3.5 De Giorgi定理—Moser迭代

- 1957年, De Giorgi首先证明了：有界可测系数散度形式的椭圆型方程的H^1-弱解是Höder连续的;
- 1958年， Nash独立地对抛物型方程证明了同样的结果;
- 1960年， J. Moser 又给出了一个新的证明， 其方法现在称为Moser迭代方法.

为简单计， 本节只考虑如下形式的方程

$$Łu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + C(x)u = f, \qquad (3.21)$$

其中$a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$且满足(3.1), 即存在常数$\lambda > 0$, 使得

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|^2, \forall \xi \in R^n, \forall x \in \Omega. \qquad (3.22)$$

注: 本小节的结果在条件$d^i, b^i \in L^\infty(\Omega)$下， 对一般形式(3.2)方程的弱解仍然成立。

1. Moser迭代方法

Theorem

3.12 设$\Omega \subset R^n$为有界开集，$u \in H_0^1(\Omega)$是*(3.21)*之弱解，*(3.22)*满足，并存在$q > n$使得

$$C,\ f \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega),$$

则存在正常数 $\tilde{C} = \tilde{C}(\lambda, n, q, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}, |\Omega|)$，使得

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \le \tilde{C}[||u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}].$$

解是Hölder连续的

证明. 其想法是通过方程证明： 存在$\alpha > 1$使得

$$u \in L^p(\Omega) \Rightarrow u \in L^{\alpha p}(\Omega),$$

由此迭代可推出

$$||u||_{L^{\alpha^k p}(\Omega)} \leq M, \forall k = 1, 2, 3, \cdots$$

Step 1 不妨设$n \geq 3$. 再限制

$$k := \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} > 0.$$

不妨设$k = 1$否则, 对函数$v = \frac{u}{k}$ 利用该条件下的结论即可.

Step 2 令

η在边界为0 （需要 $u \in H_0^1$

$$w = u^+ + 1, \ \eta(x) = G(w)(x) := \int_1^{w(x)} |H'(t)|^2 dt,$$

积分形式

其中

$$H(z)=\begin{cases} z^{\beta}-1,\ z\in[1,N] \\ \beta N^{\beta-1}(z-N)+N^{\beta}-1,\ z>N \end{cases}.$$

式中β和$N>1$是待定之常数. 因为

$$w|_{\partial\Omega}=1\Rightarrow\eta\in H_0^1(\Omega),$$

于是由弱解之定义有

$$\int_{\Omega}[\underbrace{G'(w)}_{\| \atop |H'(w)|^2}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)u_{x_i}w_{x_j}+(Cu-f)G(w)(x)]dx=0.$$

$u_{x_i}=w_{x_i}$ 于 $u>0$

$w_{x_j}=0$ 在其它

由定理的条件，可得

$$
\begin{aligned}
\lambda\int_\Omega G'(w)||Dw|^2dx &\leq \int_\Omega(-Cu+f)G(w)(x)dx\\
&\leq \int_\Omega(|C|+|f|)wG(w)(x)dx\\
&\leq \int_\Omega(|C|+|f|)|wH'(w)|^2(x)dx
\end{aligned}
$$

此处用到了不等式

$$G(s)=(s-1)|H'(\xi)|^2\leq s|H'(s)|^2$$

中值定理

Step 3 又$H(w) \in H_0^1(\Omega)$,故由Soblev-Poincare不等式和如上的估计，有

$$
\begin{aligned}
||H(w)||_{L^{2*}(\Omega)} &\leq C(n)||DH(w)||_{L^2(\Omega)} \\
&= C(n)[\int_\Omega G'(w)|Dw|^2 dx]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\lambda, n)[\int_\Omega (|C| + |f|)|wH'(w)|^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\lambda, n)[||C| + |f||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}]^{\frac{1}{2}}[|||wH'(w)|^2||_{L^{(\frac{q}{2})'}(\Omega)}]^{\frac{1}{2}} \\
&= C(\lambda, n, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)})||wH'(w)||_{L^{\bar{q}}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$||$

βw^β

此处 $\bar{q} = \frac{2q}{q-2}$.

