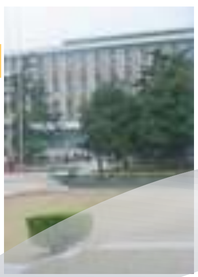
Computer Science and Technology



运 筹 学

整数规划

Integer Programming

6.1 整数规划问题的提出

- 整数规划（IP：Integer Programming）是最近二十年来发展起来的规划论的一个分支。
- 整数规划是要求全部或部分决策变量为整数的规划，目前分为线性和非线性两类。
- 根据变量的取值性质可分为：
  - 当要求全部变量取整数值的称为纯整数规划（Pure Integer Programming）或全整数规划（All Integer Programming）；
  - 仅一部分变量限制为整数称为混合整数规划（Mixed Integer Programming）；
  - 整数规划一种特殊的形式是0-1整数规划，它的变量取值仅限于0或1。

不考虑变量的所有整数或0-1约束条件而得到的线性规划问题称为原整数规划问题的LP松弛问题

- 任何IP都可以看做是LP松弛问题加上其他的约束条件——整数约束条件或0-1约束条件。因此LP松弛问题是IP的约束性较少或比较松弛的版本。这意味着IP的可行域必定包含在对应的LP松弛问题的可行域内。
- 对于是max问题的IP，这意味着

  LP松弛问题的最优值$z \geq IP$的最优值z'

6.1 整数规划问题的提出(cont.)

– 例6.1 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运受限制如下表。问两种货物各托运多少箱，可使获得利润最大?

货物	体积 每箱（米^3）	重量 每箱（百斤）	利润 每箱（百元）
甲 乙	5 4	2 5	20 10
托运限制	24	13	

• 解：易得线性规划模型为：

$$\max z = 20x_1 + 10x_2 \cdots\cdots(1)$$

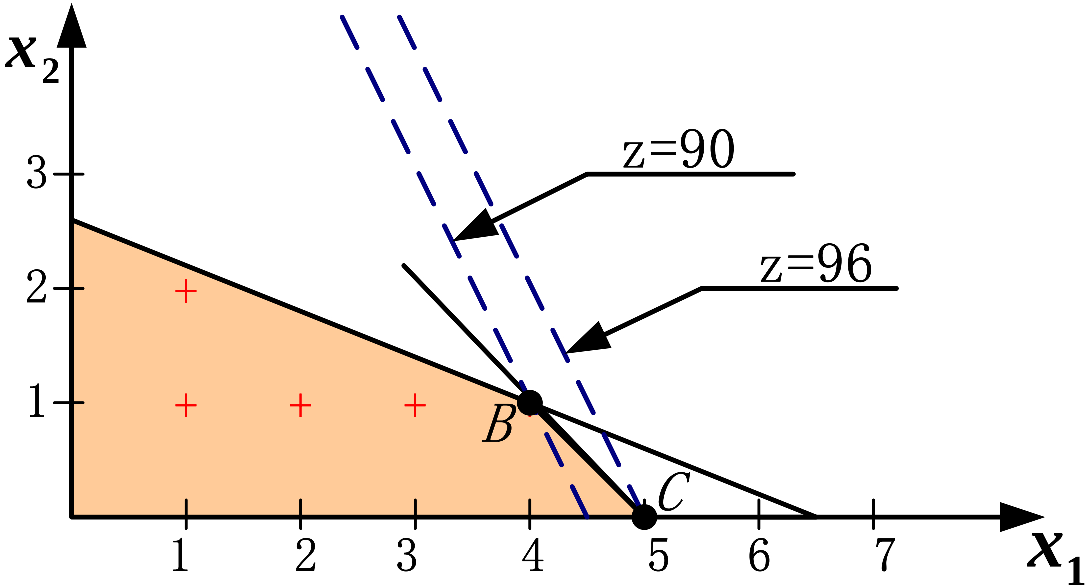
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ x_1, x_2 \ge 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ \boxed{x_1, x_2 \text{是整数} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)} \end{cases}$$

左式与线性规划问题的区别仅在于最后的条件(5)。

暂不考虑条件(5)，进行求解，得：

x_1=4.8，x_2=0，max z=96

- 显然，x_1是托运货物的箱数，不能为小数，所以不合条件(5)的要求。
- 如果将4.8的小数部分进位得到5，则5×5>24，不满足体积限制；如果将4.8的小数部分舍去，则利润z＝80，并不是最优解，因为当x_1=4，x_2=1时，z=90才是最优解。



– 图解法分析：

- 图中橙色区域代表可行域，其中的加号代表整数解对应的点。非整数解的最优解在**C(4.8,0)**点达到。为了满足题中要求，表示目标函数的等值线必须向原点移动，直到第一次碰到“＋”号点**B(4,1)**点。这样，目标函数**z**的等值线由**z=96**变为**z=90**。它们的差值**6**代表利润的降低，是由于变量的不可分性引起的。

