中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

图论习题课

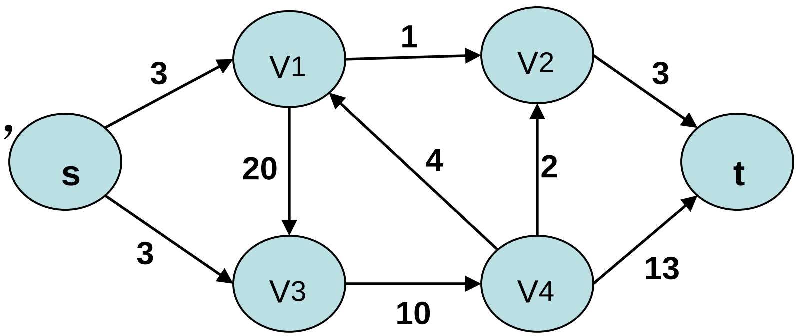
SA17011095 张强
计算机科学与技术
2017-12-14

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

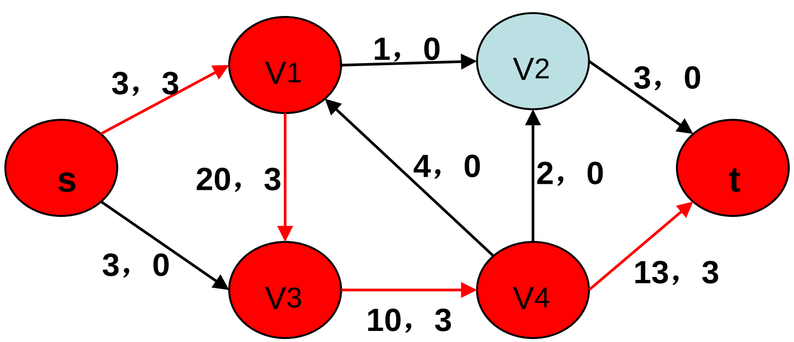
第8章作业

第8章：2题

- 8.2 求图8.16中的最大流，其中s是源，t是汇，边上标的是c(e).
  - **解：**
    利用2F算法(P152)求解，可得到最大流为6，流函数有多种形式。



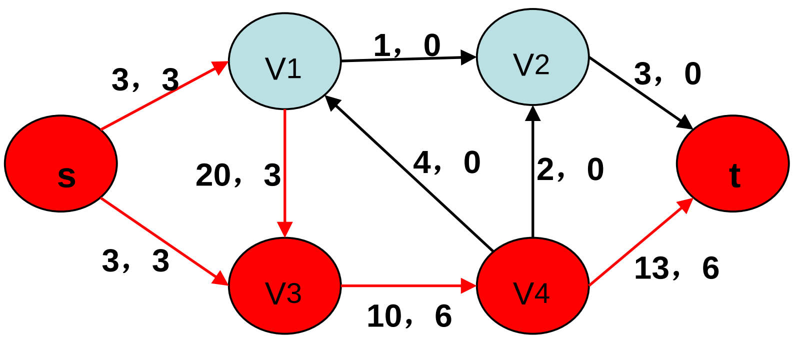
- 1)将S标志(#),其他顶未标志，$f(e) \equiv 0$
- 2)存在边$e = sv_1$，s已标志，v_1未标志，且$f(e) < c(e)$，将v_1标志为s.
  存在边$e = v_1v_3$，v_1已标志，v_3未标志，且$f(e) < c(e)$，将v_3标志为v_1.
  存在边$e = v_3v_4$，v_3已标志，v_4未标志，且$f(e) < c(e)$，将v_4标志为v_3.
  存在边$e = v_4t$，v_4已标志，t未标志，且$f(e) < c(e)$，将t标志为v_4.
- 3)此时t已标志，有可增载轨P=s$e_1v_1e_2v_3e_3v_4e_4t$，取$\Delta = \min_{1 \le i \le 4}\{\Delta(e_i)\} = 3$
- 4)则$\overline{f}(e) = \begin{cases} f(e) & e \notin E(P) \\ f(e)+\Delta & e\text{是P正向边} \\ f(e)-\Delta & e\text{是P反向边} \end{cases}$
- 5)则新的流函数如图：



