数学分析讲义: 第四章 连续函数类和其他函数类

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; 《数学分析》徐森林、薛春华编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Sept. 2016

数学分析讲义总目录

第四章　连续函数类和其他函数类

在上一章的后面我们学习了函数极限, 它与本章将学习的函数的连续性在概念上有重合, 例如若一个函数在某点处的极限等于函数在这点的函数值, 则这个点就称为该函数的一个连续点. 我们知道谈论函数极限时不考虑函数定义域中的孤立点, 因为在孤立点附近没有极限行为！可是函数的连续性概念中则包括了函数在孤立点的行为: 函数定义域中的孤立点是该函数天然的连续点！这实质上是因为函数在其定义域中的任一孤立点处, 总可以向该点的一个邻域内作连续延拓, 即把函数在孤立点附近填成一段连续曲线/曲面! 但这个特点只是函数连续性的微小方面. 实际上连续函数、连续映射的主要作用是描述物体、几何图形、信息等等的连续形变关系: 一方的连续变化会引起另一方怎样的连续变化. “连续性”作为一种约束或品质, 保证了这种变化是可控的可预测的. 如果不要求“连续性”, 固然也能研究双方的对应变化, 但这时情况就太多太复杂以致于任何事情都可发生! 例如若不要求连续性, 则实数轴$\mathbb{R}$既可以与立方体$[0,1]^3$ 一一对应, 又可以与平面单位圆周$\mathbb{S}^1$一一对应. 然而加上连续性要求后, 就会发现, 这三者中的任何两个都不能有连续的一一对应! 而在物理、力学、几何和其他自然科学乃至社会科学中, 连续行为是极为普遍的. 我们常说的“做事靠谱”就包含了连续性的概念. 当然, 随机行为、远方不可预测性等等也是自然界大量存在的, 但经验表明, 先把连续性弄清楚, 有利于研究不连续的行为. 此外, 很多变量或信息, 虽然细节不连续, 但他们的“包络”、“局部平均”等等宏观量是连续的, 而这些宏观量比细节更靠谱. 所以先学好连续性是合理的顺序.

本章我们主要学习一元函数(即$\mathbb{R}$上的函数)的连续性. 虽然我们将函数的值域取为略大的范围即复数域$\mathbb{C}$, 但本质上还是实数域$\mathbb{R}$间的行为, 这是因为一个复值函数连续当且仅当它的实部虚部都连续. 因此同学们可以在心中把复值函数当做实值函数对待, 只是在涉及大小顺序等问题时再注意实、复的区别.

§4.1　基本定义和例子

【定义(连续)】设 $E\subset\mathbb{R}, f:E\to\mathbb{C}$ (包括$f:E\to\mathbb{R}$的情形).

(1) 设 $x_0\in E$. 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta_{x_0,\varepsilon}>0$ 使得当 $x\in E$ 满足 $|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称 f 在 点x_0处连续. 此时x_0也叫做函数f在E上的一个连续点. 如果x_0 不是f在E上的连续点, 则称f在点x_0 不连续, 同时称x_0是f在E上的一个不连续点或间断点.

(2) 若 f 在 E 中每一点都连续, 则称 f 在 E 上连续, 也称 f 是 E 上的一个连续函数. 在 E 上连续的实值函数的全体和复值函数的全体记作 $C(E,\mathbb{R}),C(E,\mathbb{C})$, 也常笼统记为$C(E)$. $\square$

【注】1. 上述定义也可用邻域的语言表述如下: 对于 $f(x_0)$ 的每个邻域

$$V^{\varepsilon}(f(x_0)) := (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$$

都存在 x_0 的一个相对于 E 的邻域

$$U_E^{\delta}(x_0) := E\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

使得下面蕴含关系成立：

$$x\in U_E^{\delta}(x_0)\Longrightarrow f(x)\in V^{\varepsilon}(f(x_0)).$$

这就是说, $f(x)$ 在 x_0 连续当且仅当只要 x 属于 x_0 的相对于E的某个邻域, $f(x)$ 就属于 $f(x_0)$ 的事先任意指定的邻域. 注意这蕴含f在$U_E^{\delta}(x_0)$ 上的振幅随着δ 趋于零而趋于零(见下面).

2. 关于函数在一点连续的定义, 一定要注意函数 f 在一点 x_0 的连续性是紧密地依赖于 f 在**相对邻域** $E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上的行为的！如果把 f 的定义域E缩小, 则原来使 f 不连续的点便可能是连续点了. 同理如果 f 的定义域E不是区间, 则把它扩大成区间并延拓 f 到区间上, 则原来使 f 连续的点便可能是不连续点了. 我们在后面会详细说明.

3. 从$\varepsilon-\delta$ 语言角度看, 连续与极限的概念“几乎”一致. 除了要求$x_0\in E$之外, 唯一重要区别是: 在连续的定义中不要求 x_0 是 E 的聚点, 也即x_0可以是E 的孤立点.

【命题 4.1】设 $E\subset\mathbb{R}, f: E\to\mathbb{C}$, $x_0\in E$. 则

(1) 若 x_0 是 E 的孤立点, 则 f 必在 x_0 连续.

(2) 若 x_0 是 E 的聚点, 则 f 在 x_0 连续当且仅当 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

【证】(1): 设 x_0 是 E 的孤立点. 则存在 $\delta>0$ 使得 $E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x_0\}$ 是单点集. 于是对任意 $\varepsilon>0$, 当 $x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时有 $|f(x)-f(x_0)| = |f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$. 所以 $f(x)$ 在 x_0 连续.

(2): 设 x_0 是 E 的聚点. 则比较极限与连续的定义易见 $f(x)$ 在 x_0 连续蕴含极限 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ 存在且 $= f(x_0)$. 反之设 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. 则由极限的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(x_0,\varepsilon) > 0$ 使得当 $x \in E$ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 而当 $x = x_0$ 是自然也有 $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. 因此当 $x \in E$ 满足 $|x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. □

【命题 4.2】设 $E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{C}$, $E_0 \subset E$.

若f 在E上连续, 则限制在子集E_0上, $f|_{E_0} : E_0 \to \mathbb{C}$ 在E_0上连续.

反之若$f|_{E_0} : E_0 \to \mathbb{C}$ 在E_0上连续, 则f **未必**在E上连续.

【证】设f 在E上连续. 则把f 在E上处处连续的定义中的E换成其子集E_0 可知f也在E_0上处处连续. 换言之, "总体处处成立"蕴含"部分处处成立".

对反之的情形, 只能举例说明不总成立. 取$E = \mathbb{R}$. 考虑一个比较极端的例子: 设$f(x)$ 是Dirichlet 函数, 即f是有理数集$\mathbb{Q}$的特征函数: $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x), x \in \mathbb{R}$. 则限制在$\mathbb{Q}$上$f|_{\mathbb{Q}}(x) \equiv 1, x \in \mathbb{Q}$. 因此$f|_{\mathbb{Q}}(x)$在$\mathbb{Q}$上处处连续. 同理限制在$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$上$f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 因此$f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$在$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$上处处连续. 但$f$在$\mathbb{R}$上处处不连续. 事实上对任意$x_0 \in \mathbb{R}$, 对$\varepsilon = 1/2 > 0$, 若$x_0$为有理数, 则对任意$\delta > 0$, 由无理数在$\mathbb{R}$中稠密可知, 存在无理数$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 从而有$|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. 因此$f$在$x_0$ 不连续。若x_0为无理数, 则对任意$\delta > 0$, 由有理数在$\mathbb{R}$中稠密可知,都存在有理数$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 从而有$|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. 因此$f$在$x_0$ 不连续。所以f在$\mathbb{R}$ 上处处不连续. □

但是, 如果所考虑的集合及其子集都是闭区间, 则由部分连续可以推出整体连续(见下面).

【定义(单侧连续性)】设$f : E \to \mathbb{C}$, $x_0 \in E$.

如果x_0 是E的一个左(右)聚点且

$f(x_0-) := \lim\limits_{E\ni x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$ (相应地, $f(x_0+) := \lim\limits_{E\ni x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$),

则称f在点x_0左(右)连续, 同时称x_0 是f 在E上的一个左(右)连续点.

如果f在E的每个左(右) 聚点都是左(右)连续的, 则称f在E上左(右)连续. □

【命题4.3】 设$f : E \to \mathbb{C}$, $x_0 \in E$.

(1) 若x_0是E的一个左(右)聚点但不是E的右(左)聚点,

则f在x_0连续 $\iff f(x_0-) = f(x_0)$ ($f(x_0+) = f(x_0)$).

(2) 若x_0 既是E的左聚点又是E的右聚点,

则f在x_0连续 $\iff f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$.

【证】(1): 以左连续为例. 设x_0是E的一个左聚点但不是E的右聚点, 则由单侧聚点的定义知存在$\delta > 0$ 使得$E \cap (x_0, x_0 + \delta) = \emptyset$. 因此"$x$在$E$中趋于$x_0$"就只能是"$x$ 在E中从x_0 的左侧趋于x_0". 所以f在x_0连续$\iff f(x_0) = \lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{E\ni x\to x_0-} f(x) = f(x_0-)$.

(2): 设x_0同时是E的左聚点和右聚点. 若f在x_0连续, 则当然有$f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$. 反之若$f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 使当$x \in E\cap(x_0-\delta_1, x_0]$ 时$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, 当$x \in E\cap[x_0, x_0+\delta_2)$ 时$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. 令$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则$E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \Big(E \cap (x_0 - \delta_1, x_0]\Big) \cup \Big(E \cap [x_0, x_0 + \delta_2)\Big)$, 因而对所有$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$都有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 所以$f$在$x_0$ 连续。 $\square$

【推论4.3】 设$-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. 则

f 在$[a, b]$ 上连续 $\iff$ f 在(a, b)内连续且$f(a+) = f(a), f(b-) = f(b)$. $\square$

【约定】 为了包括闭区间的所有情形, 对于无界闭区间$(-\infty, b], [a, +\infty)$等等我们暂且也用$[a, b]$ 的形式表示之, 只是要注意, 当a 或b为无穷远点时, 函数在其上一般无定义(除了例如极限$f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在这种特殊情形).

【推论4.4】 设$-\infty \le a < b \le +\infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $c \in (a, b)$. 则

f在$[a, b]$ 上连续 $\iff$ f分别在$[a, c]$上和$[c, b]$上连续.

【证】"$\Longrightarrow$": 这属于**命题4.2**的一个特殊情形.

"$\Longleftarrow$": 设f分别在$[a, c]$上和$[c, b]$上连续. 则$[a, c) \cup (c, b]$中的每一点都是f在$[a, b]$上的连续点, 而在点c处有$f(c-) = f(c) = f(c+)$. 所以由**命题4.3**知点c 也是f在$[a, b]$上的连续点. 因此f在$[a, b]$ 上处处连续. $\square$

根据**推论4.4** 并借助归纳法可得

【推论4.5】设$-\infty \le a < b \le +\infty$, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. 设$[a,b]$ 被分成有限个闭子区间:

$$[a,b]=\bigcup_{k=1}^{n}[a_{k-1},a_k],\quad a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b.$$

则f在$[a,b]$ 上连续 $\Longleftrightarrow$ f在每个闭子区间$[a_{k-1},a_k]$ 上连续, $k=1,2,...,n$. □

【例】设函数$g:[0,1]\to\mathbb{C}$在$[0,1]$上连续, 函数$f:[0,1]\cup\{2\}\to\mathbb{C}$ 的定义如下:

$$f(x)=g(x),\quad x\in[0,1];\qquad f(2)=y_0.$$

其中y_0 是任一复数. 则f 在$[0,1]\cup\{2\}$ 上连续. 这是因为f在$[0,1]$ 上处处连续而点2是$[0,1]\cup\{2\}$的孤立点从而f在点2连续. 因此f在$[0,1]\cup\{2\}$上处处连续.

进一步看: 我们把f按(例如)折线方式延拓到整个$\mathbb{R}$上: 定义

$$F(x)=\begin{cases} g(0) & \text{当}\quad x\in(-\infty,0],\\ g(x) & \text{当}\quad x\in[0,1],\\ g(1)+(f(2)-g(1))(x-1) & \text{当}\quad x\in[1,2],\\ f(2) & \text{当}\quad x\in[2,+\infty).\end{cases}$$

则$F(x)$在$\mathbb{R}=(-\infty,0]\cup[0,1]\cup[1,2]\cup[2,+\infty)$上处处有定义且$F|_{(-\infty,0]},F|_{[0,1]},F|_{[1,2]},F|_{[2,+\infty)}$都在各自的定义域上连续. 因此由**推论4.4** 知F在$\mathbb{R}$ 上连续. 既然$f=F|_{[0,1]\cup\{2\}}$, 故f在$[0,1]\cup\{2\}$上连续. 这就从另一角度证明了f的连续性, 同时看出孤立点的特性: 函数在孤立点处可以向左右做连续延拓! □

【例】符号函数$\mathrm{sign}(x)$ 在$\mathbb{R}\setminus\{0\}$内处处连续, 而在$x=0$ 间断: $\mathrm{sign}(0-)=-1\neq 1=\mathrm{sign}(0+)$. 此外易见无论怎样修改$\mathrm{sign}(x)$ 在$x=0$ 处的值, 都不能使$\mathrm{sign}(x)$在点$x=0$连续. □

下面命题表明(基于选择公理) 连续运动与任意的离散运动是等价的.

【命题4.5 (连续性的序列刻画)】(very useful!) 设$E\subset\mathbb{R}$, $f:E\to\mathbb{C}$, $x_0\in E$. 则

$$f\text{ 在点}x_0\text{连续}\iff\text{对任意序列}E\ni x_n\to x_0\,(n\to\infty)\text{ 都有}\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

【证】“$\Longrightarrow$”: 设f 在点x_0连续. 任取收敛序列$E \ni x_n \to x_0\,(n\to\infty)$. 因$f$在$x_0$连续, 故对任意$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 使得对所有$x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$都有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 因$E\ni x_n\to x_0\,(n\to\infty)$, 故存在$N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$时有$x_n\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 于是当$n\ge N$ 时有$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

“$\Longleftarrow$”: 反证法: 设充分性条件已满足但f 在点x_0不连续. 则由连续的定义知存在$\varepsilon>0$ 使得对任意$\delta>0$ 都存在$x_*\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 使得$|f(x_*)-f(x_0)|\ge\varepsilon$. 于是对每个$n\in\mathbb{N}$, 取$\delta=1/n$, 则存在$x_n\in E\cap(x_0-1/n,x_0+1/n)$ 使得$|f(x_n)-f(x_0)|\ge\varepsilon$. 这样一来我们得到序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 满足$|x_n-x_0|<1/n$ 且$|f(x_n)-f(x_0)|\ge\varepsilon$, $n=1,2,3,\dots$. 因$E\ni x_n\to x_0\,(n\to\infty)$, 故由假设应有$\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(x_0)|=0$. 这就导致矛盾: $0<\varepsilon\le\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(x_0)|=0$. 此矛盾证明了$f$必在$x_0$连续. $\Box$

对连续与否的另一判别是考察函数的振幅.

【定义(振幅)】$f:E\to\mathbb{C}$, $x_0\in E$. 对于$\delta>0$, 我们称

$$\omega_f(U_E^\delta(x_0)) := \sup_{x,y\in U_E^\delta(x_0)}|f(x)-f(y)|$$

为f在集合$U_E^\delta(x_0)$ 上的振幅; 而称

$$\omega_f(x_0)=\lim_{\delta\to0^+}\omega_f(U_E^\delta(x_0))$$

为f在点x_0处的振幅或**点振幅**. $\Box$

【注1】按集合的包含关系我们知道, 小的集合其上确界也小, 因此函数$\delta\mapsto\omega_f(U_E^\delta(x_0))$ 是单调不减的:

$$0<\delta_1<\delta_2\implies\omega_f(U_E^{\delta_1}(x_0))\le\omega_f(U_E^{\delta_2}(x_0)).$$

所以极限$\omega_f(x_0)$存在 (有限、无限均有可能).

【注2】如果f 是**实值的**, 则易见

$$\omega_f(U_E^\delta(x_0))=\sup_{x\in U_E^\delta(x_0)}f(x)-\inf_{x\in U_E^\delta(x_0)}f(x).$$

【命题4.6 (连续性的振幅刻画)】设$f:E\to\mathbb{C}$, $x_0\in E$. 则

$$f\ \text{在}\ x_0\ \text{连续}\iff\omega_f(x_0)=0.$$

【证】“ $\Longrightarrow$”: 设f在点x_0连续. 则对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/3 > 0$ 存在$\eta > 0$ 使得当$x \in U_E^{\eta}(x_0)$时$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$. 于是当$0 < \delta \le \eta$时, 对任意$x, y \in U_E^{\delta}(x_0)$ 便有

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0 - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

取上确界 $\sup\limits_{x,y\in U_E^{\delta}(x_0)}$ 得到

$$\omega_f(U_E^{\delta}(x_0)) = \sup_{x,y\in U_E^{\delta}(x_0)} |f(x) - f(y)| \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \qquad \forall\, 0 < \delta \le \eta.$$

所以$\omega_f(x_0) = \lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(U_E^{\delta}(x_0)) = 0$.

