_{n+m-1}^{k-1} 种取法，于是 A_k 包含的基本事件数为 $P_{n+m-1}^{k-1} P_m^1$，从而所求概率为

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{P_{n+m-1}^{k-1} P_m^1}{P_{n+m}^{k}} = \frac{m}{n+m}.$$

三、全概率公式

解法 2.（归纳法），显然

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{m}{n+m};$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2|A_1^c)$$
$$= \frac{m}{n+m}\cdot\frac{m-1}{n+m-1} + \frac{n}{n+m}\frac{m}{n-1+m} = \frac{m}{n+m}.$$

假设 $\mathbb{P}(A_i) = \frac{m}{n+m}$，往证 $\mathbb{P}(A_{i+1}) = \frac{m}{n+m}$，$i+1 \le n+m$.
因为

$$\mathbb{P}(A_{i+1}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1) + \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1^c)$$
$$= \frac{m}{n+m}\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1) + \frac{n}{n+m}\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1^c).$$

由于 $\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1)$ 表示在 $m-1$ 个黑球与 n 个白球的袋中第 i 次摸得黑球的概率，根据假设得

$$\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1) = \frac{m-1}{n+m-1}.$$

三、全概率公式

同理，

$$\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1^c) = \frac{m}{n-1+m}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i+1}) &= \frac{m}{n+m}\frac{m-1}{n+m-1} + \frac{n}{n+m}\frac{m}{n-1+m} \\ &= \frac{m}{n+m}.\end{aligned}$$

故

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{m}{n+m}.$$

例

同学甲在上一门概率课．在每周周末的时候，他可能跟上课程或跟不上课程．如果他在某一周是跟上课程的，那么他在下一周跟上课程的概率为 0.8（下周跟不上课程的概率为 0.2）．然而，如果他在某一周没有跟上课程，那么甲在下周跟上课程的概率变为 0.4（下周跟不上课程的概率为 0.6）．现在假定，在第一周上课以前认为他是能够跟上课的．经过三周的学习，他能够跟上课程的概率有大?

解. 设 U_i 和 B_i 分别表示经过 i 周学习后跟上和跟不上课程的事件．由全概率公式，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_3) &= \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(U_3|U_2) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(U_3|B_2)\\ &= 0.8\mathbb{P}(U_2) + 0.4\mathbb{P}(B_2).\end{aligned}$$

三、全概率公式

对 $\mathbb{P}(U_2)$ 和 $\mathbb{P}(B_2)$，由全概率公式得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_2) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(U_2|U_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(U_2|B_1)\\ &= 0.8\mathbb{P}(U_1) + 0.4\mathbb{P}(B_1),\\ \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(B_2|U_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\\ &= 0.2\mathbb{P}(U_1) + 0.6\mathbb{P}(B_1).\end{aligned}$$

由于甲在刚刚开始上课的时候是能够跟上课程的，所以

$$\mathbb{P}(U_1) = 0.8, \qquad \mathbb{P}(B_1) = 0.2.$$

从上面三个方程式解得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_2) &= 0.8\times 0.8 + 0.4\times 0.2 = 0.72,\\ \mathbb{P}(B_2) &= 0.2\times 0.8 + 0.6\times 0.2 = 0.28.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_3) &= 0.8\mathbb{P}(U_2) + 0.4\mathbb{P}(B_2)\\ &= 0.8\times 0.72 + 0.4\times 0.28 = 0.688.\end{aligned}$$

■

三、全概率公式

♣ 推广：

$$\mathbb{P}(U_{i+1}) = 0.8\mathbb{P}(U_i) + 0.4\mathbb{P}(B_i),$$
$$\mathbb{P}(B_{i+1}) = 0.2\mathbb{P}(U_i) + 0.6\mathbb{P}(B_i),$$

加上初始条件

$$\mathbb{P}(U_1) = 0.8, \qquad \mathbb{P}(B_1) = 0.2,$$

那么可以迭代求出概率 $\mathbb{P}(U_{i+1})$ 和 $\mathbb{P}(B_{i+1})$.

矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_{i+1}) \\ \mathbb{P}(B_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_i) \\ \mathbb{P}(B_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

三、全概率公式

例（敏感问题调查）

在调查家庭暴力（或婚外恋、服务兴奋剂、吸毒等敏感问题）所占家庭的比例 p 时，被调查者往往不愿回答真相，这使得调查数据失真．为得到实际的 p 同时又不侵犯个人隐私，调查人员将袋中放入比例是 p_0 的红球和比例是 $q_0 = 1 - p_0$ 的白球．被调查者在袋中任取一球窥视后放回，并承诺得到红球就讲真话，取到白球就将假话．被调查者只需在匿名调查表中选“是”（有家庭暴力）或“否”，然后将表放入投标箱．没人能知道被调查者是否讲真话和回答的是什么．如果每个家庭回答“是”的概率为 p_1，求 p.

解．对任选的一个家庭，用 B 表示回答“是”，用 A 表示取到红球．利用全概率公式得

$$\begin{aligned}
p_1 = \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c) \\
&= pp_0 + (1-p)q_0 \\
&= q_0 + (p_0 - q_0)p.
\end{aligned}$$

三、全概率公式

于是，只要 $p_0 \neq q_0$，

$$p = \frac{p_1 - q_0}{p_0 - q_0}.$$

在实际问题中，p_1 是未知的，需要经过调查得到. 假设调查了 n 个家庭，其中有 k 个家庭回答"是"，则可以用 $\widehat{p}_1 = k/n$ 估计 p_1，于是可以用

$$\widehat{p} = \frac{\widehat{p}_1 - q_0}{p_0 - q_0} \quad \text{去估计 } p.$$

如果袋中装 30 个红球，50 个白球，调查了 320 个家庭，其中有 195 个家庭回答"是"，则

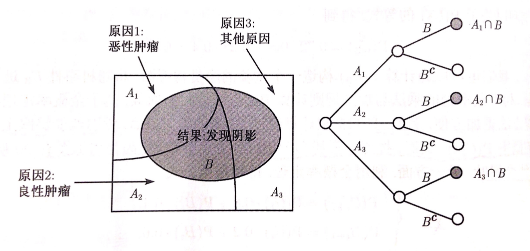
$$p_0 = 3/8, \quad q_0 = 5/8, \quad \widehat{p}_1 = 195/320,$$

$$\widehat{p} = \frac{195/320 - 5/8}{3/8 - 5/8} = 6.25\%.$$

可以证明 $|p_0 - q_0|$ 越大，得到的结论越可靠，但是 $|p_0 - q_0|$ 越大，调查方案越不易被被调查者接受.

四、Bayes 准则

已知 $P(B|A_i), \forall i$. 求 $P(A_i|B)$. (给定 B 发生了，我们要修正“信念程度”.)



$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Bayes 准则可以用来进行推理. 先验概率、后验概率

四、Bayes 准则

定理 (Bayes' Rule)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$B, A_i \in \mathscr{F}$，$i = 1, \ldots, n$，且 $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\{A_i\}$ 是 Ω 的一个分割，则

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

特别地，当 $\mathbb{P}(B) > 0$ 时，有

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c)}.$$

♣ Bayes 准则具有一致性.

四、Bayes 准则

例 (The False-Positive Puzzle (假阳性之谜))

设对于某种少见的疾病，假定某一人群中患有这种病的概率为 0.001，医院推出某检验方法的准确率为 0.95：如果一个被检的人有这种疾病，其检查结果为阳性的概率为 0.95；如果该人没有这种疾病，其检查结果为阴性的概率是 0.95. 现在从这个总体中随机抽取一个人进行检测，检查结果为阳性. 问这个人患这种病的概率有多大?

解. 记 A 为这个人有这种疾病，B 为经检验这个人为阳性. 利用 Bayes 准则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)+\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c)} \\
&= \frac{0.001\times 0.95}{0.001\times 0.95+(1-0.001)\times(1-0.95)} \\
&= 0.01866405 \approx 1.87\%.
\end{aligned}
$$

■

♣ 造成这个结果的原因是发病率较低和诊断的准确性不够高.