第8章： 2题

转1)重复：

- 1)将S标志(#)， $f(e) \equiv 0$
- 2)存在边$e = sv_3$，s已标志，v_3未标志，且$f(e) < c(e)$， 将v_3标志为s.
  存在边$e = v_3v_4$，v_3已标志，v_4未标志，且$f(e) < c(e)$， 将v_4标志为v_3.
  存在边$e = v_4t$，v_4已标志，t未标志，且$f(e) < c(e)$， 将t标志为v_4.
- 3)此时t已标志，有可增载轨P=s$e_1v_3e_2v_4e_3t$，取Δ= $\min_{1\le i\le 3}\{\Delta(e_i)\} = 3$
- 4)则$\overline{f}(e) = \begin{cases} f(e) & e \notin E(P) \\ f(e)+\Delta & e\text{是P正向边} \\ f(e)-\Delta & e\text{是P反向边} \end{cases}$
- 5)则新的流函数如图：



转1)重复：

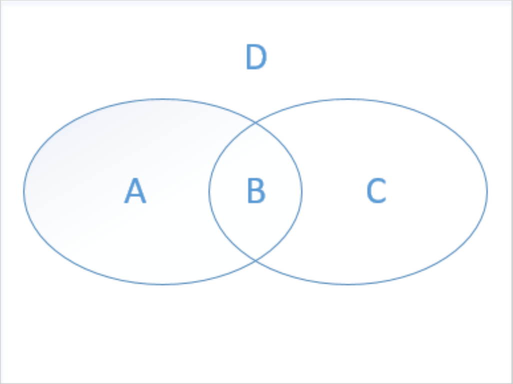
- 1)将S标志(#)， $f(e) \equiv 0$
- 此时已不能再标志，则图中流函数为最大流， 最大流为6.

第8章：3题

- 8.3 若$(S,\overline{S})$与$(T,\overline{T})$为网络N(G,s,t,c(e))的最小截，证明$(S\cup T,\overline{S\cup T})$与$(S\cap T,\overline{S\cap T})$也是最小截
  - 证明：

将网络N的顶点分为不相交的四个集合A,B,C,D，其中S=AUB， T=CUB，则

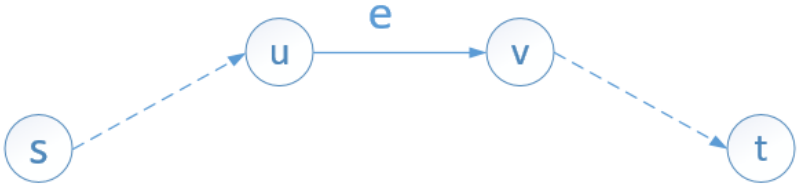
- ➢ 截量C(S)由A->D,A->C,B->D,B->C的边容量相加得到
- ➢ 截量C(T)由C->D,C->A,B->D,B->A的边容量相加得到
- ➢ 截量C(S∪T)由A->D,B->D,C->D的边容量相加得到
- ➢ 截量C(S∩T)由B->A,B->D,B->C的边容量相加得到



- 可见C(S∪T) + C(S∩T)比C(S) + C(T)少了A->C和C->A的边的容量，
- 故有**C(S∪T) + C(S∩T) ≤ C(S) + C(T)**
- 由于$(S,\overline{S})$与$(T,\overline{T})$为网络N的最小截，故有
- **C(S) ≤ C(S∪T)**， **C(T) ≤ C(S∩T)**
- 结合上式可得到**C(S) = C(S∪T) = C(T) = C(S∩T)**，得证

