补充练习(3)-答案

1.(1) 证明:"$\Rightarrow$" 显然

"$\Leftarrow$" 设 $\varphi(1,r)=(a_r,b_r)$ 则 $\varphi((1\,2)(1\,r))=(a_2,b_2)\cdot(a_r,b_r)$ 但是 $(1\,2)(1\,r)=(1\,2\,r)$ 是3阶元，则 (a_2,b_2) 和 (a_r,b_r) 有公共元，不妨设 $a_r\in\{a_2,b_2\}$ 若 $s\neq r$ $a_r=a_2$，则 $a_s=a_2$ 否则若 $a_s=b_2$，因为 $(1\,2\,r)(1\,2\,s)$

$=(r\,1\,2)(1\,2\,s)=(r\,2)(1\,2)(1\,2)(1\,s)=(1\,s)(2\,r)$

$$
\begin{aligned}
\varphi((1\,2\,r)(1\,2\,s)) &= (a_2,b_2)(a_r,b_r)(a_2,b_2)(a_s\,b_s)\\
&=(a_2,b_2)(a_2,b_r)(a_2,b_2)(b_2,b_s)\\
&=(a_2,b_2,b_r)(b_2,a_2,b_s)\\
&=(b_r,b_2)(a_2\,b_2)(a_2\,b_2)(b_2\,b_s)\\
&=(b_r,b_2)(b_2,b_s)=(b_2,b_r,b_s)
\end{aligned}
$$

比较阶数，$(1\,2\,r)(1\,2\,s)$ 的阶数 $=2$，(b_2,b_r,b_s) 阶 $=3$. 矛盾！因此 $a_s=a_2$ 即 $a_r=a_2$ $\forall r=2,\cdots,n$.

$\varphi(1,r)=(a_2,b_r)$ $r\geqslant 3$ 若 $r\neq s$，则 $b_r\neq b_s$，令 $x\in S_n$

$x(1)=a_2$，$x(r)=b_r$ $r\geqslant 2$.，$\varphi(1,r)=(a_2,b_r)=x(1\,r)x^{-1}$

$\Rightarrow \varphi=\mathrm{Inn}(x)$ 是内自同构.

由 扫描全能王 扫描创建

(2) 证明：设 $\varphi \in$ ~~S_n~~ $\mathrm{Aut}(S_n)$，$\varphi(\overset{a\neq b}{(a\ b)}) = (x_1\ y_1)\cdots(x_k\ y_k)$

且 (x_i, y_i) $i=1,\cdots,k$ 互不相交，则 φ 将任意对换均映成 ?

k 个互不相交对换乘积，反之，亦然

令 $T_k = \{(a_1\ b_1)(a_2\ b_2)\cdots(a_k\ b_k) \mid (a_i, b_i)\ i=1,\cdots,k \text{ 互不相交}\}$

φ 诱导了一个双射 $T_1 \xrightarrow{\varphi} T_k$

T_k 中元素个数为 $\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdots\frac{(n-2k-2)(n-2k-1)}{2} = \frac{n!}{k!\,2^k(n-2k)!}$

$n=4$ $|T_2| = \frac{1}{2}|T_1|$ 即当 $n\neq 6$ 时，$|T_k| \neq |T_1|$，$k>1$

$n \geq 8$ $|T_k| > |T_1|$

$\Rightarrow k=1$，即 φ 将对换映成对换，由 (1)，φ 是内自同构

即 $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Inn}(S_n) \cong S_n/C(S_n) \cong S_n$ $(n\neq 6)$

(3) 由 (2)，$\varphi_0 \notin \mathrm{Inn}(S_6)$，则 φ_0 将任一对换变为 $(ab)(cd)(ef)$（互不相交）。事实上 $[\mathrm{Aut}(S_6):\mathrm{Inn}(S_6)] = 2$.

