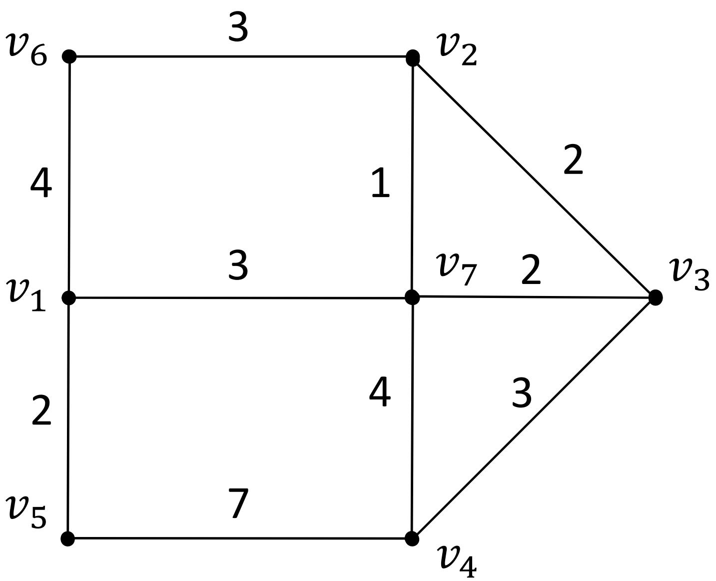
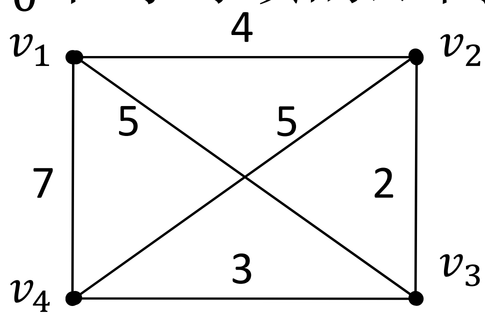
图论第七次习题解答

6.3 求图的一条中国邮路



1. 奇次顶点集V_0={v_1, v_2, v_3, v_4}
2. & 3. 求得V_0中每对顶的距离，构造K_4



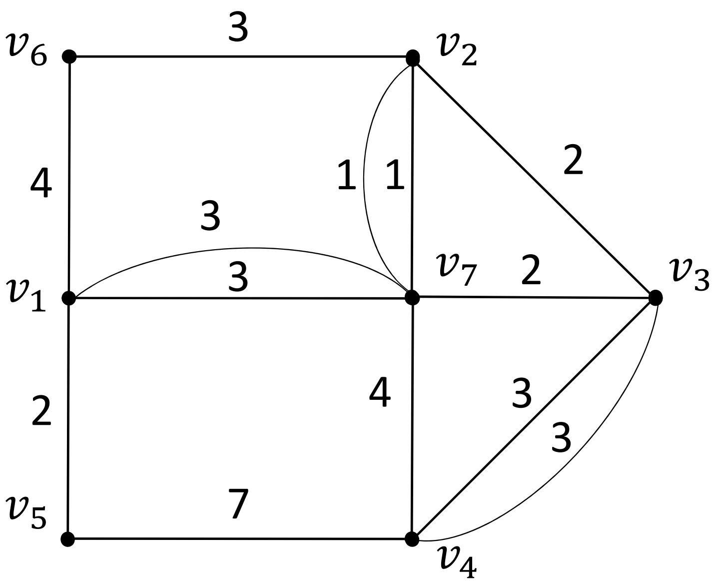
4. 求K_4的总权最小完备匹配

$$M = \{v_1v_2, v_3v_4\}$$

5. 在G中求M中同一边端点间的最短轨

P(v_1, v_2)=$v_1v_7v_2$, P(v_3, v_4)=v_3v_4,

6.3 求图的一条中国邮路



6. 把G的在5. 中求得的最短轨的边变成同权倍边，得G’

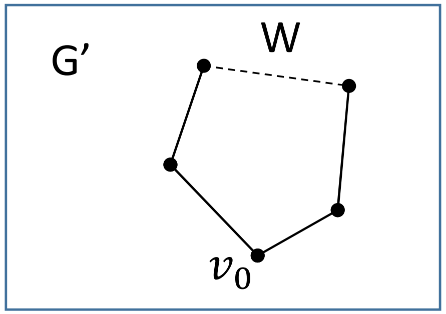
7. 用FE算法求得G’的一条Euler回路W’

