习题3.2：1，2，4，5.

3.2 Cauchy 积分定理

引理3.2.2. 设 f 在域 D 上连续，γ 是 D 内一可求长曲线，则对 $\forall \varepsilon>0$，存在 D 中折线 Γ，s.t.

① γ 与 Γ 有相同起、终点

② $\left|\int_\gamma f(z)dz-\int_\Gamma f(z)dz\right|<\varepsilon$.

证：(a) $\exists\,\gamma$ 的一个邻域 U，s.t. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，

$$|z_1-z_2|<\delta,\ z_1,z_2\in U \Longrightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\frac{\varepsilon}{2L}$$

(b) 任取 γ 的一划分 $\widehat{z_iz_{i+1}}$，$i=0,1,\cdots,n-1$. s.t.

$\widehat{z_iz_{i+1}}\subset B(z_i,\delta)$，并用 Γ 表示折线 $\overline{z_0z_1\cdots z_n}$.

(c) $\left|\int_\gamma f(z)-\int_\Gamma f(z)\right|$

$$\le\left|\sum_0^{n-1}\int_{\widehat{z_iz_{i+1}}}[f(z)-f(z_i)]dz-\int_{\overline{z_iz_{i+1}}}[f(z)-f(z_i)]dz\right|$$
$$+\left|\sum_0^{n-1}\int_{\widehat{z_iz_{i+1}}}f(z_i)\,dz-\int_{\overline{z_iz_{i+1}}}f(z_i)\,dz\right|$$
$$\le\sum_0^{n-1}\int_{\widehat{z_iz_{i+1}}}\frac{\varepsilon}{2L}ds+\sum_0^{n-1}\int_{\overline{z_iz_{i+1}}}\frac{\varepsilon}{2L}ds+\left|\sum_0^{n-1}\left[\int_{\overline{z_iz_{i+1}}}f(z_i)-\int_{\overline{z_iz_{i+1}}}f(z_i)\right]dz\right|$$
$$=\frac{\varepsilon}{2L}L(\gamma)+\frac{\varepsilon}{2L}L(\Gamma)+0\le\varepsilon.$$

定理3.2.1. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中单连通区域，$f\in H(D)$ 且 $f'(z)$ 在 D 上连续，则对 D 中任一可求长闭曲线 γ 均有：

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

证：先设 γ 是简单曲线，所围区域为 G，则

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma(u\,dx-v\,dy)+i(v\,dx+u\,dy)$$

$$\xlongequal{\text{Green}} \iint_G \left[[-v_x - u_y] dxdy + i[u_x - v_y] \right] dxdy \xlongequal{\text{C.-R.}} 0$$

一般地，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 闭折线 Γ，s.t.

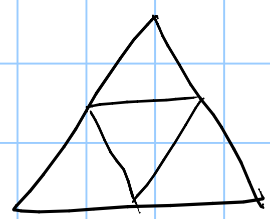
$$\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

而 Γ 由有限条简单闭折线构成，从而 $\int_\Gamma f(z)dz = 0$。进而 $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| < \varepsilon$。由 ε 的任意性，$\int_\gamma f(z)dz = 0$.

定理 3.2.3（Cauchy 积分定理）设 f 在单连通区域 D 上解析，则对 D 内任一可求长闭曲线 γ，

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

证. ① 先设 γ 是一三角形曲线。反设



$$I = \left|\int_\gamma f(z)dz\right| > 0.$$

如图，将 γ 所围三角形分成全等四块记之为 $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}$，则

$$I = \left|\int_{\partial\Delta_{11}} + \int_{\partial\Delta_{12}} + \int_{\partial\Delta_{13}} + \int_{\partial\Delta_{14}}\right| \le \left|\int_{\partial\Delta_{11}}\right| + \cdots + \left|\int_{\partial\Delta_{14}}\right|$$

因此至少有一个 $\left|\int_{\partial\Delta_{1j}}\right| > \frac{I}{4}$。不妨设 $\left|\int_{\partial\Delta_{11}}\right| > \frac{I}{4}$.

将 Δ_{11} 等分为四个三角形 $\Delta_{21}, \cdots, \Delta_{24}$，可设 $\left|\int_{\partial\Delta_{21}}\right| > \frac{I}{4^2}$.

依此类推得一三角形序列 $\Delta_n = \Delta_{n1}$，$n = 1, 2, \cdots$，s.t.

