《微分方程1》第四讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年10月18日

问题：设平面上的动点$P=(x,y)$ 由一根弦PT 牵动，设弦长PT 为$a>0$. 在时刻$t=0$ 时，$T=(0,0)$，$P=(a,0)$. 如图. 进一步假设点P 在正y 轴上运动，求动点$P=(x,y)$ 的运动轨迹(称作曳线).

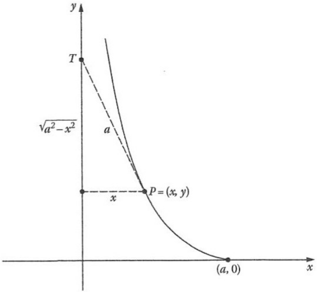

FIGURE 21

解：设所求轨迹是待定函数$y=y(x)$ 的函数曲线，则由图可知

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \quad \text{or} \quad y=-\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx.$$

对上述不定积分作变量替换$x=a\sin x$，再经过一些计算可求得

$$y=a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

由初始条件$y(a)=0$ 可知$c=0$. 故所求轨线为

$$y=a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}.$$

如图，将曳线围绕y 轴旋转一周则形成了一个喇叭状的旋转面.

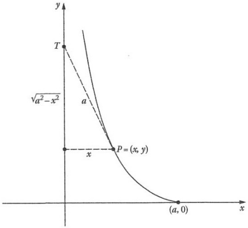

FIGURE 21

这个旋转面是Lobachevsky 非欧几何的一个模型. 在这个旋转面上，任何三角形的内角和均$< 180^\circ$.

应用例三：追线(Pursuit curves)

<u>问题</u>：假设兔子在$t = 0$ 时刻，由原点$(0, 0)$ 出发，沿着正y 轴，以常速度$a > 0$ 奔跑．与此同时一条狗在$t = 0$ 时刻，从位于x 轴上的点$(c, 0)$ $(c > 0)$ 出发，以常速率$b > 0$ 开始追逐兔子，如图．求狗的运动轨线．

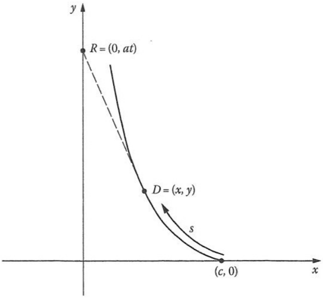

FIGURE 22

解：根据问题假设在时刻$t>0$，兔子位于点$R=(0,at)$. 并且狗的运动方向始终是直线$\overline{DR}$方向. 这表明直线$\overline{DR}$与狗的运动曲线$y=y(x)$相切与D. 于是得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-at}{x}\quad\text{or}\quad xy'=y-at.$$

为方便求解，希望消去时间变量t. 为此对方程$xy'=y-at$关于x求导得$y'+xy''=y'-a\frac{dt}{dx}$，即

$$xy''=-a\frac{dt}{dx}.\qquad(*)$$

由假设知，狗的运动速率为常数$b > 0$，即$\frac{ds}{dt} = b$. 由此得

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{b}\sqrt{1+(y')^2}, \quad (**)$$

上述符号意味着弧长s 是x 的减函数. 根据等式(*)和(**)可得

微分方程

$$xy'' = k\sqrt{1+(y')^2}, \qquad (***)$$

这里$k = \frac{a}{b}$. 这是一个具有特殊形式的二阶方程，即未知函数y

没有在方程里显现. 故令$p = y'$ 就得到 $xp' = k\sqrt{1+p^2}$. 关

于p 的一阶变量分离型方程.

分离变量再积分得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = k\ln x + \lambda,$$

根据假设当时刻$t=0$ 时，$x=c$ 且$y'(c)=p(c)=0$. 由此可

知$0=k\ln c+\lambda$ 即$\lambda=-k\ln c$.

由此得

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\ln\left(\frac{x}{c}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad p+\sqrt{1+p^2}=\left(\frac{x}{c}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+p^2}=\left(\frac{x}{c}\right)^k-p$$

$$\Rightarrow \quad 1 + p^2 = \left(\frac{x}{c}\right)^{2k} - 2p\left(\frac{x}{c}\right)^{k} + p^2$$

$$p = y' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{k} - \left(\frac{x}{c}\right)^{-k}\right].$$

进一步关于解的讨论，见problem 8 (课本page 95).

