第三章（求解线性方程组的迭代方法部分）习题

1、设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 10 & a & 0 \\ c & 10 & c \\ 0 & a & 5 \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0,$$

用 a, c 表示出解方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法收敛的充要条件.

2、设 A 是一个对称正定矩阵，将 A 分解为 $A = D - L - U = D(I - \widetilde{L} - \widetilde{U})$. 定义一种两步（正反G-S）迭代法：

$$\begin{aligned} (D-L)x^{(k+\frac{1}{2})} &= Ux^{(k)} + b, \\ (D-U)x^{(k+1)} &= Lx^{(k+\frac{1}{2})} + b. \end{aligned}$$

(1) 证明将上述迭代公式可合并写成 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 的形式，其中

$$\begin{aligned} B &= \left(I - \widetilde{U}\right)^{-1} \left(I - \widetilde{L}\right)^{-1} \widetilde{L}\widetilde{U}, \\ g &= \left(I - \widetilde{U}\right)^{-1} \left(I - \widetilde{L}\right)^{-1} D^{-1}b. \end{aligned}$$

(2) 证明迭代矩阵 B 的特征值为非负实数。

(3) 证明 $\rho(B) < 1$，即该迭代法收敛。

3、假设 A 是一个严格对角占优的矩阵，且 $0 < \omega \leq 1$. 证明 SOR 方法求解 $Ax = b$ 一定收敛.

4、设 A 为对称正定矩阵，证明在用共轭梯度法求解 $Ax = b$ 中，一定有 $\mathcal{F}\left(x^{(k+1)}\right) \leq \mathcal{F}\left(x^{(k)}\right)$，且残差 $r^{(k)} \neq 0$ 时，上述不等式为严格不等号，这里

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x).$$

5、设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 欲解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 取 $K = L = \mathrm{span}\{\mathbf{r}, A\mathbf{r}\}$, 其中 $\mathbf{r}$ 为上一步的残差, 用 Galerkin 原理来求解.

(1) 用 $\mathbf{r}$ 和满足 $(\mathbf{r}, A\boldsymbol{p}) = 0$ 的向量 $\boldsymbol{p}$ 构成 K 中一组基, 给出 $\boldsymbol{p}$ 的计算公式.

(2) 写出从 $\mathbf{x}_0$ 到 $\mathbf{x}_1$ 的计算公式.

(3) 该算法收敛吗？

6、（可选做）设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 可用

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha\mathbf{r}_k + \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$$

求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ 为任取的两个初始向量, $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_k$. 试分析这个迭代法当 α, β 取什么值时收敛, 最佳的 α, β 如何取？