补充练习(4)

(左诱导表示)

1. 设 G 是有限群, $H \le G$ $P_H = \{aH \mid a \in G\}$ 左陪集全体

(1) 定义 $\rho_H : G \longrightarrow A(P_H)$ $\rho_H(g)(aH) = gaH$ 即 G 在 P_H 上作用, ρ_H 称为 G 的左诱导表示. 证明:

$\ker \rho_H = H$ 的全部共轭子群之交 $= \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$

(注: 若 $|P_H| = n$, 则 $A(P_H) \cong S_n$), 它是包含在 H 中的 G 的极大正规子群

(2) 应用(1)展示, 若 $[G:H] = |G|$ 的最小素因子, 则 $H \lhd G$

(3) 应用(1), 设 $|G| = 2n$, $2 \nmid n$, 则 G 含有 n 阶正规子群.

2. (Sylow p-子群) (1) 设 G 有限群, $p \mid |G|$, p 素数, ~~则~~设任一 p-子群是 a_p 个 Sylow p-子群的子群, 证明: $a_p \equiv 1 \pmod{p}$

(2) 设 p^a 阶子群个数为 $n(p^a)$, 则 $n(p^a) \equiv 1 \pmod{p}$

($a \ge 1$, 若 $p^a \mid |G|$, $p^{a+1} \nmid |G|$, 则 $n(p^a)$ 是 Sylow p-子群个数)

(选做)

3. 设 p 是素数, 试证 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ (Wilson's theorem)

(考虑 S_p 的 Sylow p-子群或集合 $\{g \in S_p \mid g^p = e\}$ ~~上作用~~的阶数).

4. S_4 和 A_4 的全部 Sylow p-子群.

5. 455阶群必循环.

1. (1) 若 $g \in \ker \rho_H$，则 $gaH = aH \quad \forall a \in G. \Leftrightarrow a^{-1}ga \in H$

$\Leftrightarrow g \in aHa^{-1} \quad \forall a \in G \Leftrightarrow g \in \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$

因此 $\ker \rho_H = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$，它包含在 H 中，且是正规子群

因为 $\forall g \in G$，$x \in \ker \rho_H$，$x \in H \quad gxg^{-1} \in gHg^{-1}$

$x \in aHa^{-1} \quad \forall a \in G$，$x = aha^{-1}$，$h \in H \quad gxg^{-1} = gaha^{-1}g^{-1}$

$\forall bHb^{-1}$，令 $g = ba^{-1}$，则 $gxg^{-1} \in bHb^{-1}$.

(2) 设 $p \mid |G|$ 且 p 是最小素因子，$|\rho_H| = p$，考虑 G 在 ρ_H

上左诱导作用，即 $G \xrightarrow{\rho_H} S_p$ (p 次对称群) $\ker \rho_H \subseteq H$，

$\ker \rho_H \lhd G$. $\quad H/\ker\rho_H \leqslant G/\ker\rho_H$，$\Rightarrow p \mid [G:\ker\rho_H]$

$G/\ker\rho_H$ 同构于 S_p 的子群，$\Rightarrow [G:\ker\rho_H] \mid p!$

若 $\ker\rho_H \neq H$，则 $[G:\ker\rho_H]$ 包含素因子 $q > p$. 这与 $[G:\ker\rho_H]$ 整除 $p!$ 矛盾！

(3) 一个有限群 G 可嵌入 $A(G) = S_{|G|}$ ($G \cong L(G)$)

本题 $|G| = 2n$，故可以 $G \xrightarrow{\rho} A(G) = S_{2n} \quad \rho$ 单射，

即对于 S_{2n} 的子群 ($2n$ 阶)，寻找 n 阶正规子群.

设 $H \leqslant S_{2n} \quad |H| = 2n$. 定义 $H \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2$

φ(偶置换) $= \bar{0} \quad \varphi$(奇置换) $= \bar{1}$ $\quad \varphi$ 是满群同态 $H/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_2$

$\ker\varphi \lhd H \quad \ker\varphi = \{H 中偶置换\}$

2. (1) 设P是一个p-子群，则存在Sylow p-子群，记作$\tilde{P}$包含P，则全部Sylow p-子群为

$\tilde{P}^{(1)}=g_1^{-1}\tilde{P}g_1$，$\tilde{P}^{(2)}=g_2^{-1}\tilde{P}g_2$，$\cdots$，$\tilde{P}^{(n)}=g_n^{-1}\tilde{P}g_n$

$n\equiv 1 \pmod{p}$，只需展示不含P的Sylow p-子群个数$=p$的倍数，首先$P\subseteq\tilde{P}^{(i)}\Longleftrightarrow P\subseteq N_G(\tilde{P}^{(i)})$，这是因为$\tilde{P}^{(i)}\lhd N_G(\tilde{P}^{(i)})$，从而$P\tilde{P}^{(i)}\leq N_G(\tilde{P}^{(i)})$，$P\tilde{P}^{(i)}$也是$p$~~阶~~-子群且含$\tilde{P}^{(i)}$，则$P\tilde{P}^{(i)}=\tilde{P}^{(i)}$。考虑$P$在全体Sylow p-子群集合X上作用 $\forall a\in P$，$\tilde{P}^{(i)}\in X$，$a*\tilde{P}^{(i)}=a^{-1}\tilde{P}^{(i)}a$

设$O_{\tilde{P}^{(i)}}$是$\tilde{P}^{(i)}$的轨道 $|O_{\tilde{P}^{(i)}}|=[P:\mathrm{Stab}.\tilde{P}^{(i)}]$

$\mathrm{Stab}.\tilde{P}^{(i)}$是$p$-子群. $|O_{\tilde{P}^{(i)}}|=\begin{cases}1 & P=\mathrm{Stab}.\tilde{P}^{(i)}\\ p^l & l\geq 1\end{cases}$

$a\in\mathrm{Stab}.\tilde{P}^{(i)}\Longleftrightarrow a^{-1}\tilde{P}^{(i)}a=\tilde{P}^{(i)}\Longleftrightarrow a\in N_G(\tilde{P}^{(i)})\Rightarrow$

$\mathrm{Stab}.\tilde{P}^{(i)}\subseteq N_G(\tilde{P}^{(i)})\Longleftrightarrow\mathrm{Stab}.\tilde{P}^{(i)}\subseteq\tilde{P}^{(i)}$

$|O_{\tilde{P}^{(i)}}|=1\Longleftrightarrow P\subseteq\tilde{P}^{(i)}$ 设a_p个Sylow p-子群含P.

