《微分方程1》第八讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年11月15日

零点有限性定理

Theorem

设$y(x)$ 是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的非平凡解，则解$y(x)$ 在任意有界闭区间$[a, b] \subset J$ 里的零点个数有限，这里J 是连续函数$P(x), Q(x)$ 的定义区间.

定理证明

Proof.

反证：假设解$y(x)$ 在$[a,b]$ 上有无穷个零点，那么这无穷个零点存在一个收敛子列$x_n \to x_0$, $n \to +\infty$，且$x_n \neq x_0$, $\forall n$. 根据有界闭区间$[a,b]$ 的紧性可知，极限点$x_0 \in [a,b]$. 于是$y(x_0) = \lim_{n\to+\infty} y(x_n) = 0$. 进一步

$$y'(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

再根据解的唯一性知$y(x)$ 恒为零. 矛盾. □

考虑方程 $y''+4y=0$ 和 $z''+z=0$. 它们分别有解 $y=\sin 2x$ 和 $z=\sin x$. 显然在区间 $[0,2\pi]$ 上，前者零点的个数是5，多于后者零点的个数3. 在这个意义上可以说前一个方程振荡的强度(或速度)强于后者. 受这个例子的启发，Sturm 发现(或发明)了如下比较定理. Sturm 的比较定理和零点定理开启了微分方程定性理论的先河. 微分方程定性理论自Sturm时代起，经过Poincaré, Lyapunov 等人努力，已成为微分方程发展的主流.

Theorem (Sturm 比较定理)

考虑方程 $y'' + q(x)u = 0$ 和 $z'' + r(x)z = 0$, 其中$q(x)$ 和$r(x)$ 在区间J 上连续. 假设$q(x) \geq r(x)$, $\forall x \in J$, 且在J 的任何子区间上, $q(x)$ 和$r(x)$ 不恒等. 设$z(x)$ 是方程$z'' + r(x)z = 0$ 的任一非零解, 且x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ 是$z(x)$ 的一对相邻零点, 则方程$y'' + q(x)y = 0$ 的任一非零解$y(x)$ 存在零点$\xi \in (x_1, x_2)$.

推论一

Corollary

考虑方程 $y'' + q(x)y = 0$ 和 $y'' + r(x)y = 0$，其中$q(x)$ 和$r(x)$ 在区间$[a, +\infty)$ 上连续，并且$q(x) \geq r(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$.

(i) 若方程$y'' + r(x)y = 0$ 振荡，则方程$y'' + q(x)y = 0$ 必振荡；

(ii) 若方程$y'' + q(x)y = 0$ 非振荡，则方程$y'' + r(x)y = 0$ 非振荡.

Proof.

根据振荡与非振荡的定义，以及Sturm 比较定理可立刻得到推论. □

推论二

推论：考虑方程 $y''+q(x)y=0$ 和 $z''+r(x)z=0$，其中$q(x)$和$r(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上连续，且$q(x)\geq r(x)$，$\forall x\in[a,+\infty)$. 则对任意子区间$J\subset[a,+\infty)$，(i) 对于这两个方程的任意非零解$y(x)$ 和$z(x)$

$$\#\Big\{x\in J, y(x)=0\Big\}\geq\#\Big\{x\in J, z(x)=0\Big\}-1,$$

(ii) 对方程$z''+r(x)z=0$ 的每个非零解$z(x)$，方程$y''+q(x)y=0$ 存在非零解$y(x)$，使得

$$\#\Big\{x\in J, y(x)=0\Big\}\geq\#\Big\{x\in J, z(x)=0\Big\},$$

这里符号$\#\{\cdots\}$ 表示集合$\{\cdots\}$ 元素的个数.

