抽象代数学（VII）

研究群论的一个重要工具—群在集合上作用

定义 G 一个群，X 一个集合 若存在映射 $G\times X\to X$

$(g,x)\longmapsto g*x$ 满足

(1) $e*x=x$; (2) $(g_1g_2)*x=g_1*(g_2*x)$

$\forall x\in X$, $g_1,g_2\in G$. 则称 G 在 X 上定义了一个(左)作用.

以上映射诱导了 X 上的变换.

令 $\pi_g: X\longrightarrow X$, $x\longmapsto g*x$ 这是一个双射，因为 $\pi_{g^{-1}}\circ\pi_g=id$

$\pi_g\in A(X)$ 条件(1),(2)给出了群同态 $G\xrightarrow{\Phi}A(X)$, $g\longmapsto\pi_g$

(1) $\Leftrightarrow \Phi(e)=id_X$ (2) $\Leftrightarrow \Phi(g_1g_2)=\Phi(g_1)\Phi(g_2)$

例1. $X=G$

$G\times G\longrightarrow G$, $(g,a)\longmapsto ga$ $\Rightarrow \pi_g$ 左平移

$G\times G\longrightarrow G$, $(g,x)\longmapsto gxg^{-1}$ 共轭作用 $\Rightarrow \pi_g$ 内自同构

例2. $X=H\lhd G$

$G\times H\longrightarrow H$, $(g,x)\longmapsto gxg^{-1}$

例3. $H\lhd G$, $X=G/H$

$G\times G/H\longrightarrow G/H$, $(g,xH)\longmapsto(gx)H$.

相似地，可定义右作用. 有时，记 $g*x=g.x$ 或 gx

例4. S_n 作用在 $\mathbb{R}^n$ 上

$\forall \sigma \in S_n,\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \sigma.x = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$

检验 $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n$

$$\sigma_1[\sigma_2.x] = \sigma_1 \begin{pmatrix} x_{\sigma_2(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma_2(n)} \end{pmatrix} \xlongequal{\text{令 } y_i = x_{\sigma_2(i)}} \sigma_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{\sigma_1(1)} \\ \vdots \\ y_{\sigma_1(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma_2[\sigma_1(1)]} \\ \vdots \\ x_{\sigma_2[\sigma_1(n)]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma_1\sigma_2(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma_1\sigma_2(n)} \end{pmatrix} = (\sigma_1\sigma_2).x$$

轨道和稳定化子.

定义 设 G, X 如上. $\forall x \in X$.

令 $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ 称为 x 在 G 作用下轨道.

$\underset{\overset{\shortparallel}{G_x}}{\mathrm{Stab}}.x = \{g \in G \mid g.x = x\} \leq G$ 称为 x 的稳定化子.

例 $G = GL_2(\mathbb{R})$ $X = \mathbb{R}^2$ $0 \in X$ 的轨道 $= \{0\}$

$\mathrm{Stab}.0 = GL_2(\mathbb{R})$

例 G 群, $H \leq G$ G 作用在 G/H 上 $\bar{e} = eH \in G/H$.

只有一个轨道 $\{gH \in G.\bar{e}\}$ (左乘)

$\mathrm{Stab}.\bar{g} = \{a \in G \mid a\bar{g} = \bar{g}\} = \{a \in G \mid g^{-1}ag \in H\}$

$= gHg^{-1}$

设 $x,y\in G$ 则 $G.x=G.y$ 或 $G.x\cap G.y=\phi$

$$G=\bigcup_{[x]}G.x$$

定理(轨道公式) 设 G 有限群，作用在集合 S 上.

$\forall x\in S$ 有 $|G.x|=[G:\mathrm{Stab}\,x]$

若 S 有限，则 $|S|=\sum_{x\in C}[G:\mathrm{Stab}\,x]$ 其中 $C\subseteq S$

每个轨道取一个代表元.

证明：令 $H=\mathrm{stab}\,x$ 则 $G=g_1H\cup\cdots\cup g_nH$

$n=[G:\mathrm{Stab}\,x]$ 令 $g_i\cancel{x}=x_i$ $i=1,\cdots,n$.

$\forall g\in G$ 则 $\exists!\, i\,(1\le i\le n)$ $g\in g_iH$ $gx=g_ix=x_i$

$x_i=x_j\Leftrightarrow g_ix=g_jx\Leftrightarrow g_j^{-1}g_i\in H\Leftrightarrow g_iH=g_jH$.

因此 $G.x=\{x_1,\cdots,x_n\}$

S 可分解成轨道的并：$S=\bigcup_{x\in C}G.x$

即 $|S|=\sum_{x\in C}|G.x|$.

例. 设 H,K 均为 G 的有限子群. 则 $|HK|=|H|\cdot|K|/|H\cap K|$

考虑 $H\times K$ 作用在 HK 上：$(h,k).x=hxk^{-1}$

只有一个轨道，稳定子 $=\{(h,k)\in H\times K\mid (h,k).e=e\}$

$=\{(h,h)\in H\times K\mid h\in H\cap K\}$

推论 设 G, X 如上，$|G|<\infty$，则

(a) 轨道长度整除 $|G|$.

(b) 同一轨道有共轭的稳定化子，从而同一轨道的元素稳定化子长度一致.

