1 概率计算杂例

1.1 摸球问题

1.1.1 放球问题

例 1 将 n 个不同编号的球随机放入 $N(N \geq n)$ 个盒子中，每个球都以相同的概率被放入每个盒中，每盒容纳球数不限，求下列事件的概率:

(1) $A =$“某指定的 n 个盒中各有一个球”;

(2) $B =$“恰有 n 个盒中各有一个球”;

(3) $C =$“某指定盒中有 $m(m \leq n)$ 个球”;

(4) $D =$“有一个盒中有 $m(\frac{n}{2} < m \leq n)$ 个球”;

(5) $E =$“至少有两个球在同一盒中”.

解. (1) 因为基本事件总数为 N^n, 而有利场合数为 $n!$, 故

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

(2). 从 N 个盒子中取 n 个组合数为 $\binom{N}{n}$，再由 (1)，得

$$\mathbb{P}(B) = \binom{N}{n}\frac{n!}{N^n}.$$

(3). 从 n 个球中取 m 个放入某些指定的盒中有 $\binom{n}{m}$ 种可能，而其余 $n-m$ 个球可随机放入 $N-1$ 个盒中，故

$$\mathbb{P}(C) = \binom{n}{m}\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

(4). 由 (3) 得

$$\mathbb{P}(D) = \binom{N}{1}\binom{n}{m}\frac{(N-1)^{n-1}}{N^n}.$$

(5). 因为 E 与 B 互斥，故

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \binom{N}{n}\frac{n!}{N^n}.$$

例 2 将 n 个不同的球随机放入 $N(N \leq n)$ 个盒中，每个球都以相同的概率被放入每盒中，每盒容纳球数不限，求下列事件的概率:

(1) $A =$“每盒不空”;

(2) $B =$“恰有 m 个盒子是空的”, $(m < N)$;

(3) $C=$“某指定的 k 个盒中都有球”.

解. (1). 设 $A_i=$“第 i 个盒子是空的”, $i=1,2,...,N$，所以

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_N^c)=1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i\Big).$$

注意到

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i\Big)=\sum_{i=1}^N\mathbb{P}(A_i)-\sum_{1\le i<j\le N}\mathbb{P}(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le N}\mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)-...+(-1)^N\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^N A_i\Big),$$

而

$$\mathbb{P}(A_i)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n,\quad i=1,...,N,$$

$$\mathbb{P}(A_i\cap A_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j|A_i)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^n=\left(\frac{N-2}{N}\right)^n, i\neq j=1,2,...,N,$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^N A_i\Big)=\left(\frac{N-N}{N}\right)^n=0.$$

所以

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i\Big)=\sum_{i=1}^N(-1)^{i-1}\binom{N}{i}\left(\frac{N-i}{N}\right)^n.$$

故

$$\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i\Big)=\sum_{i=0}^N(-1)^i\binom{N}{i}\left(\frac{N-i}{N}\right)^n.$$

(2). N 个盒中恰有 m 个是空的，有 $\binom{N}{m}$ 种可能. 某指定 m 个盒子是空的而其余都不空的概率为:

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m\cap A_{m+1}^c\cap\cdots\cap A_N^c)=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^m A_i\Big)\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=m+1}^N A_i^c\Big|\bigcap_{i=1}^m A_i\Big)$$

因为

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^m A_i\Big)=\left(\frac{N-m}{N}\right)^n,$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=m+1}^N A_i^c\Big|\bigcap_{i=1}^m A_i\Big)=\sum_{i=0}^{N-m}(-1)^i\binom{N-m}{i}\left(\frac{N-m-i}{N-m}\right)^n$$

故

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \binom{N}{m}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}^c \cap \cdots \cap A_N^c) \\
&= \binom{N}{m}\left(\frac{N-m}{N}\right)^n \sum_{i=0}^{N-m}(-1)^i \binom{N-m}{i}\left(\frac{N-m-i}{N-m}\right)^n \\
&= \binom{N}{m}\sum_{i=0}^{N-m}(-1)^i \binom{N-m}{i}\left(\frac{N-m-i}{N}\right)^n.
\end{aligned}
$$