证明

证明：结论(i)直接由Sturm 比较定理得到．证(ii)．对方程$z'' + r(x)z = 0$ 的每个非零解$z(x)$，若$z(x)$ 在J 上无零点，则结论显然成立．假设$z(x)$ 有零点$x_1 \in J$，则方程$y'' + q(x)y = 0$ 的每个满足初值条件$y(x_1) = 0$，$y'(x_1) \neq 0$ 的解$y(x)$ 来说，结论(ii)成立．推论二得证． □

在推论1和推论2的意义下，我们称方程$y'' + q(x)y = 0$ 的振荡强度高于方程$z'' + r(x)z = 0$ 的振荡强度．于是Sturm 比较定理可简单地表述为：方程$y'' + q(x)y = 0$ 的振荡强度随着系数函数$q(x)$ 的增加而增强．

Example

菲利波夫习题728. 估计方程 $xy'' + y = 0$ 的任一非平凡解在区间 $[25, 100]$ 上零点间距 d 的上界和下界.

解: 方程可写作 $y'' + \frac{1}{x}y = 0,\ x > 0$. 考虑方程 $u'' + \frac{1}{25}u = 0$ 和 $v'' + \frac{1}{100}v = 0$. 显然 $\frac{1}{100} < \frac{1}{x} < \frac{1}{25},\ \forall x \in (25, 100)$. 显然两个比较方程的任意非平凡解零点的间距为常数, 且间距分别为 $d_1 = 5\pi$ 和 $d_2 = 10\pi$. 因此根据Sturm 比较定理可知, $d_1 < d < d_2$. 适当放大缩小可知 $15.7 < d < 31.5$. 解答完毕.

证：设x_1, x_2 是$z(x)$ 的两个相邻零点，且$x_1 < x_2$，则$z(x_1) = 0$，$z(x_2) = 0$，且$z(x) \neq 0$，$\forall x \in (x_1, x_2)$．要证$y(x)$ 在(x_1, x_2) 内至少有一个零点．反证．若不然，则$y(x) \neq 0$，$\forall x \in (x_1, x_2)$．不妨设$z(x)$ 和$y(x)$ 在(x_1, x_2) 上均大于零，即

$$z(x) > 0 \quad 且 \quad y(x) > 0, \quad \forall x \in (x_1, x_2).$$

考虑$z(x)$ 和$y(x)$ 所满足的方程

$$z'(x) + r(x)z(x) = 0,$$
$$y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

证明续1

上述两个方程分别乘以$y(x)$ 和$z(x)$，然后相减得

$$y''(x)z(x) - z''(x)y(x) + [q(x) - r(x)]z(x)y(x) = 0.$$

对上式积分，从x_1 到x_2 得

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big[y''(x)z(x) - z''(x)y(x)\Big]dx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} [q(x) - r(x)]z(x)y(x)dx = 0.$$

对上式第一个积分作分部积分，注意$z(x_1) = z(x_2) = 0$ 可得

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big[y''(x)z(x) - z''(x)y(x)\Big]dx = \int_{x_1}^{x_2} \Big[z(x)dy'(x) - y(x)dz'(x)\Big]$$

$$= \Big[z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\Big]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \Big[z'(x)y'(x) - y'(x)z'(x)\Big]dx$$

$$= y(x_1)z'(x_1) - y(x_2)z'(x_2).$$

于是

$$y(x_2)z'(x_2) - y(x_1)z'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [q(x) - r(x)]z(x)y(x)dx.(*)$$

观察上述等式. 由假设知 $q(x) - r(x)$ 非负且在任何子区间不恒为零. 函数 $z(x)$ 和 $y(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 恒正. 因此等式(*)右边大于零.

证明续3

考虑左边 $y(x_2)z'(x_2) - y(x_1)z'(x_1)$. 由$y(x) > 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$, 知$y(x_1) \geq 0$ 且$y(x_2) \geq 0$. 注意$z(x)$ 满足$z(x_1) = u(x_2) = 0$ 且$z(x) > 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$. 故可断言$z'(x_1) > 0$ 且$z'(x_2) < 0$. 于是等式(*)的左边小于或等于零. 这就导出了一个矛盾. 矛盾说明$y(x)$ 在开区间(x_1, x_2) 上必有零点. 证毕. $\square$

Definition

方程 $x^2u'' + xu' + (x^2 - p^2)u = 0\ (x > 0)$ 称作Bessel 方程，其解称作Bessel 函数，这里$p \geq 0$ 是一个实参数.