由上例看来，将其相应的线性规划的最优解“化整”来解原整数规划，虽然容易想到，但是常常得不到整数规划的最优解，甚至根本不是可行解。

- 但由上图也可以看出，如果一个纯**IP**的**LP**松弛问题的可行域是有界的，那么这个**IP**的可行域将由有限数量的点组成。
- 理论上通过枚举每个可行点的**z**值，然后确定具有最大**z**值的可行点，即可求解这样的**IP**问题。

- 分枝界定解法（**Branch and Bound Method**）
  - 可用于解纯整数或混合的整数规划问题。本世纪六十年代初由Land Doig和Dakin等人提出。
  - 设有最大化的整数规划问题A，与它相应的线性规划为问题B，从解问题B开始，若其最优解不符合A的整数条件，那么B的最优目标函数必是A的最优目标函数z^*的上界，记作$\bar{z}$；而A的任意可行解的目标函数值将是z^*的一个下界，记作$\underline{z}$。分枝定界法就是将B的可行域分成子区域（称为分枝）的方法，逐步减小$\bar{z}$和增大$\underline{z}$，最终求得z^*。
  - 例6.2 求解整数规划问题：

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{为整数} \end{cases}$$

6.2 分枝定界解法(cont.)

- 解：解A相应的线性规划问题B（即不考虑整数条件），得最优解：

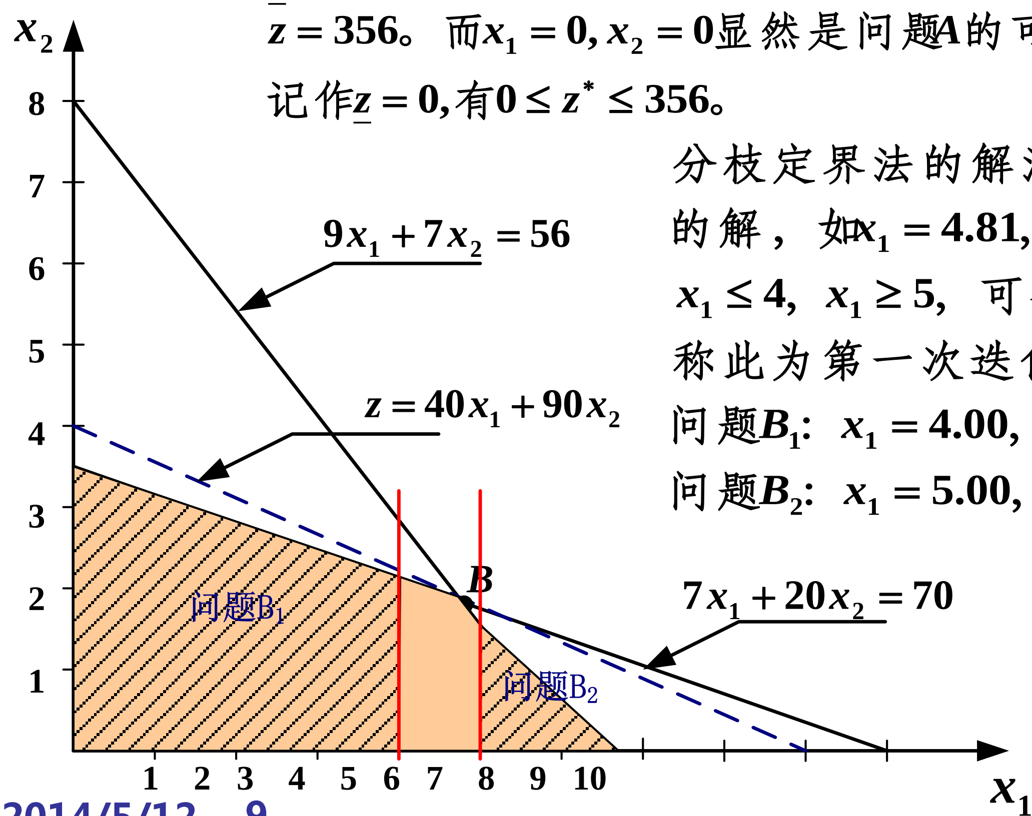
$$x_1=4.81, x_2=1.82, z_0=356$$

可见不符合整数条件。这时z_0是问题A的最优目标函数值z^*的上界，记作$\bar{z}=356$。而$x_1=0, x_2=0$显然是问题A的可行解，这时$z=0$，是z^*的下界，记作$\underline{z}=0$，有$0\le z^*\le 356$。

分枝定界法的解法，首先注意其中一个非整数变量的解，如$x_1=4.81$，于是对原问题增加两个约束条件：$x_1\le 4$，$x_1\ge 5$，可将原问题分为两个子问题B_1和B_2，称此为第一次迭代，分别得到最优解是：

问题B_1：$x_1=4.00$，$x_2=2.10$，$z_1=349$;

问题B_2：$x_1=5.00$，$x_2=1.57$，$z_2=341$;



6.2 分枝定界解法(cont.)