(1) $\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| > \frac{I}{4^n}$，$n = 1, 2, \cdots$

(2) $L(\partial\Delta_n)=\frac{1}{2^n}L(\partial\Delta)$

(3). $d(\Delta_n)=\frac{1}{2^n}d(\Delta)$.（$d$表示集合直径）

(4). $\Delta_1\supset\Delta_2\supset\cdots\supset\Delta_n\supset\cdots$ $(\Delta_n=\overline{\Delta_n})$.

设 $z_0=\bigcap_{1}^{\infty}\Delta_n$. 则 z_0 唯一. 且对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|z-z_0|<\delta$ 时,

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|$$

$\exists N$, s.t. $\Delta_N\subset B(z_0,\delta)$. 从而

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\\
=&\left|\int_{\partial\Delta_n}\big(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\big)dz+\int_{\partial\Delta_n}[f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)]dz\right|\\
\le&\int_{\partial\Delta_n}|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|\,ds\\
\le&\ \varepsilon\int_{\partial\Delta_n}|z-z_0|\,ds\le\varepsilon\cdot d(\Delta_n)\cdot L(\partial\Delta_n)=\frac{\varepsilon d(\Delta)L(\Delta)}{4^n}
\end{aligned}$$

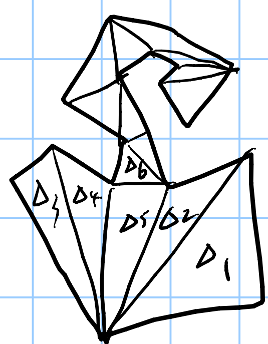
从而, 取 $\varepsilon<\frac{1}{d(\Delta)L(\Delta)}$, 得到与(1)矛盾的式子.

∴ 当 γ 为三角形时, $\int_\gamma f(z)\,dz=0$

② 现在设 γ 是闭折线, 则 $\gamma=\gamma_1+\cdots+\gamma_n$. 其中 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是简单多边形. 记 γ_j 所围区域为 Δ_j. 则如图 Δ_j 可以被分成若干个小三角形 $\Delta_{j1},\cdots,\Delta_{jk}$.

而且有 $\int_{\partial\Delta_j}f(z)dz=\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial\Delta_{ji}}f(z)dz=0$ (由①). $j=1,\cdots,n$

从而 $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.



③. 由引理3.2.2, $\forall\varepsilon>0$, ∃闭折线 P. s.t.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz-\int_P f(z)\,dz\right|<\varepsilon.$$

而 $\int_P f(z)\,dz=0$. 故 $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|<\varepsilon$.

即 $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.

定理证毕.

定理3.2.4. 若 D 是可求长 Jordan 曲线 γ 的内部，$f\in H(D)\cap C(\overline{D})$，则 $\int_{\partial D} f(z)dz=\int_\gamma f(z)dz=0$.

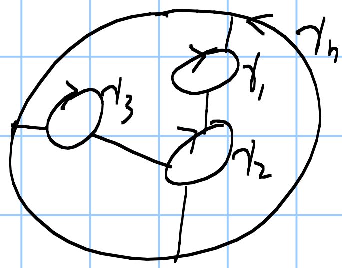
证：一般情形下的证明较复杂，但在假定了 γ 光滑的情形下可以证明：$\forall\varepsilon>0$，$\exists D$ 内折线 P，s.t.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz-\int_P f(z)dz\right|<\varepsilon.$$

从而 $\int_\gamma f(z)dz=0$.

定理3.2.5. 设区域 D 由有限条互不相交的可求长 Jordan 曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 所围成的有界区域，定向如图。又设 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$，则

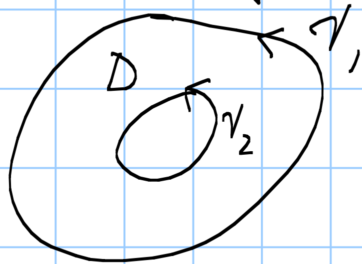
$$\int_{\partial D} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f(z)dz=0.$$



(这个定理实用性强，可将 D 按图分解然后用上定理去证)。

推论3.2.6. 如图区域 D 是由可求长 Jordan 曲线 γ_1、γ_2 所围的二连通区域，$f\in H(D)\cap C(\overline{D})$. 则

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_{\gamma_2} f(z)dz.$$



例1. 设 γ 是可求长简单闭曲线，$a\notin\gamma$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=\begin{cases}0, & \text{如果 } a \text{ 在 } \gamma \text{ 外部 (Th3.2.3)}\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}, & \text{如果 } a \text{ 在 } \gamma \text{ 内部，}\delta\text{ 充分小.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{如果 } a \text{ 在 } \gamma \text{ 外部;}\\ 1. & \text{如果 } a \text{ 在 } \gamma \text{ 内部.}\end{cases}$$

习题3.3. 2, 3, 4.

