《微分方程1》第三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年10月11日

积分因子

Definition

设方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 非恰当，若存在一个连续可微函数$\mu(x,y)$，使得$\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 恰当，且$\mu(x,y)\neq 0$，$\forall(x,y)\in\Omega$，则称$\mu(x,y)$ 为非恰当方程$Mdx+Ndy=0$ 在Ω 上的一个积分因子(integrating factor)，这里Ω 是函数M,N 的定义域(单连通).

积分因子方程

Definition

一个连续可微函数$\mu(x,y)$ 是非恰当方程$Mdx+Ndy=0$ 的积分因子，当且仅当$(\mu M)_y=(\mu N)_x$，即

$$\mu_y M-\mu_x N=\mu(N_x-M_y), \qquad (*)$$

方程(*) 通常称作积分因子方程. 这里假设函数M,N 的定义域是单连通的.

变量分离型积分因子

考虑非恰当方程$Mdx + Ndy = 0$. 假设方程有变量分离型积分因子，即有积分因子形如$\mu(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$. 将它代入积分因子方程得

$$\mu_1(x)\mu_2'(y)M - \mu_1'(x)\mu_2(y)N = \mu_1(x)\mu_2(y)(N_x - M_y).$$

上式两边同除$\mu_1(x)\mu_2(y)$ 得

$$\frac{\mu_2'(y)}{\mu_2(y)}M - \frac{\mu_1'(x)}{\mu_1(x)}N = N_x - M_y.$$

由上述分析可知，若存在两个一元函数$g(x)$ 和$h(y)$，使得

$$h(y)M - g(x)N = N_x - M_y,$$

则方程有变量分离型积分因子$\mu(x,y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$，其中

$$\frac{\mu_1'(x)}{\mu_1(x)} = g(x) \quad \Rightarrow \quad \mu_1(x) = e^{\int g(x)dx},$$

$$\frac{\mu_2'(y)}{\mu_2(x)} = h(y) \quad \Rightarrow \quad \mu_2(y) = e^{\int h(y)dy}.$$

变量分离型积分因子，例子

例：考虑 $(y-y^2)dx+xdy=0$. 记$M=y-y^2$, $N=x$, 则$N_x=1$, $M_y=1-2y$. 可见方程非恰当. 以下寻求$g(x)$和$h(y)$, 使得$h(y)M-g(x)N=N_x-M_y$, 即

$$h(y)(y-y^2)-g(x)x=2y.$$

选取$g(x)$ 和$h(y)$ 有多种可能性:

方式一：取$g(x)=0$, $h(y)=\frac{2}{1-y}$, 此时积分因子为

$$\mu=\mu_1\mu_2=e^0e^{\int\frac{2dy}{1-y}}=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

以$\mu_2(y)$ 乘以方程得

$$\frac{y}{1-y}dx+\frac{x}{(1-y)^2}dy=0 \quad 或 \quad d\left(\frac{xy}{1-y}\right)=0.$$

由此得通解

$$\frac{xy}{1-y}=c \quad 或 \quad xy=c(1-y).$$

方式二：取$g(x)=\frac{-2}{x}$, $h(y)=\frac{-2}{y}$. 此时

$$\mu=\mu_1\mu_2=e^{\int\frac{-2dx}{x}}e^{\int\frac{-2dy}{y}}=(xy)^{-2}.$$

例子，续2

以$(xy)^{-2}$ 乘以原方程$(y-y^2)dx+xdy=0$ 得

$$\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{dy}{xy^2}=0 \quad 或 \quad \frac{dx}{x^2y}+\frac{dy}{xy^2}-\frac{dx}{x^2}=0.$$

不难看出，上式右边可写作全微分形式

$$d\left(\frac{-1}{xy}+\frac{1}{x}\right)=0.$$

由此得通解

$$\frac{-1}{xy}+\frac{1}{x}=c \quad 或 \quad -1+y=cxy.$$

解答完毕.