例: 设y 轴和直线$x = c$ 是一条河流的两岸, 河水以常速度$a > 0$ 向着y 轴的负向流动. 假设一只小船在初始时刻$t = 0$ 时位于点$(c, 0)$, 之后一直朝着原点$(0, 0)$ 方向以常速率$b > 0$ (相对于河水)运动, 如图. 求小船的运动轨迹.

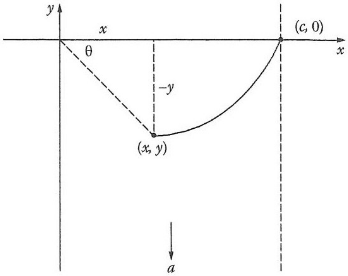

FIGURE 23

解：设小船的运动轨迹为$y = y(x)$. 再设小船在时刻t 的位置为$(x(t), y(t))$. 根据假设，小船的速率为常数b，运动方向始终朝着原点$(0, 0)$，且河水以常速度$a > 0$ 向着y 轴的负向流动. 由此可知

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -b\cos\theta, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -a + b\sin\theta$$

其中$\theta \in (0, \pi/2)$ 的意义如图所示. 根据几何关系可知

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

于是

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-a + b\sin\theta}{-b\cos\theta}$$

$$= \frac{-a + b\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}.$$

于是关于y(x) 的一阶微分方程

$$y' = \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}.$$

这是齐次方程. 以下用标准方法求解. 令$y = zx$, 则

$$y' = z'x + z = \frac{a\sqrt{1+z^2}+bz}{b}$$
$$\Rightarrow \quad z'x = k\sqrt{1+z^2},$$

这里$k = a/b$. 这是变量分离型方程. 先分离变量再积分得

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k\int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = k\ln x + \lambda$$

$$\Rightarrow \quad z+\sqrt{1+z^2}=\mu x^k, \quad (\mu=e^\lambda>0)$$

方程两边同乘以x 得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\mu x^{k+1}, \quad (y=zx).$$

根据初始条件知$y(c)=0$，以及上述方程得$\mu=c^{-k}$. 小船的运动轨迹方程为

$$c^k\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)=x^{k+1}.$$

进一步讨论可知(见Problem 9 (page 95))

(i). 情形$a > b$. 此时$k > 1$. 当$x \to 0^+$ 时，$y(x) \to -\infty$. 这意味着，小船不会抵达对岸.

(ii). 情形$a = b$. 此时$k = 1$. 当$x \to 0^+$ 时，$y(x) \to -c/2$. 这意味着，小船也不会抵达对岸.

(iii). 情形$a < b$. 此时$k < 1$. 当$x \to 0^+$ 时，$y(x) \to 0$. 这意味着，小船将会于原点登岸.

二阶线性方程

Definition

一般二阶线性方程是指如下形式的方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

其中$P(x)$, $Q(x)$ 和$R(x)$ 均假设在某个开区间上连续.

注一: 已知一阶线性方程$y' + P(x)y = Q(x)$ 有显式通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c\right).$$

但对于一般二阶线性方程而言, 不存在这样的显式通解公式.

这是一阶线性方程与二阶以及高阶线性方程的本质区别.

注二: 当$P(x)$ 和$Q(x)$ 均为常数时, 对应的二阶线性方程有显式通解.

注三: 以下处理二阶线性方程的思想和方法原则上可以推广到处理n 阶线性方程$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y = q(x)$.

Theorem

假设$P(x)$, $Q(x)$ 和$R(x)$ 均假设在开区间J 上连续，则对于$\forall x_0 \in J$, $\forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, 二阶线性方程的初值问题(也称为Cauchy问题)

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \\ \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

存在唯一解，并且这个解的最大存在区间为开区间J.

Proof.

以后给出. □

例: 求解初值问题$y''+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

(课本第108页的例1中, 初值条件$y(0)$ and $y'(0)=1$ 应改为$y(0)=0$ and $y'(0)=1$)

解: 回忆之前已经求出方程$y''+k^2y=0$ 的一般解为$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx$, 其中c_1,c_2 为任意常数. 因此方程$y''+y=0$ 有一般解为$y=c_1\cos x+c_2\sin x$. 显然解$y=\sin x$ 满足条件$y(0)=0$ and $y'(0)=1$. 由存在唯一性定理知初值问题$y''+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 的唯一解就是$y=\sin x$, 它的最大存在区间为整个实轴. 同理可证初值问题$y''+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 的唯一解是$y=\cos x$. □

Definition

当二阶线性方程的右端函数R(x) 恒为零时，即方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

称作二阶线性齐次方程(homogeneous equation);

而当R(x) 不恒为零时，方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

Definition

当二阶线性方程的右端函数R(x) 恒为零时，即方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

称作二阶线性齐次方程(homogeneous equation);

而当R(x) 不恒为零时，方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

称作二阶线性非齐次方程(nonhomogeneous equation).

