偏微分方程 2 作业解答

2020 年 11 月 18 日

目录

说明

本解答只提供解题思路以及必要的步骤, 完整解答须由同学们自行补齐.

1 引言

2 Sobolev 空间

作业 1. *求证定理 2.2:*

定理 (2.2)**.** *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $0 \leq \alpha < 1$, 那么*

1. $\left(C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}\right)$ *是 Banach 空间;*

2. 如果 $0 \le \alpha \le \beta \le 1$ 且 $k \ge 0$ 是整数, 则

$$C^k(\bar{\Omega}) \supset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \supset C^{k,\beta}(\bar{\Omega}) \supset C^{k,1}(\bar{\Omega});$$

3. 如果 Ω 是有界凸集, 则

$$C^{k,1}(\bar{\Omega}) \supset C^{k+1}(\bar{\Omega}).$$

证明. 1. 容易验证 $\left(C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}\right)$ 是一个赋范线性空间, 故只需验证完备性.

取 $u_l \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), k = 1, \cdots, \infty$, 为一列柯西列. 则由嵌入 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega})$ 以及 $C^k(\bar{\Omega})$ 的完备性, 知 u_l 为 $C^k(\bar{\Omega})$ 中柯西列, 且依范数收敛到某一函数 u. 此时有对任意 $x \neq y \in \bar{\Omega}$:

$$\frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha} = \lim_{l\to\infty} \frac{|\partial^\gamma u_l(x) - \partial^\gamma u_l(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \limsup_{l\to\infty} \|\partial^\alpha u_l\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} < M.$$

$u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\gamma|=k} \frac{|(\partial^\gamma u - \partial^\gamma u_l)(x) - (\partial^\gamma u - \partial^\gamma u_l)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
\le &\sum_{|\gamma|=k} \lim_{m\to\infty} \frac{|(\partial^\gamma u_m - \partial^\gamma u_l)(x) - (\partial^\gamma u_m - \partial^\gamma u_l)(y)|}{|x-y|^\alpha} \qquad (1)\\
\le &\limsup_{m\to\infty} \|u_m - u_l\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\limsup_{l\to\infty} \|u - u_l\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \\
\le &\lim_{l\to\infty} \|u - u_l\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \limsup_{l\to\infty} \sum_{|\gamma|=k} \frac{|(\partial^\gamma u - \partial^\gamma u_l)(x) - (\partial^\gamma u - \partial^\gamma u_l)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
\le &\limsup_{l\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \|u_m - u_l\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = 0.
\end{aligned}$$

从而 u_l 在中 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 收敛到 $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

2. 以第二个符号为例. 任意 $u \in C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$, $\gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| = k$, 考虑 $|x-y| \ge 1$ 和 $|x-y| < 1$ 两种情况有

$$\frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \max\{2\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})}, [\partial^\gamma u]_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}\} \le 2\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty,$$

$u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

3. 对任意 $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, $\gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| = k$, 以及 $x, y \in \bar{\Omega}$,

$$\frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma(y)|}{|x-y|} = \|\nabla \partial^\gamma u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|u\|_{C^{k+1}(\bar{\Omega})},$$

所以 $u \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$.

□

注. 有部分同学第一问没有证明收敛性

$$[\partial^\gamma u_m - \partial^\gamma u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \to 0.$$

作业 2. 利用定积分几何意义证明对任意 $a, b > 0, 1/p + 1/q = 1$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

而且如果还有 $\varepsilon > 0$, 则存在 $C = C(\varepsilon, p) > 0$ 使得

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + C \frac{b^q}{q}.$$

证明. 不妨设 $p \geq q > 1$, 只需考虑两种情况: $a^{p-1} \geq b, a^{p-1} < b$. 以 $a^{p-1} \geq b$ 为例.

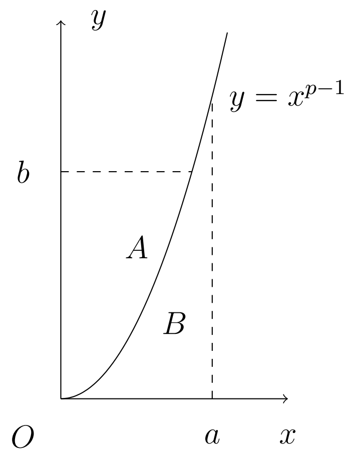

图 1

如图1, $a^p/p, a^q/q$ 分别为区域 A, B 的面积, 由图可知不等式成立.

对于第二个不等式,

$$ab = \varepsilon^{1/p} a \frac{b}{\varepsilon^{1/p}} \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-q/p} \frac{b^q}{q},$$

取 $C = \varepsilon^{-q/p} = \varepsilon^{-1/(p-1)}$. □

作业 3. 求证

定理 (2.3)**.** *1.* 对 $1 \leq p < \infty$, $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

2. 如果 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则 $u(x) = 0$, *a.e.* $x \in \Omega$.

证明. 选取一个光滑子 J.

