《微分方程1》第十五讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2018年01月03日

例一：记 Cauchy 问题 $(*)\ y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1$，的饱和解为 $y(x)$，其右侧最大存在区间记作$[0, \beta)$．证明β 有限，并给出β 的上下界．

解：考虑 $v' = v^2,\ v(0) = 1$．解之得$v(x) = \frac{1}{1-x},\ x \in [0, 1)$．显然$v(x)$ 是问题(*) 的一个右下解，故

$$\frac{1}{1-x} \le y(x), \quad \forall x \in [0, \beta) \cap [0, 1).$$

断言$\beta \le 1$．反证．若不然，即$\beta > 1$．于是由上述不等式的两边令$x \to 1^-$ 得$+\infty \le y(1)$．这是个矛盾．因此β 有限且$\beta \le 1$．

显然$\beta > 0$. 这是一个平凡下界. 以下求β 的一个非平凡下界.

为此考虑 Cauchy 问题(**) $u' = 1 + u^2$, $u(0) = 1$. 解之得

$u(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$, $x \in [0, \frac{\pi}{4})$. 显然 $u(x)$ 是问题(*) 的一个右

上解, 于是

$$y(x) \le \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad \forall x \in [0, \beta) \cap [0, \frac{\pi}{4}). \quad (***)$$

现断言$\beta \geq \frac{\pi}{4}$. 反证. 假设$\beta < \frac{\pi}{4}$. 由饱和解的端点性质知饱和解 $y(x)$ 在$x=\beta$ 的左侧无界. 因$y'(x)=x^2+y^2(x)>0$, 故解$y(x)$ 在其存在区间上严格单调上升. 因此$y(x)\to +\infty$, 当$x\to\beta^-$ 时. 在不等式(***) 即

$$y(x)\leq \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\quad \forall x\in[0,\beta)\cap[0,\frac{\pi}{4}).\quad (***)$$

两边令$x\to\beta^-$ 取极限得$+\infty\leq \tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$. 这是个矛盾. 于是我们得到$\beta$ 的一个下界$\beta\geq\frac{\pi}{4}$. 综上得$\frac{\pi}{4}\leq\beta\leq 1$.

以下对β 作更精确的估计. (参见Wolfgang Walter, Ordinary Differential Equations, Springer Verlag, 1998, page 92-93). 已证 $v(x)=\frac{1}{1-x}$ 是问题(*)的右下解. 为改进β 的下界. 尝试如下形式的右上解

$$u_c(x)=\frac{1}{1-cx},\quad x\in\Big[0,\frac{1}{c}\Big),$$

其中$c>1$ 待定. 令 $u_c'(x)\geq x^2+u_c^2(x)$, 即

$$\frac{c}{(1-cx)^2}\geq x^2+\frac{1}{(1-cx)^2}\quad \text{即}\quad c-1\geq[x(1-cx)]^2.$$

熟知二次函数$x(1-cx)$ 在$x=\frac{1}{2c}$ 处达最大值$\frac{1}{2c}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4c}$.

于是令 $c-1\geq\frac{1}{16c^2}$，即

$$16c^2(c-1)\geq 1.\quad(\Delta)$$

这表明当 c 满足条件(Δ) 时，$u_c(x)$ 是右上解．故

$$y(x)\leq\frac{1}{1-cx},\quad\forall x\in[0,\beta)\cap\left[0,\frac{1}{c}\right).$$

因此 $\beta\geq\frac{1}{c}$．由此可得到 β 的更精确的下界，其中 c 满足条件(Δ)．例如取 $c=\frac{n+1}{n}$ 代入(Δ) 得$16(n+1)^2\geq n^3$．于是可取 $n=16$，即取 $c=\frac{17}{16}$ 时，条件(Δ) 成立．

例子续5

这样我们得到了β 更好的下界

$$\beta \geq \frac{16}{17} = 0.941\cdots.$$

为作比较，原下界为$\beta \geq \frac{\pi}{4} = 0.785\cdots$.

用类似的方法可以得到关于β 更精确的估计$\beta \in [b_0, b_1]$，其中

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = 0.96981065393 \begin{bmatrix} 13 \\ 04 \end{bmatrix}.$$

解答完毕.

例二：考虑 Cauchy 问题 $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, 其饱和解记作 $y(x)$, 其最大存在区间记作 (α, β). (i) 证明解 $y(x)$ 是奇函数, 从而$\alpha = -\beta$. (ii) 估计β, 即给出β 的上下界.

解：(i) 证明 $y(x)$ 是奇函数. 令$z(x) = -y(-x)$, 则$z(0) = 0 = y(0)$, 并且$z'(x) = y'(-x) = (-x)^2 + y^2(-x) = x^2 + z^2(x)$. 这表明$z(x)$ 是解且和解$y(x)$ 有相同初值. 根据解的唯一性知 $z(x) \equiv y(x)$. 即$y(-x) = -y(x)$, $y(x)$ 是奇函数.