Theorem

二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

解的全体构成一个二维线性空间.

Definition

齐次方程$(*)_{齐}$ 的任意两个线性无关的解均称作方程$(*)_{齐}$ 的一个<u>基本解组</u>.

定理证明

证明：记$\mathcal{S}$ 为方程$(*)_{齐}$ 解的全体. 显然$\mathcal{S}$ 是一个线性空间, 即对任意$\phi, \psi \in \mathcal{S}$, 则$\lambda\phi + \mu\psi \in \mathcal{S}$, 对任意$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 以下要证$\dim \mathcal{S} = 2$. 固定一点$x_0 \in J$, 记$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$ 分别是如下两个初值问题的解

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \\ y(x_0) = 1, \; y'(x_0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \\ y(x_0) = 0, \; y'(x_0) = 1. \end{cases}$$

往下证$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$ 构成解空间$\mathcal{S}$ 的一个基底. 先证明$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$ 线性无关. 为此令$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = 0$,
即$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0$, $\forall x \in J$. 令$x = x_0$ 可知$c_1 = 0$. 进一步得$c_2 = 0$. 故$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$ 线性无关. 再证线性空间$\mathcal{S}$ 中的每个元素, 即方程$(*)_{齐}$ 的每个解都可以由$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$ 线性表出. 设$y(x) \in \mathcal{S}$ 是方程$(*)_{齐}$ 的任意一个解.
令$\phi(x) := c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$, 这里$c_1 = y(x_0)$, $c_2 = y'(x_0)$.

显然$\phi(x)$ 是解，$\phi(x_0)=c_1=y(x_0)$，且

$$\phi'(x_0)=c_1\phi_1'(x_0)+c_2\phi_2'(x_0)=c_2=y'(x_0).$$

这说明两个解$y(x)$ 和$\phi(x)$ 满足相同的初值条件. 根据解的唯一性知它们恒同. 此即$y(x)=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)$. 这就证明了$\mathcal{S}$ 中的每个元素，即方程$(*)_{齐}$ 的每个解都可以由$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$ 线性表出. 定理得证. □

Theorem

二阶线性非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

的一般解可以表示为$y(x) = y_g(x, c_1, c_2) + y_p(x)$，其中$y_g(x, c_1, c_2)$ 表示对应齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

的一般解(general solution)，$y_p(x)$ 是方程$(*)_{非}$ 的一个特解(particular solution).

一般解的含义

我们说方程$(*)_{非}$ 的一般解是$y(x)=y_g(x,c_1,c_2)+y_p(x)$ 有两个意思：(i) 方程$(*)_{非}$ 的每个解都可以表示为形式$y=y_g+y_p$; (ii) 每个形如$y=y_g+y_p$ 的函数均为方程$(*)_{非}$ 的解.

假设$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$ 是齐次方程$(*)_{齐}$ 的一个基本解组，则方程$(*)_{齐}$ 的一般解可以表为

$$y_g(x,c_1,c_2)=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x).$$

证明: (i) 证每个形如 $y(x)=y_g(x,c_1,c_2)+y_p(x)$ 的函数是方程 $(*)_{非}$ 的解. 直接验证

$$
\begin{aligned}
& y''+P(x)y'+Q(x)y \\
=\ & (y_g''+y_p'')+P(x)(y_g'+y_p')+Q(x)(y_g+y_p) \\
=\ & [y_g''+P(x)y_g'+Q(x)y_g]+[y_p''+P(x)y_p'+Q(x)y_p] \\
=\ & R(x).
\end{aligned}
$$

证明续

(ii) 证方程$(*)_{非}$ 的每个解都可以表示为形式$y = y_g + y_p$.