“ $\Longleftarrow$”: 设$\omega_f(x_0) = 0$. 则对任意$\varepsilon > 0$ 存在$\delta > 0$ 使得$\omega_f(U_E^{\delta}(x_0)) < \varepsilon$ 从而有

$$|f(x) - f(x_0)| \le \omega_f(U_E^{\delta}(x_0)) < \varepsilon \qquad \forall\, x \in U_E^{\delta}(x_0).$$

因此f 在x_0 连续. $\qquad\Box$

用振幅刻画, 我们来看一个极端的例子:

【例】设

$$f(x) = \begin{cases} q & 若 \quad x = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad p, q \text{ 互质}; \\ 0 & 其他情形. \end{cases}$$

则f 处处不连续且$\omega_f(x) \equiv +\infty, x \in \mathbb{R}$.

【证】只需证明$\omega_f(x) \equiv +\infty, x \in \mathbb{R}$. 任取$x \in \mathbb{R}$. 对任意$n \in \mathbb{N}$, 取$k = [2^{n-1}x]$ (整数部分). 则有$2^{n-1}x - 1 < k \le 2^{n-1}x$ 从而有$x - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{k}{2^{n-1}} \le x$. 这蕴含

$$x - \frac{1}{2^n} < \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \le x + \frac{1}{2^n} \qquad \text{i.e.} \qquad x - \frac{1}{2^n} < \frac{2k+1}{2^n} \le x + \frac{1}{2^n}.$$

因n是正整数, 故$2k + 1$与2^n 互质. 据f的定义知$f(\frac{2k+1}{2^n}) = 2^n$. 取无理数$y \in U^{\frac{1}{2^n}}(x) := (x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n})$, 据$f$的定义有$f(y) = 0$ 从而由$x, y \in U^{\frac{1}{2^n}}(x)$ 有

$$\omega(f, U^{\frac{1}{2^n}}(x)) \ge |f(x) - f(y)| = f(x) = 2^n.$$

注意$n \in \mathbb{N}$ 是任意的, 这就给出

$$\omega(f, x) = \lim_{n\to\infty} \omega(f, U^{\frac{1}{2^n}}(x)) = +\infty. \qquad \Box$$

【**定理4.7 (基本初等函数的连续性)**】幂函数、指数函数、对数函数以及三角函数 $x^\alpha, e^x, \log x, \sin x, \cos x$ 称为基本初等奇函数, 它们在各自的定义域上连续.

【证】这五个函数的定义域都是区间, 所以无孤立点. 因此对连续性的证明就是对相应的极限等式的证明. 实际上指数函数e^z 在复平面$\mathbb{C}$ 上连续, 为看清这点, 我们做估计:

$$|e^z - 1| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} \le |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} = |z|e^{|z|}.$$

对任意$z_0, z \in \mathbb{C}$, 设$|z - z_0| < 1$, 则有

$$|e^z - e^{z_0}| = |e^{z_0}||e^{z-z_0} - 1| \le e^{|z_0|}|z - z_0|e^{|z-z_0|} \le e^{|z_0|+1}|z - z_0|.$$

这蕴含e^z 在任意点$z_0 \in \mathbb{C}$ 连续. 根据这一性质和关系式

$$\sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$$

可知$\sin x, \cos x$ 在$\mathbb{R}$ 上连续. 对于对数函数$\log x$, 设$x_0 > 0, x > 0$, $h = x - x_0$, 则由第三章已证明的极限有

$$\lim_{x \to x_0} (\log x - \log x_0) = \lim_{h \to 0} \log(1 + \frac{h}{x_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1 + \frac{h}{x_0})}{\frac{h}{x_0}} \cdot \frac{h}{x_0} = 1 \cdot 0 = 0.$$

对于幂函数x^α, 若$\alpha = m \in \mathbb{Z}$, 则当$m \ge 0$ 时, 对任意$x_0 \in \mathbb{R}$ 有

$$\lim_{x \to x_0} x^m = \Big(\lim_{x \to x_0} x\Big)^m = x_0^m.$$

而当$m < 0$ 且$0 \ne x_0 \in \mathbb{R}$ 时, 有

$$\lim_{x \to x_0} x^m = \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{1}{x}\Big)^{-m} = \Big(\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x}\Big)^{-m} = x_0^m.$$

一般情形: $\alpha \in \mathbb{R}$. 则对任意$x_0 > 0, x > 0$, 令$h = x - x_0$, 有

$$\begin{aligned}
&x^\alpha - x_0^\alpha = (x_0 + h)^\alpha - x_0^\alpha = x_0^\alpha\Big((1 + \frac{h}{x_0})^\alpha - 1\Big) \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (x^\alpha - x_0^\alpha) = x_0^\alpha \lim_{h \to 0} \Big((1 + \frac{h}{x_0})^\alpha - 1\Big) = x_0^\alpha \lim_{y \to 0} \Big((1 + y)^\alpha - 1\Big) \\
&= x_0^\alpha \lim_{y \to 0} \frac{(1 + y)^\alpha - 1}{y} \cdot y = x_0^\alpha \cdot \alpha \cdot 0 = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

【函数的间断点的分类】

一个函数的定义域中的孤立点总是该函数的连续点。因此间断点只能是函数定义域的聚点.

设$f:E\to\mathbb{C}$, $x_0\in E$是E的一个聚点. 不难看出以下几条彼此等价:

(a) x_0 是f 在E 上的一个间断点.

(b) 存在$\varepsilon>0$ 使得对任意$\delta>0$ 都存在$x_\delta\in U_E^\delta(x_0)$ 使得$|f(x_\delta)-f(x_0)|\ge\varepsilon$.

(c) $\omega_f(x_0)>0$.

(d) f在点x_0 处的左极限$f(x_0-)$或右极限$f(x_0+)$ 至少有一个不存在或存在但等于无穷大.

(e) 假如f在点x_0 处的左极限$f(x_0-)$和右极限$f(x_0+)$都存在有限, 则或者$f(x_0-)\neq f(x_0)$ 或者$f(x_0+)\neq f(x_0)$.

【说明】如果x_0 只是E的单聚点, 例如只是左聚点, 则记号$f(x_0+)$无意义, 因此在上面和下面相关的分析和定义中, $f(x_0+)$被视为不出现.

<u>**第一类间断点**</u>. 如果点x_0使得左极限$f(x_0-)$和右极限$f(x_0+)$都存在有限, 但$f(x_0-)\neq f(x_0)$ 或$f(x_0+)\neq f(x_0)$, 则称x_0 是f 在E 上的一个第一类间断点.

<u>**可去间断点**</u>. 若x_0 是f 在E 上的一个第一类间断点且$f(x_0-)=f(x_0+)\neq f(x_0)$, 则称$x_0$ 是f 在E 上的一个可去间断点. 顾名思义, "可去"就是说只要重新定义f在x_0的值为两个单侧极限的公共值, 即定义$f(x_0)=f(x_0-)=f(x_0+)$(它是实数, 不是无穷大!), 则**调整后的f在x_0 连续**. 注意, 若例如x_0 是E的一个左聚点但不是右聚点, 而$f(x_0-)\neq f(x_0)$, 则x_0 仍是一个可去间断点. 此时重新定义$f(x_0)=f(x_0-)$, x_0便是调整后的函数的连续点.

<u>**第二类间断点**</u>. 如果点x_0 是f在E上的一个间断点但不是第一类间断点, 则称x_0是f在E上的一个第二类间断点

让我们看一些例子.

【例】(1) 点$x_0=0$ 是符号函数$\mathrm{sign}(x)$的唯一间断点, 由于$\mathrm{sign}(x)$在$x_0=0$处的左右极限都存在有限但不相等, 故$x_0=0$ 是$\mathrm{sign}(x)$的第一类间断点但不是可去间断点.

(2) 设f在$\mathbb{R}$上有定义且当$x\neq0$ 时$f(x)=\sin(1/x)$. 则$x_0=0$是f的第二类间断点因为左右极限$f(0-)$, $f(0+)$ 都不存在.

(3) 设f在$\mathbb{R}$上有定义且当$x \neq 0$ 时$f(x) = \frac{\sin x}{x}$. 则左右极限皆存在且相等: $f(0-) = f(0+) = 1$. 因此$x_0 = 0$ 是f的可去间断点. 如定义$f(0) = 1$, 则f 在$\mathbb{R}$ 上处处连续.

(4) 有理数集的特征函数$f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x)$ 也称为Dirichlet 函数. 易见$\mathbb{R}$ 中每一点都是f的第二类间断点.

(5) 设$-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty$,

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)1_{\mathbb{Q}}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

则易证f 在且只在点$a_1, a_2, ..., a_n$ 连续; f的间断点都是第二类的. $\square$

【**例(Riemann函数)**】由下式定义的函数$f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ 是Riemann给出的, 称为Riemann函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{当 } x = m/n \text{ 为非零有理数, 其中 } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } m, n \text{ 互质;} \\ 0 & \text{其他情形.} \end{cases}$$

我们来证明

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}.$$

因此f在0和每个无理点连续, 而在每个非零有理点间断, 并且这些间断点都是可去的.

【证】任取$x_0 \in \mathbb{R}$. 对任意$0 < \varepsilon < 1$, 令

$$A = \{(m, n) \,|\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\, n \in \mathbb{N},\ m, n \text{ 互质, 且 } 0 < |x_0 - m/n| < 1,\ n \leq 1/\varepsilon\}.$$

先证明A是有限集. 事实上对任意$(m, n) \in A$, 有

$$|m/n| \leq |m/n - x_0| + |x_0| < 1 + |x_0| \implies |m| < n(1 + |x_0|) < (1 + |x_0|)/\varepsilon.$$

由此可见, 如记$N = [(1 + |x_0|)/\varepsilon]$, 则有

$$A \subset \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid -N \leq m \leq N,\, n \leq [1/\varepsilon]\,\}.$$

因此A 是有限集(其元素个数$\leq (2N + 1)[1/\varepsilon]$). 令

$$\delta = \min_{(m,n) \in A} |x_0 - m/n|.$$

则$0 < \delta < 1$. 由此有: 对任意$x \in \mathbb{R}$满足$0 < |x - x_0| < \delta$, 若$f(x) \neq 0$, 则由f的定义知必是$x = m/n$ 为非零有理数, 其中$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$且$m, n$ 互质. 而由A和δ的定义易

见$(m,n)\notin A$. 因此必有$n>1/\varepsilon$. 因此$|f(x)|=f(x)=1/n<\varepsilon$; 而若$f(x)=0$, 则自然有$|f(x)|<\varepsilon$. 总之有

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{s.t.}\quad 0<|x-x_0|<\delta\quad \text{都有}\ \ |f(x)|<\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. $\square$

【单调函数的间断点】

单调必有极限, 所以单调函数有较好的分析性质.

【定理4.8 (单调函数只有可数多个间断点)】设$E\subset\mathbb{R}$, $f:E\to\mathbb{R}$ 为单调函数. 则f的间断点的集合是至多可数集, 并且f只可能有第一类间断.

【证】只需证明f的间断点的集合是至多可数集, 其余是明显的. 不妨设f单调不减(否则考虑$-f$). 因为孤立点都是连续点, 且两个端点$\inf E,\sup E$对我们所证集合的可数性与否没有影响, 故我们只需考察集合$E_0=\{x\in E\,|\,x\ \text{是}\ E\ \text{的聚点}\}$. 令$D(f)$为$f$的属于$E_0$的间断点的集合, $D_-(f),D_+(f)$ 分别为f的属于E_0的左间断点和右间断点的集合, 即

$$D_-(f)=\{x\in E_0\,|\,f(x-)<f(x)\},\quad D_+(f)=\{x\in E_0\,|\,f(x)<f(x+)\}.$$

则$D(f)=D_-(f)\cup D_+(f)$. 假设$D(f)$非空. 为证明$D(f)$ 是可数集, 只须证明$D_-(f),D_+(f)$都是可数集. 以$D_-(f)$为例. 假设$D_-(f)$非空. 我们先证明

$$x,y\in D_-(f)\ \text{ and }\ x\neq y\quad\Longrightarrow\quad (f(x-),f(x))\cap(f(y-),f(y))=\emptyset.$$

事实上不妨设$x<y$, 则由f 单调不减有

$$t\in(x,y)\cap E\Longrightarrow f(x)\le f(t)\le f(y)\quad\Longrightarrow\quad f(x)\le\lim_{E\ni t\to y-}f(t)=f(y-)$$

从而有

$$f(x-)<f(x)\le f(y-)<f(y)\quad\Longrightarrow\quad (f(x-),f(x))\cap(f(y-),f(y))=\emptyset.$$

令

$$J_x=(f(x-),f(x)),\quad x\in D_-(f).$$

则由上面的不相交性质知映射$x\mapsto J_x$ 是从$D_-(f)$ 到$\{J_x\,|\,x\in D_-(f)\}$ 的一一对应. 因此

$$\mathrm{Card}(D_-(f))=\mathrm{Card}(\{J_x\,|\,x\in D_-(f)\}).$$

因$\{J_x \,|\, x\in D_-(f)\}$ 是由$\mathbb{R}$中一些互不交的开区间组成的集合, 故周知它是可数集. 因此$D_-(f)$ 是可数集. 同样可证$D_+(f)$ (当非空时)是可数集. $\Box$.

【例】介绍一种方法构造右连续的单调函数, 它以指定的可数集为间断点集.

设$D=\{r_1,r_2,r_3,...\}$ 为$\mathbb{R}$中的一个可数集(r_n 互不相同), 例如$D=\mathbb{Q}$是全体有理数. 设$a_n>0\,(n=1,2,3,...)$ 且$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n:=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$. 令

$$A(x)=\{n\in\mathbb{N}\,|\,r_n\le x\},\quad x\in\mathbb{R}.$$

做函数$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 如下:

$$f(x)=\sum_{n\in A(x)}a_n,\quad x\in\mathbb{R}.$$

这里和以后, 数学上规定: 空集上的求和为零, 即$\sum\limits_{n\in\emptyset}a_n=0$.

上述求和也可写成

$$f(x)=\sum_{r_n\le x}a_n=\sum_{n\in A(x)}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n1_{A(x)}(n),\quad x\in\mathbb{R}.$$

我们来证明f在$\mathbb{R}$上单调不减、右连续, 且f的间断点的集合恰好等于D. 意即f在$\mathbb{R}$上单调不减, f 在$\mathbb{R}\setminus D$中每点连续, 在D中每点右连续、左间断, 即对任意$x_0\in D$有$f(x_0-)<f(x_0)=f(x_0+)$.

【证】首先由整体正项级数$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n<+\infty$可知对任意$A\subset\mathbb{N}$ 都有$\sum\limits_{n\in A}a_n<+\infty$.
因此上述函数$f(x)$是被良好确定的且处处有限. 易见

$$x<y\implies A(x)\subset A(y)\implies\sum_{n\in A(x)}a_n\le\sum_{n\in A(y)}a_n\ \text{即}\ f(x)\le f(y).$$

这表明f在$\mathbb{R}$上单调不减.

1. 任取$x_0\in\mathbb{R}\setminus D$, 来证明$f$在$x_0$连续. 由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛知对任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n<\varepsilon$. 由$|r_n-x_0|>0, n=1,2,3,...$知

$$\delta:=\min_{1\le n\le N}|r_n-x_0|>0.$$

令

$$A_N(x)=A(x)\cap\{1,2,...,N\}.$$

来证明

$$\text{当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时，} A_N(x)=A_N(x_0).$$

事实上设$0<|x-x_0|<\delta$, 则对任意$n\in A_N(x)$, 若$n\notin A_N(x_0)$, 则有$r_n>x_0$ 从而有$x_0<r_n\le x \implies 0<r_n-x_0\le x-x_0<\delta$ 这与$\delta\le|r_n-x_0|$矛盾. 因此必有$n\in A_N(x_0)$. 所以$A_N(x)\subset A_N(x_0)$. 反之对任意$n\in A_N(x_0)$, 若$n\notin A_N(x)$, 则有$r_n>x$ 从而有$x<r_n\le x_0$. 但$r_n\ne x_0$, 故得到$0<r_n-x_0\le x-x_0<\delta$ 这与$\delta\le|r_n-x_0|$矛盾. 因此必有$n\in A_N(x)$. 所以$A_N(x_0)\subset A_N(x)$. 因此$A_N(x)=A_N(x_0)$.

有这一等式即知当$0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|=\Big|\sum_{n\in A(x),n\ge N+1}a_n-\sum_{n\in A(x_0),n\ge N+1}a_n\Big|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n<\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 所以$f$在$x_0$ 连续.

