抽象代数学

我们刻划有限生成Abel群的结构.

设G是一个Abel群　$X\subseteq G$　$X=\{x_1,\cdots,x_k\}$

G是被X生成的，则$\forall g\in G$　$g=n_1x_1+\cdots+n_kx_k$

$n_i\in\mathbb{Z}$，考虑直和 $\underset{|X|个copies}{\bigoplus}\mathbb{Z}=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{k个}=F$

则存在一个满群同态 $F\xrightarrow{\varphi}G$

$$e_i\longmapsto x_i$$

其中 $e_i=(0,\cdots,0,\underset{\text{第}i\text{个}}{1},0,\cdots,0)$

F称为秩为k的自由Abel群，$\{e_1,\cdots,e_k\}$是一组基.

定义　F是一个Abel群，$X\subseteq F$称为F的一个基，如果

(1) $F=\langle X\rangle$

(2) $\forall x_1,\cdots,x_k\in X$，$x_i\neq x_j$，且存在$n_1,\cdots,n_k\in\mathbb{Z}$，使得 $n_1x_1+\cdots+n_kx_k=0$　则$n_1=\cdots=n_k=0$

定理　F的任两组基有相同的阶数(或势)(cardinality).

证明：设X_1,X_2两组基. 若$|X_1|=n<\infty$　令$X_1=\{x_1,\cdots,x_n\}$

则$F=\{\sum_{i=1}^n n_ix_i\mid n_i\in\mathbb{Z}\}$ 令$2F=\{2x\mid x\in F\}$是F的正规子群，且$F/2F\cong(\mathbb{Z}_2)^n$　$|F/2F|\geqslant|X_2|\Rightarrow|X_2|\leqslant\infty$.

同理 $F/2F\cong(\mathbb{Z}_2)^{|X_2|}\Rightarrow|X_1|=|X_2|$.

若$|X_1|,|X_2|$均为无穷，则它们有相同的势.

注：① 以下只考虑有限的情形.

② 基中元素个数称为F的秩(rank).

③ 显然，两个自由Abel群(有限秩)同构$\Leftrightarrow$秩相同.

定理 每个有限生成Abel群均是某个有限秩自由Abel群的商.

设G有限生成Abel群，生成集$=X=\{x_1,\cdots,x_k\}$

则$F=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{k个}\xrightarrow{\varphi}G$

$$e_i\longmapsto x_i$$

$F/\ker\varphi\cong G$ $\quad\ker\varphi$是F的子群，我们分析它的结构.

定理. 设F是一个秩为n的自由Abel群. $G\leq F$. 则存在F的一组基$\{x_1,\cdots,x_n\}$，存在r, $1\leq r\leq n$和正整数$d_1,\cdots,d_r$满足$d_1|d_2\cdots|d_r$，使得G是一个秩为r的自由Abel群. 有基$\{d_1x_1,\cdots,d_rx_r\}$

证明：关于秩n作归纳.

$n=1$. F是同构于$\mathbb{Z}$，子群均同构于$d\mathbb{Z}$的形式，$d\in\mathbb{N}$.

假设结论对$n-1$成立. 设F是一个秩为n的自由Abel

群，令 $S=\{(a_1,\cdots,a_n)\mid$ 存在一组基 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq F$，$\exists a_i>0$，$a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in G\}$（注：若 $a_i<0$ $i=1,\cdots,n$，考虑负元）

S 中元素的分量中最小的正整数记为 d_1，则有以下性质：

① ~~若 $v\in G$~~，不妨设 d_1 出现在第一分量，即存在基 $\{y_1,\cdots,y_n\}$

$v=d_1y_1+\cdots+d_ny_n$

$\forall v'\in G$，$v'=d_1'y_1+\cdots+d_n'y_n$，则 $d_1\mid d_1'$，$d_1\mid d_i$ $i=2,\cdots,n$

因为 $d_i=d_1q+r_i$ $0\leq r<d_1$ $i=2,\cdots,n$ 代入得

$v=d_1(y_1+q_2y_2+\cdots+q_ny_n)+r_2y_2+\cdots+r_ny_n$

令 $x_1=y_1+q_2y_2+\cdots+q_ny_n$，$\{x_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是一组基

由 d_1 的最小性 $\Rightarrow r_2=\cdots=r_n=0$

同理 $d_1\mid d_1'$ ~~即 $F=\langle d_1y_1\rangle\oplus\langle y_2,\cdots,y_n\rangle$~~

$\forall v'\in G$ $v'=d_1q_1y_1+d_2'y_2+\cdots+d_n'y_n$ ← 将 $x_1=y_1+q_2y_2+\cdots$ 代入

$=d_1q_1x_1+(d_2'-q_1d_1q_2)y_2+\cdots+(d_n'-q_1d_1q_n)y_n$

$\in\langle d_1x_1\rangle\oplus G\cap\langle y_2,\cdots,y_n\rangle$

$\Rightarrow G=\langle d_1x_1\rangle\oplus(G\cap\langle y_2,\cdots,y_n\rangle)$

由归纳假设，$G\cap\langle y_2,\cdots,y_n\rangle$ 是自由Abelian子群，基为 $\{d_2x_2,\cdots,d_rx_r\}$，$d_1\mid d_2\mid\cdots\mid d_r$，

推论 G 是有限生成Abel群，有 n 个生成元，则任意子群 $H\leq G$ 可被 $m\leq n$ 个元生成。

由以上定理，回到 $F \xrightarrow{\varphi} G$　$F \cong \mathbb{Z}^n$

F 有基 $\{x_1, \cdots, x_n\}$　$\ker\varphi$ 的基为 $\{d_1x_1, \cdots, d_rx_r\}$，$r \le n$

$d_1 | d_2 | \cdots | d_r$. 则 $F/\ker\varphi \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$

若 $d_i = 1$，则 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \{\bar{0}\}$ 去掉这些商，剩下 $d_i \geq 2$.

