《微分方程1》第九讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年11月22日

Liouville 公式

Theorem

齐次方程组 $y' = A(x)y$ 的任意一个Wronsky 行列式$W(x)$ 可表为

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} trA(s)ds}, \quad \forall x \in J,$$

其中$trA(s)$ 表示矩阵$A(s)$ 的迹(trace)，即$tr(A) = tr(a_{ij}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$，其中$x_0 \in J$ 是任意一个固定点.

证：设$\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)$ 为方程组$y' = A(x)y$ 的n 个解，对应的解矩阵和Wronsky 行列式分别记作$\Phi(x) = [\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)]$，$W(x) = \det\Phi(x)$．以下证$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} A(s)ds}$．这等价于$W'(x) = tr[A(x)]W(x)$．为清晰计，我们证明当$n = 3$ 时，这个等式成立．当$n = 3$ 时，

$$W(x) = \det(\phi_{ij}) = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{vmatrix}.$$

根据行列式求导规则我们有

证明续1

$$W'(x) =$$

$$\begin{vmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \phi'_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \phi'_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi'_{31} & \phi'_{31} & \phi'_{33} \end{vmatrix}.$$

记上述三个行列式为$W_1(x)$, $W_2(x)$, $W_3(x)$. 由于$\Phi(x)$ 是解矩阵, 即$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$, 此即

$$\begin{bmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \phi'_{13} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \phi'_{23} \\ \phi'_{31} & \phi'_{31} & \phi'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{bmatrix}.$$

证明续2

由此得

$$(\phi'_{11},\phi'_{12},\phi'_{13})=\left(\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\phi_{k1},\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\phi_{k2},\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\phi_{k3}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}(\phi_{k1},\phi_{k2},\phi_{k3}).$$

将上式代入的第一个行列式$W_1(x)$ 得

$$W_1(x)=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\begin{vmatrix}\phi_{k1} & \phi_{k2} & \phi_{k3}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23}\\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33}\end{vmatrix}=a_{11}W(x).$$

证明续3

同理可证

$$W_2(x) = a_{22}(x)W(x), \quad W_3(x) = a_{33}(x)W(x).$$

这就证明了$W'(x) = \mathrm{tr}[A(x)]W(x)$. 从而Liouville 公式

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} A(s)ds}.$$

得证. $\square$

另证: 设$W(x)$ 是n 个解$\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)$ 所对应的Wronsky 行列式, 即$W(x)=\det\Phi(x)$, $\Phi(x)=[\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)]$.

情形一: 解$\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)$ 线性相关. 此时$W(x)\equiv 0$. 显然Liouville 公式成立.

情形二: 解$\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)$ 线性无关. 此时解矩阵$\Phi(x)$ 处处可逆. 记$B(x):=\Phi^{-1}(x)A(x)\Phi(x)$, 则$A(x)\Phi(x)=\Phi(x)B(x)$.

现考虑$W(x)$ 的导数. 关于行列式$W(x)$ 按列求导得

$$W'(x)=\sum_{j=1}^{n}\det[\cdots,\phi_j',\cdots],$$

这里$\cdots$ 表示解矩阵$\Phi(x)$ 其他各列, 除了第j 列外.

另一证明续1

由于$\Phi(x)$ 是解矩阵，故$\Phi'(x)=A(x)\Phi(x)=\Phi(x)B(x)$. 此即

$$(\phi_1',\phi_2',\cdots,\phi_n')=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

由此得$\phi_j'=\sum_{i=1}^n b_{ij}\phi_i$，这里$b_{ij}$ 代表矩阵B 的元素.