同一方程可有许多积分因子

对上例的分析解答表明，非恰当方程$(y-y^2)dx+xdy=0$ 至少有两个积分因子

$$(1-y)^{-2} \quad 和 \quad (xy)^{-2}.$$

一般说来，同一个非恰当方程有许多积分因子．再例如非恰当方程$ydx-xdy=0$ 至少有如下积分因子

$$\frac{1}{x^2},\ \frac{1}{y^2},\ \frac{1}{x^2+y^2},\ \frac{1}{xy},\ \cdots.$$

Theorem

设$M(x,y)$ 和$N(x,y)$ 为次数相同的齐次函数，则齐次方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 有积分因子$(xM+yN)^{-1}$.

Proof.

留作补充习题 □

<u>例</u>: 再考虑$(x+y)dx-(x-y)dy=0$.

<u>解</u>: 已求解过这个方程. 解法是作变换$y=zx$, 将方程化为变量分离型方程. 以下用积分因子求解. 由定理知方程有积分因子$(xM+yN)^{-1}=(x(x+y)-y(x-y))^{-1}=(x^2+y^2)^{-1}$.

用$(x^2+y^2)^{-1}$ 乘以方程两边得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}-\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

例子，续

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}+c_1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2}=ce^{\arctan\frac{y}{x}}, \quad c=e^{c_1}>0.$$

在极坐标$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 下，上式(通解)为$r=ce^{\theta}$.

应用例子：探照灯的反射面是什么旋转面？

为使光线经过反射后形成一个光柱，我们要寻求一个旋转面，使得光源位于原点时，光线经过旋转面的反射后平行于x 轴传播，如图所示.

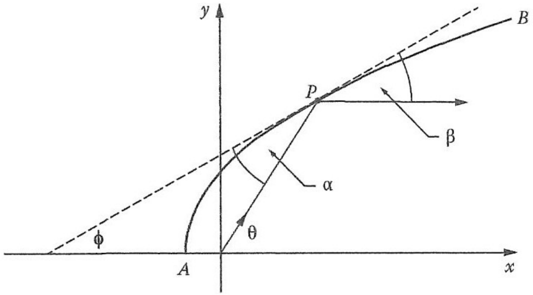

FIGURE 19

设所求旋转面由曲线$\widehat{APB}$ 绕x 轴旋转一周所得，且曲线可表为$y = y(x)$. 根据光的反射定律，即入射角等于反射角，亦即$\alpha = \beta$. (注：课本p.78 倒数第三行，等式$\alpha = 2\beta$ 有误，应为$\alpha = \beta$.)

由几何关系可知$\phi = \beta = \alpha$. 进而有$\theta = 2\beta$. 另一方面根据

$$y' = \tan\beta, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}.$$

得到关于未知函数$y(x)$ 的微分方程

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2}. \qquad (*)$$

以下来求解这个微分方程．由方程(*)得

$$2y'x = y(1-(y')^2) \;\Rightarrow\; y(y')^2 + 2xy' - y = 0$$

$$\Rightarrow (y')^2 + \frac{2x}{y}y' - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

将上述右边方程写成一阶对称形式

$$ydy = \Big(-x \pm \sqrt{x^2+y^2}\Big)dx$$

或

$$xdx + ydy = \pm\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

进一步方程可写作

$$\frac{\pm d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad d\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right) = dx.$$

于是通解为 $\pm\sqrt{x^2+y^2} = x + c$. 两边平方即得

$$y^2 = 2cx + c^2$$

这是一族抛物线，其焦点位于原点，其轴为x 轴. 这就说明了探照灯的反射面应该设计成旋转抛物面.

