清华大学数学系本科生2017春概率论I期末考题(B)

考试时间：2017年6月14日下午2:30-4:30

考生姓名:　　　　学号:　　　　班号:

选做5题(每题20分), 多做取最高分

1.设$\{\xi_n,\xi,\eta_n,\eta\}_{n\geq 1}$ 为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$上 的随机变量 序列.

(1)证明 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi \Longrightarrow \xi_n \xrightarrow{\mathbf{w}} \xi$.

(2) $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{w}} \xi \Longrightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi$ 是否成立？不成立举出反例 .

(3)若$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$满足下列条件 $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{n\geq 1}\mathbf{P}\{|\xi_n|\geq m\}=0$ 和 $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, 证明 $\xi_n\eta_n \xrightarrow{\mathbf{w}} 0$.

2.设$\{\xi_k\ k\geq 1\}$是相互独立随机变量序列,且$\xi_k\sim \mathbf{N}(1,k), k\geq 1$. 求

(1)$\eta=(\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k+\xi_{k+1}+\xi_{k+2}),\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k)^T$的联合概率分布;

(2)$\mathbf{E}\{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k+\xi_{k+1}+\xi_{k+2})|\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\}$.

3.设$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$是相互独立同分布随机变量序列, $a\triangleq \mathbf{E}(\xi_1)$ 有限.证明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{\text{a.s.}} a.$$

4.设$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$是相互独立随机变量序列且对$n\geq 1$, $|\xi_n|\leq C$, $\mathbf{E}\{\xi_n\}=0$, $\mathbf{D}\{\xi_n\}=1$, ν_n是非负整值随机变量, $\mathbf{E}\{\nu_n\}=n$, $\mathbf{D}\{\nu_n\}\leq n^{1-\delta}$, 其中$\delta>0$, 且$\nu_n$ 与$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$独立.令$\zeta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{\nu_n}\xi_k$, $n\geq 1$. 求 ζ_n 的极限分布.

5.设ξ_1与ξ_2是相互独立的随机变量且 $\xi_1\sim\mathbf{P}(\lambda_1)$, $\xi_2\sim\mathbf{P}(\lambda_2)$. 求

(1) $\xi_1+\xi_2$的概率分布; **(2)** $\mathbf{E}\{\xi_1|\xi_1+\xi_2=n\}$; **(3)** $\mathbf{E}\{\xi_1|\xi_1+\xi_2\}$.

6.设$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$是相互独立的随机变量序列且$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -n^{\alpha} & n^{\alpha} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. 证明当$\alpha > 0$ 时 $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$满足大数定律的充要条件为$\alpha < \frac{1}{2}$.

7.设$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$是相互独立的随机变量序列且对 $n \geq 1$,$\mathbf{E}\{\xi_n\} = 0$, $0 < \mathbf{D}\{\xi_n\} < \infty$. 令$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. 证明 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\mathbf{P}\{\max_{1\leq k\leq n}\{|S_k|\} \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}\{S_n\}}{\varepsilon^2}.$$

8. (1)设ξ为非负随机变量且其分布函数为$F(x)$. 若$\mathbf{E}(\xi) < \infty$, 证明

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx.$$

(2)设ξ和η为**iid**随机变量, $\mathbf{E}(|\xi|) < \infty$且他们的共同分布函数为$F(x)$. 证明下列

(a)$\mathbf{E}(|\xi + \eta|) - \mathbf{E}(|\xi - \eta|) = 2\int_0^{\infty}[1 - F(-t) - F(t)]^2 dt$;

(b) $\mathbf{E}(|\xi + \eta|) \geq \mathbf{E}(|\xi|)$.

(注明: 如果不能证明该题(2)的结论, 但能举出完全符合该题结论的例子给5分).

9.设$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ 为**iid**随机变量序列且$\xi_1 \sim Exp(1)$, $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ 为**iid**随机变量序列且$\eta_1 \sim U_{(0,1)}$, $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ 与 $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ 独立. 令$X = \frac{\xi_1+\cdots+\xi_m}{\xi_1+\cdots+\xi_n}(m < n)$, $U = \left(\prod_{k=1}^{n} \eta_k\right)^{-X}$. 求随机变量$U$ 的概率分布密度函数.