(3). 不妨设前 k 个盒中都有球，而由题意后面 $N-k$ 个盒中每个盒子或者有球或者无球，故

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c \cap (A_{k+1} + A_{k+1}^c) \cap \cdots \cap (A_N + A_N^c)) \\
&= \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}\left(\frac{N-i}{N}\right)^n.
\end{aligned}
$$

例 3 将 n 个不同的球随机放入 N 个盒中，直至某指定的盒中有球为止. 设每个球都以相同的概率被放入每盒中，每盒容纳球数不限，求放球次数为 $k(1 \le k \le n)$ 的概率 $\mathbb{P}(k)$.

解. 当 $1 \le k < n$ 时，因为前 $k-1$ 次都没放入指定盒中，第 k 次才放入指定的盒中，故所求概率为

$$
\mathbb{P}(k) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}.
$$

当 $k = n$ 时，

$$
\mathbb{P}(n) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{N-1}{N} + \frac{1}{N}\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.
$$

故

$$
\mathbb{P}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}, & k = 1, 2, ..., n-1, \\ \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}, & k = n. \end{cases}
$$

1.2 其他问题

例 4 (Polya 坛子问题) 设一坛子装有 b 个黑球，r 个红球，任意取出一个，然后放回并再放入 c 个与取出的颜色相同的球。

(1) 求最初取出的球是黑球，第二次也取出黑球的概率;

(2) 如将上述手续进行 n 次，求取出的正好是 n_1 个黑球 n_2 个红球的概率 $(n_1 + n_2 = n)$;

(3) 证明：任一次取出黑球的概率是 $\frac{b}{b+r}$，任一次取出红球的概率是 $\frac{r}{b+r}$;

(4) 第 m 次与第 $n(m<n)$ 次取出的都是黑球的概率为 $\frac{b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)}$.

解 (1). 设 A_i =“第 m 次取出的是黑球”, $i=1,2,\cdots,n$，则前两次都取出黑球的概率为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1A_2)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)&=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\\&=\frac{b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)}\end{aligned}$$

(2) 在 n 次取球中有 n_1 次取得黑球有 $\binom{n}{n_1}$ 种可能取法。对每种确定的取法，设 A_i=“第 i 次取得黑球”, $i=1,2,\cdots,n$. B=“第 $s_1,s_2,\cdots,s_{n_1}$ 次取得黑球，第 $r_1,r_2,\cdots,r_{n_2}$ 取得红球”, 其中 $n_1+n_2=n$，而 $s_1,s_2,\cdots,s_{n_1}$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中任意 n_1 个数，$r_1,r_2,\cdots,r_{n_2}$ 是其余 n_2 个数，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{s_i})&=\frac{b+(i-1)c}{b+r+(s_i-1)c}\\\mathbb{P}(A_{r_j}^c)&=\frac{r+(j-1)c}{b+r+(r_j-1)c}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B)&=\mathbb{P}(A_{s_1}\cap A_{s_2}\cap\cdots\cap A_{s_{n_1}}\cap A_{r_1}^c\cap A_{r_2}^c\cap\cdots\cap A_{r_{n_2}}^c)\\&=\frac{b}{b+r+(s_1-1)c}\cdot\frac{b+c}{b+r+(s_2-1)c}\cdots\frac{b(n_1-1)c}{b+r+(s_{n_1}c)}\cdot\frac{r}{b+r+(r_1-1)c}\cdots\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(r_{n_2-1}c)}\\&=\prod_{i=0}^{n_1-1}(b+ic)\prod_{j=0}^{n_2-1}(r+jc)/\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kc)\end{aligned}$$

从而所求概率为

$$\binom{n}{n_1}\mathbb{P}(B)=\binom{n}{n_1}\prod_{i=0}^{n_1-1}(b+ic)\prod_{j=0}^{n_2-1}(r+jc)/\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kc)$$