第8章：6题

- 8.6 写出一算法确定其容量c(e)增大时，N(G，s，t，c(e))中的最大流量亦增大的边，这种边一定有吗？
  - **解：**
  - 分析2F算法的求解过程，可知所求的边e=uv为满足f(e)=c(e)的边，且存在s->u和v->t的路径，其上的边都有剩余容量，据此可提出如下算法：



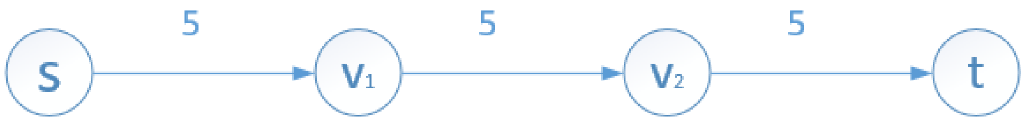
①利用2F算法求出网络N的最大流

②从s出发深度优先搜索有剩余容量的边，并将访问过的点标记红色

③从t出发反向深度优先搜索有剩余容量的边，并将访问过的点标记为蓝色

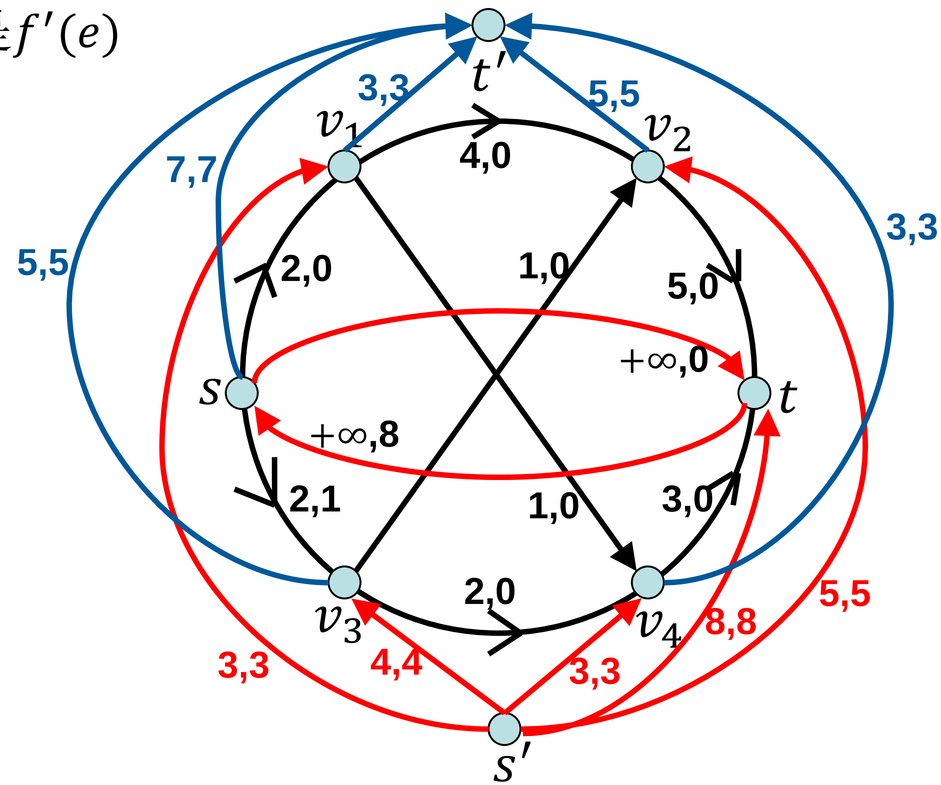
④对所有满足f(e)=c(e)的边e=uv，判断其u，v是否分别为红色和蓝色，是的话输出该边

- **这种边不一定有，如下图所示的情况**



第8章：8题

- **8.8a** 图8.18网络有没有可行流？对于有可行流的网络，求出其最大流函数。对于无可行流的网络，选择最少几条边，调整其上的容量上、下界b(e)或c(e)，使其存在可行流。
- 解：(a)
- 判断有上下界的网络是否有可行流，首先构作伴随网络(P157)，如图：
- 边上标的第一个数是$c'(e)$, 第二个数是$f'(e)$



