《微分方程1》第二讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年9月27日

旋轮线还具有如下的物理性质：等时性质(tautochrone). 具体说明如下. 如图，假设一根金属丝串上一个珠子，并弯成一条光滑曲线Γ.

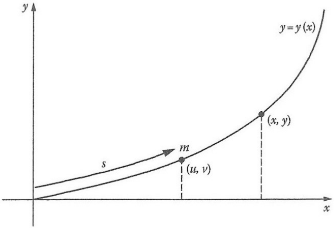


FIGURE 67

设点(x,y) 位于第一象限．暂且固定．设珠子于点(x,y) 处，由静止开始在重力的作用下，无摩擦滚动到原点．所需时间记作T．设珠子的动点坐标为(u,v)．记s 为珠子由原点到(u,v) 的弧长，沿着曲线Γ．由能量守恒定律知

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y-v) \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2g(y-v)}.$$

时间表示式

由图可知, $s = s(t)$ 关于时间t 下降. 故

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y-v)} \quad \text{or} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{-1}{\sqrt{2g(y-v)}}$$

设光滑曲线Γ 可写作$x = x(y)$, 则弧长s 还可表示为$s = s(y)$.

(这里有点滥用记号) 于是

$$T = \int_{v=y}^{v=0} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{v=0}^{v=y} \frac{ds}{\sqrt{y-v}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{y-v}}.$$

由此可见，当曲线Γ 给定之后，时间$T = T(y)$，即时间T 仅与起始点的纵坐标y 有关，即

$$T = T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{y-v}}$$

注意$s'(y)$ 代表曲线Γ 的弧长微分.

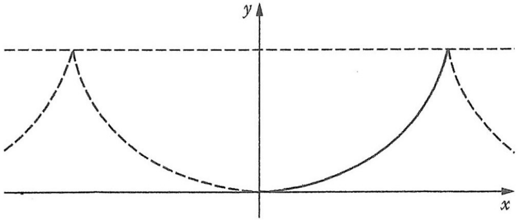
Definition

光滑曲线Γ 称作等时曲线(tautochrone)，如果$T(y) \equiv T_0$ 是正常数，即与坐标y 无关.

Christiaan Huygens (1629-1695) 为了设计精准的钟表，证明了等时曲线就是如下旋轮线，其参数方程为

$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta), \end{cases}$$

其图形如下



关于旋轮线注记

注一：课本page 48, problem 5 表明，旋轮线是等时曲线.

注二：我们将在第九章利用Laplace 变换，证明Huygens定理，即等时曲线是旋轮线. 换言之，旋轮线是唯一的等时曲线.

注三：作为最速下降曲线的旋轮线，与作为等时曲线的旋轮线，在同一个x, y 平面直角坐标系里，它们的参数方程分别是

$$\begin{cases} x = a(\theta \pm \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

取负号为最速下降曲线，取正号为等时曲线.

Huygens 画像

Christiaan Huygens (1629 – 1695)

一阶方程$y' = f(x, y)$ 有三类基本可积型方程，变量分离型方程，恰当方程，线性方程. 这里“可积”的意义是，可将其解显式地用公式表示出来，或将其解归结为函数方程所确定的隐函数.

一. 变量分离型方程：形如$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程称作变量分离型方程. 可如下形式地求解：先分离变量，再取不定积分，即

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

上式右边的函数方程称为方程$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的通解或一般解. 换言之，由上述函数方程所确定的隐函数即为原微分方程的解.

Example

考虑 $x^2y^2y' = y - 1$. 分离变量并积分得

$$\frac{y^2dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y^2dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

计算上述不定积分得通解

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + c.$$

显然方程有一个特解$y = 1$.

Theorem

考虑方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, 其中$f(x)$ 在(a, b) 上连续, $g(y)$ 在(c, d) 上连续可微, 则对任意点$(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$, Cauchy 问题$y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ 的唯一解$y = \phi(x)$ 可如下确定

1) 若$g(y_0) = 0$, 则解为常数解, 即$\phi(x) \equiv y_0$;

2) 若$g(y_0) \neq 0$, 则解$\phi(x)$ 由如下函数方程唯一确定

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dv}{g(v)} = \int_{x_0}^{x} f(u)du, \quad y = \phi(x), \quad x \in J,$$

其中J 为某个包含点x_0 的开区间.