1. 对任意 $u \in L^p(\Omega)$ 以及 $\delta > 0$, 可以取紧集 $K \subset\subset K' \subset\subset \Omega$ 使得

$$\|u\|_{L^p(K)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)} - \frac{\delta}{2}.$$

根据命题 2.3 (4), 存在 ε 充分小使得

$$\|J_\varepsilon * (u\chi_K) - u\chi_K\|_{L^p(K')} \leq \frac{\delta}{2}$$

且 $\operatorname{supp} J_\varepsilon * (u\chi_K) \subset K'$, 从而取光滑紧支函数 $\varphi = J_\varepsilon * (u\chi_K)$ 即有

$$\|\varphi - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\varphi - u\chi_K\|_{L^p(\Omega)} + \|u\chi_K - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \delta.$$

这说明 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

2. 可取一列紧集 $K_i \subset K_{i+1}$ 且 $\cup_{i=1}^\infty K_i = \Omega$, 则

$$\{u \neq 0\} = \cup_{i=1}^\infty (\{u \neq 0\} \cap K_i) = \cup_{i=1}^\infty \{u\chi_{K_i} \neq 0\},$$

只需证明对任意 i, $u\chi_{K_i} = 0$ 即可. 所以不妨设 u 紧支, 支集为 K.

再注意到

$$\mu(\{u \neq 0\}) = \mu\left(\cup_{M=1}^\infty (\{u \neq 0\} \cap \{|u| \leq M\})\right),$$

我们只需证明

$$u\chi_{\{|u|\le M\}} = 0, a.e. x \in \Omega$$

即可. 所以我们不妨设 u 有界 M.

注意到对有界紧支函数 u, $\mathrm{sgn}(u)$ 是紧支有界进而属于 $L^1(\Omega)$, 从而取一列 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛到 $\mathrm{sgn}(u)$. 再因为 u 有界, 所以

$$\int_\Omega |u| \mathrm{d}x = \int_\Omega u\mathrm{sgn}(u)\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega u\varphi_j \mathrm{d}x = 0,$$

命题得证. □

作业 4. *弱导数 $\partial_{x_j} u$ 存在, $\eta \in C^\infty(\Omega)$, 则 $\partial_{x_j}(\eta u)$ 也存在且*

$$\partial_{x_j}(\eta u) = u\partial_{x_j}\eta + \eta\partial_{x_j} u.$$

证明. 注意到 ηu 与 $u\partial_{x_j}\eta + \eta\partial_{x_j} u$ 都属于 $L^1_{loc}(\Omega)$, 我们只需验证对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$-\int_\Omega u\eta\partial_{x_j}\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega (u\partial_{x_j}\eta + \eta\partial_{x_j} u)\varphi \mathrm{d}x. \tag{2}$$

注意到 $\eta\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \eta\partial_{x_j} u\varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(\partial_{x_j}\eta\varphi + \eta\partial_{x_j}\varphi)\mathrm{d}x.$$

移项可知(2) 成立. □

作业 *. *若 $u, v, \partial_{x_j} u, \partial_{x_j} v \in L^2(\Omega)$, 则 $\partial_{x_j}(uv)$ 存在且 $\partial_{x_j}(uv) = u\partial_{x_j} v + v\partial_{x_j} u$.*

证明. 根据条件 $uv, u\partial_{x_j} v + v\partial_{x_j} u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 只需验证对任意紧支光滑函数 φ,

$$-\int_\Omega uv\partial_{x_j}\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega (u\partial_{x_j} v\varphi + v\partial_{x_j} u\varphi)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

根据命题 2.3 (4), 可取一列光滑函数 u_m 在 $L^2_{loc}(\Omega)$ 中收敛到 u, 且 $\partial_{x_j} u_m$ 在 $L^2_{loc}(\Omega)$ 中收敛到 $\partial_{x_j} u$, 我们有

$$-\int_\Omega u_m v\partial_{x_j}\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega (u_m\partial_{x_j} v\varphi + v\partial_{x_j} u_m\varphi)\mathrm{d}x.$$

注意到以上的积分实际上在紧集 $\mathrm{supp}\,\varphi$ 上, 所以根据 $v, \partial_{x_j} v \in L^2(\Omega)$ 以及 $u_m, \partial_{x_j} u)m$ 的收敛性可知(3) 成立.

□

作业 5. 证明命题 *2.7(2):*

命题 (2.7(2))**.** 已知 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $k \in \mathbb{N}, 1 \le p \le \infty$, 如果 $u \in W^{k,p}(\Omega)$, 那么 $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, 并且对任意满足 $|\alpha| + |\beta| \le k$ 的 $\beta \in \mathbb{Z}^n$ 有

$$\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^{\alpha+\beta} u.$$

证明. 对任意 $\beta \in \mathbb{N}^n$ 且 $|\beta| \le k - |\alpha|$, 任意光滑紧支函数 φ,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial^{\alpha+\beta} u \varphi \mathrm{d}x &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_\Omega u \partial^{\alpha+\beta} \varphi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\beta \varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \partial^\beta(\partial^\alpha u) \varphi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u.$$

根据 α, β 的对称性我们可以得到全部等式. 此外, 由以上等式可知

$$\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u \in L^p(\Omega).$$

这就证明了 $\partial^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$. □

作业 6. 试确定 γ 的值, 使得函数 $u(x,y) = |\log(x^2+y^2)|^\gamma \in H^1(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})$.