(ii) 求 β 的一个上界. 为此我们来寻找问题的一个右下解. 对任意正数 $p \in (0, \beta)$, 考虑 Cauchy 问题 $v' = p^2 + v^2$, $v(p) = 0$. 解之得解 $v(x) = p \cdot \tan[p(x-p)]$, $x \in [p, p + \frac{\pi}{2p})$. 显然 $v(x)$ 是区间 $[p, p + \frac{\pi}{2p}) \cap [p, \beta)$ 上的右下解. 于是

$$p \cdot \tan[p(x-p)] \le y(x), \ \forall x \in \left[p, p + \frac{\pi}{2p}\right) \cap [p, \beta). \quad (*)$$

断言: $\beta \le p + \frac{\pi}{2p}$, $\forall p \in (0, \beta)$. 反证. 若不然, 则 $\beta > p + \frac{\pi}{2p}$. 对不等式(*)两边令 $x \to [p + \frac{\pi}{2p}]^-$ 得 $+\infty \le y(p + \frac{\pi}{2p})$. 矛盾. 故断言成立. 由断言知

$$\beta \le \inf\left\{p + \frac{\pi}{2p}, 0 < p < \beta\right\}.$$

例二续2

不难证明

$$\inf\left\{\mathsf{p}+\frac{\pi}{2\mathsf{p}},\mathsf{p}>0\right\}=\sqrt{2\pi}=2.4957\cdots,$$

且上述下确界可在 $\mathsf{p}=\sqrt{\pi/2}$ 处取得. 若 $\beta>\sqrt{2\pi}$, 则

$$\beta\le\inf\left\{\mathsf{p}+\frac{\pi}{2\mathsf{p}},0<\mathsf{p}<\beta\right\}$$

$$\le\inf\left\{\mathsf{p}+\frac{\pi}{2\mathsf{p}},0<\mathsf{p}<\sqrt{2\pi}\right\}=\sqrt{2\pi}.$$

这就得到矛盾. 因此 $\beta\le\sqrt{2\pi}$.

(iii) 求 β 的一个下界. 显然 $\beta > 0$ 是一个平凡的估计. 下面来求一个正的下界. 已证 $\beta \le \sqrt{2\pi}$. 考虑初值问题 $u' = 2\pi + u^2$, $u(0) = 0$. 解之得

$$u(x) = \sqrt{2\pi}\tan\left(\sqrt{2\pi}x\right), \quad x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right).$$

显然$u(x)$ 是一个右上解. 故

$$y(x) \le \sqrt{2\pi}\tan(\sqrt{2\pi}x), \quad x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right) \cap [0, \beta).$$

由此不难看出$\beta \ge \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

(iv) 求β 下界的另一个方法. 考虑问题$u' = \beta^2 + u^2$, $u(0) = 0$.

解之得

$$u(x) = \beta \tan(\beta x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2\beta}\right).$$

显然$u(x)$ 是区间 $[0, \beta)$ 上的一个右上解. 故

$$y(x) \le \beta \tan(\beta x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2\beta}\right) \cap [0, \beta).$$

由此可知$\beta \ge \frac{\pi}{2\beta}$, 即$\beta \ge \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 综上得$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \le \beta \le \sqrt{2\pi}$. 解答

完毕.

例三. 考虑 Cauchy 问题 $y' = x^4 - y^4$, $y(0) = 0$, 其饱和解记作$\phi(x)$. 证明

(i) 解 $\phi(x)$ 是奇函数;

(ii) 解 $\phi(x)$ 的最大存在区间为$(-\infty, +\infty)$;

(iii) 解 $\phi(x)$ 满足

$$0 \le \phi(x) \le x, \quad \forall x > 0,$$
$$x \le \phi(x) \le 0, \quad \forall x < 0.$$

解: (i) 可用例二中的方法证明$\phi(x)$ 是奇函数. 细节略.

证(ii)和(iii). 由于$\phi(x)$ 是奇函数, 故解$\phi(x)$ 的最大存在区间是对称的, 即为$(-\beta,\beta)$. 为了估计β, 先来构造一个右下解. 显然$v(x)\equiv 0$ 是右下解. 因为

$$v'(x)\equiv 0<x^4=f(x,0),\quad \forall x>0,$$

这里$f(x,y):=x^4-y^4$. 因此$\phi(x)>0$, $\forall x\in(0,\beta)$.