定理的证明

证明：根据存在唯一性定理(Picard定理)可知，Cauchy 问题$y' = f(x)g(y)$，$y(x_0) = y_0$ 有唯一解$y = \phi(x)$，$x \in J$.

当$g(y_0) = 0$ 时，显然$y = y_0$ 是解，由唯一性知$\phi(x) \equiv y_0$.

若$g(y_0) \neq 0$ 时，考虑函数

$$F(x, y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dv}{g(v)} - \int_{x_0}^{x} f(u)du.$$

显然函数$F(x, y)$ 至少在(x_0, y_0) 的某个开邻域里连续可微，并且$F(x_0, y_0) = 0$，$F_y(x_0, y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$，根据隐函数定理可知，存在唯一连续可微的隐函数$y = \phi(x)$，满足$\phi(x_0) = y_0$，

且$F(x,\phi(x))\equiv 0$, $\forall x\in J$, 其中J 为包含点x_0 的某个开区间.

关于恒等式

$$F(x,\phi(x))=\int_{y_0}^{\phi(x)}\frac{dv}{g(v)}-\int_{x_0}^{x}f(u)du\equiv 0,\quad \forall x\in J$$

求导得

$$\frac{1}{g(\phi(x))}\phi'(x)-f(x)\equiv 0 \text{ 即 } \phi'(x)=f(x)g(\phi(x)),\forall x\in J.$$

这表明$y=\phi(x)$ 就是上述Cauchy 问题的解. 证毕

形如$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的方程称为一阶对称方程，这里假设$P,\ Q$ 在平面开域$\Omega\subset \mathbb{R}^2$ 上连续．“对称”的意思是$x,\ y$的地位对称．还约定$P^2(x,y)+Q^2(x,y)>0,\ \forall(x,y)\in\Omega$，即$P,\ Q$ 在Ω 上每个点都不同时为零．对称方程$Pdx+Qdy=0$ 定义为如下两个方程之一

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-P(x,y)}{Q(x,y)},\qquad \text{当 } Q(x,y)\neq 0,\qquad (*)$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-Q(x,y)}{P(x,y)},\qquad \text{当 } P(x,y)\neq 0.\qquad (**)$$

当P, Q 在邻域Ω 内都不为零时，方程(*)和(**)在Ω 内同解. 这是因为下述引理成立.

Lemma

设$f(x, y)$ 在开域$\Omega \in \mathbb{R}^2$ 上连续，且$f(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$，则以下两个方程在同一个$x, y$ 平面上有相同的解曲线.

$$(*)\ \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (**)\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

定理的结论是显然的. 条件$f(x, y) \neq 0$ 说明每条积分曲线都是严格单调的，它既可以表示为$y = y(x)$，也可以表示为$x = x(y)$. 前者满足方程(*)，后者满足方程(**).

证: 设$y=\phi(x)$ 是第一个方程的解. 由于$\phi'(x)=f(x,\phi(x))$ 恒正或恒负, 故函数$\phi(x)$ 严格单调, 从而有反函数$x=\psi(y)$. 根据反函数定理知

$$\psi'(y)=\frac{1}{\phi'(x)}=\frac{1}{f(\psi(y),y)},$$

此即反函数$x=\psi(y)$ 是第二个方程的解. 注意函数$y=\phi(x)$ 与其反函数$x=\psi(y)$ 在同一个x,y 平面上代表同一条曲线. 引理得证. $\square$

齐次方程

Definition

一阶对称方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 称为齐次方程，如果函数$M(x,y)$ 和$N(x,y)$ 为次数相同的齐次函数．此时方程$Mdx+Ndy=0$ 的等价方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{N(x,y)}{M(x,y)}\quad \text{or}\quad \frac{dx}{dy}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

的右端函数为零次函数．

Definition

二元函数$f(x,y)$ 称为n 齐次函数，如果以下条件成立：对于$\forall t\in\mathbb{R}$，$\forall(x,y)\in D$，则$(tx,ty)\in D$，且$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$或$f(tx,ty)=|t|^nf(x,y)$，其中平面开区域D 是$f(x,y)$ 的定义域.