设$y(x)$ 是方程$(*)_{非}$ 的一个解. 根据解$y(x)$ 和$y_p(x)$ 所满足的

方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

$$y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p = R(x)$$

可得

$$(y - y_p)'' + P(x)(y - y_p)' + Q(x)(y - y_p) = 0,$$

这表明$y - y_p$ 是齐次方程$(*)_{齐}$ 的一个解. 因此$y - y_p$ 可表

为$y - y_p = y_g$, 即$y(x) = y_g(x, c_1, c_2) + y_p(x)$. 定理得证. □

注一: 以后将会看到, 如果已知齐次方程$(*)_{齐}$ 的一个基本解组$\phi_1(x)$ 和$\phi_2(x)$, 则可以利用这个基本解组构造出非齐次方程$(*)_{非}$ 的一个特解, 从而求得方程$(*)_{非}$ 的一般解. 因此可以说问题的关键在于求齐次方程$(*)_{齐}$ 的一个基本解组.

注二: 目前尚不存在求齐次方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 基本解组的一般方法.

例一

例一: 求齐次方程$y'' + y' = 0$ 的一个基本解组.

解: 观察知$y_1 = 1$ 是解, 且$y_2 = e^{-x}$ 也是解. 易证函数$1, e^{-x}$ 在实轴上线性无关. 因此解$1, e^{-x}$ 构成方程的一个基本解组. 它的一般解为

$$y_g(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

例二：求解 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

解：根据方程的特点，以及幂函数x^n 的求导规则$(x^n)' = nx^{n-1}$，可期待方程有形如x^n 的解，n 待定．(注：课本第111页例3中有印刷错误：x'' 应改为x^n.) 将$y = x^n$ 代入方程得

$$n(n-1)x^n + 2nx^n - 2x^n = 0 \quad \text{or} \quad n^2 + n - 2 = 0.$$

令$n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2) = 0$ 解得$n = 1, -2$．由此得到两个解$y_1 = x$ 和$y_2 = x^{-2}$．易证这两个解在$(0, +\infty)$ 上线性无关．因此它们构成一个基本解组，一般解为$y = c_1x + c_2x^{-2}$.

注: 形如例二中的方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 称为二阶Euler 方程. 一般n 阶Euler 方程是指如下形式的方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x > 0.$$

这类方程可通过独立变量变换 $x = e^t$ (t 为新的独立变量) 化为常系数线性方程, 而后者的解可以显式表出.

Definition

设$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)_{齐}$$

的两个解，称

$$W(y_1, y_2)(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

为解$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 所对应的Wronsky 行列式.

一个引理及其证明

Lemma

设$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 是方程$(*)_{齐}$ 的两个解，则它们所对应的Wronsky 行列式$W(x)$ 恒为零或恒不为零，即$W(x) \equiv 0$ 或$W(x) \neq 0$, $\forall x \in J$.

证明：对Wronsky 行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

两边求导得

$$W'(x) =$$

$$\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

再根据两个恒等式

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0,$$
$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

得

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -P(x)y_1' & -P(x)y_2' \end{vmatrix} = -P(x)W(x).$$

即Wronsky 行列式$W(x)$ 满足一阶线性方程$W' + P(z)W = 0$.

因此$W(x) = ce^{\int P(x)dx}$. 于是$W(x) \equiv 0$ 或$W(x) \neq 0, \forall x \in J$.

结论得证. $\square$

Theorem

设$y_1(x)$和$y_2(x)$是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)_{齐}$$

的两个解，记它们对应的Wronsky 行列式为$W(x)$，则

(i) $y_1(x)$和$y_2(x)$线性相关$\Longleftrightarrow W(x) \equiv 0, \forall x \in J$;

(ii) $y_1(x)$和$y_2(x)$线性无关$\Longleftrightarrow W(x) \neq 0, \forall x \in J$.

定理证明

证明：只证明(i). $\Rightarrow$: 设$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 线性相关，

则$y_1(x) = ky_2(x)$ 或$y_2(x) = ky_1(x)$. 故$W(x) \equiv 0$.

$\Leftarrow$: 设$W(x) \equiv 0$. 若$y_1(x)$ 为平凡解(即零解)，则显然$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 线性相关，结论成立. 设$y_1(x)$ 为非平凡解，则存在一个子区间$J_1 \subset J$，使得$y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in J_1$. 于是

$$\left[\frac{y_2}{y_1}\right]' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} \equiv 0, \quad \forall x \in J_1.$$

这表明$y_2(x) = ky_1(x)$, $\forall x \in J_1$. 再根据解的唯一性可知$y_2(x) = ky_1(x)$, $\forall x \in J$. 即$y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性相关. 证毕. $\square$

例子

例：考虑$y''+y=0$. 显然方程有两个解$y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$.