(3) A_i 如上所设，因为 $\mathbb{P}(A_1)=\frac{b}{b+r}$。设 $\mathbb{P}(A_n)=\frac{b}{b+r}$, 现往证 $\mathbb{P}(A_{n+1})=\frac{b}{b+r}$. 因为

$$\mathbb{P}(A_{n+1})=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1)+\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1^c)$$

而 $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1)$ 等于在装有 $b-1$ 个黑球 r 个红球的坛子中第 n 次取出黑球的概率，由假设

$$\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1)=\frac{b-1}{b-1+r}.$$

同理，

$$\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1^c) = \frac{b}{b+r-1}.$$

故

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b-1}{b-1+r} + \frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r-1} = \frac{b}{b+r}.$$

(4). 先证明 $m=1$ 时，对一切 $n(n>m)$ 命题成立，设 B_j="第 j 次取得黑球"，由 (3) 得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1B_n) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_n|B_1) = \frac{b}{b+r}\mathbb{P}(B_n|B_1)\\ &= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{(b+c)+r} = \frac{b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)}.\end{aligned}$$

此时当 $m=1$ 时, 对一切 $n(n>m)$ 命题成立。设 $m=k-1$ 时对一切 $n(n>m)$ 命题成立，往证 $m=k$ 时对一切 $n(n>m)$ 命题也成立。因为

$$\mathbb{P}(B_kB_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_kB_n|B_1) + \mathbb{P}(B_1^c)\mathbb{P}(B_kB_n|B_1^c),$$

而 $\mathbb{P}(B_kB_n|B_1)$ 等于从装有 $b+c$ 个黑球，r 个红球的袋中第 $k-1$ 次与 $n-1$ 次都取得黑球的概率，由假设得

$$\mathbb{P}(B_kB_n|B_1) = \frac{b+c}{b+c+r}\cdot\frac{b+2c}{b+2c+r}.$$

同理

$$\mathbb{P}(B_kB_n|B_1^c) = \frac{b}{b+c+r}\cdot\frac{b+c}{b+2c+r}.$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_kB_n) &= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+c+r}\cdot\frac{b+2c}{b+2c+r} + \frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r+c}\cdot\frac{b+c}{b+2c+r}\\ &= \frac{b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)}.\end{aligned}$$

例 5 *(Banach 火柴盒问题)* 某数学家左右衣袋各装有一盒火柴，每次使用他任取两盒中的一盒，假设每盒各有 N 根，求

1 他首次发现一盒空时，另一盒恰好有 r 根的概率 $(r=1,2,\cdots N)$。

2 第一次用完一盒火柴时 *(不是发现)* 另一盒下恰有 r 根的概率 $(r=1,2,\cdots N)$。

解 (1) 两盒火柴有一盒用完有两种可能性，设手伸向左边口袋表示"成功"，伸向右边口袋表示"失败"，则发现左边一盒空时，右边一盒恰好有 r 跟的概率，

也就是独立重复试验中，第 $N+1$ 成功发生在 $2N-r+1$ 次试验的概率，它是负二项概率，也即 $\binom{2N-r}{N}(\frac{1}{2})^N(\frac{1}{2})^{N-r}\frac{1}{2}$，故所求概率为

$$\binom{2}{1}\binom{2N-r}{N}(\frac{1}{2})^{N+1}(\frac{1}{2})^{N-r} = \binom{2N-r}{N}(\frac{1}{2})^{2N-r}$$

(2) 类似于 (1)，这是第 N 次"成功"发生在第 $2N-r$ 次试验的概率的两倍，也就是

$$\binom{2}{1}\binom{2N-r-1}{N-1}(\frac{1}{2})^{N}(\frac{1}{2})^{N-r} = \binom{2N-r-1}{N-1}(\frac{1}{2})^{2N-r-1}$$