四、Bayes 准则

例（吸烟与肺癌问题）

1950 年某地区曾对 50 ∼ 60 岁的男性公民进行调查，肺癌病人中吸烟的比例是 99.7%，无肺癌人中吸烟的比例是 95.8%. 如果整个人群的发病率是 $p = 10^{-4}$，求吸烟人群中肺癌发病率和不吸烟人群中的肺癌发病率.

解. 记 A = “有肺癌”，B = “吸烟”. 则 $\mathbb{P}(A) = 10^{-4}$, $\mathbb{P}(B|A) = 99.7\%$, $\mathbb{P}(B|A^c) = 95.8\%$. 所以

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c)} \\ &= \frac{10^{-4} \times 99.7\%}{10^{-4} \times 99.7\% + (1 - 10^{-4}) \times 95.8\%} \\ &= 1.0407 \times 10^{-4},\end{aligned}$$

四、Bayes 准则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B^c) &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c|A)+\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c|A^c)} \\
&= \frac{10^{-4}\times(1-99.7\%)}{10^{-4}\times(1-99.7\%)+(1-10^{-4})\times(1-95.8\%)} \\
&= 7.1438\times 10^{-6}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{\text{吸烟人群的肺癌发病率}}{\text{不吸烟人群的肺癌发病率}} = \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A|B^c)} = 14.57.
$$

结论：吸烟人群的肺癌发病率是不吸烟人群的肺癌发病率的 14.57 倍。

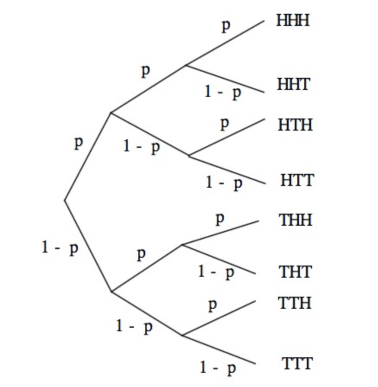
五、事件的独立性

《初等概率论》
第 3 讲

邓婉璐

目录
条件概率
乘法公式
全概率公式
Bayes 准则
事件的独立性
小结

- 有一枚有偏的硬币，连续抛掷 3 次：$P(H) = p$, $P(T) = 1 - p$.



- $P(H_2|H_1) = p$.
- $P(H_2|T_1) = p$.
- $P(H_2) = P(H_2|H_1)P(H_1) + P(H_2|T_1)P(T_1) = p$.

五、事件的独立性

♣ "独立性定义"：事件 B 的发生并没有给事件 A 带来新的信息，它没有改变事件 A 发生的概率，即 $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

♣ 1. 两个事件的独立性

定义：独立性 (independence)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$A, B \in \mathscr{F}$，如果

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

则称 A 与 B 相互独立，简称独立.

后者：对 A、B 对称；对 $P(A) = 0$ 同样适用；蕴含前者

♣ 显然，不可能事件、必然事件与任何事件独立.

♣ 若 A 与 B 独立，则

(i) A 与 B^c 独立; (ii) A^c 与 B 独立; (iii) A^c 与 B^c 独立.

五、事件的独立性

- 注意独立性与不相交的区别.
- 不同试验可以有相互独立的事件.

例

用 Ω_1 和 Ω_2 分别表示互不相干的试验 S_1 和 S_2 的样本空间，设 Ω_1 和 Ω_2 的样本点分别是等可能的，并且

$$\Omega_1 = \{\mu_i | 1 \le i \le n\}, \quad \Omega_2 = \{\eta_j | 1 \le j \le m\}.$$

则对 $A \subset \Omega_1$, $B \subset \Omega_2$, 有 A, B 独立.

- 同一试验也可以有相互独立的事件.