再来构造一个右上解．由观察知$u(x)=x$ 是一个右上解．这是因为$u'(x)=1>0=f(x,x)$, $\forall x>0$．因此

$$0\le\phi(x)\le x,\quad x\in(0,\beta).\quad (*)$$

若$\beta<+\infty$, 则$\phi(x)$ 在$x=\beta$ 左侧无界．此与式(*)相矛盾．故$\beta=+\infty$．因此得

$$0\le\phi(x)\le x,\quad \forall x\in(0,+\infty).$$

根据上述不等式可知，$0\le\phi(-x)\le -x$, $\forall x<0$．由于$\phi(x)$ 是奇函数，故

$$0\ge\phi(x)\ge x,\quad \forall x<0.$$

结论(ii)和(iii)得证．解答完毕． □

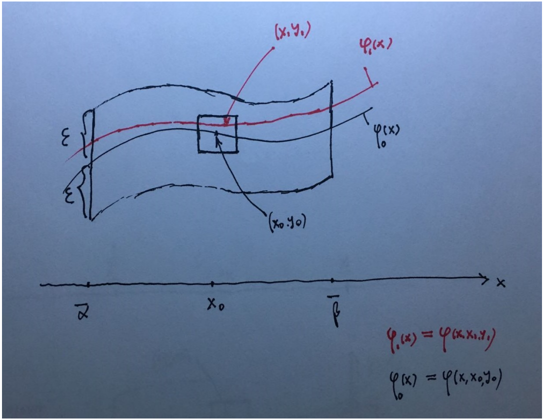
基本引理: 考虑 $y' = f(x,y)$, 其中 $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的开区域, f, f_y 于 Ω 上连续. 记 $\phi(x, x_0, y_0)$ 为 Cauchy 问题 $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ 的饱和解, 其最大存在区间记作 $J_0 = (\alpha_0, \beta_0)$, 则对任意子闭区间 $\bar{J} = [\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subset (\alpha_0, \beta_0)$, 以及任意小的正数 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

1) 解 $\phi(x, x_1, y_1)$ 至少在 $\bar{J}$ 上存在, $\forall (x_1, y_1) \in R^0_\delta(x_0, y_0)$;

2) $\|\phi(x, x_1, y_1) - \phi(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon$, $\forall x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$,

其中 $R^0_\delta(x_0, y_0)$ 记开域 $|x_1 - x_0| < \delta$, $\|y_1 - y_0\| < \delta$.

解关于初值的连续性基本引理图示



解关于初值的连续性基本引理示意图

覆盖引理(Covering Lemma)

Lemma

设$\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$ 为开区域，则对于Ω 的任意紧子集$K \subset \Omega$，存在另一个紧子集$K_1 \subset \Omega$，以及正数 $a, r > 0$，使得$\forall (x_1, y_1) \in K$，闭矩形 $R_{a,r}(x_1, y_1) \subset K_1$，这里$R_{a,r}(x_1, y_1)$ 表示$|x - x_1| \leq a$, $\|y - y_1\| \leq r$.

Proof.

利用有限覆盖定理. 详见参考资料Existence Theory, page 23, Lemma 3.2. □

证: 为清晰计, 证明分三步. 第一步. 设$\bar{J}=[\bar{\alpha},\bar{\beta}]$ 为(α_0,β_0)的任意一个有界闭区间. 记$K=\{(x,\phi_0(x)),x\in\bar{J})\}$, 则$K$ 是开域Ω 的一个紧集. 根据覆盖引理知存在另一个紧集$K_1\subset\Omega$, 以及正数$a,r>0$, 使得$K\subset K_1$, 且对任何点$(x_1,y_1)\in K$, 闭矩形$R_{a,r}(x_1,y_1)\subset K_1$. 记$M:=\max\{\|f(x,y)\|,(x,y)\in K_1\}$, L 为映射$f(x,y)$ 在紧集K_1 上关于变量y 的Lipschitz 常数, 即

$$\|f(x,y)-f(x,z)\|\le L\|y-z\|,\quad \forall(x,y),(x,z)\in K_1.$$

证明续1

第二步. 对$\forall \varepsilon > 0$, 不妨设$\varepsilon \le r$, 取$\delta > 0$ 满足如下条件

(i) $\delta < \min\{a, r\}$;

(ii) $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$;

(iii) $\delta(M+1)e^{L(\bar{\beta}-\bar{\alpha})} < \varepsilon$.

断言: 这样的$\delta > 0$ 即可满足基本引理中的要求. 证明如下. 由条件(i)知$R_\delta(x_0, y_0) \subset K_1$. 过任意点$(x_1, y_1) \in R_\delta(x_0, y_0)$ 的解记为 $\phi_1(x) = \phi(x, x_1, y_1)$, 其最大存在区间记为$J_1 = (\alpha_1, \beta_1)$. 由饱和解的特征知, 解曲线$\Gamma_1 := \{(x, \phi_1(x)), x \in J_1\}$ 必与紧集K_1 的边界相交. 设Γ_1 在x_1 的左侧$x = \alpha^*$ 和右侧$x = \beta^*$ 首次达到紧集K_1 的边界.

故$(x,\phi_1(x))\in K_1$, $\forall x\in[\alpha^*,\beta^*]$, 且$(\alpha^*,\phi_1(\alpha^*))\in\partial K_1$, $(\beta^*,\phi_1(\beta^*))\in\partial K_1$.