另一证明续2

于是

$$\det[\cdots,\phi_j',\cdots]=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\det[\cdots,\phi_i,\cdots]=b_{jj}W(x).$$

由此得$W'(x)=(b_{11}+\cdots+b_{nn})W(x)=[\mathrm{tr}B(x)]W(x)$. 注意到矩阵$A(x),B(x)$相似，故$\mathrm{tr}B(x)=\mathrm{tr}A(x)$. 这就证明了$W'(x)=[\mathrm{tr}A(x)]W(x)$. 证毕. $\square$

例: 考虑方程组 $y' = A(x)y$, 其中 $y \in \mathbb{R}^2$,

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{x^2+2x-1} & \frac{2(x+1)}{x^2+2x-1} \end{bmatrix}.$$

不难验证

$$\phi_1(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 \\ 2x \end{bmatrix}$$

是两个线性无关的解. 它们对应的Wronsky 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 2x - 1.$$

简单计算得

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds = \int_{x_0}^{x} \frac{2(s+1)ds}{s^2+2s-1} = \ln\frac{x^2+2x-1}{x_0^2+2x_0-1}.$$

由此得

$$e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds} = \frac{x^2+2x-1}{x_0^2+2x_0-1}.$$

这验证了Liouville公式

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds}.$$

注1：设$\Phi(x)$ 是方程组$y' = A(x)y$ 的一个解矩阵，则对于任何常数矩阵C，矩阵$\Phi(x)C$ 也是解矩阵. 这是因为

$$[\Phi(x)C]' = \Phi'(x)C = A(x)\Phi(x)C = A(x)[\Phi(x)C].$$

但是矩阵$C\Phi(x)$ 则不一定是解矩阵. 显然，当$\Phi(x)$ 是基本解矩阵，且常数矩阵C 可逆时，$\Phi(x)C$ 也是基本解矩阵.

注2：设$\Phi(x)$ 是方程组$y' = A(x)y$ 的一个基本解矩阵，即矩阵$\Phi(x)$ 的n 个列是n 个线性无关的解，则方程组$y' = A(x)y$ 的一般解可写作$y = \Phi(x)c$，其中$c \in \mathbb{R}^n$ 为任意常(列)向量.

考虑非线性齐次方程组$y' = A(x)y + b(x)$ 其中$A(x)$, $b(x)$ 在一个开区间J 上连续。假设$\Phi(x)$ 是对应齐次方程组$y' = A(x)y$ 的基本解矩阵。下面将利用常数变易法，用基本解矩阵$\Phi(x)$ 来表示非齐次方程组的一般解。假设非齐方程组$y' = A(x)y + b(x)$ 有解形如$y = \Phi(x)c(x)$，其中$c(x)$ 是待定的连续可微向量值函数。显然$y = \Phi(x)c(x)$ 是解

$$\Longleftrightarrow \Phi'(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = A(x)\Phi(x)c(x) + b(x),$$

$$\Longleftrightarrow A(x)\Phi(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = A(x)\Phi(x)c(x) + b(x)$$

$$\Longleftrightarrow c(x) = c_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

Theorem

非线性齐次方程组$y' = A(x)y + b(x)$ 的一般解可以表为

$$y = \Phi(x)c_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)b(s)ds, \quad (*)$$

其中$\Phi(x)$ 为对应齐次方程组$y' = A(x)y$ 的基本解矩阵，c_0 为n维常数向量. 上式(*)称为非齐方程组的通解公式.

Proof.

上述常数变易法的实施过程，可以看作定理的证明. $\square$

注1: 称由公式(*)给出的y 是非齐方程组$y' = A(x)y + b(x)$ 的一般解(或通解)有两个意思: 其一, 每个由式(*) 所给出的$y(x)$是解; 其二, 方程组的每个解均可表示(*) 的形式.

注2: 由式(*) 所给出的解满足初值条件$y(x_0) = c_0$.

注3: 当$n \geq 2$时, 尚不存在具有可操作性的方法, 用来求齐次方程组$y' = A(x)y$ 的基本解矩阵.

非齐次线性方程组解的结构

非齐线性方程组 $y' = A(x)y + b(x)$ 的通解公式

$$y = \Phi(x)c_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

同时给出了通解的结构，即

$$\boxed{\text{非齐方程组通解} = \text{齐次方程组通解} + \text{非齐次方程组特解}}$$

不难验证上述通解公式的第二部分，记作$\xi(x)$，即

$$\xi(x)=\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

是非齐次方程组的一个特解：

$$\xi'(x)=\Phi'(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)b(s)ds+\Phi(x)\Phi^{-1}(x)b(x)$$

$$=A(x)\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)b(s)ds+b(x)=A(x)\xi(x)+b(x).$$

Theorem

考虑常系数齐次线性方程组$y' = Ay$. 设λ_1 是矩阵A 的一个特征值, ξ_1 是对应的一个特征向量, 则$y = e^{\lambda_1 x}\xi_1$ 是一个解.