五、事件的独立性

♣ 2. 条件独立性

定义：条件独立性 (conditional independence)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$A, B, C \in \mathscr{F}$，且 $\mathbb{P}(C) > 0$，如果

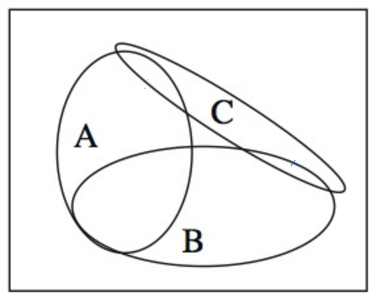
$$\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C),$$

则称 A 与 B 在给定 C 之下条件独立.

♣ 条件独立性与独立性互不蕴含.

五、事件的独立性

- 假定 A、B 相互独立。
- 给定 C 之后，A、B 还相互独立么？



五、事件的独立性

例

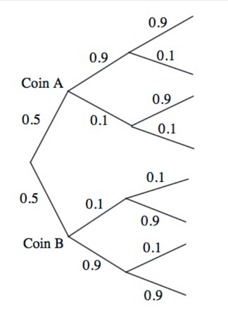
考虑抛掷两次均匀的硬币. 这个试验的四种可能结果都是等可能的. 令 $H_1 = \{$ 第一枚硬币正面向上 $\}$, $H_2 = \{$ 第二枚硬币正面向上 $\}$, $D = \{$ 两枚硬币的试验结果不同 $\}$. 则事件 H_1 和事件 H_2 是独立的. 但是

$$\mathbb{P}(H_i|D) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(H_1 \cap H_2|D) = 0, \quad i = 1, 2.$$

这样, $\mathbb{P}(H_1 \cap H_2|D) \neq \mathbb{P}(H_1|D)\mathbb{P}(H_2|D)$, 即 H_1 和 H_2 并不条件独立的.

五、事件的独立性

- 考虑两枚不均匀的硬币，A 和 B：$P(H|coinA) = 0.9$, $P(H|coinB) = 0.1$. 等概率选择两硬币之一进行抛掷。



- 如果我们知道是硬币 A，不同的抛掷之间独立么？
- 如果我们不知道是哪枚硬币，不同的抛掷之间独立么？

五、事件的独立性

♣ “一组事件的独立性”直观定义：任选其中一些事件，其信息不能为我们提供任何关于剩余事件的信息，或者说不改变剩余事件发生的概率。例如 $P(A_1 \cap (A_2^c \cup A_3) | A_5 \cap A_6^c) = P(A_1 \cap (A_2^c \cup A_3))$.

♣ 3. 一组事件的独立性

定义：一组事件的独立性

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，如果

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in S} A_i\Big) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}(A_i) \quad \text{对任意非空子集 } S \subset \{1, 2, ..., n\},$$

则称 $A_1, A_2, ..., A_n$ 是相互独立的.

♣ 4. 事件的两两独立性

定义：两两独立性 (Pairwise independence)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$，如果

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

则称 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是两两独立的.

五、事件的独立性

例

将一个均匀的正四面体的第一面染上红、黄、蓝三色，将其它三面分别染上红色、黄色、蓝色. 设 A, B, C 分别表示掷一次四面体红色、黄色、蓝色与桌面接触的事件，则

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

$$\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),$$

$$\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C).$$

但是 $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=1/4\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

即：两两独立并不能保证相互独立！

♣ 5. 独立性的应用

例

设某地区某时期每人的血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，混合 100 人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

解. 设 $A_i =$ “第 i 个人的血清中含有肝炎病毒”，$i = 1, \ldots, 100$，可以认为诸 A_i 是相互独立的. 则所求的概率为：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{100} A_i\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{100} A_i^c\Big) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{100} \mathbb{P}(A_i^c) \\ &= 1 - (1 - 0.004)^{100} \\ &\approx 0.33.\end{aligned}$$

小结

♣ 知识点

- 概念：条件概率、独立性
- 公式／准则：乘法公式、全概率公式、Bayes 准则

♣ 技巧

- 把复杂的大问题拆分成简单的小问题
- 根据经验挑选利于简化计算的条件概率的顺序、样本空间的分割
- 反例法认识概念的细微差异

作业

课后习题（第一章）：15，16；20，22；24，25，27；32，33，35；49，50，51，56

Thank you!