选作题：考虑方程 $y' = p_3(x)y^3 + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x)$, (形如这样的方程称作 Abel 方程), 其中 $p_i(x)$ 均为以 T 为周期的周期连续函数, $i = 0, 1, 2, 3$。假设 $p_3(x)$ 不变号且不恒为零, 证明方程至多有三个不同的 T 周期解。

证法一： 反证. 假设上述方程有四个 T 周期解, 分别记为 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$. 根据初值问题解的唯一性, 这四个解对应的四条解曲线彼此不相交. 因此我们不妨设 $y_1(x) < y_2(x) < y_3(x) < y_4(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 由于 $y_i(x)$ 是解, 满足方程:

$$y_i'(x) = p_3(x)y_i^3(x) + p_2(x)y_i^2(x) + p_1(t)y_i(x) + p_0(x), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

由此我们不难得到

$$\frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} = p_3(x)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) + p_2(x)(y_1 + y_2) + p_1(x), \tag{1}$$

$$\frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} = p_3(x)(y_1^2 + y_1y_3 + y_3^2) + p_2(t)(x_1 + x_3) + p_1(t). \tag{2}$$

注意这里我们已将解 $y_i(x)$ 的自变量 x 略去了, 为的是看起来更清楚. 由式 (1) 减去式 (2) 得

$$\frac{y_1' - y_2}{y_1 - y_2} - \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} = p_3(x)(y_2 - y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + p_2(x)(y_2 - y_3). \tag{3}$$

在式 (3) 中以 y_4 代替 y_1 我们同样可以得到

$$\frac{y_4' - y_2'}{y_4 - y_2} - \frac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} = p_3(x)(y_2 - y_3)(y_4 + y_2 + y_3) + p_2(x)(y_2 - y_3). \tag{4}$$

让式 (3) 减去式 (4) 得

$$\frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} - \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} - \frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_2} + \frac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} = p_3(x)(y_1 - y_4)(y_2 - y_3) \tag{5}$$

对上式两边在区间 $[0, T]$ 上积分得:

$$\ln \frac{(y_1 - y_2)(y_4 - y_3)}{(y_1 - y_3)(y_4 - y_2)}\Bigg|_0^T = \int_0^T p_3(x)(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)dt.$$

由于解 $y_i(x)$ 是 T 周期的, 因此上式左边为零. 而上式的右边非零, 因为被积函数保持定号且不恒为零. 这就得到了一个矛盾. 证毕.

证法二：反证. 同证法一, 我们假设方程有四个不同的 T 周期解, 分别记为 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$， 并且可设 $y_1(x) < y_2(x) < y_3(x) < y_4(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 根据他们所满足的方程

$$y_i'(x) = p_3(x)y_i^3(x) + p_2(x)y_i^2(x) + p_1(x)y_i(x) + p_0(x), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

将上述四个恒等式写作矩阵向量形式

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & y_3 & y_3^2 & y_3^3 \\ 1 & y_4 & y_4^2 & y_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}. \tag{6}$$

根据上式可解得

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & y_3 & y_3^2 & y_3^3 \\ 1 & y_4 & y_4^2 & y_4^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}. \tag{7}$$

根据线性方程组理论得

$$p_3 \det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & y_3 & y_3^2 & y_3^3 \\ 1 & y_4 & y_4^2 & y_4^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & y_1' \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2' \\ 1 & y_3 & y_3^2 & y_3' \\ 1 & y_4 & y_4^2 & y_4' \end{pmatrix}. \tag{8}$$

回忆 Vandermonde 行列式的计算公式我们有

$$p_3 = \frac{-y_1'}{(y_4 - y_1)(y_3 - y_1)(y_2 - y_1)} + \frac{y_2'}{(y_4 - y_2)(y_3 - y_2)(y_2 - y_1)} + \tag{9}$$

$$\frac{-y_3'}{(y_4 - y_3)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} + \frac{y_4'}{(y_4 - y_1)(y_4 - y_2)(y_4 - y_3)}.$$

于等式 (9) 两边同乘 $(y_2-y_1)(y_4-y_3)$ 得

$$p_3(y_2-y_1)(y_4-y_3)=\frac{-y_1'(y_4-y_3)}{(y_4-y_1)(y_3-y_1)}+\frac{y_2'(y_4-y_3)}{(y_4-y_2)(y_3-y_2)}+ \tag{10}$$

$$\frac{-y_3'(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}+\frac{y_4'(y_2-y_1)}{(y_4-y_1)(y_4-y_2)}$$

对等式 (10) 的右端作分式分解得

$$p_3(y_2-y_1)(y_4-y_3)=\left(\frac{1}{y_3-y_1}-\frac{1}{y_4-y_1}\right)y_1'+\left(\frac{1}{y_4-y_2}-\frac{1}{y_3-y_2}\right)y_2'+ \tag{11}$$

$$\left(\frac{1}{y_3-y_2}-\frac{1}{y_3-y_1}\right)y_3'+\left(\frac{1}{y_4-y_1}-\frac{1}{y_4-y_2}\right)y_4'.$$

对等式 (11) 的右端重新组合如下

$$p_3(y_2-y_1)(y_4-y_3)=\frac{y_1'-y_3'}{y_3-y_1}+\frac{y_4'-y_1'}{y_4-y_1}+\frac{y_2'-y_4'}{y_4-y_2}+\frac{y_3'-y_2'}{y_3-y_2}. \tag{12}$$

关于上式在区间 $[0,2\pi]$ 上积分得

$$\int_0^T p_3(x)(y_2-y_1)(y_4-y_3)dx=\ln\frac{(y_4-y_1)(y_3-y_2)}{(y_3-y_1)(y_4-y_2)}\bigg|_0^T.$$

由于解函数 $y_i(x)$ 是 T 周期的, 因此上式右边为零. 而上式的左边非零, 因为被积函数保持定号且不恒为零. 这就得到了一个矛盾. 证毕.

注：一个值得进一步思考的问题是，如果将条件 "$p_3(x)$ 不变号且不恒为零" 换成 某个 "$p_i(t)$ 不变号且不恒为零", $0\le i\le 2$, 类似的结论是否成立。