参考答案

2019 年 12 月 11 日

第三章习题

3.1 证明: (1) 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \geq 0$，其中 $\alpha + \beta = 1$，有 $a^T(\alpha x + \beta y) = \alpha(a^T x) + \beta(a^T y)$，因此 $a^T x$ 是凸函数。

(2) 对任意的 $x, y \in \mathcal{X}, \alpha, \beta \geq 0$, 其中 $\alpha+\beta = 1$, 有 $(a^i)^T(\alpha x+\beta y) = \alpha(a^i)^T x+\beta(a^i)^T y \leq b_i$ 对任意的 $i = 1, \cdots, m$ 成立，即 $\alpha x + \beta y \in \mathcal{X}$，因此 $\mathcal{X}$ 是凸集。又由 $(a^i)^T x$ 为连续函数，可知 $\mathcal{X}$ 是闭集。因此 $\mathcal{X}$ 是闭凸集。

(3) 由推论 2.15，非空凸集的相对内点非空，故成立。 □

3.2 证明: 记 $S = \{x \in \mathcal{X} | f(x) = \min_{y \in \mathcal{X}} f(y)\}$，由题意知 S 非空，并假设 w 为 $\mathcal{X}$ 的一个极点.

(i) 若 $\exists x \in S \cap ri(\mathcal{X})$, 由相对内点定义可知 $\exists \alpha > 0, v = x + \alpha(x - w) \in \mathcal{X}$, 所以 $x = \frac{1}{1+\alpha} v + \frac{\alpha}{1+\alpha} w$. 由凹函数性质可知

$$f(x) \geq \frac{1}{1+\alpha} f(v) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(w) \geq \frac{1}{1+\alpha} f(x) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x) = f(x),$$

所以上式中等号都成立，因此 $f(w) = f(x) = \min_{y \in \mathcal{X}} f(y)$，所以命题成立，最小值在极点 w 处达到。

(ii) 若 $S \cap ri(\mathcal{X}) = \varnothing$, 由于 S 非空，总可以取到一个 $x^* \in S$, 则 $x^* \notin ri(\mathcal{X})$, 所以 x^* 和 $\mathcal{X}$ 可被一个超平面 $H = \{x | a^T x = b\}$ 真分离，且有 $a^T x^* = b$，不妨设 $\mathcal{X} \subset \{x | a^T \leq b\}$。进一步，若存在 y 为 $\mathcal{X} \cap H$ 的一个极点, 则对任意满足 $\exists t \in (0, 1)$ 使得 $y = t x_1 + (1 - t) x_2$ 的 $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$，都有

$$b = a^T y = t a^T x_1 + (1 - t) a^T x_2 \leq t b + (1 - t) b = b, \tag{0.1}$$

所以 $a^T x_1 = b = a^T x_2$, 所以 $x_1, x_2 \in \mathcal{X} \cap H$，再由 y 为 $\mathcal{X} \cap H$ 的极点可知，$x_1 = y = x_2$, 所以 y 也是 $\mathcal{X}$ 的一个极点，所以 $\mathcal{X} \cap H$ 的极点集包含于 $\mathcal{X}$ 的极点集。

显然,$dim(\mathcal{X} \cap H) \leq dim(\mathcal{X})$. 若 $dim(\mathcal{X} \cap H) = dim(\mathcal{X})$，由于 $\mathcal{X} \cap H \subset \mathcal{X}$, 所以二者的最小仿射空间相同, 记为 A; 另外, 由 $\mathcal{X} \cap H \subset H$, A 也应当包含于 H 的仿射空间中, 即 $A \subset H$, 所以 $\mathcal{X} \subset A \subset H$, 这与 H 是 $\{x^*\}$ 和 $\mathcal{X}$ 的真分离超平面矛盾，所以 $dim(\mathcal{X} \cap H) < dim(\mathcal{X})$。显然，$f|_{\mathcal{X} \cap H}$ 在闭凸集 $\mathcal{X} \cap H$ 上达到最小值 $f(x^*)$。为说明 $\mathcal{X} \cap H$ 有极点，我们需要如下引理。