例如函数$\frac{y}{x}$，$\sqrt{x^2+y^2}$，xy 分别为0 次，1 次，2 次函数.

齐次函数的Euler公式：$xf_x+yf_y=nf$.（可推广，应牢记）

t=1时对恒等式两边的全微分

Theorem

设$f(x,y)$ 是零次齐次函数，则齐次方程$y'=f(x,y)$ 可通过变量替换$y=zx$ (z 为新的未知函数) 化为变量分离型方程.

证明：根据假设$f(x,y)$ 是零次齐次函数，即$f(tx,ty)=f(x,y)$，$\forall t$. 对$x\neq 0$，令$t=x^{-1}$，则$f(1,z)=f(x,y)$. 于是

$$y'=(zx)'=xz'+z=f(1,z) \quad 即 \quad xz'=f(1,z)-z.$$

故原方程化为关于新变量z 的变量分离型方程. 证毕. $\square$

例：求解齐次方程$(x+y)dx-(x-y)dy=0$.

解： 作变量替换$y=zx$, 则其等价方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

即化为

$$xz'=\frac{1+z}{1-z}-z=\frac{1+z^2}{1-z}.$$

分离变量并积分得

$$\int\frac{(1-z)dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

例子，续1

$$\Rightarrow \quad \arctan z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + c_1 = \ln|x|,$$

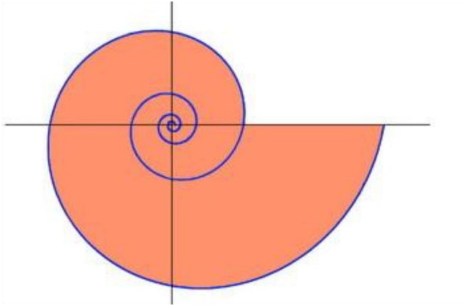
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln x^2(1+z^2) = \arctan z + c_1,$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = ce^{\arctan\frac{y}{x}},$$

这里$c = e^{c_1} > 0$. 此即方程的通解.

例子，续2

在极坐标$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 下，上式(通解)为对数螺线$r = ce^{\theta}$.



Definition

一阶对称方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 称为恰当方程，如果存在连续可微函数$f(x,y)$，使得$df=Mdx+Ndy$，亦即$f_x=M$, $f_y=N$. 此时函数$f(x,y)$ 称作原函数(primitive functions)或势函数(potential functions). 恰当方程也称作全微分方程.

注意：原函数在不计常数时唯一!

Example

方程$xdx+ydy=0$ 是恰当方程，因为函数$(x^2+y^2)/2$就是方程的原函数.

常见的全微分公式

$$d(xy) = xdy + ydx, \quad d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy);$$

$$d\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad d\left[\frac{y}{x}\right] = \frac{xdy - ydx}{x^2};$$

$$d\arctan\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}, \quad d\ln\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{xy}.$$

设$M(x,y)$ 和$N(x,y)$ 在平面开区域$D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续，且不同时为零. 设方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 是恰当方程，$f(x,y)$ 是其原函数. 考虑水平线$\Gamma_c: f(x,y)=c$. 设$(x_0,y_0)\in\Gamma_c$，即$f(x_0,y_0)=c$. 根据假定$(f_x,f_y)=(M,N)\neq(0,0)$，不妨设$f_y(x_0,y_0)\neq 0$，则根据隐函数定理知，存在连续可微函数$y=u(x)$，$x\in J=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得$f(x,u(x))\equiv c$，$\forall x\in J$. 对恒等式$f(x,u(x))\equiv c$ 求导得

$$f_x+f_yu'=M+Nu'=0,$$

此即

$$u'(x) = -\frac{M(x, u(x))}{N(x, u(x))}, \quad x \in J.$$

这表明水平线Γ_c 是恰当方程$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的解曲线. 由此得到如下定理.

