《微分方程1》第七讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年11月08日

回忆微分算子L(D)的定义.

$$L(D) := D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n,$$

其中$D = \frac{d}{dx}$为通常求导算子, $a_1, \cdots, a_n$ 均为实常数. 于是一般常系数线性非齐次方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

可简写作$L(D)y = f(x)$. 若已知齐次方程$L(D)y = 0$的一个基本解组, 那么$y_*(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)f(s)ds$就是非齐方程一个特解. 这里$H(s,x)$是基本解组所对应的Cauchy函数.

以下考虑针对函数类$f(x)=e^{\lambda_0 x}\phi(x)$，这里$\phi(x)$ 为多项式，用待定系数法直接求方程$L(D)y=f(x)$ 的特解. 待定系数法一般说来，比计算Cauchy 形式的特解$y_p(x)=\int_{x_0}^{x}H(s,x)f(s)ds$ 来得更简单快捷. 这个方法的理论基础是如下的两个定理.

待定系数法的理论基础

定理1：若λ_0 不是齐次方程$L(D)y=0$ 的特征值，则非齐次方程$L(D)y=e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解具有形式$y_p(x)=e^{\lambda_0 x}\psi(x)$，其中$\psi(x)$ 为多项式，且$\deg\psi(x)=\deg\phi(x)$.

定理1的证明稍后给出.

定理2：设λ_0 是齐次方程$L(D)y=0$ 的k 重特征值，则非齐次方程$L(D)y=e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解具有形式$y_p(x)=e^{\lambda_0 x}x^k\psi(x)$，其中$\psi(x)$ 为多项式，且$\deg\psi(x)=\deg\phi(x)$.

定理2的证明留作习题.

例一：求方程$y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征多项式为$L(\lambda) = \lambda^2 - 1$, 特征值为$\lambda_{1,2} = \pm 1$. $\lambda_0 = 2$ 不是特征值. 根据定理1可知方程有唯一解具有形式$y_p(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$, 其中$a, b, c$ 为待定常数. 将$y_p(x)$ 代入方程$y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$，约去指数函数并加以整理得$3ax^2 + (8a+3b)x + (2a+4b+3c) = x^2 + 1$. 比较两边的系数得到关于$a, b, c$ 的线性代数方程组

例一，续

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解之得$a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{-8}{9}$, $c = \frac{35}{27}$, 即$y_p(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right)$.

于是非齐次方程$y'' - y = e^{2x}(x^2 + 1)$ 的通解为

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right).$$

解答完毕.

例二：求方程 $(*)\ y''-y=e^{-x}(x+1)$ 的一般解.

解：对应齐次方程的特征多项式为$L(\lambda)=\lambda^2-1$，特征值为$\lambda_1,\lambda_2=\pm1$，$\lambda_0=-1$ 是单重特征值. 根据定理2可知方程有唯一解具有形式$y_p(x)=e^{-x}x(ax+b)=e^{-x}(ax^2+bx)$，其中$a,b$ 为待定常数. 将$y_p(x)$ 代入方程$(*)$，约去因子e^{-x} 并加以整理得$-4ax+2(a-b)=x+1$. 比较两边的系数得到关于$a=-\frac{1}{4}$，$b=-\frac{3}{4}$. 故所求特解为$y_p(x)=-e^{-x}(\frac{x^2}{4}+\frac{-3x}{4})$.
于是非齐次方程$(*)$ 的一般解为

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-e^{-x}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{4}\right).$$

证明: 定义$m+1$ 维线性空间

$$\mathcal{S} := \mathrm{span}\left\{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}\right\},$$

以及映射$L(D):\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, $p(x)\mapsto L(D)p(x)$, $\forall p(\cdot)\in\mathcal{S}$. 显然$L(D)$ 是线性的. 经过一些初等但有些繁琐的计算可知, 映射$L(D)$ 在基底$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}$ 下的表示矩阵记作A, 即

$$L(D)(e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}) = (e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x})A,$$

证明续

则矩阵$\mathbf{A}$ 为如下$m+1$ 阶的上三角矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} L(\lambda_0) & * & \cdots & * \\ & L(\lambda_0) & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & L(\lambda_0) \end{bmatrix}.$$

矩阵$\mathbf{A}$ 中的元素$*$ 代表某些我们目前并不感兴趣的常数. 由于λ_0 不是特征值, 即$L(\lambda_0)\neq 0$. 故矩阵$\mathbf{A}$ 可逆. 于是线性映射$L(D)$ 可逆. 定理1得证. 证毕. □

形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \quad x > 0,$$

的方程称为Euler 型方程，其中$a_1, \cdots, a_n$ 为常数. Euler 型的线性方程可以通过变量替换$x = e^u$ 或$u = \ln x$ 化为常系数线性方程. 理由基于如下引理.