证明. 因为函数的奇性只出现在边界上, 所以在弱导数意义下有

$$D(|\log(x^2+y^2)|^\gamma) = -2\gamma |\log(x^2+y^2)|^{\gamma-1} \frac{(x,y)}{x^2+y^2}.$$

因而我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2^{2\gamma+1}\pi \int_{1/2}^1 |\log r|^{2\gamma} \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\log 2} s^{2\gamma} \mathrm{e}^{-2s} \mathrm{d}s, \\ \int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2^{2\gamma+1}\pi\gamma^2 \int_{1/2}^1 |\log r|^{2\gamma-2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = 8\pi\gamma^2 \int_0^{\log(2)} s^{2\gamma-2} \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

欲以上两式均有限, 当且仅当 $\gamma > 1/2$ 或 $\gamma = 0$. □

作业 7. *Problem 5.10: 2, 3, 4, 5.*

证明. 2. 我们简记 $[]_\alpha = []_{C^{0,\alpha}(U)}$. 任意 $x \neq y$,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} = \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta}\right)^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right)^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} \leq [u]_\beta^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} [u]_1^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}},$$

从而我们证明了

$$[u]_\gamma \leq [u]_\beta^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} [u]_1^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}.$$

注意到如果 $a, b, c > 0, 0 \leq \delta < 1$ 满足 $a \leq b^\delta c^{1-\delta}$, 那么

$$x + a \leq (x+b)^\delta (x+c)^{1-\delta}$$

对任意 $x \geq 0$ 成立, 这就证明了所需不等式.

3. 通过分部积分, 按照定义可以算出

$$Du(x) = \begin{cases} (-1,0), & x_1 > 0, |x_2| < x_1, \\ (1,0), & x_1 < 0, |x_2| < -1, \\ (0,-1), & x_2 > 0, |x_1| < x_2, \\ (0,1), & x_2 < 0, |x_1| < -x_2. \end{cases}$$

u, Du 都是有界的, 从而对任意 $p \in [1, +\infty]$, $u \in W^{1,p}(U)$.

4. (a) 设 $Du \in L^p(I)$ 为 u 的广义导数, 考虑函数 $v(s) = \int_0^s Du(t)dt$, 可以验证 $Du = Dv$, 因而存在常数 C 使得 $u = v + C$ 几乎处处成立. 不妨设 $u = v$. 由

$$|v(x) - v(y)| \leq \int_x^y |Du| dt \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} ||Du||_{L^p},$$

知道 v 是绝对连续函数且 $Du \in L^1$, 故古典导数 v' 几乎处处存在, 且由勒贝格微分定理知道:$\lim_{s\to 0} \frac{1}{2s}\int_{x-s}^{x+s} |g(s) - g(x)| \mathrm{d}t = 0$ $a.e.x$ 对任意 $g \in L^1$ 成立. 故

$$|v' - Du| = \lim_{s\to 0} \frac{|v(x+s) - v(x) - sDu(x)|}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2s} \int_{x-s}^{x+s} |Du(s) - Du(x)| \mathrm{d}t = 0.$$

从而 $v' = Du$.

(b) (a) 中已证明.

5. 固定一磨光核 J, 考虑紧集 W 满足 $V \subset\subset W \subset\subset U$ 且定义

$$\varepsilon := \frac{1}{4}\min\{d(\partial U, W), d(\partial W, V)\},$$

那么 $J_\varepsilon * \chi_W$ 是一个紧支光滑函数, 支集包含于 U_ε. 而且任意 $x \in V, B_\varepsilon(x) \subset W$,

$$J_\varepsilon * \chi_W(x) = \int_W J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = 1.$$

□

作业 8. *求证: $C^{0,1}$-区域一定满足线段性质.*

证明. 对任意 $x_0 \in \partial\Omega$, 存在 $r > 0$ 以及 $C^{0,1}$ 函数 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 使得 (改变标号和定向后) 有

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) | x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\},$$

在新标号下取邻域为 $U = B_{r/3}(x_0)$, 方向为 $y = re_n/3$, 其中 e_n 为第 n 个方向的单位向量. 则任意 $z \in \bar{\Omega} \cap U, t \in (0,1)$, $|z + ty - x_0| < r$ 而且 $(z+ty)_n = z_n + ty_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})$, 从而 $z_t y \in \Omega \cap B_r(x_0) \subset \Omega$. □

作业 9. *$H_0^2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ 是否相同? 试证明之.*

证明. $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, 问题是否右边包含于左边.
答案是几乎所有好的区域 Ω 左边严格包含于右边. 回顾定义 $H_0^m(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 H^m 范数下的闭包, 由迹嵌入定理当 Ω 边界有一定光滑性（Lipschitz 即可）时, 可知

