第一次补充习题

1.（群的定义）设 G 是一个半群，满足以下条件：

(1) 存在 $e_r \in G$，使得 $\forall a \in G$，$ae_r = a$；（称 e_r 为右单位）.

(2) ~~右~~ $\forall a \in G$，存在 $a_r \in G$，$aa_r = e_r$.

则 G 是一个群.

2.（群的定义）设 G 是一个群，I 非空集，令 $S = G \times I$

定义乘法：$\forall (g,i),(h,j) \in S$

$(g,i)\cdot(h,j) = (gh, j)$

证明 S 有一个左单位（左幺元）. 每个元素有右逆. 它一般不是群.

反之，设 S 有一个左单位，每个元素有右逆，则~~S~~存在群 G 和非空集 I，$S \cong G \times I$.

3.（群的阶数/周期）设 G 是一个群，$a, b \in G$，$o(a) = m$，$o(b) = n$. 且 $ab = ba$，令 $q = [m,n]$. 则

(1) $o(ab) \mid q$；(2) 若 $(m,n) = 1$，$o(ab) = q$；

(3) G 中存在 q 阶元；（类比于线性代数"循环子空间"）

(4) 若 $ab \neq ba$，结论不成立.

(5) 设 $g \in G$，$o(g) = \underbrace{mn,}_{(m,n)=1}$ 则存在 $a, b \in G$，$o(a) = m$，$o(b) = n$.

4. $(\mathbb{Q},+)$不是一个循环群，但它任意有限生成子群是循环群.(推广：设第3题)

5. 令$G=GL_n(\mathbb{C})$，P是主对角元均为1的n阶上三角复方阵全体，则$P\leq G$. 求$N_G(P)$，$C_G(P)$.
(中心化子、正规化子)

6.(Dedekind法则) 设H,K,N均是群G的子群，且$K\leq H$. 证明：$H\cap(KN)=K(H\cap N)$

7.(Lagrange定理) 设G是$2n$阶交换群，若n是奇数，试证：G有唯一一个2阶子群(从而正规).

8.(正规子群.同态) 设G是一个群，$H\leq G$，$N\lhd G$. 证明：若$[G:N]$与$|H|$均有限且互素，则$H\subseteq N$

9.(同构) 设$\mathrm{Aut}\,G$是G的自同构群. 证明：若$|G|=n$ 则$|\mathrm{Aut}\,G|\mid(n-1)!$