继续对问题B_1和B_2进行分解，因为$z_1 > z_2$，所以先分解B_1:

增加两个约束条件$x_2 \le 2$，$x_2 \ge 3$，得到问题B_3和B_4。

问题B_3: $x_1 = 4.00$，$x_2 = 2.00$，$z_3 = 340$; 已经是问题B_3的整数最优解

问题B_4: $x_1 = 1.42$，$x_2 = 3.00$，$z_4 = 327$;

因$z_3 > z_4$，所以B_4没有再分解的必要。

因为$z_2 = 341$，问题可能在$340 \le z^* \le 341$之间有整数解。

对问题B_2进行分解：增加两个约束条件$x_2 \le 1$，$x_2 \ge 2$，得到问题B_5和B_6。

问题B_5: $x_1 = 5.44$，$x_2 = 1.00$，$z_5 = 308$; 非整数解且$z_5 < 340$;

问题B_6: 无可行解。

- 因此:

问题B_3的解：$x_1 = 4.00$，$x_2 = 2.00$，$z_3 = 340$是整数规划问题A的最优解。

6.2 分枝定界解法(cont.)

- 分枝定界法的步骤：
  - 求整数规划问题A相应的线性规划问题B的最优解：
    - B没有可行解，说明A也没有可行解，计算结束；
    - B有最优解且符合问题A的整数条件，则B的最优解就是A的最优解，计算结束；
    - B有最优解，但不符合A的整数条件，记它的目标函数值为$\bar{z}_0$。
  - 用观察法找问题A的一个整数可行解，一般可取$x_j = 0, j = 1,2,\cdots,n$，试探，求得其目标函数值，并记做$\underline{z}$，以$z^*$表示问题$A$的最优目标函数值；这时有$\underline{z} \le z^* \le \bar{z}$。进行迭代：

- 第一步：分枝。在B的最优解中任选一个不符合整数条件的变量x_j，其值为b_j，以$[b_j]$表示小于b_j的最大整数，构造两个约束条件：

$$\begin{cases} x_j \le [b_j] \\ x_j \ge [b_j]+1 \end{cases}$$

将这两个约束条件分别加入问题B，求两个后继规划问题B_1和B_2。

- 第二步：定界。以每个后继问题为一分枝标明求解结果，与其他问题的解的结果中找出最优目标函数值最大者作为新的上界$\bar{z}$。从已符合整数条件的各分枝中，找出目标函数值为最大者作为新的下界$\underline{z}$，若无作用$\underline{z}=0$。

- 第三步：比较与剪枝。各分枝的最优目标函数中若有小于$\underline{z}$者，则剪掉这枝，即以后不用再考虑了。若大于$\underline{z}$，且不符合整数条件,则重复第一步骤。一直到最后得到$z^*=\underline{z}$为止。得最优整数解$x_j^*, j=1,2,\cdots,n$。

6.2 分枝定界解法(cont.)

- 用分枝界定法可解纯整数规划问题和混合整数规划问题。它比穷举法优越，因为它仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解，计算量比穷举法小。但是，若变量数目很大，其计算工作量也是很大的。

6.3 割平面法

- 首先，不考虑变量的整数条件，但增加线性约束条件——几何术语上称为割平面，使得由原可行域中切割掉一部分，这部分只包含非整数解，但没有切割掉任何整数可行解。割平面法就是指出怎样找到适当的割平面（不见得一次就找到），使切割后的可行域，它的一个有整数坐标的极点恰好是问题的最优解。
- 割平面法是**R.E.Gomory**提出来的，因此又称为**Gomory**的割平面法。
  - 例6.3 求解

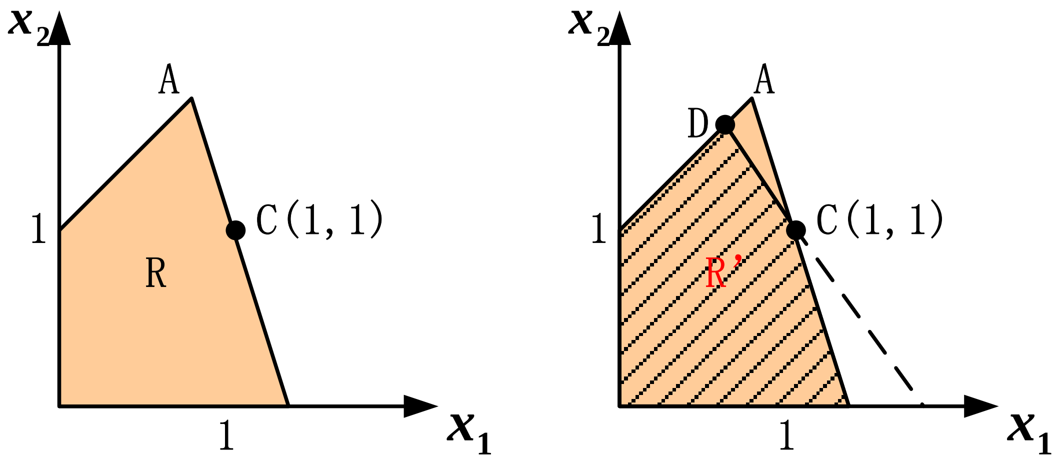
$$\max z = x_1 + x_2 \quad ①$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 & ② \\ 3x_1 + x_2 \le 4 & ③ \\ x_1, x_2 \ge 0 & ④ \\ x_1, x_2 \text{整数} & ⑤ \end{cases}$$

