第 2 章作业简答

习题 2.1

1. 用以后学的 Cauchy-Riemann 方程很容易判断。 但是此处要用定义判断。

（i）处处不可微。 要证明极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}{(x-x_0)+i(y-y_0)} \qquad (1)$$

对每个 $z_0=x_0+y_0$ 不存在。反设对某个 $z_0=x_0+y_0$ 极限存在 则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}}\frac{x^2-{x_0}^2}{(x-x_0)\left(\sqrt{x^2+{y_0}^2}+\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}}\frac{x+x_0}{\left(\sqrt{x^2+{y_0}^2}+\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)}$$

$$=\begin{cases}1; & y_0=0\\ \dfrac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}; & y_0\neq 0.\end{cases}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}{(x-x_0)+i(y-y_0)}=\lim_{\substack{y\to y_0\\ x=y_0}}\frac{y+y_0}{i\left(\sqrt{x^2+{y_0}^2}+\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)}$$

$$=\begin{cases}-i; & x_0=0\\ \dfrac{-iy_0}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}; & x_0\neq 0.\end{cases}$$

比较以上同一极限的不同表达式，知（1）不存在。

（ii）仅在 z=0 处可微。证法类似。

(iii) 处处不可微。证法类似。

（iv）处处不可微。首先 argz 在负实轴上部连续。任取 $z_0\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$。让 z 沿圆周|z|=|z $_0$| 趋于 z $_0$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\arg z-\arg z_0}{z-z_0}=\lim_{\theta\to\theta_0}\frac{\theta-\theta_0}{|z_0|e^{i\theta_0}\left(e^{i(\theta-\theta_0)}-1\right)}(z=|z_0|e^{i\theta},z_0=|z_0|e^{i\theta_0})=\frac{1}{|z_0|e^{i\theta_0}i}$$

让 z 沿从原点出发的射线 z=t z $_0$ 趋于 z $_0$，则 $\lim_{z\to z_0}\dfrac{\arg z-\arg z_0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\dfrac{0}{z-z_0}=0.$

显然两个极限不相等。所以处处不可微。

（vi）处处可微。

4．记 f(z)=u(x,y)+iv(x,y), 则 $\overline{f(\overline{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$。由于，D 对称，$\overline{f(\overline{z})}$ 有意义。由于 f 全纯， 所以 u,v 可微且满足 Cauchy-Riemann 方程，由此可以证明 $u(x,-y),v(x,-y)$ 也处处可微且满足 Cauchy-Riemann 方程。

习题 2.2

1． 由微积分常识，两个偏导数处处等于 0 的实函数市场值函数。由于 $f(z)=u+iv$ 的导

函数可以写成 $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_x$，依题意 $u_x=v_x=u_y=v_y\equiv 0.$ 所以 u,v 是常数。

2. 由 Cauchy-Riemann 方程可（i）（ii）显然可以退出 f 是常数。对（iv），存在常数 *a* 使得 arg(*af*)=0. 即 Im(af)=0, 再用（ii）

(iii).设 $f(z)=u+iv$。 则 $u^2+v^2\equiv c.$ 由此得到

$$\begin{cases}2uu_x+2vv_x=0\\2uu_y+2vv_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}uu_x-vu_y=0\\vu_x+uu_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u^2+v^2)u_x=0\\(u^2+v^2)u_y=0\end{cases}$$

如果 $c=0,$ 则 $u=v\equiv 0.$ 如果 $c\neq 0$， 则 $u_x=u_y\equiv 0.$ 所以 u 是常数。由 C-R 方程，v 也是常数。

(v) 设 $f(z)=u+iv$。 则 $u=v^2$, $f=v^2+iv$ 由此得到

$$2vv_x=v_y,2vv_y=-v_x\Rightarrow\left(4v^2+1\right)v_x=0\Rightarrow v_x\equiv 0.$$

进而 $f'(z)=u_x+iv_x=2vv_x+iv_x\equiv 0.$

3. $u=\sqrt{xy},v=0.$ 在（0，0）$u_x=u_y=v_x=v_y=0$，所以在(0,0)满足 C-R 方程。但是在(0,0)函数不可导。 因为 $\lim_{\substack{z\to 0\\y=x}}\frac{f(z)}{z-0}=\lim_{\substack{z\to 0\\y=kx}}\frac{|x|}{x+ix}$ 不存在，所以 $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z-0}$ 不存在。

11. 设 f=u+iv. 则

$$2\log|f(z)|=\log(u^2+v^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(u^2+v^2)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{2uu_x+2vv_x}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{\left(2uu_{xx}+2vv_{xx}+2\left(u_x\right)^2+2(v_x)^2\right)\left(u^2+v^2\right)-\left(2uu_x+2vv_x\right)^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(u^2+v^2)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{2uu_y+2vv_y}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{\left(2uu_{yy}+2vv_{yy}+2\left(u_y\right)^2+2(v_y)^2\right)\left(u^2+v^2\right)-\left(2uu_y+2vv_y\right)^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