例 6（配对问题）n 对夫妇随机坐在一张圆桌旁，求没有一个妻子坐在她丈夫身旁的概率 $(n>1)$ 与恰有 r 对夫妻相邻就坐的概率。

解. 先来计算环状选排列种数。从 n 个不同的元素中任选 k 个不同的元素按元素之间相对位置不分首位地围城一圈，这种排列叫环状选排列。从 n 个不同的元素中任选 k 个的环状选排列种数是 A_n^k/k。这是因为尽管元素的绝对位置不同，只要元素的相对位置相同，任然算一种排列。从而 n 个不同元素的环状全排列种数为 $(n-1)!$。设 A_i="第 i 个夫妇相邻就坐"，$i=1,2,\cdots,n$，则没有妻子坐在她丈夫边上的概率为

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) = 1-\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

由概率的加法公式我们有

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j}^{n}\mathbb{P}(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{(n-1)}\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_n)$$

其中 $\mathbb{P}(A_iA_j)$ 表示第 i 对夫妇相邻而第 j 对夫妇也相邻而坐的概率。因为相邻而坐，可把这两对夫妇看成两个人，$2n-4+2=2n-2$ 环状全排列种数是 $(2n-2-1)!=(2n-3)!$，又因为每对夫妇在相邻而坐又有两种可能，故

$$\mathbb{P}(A_iA_j) = \frac{2^2(2n-3)!}{(2n-1)!}$$

同理，

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{2(2n-2)!}{(2n-1)!}, \quad \mathbb{P}(A_iA_jA_k) = \frac{2^3(2n-4)!}{(2n-1)!}.$$

从而没有妻子坐在丈夫身边的概率为

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) = 1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^k\frac{2^k(2n-k-1)!}{(2n-1)!}.$$

恰有 r 对夫妇相邻而坐有 $\binom{n}{r}$ 种可能，对于指定 r 对夫妇相邻而坐而其余 $n-r$ 对夫妇都不相邻而坐 (比如前 r 对都相邻而坐, 其余 $n-r$ 对都不相邻而坐) 的概率为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_rA_r^cA_{r+1}^c\cdots A_n^c)\\
=&\mathbb{P}(A_1\cdots A_r)\mathbb{P}(A_r^cA_{r+1}^c\cdots A_n^c|A_1\cdots A_r)\\
=&\frac{2^r(2n-r-1)!}{(2n-1)!}\left[1+\sum_{i=1}^{n-r}\binom{n-r}{k}(-1)^k\frac{2^k(2n-2r-k-1)!}{(2n-2r-1)!}\right].
\end{aligned}$$

故所求概率，也即恰好有 r 对夫妇相邻而坐的概率为

$$\mathbb{P}=\binom{n}{r}\frac{2^r(2n-r-1)!}{(2n-1)!}\left[1+\sum_{i=1}^{n-r}\binom{n-r}{k}(-1)^k\frac{2^k(2n-2r-k-1)!}{(2n-2r-1)!}\right].$$

例 7（选举定理）设在一次选举中候选人甲得票 n 张，候选人乙得票 m 张 $(m\le n)$，求在计票过程中

(1) 甲的票数总比乙的票数多的概率。

(2) 甲的票数总不少于乙的票数的概率。

解 (1) 如果甲的票数总比乙多，那么除了 0 时刻外没有任何一个时刻乙的票数会和甲的票数相等。设事件 A=“某时刻两者得票相等”。那么对该时刻 k 来讲，显然 $k=2r$,$r=1,2,\cdots,m$。前 $2r$ 次投票结果的顺序可以是对称的，也即将投票给甲乙两者的时刻互换，这样的投票结果也是事件 A 的一个元素。那么考虑 $B=$” 第一次投票是投给乙，最后甲 n 票，乙 m 票”，那么从第二次投票开始，乙一共得到 $n-1$ 票，则一事件发生的概率为

$$\mathbb{P}(B)=\frac{\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{n+m}{n}}=\frac{m}{m+n}.$$

而对 B 这一事件来说，显然我们有 $B\subset A$, 并且由上述分析我们有 $\mathbb{P}(A)=2\mathbb{P}(B)$，所以所求概率为

$$\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(B)=1-\frac{2m}{m+n}=\frac{n-m}{m+n}.$$