引理 若 $C \in R^n$ 为非空闭凸集，则 C 有极点的充要条件是 C 不包含任一直线。

引理的证明 必要性：若 y 为 C 的一个极点，且 $\{x + \lambda d | \lambda \in R\} \subset C$ 为一 C 中直线，所以 $\forall n \in N, \frac{n-1}{n} y + \frac{x \pm nd}{n} \in C$, 令 $n \to \infty$, 由闭集性质知，$y \pm d \in C$, 但 $y = \frac{y-d}{2} + \frac{y+d}{2}$, 与 y 是极点矛盾，所以 C 中不包含直线。

充分性：对 n 进行归纳，当 $n = 1$ 时显然成立; 假设当 $n \leq k$ 时命题成立，则当 $n = k + 1$ 时，由于 C 不包含任一直线，所以 $\exists x \in C, y \notin C$. 设连接 x, y 的线段交 C 的边界于 z, , 不失

一般性地，可以假设 $z=0$, 则存在一个超平面 H，满足 $x\in H$ 且 C 包含于 H 的一个闭半平面，显然 $C\cap H$ 位于一个 R^n 的 $n-1$ 维子空间中，且不包含任一直线，由归纳假设，$C\cap H$ 有极点，类似式 (0.1) 分析可知，它也是 C 的极点，所以命题对 $n=k+1$ 也成立。**引理证毕。**

根据引理，因为 $\mathcal{X}$ 有极点，所以 $\mathcal{X}$ 不包含任一直线，所以 $\mathcal{X}\cap H$ 不包含任一直线，所以 $\mathcal{X}\cap H$ 有极点。所以，若 $\mathcal{X}\cap H$ 有极点且 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}\cap H$ 可以达到最小值 $f(x^*)$，如果我们可以证明 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}\cap H$ 的某个极点上达到最小值，则我们知道该极点也是 $\mathcal{X}$ 的极点，则 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 的该极点处达到最小值。

所以我们只需要证明 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}\cap H$ 可以达到最小值 $f(x^*)$ 即可，此时问题的维度下降了，我们所讨论的 $\mathcal{X}\cap H$ 仍然是满足题目要求的非空闭凸集，只是维数下降了。所以我们可以将 $\mathcal{X}\cap H$ 当作新的 $\mathcal{X}$ 继续上述步骤，这一过程最多重复 $dim(\mathcal{X})$ 次，若某一次重复中满足 (i) 的情况，即 x^* 属于当前操作集合的相对内点，则可以找到一个达到最小值的极点。若每次都不是 (i) 的情况，则最后得到一个 0 维的单点集 $\{x^*\}$，显然为极点，则 x^* 为 $\mathcal{X}$ 的一个极点。 □

3.3 证明：由多面体表示定理，$\exists x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_k$ 使得 $\mathcal{X}=\{\sum_{i=i}^n\lambda_ix_i+\sum_{j=1}^k\beta_jy_j|\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geq 0,\sum_{i=1}^n\lambda_i=1;\beta_1,\cdots,\beta_k\geq 0\}$。则对多面体中的任意一点 z，总可以表示成 $z=\sum_{i=i}^n\lambda_ix_i+\sum_{j=1}^k\beta_jy_j, f(z)=\sum_{i=i}^n\lambda_if(x_i)+\sum_{j=1}^k\beta_jf(y_j)$。由 f 在此多面体上有下界可知有 $f(y_j)\geq 0,\forall j$ 成立。从而有 $\inf\{f\{\mathcal{X}\}\}=inf\{f\{conv\{x_1,\cdots,x_n\}\}\}$ 而 $conv\{x_1,\cdots,x_n\}\subset\mathcal{X}$ 是有界闭集，而线性函数连续，因此在多面体上最小值可达。

多面体可能无界

另外线性函数是凹函数，多面体 $\mathcal{X}$ 非空闭凸集且至少有一个极点，由 3.2 知最小值在 $\mathcal{X}$ 的一个极点处达到。 □

3.4 证明：$Ax=b\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^nx_i\alpha_i=b$, 若 $\{\alpha_i|i\in\mathcal{I}(x)\}$ 线性相关, 即 $\exists\{c_i\}_{i\in\mathcal{I}(x)}$ 不全为 0, s.t.$\sum_{i\in\mathcal{I}(x)}c_i\alpha_i=0$, 我们总可以使得这些 c_i 足够小满足 $x_i\pm c_i\geq 0,i\in\mathcal{I}(x)$。我们额外定义 $c_i=0,i\notin\mathcal{I}(x)$ 得到一个 n 维的向量 c。从而 $x\pm c\in\mathcal{X}$，并且 $x=\frac{1}{2}(x+c)+\frac{1}{2}(x-c)$，且由 $x+c\neq x-c$，这与 x 是极点矛盾，因此 $\{\alpha_i|i\in\mathcal{I}(x)\}$ 线性无关。 □

