《初等概率论》第 12 讲

邓 婉 璐

清华大学
统计学研究中心

November 5, 2018

极限定理回顾

定理 1.1 (Weak law of large numbers，WLLN)

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，则存在实数列 $\{a_n\}$ 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a_n \xrightarrow{p} 0$$

的充分必要条件是

$$n\mathbb{P}(|X_1| \geq n) \to 0.$$

此时，可取 $a_n = E(X_1 I_{\{|X_1|<n\}})$.

极限定理回顾

定理 1.2 (Strong law of large numbers，SLLN)

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} C$$

的充分必要条件是 EX_1 存在，且 $EX_1 = C$.

定理 1.3 (Central limit theorem, CLT)

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，其期望为 μ, 方差为 $\sigma^2 < \infty$，则

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

极限定理（续）

LLN 不成立的例子：Cauchy 分布

应用例

例 1.1（经验分布）

设 $\{X_j\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上独立同分布的随机序列，用 x_j 表示 X_j 的观测值，即对某个确定的 $\omega \in \Omega$，有 $x_j = X_j(\omega), j = 1, 2, \ldots$
则以概率 1，观测数列 $\{x_j\}$ 可以决定 X_j 的分布函数 $F(x)$.

证明. 对任何确定的 $x \in \mathcal{R}$，定义

$$g(X_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } X_j \le x, \\ 0, & \text{if } X_j > x. \end{cases}$$

$j = 1, 2, \ldots$. 则 $\{g(X_j)\}$ 是独立同分布的随机序列. 由 SLLN,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) = Eg(X_1) = P(X_1 \le x) = F(x) \quad a.s.$$

即以概率 1 有 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(x_j) = F(x)$.

极限定理（续）

例 1.2 (Monte Carlo)

假设要估计一个复杂函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分 $\int_a^b f(x)dx$. 假定 $0 \le f(x) \le c$. 令 $A=[a,b]\times[0,c]$. 从 A 中随机抽取 n 个点 *(i.i.d.)* $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$. 如何利用它们去估计该积分?

解. 用 B 表示曲线 $y=f(x)$ 下方的面积 $(a\le x\le b)$. 则 B 的面积为所要的积分. 定义指示变量 $I_1,\dots,I_n$: 如 $X_j\in B$ 则 $I_j=1$，否则为 0. 令 $\mu=EI_1$. 则 μ 就是 B 的面积占 A 的面积之比例.

$$\mu = EI_j = P(I_j=1) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{c(b-a)}.$$

因 $I_1,\dots,I_n$ 是 *i.i.d.* 的随机变量，且均值为 μ，故由大数律知下估计以概率 1 收敛到真实的积分值:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx c(b-a)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n I_j.$$

极限定理（续）

例 1.3

假设随机变量序列 $X, X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布，其共同的分布为：

$$\mathbb{P}(X=m)=\mathbb{P}(X=-m)=\frac{C}{2m^2\ln m}, \quad m\geq 3,$$

其中 C 为某个常数. 则 $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 服从**弱**大数定律，但不服从**强**大数定律.

证明. $\overline{X}_n$ 满足弱大数定律的充要条件为：

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(|X|\geq n)=0.$$

显然，

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(|X|\geq n)=\lim_{n\to\infty} n\sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}(|X|=m)$$

$$
\begin{aligned}
&= C \lim_{n\to\infty} n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2 \ln m} \le \lim_{n\to\infty} \frac{C}{\ln n} n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{C}{\ln n} n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{C}{\ln n} n \sum_{m=n}^{\infty} \Big(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{C}{\ln n} \frac{n}{n-1} = 0.
\end{aligned}
$$

因此 $\overline{X}_n$ 满足弱大数定律.
$\overline{X}_n$ 满足强大数定律的充要条件为 EX 存在. 然而

$$
EX^- = EX^+ = C \sum_{m=3}^{\infty} m \frac{1}{m^2 \ln m} = C \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m \ln m} = \infty.
$$

故 EX 不存在. 因此 $\overline{X}_n$ 不满足强大数定律.