它们对应的Wronsky 行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1.$$

因此解$y_1=\cos x$ 和 $y_2=\sin x$ 线性无关.

由已知解构造新解

Theorem

考虑齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

若已知方程一个非平凡解$y_1(x)$，则

$$y_2(x) := y_1(x)\int_a^x \frac{1}{y_1^2(s)} e^{-\int_a^s P(t)dt} ds$$

也是解，且解$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 线性无关. 这里$a \in J$ 是任意固定的一个点.

例子

例：考虑方程$x^2y''+xy'-y=0,\ x>0$. 由观察知，方程有一个解$y_1=x$. 为求其一般解，还需要另一个线性无关的解. 往下我们利用上述定理来求另一个线性无关的解. 为此先将方程写作定理中的标准形式$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$, 即$P(x)=\frac{1}{x}$. 为方便取$a=1$. 于是

$$y_2(x)=y_1(x)\int_a^x\frac{1}{y_1^2(s)}e^{-\int_a^s P(t)dt}ds=x\int_1^x\frac{1}{s^2}e^{-\int_1^s\frac{dt}{t}}ds$$

$$=x\int_1^x\frac{1}{s^3}ds=x\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)=x-\frac{1}{2x}.$$

于是解$y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 构成了方程的一个基本解组. 显然$\frac{1}{x}$ 也是特解. 故方程的一般解为$y = c_1x + c_2x^{-1}$.

证明：令$y_2 := v(x)y_1(x)$ 是一个与$y_1(x)$ 线性无关的解，其中$v(x)$ 为待定函数(非常数). 将其代入方程得

$$[v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''] + P(x)[v'y_1 + vy_1'] + Q(x)vy_1 = 0.$$

重新组合如下

$$[v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)y_1v'] + v[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] = 0.$$

由此得

$$v''y_1 + v'[2y_1' + P(x)y_1] = 0.$$

证明，续1

Lemma (零点的孤立性)

设$y_1(x)$ 是齐次方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的一个非平凡解(即非零解)，则$y_1(x)$ 的零点是孤立的．也就是说，若x_0是$y_1(x)$ 的一个零点，则存在$\delta > 0$，使得$y_1(x) \neq 0$，$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$.

引理的证明留作补充习题.

证明，续2

由上述引理知解 $y_1(x)$ 的零点孤立．故可设$\{x_k\}$ 为$y_1(x)$ 的零点集．于方程$v''y_1 + v'[2y_1' + P(x)y_1] = 0$ 两边同除y_1 得

$$v'' + v'\left[\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right], \quad x \in J\backslash\{x_k\}.$$

这是关于v' 的一阶线性方程，其一般解为

$$v' = ce^{-\int\left[\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}+P(x)\right]dx} = c\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int P(x)dx}.$$

证明，续3

于是

$$v(x) = c\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx} dx, \quad \forall x \in J\setminus\{x_k\}.$$

任取$J_1 \subset J$ 是J 的一个子区间，使得$y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in J_1$，则根据上述分析可知

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx} dx, \ x \in J_1$$

在子区间J_1 上满足方程. 注意这里已经取常数$c = 1$，因为我们的目的只是寻找一个特解.

设$J_1=(x_0,x_1)$，这里x_0,x_1 是$y_1(x)$ 的零点，可以证明

$$y_2(x)=y_1(x)\int_a^x \frac{1}{y_1^2(s)}e^{-\int_a^s P(t)dt}ds, \quad x,a\in J_1$$

及其一阶二阶导数在两个端点的x_0,x_1 处的极限存在．也就是说$y_2(x)$ 实际上是整个区间J 上的解．(证明有点麻烦．略去) 于是$y_2(x)$ 即为所求的与$y_1(x)$ 线性无关的解．证毕． □

考虑 $y''+py'+qy=0$, 其中$p,q\in\mathbb{R}$ 为常数. 指数函数的导数性质$(e^{mx})'=me^{mx}$, 启发我们寻求方程的指数函数解.