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m\Omega | D^\alpha u = 0,\ \alpha \le m-1\ \},$$

从而本题只需要找出光滑函数 u 使得 $u \in H^m(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0$ 且 Du 在边界上不恒为 0 即可, 在 Ω 为 C^2 光滑区域时, 取 $u = d(x, \partial\Omega)$ 即可. □

作业 10. *求证:*

定理 (2.17)**.** *设 $n < p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集, 则存在正常数 $C = C(n,p,\Omega)$, 使得对任意 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 都存在 $\bar{u} \in C^{0,m_p}(\bar{\Omega})$ 满足 $u = \bar{u}, a.e. x \in \Omega$ 且*

$$[\bar{u}]_{C^{0,m_p}(\bar{\Omega})} \le C\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

证明. 对任意 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 存在 $u_m \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_0^{1,p}} = 0.$$

从而存在 C 使得

$$\|u_m\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|_{W_0^{1,p}}.$$

进而根据定理 2.15 有

$$|u_m(x) - u_m(y)| \le C(n,p)|x-y|^{m_p}\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C|x-y|^{m_p}C\|Du\|_{W_0^{1,p}}.$$

注意到 u_m 的支撑集包含于 Ω, 所以

$$|u_m(x)| \le C|diam(\Omega)|^{m_p}.$$

以上说明 $u_m \subset C_0^\infty(\Omega)$ 一致有界等度连续, 进而存在子列 (仍记为 u_m) 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛到极限 $\bar{u}$. 又因为 u 是 u_m 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的极限, 所以

$$\bar{u}(x) = \lim_{m\to\infty} u_m(x) = u(x)$$

几乎处处成立. 而且对

$$|u_m(x) - u_m(y)| \le C(n,p)|x-y|^{m_p}\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C|x-y|^{m_p}C\|Du\|_{W_0^{1,p}}$$

取极限可知

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \le C(n,p)|x-y|^{m_p}\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C|x-y|^{m_p}C\|Du\|_{W_0^{1,p}},$$

也就是所欲证的定理. □

作业 11. *Problem 5.10: 11, 14, 16, 18.*

证明. 11. 方法一: 考虑磨光化 $u_\epsilon = u * \eta_\epsilon$, 则 u_ϵ 在区域 Ω_ϵ 内为光滑函数且有 $Du_\epsilon = 0$. 令 $\epsilon \to 0$, 则 u_ϵ 在 Ω_ϵ 内为常值函数且收敛到 u , 而 Ω_ϵ 几乎处处收敛到 Ω , 故 u 恒为常数.

方法二: 注意到有 Poincaré 嵌入定理即证有

$$\left\| u - \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)} u \right\|_{L^{p^*}_{B_r(0)}} \le C(n)r||Du||_{L^p_{B_r(0)}} = 0,$$

也就是

$$u = \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)} u\mathrm{d}x$$

几乎处处成立.

方法三: 该证明紧对 U 是一维区间的情况成立. 对任意 $\psi, \varphi \in C_0^\infty(U)$, 如果 $\int_U \psi \mathrm{d}x = 0$, 则 ψ 是某一紧支光滑函数 Ψ 的导数, 从而

$$\int_U u\psi \mathrm{d}x = -\int Du\Psi \mathrm{d}x = 0.$$

否则

$$\int_U \varphi \mathrm{d}x = c\int_U \psi \mathrm{d}x.$$

其中 $c = \int_U \varphi \mathrm{d}x / \int_U \psi \mathrm{d}x$. 这样一来 $\varphi - c\psi$ 是某一紧支光滑函数 Ψ 的导数, 从而 $\int_U u(\varphi - c\psi)\mathrm{d}x = 0$. 这说明存在常熟 μ 使得 $\int_U u\psi \mathrm{d}x = \mu \int_U \psi \mathrm{d}x$. 作为泛函 $u - \mu = 0$. 而 $u \in W^{1,p}(U)$, $u = \mu$ 几乎处处成立.

14. 利用分部积分取极限, 根据

$$\lim_{r\to 0} r^{n-1}\left(\log\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right)^p = \lim_{t\to 0} t^{-n+1}(\log\log(1+t))^p = 0$$

以及

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{(|x|^2+|x|)\log(1+1/|x|)}\mathrm{d}x < \infty$$

可以算出

$$Du(x) = -\frac{x}{|x|^2(1+|x|)\log\left(1+\frac{1}{|x|}\right)}.$$

然后, 注意到

$$\lim_{r\to 0} r^{n-1}\left(\log\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right)^n = \lim_{t\to 0} t^{-n+1}(\log\log(1+t))^n = 0$$

以及

$$\int_{B_1(0)} |Du|^n \mathrm{d}x = c\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r(1+r)^n(\log(1+1/r))^n} \le c\int_0^\infty \frac{2\mathrm{d}t}{(t+1)(\log(t+1))^n} < \infty$$

可得所需结论.