因为 u，v，调和，f=u+iv 全纯

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(u^2+v^2)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(u^2+v^2)$$

$$=\frac{\left(2\left(u_x\right)^2+2(v_x)^2+2\left(u_y\right)^2+2(v_y)^2\right)\left(u^2+v^2\right)-\left(2uu_x+2vv_x\right)^2-\left(2uu_y+2vv_y\right)^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

$$=\frac{4\left(\left(u_x\right)^2+(v_x)^2\right)\left(u^2+v^2\right)-\left(2uu_x+2vv_x\right)^2-\left(-2uv_x+2vu_x\right)^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}=0.$$

所以 log|f(z)|调和。如果|f(z)|调和，则

$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sqrt{u^2+v^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_x+vv_x\right)\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(uu_{xx}+vv_{xx}+\left(u_x\right)^2+(v_x)^2\right)\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(uu_x+vv_x\right)^2\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sqrt{u^2+v^2}$$

$$=\left(uu_{yy}+vv_{yy}+\left(u_y\right)^2+(v_y)^2\right)\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(uu_y+vv_y\right)^2\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Delta(\sqrt{u^2+v^2})=\left(\left(\left(u_x\right)^2+(v_x)^2+\left(u_y\right)^2+(v_y)^2\right)\left(u^2+v^2\right)-\left(uu_x+vv_x\right)^2-\left(uu_y+vv_y\right)^2\right)\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\left(2\left(\left(u_x\right)^2+(v_x)^2\right)\left(u^2+v^2\right)-\left(uu_x+vv_x\right)^2-\left(-uv_x+vu_x\right)^2\right)\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\left(\left(u_x\right)^2+(v_x)^2\right)\left(u^2+v^2\right)\left(u^2+v^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

如果$\sqrt{u^2+v^2}$ 调和，则$\left(u_x\right)^2+(v_x)^2\equiv 0$（注意$u^2+v^2\neq 0$）因而$u_x=v_x\equiv 0$，由 C-R 方程，$u_y=v_y\equiv 0$，所以 u,v 是常数。矛盾。

13．这里要承认解析函数连续二阶可导。设$a\in D,\ B(a,\delta)\subset D.$ 则 u 在$B(a,\delta)$ 上有共轭调和函数v。记 $f=u+iv$，则按题意 $f\circ\varphi$ 全纯。由于全纯函数实虚部调和，所以$u(\varphi)$ 调和。

另证：在承认φ的实虚部调和后，可以按 C-R 方程推导$u(\varphi)$全纯。

18．显然$u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})$是$z$的多项式，因而解析。由于$\mathbb{C}$是单连通域，$u$有一个共轭调和函数$v$. 由 Cauchy-Riemann方程 v 必为多项式。因而记$v(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})$也是解析函数。考虑到

$$=\frac{du(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})}{dz}=\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}\frac{\partial\frac{z}{2}}{\partial z}+\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}\frac{\partial\frac{z}{2i}}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}+\frac{1}{2i}\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}$$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}-\frac{1}{2i}\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}$$

$$=\frac{1}{2i}\left.\frac{i\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}+\frac{1}{2}\left.\frac{i\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}$$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial iv(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}+\frac{1}{2i}\left.\frac{\partial iv(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=z/2\\y=z/(2i)}}=\frac{div(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})}{dz}$$

知$u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})$和$iv(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})$只相差一个常数。令

$$g(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

则

$$g(z)=g(x+iy)=g(\frac{z}{2}+\frac{z}{2i})=u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})+iv(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})=2u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})-a.$$

其中a是常数。由此$a=g(0)+2u(0,0)=u(0,0)-iv(0,0)$. 所以

$$f(z)=2u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})-u(0,0)=g(z)-iv(0,0)$$

$$\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{Re} g(z)=u(x,y).$$

习题 2.3

2 （i）

设Γ_1是D中所有满足$u(x(t),y(t))=u_0$的曲线z=z（t）构成的集合。Γ_2是D中所有满足$v(x(t),y(t))=v_0$的曲线 z=z（t）构成的集合。注意到u_x,u_y不能同时为零(否则由CR方程，$f'(z)$有零点）。由隐函数定理，Γ_1和Γ_2中的曲线都是光滑的。

分别在Γ_1和Γ_2中任取两条曲线$\gamma_1: z=z_1(t), \gamma_2: z=z_2(t)$, 设他们在$t=t_0$相交于$z_0$，则曲线

$$w=f(z_1(t))=u_0+v(z_1(t)),$$

和曲线

$$w=f(z_2(t))=u(z_2(t))+v_0,$$

垂直相交于$w_0=f(z_0)$.由于$f'(z_0)\neq 0$, f不可能把在z_0不垂直的两条曲线映成在w_0垂直的两条曲线。　所以γ_1和γ_2垂直于z_0.