关于Bessel 函数的专著(752页，36页参考文献，共791篇):

G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd Ed., Cambridge University Press, London, 1944.

Bessel 方程的振荡性质

Theorem

(I) 对任意$p \geq 0$, Bessel 方程是振荡的.

(II) 设$u_p(x)$ 是Bessel方程的任意一个非零解, 则

(i) 当$0 \leq p < \frac{1}{2}$ 时, 解$u_p(x)$ 零点间距小于π, 即在任何长度为π 的开区间$(c, c+\pi)$ 上必有零点;

(ii) 当$p = \frac{1}{2}$ 时, 解$u_p(x)$ 的零点间距恰好为π;

(iii) 当$p > \frac{1}{2}$ 时, 解$u_p(x)$ 的零点间距大于π, 即解$u_p(x)$ 在任何闭区间$[c, c+\pi]$ 上至多有一个零点.

Proof.

证明留作习题, 即课本第196页Problems 1, 2. □

Bessel 的光辉形象

Friedrich Wilhelm Bessel

(German, 1784 – 1846)

一个摄动方程的振荡性

例：考虑方程 $y'' + [1 + \phi(x)]y = 0$，这里$\phi(x)$ 假设在区间$J = [a, +\infty)$ 上连续．如果$|\phi(x)|$ 比较小的话，这个方程可以看作方程$y'' + y = 0$ 的摄动方程．假设$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$，则根据Sturm 比较定理可知，摄动方程$y'' + [1 + \phi(x)]y = 0$ 在区间J 上是振荡的．这是因为由$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$，可知存在充分大的$x_1 > a$，使得$1 + \phi(x) > \frac{1}{2}$，$\forall x \geq x_1$．于是在区间$[x_1, +\infty)$ 上摄动方程的振荡强度高于方程$y'' + \frac{1}{2}y = 0$．而后者显然是振荡的．因此摄动方程在区间$[x_1, +\infty)$ 是上振荡的，从而在$[a, +\infty)$ 也是振荡的．解答完毕．

一个摄动方程解的有界性问题

熟知谐振动方程$u''+u=0$ 的每个非平凡解都是振荡的(振荡性), 且在$(-\infty,+\infty)$ 上有界(有界性). 由上述讨论可知, 当$\phi(x)$ 满足$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$ 时, 方程$u''+[1+\phi(x)]u=0$ 仍然是振荡的, 即振荡性在$[a,+\infty)$ 上得以保持. 现考虑问题, 当$\phi(x)$ 满足何种条件时, 解的有界性得以保持. 这里$\phi(x)$ 假设在区间$J=[a,+\infty)$ 上连续. 问题: 条件$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$ 是否也能保证摄动方程$u''+[1+\phi(x)]u=0$ 解的有界性. 答案是否定的. 例如可以证明方程$u''+\left(1+\frac{\sin 2x}{x}\right)u=0$ 存在解在区间$[0,+\infty)$ 上无界. (结论出自一篇意大利文的论文. 细节略去)

Theorem

设$\phi(x)$ 在半无穷区间$[0,+\infty)$ 上连续可微, 且满足条件

(i) $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$; (ii) $\int_0^{+\infty}|\phi'(x)|dx<+\infty$,

则方程$u''+[1+\phi(x)]u=0$ 的每个解在$[0,+\infty)$ 上有界.

Gronwall不等式: 设$u(x)$, $v(x)$ 在区间$[x_0, x_0+h)$ 上非负连续,并且$u(x)$ 满足积分不等式

$$u(x) \le c + \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)ds, \quad x \in [x_0, x_0+h),$$

其中c 是一个非负常数, 则

$$u(x) \le c e^{\int_{x_0}^{x} v(s)ds}, \; x \in [x_0, x_0+h). \quad (*)$$

注: 不等式(*) 常称作Gronwall 不等式. 这个不等式的意义在于, 可以用函数$v(x)$ (通常是已知的), 来估计函数$u(x)$ (通常是未知的).

