《微分方程1》第十三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年12月20日

Theorem

考虑方程组$y' = f(x, y)$，其中$f(x, y)$ 在开区域Ω 上满足标准假设. 设$y = \phi(x)$ 是一个饱和解，其最大存在区间为(α, β)，则对开域Ω 中的任意紧集$\Omega_1 \subset \Omega$，存在$\alpha_1, \beta_1 \in (\alpha, \beta)$，使得

$$(x, \phi(x)) \notin \Omega_1, \quad \forall x \in (\alpha, \alpha_1) \cup (\beta_1, \beta).$$

<u>注1</u>: 由于定理中的紧集Ω_1 可以任意给定，故饱和解曲线可以任意逼近开域Ω 的边界.

<u>注2</u>: 如果将独立变量x 理解为时间变量的话，定理的意思是，对于开域Ω 中的任意紧集$\Omega_1 \subset \Omega$，在过去的某个时刻α_1 之前，以及在将来的某个时刻β_1 之后，饱和解曲线将逃离紧集Ω_1.

定理: 考虑方程$\frac{dy}{dx}=f(y)$, 这里映射$f:D\subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 连续可微, 其中D 是$\mathbb{R}^n$ 中的开区域. (右端函数f 不显含独立变量x 的方程称为自治方程). 设$y=\phi(x)$ 是方程的一个饱和解, 其最大存在区间为(α,β), 则对于任意紧集$D_1\subset D$,

若$\beta<+\infty$, 则$\exists\beta_1\in(\alpha,\beta)$, 使得$\phi(x)\notin D_1$, $\forall x\in(\beta_1,\beta)$;

若$\alpha>-\infty$, 则$\exists\alpha_1\in(\alpha,\beta)$, 使得$\phi(x)\notin D_1$, $\forall x\in(\alpha,\alpha_1)$.

定理的证明留作习题. 为证明前述定理, 即一般方程的饱和解特征, 需先建立两个引理.

Lemma (1)

记号与假设同上述定理，则对任意$(x_0,y_0)\in\Omega$，存在$\delta,h>0$，使得对任意$(\xi,\eta)\in R_\delta(x_0,y_0)$，Cauchy 问题$y'=f(x,y)$，$y(\xi)=\eta$ 的解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在区间$(\xi-h,\xi+h)$ 上存在，这里$R_\delta(x_0,y_0)$ 记闭矩形$|x-x_0|\le\delta,|y-y_0|\le\delta$.

注：引理中的常数$h>0$ 与初值点(ξ,η) 无关，而Piacrd 存在唯一性定理中的h 与初始点有关.

约定：为了强调解关于初值的依赖关系，往下将记Cauchy 问题$y'=f(x,y)$，$y(\xi)=\eta$ 的饱和解为$\phi(x,\xi,\eta)$.

证：由于Ω 为开区域，点$(x_0, y_0) \in \Omega$ 是内点，故存在$\delta > 0$，使得闭矩形$R_{2\delta}(x_0, y_0)$：$|x - x_0| \le 2\delta, |y - y_0| \le 2\delta$ 包含在开域Ω 之中．记$M := \max\{|f(x, y)|, (x, y) \in R_{2\delta}(x_0, y_0)\}$．定义

$$h := \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\}.$$

现断言上述定义的$\delta > 0$ 和$h > 0$ 满足Lemma 1 中的要求，即对任意$(\xi, \eta) \in R_\delta(x_0, y_0)$，解$\phi(x, \xi, \eta)$ 至少在$(\xi - h, \xi + h)$ 上存在.

断言之证明：对任意$(\xi,\eta)\in R_\delta(x_0,y_0)$，显然有

$$R_\delta(\xi,\eta)=\{(x,y),|x-\xi|\le\delta,|y-\eta|\le\delta\}\subset R_{2\delta}(x_0,y_0).$$

由Picard 定理知解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在$\Big(\xi-h(\xi,\eta),\xi+h(\xi,\eta)\Big)$上存在，这里

$$h(\xi,\eta):=\min\left\{\delta,\frac{\delta}{M(\xi,\eta)}\right\},$$

$$M(\xi,\eta):=\max\{|f(x,y)|,(x,y)\in R_\delta(\xi,\eta)\}.$$

显然$M(\xi,\eta)\le M$. 由此得到$h(\xi,\eta)\ge h$. 因此对任意$(\xi,\eta)\in R_\delta(x_0,y_0)$, 解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在区间$(\xi-h,\xi+h)$ 上存在. Lemma 1 得证. $\square$

引理2

Lemma (2)

记号与假设同上，对任意给定的紧集$\Omega_1 \subset \Omega$，存在$\mathbf{h} > \mathbf{0}$，使得对任意$(\xi, \eta) \in \Omega_1$，解 $\phi(\mathbf{x}, \xi, \eta)$ 至少在开区间 $(\xi - \mathbf{h}, \xi + \mathbf{h})$ 上存在，这里$\mathbf{h} > \mathbf{0}$ 与初始点(ξ, η) 无关，仅与紧集Ω_1 有关.