考虑一阶线性方程$y'+P(x)y=Q(x)$，这里函数$P(x)$，$Q(x)$ 假设在某个开区间J 上连续．由Picard定理知方程的每个Cauchy问题的解存在唯一．有多种方法求解．最简解法如下：方程两边同乘积分因子$e^{\int P(x)dx}$ 得

$$e^{\int P(x)dx}\left(y'+P(x)y\right)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

(注：积分因子的来历参见problem 1, p.82.) 上式的左边可改写作

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)'=Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

一阶线性方程，续1

两边积分得

$$ye^{\int P(x)dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c$$

由此得一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c\right).$$

Theorem

考虑一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$，这里$P(x)$, $Q(x)$ 假设在某个开区间J 上连续，则对于$\forall x_0 \in J$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}$，方程满足初值条件$y(x_0) = y_0$ 的唯一解可以表示为

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}\left(\int_{x_0}^{x}\left(Q(s)e^{\int_{x_0}^{s} P(t)dt}\right)ds + y_0\right),\ x \in J. \ (*)$$

定理上次课已证.

Corollary (线性方程解的整体存在性)

对于一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$，每个解的最大存在区间为J，其中J 为系数函数$P(x)$, $Q(x)$ 的存在区间.

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里$p(x)$，$q(x)$ 假设是以2π 为周期的周期连续函数. 此时称这个方程为一阶周期线性方程. 关于这类方程，我们关心：

(1) 方程是否存在2π 周期解？判别条件？

(2) 存在时，有多少个？可否表示出来.

注：根据线性方程解的整体存在性可知，

一阶线性周期方程, 周期解问题

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$, 这里$p(x)$, $q(x)$ 假设是以2π 为周期的周期连续函数. 此时称这个方程为一阶周期线性方程. 关于这类方程, 我们关心:

(1) 方程是否存在2π 周期解? 判别条件?

(2) 存在时, 有多少个? 可否表示出来.

注: 根据线性方程解的整体存在性可知, 对于一阶线性周期方程, 其每个解的最大存在区间为$(-\infty, +\infty)$.

周期解个数

Theorem

考虑一阶线性方程$y' = p(x)y + q(x)$，这里$p(x)$，$q(x)$ 为以2π为周期的周期连续函数，则

i). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$，则方程有唯一一个$2\pi$ 周期解;

ii). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，但$\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx \neq 0$，则方程没有$2\pi$ 周期解;

iii). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，且$\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx = 0$，则方程的每个解都是$2\pi$ 周期解.

定理上次课已证.

Definition

形如$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$ 的方程称为Bernoulli 方程，这里$p(x)$和$q(x)$ 假设在一个开区间J 上连续，α 为实数.

当$\alpha = 1$ 时，方程是线性的，有显式解．设$\alpha \neq 1$．对于$y > 0$，y^α 总有意义．现仅在上半平面$y > 0$ 上求解方程．方程两边同乘$y^{-\alpha}$ 得 $y^{-\alpha}y' = p(x)y^{1-\alpha} + q(x)$．作变换$z = y^{1-\alpha}$ 得 $\frac{z'}{1-\alpha} = p(x)z + q(x)$ 或 $z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x)$．这是关于$z$ 的一阶线性方程．可求显式解.

例子: 求解

$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0, \quad 1+x > 0.$$

解: 这是Bernoulli 型方程. (实际解题时, 最好能快速识别Bernoulli方程) 可按标准做法求解. 方程两边同乘y^{-4} 得

$$y^{-4}y' + \frac{y^{-3}}{1+x} + (1+x) = 0.$$

令$z = y^{-3}$, 得关于z 的一阶线性方程为

$$z' = \frac{3z}{1+x} + 3(1+x).$$

例子，续1

其通解为

$$
\begin{aligned}
z &= e^{\int \frac{3dx}{1+x}}\left(C+\int 3(1+x)e^{\int \frac{-3dx}{1+x}}dx\right) \\
&= (1+x)^3\left(C-\int 3(1+x)\frac{dx}{(1+x)^3}\right) \\
&= (1+x)^3\left(C-\frac{3}{1+x}\right) \\
&= C(1+x)^3-3(1+x)^2.
\end{aligned}
$$

例子，续2

于是原方程 $y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$ 的通解为

$$y = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{C(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}.$$

解答完毕.