2. 设$x_0\in D$. 来证明$f(x_0-)<f(x_0)=f(x_0+)$. 写$x_0=r_m$. 则有

$$\begin{aligned}
&f(x_0)=\sum_{r_n<x_0}a_n+\sum_{r_n=x_0}a_n=\sum_{r_n<x_0}a_n+a_m \implies \sum_{r_n<x_0}a_n=f(x_0)-a_m,\\
&\forall\, x<x_0 \implies f(x)=\sum_{r_n\le x}a_n\le\sum_{r_n<x_0}a_n=f(x_0)-a_m\\
&\implies f(x_0-)=\lim_{x\to x_0-}f(x)\le f(x_0)-a_m<f(x_0).
\end{aligned}$$

另一方面如上, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n<\varepsilon$. 令

$$\delta=\begin{cases}\min\limits_{n\in A_N^+(x_0)}(r_n-x_0) & \text{当 } A_N^+(x_0):=\{n\in\{1,2,...,N\}\,|\,x_0<r_n\}\} \text{ 非空时,}\\ 1 & \text{当 } A_N^+(x_0) \text{ 为空集时.}\end{cases}$$

对任意x 满足$x_0<x<x_0+\delta$, 若存在$n\in\mathbb{N}$ 使得$x_0<r_n\le x$, 则有$0<r_n-x_0\le x-x_0<\delta$ 从而由δ的定义有$n\ge N+1$. 否则, $n\le N$, 则有$n\in A_N^+(x_0)$ (非空) 从而应有$r_n-x_0\ge\delta$, 矛盾. 所以必有$n\ge N+1$. 于是得到

$$x_0<x<x_0+\delta \implies \sum_{x_0<r_n\le x}a_n\le\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n<\varepsilon.$$

因此

$$x_0<x<x_0+\delta \implies f(x_0)\le f(x)=\sum_{r_n\le x_0}a_n+\sum_{x_0<r_n\le x}a_n=f(x_0)+\varepsilon.$$

所以$f(x_0+)=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$. $\square$

§4.2. 连续函数的局部性质和代数性质.

【定理4.9】设$f,g:E\to\mathbb{C}$ 都在点$x_0\in E$连续. 则有

(1)(**局部有界**) 存在$\delta>0$ 使得f 在$U_E^\delta(x_0):=E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有界.

(2)(**局部保号**) 若$f(x_0)\neq 0$, 则存在$\delta>0$ 使得f 在$U_E^\delta(x_0)$ 上与$f(x_0)$ 有相同的符号:

$$f(x_0)>0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0),\quad x\in U_E^\delta(x_0);$$
$$f(x_0)<0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0),\quad x\in U_E^\delta(x_0).$$

(3) 函数

$$\alpha f+\beta g,\qquad fg,\qquad \frac{f}{g}\quad (\,g(x_0)\neq 0\,)$$

都在x_0连续, 其中α,β 为常数.

【证】(1): 在连续的定义中取$\varepsilon=1$ 则存在$\delta>0$ 使得$|f(x)-f(x_0)|<1$ for all $x\in U_E^\delta(x_0)$. 所以

$$|f(x)|\le 1+|f(x_0)|\quad \forall\, x\in U_E^\delta(x_0).$$

(2): 取$\varepsilon=\frac{1}{2}|f(x_0)|\,(>0)$, 则存在$\delta>0$ 使得$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}|f(x_0)|$ for all $x\in U_E^\delta(x_0)$. 因此

$$f(x_0)-\frac{1}{2}|f(x_0)|<f(x)<f(x_0)+\frac{1}{2}|f(x_0)|\quad \forall\, x\in U_E^\delta(x_0).$$

(3): 设$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset E$ 是满足$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$ 的任意序列. 则由连续性的序列刻画有

$$\lim_{n\to\infty}[\alpha f(x_n)+\beta g(x_n)]=\alpha\lim_{n\to\infty}f(x_n)+\beta\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0),$$
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)g(x_n)=(\lim_{n\to\infty}f(x_n))(\lim_{n\to\infty}g(x_n))=f(x_0)g(x_0),$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

再由$\{x_n\}_{n=1}^\infty$任意性和连续性的序列刻画即知函数$\alpha f+\beta g, fg, \frac{f}{g}$ 都在x_0连续. $\square$

【推论4.10】设$E\subset\mathbb{R}$. 则

$$f,g\in C(E,\mathbb{R})\quad\Longrightarrow\quad \alpha f+\beta g\in C(E,\mathbb{R}),\quad fg\in C(E,\mathbb{R}).$$
$$\text{若}\ \ g(x)\neq 0\quad\forall\, x\in E\quad\text{则}\quad \frac{f}{g}\in C(E,\mathbb{R}).\qquad\square$$

【定理4.11 (复合函数的连续性)】 设$E, Y \subset \mathbb{R}$, $f : E \to Y, g : Y \to \mathbb{C}$, $x_0 \in E$. 若f在x_0连续, g 在$y_0 = f(x_0)$连续, 则复合函数$g \circ f : E \to \mathbb{C}$ 在x_0 连续.

【证】 证法一(用序列刻画). 这$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 是满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的任一序列. 则由假设有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$. 根据连续性的序列刻画即知复合函数$g \circ f$ 在x_0连续.

证法二(用定义). 对任意$\varepsilon > 0$ 存在$\eta > 0$ 使得$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ for all $y \in U_Y^{\eta}(y_0)$. 而对$\eta > 0$ 存在$\delta > 0$ 使得$|f(x) - f(x_0)| < \eta$ for all $x \in U_E^{\delta}(x_0)$. 因此

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_E^{\delta}(x_0).$$

所以复合函数$g \circ f$ 在x_0连续. □

【推论4.12】 若$f : E \to Y$ 连续, $g : Y \to \mathbb{C}$ 连续, 则复合函数$g \circ f : E \to \mathbb{C}$ 连续. □

由这一结果和复合映射的结合律

$$(g \circ (f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x) = g(f(h(x))) \qquad \forall\, x \in E$$

$$\text{i.e.} \qquad g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = g \circ f \circ h.$$

即可证明多个连续函数复合的连续性.

【初等函数】 由基本初等函数(幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数)

$$x^{\alpha}, \quad e^{x}, \quad \log x, \quad \sin x, \quad \cos x$$

经有限次算术运算和复合运算后所产生的函数叫做初等函数.

【推论4.13】 初等函数在其定义域内是连续的. □

【例】 下列函数都是初等函数, 因此他们在各自的定义域上是连续的:

$$|x| = (x^2)^{1/2}, \quad \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m},$$
$$e^{\sin x}, \quad \log(1 + \cos x), \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x^{x^{\alpha}} = e^{x^{\alpha} \log x}, \quad \text{etc.}$$

【连续性的遗传】 由连续性的定义可知若$f \in C(E, \mathbb{C})$ 且$E_0 \subset E$, 则$f|_{E_0} \in C(E_0, \mathbb{C})$. 例如若$f \in C([a, b], \mathbb{C})$ 而$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 则$f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$. 这个性质将被多次使用.

§4.3 连续函数的整体性质.

与局部性质不同, 连续函数的整体性质严重依赖于函数的定义域的特性, 例如定义域是区间与定义域不是区间将有某种本质区别, 定义域是开区间与定义域是有界闭区间将有另一种本质区别. 首先我们给出

【区间的刻画】回忆: $\mathbb{R}$的具有下列形式之一的子集I都称为区间:

$$I=(a,b),\qquad -\infty\le a<b\le+\infty;\qquad I=(a,b],\qquad -\infty\le a<b<+\infty$$

$$I=[a,b],\qquad -\infty<a<b<+\infty;\qquad I=[a,b),\qquad -\infty<a<b\le+\infty.$$

一个特殊情形是I 为单点集: $I=\{a\}=[a,a]$. 此时我们称I 是退化闭区间.

很多时候一个集合的信息不是直接给出的而是通过变换(映射)间接给出的. 这时要判别它是否为区间, 就需要一个一般方法. 下面这个命题就是为此设计的.

【命题4.14 (区间的刻画)】设集合$I\subset\mathbb{R}$ 至少包含两个元素. 则I 是区间的充分必要条件是:

$$\text{对任意 } a,b\in I,\ \ a<b,\quad \text{都有}\quad [a,b]\subset I.$$

【证】根据区间的定义, 必要性是显然的.

下证充分性. 令$A=\inf I$, $B=\sup I$. 因I 至少包含两个元素, 故$-\infty\le A<B\le+\infty$. 先证明$(A,B)\subset I$. 由确界的定义和$A<B$, 存在两个序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$a_n,b_n\in I,\quad a_n<b_n\ \ (n=1,2,3,...)\quad \text{and}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=A,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=B.$$

对任意$x\in(A,B)$ 即x 满足$A<x<B$, 由上述极限知存在$n\in\mathbb{N}$ 使得$a_n<x<b_n$. 而由充分性的条件知$[a_n,b_n]\subset I$, 所以$x\in I$. 这证明了$(A,B)\subset I$.

由$A=\inf I$, $B=\sup I$ 和$(A,B)\subset I$ 易见

$$\begin{aligned}
&\text{若}\quad A\in I,\,B\in I\quad \text{则}\quad I=[A,B];\\
&\text{若}\quad A\in I,\,B\notin I\quad \text{则}\quad I=[A,B);\\
&\text{若}\quad A\notin I,\,B\in I\quad \text{则}\quad I=(A,B];\\
&\text{若}\quad A\notin I,\,B\notin I\quad \text{则}\quad I=(A,B).
\end{aligned}$$

所以I 是一个区间. $\square$

【**定理4.15 (连续函数介值定理)**】. 设$I \subset \mathbb{R}$ 为一区间, 函数$f: I \to \mathbb{C}$ 连续. 若$a, b \in I$ 且$f(a) \neq f(b)$, 则对于介于$f(a)$ 与$f(b)$之间的任意实数p, 即$f(a) < p < f(b)$ 或$f(a) > p > f(b)$, 都存在$c \in (a, b)$ 或$c \in (b, a)$ 使得$f(c) = p$. (**Show a graph**).

【证】可以假设$f(a) < p < f(b)$ 否则考虑$-f$ 和$-p$ 而有$-f(a) < -p < -f(b)$. 还可假设$a < b$. 否则调整记号$\widetilde{a} = b, \widetilde{b} = a$. 因$I$ 是区间, 故$[a, b] \subset I$. 我们给出两个证明, 第一个是构造性的(程序算法), 第二个是存在性的.

(I) 构造计算程序如下: 令$a_0 = a, b_0 = b$ 并定义

$$\begin{aligned} &a_n = a_{n-1}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{if} \quad f(a_{n-1}) < p \le f(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}); \\ &a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = b_{n-1} \quad \text{if} \quad f(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}) < p \le f(b_n) \end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$. 由假设$f(a_0) < p < f(b_0)$ 和归纳操作原理可知数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 确实可以做出并满足

$$f(a_n) < p \le f(b_n), \quad [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

根据闭区间套原理, $[a_n, b_n]$ 有一公共点c, 即$a_n \le c \le b_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 于是由

$$|a_n - c|, |b_n - c| \le b_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

和f在$[a, b]$ 上的连续性得到

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le p \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c). \quad 因此 \quad f(c) = p.$$

(II) 存在性方法: 令

$$E = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) \le p\}, \quad c = \sup E.$$

由$f(a) < p < f(b)$知$a \in E$, 故E 非空且有界, 因此$c = \sup E$存在. 由确界的定义, 存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得$x_n \to c \, (n \to \infty)$. 因$a \le x_n \le b \, (1, 2, 3, ...)$ 故c 也满足$a \le c \le b$. 于是由f在$[a, b]$ 上的连续性有

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le p.$$

我们断言$f(c) = p$. 否则, $f(c) < p$, 则$c < b$. 由连续性$\lim\limits_{x\to c+} f(x) = f(c) < p$ 知存在$c_1 \in (c, b)$ 使得$f(c_1) < p$. 这说明$c_1 \in E$ 从而应有$c_1 \le \sup E = c$, 但这矛盾于$c_1 > c$.

□

推论4.16 (不变号性质). 设$I\subset\mathbb{R}$为一区间, $f:I\to\mathbb{R}$连续. 若f在I 上无零点, 则f在I 上不变号, 也即f 在I 上恒正或恒负.

【证】假设不然, 则存在$a,b\in I$ 使得$f(a)$ 与$f(b)$ 异号, 即例如$f(a)<0<f(b)$. 根据连续函数介值定理知存在$c\in(a,b)$或$\in(b,a)$使得使得$f(c)=0$, 这与假设矛盾. □

【例】设$f:[0,1]\cup[2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1$ 于$[0,1]$; $f(x)=1$ 于$[2,3]$. 易见f在$[0,1]\cup[2,3]$上连续. 但对于$-1<p<1$, 不存在$c\in[0,1]\cup[2,3]$使得$f(c)=p$. 原因是f的定义域$[0,1]\cup[2,3]$是分离的而不是连通的. □

【例】(1). 设$-\infty\le a<b\le\infty$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续且

$$\lim_{x\to a+}f(x)<p<\lim_{x\to b-}f(x).$$

则存在$c\in(a,b)$ 使得$f(c)=p$.

事实上由极限的保号性知存在a_1,b_1 满足$a<a_1<b_1<b$ 使得$f(a_1)<p<f(b_1)$. 因此存在$c\in(a_1,b_1)\subset(a,b)$ 使得$f(c)=p$.

(2) 每个实系数奇数次多项式都至少有一个实根, 意即若

$$P(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_i\in\mathbb{R},\quad a_{2n+1}\neq0$$

则存在$x_0\in\mathbb{R}$ 使得$P(x_0)=0$.

事实上我们可以假定$a_{2n+1}>0$. 则对于$|x|>1$ 有

$$P(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}\Big(1+\frac{a_{2n}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{2n}}+\frac{a_0}{x^{2n+1}}\Big)$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty<0,\quad\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty>0.$$

因此由(1)知存在$x_0\in\mathbb{R}$ 使得$P(x_0)=0$.

(3) 设$P(x)$ 为偶数次实系数多项式:

$$P(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots a_1x+a_0$$

且存在$x_0 \in \mathbb{R}$ 使得$P(x_0) < 0$. 则分别在$(-\infty, x_0)$ 和$(x_0, +\infty)$ 上应用(1) 即知存在$x_1 < x_0 < x_2$ 使得$P(x_1) = P(x_2) = 0$.

(4) 设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续, $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$. 则存在$c \in [a, b]$ 使得

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

事实上存在$i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ 使得$f(x_i) = \min\limits_{1\le k\le n} f(x_k)$, $f(x_j) = \max\limits_{1\le k\le n} f(x_k)$, 从而有

$$f(x_i) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \le f(x_j).$$

由连续函数介值定理, 存在$c \in [x_i, x_j] \subset [a, b]$ 或$c \in [x_j, x_i] \subset [a, b]$ 使得$f(c) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$. $\square$

【定理4.17 (最小值最大值定理)】 设$[a, b]$ 为有界闭区间, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. 则$f$在$[a, b]$上有最小值和最大值, 即存在$\alpha, \beta \in [a, b]$使得

$$f(\alpha) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

这同时表明f在$[a, b]$ 上有界.

【证】令

$$A = \inf f([a, b]) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad B = \sup f([a, b]) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

由确界的定义(无论A, B是实数还是无穷大), 存在序列$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}, \{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset f([a, b])$, $x_n, y_n \in [a, b]$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B$. 因$[a, b]$是有界闭区间, 故由Weierstrass 极限点定理知存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得

$$a \le \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha \le b, \quad a \le \lim_{k\to\infty} y_{m_k} = \beta \le b.$$

又因f在$[a, b]$连续, 故有

$$f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A, \quad f(\beta) = \lim_{k\to\infty} f(y_{m_k}) = B.$$

这说明$f(\alpha), f(\beta)$分别达到了f 在$[a, b]$ 上的下、上确界, 所以$f(\alpha), f(\beta)$ 是f 在$[a, b]$ 上的最小值和最大值: $f(\alpha) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(\beta) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. $\square$

上述有界性和最小值最大值定理的逆也是对的. 意即: 若I是一个区间使得对任意$f \in C(I,\mathbb{R})$, f 都在I 上有界, 则I 必是一个有界闭区间. 这是因为若I 无界, 则函数$f(x) \equiv x$ 便在I 上连续但无界. 若I 有界但(例如) $a := \inf I \notin I$, 则函数$f(x) = 1/(x-a)$ 便在I 上连续但无界. 从这一分析我们还看到, 虽然有界开区间(a,b) 与闭区间$[a,b]$ 只差两个端点, 但其上的函数行为却有本质不同!

【定理4.18 (连续实函数把区间映为区间)】

(1) 设$I \subset \mathbb{R}$为区间, $f \in C(I,\mathbb{R})$. 则$f(I)$ 仍是区间. 换言之连续函数把区间映为区间.

(2) 设$[a,b]$为有界闭区间, $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. 则

$$f([a,b]) = [A,B] \qquad \text{其中} \quad A = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad B = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

换言之连续函数把有界闭区间映为有界闭区间.

【证】(1). 当$f \equiv$常数时, $f(I)$ 是单点集, 它是退化的闭区间. 设$f \not\equiv$常数, 即$f(I)$ 至少含有两个元素. 任取$p,q \in f(I)$ 且$p < q$. 写$p = f(a), q = f(b)$ 其中$a,b \in I$. 因I 是区间, 故由连续函数介值定理, 对任意$y \in (p,q)$, 存在$c \in (a,b)$ 或$\in (b,a)$ 使得$y = f(c)$. 因此$y \in f(I)$. 这证明了$[p,q] \subset f(I)$. 根据区间的刻画知$f(I)$ 是一个区间.

(2) 当$A = B$ 时所证显然成立. 设$A < B$. 由(1) 知$f([a,b])$ 是一个区间. 又由定理4.17 (最小值最大值定理)知存在$\alpha, \beta \in [a,b]$ 使得$f(\alpha) = A, f(\beta) = B$. 因此根据区间的刻画和$A, B \in f([a,b])$知$[A,B] \subset f([a,b])$. 但显然$f([a,b]) \subset [A,B]$, 所以$f([a,b]) = [A,B]$. $\Box$

作业题

1. 设$I \subset \mathbb{R}$为一区间. 若函数$f \in C(I,\mathbb{R})$的值域$f(I)$ 是一个可数集, 则$f \equiv$常数于I.