证：记$f(x)=\int_{x_0}^{x}v(s)u(s)ds$，则$f(x_0)=0$，$u(x)\le c+f(x)$，并且$f'(x)=u(x)v(x)\le cv(x)+f(x)v(x)$. 由此得不等式

$$f'(x)-f(x)v(x)\le cv(x).$$

于上述不等式两边同乘$e^{-\int_{x_0}^{x}v(s)ds}$ (积分因子)得

$$e^{-\int_{x_0}^{x}v(s)ds}\Big[f'(x)-f(x)v(x)\Big]\le cv(x)e^{-\int_{x_0}^{x}v(s)ds}.$$

上述不等式可写作

$$\Big[f(x)e^{-\int_{x_0}^{x}v(s)ds}\Big]'\le cv(x)e^{-\int_{x_0}^{x}v(s)ds}.$$

对上式两边积分，从x_0 到x 得

$$f(x)e^{-\int_{x_0}^{x} v(s)ds} \leq c\int_{x_0}^{x} v(s)e^{-\int_{x_0}^{s} v(\tau)d\tau} ds.$$

于是

$$f(x) \leq ce^{\int_{x_0}^{x} v(s)ds} \int_{x_0}^{x} v(s)e^{-\int_{x_0}^{s} v(\tau)d\tau} ds$$

$$= ce^{\int_{x_0}^{x} v(s)ds}\left(1 - e^{-\int_{x_0}^{x} v(s)ds}\right) = c\left(e^{\int_{x_0}^{x} v(s)ds} - 1\right).$$

由此即得

$$u(x) \leq c + f(x) \leq ce^{\int_{x_0}^{x} v(s)ds}.$$

证毕.

Lemma (Gronwall 不等式之推广)

设$u(x)$, $v(x)$ 和$c(x)$ 在区间$[x_0, x_0+h)$ 上非负连续，并且$u(x)$ 满足积分不等式

$$u(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)ds, \quad x \in [x_0, x_0+h),$$

则

$$u(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} c(s)v(s)e^{\int_s^x v(\tau)d\tau}ds, \quad x \in [x_0, x_0+h).$$

Proof.

证明留作习题. □

证：设$u(x)$ 是方程$u''+[1+\phi(x)]u=0$ 的任一非零解，则

$$u''(x)+\Big[1+\phi(x)\Big]u(x)=0,$$

上式两边同乘以$u'(x)$ 得

$$u''(x)u'(x)+\Big[1+\phi(x)\Big]u'(x)u(x)=0.$$

上式可写作

$$\frac{1}{2}\Big[u'(x)^2+u(x)^2\Big]'+\phi(x)u'(x)u(x)=0.$$

对上式两边从0 到x 积分得

$$\frac{1}{2}\left[u'(x)^2+u(x)^2\right]-\frac{1}{2}\left[u'(0)^2+u(0)^2\right]$$

$$+\int_0^x \phi(s)u'(s)u(s)ds=0. \quad (*)$$

对上式中的积分作分部积分得

$$\int_0^x \phi(s)u'(s)u(s)ds=\frac{1}{2}\left[\phi(x)u(x)^2-\phi(0)u(0)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x \phi'(s)u(s)^2ds, \quad (**)$$

将式(**)带入式(*)并加以整理得

$$u'(x)^2 + [1+\phi(x)]u(x)^2 = C_1 +$$

$$\int_0^x \phi'(s)u(s)^2 ds \le C_1 + \int_0^x |\phi'(s)|u(s)^2 ds,$$

这里

$$C_1 = u'(0)^2 + [1+\phi(0)]u(0)^2.$$

由条件$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$ 知存在充分大的$x_1>0$，使得

$$1+\phi(x) \ge \frac{1}{2}, \quad \forall x \ge x_1.$$

于是对于任意$x \geq x_1$

$$\frac{1}{2}u(x)^2 \leq [1+\phi(x)]u(x)^2 \leq$$

$$u'(x)^2 + [1+\phi(x)]u(x)^2 \leq C_1 + \int_0^x |\phi'(s)|u(s)^2 ds.$$

于是得到关于$u(x)^2$ 的积分不等式

$$u(x)^2 \leq C + \int_0^x 2|\phi'(s)|u(s)^2 ds, \quad \forall x \geq x_1,$$

这里$C = 2C_1$.