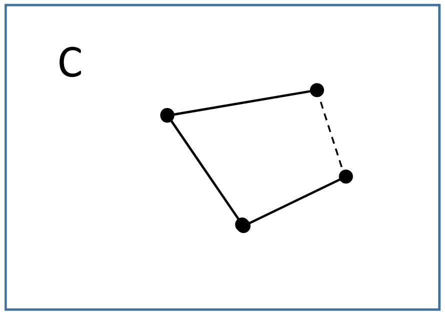
$$v_1 v_7 v_2 v_7 v_1 v_6 v_2 v_3 v_7 v_4 v_3 v_4 v_5 v_1$$

6.4 Euler图G是由v_0起任意行遍的Euler图的充要条件是v_0在G的每个圈上

必要性：

- 用反证法，若存在圈C，使得v_0不在C上，令G’=G−E(C)，则G’的每个顶点度数仍为偶数，因此G’是Euler图。
- 故存在包含G’一切边的闭行迹W，且由于v_0在W上，因此在G上从v_0出发作回路W，则W不包含圈C上的边，且由于无法直接从v_0到圈C上，故G不是由v_0起任意行遍的Euler图，矛盾，必要性得证。





6.4 Euler图G是由v_0起任意行遍的Euler图的充要条件是v_0在G的每个圈上

充分性：

- 对于任意一条从v_0出发的行迹P= $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$，则该行迹必然会包含一个圈，否则该行迹是一条轨，与图G是Euler图矛盾。
- 令$v_0, v_1, \dots, v_k, v_i$是行迹P中包含圈的最小长度的子路径，且顶点$v_0, v_1, \dots, v_k$互不相同，则$v_i$必为$v_0$，否则将得到一个不包含$v_0$的圈。
- 从G中去掉这个圈得到图G’，则图G’仍为Euler图，且v_0在图G’的每个圈上，且去除圈后的行迹P’此时仍然从v_0开始。重复此步骤直到图为空，则行迹P被划分为若干个边不相交的从v_0出发的圈，因此行迹P为一个Euler回路，故充分性得证。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第十次作业

第10章：2题

- 10.2 证明$|\varphi(G)|=2^{v-1}$,其中G是无向连通图

  解：
- $\varphi(G)$是由G的全体断集在$\varepsilon(G)$中的向量与零向量组成的集合
- 由定理10.2可得$\varphi(G)$是0-1二元域上的一个v-1维线性空间
- 因为每个基本割集组有v-1个向量
- 所以$\varphi(G)$的全体向量个数为2^{v-1}

- 10.8 **设G是弱连通有向图，证明：**

$$\mathbf{r}(\mathbf{B}(\mathbf{G}))=\mathbf{r}\left(\boldsymbol{B_f}(\mathbf{G})\right)=\mathbf{v}-\mathbf{1}$$

证明：

由于$B(G)$的所有行向量之和为0向量，因此$B(G)$中所有的v个行向量线性相关，故$r\big(B(G)\big)\le v-1$

由于G是弱连通的，因此G的底图G'连通，由定理10.8，以G'的生成树的边构造$B(G)$的一个子方阵，则此方阵为$v-1$阶满秩方阵，因此$r\big(B(G)\big)\ge v-1$, 故$r\big(B(G)\big)=v-1$，同理可证$r\left(B_f(G)\right)=v-1$

（也可仿照无向图定理的证明过程，通过最后导出底图G'不连通的矛盾得证）

- 10.11 用有向图的基本关联矩阵来求图10.29的生成树数目$\tau(G)$

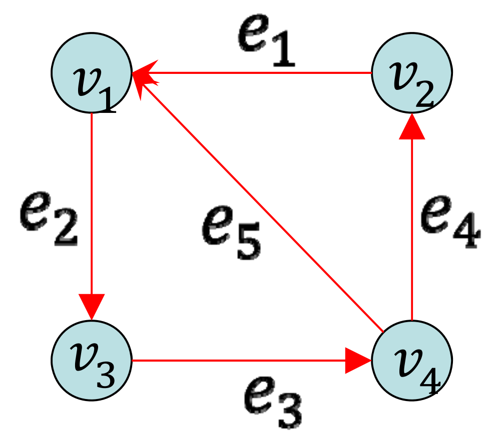


图 10.29 G’

解：

给原图G的边添加方向，得到有向图G’
则G’的关联矩阵为：

$$B(G') = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

任取一个$B_f(G')$

$$B_f(G') = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第10章：11题

由定理10.8可得

$$\tau(G)=\det(B_f(G').B_f^T(G'))=\det\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}=8$$