2. (常用性质) 若$f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

则f在$\mathbb{R}$ 上有最小值.

【函数的一致连续性】

我们知道函数的连续性是逐点定义的, 在$\varepsilon-\delta$ 语言中, δ 不仅依赖于ε 还依赖于所考察的点的位置. 所谓一致连续就是说这个δ可以取得只依赖于ε (当然也依赖于函数定义域) 而不依赖于定义域中的个别点.

【定义(一致连续)】设$f: E\to\mathbb{C}$. 若

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta_\varepsilon>0\ \text{使得对于满足}\ |x-y|<\delta\ \text{的所有}\ x,y\in E\ \text{都有}\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

则称f在E 上一致连续. □

不难看出f 在E上一致连续蕴含f在E上处处连续, 这是因为若在一致连续的定义中固定任意$x\in E$, 让$y\in E$随着ε 和δ的缩小而在x附近变化, 便推出f在点x连续.

明显地很多很好的连续函数不是一致连续的. 在给出例子之前, 我们需要对一个函数"不是一致连续的"用肯定的语气来正确叙述.

【不一致连续】设$f: E\to\mathbb{R}$. 若存在$\varepsilon>0$ 使得对任意$\delta>0$ 都存在两个$x_\delta,y_\delta\in E$ 满足$|x_\delta-y_\delta|<\delta$ 并且$|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\ge\varepsilon$, 则$f$ 在E上不一致连续.

由于$\delta>0$ 是任意的, 故我们可以取它的离散值$\delta=1,1/2,1/3,...,1/n,...$, 相应地得到序列$x_n,y_n\in E$ 满足$|x_n-y_n|<1/n$ 并且$|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon, n=1,2,3\dots$.

用极限的语言来说, f在E上不一致连续等价于:

存在$\varepsilon>0$ 和$x_n,y_n\in E$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0$ 并且$\liminf\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$.

【例】函数$x\mapsto\sin(\frac{1}{x})$在$(0,1]$ 上连续但不一致连续.

根据两个连续函数的复合还是连续函数可知$\sin(\frac{1}{x})$在$(0,1]$ 上连续. 这函数在$x=0$ 附近震动很大, 因此相信导致不一致连续的因素就是此函数在$x=0$ 的邻域内的行为. 事实上若取$x_n=\frac{1}{2n\pi}, y_n=\frac{1}{\pi/2+2n\pi}$则

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0\quad\text{but}\quad|\sin(\frac{1}{x_n})-\sin(\frac{1}{y_n})|=1,\quad n=1,2,3,\dots.$$

所以$\sin(\frac{1}{x})$在$(0,1]$不一致连续.

进一步分析: 如果把$x=0$ 这点的一个小邻域挖去, 例如考虑$[10^{-6},1]$. 则相信$\sin(\frac{1}{x})$在$[10^{-6},1]$上一致连续. 事实上应用不等式$|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|$ 我们有

估计

$$|\sin(\frac{1}{x})-\sin(\frac{1}{y})|\le|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=\frac{1}{xy}|x-y|\le 10^{12}|x-y|\qquad \forall\, x,y\in[10^{-6},1].$$

由此看出$\sin(\frac{1}{x})$在$[10^{-6},1]$上一致连续.

一般地, 我们有下列

【定理4.19 (Cantor 关于一致连续性的定理)】有界闭区间上的连续函数必在该区间上一致连续.

【证】设$[a,b]$ 为有界闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续. 来证f 在$[a,b]$ 上一致连续.

证法一: 反证法, 利用Weierstrass极限点定理. 假设f在$[a,b]$ 上不一致连续, 则由前面分析知存在$\varepsilon>0$ 和序列$x_n,y_n\in E$ 满足$|x_n-y_n|<1/n$ 使得$|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon, n=1,2,3....$ 因$[a,b]$ 有界, 故Weierstrass极限点定理存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_0\in\mathbb{R}$使得$x_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$. 又因为$x_{n_k}\in[a,b]$ 故由极限保序性知$x_0\in[a,b]$ (这儿用到$[a,b]$是闭区间!). 而由$|x_{n_k}-y_{n_k}|\to 0\ (k\to\infty)$ 知$y_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$. 于是由$f$在$[a,b]$ 上处处连续因而在x_0 连续, 我们导出矛盾:

$$\varepsilon\le|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\le|f(x_{n_k})-f(x_0)|+|f(x_0)-f(y_{n_k})|\to 0\quad(k\to\infty)$$

它导致$\varepsilon=0$, 矛盾于$\varepsilon>0$. 这矛盾证明了f 必在在$[a,b]$ 上一致连续.

证法二: 正证法, 利用有限覆盖定理. 对任意$\varepsilon>0$, 对$\varepsilon/2>0$, 由f在$[a,b]$ 上处处连续, 对每个$x\in[a,b]$ 存在$\delta_x>0$ 使得当$y\in[a,b]\cap(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时$|f(y)-f(x)|<\varepsilon/2$. 因$[a,b]$ 中每一点x 都是开区间$(x-\delta_x/2,x+\delta_x/2)$的中心, 故得到$[a,b]$的开覆盖: $[a,b]\subset\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x/2,x+\delta_x/2)$. 因$[a,b]$ 是有界闭区间, 根据有限覆盖定理, 存在有限个开区间$(x_k-\delta_{x_k}/2,\ x_k+\delta_{x_k}/2)$, $k=1,2,...,N$, 使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{N}(x_k-\delta_{x_k}/2,x_k+\delta_{x_k}/2).$$

借助这有限性, 便有

$$\delta:=\min\{\delta_{x_1}/2,\delta_{x_2}/2,...,\delta_{x_N}/2\}>0$$

它将被证明可以作为一致连续性中的一致的δ. 对任意$x,y\in[a,b]$ 满足$|x-y|<\delta$, 存在$k\in\{1,2,...,N\}$使得$x\in(x_k-\delta_{x_k}/2,x_k+\delta_{x_k}/2)$. 由此有$|y-x_k|\le|y-x|+|x-x_k|<\delta+\delta_k/2\le\delta_k$. 因此$x,y\in[a,b]\cap(x_k-\delta_{x_k},x_k+\delta_{x_k})$. 据$\delta_x$的取法即得

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(y)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

所以f在$[a,b]$ 上一致连续. $\square$

下面介绍最常用的一类一致连续函数: Hölder 连续函数类.

【**定义**】设区间$I\subset\mathbb{R}$. 我们称函数$f:I\to\mathbb{R}$ 满足Hölder 条件如果

$$\exists\, 0<\alpha\le 1,\ 0\le L<+\infty \quad \text{使得} \quad |f(x)-f(y)|\le L|x-y|^{\alpha} \qquad \forall\, x,y\in I.$$

此时也称f在I 上是**Hölder 连续的**. 当$\alpha=1$ 时, 称f在I 上是**Lipschitz 连续的**. $\square$

【**注**】这个定义中没有考虑$\alpha>1$的情形. 这是因为当$\alpha>1$ 时, 相应的Hölder 连续的函数f 必为常数. 这一点将来从微分的角度看是明显的：f的导数恒等于零.

但现在也可以给出直接证明. 固定$x_0\in I$ 来证明$f(x)\equiv f(x_0)$. 对任意$x\in I$ 和$n\in\mathbb{N}$, 令

$$x_k:=x_0+\frac{k}{n}(x-x_0)=(1-\frac{k}{n})x_0+\frac{k}{n}x,\quad k=0,1,2,...,n.$$

因I是区间, 故易见$x_k\in I$. 由差和公式我们计算

$$|f(x)-f(x_0)|=\Big|\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\Big|\le\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le L\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}|^{\alpha}$$
$$=L\cdot n\cdot|\frac{1}{n}(x-x_0)|^{\alpha}=L|x-x_0|^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}\to 0\quad \text{as}\quad n\to\infty \qquad (\text{because }\ \alpha>1).$$

所以$|f(x)-f(x_0)|=0$ 即$f(x)=f(x_0)$. $\square$

【**例**】设$0<\alpha\le 1$. 则幂函数$x\mapsto x^{\alpha}$ 在$[0,+\infty)$ 上是Hölder 连续的且

$$|x^{\alpha}-y^{\alpha}|\le|x-y|^{\alpha},\qquad x,y\in[0,+\infty).$$

为证这点, 需证下列不等式

$$(x+y)^{\alpha}\le x^{\alpha}+y^{\alpha},\quad x,y\ge 0. \tag{$*$}$$

为证$(*)$可以假设x,y 不全为零. 则由$0<\alpha\le 1$ 有

$$\frac{x^{\alpha}+y^{\alpha}}{(x+y)^{\alpha}}=\Big(\frac{x}{x+y}\Big)^{\alpha}+\Big(\frac{y}{x+y}\Big)^{\alpha}\ge\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1.$$

所以$(*)$ 成立. 应用$(*)$, 对任意$x,y\in[0,+\infty)$, 不妨设$x>y$, 令$h=x-y$, 则有

$$|x^{\alpha}-y^{\alpha}|=(y+h)^{\alpha}-y^{\alpha}\le h^{\alpha}=(x-y)^{\alpha}=|x-y|^{\alpha}. \qquad \square$$

【例】对于无界区间, 例如$[0,+\infty)$, 一个函数f在$[0,+\infty)$上一致连续的必要条件是f至多线性增长, 即存在常数$a>0, b>0$ 使得

$$|f(x)|\le a+bx,\quad x\in[0,+\infty).$$

【证】设f在$[0,+\infty)$上一致连续. 则对于$\varepsilon=1$, 存在$h>0$ 使得当$x,y\in[0,+\infty)$且$|x-y|\le h$ 时$|f(x)-f(y)|<1$. 现在对任意$x\in[0,\infty)$, 若$x\le h$, 则$|f(x)-f(0)|<1$. 设$x>h$, 则由带余除法存在$n\in\mathbb{N}$ 使得$x=nh+r$ 其中$0\le r<h$. 由此有

$$|f(x)-f(0)|\le|f(x)-f(nh)|+|f(nh)-f(0)|<1+\Big|\sum_{k=1}^{n}[f(kh)-f((k-1)h)\Big|$$
$$<1+\sum_{k=1}^{n}|f(kh)-f((k-1)h)|<1+n\le 1+\frac{1}{h}x.$$

令$b=1/h$. 则对任意$x\in[0,+\infty)$都有

$$|f(x)|\le|f(0)|+1+\frac{1}{h}x:=a+bx,\qquad x\in[0,+\infty).\qquad\square$$

作业题 1. 设函数$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续且极限$A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在有限. 证明$f$在$[0,+\infty)$ 内一致连续.

2. 设(a,b) 为有界开区间, 函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续. 证明f 在(a,b)内一致连续 $\Longleftrightarrow$ 左右极限$f(a+)$, $f(b-)$ 皆存在有限.

[提示: 对于“$\Longrightarrow$”, 利用关于函数极限的Cauchy 收敛准则.]

【连续模】设$I\subset\mathbb{R}$ 为一区间, $f:I\to\mathbb{C}$. 称函数

$$\delta\mapsto\omega_I(f,\delta)=\sup_{x,y\in I,|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|,\quad \delta\in[0,+\infty)$$

为f在I 上的**连续模**(modular of continuity). 连续模是描述函数一致连续程度的一种度量. 我们将证明, 若f在I上一致连续, 则$\delta\mapsto\omega_I(f,\delta)$ 在$[0,+\infty)$ 处处有限且也是一致连续的. 当然我们的定义中未要求函数f 连续. 因此会出现一些较坏的情况, 例如对某些函数f来说, $\omega_I(f,\delta)=+\infty$ $(\forall\,\delta>0)$ 是可能出现的.

对于$+\infty$ 的运算我们规定$+\infty+\infty=+\infty$; $a+\infty=+\infty$ for all $a\in\mathbb{R}$.

【连续模的基本性质1】连续模$\delta\mapsto\omega_I(f,\delta)$ 在$[0,+\infty)$ 是单调不减的且满足次可加性. 即

$$\omega_I(f,0)=0\,;$$

$$0 \le \delta_1 < \delta_2 < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \omega_I(f,\delta_1) \le \omega_I(f,\delta_2)\,;$$
$$\delta_1,\delta_2 \in [0,+\infty) \quad \Longrightarrow \quad \omega_I(f,\delta_1+\delta_2) \le \omega_I(f,\delta_1)+\omega_I(f,\delta_2).$$

【证】$\omega_I(f,0)=0$ 是显然的. 设$0 \le \delta_1 < \delta_2 < +\infty$. 则由“集合越大其上确界也越大”得到

$$\omega_I(f,\delta_1) = \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x,y\in I, |x-y|\le \delta_1\}$$
$$\le \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x,y\in I, |x-y|\le \delta_2\} = \omega_I(f,\delta_2).$$

为证次可加性, 由$\omega_I(f,0)=0$易见我们可设$\delta_1,\delta_2\in[0,+\infty)$ 不全为零也即$\delta_1+\delta_2>0$. 对任意$x,y\in I$ 满足$|x-y|\le\delta_1+\delta_2$, 令

$$z = \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}x + \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}y.$$

则z 介于x,y 之间. 因I 是区间, 故$z\in I$. 同时由$\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}+\frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}=1$ 有

$$x-z = \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}(x-y), \quad |x-z| = \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}|x-y| \le \delta_2$$
$$z-y = \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}(x-y), \quad |z-y| = \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}|x-y| \le \delta_1.$$

于是有

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)| \le \omega_I(f,\delta_2)+\omega_I(f,\delta_1).$$

对所有这样的x,y 取上确界即得

$$\omega_I(f,\delta_1+\delta_2) = \sup_{x,y\in I, |x-y|\le\delta_1+\delta_2} |f(x)-f(y)| \le \omega_I(f,\delta_1)+\omega_I(f,\delta_2). \qquad \Box$$

【连续模的基本性质2】设$I\subset\mathbb{R}$ 为一区间, $f: I\to\mathbb{R}$. 则

f 在I 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ 连续模$\delta\mapsto\omega_I(f,\delta)$ 在$\delta=0$ 连续, 即$\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_I(f,\delta)=0$.

此外, 若f 在I 上一致连续, 则连续模$\delta\mapsto\omega_I(f,\delta)$在$[0,+\infty)$上一致连续并有估计

$$|\omega_I(f,\delta_1)-\omega_I(f,\delta_2)| \le \omega_I(f,|\delta_1-\delta_2|) \qquad \forall\,\delta_1,\delta_2\in[0,+\infty).$$

【证】“$\Longrightarrow$”: 设f 在I 上一致连续. 则对任意$\varepsilon>0$ 存在$\eta>0$ 使得只要$x,y\in I$ 满足$|x-y|\le\eta$ 就有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 由连续模的定义及其单调性, 这蕴含

$$\omega_I(f,\delta) \le \omega_I(f,\eta) \le \varepsilon \qquad \forall\,\delta\in[0,\eta].$$

这表明$\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_I(f,\delta)=0$.

“$\Longleftarrow$”: 设$\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_I(f,\delta)=0$. 则对任意$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 使得$\omega_I(f,\delta)<\varepsilon$. 再由连续模的定义即知

$$|f(x)-f(y)|\le \omega_I(f,\delta)<\varepsilon \qquad \forall\, x,y\in I \text{ s.t. } |x-y|\le\delta.$$

所以f 在I 上一致连续.

最后设f 在I 上一致连续. 先证明$\omega_I(f,\delta)<+\infty$ for all $\delta\in[0,+\infty)$. 取$\varepsilon=1$, 则由$\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_I(f,\delta)=0$ 知存在$\delta_0>0$ 使得$\omega_I(f,\delta_0)<1$. 对任意$\delta>0$, 由带余除法, 存在非负整数n 使得$\delta=n\delta_0+r$ 其中$0\le r<\delta_0$. 于是由连续模的次可加性和单调性有

$$\omega_I(f,\delta)=\omega_I(f,n\delta_0+r)\le\omega(f,n\delta_0)+\omega_I(f,r)\le n\omega_I(f,\delta_0)+\omega_I(f,\delta_0)<+\infty.$$

这里用到了次可加性的特殊情形(例如设$n\ge 1$):

$$\begin{aligned}&\omega(f,n\delta_0)=\omega(f,(n-1)\delta_0)+\delta_0)\le\omega_I(f,(n-1)\delta_0)+\omega_I(f,\delta_0)\\&\le\omega_I(f,(n-2)\delta_0)+2\omega_I(f,\delta_0)\le\cdots\le n\omega_I(f,\delta_0).\end{aligned}$$

所以$\delta\mapsto\omega_I(f,\delta)$ 在$[0,+\infty)$ 上处处有限.