引理 每个有限生成Abel群同构于循环群的直和.

引理 若 $m \in \mathbb{N}$ 有分解 $m = \cancel{\mathbb{Z}} p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$，$p_1, \cdots, p_t$ 互异素数，

$n_i \geq 1$ 则 $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_t^{n_t}}$

推论 若 G 是 n 阶Abel群，$m | n$，$m > 0$，则 G 有 m 阶子群.

证明：由以上两引理，只需检查 $G = \mathbb{Z}_{p^{\cancel{k}}}$

定义 G Abel群，$G_t = \{x \in G \mid mx = 0, \exists m \in \mathbb{N}\}$

G_t 是一个群，称为 G 的挠子群 (torsion subgroup)

若 $G_t = 0$，G 称为无挠的 (torsion-free)

性质：G/G_t 是无挠的.

定理. 设 G 有限生成Abel群，则 $G = G_t \oplus F$，$F \cong \mathbb{Z}^s$. 是一个自由Abel群 (rank = s). s 是唯一的. $G_t = 0$ 或有如下分解：

(1) 存在 $m_1, \cdots, m_t \in \mathbb{N}$ 满足 $m_i > 1$, $m_1 | m_2 | \cdots | m_t$ 且

$$G_t \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_t}$$

$m_1, \cdots, m_t$ 称为G的不变因子(invariant factors)

(2) 存在 $p_1^{s_1}, \cdots, p_k^{s_k}$ 满足 $p_1, \cdots, p_k$ 素数, $s_1, \cdots, s_k \in \mathbb{N}$.

且 $G_t \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$

$p_1^{s_1}, \cdots, p_k^{s_k}$ 称为初等因子(elementary divisors)

给定G, 秩、不变因子、初等因子被唯一确定(不考虑次序)

证明: 设 $G \cong (\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_t}) \oplus \mathbb{Z}^s$, $m_i > 1$, $m_1 | \cdots | m_t$. $s \geq 0$

$G \cong (\mathbb{Z}_{m_1'} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_{t'}'}) \oplus \mathbb{Z}^{s'}$, $m_i' > 1$, $m_1' | \cdots | m_t'$ $s' \geq 0$

令 $m = m_t m_t'$

$mG = \{mg \mid g \in G\} \cong \mathbb{Z}^s \cong \mathbb{Z}^{s'}$

$\Rightarrow mG$ 是一个自由Abel群, $s = s'$.

~~令 $\Sigma = \{\{m_1, \cdots, m_t\} \mid m_i > 1, m_1, \cdots, m_t$ 不变因子$\}$~~

不变因子组与初等因子组一一对应.

给定不变因子组 $(m_1, \cdots, m_t)$. ~~m_t~~

$m_i = q_1^{n_{i1}} \cdots q_r^{n_{ir}}$ $q_1, \cdots, q_r$ 互异素数.

则 $0 \leq n_{1j} \leq n_{2j} \leq \cdots \leq n_{tj}$ $j = 1, \cdots, r$

$$G_t \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_t} \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \bigoplus_{i=1}^{t_j} \mathbb{Z}_{q_j^{n_{ij}}}$$

最后 令 $G[m] = \{g \in G \mid mg = 0\}$ 则 $G[m] \leq G$

且 $(G_1 \oplus G_2)[m] = G_1[m] \oplus G_2[m]$ 对于素数 q_ℓ, $1 \leq \ell \leq r$.

$G[q_\ell] \cong (\mathbb{Z}_{q_\ell})^{t_\ell}$ (见后面注解)

即有 $q_\ell^{t_\ell} - 1$ 个阶为 q_ℓ 的元属于 $G[q_\ell]$

$\Rightarrow q_\ell, t_\ell$ 是唯一的.

$(q_\ell^b G_t)[q_\ell] \cong (\mathbb{Z}_{q_\ell})^{w(q_\ell, b)}$ (见后面注解)

$w(q_\ell, b)$ 是 $n_{1\ell}, \cdots, n_{t_\ell \ell}$ 中大于 b 的个数, $(q_\ell^b G_t)[q_\ell]$

无关于 G 的初等因子选择 $\Rightarrow w(q_\ell, b)$ 唯一.

$\Rightarrow n_{1\ell}, \cdots, n_{t_\ell \ell}$ 唯一.

注解: $G[q_\ell] \cong G_t[q_\ell] \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \bigoplus_{i=1}^{t_j} \mathbb{Z}_{q_j^{n_{ij}}}[q_\ell]$

$$\cong \bigoplus_{i=1}^{t_\ell} (q_\ell^{n_{i\ell}-1} \mathbb{Z}_{q_\ell^{n_{i\ell}}}) \cong (\mathbb{Z}_{q_\ell})^{t_\ell}$$

$$q_\ell^b G_t \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \bigoplus_{i=1}^{t_j} (q_\ell^b \mathbb{Z}_{q_j^{n_{ij}}}) \cong \left(\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{r} \bigoplus_{i=1}^{t_j} \mathbb{Z}_{q_j^{n_{ij}}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i=1 \\ n_{i\ell} > b}}^{t_\ell} \mathbb{Z}_{q_\ell^{n_{i\ell}-b}}\right)$$

$$q_\ell^b G_t[q_\ell] \cong \left(\bigoplus_{\substack{i=1 \\ n_{i\ell} > b}}^{t_\ell} \mathbb{Z}_{q_\ell^{n_{i\ell}-b}}\right)[q_\ell] \simeq (\mathbb{Z}_{q_\ell})^{w(q_\ell, b)}$$

作业：Page 66 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8