- 解：如不考虑条件⑤，容易求得相应的线性规划的最优解：

$$x_1=\frac{3}{4},x_2=\frac{7}{4},\max z=\frac{10}{4}$$

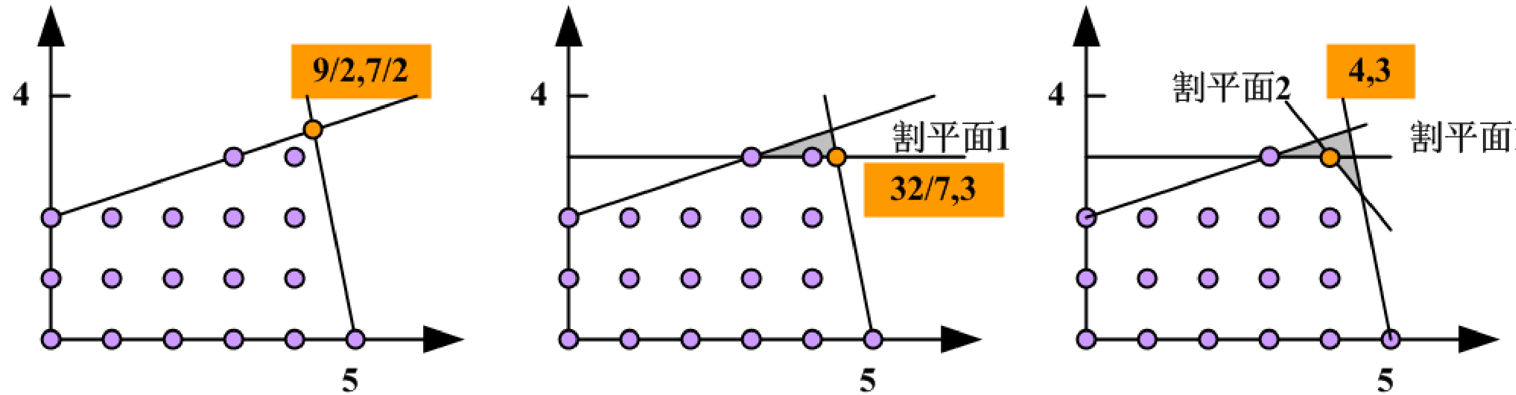
- 即图中域**R**的极点**A**。它不符合整数条件，如能找到像**CD**那样的直线去切割域**R**，去掉三角形域**ACD**，那么具有整数坐标的**C**点**(1,1)**就是域**R'**的一个极点，如在**R'**上求解①~④，而得到的最优解又恰巧在**C**点，就得到原问题的整数解。



- 解法的关键是怎样构造一个割平面。

- 例6.4 求解 $\max z = 7x_1 + 10x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 7x_1 + x_2 \le 35 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



对于上面两个例题，用1或者2个割平面就求得了最优解，这是一个巧合。一般而言，需要割的数目虽然是有限的，但是它与问题的规模没有必然的联系，即一个变量个数和约束个数较少的问题所需要的割的数目，可能会大于一个较大问题规模需要的割的数目

6.3 割平面法(cont.)

- 割平面的最基本要求
  - 增加的割平面保证不会删除任何一个原始问题的整数可行解，同时割平面还必须穿过至少一个可行或者不可行的整数点。
- 构造切割方程的步骤：
  - 1.令x_i是相应线性规划最优解中为分数值的一个基变量，由单纯形表的最终表得到

    $$x_i + \sum_k a_{ik} x_k = b_i \qquad (1)$$

    其中$i \in Q$(Q指构成基变量号码的集合),$k \in K$(K指构成非基变量号码的集合)
  - 2.将b_i和a_{ik}都分解成整数部分N与非负真分数f之和，即

    $b_i = N_i + f_i$,其中$0 < f_i < 1$

    $a_{ik} = N_{ik} + f_{ik}$,其中$0 \le f_{ik} < 1$

    N表示不超过b的最大整数，代入步骤1中的公式得到

    $$x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k$$

– 3.现有:

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \le f_i$$

由于上述不等式左端必然为整数，且$0 < f_i < 1$,

因此上式左端只能为小于或等于零的整数，即:

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \le 0$$

这就是一个切割方程。

在这种算法的某个阶段，当两个或以上的约束条件具有小数右端项的时候，如果下一个割平面是利用右端项小数部分最接近1/2的约束条件形成的，那么通常能够得到最佳的结果。

- 在例6.3原问题的两个不等式中加入非负松弛变量x_3、x_4，使两式变成等式约束：

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=1 & ⑥ \\ 3x_1+x_2+x_3=4 & ⑦ \end{cases}$$

- 不考虑整数条件，用单纯形表可解得非整数最优解：

	c_j			1	1	0	0
	C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
初始计算表	0	x_3	1	−1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
			0	1	1	0	0
最终计算表	1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
			−5/2	0	0	−1/2	−1/2

6.3 割平面法(cont.)