注意

$$H(w) = W^\beta - 1, \quad wH'(w) = \beta w^\beta, \ \forall w \in [1, N]$$

在上式中令$N \to \infty$, 我们得到

$$w \in L^{\beta\bar{q}}(\Omega) \Rightarrow \cancel{H(w) \in L^{2*}(\Omega)},$$

$\to H(w) \in L^{2*}(\Omega)$

且

$$||W^\beta - 1||_{L^{2*}(\Omega)} \le C||\beta w^\beta||_{L^{\bar{q}}(\Omega)} = C_1\beta[||w||_{L^{\beta\bar{q}}(\Omega)}]^\beta.$$

记

$$\alpha := \frac{2*}{\bar{q}} = \frac{(q-2)n}{(n-2)q},$$

则由条件$q > n$知: $\alpha > 1$.

于是利用上述估计和$1 \le W$这一事实， 有

$$
\begin{aligned}
[\|W\|_{L^{\beta\alpha\bar{q}}(\Omega)}]^{\beta} &= \|W^{\beta}\|_{L^{\alpha\bar{q}}(\Omega)} \\
&\le \|W^{\beta}-1\|_{L^{\beta\bar{q}}(\Omega)} + \|1\|_{L^{\beta\bar{q}}(\Omega)} \\
&\le 2C_1\beta[\|w\|_{L^{\beta\bar{q}}(\Omega)}]^{\beta} \\
&\le 2C_1(\Omega)\,\beta
\end{aligned}
$$

即

$$\|W\|_{L^{\beta\alpha\bar{q}}(\Omega)} \le (C\beta)^{\frac{1}{\beta}}\|w\|_{L^{\beta\bar{q}}(\Omega)}, \forall\beta \ge 1$$

$\|$

$\|W\|_{L^{\beta 2^*}(\Omega)}$

注意

$$w \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2*}(\Omega) = L^{\alpha\bar{q}}(\Omega),$$

故在前面的估计中，先取$\beta = \alpha$得$w \in L^{\alpha^2\bar{q}}(\Omega)$; 再取$\beta = \alpha^2$得$w \in L^{\alpha^3\bar{q}}(\Omega); \cdots,$ 依此递推， 我们得到： 对任意的正整数m 均有

$$\begin{aligned}
||W||_{L^{\alpha^m\bar{q}}(\Omega)} &\leq \prod_{i=0}^{m-1}(C\alpha^i)^{\alpha^{-i}}||w||_{L^{\bar{q}}(\Omega)} \\
&\leq C^{\sum_{i=0}^{m-1}\alpha^{-i}}\alpha^{\sum_{i=0}^{m-1}i\alpha^{-i}}||w||_{L^{\bar{q}}(\Omega)} \\
&\leq C(n, \lambda, q, ||C||_{L^{q/2}(\Omega)})||w||_{L^{\bar{q}}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

同

令 $m \to \infty$, 得

$$||w||_{L^\infty(\Omega)} \leq C||w||_{L^{\bar{q}}(\Omega)} \leq C[||w||_{L^\infty(\Omega)}]^{\frac{\bar{q}-2}{\bar{q}}}[||w||_{L^2(\Omega)}]^{\frac{2}{\bar{q}}}.$$

即

$$Sup_\Omega u^+ \leq C||w||_{L^2(\Omega)} \leq C[||u^+||_{L^2(\Omega)} + 1].$$

因为 $-u$也是该方程对应$-f$的弱解， 故有

$$Sup_\Omega(-u)^+ \leq C[||(-u)^+||_{L^2(\Omega)} + 1].$$

结合上面两式， 即得定理3.12在假设 $||f||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} > 0$ 下的结论。

Step 4 如果

$$||f||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} = 0,$$

则$\forall \varepsilon > 0$,函数

$$V_\varepsilon(x) = \frac{u(x)}{\varepsilon}$$

也是该方程对应$f = 0$的弱解, 检查上述证明我们有

$$||V_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)} \le C[||V_\varepsilon||_{L^2(\Omega)} + 1].$$

将此式两边同乘ε,即可得到定理的结论。

取 $\varepsilon \to 0$

2.　弱解的弱Harnack不等式

$H^1(\Omega)$

我们可以用Moser迭代方法证明下面的弱Harnack不等式。

Theorem

3.13 设$\Omega \subset R^n$为开集，$u \in H^1(\Omega)$是*(3.21)*之非负弱下解，*(3.22)*满足，并存在$q > n$使得 C，$f \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$.