- 从伴随网络可看到：
- 出s'的边e皆满足$f'(e)$=$c'(e)$
- 所以由定理8.5知网络(a)上有可行流
- $f(e)$=$f'(e)+b(e)$

第8章：8题

- 所以可得图1中的流$f(e)$，边上标的第一个数是$c(e)$，第二个数是$f(e)$
- 用2F算法把图1中的流$f(e)$放大成图2中的最大流，
- 其最大流量为：F=7+4=11

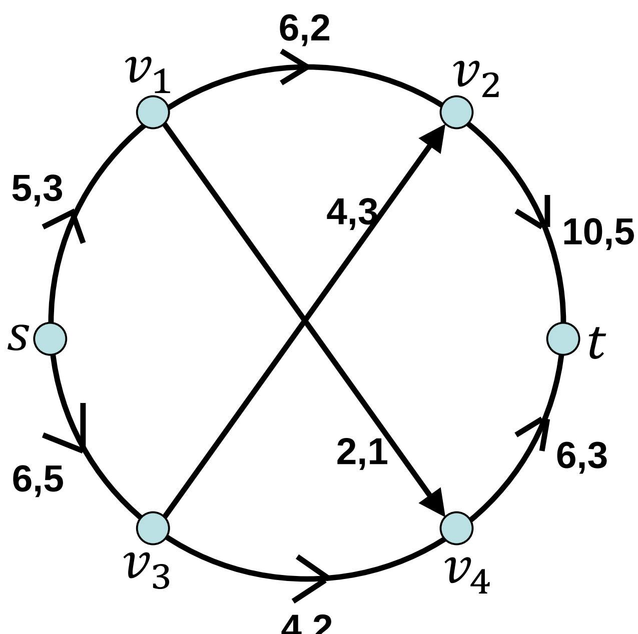


图1

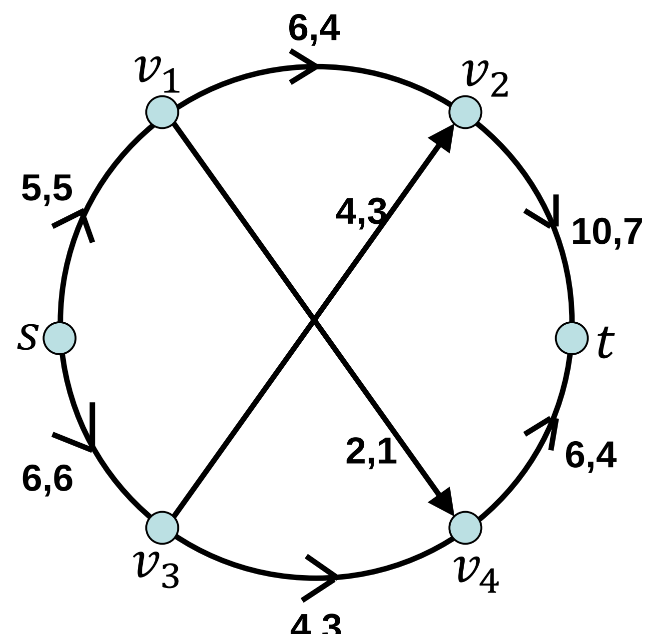


图2

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第9章作业

第9章：2题

- 9.2 v是图G的割顶的充分必要条件是存在V(G)-{v}的一个划分，即V-{v}=$V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$,使得对任取的$u \in V_1$ $\omega \in V_2$, v在每条由u到ω的轨上