证：由Lemma 1 知对任意点$(x_0,y_0)\in\Omega_1$，存在$\delta=\delta(x_0,y_0)>0$，$h=h(x_0,y_0)>0$，使得对任意$(\xi,\eta)\in R_\delta(x_0,y_0)$，解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在$(\xi-h,\xi+h)$ 上存在. 记$R_\delta^0(x_0,y_0)$为$R_\delta(x_0,y_0)$ 的内部，即$R_\delta^0(x_0,y_0)$: $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$.

显然开集族

$$\left\{R_\delta^0(x_0,y_0),(x_0,y_0)\in\Omega_1\right\}$$

是紧集Ω_1 的一个开覆盖. 根据有限覆盖定理可知Ω_1 存在有限的开覆盖

$$\Omega_1\subset\bigcup_{j=1}^{m}R_{\delta_j}^0(x_j,y_j),$$

证明续

令$h=\min\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$，则$h$ 满足Lemma 2 中的要求，这里$h_k=h(x_k,y_k)>0$ 记开矩形$R^0_{\delta_k}(x_k,y_k)$ 中共同的存在半径$h_k>0$，即对任意点$(\xi,\eta)\in R^0_{\delta_k}(x_k,y_k)$，解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在$(\xi-h_k,\xi+h_k)$ 上存在．因为对任意$(\xi,\eta)\in\Omega_1$，存在k，$1\le k\le m$，使得$(\xi,\eta)\in R^0_{\delta_k}(x_k,y_k)$，于是解$\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在$(\xi-h_k,\xi+h_k)$ 上存在，从而至少在$(\xi-h,\xi+h)$ 上存在．Lemma 2 得证． $\square$

证: 只证β_1 的存在性. 关于α_1 的存在性完全类似.

情形一: $\beta = +\infty$. 由于紧集Ω_1 有界, 故存在$A > 0$, $B > 0$, 使得Ω_1 包含在开矩形$|x| < A$, $|y| < B$ 之中. 取$\beta_1 = A + 1$ 即可使得$(x, \phi(x)) \notin \Omega_1$, $\forall x \in (\beta_1, +\infty)$. 结论成立.

情形二: $\beta < +\infty$. 由Lemma 2 知对紧集Ω_1 存在$h > 0$, 使得对任意$(\xi, \eta) \in \Omega_1$, 解$\phi(x, \xi, \eta)$ 至少在$(\xi - h, \xi + h)$ 上存在. 取$\beta_1 = \beta - h$, 则可断言$(x, \phi(x)) \notin \Omega_1$, $\forall x \in (\beta_1, \beta)$.

反证. 若不然, 则存在$x_1 \in (\beta_1, \beta)$, 使得$(x_1, \phi(x_1)) \in \Omega_1$. 根据Lemma 2 知解$\phi(x, x_1, y_1)$, 至少在$(x_1 - h, x_1 + h)$ 上存在, 这里$y_1 = \phi(x_1)$. 定义

$$\phi^*(x) := \begin{cases} \phi(x), & x \in (\alpha, x_1) \\ \phi(x, x_1, y_1), & x \in [x_1, x_1 + h). \end{cases}$$

不难看出$\phi^*(x)$ 是解, 并且是解$\phi(x)$ 的一个延拓. 因为$\phi^*(x)$ 的定义区间为$(\alpha, x_1 + h) \supsetneq (\alpha, \beta)$, 注意$x_1 > \beta - h$, 即$\beta < x_1 + h$. 此与$\phi(x)$ 为饱和解的假设矛盾. 定理得证. □

饱和解的端点性质

定理: 考虑$y' = f(x,y)$, 这里函数$f(x,y)$ 在平面开域Ω 上满足标准假设. 设$y = \phi(x)$ 是饱和解, 它的最大存在区间为(α, β). 对右端点β, 必然发生以下三种情况之一:

(i) $\beta = +\infty$;

(ii) $\beta < +\infty$, $\phi(x)$ 在$x = \beta$ 左侧无界; 或等价地表示为 $\overline{\lim}_{x \to \beta^-} |\phi(x)| = +\infty$;

(iii) $\beta < +\infty$, $\lim_{x \to \beta^-} \mathrm{dist}[(x, \phi(x)), \partial\Omega] = 0$.

对左端点α，相应的结论成立，即以下三种情况必发生之一:

(iv) $\alpha = -\infty$;

(v) $\alpha > -\infty$，解$\phi(x)$ 在$x = \alpha$ 的右侧无界，或等价地表为

$\overline{\lim}_{x\to\alpha^+} |\phi(x)| = +\infty$;

(vi) $\alpha > -\infty$, $\lim_{x\to\alpha^+} \mathrm{dist}[(x,\phi(x)),\partial\Omega] = 0$,

这里$\mathrm{dist}[(x,\phi(x)),\partial\Omega]$ 表示点$(x,\phi(x))$ 与边界$\partial\Omega$ 的距离. 平面上点(x_0,y_0) 到集合$A \subset \mathbb{R}^2$ 的距离定义为

$$\mathrm{dist}[(x_0,y_0),A] := \inf\left\{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, (x,y) \in A\right\}.$$

注记

注1: 对方程组$y' = f(x, y)$, 即情形$f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 有相同的结论.