3.5 证明：不妨设 B 是 A 的前 m 个列向量，$A=(B\ N)$，$(B\ N)\begin{pmatrix}x_B\\0\end{pmatrix}=Bx_B+0=b\Longrightarrow\begin{pmatrix}x_B\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{X}$，又反设 $\begin{pmatrix}x_B\\0\end{pmatrix}$ 不是极点，即 $\exists$ 不同的两点 $x_1,x_2\in\mathcal{X}$，$t\in(0,1)$，$s.t\ tx_1+(1-t)x_2=\begin{pmatrix}x_B\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\frac{1}{1-t}\begin{pmatrix}x_B\\0\end{pmatrix}-\frac{t}{1-t}x_1=x_2\geq 0$，设$x_1=\begin{pmatrix}x_{B_1}\\x_{N_1}\end{pmatrix}\Longrightarrow -\frac{1}{1-t}x_{N_1}\geq 0,x_{N_1}\geq 0\Longrightarrow x_{N_1}=0\Longrightarrow x_{B_1}=B^{-1}b=x_B\Longrightarrow t=1$，矛盾。 □

3.6 证明：利用 $cl(conv(f))$ 的定义,$epi(cl(conv(f)))=cl(conv(epi(f)))$. 而 $cl(conv(epi(f)))=\{(x,y)^T|\quad y\geq -1,-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}\}\bigcup\{(x,y)^T|\quad y\geq sin(x),\frac{3\pi}{2}<x\leq 2\pi\}$, 故有:

$$cl(conv(f))(x)=\begin{cases}-1 & -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}\\ sin(x) & \frac{3\pi}{2}<x\leq 2\pi\end{cases}\tag{0.2}$$

函数值有界的定义域为 $[-\frac{\pi}{2},2\pi]$。 注意闭 □

3.7 证明：由 f 在 $\bar{x}$ 处可微，可知 $\bar{x}$ 为 $\mathcal{X}$ 的内点，于是由定理可知 $\partial f(\bar{x})$ 非空。对于任意的 $d\in\partial f(\bar{x})$，我们令 $x=\bar{x}+\alpha e_i$，其中 e_i 是第 i 个位置为 1，其他位置为 0 的向量。由于 $\bar{x}$ 是内点，则我们总可以取到充分小的 α 使得 $x\in\mathcal{X}$，且满足 $f(x)\geq f(\bar{x})+\alpha d_i$。令 $\alpha\to 0^+$，有

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{f(\bar{x}+\alpha e_i)-f(\bar{x})}{\alpha}\geq d_i$$

即 $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})\geq d_i$。类似地令 $\alpha\to 0^-$，则我们可以得到 $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})\leq d_i$。因此我们有 $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})\ d_i,i=1,\cdots,n$ 成立。由梯度函数的定义可知，有 $d=\nabla f(\bar{x})$，由 d 的任意性可知，$\partial f(\bar{x})=\nabla f(\bar{x})$。

□

3.8 证明: 由于 $\mathcal{X}$ 是开集, 任取 $x^0 \in \mathcal{X}$, 存在 $\delta > 0$, 使得立方体 $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i^0 - \delta \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + \delta\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset \mathcal{X}$. 则 Q 中任意一点都可以表示成 Q 的 2^n 个极点的凸组合, 由 f 凸知 f 在 Q 上有上界。我们令 M 为 Q 中 2^n 个极点处函数值的最大值, 则 f 在 Q 上可以被此值控制住。令 $B(x^0, \delta)$ 为以 x^0 为球心, δ 为半径的开球, 则 f 在 $\bar{B}(x^0, \delta)$ 上仍然被 M 控制。取 $x \in B(x^0, \delta), x \neq x^0$, 设 n 维向量 u 与 $x - x^0$ 同方向, 且 $\|u\| = \delta$。令 $\lambda = \dfrac{\|x - x^0\|}{\delta} \in (0, 1)$, 则 $x = x^0 + \lambda u = \lambda(x^0 + u) + (1 - \lambda)x^0$, 且 $x^0 = x - \lambda u = \dfrac{1}{1+\lambda}x + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}(x^0 - u)$。