Proof.

证: 直接代入验证: $(e^{\lambda_1 x}\xi_1)' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}\xi_1$, $A(e^{\lambda_1 x}\xi_1) = e^{\lambda_1 x}A\xi_1$ $= \lambda_1 e^{\lambda_1 x}\xi_1$, 故$(e^{\lambda_1 x}\xi)' = A(e^{\lambda_1 x}\xi)$. 这表明$y = e^{\lambda_1 x}\xi_1$ 是方程组$y' = Ay$ 的一个解. 证毕. $\square$

Corollary

若矩阵$\mathbf{A}$ 的$\mathbf{n}$ 个特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异，且对应的特征向量为$\xi_1,\cdots,\xi_n$，则方程组$\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ 有基本解组$e^{\lambda_1 x}\xi_1,\cdots,e^{\lambda_n x}\xi_n$.

Proof.

根据上述定理可知，n 个向量值函数$e^{\lambda_1 x}\xi_1,\cdots,e^{\lambda_n x}\xi_n$ 均为解. 再由矩阵特征值理论可知特征向量$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 线性无关. 故向量$e^{\lambda_1 x}\xi_1,\cdots,e^{\lambda_n x}\xi_n$ 构成基本解组. □

例: 求常系数线性方程组$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 的通解, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

解: 先求矩阵$\mathbf{A}$ 的特征值. 简单计算得矩阵$\mathbf{A}$ 的特征多项式为$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$. 由此得特征值为$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. 解两个二阶线性代数方程组可得对应的特征向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

例子续

于是由定理知方程组有如下基本解组

$$\phi_1 = e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = e^{-2x}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

于是方程组$y' = Ay$ 的通解为$y = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$，其中$c_1, c_2$ 为任意实常数. 解答完毕.

Theorem

考虑线性齐次方程组$y' = A(x)y$，其中$A(x)$ 为n 阶实矩阵函数，在开区间J 上连续．若方程组有复函数解$y(x) = u(x) + iv(x)$，$x \in J$，则其实部和虚部函数$u(x)$ 和$v(x)$ 是方程组的两个实函数解．

证：根据$y(x) = u(x) + iv(x)$ 是解的假设可知$[u(x) + iv(x)]' = A(x)[u(x) + iv(x)]$．即$u'(x) + iv'(x) = A(x)u(x) + iA(x)v(x)$．比较两边实虚部得$u'(x) = A(x)u(x)$ 且$v'(x) = A(x)v(x)$．即$u(x)$ 和$v(x)$ 是方程组的两个实函数解．证毕． □

例子

例: 考虑方程组$y' = Ay$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -13 & -3 \end{bmatrix}.$$

矩阵A 的特征多项式为$|\lambda E - A| = \lambda^2 + 4$. 特征值$\lambda_{1,2} = \pm 2i$, 简单计算可求得$\lambda_1 = 2i$ 和$\lambda_2 = -2i$ 分别有如下的特征向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3+2i \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3-2i \end{bmatrix}.$$

由此得到方程组的一个复的基本解组$\phi_1(x) = e^{2ix}\xi_1$, $\bar{\phi}_1(x)$. 以下我们由这复基本解组求得一个实基本解组. 简单初等计算可将解$\phi_1(x)$ 表示为$\phi_1(x) = u(x) + iv(x)$, 其中

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \cos 2x - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \sin 2x,$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \sin 2x - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 2x.$$

不难验证实向量值函数$u(x)$, $v(x)$ 线性无关. 因此它们构成方程组的一个实的基本解组. 解答完毕. $\square$

Definition

设A_k 均为同阶方阵，称矩阵序列$\{A_k\}$ 收敛于矩阵A，如果$\|A_k - A\| \to 0,\ k \to +\infty$，这里$\|\cdot\|$ 记某个矩阵范数. 为确定计，往下我们取定矩阵范数为$\|B\| = \|(b_{ij})\| := \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|$.