注2: 当边界$\partial\Omega$ 是空集时, 即$\Omega = \mathbb{R}^2$ 时, 情形(iii) 和(vi) 都不会出现.

注3: 情形(ii) 和(iii) 可以同时发生. 同理情形(v)和(vi) 也可以同时发生. 见下面的例子.

Example

考虑方程 $y' = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x}$. 方程的右端函数可看做定义在右半(或左半)平面上的函数. 注意方程右端是$\phi(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$的导数. 因此$\phi(x)$ 是解, 其最大存在区间为$(\alpha, \beta) = (0, +\infty)$. 显然饱和解$\phi(x)$ 在左端点$\alpha = 0$ 的右侧附近无界. 情形(v)出现. 因右半平面的边界是y 轴, 故$\mathrm{dist}[(x, \phi(x)), \partial\Omega] = x$. 因此$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{dist}[(x, \phi(x)), \partial\Omega] = 0$. 这表明情形(v)和(vi)同时发生.

证: 只证右端点β 情形的结论. 假设情形(i) 和(ii) 都不出现, 我们来证明必出现情形(iii). 即要证, 对任给$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当$\beta - x < \delta$ 时, $\mathrm{dist}[(x, \phi(x)), \partial\Omega] < \varepsilon$. 反证. 若不然, 则存在$\varepsilon_0 > 0$, 以及一个单调上升的点列$x_n \nearrow \beta$, 使得

$$\mathrm{dist}[(x_n, \phi(x_n)), \partial\Omega] \geq \varepsilon_0. \qquad (*)$$

由于$\{\phi(x_n)\}$ 有界(因情形(ii)不出现), 故这个序列有收敛子列. 不失一般性, 这个收敛子列仍记作$\{\phi(x_n)\}$, 并设 $\phi(x_n) \to \bar{y}$. 于是$(x_n, \phi(x_n)) \to (\bar{x}, \bar{y})$, 这里记 $\bar{x} = \beta$.

根据不等式(*)可知 $\mathrm{dist}[(\bar{x},\bar{y}),\partial\Omega]\geq\varepsilon_0$. 这表明点$(\bar{x},\bar{y})$ 是开域Ω 的内点. 对内点$(\bar{x},\bar{y})$, 应用Lemma 1 的结论可知存在 $\delta,h>0$, 使得对任意$(\xi,\eta)\in R_\delta(\bar{x},\bar{y})$, 解 $\phi(x,\xi,\eta)$ 至少在区间$(\bar{x}-h,\bar{x}+h)$ 上存在. 由于$(x_n,\phi(x_n))\to(\bar{x},\bar{y})$, 故存在充分大的正整数N, 使得 $\bar{x}-x_N<h$. 于是解$\phi(x,x_N,y_N)$ $(y_N:=\phi(x_N))$ 至少在(x_N-h,x_N+h) 上存在. 注意解$\phi(x)$ 与解$\phi(x,x_N,y_N)$ 是同一个解. 这表明饱和解 $\phi(x)$ 的最大定义区间 (α,β) 还可以向右扩充至更大的区间(α,x_N+h), 这是因为 $x_N+h>\bar{x}=\beta$. 这就导出了一个矛盾. 定理得证. 证毕. $\square$

Theorem

考虑$y' = f(x, y)$，其中$f : \Omega \subseteq \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}^n$ 上满足标准假设，$\Omega = (\alpha, \beta) \times \mathrm{IR}^n$ 为IR^{n+1} 中的条域. 进一步假设

$$|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x), \quad (x, y) \in \Omega, \qquad (*)$$

其中 $A(x)$, $B(x)$ 是(α, β) 上的非负连续函数，绝对值符号$|\cdot|$ 表示某个n 维向量的范数，则方程$y' = f(x, y)$ 每个饱和解的最大存在区间为(α, β). 特别当$(\alpha, \beta) = (-\infty, +\infty)$ 时，方程的每个饱和解均在整个$(-\infty, +\infty)$ 上存在.

注：不等式(*) 称为线性控制不等式.

证: 设$y=\phi(x)$ 为饱和解, $(a,b)\subset(\alpha,\beta)$ 为其最大存在区间.

要证$(a,b)=(\alpha,\beta)$, 即$a=\alpha$, $b=\beta$. 以下只证$b=\beta$. 证明

$a=\alpha$ 完全类似. 反证. 假设$b<\beta$. 取一个固定点$x_0\in(a,b)$,

对恒等式$\phi'(x)\equiv f(x,\phi(x))$ 两边从x_0 到$x>x_0$ 积分得

$$\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(s,\phi(s))ds,\quad \forall x\in[x_0,b).$$

两边取向量范数, 并利用线性控制不等式(*)以及作业习题四的

结论得

$$|\phi(x)|\leq|\phi(x_0)|+\int_{x_0}^{x}\Big[A(s)|\phi(s)|+B(s)\Big]ds$$

$$=C(x)+\int_{x_0}^{x}A(s)|\phi(s)|ds,\quad (**)$$

这里记$C(x)=|\phi(x_0)|+\int_{x_0}^{x}B(s)ds$.