由 f 凸, 知 $f(x) \leqslant \lambda f(x^0 + u) + (1 - \lambda)f(x^0) \leqslant \lambda M + (1 - \lambda)f(x^0)$,
$f(x^0) \leqslant \dfrac{1}{1+\lambda}f(x) + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}f(x^0 - u) \leqslant \dfrac{f(x) + \lambda M}{1+\lambda}$,
即 $-\lambda(M - f(x^0)) \leqslant f(x) - f(x^0) \leqslant \lambda(M - f(x^0)) \Rightarrow |f(x) - f(x^0)| \leqslant \dfrac{M - f(x^0)}{\delta}\|x - x^0\|$。故 f 在 x^0 处连续, 由 x^0 任意性, 知 f 在 $\mathcal{X}$ 上连续。 □

3.9 $\mathcal{X} = [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{x} \in [0, 1) \\ 2 & \text{x} = 1 \end{cases}$$

是个凸函数且在 $x = 1$ 点不连续。

3.10 证明: 取 $\mathcal{X}$ 最小仿射空间 $\mathscr{A}$, 则由相对内点的定义可知, 对任意的一个内点 x^0, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开球 $B(x_0, \delta)$ 使得 $\mathcal{X}^0 =: B(x_0, \delta) \cap \mathscr{A} \subset \mathcal{X}$, 则 $\mathcal{X}^0$ 为包含 x^0 的非空开凸集。我们将 f 限制定义在 $\mathcal{X}^0$ 上, 则由 3.8 知 f 在 $\mathcal{X}^0$ 上连续。由连续函数的定义, 对任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $0 < \delta' < \delta$ 使得只要 $\|x - x_0\| < \delta'$ 且 $x \in \mathcal{X}^0$, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。所以对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, 只要 $\|x - x_0\| < \delta'$, 必有 $x \in B(x_0, \delta)$, 且 $x \in \mathcal{X} \subset \mathscr{A}$, 故必有 $x \in \mathcal{X}^0$, 所以必有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 因此, 当 $x \in \mathcal{X}, x \to x_0$, 有 $f(x) \to f(x_0)$。 □

3.11 $\partial f(0) = [0, 1]$

3.12 (1) $f(x) = x^3$ $(x \geq 0)$ 的共轭函数:
$f^*(y) = \sup_{x \geq 0}(xy - x^3)$。令 $g(x) \equiv xy - x^3$ $(x \geq 0)$, 则 $g'(x) = y - 3x^2$。

- 当 $y \leq 0$ 时, 对任意 $x(> 0)$ 都有 $g'(x) < 0$。

x	0	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$(-\infty)$

  由上图可知, $g(x)$ 在 $x = 0$ 取最大值 $g(0) = 0$。于是 $f^*(y) = 0$。

- 当 $y > 0$ 时, 满足 $g'(x) = 0$ 的 $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{y}{3}}$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$(-\infty)$

  由上图可知, $g(x)$ 在 $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$ 取最大值 $g\left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y}$。于是 $f^*(y) = \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y}$。

由此得知，

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & (y \leq 0) \\ \frac{2\sqrt{3}}{9} y\sqrt{y} & (y > 0) \end{cases}$$

(2) $f_1(x) \equiv f(x) + b \ (x \geq 0)$ 的共轭函数：

$$\begin{aligned} f_1^*(y) &= \sup_{x \geq 0}(xy - f_1(x)) = \sup_{x \geq 0}(xy - x^3 - b) = \sup_{x \geq 0}(xy - x^3) - b = f^*(y) - b \\ &= \begin{cases} -b & y \leq 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{9} y\sqrt{y} - b & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $f_2^*(x) \equiv f(x+a)$ 的共轭函数：
$f_2^*(y) = \sup_{x \geq 0}(xy - f_2(x)) = \sup_{x \geq 0}(xy - (x+a)^3)$。令 $g_2(x) \equiv xy - (x+a)^3$，则 $g_2'(x) = y - 3(x+a)^2$。

- 当 $y \leq 3a^2$ 时，对任意 $x > 0$ 都有 $g_2'(x) < 0$。

x	0	$\cdots$	$(+\infty)$
$g_2'(x)$		$-$	
$g_2(x)$	$-a^3$	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知，$g_2(x)$ 在 $x = 0$ 取最大值 $g_2(0) = -a^3$。