Theorem

设方程$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 是恰当方程, 且$f(x, y)$ 是其原函数, 则水平线$f(x, y) = c$ 是方程的解曲线. 此时称恰当方程有通解$f(x, y) = c$.

恰当方程，例子

Example (1)

方程$xdx+ydy=0$ 是恰当方程，且原函数为$(x^2+y^2)/2$. 因此方程有通解$x^2+y^2=c,\ c>0$. 这是一族同心圆周，它们的原心都位于原点.

Example (2)

方程$2xy^3dx+3x^2y^2dy=0$ 是恰当方程，且原函数为x^2y^3. 因此方程有通解$x^2y^3=c$.

Example (3)

方程$\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$ 是恰当方程，且原函数为$\frac{x}{y}$. 因此方程有通解$\frac{x}{y}=c$ 或 $x=cy$.

恰当方程的判别

Theorem

方程$Mdx+Ndy=0$ 是恰当方程的一个必要条件是$M_y=N_x$，这里假设函数M,N 在平面开域Ω 上连续可微.

Proof.

假设$f(x,y)$ 是恰当方程$Mdx+Ndy=0$ 的原函数，即$f_x=M$，$f_y=N$，故f 是二阶连续可微. 于是$M_y=f_{xy}=f_{yx}=N_x$. □

注：条件$M_y=N_x$ 常称作无旋条件. 因为当这个条件成立时，向量场(M,N) 的旋度为零，即$\mathrm{rot}(M,N):=N_x-M_y=0$.

Theorem

假设函数M,N 在平面单连通开域 Ω 上连续可微，则方程$Mdx+Ndy=0$ 是恰当方程的必要充分条件是$M_y=N_x$，并且当这个条件成立时，方程的原函数可由下式给出

$$f(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(u,v)du+N(u,v)dv,$$

上式右边为平面曲线积分(与路径无关)，这里$(x_0,y_0)\in\Omega$ 为一固定点，点$(x,y)\in\Omega$ 为动点.

Proof.

利用Green公式. 细节略. □

当单连通开域Ω 是开矩形时，可取平行于坐标轴的直线端为积分路径. 此时原函数可表为如下一重积分的形式

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(u,y)du+\int_{y_0}^{y}N(x_0,v)dv,$$

或 $$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(u,y_0)du+\int_{y_0}^{y}N(x,v)dv.$$

上述定理中的假设“平面开域Ω 是单连通的”是不可缺少的.

考虑方程

$$\frac{ydx}{x^2+y^2}-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0.$$

记

$$M(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad N(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

显然M,N 在平面非单连通域$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上连续可微. 不难验证

$$M_y=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=N_x,$$

即无旋条件成立.

但不难验证所考虑的方程非恰当．反证．假设方程是恰当的，即存在二阶连续可微函数$f(x,y)$，使得$df = Mdx + Ndy$．考虑向量场(M,N) 沿着单位圆周$x^2+y^2=1$ 逆时针积分．取单位圆周的参数方程为$x=\cos t$，$y=\sin t$，$t\in[0,2\pi]$，则

$$\oint_{x^2+y^2=1} Mdx+Ndy$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(M(x(t),y(t)x'(t)+N(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))dt=0.$$

例子，续2

另一方面，在单位圆周$x^2+y^2=1$ 上$(M,N)=(-y,x)$. 于是

$$\oint_{x^2+y^2=1} Mdx+Ndy$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(-y(t)x'(t)+x(t)y'(t)\Big)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\sin^2 t+\cos^2 t\Big)dt=2\pi.$$

这就得到一个矛盾. 因此所考虑的方程非恰当. □

恰当方程，更多例子

例：判别方程 $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ 是否恰当？在恰当方程情形下，求其通解.