局部

如果$p \in (0, \frac{n}{n-2})$，$B_{2R}(x_0) \subset \Omega$，则存在正常数
$C = C(\lambda, n, p, q, R, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)})$ 和$\tau = C(n, p) \in (1, 2)$，使得

$$R^{-\frac{n}{p}} ||u||_{L^p(B_{\frac{\tau R}{2}})} \le C[\inf_{B_{\frac{R}{2}}} u + R^{2(1-\frac{n}{q})} ||f||_{L^{\frac{q}{2}}(B_R)}].$$

较大区域Lp模被最小值控制

此处及下面的证明中，总是记$B_r := B_r(x_0), B = B_1$.

证明. Step 1. 同定理3.12一样， 可设

$$n \geq 3, k =: ||f||_{L^{\frac{q}{2}}(B_R)} = 1.$$

不妨设$R = 1$, 否则做变换$x \to \frac{x}{R}$即可。
令

$$\bar{u}(x) = u(x) + 1, \quad \varphi = \eta^2 \bar{u}^\beta,$$

其中$\eta \in C_0^\infty(B)$, $\beta < 0$待定。 则由弱下解之定义， 有

$$\int_B [\beta \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_j} \eta^2 \bar{u}_{x_i} \bar{u}^{\beta-1} + \sum_{i,j=1}^n 2a^{ij} u_{x_j} \eta \eta_{x_i} \bar{u}^\beta + (Cu - f)\eta^2 \bar{u}^\beta] dx \geq 0$$

注意到

$$Du = D\bar{u}, \quad u_{x_j}\eta\eta_{x_i}\bar{u}^{\beta} = \bar{u}_{x_j}\eta\bar{u}^{\frac{\beta-1}{2}} \cdot \eta_{x_i}\bar{u}^{\frac{\beta+1}{2}},$$

由椭圆条件和Young不等式， 有

$$\int_B \eta^2|D\bar{u}|^{2}\bar{u}^{\beta-1}dx \le \frac{C(\lambda,n)}{|\beta|}\int_B [|D\eta|^2\bar{u}^{\beta+1} + (|C| + |f|)\eta^2\bar{u}^{\beta+1}]dx, \tag{3.23}$$

最后一项用到了

$$0 \le u, \max\{1, u\} \le \bar{u}.$$

Step 2. 现在限制$-1 \neq \beta < 0$. 记$w = \bar{u}^{\frac{\beta+1}{2}}$, 由(3.23)可知

取指数<0, 用最大模得最小模

$$\int_B |\eta D w|^2 \leq \frac{C(\lambda, n)}{|\beta||\beta+1|^2} \int_B [|D\eta|^2 w^2 + (|C| + |f|)\eta^2 w^2] dx,$$

而利用Holder，插值和Young不等式， 我们有

$$\int_B (|C| + |f|)\eta^2 w^2 \leq \||f| + C\|_{L^{q/2}(B)} (\|\eta w\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}(B)})^2$$

$$\leq \||f| + C\|_{L^{q/2}(B)} [\|\eta w\|_{L^{2^*}(B)}]^{2\theta} [\|\eta w\|_{L^2(B)}]^{2-2\theta}$$

$$\leq \||f| + C\|_{L^{q/2}(B)} [\varepsilon\theta \|\eta w\|_{L^{2^*}(B)} + \frac{1-\theta}{4\varepsilon} \|\eta w\|_{L^2(B)}]^2$$

$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^{p_1}}^{\theta} \|u\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}$ 其中 $p_1 < p < p_2$

$$\frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} = \frac{1}{p}$$

注意到上述$\theta \in (0,1)$只与q, n有关, 并且

嵌入定理

$$||\eta w||_{L^{2*}(B)} \le C(n)||D(\eta w)||_{\cancel{L^{2*}}(B)},$$

L^2

于是取适当下的$\varepsilon > 0$, 便有

$$\int_B |D(\eta w)|^2 \le C_1 \int_B (\eta^2 + |D\eta|^2) w^2$$

if

$$C_1 := \frac{C(\lambda, q, n, ||C||_{L^{q/2}(B)})}{|\beta||\beta+1|} \ge 1.$$

即

$$||\eta w||_{L^{2*}(B)} \le \frac{C_3(\lambda, q, n, ||C||_{L^{q/2}(B)})}{|\beta||\beta+1|} ||(|D\eta| + \eta) w||_{L^2(B)}.$$