其次证明上述一致连续性估计. 对任意$\delta_1,\delta_2\in[0,+\infty)$, 不妨设$\delta_1\le\delta_2$. 则由$\omega_I(f,\delta)$ 单调不减和次可加性有

$$\begin{aligned}&0\le\omega_I(f,\delta_2)-\omega_I(f,\delta_1)=\omega_I(f,\delta_1+\delta_2-\delta_1)-\omega_I(f,\delta_1)\\&\le\omega_I(f,\delta_1)+\omega_I(f,\delta_2-\delta_1)-\omega_I(f,\delta_1)=\omega_I(f,\delta_2-\delta_1). \qquad\Box\end{aligned}$$

【推论】设$[a,b]\subset\mathbb{R}$ 为有界闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$连续. 则f 在$[a,b]$ 上一致连续从而有$\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_I(f,\delta)=0$. $\Box$

容易看到, 函数的Hölder 连续性可由连续模刻画. 见下面作业题:

作业题. 设$I\subset\mathbb{R}$ 为一区间, $f:I\to\mathbb{C}$. 证明f 在I 上是Hölder 连续的当且仅当存在常数$L\ge 0, 0<\alpha\le 1$ 使得$\omega_I(f,\delta)\le L\delta^\alpha \ \ \forall\,\delta\ge 0$.

§4.4. 单调函数的连续性及反函数.

单调函数在分析学和应用科学研究中是广泛使用的一类函数, 例如概率论中随机变量的分布函数就是单调函数. 因此值得认真学习相关性质.

【定理4.20.】 设 $E \subset \mathbb{R}$ (不必是区间), $f : E \to \mathbb{R}$ 为一个单调函数. 若象集 $f(E)$ 是一个区间, 则 f 必在 E 上连续.

【证】设$J := f(E)$ 是一区间. 若J 是退化的区间, 即J 是单点集, 则$f \equiv$ 常数, 此时f当然在E上连续. 下设J 是非退化的区间. 不妨设f 在E 上单调不减. 任取$x_0 \in E$. 来证明f在x_0连续. 记$y_0 = f(x_0)$.

情形1: y_0 属于J的内部, 也即y_0不是J的端点. 此时对任意$\varepsilon > 0$, 集合$J \cap (y_0 - \varepsilon, y_0)$和$J \cap (y_0, y_0 + \varepsilon)$ 皆非空. 取$y_1 \in J \cap (y_0 - \varepsilon, y_0), y_2 \in J \cap (y_0, y_0 + \varepsilon)$. 则存在$x_1, x_2 \in E$使得$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ 从而有

$$y_0 - \varepsilon < y_1 = f(x_1) < y_0 = f(x_0) < y_2 = f(x_2) < y_0 + \varepsilon.$$

因f 单调不减, 故这蕴含$x_1 < x_0 < x_2$. 令$\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$. 则$\delta > 0$ 且对任意$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有$x_1 \le x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \le x_2$ 从而有

$$f(x_0) - \varepsilon = y_0 - \varepsilon < y_1 = f(x_1) \le f(x) \le y_2 = f(x_2) < y_0 + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon.$$

这证明了

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

所以f 在x_0 连续.

情形2: y_0 是J的右端点, 即$y_0 = \max J$. 注意这意味着区间J 包含了它自己的右端点. 由f单调不减有$f(x) \le y_0 = f(x_0)$ for all $x \in E$. 对任意$\varepsilon > 0$, 易见$J \cap (y_0 - \varepsilon, y_0)$ 非空. 取$y_1 \in J \cap (y_0 - \varepsilon, y_0)$. 则存在$x_1 \in E$使得$y_1 = f(x_1)$ 从而有

$$f(x_0) - \varepsilon = y_0 - \varepsilon < y_1 = f(x_1) < y_0 = f(x_0).$$

由f单调不减知上面第二个“$<$”蕴含$x_1 < x_0$. 令$\delta = x_0 - x_1$. 则$\delta > 0$ 且对任意$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有$x_0 - \delta = x_1 < x < x_0 + \delta$ 从而有

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

所以得到

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

所以f在x_0连续.

情形3: y_0 是J的左端点, 即$y_0=\min J$. 这意味着区间J 包含了它自己的左端点. 由f单调不减有$y_0=f(x_0)\le f(x)$ for all $x\in E$. 对任意$\varepsilon>0$, 易见$J\cap(y_0,y_0+\varepsilon)$非空. 取$y_2\in J\cap(y_0,y_0+\varepsilon)$. 则存在$x_2\in E$ 使得$y_2=f(x_2)$ 从而有

$$f(x_0)=y_0<y_2=f(x_2)<y_0+\varepsilon=f(x_0)+\varepsilon.$$

由f单调不减知上面第一个"$<$" 蕴含$x_0<x_2$. 令$\delta=x_2-x_0$. 则$\delta>0$ 且对任意$x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有$x_0-\delta<x<x_0+\delta=x_2$ 从而有

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x_0)\le f(x)\le f(x_2)<f(x_0)+\varepsilon.$$

所以

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\quad\forall x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

因此f 在x_0 连续.

综上我们证明了f在E上处处连续. $\square$

由这一定理和连续函数把(有界闭)区间映为(有界闭)区间我们立即得到

【推论4.21.】(1) 设$[a,b]$为有界闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$单调. 不妨设f 单调不减. 则f在$[a,b]$上连续$\Longleftrightarrow f([a,b])=[f(a),f(b)]$.

(2) 一般地设$I\subset\mathbb{R}$ 为一区间, $f:I\to\mathbb{R}$ 为单调函数. 则f 在I 连续$\Longleftrightarrow f(I)$ 是一个区间. $\square$

由单调函数的性质易见如果定义在区间上的一个单调函数在某点间断, 则该函数的值域将被一个非退化的区间分离成两块. 根据这点, 下面的例题和练习题的证明思路就很清楚了.

【例】设$f:[0,1]\to[0,1]$ 单调不减且$f(0)=0,f(1)=1$. 又设

$$f([0,1])\supset\left\{\frac{2k-1}{2^n}\,\middle|\,k=1,2,...,2^{n-1};\quad n=1,2,3,,....\right\}.$$

则f 在$[0,1]$ 上连续. 这提供了一种证明单调函数连续性的方法, 也会在将来的学习研究中见到. $\square$

作业题. 设$[a,b]$为有界闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调不减. 假设$f([a,b])$在$[f(a),f(b)]$ 中稠密. 证明f 在$[a,b]$ 上连续从而实际上有$f([a,b])=[f(a),f(b)]$.

[这里稠密的意思是, 对任意$y\in[f(a),f(b)]$ 存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=y$.]

下面重要定理也是本节定理4.20的推论.

【定理4.22】 设 $I\subset\mathbb{R}$ 为任一**区间**, $f:I\to\mathbb{R}$ 为任一严格单调增加/减少的函数. 则其反函数 $f^{-1}:f(I)\to I$ 也是严格单调增加/减少的, 并且反函数 f^{-1} 在 $f(I)$ 上连续.

注: 本定理中没有假定 f 在 I 上连续. 定理中的区间是关键词.

【证】不失一般性, 假设f在I 上严格单调增加. 则其反函数$f^{-1}:f(I)\to I$存在. 设$y_1,y_2\in f(I)$ 满足$y_1<y_2$. 写$y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$ 其中$x_1,x_2\in I$. 则$x_1=f^{-1}(y_1),x_2=f^{-1}(y_2)$ 且$x_1\neq x_2$. 若$x_1>x_2$, 则导致$y_1=f(x_1)>f(x_2)=y_2$, 矛盾于$y_1<y_2$. 因此必有$x_1<x_2$, 也即$f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. 这表明$f^{-1}:f(I)\to I$ 也是严格单调增加的.

易见$f^{-1}(f(I))=I$, 也即单调函数$f^{-1}:f(I)\to I$ 的值域等于I. 因I 是区间, 故由定理4.20 即知反函数$f^{-1}:f(I)\to I$ 在$f(I)$上连续. $\square$

【例】 设$g:[0,1]\cup(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ 定义如下

$$g(y)=y\quad\text{if}\quad 0\le y\le 1;\qquad g(y)=y-1\quad\text{if}\quad 2<y<\infty.$$

易见g在$[0,1]\cup(2,+\infty)$上连续, 严格单调增加且它的值域是一个区间:

$$g([0,1]\cup(2,+\infty))=[0,+\infty).$$

g的反函数$g^{-1}:[0,+\infty)\to[0,1]\cup(2,+\infty)$的表达式为

$$g^{-1}(x)=x\quad\text{if}\quad 0\le x\le 1;\qquad g^{-1}(x)=1+x\quad\text{if}\quad 1<x<+\infty.$$

由此可见g^{-1} 在$x=1$处间断. 根据上述定理4.22, 造成g^{-1}不连续的原因是g 的定义域$[0,1]\cup(2,+\infty)$ 不是区间. 另一方面令$f(x)=g^{-1}(x)$, 则f的定义域是区间$[0,+\infty)$, f 在此区间上严格单调增加, f的反函数$f^{-1}(y)=g(y)$ 在$f([0,+\infty))=[0,1]\cup(2,+\infty)$ 上连续. 这与定理4.22 一致. $\square$

关于单调函数, 下列事实也是常用的:

【**命题**】设函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在$[a,b]$ 上连续. 设E 是$[a,b]$的一个稠密子集(例如$E=(a,b)$ 或E 是(a,b)中的全体有理数, 等等) 且f在E上单调(严格单调). 则f在$[a,b]$ 上单调(严格单调).

【证】我们以严格单调为例进行证明. 不妨设f 在E上严格单调增加. 来证明f在$[a,b]$上严格单调增加. 对任意$x,y\in[a,b]$, $x<y$. 因E 是$[a,b]$的稠密子集, 故存在$\alpha,\beta\in E$ 使得$x<\alpha<\beta<y$. 再由E 是$[a,b]$的稠密子集, 存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E,\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$使得$a\le x_n\le\alpha,\beta\le y_n\le b$, $n=1,2,3,...$, 且$x_n\to x,y_n\to y\,(n\to\infty)$. 由$f$在$[a,b]$ 上连续、在E上严格单调增加有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\le f(\alpha)<f(\beta)\le\lim_{n\to\infty}f(y_n)=f(y).$$

所以f 在$[a,b]$ 上严格单调增加. $\square$

本节最后的定理反映出了一维区间之间连续对应的特性: 保序.

【**定理4.23**】设$I\subset\mathbb{R}$ 为任一区间, 函数$f:I\to\mathbb{R}$连续且是单射. 则f在I 上严格单调.

【证】为清楚起见, 证明分为三步, 其中将多次用到f为单射这一假设, 即$x\neq y\Longrightarrow f(x)\neq f(y)$. 此外我们注意$-f$也是$I$ 上的连续单射.

Step 1. 证明对任意$a,b\in I$, $a<b$, 有蕴含关系:

$$f(a)<f(b)\quad\Longrightarrow\quad f(a)<f(x)<f(b)\quad\text{for all }\ x\in(a,b).\tag{$*$}$$

假设$(*)$ 不成立, 则存在$x_0\in(a,b)$ 使得$f(a)<f(x_0)$ 或$f(b)<f(x_0)$. 若$f(x_0)<f(a)$, 则由连续函数介值定理和$f(x_0)<f(a)<f(b)$ 知存在$c\in(x_0,b)$ 使得$f(c)=f(a)$, 这与f 是单射矛盾. 若$f(b)<f(x_0)$,则由$f(a)<f(b)<f(x_0)$ 知存在$c\in(a,x_0)$ 使得$f(c)=f(b)$, 仍与f 是单射矛盾. 所以$(*)$ 成立.

Step 2. 证明对任意$a,b\in I$, $a<b$, f 在$[a,b]$ 上严格单调.

因$-f$也是I 上的连续单射, 故Step 1 对于$-f$ 也成立. 因此可以假设$f(a)<f(b)$. 来证明f 在$[a,b]$ 上严格单调增加. 对任意$x,y\in[a,b]$且$x<y$, 由$(*)$和$a<y\le b$知$f(a)<f(y)\le f(b)$. 再把$(*)$ 用于区间(a,y) 并注意$a\le x<y$ 得到$f(a)\le f(x)<f(y)$ (注意当$x=a$时这不等式自动成立). 这证明了f在$[a,b]$ 上严格单调增加.

Step 3. 来证明f在I 上严格单调. 即证明

$$f(x) < f(y) \text{ for all}\, x, y \in I \text{ with } x < y \quad \text{or} \quad f(x) > f(y) \text{ for all}\, x, y \in I \text{ with } x < y.$$

假设不然, 则存在$x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ 使得

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{and} \quad f(y_1) > f(y_2). \tag{$**$}$$

令$a = \min\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, $b = \max\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. 则$a, b \in I$ 且$a \le x_1 < x_2 \le b$, $a \le y_1 < y_2 \le b$. 由Step 2 知f在$[a, b]$上严格单调. 但不等式$(**)$表明f在$[a, b]$上不单调, 矛盾. 这矛盾证明了f必在I上严格单调. $\Box$

§4.5. 函数列的一致收敛性

分析学中的很多函数是由函数项的无穷级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 构成的, 例如由幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 定义的函数. 一般地, 一个处处收敛的函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 也定义了一个函数: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. 在实际问题研究中, 我们有时需要考虑函数列收敛的均匀程度或一致程度. 本节主要学习一致收敛性. 让我们先给出逐点收敛和一致收敛的定义.

【定义(函数列和函数级数的逐点收敛)】设$E\subset\mathbb{R}$.

(1) 设$f_n, f: E\to\mathbb{C}, n=1,2,3,...,$. 若

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\qquad \forall\, x\in E$$

则称$f(x)$ 是函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$的极限函数, 同时称函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在E上处处收敛或逐点收敛(于$f(x)$).

(2) 设$\varphi_n, f: E\to\mathbb{C}, n=1,2,3,...,$. 若

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\ (\text{级数收敛})\qquad \forall\, x\in E$$

则称$f(x)$ 是函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 的和函数. 同时称函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在E上处处收敛或逐点收敛(于$f(x)$). $\square$

【例】(1) 研究函数列$\{(1+\frac{x}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x\in\mathbb{R})$的极限.

(2) 研究函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-nx}$ $(x\ge 0)$的收敛性.

【解】(1): 对任意$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 当$n>|x|$ 时有$1+\frac{x}{n}>0$. 设$n>|x|$, 看

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n=e^{n\log(1+\frac{x}{n})},\quad n\log(1+\frac{x}{n})=x\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\to x\quad(n\to\infty)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\log(1+\frac{x}{n})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\log(1+\frac{x}{n})}=e^x.$$

当$x=0$ 时上式也成立. 因此这函数列$\{(1+\frac{x}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在$\mathbb{R}$上处处收敛于e^x.

(2): 易见对任意$0\le y\le 1$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n$ 是一个Lebinitz 交错级数, 即$\frac{1}{n}y^n$ 递减趋于零$(n\to\infty)$. 因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n$ 对每个$0\le y\le 1$收敛. 作替换$y=e^{-x}$ 可知对每个$x\in[0,+\infty)$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-nx}$ 都收敛. 以后学习Taylor 公式后即知实际上有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-nx}=\log(1+e^{-x}),\quad x\in[0,+\infty).\qquad\square$$

现在看是否有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|\to 0\ (n\to\infty)\,? \quad \textbf{否, 见下面}$$

$$\forall\, 0<R<+\infty,\quad \sup_{|x|\le R}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|\to 0\ (n\to\infty)\,? \quad \textbf{是, 见下面Dini定理}$$

$$\sup_{x\ge 0}\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}e^{-kx}\right|\to 0\ (n\to\infty)\,? \quad \textbf{是, 见下面Dirichlet 判别法}$$

其中$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}e^{-kx}$.

也即我们要看: 当$n\to\infty$ 时, 最大误差是否趋于零? 即最坏的情况是否趋于零? 如果是, 就称这收敛为一致收敛. 第一个是否定的因为易见

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|=+\infty,\quad n=1,2,3,\dots.$$

现在引入一致收敛的定义:

【定义(函数列和函数级数的一致收敛)】设$E\subset\mathbb{R}$.

(1) 函数列的一致收敛 设$f_n:E\to\mathbb{C}, n=1,2,3,...,$. 若存在函数$f:E\to\mathbb{C}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0$$

则称函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在E 上一致收敛到函数f, 记作$f_n \qquad f\ (n\to\infty)$ 于E. 同时称函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在E上一致收敛. 这个一致收敛性也可以用"$\varepsilon-N$ 语言"定义如下:

$\forall\,\varepsilon>0, \exists\, N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$时, 对一切$x\in E$ 都有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

(2) 函数级数的一致收敛 设$\varphi_n:E\to\mathbb{C}, n=1,2,3,...,$. 我们称以$\varphi_k$ 为通项的函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 在E上一致收敛, 如果其部分和函数列$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\,(x\in E,\ n=1,2,3,...)$ 在E 上一致收敛. 当$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛时, 称它所收敛到的函数$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\,(x\in E)$ 为函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 的和函数.

(3) 函数级数的绝对一致收敛 如果加了绝对值之后, 函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(x)|$ 在E上一致收敛, 则称原函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 在E上绝对一致收敛. □

【注1】需要证明：(1)中按"最大误差趋于零"定义的一致收敛与按"$\varepsilon-N$ 语言"定义的一致收敛是等价的.

事实上假设$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0$. 则对任意$\varepsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$ 时有$\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 于是当$n\ge N$ 时对一切$x\in E$ 都有$|f_n(x)-f(x)|\le\sup\limits_{y\in E}|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon$ 成立. 这说明按"最大误差趋于零"定义的一致收敛一定是按"$\varepsilon-N$ 语言"定义的一致收敛.

