半直积 (Semidirect product)

设 G 群, $H, K \leq G$

G 是 H 和 K 的直积 $\Longleftrightarrow H, K \lhd G,\ H\cap K=\{e\},\ HK=G$

推论: (1) $\forall h\in H, k\in K,\quad hk=kh$ (2) $G\cong H\times K$

G 是 H 和 K 的半直积 $\Longleftrightarrow H\lhd G,\ H\cap K=\{e\},\ HK=G.$

例: $G=S_3,\ H=\{(1),(123),(132)\}\quad K=\{(1),(12)\}$

性质: (1) 若 $hk=h'k'$, $h,h'\in H$, $k,k'\in K$, 则 $h=h', k=k'$

这是因为 $h^{-1}h'=k(k')^{-1}\in H\cap K=\{e\}$

(2) 定义 $H\times K$ 上的乘法

$$(h,k)(h',k')=(hkh'k^{-1},\ kk')$$

则 $H\times K$ 是一个群: $(h,k)^{-1}=(k^{-1}h^{-1}k,\ k^{-1})$

幺元: (e_H, e_K)

$H\times\{e_K\}\lhd H\times K,\quad \{e_H\}\times K\leq H\times K.$

记作 $H\rtimes K$

群同态

更一般地, 定义 $\varphi: K\longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$, 如下是一种方式

例如: $k\longmapsto \mathrm{Inn}(k): h\longmapsto khk^{-1}$

$H\rtimes K$ 也记作 $H\times_{\varphi} K$

$H \underset{\varphi}{\times} K$ 乘法 $(h,k)(h',k') = (h\varphi(k)(h'), kk')$

例: $H = \mathbb{Z}_n$ $= \langle x \rangle$, $K = \mathbb{Z}_2$ $= \langle y \rangle$, $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_n)$

$\bar{0} \longmapsto$ 恒等

$\bar{1} \longmapsto (\bar{x} \longmapsto \bar{x}^{-1})$

令 $G = \mathbb{Z}_n \underset{\varphi}{\times} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\simeq} D_{2n}$ (二面体群)

$= \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, \ bab = a^{-1} \rangle$

$$(x, 1) \longmapsto a$$

$$(1, y) \longmapsto b$$

$$(1, y)(x, 1)(1, y) = (\varphi(y)(x), y)(1, y) = (\varphi(y)(x), y^2)$$

$$= (x^{-1}, 1) = (x, 1)^{-1}$$

$H \rtimes K \xrightarrow[\cong]{\Phi} G = HK$ (半直积)

$$(h, k) \longmapsto hk$$

$$\Phi((h,k)(h',k')) = \Phi((hkh'k^{-1}, kk')) = hkh'k'$$

$$= \Phi((h,k))\Phi((h',k'))$$