$\varphi_0((12)) = (12)(34)(56)$ $\varphi_0((34)) = (14)(23)(56)$

$\varphi_0((23)) = (16)(24)(35)$ $\varphi_0((45)) = (16)(25)(34)$

$\varphi_0((56)) = (13)(24)(56)$

(4) "$\Leftarrow$" 设 $u_i = (1,2,i)$ $u_j = (1,2,j)$ $i \neq j$

$u_i u_j = (i\ 1\ 2)(1\ 2\ j) = (i\ 2)(1\ 2)(1\ 2)(1\ j) = (i\ 2)(1\ j)$ 的阶

由 扫描全能王 扫描创建

$=2$. $\varphi(v_i)=(a\ b\ c)$ $\varphi(v_j)=(d\ e\ f)$ 则 $(a\ b\ c)(d\ e\ f)$ 有阶数2. 即两个3-循环有两个相同元且次序一致，不妨设 $a=d, b=e$ 因此 $\varphi(v_i)=(a\ b\ v_i)$.

令 $x\in S_n$, $x(1)=a$, $x(2)=b$, $x(i)=v_i$ $(i\geq 3)$. 则

$$\varphi = \mathrm{Inn}(x)|_{A_n}.$$

(5) 若 $\varphi\in \mathrm{Aut}(A_n)$ σ 是一个3-循环，则 $\varphi(\sigma)$ 的周期 $=3$, 是 $k\geq 1$ 个不相交3-循环之积 若 $n<6$, 则 $k=1$, 由(4)证得, 若 $n\geq 6$. 正如(2)的证明.

令 $T_k=\{k$ 个3循环之积 $\mid$ 3-循环互不相交$\}$

$$|T_k| = n!/(3^k k!(n-3k)!)$$

当 $n\neq 6$, $|T_k|\neq |T_1|$ $\Rightarrow$ $n>6$ 时, $k=1$. 由(4)证毕.
$k>1$

2.(1) 属于 $1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}$ 型的置换形如:

$$\underbrace{\overset{1}{(\cdot)}\cdots(\cdot)}_{c_1\text{个}}\ \underbrace{\overset{2}{(\cdot\ \cdot)}\cdots(\cdot\ \cdot)}_{c_2\text{个}}\cdots\underbrace{\overset{k}{(\cdot\ \cdot\cdots\cdot)}\cdots(\cdot\ \cdot\cdots\cdot)}_{c_k\text{个}}\cdots$$

其中的点刚好是1到n的全排列, 有重复:

$(a_1\cdots a_k)=(a_2a_3\cdots a_ka_1)=\cdots$ 共k次 c_k 个k-循环重复 k^{c_k} 次, c_k 个k-循环乘积可交换, 重复 $c_k!$ 次

由 扫描全能王 扫描创建

(2) 由Burnside引理，轨道数

$$L=\frac{1}{|G|}\sum_{a_i\in G}\left|Fix_{a_i}(\mathscr{C}^n)\right|.$$

设 $\sigma\in G$ 产生的不相交循环为 $(a_1a_2\cdots a_{i_1})(a_{i_1+1}\cdots a_{i_2})\cdots(\cdots a_n)$

则在一个循环内的对象被染上相同颜色，保持相应的 $x\in\mathscr{C}^n$ 在 a_i 作用下不变. 因此 $Fix_{a_i}(\mathscr{C}^n)=m^{c(a_i)}$.

(3) 解: 可能的置换为 ① 不动；② 沿过顶点和对面中心点直线旋转 120°，或240° ③ 沿过对边中点的直线旋转180°.

对应的置换写成循环形式

① (1)(2)(3)(4)

② (1)(234), (1)(432), (2)(134), (2)(431), (3)(124), (3)(421), (4)(132), (4)(123)

③ (12)(34), (13)(24), (14)(23)

$$\text{方案数}=\frac{4^4+4^2\times 11}{12}=36.$$

由 扫描全能王 扫描创建

3. (1)

证　若 $HxK \cap HyK \neq \varnothing$，则有

$$a \in HxK \cap HyK.$$

令 $a = h_1xk_1 = h_2yk_2$，($h_i \in H$，$k_i \in K$)，则

$$x = h_1^{-1}h_2yk_2k_1^{-1}.$$

于是对任意 $h \in H$，$k \in K$，有

$$hxk = (hh_1^{-1}h_2)y(k_2k_1^{-1}k) \in HyK.$$

从而 $HxK \subseteq HyK$. 同理有 $HyK \subseteq HxK$. 因此

$$HxK = HyK.$$

注　本题意味着群 G 可按重陪集分解成并，即

$$G = Hx_1K \cup Hx_2K \cup \cdots,$$

其中 $Hx_iK \cap Hx_jK = \varnothing$，$i \neq j$.