第三步. 注意到解 $\phi_0(x)$ 和$\phi_1(x)$ 分别满足积分方程

$$\begin{aligned}\phi_0(x)&=y_0+\textstyle\int_{x_0}^{x}f(s,\phi_0(s))ds, && x\in J_0\\ \phi_1(x)&=y_1+\textstyle\int_{x_1}^{x}f(s,\phi_1(s))ds, && x\in J_1.\end{aligned}$$

两式相减知对任意点$x\in J^*\cap\bar{J}\subset J_1\cap J_0$,

$$\phi_1(x)-\phi_0(x)=y_1-y_0+\int_{x_1}^{x}f(s,\phi_1(s))ds-\int_{x_0}^{x}f(s,\phi_0(s))ds.$$

将上式改写为

$$\phi_1(x) - \phi_0(x) = y_1 - y_0 - \int_{x_0}^{x_1} f(s, \phi_0(s))ds$$

$$+ \int_{x_1}^{x} [f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_0(s))]ds.$$

对上式两边取模得

$$\|\phi_1(x) - \phi_0(x)\| \leq \|y_1 - y_0\| + \left\| \int_{x_0}^{x_1} f(s, \phi_0(s))ds \right\|$$

$$+ \left\| \int_{x_1}^{x} [f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_0(s))]ds \right\|.$$

证明续4

$$\|\phi_1(x) - \phi_0(x)\| \leq \|y_1 - y_0\| + M|x_1 - x_0|$$

$$+L\left|\int_{x_1}^{x} \|\phi_1(s) - \phi_0(s)\| ds\right|$$

$$\leq \delta(1 + M) + L\left|\int_{x_1}^{x} \|\phi_1(s) - \phi_0(s)\| ds\right|.$$

根据Gronwall 不等式知对任意点 $x \in J^* \cap \bar{J}$,

$$\|\phi_1(x) - \phi_0(x)\| \leq \delta(1 + M)e^{L|\bar{\beta} - \bar{\alpha}|} < \varepsilon \leq r.$$

若$\beta^* < \bar{\beta}$, 则$(\beta^*, \phi_1(\beta^*)) \in \mathsf{R}_{\mathsf{a},\mathsf{r}}(\beta^*, \phi_0(\beta^*)) \subset \mathsf{K}_1$. 由于$\varepsilon < \mathsf{r}$, 故点$(\beta^*, \phi_1(\beta^*))$ 是闭矩形$\mathsf{R}_{\mathsf{a},\mathsf{r}}(\beta^*, \phi_0(\beta^*))$ 的内点, 从而是紧集K_1 的内点. 此与 $(\beta^*, \phi_1(\beta^*)) \in \partial \mathsf{K}_1$. 故 $\beta^* \geq \bar{\beta}$. 同理可证 $\alpha^* \leq \bar{\alpha}$. 这表明 $\mathsf{J}^* \subset \bar{\mathsf{J}}$. 因此解$\phi_1(\mathsf{x}) = \phi(\mathsf{x}, \mathsf{x}_1, \mathsf{y}_1)$ 的最大定义区间J_1 包含$\bar{\mathsf{J}}$, 且

$$\|\phi_1(\mathsf{x}) - \phi_0(\mathsf{x})\| < \varepsilon, \quad \mathsf{x} \in \bar{\mathsf{J}}.$$

基本引理得证.

回忆解对初值与参数连续性定理

定理: 考虑方程 $y' = f(x,y,\lambda)$, 其中 $f:\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, Ω 为 $\mathbb{R}^{n+2}$ 的开区域, f, f_y 于 Ω 上连续. 记 $\phi(x,\xi,\eta,\lambda)$ 为 Cauchy 问题 $y' = f(x,y,\lambda)$, $y(\xi) = \eta$ 的饱和解, 其最大存在区间记作 $J(\xi,\eta,\lambda) = (\alpha(\xi,\eta,\lambda), \beta(\xi,\eta,\lambda))$. 再记

$$D := \Big\{(x,\xi,\eta,\lambda), x \in J(\xi,\eta,\lambda), (\xi,\eta,\lambda) \in \Omega\Big\} \subset \mathbb{R}^{n+3}.$$

则以下结论成立.

1) 解 $\phi(x,\xi,\eta,\lambda)$ 作为四元函数在 D 上连续;

2) D 是 $\mathbb{R}^{n+3}$ 中的开集;

3) 函数 $\alpha(\xi,\eta,\lambda)$ 在 Ω 上半连续, $\beta(\xi,\eta,\lambda)$ 在 Ω 下半连续.

含参数的方程组 $y' = f(x, y, \lambda)$ 可以同过变量代换$z = (y, \lambda)$,

化为下述不含参数的方程组$z' = g(x, z)$ 或

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \lambda), \\ \lambda' = 0. \end{cases}$$

因此只需证明如下解关于初值的连续性定理.

解关于初值的连续性定理

定理: 考虑方程 $y' = f(x, y)$, 其中 $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的开区域, f, f_y 于 Ω 上连续. 记 $\phi(x, \xi, \eta)$ 为 Cauchy 问题 $y' = f(x, y)$, $y(\xi) = \eta$ 的饱和解, 其最大存在区间记作 $J(\xi, \eta) = (\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta))$. 再记

$$D := \Big\{(x, \xi, \eta), x \in J(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in \Omega\Big\} \subset \mathbb{R}^{n+2}.$$

则以下结论成立.