- 当 $y > 3a^2$ 时，满足 $g_2'(x) = 0$ 的 $x = \sqrt{\frac{y}{3}} - a$。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{y}{3}} - a$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-a^3$	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知，$g_2(x)$ 在 $x = \sqrt{\frac{y}{3}} - a$ 取最大值 $g_2\left(\sqrt{\frac{y}{3}} - a\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} y\sqrt{y} - ay$。

由此得知

$$f_2^*(y) = \begin{cases} -a^3 & y \leq 3a^2 \\ \frac{2\sqrt{3}}{9} y\sqrt{y} - ay & y > 3a^2 \end{cases}$$

(4) $f_3(x) \equiv cf(x+a) \ (x \geq 0)$ 的共轭函数：
$f_3^*(y) = \sup_{x \geq 0}(xy - f_3(x)) = \sup_{x \geq 0}(xy - c(x+a)^3)$。令 $g_3(x) \equiv xy - c(x + a^3)$，则 $g_3'(x) = y - 3c(x+a)^2$。

- 当 $y \leq 3ca^2$ 时，对任意 $x > 0$ 都有 $g_3'(x) < 0$。

x	0	$\cdots$	$(+\infty)$
$g_2'(x)$		$-$	
$g_2(x)$	$-ca^3$	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知，$g_3(x)$ 在 $x = 0$ 取最大值 $g_3(0) = -ca^3$。

- 当 $y > 3ca^2$ 时，满足 $g_3'(x) = 0$ 的 $x = \sqrt{\frac{y}{3c}} - a$。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{y}{3c}} - a$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-ca^3$	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知，$g_3(x)$ 在 $x = \sqrt{\frac{y}{3c}} - a$ 取最大值 $g_3\left(\sqrt{\frac{y}{3c}} - a\right) = \frac{2\sqrt{3c}}{9c}y\sqrt{y} - ay$。

由此得到

$$f_3^*(y) = \begin{cases} -ca^3 & y \leq 3ca^2 \\ \frac{2\sqrt{3c}}{9c}y\sqrt{y} - ay & y > 3ca^2 \end{cases}$$

3.13

先求 $f(x)$ 的共轭函数 $f^*(y) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{y^Tx - x^TAx\}$，由 A 正定，知其存在逆矩阵，且在 $x = \frac{1}{2}A^{-1}y$ 取得最小值，因此

$$f^*(y) = \frac{1}{4}y^TA^{-1}y$$

$\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$

$f(x) + b$ 的共轭函数:

$$f_1^*(y) = f^*(y) - b = \frac{1}{4}y^TA^{-1}y - b$$

$\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$

$f(x + a)$ 的共轭函数:

$$f_2^*(y) = f^*(y) - a^Ty = \frac{1}{4}y^TA^{-1}y - a^Ty$$

$\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$

$cf(x + a)$ 的共轭函数:

$$f_3^*(y) = cf_2^*(y/c) = \frac{1}{4c}y^TA^{-1}y - a^Ty$$

$\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$

3.14 证明:

由于 P 正定，根据 3.13 的结论，x^TPx 的共轭函数是 $\frac{1}{4}y^TP^{-1}y$，易知 $f(x) = \frac{1}{2}x^TPx$ 的共轭函数是 $f^*(y) = \frac{1}{2}y^TP^{-1}y$，且 $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$，根据引理 3.8 可知，$x^Ty \leq f(x) + f^*(y) = \frac{1}{2}x^TPx + \frac{1}{2}y^TP^{-1}y$ 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 成立，得证。

□

3.15 证明: 由 g_i 为连续凸函数和 $\mathcal{K}$ 为有界闭凸集可知，$\mathcal{F}_m, \mathcal{F}_{m-1}$ 为闭凸集，由题目知 $\mathcal{F}_m \neq \mathcal{F}_{m-1}$，我们取 $x_0 \in \mathcal{F}_{m-1} \backslash \mathcal{F}_m$，由凸集分离定律可得 $\exists c \neq 0, s.t. c^Tx > c^Tx_0, \forall x \in \mathcal{F}_m$，又由于 $\mathcal{F}_m$ 是有界闭集，于是 $min_{x\in\mathcal{F}_m}c^Tx > c^Tx_0 \geq min_{x\in\mathcal{F}_{m-1}}c^Tx$。 □