注：(i)不难证明矩阵序列$A_k = [a_{ij}^{(k)}]$ 收敛于矩阵$A = [a_{ij}]$，当且仅当对任意$i, j = 1, \cdots, n$，极限$a_{ij}^{(k)} \to a_{ij},\ k \to +\infty$. 换言之，矩阵序列收敛，当且仅当每个元素构成的序列均收敛. (ii)关于上述取定的矩阵范数，易证对任意两个同阶方阵A, B，成立$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

Definition

设A_k 均为同阶矩阵，称矩阵级数$\sum_{k\geq 1} A_k$ 收敛于矩阵S，如果它的部分和$S_m = \sum_{k=1}^{m} A_k$ 作为矩阵序列收敛于某个矩阵S，即$\|S_m - S\| \to 0,\ m \to +\infty$.

Theorem

任给方阵$\mathbf{A}$，矩阵级数$\sum_{k\geq 0}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}=\mathbf{E}+\frac{\mathbf{A}}{1!}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathbf{A}^k}{k!}+\cdots$收敛.

Definition

对于任意方阵$\mathbf{A}$，定义矩阵$\mathbf{A}$ 的指数函数为

$$e^{\mathbf{A}}:=\sum_{k\geq 0}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}=\mathbf{E}+\frac{\mathbf{A}}{1!}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathbf{A}^k}{k!}+\cdots.$$

证: 回忆对于任意两个同阶方阵A, B, 有$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. 由此我们可以进一步得到对任意正整数k, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. 于是对于矩阵级数的一般项有范数估计$\frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. 记$\alpha = \|A\|$, 则收敛的数项级数$\sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^k}{k!}$是矩阵级数$\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$的优级数. 由此不难导出这个矩阵级数的收敛性. 细节略. □

注: 关于一般矩阵函数可参见甘特马赫(苏联)《矩阵论》(上), 哈工大出版社, 2013, 第五章.

Theorem

矩阵指数函数e^A 有如下性质

1. 若$AB = BA$, 则$e^{A+B} = e^A e^B$;
2. 对任何方阵, e^A 可逆, 且$[e^A]^{-1} = e^{-A}$;
3. 对任意矩阵A 和任意可逆矩阵P, $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.

证 (1): 根据假设$AB = BA$, 可以用归纳法证明

$$(A+B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + \cdots + B^k$$

$$= \sum_{i+j=k} C_k^j A^i B^j, \quad \forall k \geq 0.$$

于是

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{k!} C_k^j A^i B^j$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!}.$$

证明续1

回忆关于无穷级数乘积的两个结论

(i) **Cauchy**定理：若级数$\sum_{i\geq 0} a_i$ 和$\sum_{j\geq 0} b_j$ 均绝对收敛，其和分别记作a 和b，那么这两个级数的乘积，无论按何种方式相加所得到的级数也绝对收敛，并且它的和为ab.

(ii) **Mertens**定理：若级数$\sum_{i\geq 0} a_i$ 和$\sum_{j\geq 0} b_j$ 均收敛，其和分别记作a 和b，还假设其中之一绝对收敛，那么这两个级数乘积的Cauchy 和$\sum_{k\geq 0}\sum_{i+j=k} a_ib_j$ 也收敛，且收敛于ab.

证明续2

可以期待用相同的方法证明，这两个结论对于矩阵级数也同样成立. 因此

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{i+j=k}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}=\left(\sum_{i\geq 0}\frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j\geq 0}\frac{B^j}{j!}\right)=e^Ae^B.$$

这就证明了结论(1).

证(2): 由于A 与$-A$ 可交换，故由(1)知$E=e^{A-A}=e^Ae^{-A}$.

这表明e^A 可逆且$[e^A]^{-1}=e^{-A}$.

证(3): 对任意阵A 和可逆阵P, $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$, $\forall k \geq 0$.

因此

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{P(A^k)P^{-1}}{k!} = Pe^AP^{-1}.$$

证毕. $\square$

Theorem

矩阵函数e^{Ax} 是齐次线性方程组$y' = Ay$ 的基本解矩阵.