(1) 解 $\phi(x, \xi, \eta)$ 作为三元函数在 D 上连续;

(2) D 是 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中的开集;

(3) 函数 $\alpha(\xi, \eta)$ 在 Ω 上半连续, $\beta(\xi, \eta)$ 在 Ω 下半连续.

证: 证(1): 解$\phi(x,\xi,\eta)$ 作为三元函数在D 上连续. 固定任意一点$(x^0,x_0,y_0)\in D$, 则点$x^0\in J_0=(\alpha_0,\beta_0)$, 这里 J_0 表示解$\phi(x,x_0,y_0)$ 的最大存在区间, $\alpha_0=\alpha(x_0,y_0)$, $\beta_0=\beta(x_0,y_0)$. 任意给定$\varepsilon>0$, 取J_0 的一个有界闭子区间$\bar{J}=[\bar{\alpha},\bar{\beta}]$, 使得$x^0$是$\bar{J}$ 的内点, 即$x^0\in(\bar{\alpha},\bar{\beta})$. 根据解对初值连续性基本引理知存在$\delta_1>0$, 使得对任意点$(x_1,y_1)\in R_{\delta_1}(x_0,y_0)$, 解$\phi(x,x_1,y_1)$ 在$\bar{J}$ 上有定义, 且

$$\|\phi(x,x_1,y_1)-\phi(x,x_0,y_0)\|<\varepsilon,\quad x\in\bar{J}.$$

这里$R_{\delta_1}(x_0,y_0)$ 记闭正方形: $|x-x_0|\le\delta_1$, $\|y-y_0\|\le\delta_1$.

另一方面由于解$\phi(x,x_0,y_0)$ 关于x 连续(可微), 故存在$\delta_2>0$, 使得

$$\|\phi(x,x_0,y_0)-\phi_0(x^0,x_0,y_0)\|<\varepsilon,\quad x\in(x^0-\delta_2,x^0+\delta_2).$$

记$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则对任意点$x\in(x^0-\delta,x^0+\delta)$

$$\begin{aligned}\|\phi(x,x_1,y_1)-\phi(x^0,x_0,y_0)\|&\le\|\phi(x,x_1,y_1)-\phi(x,x_0,y_0)\|\\&+\|\phi(x,x_0,y_0)-\phi(x^0,x_0,y_0)\|\le\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了解$\phi(x,\xi,\eta)$ 在点$(x^0,x_0,y_0)\in D$ 处连续. 这个点是任意取的, 故$\phi(x,\xi,\eta)$ 在D 上处处连续.

证(2)：即要证

$$D := \left\{(x,\xi,\eta), x \in J(\xi,\eta), (\xi,\eta) \in \Omega\right\} \subset \mathbb{R}^{n+2}.$$

是开集. 设$(x^0, x_0, y_0) \in D$. 由于$x^0 \in J_0$ 是内点, 故存在$h > 0$, 使得$J_h = [x^0 - h, x^0 + h] \subset J_0$. 由基本引理知, 对闭子区间$J_h$, 存在$\delta > 0$, 对任意$(x_1, y_1) \in R_\delta(x_0, y_0)$, 解$\phi(x, x_1, y_1)$ 的最大存在区间J_1 包含J_h, 即$J_h \subset J(x_1, y_1)$, $\forall (x_1, y_1) \in R_\delta(x_0, y_0)$. 即点$(x^0, x_0, y_0)$ 的开邻域

$$\left\{(x, x_1, y_1), |x - x^0| < h, |x_1 - x_0| < \delta, |y_1 - y_0| < \delta\right\} \subset D.$$

故D 是开集. 结论(2)得证.

证(3)：函数$\alpha(\xi,\eta)$ 在Ω 上半连续，$\beta(\xi,\eta)$ 在Ω 下半连续．

设$(x_0,y_0)\in\Omega$，回忆解$\phi(x,x_0,y_0)$ 最大存在区间记作(α_0,β_0) $=(\alpha(x_0,y_0),\beta(x_0,y_0))$．对于任意$\alpha_0<\bar{\alpha}<\bar{\beta}<\beta_0$．根据基本引理知存在$\delta>0$，使得对于任意点$(x_1,y_1)\in R_\delta(x_0,y_0)$，解$\phi(x,x_1,y_1)$ 的最大存在区间$(\alpha(x_1,y_1),\beta(x_1,y_1))$ 包含闭区间$[\bar{\alpha},\bar{\beta}]$．此即

$$\alpha(x_1,y_1)<\bar{\alpha}<\bar{\beta}<\beta(x_1,y_1),\quad \forall(x_1,y_1)\in R_\delta(x_0,y_0).$$

由上半和下半连续的等价定义知，$\alpha(\xi,\eta)$ 在(x_0,y_0) 处上半连续，$\beta(\xi,\eta)$ 在(x_0,y_0) 下半连续．点$(x_0,y_0)\in\Omega$ 是任意取的，故结论(3)得证．定理得证．$\square$

定理: 考虑方程 $y' = f(x, y, \lambda)$, 关于映射 f 的假设同上述定理, 再补充一个假设: $f_\lambda(x, y, \lambda)$ 于 Ω 上连续, 解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 以及开区域 $D \subset \mathbb{R}^{n+3}$ 的意义同上, 则以下结论成立.