解：记$M = e^y$, $N = xe^y + 2y$，则函数M, N 在全平面上连续可微，并且$M_y = e^y = N_x$. 因此方程是恰当的. 以下求方程的原函数$f(x, y)$. 可利用求原函数的积分公式求. 但下述方法更直接了当. 由$f_x = M = e^y$ 知$f = xe^y + g(y)$，其中$g(y)$ 为待定函数. 再根据$f_y = N = xe^y + 2y$ 可知$xe^y + g'(y) = xe^y + 2y$. 于是$g'(y) = 2y$，即$g(y) = y^2$ (不计常数). 因此所求原函数为$f = xe^y + y^2$，方程的通解为$xe^y + y^2 = c$. 解答完毕.

例：考虑

$$ydx+(x^2y-x)dy=0. \qquad (*)$$

记$M=y$, $N=x^2y-x$, 则$M_y=1\neq 2xy-1=N_x$. 因此方程为非恰当方程. 由观察知，若用x^{-2} (其来历稍后解释)乘以方程的两端，则

$$\frac{y}{x^2}dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0 \qquad (**)$$

是恰当的. 将方程(**)左边改写如下

$$\text{左边}=\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy+ydy=d\left(-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}\right).$$

例子，续

由此可知，方程(**)的通解为

$$-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=c. \qquad (***)$$

不难看出在左半平面($x<0$)或右半平面($x>0$)上，原非恰当方程(*) 与恰当方程(**)同解，即它们均有通解(***).

Definition

设方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 非恰当，若存在一个连续可微函数$\mu(x,y)$，使得$\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 恰当，且$\mu(x,y)\neq 0$，$\forall(x,y)\in\Omega$，则称$\mu(x,y)$ 为非恰当方程$Mdx+Ndy=0$ 在Ω 上的一个积分因子(integrating factor)，这里Ω 是函数M,N 的定义域(单连通).

Example

对于刚刚所考虑的非恰当方程$ydx+(x^2y-x)dy=0$，如果限制在左半平面$(x<0)$或右半平面$(x>0)$上，方程有积分因子x^{-2}.

Definition

一个连续可微函数$\mu(x,y)$ 是非恰当方程$Mdx+Ndy=0$ 的积分因子，当且仅当$(\mu M)_y=(\mu N)_x$，即

$$\mu_y M-\mu_x N=\mu(N_x-M_y), \qquad (*)$$

方程(*) 通常称作积分因子方程. 这里假设函数M,N 的定义域是单连通的.

注：积分因子方程(*)是关于未知函数$\mu(x,y)$ 的PDE. 通常求解PDE比求解ODE更困难. 但是在某些情况下，非恰当方程$Mdx+Ndy=0$ 可以有特别形式的积分因子.

情形一. 假设方程有积分因子$\mu=\mu(x)$. 此时$\mu=\mu(x)$ 满足积分因子方程(*)为

$$-\mu_x N=\mu(N_x-M_y) \quad 或 \quad \frac{\mu_x}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N}.$$

注意后一方程的左边仅与x 有关. 因此当函数$\frac{M_y-N_x}{N}=:g(x)$ 仅依赖于变量x 时, 方程有积分因子$\mu=\mu(x)$, 并且通过解方程$\frac{\mu'}{\mu}=g(x)$ 可知$\mu(x)=e^{\int g(x)dx}$.

情形二. 与情形一作类似讨论可知, 当函数$\frac{N_x-M_y}{M}=:h(y)$ 仅依赖于变量y 时, 方程有积分因子$\mu(y)=e^{\int h(y)dy}$.