<u>证明大意</u>：由定义知

$$e^{Ax} = E + \frac{Ax}{1!} + \frac{A^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{A^kx^k}{k!} + \cdots.$$

对上述级数逐项求导得

$$[e^{Ax}]' = [E]' + \left[\frac{Ax}{1!}\right]' + \left[\frac{A^2x^2}{2!}\right]' + \cdots + \left[\frac{A^kx^k}{k!}\right]' + \cdots$$

$$= A + \frac{A^2x}{1!} + \cdots + \frac{A^kx^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots$$

$$= A\left(E + \frac{Ax}{1!} + \cdots + \frac{A^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right) = Ae^{Ax}.$$

这表明e^{Ax} 是解矩阵. 又由于$e^{Ax}\Big|_{x=0} = E$. 因此e^{Ax} 是齐次线性方程组$y' = Ay$ 的基本解矩阵. 证毕. □

注: 上述证明默认了矩阵函数e^{Ax} 的可微性, 以及逐项求导得合法性. 虽然尚未严格证明, 但是这些结论的成立应该是意料之中的事情. 建立这些结论的过程与数项函数的相应结论基本相同.

Corollary

非齐次线性方程组$y' = Ay + b(x)$ 满足初值条件$y(x_0) = y_0$ 的唯一解可表示为

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-As} b(s)ds\right),$$

或写作

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)} b(s)ds.$$

定理 [Putzer, Amer. Math. Monthly 73, 1966, page 2-7]: 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为n 阶方阵A 的n 个特征值(不必互异, 排序任意), 则矩阵函数e^{Ax} 可以有如下的有限表示

$$e^{Ax} = p_1(x)M_0 + p_2(x)M_1 + \cdots + p_n(x)M_{n-1},$$

其中矩阵M_j 如下确定

$$\begin{aligned} M_0 &= E, \\ M_1 &= A - \lambda_1 E, \\ M_2 &= (A - \lambda_2 E)(A - \lambda_1 E), \\ &\vdots \\ M_{n-1} &= \prod_{j=1}^{n-1}(A - \lambda_j E), \end{aligned}$$

数量函数$p_j(x)$ 如下确定

$$
\begin{aligned}
p_1' &= \lambda_1 p_1, & p_1(0) &= 1, \\
p_2' &= \lambda_2 p_2 + p_1(x), & p_2(0) &= 0, \\
&\vdots & &\vdots \\
p_n' &= \lambda_n p_n + p_{n-1}(x), & p_{n-1}(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

注: 矩阵M_j 是若干个矩阵的乘积. 由于这些矩阵特殊性, 故它们的乘积次序可交换.

数量函数$p_j(x)$ 还可以表示为如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & 1 \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},$$

函数$p_j(x)$ 的矩阵表示续

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

例：求e^{Ax}，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

解：Step 1. 先求A 的特征值. 计算得$|\lambda E-A|=\lambda^2-4\lambda+4$
$=(\lambda-2)^2$. 故特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，二重特征值.

Step 2. 求矩阵M_j.

$$M_1=A-\lambda_1E=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Step 3. 求函数$p_j(x)$. 解初值问题$p_1' = 2p_1$, $p_1(0) = 1$, 得$p_1(x) = e^{2x}$. 再求解初值问题$p_2' = 2p_2 + e^{2x}$, $p_2(0) = 0$ 得$p_2(x) = xe^{2x}$. 于是所求得矩阵函数为

$$
\begin{aligned}
e^{Ax} &= p_1(x)M_0 + p_2(x)M_1 \\
&= e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + xe^{2x}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

解答完毕.

Putzer公式的来历

观察公式$e^{Ax} = p_1(x)M_0 + p_2(x)M_1 + \cdots + p_n(x)M_{n-1}$，我们可以推测它的来历. 回忆矩阵理论中Cayley-Hamilton定理：每个方阵A 是其特征多项式的根. 也就是说，若记$L(\lambda)$ 为矩阵A 的特征多项式，即$L(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n$，则$L(A) = 0$，即$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n E = 0$. 由此可见$A^n$ 可以表示为矩阵$E, A, \cdots, A^{n-1}$ 线性组合. 进一步有每个A^k 均可以表示为这些矩阵的线性组合，$\forall k > n$. 因此有理由期待指数函数e^{Ax} 也可以表示为这些矩阵的线性组合. 进而可以表示为矩阵$M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ 的线性组合，因为不难验证矩阵$I, A, \cdots, A^{n-1}$ 和矩阵$M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ 可以相互线性表示.