16. 注意到 $n>3$, 对任意 $p<n/2$,

$$\int_{B_1(0)}\frac{1}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n-2p},$$

而且 $H^1\subset L^q$ 对任意 $q<\infty$ 成立, 所以

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

而且我们只需要对光滑紧支函数证明即可. 不妨设 $u\in C_0^\infty$ 且 $|u|\leq 1$.

$$\left|\lim_{r\to 0}\int_{\partial B_r(0)}u^2\nu\cdot\frac{x}{|x|^2}\right|\leq\lim_{r\to 0}r=0$$

从而有

$$\begin{aligned}(n-2)\int\frac{u^2}{|x|^2}&=\int u^2\nabla\cdot(\frac{x}{|x|^2})=-\int 2uDu\cdot\frac{x}{|x|^2}\\&\leq\int(2|Du|^2+\frac{1}{2}\frac{u^2}{|x|^2}).\end{aligned}\tag{4}$$

故有

$$\int\frac{u^2}{|x|^2}\leq C(n)\int|Du|^2.$$

18. (a) 考虑

$$u_\varepsilon=\sqrt{u^2+\varepsilon^2}-\varepsilon,$$

则

$$|u_\varepsilon-|u|\,|=\frac{2\varepsilon|u|}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}+\varepsilon+|u|}\leq\varepsilon.$$

再根据 U 有界, $u\in L^p(U)$ 因而 $|u|\in L^p(U)$, 所以 u_ε 在 $L^p(U)$ 中收敛到 $|u|$. 再因为

$$Du_\varepsilon=\frac{uDu}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}},$$

因而有

$$|Du_\varepsilon-\mathrm{sgn}(u)Du|=\left|\frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}-\mathrm{sgn}(u)\right||Du|.$$

注意到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}-\mathrm{sgn}(u)\right|=0$$

且
$$\left|\frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}-\operatorname{sgn}(u)\right||Du|$$
有 L^q $(q\le p, q<\infty)$ 可积上界 $2|Du|$, 根据控制收敛定理, 我们有

$$\|Du_\varepsilon-\operatorname{sgn}(u)Du\|_{L^q(U)}=0.$$

所以 $D|u|=\operatorname{sgn}(u)Du\in L^p(U)$.

(b) 利用教材提示中所给函数重复 (a) 的步骤即可得到结果.

(c) 注意到
$$u^+=\frac{|u|+u}{2},$$
因而 $2Du^+=Du+\operatorname{sgn}(u)Du=Du$. 但由 (b), 在 $u=0$ 时 $Du^+=0$, 所以在集合 $\{u=0\}$ 中 Du 几乎处处为零.

□

作业 *. *设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界开, $0\le\alpha_1<\alpha_2\le 1$, k 是非负整数, 则有 $C^{k,\alpha_2}(\bar{\Omega})\hookrightarrow\hookrightarrow C^{k,\alpha_1}(\bar{\Omega})$.*

证明. 任意 C^{k,α_2} 中的有界点列 u_n, 设其上界为 M. 任意 $\beta\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\le k$, $\partial^\beta u_n$ 一致有界等度连续, 因而存在一致收敛子列 u_{n_k}, 其在 C^k 中是 Cauchy 列, 这证明了 $\alpha_1=0$ 的情况. 对于 $\alpha_1>0$, 对任意 $|\beta|=k,\varepsilon>0$, 可以取 $\delta>0$ 使得 $M\delta^{\alpha_2-\alpha_1}<\varepsilon/2$. 再取 N 充分大使得任意 $k,l>N$,
$$|u_{n_k}(x)-u_{n_l}(x)|\le\frac{\delta^{\alpha_1}\varepsilon}{4},$$
这样就有
$$[\partial^\beta u_{n_k}-\partial^\beta u_{n_l}]_{C^{0,\alpha_1}}<\varepsilon.$$
这样我们就证明了所需结论. □

3 椭圆方程

作业 12. *求证, 如果 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是方程 $Lu=f$ 的弱上解和弱下解, 则 u 是 $Lu=f, u|_{\partial\Omega}=0$ 的一个弱解.*

证明. 根据弱上解和弱下解的定义, 对任意 $v \geq 0, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle,$$

而任意 $v \in H_0^1(\Omega)$, $v^+, v^- \in H_0^1(\Omega)$. 因而我们有

$$B(u,v) = B(u,v^+) - B(u,v^-) = 0.$$

$\square$

作业 13. 对于 $n=2$, 证明定理 *3.2.*

定理 (3.2)**.**

$$|B(u,v)| \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, u, v \in H^1(\Omega),$$
$$|B(u,v)| \geq \frac{\lambda}{2}\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} - \mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, u \in H^1(\Omega).$$

证明. 为了方便, 以下证明中 $L^p(\Omega), H^1(\Omega)$ 等分别简化为 L^p, H^1. 记

$$\|a\|_{L^\infty} = \sum_{i,j}\|a^{ij}\|_{L^\infty}, \|b\|_{L^p} = \sum_i \|b^i\|_{L^p}, \|d\|_{L^p} = \sum_i \|d^i\|_{L^p}$$