例一：再考虑 $ydx + (x^2y - x)dy = 0$. 记$M = y$, $N = x^2y - x$, 则$M_y = 1$, $N_x = 2xy - 1$. 于是对应的积分因子方程为

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y) = \mu \cdot 2(1 - xy).$$

观察可知方程有积分因子$\mu = \mu(x)$, 并且$\mu(x)$ 可如下确定：

$$-\mu'(x^2y - x) = 2(1 - xy)\mu \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2}{x}$$

由此可确定积分因子为$\mu(x) = e^{\int \frac{-2dx}{x}} = x^{-2}$. (这里可不计非零常数因子)

单变元积分因子，例一续

方程两边同乘以x^{-2} 得

$$\frac{ydx}{x^2} - \frac{dy}{x} + ydy = 0.$$

这是一个恰当方程．已求得其通解为

$$-\frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = c.$$

因此上式也是原方程$ydx + (x^2y - x)dy = 0$ 的通解．解答完毕．

例二：上一讲提到方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}$ 有隐式解$xy=\ln y+c$, $c\in\mathbb{R}$. 现在可以来说明这个函数方程的来历. 先将方程写作对称形式$y^2dx+(xy-1)dy=0$, 并考虑它的积分因子方程

$$\mu_y M-\mu_x N=\mu(N_x-M_y)=-\mu y, \qquad (*)$$

这里$M=y^2$, $N=xy-1$. 观察可知方程有单变元积分因子$\mu=\mu(y)$. 此时，方程(*)即为$\mu' y^2=-\mu y$. 解之得积分因子为$\mu=y^{-1}$. 用y^{-1} 乘以方程$y^2dx+(xy-1)dy=0$ 的两边得$ydx+xdy-\frac{dy}{y}=0$. 由此得方程的隐式解或通解为$xy-\ln|y|=c$. 解答完毕.

齐次方程的积分因子

Theorem

设$M(x,y)$ 和$N(x,y)$ 为次数相同的齐次函数，则齐次方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 有积分因子$(xM+yN)^{-1}$.

Proof.

留作补充习题 □

例: 再考虑$(x+y)dx-(x-y)dy=0$.

解: 已求解过这个齐次方程. 解法是作变换$y=zx$, 将方程化为变量分离型方程. 以下用积分因子来求解. 根据定理可知方程有积分因子

$$(xM+yN)^{-1}=(x(x+y)-y(x-y))^{-1}=(x^2+y^2)^{-1}.$$

用$(x^2+y^2)^{-1}$ 乘以方程两边得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy=0$$

例子，续

$$\Rightarrow \quad \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \arctan\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = ce^{\arctan\frac{y}{x}}, \quad c = e^{c_1} > 0.$$

在极坐标$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 下，上式(通解)为$r = ce^{\theta}$.

考虑一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$，这里函数$P(x)$，$Q(x)$ 假设在某个开区间J 上连续．由Picard定理知方程的每个Cauchy问题的解存在唯一．有多种方法求解．最简解法如下：方程两边同乘积分因子$e^{\int P(x)dx}$ 得

$$e^{\int P(x)dx}\left(y' + P(x)y\right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

(注：积分因子的来历参见problem 1, p.82.) 上式的左边可改写作

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

一阶线性方程，续1

两边积分得

$$ye^{\int P(x)dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c$$

由此得一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c\right).$$

Example

例：求解$y' + \frac{y}{x} = 3x,\ x \neq 0.$

解：记$P(x) = x^{-1},\ Q(x) = 3x,$ 则$\int P(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|.$ 这里可不计积分数．于是$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln|x|} = |x|.$ 易证无论$x > 0$或$x < 0$，以x 乘以方程均可得

$$xy' + y = 3x^2 \ \Rightarrow\ (xy)' = 3x^2 \ \Rightarrow\ xy = x^3 + c.$$

由此得方程的通解为$y = x^2 + \dfrac{c}{x}.$

Theorem

考虑一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$, 这里$P(x)$, $Q(x)$ 假设在某个开区间J 上连续, 则对于$\forall x_0 \in J$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, 方程满足初值条件$y(x_0) = y_0$ 的唯一解可以表示为

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}\left(\int_{x_0}^{x}\left(Q(s)e^{\int_{x_0}^{s} P(t)dt}\right)ds + y_0\right), \ x \in J. \ (*)$$

Corollary (线性方程解的整体存在性)

对于一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$, 每个解的最大存在区间为J, 其中J 为系数函数$P(x)$, $Q(x)$ 的存在区间.