一阶线性方程的直接推广是**Riccati** 型方程，即如下形式的方程

$$\mathbf{y}' = \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{y}^2 + \mathbf{q}(\mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{r}(\mathbf{x}),$$

这里系数函数$\mathbf{p}(\mathbf{x})$, $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ 和$\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 假设在一个开区间上连续.

<u>注一</u>：对一般**Riccati** 型方程已经没有求解公式了.

<u>注二</u>：当$\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 恒为零时，**Riccati** 方程变为**Bernoulli** 型方程，可显式求解.

Jacopo Francesco Riccati (Venetian, 1676 – 1754)

已知一个解情形

定理：若已知Riccati 方程的一个解，则Riccati方程可化为Bernoulli 方程，从而可求得Riccati 方程的通解.

证明：假设已知Riccati 方程$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 的一个解$y = \phi(x)$. 考虑

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$
$$\phi' = p(x)\phi^2 + q(x)\phi + r(x).$$

两个方程相减，并令$z = y - \phi$ 得

$$(y-\phi)' = p(x)(y^2-\phi^2) + q(x)(y-\phi)$$

$$z' = p(x)[z(y+\phi)] + q(x)z$$

或

$$z' = p(x)z^2 + [2p(x)\phi(x) + q(x)]z.$$

这是Bernoulli 型方程. 可显式求解. 定理得证. □

Theorem

考虑Riccati 方程$y' = ay^2 + bx^m$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. 方程可积(即解可用初等函数表示), 当且仅当$m = 0, -2, \frac{-4k}{2k\pm1}$, $k = 1, 2, \cdots$.

证明: 麻烦. 略. 充分性证明, 可参见丁同仁李承治《常微分方程教程》, 第二版, page 43-44.

注: 由上述定理知, 简单的方程如$y' = x + y^2$ 和$y' = x^2 + y^2$ 均不可积.

考虑周期Riccati方程$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$，这里$p(x)$，$q(x)$ 和$r(x)$ 均为以2π 为周期的周期连续函数. 我们关心：方程是否存在2π 周期解？若存在，有多少？

Theorem

假设函数$p(x)$ 不变号，且不恒为零，则周期Riccati 方程$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 至多有两个不同2π 周期解.

反证. 假设$\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ 为三个不同的2π 周期解. 由解的存在唯一性可设

$$\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

考虑解ϕ_k 所满足的方程

$$\phi_1' = p(x)\phi_1^2 + q(x)\phi_1 + r(x),$$
$$\phi_2' = p(x)\phi_2^2 + q(x)\phi_2 + r(x),$$
$$\phi_3' = p(x)\phi_3^2 + q(x)\phi_3 + r(x).$$

这里解$\phi_k(x)$ 已经简写为ϕ_k.

证明，续1

将第二个减去第一个方程，并且两边同除$\phi_2 - \phi_1$ 得

$$\frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_2 + \phi_1) + q(x).$$

同样将第三个方程减去第一个方程得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 + \phi_1) + q(x).$$

再将上述两个等式相减得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} - \frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 - \phi_2).$$

于上式两边从0 到2π 积分得

证明，续2

$$\ln \frac{\phi_3(x)-\phi_1(x)}{\phi_2(x)-\phi_1(x)}\Bigg|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} p(x)(\phi_3(x)-\phi_2(x))dx.$$

注意上式左边为零，因为解是2π 周期的. 考虑等式右边. 根据假设$p(x)$ 不变号且不恒为零，而函数$\phi_3(x)-\phi_2(x)$ 恒大于零. 因此右边的积分不为零. 这就得到了一个矛盾. 矛盾说明方程至多有两个不同的以2π为周期的周期解. 定理得证. □

一般二阶方程具有形式$F(x,y,y',y'')=0$. 对于某些特殊形式的二阶方程，可以通过适当的变量替换，将方程化为一阶方程，从而可能求得原二阶方程的通解.