Lemma

设$y(x)$ 在$(0,+\infty)$ 无穷连续可微函数，记$z(u) := y(e^u)$，$u \in (-\infty,+\infty)$，则对任意正整数$k \geq 1$ 下式成立

$$x^k \frac{d^k y(x)}{dx^k}\Big|_{x=e^u} = \left(\frac{d}{du} - (k-1)\right)\cdots\left(\frac{d}{du} - 1\right)\left(\frac{d}{du} - 0\right)z(u).$$

Proof.

证明留作习题. □

例: 求方程$y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0\ (x > 0)$ 的基本解组.

解: 上述方程等价于Euler 方程$x^2y'' + \frac{y}{4} = 0$, 作变换$x = e^u$, 并记$z(u) := y(e^u)$. 简单计算得$z'(u) = e^u y'(e^u)$. 进一步求导得$z''(u) = [e^u y'(e^u)]' = e^{2u}y''(e^u) + e^u y'(e^u)$. 由此得$x^2y''(x)|_{x=e^u} = e^{2u}y''(e^u) = z''(u) - z'(u)$. 将上式带入方程$x^2y'' + \frac{y}{4} = 0$, 即得到关于函数$z(u)$ 的方程$z'' - z' + \frac{z}{4} = 0$. 这是常系数线性方程.

例子续

其特征方程为$\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$, 即$(\lambda-\frac{1}{2})^2=0$. 特征值为$\lambda_1=\frac{1}{2}$, 二重. 于是常系数线性方程$z''-z'+\frac{z}{4}=0$ 有基本解组$e^{\frac{u}{2}}$, $ue^{\frac{u}{2}}$. 再换回变量$u=\ln x$, 即得原方程$y''+\frac{1}{4x^2}y=0$ 的基本解组为$\sqrt{x}$, $\sqrt{x}\ln x$. 解答完毕.

考虑二阶方程$y''+y=0$. 即方程的两个解为$s(x)$ 和$c(x)$, 它们分别满足初值条件

$$\begin{cases} s(0)=0, \\ s'(0)=1, \end{cases} \quad \begin{cases} c(0)=1, \\ c'(0)=0. \end{cases},$$

(实际上$s(x)=\sin x$, $c(x)=\cos x$). 显然这两个解线性无关, 并且它们的最大存在区间均为$(-\infty,+\infty)$. 以下我们将仅根据方程$y''+y=0$ 以及初值条件, 来导出解$s(x)$ 和$c(x)$ 的若干性质, 无需任何三角函数知识.

Claim 1: 导数$s'(x)$ 有正零点

<u>Claim 1</u>：存在$\xi > 0$，使得$s'(\xi) = 0$.

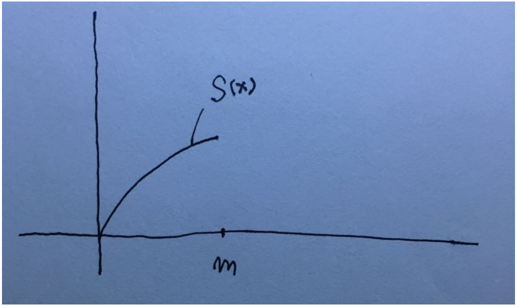
<u>证</u>：若不然，则$s'(x) > 0$, $\forall x > 0$. 这说明$s(x)$ 在$(0, +\infty)$ 上严格单调上升. 根据初值条件$s(0) = 0$, $s'(0) = 1$ 可知存在$\varepsilon > 0$，使得$s(\varepsilon) > 0$. 于是$s(x) \geq s(\varepsilon) > 0$, $\forall x > \varepsilon$. 再根据方程$s''(x) + s(x) = 0$ 可知$s''(x) = -s(x) < -s(\varepsilon) < 0$, $\forall x > \varepsilon$. 积分得$s'(x) - s'(\varepsilon) < s(\varepsilon)(x - \varepsilon)$, $\forall x > \varepsilon$.

$$\text{即}\quad s'(x) < s'(\varepsilon) - s(\varepsilon)(x - \varepsilon), \quad \forall x > \varepsilon.$$

由此可见，当$x > \varepsilon$ 充分大时，$s'(x) < 0$. 矛盾. Claim 1 得证. □

解$s(x)$ 在原点附近右侧的图像

记$m := \inf\{x > 0, s'(x) = 0\}$. 显然$m > 0$. 因此$m$ 是解$s'(x)$ 的最小正零点, $s(m) > 0$, 并且$s(x) > 0$, $x \in (0, m)$, $s(x)$ 在$(0, m)$ 上严格单调上升. 如图.