证明: 显然, 由公式(*)定义的函数$y(x)$ 满足$y(x_0) = y_0$. 往下证明$y(x)$ 是解. 注意$y(x)$ 可写作两项之和

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} + e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \int_{x_0}^{x} \left(Q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(t)dt} \right) ds.$$

不难验证, 第一项是对应齐次方程$y' + P(x)y = 0$ 的解. 记第二项为$\xi(x)$, 即

$$\xi(x) := e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \int_{x_0}^{x} Q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(t)dt} ds.$$

以下验证, $\xi(x)$ 是非齐次方程$y'+P(x)y=Q(x)$ 的解:

$$\xi'(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)ds}[-P(x)]\int_{x_0}^{x}Q(s)e^{\int_{x_0}^{s}P(t)dt}ds$$

$$+e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)ds}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(s)ds}=-P(x)\xi(x)+Q(x).$$

即$\xi(x)$ 是方程$y'+P(x)y=Q(x)$ 的解. 根据解的唯一性可知, 由公式(*)定义$y(x)$ 就是所考虑的Cauchy 问题的解. 定理得证. □

由Cauchy问题$y' + P(x)y = Q(x)$, $y(x_0) = y_0$ 的解表达式

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} + e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \int_{x_0}^{x} \left(Q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(t)dt} \right) ds$$

可知一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$ 通解具有如下结构:

非齐次方程通解$=$ 齐次方程通解$+$ 非齐次方程特解

这与线性代数方程组$Ax = b$ 解的结构相同.

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里$p(x)$, $q(x)$ 假设是以2π 为周期的周期连续函数. 此时称这个方程为一阶周期线性方程. 关于这类方程，我们关心：

(1) 方程是否存在2π 周期解？判别条件？

(2) 存在时，有多少个？可否表示出来.

注：根据线性方程解的整体存在性可知，

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里$p(x)$，$q(x)$ 假设是以2π 为周期的周期连续函数．此时称这个方程为一阶周期线性方程．关于这类方程，我们关心：

(1) 方程是否存在2π 周期解？判别条件？

(2) 存在时，有多少个？可否表示出来．

注：根据线性方程解的整体存在性可知，对于一阶线性周期方程，其每个解的最大存在区间均为$(-\infty, +\infty)$．

周期解个数

Theorem

考虑一阶线性方程$y' = p(x)y + q(x)$，这里$p(x)$，$q(x)$ 为以2π为周期的周期连续函数，则

i). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$，则方程有唯一一个$2\pi$ 周期解;

ii). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，但$\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx \neq 0$，则方程没有$2\pi$ 周期解;

iii). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，且$\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx = 0$，则方程的每个解都是$2\pi$ 周期解.

周期解充要条件

Lemma

记号与假设如上，设$y = \phi(x)$ 是一阶线性周期方程$y' = p(x)y + q(x)$ 的一个解，则$\phi(x)$ 是2π 周期解$\Longleftrightarrow$ $\phi(2\pi) = \phi(0)$.

$\Longrightarrow$: 显然成立.

$\Longleftarrow$: 设$\phi(2\pi)=\phi(0)$. 要证$\phi(x+2\pi)=\phi(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

令$\psi(x):=\phi(x+2\pi)$, 则显然$\psi(0)=\phi(\pi)=\phi(0)$, 并且$\psi(x)$ 也是解. 因为

$$
\begin{aligned}
\psi'(x) &= \phi'(x+2\pi) \\
&= p(x+2\pi)\phi(x+2\pi)+q(x+2\pi) \\
&= p(x)\psi(x)+q(x).
\end{aligned}
$$

根据解的唯一性可知$\psi(x)=\phi(x)$, 即$\phi(x+2\pi)=\phi(x)$. 此即解$\phi(x)$ 是2π 周期的. Lemma 得证. $\square$