- 由最终计算表得到变量之间的关系式:

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

- 将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，移项得到:

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

$$x_2 - 1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

- 由等式约束可知，考虑整数条件，则要求x_3、x_4也都为非负整数。那么从上式得知，因为等式左边为整数，而等式右边的括号内都是正数，所以等式右边必定是负数。

6.3 割平面法(cont.)

- 因此，整数条件⑤可由下式代替：

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\right)\le 0 \text{即} -3x_3-x_4\le -3$$

- 这就得到了一个切割方程，将它作为增加约束条件，引入松弛变量x_5，得到等式：

$$-3x_3-x_4+x_5=-3$$

- 将该约束方程加到上面得到的最终计算表中，得到下表：

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	－1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	－3	0	0	－3	－1	1
		－5/2	0	0	－1/2	－1/2	0

6.3 割平面法(cont.)

- 从上表的b列中可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用对偶单纯形法继续进行计算（新增约束条件涉及灵敏度分析部分），选择x_5为换出变量，计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \min\left(\frac{-1/2}{-3}, \frac{-1/2}{-1} \right) = \frac{1}{6}$$

- 将x3作为换入变量，进行迭代得到下表，由于x_1、x_2的值都是整数，解题完成。

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	1	1	0	0	1/3	1/12
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
0	x_3	1	0	0	1	−1	−1/3
		−2	0	0	0	−1/3	−1/6

6.4 0-1型整数规划

- **0-1**型整数规划是整数规划中的特殊形式，它的变量x_i仅取值**0**或**1**。这时x_i称为**0-1**变量，或称二进制变量。x_i仅取值**0**或**1**这个条件可由下述约束条件所代替：

$$\begin{cases} x_i \le 1 \\ x_i \ge 0, \text{整} \end{cases}$$

- 引入**0-1**变量的实际问题
  - **1.**投资场所的选定——相互排斥的计划
    - 例**6.4** 某公司拟在市东、西、南三区建立门市部。拟议中有**7**个位置（点）A_i（$i=1,2,\cdots,7$）可供选择，规定：

在东区，由A_1,A_2,A_3三个点中至多选两个；

在西区，由A_4,A_5两个点中至少选一个；

在南区，由A_6,A_7两个点中至少选一个；

- 如选用A_i点的设备投资为b_i元，每年可获利c_i元，但投资总额不超过B元。问应选择哪几个点可使年利润最大?
- 分析：引入0-1变量x_i（i=1,2,···,7），令

$$x_i=\begin{cases}1, & 当A_i点被选用\\ 0, & 当A_i点没被选用\end{cases}\qquad i=1,2,\ldots,7$$

- 于是问题可列成：

$$\max z=\sum_{i=1}^{7}c_ix_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{7}b_ix_i\le B\\ x_1+x_2+x_3\le 2\\ x_4+x_5\ge 1\\ x_6+x_7\ge 1\\ x_i=0或1\end{cases}$$

6.4 0-1型整数规划(cont.)

– 2.相互排斥的约束条件

- 例6.5 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，运货有两种方式，车运方式每箱的体积分别为5米^{3}和4米^3，总共体积不得超过24米^3；船运方式每箱体积分别为7米^{3}和3米^3，总体积不得超过45米^3。
- 分析：运货有两种方式：车运和船运，这两条件是互斥的，即一单位货物如采用船运就不会同时采用车运。
- 引入0-1变量y，令

$$y=\begin{cases}0, & \text{采用车运方式}\\1, & \text{采用船运方式}\end{cases}$$

- 得到约束条件：

$$5x_1+4x_2\le 24+yM$$
$$7x_1+3x_2\le 45+(1-y)M$$

- 其中M是非常大的数，y的引入不必出现在目标函数内，因此目标函数表达式中y的系数为0。

6.4 0-1型整数规划(cont.)

- 推广可得:

  如果有m个互斥的约束条件（≤型）:

  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$

  为了保证这个约束条件只有一个起作用，我们引入m个$0-1$变量:

  $y_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 和一个充分大的常数M，而下面这一组$m+1$个约束条件:

  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i + y_iM$

  $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = m - 1$

  在上式中，m个y_i只有一个能取0，就符合上述要求。

– 3.关于固定费用的问题（Fixed Cost Problem）

  - 在讨论线性规划时，有些问题是要求成本最小，那时总设固定成本为常数，并在线性规划模型中不必明显列出。但有些固定费用的问题不能用一般线性规划来描述，可改变为混合整数规划问题来解决。

6.4 0-1型整数规划(cont.)