- 证明：必要性⇒
- **若v是图G的割顶**，则将v删掉，图G形成w个连通片。设第一个连通片的顶点集为$V_1 = V(w_1)$, 其他连通片的顶点集为$V_2 = V(G - \mathrm{v} - w_1)$, 满足$V - \{v\} = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$。又因为$w_1$与其余部分均不连通，且在删除v之前图G连通，故可知：对于$\forall u \in V_1, w \in V_2$, 在去掉v之后不连通，所以v在$u$到$w$的每一条轨道上。
- 证明：充分性⇐
- **若对于$\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}_2$, v在$\boldsymbol{u}$到$\boldsymbol{w}$的任一条轨上**，故当删掉v之后，$u$到$w$无法连通，因此$V_1, V_2$不连通，即删掉v后图G由连通变为不连通，故v是图G的割顶。

第9章：6题

- 9.6 无割顶的图叫做块，证明下述陈述是否是G为块的充分必要条件
- (5) G的任一顶与G的任一边共圈
- **证明：G是块⇒(5) 必要性，反证法**

若存在一边$e = uv$ 与点w不共圈

不妨设任意一条从w开始经过边e的轨道P,有P: w ->u->v

存在顶$n_0 \in P$ 且$n_0 \neq u, v$，w与v之间的任一轨均经过n_0

否则∃轨$P_2(w,v)$, P_2与P完全无公共点，则

存在圈$wPvP_2w$，与边$e = uv$与点w不共圈矛盾

所以存在顶点$n_0 \in P$

此时若删除n_0，w与v便不连通，与G为块矛盾

故假设不成立，所以得证

第9章：6题

- (5) G的任一顶与G的任一边共圈
- **证明：(5) ⇒G是块　充分性**

  $\forall e \in E(G), \forall w \in V(G)$，$e = uv$

  因为e与w共圈，所以w与边e关联的顶u, v共圈

  因为w, u, v这三顶的任意性

  从中任意删掉一顶，图G仍然连通

  所以，G是块

第9章：6题

- (9) G中的任三个顶，存在连接其中两顶的轨，第三顶不在此轨上
- **证明：G是块 ⇒(9) 必要性**

  G是块，对$\forall u, v, w \in V(G)$

  设轨道$p_1(u,v), p_2(u,v)$为连接u, v的两条内部不相交的轨

  第三顶w只能在p_1或p_2上，不能同时在p_1和p_2上

  若同时在$p_1 p_2$上，则内部相交，矛盾

  故得证。

第9章：6题

- (9) G中的任三个顶，存在连接其中两顶的轨，第三顶不在此轨上
- **证明：(9) ⇒G是块　充分性**

  $\forall u, v, w \in V(G)$

  存在连接其中u, v两顶的轨$p(u, v)$,第三顶w不在此轨上，

  则$\mathrm{G} - \{w\}$仍连通

  又由于u, v, w三个顶点的任意性

  所以G是块

- 补1 证明：若G是简单图且$\sigma \geq$ v-2, 则K=σ
  - **证明：**
  - 1)若$\delta = v - 1$，则G为完全图，则$K(G) = |V(G)| - 1 = v - 1 = \sigma$
  - 2)若$\delta = v - 2$，设$d(v_0) = \delta$，则存在v_i，使得$d(v_i) = \delta$

  因为$\delta = v - 2$，对于v_0，只与v_i不相邻，与剩余其他顶点都相邻。

  对于v_i，只与v_0不相邻，与剩余其他顶点都相邻。

  而剩余其他顶点v：或者$d(v) = v - 1$,与其他顶都相邻；

  或者情况与v_0相同,只与一点不相邻。

  则$n(v_0, v_i) = v - 2$, 且$\min\{n(u, v)\} = v - 2$.

  则$K(G) = \min\{n(u, v)\} = v - 2 = \delta$.

  得证。

- **补2 证明：** 图G是2边连通的, 当且仅当任两顶点至少由2条边不重的轨相连（不能使用menger定理及其推论）。

证明：

⇐充分性

对$\forall\, u,v\in V(G)$,设u,v由两条边不重的轨$p_1(u,v)$和$p_2(u,v)$相连，从中去掉任意一边后，u,v之间仍至少有一条轨相连，即G仍连通，所以$k'(G)\geq 2$
所以图G为2边连通.