证明：记Cauchy 问题$y' = p(x)y + q(x)$，$y(0) = y_0$ 的唯一为$\phi(x, y_0)$. 根据通解公式知

$$\phi(x, y_0) = y_0 e^{\int_0^x p(s)ds} + \int_0^x q(s) e^{\int_s^x p(\tau)d\tau} ds.$$

由Lemma 知解$\phi(x, y_0)$ 是2π 周期解$\Longleftrightarrow \phi(2\pi, y_0) = y_0$,

$$\Longleftrightarrow \left(1 - e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds}\right) y_0 = \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds. \quad (*)$$

i). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$, 则方程(*)关于$y_0$ 有且仅有一个解, 此即方程$y' = p(x)y + q(x)$ 有且仅有一个2π 周期解.

ii). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，但$\int_0^{2\pi} q(s)e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau}ds \neq 0$，则方程(*)关于$y_0$ 无解，即方程$y' = p(x)y + q(x)$ 无2π 周期解.

iii). 若$\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，且$\int_0^{2\pi} q(s)e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau}ds = 0$，则方程(*)关于任意$y_0$ 成立. 此即方程$y' = p(x)y + q(x)$ 的每个解都是2π 周期解. 证毕. $\square$

考虑周期Riccati方程$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$，这里$p(x)$，$q(x)$ 和$r(x)$ 均为以2π 为周期的周期连续函数. 我们关心：方程是否存在2π 周期解？若存在，有多少？

Theorem

假设函数$p(x)$ 不变号，且不恒为零，则周期Riccati 方程$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 至多有两个不同的2π 周期解.

反证: 假设$\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ 为三个不同的2π 周期解. 由解的存在唯一性可设

$$\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

考虑解ϕ_k 所满足的方程

$$\phi_1' = p(x)\phi_1^2 + q(x)\phi_1 + r(x),$$
$$\phi_2' = p(x)\phi_2^2 + q(x)\phi_2 + r(x),$$
$$\phi_3' = p(x)\phi_3^2 + q(x)\phi_3 + r(x).$$

这里解$\phi_k(x)$ 已经简写为ϕ_k.

证明，续1

将第二个减去第一个方程，并且两边同除$\phi_2 - \phi_1$ 得

$$\frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_2 + \phi_1) + q(x).$$

同样将第三个方程减去第一个方程得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 + \phi_1) + q(x).$$

再将上述两个等式相减得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} - \frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 - \phi_2).$$

于上式两边从0 到2π 积分得

证明，续2

$$\ln \frac{\phi_3(x)-\phi_1(x)}{\phi_2(x)-\phi_1(x)}\bigg|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} p(x)(\phi_3(x)-\phi_2(x))dx.$$

注意上式左边为零，因为解是2π 周期的．考虑等式右边．根据假设$p(x)$ 不变号且不恒为零，而函数$\phi_3(x)-\phi_2(x)$ 恒大于零．因此右边的积分不为零．这就得到了一个矛盾．矛盾说明方程至多有两个不同的以2π为周期的周期解．定理得证． $\square$

作业

课本习题：

page 67–69, problems 1(a)(c)(e), 3, 4, 5(a)(c), 6(a), 7, 10, 11(a)(b).

page 72–73, problems 1, 3, 5, 20, 21, 22.

page 80–81, problem 1, 2(a)(b)(c)(d), 3, 4(a)(b)(c)(d), 5.

page 82–83, problems 1, 2(a)(b)(c)(d).

补充习题：设$M(x,y)$ 和$N(x,y)$ 为次数相同的齐次函数，连续可微．证明齐次方程$Mdx+Ndy=0$ 有积分因子$(xM+yN)^{-1}$．

作业，续

菲利波夫习题集：179, 180, 181.

选作习题：考虑方程

$$y' = p_3(x)y^3 + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x),$$

这里$p_k(x)$ 是以2π 周期的周期连续函数，$k = 0, 1, 2, 3$. (这个方程通常称作Abel方程，是Riccati 方程的推广). 假设$p_3(x)$ 不变号，且不恒为零，证明方程至多有三个不同的以2π为周期的周期解.