# 复变函数复习

# 第一部分Cauchy-Riemann方程

## 1. 区域，单连通区域定义及其几种等价形式，球极投影及反投影公式

连通开集叫区域。

区域的特征：设 $U$ 是 $\mathbb{C}$ 中开集， 则 $U$ 是区域的充要条件是 $U$ 中任何两点都可由 $U$ 中折线连接.

【定理】单连通区域的几种等价定义：设 $U$ 是区域，则下述条件等价：

（1） $U$ 单连通（$U$ 中任何闭曲线都可以在 $U$ 中连续收缩为 $U$ 中一点）

（2） $\overline{\mathbb{C}}\backslash U$ 连通

（3） $U$ 中任何闭微分形式是全微分

（4） $U$ 中任何解析函数有原函数

（5） $U$ 中任何调和函数有共轭调和函数

球极投影： $P : \overline{\mathbb{C}} \to S$, $z \mapsto \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{1}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)$ 到单位球面的一个映射。

反球极投影（有时也叫球极投影）： $P^{-1} : S \to \overline{\mathbb{C}}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1+x_2 i}{1-x_3}$ .

1. 球极投影把平面上的圆或直线映为球上的圆。

2. 球面距离：对平面 $\mathbb{C}$ 上二点 $z_1, z_2$, 其球面距离指的是

$$d(z_1, z_2) = |P(z_1), P(z_2)| = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z|^2}}$$

$$d(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$$

## 2. 可导、解析、Cauchy-Riemann方程

导数定义，在一点解析的定义， 解析函数的定义， 导数几何意义（解析函数的保角性）， 形式微商 $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 。

【解析函数保角性】解析函数在导数不等于零处保角，且各个方向的伸缩率一样(即把无穷小圆周因为无穷小圆周）.

【保角性的一个用处】解析函数保左保右：若 $f$ 在区域 $D$ 解析，导数不等于零，又设 $\gamma$ 是 $D$ 内一条曲线， 则 $f$ 把 $\gamma$ 左侧附近映为 $f(\gamma)$ 左侧附近，右侧附近映为右侧附近。

【实可微】 称 $f$ 在 $z_0$ 实可微， 如果 $\Delta f = f(z) - f(z_0) = adx + bdy + o(z - z_0)(z \to z_0)$. 这时 $a = \frac{\partial f}{\partial x}, b = \frac{\partial f}{\partial y}$.

【实可微的等价形式】称 $f$ 在 $z_0$ 实可微⇔存在$\alpha, \beta$, 使得 $\Delta f = \alpha(z - z_0) + \beta(\bar{z} - \overline{z_0}) + o(z - z_0)$. 这时 $\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}, \beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

【复可微】 称 $f$ 在 $z_0$ 复可微，如果存在 $a \in \mathbb{C}$, 使得$\Delta f(z_0) = a\Delta z + o(\Delta z), \Delta z = z - z_0$. 记

$$df(z_0) = adz = a(z - z_0).$$

【可导与可微】设函数 $f$ 在一点 $z_0$ 实可微， 则 $f$ 在 $z_0$ 可导的充要条件是 $f$ 在 $z_0$ 复可微， 即 $\frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} = 0$。

【导数计算】设函数 $f = u + iv$ 在一点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 可导， 则

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann方程的实形式 $u_x = u_y, v_x = -u_y$，复形式： $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. 应用 实部为常数、模为常数、或像在一直线上的解析函数均为常值。

【调和函数定义】 $u \in C^2(D)$ 且$\Delta u = 0$. $C^2$ 条件可弱化为： $u \in C(D)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 存在且 $\Delta u = 0$。

【调和函数的共轭调和函数】设若 $u$ 在域 $D$ 上调，若存在函数 $v$ 使得 $u + iv$ 在 $D$ 上解析， 则 $v$ 一定是调和函数，称 $v$ 为 $u$ 在 $D$ 上的共轭调和函数。

【共轭调和函数的求法】若 $u$ 在 $D$ 上调和且有共轭调和函数 $v$, 则

$$v = \int^{(x,y)} {}^*du = \int^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right).$$

## 3. 初等解析函数

难点1. 多值函数。

例. $\sqrt{(z - a)(z - b)}, \log\frac{z-a}{z-b}, \log z$, 有怎样的单值区域？判断这种多值函数的单值区域的原理是什么？

例. $z^\alpha$, $e^z$, $\log z$ 的映射性质。

难点2. 分式线性变换：

【保圆性】把圆周或直线映为圆周或直线.