现在对于任意的$\frac{1}{2} \le r_2 < r_1 \le 1$, 取$\eta \in C_0^\infty(B_{r_1}) \subset C_0^\infty(B)$满足

$$0 \le \eta \le 1, \quad \eta = 1 \ in \ B_{r_2}, \quad |D\eta| \le \frac{c(n)}{r_1 - r_2}.$$

不妨设$c(n) > 1$. 令$\alpha = \frac{n}{n-2}$, 则 $\eta < |D\eta| \le \frac{c(n)}{r_1 - r_2}$

η在B_{r_2}上为1

$$||w||_{L^{2\alpha}(B_{r_2})} \le \frac{2C_3 c(n)}{|\beta||\beta+1|(r_1 - r_2)} ||w||_{L^2(B_{r_1})}. \qquad (3.24)$$

现在限制$\beta < -1$, 对于任意的$p_0 > 0$, 上式写为

$$||\bar{u}^{-p_0}||_{L^{-(\beta+1)p_0^{-1}\alpha}(B_{r_2})} \le \left[\frac{C}{|\beta+1|(r_1 - r_2)}\right]^{\frac{-2p_0}{\beta+1}} ||\bar{u}^{-p_0}||_{L^{-(\beta+1)p_0^{-1}}(B_{r_1})}. \qquad (3.25)$$

对任意非负整数m, 令$r_m = \frac{1}{2} + 2^{-m-1}$, 再取$\beta < -1$使得$-(\beta+1)p_0^{-1} = \alpha^m$. 于是由(3.25)有 上式取$r_1, r_2 = r_m, r_{m+1}$

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^{-p_0}\|_{L^{\alpha^{m+1}}(B_{r_{m+1}})} &\le [\frac{C}{\alpha^m p_0 2^{-m-2}}]^{\frac{2}{\alpha^m}} \\
&\times \|\bar{u}^{-p_0}\|_{L^{\alpha^m}(B_{r_m})} \\
&\le [\frac{C}{\alpha^m p_0 2^{-m-2}}]^{\frac{2}{\alpha^m}} [\frac{C}{\alpha^{m-1} p_0 2^{-m-1}}]^{\frac{2}{\alpha^{m-1}}} \\
&\times \|\bar{u}^{-p_0}\|_{L^{\alpha^{m-1}}(B_{r_{m-1}})} \\
&\le \cdots \\
&\le (\frac{4C}{p_0})^{\sum_{i=0}^m 2\alpha^{-i}} (\frac{2C}{\alpha})^{\sum_{i=0}^m 2i\alpha^{-i}} \|\bar{u}^{-p_0}\|_{L(B_{r_0})}
\end{aligned}$$

令$m \to \infty$, 得

$$Sup_{B_{\frac{1}{2}}} \bar{u}^{-p_0} \leq C||\bar{u}^{-p_0}||_{L(B)}.$$

即存在正常数$C(\lambda, n, q, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)})$， 对任意的$p_0 > 0$， 均有

$$inf_{B_{\frac{1}{2}}} \bar{u} \geq \frac{C^{\frac{1}{p_0}}}{||\bar{u}^{-1}||_{L^{p_0}(B)}}. \tag{3.26}$$

Step 3. 下面证明

$$||\bar{u}^{-1}||_{L^{p_0}(B)}||\bar{u}||_{L^{p_0}(B)} \leq C(\lambda, n, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}). \tag{3.27}$$

对任意$r \in (0, \frac{1}{2}]$, $\forall y \in B$, 则

$$B_{2r}(y) \subset B_2 \subset \Omega,$$

取取$\eta \in C_0^\infty(B_{2r}(y))$ 满足

$$0 \le \eta \le 1, \quad \eta = 1 \ in \ B_r(y), \quad |D\eta| \le \frac{c(n)}{r}.$$

代入(3.23)并在其中取$\beta = -1$, 得

$$\int_{B_r(y)} |Dlog\bar{u}|^2 \le C(\lambda, n)[r^{n-2} + |||C| + |f|||_{L^{q/2}(B_{2r}(y))} r^{n(1-\frac{2}{q})}].$$