证: 以下证明Putzer 公式, 即

$$e^{Ax} = p_1(x)M_0 + p_2(x)M_1 + \cdots + p_n(x)M_{n-1}.$$

记$\Phi(x)$ 为上式右边的矩阵. 即要证$e^{Ax} = \Phi(x)$. 按照定义可知$\Phi(0) = E$. 故只要证$\Phi(x)$ 是方程组$y' = Ay$ 的解矩阵即可, 即$\Phi'(x) = A\Phi(x)$. 为了清晰计, 我们证明$n = 4$ 时的结论. 此时$\Phi(x) = p_1M_0 + p_2M_1 + p_3M_2 + p_4M_3$. 求导得

$$\Phi'(x) = p_1'M_0 + p_2'M_1 + p_3'M_2 + p_4'M_3$$

$$= \lambda_1p_1M_0 + (\lambda_2p_2 + p_1)M_1 + (\lambda_3p_3 + p_2)M_2 + (\lambda_4p_4 + p_3)M_3$$

证明续1

$$= \lambda_1 p_1 M_0 + \lambda_2 p_2 M_1 + \lambda_3 p_3 M_2 + \lambda_4 p_4 M_3$$

$$+ p_1 M_1 + p_2 M_2 + p_3 M_3.$$

再考虑$A\Phi(x)$:

$$A\Phi(x) = A(p_1 M_0 + p_2 M_1 + p_3 M_2 + p_4 M_3)$$

$$= p_1 A M_0 + p_2 A M_1 + p_3 A M_2 + p_4 A M_3. \quad (*)$$

由定义

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E} \\ \mathbf{M}_2 = (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_3 = (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E})\mathbf{M}_2 \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_1 + \lambda_1 \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{A}\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 + \lambda_2 \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_3 + \lambda_3 \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_4 + \lambda_4 \mathbf{M}_3 \end{cases}$$

证明续2

这里$M_4 := (A - \lambda_4 E)M_3$. 由Cayley-Hamilton定理知$M_4 = 0$.

将上述各AM_j 代入式(*) 得

$$A\Phi(x) = \lambda_1 p_1 M_0 + \lambda_2 p_2 M_1 + \lambda_3 p_3 M_2 + \lambda_4 p_4 M_3$$

$$+p_1 M_1 + p_2 M_2 + p_3 M_3 = \Phi'(x).$$

即$\Phi(x)$ 是解矩阵. 证毕. □

定理: 设A 为n 阶方阵且$A = PJP^{-1}$, 其中P 为非奇矩阵, J 为A 的Jordan 标准形, 即

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}, \quad J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix},$$

这里λ_j 是A 的特征值, 则$e^{Ax} = Pe^{Jx}P^{-1}$,

$$e^{Jx} = \begin{bmatrix} e^{J_1x} & & & \\ & e^{J_2x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_rx} \end{bmatrix},$$

$$e^{J_jx} = e^{\lambda_jx} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{m_j\times m_j}.$$

例一

Example (1)

矩阵$\mathbf{A}=\mathbf{J}_1$ 为四阶, $n=4$. 此时$e^{J_1 x}$ 的表达式如下

$$e^{J_1 x}=e^{\lambda_1 x}\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} \\ & 1 & x & \frac{x^2}{2!} \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

例二

Example (2)

矩阵A 可对角化, 即A 的Jordan 标准形J 是对角矩阵. 此即$r = n$, $m_j = 1$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 此时有

$$e^{Ax} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & \\ & e^{\lambda_1 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

证: 矩阵指数函数性质知, 当$A = PJP^{-1}$ 时, $e^{Ax} = Pe^{Jx}P^{-1}$.