(i) 饱和解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 作为四元函数在开区域 D 上连续可微;

(ii) 三对二阶混合偏导数 $\phi_{x\xi}$ 和 $\phi_{\xi x}$, $\phi_{x\eta}$ 和 $\phi_{\eta x}$, 以及 $\phi_{x\lambda}$ 和 $\phi_{\lambda x}$ 连续, 从而对应相等, 即 $\phi_{x\xi} = \phi_{\xi x}$, $\phi_{x\eta} = \phi_{\eta x}$, $\phi_{x\lambda} = \phi_{\lambda x}$;

(iii) 偏导数 ϕ_ξ, ϕ_η 和 ϕ_λ 分别是以下三个Cauchy 问题的解,

定理续

1. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z,\ z(\xi) = -f(\xi,\eta,\lambda),\quad (z = \phi_\xi);$
2. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z,\ z(\xi) = E,\quad (z = \phi_\eta);$
3. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z + b(x,\xi,\eta,\lambda),\ z(\xi) = 0,\quad (z = \phi_\lambda);$

其中$A(x,\xi,\eta,\lambda) := f_y(x,\phi,\lambda)$, $b(x,\xi,\eta,\lambda) := f_\lambda(x,\phi,\lambda)$, E 代表n 阶单位矩阵.

初值可以并入参数

方程组 $y' = f(x, y, \lambda)$ 满足初值条件$y(\xi) = \eta$ 的解仍记作$\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$. 作变量替换$u = x - \xi$, $v = y - \eta$, 并记$g(u, v, \mu) := f(u + \xi, v + \eta, \lambda)$, $\mu = (\xi, \eta, \lambda)$, 记方程组$v' = g(u, v, \mu)$ 满足初值条件$v(0) = 0$ 的解为$\psi(u, \mu)$, 则解$\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 可表为$\phi(x, \xi, \eta, \lambda) = \eta + \psi(x - \xi, \mu)$. 因此原问题的初值$\xi, \eta$ 并入新问题的参数$\mu = (\xi, \eta, \lambda)$. 由此只需证明解关于参数的可微即可. 并且不失一般性, 可设参数$\mu \in \mathbb{R}$ 是一维的, 即证明如下定理即可.

定理: 考虑方程组 $y' = f(x, y, \lambda)$, 这里 $f : \Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{1+n+1} \to \mathbb{R}^n$, 这里$\Omega$ 为$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开区域, Λ 为开区间. 设f, f_y, f_λ 于$\Omega \times \Lambda$ 上连续, 记 Cauchy 问题$y' = f(x, y, \lambda)$, $y(x_0) = y_0$ 的解为$\phi(x, \lambda)$, 其最大存在区间记为J_λ. 再记

$$D := \{(x, \lambda), x \in J_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{R}^2,$$

则(i) 解$\phi(x, \lambda)$ 作为二元函数在开区域D 上连续可微;

(ii) 二阶混合偏导数$\phi_{x\lambda}$ 和$\phi_{\lambda x}$ 连续, 从而相等, 即$\phi_{x\lambda} = \phi_{\lambda x}$;

(iii) ϕ_λ 是Cauchy 问题$z' = A(x, \lambda)z + b(x, \lambda)$, $z(x_0) = 0$ 的解, 其中$A(x, \lambda) := f_y(x, \phi, \lambda)$, $b(x, \xi, \lambda) := f_\lambda(x, \phi, \lambda)$.

证: 任取一点$(x_0, y_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$. 由于这个点是内点, 故存在$a, b, c > 0$, 使得

$$V_{a,b,c} = \{|x - x_0| \le a, \|y - y_0\| \le b, |\lambda - \lambda_0| \le c\} \subset \Omega \times \Lambda.$$

记$M := \{\|f(x, y, \lambda)\|, (x, y, \lambda) \in V_{a,b,c}\}$, 记$L$ 为映射$f(x, y, \lambda)$在紧集$V_{a,b,c}$ 上关于变量y 的 Lipschitz 常数, 即

$$\|f(x, y, \lambda) - f(x, z, \lambda)\| \le L\|y - z\|, \forall (x, y, \lambda), (x, z, \lambda) \in V_{a,b,c}.$$

取$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, 则由Picard 定理的证明可知, Picard 序列

$$\phi_0(x,\lambda) := y_0,\ \phi_{n+1}(x,\lambda) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi_n(s,\lambda),\lambda)ds\ (*)$$

在闭矩形$D_{h,c}: |x-x_0| \le h, |\lambda-\lambda_0| \le c$ 上一致收敛于解 $\phi(x,\lambda)$. 由归纳法不难证明序列$\phi_n(x,\lambda)$ 在$D_{h,c}$ 的内部，记作$D^0_{h,c}$, 上连续可微. 为方便，记

$$\psi_n(x,\lambda) := \frac{\partial \phi_n}{\partial \lambda}(x,\lambda), \quad n = 0,1,\cdots.$$