将$y=e^{mx}$ 代入方程得 $m^2e^{mx}+pme^{mx}+qe^{mx}=0$. 约去指数函数$e^{mx}$ 得

$$m^2+pm+q=0. \qquad (*)$$

方程(*)称为微分方程$y''+py'+qy=0$ 的辅助方程(auxiliary eqution) 或特征方程 (characteristic equation); 其根称作特征根; 多项式m^2+pm+q 称作方程的特征多项式 (characteristic polynomial).

特征根与方程的解

Theorem

指数函数e^{mx} 是微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解，当且仅当m是其特征根，即$m^2+pm+q=0$.

为了求方程$y''+py'+qy=0$ 的基本解组，需要对特征方程和特征根作进一步讨论．熟知特征方程$m^2+pm+q=0$ 的两个根，即特征根可表为

$$m_1, m_2=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

情形一：$p^2>4q$．此时方程有两个互异的实特征根m_1, m_2．它们对应两个解e^{m_1x}，e^{m_2x}．显然它们线性无关，因为它们的比$\frac{e^{m_1x}}{e^{m_2x}}=e^{(m_1-m_2)x}$ 不是常数．因此解e^{m_1x}，e^{m_2x} 构成了方程基本解组．

情形二：$p^2 < 4q$. 此时两个特征根为一对共轭复根，方程有一对共轭复函数解e^{m_1x} 和e^{m_2x}. 若设$m_1 = a + ib$，则$m_1 = a - ib$，这里$a, b \in \mathbb{R}$，$b \neq 0$，则这对复函数解可写作

$$e^{m_1x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx),\ e^{m_2x} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx).$$

不难看出，它们的实部函数$e^{ax}\cos bx$ 和虚部函数$e^{ax}\sin bx$ 是方程的实函数解. 显然它们线性无关. 故它们构成方程的一个基本解组. 因此对于情形二，方程$y'' + py' + qy = 0$ 的一般(实函数)解为$y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)$.

情形三：$p^2=4q$. 此时方程的两个特征根相等，或者说方程有一个二重特征根 $m_1=-p/2$. 于是$y_1=e^{-px/2}$ 是方程的一个非平凡解. 回忆由已知构造新解的结论可知

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p dx}dx$$

$$=e^{-px/2}\int e^{px}e^{-px}dx=xe^{-px/2}$$

也是解，它与y_1 一起构成方程的一个基本解组.

例子：求齐次方程$y'' - 2y' + y = 0$ 的一般解.

解：特征方程为$m^2 - 2m + 1 = 0$. 特征根$m_1 = 1$ 为二重. 于是方程有基本解组e^x, xe^x. 故方程的一般解为$y = e^x(c_1 + c_2 x)$.

用待定系数法求特解

考虑非齐次方程$y'' + py' + qy = R(x)$，这里p, q 为实常数．以下将证明，当$R(x)$ 为以下三类函数时，我们可用待定系数方法求特解.

(i) 指数函数e^{ax};

(ii) 三角函数$\sin bx, \cos bx$;

(iii) 多项式$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$

Theorem

考虑方程$y'' + py' + qy = e^{ax}$,

(i) 当a 不是特征根时, 方程有特解$y_p = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$, 这里$f(\lambda)$ 是特征多项式, 即$f(\lambda) := \lambda^2 + p\lambda + q$;

(ii) 当a 是单重特征根时, 即$f(a) = 0$, 但$f'(a) \neq 0$ 时, 方程有特解$y_p = \frac{1}{f'(a)}e^{ax}$;

(iii) 当a 是二重特征根时, 方程有特解$y_p = \frac{1}{2}e^{ax}$.

定理证明

证明：情形(i)：a 不是特征根，即$f(a)\neq 0$．由于指数函数的性质，我们有理由期待方程有解形如$y = Ae^{ax}$．将其代入方程并加以整理得$Af(a)=1$，即$A=\frac{1}{f(a)}$．结论(i)得证．

情形(ii)：a 是单重特征根．假设方程有解形如$y = Axe^{ax}$．将其代入方程并加以整理得$A(2a+p)=1$．此即$A=\frac{1}{2a+p}=\frac{1}{f'(a)}$．结论(ii)得证．

情形(iii)：a 是二重特征根．此时$f(m)=m^2-2am+a^2$．设方程有解形如$y=Ax^2e^{ax}$．将其代入方程并加以整理得$2A=1$．由此可见方程有特解$y_p=\frac{1}{2}e^{ax}$．定理得证． $\square$

Theorem

考虑方程$y''+py'+qy=\sin bx$ 或$y''+py'+qy=\cos bx$,

(i) 当ib 不是特征根时，方程有唯一一个特解，形如$y_p=A\sin bx+B\cos bx$;

(ii) 当ib 是特征根时，即$f(\pm ib)=0$，方程有唯一一个特解，形如$y_p=x(A\sin bx+B\cos bx)$.

