<u>选作题</u>：记 I 为 n 阶单位矩阵, N 为 n 阶幂零矩阵且 $N^n=0$. 证明 $I-N=e^L$, 其中

$$L=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{N^k}{k}.$$

(提示：记 $M(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^kN^k}{k}$, 则所要证明的结论可写作 $e^{-M(1)}=I-N$ 或等价地 $e^{M(1)}=(I-N)^{-1}$. 再证 $e^{M(t)}=(I-tN)^{-1}$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 证明思想是寻找这两个矩阵函数 $e^{M(t)}$ 和 $(I-tN)^{-1}$ 都满足的某一个矩阵微分方程. 注意它们在 $t=0$ 处取相同的初始值, 即单位矩阵 I.)

证明：记

$$M(t):=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^kN^k}{k}, \tag{1}$$

则所要证明的结论可写作 $e^{-M(1)}=I-N$ 或等价地 $e^{M(1)}=(I-N)^{-1}$. 以下我们将证明

$$e^{M(t)}=(I-tN)^{-1},\quad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

证明思想是, 寻找这两个矩阵函数 $e^{M(t)}$ 和 $(I-tN)^{-1}$ 都满足的某一个矩阵微分方程. 注意它们在 $t=0$ 处取相同的初始值, 单位矩阵 I. 我们来考虑 $e^{M(t)}$ 的导数. 于式 (1) 两边求导得

$$M'(t)=\sum_{k=1}^{d}t^{k-1}N^k=\Big(\sum_{k=0}^{d}t^kN^k\Big)N=(I-tN)^{-1}N.$$

由此不难验证

$$M(t)M'(t)=M'(t)M(t),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

于是

$$\frac{d}{dt}e^{M(t)}=M'(t)e^{M(t)}=(I-tN)^{-1}Ne^{M(t)}.$$

这表明 $e^{M(t)}$ 是矩阵微分方程

$$X'=(I-tN)^{-1}NX \tag{3}$$

的解. 我们再来考虑 $(I-tN)^{-1}$ 的导数. 我们先给出逆矩阵 $(I-tN)^{-1}$ 的一个表达式, 以方便求导. 由 $N^n=0$ 可知

$$I=I-tN^n=(I-tN)\sum_{k=0}^{n-1}t^kN^k,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

上式表明 $I-tN$ 逆矩阵可表为

$$(I-tN)^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1}t^kN^k,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

于是

$$\frac{d}{dt}(I-tN)^{-1}=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{d}t^kN^k=\sum_{k=1}^{n-1}kt^{k-1}N^k=\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)t^kN^k\Big)N,\quad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

注意

$$(I-tN)^{-1}N(I-tN)^{-1}=\Big(\sum_{k=0}^{n-1}t^kN^k\Big)^2N=\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i+j=k}t^{i+j}N^{i+j}\Big)N. \tag{5}$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{d}(k+1)t^kN^k\Big)N.$$

由此可知

$$\frac{d}{dt}(I-tN)^{-1}=(I-tN)^{-1}N(I-tN)^{-1}.$$

这说明 $(I-tN)^{-1}$ 是矩阵微分方程 (3) 的解. 证毕.