利用二维空间的 Sobolev 嵌入

$$W^{1,2} \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-2}}$$

对任意 $p > 2$ 成立, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \|a\|_{L^\infty}\|Du\|_{L^2}\|Dv\|_{L^2} + \|b\|_{L^p}\|Du\|_{L^2}\|v\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \\
&\quad + \|d\|_{L^p}\|Dv\|_{L^2}\|u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} + \|c\|_{L^{\frac{p}{2}}}\|v\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\|u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \\
&\leq C\Lambda\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

对于下界估计, 首先任意 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 $K_1(\varepsilon)$ 使得 $b^i = b_1^i + b_2^1, c = c_1 + c_2, d^i = d_1^i + d_2^i$ 满足

$$\sum_i (\|b_1^i\|_{L^p} + \|d_1^i\|_{L^p}) + \|c_1\|_{L^{\frac{p}{2}}} \leq \varepsilon,$$

$$\sum_i (\|b_2^i\|_{L^\infty} + \|d_2^i\|_{L^\infty}) + \|c_2\|_{L^\infty} \leq K_1(\varepsilon).$$

从而我们有

$$\begin{aligned}
|B(u,u)| &= \int_\Omega a^{ij}\partial_{x^i}u\partial_{x^j}u + (b_1^i + d_1^i)u\partial_{x^i}u + c_1u^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega (b_2^i + d_2^i)u\partial_{x^i}u + c_2u^2 \mathrm{d}x \\
&\geq \lambda\|Du\|_{L^2}^2 - C\varepsilon\|u\|_{H^1}^2 - K_1(\varepsilon)\|Du\|_{L^2}\|u\|_{L^2} - K_1(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2 \\
&\geq (\lambda - (2C+1)\varepsilon)\|Du\|_{L^2}^2 - (2\varepsilon + K_1(\varepsilon) + \frac{K_1^2(\varepsilon)}{4\varepsilon})\|u\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

最后取 $\varepsilon = \lambda/(4C+2)$ 即可.

□

作业 14. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $n \geq 3$, $\mathcal{L}$ 的系数满足

$$a^{ij} = a^{ji}, \forall i,j = 1,2,\cdots,n; \sum_{i,j} a^i j\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

且 $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$, 则存在常数 $\delta = \delta(n,\lambda) > 0$ 使得当

$$\sum_i \left(\|d^i\|_{L^n(\Omega)} + \|b^i\|_{L^n(\Omega)}\right) + \|c\|_{L^{n/2}(\Omega)} \leq \delta$$

时, 对任意 $f \in H^{-1}(\Omega)$, 问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中存在唯一的弱解.

证明. 类似于定理 3.1 的证明, 我们可以得到此时算子 $\mathcal{L}$ 对应的双线性泛函 B 时有界的, 为了应用 Lax-Milgram 定理, 我们只需要证明双线性泛函的强制性.

$$\begin{aligned}
|B(u,u)| &= \int_\Omega a^{ij}\partial_{x^i}u\partial_{x^j}u + (b^i + d^i)u\partial_{x^i}u + cu^2 \mathrm{d}x \\
&\geq \lambda\|Du\|_{L^2}^2 - C\delta\|u\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

最后, 因为 $u \in H_0^1$ 且 Ω 有界, 所以存在 C' 使得

$$\|u\|_{L^2} \le C'\|u\|_{L^{2n/(n-2)}}\|1\|_{L^{2n/(n+2)}} \le C''\|Du\|_{L^2}.$$

进而我们可以得到

$$|B(u,u)| \ge (C''' - C\delta)\|u\|_{H^1}.$$

我们取 $\delta < C'''/C$ 即可. □

作业 15. 给出方程 $\mathcal{L}u = f$ 的局部解 $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ 的一个充分条件, 并尽量做到最佳.

证明. 方法一: 假设系数有足够高的 *Sobelev* 正则性, 能量估计推出 u 有足够高的正则性, 再用嵌入定理. 此时可取

$$d^i, a^{ij} \in W^{m-1,\infty}_{loc}\Omega, b^i, c \in W^{m-2,\infty}_{loc}(\Omega), f \in H^{m-2}_{loc}(\Omega),$$

其中 m 取值如表1, 其中 $l \in \mathbb{N}$. □

	$n=2l, \alpha<1$	$n=2l, \alpha=1$	$n=2l+1, \alpha\le\frac{1}{2}$	$n=2l+1, \alpha>\frac{1}{2}$
$m=$	$l+1+k$	$l+2+k$	$l+1+k$	$k+2+k$

表 1: m 的取值

作业 16. *Problem 6.6: 3, 4, 7, 11.*

证明. 3. 定义双线性泛函

$$\begin{array}{rccc} B: & H_0^2(U)\times H_0^2(U) & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \int_U \Delta u \Delta v \mathrm{d}x, \end{array}$$

则不难得到 B 是有界的. 下证其为强制泛函.