由定义知$e^{Jx} = \sum_{k\geq 0} \frac{J^k x^k}{k!}$, 而

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^k \end{bmatrix}.$$

证明续1

于是

$$e^{Jx}=\sum_{k\geq 0}\frac{J^k x^k}{k!}=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix}\frac{J_1^k x^k}{k!} & & & \\ & \frac{J_2^k x^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{J_r^k x^k}{k!}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{J_1 x} & & & \\ & e^{J_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r x}\end{bmatrix}.$$

证明续2

考虑$e^{J_1 x}$. 将J_1 写作

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 E_1 + N_1,$$

这里E_1 记m_1 阶单位矩阵, N_1 记如下m_1 阶幂零矩阵,

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

证明续3

于是

$$e^{J_1 x} = e^{\lambda_1 E_1 x + N_1 x} = e^{\lambda_1 E_1 x} e^{N_1 x} \quad 且 \quad e^{\lambda_1 E_1 x} = e^{\lambda_1 x} E_1.$$

进一步

$$e^{N_1 x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N_1^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{N_1^k x^k}{k!}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

因此

$$e^{J_1 x} = e^{\lambda_1 x}\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

证明续5

同理可得

$$e^{J_j x} = e^{\lambda_j x}\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

其中$j=2,\cdots,r$. 定理得证. $\square$

Theorem

当实方阵A 的每个特征值均有负实部时，常系数线性齐次方程组$y' = Ay$ 的每个解$y(x) \to 0$, as $x \to +\infty$. 此时称方程组$y' = Ay$ 具有正向渐近稳定性.

证：注意方程$y' = Ay$ 每个解$y(x)$ 均可表示为$y = e^{Ax}y_0$, 其中$y_0 = y(0)$. 故只要证$e^{Ax} \to 0$, as $x \to +\infty$. 由上述Jordan形定理知$e^{Ax} = Pe^{Jx}P^{-1}$, $e^{Jx} = \mathrm{diag}(e^{J_1x}, \cdots, e^{J_rx})$, 其中P 为可逆矩阵. 考虑每个块$e^{J_jx}$, $j = 1, 2, \cdots, r$. 它具有如下形式

$$e^{J_j x} = e^{\lambda_j x}\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

不难看出，当矩阵A 的每个特征值均有负实部，$e^{J_j x}$ 的每个元素均趋向于零，当$x \to +\infty$ 时. 故$e^{J_j x} \to 0$, as $x \to +\infty$. 于是$e^{Ax} \to 0$, as $x \to +\infty$. 定理得证. □

Definition

实方阵称为称为稳定的，如果它的每个特征值均有负实部.

Theorem

若实方阵$\mathbf{A}$ 是稳定的，则

(i) $\|e^{Ax}\| \leq Ce^{-\delta x}$, $\forall x \in [0, +\infty)$，其中$C > 0$ 为一个正常数;

(ii) 方程组 $y' = Ay$ 的每个解$y(x)$ 满足$\|y(x)\| \leq Me^{-\delta x}$, $\forall x \in [0, +\infty)$，其中$M > 0$ 为一个正常数. 换言之，每个解均以指数衰减的方式趋向于零.

证：根据上述Jordan 表示定理可知$e^{Ax}=Pe^{Jx}P^{-1}$，P 为非奇矩阵，并且$e^{Jx}=\mathrm{diag}(e^{J_1x},\cdots,e^{J_rx})$．进一步$e^{J_jx}=e^{\lambda_jx}L_j(x)$，

$$L_j(x)=\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

这里$\lambda_j, j=1,\cdots,r$ 为矩阵A 的特征值，A 有r 个Jordan 块．

设$\lambda_j=a_j+ib_j$，其中a_j, b_j 分别是特征值λ_j 的实部和虚部．

根据假设 A 是稳定的，即 $a_j < 0, j = 1, \cdots, r$. 考虑$e^{J_1 x}$.

$$e^{J_1 x} = e^{\lambda_1 x} L_1(x) = e^{\frac{a_1}{2} x} e^{\frac{a_1}{2} x} e^{i b_1 x} L_1(x).$$

由于$a_1 < 0$, 矩阵$L_1(x)$ 的元素为多项式，故

$$e^{\frac{a_1}{2} x} e^{i b_1 x} L_1(x) \to 0, \quad x \to +\infty.$$

由此可知存在$C_1 > 0$, 使得

$$\| e^{\frac{a_1}{2} x} e^{i b_1 x} L_1(x) \| \le C_1, \quad \forall x \ge 0.$$

于是

$$\| e^{J_1 x} \| = e^{\frac{a_1}{2} x} \| e^{\frac{a_1}{2} x} e^{i b_1 x} L_1(x) \| \le C_1 e^{\frac{a_1}{2} x}, \quad \forall x \ge 0.$$