证明续4

根据Gronwall 不等式得

$$u(x)^2 \le Ce^{\int_0^x 2|\phi'(s)|ds}, \quad \forall x \ge x_1,$$

再利用假设$\int_0^{+\infty} |\phi'(s)|ds < +\infty$ 得

$$u(x)^2 \le Ce^{\int_0^{+\infty} 2|\phi'(s)|ds}, \quad \forall x \ge x_1,$$

这就证明了存在正数$M > 0$, 使得

$$|u(x)| \le M, \quad \forall x \ge 0.$$

这表明解$u(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上有界. 证毕. □

一阶n 维常微分方程组是指如下方程组

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \qquad\vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \end{cases}$$

这里$x \in \mathbb{R}$ 仍然代表独立变量，$' = \frac{d}{dx}$ 表关于x 的求导算子，$y_i = y_i(x)$ 代表第i 个未知函数，$f_i(x, y_1, \cdots, y_n)$ 为$n+1$ 个变量的函数，$(x, y_1, \cdots, y_n) \in \Omega$，其中$\Omega$ 为$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个开区域， $i = 1, 2\cdots, n$.

若记

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

则上述方程组可简记作如下向量形式

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

这里$\mathbf{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的映射, 通常假设$\mathbf{f}$ 在Ω 上连续.

Example

考虑二维方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

这个方程组实际上等价于二阶方程 $y'' + y = 0$. 我们将会看到, 任何高阶方程都可以化为一个等价的一阶方程组.

Definition

一个连续可微的向量值函数$y = \phi(x)$, $x \in J$ (J 为一个开区间) 称为方程组$y' = f(x, y)$ 的解, 如果(i) $(x, \phi(x)) \in \Omega$, $\forall x \in J$; (ii) $\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x))$, $\forall x \in J$.

例子

Example

不难验证，方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

有两个解

$$\phi_1(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}, \quad \phi_2(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definition

与一阶数量(一维)方程类似，经过点$(x_0, y_0) \in \Omega$ 的Cauchy问题是指，寻求方程组$y' = f(x, y)$ 满足初始条件$y(x_0) = y_0$ 的一个解．这个问题同样记作

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Example

不难验证，方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

满足初始条件

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解

$$\phi_1(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}.$$

Theorem

定理：假设$f:\Omega\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 及其偏导数f_y 在开区域Ω上连续，则对于任意点$(x_0,y_0)\in\Omega$，(i)（存在性）Cauchy 问题$y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 有解$y=\phi(x)$，$x\in J_1$，其中J_1 是一个包含x_0 的开区间；(ii)（唯一性）若问题还有其他解$y=\psi(x)$，$x\in J_2$，则$\psi(x)\equiv\phi(x)$，$\forall x\in J_1\cap J_2$。

Proof.

证明以后给出。 □

考虑如下形状的n 阶常微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \qquad (*)$$

在如下变量替换下

$$\begin{cases} u_1 = y, \\ u_2 = y', \\ \quad \vdots \\ u_{n-1} = y^{(n-2)} \\ u_n = y^{(n-1)}, \end{cases}$$

我们就得到一个与高阶方程(*)相关的一阶n 维方程组

$$
\begin{cases}
u_1' = u_2, \\
u_2' = u_3, \\
\quad \vdots \\
u_{n-1}' = u_n \\
u_n' = f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n).
\end{cases}
$$

上述方程组的向量形式为$u' = F(x, u)$，这里$u = (u_1, \cdots, u_n)^T$，$F = (u_2, \cdots, u_n, f)^T$. 我们称这个方程组为高阶方程(*)所对应的一阶方程组.