现考虑$\psi_n(x,\lambda)$ 在$D_{h,c}$ 的收敛性. 由上式得 $\psi_0(x,\lambda) \equiv 0$,

$$\psi_{n+1}(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x} [f_y(s,\phi_n,\lambda)\psi_n(s,\lambda) + f_\lambda(s,\phi_n,\lambda)]ds.\ (**)$$

记Cauchy 问题$z' = A(x,\lambda)z + b(x,\lambda)$，$z(x_0) = 0$ 的解为$\psi(x,\lambda)$，则$\psi(x,\lambda)$ 满足如下积分方程

$$\psi(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x} [f_y(s,\phi,\lambda)\psi(s,\lambda) + f_\lambda(s,\phi,\lambda)]ds, \quad (***)$$

其中$\phi = \phi(x,\lambda)$. 等式(***)减去式(**)得

$$\psi_{n+1}(x,\lambda) - \psi(x,\lambda)$$

$$= \int_{x_0}^{x} [f_y(s,\phi_n,\lambda)\psi_n(s,\lambda) - f_y(s,\phi,\lambda)\psi(s,\lambda)]ds$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [f_\lambda(s,\phi_n,\lambda) - f_\lambda(s,\phi,\lambda)]ds, \quad (x,\lambda) \in D_{h,c}.$$

将上式右边的第一个积分改写如下

$$\psi_{n+1}(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)$$

$$=\int_{x_0}^{x}\Big(f_y(s,\phi_n,\lambda)(\psi_n-\psi)+[f_y(s,\phi_n,\lambda)-fy(s,\phi,\lambda)]\psi\Big)ds$$

$$+\int_{x_0}^{x}[f_\lambda(s,\phi_n,\lambda)-f_\lambda(s,\phi,\lambda)]ds.$$

关于上式取模，并记

$$v_n(x,\lambda):=\|\psi_n(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)\|,$$

即得到

$$\mathbf{v_{n+1}(x,\lambda)} \le \left|\int_{x_0}^{x} \|f_y(s,\phi_n,\lambda)\| v_n(s,\lambda) ds\right|$$

$$+\left|\int_{x_0}^{x} \|f_y(s,\phi_n,\lambda) - fy(s,\phi,\lambda)\| \|\psi\| ds\right|$$

$$+\left|\int_{x_0}^{x} \|f_\lambda(s,\phi_n,\lambda) - f_\lambda(s,\phi,\lambda)\| ds\right|. \quad (\Delta)$$

在闭矩形 $D_{h,c}$ 上，由$\phi_n(x,\lambda) \rightrightarrows \phi(x,\lambda)$ 可知

$$f_y(x,\phi_n,\lambda) \rightrightarrows f_y(x,\phi,\lambda),$$

$$f_\lambda(x,\phi_n,\lambda) \rightrightarrows f_\lambda(x,\phi,\lambda).$$

证明续5

记

$$\varepsilon_n := \max\left\{\|f_y(s,\phi_n,\lambda) - fy(s,\phi,\lambda)\|, (x,\lambda) \in D_{h,c}\right\},$$

$$\delta_n := \max\left\{\|f_\lambda(s,\phi_n,\lambda) - f_\lambda(s,\phi,\lambda)\|, (x,\lambda) \in D_{h,c}\right\},$$

$$L := \left\{\|f_y(x,\phi,\lambda)\|, (x,\lambda) \in D_{h,c}\right\},$$

$$c_0 := \left\{\|\psi(x,\lambda)\|, (x,\lambda) \in D_{h,c}\right\},$$

则由不等式(Δ)得

$$v_{n+1}(x,\lambda) \le c_n + L\left|\int_{x_0}^{x} v_n(s,\lambda)ds\right|, \quad (x,\lambda) \in D_{h,c},$$

其中$c_n := (c_0\varepsilon_n + \delta_n)h$. 显然 $n \to +\infty$ 时, $\varepsilon_n \to 0$ 且$\delta_n \to 0$. 因此$c_n \to 0$, $n \to +\infty$. 由如下递归积分不等式引理可知 $v_n(x,\lambda) \rightrightarrows 0$, 即$\psi_n(x,\lambda) \rightrightarrows \psi(x,\lambda)$ 在闭矩形$D_{h,c}$. 这表明 $\phi_\lambda(x,\lambda)$ 在$D_{h,c}$ 上连续, 并且满足方程$[\phi_\lambda]_x = A(x,\lambda)\phi_\lambda + b(x,\lambda)$. 这表明$\phi_{\lambda x}$ 连续. 另一方面由方程$\phi_x = f(x,\phi,\lambda)$ 可知$\phi_{x\lambda}$ 连续. 因此$\phi_{x\lambda} = \phi_{\lambda x}$. 注意点$(x_0, y_0, \lambda_0)$ 的取法任意, 故$\phi(x,\lambda)$ 作为二元函数在其定义域D 上连续可微, 且两个二阶混合导数连续, 从而相等. 至此定理得证. $\square$