⇒必要性

G是2边连通的，所以$\forall u,v\in V(G)$， u,v之间至少有2条轨相连，不妨设为$p_1(u,v),p_2(u,v)$，假设这两轨有公共边，则去掉公共边后u,v不再连通，即$k'(G)=1$，与G为2边连通图矛盾。
故 u,v之间至少有2条边不重的轨相连.

第10章作业

第10章：2题

- 10.2 证明$|\varphi(G)|=2^{v-1}$,其中G是无向连通图

解：

- $\varphi(G)$是由G的全体断集在$\varepsilon(G)$中的向量与零向量组成的集合
- 由定理10.2可得$\varphi(G)$是0-1二元域上的一个v-1维线性空间
- 因为每个基本割集组有v-1个向量
- 所以$\varphi(G)$的全体向量个数为2^{v-1}

第10章：8题

- 10.8 设G是弱连通有向图，证明：

$$\mathbf{r}(\mathbf{B}(\mathbf{G})) = \mathbf{r}\left(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{f}}(\mathbf{G})\right) = \mathbf{v} - \mathbf{1}$$

证明：

由于$B(G)$的所有行向量之和为0向量，因此$B(G)$中所有的v个行向量线性相关，故$r(B(G)) \leq v - 1$

由于G是弱连通的，因此G的底图G'连通，由定理10.8，以G'的生成树的边构造$B(G)$的一个子方阵，则此方阵为$v-1$阶满秩方阵，因此$r(B(G)) \geq v - 1$, 故$r(B(G)) = v - 1$，同理可证 $r\left(B_f(G)\right) = v - 1$

（也可仿照P186无向图定理的证明过程，最后通过导出底图G' 不连通的矛盾得证）

第10章：11题

- 10.11 用有向图的基本关联矩阵来求图10.29的生成树数目$\tau(G)$

解：

给原图G的边添加方向，得到有向图G'

则G'的关联矩阵为：

$$B(G') = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

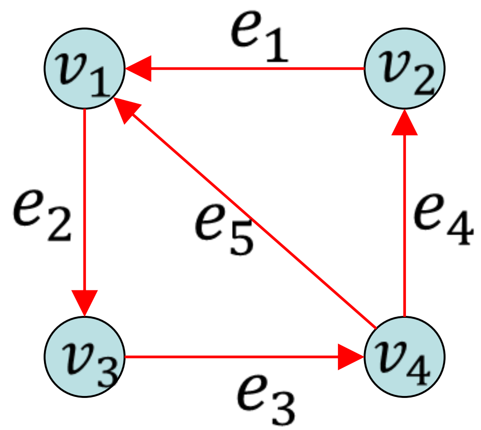


图 10.29 G'

任取一个$B_f(G')$

$$B_f(G') = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第10章：11题

由定理10.8可得

$$\tau(G)=\det(B_f(G').B_f^T(G'))=\det\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}=8$$

第10章：12题

- 10.12 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,求$A^k$=?

解：

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} \boldsymbol{A} & (\boldsymbol{k}\text{为奇数}) \\ \boldsymbol{I} & (\boldsymbol{k}\text{为偶数}) \end{cases}$$

- 10.18 设无向图G的基本关联矩阵为

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

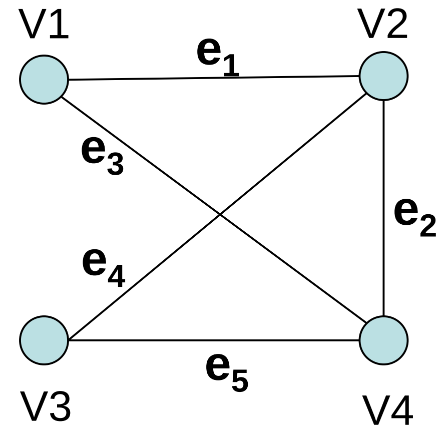
求G的一切生成树，且画图示。

解：

首先根据基本关联矩阵作出无向图G

$B_f(G)$=

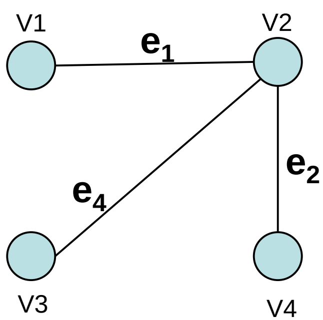
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	0	1	0	0
v_2	1	1	0	1	0
v_3	0	0	0	1	1