Example

情形$n = 2$. 二阶方程 $y'' = f(x, y, y')$ 对应的一阶方程组为

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = f(x, u_1, u_2). \end{cases}$$

其向量形式为$u' = F(x, u)$, $u = (u_1, u_2)^T$, $F = (u_2, f)$. 特别对于谐振动方程$y'' + y = 0$, 其对应的二维方程组为

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -u_1. \end{cases}$$

这里$u = (u_1, u_2)^T = (y, y')^T$.

定理: (i) 若一个n 阶连续可微函数$y=y(x)$, $x\in J$ 是方程$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 的解, 则向量值函数

$$u(x)=\begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

是其对应的一阶方程组$u'=F(x,u)$ 的解;

(ii) 若一阶连续可微的向量值函数

等价性定理，续

$$u(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}, \quad x \in J,$$

是对应一阶方程组$u' = F(x, u)$ 的解，则$u(x)$ 的第一个分量$u_1(x)$ 是高阶方程$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 的解.

证: 只证明情形$n=2$. 考虑二阶方程(*) $y''=f(x,y,y')$ 及其对应的二维一阶方程组为

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = f(x,u_1,u_2). \end{cases} \qquad (**)$$

证(i): 设二阶连续可微函数$y=y(x)$, $x\in J$ 是方程(*)的解, 即$y''(x)=f(x,y(x),y'(x))$, $\forall x\in J$. 记

$$u(x)=\begin{bmatrix} u_1(x), \\ u_2(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(x), \\ y'(x) \end{bmatrix},$$

则显然$u_1'(x)=y'(x)=u_2(x)$，且

$$u_2'(x)=y''(x)=f(x,y(x),y'(x))=f(x,u_1(x),u_2(x)).$$

即$u(x)$ 是方程组(**)的解，即

$$\begin{cases} u_1'(x)=u_2(x), \\ u_2'(x)=f(x,u_1(x),u_2(x)). \end{cases}$$

证(ii). 设$u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ 是方程组(**)的解，即

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x), \\ u_2'(x) = f(x, u_1(x), u_2(x)), \end{cases} \quad \forall x \in J.$$

则显然$u(x)$ 的第一的分量函数$u_1(x)$ 是二阶连续可微的，并且$u_1''(x) = u_2'(x) = f(x, u_1(x), u_2(x)) = f(x, u_1(x), u_1'(x))$, $\forall x \in J$. 这表明$u_1(x)$ 是二阶方程$y'' = f(x, y, y')$的解. 证毕. $\square$

对于二阶线性方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$，其对应的一阶二维线性方程组为 $u' = A(x)u + b(x)$，其中

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(x) & -a_1(x) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix},$$

且

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

对于高阶线性方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$，不难验证，其对应的一阶n 维线性方程组为$u'=A(x)u+b(x)$，其中矩阵$A(x)$ 为

$$A(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{bmatrix},$$

和向量$\mathbf{b}(x)$ 为

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

一阶线性方程组是指如下形式的方程组

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

这里$\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ 代表n 个未知函数，$\mathbf{A}(x) = [a_{ij}(x)]$ 为n 阶方阵，$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), \cdots, b_n(x))^T$ 均为n 维列向量，它们均假设在某个开区间J 上连续.

Theorem

定理：对于任意点$x_0 \in J$，$y_0 \in \mathbb{R}^n$，一阶线性方程组的Cauchy问题$y' = A(x)y + b(x)$，$y(x_0) = y_0$ 的解存在唯一，且解的最大存在区间为J，即每个解整体存在.

Proof.

定理证明以后给出. □

注：一阶线性方程组一个重要性质是它的每个解具有整体存在性. 这是线性方程(组)与非线性方程(组)的主要区别.

Theorem

定理: 一阶n 维线性齐次方程组 $y' = A(x)y$ 的全体解构成一个n 维线性空间.