Proof.

证明思想：考虑方程$y''+py'+qy=e^{ibx}$. 再根据指数函数情形的结论，并分离实部和虚部，即可证明结论. 细节略去. □

例子：求方程$y''+y=\sin x$ 的特解.

解：此时特征多项式$f(m)=m^2+1$，特征根为$\pm i$. 由定理知方程有唯一特解，形如$y_p=x(A\sin x+b\cos x)$. 代入方程得

$$2A\cos x-2B\sin x+x(-A\sin x-B\cos x)$$

$$+x(A\sin x+b\cos x)=\sin x.$$

比较$\sin x$ 和$\cos x$ 的系数得$A=0$，$B=-1/2$. 故方程有特解$y_p=\frac{-x}{2}\cos x$. 解答完毕.

Theorem

考虑方程$y''+py'+qy=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,

(i) 当0 不是特征根时，即$q\neq 0$ 时，方程有唯一一个特解，形如$y_p=A_0+A_1x+\cdots+A_nx^n$;

(ii) 当0 是单重特征根时，即$q=0$，但$p\neq 0$，方程有唯一一个特解，形如$y_p=x(A_0+A_1x+\cdots+A_nx^n)$;

(iii) 当0 是二重特征根时，即$q=p=0$ 时，方程有唯一一个特解，形如$y_p=x^2(A_0+A_1x+\cdots+A_nx^n)$.

定理证明

证明：将$y_p = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$ 代入方程得

$$2A_2 + \cdots + n(n-1)A_nx^{n-2} + p(A_1 + 2A_2x + \cdots + nA_nx^{n-1})$$

$$+q(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

比较系数得

$$\begin{bmatrix} q & & & \\ * & q & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix},$$

这里$*$ 代表一些我们目前不感兴趣的数. 由于$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, 故上述线性代数方程组的系数矩阵非奇, 从而方程组有唯一解. 结论(i)得证. 结论(ii) 和(iii)证明类似. 证毕. $\square$

例子

例：求方程$y'' - y' - 2y = 4x^2$ 的一般解.

解：考虑对应的齐次方程为$y'' - y' - 2y = 0$. 它的特征方程为$m^2 - m - 2 = 0$, 即$(m-2)(m+1) = 0$. 齐次方程的一般解为$y_g = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$. 以下求非齐次方程的特解. 由于方程的右端为多项式, 且$m = 0$ 不是特征根, 故由定理可知方程有唯一的特解, 形如$y_p = A + Bx + Cx^2$. 将其代入方程, 并比较系数得

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

解之得$(C, B, A) = (-2, 2, -3)$. 于是所求特解为

$$y_p = -3 + 2x - 2x^2.$$

方程$y'' - y' - 2y = 4x^2$ 的一般解为

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2,$$

其中c_1, c_2 为任意常数. 解答完毕.

作业

课本习题：

page 112, problems 4, 7, 8, 9, 10.

page 119, problems 11(a)(b).

page 121–122, problems 5, 8, 11, 12.

page 125–127, problems 3, 4, 5(a)(b), 6, 8.

补充习题：证明如下零点孤立性引理：设$y_1(x)$ 是齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的一个非平凡解(即非零解)，则$y_1(x)$ 的零点是孤立的. 也就是说，若x_0 是$y_1(x)$ 的一个零点，则存在$\delta>0$，使得$y_1(x)\neq 0,\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$.

选作习题：设$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为s 个互异的实数，设$l_1, \cdots, l_s$ 为s 个正整数. 证明以下$l := l_1 + \cdots + l_s$ 个函数在$\mathbb{R}$ 上线性无关.

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \cdots, & t^{l_1 - 1}e^{\lambda_1 t}, \\
e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \cdots, & t^{l_2 - 1}e^{\lambda_2 t}, \\
\cdots, & \cdots & \cdots, & \cdots, \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t} & \cdots, & t^{l_s - 1}e^{\lambda_s t}.
\end{array}
$$

(提示：可考虑对s 用归纳法.)