证明续1: 回忆一个Gronwall 不等式

<u>Gronwall 不等式</u>: 设$u(x)$, $v(x)$ 和$c(x)$ 在区间$[x_0, x_0+h)$ 上非负连续, 且$u(x)$ 满足积分不等式

$$u(x) \le c(x) + \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)ds, \quad x \in [x_0, x_0+h),$$

则

$$u(x) \le c(x) + \int_{x_0}^{x} c(s)v(s)e^{\int_s^x v(\tau)d\tau}ds, \quad x \in [x_0, x_0+h).$$

对积分不等式(**) 应用上述Gronwall 不等式得

$$|\phi(x)| \leq C(x) + \int_{x_0}^{x} C(s)A(s)e^{\int_s^x A(\tau)d\tau}ds.$$

根据假设知函数$A(x)$, $C(x)$ 在$[x_0, b] \subset (\alpha, \beta)$ 上连续，从而有界，即存在正数$\lambda > 0$, $\mu > 0$, 使得

$$0 \leq A(x) \leq \lambda, \quad 0 \leq C(x) \leq \mu, \quad x \in [x_0, b].$$

于是对任意$x \in [x_0, b)$

$$|\phi(x)| \leq \lambda + \lambda\mu \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-s)ds} \leq \lambda + \lambda\mu e^{\lambda(b-x_0)}(b - x_0).$$

这表明饱和解$\phi(x)$ 在右端点$x = b$ 的左侧有界. 另一方面, 由于$b < \beta$, 解$\phi(x)$ 的函数曲线不可能接近Ω 的边界$\partial\Omega$, 即两条直线$x = a$ 和$x = b$. 这说明定理4中所述的情形(i),(ii),(iii)都没有出现. 矛盾. 因此假设$b < \beta$ 是错误的. 故$b = \beta$. 线性控制定理证毕. $\square$

Theorem

<u>定理</u>：考虑一阶线性方程组$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{b}(\mathbf{x})$，其中方阵$\mathbf{A}(\mathbf{x})$和向量值函数$\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 均假设在某个开区间$\mathbf{J}$ 上连续，则方程组的每个饱和解的最大存在区间为$\mathbf{J}$，即每个饱和解整体存在.

Proof.

记方程组右端映射为 $f(x,y) = A(x)y + b(x)$，则映射 f 在条域 $\Omega = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ 上满足标准假设. 进一步 f 还满足

$$|f(x,y)| \le \|A(x)\||y| + |b(x)|, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad (*)$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示某个方阵的范数. 由此可见映射 f 满足线性控制条件. 因此方程组的每个饱和解的最大存在区间为 (α, β). 证毕. $\square$

例：讨论一维方程$y' = (1-y^2)e^{x^2+y^2}$ 对于各种不同的初值条件解的最大存在区间.

解：记$\phi(x, x_0, y_0)$ 为方程满足$y(x_0) = y_0$ 的饱和解. 其最大存在区间记作(α, β). 显然两个端点α, β 与初始点(x_0, y_0) 有关. 首先注意两个事情. (i) 方程有两个常数解$y = \pm 1$. (ii) 方程的解曲线族关于原点对称. 也就是说，若$y(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ 是解，则$-y(-x)$也是. 证明如下. 令$z(x) = -y(-x)$, 则 $z'(x) = y'(-x) = [1-y^2(-x)]e^{x^2+y^2(-x)} = [1-z^2(x)]e^{x^2+z^2(x)}$, 这表明$z(x)$ 也是解.

以下根据 y_0 不同的位置，讨论α 和β 是有限或无穷.

情形一: $y_0 = \pm 1$. 此时解$\phi(x, x_0, y_))\equiv \pm 1$, 其最大存在区间为$(\alpha, \beta) = (-\infty, +\infty)$.

情形二: $|y_0| < 1$. 根据解的唯一性可知

$$|\phi(x, x_0, y_0)| < 1, \quad \forall x \in (\alpha, \beta). \quad (*)$$

若$\beta < +\infty$, 则根据饱和解的端点性质可知，解$\phi(x, x_0, y_0)$ 在$x = \beta$ 的左侧无界. 此与不等式(*) 相矛盾. 故$\beta = +\infty$. 同理可证$\alpha = -\infty$. 进一步根据不等式(*)可知，解$\phi(x, x_0, y_))$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上严格单调上升.

还可以证明(请自行验证)

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x,x_0,y_0)=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}\phi(x,x_0,y_0)=-1.$$

<u>情形三</u>: $y_0>1$. 仍根据解的唯一性可知

$$\phi(x,x_0,y_0)>1,\quad \forall x\in(\alpha,\beta).\quad (**)$$

由此可知$\phi'=(1-\phi^2)e^{x^2+\phi^2}<0$, $x\in(\alpha,\beta)$. 这表明解 $\phi(x,x_0,y_0)$ 在其存在区间(α,β) 里严格单调下降. 因此

$$1<\phi(x,x_0,y_0)<\phi(x_0,x_0,y_0)=y_0,\quad \forall x\in(x_0,\beta).$$

若$\beta < +\infty$, 那么根据饱和解的端点性质可知解ϕ 在$x = \beta$ 的左侧无界. 此与不等式(**) 矛盾. 故$\beta = +\infty$.