- 例**6.6** 某工厂为了生产某种产品，有三种不同的生产方式可供选择，如选定的生产方式投资高（如选用自动化程度高的社别），由于产量大，因为分配到每件产品的变动成本就低；反之，如选定的生产方式投资低，将来分配到每件产品的变动成本可能增加。
- 分析：

  x_j表示采用第j种方式时的产量；

  c_j表示采用第j种方式时每种产品的变动成本；

  k_j表示采用第j种方式时的固定成本。

  采用各种生产方式的总成本分别为：

$$P_j = \begin{cases} k_j + c_j x_j, & \text{当} x_j > 0 \\ 0, & \text{当} x_j \le 0 \end{cases} \qquad j = 1,2,3$$

6.4 0-1型整数规划(cont.)

- 在构成目标函数时，为了统一在一个问题中讨论，引入0-1变量y_j，令：

$$y_j=\begin{cases}1, & \text{当采用第}j\text{种生产方式，即}x_j>0\text{时}\\ 0, & \text{当不采用第}j\text{种生产方式，即}x_j=0\text{时}\end{cases}$$

- 上式可由下述3个线性约束条件规定：

$$x_j \le y_j M,\ j=1,2,3$$

其中M是个充分大的常数。上面的约束条件说明，当$x_j>0$时y_i必须为1；当$x_j=0$时y_i为0才有意义。

- 于是目标函数

$$\min z=(k_1+c_1x_1)y_1+(k_2+c_2x_2)y_2+(k_3+c_3x_3)y_3$$

- **0-1型整数规划的解法**
  - 在用穷举法时，需要检查变量取值的2^n个组合，若变量个数n较大（例如n>10），这几乎是不可能的。因此常设计一些方法只检查变量取值的一部分就能求到问题的最优解，称为隐枚举法（Implicit Enumeration）。分枝定界法也是一种隐枚举法。
  - 例6.7 解整数规划 $\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & ① \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & ② \\ x_1 + x_2 \le 3 & ③ \\ x_2 + x_3 \le 6 & ④ \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 & ⑤ \end{cases}$$

6.4 0-1型整数规划(cont.)

- 解：先通过试探法找出一个可行解，易看出上述规划问题的解 $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$就是符合上述约束条件的解，此时相应的目标函数值z=3。
- 因为是求极大化问题的最优解，希望z≥3，于是增加约束条件:

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \quad ⓪$$

- 上面后加的约束条件称为过滤条件（Filtering Constraint）。
- 这样原问题的线性约束条件就变成5个。3个变量共有$2^3=8$个解，原来4个约束条件共需32次运算。
- 现在增加了过滤条件⓪，将5个条件按照⓪～④排好，对每个解依次代入约束条件左侧求出数值，看看是否符合不等式条件，如某一条件不合适，同行的其他各条件就不必再检查，因而减少了运算次数。

6.4 0-1型整数规划(cont.)

点	条件					满足条件是(✓)否(×)	z值
	⓪	①	②	③	④		
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	−1	1	0	1	✓	5
(0,1,0)	−2					×	
(0,1,1)	3	1	5			×	
(1,0,0)	3	1	1	1	0	✓	3
(1,0,1)	8	0	2	1	1	✓	8
(1,1,0)	1					×	
(1,1,1)	6	2	6			×	

- 可以看出，实际只做了24次运算，求得最优解： $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,1)$，max $z=8$。
- 在计算过程中，若遇到z值已超过条件⓪右边的值，应修改条件⓪，使右边为迄今为止最大者，然后继续做。

- 例如当检查点(0,0,1)时，z=5(>3)，所以应将条件⓪换成：

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 5$$

这种对过滤条件的改进，更可减少计算量。

- 应该注意的是，一般常常重新排列x_i的顺序，使目标函数中的系数是递增（不减）的，这样最优解容易比较早的发现。再结合过滤条件的改进，更可使计算简化。
- 仍以上题为例：变量顺序重排后变为：

$$\max z = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 3 & ⓪ \\ 2x_2 + x_1 - x_3 \leq 2 & ① \\ 4x_2 + x_1 + x_3 \leq 4 & ② \\ x_1 + x_2 \leq 3 & ③ \\ x_2 + x_3 \leq 6 & ④ \end{cases}$$

6.4 0-1型整数规划(cont.)

求解

点	条件 ⓪	①	②	③	④	满足条件是(✓)否(×)	z值
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	−1	1	0	1	✓	5

因为z=5(>3)，

改进过滤条件，继续进行。

点	条件 ⓪	①	②	③	④	满足条件是(✓)否(×)	z值
(0,1,0)	3					×	
(0,1,1)	8	0	2	1	1	✓	8

因为z=8(>5)，

改进过滤条件，继续进行。

z值已经无法改进，max z=8

点	条件 ⓪	①	②	③	④	满足条件是(✓)否(×)	z值
(1,0,0)	2					×	
(1,0,1)	3					×	
(1,1,0)	1					×	
(1,1,1)	6					×	

6.5 指派问题

- 某单位需完成n项任务，恰好有n个人可承担这些任务，由于每人的专长不同，各人完成任务不同（或所费时间），效率不同。于是产生应指派哪个人去完成哪项任务，使完成n项任务的总效率最高（或所需总时间最小）的问题。这类问题称为指派问题（Assignment Problem）。
  - 例6.8 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作E、J、G、R。现有甲乙丙丁四人，他们将说明书翻译成不同语种的所需时间如表中所示。问应如何指派使所需总时间最少？

人员＼任务	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

6.5 指派问题(cont.)