Claim 2: 解s(x) 有正零点

<u>Claim 2</u>：解$s(x)$ 在$(m,+\infty)$ 上有零点.

<u>证</u>：若不然，则必有$s(x)>0$, $\forall x>m$. 故$s''(x)=-s(x)<0$, $\forall x>m$. 这表明$s'(x)$ 在$(m,+\infty)$ 上严格单调下降. 由此得$s'(x)<s'(m+\varepsilon)<s'(m)=0$. 这里$\varepsilon>0$ 充分小. 积分得$s(x)-s(m+\varepsilon)<s'(m+\varepsilon)(x-m-\varepsilon)$, $\forall x>m+\varepsilon$.

即 $s(x)<s(m+\varepsilon)+s'(m+\varepsilon)(x-m-\varepsilon)$, $\forall x>m+\varepsilon$. 故当$x>m+\varepsilon$ 充分大时，$s(x)<0$. 矛盾. Claim 2 得证. □

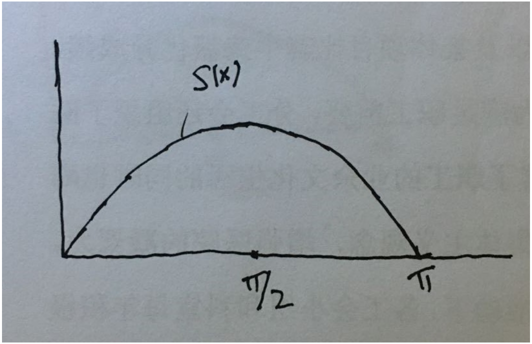
<u>记号</u>：$\pi:=\inf\{x>m, s(x)=0\}$. 即记π 为解$s(x)$ 的最小正零点. (这里记号π 与圆周率无关).

<u>Claim 2</u>: $m = \frac{\pi}{2}$ 且$s'(\pi) = -1$.

<u>证</u>: 令$s_{\pm}(x) := s(m \pm x)$, 则显然$s_{\pm}(x)$ 都是解, 因为不难验证$s''_{\pm}(x) + s_{\pm}(x) = 0$ (同取正号和符号). 此外$s_{\pm}(0) = s(m)$, $s'_{\pm}(0) = \pm s'(m) = 0$. 这表明$s_{+}(x)$ 和$s_{-}(x)$ 都是解, 且满足相同的初值条件. 因此它们恒同, 即$s(m + x) \equiv s(m - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 这表明解$s(x)$ 的图像关于直线$x = m$ 对称. 对称性表明$\pi = 2m$ 或$m = \frac{\pi}{2}$. 再对等式$s(m + x) = s(m - x)$ 求导得$s'(m + x) = -s'(m - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 取$x = m$ 我们就得到$s'(2m) = -s'(0) = -1$. 即$s'(\pi) = -1$. 证毕. $\square$

解 $s(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图像

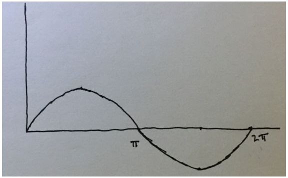
根据Claim 1 和Claim 3 的结论，及其证明可知解 $s(x)$ 在 $x = m$ 处取得严格极大值. 由此得到解 $s(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图像如下.



Claim 4: $s(x) = -s(x+\pi), \forall x \in \mathbb{R}$.

证: 由于$s(x)$ 是解, 故$s''(x) + s(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 用$x+\pi$ 替换x 得$s''(x+\pi) + s(x+\pi) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 这表明$s(x+\pi)$ 从而$\hat{s}(x) := -s(x+\pi)$ 也是解. 又因为$\hat{s}(0) = -s(\pi) = 0$, $\hat{s}'(0) = -s'(\pi) = 1$. 这说明解$\hat{s}(x)$ 和$s(x)$ 有相同的初值条件, 由此它们恒同, 即$s(x) = -s(x+\pi), \forall x \in \mathbb{R}$. 命题得证. □

Claim 4 表明解$s(x)$ 在区间$[0, 2\pi]$ 上的图像如下.