Lemma

设函数$v_n(x)$, $u(x)$ 在区间$J_h=[x_0-h,x_0+h]$ 上非负连续，且递归满足如下积分不等式

$$v_0(x)\le c_0,\ v_n(x)\le c_n+\left|\int_{x_0}^{x}u(s)v_{n-1}(s)ds\right|,\ x\in J_h,\qquad (*)$$

其中$c_n\ge 0$ 为非负常数，$\forall n\ge 1$，则

$$v_n(x)\le \frac{c_0'+c_1'+\cdots+c_n'}{n+1}e^{2\left|\int_{x_0}^{x}u(s)ds\right|},\ \forall x\in J_h,\qquad (**)$$

其中$c_n':=\sup\{c_n,c_{n+1},\cdots\}$, $\forall n\ge 1$. 特别当$c_n\to 0$ 时，函数列$v_n(x)$ 在J_h 上一致趋向零.

证: 只证右半区间情形，即$x \in [x_0, x_0 + h]$ 时结论成立. 此时不等式(*) 和(**) 中的绝对值符号可去掉，相应的不等式分别为

$$v_0(x) \le c_0, \quad v_n(x) \le c_n + \int_{x_0}^{x} u(s)v_{n-1}(s)ds, \quad (*)$$

$$v_n(x) \le \frac{c_0' + c_1' + \cdots + c_n'}{n+1} e^{2\int_{x_0}^{x} u(s)ds}, \quad (**)$$

现假设不等式(*)成立，要证不等式(**)成立. 显然不等式(**)对$n = 0$ 成立. 考虑$n \ge 1$ 情形. 先考察$v_n(x)$ 的前几项. 根据假设我们容易得到

$$v_1(x) \le c_1 + \int_{x_0}^{x} u(s)v_0(s)ds \le c_1 + c_0 w(x),$$

其中 $w(x) := \int_{x_0}^{x} u(s)ds$. 于是 $w'(x) = u(x)$ 且$w(x) \geq 0$. 再考虑 $v_2(x)$. 由假设(*)得

$$v_2(x) \leq c_2 + \int_{x_0}^{x} u(s)v_1(s)ds \leq c_2 + \frac{c_1 w(x)}{1!} + \frac{c_0 w^2(x)}{2!}.$$

根据归纳法不难证明

$$v_n(x) \leq c_n + \frac{c_{n-1}w(x)}{1!} + \cdots + \frac{c_1 w^{n-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{c_0 w^n(x)}{n!}.$$

于是为证不等式(**), 只要证对$\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k} w^k}{k!} \leq \frac{c_0' + c_1' + \cdots + c_n'}{n+1} e^{2w}, \quad \forall w \geq 0,$$

证明续2

将函数e^{2w} 在$w=0$ 处展开得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{c_{n-k}w^k}{k!}\leq\frac{c_0'+c_1'+\cdots+c_n'}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2w)^k}{k!}.$$

因此只需证明对于$n=1,2,\cdots$

$$c_{n-k}\leq\frac{(c_0'+c_1'+\cdots+c_n')2^k}{n+1},\quad k=0,1,2,\cdots,n,\quad (***).$$

当$k=0$ 时，不等式(***)为

$$c_n\leq\frac{c_0'+c_1'+\cdots+c_n'}{n+1},\quad \forall n\geq 1.$$

由c'_k 的定义知c'_k 单调下降，且$c'_k \geq c_k, \forall k \geq 0$. 因此不等式(***)当$k=0$ 时成立. 往下证不等式(***) 当$k=1,2,\cdots n$ 时成立. 由于c'_k 是单调下降且非负，故有

$$\frac{(c'_0+c'_1+\cdots+c'_n)2^k}{n+1} \geq \frac{(c'_0+c'_1+\cdots+c'_{n-k})2^k}{n+1} \geq$$

$$\frac{(n+1-k)c'_{n-k}2^k}{n+1} \geq \frac{(n+1-k)c_{n-k}2^k}{n+1}.$$

比较上式与不等式(***)可知，为证(***)，只需证$\frac{(n+1-k)2^k}{n+1} \geq 1$ 或$n+1 \geq \frac{k2^k}{2^k-1}$.

易证$\frac{k2^k}{2^k-1}$ 关于$k=1,2,\cdots n$ 是单调上升的，且当$k=n$ 时，不等式$n+1\geq\frac{n2^n}{2^n-1}$ 显然成立. 于是不等式(***)成立，从而不等式(**)成立. 当$c_n\to 0$ 时，我们有

$$0=\lim_{n\to+\infty}c_n=\limsup c_n=\lim c_n'$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{c_0'+c_1'+\cdots+c_n'}{n+1}.$$

因此对$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 使得当$n\geq N$ 时，

$$0\leq\frac{c_0'+c_1'+\cdots+c_n'}{n+1}e^{2h}<\varepsilon.$$

于是

$$0 \leq v_n(x) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in J_h, \quad \forall n > N.$$

这就证明了函数列$v_n(x)$ 在J_h 上一致收敛. 引理得证. $\square$

新年快乐！ 考试顺利！