(2) 设 $G(n,m)$ 表示在计票过程中甲票数总不小于乙票数的概率，并且最后甲得到 n 票，乙得到 m 票。显然在 B 发生的条件下，$G(n,m)$ 是 0, 而 $\overline{A}$ 的概率显然也是 0; 而在 $\overline{B}$ 发生的条件下，也即第一次投票给甲后，甲的票数总比乙的票数多的概率，也就是 $G(n-1,m)$。从而由全概率公式得

$$\mathbb{P}(A^c)=\mathbb{P}(A^c|B)\cdot\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A^c|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)=0+\frac{n}{m+n}\cdot G(n-1,m),$$

所以

$$G(n-1,m)=\frac{n-m}{n},$$

故

$$G(n,m)=\frac{n+1-m}{n+1}.$$

1.3 比赛规则

例 8 甲、乙进行某项比赛，设每局比赛甲胜的概率为 p，乙获胜的概率是 $q = 1 - p$, 且比赛独立进行，那么求在下列比赛规则下甲获胜的概率:

(1) $2n+1$ 局 $n+1$ 胜制。

(2) 谁先胜 n 局谁获胜。

(3) 甲在乙胜 m 局之前先胜 n 局甲获胜，或者乙在甲胜 m 局之前先胜 n 局乙获胜。

(4) 谁先比对方多胜 *2* 局谁获胜。

(5) 谁先比对方多胜 n 局谁获胜。

(6) 甲比乙多胜 n 局甲获胜，乙比甲多胜 m 局乙获胜。

(7) 谁先胜 n 局谁获胜，但如果出现 $n-1$ 比 $n-1$，则以后谁比对方多胜 m 局获胜。

(8) 谁先胜 n 局谁获胜，但如果出现 $n-1$ 比 $n-1$，则比赛重新开始。

解显然 (1) 是 (3) 当 n, m 均为 $n+1$ 的特例，(2) 是 (3) 当 n, m 均为 n 时的特例，而 (3) 就是上例。

(4) 显然无论谁获胜比赛必须都是进行偶数局。设

B="甲获胜";

A_i="在前两局比赛中甲恰好胜 i 局", $i = 0, 1, 2$, 由全概率公式得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) =& \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(B|A_i) \\
=& 0 + \binom{2}{1} pq \cdot \mathbb{P}(B) + \binom{2}{2} p^1 \times 1 \\
=& 2pq\mathbb{P}(B) + p^2, \quad \text{其中 } q = 1 - p.
\end{aligned}$$

从而我们有

$$\mathbb{P}(B) = \frac{p^2}{1 - 2pq}$$

(4) 的另一解法: 设

A_n=" 在第 n 次比赛后甲获胜", 则 n 为偶数，且甲在第 $n-1$ 局与 $n-2$ 局中甲只胜 $n-2/2$ 局，且因为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_2) = p^2, \quad \mathbb{P}(A_4) = 2pqp^2 = 2p^3q, \\
&\mathbb{P}(A_6) = p^2(2pq)^2.
\end{aligned}$$

一般的，我们有

$$\mathbb{P}(A_{2m}) = p^2(2pq)^{m-1}, \quad m = 1, 2 \cdots$$

且由于 A_{2m} 互斥，故所求概率为

$$\mathbb{P}(\sum_{m=1}^{\infty} A_{2m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2m}) = \frac{p^2}{1-2pq}.$$

(5) 用差分方程。假设 $p \neq q$，并且设 $\mathbb{P}(j)$ 为甲比乙多胜了 $n-j$ 局的情况下甲获胜的概率，$j = 0, 1, \cdots, 2n$, 显然 $\mathbb{P}(0) = 1, \mathbb{P}(2n) = 0$, 且所求概率就是 $\mathbb{P}(n)$, 从而由全概率公式我们可得

$$\mathbb{P}(j) = p\mathbb{P}(j-1) + q\mathbb{P}(j+1)$$

由此可得

$$\mathbb{P}(j+1) - \mathbb{P}(j) = \frac{p}{q}[\mathbb{P}(j) - \mathbb{P}(j-1)]$$