【保交比】对任意分式线性变换 $T$, 对任意四点 $z_1, z_2, z_3, z_4$, $(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

【保对称点】若 $a, b$ 关于圆周 $C$ 对称，则对任意分式线性变换 $T$, $Ta$ 和 $Tb$ 关于 $TC$ 对称.

难点3. 共形映射的构造.

例. 如何把二圆周围成的区域共形地映为单位圆盘？

如何把 $\Delta\setminus[0, 1]$ 共形地映为单位圆盘($\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$)?

如何把上半平面映为单位圆周且把已知点映为已知点?

如何证明黎曼映射的唯一性?

如何由Schwarz 引理证明单位圆盘到自身的共形映射是保持单位圆不变的分式线性变换？

把单位圆盘映成自身且把已知点 $a$ 映为 $0$ 的分时变换如何得到？如何估计把单位圆盘映到自身的解析映射在 $0$ 的导数的模（用Schwarz-Pick定理）等等.

# 第二部分Cauchy积分公式及直接间接应用

## 1. Cauchy-Goursat定理， Cauchy 积分公式的直接应用：

解析函数的各阶导函数表达式(利用Cauchy型积分的求导公式）， Cauchy 不等式， Liouville 定理，Morera 定理，Taylor 展开定理， Laurent 展开定理. Weierstrass 定理（内闭一致收敛的解析列），解析函数平均值公式，调和函数平均值公式，解析函数最大模原理与Schwarz 引理，调和函数最大最小值原理，有界解析函数族的等度连续性定理，Montel 正规定则（即设函数族 $F$ 是区域 $D$ 上的解析函数族，如果 $F$ 内闭一致有界， 则它内闭等度连续且正规）。

例. 用极大模原理直接证明：设函数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 都在区域 $D$ 解析， 则$\forall p > 0$, $|f_1| + |f_2| + \ldots + |f_n|$ 在 $D$ 内部没有极大值点， 除非所有 $f_j$ 都为常数. 考虑Σcn*fn(z)

例. 设 $f$ 在单位圆盘 $\Delta : |z| < 1$ 的闭包解析， $|f(z)|\le 1$, 则对任意 $a, b \in \Delta, |a| < 1/2, b < 1/2$,

$$|f(a) - f(b)| \le 4M|a - b|.$$

这个 $M$ 可以改进为 $8/3$（要用Schwarz 引理）.

例. 区域上的非常值调和函数把区域映为开集， 区域上的非常值解析函数的模在区域内部没有极大值，区域上的非常值调和函数满极大极小值原理.

## 2. Taylor 展开定理的直接应用

【解析函数的局部结构】：若 $f$ 在 $a$ 解析， 则 $f(z) = f(a) + (z - a)^{v_f(a)}g(z)$. 其中 $g(a) \ne 0$, $g$ 在 $a$ 解析， $v_f(a)$ 是由 $f$ 决定的唯一的自然数（正整数）。由此可得到【解析函数的零点孤立性】【解析函数的唯一性】.

例. 是否存在单位圆盘 $\Delta : |z| < 1$ 上的解析函数使得：

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3} + e^{-2n}?$$

是否存在满足此式的$\Delta^*: 0 < |z| < 1$上的解析函数。

## 3. Laurent 展式及其直接应用

孤立奇点分类：可去，极点，本性

设 $a \in \mathbb{C}$ 是 $f$ 的孤立奇点, 则

1. $a$可去$\Leftrightarrow$ $f$ 在 $a$ 附近有界$\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$

2. $a$ 为极点 $\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z) = \infty$ $\Leftrightarrow$ 存在正自然数 $n$, 使得 $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$, 其中 $g$ 在 $a$ 解析且 $g(a) \neq 0$.

3. $a$ 为本性奇点$\Leftrightarrow$ $f$ 在 $a$ 的 *Laurent* 展式有无穷多负幂项 $\Leftrightarrow$ $f$ 在 $a$ 的任何邻域的像集在 $\mathbb{C}$ 中稠密。

当 $a = \infty$ 时如何分类?

例. 若 $f$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数且 $\infty$ 是可去奇点或极点， 则 $f$ 是有理函数.