情形一. 方程不显现未知函数y，即方程形如 $f(x,y',y'')=0$. 此时令$p=y'$，则$y''=p'$. 于是原二阶方程就化为关于新未知函数p 的一阶方程$f(x,p,p')=0$.

例：求解$xy'' - y' = 3x^2, x > 0$.

解：记$p = y'$，则$p' = y''$. 于是原方程即化为$xp' - p = 3x^2$

或$p' - \frac{1}{x}p = 3x$. 这是一阶线性方程，有显式通解. 其通解为

$$p(x) = e^{\int -P(x)dx}\left(c_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right).$$

$$= e^{\int \frac{dx}{x}}\left(c_1 + \int 3xe^{\int \frac{-dx}{x}}dx\right) = 3x^2 + c_1x.$$

于是原二阶方程的通解

$$y(x) = \int p(x)dx = \int (3x^2 + c_1x)dx = x^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2. \quad \square$$

情形二：独立变量不显现，即方程形如 $f(y, y', y'') = 0$. 此时

令$p = y'$，则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

(注：当$y'(x) \neq 0$ 时，函数p 可以表示为$p = p(y)$). 于是原二阶方程就化为一阶方程 $f(y, p, pp') = 0$. 对于这个一阶方程，我们将y看作独立变量，$p = p(y)$，$p' = \frac{dp}{dy}$.

例子

例：求解方程 $y'' + k^2 y = 0,\ k > 0.$

解：令 $p = y'$，则 $y'' = p'p$，这里 $p' = \frac{dp}{dy}$. 于是原二阶方程化为 $pp' + k^2 y = 0$. 将这个方程可看作变量分离型方程，也可写作对称形式 $k^2 ydy + pdp = 0$. 这是恰当方程. 其通解为 $p^2 + k^2 y^2 = c_1$，其中 $c_1 > 0$ 为任意正常数. 由此得

$$p = y' = \pm\sqrt{c_1 - k^2 y^2}.$$

为方便记 $c_1 = k^2 a^2$，其中 a 为任意常数. 于是得到变量分离型方程 $\frac{dy}{dx} = y' = p = \pm k\sqrt{a^2 - y^2}$. 分离变量再积分得

例子续

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm k dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm kx+b.$$

这里b 为任意常数. 由此得通解

$$\arcsin\frac{y}{a}=\pm kx+b \quad 或 \quad y=a\sin(\pm kx+b).$$

将$\sin(\pm kx+b)$ 展开可知, 通解还可以写作

$$y=A\cos kx+B\sin kx,$$

其中A, B 为任意常数.

注记

注记: 对于一般高阶常系数线性方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

这里a_k 为实常数, $k = 1, 2, \cdots, n$, 我们将发展一套理论来求出方程的显式解.

问题：将一条金属链条分别固定于两点. 如图. 假设链条仅受自身重量的作用，求链条处于平衡时的形状. 其图像称为悬链线(catenary)

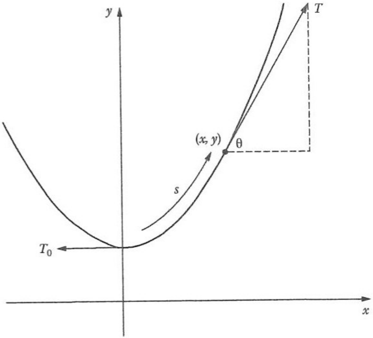

FIGURE 20

解：求解思想：先建立微分方程，再求解之. 如图建立坐标系，其中y 轴平行于垂直方向且经过链条的最低点. 记s 为最低点到动点(x, y) 的弧长，$w(s)$ 为链条的线密度. 弧段s 收到三个力的作用：

(i) 最低点处的水平张力T_0;

(ii) 动点处的张力，沿着切线方向T;

(iii) 弧段s 所受的重力.