<u>**Claim 5**</u>: 解s(x) 是以2π 为周期的周期函数.

<u>证</u>: 根据Claim 4 可知

$$s(x+2\pi) = -s(x+\pi) = -[-s(x)] = s(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

这说明解s(x) 是以2π 为周期的周期函数. Claim 5 得证. □

Claim 6: $s'(x) = c(x)$ 且$c'(x) = -s(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

证: 由于$s(x)$ 是C^2 函数，满足方程$s''(x) + s(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 故可方程再次求导得$s'''(x) + s'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 这表明导数$s'(x)$ 也是解. 另一方面$s'(0) = 1$, $s''(0) = -s(0) = 0$. 这说明解$s'(x)$ 和$c(x)$ 满足相同的初值条件. 因此它们恒同, 即$s'(x) = c(x)$. 再来证另一等式. 即$\hat{s}(x) := -c'(x)$. 用上述同样的方法可以证明$\hat{s}(x)$ 也是是解. 再来考虑其初值. 依定义$\hat{s}(0) = -c'(0) = 0$, $\hat{s}'(0) = -c''(0) = c(0) = 1$. 这表明解$\hat{s}(x)$ 和$s(x)$ 的初值条件相同. 故它们恒同. 即$c'(x) = -s(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Claim 6 得证. □

Claim 7: $s^2(x)+c^2(x)\equiv 1$, $\forall x\in \mathbb{R}$.

证: 由于

$$\left[s^2(x)+c^2(x)\right]' = 2s(x)s'(x)+2c(x)c'(x)$$

$$= 2s(x)c(x)-2c(x)s(x)\equiv 0,\quad \forall x\in \mathbb{R},$$

故

$$s^2(x)+c^2(x)\equiv s^2(0)+c^2(0)=1,\quad \forall x\in \mathbb{R}.$$

Claim 7 得证. □

Claim 8: $c(\frac{\pi}{2}) = 0$, $s(\frac{\pi}{2}) = 1$

证: 回忆导数$s'(x)$ 的最小正零点为$m = \frac{\pi}{2}$, 故$s'(\frac{\pi}{2}) = 0$, 并且$s(x)$ 在$x = \frac{\pi}{2}$ 处取得正的极大值. 于是$c(\frac{\pi}{2}) = s'(\frac{\pi}{2}) = 0$. 再在恒等式$s^2(x) + c^2(x) \equiv 1$ 中取$x = \frac{\pi}{2}$ 即得$s^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. 由于$s(\frac{\pi}{2}) > 0$, 故$s(\frac{\pi}{2}) = 1$. Claim 8 得证. □

Claim 9: 解$s(x)$ 的和角公式

Claim 9: $s(x+\alpha)=s(x)c(\alpha)+c(x)s(\alpha)$, $\forall x,\alpha\in\mathbb{R}$.

证: 固定任意一个α, 令$s_1(x):=s(x)c(\alpha)+c(x)s(\alpha)$, $s_2(x):=s(x+\alpha)$. 不难看出$s_1(x)$ 和$s_2(x)$ 都是解. 来考虑它们的初值. 依定义$s_1(0)=s(\alpha)$,

$s_1'(0)=s'(0)c(\alpha)+c'(0)s(\alpha)=c(\alpha)$; $s_2(0)=s(\alpha)$,

$s_2'(0)=s'(\alpha)=c(\alpha)$. 这说明解$s_1(x)$ 和$s_1(x)$ 有相同的初值条件. 故它们恒同. 即$s(x)$ 的和角公式成立. Claim 9 得证. □

注: 由Claim 9 立刻得到$s(x)$ 的倍角公式$s(2x)=2s(x)c(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 完全类似可证明$c(x)$ 的和角公式, 以及倍角公式.

考虑二阶齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 假设在无穷开区间 $J = [a, +\infty)$ 上连续. 我们关心非平凡解在区间 J 上是否存在零点? 有多少零点? 有限个或无穷多个? 它们的位置如何?