- 上例可推广为：有n项加工任务到n台机床上的指派、n条航线由n艘船来航行……等问题。对应每个指派问题，类似上表那样的数据表，称为效率矩阵或系数矩阵，其元素$c_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,n)$表示指派第i人去完成第j项任务时的效率（或时间、成本等）。解题时需引入0-1变量x_{ij}，令：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务}\\ 0 & \text{当不指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务}\end{cases}$$

- 问题要求极小化时的数学模型为：

$$\min z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,n$$

表明第j项任务只能由1人完成

$$\sum_j x_{ij}=1,\ i=1,2,\cdots,n$$

表明第i人只能完成1项任务

$$x_{ij}=1\text{或}0$$

6.5 指派问题(cont.)

满足上述约束条件的可行解x_{ij}可写成表格或矩阵形式，称为解矩阵。

- 指派问题是0-1规划的特例，也是运输问题的特例；即n=m，$a_j=b_i=1$。
- 求解例指派问题的方法：匈牙利算法
  - 匈牙利数学家康尼格（D.König）证明的基本定理：
    - 【定理1】假设问题求最小值，*m*个人恰好做*m*项工作，第*i*个人做第*j*项工作的效率为c_{ij}，效率矩阵为$[c_{ij}]$。如果从分配问题效率矩阵$[c_{ij}]$的每一行元素中分别减去（或加上）一个常数u_i（被称为该行的位势），从每一列分别减去（或加上）一个常数v_j（称为该列的位势），得到一个新的效率矩阵$[b_{ij}]$，若其中$b_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$，则$[b_{ij}]$的最优解等价于$[c_{ij}]$的最优解。这里c_{ij}、b_{ij}均非负。
    - 【定理2】若矩阵A的元素可分成“0”与非“0”两部分，则覆盖“0”元素的最少直线数等于位于不同行不同列的“0”元素（称为独立0元素）的最大个数。

- 康尼格证明的这两个定理为计算分配问题奠定了基础。因此，基于这两个定理基础上建立起来的解分配问题的计算方法被称为匈牙利法。

- 从上面的定理中可得：
  - 定理**1**告诉我们如何将效率表中的元素转换为有零元素，定理**2**告诉我们效率表中有多少个独立的“**0**”元素。
  - 若从系数矩阵(c_{ij})的一行（列）各元素中分别减去该行（列）的最小元素，得到新矩阵(b_{ij})，那么以(b_{ij})为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵求得的最优解相同。因此，可使原系数矩阵变换为含有很多**0**元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。

6.5 指派问题(cont.)

– 若能在(b_{ij})中找出n个独立的0元素；则令解矩阵(x_{ij})中对应这n个独立的0元素的元素取值为1，其他元素取值为0。将其代入目标函数中得到了$z_b=0$，它一定是最小。这就是以为系数矩阵的指派问题的最优解，即原问题的最优解。

– 如果最少直线数等于n，则存在n个独立的“0”元素，令这些0元素对应的x_{ij}等于1，其余变量等于0，得到最优解。

– 以下用例6.8说明指派问题的匈牙利解法。

6.5 指派问题(cont.)

- 解：第一步：使指派问题的系数矩阵经变换，在各行各列中都出现0元素。

$$\left(c_{ij}\right)=\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{最小元素}]{\text{减去每行}} \begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{最小元素}]{\text{减去每列}} \begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(b_{ij}\right)$$

- 第二步：进行试指派，以寻求最优解。

  (1)从只有一个**0**元素的行（列）开始，给这个**0**元素加圈，记作◎。这表示对这行所代表的人，只有一种任务可以指派。然后划去◎所在行（列）的其他**0**元素，记作Ø，表示这列所代表的任务已经完成，不必再考虑其他人；

  (2)给只有一个**0**元素的列（行）的**0**元素加圈，然后划去所在行的**0**元素；

  (3)反复进行**(1)**和**(2)**，直到所有的**0**元素都被画圈或者划掉。

6.5 指派问题(cont.)

