中国科学技术大学期末考试题

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　　得分：______

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：___________

（2018 年 1 月 9 日，半开卷）

一、(20 分) 判断是非与填空：

(1)（每空 2 分）设 $X=\{X_n, \geq 0\}$ 为一不可约、有限（N 个）状态的马氏链，且其转移概率矩阵 P 为双随机的（行和与列和均为 1），则：

$a.$ X 的平稳分布不一定存在（　　）；　　$b.$ X 的平稳分布存在但不必唯一（　　）；

$c.$ X 的平稳分布为 $(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N})$（　　）；　$d.$ X 的极限分布为：$(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N})$（　　）。

(2)（每空 3 分）设公路上某观察站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别是强度为 2、3 和 5（辆/分钟）的泊松过程。则：

$a.$ 第一辆车到达的平均时间为(　　　)；　$b.$ 红车首先到达的概率为（　　　）；

$c.$ 在第一辆红车到达之前恰好到达 k 辆非红车的概率为（　　　）。

(3)（3 分）有关某种商品的销售状况共有 24 个季度的连续数据（1—畅销，0—滞销）：

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0,

1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1,

若该商品销售状况满足齐次马氏链，则据以上数据可估计出该马氏链的转移概率矩阵 P 为（　　　　）。

二、(15 分) 设到达某计数器的脉冲数 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是一速率为 λ 的泊松过程，每个脉冲被记录的概率均为 p，且各脉冲是否被记录是相互独立的。现以 $N_1(t)$ 表示被记录的脉冲数，试求 $N_1(t)$ 的矩母函数 $g_{N_1(t)}(v)$ 以及 $EN_1(t)$, $Var[N_1(t)]$ 和 $Cov(N_1(s), N_1(t))$。

三、(20 分) 设马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(1) 设 $X_0=3$，试求：$\pi_i(1)=P\{X_1=i\}$, $\pi_i(2)=P\{X_2=i\}$, $(i=1,2,3)$，并求：$E(X_1)$ 和 $E(X_2)$；

（2）试求该马氏链的极限分布：$\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$，$(i, j = 1, 2, 3)$；

（3）当初始分布 $\pi_i(0)\ (i=1,2,3)$ 为什么分布时，该马氏链为严格平稳过程？并求此时的 $E(X_n)$。

四、（15 分）把一些球逐个随机地放到 a 个格子中去，若 n 个球放进了 k 个格子，则称系统在时刻 n 的状态为 k。试用一马氏链 $\{X_n, n \ge 0\}$ 描述此系统，并且

（1）写出该马氏链的转移概率矩阵 P，并讨论其状态分类；

（2）证明过程由状态 $k\ (0 \le k \le a-1)$ 出发，必然进入状态 a；

（3）试求放满 a 个格子的平均时间（假定 $X_0 = 0$）。

五、（15 分） 设有随机过程 $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$，其中 Θ 服从均匀分布 $U(0, 2\pi)$，A 服从瑞利分布：

$$A \sim f(x) = \tfrac{x}{\sigma^2}\exp(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}), (x > 0)$$

且 A 与 Θ 独立，

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求 $\{X(t),\ t \in R\}$ 的功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、（15 分）在下列四个关于 ω 的函数中：

$$S_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2}，\ S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 64}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100},$$

$$S_3(\omega) = \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}，\ S_4(\omega) = \frac{\omega^2 \cos\omega}{\omega^4 + 1}$$

（1）哪一个可以作为一个平稳过程 $\{X(t),\ t \in \mathrm{R}\}$（均值为 0）的功率谱密度函数？并求其所对应的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）该平稳过程的均值是否具有遍历性？为什么？

（完）