Review

知识点回顾：

1. 概率空间：样本空间、事件、概率公理、基本性质等；
2. 组合、抽样：有序、无序、有放回、无放回；
3. 条件概率：定义、意义、贝叶斯法则、全概率公司、乘法法则、独立性与条件独立性；
4. 随机变量：定义、连续型和离散型、背景／故事，概率分布列 (PMF)、概率密度函数 (PDF)、分布函数 (CDF)，指示随机变量，概率母函数、矩母函数、特征函数 (CF)，无记忆性（几何分布、指数分布），二项分布的泊松近似，随机变量函数的分布，随机变量的 p 分位数等；
5. 重要的离散型分布：两点、二项、几何、负二项、超几何、泊松等；
6. 重要的连续型分布：均匀、指数、正态、Γ 分布、卡方、t 分布等；

Review

知识点回顾（续）：

7. 随机向量：联合分布、边缘分布、条件分布、独立性，多项分布、多元正态分布，随机向量函数的分布、条件分布和条件密度、次序统计量等；
8. 期望："期望、方差、协方差、相关系数"的定义、性质、计算及其应用 (e.g., 随机变量函数的期望)，不相关与独立，各种不等式 ($Markov$, $Chebyshev$, $Cauchy-Schwarz$/内积, Jensen)；条件期望、条件方差、重期望法则、全方差公式；
9. 收敛：几种收敛性的定义、相互间的关系，大数定律（强、弱）及其应用，中心极限定理及其应用

解题技巧：条件、对称、归一化、线性、指示随机变量、故事／背景、用简单情形／极端情形检查结果的正确性

Review

期末重要考点：

1. 重要的离散型分布：两点、二项、几何、负二项、超几何、泊松等；
2. 重要的连续型分布：均匀、指数、正态、Γ 分布、卡方、t 分布等；
3. 随机向量：多元正态分布（二维），随机向量函数的分布、条件分布和条件密度等；
4. 期望："期望、方差、协方差、相关系数"的定义、性质、计算及其应用 (e.g., 随机变（向）量函数的期望)
5. 各种不等式 (*Markov*, *Chebyshev*, 内积)；
6. 条件期望、条件方差、重期望法则、全方差公式；
7. 概率母函数、矩母函数、特征函数等；
8. 收敛：几种收敛性的定义、相互间的关系，大数定律（强、弱）及其应用，中心极限定理及其应用

分数分布情况：【大约】3: 约 30 分；4+6：约 50 分；5+7+8：约 30 分；判断题约 10 分.（有重叠）

独立随机变量之和

中心极限定理指出独立同分布的随机变量之和在一定条件下可近似为服从正态分布。这里给出的都是它们的精确分布。

X_i	$\sum_{i=1}^n X_i$
Bernoulli(p)	Binomial(n, p)
Binomial(m_i, p)	Binomial$(\sum_{i=1}^n m_i, p)$
Geometric(p)	NBin(n, p)
NBin(r_i, p)	NBin$(\sum_{i=1}^n r_i, p)$
Poisson(λ_i)	Poisson$(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$
Unif(0,1)	Triangle(0,1,2) $(n = 2)$
$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$
Exponential(λ)	Gamma(n, λ)
Gamma(α_i, λ)	Gamma$(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda)$
Z_i^2, for $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$	χ_n^2

例题

例 3.1

一个任务等可能地随机分配给两位同学完成. 若分配给第 i 位同学，则其花费的时间 X_i 服从 $\mathcal{E}(\lambda_i)$，且 X_1, X_2 相互独立. 设该任务完成花费的时间为 T. 求 ET, $Var(T)$. 若一开始该任务同时分配给这两位同学，以 X 表示该任务完成花费的时间，现过去了 *24* 小时仍未完成，请问在这个条件下，期望一共花费多久完成?

$ET = \frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2})$.

$Var(T) = \frac{3}{4}(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}) - \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$.

$E(X|X > 24) = 24 + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

例题

例 3.2

假设一个任务需三位同学合力完成. 第 i 位同学负责第 i 部分，其花费的时间 X_i 服从 $\mathcal{E}(\lambda_i)$，且 X_1, X_2, X_3 相互独立. 设该任务完成花费的总时间为 $T = X_1 + X_2 + X_3$. 求 $E(T|X_1 > 1, X_2 > 2, X_3 > 3)$.

根据线性性、独立性、无记忆性，有

$E(X_1|X_1 > 1) + E(X_2|X_2 > 2) + E(X_3|X_3 > 3) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + 6.$

例题

例 3.3

$X_1, X_2, ..., X_n$ 是 *i.i.d.* 的随机变量，$EX_1 = 3$. 令 $S_n = X_1 + ... + X_n$. 求 *(1)* $E(X_1X_2X_3|X_1)$, *(2)* $E(X_1|S_n)$.

(1) $9X_1$; (2) S_n/n.

例题

例 3.4

假设一片湖水中原有 X 条鱼, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. 一位统计学家担心湖里没有鱼了，就放了一条鱼到水中. 现记湖中有 Y 条鱼. 求 $E(1/Y)$.

$\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$.

例 3.5 (判断题之例)

$E(sinX) \geq sin(EX)$

错. $\geq$, $\leq$ 都可能.

谢谢！
祝大家期末取得好成绩！