情形四: $y_0 < -1$. 利用解曲线族关于原点的对称性可知, 此时$\alpha = -\infty$, $\beta < +\infty$. 也可以类似于情形三讨论, 得到这个结果. 证毕. $\square$

注: 以后我们将利用微分不等式证明, 当$y_0 > 1$ 时, α 有限, 即$\alpha > -\infty$; 当$y_0 < -1$ 时, β 有限, 即$\beta < +\infty$.

考虑一阶方程$y' = \sin(xy)$. 虽然我们不能给出解的显式表达，但是利用相关理论，可对解的性质作探讨. （参考丁同仁李承治编著的《常微分方程教程》第二版，第93-97页例1）方程解的性质集中表述在以下两个定理之中.

Theorem

关于方程$y' = \sin(xy)$ 的解，以下四个结论成立. (1) 方程有平凡解，即$y = 0$ 是解; (2) 每个饱和解的最大存在区间均为$\mathbb{R}$; (3) 每个解$y(x)$ 都是偶函数，即$y(-x) = y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; (4) 全体解曲线族关于x 轴，关于y 轴，以及关于原点对称，即若$y(x)$ 是解，则$-y(x)$, $y(-x)$ 和$-y(-x)$ 也都是解.

证明：结论(1)显然成立．结论(2)根据线性控制定立刻得到．
证(3)：设$y(x)$ 是解，令$z(x)=y(-x)$，则$z'(x)=[y(-x)]'=-y'(-x)=-\sin[(-x)y(-x)]=\sin[xy(-x))]=\sin[xz(x)]$．这说明$z(x)$ 也是解．进一步还有$z(0)=y(0)$．于是根据解的唯一性知$z(x)\equiv y(x)$，即$y(-x)\equiv y(x)$，$\forall x\in\mathbb{R}$．证(4)：由于每个解$y(x)$ 是偶函数，即$y(-x)=y(x)$，故$y(-x)$ 也是解，并且是同一个解．这说明解曲线族关于y 轴对称．进一步可直接验证可知$-y(x)$ 是解．这说明解曲线族关于y 轴对称．由于解曲线同时关于x 轴和y 轴对称，因此也关于原点对称．定理证毕． $\square$

Theorem

方程 $y' = \sin(xy)$ 的每个解$y(x)$ 均满足

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \quad 且 \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0.$$

<u>证</u>：由于方程的每个解都是偶函数，故只需证明两个极限中的一个即可．以下我们证明 (*) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$．若$y(0) = 0$，则根据解的唯一性知$y(x) \equiv 0$．式(*)成立．设$y(0) \neq 0$，则解$y(x)$ 恒正或者恒负，因为解曲线不能与x 轴相交．由于$y(x)$ 是解时，$-y(x)$ 也是解．故可设$y(0) > 0$．

为清晰计, 我们建立如下三个断言.

断言1: 存在$\bar{x} > 0$, 使得$y(\bar{x}) = \bar{x}$.

断言2: $0 < y(x) < x, \forall x > \bar{x}$.

断言3: 存在充分大的正数$C > 0$, 使得$0 < y(x) < \frac{C}{x}, \forall x > \bar{x}$.

根据断言3, 我们立刻得到所要证明的结论$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

以下依次证明断言1, 断言2 和断言3.

<u>证断言1</u>: 要证存在$\bar{x}>0$，使得$y(\bar{x})=\bar{x}$. 反证. 若不然，则$y(x)>x$, $\forall x>0$. 对任意$x>x_1>0$,

$$y(x)-y(x_1)=\int_{x_1}^{x}y'(s)ds=\int_{x_1}^{x}\sin[sy(s)]ds.$$

考虑函数$xy(x)$. 由于

$$[xy(x)]'=y(x)+xy'(x)=y(x)+x\sin[xy(x)]$$

$$>x[1+\sin(xy(x))]\geq 0,\quad \forall x>0,$$

故函数$z(x):=xy(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上严格单调上升. 于是

$$y(x)-y(x_1)=\int_{x_1}^{x}\sin[sy(s)]ds$$

$$=\int_{x_1}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z'(s)}=\int_{x_1}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{y(s)+s\sin[z(s)]}.$$

现断言

$$\frac{\sin[z(s)]z'(s)}{y(s)+s\sin[z(s)]}\le\frac{\sin[z(s)]z'(s)}{y(s)},\quad \forall s>0$$

这只要分情形 $\sin[z(s)]\ge 0$ 和情形 $\sin[z(s)]<0$ 讨论即可. 根据上述断言得

$$y(x)-y(x_1)\le\int_{x_1}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{y(s)}=\int_{x_1}^{x}s\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)}.$$

回忆积分第二中值定理：考虑积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$，这里$f(x)$，$g(x)$ 假设在$[a,b]$ 上连续(实际上可积就行)，则

(i) 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上非负且上升，则存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

(ii) 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上非负且下降，则存在$\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\eta g(x)dx.$$

□

对积分

$$\int_{x_1}^{x} s\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)}$$

应用上述第二积分中值定理结论(i)得

$$\int_{x_1}^{x} s\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)} = x\int_{\xi}^{x}\frac{\sin[z(s)]z'(s)ds}{z(s)} = x\int_{z_1}^{z_2}\frac{\sin z}{z}dz, (*)$$

这里$\xi \in [x_1, x]$，$z_1 = \xi y(\xi)$，$z_2 = xy(x)$. 回忆广义积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz$$

收敛. 这是著名的Dirichlet 积分，积分值为$\frac{\pi}{2}$.