## 4. 留数定理的应用：求定积分

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

例. $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{4}\pi$, $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0$, $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^2}dx = ?(0 < \alpha < 1)$, $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$

## 5. 留数定理的应用：对数留数定理和幅角原理

【幅角原理】（由Taylor 定理导出的局部表达式得到 $f'/f$ 零点的留数， 然后得到：） 对于有限条可求长Jordan曲线围出的有界区域 $D$, 以及 $\overline{D}$ 上任意解析函数 $f$, 当 $f$ 在 $\partial D$ 上没有零点时，

$$2\pi i\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_{z\in\partial D}Argf(z) = f \text{ 的零点总个数}$$

由【幅角原理】可以证明【Rouche定理】（题目很多，好像还没有考过！），【Hurwitz定理】，【单叶解析函数列的内闭一致收敛的极限函数的性质定理】【开映射定理】等

## 6. Schwarz引理

【Schwarz引理】

【Schwarz-Pick引理】

【单位圆盘上的解析自同构群】

例. 若 $f:\Delta\to\Delta$ 且 $f(\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=0$, 则 $|f(0)|\le\frac{1}{2}$.

## 7. 调和函数的平均值性质的应用： Poisson 公式

【调和函数平均值公式】 $u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta$.

【Poisson 公式】 若 $u$在$\Delta$ 调和， 在$\bar{\Delta}$ 连续， 则

$$\begin{aligned} u(z)=P_u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}u(e^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}+z}u(e^{i\theta})d\theta \\ &= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}+z}u(e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

【Schwarz 定理】若 $u$ 在$\partial\Delta$ 上分段连续，则在 $u$ 的任一连续点 $\zeta_0\in\partial\Delta$,

$$\lim_{\Delta\ni z\to\zeta_0}P_u(z)=u(\zeta_0).$$

【调和函数的另一等价定义】(由Schwarz 定理得到) 连续函数跳河的充要条件是有平均值性质。

【调和函数的一个性质】 设 $u_1, u_2$ 在 $\bar{U}$ 调和， $U$ 是由可有限条求长Jordan曲线围成的区域，则

$$\int_{\partial U}u_1\,{}^*du_2-u_2\,{}^*du_1=\int_{\partial U}u_1\frac{\partial u_2}{\partial n}ds-u_1\frac{\partial u_1}{\partial n}ds=0.$$

【穿孔圆盘上的调和函数平均值公式】若 $u$ 在$\Delta^*=\Delta\setminus\{0\}$ 调和， 则存在$\alpha,\beta$ 使得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta=\alpha+\beta\log r.$$

【调和函数的等价定义】 下面三个定义等价：

（1）. 若 $u$ 在区域 $D$ 上有二阶连续偏导并满足 $\Delta u=0$ （调和函数原定义）；

（2）. 若 $u$ 在区域 $D$ 上连续且二阶偏导数存在并满足 $\Delta u=0$, 则 $u$ 调和（不要求二阶导数连续了）（这是Poisson公式及Schwarz 定理的应用， 还要结合调和函数最大最小值原理）；

（3）. $u$ 在区域 $D$ 上有平均值性质（这也是Poisson公式及Schwarz 定理的应用， 还要结合调和函数最大最小值原理）.

【调和函数的对称开拓】设区域$\Omega$ 关于 $x$ 轴对称， $\Omega^+,\Omega^-,I$ 分别表示其在上半、下半平面及 $x$ 轴上的部分。若 $v$ 在$\Omega^+$ 调和，在 $\Omega\cup I$连续且 $u(I)=\{0\}$. 则 $v$ 可以开拓成 $\Omega$ 上的调和函数 使得 $v(z)=-v(-z)$.

【Schwarz对称开拓原理】设 $\Omega$同上， 若 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 在 $\Omega^+$ 解析且当 $z$ 从 $\Omega$ 趋于 $I$ 时， $\mathrm{Im}\,f(z)$ 趋于0, 则 $f$ 可以开拓成 $\Omega$ 上的解析函数 $F$, 使得

$$F(z) = \begin{cases} f(z), z \in \Omega^+ \\ \overline{f(\overline{z})}, z \in \Omega^- \end{cases}.$$

【Schwarz对称开拓原理】若 $\Omega$ 关于圆周 $C_1$ 对称， $C_2$ 也是一个圆周， $\Omega_{in}$ 是 $\Omega$ 在院内的部分，$\Omega \cap C_1 = I$, $f(z)$ 在 $\Omega_{in}$ 解析且当 $z \in \Omega_{in}$ 趋于 $I$ 时， $f(z)$ 趋于圆周 $C_2$，则 $f(z)$ 可以延拓为 $\Omega$ 上的解析函数 $f^*$， 且

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z), z \in \Omega_{in} \\ \varphi_{C_2} \circ f \circ \varphi_{C_1}(z) \end{cases}$$

其中$\varphi_{C_j}$ 表示关于圆周 $C_j$ 的反演变换（即对称变换：把 $\overline{\mathbb{C}}$ 的点映为该点关于 $C_j$ 的对称点）。$C_1, C_2$ 可以有一个是直线，也可以两个都是直线。