推论. G 有限群，$C=C(G)$ 中心，则

$$|G|=|C|+\sum[G:C_G(y_i)] \text{（类方程）}$$

其中 $C_G(y_i)$ 是 y_i 的中心化子，y_i 跑遍长度 ≥ 2 的共轭类。

例. 若 G 群 $|G|=p^m$ p 素数，则 $C(G)\neq\{e\}$

$\Downarrow$ 若 $m=2$. G 交换

证明：由类方程. $p\,|\,|C| \Rightarrow |C|\geq p$.

轨道个数.

$|X|<\infty$ $|G|<\infty$.

定理. 设 G, X 如上，$|G|\leq\infty$，假设有 r 个轨道.

则 $r=\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}|Fix_g(X)|$

其中 $Fix_g(X)=\{x\in X \mid gx=x\}\subset X$ (Burnside's lemma)

证明：考虑集合 $S=\{(g,x)\in G\times X \mid g.x=x\}$ 两种方式计算其阶数，一方面.

$$|S|=\sum_{g\in G}|Fix_g(X)|=\sum_{x\in X}|stab_x|=\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|G.x|}$$

即 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix_g(X)| = \sum_{x\in X}\frac{1}{|G.x|} = \sum_{t=1}^{r}\left(\sum_{x\in O_t}\frac{1}{|G.x|}\right)$.

这里 $X = O_1\cup\cdots\cup O_r$ ~~也~~ r个轨道. $\sum_{x\in O_t}\frac{1}{|G.x|} = 1$.

上式 $= \sum_{t=1}^{r} 1 = r$.

我们也可以使用图表说明:

将X的元素按轨道排列 $\{x_1,\cdots,x_r, x_{r+1}, x_s,\cdots\}$ 使得 $x_1,\cdots,x_r$ 均属于 $G.x_1$ $x_{r+1}\notin G.x_1$; $x_{r+1}, x_{r+2},\cdots, x_s \in G.x_{r+1}$, $x_{s+1}\notin G.x_{r+1}$.

令 $G=\{\tau_1,\cdots,\tau_n\}$ $f_{i,j}=\begin{cases}1 & 若\ \tau_i(x_j)=x_j\\ 0 & 若\ \tau_i(x_j)\neq x_j\end{cases}$

	x_1	x_2	$\cdots$	x_{r+1}	x_{r+2}	$\cdots$
τ_1	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$\cdots$	$f_{1,r+1}$	$f_{1,r+2}$	$\cdots$
τ_2	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$\cdots$	$f_{2,r+1}$	$f_{2,r+2}$	$\cdots$
$\vdots$						
τ_n	$f_{n,1}$	$f_{n,2}$	$\cdots$	$f_{n,r+1}$	$f_{n,r+2}$	$\cdots$

$|Fix_{\tau_i}(X)|$ = 第i行中"1"的个数.

$\Rightarrow \sum_{\tau_i\in G}|Fix_{\tau_i}(X)|$ = 数表中"1"的个数.

$|G_{x_j}| = |Stab.x_j|$ = 第j列中"1"的个数.

若 $x_j, x_k \in$ 同一轨道, 则 $|G_{x_j}| = |G_{x_k}|$

前r列中"1"的个数 $= r\cdot|Stab\,x_1| = |O_{x_1}|\cdot|Stab\,x_1| = |G|$.

$\Rightarrow$ 轨道个数为N, 则 $N\cdot|G| = \sum_{\tau_i\in G}|Fix_{\tau_i}(X)|$.

$$\Rightarrow N = \frac{\sum_{\tau_i}|Fix_{\tau_i}(X)|}{|G|}$$

例 n个不同物体放在一个圆周上，有多少种方法？

解: $G=\{g_1,\cdots,g_n\}$ $\quad g_i$ 顺时针旋转 $\frac{360}{n}\cdot i$ 度.

$N=\{1,2,3,\cdots,n!\}$ $\quad n!$种放法.

G作用于N $\quad g_n=(1)$ $\quad |Fix_{g_n}(N)|=n!$

$|Fix_{g_i}(N)|=0 \quad i=1,2,\cdots,n-1$

$$轨道数 = \frac{1}{|G|}\sum_{g_i\in G}|Fix_{g_i}(N)| = (n-1)!$$

例 两种不同颜色珠子，每三颗串成串，长度为3的串有多少不同种？

解: W和B 两种珠子. 有8种. $X=\{\underset{①}{WWW}, \underset{②}{BBB}, \underset{③}{WWB}, \underset{④}{WBB}, \underset{⑤}{WBW}, \underset{⑥}{BWW}, \underset{⑦}{BWB}, \underset{⑧}{BBW}\}$

旋转$\underbrace{0^\circ}_{=e}$, 旋转$\underbrace{180^\circ}_{=\sigma}$ $\Rightarrow G=\mathbb{Z}_2$ 作用于X.

$Fix_e(X)=X \quad Fix_\sigma(X)=\{①②⑤⑦\}$ $\quad ⑥\leftrightarrow③ \quad ⑧\leftrightarrow④$

$$轨道数 = \frac{8+4}{2}=6$$ 即不同串有: ①②③④⑤⑦

作业: Page47 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10.