第七章（函数逼近与数据拟合）习题

1、计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$:

(1) $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数,

(2) $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$.

2、对于 $f(x), g(x)\in C^1[a,b]$, 定义

(1) $(f,g)=\displaystyle\int_a^b f'(x)g'(x)dx$,

(2) $(f,g)=\displaystyle\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$,

请问它们是否构成内积？

3、设 $[a,b]=[-1,1]$, 权函数 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$, $P_0(x)\equiv 1$, 试用 Gram-Schmidt 正交化方法计算 $P_1(x)$, $P_2(x)$.

4、求下列函数 $f(x)$ 在指定区间上对于 $\mathcal{P}_1=\mathrm{span}\{1,x\}$ 的 最佳平方逼近多项式：

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $[1,3]$;

(2) $f(x)=\ln x$, $[1,2]$.

5、已知实验数据如下

x_j	19	25	31	38	44
y_j	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$的经验公式，并计算均方误差。

6、求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $(3,2)$ 阶帕德逼近 $R_{32}(x)$.

7、证明: 如果函数 f,g 满足

$$f(\frac{2\pi j}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{2\pi k}{n})e^{-\frac{i2\pi jk}{n}},\quad j=0,1,\cdots,n-1,$$

其中 $i=\sqrt{-1}$, 那么

$$g(\frac{2\pi j}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{2\pi k}{n})e^{\frac{i2\pi jk}{n}},\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$