因为

$$q > n, \quad r \in (0, \frac{1}{2}), \quad ||f||_{L^{\frac{q}{2}}(B)} = 1$$

于是

$$\int_{B_r(y)} |D\log \bar{u}|^2 \leq C(\lambda, n) r^{n-2}$$

对上式用Holder不等式， 有

$$\int_{B_r(y)} |D\log \bar{u}| \leq C(\lambda, n) r^{n-1} := \bar{C} r^{n-1}.$$

局部估计
得整体估计

由John-Nirenberg引理(G-T: Th7.21)知:

$$\log \bar{u} \in BMO(B(x_0))$$

且存在$c(n) > 0$使得$\forall p_0 \in (0, \frac{c(n)}{\bar{C}}]$ 有

平均值

$$\int_{B(x_0)} e^{p_0 |\log \bar{u} - (\log \bar{u})_{B(x_0)}|} \leq \hat{C}$$

因此 $||\bar{u}^{p_0}||$

$$\int_{B(x_0)} e^{p_0 log\bar{u}} \int_{B(x_0)} e^{-p_0 log\bar{u}} = \int_{B(x_0)} e^{p_0[log\bar{u}-(log\bar{u})_{B(x_0)}]} \times \int_{B(x_0)} e^{p_0[(log\bar{u})_{B(x_0)}-p_0 log\bar{u}]} \leq \hat{C}^2.$$

这就证明了(3.27). 结合(3.26)有,

$$inf_{B_{\frac{1}{2}}}\bar{u} \geq C(\lambda, n, q, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)})(\int_B \bar{u}^{p_0})^{\frac{1}{p_0}}. \qquad (3.28)$$

Step 4. 现在取定$p_0 \in (0, \frac{n}{n-2})$. 如果$p \le p_0$, 则从(3.28)容易推出定理3.13的结论。 于是只要证明：$\forall p \in (p_0, \frac{n}{n-2})$, $\exists$ $C_3(\lambda, n, p, q, ||C||_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)})$ 和$\tau = c(n,p) \in (1,2)$使得

$$\Big(\int_B \bar{u}^{p_0}\Big)^{\frac{1}{p_0}} \ge C_3\Big(\int_{B_{\frac{\tau}{2}}} \bar{u}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{3.29}$$

取$\beta \in (-1,0)$, 从(2.23)出发, 与推导(3.24)一样可得

$$||\bar{u}||_{L^{(\beta+1)\alpha}(B_{r_2})} \leq [\frac{C}{|\beta||\beta+1|(r_1-r_2)}]^{\frac{2}{\beta+1}}||\bar{u}||_{L^{\beta+1}(B_{r_1})}. \quad (3.30)$$

在此式中再进一步取β满足$\beta+1=\frac{p}{\alpha}$, 则有

$$\bar{u} \in L^{p/\alpha}(B_{r_1}) \Rightarrow \bar{u} \in L^p(B_{r_2}).$$

如果$p_0 \geq \frac{P}{\alpha}$, 则由(3.30)知(3.29)成立。

下面设$p_0 < \frac{P}{\alpha}$. 这样存在正 整数m, 使得

$$p_0\alpha^{m-1} < \frac{p}{\alpha} \le p_0\alpha^m.$$

在(3.30)中取$\beta + 1 = p_0\alpha^{m-1}$, 并令

$$r_1 = r_m := \frac{1}{2} + 2^{-m} \qquad r_2 = r_{m-1},$$

于是有

$$
\begin{aligned}
||\bar{u}||_{L^{p_0\alpha^m}(B_{r_m})} &\leq [\frac{2^m C}{1-p_0\alpha^{m-1}}]^{\frac{2}{p_0\alpha^{m-1}}}||\bar{u}||_{L^{p_0\alpha^{m-1}}(B_{r_{m-1}})} \\
&\leq [\frac{\alpha 2^m C}{\alpha - p}]^{\frac{2}{p_0\alpha^{m-1}}}||\bar{u}||_{L^{p_0\alpha^{m-1}}(B_{r_{m-1}})}
\end{aligned}
$$

由此迭代， 即有

$$
||\bar{u}||_{L^{p_0\alpha^{m+1}}(B_{r_{m+1}})} \leq C||\bar{u}||_{L^{p_0}(B_{r_1})}
$$

显然此式推出要证的(3.29).