同理可证存在正常数$C_j>0$, 使得

$$\|e^{J_jx}\|\le C_je^{\frac{a_j}{2}x},\quad \forall x\ge 0.$$

$j=2,\cdots,r$. 记$-\delta:=\max\{\frac{a_1}{2},\cdots,\frac{a_r}{2}\}$, 则

$$\|e^{Ax}\|=\|Pe^{Jx}P^{-1}\|\le\|P\|\|e^{Jx}\|\|P^{-1}\|$$

$$\le\|P\|\|P^{-1}\|\Big(\|e^{J_1x}\|+\cdots+\|e^{J_rx}\|\Big)$$

$$\le\|P\|\|P^{-1}\|(C_1+\cdots+C_r)e^{-\delta x}=Ce^{-\delta x},\quad \forall x\ge 0,$$

这里$C=\|P\|\|P^{-1}\|(C_1+\cdots+C_r)$. 定理得证. $\square$

习题一：寻找两个二阶矩阵A, B 使得$e^{A+B} \neq e^A e^B$.

习题二：利用Putzer 算法计算e^{Ax}，其中

$$(i).\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad (ii).\ A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

习题三：考虑方程组$y' = A(x)y$，这里$A(x)$ 在开区间J 上连续. 若$A(u)A(v) = A(v)A(u)$，$\forall u, v \in J$，证明$e^{\hat{A}(x)}$ 是方程组$y' = A(x)y$ 的基本解矩阵，这里$\hat{A}(x) = \int_{x_0}^{x} A(s)ds$.

习题四：设

$$\mathbf{A}(x)=\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 4x \end{bmatrix},\ \hat{\mathbf{A}}(x):=\int_0^x \mathbf{A}(s)ds.$$

证明

$$e^{\hat{\mathbf{A}}(x)}=\begin{bmatrix} e^{x^2} & \frac{e^{2x^2}-e^{x^2}}{x} \\ 0 & e^{2x^2} \end{bmatrix}.$$

进一步说明$e^{\hat{\mathbf{A}}(x)}$ 不是$y'=\mathbf{A}(x)y$ 的解矩阵.

作业续2

<u>习题五</u>：考虑线性周期方程组$y' = A(x)x + b(x)$ 其中系数矩阵$A(x)$ 和向量$b(x)$ 均为周期连续的，它们的最小正周期为$\omega > 0$. (1) 假设$\phi(x)$ 是方程组的一个解，证明$\phi(x)$ 是ω 周期的，当且仅当$\phi(\omega) = \phi(0)$. (2) 设$\Phi(x)$ 为对应齐次系统$y' = A(x)y$ 的基本解矩阵. 证明(i) $\Phi(x+\omega)$ 也是基本解矩阵. (ii) 存在矩阵C，使得$\Phi(x+\omega) = \Phi(x)C$. 矩阵$C$ 称为基本解矩阵$\Phi(x)$ 所确定的转移矩阵. (iii) 记C_1 为另一个基本解矩阵$\Phi_1(x)$ 所确定的转移矩阵，则矩阵C 和C_1 相似，即存在非奇方阵P，使得$C_1 = P^{-1}CP$. (iv) 周期线性方程组 $y' = A(x)x + b(x)$ 有唯一一个ω 周期解，当且仅当1 不是矩阵C 的特征值.

习题六：菲利波夫习题880.

习题七：考虑一维线性周期方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里$p(x), q(x)$ 均为周期连续的，它们的最小周期均为ω. 假设方程有一个解在$[0, +\infty)$ 上有界，证明方程存在一个ω 周期解. (注：这道习题与本次课的内容无直接关系，可看作如下选作题的特殊情形.)

选作题：考虑线性周期方程组$y' = A(x)x + b(x)$ 其中系数矩阵$A(x)$ 和向量$b(x)$ 均为周期连续的，它们的最小正周期为$\omega > 0$. 证明若方程组存在一个解在$[0, +\infty)$ 上有界，则方程组存在一个ω 周期解.