递推得到

$$\mathbb{P}(j+1) - \mathbb{P}(j) = (\frac{p}{q})^j[\mathbb{P}(1) - \mathbb{P}(0)] = C(\frac{p}{q})^j, \quad C = \mathbb{P}(1) - \mathbb{P}(0)$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(j) &= C(\frac{p}{q})^{j-1} + \mathbb{P}(j-1) \\
&= C[(\frac{p}{q})^{j-1} + (\frac{p}{q})^{j-2} + \cdots + \frac{p}{q} + 1] + \mathbb{P}(0) \\
&= 1 + C\frac{1-(p/q)^j}{1-(p/q)}
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
-1 = \mathbb{P}(2n) - \mathbb{P}(0) &= \sum_{j=1}^{2n}[\mathbb{P}(j) - \mathbb{P}(j-1)] \\
&= \sum_{j=1}^{2n} C(\frac{p}{q})^{j-1} = C\frac{1-(p/q)^{2n}}{1-(p/q)}
\end{aligned}$$

从而

$$C = -\frac{1-(p/q)}{1-(p/q)^{2n}}$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(j) &= 1 - \frac{1-(p/q)}{1-(p/q)^{2n}} \cdot \frac{1-(p/q)^j}{1-(p/q)} \\
&= \frac{(p/q)^j - (p/q)^{2n}}{1-(p/q)^{2n}}
\end{aligned}$$

当 $p=q$ 时，易证 $\mathbb{P}(j)=1-\frac{j}{2n}$。故

$$\mathbb{P}(j)=\begin{cases} \frac{(p/q)^j-(p/q)^{2n}}{1-(p/q)^{2n}}, & p\neq q, \\ 1-\frac{j}{2n}, & p=q, \end{cases}$$

从而

$$\mathbb{P}(n)=\begin{cases} \frac{p^n}{p^n+q^n}, & p\neq q, \\ \frac{1}{2}, & p=q. \end{cases}$$

(6) 利用解 (5) 的类似的方法得

$$\mathbb{P}(n)=\frac{p^n(q^m-p^m)}{q^{m+n}-p^{n+m}}, \quad p\neq q$$

当 $p=q$ 时，$\mathbb{P}(n)=1-\frac{n}{n+m}=\frac{m}{n+m}$。在解上题中，只需注意这时边界条件为 $\mathbb{P}(0)=1, \mathbb{P}(m+n)=0$. 显然 (4) 是 (5) 当 $n=2$ 时的特例，而 (5) 又是 (6)，当 $m=n$ 时的特例。

(7). 甲可能在出现 $n-1$ 比 $n-1$ 之前获胜，也可能在出现 $n-1$ 比 $n-1$ 之后获胜，设这两个事件分别为 A 与 B。显然我们有 $AB=$, 且甲获胜的概率为 $\mathbb{P}(A+B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$, 由上例的解法 2 我们可知:

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{k=n}^{2n-2} p^n\binom{k-1}{n-1}q^{k-n}$$

又因为

$$\mathbb{P}(B)=\binom{2n-2}{n-1}q^{n-1}p^{n-1}\frac{p^m}{q^m+p^m}$$

从而我们有

$$\mathbb{P}(A+B)=\sum_{k=n}^{2n-2} p^n\binom{k-1}{n-1}q^{k-n}+\binom{2n-2}{n-1}p^{n+m-1}q^{n-1}/(q^m+p^m)$$

注意：当 $m=1$ 时 (7) 也就是 (2).