例子

Example (1)

考虑方程$y'' + y = 0$. 其通解为$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, c_1 和c_2 为任意常数. 熟知通解可写作$y = A \sin(x + \delta)$, $A \geq 0$, δ 为任意常数, 则不难看出方程的每个非零在无穷区间$J = (x_0, +\infty)$ 上有无穷多个零点, 并且零点的间距均为π, 即零点的等距的.

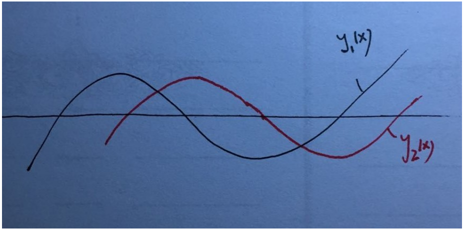
Example (2)

考虑方程$y'' - y = 0$. 其通解为$y = c_1 e^x + c_2 e^x$, c_1 和c_2 为任意常数. 不难验证方程的任意非零解在$\mathbb{R}$ 上至多有一个零点.

Sturm 分离定理, Sturm separation theorem

Theorem

设$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 为方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的两个线性无关的解，则$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 的零点相互分离(或交错)，也就是说，在解$y_1(x)$ 的任意两个相邻零点之间，有且仅有一个解$y_2(x)$ 的零点，反之亦然.



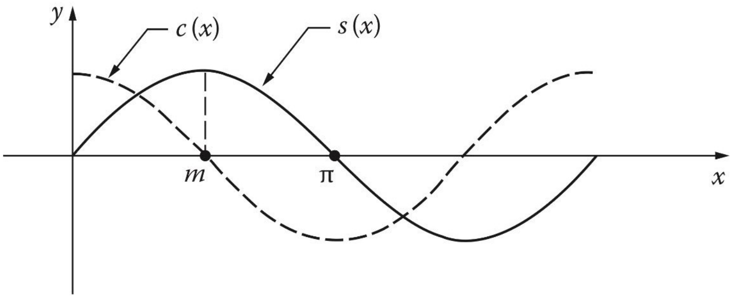
Jacques Charles François Sturm

(Swiss and French, 1803 – 1855)

Example

方程$y'' + y = 0$ 有线性无关的解$y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$.

它们的函数图像如图所示. 这两个解的零点相互分离.



证明：记$W(x)$ 为这两个解$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 的Wronsky 行列式，即

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

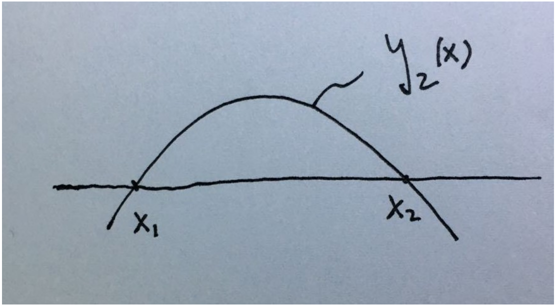
由于解$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 线性无关，故它们的Wronsky行列式$W(x) \neq 0, \forall x \in J$. 因此$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 无公共零点.

证明，续1

假设x_1，x_2 是解$y_2(x)$ 的两个相邻的零点，且$x_1 < x_2$. 于是$y_2(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$. 不妨设$y_2(x) > 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$. 要证解$y_1(x)$ 在开区间(x_1, x_2) 上有且仅有一个零点. 先证至少有一个零点. 反证. 若不然，则$y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$. 显然解$y_1(x)$ 在两个端点也不为零. 故$y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in [x_1, x_2]$. 同样可设$y_1(x) > 0$, $\forall x \in [x_1, x_2]$.

证明，续2

因解$y_2(x)$ 满足条件$y_2(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_2)$，且$y_2(x_1) = 0$, $y_2(x_2) = 0$，故$y_2'(x_1) \geq 0$ 且$y_2'(x_2) \leq 0$. 但是导数$y_2'(x)$ 在点x_1 和x_2 不能为零，否则解$y_2(x)$ 就恒等于零(由解的唯一性). 因此$y_2'(x_1) > 0$ 且$y_2'(x_2) < 0$. 如图