首先任意 $u \in H_0^2(U)$, 我们有

$$B(u,u) = \|\Delta u\|^2_{L^2(U)},$$

根据椭圆方程边界正则性以及 Sobolev 不等式我们有

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(U)},$$

从而我们得到了泛函 B 的强制性.

4. 必要性: 取 $v=1$ 为常值函数即证.

充分性: 考虑 $H^1(U)$ 的余一维闭子空间 $A=\{u\in H^1(U)|\int_U udx=0\}$ 以及 A 上由投影算子自然诱导的范数 $||u||_A=||u||_{H^1}$. 注意到利用 $H^1(U)$ 是 Hilbert 空间以及 $\|u\|_{L^1(U)}\leq |U|^{1/2}\|u\|_{L^2(U)}$ 知 A 也是 Hilbert 空间. 考虑 A 上的双线性泛函

$$L[u,v]=\int_U Du\cdot Dv\mathrm{d}x.$$

注意到

$$L[u,u]=\int_U |Du|^2\mathrm{d}x\geq c\|u\|_A,$$

故用 Lax-Milgram 定理可以证明在对任意 $f\in L^2(U)$, $\int_U f\mathrm{d}x=0$, 存在 $u\in A$ 使得对任意 $v\in A$,

$$\int_U Du\cdot Dv\mathrm{d}x=\int_U fv\mathrm{d}x.$$

下验证 u 为原问题的解. 对任意 $v\in H^1(U)$, 有 $v-\bar{v}\in A$, 从而

$$L[u,v]=L[u,v-\bar{v}]=[f,v-\bar{v}]=[f,v].$$

其中 $\bar{v}$ 是 v 在 U 上的平均值.

7. 给定函数 u , 任意取定一个单位向量, 设为 e, 定义差分算子 $D^h u(x)=\frac{u(x+he)-u(x)}{h}$. 考虑 $L[u,v]=\int_\Omega[Du\cdot Dv+c(u)v]\mathrm{d}x$, 取试验函数 $v=-D^{-h}D^h u$, 则由定义有：

$$L[u,v]=[f,v]\leq\|f\|_{L^2}\cdot\|v\|_{L^2}\leq C\|f\|_{L^2}\cdot\|D^h(Du)\|_{L^2}.$$

另一方面

$$\begin{aligned}L[u,v]&=\int_\Omega[Du\cdot Dv+c(u)v]\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega[Du\cdot D^{-h}D^hDu+c(u)D^{-h}D^hu]\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega[D^hDu\cdot D^hDu+D^hc(u)D^hu]\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{5}$$

注意到

$$D^h c(u) = c'(\theta) D^h u,$$

其中 θ 在 $u(x+he)$ 和 $u(x)$ 之间, 而 $c' \geq 0$, 所以我们有

$$L[u,v] = \|D^h Du\|^2_{L^2(U)} + \int_U c'(\theta(x))(D^h u)^2 \mathrm{d}x \geq \|D^h Du\|^2_{L^2(U)}.$$

即有

$$\|D^h(Du)\|^2_{L^2} \leq C(n)\|f\|_{L^2}\|D^h Du\|_{L^2(U)}$$

令 $h \to 0$ 以及 e 的任意性即可证明 $\|D^2 u\|^2_{L^2} \leq C(n)\|f\|_{L^2}$.

11. 注意到

$$\begin{aligned} B[w,v] &= \int_U \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij} w_{x_i} v_{x_j}\right] \mathrm{d}x = \int_U \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} \phi'(u) v_{x_j}\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_U \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} (\phi'(u)v)_j\right] \mathrm{d}x - \int_U \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \phi''(u) v\right] \mathrm{d}x \\ &\leq 0 + 0 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

即可证明.

□

作业 17. *Problem 6.6: 2, 11.*

证明. 2. 有界性易得, 强制性如下:

$$\begin{aligned} B[u,u] &= \int_U [\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_i u_j + cuu] \\ &\geq C\lambda \|u\|^2_{H_0^1} - \mu \|u\|^2_{L^2} \\ &\geq (C\lambda - \mu)\|u\|^2_{H_0^1}. \end{aligned} \tag{7}$$

只要取 $\mu < C\lambda$ 即可, 其中 C 为依赖于区域的 *Sobolev* 常数.

12. 注意到

$$vLu - uLv = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{x_j}(v^2 \partial_{x_i} w) + \sum_{i=1}^n b^i (v\partial_{x_i} u - u\partial_{x_i} v)$$

从而考虑椭圆算子 $Mw=-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}w+\sum_{i=1}^n(b^i-\sum_{j=1}^n a^{ij}\partial_{x_j}(2\log v))\partial_{x_i}w$, 在区域 $D=\{x|u(x)>0\}$ 上有

$$Mw=\frac{vLu-uLv}{v^2}\leq 0.$$

由极值原理知 u 的最大值在边界 ∂D 达到. 因为 $u\leq 0$ 在 ∂U 上成立, 所以在 ∂D 上 $u=0$, $u\leq 0$ 在 D 上成立, 与 D 的定义矛盾. 弱极值原理成立. □

作业 18. *Problem 6.6: 5, 6, 10, 13, 15.*

证明. 5. 如果对任意 $v\in H^1(U)$, $u\in H^1(U)$ 满足

$$B[u,v]=\int_U \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_{\partial U}uv\mathrm{d}S=\int_U fv\mathrm{d}x,$$

则称 u 是所给方程的弱解.