因此对于$\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在$M_1 > 0$ 充分大，使得

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin z}{z} dz < \frac{1}{2}, \quad \forall z_1, z_2 \geq M_1. \quad (**)$$

由于$z(x) = xy(x) > x^2 \to +\infty$，故存在充分大的$M_2 > 0$，使得$z(x) \geq M_1$，$\forall x \geq M_2$. 于是对于$\forall x > x_1 \geq M_2$，根据式(*)和(**) 得

$$y(x) - y(x_1) \leq x \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin z}{z} dz < \frac{x}{2}, \quad \forall x \geq M_2.$$

固定x_1，取$x > x_1$ 充分大，可使得$y(x) < y(x_1) + \frac{x}{2} < x$. 此与假设$y(x) > x$，$\forall x > 0$ 相矛盾. 断言1得证. □

断言2：要证 $0 < y(x) < x,\ \forall x > \bar{x}$. 对$\forall x > \bar{x}$,

$$y(x) - y(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{x} y'(s)ds = \int_{\bar{x}}^{x} \sin[sy(s)]ds.$$

若$\sin[sy(s)] \equiv 1,\ \forall s \in [\bar{x}, x]$，则

$$sy(s) \equiv 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{或} \quad y(s) \equiv \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{s}, \quad \forall s \in [\bar{x}, x].$$

于是一方面

$$y'(s) = \sin[sy(s)] \equiv 1,$$

但是另一方面

$$y'(s) = \frac{-2k\pi - \frac{\pi}{2}}{s^2}.$$

这是一个矛盾．因此必存在$s_0 \in [\bar{x}, x]$，使得$\sin[s_0 y(s_0)] < 1$．由此得

$$y(x) - y(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{x} \sin[sy(s)]ds < \int_{\bar{x}}^{x} 1ds = x - \bar{x}.$$

注意$y(\bar{x}) = \bar{x}$．故$y(x) < x$, $\forall x > \bar{x}$．断言2得证． $\square$

<u>证断言3</u>: 要证存在充分大的正数$C>0$, 使得$0<y(x)<\frac{C}{x}$, $\forall x>\bar{x}$. 取充分大的正数$C>\bar{x}^2$, 则

$$y(\bar{x})=\bar{x}<\frac{C}{\bar{x}}.$$

由连续函数的性质可知存在$\delta>0$, 使得

$$y(x)<\frac{C}{x},\quad \forall x\in(\bar{x},\bar{x}+\delta).$$

以下证明, 可取某个适当的$C>\bar{x}^2$, 使得

$$y(x)<\frac{C}{x},\quad \forall x\in(\bar{x},+\infty).\quad (**)$$

假设上述不等式(**)对任意正数$C > \bar{x}^2$均不成立，则必存在$x_1 > \bar{x}$，使得

$$y(x) < \frac{C}{x}, \quad \forall x \in (\bar{x}, x_1), \quad y(x_1) = \frac{C}{x_1}.$$

记$\tau(x) := \frac{C}{x} - y(x)$，则$\tau(x) > 0$，$\forall x \in (\bar{x}, x_1)$，$\tau(x_1) = 0$．于是$\tau'(x_1) \leq 0$．此即

$$-\frac{C}{x_1^2} - y'(x_1) \leq 0 \quad 即 \quad \sin[x_1 y(x_1)] + \frac{C}{x_1^2} \geq 0.$$

注意$C = x_1 y(x_1)$，我们就得到

$$\sin C + \frac{C}{x_1^2} \geq 0.$$

上式中正常数$C > \bar{x}^2$ 是任意取的. 现取$C = 2m\pi - \frac{\pi}{2}$, m 为充分大的正整数, 则有

$$-1 + \frac{C}{x_1^2} = -1 + \frac{x_1 y(x_1)}{x_1^2} = -1 + \frac{y(x_1)}{x_1} \geq 0.$$

由上式立刻得到$y(x_1) \geq x_1$, $x_1 > \bar{x}$. 此与断言2的结论相矛盾. 断言3得证. 从而定理得证. $\square$

例：考虑 Cauchy 问题$y' = y^2$, $y(0) = y_0$. 不难得到显式解

$$\phi(x, y_0) = \frac{y_0}{1 - xy_0}.$$

记这个解的最大存在区间为$J_{y_0} = (\alpha(y_0), \beta(y_0))$. 不难看出

$$J_{y_0} = \begin{cases} (\frac{1}{y_0}, +\infty), & y_0 < 0, \\ (-\infty, +\infty), & y_0 = 0, \\ (-\infty, \frac{1}{y_0}), & y_0 > 0. \end{cases}$$