(8). 设 $A=$“甲在出现$n-1$之前获胜” $B=$“甲在出现$n-1$比$n-1$之后获胜” 则甲获胜的概率为 $\mathbb{P}(A+B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$，设

$$a=\mathbb{P}(A)=\sum_{k=n}^{2n-2} p^n\binom{k-1}{n-1}q^{k-n}$$
$$b=\binom{2n-2}{n-1}p^{n-1}q^{n-1}$$

则 $\mathbb{P}(A+B)=a+ba+b^2a+b^3a+\cdots=\frac{a}{1-b}$

另一解法：设 $D=$“甲获胜”，$A=$“在前$k(n\le k\le 2n-2)$局甲胜 n 局“，$B=$“出现 $n-1$ 比 $n-1$”，$C=$“在前$k(n\le k\le 2n-2)$局乙胜 n 局”，显然我们有 $\mathbb{P}(A)=a$，$\mathbb{P}(B)=b$，由全概率公式得到：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D)=&\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A)+\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B)+\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D|C)\\
=&\mathbb{P}(A)+b\mathbb{P}(D)+0\times\mathbb{P}(C)\\
=&a+b\mathbb{P}(D).
\end{aligned}$$

所以我们有

$$\mathbb{P}(D)=\frac{a}{1-b}.$$

1.4 遗传模型

例 9（基因遗传问题）群体中每个个体带且仅带有以下三种基因之一：AA,aa,Aa. 任意两个个体随机相遇后，各自以 $1/2$ 的概率将自己基因的一半遗传给后代（如果基因是 BD，则等可能的提供 B 或 D）. 群体中这三种基因比例是：

$$u:w:2v,\qquad uvw>0,\quad u+w+2v=1.$$

设群体数目充分大，求“子”一代群体中这三种基因的比例。

解. 由题，“父”，“母”按以下方式将基因遗传给后代：

$$\begin{cases}
\mathbb{P}(SAA|FAA,MAA) &=1,\\
\mathbb{P}(SAA|FAA,MAa) &=1/2,\\
\mathbb{P}(SAA|FAa,MAA) &=1/2,\\
\mathbb{P}(SAA|FAa,MAa) &=1/4.
\end{cases}$$

这里 S 表示“子”，F 表示“父”，M 表示“母”。由于群体充分大，所以两个个体随机相遇等同于有放回地任选两个个体，于是

$$\begin{cases}
\mathbb{P}(FAA,MAA) &=\mathbb{P}(FAA)\mathbb{P}(MAA) &=u^2,\\
\mathbb{P}(FAA,MAa) &=\mathbb{P}(FAA)\mathbb{P}(MAa) &=2uv,\\
\mathbb{P}(FAa,MAA) &=\mathbb{P}(FAa)\mathbb{P}(MAA) &=2uv,\\
\mathbb{P}(FAa,MAa) &=\mathbb{P}(FAa)\mathbb{P}(MAa) &=4v^2.
\end{cases}$$

用 $u_1:w_1:2v_1$ 表示“子”一代群体中基因的比例，利用全概率公式得到

$$\begin{aligned}
u_1=\mathbb{P}(SAA)=&\mathbb{P}(SAA|FAA,MAA)P(FAA,MAA)\\
&+\mathbb{P}(SAA|FAA,MAa)\mathbb{P}(FAA,MAa)\\
&+\mathbb{P}(SAA|FAa,MAA)\mathbb{P}(FAa,MAA)\\
&+\mathbb{P}(SAA|FAa,MAa)\mathbb{P}(FAa,MAa)\\
=&u^2+uv+uv+v^2\\
=&(u+v)^2.
\end{aligned}$$

对称地得到

$$w_1 = \mathbb{P}(Saa) = (w+v)^2.$$

利用

$$\sqrt{u_1} + \sqrt{w_1} = w + 2v + w = 1,$$

得到

$$2v_1 = \mathbb{P}(SAa) = 1 - u_1 - w_1 = (\sqrt{u_1} + \sqrt{w_1})^2 - u_1 - w_1 = 2\sqrt{u_1 w_1}.$$