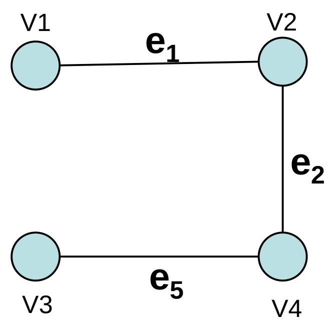


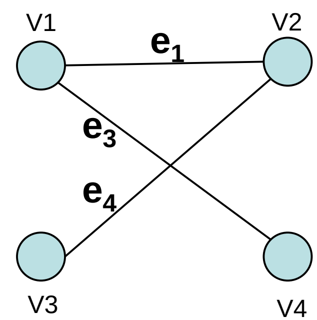
根据定理10.7，$B_f(G)$的**3**阶满秩子方阵的列对应的边子集即为G的生成树的边

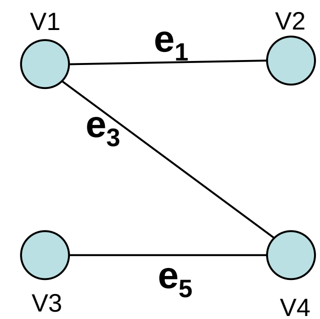
第10章： 18题

- 检查$B_f(G)$的3阶子方阵
- $r(B'_{123})=2,\quad r(B'_{124})=3,\quad r(B'_{125})=3,\quad r(B'_{134})=3,\quad r(B'_{135})=3$

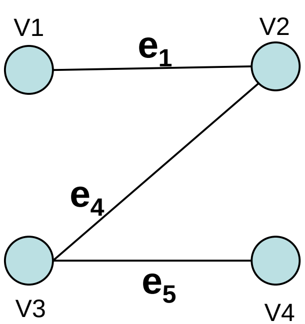


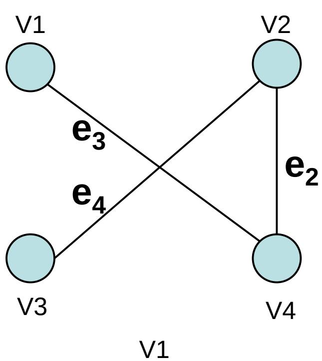


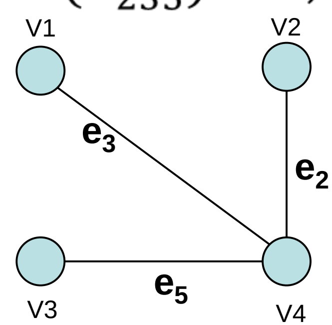


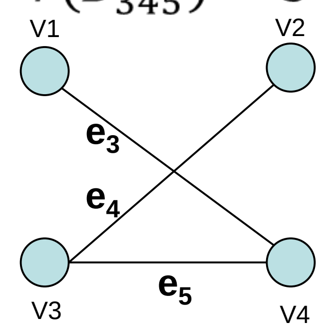


- $r(B'_{145})=3,\quad r(B'_{234})=3,\quad r(B'_{245})=2,\quad r(B'_{235})=3,\quad r(B'_{345})=3$









$$\tau(G)=8$$

第10章： 20题

- 10.20 已知有向图G的基本关联矩阵为

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

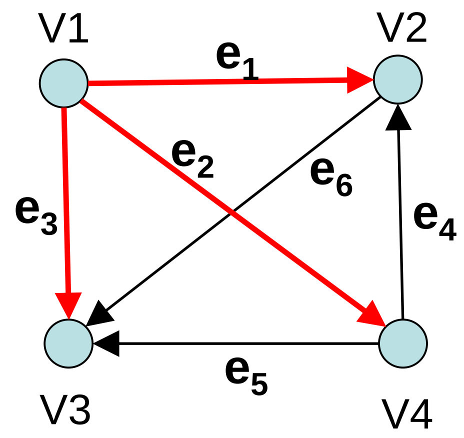
求$C_f(G)$与$S_f(G)$.