反之, 设在E 上函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按"$\varepsilon-N$ 语言"定义的一致收敛性一致收敛到函数f. 则对任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得当$n\ge N$时对一切$x\in E$ 都有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 于是对每个$n\ge N$, 对$|f_n(x)-f(x)|$ 关于$x\in E$取上确界得到$\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$. 因此由数列趋于零的定义即知$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0$. 这证明了按"$\varepsilon-N$ 语言"定义的一致收敛也是按"最大误差趋于零"定义的一致收敛.

【注2】"逐点收敛"与"一致收敛"的逻辑关系是:

- 如果函数列f_n在E上一致收敛于f, 则f_n 在E上显然逐点收敛于f. 换言之, 一致收敛蕴含逐点收敛, 即一致收敛强于逐点收敛.

- 反之, 假设函数列f_n 在E上逐点收敛于f. 那么f_n不一定一致收敛; 但如果f_n 一致收敛的话, 则必定一致收敛到f. 后一句的证明如下: 假设f_n在E上一致收敛. 那么按一致收敛的定义知存在E上的一个函数g 使得f_n在E上一致收敛到g. 即$\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-g(x)|\to 0\,(n\to\infty)$. 这蕴含对每个$x\in E$ 都有$|f_n(x)-g(x)|\to 0\,(n\to\infty)$, 也即$f_n(x)$ 逐点收敛到$g(x)\,(n\to\infty)$. 但事先已知有$f_n(x)$ 逐点收敛到$f(x)\,(n\to\infty)$, 于是由**极限的唯一性** 知必有$g(x)=f(x)\,(\forall\, x\in E)$. 将$g=f$代回到一致收敛中即知$f_n$在$E$上一致收敛到$f$.

【注3】对于函数级数, 我们有: "绝对一致收敛"蕴含"一致收敛", 反之未必.

事实上设函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 在E上绝对一致收敛, 令

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(x)|,\quad F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|,\quad x\in E,\, n=1,2,3,\dots.$$

则有

$$F(x)-F_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(x)|\ge 0,\quad \sup_{x\in E}|F(x)-F_n(x)|\to 0\ (n\to\infty).$$

令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x),\quad f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x),\quad x\in E,\, n=1,2,3,\dots.$$

则由数值级数中的绝对收敛蕴含级数收敛可知级数函数$f(x)$在E上收敛从而处处有定义且

$$|f(x)-f_n(x)|=\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\varphi_k(x)\Big|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(x)|=F(x)-F_n(x)$$

从而有

$$\sup_{x\in E}|f(x)-f_n(x)|\le\sup_{x\in E}|F(x)-F_n(x)|\to 0\,(n\to\infty).$$

所以部分和函数列$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\,(x\in E,\,n=1,2,3,...)$ 在E 上一致收敛, 也即函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 在E上一致收敛. 这就证明了“绝对一致收敛”蕴含“一致收敛”.

关于“一致收敛但不绝对一致收敛”的例子很多. 例如函数级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in[0,1]$$

在$[0,1]$上一致收敛, 但不是逐点绝对收敛的从而不绝对一致收敛. 事实上

$$\text{当}x=1\text{ 时}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\Big|_{x=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

这说明函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 不是逐点绝对收敛的.

另一方面由Leibnitz 交错级数收敛性知这函数级数在$[0,1]$不仅逐点收敛并有估计

$$\Big|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\Big|=\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\Big|\le\frac{x^{n+1}}{n+1}\le\frac{1}{n+1}\qquad\forall\,x\in[0,1]$$

因此

$$\sup_{x\in[0,1]}\Big|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\Big|\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以, 由定义, 函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 在$[0,1]$上一致收敛. $\square$

函数列的一致收敛与否除了与函数列自身的性质有关, 还经常与自变量x的所属集合的性质有关. 有时候函数列在x的大范围内不是一致收敛的, 但在小范围是一致收敛的.

【例】函数列$\{e^{-nx}\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间$(0,1]$上处处收敛于零$(n\to\infty)$ 但不一致收敛, 然而对任意$0<\delta<1$, 这函数列在$[\delta,1]$ 上都一致收敛于零.

【证】对任意$x>0$ 显然有$\lim_{n\to\infty} e^{-nx}=0$, 所以函数列$\{e^{-nx}\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间$(0,1]$上处处收敛于零$(n\to\infty)$. 但由

$$\sup_{x\in(0,1]} e^{-nx}=1,\quad n=1,2,3,...$$

即知这函数列在$(0,1]$上不一致收敛, 因若一致收敛, 则必一致收敛到零, 而上式表明这函数列不一致收敛到零.

另一方面, 任取$0<\delta<1$. 则有

$$0<\sup_{x\in[\delta,1]} e^{-nx}\le e^{-n\delta},\ n=1,2,3,...;\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[\delta,1]} e^{-nx}=0.$$

所以函数列$\{e^{-nx}\}_{n=1}^{\infty}$在$[\delta,1]$ 上一致收敛于零. $\square$

数学实践表明, 凡有涉及收敛的地方必有Cauchy收敛准则.

【定理4.24(一致收敛的Cauchy 准则)】设$E\subset\mathbb{R}$.

(1) 函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E 上一致收敛的充分必要条件是$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足Cauchy 条件:

$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$ 使得当$m,n\ge N$ 时, 对一切$x\in E$ 有$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

这也可等价地写成

$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$ 使得当$m,n\ge N$ 时, $\sup\limits_{x\in E}|f_m(x)-f_n(x)|\le\varepsilon$.

或写成

$$\lim_{m>n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_m(x)-f_n(x)|=0.$$

(2) E上的函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 在E上一致收敛的充分必要条件是$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ 满足Cauchy条件:

$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$ 使得当$m>n\ge N$ 时, 对一切$x\in E$ 有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}\varphi_k(x)\right|<\varepsilon$.

这也可等价地写成

$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$ 使得当$m,n\ge N$ 时, $\sup\limits_{x\in E}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}\varphi_k(x)\right|\le\varepsilon$.

或写成

$$\lim_{m>n\to\infty}\sup_{x\in E}\left|\sum_{k=n+1}^{m}\varphi_k(x)\right|=0.$$

【证】只需证(1) 因为考虑部分和函数列$f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k(x)$, 就将(2)化为(1).

“$\Longrightarrow$”：设函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E 上一致收敛. 则由定义知存在E上的函数f 使得$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E 上一致收敛于f. 因此对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/2 > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得当$n \geq N$ 时对一切$x \in E$有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. 于是当$m, n \geq N$ 时对一切$x \in E$有

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

所以$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足Cauchy条件.

“$\Longleftarrow$”：设在E上$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足Cauchy条件. 则对每个$x \in E$, 数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$满足关于数列的Cauchy条件, 因而收敛, 即极限$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在有限. 这样一来我们获得了在E 上处处有定义的函数$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. 下证$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E$ 上一致收敛于f. 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\text{当}\, m, n \geq N \text{ 时 对一切} x \in E \text{ 有} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

于是对每个给定的$n \geq N$ 和每个给定的$x \in E$, 让$m \to \infty$, 注意$f_m(x) \to f(x)\,(m \to \infty)$ 我们得到

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

据$n \geq N$ 和$x \in E$的任意性我们得到

$$\text{当 } n \geq N \text{ 时} \quad \sup_{x\in R} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

这证明了$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in R} |f_n(x) - f(x)| = 0$, 此即函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E$ 上一致收敛于f. □

在很多问题研究中最好用的是下列Weierstrass 优势级数判别法：

【定理4.25(绝对一致收敛的Weierstrass 优势级数判别法)】

设$E \subset \mathbb{R}$, $\varphi_n : E \to \mathbb{C}, n = 1, 2, 3, \ldots$. 假设有正数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

(i) $\quad |\varphi_n(x)| \leq a_n \qquad \forall\, x \in E, \forall\, n = 1, 2, 3, ...,$

(ii) $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

则函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在E上绝对一致收敛(从而一致收敛).

满足(i),(ii) 的数值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 的优势级数或控制级数.

【证】由$a_n \ge 0$ 和(ii) 知

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0 \quad (n\to\infty).$$

因此

$$\begin{aligned} m>n\ge 1 \quad &\Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |\varphi_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} a_k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad \forall\, x\in E \\ &\Longrightarrow \quad \sup_{x\in E}\sum_{k=n+1}^{m} |\varphi_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Longrightarrow \lim_{m>n\to\infty}\sup_{x\in E}\sum_{k=n+1}^{m} |\varphi_k(x)| = 0. \end{aligned}$$

所以函数项$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在E上绝对一致收敛. □

【**例**】设数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<+\infty.$$

则三角函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big), \quad x\in[0,2\pi]$$

在$[0,2\pi]$上绝对一致收敛因为它有一个优势级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$. □

下面定理中的Dirichlet判别法是研究变号函数级数一致收敛性的常用工具.

【定理4.26(函数级数一致收敛的Dirichlet判别法)】

设$E\subset\mathbb{R}$, 函数列$\alpha_n,\beta_n : E\to\mathbb{C}, n=1,2,3,\dots$. 满足

(**i**) 部分和函数列 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在E 上一致有界, 即 $\sup\limits_{x\in E,n\ge1}\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\Big|<+\infty$,

(**ii**) 函数列 $\{\beta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上一致趋于零, 并且对每个$x\in E$, $\beta_n(x)$ 关于n 单调.

则函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)$ 在E上一致收敛.

【证】来证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)$ 满足关于一致收敛的Cauchy 条件. 令$C=\sup\limits_{x\in E,n\ge1}\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\Big|$. 则对任意$m>n\ge1$ 有

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in E}\Big|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(x)\Big| = \sup_{x\in E}\Big|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\Big| \\ &\le \sup_{x\in E}\Big|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x)\Big| + \sup_{x\in E}\Big|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\Big| \le 2C. \end{aligned}$$

令

$$b_n = \sup_{x\in E}|\beta_n(x)|. \quad 则\ b_n \to 0\ (n\to\infty).$$

对任意$\varepsilon>0$, 由$Cb_n \to 0\,(n\to\infty)$ 知存在$N\in\mathbb{N}$ 使得

$$当\,n\ge N\ 时\quad Cb_n<\varepsilon/6.$$

于是当$m>n\ge N$ 时, 对任意$x\in E$, 若$\beta_k(x)$ 关于k 单调不增, 则由Abel分部求和公式有

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(x)\beta_k(x)\Big| \\
&\le \Big|\sum_{k=n+1}^{m-1}\Big(\sum_{j=n+1}^{k}\alpha_j(x)\Big)(\beta_k(x)-\beta_{k+1}(x))\Big| + \Big|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(x)\Big||\beta_m(x)| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{m-1}\Big|\sum_{j=n+1}^{k}\alpha_j(x)\Big|(\beta_k(x)-\beta_{k+1}(x)) + 2C|\beta_m(x)| \\
&\le 2C\sum_{k=n+1}^{m-1}(\beta_k(x)-\beta_{k+1}(x)) + 2C|\beta_m(x)| \\
&= 2C(\beta_{n+1}(x)-\beta_m(x)) + 2C|\beta_m(x)| \le 2Cb_{n+1}+4Cb_m<\varepsilon.
\end{aligned}$$

若$\beta_k(x)$ 关于k 单调不减, 则$-\beta_k(x)$ 关于k 单调不增从而由上面结果仍有

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(x)\beta_k(x)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(x)(-\beta_k(x))\Big|<\varepsilon.$$

于是得到

$$\sup_{x\in E}\Big|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k(x)\beta_k(x)\Big|\le\varepsilon \qquad \forall\, m>n\ge N.$$

这证明了$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)$ 满足关于一致收敛的Cauchy 条件. 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)$ 在E上一致收敛. □

Dirichlet判别法的典型应用是研究三角级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big)$的一致收敛问题. 为此我们需要两个恒等式: 当$0<x<2\pi$ 时

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin((n+\frac12)x)-\sin(x/2)}{2\sin(x/2)},\quad \sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\frac{\cos(x/2)-\cos((n+\frac12)x)}{2\sin(x/2)}.$$

为证这组等式, 考虑虚指数函数$e^{\mathrm{i}kx}=\cos(kx)+\mathrm{i}\sin(kx)$. 计算

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}e^{\mathrm{i}kx}&=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)x}-e^{\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x}-1}=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)x}-e^{\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x/2}(e^{\mathrm{i}x/2}-e^{-\mathrm{i}x/2})}=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)x}-e^{\mathrm{i}x/2}}{\mathrm{i}2\sin(x/2)}\\&=\frac{\cos((n+1/2)x)-\cos(x/2)}{\mathrm{i}2\sin(x/2)}+\mathrm{i}\frac{\sin((n+1/2)x)-\sin(x/2)}{\mathrm{i}2\sin(x/2)}\\&=\frac{\sin((n+1/2)x)-\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}-\mathrm{i}\frac{\cos((n+1/2)x)-\cos(x/2)}{2\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

比较实部虚部即得上述等式.

由这组等式我们得到

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\Big|,\ \Big|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\Big|\le\frac{1}{\sin(x/2)}\qquad\forall\,0<x<2\pi,\ \forall\,n\in\mathbb{N}.$$

【关于极限函数与和函数的连续性】

我们把问题及其回答放在下列定理中.

【定理4.27(通项连续且一致收敛$\Longrightarrow$ 极限函数连续)】设$E\subset\mathbb{R}$.

设每个函数$\varphi_n:E\to\mathbb{C}$ 都连续且函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在E上一致收敛, 则其和函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 也在E上连续.

一般地, 若每个函数$f_n:E\to\mathbb{C}$ 都连续且$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在E 上一致收敛, 那么其极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 也在E上连续.

【证】只需证一般情形. 设一致收敛的函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$的极限函数为$f(x)$. 要证$f$也在$E$上连续. 因为连续性是逐点定义的, 故只需证明对每个$x_0\in E$, 函数f都在x_0连续.

考虑不等式关系

$$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|.$$

对任意$\varepsilon>0$, 由f_n 一致收敛于f 知存在$N=N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ 使得$\sup\limits_{x\in E}|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon/3$. 而对于连续函数$f_N(x)$, 存在$\delta>0$ 使得当$x\in E$ 且$|x-x_0|<\delta$ 时有$|f_N(x)-f_N(x_0)|<\varepsilon/3$. 于是当$x\in E$ 且$|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

所以f在$x=x_0$连续. 据$x_0\in E$的任意性知f在E上处处连续. $\square$

上述证明过程被称为“$\varepsilon/3$ – 法”, 学生必须会默证. 这是一个很好的熟悉概念的练习.

其极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 也在E 上连续.

看一个逻辑判断: 若每个函数$f_n: E\to\mathbb{C}$ 都连续且$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在E 逐点收敛于函数f, 但f 在E 上不处处连续, 那么$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在E上就一定不一致收敛.

现在假设极限函数f 在E上处处连续, 那么是否能反推出$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在E上一致收敛(从而一致收敛到f) ?

一般情况下回答是否定的. 但是数学家Dini 发现, 如果再加上两个条件, 就可保证$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在E上一致收敛于f. 这两个条件是: (1)E 为有界闭区间, (2) 对每个$x\in E$, 数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$都是单调的.

【定理4.28 (Dini定理)】

设$[a,b]$ 为有界闭区间, 函数列$f_n\in C([a,b],\mathbb{R})$在$[a,b]$ 上逐点收敛到函数$f\in C([a,b],\mathbb{R})$. 又设对每个$x\in[a,b]$, 数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$都是单调的. 则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在$[a,b]$上一致收敛于f.

【证】由连续性, 对每个$n\in\mathbb{N}$ 存在$x_n\in[a,b]$ 使得

$$\omega_n:=\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x_n)-f(x_n)|.$$

要证明

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n=0.$$

由于数列的上极限可以被该数列的子列达到, 故存在子列$1\le n_1<n_2<n_3<\cdots$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\omega_{n_k}=\limsup_{n\to\infty}\omega_n. \tag{$*$}$$

又因$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset[a,b]$ 且$[a,b]$ 是有界闭区间, 故由Weierstrass 极限点定理知$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有一个收敛子列收敛于某点$x_0\in[a,b]$. 调整下标记号后不妨就设$x_{n_k}\to x_0\,(k\to\infty)$. 对任意$\varepsilon>0$, 由$f_n(x_0)-f(x_0)\to 0\,(n\to\infty)$ 知存在$N\in\mathbb{N}$ 使得$|f_N(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon/2$. 又由$f_N, f$ 皆连续从而$|f_N-f|$ 连续知, 存在$\delta>0$ 使得当$x\in[a,b]$ 且$|x-x_0|<\delta$ 时有$\Big||f_N(x)-f(x)|-|f_N(x_0)-f(x_0)|\Big|<\varepsilon/2$. 这蕴含

$$|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon\qquad\forall\, x\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

因$x_{n_k}\to x_0\,(k\to\infty)$, 故存在$K\in\mathbb{N}$, 不妨设$K\ge N$, 使得当$k\ge K$ 时$x_{n_k}\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 于是有

$$|f_N(x_{n_k})-f(x_{n_k})|<\varepsilon\qquad\forall\, k\ge K.$$

注意关系式$n_k \ge k$ 和$K \ge N$ 可知当$k \ge K$时有$n_k \ge k \ge N$.