“子”一代中这三种基因的比例是 $u_1 : w_1 : 2\sqrt{u_1 w_1}$。

从而，我们还可以知道“子”二代中三种基因的比例是:

$$\begin{cases} u_2 & = (u_1 + \sqrt{u_1 w_1})^2 & = u_1, \\ w_2 & = (w_1 + \sqrt{u_1 w_1})^2 & = w_1, \\ 2v_2 & = 2\sqrt{u_2 w_2} & = 2v_1. \end{cases}$$

也就是说，只要群体充分大，从第二代开始，每个基因都将按照固定比例永远遗传。

例 10（遗传风险）人类遗传学中，某种“坏的”基因会引起夭折。假设 a 是这种基因，带有 aa 基因的人不能长大成人。假设在成人群体中带有 Aa 基因的个体比例是 p。（带有 AA 基因的个体的比例是 $1-p$, 不考虑带有 aa 基因的个体，因为他们不影响后代）。

(1). 成人甲有一个哥哥或姐姐由于 aa 基因夭折的情况下，求甲带 Aa 基因的概率。

根据上个例子的遗传规律知道，已知甲有一个哥哥或者姐姐由于 aa 基因夭折等于已知父母都带有 Aa 基因。用 $E = \{FAa, MAa\}$ 表示甲的父母都带有 Aa 基因。引入条件概率 $\mathbb{P}_E(C) = \mathbb{P}(C|E)$, 则用条件概率公式和甲成人 $=\{$ 甲 $AA\}+\{$ 甲 $Aa\}$ 得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_E(\text{甲}Aa|\text{甲成人}) =& \frac{\mathbb{P}_E(\text{甲}Aa, \text{甲成人})}{\mathbb{P}_E(\text{甲成人})} \\ =& \frac{\mathbb{P}_E(\text{甲 Aa})}{\mathbb{P}_E(\{\text{甲 AA}\} + \{\text{甲 Aa}\})} \\ =& \frac{\mathbb{P}_E(\text{甲 Aa})}{\mathbb{P}_E(\text{甲 AA}) + \mathbb{P}_E(\text{甲 Aa})} \\ =& \frac{1/2}{1/4 + 1/2} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

也可以得到甲带有 AA 基因的概率为 1-2/3=1/3.

(2). 上面的甲和群体中的一个成年女子结合，求他们后代的基因分布。

由于该女子随机选自成年群体，所以对这对父母的子女来讲

$$\mathbb{P}(FAA)=\frac{1}{3},\quad \mathbb{P}(FAa)=\frac{2}{3},\quad \mathbb{P}(MAA)=1-p,\quad \mathbb{P}(MAa)=p.$$

再用全概率公式得到：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(SAA)=&\mathbb{P}(SAA|FAA,MAA)P(FAA,MAA)\\&+\mathbb{P}(SAA|FAA,MAa)\mathbb{P}(FAA,MAa)\\&+\mathbb{P}(SAA|FAa,MAA)\mathbb{P}(FAa,MAA)\\&+\mathbb{P}(SAA|FAa,MAa)\mathbb{P}(FAa,MAa)\\=&\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-p)+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}p\\=&\frac{2}{3}-\frac{p}{3}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Saa)=\mathbb{P}(Saa|FAa,MAa)\mathbb{P}(FAa,MAa)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}p=\frac{6}{p}.$$

$$\mathbb{P}(SAa)=1-\mathbb{P}(SAA)-\mathbb{P}(Saa)=\frac{1}{3}+\frac{p}{p}.$$

(3). (2) 中这对父母的成年子女带 Aa 基因的概率是：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(SAa|\text{成年})=&\frac{\mathbb{P}(SAa)}{\mathbb{P}(\text{成年})}=\frac{\mathbb{P}(SAa)}{\mathbb{P}(SAa)+\mathbb{P}(SAA)}\\=&(\frac{1}{3}+\frac{p}{6})/[(\frac{1}{3}+\frac{p}{6})+((\frac{2}{3}-\frac{p}{3}))]\\=&\frac{2+p}{6-p}.\end{aligned}$$

注意到 $0\le p\le 1$，所以 $\frac{2+p}{6-p}<\frac{2}{3}$.