（ii）与(i)证法基本一样，注意曲线|w|=常数与 Argw=常数 垂直。

3　假如 $f'(1)\neq 0$ 但

$\arg f'(1)=\theta_0\neq 0$, 则曲线 $f(e^{i\theta})$在θ_0的切向量不与∂B(0, 1)相切于 1 。这样f必然把曲线$e^{i\theta}$的一段映到$\overline{B(0,1)}$之外。由于f在 1 全纯，f在1某个邻域上全纯，由连续性，f必把$B(0,1)$内的一些点映到$\overline{B(0,1)}$之外。矛盾。所以$\theta_0=0$.

4．不妨设 $z_0=|z_0|$, 考虑$g(z)=\frac{f(z)}{f(z_0)}$, 用上题。

习题 2.4

4. (i)考虑$\left(f(z)e^{-z}\right)'=\left(f'(z)-f(z)\right)e^{-z}\equiv 0$. $f(z)e^{-z}$是常数。

(ii) 任意取定 $a\in\mathbb{C}$

依题意f在 0 连续。$f^2(0)=f(0)$. 如果$f(0)=0$, 则$f(z)=f(z+0)\equiv 0$.
$f'(0)=0$. 矛盾。　故 $f(0)=1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)f(a)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}f(a)$$

$=f'(0)f(a)=f(a)$. 由(i)结论可证（ｉｉ）。

8. 如不然则有

$$\exists a、b\in B(0,1),\ s.t.\ a\neq b,\ a^2+2a+3=b^2+2b+3$$

$$(a+b)(a-b)+2(a-b)=0$$

$$(a+b)=-2$$

这与$a、b\in B(0,1)$矛盾。

18.

由于对任意 $w\in\mathbb{C}$, $\cos z=w$有解（因为反函数处处有定义，虽然多值）。所以$\cos z$是满射。　由于$\cos z$以 2 π为周期，所以$\cos z$将带形

$$D=\{z\in\mathbb{C};\ 0<\operatorname{Re} z<2\pi\}$$

的闭包$\bar{D}=\{z\in\mathbb{C};\ 0\le\operatorname{Re} z\le 2\pi\}$映满 $\mathbb{C}$。记

$$D^+=\{z\in\mathbb{C};\ 0<\operatorname{Re} z<2\pi,\operatorname{Im} z>0\}$$

$$D^-=\{z\in\mathbb{C};\ 0<\operatorname{Re} z<2\pi,\operatorname{Im} z<0\}$$

则 $f(\bar{D}^+)=f(-\bar{D}^+)=f(\bar{D}^- -2\pi)=f(\bar{D}^-)$. 所以$f(z)=\cos z$ 将$\bar{D}^+$映满$\mathbb{C}$。
这里$-\bar{D}^+=\{-z\in\mathbb{C};\ z\in\bar{D}^+\}$, $\bar{D}^- -2\pi=\{z-2\pi;\ z\in\bar{D}^-\}$.

考虑到$f([0,2\pi])=[-1,1]$, $\cos(iy)=\cos(iy+2\pi)=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\in[0,+\infty)$

可知$f(D^+)\supset\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$. 考虑到

$$f(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin y)}{2}$$

$$=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x+i\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x$$

可以看出 f 在 D^+不取$[0,+\infty)$ 中的点。综上所述，$f(D^+)=\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$.

下证单叶性。对每条D^+的水平线段$l_y=\{x+iy;\ x\in(0,2\pi)\}$, f将l_y

一一地映为挖掉$\left(\dfrac{e^y+e^{-y}}{2},0\right)$的椭圆

$$\frac{X^2}{\left(\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2}=1.$$

而且对$y_1<y_2$, l_{y_1}对应的椭圆长短轴分别严格小于l_{y_2}对应的椭圆长短轴也就是两个椭圆无交。这就证明了单叶性。

19．与 18 类似

21. （i）π $(ii)\ 8\pi/3,$ $(iii)\ \pi/2$ $(iv)\ 0$ (v) 0.

22 只需证明当z绕$D=\mathbb{C}\backslash[0,1]$中简单闭曲线$\gamma$一周时，$f(z)$辐角增量为$2\pi$的整数倍。如果$\gamma$不包住[0,1]，则增量为0。如果$\gamma$包住[0,1]，则z绕$\gamma$逆时针一周时，$z^{p\text{-}1}$辐角增量为$2\pi(p-1)$，而$(z\text{-}1)^p$辐角增量为$2\pi p$. 所以$f(z)$辐角增量为$-2\pi$. 所以$f$能在$D$上有单值全纯分支。

24. G 的面积等于

$$(f=u+v)$$

$$\iint_G dudv=\iint_D \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} dxdy=\iint_D |f'|^2 dxdy=\iint_D f'\,\overline{f'}\,dxdy$$

26. 只需证明当z绕D中简单闭曲线γ一周时，1-z^2 辐角增量为0。

27.