观察$W(x)$ 在点x_1 和x_2 处的值

$$W(x_1)=y_1(x_1)y_2'(x_1),\quad W(x_2)=y_1(x_2)y_2'(x_2).$$

注意$y_1(x)$ 在闭区间$[x_1,x_2]$ 上恒正，导数$y_2'(x_1)$ 和$y_2'(x_2)$ 反号．这说明$W(x)$ 在端点x_1,x_2 处反号，从而在(x_1,x_2) 上有零点．矛盾．这说明解$y_1(x)$ 在开区间(x_1,x_2) 上至少有一个零点．假如$y_1(x)$ 有两个零点，那么解$y_2(x)$ 在(x_1,x_2) 内还有零点．此与x_1 和x_2 是解$y_1(x)$ 的相邻零点的假设矛盾．这说明$y_1(x)$ 在开区间(x_1,x_2) 上有且仅有一个零点．若交换解$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 的位置可知，在解$y_1(x)$ 的任意两个零点之间，有且仅有$y_2(x)$ 的零点．定理得证．

Definition

设$y(x)$ 是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的一个非零解，这里$P(x)$ 和$Q(x)$ 在无穷区间$J = [a, +\infty)$ 上连续. (i) 称解$y(x)$ 在区间J 上是振荡的(Oscillatory or oscillating)，如果解$y(x)$ 在区间J 上有任意大的零点，即对于任意大的数$M > a$，存在$x_M \geq M$，使得$y(x_M) = 0$. (ii) 称解$y(x)$ 在区间J 上是非振荡的(Nonoscillatory or nonoscillating)，如果解$y(x)$ 在J 上仅有有限个零点，或等价地说，解$y(x)$ 在区间J 上不是振荡的.

注：显然，若非零解$y(x)$ 在区间$(x_0, +\infty)$ 上振荡，则存在解$y(x)$ 的一个零点序列$\{x_n\}$，即$y(x_n) = 0$，使得$x_n \to +\infty$.

Theorem

考虑方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$, 这里$P(x)$ 和$Q(x)$ 在无穷区间$J=[a,+\infty)$ 上连续. (i) 若方程有一个解是振荡的, 那么方程的每一个非零解都是振荡的; (ii) 若方程有一个解是非振荡的, 那么方程的每一个非零解都是非振荡的.

Definition

若方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 有一个(或每一个)非平凡解是振荡的, 则称方程是振荡的. 反之则称方程是非振荡的.

Proof.

显然结论(i)和(ii)相互等价. 以下只证(i). 设$y^*(x)$ 是一个振荡解, 则对于任意非平凡解$y(x)$, 若解$y(x)$ 与解$y^*(x)$ 线性相关, 则显然$y(x)$ 是振荡的; 若解$y(x)$ 与解$y^*(x)$ 线性无关, 则根据Sturm 分离定理知, $y(x)$ 是振荡的. 证毕. □

Example

方程$y'' + y = 0$ 在$(0, +\infty)$ 上是振荡的; 而方程$y'' - y = 0$ 在$(0, +\infty)$ 上非振荡的.

Lemma

对二阶齐次线性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$, 作变量替换$y=ue^{\frac{-1}{2}\int P(x)dx}$, 所得到的关于新未知函数$u$ 的方程为$u''+q(x)u=0$, 其中$q(x):=Q(x)-\frac{1}{2}P'(x)-\frac{1}{4}P(x)^2$, 这里假设$P(x)$ 是连续可微的.

Proof.

代入方程验证即可. □

Definition

方程$u''+q(x)u=0$ 称为方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的规范型(normal form), 其中$q(x)$ 如引理中所对定义.

显然原方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 和它的规范型方程$u''+q(x)u=0$ 的振荡性相同. 因为原方程的解$y(x)$ 与其规范型的解$u(x)$ 由等式$y(x)=u(x)e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx}$ 相联系. 它们的零点个数及其位置并没有发生变化.

变换的由来

变换$y=ue^{\frac{-1}{2}\int P(x)dx}$ 的由来：我们希望作变换$y=uv(x)$, u 为新的未知函数, $v(x)$ 为一个待定函数, 使得关于u 的方程中关于一阶导数项消失, 即u' 的系数函数为零. 对$y=ue^{\frac{-1}{2}\int P(x)dx}$ 两次求导得$y'=u'v+uv'$, $y''=u''v+2u'v'+uv''$. 再将其代入方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 得

$$u''v+(2v'+pv)u'+(v''+pv'+qv)u=0.$$

令$2v'+pv=0$ 得$v=e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx}$. 这就是引理中变换的由来.

振荡性判据一

Theorem

若连续函数$q(x)$ 在(a, b) 上非正，即$q(x) \leq 0$，$\forall x \in (a, b)$，则方程$u'' + q(x)u = 0$ 每个非零解至多有一个零点. 从而方程是非振荡的.