(2)

证　1) 设 $HxK \supseteq yK$，则由于 $y \in yK$，故

$$y \in HxK.$$

令 $y = hxk$ ($h \in H$，$k \in K$)，则由于 K 是子群，故

$$hx = yk^{-1} \in Hx \cap yK.$$

2)设 $Hx \cap yK \neq \varnothing$，则有 $a \in Hx \cap yK$，令

$$a = hx = yk, \qquad (h \in H,\ k \in K)$$

则 $y = hxk^{-1} \in HxK$. 从而由于 K 是子群，故

$$yK \subseteq (HxK)K = HxK.$$

即
$$yK \subseteq HxK.$$

(3)

证　设 $|H| = m$，$H = \{h_1, h_2, \cdots, h_m\}$，且

$$|K| = n, \qquad K = \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}.$$

又令 $D = K \cap x^{-1}Hx$，$(K:D) = r \leqslant n$，且

$$K = Dk_1 \cup Dk_2 \cup \cdots \cup Dk_r$$

$$Dk_s \cap Dk_t = \varnothing, \quad 1 \leqslant s, t \leqslant r, \quad s \neq t.$$

即 $h_ih_s^{-1} \notin D$.

1) h_ixh_j ($i = 1, 2, \cdots, m$，$j = 1, 2, \cdots, r$)是 HxK 中 mr 个互异的元素：因若 $h_ixk_s = h_jxk_t$，其中 $1 \leqslant s, t \leqslant r$，$s \neq t$，而 $1 \leqslant i, j \leqslant m$，则

$$x^{-1}Hx \ni x^{-1}h_jh_ix = k_tk_s^{-1} \in K.$$

即 $k_tk_s^{-1} \in D = K \cap x^{-1}Hx$，与 $h_ih_s^{-1} \notin D$ 矛盾.

同理，当 $1 \leqslant i, j \leqslant m$，$i \neq j$ 时，则对任意 $1 \leqslant s, t \leqslant r$ 亦有 $h_ixh_s \neq h_jxh_t$. 因此

$$h_ixk_j (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, r)$$

是 HxK 中 mr 个互异的元素，从而

$$|HxK| \geqslant mr.$$

2）HxK 中除以上 mr 个互异的元素外，余下的元素形如

$$h_ixk_u,\quad (i=1,2,\cdots,m;\ u=r+1,\cdots,n).$$

由于 $k_u\in K=Dk_1\cup Dk_2\cup\cdots\cup Dk_r$，故 $k_u\in$ 某个 Dk_s，$(1\leqslant s\leqslant r)$，于是

$$k_uk_s^{-1}\in D=K\cap x^{-1}Hx,\quad k_uk_s^{-1}\in x^{-1}Hx.$$

令 $k_uk_s^{-1}=x^{-1}h_jx$，$(h_j\in H,\ 1\leqslant j\leqslant m)$. 则 $xk_u=h_jxk_s$，于是有

$$h_ixk_u=(h_ih_j)xk_s,$$

即 HxK 中每个元素都在 1）中所说的 mr 个元素中，因此 $|HxK|=mr$. 即

$$|HxK|=|H|\cdot(K:K\cap x^{-1}Hx).$$

(4)

证 1）设 $M=\{(K\cap x^{-1}Hx)k\,|\,k\in K\}$，即子群 $K\cap x^{-1}Hx$ 在 K 中全体右陪集作成的集合. 再令

$$\varphi:\ HxK\longrightarrow M,\quad Hxk\longmapsto(K\cap x^{-1}Hx)k.$$

若 $Hxk_1=Hxk_2(k_1,k_2\in K)$，则

$$(xk_1)(xk_2)^{-1}\in H,\qquad xk_1k_2^{-1}x^{-1}=h\in H,$$

$$k_1k_2^{-1}=x^{-1}hx\in x^{-1}Hx.$$

从而 $k_1k_2^{-1}\in K\cap x^{-1}Hx$，即

$$(K\cap x^{-1}Hx)k_1=(K\cap x^{-1}Hx)k_2.$$

因此 φ 是 HxK 中含 H 的右陪集到 M 的一个映射.

