选作题(Dec20)解答 杨利军 Jan. 10, 2018

选作题. (关于 Gronwall Lemma 从一维情形到二维情形的推广)： 假设 $u(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega=[0,x_0]\times[0,y_0]$ 上非负连续, 满足如下积分不等式

$$u(x,y)\leq a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y c(s,t)u(s,t)dsdt,\quad \forall(x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

其中二元函数 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ 在闭矩形 Ω 上非负连续. 考虑如何利用函数 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ 对函数 $u(x,y)$ 作上界估计？

解：关于函数 $u(x,y)$ 的上界有如下估计：

$$u(x,y)\leq a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y\left[\xi(s,t)\exp\int_s^x\int_0^y\eta(p,q)dpdq\right]dsdt,\quad \forall(x,y)\in\Omega, \tag{2}$$

或

$$u(x,y)\leq a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y\left[\xi(s,t)\exp\int_0^x\int_t^y\eta(p,q)dpdq\right]dsdt,\quad \forall(x,y)\in\Omega, \tag{3}$$

其中 $\xi(x,y):=a(x,y)c(x,y)$, $\eta(x,y):=b(x,y)c(x,y)$.

注： 上述结论 (2) 和 (3) 源自 T. Nurimov 于1971年发表的一篇论文(俄文). 为了说明上述估计的证明思想, 我们先考虑一个简单情形.

定理： 假设 $u(x,y)$ 和 $a(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega=[0,x_0]\times[0,y_0]$ 上非负连续, 满足如下积分不等式

$$u(x,y)\leq c+\iint_{\Omega_{xy}}u(s,t)dsdt,\quad \forall(x,y)\in\Omega, \tag{4}$$

其中 $c\geq 0$ 为非负常数, $\Omega_{xy}:=[0,x]\times[0,y]$, 则

$$u(x,y)\leq ce^{xy},\quad \forall(x,y)\in\Omega. \tag{5}$$

证：基本思想是利用一维情形的 Gronwall 不等式. 令

$$f(x,y):=\int_0^y u(x,t)dt,$$

则 $f(x,y)$ 关于 y 单调上升, 并且不等式 (4) 可写作

$$u(x,y)\leq c+\int_0^x f(s,y)ds\quad \forall(x,y)\in\Omega. \tag{6}$$

对上式关于 y 从 0 到 y 积分得

$$\int_0^y u(x,t)dt \le cy + \int_0^y \int_0^x f(s,t)dsdt, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

由于 $f(s,t) \le f(s,y)$, $t \in [0,y]$, 因此我们有

$$f(x,y) \le cy + y\int_0^x f(s,y)ds \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{7}$$

令

$$F(x,y) := \int_0^x f(s,y)ds,$$

则不等式 (7) 可写作

$$F_x'(x,y) \le cy + yF(x,y) \quad \text{或} \quad F_x' - yF \le cy.$$

两边同乘以 e^{-xy} 得

$$\left(e^{-xy}F\right)_x' \le cye^{-xy}.$$

对上式关于 x 积分得

$$e^{-xy}F \le c(1-e^{-xy}) \quad \text{或} \quad F(x,y) \le cx^{xy} - c.$$

将上式代入不等式 (6) 得

$$u(x,y) \le ce^{xy}, \forall (x,y) \in \Omega.$$

定理得证.

以下考虑一般情形, 即假设不等式 (1) 成立, 我们来证明 (2) 成立. 不等式 (3) 的证明类似. 略去. 令

$$f(x,y) := \int_0^y c(x,t)u(x,t)dt,$$

则 $f(x,y)$ 关于 y 单调上升, 并且不等式 (1) 可写作

$$u(x,y) \le a(x,y) + b(x,y)\int_0^x f(s,y)ds \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{8}$$

于上式两边同乘以 $c(x,y)$, 并关于 y 从 0 到 y 积分得

$$\int_0^y c(x,t)u(x,t)dt \le \int_0^y a(x,t)c(x,t)dt + \int_0^y b(x,t)c(x,t)\int_0^x f(s,t)dsdt, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

由于 $f(s,t) \le f(s,y)$, $t \in [0,y]$, 因此我们有

$$f(x,y) \le \int_0^y \xi(x,t)dt + \left(\int_0^y \eta(x,t)dt\right)\int_0^x f(s,y)ds, \quad \forall (x,y) \in \Omega, \tag{9}$$

其中 $\xi(x,y) := a(x,y)c(x,y)$, $\eta(x,y) := b(x,y)c(x,y)$. 令

$$F(x,y) := \int_0^x f(s,y)ds,$$

则不等式 (9) 可简写为

$$F_x' \le \int_0^y \xi + \Big(\int_0^y \eta\Big)F \quad 或 \quad F_x' - \Big(\int_0^y \eta\Big)F \le \int_0^y \xi. \tag{10}$$

记

$$\Delta(x,y) := \iint_{\Omega_{xy}} \eta(s,t)dsdt, \quad \forall (x,y) \in \Omega,$$

并于不等式 (10) 两边同乘以 $e^{-\Delta}$ 得

$$\Big(e^{-\Delta}F\Big)_x' \le e^{-\Delta}\int_0^y \xi.$$

于上式关于 x 积分得

$$e^{-\Delta(x,y)}F(x,y) \le \int_0^x \int_0^y \xi(s,t)e^{-\Delta(s,y)}dsdt,$$

或

$$F(x,y) \le \int_0^x \int_0^y \xi(s,t)e^{\int_s^x \int_0^y \eta(p,q)dpdq}dsdt.$$

再根据不等式 (8) 立即得到不等式 (2). 证毕. ∎