由于链条处于平衡状态，故这三个力之和为零. 从而在水平和垂直方向的合力为零. 故

悬链线，续2

$$T\cos\theta = T_0 \quad \text{and} \quad T\sin\theta = \int_0^s w(\tau)d\tau.$$

由此得

$$T\sin\theta = T\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = T_0\tan\theta = T_0 y'.$$

于是

$$T_0 y' = \int_0^s w(\tau)d\tau.$$

这里$y = y(x)$ 为待求悬链线的函数表示．上述方程称作微分积分方程．对它两边关于x 求导，即可将其化为二阶微分方程

悬链线，续3

$$T_0 y'' = w(s)\frac{ds}{dx} = w(s)\sqrt{1+(y')^2}.$$

上述第二个等式成立，是根据曲线$y = y(x)$ 的弧长的微分公式$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$. 至此我们就得到悬链线的微分方程

$$T_0 y'' = w(s)\sqrt{1+(y')^2}.$$

进一步求解需要确定线密度函数$w(s)$. 常见的情形是密度函数$w(s) = w_0 > 0$ 为常数函数. 此时微分方程为

$$T_0 y'' = w_0\sqrt{1+(y')^2} \quad \text{or} \quad y'' = a\sqrt{1+(y')^2},$$

其中$a := \frac{w_0}{T_0} > 0$. 注意这个二阶方程里未知函数y 不显现. 故作变换$p = y'$, 则二阶方程即可化为一阶方程$p' = a\sqrt{1+p^2}$. 这是变量分离型方程. 根据标准解法, 变量分离再积分得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = adx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a\int dx.$$

由此得 $\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax + c$. 由图可知当$x = 0$ 时, $y' = p = 0$. 故$c = 0$, 从而$p + \sqrt{1+p^2} = e^{ax}$. 将这个方程写作$\sqrt{1+p^2} = e^{ax} - p$. 两边平方得$1 + p^2 = e^{2ax} - 2pe^{ax} + p^2$, 即$2pe^{ax} = e^{2ax} - 1$. 由此解得

悬链线，续5

$$y' = p = \frac{1}{2}\left(e^{ax} - e^{-ax}\right).$$

再对上式积分得

$$y(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) + y_0.$$

若将悬链线的最低点置于y 轴上的点$(0, \frac{1}{a})$，则$y_0 = 0$. 从而所求函数就是标准的双曲函数

$$y(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right).$$

悬链线的极小曲面性质

在平面上给定两个点(x_1, y_1), (x_2, y_2), 这里我们假设$x_1 < x_2$, $y_1 > 0, y_2 > 0$. 设$y = y(x)$ 是任意一条经过这两个点的光滑曲线. 这条曲线绕x 旋转一周得到一个旋转曲面, 其面积大小(位于x_1 和x_2 之间)依赖于曲线$y = y(x)$ 的选取. 可以证明(见在第十二章, page 590-591), 当取$y(x)$ 为双曲函数时, 可使得这个旋转曲面的面积最小. 这个性质称为悬链线的极小曲面性质.

问题：设平面上的动点$P=(x,y)$由一根弦PT牵动，设弦长PT为$a>0$．在时刻$t=0$时，$T=(0,0)$，$P=(a,0)$．如图．进一步假设点P在正y轴上运动，求动点$P=(x,y)$的运动轨迹(称作曳线)．

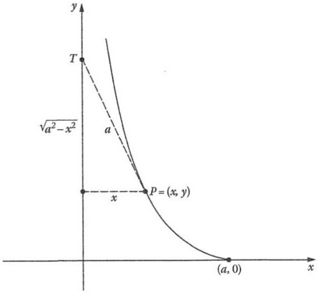

FIGURE 21

解：设所求轨迹是待定函数$y = y(x)$ 的函数曲线，则由图可知

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{or} \quad y = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx.$$

对上述不定积分作变量替换$x = a \sin x$，再经过一些计算可求得

$$y = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

由初始条件$y(a) = 0$ 可知$c = 0$. 故所求轨线为

$$y = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

如图，将曳线围绕y 轴旋转一周则形成了一个喇叭状的旋转面.