由上倒推回去即知 φ 为单射，又 φ 显然是满射，从而为双射. 即 HxK 中含 H 的右陪集的个数等于

$$(K:K\cap x^{-1}Hx).$$

2）设 $\overline{M}=\{h(xKx^{-1}\cap H)\,|\,h\in H\}$，则类似易知

$$\psi:\ hxK\longmapsto h(xKx^{-1}\cap H)$$

是 HxK 到 $\overline{M}$ 的一个双射，即 HxK 中含 K 的左陪集的个数等于$(H:xKx^{-1}\cap H)$. 又由 316 题知，

$$(H:xKx^{-1}\cap H)=(x^{-1}Hx:x^{-1}(xKx^{-1}\cap H)x)$$
$$=(x^{-1}Hx:K\cap x^{-1}Hx).$$

注 1° 由以上证明可知，当 $K=H$ 时，重陪集 HxH 中所含的 H 的右陪集个数与所含的 H 的左陪集个数相等，而且都等于

$$(H:H\cap x^{-1}Hx).$$

2° 以上证明只用到子群 H 有限. 因此，只要 H 有限，对任意群 G 均存在 $x_1,x_2,\cdots\in G$ 使

$$G=x_1H\cup x_2H\cup\cdots=Hx_1\cup Hx_2\cup\cdots.$$

(5)

证 由(1)，可设

$$G=Ha_1H\cup Ha_2H\cup\cdots\cup Ha_nH,\qquad(1)$$

其中 $n\leqslant r$，$Ha_iH\cap Ha_jH=\varnothing$，$1\leqslant i,\ j\leqslant n$，$i\neq j$.

又对固定的 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$，令

$$Ha_kH=h_1a_kH\cup h_2a_kH\cup\cdots\cup h_{m_k}a_kH,$$

其中 $h_1,h_2,\cdots,h_{m_k}\in H$，且

$$h_sa_kH\cap h_ta_kH=\varnothing,\quad 1\leqslant s,t\leqslant m_k,\quad s\neq t.\qquad(2)$$

将(2)代入(1)得

$$G=\bigcup_{k=1}^{n}\Big(\bigcup_{i=1}^{m_k}h_ia_kH\Big),\qquad(3)$$

其中 $h_ia_sH\cap h_ta_jH=\varnothing$，$(i,s)\neq(t,j)$.

即(3)是 G 关于 H 的左陪集 h_ia_kH 的不相交的并.

同理有

$$G=\bigcup_{k=1}^{n}\Big(\bigcup_{i=1}^{m'_k}Ha_kh'_i\Big),\qquad(4)$$

其中 $h'_i\in H$ 且当 $(i,s)\neq(t,j)$ 时，$Ha_sh'_i\cap Ha_jh'_t=\varnothing$. 即(4)是 G 关于 H 的右陪集 $Ha_kh'_i$ 的不相交的并.

但由上题知，Ha_kH 中含 H 的左陪集的个数与所含 H 的右陪集的个数相等，即

$$m_k=m'_k,\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

故由(3)、(4)两式知

$$\begin{aligned}G&=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{i=1}^{m_k}h_ia_kH=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{i=1}^{m_k}Ha_kh'_i\\&=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{i=1}^{m_k}h_ia_kh'_iH=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{i=1}^{m_k}Hh_ia_kh'_i,\end{aligned}\qquad(5)$$

即(5)式为 G 关于子群 H 的左、右陪集分解式. 但是 $(G:H)=r$，故

$$m_1+m_2+\cdots+m_n=r,$$

即 $h_ia_kh'_i(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,m_k)$ 共有 r 个. 令它们分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_r$. 则由(5)知有

$$G=x_1H\cup x_2H\cup\cdots\cup x_rH=Hx_1\cup Hx_2\cup\cdots\cup Hx_r.$$