第3节 全纯函数的原函数

定义3.3.1. 设f是域D上的函数, 如果存在D上的函数F, s.t. $F'(z)=f(z)$, $z\in D$, 则称F是f在D上的原函数.

若$f\in H(D)$, 则f有原函数$F\in H(D)$?

未必: $f(z)=\frac{1}{z}$在$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$全纯, 但$f(z)$在$\mathbb{C}^*$没有原函数! 如果有$\varphi(z)$, $\varphi'(z)=f(z)=\frac{1}{z}$, $z\in\mathbb{C}^*$.

则 $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=\int_{|z|=1}\varphi'(z)dz=\int_{|z|=1}d\varphi(z)=0$.

而事实上 $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i$, 矛盾.

定理3.3.2. 设f在域D上连续, 则以下两条件等价:

(i) f在D上有原函数.

(ii). 对D中任一可求长闭曲线γ, $\int_\gamma f(z)dz=0$.

当(ii)成立时, 对固定$z_0\in D$,

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$$

是f在D上的一个原函数.

(这个定理包含了书中定理3.3.2, 3.3.3, 3.3.4)

回顾年分场论: $pdx+qdy$在D上有原函数

$\Longleftrightarrow\forall$可求长闭曲线$\gamma\subset D$, $\int_\gamma pdx+qdy=0$.

当$pdx+qdy$在D上有原函数u时, 对$(x_0,y_0)\in D$, $(x,y)\in D$,

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}pdx+qdy.$$

证明：(i) $\Rightarrow$ (ii). 设$\exists F(z)\in H(D)$, s.t.
$$F'(z)=f(z),\quad \forall z\in D.$$
则对D中任一以z_0, z为起、终点的光滑曲线
$$\gamma: z=z(t),\ t\in[0,1]$$
$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^1 f(z(t))z'(t)\,dt=\int_0^1 F'(z(t))z'(t)\,dt$$
$$=\int_0^1 [F(z(t))]'_t\,dt=F(z(1))-F(z(0))=F(z)-F(z_0).$$
现在设γ是D中任一可求长闭曲线，则由引理3.2.2，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ D中闭折线P，s.t. $\left|\int_\gamma f(z)dz-\int_P f(z)dz\right|<\varepsilon$. 记P是闭折线$\overline{z_0z_1\cdots z_nz_0}$则由前面讨论
$$\int_P f(z)dz=\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz+\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz+\cdots+\int_{z_{n-1}}^{z_n}f(z)dz+\int_{z_n}^{z_0}f(z)dz$$
$$=F(z_1)-F(z_0)+F(z_2)-F(z_1)+\cdots+F(z_n)-F(z_{n-1})+F(z_0)-F(z_n)=0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设$z_0\in D$. $\forall z$，记$\gamma_{z_0}^{z}$为从z_0到z的D中折线，则f在$\gamma_{z_0}^{z}$的复积分与路径无关，只与z有关。因此可把该积分记为$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$, $z\in D$.

任取$a\in D$, $\delta>0$, s.t. $B(a,\delta)\subset D$. 再取Δz, $|\Delta z|<\delta$, 则
$$F(a+\Delta z)-F(a)=\int_{z_0}^{a+\Delta z}f(z)-\int_{z_0}^{a}f(z)dz=\int_a^{a+\Delta z}f(z)dz.$$
由后一积分路径可取a到Δz的线段$\overline{a\Delta z}$，从而
$$\left|\frac{F(a+\Delta z)-F(a)}{\Delta z}-f(a)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_a^{a+\Delta z}(f(z)-f(a))dz\right|$$
$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_a^{a+\Delta z}\max_{z\in\overline{a\Delta z}}|f(z)-f(a)|ds$$
$$\to 0\ (\Delta z\to 0).$$
$$\therefore\quad F'(a)=f(a).$$

定理3.3.3. 设D是单连通区域，则$\forall f\in H(D)$，

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

是f的一个原函数

定理3.3.4. 设$f\in H(D)$有原函数F，则积分$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$与路径无关，且$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz=F(z)-F(z_0)$.

一般来说对多连通域D上的全纯函数f，

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,\quad z\in D,$$

是一个多值函数(即积分与路径相关)