现在对每个$k \ge K$, 由假设知:

要么$m \mapsto f_m(x_{n_k})$ 单调不减, $f_m(x_{n_k}) \nearrow f(x_{n_k})\,(m \to \infty)$. 这蕴含$f(x_{n_k}) \ge f_m(x_{n_k})$, $m = 1, 2, 3, \dots$. 此时, 注意$n_k \ge N$, 有

$$\omega_{n_k} = f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \le f(x_{n_k}) - f_N(x_{n_k}) < \varepsilon.$$

要么$m \mapsto f_m(x_{n_k})$ 单调不增, $f_m(x_{n_k}) \searrow f(x_{n_k})\,(m \to \infty)$. 这蕴含$f_m(x_{n_k}) \ge f(x_{n_k})$, $m = 1, 2, 3, \dots$. 此时, 注意$n_k \ge N$, 有

$$\omega_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) \le f_N(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) < \varepsilon.$$

总之得到

$$\omega_{n_k} < \varepsilon \qquad \forall\, k \ge K.$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty} \omega_{n_k} = 0$. 最后由(∗) 和非负性$\omega_n \ge 0$ 即得$\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. □

【例】证明对任意$0 < R < +\infty$ 有一致收敛:

$$\sup_{|x|\le R} \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

【证】取自然数$n_0 \ge R$则当$n \ge n_0$ 时对任意$x \in [-R, R]$ 有$x/n > -1$. 如前,利用几何平均值不超过算数平均值可证明$n \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$ 单调增加$(n \ge n_0)$, 即

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}, \quad x \in [-R, R], \quad n \ge n_0.$$

因极限函数$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ 连续, 故由Dini 定理知所证一致收敛成立. □

作为上述Dini定理的一个推论, 我们有下列定理:

【定理4.29 (Dini定理的推论)】设$[a, b]$ 为有界闭区间, 函数φ_n在$a, b]$ 上非负且连续, $n = 1, 2, 3, ..., $. 假设和函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad x \in [a, b]$$

在$[a, b]$上处处有限且连续, 则这函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛于其和函数$f(x)$.

【证】令$f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x), x \in [a,b], n = 1,2,3,\dots$. 则每个$f_n$在$[a,b]$上连续且对每个$x \in [a,b]$, $f_n(x)$关于n单调不减地收敛于$f(x)$. 因f在$[a,b]$上连续, 故由Dini 定理知$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于f. 再根据函数级数一致收敛的定义即知函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于其和函数$f(x)$. $\square$

Dini定理及其推论适用于极限函数或和函数的连续性容易直接看出的情形. 如果极限函数或和函数的连续性很难判断, 则在研究一致收敛问题时还需要结合其他方法.

作业题

1. 研究下列函数列$f_n(x)$ 在给定区间上的一致收敛性:

(1) $f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+e^{nx}),\ x \in \mathbb{R}$. (2) $f_n(x) = x^n(1-x),\ x \in [0,1]$.

2. 设

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}, \quad x \in [0,1],\ n = 1,2,3,\dots.$$

证明$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$[0,1]$上不一致收敛.

3. 证明下列函数级数在指定区间上的一致收敛性与和函数的连续性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2},\ x \in \mathbb{R}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},\ x \in [0,+\infty)$.

4. 设单调减少的正数列$a_n \searrow 0, b_n \searrow 0\,(n \to \infty)$. 证明: 三角函数级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$$

在开区间内$0 < x < 2\pi$处处收敛, 而对任意$0 < \delta < 1$ 这三角级数在闭区间$[\delta, 2\pi-\delta]$上一致收敛. 最后证明和函数$f(x)$在$(0,2\pi)$内处处连续.

5. 设$[a,b]$为有界闭区间, 函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([a,b],\mathbb{C})$ 在$[a,b]$上一致收敛于函数f. 又设$[a,b] \ni x_n \to x_0\,(n\to\infty)$. 证明$f_n(x_n) \to f(x_0)\,(n \to \infty)$. (需说明$x_0 \in [a,b]$)

6. 设$[a,b]$为有界闭区间, 函数列$f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$满足相同的Lipschitz条件:

$$|f_n(x) - f_n(t)| \le L|x-y|, \quad x,y \in [a,b],\ n = 1,2,3,\dots.$$

这里$0 < L < +\infty$ 为常数. 又设对每个$x \in [a,b]$ 有$f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{C}\ (n \to \infty)$. 证明$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$[a,b]$ 上一致收敛于f.

§4.6. $\mathbb{R}$上的点集拓扑.

无论从哪方面讲, 我们都需要用现代语言对前面学习的关于实数空间$\mathbb{R}$ 的一些基本性质做些重述和扩充. 所谓$\mathbb{R}$上点集拓扑, 笼统来说, 就是描述$\mathbb{R}$中的基本邻域(即开区间)的行为和$\mathbb{R}$中连续函数之间的变换关系. 我们将在第七章系统学习度量空间(特别是一般欧空间$\mathbb{R}^m$)上的点集拓扑.

我们本章只考虑实数集$\mathbb{R}$ 的原因是下面两点:

(1) 与高维欧空间$\mathbb{R}^m$ 不同, 一维欧空间$\mathbb{R}$ 是全序集, 具有一些特殊性质.

(2) 高维欧空间$\mathbb{R}^m$中的某些性质可以从一维空间中的相应性质和空间的乘积结构给予证明. [但必须说明: 当$m \ge 2$ 时, $\mathbb{R}^m$ 中很多重要的拓扑性质不是用一维叠加或归纳法可以证明的!]

【记号】为了简便, 我们用$\bigcup_{k\ge1}, \sum_{k\ge1}$ 表示可数并和可数和, 即

$$\bigcup_{k\ge1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \ \text{或}\ \bigcup_{k=1}^{n}, \qquad \sum_{k\ge1} = \sum_{k=1}^{\infty} \ \text{或}\ \sum_{k=1}^{n}, \qquad \text{等等.}$$

【定义($\mathbb{R}$中的开集和闭集)】

集合$E \subset \mathbb{R}$ 称为$\mathbb{R}$的开集, 如果对每个$x \in E$ 存在$\varepsilon > 0$ 使得$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset E$.

规定空集$\emptyset$ 是$\mathbb{R}$的开集.

集合$E \subset \mathbb{R}$ 称为$\mathbb{R}$的闭集, 如果其补集$E^c = \mathbb{R} \setminus E$ 是$\mathbb{R}$的开集. □

易见$\mathbb{R}$ 是$\mathbb{R}$ 的开集. 而由于$\mathbb{R}$ 的补集$\mathbb{R}^c = \emptyset$ 是开集, 故由闭集的定义知$\mathbb{R}$ 也是$\mathbb{R}$的闭集. 后面我们将证明$\mathbb{R}$ 中既开又闭的非空集合只能是$\mathbb{R}$本身.

设E 是开集. 则由$(E^c)^c = E$ 是开集知E^c 是闭集. 由此可见对任意集合$E \subset \mathbb{R}$,

$$E\text{是开集} \iff E^c \text{ 是闭集;} \qquad E\text{是闭集} \iff E^c \text{ 是开集.}$$

【注1】在记号上, 常用G, U, V, Ω 等表示开集, 用F 表示闭集, 而E 表示一般集合. 当然这些记号也有其它用处.

【注2】切莫以为非开即闭. 事实上半半闭开区间$[0,1)$ 就既不是开集也不是闭集！这是因为考虑$x=0$ 即知$[0,1)$ 不是开集. 同理对于它的补集$[0,1)^c = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$,

考虑$x = 1$ 即知$[0,1)^c$ 也不是开集, 因此$[0,1)$ 不是闭集.

【命题1.(开集和闭集的基本性质)】

(a) 任意多个开集的并还是开集. 有限多个开集的交还是开集.

(b) 任意多个闭集的交还是闭集. 有限多个闭集的并还是闭集.

(c) 设G 为开集, F为闭集. 则$G \setminus F$ 是开集, $F \setminus G$ 是闭集.

【证】(a) 设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$为任意一族开集. 令$G = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$. 则对任意$x \in G$ 存在$\alpha \in A$ 使得$x \in G_\alpha$. 因G_α 是开集, 故存在$\varepsilon > 0$ 使得$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_\alpha$, 从而有$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G$. 所以$G$ 是开集.

设$n \in \mathbb{N}$, $G_1, G_2, ..., G_n$ 均为开集. 令$G = \bigcap_{k=1}^n G_k$. 对任意$x \in G$, 有$x \in G_k, k = 1, 2, ..., n$. 因此存在$\varepsilon_k > 0$ 使得$(x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k) \subset G_k, k = 1, 2, ..., n$. 令$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$. 则$\varepsilon > 0$ 且$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k), k = 1, 2, ..., n$ 从而有$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_k, k = 1, 2, ..., n$. 因此$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k = G$. 所以$G$ 是开集.

(b) 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$为任意一族闭集. 令$F = \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$. 由闭集的定义, 每个$F_\alpha^c$ 都是开集. 由De Morgen 对偶律和(a) 有

$$F^c = \Big(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c \quad \text{是开集.}$$

因此F 是闭集.

设$n \in \mathbb{N}$, $F_1, F_2, ..., F_n$ 均为开集. 令$F = \bigcup_{k=1}^n F_k$. 则由De Morgen 对偶律和(a) 有

$$F^c = \Big(\bigcup_{k=1}^n F_k\Big)^c = \bigcap_{k=1}^n F_k^c \quad \text{是开集.}$$

因此F 是闭集.

(c) 设G 为开集, F为闭集. 则由(a) 知$G \setminus F = G \cap (\mathbb{R} \setminus F) = G \cap F^c$ 是开集. 而由(b) 知$F \setminus G = F \cap (\mathbb{R} \setminus G) = F \cap G^c$ 是闭集. □

【例】开区间是开集, 闭区间是闭集, $(a, \infty), (-\infty, a)$ 是开集, $[a, \infty), (-\infty, a]$ 是闭集, 单点集是闭集.

事实上若(a,b) 为开区间, 则对任意$x\in(a,b)$, 有$a<x<b$. 取$0<\varepsilon<\min\{x-a,b-x\}$ 则有$a<x-\varepsilon, x+\varepsilon<b$, 因此$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset(a,b)$. 所以$(a,b)$是开集. 同样可证$(-\infty,a),(a,\infty)$ 是开集.

设$[a,b]$ 为闭区间, 则$[a,b]^c=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ 是两个开集的并, 因此$[a,b]^c$ 是开集, 从而$[a,b]$ 是闭集.

由$(-\infty,a]^c=(a,\infty)$, $[a,\infty)^c=(-\infty,a)$ 都是开集知$[a,\infty),(-\infty,a]$ 都是闭集.

对于单点集$\{x_0\}$, 因其余集$\{x_0\}^c=(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$ 是开集, 故$\{x_0\}$是闭集. $\square$

【定理2.($\mathbb{R}$中开集的结构)】$\mathbb{R}$ 中任一非空开集G 可表示为可数个**互不相交** 的开区间的并:

$$G=\bigcup_{k\ge 1}(a_k,b_k)\,,$$

$$-\infty\le a_k<b_k\le\infty\,;\quad (a_k,b_k)\cap(a_j,b_j)=\emptyset\quad \text{if}\quad k\neq j\,.$$

每个子区间(a_k,b_k) 称为G 的构成区间. [**注:** 若G本身是一个开区间, 则定理自动成立, 即G 的构成区间只有一个.]

【证】任取$x\in G$. 由G 为开集, 存在$\varepsilon>0$ 使得$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset G$. 令

$$a_x=\inf\{y<x\mid (y,x]\subset G\}\,,\quad b_x=\inf\{z>x\mid [x,z)\subset G\}\,.$$

来证明(a_x,b_x) 是G中包含x的最大开区间.

首先由确界的定义, 存在$y_n\searrow a_x$, $z_n\nearrow b_x$ $(n\to+\infty)$ 使得$x\in(y_n,z_n)\subset G\,, n=1,2,3,\dots$. 对任意$t\in(a_x,b_x)\Longrightarrow a_x<t<b_x\Longrightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}$ s.t. $a_x<y_n<t<z_n<b_x\Longrightarrow t\in(y_n,z_n)\Longrightarrow t\in G$. 所以$(a_x,b_x)\subset G$. 显然$x\in(a_x,b_x)$.

其次设(α,β) 是G 中包含x 的任一开区间. 则由$(\alpha,x]\subset G$ 和a_x 的定义易见当$\alpha>-\infty$ 时$\Longrightarrow a_x\le\alpha$; 而当$\alpha=-\infty$ 时显然$a_x=-\infty$. 因此总有$a_x\le\alpha$. 同理有$\beta\le b_x$. 因此$(\alpha,\beta)\subset(a_x,b_x)$. 这就证明了$(a_x,b_x)$ 的最大性.

让我们在G 上定义关系$\sim$:

$$x\sim y\quad\Longleftrightarrow\quad (a_x,b_x)=(a_y,b_y).$$

易见$\sim$ 是G上的一个等价关系. 按此等价关系分类, G 被分解成一些等价类$[x]$的并. 根据选择公理, 存在集合$C\subset G$ 使得$C\cap[x]$ 为单点集. 于是有(见第一章)

$$G=\bigcup_{x\in C}[x],\qquad [x]\ \text{互不相交}.$$

来证明$[x]=(a_x,b_x)$. 对任意$y\in[x]$ 有$y\sim x$ 从而有$(a_y,b_y)=(a_x,b_x)$. 因$y\in(a_y,b_y)$, 故$y\in(a_x,b_x)$. 所以$[x]\subset(a_x,b_x)$. 反之对任意$y\in(a_x,b_x)$, 由(a_y,b_y) 是G 中包含y 的最大区间且$(a_x,b_x)\ni y$, 故由(a_y,b_y) 的最大性知$(a_y,b_y)\supset(a_x,b_x)$. 于是由$(a_x,b_x)\ni x$ 知$(a_y,b_y)\ni x$, 进而再由(a_x,b_x) 的最大性知$(a_x,b_x)\supset(a_y,b_y)$. 所以$(a_y,b_y)=(a_x,b_x)$. 这表明$y\sim x$. 因此$y\in[x]$. 所以$(a_x,b_x)\subset[x]$. 这就证明了$[x]=(a_x,b_x)$.

于是得到G的区间分解

$$G=\bigcup_{x\in C}(a_x,b_x),\qquad (a_x,b_x)\ \text{互不相交}.$$

因$\mathbb{R}$ 中任意一族互不相交的开区间只有可数多个, 故$\{(a_x,b_x)\}_{x\in C}$ 是可数族. 因此可将其排列为

$$\{(a_x,b_x)\}_{x\in C}=\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{n}\quad \text{或}\quad \{(a_x,b_x)\}_{x\in C}=\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{\infty}.$$

因(α_k,β_k) 互不相交, 这就给出可数“不交并”的分解

$$G=\bigcup_{x\in C}(a_x,b_x)=\bigcup_{k\ge1}(\alpha_k,\beta_k)\,.$$

最后再将(α_k,β_k) 记作(a_k,b_k) 即完成了证明. $\Box$

【例】设$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是$[0,1]$ 中的全体有理数. 对任意$0<\varepsilon<1$, 令$I_n=(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$, $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. 则$G$ 是开集. 根据上述命题，可写

$$G=\bigcup_{k\ge1}(a_k,b_k),\qquad (a_k,b_k)\cap(a_j,b_j)=\emptyset\quad\text{if}\quad k\neq j.$$

令$|I|$表示区间I的长度. 则有$|I_n|=\frac{\varepsilon}{2^n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon<1.$$

因$|[0,1]|=1$, 故相信$[0,1]\setminus G$ 非空. 对于这一点的证明, 见后面关于Lebesgue 测度的相关性质. 由于$[0,1]$中的有理数都属于G, 故这表明$[0,1]\setminus G$ 是一个只含无理数的**非**

空闭集. $\square$

从开集和闭集的定义以及上述命题和例子可见, 开集具有相对简单的可操作的结构, 而闭集则较为复杂. 因此很多时候人们用下列命题来判断一个集合是否为闭集.

【命题3.(闭集的序列刻画)】 设$E\subset\mathbb{R}$ 非空. 则

$$E\text{是}\mathbb{R}\text{的闭集} \iff E\text{中每个收敛的序列的极限属于}E.$$

【证】设E是$\mathbb{R}$的闭集. 设$E\ni x_n\to x_0\in\mathbb{R}\,(n\to\infty)$. 要证$x_0\in E$. 假设$x_0\not\in E$ 即$x_0\in E^c$. 因E^c 是开集, 故存在$\varepsilon>0$ 使得$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset E^c$. 因$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$, 故当$n>>1$ 时$x_n\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 从而有$x_n\not\in E$, 这与$x_n\in E$ 矛盾. 因此必有$x_0\in E$.

反之设E中每个收敛的序列的极限属于E. 来证E是闭集. 即证E^c 是开集. 假设E^c 不是开集, 则由开集的定义知存在$x_0\in E^c$ 使得对任意$\varepsilon>0$ 都有$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\not\subset E^c$, 即都有$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$. 取$\varepsilon=1/n$ 则相应地存在$x_n\in(x_0-1/n,x_0+1/n)\cap E, n=1,2,3,...$. 显然$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$. 于是由假设知应有$x_0\in E$. 这与$x_0\in E^c$ 矛盾. 此矛盾证明了E^c 是开集, 即E 是闭集. $\square$

【象集和逆象集】 设$E\subset\mathbb{R}$, $f:E\to\mathbb{R}$. 对任意$A\subset E$, 和任意$B\subset\mathbb{R}$, 称

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

为A关于f的象集; 而称

$$f^{-1}(B)=\{x\in E\,|\,f(x)\in B\}\qquad\text{(包括等于空集的情形)}$$

为B关于f的逆象集.