3.16 该命题不正确。
反例:考虑 $f(x)=x^2$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。令 $\mathcal{X}=[0,1]$, 有 $ri(\mathcal{X})=(0,1)$, $f^{-1}(ri(\mathcal{X}))=(-1,0)\bigcup(0,1)$，而 $f^{-1}(\mathcal{X})=[-1,1]$, $ri(f^{-1}(\mathcal{X}))=(-1,1)$，于是 $f^{-1}(ri(\mathcal{X}))\neq ri(f^{-1}(\mathcal{X}))$。

3.17 证明：记 (P) 为上面的最优化问题、(Q) 为下面的最优化问题，并记 valP 和 valQ 分别为 (P) 及 (Q) 的最优值。

一方面，设 $\boldsymbol{x}$ 为 (P) 的任何一个可行解，即 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}$。令

$$X\equiv\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}^\top=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{x}^\top\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\end{pmatrix}\in cl(conv(\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}^\top\mid\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}))$$

则由对任意 $i=1,\cdots,m$ 都有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_i\bullet X&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{x}\end{pmatrix}M_i\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(2c_i+2(\boldsymbol{q}^i)^\top\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^\top Q_i\boldsymbol{x})\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top Q_i\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{q}^i)^\top\boldsymbol{x}+c_i\leq 0\end{aligned}$$

得知 X 为 (Q) 的一个可行解。加之，由 $\frac{1}{2}M_0\bullet X=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top Q_0\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{q}^0)^\top\boldsymbol{x}+c_0$ 得到 valQ$\leq$valP。

另一方面，令 $\mathcal{G}=\{\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}^\top\mid\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}\}$。则任意取 $X\in\mathcal{G}$，则 X 可表示为

$$X=\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}^\top\ (\text{其中}\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}).$$

由 $\boldsymbol{x}$ 为 (P) 的一个可行解，知

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2c_0 & (\boldsymbol{q}^0)^\top\\ \boldsymbol{q^0} & Q_0\end{pmatrix}\bullet X=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top Q_0\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{q}^0)^\top\boldsymbol{x}+c_0\geq\text{valP}\tag{0.3}$$

而且有

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2c_i & (\boldsymbol{q}^i)^\top\\ \boldsymbol{q^i} & Q_i\end{pmatrix}\bullet X=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top Q_i\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{q}^i)^\top\boldsymbol{x}+c_i\leq 0,i=1,\cdots,m\tag{0.4}$$

即 $\frac{1}{2}M_i\bullet X\leq 0,i=1,\cdots,m$。

任意取 $X\in conv(\mathcal{G})$，则 X 可表示为

$$X=\sum_{i=1}^k\alpha_i\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}_i\end{pmatrix}^\top\ (\text{其中}\sum_{i=1}^k\alpha_i=1,\alpha_i\geq 0\ \text{并且}\boldsymbol{x}_i\in\mathcal{F},i=1,\cdots,k)$$

用 (0.3) 的不等式，得知

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2c_0 & (\boldsymbol{q}^0)^\top\\ \boldsymbol{q}^0 & Q_0\end{pmatrix}\bullet X=\sum_{i=1}^k\alpha_i\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2c_0 & (\boldsymbol{q}^0)^\top\\ \boldsymbol{q}^0 & Q_0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{x}_i\end{pmatrix}^\top\right\}\tag{0.5}$$

$$\geq\sum_{i=1}^k\alpha_i\text{valP}=\text{valP}\tag{0.6}$$

类似的，有 $\frac{1}{2}M_i\bullet X\leq 0,i=1,\cdots,m$。

取任意的 $X \in cl(conv(\mathcal{G}))$，则存在 $\{X_i\} \subseteq conv(\mathcal{G})$ 使 $X_i \to X$ $(i \to +\infty)$。由 (0.6)，每个 X_i 满足

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2c_0 & (\boldsymbol{q}^0)^\top \\ \boldsymbol{q}^0 & Q_0 \end{pmatrix} \bullet X_i \geq \mathrm{valP}.$$

于是由连续性得知

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2c_0 & (\boldsymbol{q}^0)^\top \\ \boldsymbol{q}^0 & Q_0 \end{pmatrix} \bullet X \geq \mathrm{valP}$$

类似的，有 $\frac{1}{2}M_i \bullet X \leq 0, i = 1, \cdots, m$。因此，valQ≥valP。

所以这两个问题有相同的目标值。 $\square$