选作习题(Nov08). 设函数 $u(t)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上二阶连续可导，且 $u(a)=0=u(b)$, $u(t)>0$, $\forall t\in(a,b)$. 证明

$$\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u(t)}dt > \frac{4}{b-a}.$$

(本题是一个纯数分题, 不需要常微知识.)

证明： 设 $u(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值在点 $c\in(a,b)$ 处达到, 即 $u(c)=\max\{u(t), x\in[a,b]\}$, 则 $u(c)>0$. 于是

$$\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u(t)}dt > \frac{1}{u(c)}\int_a^b |u''(t)|dt.$$

对任意两点 α, $\beta\in(a,b)$, 显然有

$$\int_a^b |u''(t)|dt \geq \int_\alpha^\beta |u''(t)|dt \geq \left|\int_\alpha^\beta u''(t)dt\right| \geq |u'(\beta)-u'(\alpha)|.$$

另一方面，根据 Lagrange 中值定理，我们有

$$\frac{u(c)}{c-a} = \frac{u(c)-u(a)}{c-a} = u'(\alpha), \quad \alpha\in(a,c),$$

$$\frac{-u(c)}{b-c} = \frac{u(b)-u(c)}{b-c} = u'(\beta), \quad \beta\in(c,b).$$

于是我们得到

$$\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u(t)}dt > \frac{1}{u(c)}\left|u'(\beta)-u'(\alpha)\right| = \frac{1}{u(c)}\left|\frac{u(c)}{c-a}+\frac{u(c)}{b-c}\right| = \frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}.$$

利用微积分知识我们知道

$$\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c} \geq \min\left\{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{b-x}, x\in(a,b)\right\} = \frac{4}{b-a}.$$

故结论成立. 证毕.