【命题4.(函数连续性的开集和闭集刻画)】 设$E\subset\mathbb{R}$, $f:E\to\mathbb{R}$.

(a) 设$E\subset\mathbb{R}$为开集, $f:E\to\mathbb{R}$. 则

f在E上连续$\iff$ 对于任意开集$V\subset\mathbb{R}$, 逆象$f^{-1}(V)$ 是开集.

(b) 设$E\subset\mathbb{R}$为闭集, $f:E\to\mathbb{R}$. 则

f在E上连续 $\iff$ 对于意闭集$H\subset\mathbb{R}$, 逆象$f^{-1}(H)$ 是闭集.

(c) 一般地, 设$E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$. 则以下$1^\circ - 3^\circ$ 等价:

1° f在E上连续.

2° 对于$\mathbb{R}$ 的任意开集V, 存在$\mathbb{R}$的开集U 使得$f^{-1}(V) = E \cap U$.

3° 对于$\mathbb{R}$ 的任意闭集H, 存在$\mathbb{R}$的闭集F 使得$f^{-1}(H) = E \cap F$.

【证】因为两个开集的交还是开集, 两个闭的交还是闭集, 故(a)和(b) 是(c)的特例. 因此只需证(c).

$1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$: 设$f$在$E$上连续. 若$f^{-1}(V) = \emptyset$, 则取$U = \emptyset$ 便有$f^{-1}(V) = E \cap U\,(= \emptyset)$.

设$f^{-1}(V) \neq \emptyset$. 对任意$x \in f^{-1}(V)$, 由定义知$x \in E$ 且$f(x) \in V$. 因V是开集, 故存在$\varepsilon > 0$ 使得$(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset V$. 又因$f$ 连续, 故存在$\delta_x > 0$ 使得当$t \in E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)$ 时$f(t) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset V$ 从而$t \in f^{-1}(V)$. 因此$E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset f^{-1}(V)$. 这表明

$$x \in f^{-1}(V) \implies E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset f^{-1}(V).$$

令

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} (x - \delta_x, x + \delta_x).$$

则U 是开集且由上面得到的包含关系有

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x) = E \cap U.$$

$2^\circ \Longrightarrow 1^\circ$: 对任意$x \in E$ 和任意$\varepsilon > 0$, 取开集$V = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. 则由假设知存在开集$U$ 使得$f^{-1}(V) = E \cap U$. 因$x \in f^{-1}(V)$ 故$x \in E \cap U$. 又因U 是开集, 故存在$\delta_x > 0$ 使得$(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset U$ 从而有$E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset E \cap U = f^{-1}(V)$. 则等于说当$t \in E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)$ 时$f(t) \in V = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. 据连续的定义即知$f$在$x$ 连续. 再由$x \in E$的任意性知f 在E上处处连续.

下证$2^\circ, 3^\circ$ 等价. 先看一个一般关系. 对任意$B \subset \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} & f^{-1}(B^c) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B^c\} = \{x \in E \,|\, f(x) \notin B\} \\ & = E \setminus \{x \in E \,|\, f(x) \in B\} = E \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

即

$$f^{-1}(B^c) = E \setminus f^{-1}(B).$$

$2^\circ \implies 3^\circ$: 对任意闭集$H \subset \mathbb{R}$. 令$V = H^c$. 则V 是开集. 由假设知存在开集U 使得$f^{-1}(V) = E \cap U$. 取$F = U^c$. 则F 是闭集, 并由$H = V^c$ 有

$$f^{-1}(H) = f^{-1}(V^c) = E \setminus f^{-1}(V) = E \setminus E \cap U = E \setminus U = E \cap U^c = E \cap F.$$

$3^\circ \implies 2^\circ$: 对任意开集$V \subset \mathbb{R}$. 令$H = V^c$. 则H 是闭集. 由假设知存在闭集F 使得$f^{-1}(H) = E \cap F$. 取$U = F^c$. 则U 开集, 并由$V = H^c$ 有

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(H^c) = E \setminus f^{-1}(H) = E \setminus E \cap F = E \setminus F = E \cap F^c = E \cap U.$$

□

【定义(紧集)】集合$E \subset \mathbb{R}$ 称为一个紧集, 如果E 具有有限开覆盖性质, 意即对于E的任意开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ （即每个U_α 都是$\mathbb{R}$的开集且$E \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$), 都存在E的一个子覆盖, 即存在有限多个$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}$ 使得$E \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$. □

【例】$\mathbb{R}$ 中的有界闭区间$[a, b]$ 是紧集.

【证】设$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是$[a, b]$的任意开覆盖. 由开集的结构定理知每个开集U_α 是一些开区间的并: $U_\alpha = \bigcup_{k\ge1}(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)})$. 由此有

$$\bigcup_{\alpha\in A}\bigcup_{k\ge1}(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)}) = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \supset [a, b].$$

这表明$\{(a_k^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)}) \,|\, \alpha \in A, k \ge 1\}$ 是$[a, b]$ 的开区间覆盖. 根据第章的有限覆盖定理知存在有限多个开区间$(a_{k_i}^{(\alpha_i)}, b_{k_i}^{(\alpha_i)})$, $i = 1, 2, ..., n$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^n (a_{k_i}^{(\alpha_i)}, b_{k_i}^{(\alpha_i)}) \supset [a, b].$$

因$(a_{k_i}^{(\alpha_i)}, b_{k_i}^{(\alpha_i)}) \subset U_{\alpha_i}$ 故得到

$$\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \supset [a, b].$$

所以$[a, b]$ 具有有限覆盖性质, 即$[a, b]$ 是紧集. □

【**命题5.**($\mathbb{R}$ **中紧集的特征)**】设 $E\subset\mathbb{R}$.

则以下彼此等价

(a) E 是紧集.

(b) E 是列紧集, 即 E 中的任一序列都有一个收敛于 E 中某点的子列.

(c) E 是有界闭集.

【证】来证明 (a)$\Longrightarrow$(b)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(a).

"(a)$\Longrightarrow$ (b)": 设 E 是紧集. 任取序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$. 来证明

$$\exists\, x_0\in E\quad \text{s.t.}\quad \liminf_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0. \tag{$*$}$$

如果 $(*)$ 成立, 则根据数列的上下极限理论 —— 一个实数序列的下极限等于该序列的某个子列的极限 —— 知存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_{n_k}-x_0|=\liminf_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0$$

也即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个收敛于 $x_0\in E$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 从而证明了 E 是列紧集.

反证法,假设 $(*)$ 不成立, 即对任意 $x\in E$ 都有 $\liminf\limits_{n\to\infty}|x_n-x|>0$. 令

$$r(x)=\frac{1}{2}\min\{1,\,\liminf_{n\to\infty}|x_n-x|\},\quad x\in E.$$

则 $0<r(x)\le 1/2<\infty$ [注：这里 min 中 1 的作用是防止 $r(x)=+\infty$.] 易见

$$E\subset\bigcup_{x\in E}(x-r(x),\,x+r(x)).$$

据有限覆盖性质, 存在有限多个 $p_1,p_2,...,p_N\in E$ 使得

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{N}(p_i-r(p_i),\,p_i+r(p_i)).$$

根据鸽笼原理, 在这 N 个开区间$(p_i-r(p_i),\,p_i+r(p_i))$ $(i=1,2,...,N)$ 中, 至少有一个,例如 $(p_1-r(p_1),\,p_1+r(p_1))$, 它含有序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的**无穷多项**, 也即存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$|x_{n_k}-p_1|<r(p_1),\quad k=1,2,3,\ldots.$$

于是由 $r(x)$ 的定义得到

$$r(p_1)\le\frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}|x_n-p_1|\le\frac{1}{2}\limsup_{k\to\infty}|x_{n_k}-p_1|\le\frac{1}{2}r(p_1).$$

但这与 $0 < r(p_1) < \infty$ 矛盾. 此矛盾证明了 $(*)$ 成立.

"(b)$\Longrightarrow$ (c)": 设 E 列紧. 若 E 无界, 则存在序列 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得 $|x_n^*| \to +\infty\,(n \to \infty)$. 显然 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列, 这矛盾于 E 列紧. 所以 E 有界.

其次设 $E \ni x_n \to x_0 \in \mathbb{R}\,(n \to \infty)$. 要证明 $x_0 \in E$. 由 E 列紧, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\widetilde{x_0} \in E$ 使得 $x_{n_k} \to \widetilde{x_0}\ (k \to \infty)$. 因收敛序列的子列与原序列有相同的极限, 故 $x_0 = \widetilde{x_0} \in E$. 所以 E 是闭集.

"(c)$\Longrightarrow$ (a)": 设 E 有界闭. 由E 有界知有$E \subset [a,b]$ 其中$a = \inf E, b = \sup E$. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 E 的任一开覆盖. 则有

$$[a,b] \subset \mathbb{R} = E^c \cup E = E^c \cup \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$

因 E^c 是开集, 故$\{E^c, U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是$[a,b]$ 的开覆盖. 因(由上面例题) $[a,b]$ 是紧集, 故存在有限多的 $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}$ 使得

$$[a,b] \subset E^c \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

但 $E \subset [a,b]$ 且 E 与 E^c 不相交, 这就推出 $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. 所以 E 具有有限开覆盖性质, 即E 是紧集. $\square$

【命题6.(紧集上的连续函数性质)】设$E \subset \mathbb{R}$为紧集, $f: E \to \mathbb{R}$ 连续. 则

(a) 象集$f(E)$ 是紧集. 换言之, 连续函数把紧集映为紧集.

(b) f 在E 上一致连续.

(c) f在E 上有最大值和最小值, 即存在$a, b \in E$ 使得

$$f(a) = \inf_{x\in E} f(x), \quad f(b) = \sup_{x\in E} f(x).$$

【证】(a): 因紧等价于列紧, 故只需证明$f(E)$ 列紧. 设$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(E)$. 写$y_n = f(x_n), x_n \in E$. 因$E$ 列紧, 故存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_0 \in E$ 使得$x_{n_k} \to x_0\,(k \to \infty)$. 再由$f$连续知$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0)\,(k \to \infty)$. 所以$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个收敛于$f(E)$ 中某点$y_0 = f(x_0)$ 的子列$\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. 所以$f(E)$ 列紧.

(b),(c) 的证明与有界闭区间的情形雷同. 为完整起见我们再重述一次(只是记号不同而已).

(b): **证法一**: 反证法, 利用E 的列紧性.

假设f在E 上不一致连续, 则由前面分析知存在$\varepsilon > 0$ 和序列$x_n, y_n \in E$ 满足$|x_n - y_n| < 1/n$ 使得$|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon, n = 1, 2, 3 \ldots$. 因E列紧, 故存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和$x_0 \in E$使得$x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$. 而由$|x_{n_k} - y_{n_k}| \to 0$ $(k \to \infty)$ 知$y_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$. 于是由f在E 上处处连续因而在x_0 连续, 我们导出矛盾:

$$\varepsilon \le |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \le |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

它导致$\varepsilon = 0$, 矛盾于$\varepsilon > 0$. 这矛盾证明了f 必在在E 上一致连续.

证法二: 正证法, 利用有限覆盖定理. 对任意$\varepsilon > 0$, 对$\varepsilon/2 > 0$, 由f在E 上处处连续, 对每个$x \in E$ 存在$\delta_x > 0$ 使得当$y \in E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)$ 时$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$. 因$E$中每一点$x$ 都是开区间$(x - \delta_x/2, x + \delta_x/2)$的中心, 故得到$E$的开覆盖: $E \subset \bigcup\limits_{x \in E}(x - \delta_x/2, x + \delta_x/2)$. 因$E$ 是紧集, 故有限个开区间$(x_k - \delta_{x_k}/2,\ x_k + \delta_{x_k}/2)$, $k = 1, 2, ..., N$, 使得

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N}(x_k - \delta_{x_k}/2, x_k + \delta_{x_k}/2).$$

借助这有限性, 便有

$$\delta := \min\{\delta_{x_1}/2, \delta_{x_2}/2, ..., \delta_{x_N}/2\} > 0$$

它将被证明可以作为一致连续性中的一致的δ. 对任意$x, y \in E$ 满足$|x - y| < \delta$, 存在$k \in \{1, 2, ..., N\}$使得$x \in (x_k - \delta_{x_k}/2, x_k + \delta_{x_k}/2)$. 由此有$|y - x_k| \le |y - x| + |x - x_k| < \delta + \delta_k/2 \le \delta_k$. 因此$x, y \in E \cap (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})$. 据$\delta_x$的取法即得

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

所以f在E 上一致连续.

(c): 由(a)知$f(E)$ 是紧集, 因而是有界闭集. 令$A = \inf f(E), B = \sup f(E)$. 则由确界的定义, 存在序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A, \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = B$. 再由$E$列紧, 存在子列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{b_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset E$和$a, b \in E$ 使得$a_{n_k} \to a, b_{m_k} \to b$ $(k \to \infty)$. 再由f连续即得

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A, \quad f(b) = \lim_{k\to\infty} f(b_{m_k}) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = B. \qquad \square$$

【作业】

同学们先自行复习映射与集合的基本运算, 作业题目从第1题开始.

设X, Y 为任意两个集合, $f : X \to Y$.

(1) 设$A \subset X, B \subset f(X)$. 证明

$$f(f^{-1}(B)) = B, \qquad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

而当$f : X \to Y$ 为单射时,也有$f^{-1}(f(A)) = A$.

(2) 设$A_i \subset X, B_i \subset Y, i \in I$. 证明

$$\begin{aligned} &f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \\ &f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i). \end{aligned}$$

而当$f : X \to Y$ 为单射时, 也有$f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

1. 指出下列集合中哪个为开集, 哪个为闭集, 哪个不开不闭:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 5x - 1 > 0\}, \quad B = \{0, 1/n \,|\, n = 1, 2, 3, ...\}, \quad C = \mathbb{Q}.$$

2. 设$G \subset \mathbb{R}$ 为非空开集. 我们称f为G上的一个连续的二值函数, 如果$f : G \to \{0, 1\}$ 连续. 证明: G 上的任何二值连续函数恒为常数 $\Longleftrightarrow$ G 是一个开区间.

[提示: 利用开集的结构定理.]

3 (点集间的距离). 设$A, B \subset \mathbb{R}$ **皆非空**. 定义A, B 的距离为

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} |x - y|.$$

证明

(1) 当$A \cap B \neq \emptyset$ 时$\mathrm{dist}(A, B) = 0$.

(2) 当$\mathrm{dist}(A, B) > 0$ 时$A \cap B = \emptyset$.

(3) 存在A, B 满足$\mathrm{dist}(A, B) = 0$, 但$A \cap B = \emptyset$. 而且这样的A, B 可以都是闭集.

(4) 设A, B 中一个为闭集, 另一个为紧集. 则

$$\text{存在} a \in A, b \in B \text{ 使得} \mathrm{dist}(A, B) = |a - b|.$$

由此可知$A\cap B\neq\emptyset\Longleftrightarrow \mathrm{dist}(A,B)=0$.

4 (点到集合的距离). 设$E\subset\mathbb{R}$ 非空. 令点x 到E的距离为

$$\mathrm{dist}(x,E)=\inf_{y\in E}|x-y|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

证明

(1) $\mathrm{dist}(x,E)$ 在$\mathbb{R}$ 上连续且实际上是Lipschitz 连续的:

$$|\mathrm{dist}(x_1,E)-\mathrm{dist}(x_2,E)|\le|x_1-x_2|,\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

(2) 对任意$\delta>0$,

$$\Omega:=\{x\in\mathbb{R}\mid \mathrm{dist}(x,E)<\delta\}\quad \text{是包含}\ E\ \text{的开集};$$

$$F:=\{x\in\mathbb{R}\mid \mathrm{dist}(x,E)\le\delta\}\quad \text{是包含}\ \Omega\ (\text{从而包含}E)\ \text{的闭集}.$$

[(2)的提示: 利用连续函数的开集和闭集刻画.]

5. 设$K\subset\mathbb{R}$ 为非空紧集. 证明K 有最小元和最大元.

6. 证明**Cantor 定理**: 设$\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为$\mathbb{R}$ 中一列非空紧集且$K_1\supset K_2\supset K_3\supset\cdots$. 则$\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\neq\emptyset$.

7. 设$K\subset\mathbb{R}$ 为紧集, 函数$f:K\to\mathbb{R}$ 为连续单射. 证明逆映射$f^{-1}:f(K)\to K$ 也连续.

8. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, $K\subset\mathbf{R}$ 为非空紧集. 假设f在K 上是单射并且对每个$x\in K$ 存在$\varepsilon=\varepsilon_x>0$ 使得f 在$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 上也是单射. 证明存在开集$\Omega\supset K$ 使得f 在Ω 上是单射.

【建议尝试两种方法: (1) 用有限覆盖方法. (此法较费事, 试试看)

(2) 对于$\delta>0$, 考虑集合$\Omega_\delta=\{x\in\mathbb{R}\mid \mathrm{dist}(x,K)<\delta\}$. 用反证法证明存在$\delta>0$ 使得Ω_δ 具有所证的性质.】

9(可数覆盖) 设$\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为$\mathbb{R}$中任意一族开集(特别包括脚标集合Λ是不可数集的情形). 证明存在可数集$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Lambda$ 使得

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{\lambda_n}.$$

[证明见上学期习题课.]