先证明当z绕$D=\mathbb{C}\backslash[-1,1]$中简单闭曲线$\gamma$一周时，$(1-z)^3(1+z)$辐角增量为$4\pi$的整数倍（证略）。由此出单值解析分支$f(z)$存在。

现在设$f(i)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$. 这相当于选定了$f(i)$的辐角为$-\dfrac{\pi}{8}$。现在在正半轴上取$z_0=2$，用线段分别连接 $\{i,2\}$ 和$\{-i,2\}$，则得到D中的折线γ.当z沿γ从i到$-i$时，$1-z$的辐角增加了$3\pi/4$，　$1+z$的辐角增加了$\pi/4$，因此$(1-z)^3(z+1)$的辐角增加了$3\times 3\pi/4+\pi/4=5\pi/2$。因而$f(z)$的辐角增加了$5\pi/8$，这样$f(z)$在$-i$的辐角为$5\pi/8-\pi/8=\pi/2$. 所以$f(-i)=\sqrt{2}i$.

习题 2.5

1. $-\dfrac{1}{z-1}$

2. 可设$f(z)=i+\dfrac{z}{cz+d},\ldots\ldots$

3. 这道题目应该先假定 a,b,c,d 至少有一个实数（事实上总可假定有一个是 1）。设$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$把上半平面映为上半平面。这种映射把实轴映为实轴（为什么？），且在实轴上的导数大于零（由保角性）。而

$$\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.\ \text{所以}\ ad-bc>0.$$

如果 a,b,c,d 有一个不实数，则 z=x 在实轴上变化时，f(x)总能取到复数：

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{(ax+b)(\bar{c}x+\bar{d})}{|cx+d|^2}=\frac{a\bar{c}x^2+(a\bar{d}+b\bar{c})x+b\bar{d}}{|cx+d|^2}\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow a\bar{c}\in\mathbb{R}$，$b\bar{d}\in\mathbb{R}$（我们还假定了$a,b,c,d$有一个实数),

且 $\frac{a}{c}\in\mathbb{R}$（$c\neq 0$）, $\frac{b}{d}\in\mathbb{R}$（$d\neq 0$）(注意c, d不能同时为0）

$\Rightarrow a,b,c,d$全是实数。

反面则相对好证明，略。

4（i）可先设 f(z)=$\frac{z+i}{cz+d}$ 最终得 f(z)=$\frac{z+i}{z-i}$

（ii）可先设 f(z)=$\frac{z-i}{cz+d}$ …….

10. 简单计算可得，对$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，$S(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$，有

$$T(S(z))=\frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d}=\frac{(a\alpha+b\gamma)z+a\beta+b\delta}{(c\alpha+d\gamma)z+c\beta+d\delta}=z.$$

11．上题计算实际上证明了该题。

13．找好对称点事半功倍。

14．$\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$ 注意课堂上讲的有关例题。这个题目的过程是，先用$\sqrt{z}$将区域映成上班单位圆盘（割口分成了两个半径，即上班单位圆盘的边界直径。用分式线性变换将-1 映为 0，将 1 映为无穷远点。则上半单位圆盘映成了第三象限。在平方即得。

15．$\frac{\sqrt{z^4+4}-i}{\sqrt{z^4+4}+i}$

题目条件很特殊，w=z^4 正好能将区域映成$\mathbb{C}\setminus[-4,+\infty)$，将它平移成$\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$在开方便得上半平面。。。。

16．参考习题 2.4 第 18、19 题

17．先用$\frac{z+1}{z-1}$将月牙的两个顶点分别映为 0，∞。这时月牙映为角域 $\pi/6<\arg z<\pi/2.$ 用以判断月牙上弧映为射线 $\arg z=\pi/2$，由保角性可确定月牙下面的弧映为 $\arg z=\pi/2-\pi/3=\pi/6.$三次方后，$\pi/6<\arg z<\pi/2$被映为作半平面。。。。最终得到

$$f(z)=\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+1\right)\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3-1\right)^{-1}$$

19．用$\sqrt{z}$将 D 映为上半平面除去闭单位圆盘剩下的部分D_1. D_1相当于一个月牙形。

用映射 $\frac{z+1}{z-1}$ 将 D_1 映为第四象限（这是因为从-1 出发经-2，无穷远点，再到 1 的实轴上的部分被映成了射线 argw=0. 再由保角性可证明这一点）。…….最终得

$$f(z)=\left(\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2+i\right)\left(\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2-i\right)^{-1}$$

21 参考例 2.5.7