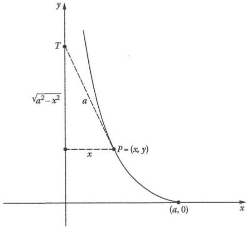

FIGURE 21

这个旋转面是Lobachevsky 非欧几何的一个模型. 在这个旋转面上，任何三角形的内角和均$< 180°$.

应用例三：追线(Pursuit curves)

问题：假设兔子在$t=0$ 时刻，由原点$(0,0)$ 出发，沿着正y 轴，以常速度$a>0$ 奔跑. 与此同时一条狗在$t=0$ 时刻，从位于x轴上的点$(c,0)$ $(c>0)$ 出发，以常速率$b>0$ 开始追逐兔子，如图. 求狗的运动轨线.

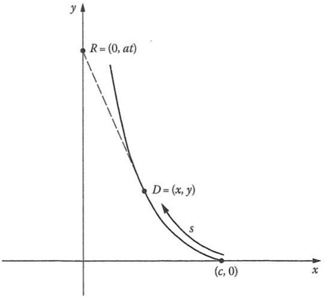

FIGURE 22

解：根据问题假设在时刻$t>0$，兔子位于点$R=(0,at)$. 并且狗的运动方向始终是直线$\overline{DR}$ 方向. 这表明直线$\overline{DR}$ 与狗的运动曲线$y=y(x)$ 相切与D. 于是得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-at}{x} \quad \text{or} \quad xy'=y-at.$$

为方便求解，希望消去时间变量t. 为此对方程$xy'=y-at$ 关于x 求导得$y'+xy''=y'-a\frac{dt}{dx}$，即

$$xy''=-a\frac{dt}{dx}. \qquad (*)$$

追线，续2

由假设知，狗的运动速率为常数$b > 0$，即$\frac{ds}{dt} = b$. 由此得

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{b}\sqrt{1+(y')^2}, \quad (**)$$

上述符号意味着弧长s 是x 的减函数. 根据等式(*)和(**)可得

微分方程

$$xy'' = k\sqrt{1+(y')^2}, \qquad (***)$$

这里$k = \frac{a}{b}$. 这是一个具有特殊形式的二阶方程，即未知函数y

没有在方程里显现. 故令$p = y'$ 就得到 $xp' = k\sqrt{1+p^2}$. 关

于p 的一阶变量分离型方程.

分离变量再积分得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = k\ln x + \lambda,$$

根据假设当时刻$t=0$ 时，$x=c$ 且$y'(c)=p(c)=0$. 由此可知$0=k\ln c+\lambda$ 即$\lambda=-k\ln c$.

由此得

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\ln\left(\frac{x}{c}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad p+\sqrt{1+p^2}=\left(\frac{x}{c}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+p^2}=\left(\frac{x}{c}\right)^k-p$$

追线，续5

$$\Rightarrow \quad 1+p^2=\left(\frac{x}{c}\right)^{2k}-2p\left(\frac{x}{c}\right)^{k}+p^2$$

$$p=y'=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{k}-\left(\frac{x}{c}\right)^{-k}\right].$$

进一步关于解的讨论，见problem 8 (课本page 95).

小船的运动轨迹

例: 设y 轴和直线$x=c$ 是一条河流的两岸, 河水以常速度$a>0$ 向着y 轴的负向流动. 假设一只小船在初始时刻$t=0$ 时位于点$(c,0)$, 之后一直朝着原点$(0,0)$ 方向以常速率$b>0$ (相对于河水)运动, 如图. 求小船的运动轨迹.