利用迹定理可以得到 B 的有界性, 利用爆破方法可以得到 B 满足 Lax-Milgram 定理的条件, 因而解存在唯一.

6. 如果函数 $u\in A=\{v\in H^1(U)|\, v|_{\Gamma_1}=0\}$ 满足对任意 $v\in A$ 有

$$B[u,v]=\int_U \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x=\int_U fv\mathrm{d}x,$$

那么称 u 是所给方程的弱解.

利用爆破方法可以证明 u 满足 Lax-Milgram 定理所需条件, 因而解存在唯一.

10. (能量方法) 由定义, 对 $u\in H^1(U)$,

$$\int_U \nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x=0,$$

因而 $\nabla u=0$ 几乎处处成立. 再利用 Poincaré 不等式得到 u 几乎处处处处等于其在 U 上的平均值. 再根据 u 光滑, 所以它是个常数.

(极值原理) 根据弱极值原理, 存在 $x_0\in\partial U$ 是 u 的最大值点. 如果任意 $x\in U$ 有 $u(x)<u(x_0)$, 那么

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)>0,$$

与边界条件矛盾. 否则存在 $x' \in U$ 使得 $u(x') = u(x_0)$ 即在内部取到极大值, 再利用强极值原理可得结论.

13. 设 λ_k 对应的特征函数为 u_k 且

$$\int_U u_k u_l \mathrm{d}x = \delta_{kl}.$$

在 $k = 1$ 时结论显然,

以下设 $k > 1$. 对任意 $S \in \Sigma_{k-1}$, 设

$$S = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}v_{k-1},$$

其中 $v_i \in H_0^1(U)$. 再令 $\alpha_{jl} = \int_U u_j v_l \mathrm{d}x$, 我们可以找到 $\mu_j, j = 1, 2, \cdots, k$ 使得

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j \alpha_{jl} = 0, \sum_{j=1}^{k} \mu_j^2 = 1$$

因而定义 $u = \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j$ 则 $u \in S^{\perp}$ 且

$$\|u\|_{L^2} = 1, B[u,u] = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mu_j^2 \leq \lambda_k.$$

因而

$$\lambda_k \geq \max_{S \in \Sigma_{k-1}} \min_{\substack{u \in S^{\perp} \\ \|u\|_{L^2}=1}} B[u,u].$$

另一方面, 考虑 $S = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}u_{k-1}$, 此时可以得到

$$\min_{\substack{u \in S^{\perp} \\ \|u\|_{L^2}=1}} B[u,u] = B[u_k, u_k] = \lambda_k.$$

否则根据 $u_k \in S^{\perp}$ 以及 $L(S^{\perp}) \subset S^{\perp}$ 知存在 $v \in S^{\perp}$ 使得

$$\min_{\substack{u \in S^{\perp} \\ \|u\|_{L^2}=1}} B[u,u] = B[v,v] = \lambda < \lambda_k.$$

这样一来我们得到了新的特征函数与特征值 $v, \lambda < \lambda_k$. 但这与特征值的排序矛盾, 从而

$$\lambda_k \leq \max_{S \in \Sigma_{k-1}} \min_{\substack{u \in S^{\perp} \\ \|u\|_{L^2}=1}} B[u,u].$$

综上, 命题成立.

15. 我们有 $\lambda(\tau)=\int_{U(\tau)}|\nabla w|^2\mathrm{d}x$, 所以

$$\dot{\lambda}=2\int_{U(\tau)}\nabla w\cdot\nabla w_\tau\mathrm{d}x+\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\nu\cdot v\mathrm{d}S. \tag{8}$$

我们首先计算第一项:

$$\begin{aligned}2\int_{U(\tau)}\nabla w\cdot\nabla w_\tau\mathrm{d}x&=-2\int_{U(\tau)}w\Delta w_\tau\mathrm{d}x\\&=2\int_{U(\tau)}w(\dot{\lambda}w+\lambda w_\tau)\mathrm{d}x\\&=2\dot{\lambda}+\int_{U(\tau)}\partial_\tau(w^2)\mathrm{d}x\\&=2\dot{\lambda}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_{U(\tau)}w^2\mathrm{d}x-\int_{\partial U(\tau)}w^2v\cdot\nu\mathrm{d}S=2\dot{\lambda}.\end{aligned}$$

带入到(8) 可得

$$\dot{\lambda}=2\dot{\lambda}+\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\nu\cdot v\mathrm{d}S.$$

最后注意到 $w=0$ 在 $\partial U(\tau)$ 上恒成立因而切向导数恒为零, 进而在边界上

$$\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|=|\nabla w|,$$

从而命题成立.

□