(4)若仍没有画圈的0元素，且同行（列）的0元素至少有两个（表示对这人可以两项任务中指派其一），则可用不同的方案试探。从剩余0元素最少的行（列）开始，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择最少的画圈（表示选择性多的要礼让选择性少的），然后划掉同行同列的0元素，反复进行；

(5)若◎元素的数目m等于矩阵的阶数n，那么指派问题的最优解已得到；若m<n则转入第三步。

$$\begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{划掉所在列的0元素}]{\text{(a)给}b_{22}\text{、}b_{31}\text{加圈}} \begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & 0 \\ 6 & ◎ & 6 & 9 \\ ◎ & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)给b_{43}加圈，划掉所在行的0元素

$$\begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & 0 \\ 6 & ◎ & 6 & 9 \\ ◎ & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & ◎ & \phi \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(c)最后给}b_{14}\text{加圈}} \begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & ◎ \\ 6 & ◎ & 6 & 9 \\ ◎ & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & ◎ & \phi \end{bmatrix}$$

m=n=4，所以最优解为：

$$\left(x_{ij}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.5 指派问题(cont.)

- 第三步：作最少的直线覆盖所有的0元素，以确定该系数矩阵中能找到最多的独立元素数。按下列步骤进行：

  (1)对没有◎的行打✓号；

  (2)对已打✓号的行中所有含*Φ*元素的列打✓号；

  (3)再对打有✓号的列中含◎元素的行打✓号；

  (4)重复(2)、(3)，直到得不出新的打✓号的行、列为止；

  (5)对没有打✓号的行画一横线，有打✓号的列画一纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数。

  - 令直线数为l:

    若$l<n$，说明必须再变换当前的系数矩阵才能找到n个独立的0元素，转第四步；
    若$l=n$，而$m<n$，应回到第二步(4)，另行试探。

– 例6.9 求下表所示效率矩阵的指派问题的最小解。

人员＼任务	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

– 解：

- 第一步变换系数矩阵：

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

6.5 指派问题(cont.)

- 第二步进行试指派，得到：

$$\begin{bmatrix} 5 & ◎ & 2 & \phi & 2 \\ 2 & 3 & \phi & ◎ & \phi \\ ◎ & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & ◎ & \phi & 4 \\ \phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- 可知**m=4,n=5**，所以转入第三步；
- 第三步做最少直线覆盖可得：

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 5 & ◎ & 2 & \phi & 2 \\ 2 & 3 & \phi & ◎ & \phi \\ ◎ & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & ◎ & \phi & 4 \\ \phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{matrix} \\ \begin{matrix} \checkmark & & & & \end{matrix} & \end{array}$$

- 可见*l=4<n*，所以应继续对矩阵进行变换，转入第四步；

– 第四步：对矩阵变换的目的是增加**0**元素。为此在没有被直线覆盖的部分中找出最小元素，然后在打✓号行的各元素中都减去这最小元素，而在打✓号列的各元素都加上这最小元素，以保证原来**0**元素不变。这样得到的新系数矩阵（它的最优解和原问题相同），若得到**n**个独立**0**元素，则已得到最优解，否则回到第三步重复进行。

- 上例**6.9**中，继续进行第四步，有：

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 5 & \circledcirc & 2 & \phi & 2 \\ 2 & 3 & \phi & \circledcirc & \phi \\ \circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & \circledcirc & \phi & 4 \\ \phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \checkmark & & & & \end{array} \end{array} \xrightarrow[\text{变换矩阵}]{\text{第四步}} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & \circledcirc & 2 & \phi & 2 \\ 4 & 3 & \phi & \circledcirc & \phi \\ \phi & 8 & 3 & 5 & \circledcirc \\ 11 & 8 & \circledcirc & \phi & 4 \\ \circledcirc & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

6.5 指派问题(cont.)

- 可见具有n个独立0元素，即得到最优解：
- 最优指派方案为：甲－B，乙－D，丙－E，丁－C，戊－A

  本例还可以得到另一最优指派方案：甲－B，乙－C，丙－E，丁－D，戊－A

– 当指派问题的系数矩阵，经过变换得到了同行和同列中都有两个或两个以上0元素时，这时可以任选一行（列）中的某个0元素，再划去同行（列）的其他0元素，这时会出现多重解（如上例）。

6.5 指派问题(cont.)

- 指派问题的变异
  - 对于极大化问题：

$$\max z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

可令：$b_{ij} = M - c_{ij}$，其中M是足够大的常数（如选c_{ij}中最大元素为M即可），这时系数矩阵可变为$B = (b_{ij})$，这时$b_{ij} \geq 0$，符合匈牙利法的条件。

目标函数经变换后，即解$\min z' = \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij}$

所得的最小解就是原问题的最大解。

因为：$\sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (M - c_{ij}) x_{ij} = \sum_i \sum_j M x_{ij} - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = nM - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

nM为常数，所以当$\sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij}$取最小时，$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$便最大。

- 人数与任务数不均等问题
  - 设分配问题中人数为m，工作数为n，当m>n时，虚拟m-n项工作，对应的效率为零；当m<n时，虚拟n-m个人，对应的效率为零。通过上述步骤化为人数与任务数相等的平衡问题后再求解。
- 不可接受的配置问题
  - 当某人不能完成某项工作时，令对应的效率为一个大M即可。

本章完

The end