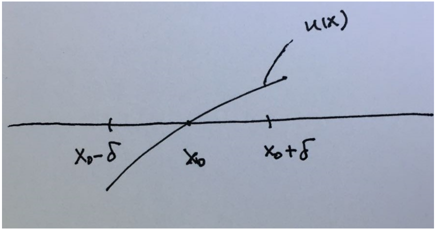
Example

方程$u'' - u = 0$ 的通解为$u(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$. 利用初等微积分知识不难证明，方程的任意非零解至多有一个零点. 这正是上述定理所断言的.

定理证明

证：设$u(x)$ 是方程$u'' + q(x)u = 0$ 的任意一个非零解. 假设解$u(x)$ 有一个零点$x_0 > a$. 由解的唯一性可知$u'(x_0) \neq 0$. 不妨设$u'(x_0) > 0$. 于是存在$\delta > 0$, 使得

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta);$$
$$u(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$



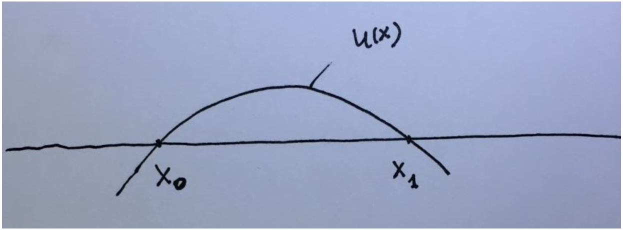
证明续1

现断言

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0, b);$$

$$u(x) < 0, \quad \forall x \in (a, x_0).$$

断言中的两个不等式证明类似. 以下只证第一个. 反证. 若不然, 则$u(x)$ 在x_0 的右侧必存在零点, 设$x_1 > x_0$ 是右侧第一个零点, 则$u(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_1)$. 如图.



证明续2

由此得$u''(x) = -q(x)u(x) \geq 0$, $\forall x \in (x_0, x_1)$. 这表明$u'(x)$ 在开区间(x_0, x_1) 上单调上升. 于是$u'(x_1) \geq u'(x_0) > 0$. 但是显然$u'(x_1) < 0$. 矛盾. 这说明解$u(x)$ 在x_0 的右侧无零点. 定理得证. $\square$

振荡性判据二: Leighton 振荡定理

Theorem

方程$u'' + q(x)u = 0$ 在区间$[a, +\infty)$ 是振荡的, 如果$q(x)$ 在区间$[a, +\infty)$ 上非负连续且

$$\int_a^{+\infty} q(x)dx = +\infty.$$

证明: 反证. 设$u(x)$ 是一个非平凡解, 只有仅有有限零点. 则存在$x_0 > a$, 使得$u(x) \neq 0$, $\forall x \geq x_0$. 不妨设$u(x) > 0$, $\forall x \geq x_0$.

由方程$u''(x) + q(x)u(x) = 0$, $\forall x \in [x_0, +\infty)$ 得

$$\frac{u''(x)}{u(x)} + q(x) = 0, \quad \forall x \in [x_0, +\infty).$$

证明续1

对上式从x_0 到x 积分得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{u''(s)}{u(s)}ds+\int_{x_0}^{x}q(s)ds=0.$$

对上式的第一个积分作分部积分得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{u''(s)}{u(s)}ds=\frac{u'(x)}{u(x)}-\frac{u'(x_0)}{u(x_0)}+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{u'(s)}{u(s)}\right)^2ds.$$

由此得

$$\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{u'(x_0)}{u(x_0)}-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{u'(s)}{u(s)}\right)^2ds-\int_{x_0}^{x}q(s)ds.$$

证明续2

注意上式右边当$x \to +\infty$ 时趋向$-\infty$，从而左边也趋向$-\infty$.