解：

首先根据基本关联矩阵作出有向图G

$B_f(G)=$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	1	0	0	0
v_2	-1	0	0	-1	0	1
v_3	0	0	-1	0	-1	-1



第10章：20题

- 确定一生成树**e$_1$，e$_2$，e$_3$**，则余树边为**e$_4$，e$_5$，e$_6$**

B_{12}的列对应生成树T的边，B_{11}的列对应余树边

则

$$B_{12}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad B_{11}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

由定理10.11可得：

$$C_{f_{12}}=-B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1}=-\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$C_f(G)=\left[EC_{f_{12}}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

第10章：20题

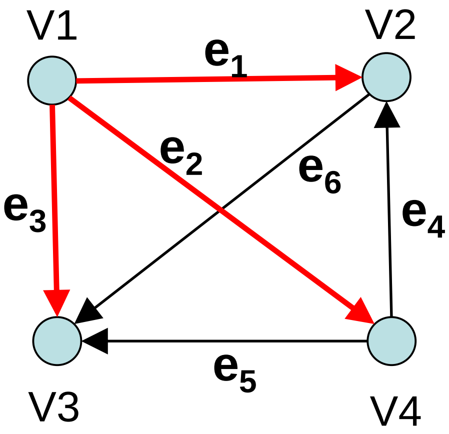
- 由定理10.12可得有向图的基本割集矩阵：

$$S_f(G) = [-C_{f_{12}}^T E] = \left[-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第10章：20题

- **方法2：**
- 对于圈矩阵



恰含生成树T的一条余树边的圈，对应圈矩阵中的行向量，构成有向图G的基本圈矩阵。

这里规定圈中取逆时针方向为正。

则分别包含余树边e_4, e_5, e_6的圈对应圈矩阵中的行向量为：

$$C_4 = (-1,1,0,1,0,0)$$
$$C_5 = (0,-1,1,0,-1,0)$$
$$C_4 = (-1,0,1,0,0,-1)$$

则组成基本圈矩阵为：

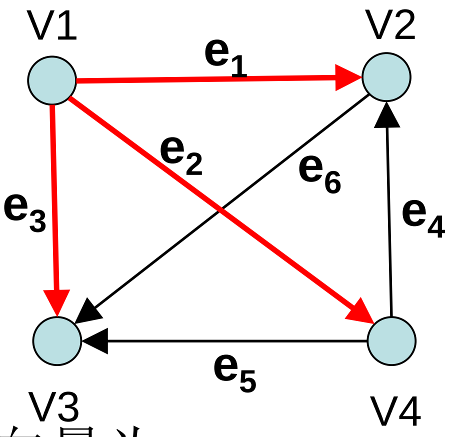
$$C_f(G) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

第10章：20题

对于割集矩阵:

- 恰含生成树T的一条树边的割集，对应在割集矩阵中的行向量，构成有向图G的基本割集矩阵。

  （或者表述为分别分割一个顶点的割集，对应在割集矩阵中的行向量，构成有向图G的基本割集矩阵。）



- 分别割掉顶点v_2, v_3, v_4的割集对应在割集矩阵中的行向量为:

(取指向割去顶点集的边为正向边)

$$S_2 = (1,0,0,1,0,-1)$$
$$S_3 = (0,1,0,-1,-1,0)$$
$$S_4 = (0,0,1,0,1,1)$$

则组成基本割集矩阵为:

$$S_f(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$