作业：1, 2, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 13

假定 $\varphi(z)$ 连续.

可以不写在作业上，但要会做，讲稿有答案.

第三章 全纯函数的积分表示

3.1. 复变函数的积分

设 $f(z)$ 是定义在可求长曲线 $\gamma: z=z(t)$, $t\in[a,b]$ 上的复值函数. 如果下述两个曲线积分

$$\int_\gamma u\,dx-v\,dy \quad 和 \quad \int_\gamma v\,dx+u\,dy$$

都存在，则称 $f(z)$ 沿 γ 可积，而积分是

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\gamma v\,dx+u\,dy.$$

复积分 $\int_\gamma f(z)dz$ 的另一定义：任给 $[a,b]$ 的一个分割

$$T:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

相应地在 γ 上得到分点

$$z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_n$$

这些分点将 γ 分为 n 段曲线弧

$$\overset{\frown}{z_0z_1},\ \overset{\frown}{z_1z_2},\ \cdots,\ \overset{\frown}{z_{n-1}z_n}$$

在每个 $\overset{\frown}{z_jz_{j+1}}$ 上取点 ζ_j，做和

$$I(T)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\zeta_i)(z_{i+1}-z_i)$$

若 $\lambda(T)=\max\limits_{0\le j\le n-1}|t_{j+1}-t_j|\to0$ 时，无论 t_j、ζ_j 怎样取，$I(T)$ 有极限 I，则称 f 沿 γ 可积，并记

$$I=\int_\gamma f(z)\,dz.$$

- 由此定义直接看出，两个积分定义等价。

命题3.1.1. 当γ可求长，f在γ上连续时，$\int_\gamma f(z)\,dz$存在。

命题3.1.2. 当γ光滑且u,v在γ上连续时，有

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b [u\,x'(t) - v\,y'(t)]\,dt + [v\,x'(t) + u\,y'(t)]\,dt$$

例3.1.3 设γ是从α到β的可求长曲线。证明

$$\int_\gamma dz = \beta - \alpha.$$
$$\int_\gamma z\,dz = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

证：$$\int_\gamma dz = \lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta z_j = \beta - \alpha.$$

这里$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta z_j$是相应于划分$z_0, \cdots, z_n$的Riemann和，取点在每个弧段$\widehat{z_j z_{j+1}}$上的分点$\xi_j$，则

$$\int_\gamma z\,dz = \lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{j=0}^{n} \xi_j (z_{j+1} - z_j)$$
$$= \underbrace{\lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{j=0}^{n} \left(\xi_j - \frac{z_{j+1}+z_j}{2}\right)(z_{j+1} - z_j)}_{I = I(T, \{\xi_j\})} + \underbrace{\lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{j=0}^{n} \frac{z_{j+1}+z_j}{2}(z_{j+1} - z_j)}_{II(\delta)}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

$I \to 0$ 的证明：记γ长度为L，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当

$|\Delta z_i| < \delta$时，

$$\left|\xi_j - \frac{z_{j+1} - z_j}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2L} \text{ 且 } \sum_{j=0}^{n} |\Delta_j| < 2L$$

从而 $|I| \leq \sum \frac{\varepsilon}{2L} |\Delta z_j| \leq \varepsilon.$

$\therefore\ I(T, \{\xi_j\}) \to 0 \ (\delta(T) \to 0).$

例3.1.4. 求 $\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}$.

解. 原式 $=\int_0^{2\pi}\frac{r i e^{i\theta}d\theta}{r^n e^{in\theta}}$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}d\theta$$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}(\cos(1-n)\theta+i\sin(1-n)\theta)d\theta$$

$$=\begin{cases}0, & n\neq 1\\ 2\pi, & n=1.\end{cases}$$

重要: $\int_0^{2\pi}\frac{dz}{z-a}=2\pi i$, $\int_0^{2\pi}\frac{dz}{(z-a)^n}=0$, $(n\in\mathbb{Z}^+\backslash\{1\})$

命题3.1.5. 若 f,g 在可求长曲线 $\gamma: z=z(t), t\in[0,1]$ 上连续, 则

(i). $\int_{\gamma^-}f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$. 其中 γ^- 表示与 γ 反向的同一曲线.

(ii). 若将 γ 分为两段曲线: $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, 则

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_2}f(z)dz.$$

注. 任意两条曲线 γ_1,γ_2 可以组成曲线 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$. 这时记

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2}f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_2}f(z)dz.$$

命题3.1.6. 如果 γ 的长度为 L, $M=\sup_{z\in\gamma}|f(z)|$, 则

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le\int_\gamma|f(z)||dz|=\int_\gamma|f(z)|ds<ML$$

证: $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|=\lim\left|\sum_{k=1}^{n-1}f(\xi_k)\Delta z_k\right|\le\lim\sum_{k=1}^{n-1}|f_k(\xi)||\Delta z_k|$

$\le\lim M\sum_{k=1}^{n-1}|\Delta z_k|=ML.$

$\int_\gamma|f(z)||d\Delta z|$

$=\int_\gamma|f(z)|ds.$

习题3.1 部分解答

例(P93 11题). 设f在z_0处连续，证明：

(i). $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta=f(z_0)$;

(ii). $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=f(z_0)$.