$|X|\equiv a_p \pmod{p}$

(2) 令$X=\{A\subseteq G \mid |A|=p^a\}$（$A$未必是子群）

$|X|=\binom{|G|}{p^a}$，G在X上作用通过左乘

(a) 若$e\in A$，则$\mathrm{Stab}.A\subseteq A$

$g\in\mathrm{Stab}.A\Rightarrow gA=A\Rightarrow g\cdot 1=g\in A$

(b) Stab. A 的阶数整除 p^a

因为 A 可写作若干 Stab. A 的右陪集之并 $(\text{Stab.}A)A=A$.

$$A=(\text{Stab.}A)a_1\cup(\text{Stab.}A)a_2\cup\cdots\cup(\text{Stab.}A)a_r.$$

由(b) $|O_A|=[G:\text{Stab.}A]=\dfrac{|G|}{|\text{Stab.}A|}=\dfrac{p^a\cdot m}{p^b}=p^{a-b}\cdot m$ $b<a$.

(注意: m 和 p^a 未必互素)

(c) $|O_A|=m \iff A$ 是 p^a 阶子群.

若 A 是子群, 则 $\text{Stab.}A=A$

"$\Leftarrow$" 因为 $e\in A$, $\text{Stab.}A\subseteq A$

$b=a\Rightarrow|O_A|=m$

"$\Rightarrow$" $\text{Stab.}A=A$.

(d) $|O_A|=m\iff O_A$ 恰是 A 的 (G关于左) 陪集空间 G/A.

$$X=(O_{A_1}\cup\cdots\cup O_{A_k})\cup(O_{A_{k+1}}\cup\cdots\cup O(A_t))$$

前 k 个轨道均为长度 m, 剩余的轨道长均被 pm 整除

$$|X|\equiv km \pmod{pm}$$

以上讨论均未涉及 G 的结构, 即对任意 p^am 阶群均正确

特别地, 取 p^am 阶循环群, p^a 阶子群唯一, $k=1$.

即 $|X|\equiv m\pmod{pm}\Longrightarrow k\equiv1\pmod p$.

3. ~~考虑 S_p 在 $\{g\in S_p\mid g^p=e\}$ 上作用~~.

回忆 Cauchy 定理证明: G 有限群, 则

$|G|^{p-1}\equiv\#\{g\in G\mid g^p=e\}\pmod p$ 若 $p\mid|G|$, 则

$\Rightarrow \#\{g\in G \mid g^p=e\}\equiv 0 \pmod p$ 现在 $G=S_p$.

S_p 中阶为 p 的元素为: (1) 或 p-循环, 共 $(p-1)!+1$ 个.

另一种方法: S_p 中 p 阶元如上. 每个 p 阶元生成一个 p 阶子群. $(p-1)!$ 个 p-循环含在 $\frac{(p-1)!}{p-1}=(p-2)!$ 个 p-子群中. (它们只有 (1) 作为公共元) 即 S_p 中有 $(p-2)!$ 个 Sylow p-子群.

$(p-2)!\equiv 1 \pmod p$ $\qquad (p-1)!\equiv -1 \pmod p$

4. $|S_4|=2^3\cdot 3$ $\quad S_4$ 的 Sylow 2-子群个数 $n_2=1$ 或 3

若 $n_2=1$ 则 Sylow 2-子群正规, 但 S_4 的正规子群只有 $\{(1)\}, K_4, A_4, S_4$ 故 $n_2=3$. (从 S_4 的生成元检查正规子群可能性), 类似 S_4 的 Sylow 3-子群有 4 个.

$|A_4|=2^2\cdot 3$ $\quad K_4\lhd A_4$ $\quad |K_4|=2$ 即只有一个 Sylow 2-子群

Sylow 3-子群有 4 个.

5. $|G|=455=5\times 7\times 13$, $n_7 \mid 5\times 13$ $\quad n_7\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow n_7=1$

同理 $n_{13}=1$, 即 Sylow 7-子群 (设为 P_7) Sylow 13-子群 (设为 P_{13}) 均正规. 设 $n_5=1$ 或 91, 若 $n_5=91$, 则 91 个 Sylow 5-子群有 $91\times 4=364$ 个 5 阶元. 而 $P_7P_{13}\lhd G$ 有 91 个阶与 5 互素的元, 共 455 个. 任取一 Sylow 5-子群 P_5, $P=P_5P_7$ 是 35 阶子群, 且 $P_5\lhd P$, $P_7\lhd P$, $P_5\cap P_7=\{e\}$. 即 $P\simeq P_5\times P_7$

$\simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{35}$ 即存在35阶元，矛盾！故$n_5=1$.

$P_5 \lhd G$，$P_7 \lhd G$，$P_{13} \lhd G$，且$P_5 \cap P_7P_{13}=\{e\}$，$P_7 \cap P_5P_{13}=\{e\}$，$P_{13} \cap P_5P_{13}=\{e\}$，则$G \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{13}$