这表明存在$x_1 > x_0$，使得$u'(x) < 0$，当$x \geq x_1$. 另一方面，

由$u''(x) = -q(x)u(x) \leq 0$, $\forall x \in [x_0, +\infty)$ 可知，导函数$u'(x)$

在区间$[x_0, +\infty)$ 上单调下降. 于是$x \to +\infty$ 时，

$$u(x) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x} u'(s)ds \leq u'(x_1)(x - x_1) \to -\infty.$$

这与假设$u(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$ 相矛盾. 定理得证. $\square$

例子

例：考虑方程$y'' + [1 + \phi(x)]y = 0$，这里$\phi(x)$ 假设在区间$J = [a, +\infty)$ 上连续．如果$|\phi(x)|$ 比较小的话，这个方程可以看作方程$y'' + y = 0$ 的摄动方程．假设$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$，则根据Sturm 比较定理可知，摄动方程$y'' + [1 + \phi(x)]y = 0$ 在区间J 上是振荡的．这是因为由于$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$，可知存在充分大的$x_1 > a$，使得$1 + \phi(x) > \frac{1}{2}$，$\forall x \geq x_1$．于是在区间$[x_1, +\infty)$ 上摄动方程的振荡强度高于方程$y'' + \frac{1}{2}y = 0$．而后者显然是振荡的．因此摄动方程在区间$[x_1, +\infty)$ 是上振荡的，从而在$[a, +\infty)$ 也是振荡的．解答完毕．

振荡强度，例子

考虑方程 $y''+4y=0$ 和$y''+y=0$. 它们分别有解$y=\sin 2x$ 和$z=\sin x$. 显然在区间$[0,2\pi]$ 上，前者零点的个数是5，多于后者零点的个数3. 在这个意义上可以说前一个方程振荡的强度(或速度)强于后者. 受这个例子的启发，Sturm 发现(或发明)了如下比较定理. Sturm 的比较定理和分离定理开启了微分方程定性理论的先河. 微分方程定性理论自Sturm时代起，经过Poincaré, Lyapunov 等人努力，已成为微分方程发展的主流.

零点有限性定理

Theorem

设$y(x)$ 是方程$y'' + q(x)y = 0$ (或$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$) 的非平凡解, 则解$y(x)$ 在任意有界闭区间$[a, b] \subset J$ 里的零点个数有限, 这里J 是函数$q(x)$ 的存在区间.

定理证明

Proof.

反证：假设解$y(x)$ 在$[a,b]$ 上有无穷个零点，那么这无穷个零点存在一个收敛序列$x_n \to x_0$, $n \to +\infty$, 且$x_n \neq x_0$, $\forall n$. 根据有界闭区间$[a,b]$ 的紧性可知，极限点$x_0 \in [a,b]$. 于是$y(x_0) = \lim y(x_n) = 0$. 进一步

$$y'(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

再根据解的唯一性知$y(x)$ 恒为零. 矛盾. $\square$

习题一. 证明如下引理. 设$y(x)$ 在$(0,+\infty)$ 无穷连续可微函数, 记$z(u):=y(e^u)$, $u\in(-\infty,+\infty)$, 则对任意正整数$k\geq 1$ 下式成立

$$x^k\frac{d^ky(x)}{dx^k}\bigg|_{x=e^u}=\left(\frac{d}{du}-(k-1)\right)\cdots\left(\frac{d}{du}-1\right)\left(\frac{d}{du}-0\right)z(u).$$

习题二. 证明定理: 设λ_0 是齐次方程$L(D)y=0$ 的k 重特征值, 则非齐次方程$L(D)y=e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解具有形式$y_p(x)=e^{\lambda_0 x}x^k\psi(x)$, 其中$\psi(x)$ 为多项式, 且$\deg\psi(x)=\deg\phi(x)$.

作业续1

习题三：之前我们证明了二阶线性齐次方程解的零点孤立性．(参见讲义Oct18wx,第45页)．实际上我们有如下更一般的结论．即n 阶线性齐次方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n(x)y=0$ 的每个非平凡解的零点孤立．确切地说，设$y(x)$ 是方程的非零解．若x_0 是$y(x)$ 的一个零点，则存在$\delta>0$，使得$y(x)\neq 0$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$．试证明这一结论．

课本习题：page 193, Problems 3, 4.

菲利波夫习题：(用待定系数法求特解) 537, 583, 540, 544.

菲利波夫习题：(解Euler方程) 589, 593, 597, 600

作业续2

选作题. 设函数$u(t)$在有界闭区间$[a,b]$上连续, 在开区间(a,b)上二阶连续可导, 且$u(a)=0=u(b)$, $u(t)>0$, $\forall t\in(a,b)$. 证明

$$\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u(t)}dt > \frac{4}{b-a}.$$

(注: 本题是一个纯数学分析问题, 不需要常微知识. 根据这个不等式可以导出著名的Lyapunov 关于方程$u''+q(t)u=0$稳定性判据.)