证：(i). 由连续性(i)似乎显然，但严格证明得这样：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})\,d\theta-f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(z+re^{i\theta})-f(z_0)\right)d\theta \quad (f(z_0)\text{为常数})$$

由f在z_0连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<r<\delta$时，

$$|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|<\varepsilon$$

进而

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)\right)d\theta\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|\,d\theta\le\varepsilon$$

(i) 得证.

(ii). $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}i\,f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta\to f(z_0)\,(r\to 0)$.

12. 设 $D=\{z\in\mathbb{C}: \theta_0<\arg(z-a)<\theta_0+\alpha\}\ (0<\alpha\le 2\pi)$，$f$ 在 $\overline{D}\setminus\{a\}$ 上连续，证明

(i). 如果 $\lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\in\overline{D}\setminus\{a\}}}(z-a)f(z)=A$，那么

$$\lim_{r\to 0}\int_{\substack{|z-a|=r\\ z\in\overline{D}\setminus\{a\}}} f(z)\,dz = i\alpha A.$$

(ii). 如果 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\overline{D}}}(z-a)f(z)=B$，那么

$$\lim_{\substack{|z-a|=R\\ z\in\overline{D}}}\int_{|z-a|=R} f(z)\,dz =$$

证. (i) 记 $|z-a|=r$ 在 $\overline{D}$ 中的弧段为 Γ_r，则

$$\int_{\Gamma_r}\frac{A}{z-a}\,dz=\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha}\frac{A\,r\,i e^{i\theta}}{re^{i\theta}+a-a}\,d\theta = A\alpha i\ (dre^{i\theta}=(re^{i\theta})'_\theta d\theta = rie^{i\theta}\,d\theta),$$

另外 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<r<\delta$ 时，$|(z-a)f(z)-A|<\varepsilon$. 从而

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz - i\alpha A\right|\\ =&\left|\int_{\Gamma_r}\frac{(z-a)f(z)-A}{z-a}\,dz\right|\le\int_{\Gamma_r}\frac{|(z-a)f(z)-A|}{|z-a|}\,ds\\ \le&\int_{\Gamma_s}\frac{\varepsilon}{r}\,ds = 2\pi\varepsilon.\end{aligned}$$

从而 (i) 中结论成立.

(ii). 与 (i) 类似.

13. 设 D 是域，$f\in C^1(D)$. 证明：

$$f\in H(D)\iff \forall\,a\in D,\ \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz=0.$$

证："$\Rightarrow$"：设 $f\in H(D)$，$a\in D$，则

$$f(z)=f'(a)(z-a)+f(a)+o(z-a).$$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<r=|z-a|<\delta$ 时，$\overline{B(a,r)}\subset D$ 且 $|o(z-a)|<\varepsilon r$. 注意到对 $\forall r<\delta$，$\int_{|z-a|=r}f'(a)(z-a)dz=0$，$\int_{|z-a|=r}f(a)dz=0$，有

$$\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f(z)dz\right|=\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}[f(a)+f'(a)(z-a)+o(z-a)]dz\right|$$
$$\le\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}o(z-a)dz\right|$$
$$\le\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}\varepsilon r\,ds=\frac{1}{\pi r^2}\varepsilon r\cdot 2\pi r=2\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|}f(z)dz=0.$$

代表 $f(z)-f'(a)(z-a)-f(a)$.

"$\Leftarrow$" $\forall a\in D$，$f(z)=f_z'(a)(z-a)+f_{\bar z}'(a)(\bar z-\bar a)+o(z-a)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<r=|z-a|<\delta$ 时，$|o(z-a)|<\frac{r\varepsilon}{2}$. 从而由假设当 $\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f(z)dz=0$ 时，对充分小 r 有

$$\varepsilon\ge\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f(z)dz\right|=\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}[f_z'(a)(z-a)+f_{\bar z}'(a)(\bar z-\bar a)+o(z-a)]dz\right|$$
$$\ge\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f_{\bar z}'(a)(\bar z-\bar a)dz\right|-\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}\frac{r\varepsilon}{2}ds\right|$$
$$\ge\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f_{\bar z}'(a)(\bar z-\bar a)dz\right|-\varepsilon$$

即：
$$\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f_{\bar z}'(a)\frac{r^2}{z-a}dz\right|=\left|\frac{f_{\bar z}'(a)}{\pi}\int_{|z-a|=r}\frac{1}{z-a}\right|=2|f_{\bar z}'(a)|<2\varepsilon.$$

由 ε 任意性，$f_{\bar z}'(a)=0$. 由 a 的任意性，$f\in H(D)$.