例子续

等价地说，

$$\alpha(y_0) = \begin{cases} \frac{1}{y_0}, & y_0 < 0, \\ -\infty, & y_0 \geq 0. \end{cases},$$

$$\beta(y_0) = \begin{cases} \frac{1}{y_0}, & y_0 > 0, \\ +\infty, & y_0 \leq 0. \end{cases}$$

<u>定义</u>: 设$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (i) 称函数$g(u)$ 在点u_0 处下半连续, 如果$\liminf_{u\to u_0} g(u) \geq g(u_0)$. 等价定义: 如果对任意$L < g(u_0)$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$L \leq g(u), \quad \forall u : |u - u_0| < \delta.$$

(ii) 称$g(u)$ 在点u_0 处上半连续, 如果$\limsup_{u\to u_0} g(u) \leq g(u_0)$. 等价定义: 如果对任意$U > g(u_0)$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$U \geq g(u), \quad \forall u : |u - u_0| < \delta.$$

不难证明, 上例中的$\alpha(y_0)$ 是上半连续, 而$\beta(y_0)$ 是下半连续.

定理: 考虑方程 $y' = f(x, y, \lambda)$, 其中 $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, Ω 为 $\mathbb{R}^{n+2}$ 的开区域, f, f_y 于 Ω 上连续. 记 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 为 Cauchy 问题 $y' = f(x, y, \lambda)$, $y(\xi) = \eta$ 的饱和解, 其最大存在区间记作 $J(\xi, \eta, \lambda) = (\alpha(\xi, \eta, \lambda)), \beta(\xi, \eta, \lambda))$. 再记

$$D := \Big\{(x, \xi, \eta, \lambda), x \in J(\xi, \eta, \lambda), (\xi, \eta, \lambda) \in \Omega\Big\} \subset \mathbb{R}^{n+3}.$$

则以下结论成立.

1) 解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 作为四元函数在 D 上连续;

2) D 是 $\mathbb{R}^{n+3}$ 中的开集;

3) 函数 $\alpha(\xi, \eta, \lambda)$ 在 Ω 上半连续, $\beta(\xi, \eta, \lambda)$ 在 Ω 下半连续.

定理: 考虑方程 $y' = f(x, y, \lambda)$, 关于映射 f 的假设同上述定理, 再补充一个假设: $f_\lambda(x, y, \lambda)$ 于 Ω 上连续, 解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 以及开区域 $D \subset \mathbb{R}^{n+3}$ 的意义同上, 则以下结论成立.

(i) 饱和解 $\phi(x, \xi, \eta, \lambda)$ 作为四元函数在开区域 D 上连续可微;

(ii) 三对二阶混合偏导数 $\phi_{x\xi}$ 和 $\phi_{\xi x}$, $\phi_{x\eta}$ 和 $\phi_{\eta x}$, 以及 $\phi_{x\lambda}$ 和 $\phi_{\lambda x}$ 连续, 从而对应相等, 即 $\phi_{x\xi} = \phi_{\xi x}$, $\phi_{x\eta} = \phi_{\eta x}$, $\phi_{x\lambda} = \phi_{\lambda x}$;

(iii) 偏导数 ϕ_ξ, ϕ_η 和 ϕ_λ 分别是以下三个Cauchy 问题的解,

1. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z,\ z(\xi) = -f(\xi,\eta,\lambda),\quad (z = \phi_\xi);$
2. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z,\ z(\xi) = E,\quad (z = \phi_\eta);$
3. $z' = A(x,\xi,\eta,\lambda)z + b(x,\xi,\eta,\lambda),\ z(\xi) = 0,\quad (z = \phi_\lambda);$

其中$A(x,\xi,\eta,\lambda) := f_y(x,\phi,\lambda)$, $b(x,\xi,\eta,\lambda) := f_\lambda(x,\phi,\lambda)$, E 代表n 阶单位矩阵.

注：上述三个Cauchy 问题中的线性方程组均称作原方程$y' = f(x,y,\lambda)$ 关于解$y = \phi(x,\xi,\eta,\lambda)$ 的变分方程(variational equations).

结论(iii)的证明

证: 假设定理中的结论(i)和(ii)成立. 我们来证明结论(iii), 即证明三个偏导数ϕ_ξ, ϕ_η 和ϕ_λ 分别是上述三个Cauchy 问题的解. 我们只证明ϕ_ξ 由Cauchy 问题(1)唯一确定. 其余两个偏导数的确定方程可类似推导. 因为$\phi(x,\xi,\eta,\lambda)$ 是解, 所以

$$\phi_x = f(x,\phi,\lambda),\ \phi(\xi,\xi,\eta,\lambda) = \eta.$$

注意上式中的第一个等式中, $\phi = \phi(x,\xi,\eta,\lambda)$. 对上述两个等式关于$\xi$ 求偏导数得

$$\phi_{x\xi} = f_y(x,\phi,\lambda)\phi_\xi, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\phi(\xi,\xi,\eta,\lambda) = 0.$$