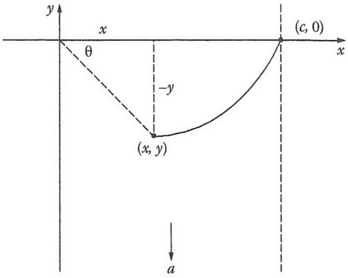

FIGURE 23

解：设小船的运动轨迹为$y = y(x)$. 再设小船在时刻t 的位置为$(x(t), y(t))$. 根据假设，小船的速率为常数b，运动方向始终朝着原点$(0, 0)$，且河水以常速度$a > 0$ 向着y 轴的负向流动. 由此可知

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -b\cos\theta, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -a + b\sin\theta$$

其中$\theta \in (0, \pi/2)$ 的意义如图所示. 根据几何关系可知

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

于是

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-a + b\sin\theta}{-b\cos\theta}$$

$$= \frac{-a + b\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}.$$

于是关于$y(x)$ 的一阶微分方程

$$y' = \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}.$$

这是齐次方程．以下用标准方法求解．令$y = zx$，则

小船运动，续3

$$y' = z'x + z = \frac{a\sqrt{1+z^2}+bz}{b}$$

$$\Rightarrow \quad z'x = k\sqrt{1+z^2},$$

这里$k = a/b$. 这是变量分离型方程. 先分离变量再积分得

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = k\ln x + \lambda$$

$$\Rightarrow \quad z+\sqrt{1+z^2}=\mu x^k, \quad (\mu=e^\lambda>0)$$

方程两边同乘以x 得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\mu x^{k+1}, \quad (y=zx).$$

根据初始条件知$y(c)=0$，以及上述方程得$\mu=c^{-k}$. 小船的运动轨迹方程为

$$c^k\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)=x^{k+1}.$$

进一步讨论可知(见Problem 9 (page 95)

(i). 情形$a > b$. 此时$k > 1$. 当$x \to 0^+$ 时, $y(x) \to -\infty$. 这意味着, 小船不会抵达对岸.

(ii). 情形$a = b$. 此时$k = 1$. 当$x \to 0^+$ 时, $y(x) \to -c/2$. 这意味着, 小船也不会抵达对岸.

(iii). 情形$a < b$. 此时$k < 1$. 当$x \to 0^+$ 时, $y(x) \to 0$. 这意味着, 小船将会于原点登岸.

作业

课本习题:

page 82–83, problems 3, 4, 5, 6, 7, 8.

page 94–95, problems 6, 8, 9.

page 99–102, problems 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 52, 53.

菲利波夫习题: **182, 183, 184.**

选作习题：考虑方程 $y' = a(x)y^3 + b(x)y^2$，其中 $a(x)$，$b(x)$ 均为 2π 周期的连续函数. 证明对于任意给定的正整数 N，存在 2π 周期的连续函数 $a_N(x)$，$b_N(x)$（这里记号表示这两个函数与正整数 N 有关）使得方程 $y' = a_N(x)y^3 + b_N(x)y^2$ 至少有 N 个不同的 2π 周期解.

注一：根据上次选作题可知，对于周期Abel 方程$y' = p_3(x)y^3 + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x)$，这里$p_k(x)$ 是以2π 周期的周期连续函数，$k = 0, 1, 2, 3$，当$p_3(x)$ 不变号且不恒为零，方程至多有三个不同的以2π为周期的周期解．本次选作题表明，如果不对方程$y' = a(x)y^3 + b(x)y^2$ 的系数函数$a(x)$ 和$b(x)$ 作任何限制的话，那么这类方程可以有任意多的2π 周期解．

注二：本次选作题有相当难度．第一个提供正确解答的同学，将获得总成绩加5分的奖励．提供解答的截止日期：本课程结束之前．