例. 若 $f$ 是从开圆环 $A(r_1, R_1)$ 到开圆环 $A(r_2, R_2)$ 上的共形映射， 则 $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

例. 设$R_j$ 是以 $0, a_j, a_j + b_j i, b_j i$ 为顶点的矩形 $(a_j, b_j \in \mathbb{R}^+)$。如果 $f$ 是从 $R_1$ 到 $R_2$ 的共形映射，在 $\overline{R_1}$ 上连续，且把水平边映为水平边， 竖直边映为竖直边。则 $f(z) = \frac{a_2}{a_1} z$.

## 8. 解析函数的沿曲线的解析开拓，多值函数，单值性定理。

看手写讲稿即可。

## 9 Harnack不等式 与 Harnack 原理.

【Harnack不等式】（Poisson公式的应用） 若 $u$ 在 $|z| \leq \rho$ 调和非负， 则

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} u(0) \leq u(re^{i\theta}) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} u(0)$$

【Harnack原理】逐点递增的调和函数列要么一直趋于$\infty$，要么内闭一致收敛于一个调和函数.

## 10. Weierstrass 定理的应用：$\mathbb{C}$ 上亚纯函数的部分分式分解和因式分解.

【无穷级数收敛、绝对收敛的定义】

【部分分式分解定理】设 $\{a_n\} \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$，满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$P_n(z)$ 是多项式序列，则存在一列多项式 $p_n(z)$，使得

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - p_n(z)\right)$$

在$\mathbb{C}\backslash\{a_n\}$ 上 内闭一致收敛于一个亚纯函数. 所有以 $\{a_n\}$ 为极点， 并在每个 $a_n$ 的主部为$P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ 的函数都可表示成这个形式再加上一个整函数.

例.

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

# 例.

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}.$$

# 例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

【因式分解】设 $\{a_n\} \subset \mathbb{C}^*$ 是趋于$\infty$ 的复数列. 则存在一列自然数 $m_n$ 使得

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^{m_n}}{m_n a_n^{m_n}}}$$

在$\mathbb{C}$上内闭一致收敛于一个解析函数。任何一个以 $\{a_n\}$ 为零点集的解析函数都可表示成

$$e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^{m_n}}{m_n a_n^{m_n}}}$$

的形式.

# 例.

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

【$\Gamma$ 函数】

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, z \in \mathbb{C}.$$

【Stirling 公式】

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{J(z)}$$

【Stirling公式应用】$\Gamma$ 的两种定义等价

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0.$$

## 11 正规族与共形映射

【Montel 正规定理】： 区域 $D$ 上内闭一致有界的解析族 $\mathcal{F}$ 是 $D$ 上正规族（即$\mathcal{F}$ 中任何序列有内闭一致收敛的子列）。

【解析函数族的等度连续性】区域 $D$ 上内闭一致有界的解析族 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 的任何紧集上等度连续。

【Arzela-Ascoli定理】紧集上的等度连续函数族是正规族。

【Riemann 映照定理】

【边界对应原理】（知道即可）

## 12. 次调和函数与 Dirichlet 问题的解

【次平均性质定义】

【次调和函数的定义】连续有次平均性质

【次调和函数的性质】见手写讲义上的4条及作业

【Dirichlet 问题的提法】见手写讲义

【Perron 族】设 $D$ 是一个有界区域，$f$ 是 $\partial D$ 上的有界函数（没假设连续）。则把 $D$ 上满足下列条件的所有次调和函数 $v$ 的集合 $\mathcal{B}$ 叫Perron 族：

$$\forall \zeta \in \partial D, \quad \overline{\lim_{D \ni z \to \zeta}} v(z) \le f(\zeta).$$

【Perron 定理】$u = \sup_{v \in \mathcal{B}} v(z)$ 是 $D$ 上的调和函数。

【Dirichlet 问题的解】设 $D$ 是一个区域有界区域，$\mathbb{C} \setminus D$ 的每个连通分支都不是单点集，则 $D$ 上的 Dirichlet 问题有解：对$\partial D$ 上的任意连续函数 $f$，有 $\bar{D}$ 上的连续函数 $u$ 使得 $u$ 在 $\partial D$ 上的值与 $f$ 重合且 $u$ 在 $D$ 解析（$u$ 由Perron 定理给出）.

用Dirichlet 问题的解的存在性可以证明Riemann 映照定理，也可以给出多连通域的标准表示（调和测度）（了解知道大致步骤即可）。