证明: 证明思想基本与高阶线性齐次方程的情形类似. 任意取定一点$x_0 \in J$, 记$\phi_i(x)$ 为Cauchy 问题$y' = A(x)y$, $y(x_0) = e_i$ 的解, 这里e_i 记第i 个分量为1, 其余分量均为零的n 维列向量, $i = 1, \cdots, n$. 显然解向量$\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 个线性无关. 因为若令

$$\lambda_1\phi_1(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) \equiv 0, \quad \forall x \in J.$$

于上式中取$x=x_0$,即得到$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T=(0,\cdots,0)^T$. 故这n 个解向量线性无关. 再证齐次方程组$y'=A(x)y$ 的每个解均可表示这n 个解向量的线性组合. 设$\psi(x)$ 是方程组$y'=A(x)y$ 的任意一个解. 记$\psi(x_0)$ 的分量为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 令$\phi(x)=\lambda_1\phi_1(x)+\cdots+\lambda_n\phi_n(x)$, 则显然$\phi(x)$ 是解, 且$\psi(x_0)=\phi(x_0)$. 根据解的唯一性可知两个解$\psi(x)$ 和$\phi(x)$ 恒同. 定理得证. $\square$

Definition

齐次方程组$y' = A(x)y$ 的任意n 个解$\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 所构成的矩阵$\Phi(x) := [\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)]$ 称为方程组一个解矩阵；如果这n 解是线性无关的，则称这个解矩阵为基本解矩阵；每个解矩阵的行列式均称作方程组的一个Wronsky 行列式.

注：一阶连续可微的n 阶函数矩阵$\Phi(x)$ 是方程组$y' = A(x)y$ 的解矩阵，当且仅当$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$, $x \in J$.

例: 已知齐次方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

有两个解

$$\phi_1(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}, \quad \phi_2(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

这两个解所确定的解矩阵为

$$\Phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x)] = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

例子续

由于解$\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ 线性无关，故这个解矩阵是基本解矩阵.

它们对应的Wronsky行列式为

$$\det[\phi_1(x), \phi_2(x)]$$

$$= \det \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theorem

齐次方程组$y' = A(x)y$ 的任意一个Wronsky 行列式$W(x)$ 可表为

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} trA(s)ds}, \quad \forall x \in J,$$

其中$trA(s)$ 表示矩阵$A(s)$ 的迹(trace), 即$tr(A) = tr(a_{ij}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, 其中$x_0 \in (a, b)$ 是任意一个固定点.

对于高阶线性齐次方程 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$, 其任意n 个解$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 所对应的Wronsky 行列式$W(x)$ 定义为$W(x) := \det \Phi(x)$, 其中

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

已证$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}$, $x_0, x \in J$. 这是高阶线性齐次方程的Liouville 公式.

注意上述矩阵$\Phi(x)$ 是方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$ 所对应的一阶线性齐次方程组$u'=A(x)u$ 的解矩阵，其中系数矩阵$A(x)$ 为

$$A(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{bmatrix}.$$

注意$\mathrm{tr}[A(x)]=-a_1(x)$.

高阶线性方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$ 的n 个解$y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ 确定了方程组$u'=A(x)u$ 的n 个解向量$\phi_1(x)$，$\cdots$，$\phi_n(x)$，即矩阵$\Phi(x)$ 的n 个列向量．易见两种情形下的Wronsky 行列式的定义是一致的．进一步两种情形下的Liouville 公式也相同，因为

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}A(s)ds}=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(s)ds}.$$

Liouville定理的证明

证: 设$\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)$ 为方程组$y' = A(x)y$ 的n 个解, 对应的解矩阵和Wronsky 行列式分别记作$\Phi(x) = [\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)]$, $W(x) = \det\Phi(x)$. 以下证$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x A(s)ds}$. 这等价于$W'(x) = tr[A(x)]W(x)$. 为清晰计, 我们证明当$n = 3$ 时, 这个等式成立. 当$n = 3$ 时,

$$W(x) = \det(\phi_{ij}) = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{vmatrix}.$$

根据行列式求导规则我们有

$$W'(x) =$$

$$\begin{vmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \phi'_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \phi'_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi'_{31} & \phi'_{31} & \phi'_{33} \end{vmatrix}.$$

记上述三个行列式为$W_1(x)$, $W_2(x)$, $W_3(x)$. 由于$\Phi(x)$ 是解矩阵, 即$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$, 此即

$$\begin{bmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \phi'_{13} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \phi'_{23} \\ \phi'_{31} & \phi'_{31} & \phi'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \phi_{33} \end{bmatrix}.$$