证明续

由于

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi}\phi(\xi,\xi,\eta,\lambda) = \phi_x(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi} + \phi_\xi(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi},$$

而

$$\phi_x(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi} = f(x,\phi,\lambda)\Big|_{x=\xi} = f(\xi,\eta,\lambda).$$

于是 $\phi_\xi(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi} = -f(\xi,\eta,\lambda)$. 又由于 $\phi_{x\xi} = \phi_{\xi x}$, 故

$$[\phi_\xi]_x = f_y(x,\phi,\lambda)\phi_\xi,\ \phi_\xi(x,\xi,\eta,\lambda)\Big|_{x=\xi} = -f(\xi,\eta,\lambda).$$

这表明 $z = \phi_\xi$ 是Cauchy 问题(1)的解. 证毕. □

例子

菲利波夫习题1067: 记 $\phi(t,\mu)$ 为Cauchy 问题 $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}+\mu te^{-x}$, $x(1)=1$ 的解, 求

$$\left.\frac{\partial}{\partial\mu}\phi(t,\mu)\right|_{\mu=0}.$$

解: 由于$\phi(t,\mu)$ 是上述Cauchy 问题的解, 故

$$\phi_t=\frac{\phi}{t}+\mu te^{-\phi},\ \phi(1,\mu)=1.$$

对上述两个等式关于μ 求偏导数得到

$$\phi_{t\mu}=\frac{\phi_\mu}{t}+te^{-\phi}+\mu te^{-\phi}\phi_\mu,\quad \phi_\mu(1,\mu)=0.$$

例子续1

于上式中令$\mu=0$，注意到$\phi_{t\mu}=\phi_{\mu t}$，我们就得到确定$z(t)=\phi_\mu(t,\mu)\Big|_{\mu=0}$的Cauchy 问题

$$z'=\frac{z}{t}+te^{-\phi(t,0)},\ z(1)=0. \quad (*)$$

为了求解(*)，我们需要先求解$\phi(t,0)=\varphi(t,\mu)\Big|_{\mu=0}$. 为此需求解原 Cauchy 问题当$\mu=0$ 时的解，即求解$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}$，$x(1)=1$.

很容易得到其解为$x(t)=t$，即$\phi(t,0)=t$.

于是Cauchy 问题(*)为

$$z' = \frac{z}{t} + te^t, \quad z(1) = 0.$$

这是一阶线性方程的Cauchy问题．根据求解公式得

$$z(t) = t\left[z(1) + \int_1^t \frac{1}{\tau}\tau e^{-\tau} d\tau\right] = t\int_1^t e^{-\tau} d\tau = t(e^{-1} - e^{-t}).$$

于是所求的导数为

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mu}\phi(t, \mu)\right|_{\mu=0} = t(e^{-1} - e^{-t}).$$

解答完毕.

习题一. 考虑方程$\frac{dy}{dx} = f(y)$, 这里映射$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 连续可微, 其中D是$\mathbb{R}^n$ 中的开区域. 这样的方程称为自治方程, 因为右端函数不显含独立的时间变量x. 设$y = \phi(x)$ 是方程的一个饱和解, 其最大存在区间为(α, β). 对于开域D 中的任意紧集$D_1 \subset D$, 证明

(i) 若$\beta < +\infty$, 则存在$\beta_1 \in (\alpha, \beta)$, 使得$\phi(x) \notin D_1$, $\forall x \in (\beta_1, \beta)$;

(ii) 若$\alpha > -\infty$, 则存在$\alpha_1 \in (\alpha, \beta)$, 使得$\phi(x) \notin D_1$, $\forall x \in (\alpha, \alpha_1)$.

习题二. 丁同仁李承治编著的《常微分方程教程》第二版, page 89, 习题3.3之题2, 3, 4, 5. (注：题5可补充假设：$f(x, y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 上是连续可微的).

习题三. 证明如下定理(Gronwall不等式的又一个推广). 假设 (1) 函数$f(x)$在$[0,+\infty)$ 上非负连续, 且积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ 收敛;
(2) 函数$a(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上恒正, 连续且单调下降;
(3) 函数$u(x)$ $[0,+\infty)$ 上非负, 连续, 有界, 并且满足积分不等式

$$u(x) \le a(x) + \int_x^{+\infty} f(s)u(s)ds, \quad \forall x > 0,$$

证明

$$u(x) \le a(x)e^{\int_x^{+\infty} f(s)ds}, \quad \forall x > 0.$$

作业续2

<u>习题四</u>. 设$f(x)$ 为闭区间$[a,b]$ 上的n 维向量值连续函数，证明

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx.$$

<u>选作题</u>. (将Gronwall不等式从一维推广到二维情形.) 设函数$u(x,y)$ 在闭矩形Ω: $[0,x_0]\times[0,y_0]$ 上非负连续，且满足积分不等式

$$u(x,y) \leq a(x,y) + b(x,y)\int_0^x\int_0^y c(s,t)u(s,t)dsdt, \quad \forall (x,y)\in\Omega,$$

其中二元函数$a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ 在闭矩形Ω 上非负连续，考虑如何利用函数$a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ 对函数$u(x,y)$ 作上界估计？