证明续2

由此得

$$(\phi'_{11},\phi'_{12},\phi'_{13})=\left(\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\phi_{k1},\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\phi_{k2},\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\phi_{k3}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}(\phi_{k1},\phi_{k2},\phi_{k3}).$$

将上式代入的第一个行列式$W_1(x)$ 得

$$W_1(x)=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\begin{vmatrix}\phi_{k1}&\phi_{k2}&\phi_{k3}\\ \phi_{21}&\phi_{22}&\phi_{23}\\ \phi_{31}&\phi_{31}&\phi_{33}\end{vmatrix}=a_{11}W(x).$$

同理可证

$$W_2(x) = a_{22}(x)W(x), \quad W_3(x) = a_{33}(x)W(x).$$

这就证明了$W'(x) = \mathrm{tr}[A(x)]W(x)$. 从而Liouville 公式

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} A(s)ds}.$$

得证. $\square$

例: 考虑 $y' = A(x)y$, 其中 $y \in \mathbb{R}^2$,

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{x^2+x-1} & \frac{2(x+1)}{x^2+x-1} \end{bmatrix}.$$

不难验证

$$\phi_1(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ x \end{bmatrix}, \quad \phi_2(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 \\ 2x \end{bmatrix}$$

是两个线性无关的解. 它们对应的Wronsky 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x^2+1 \\ x & 2x \end{vmatrix} = x^2 + x - 1.$$

例子续

简单计算得

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds = \int_{x_0}^{x} \frac{2(s+1)ds}{s^2+2s-1} = \ln \frac{x^2+2x-1}{x_0^2+2x_0-1}.$$

由此得

$$e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds} = \frac{x^2+2x-1}{x_0^2+2x_0-1}.$$

这验证了Liouville公式

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds}.$$

注：设$\Phi(x)$ 是方程组$y' = A(x)y$ 的一个解矩阵，则对于任何常数矩阵C，矩阵$\Phi(x)C$ 也是解矩阵. 这是因为

$$[\Phi(x)C]' = \Phi'(x)C = A(x)\Phi(x)C = A(x)[\Phi(x)C].$$

但是矩阵$C\Phi(x)$ 则不一定是解矩阵. 显然，当$\Phi(x)$ 是基本解矩阵，且常数矩阵C 可逆时，$\Phi(x)C$ 也是基本解矩阵.

作业

课本习题：page 196，1，2.

补充题1：证明推广的Gronwall不等式. 设$u(x)$, $v(x)$ 和$c(x)$ 在区间$[x_0, x_0+h)$ 上非负连续，并且$u(x)$ 满足积分不等式

$$u(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)ds, \quad x \in [x_0, x_0+h),$$

则

$$u(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} c(s)v(s)e^{\int_s^x v(\tau)d\tau}ds, \quad x \in [x_0, x_0+h).$$

作业续1

菲利波夫习题: (Sturm 定理的应用) 731, 732, 733, 734, 735, 736.

注1: 菲氏习题731 的意思是, 证明方程$y'' + xy = 0$ 的任意一个非平凡解在区间$-25 \leq x \leq 25$ 上至少有15个零点. 实际上还可以改进这个结论, 即将至少15 个改为至少20 个.

注2: 菲氏习题732 关于$q(x)$ 有假设: $q(x)$ 是递增的, 这里递增的意思是严格递增.

作业续2

<u>选作题</u>：考虑Hill 方程$u'' + a(t)u = 0$，其中函数$a(t)$ 是实轴上以2π 为周期的周期连续函数．若$a(t)$ 还满足

$$n^2 < a(t) < (n+1)^2, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty),$$

其中$n \geq 0$ 为非负正数．证明方程没有非平凡的2π 周期解，也就是说，若$u(t)$ 是方程的一个以2π 为周期的周期解，则$u(t) \equiv 0$.

(注：情形$n = 0$ 和$n \geq 1$ 的情形，证明方法有所不同.)