数学分析讲义: 第十二章 微分形式的积分, 场论初步

讲课教材: 《数学分析讲义》陈天权编著, 共三册, 北京大学出版社

参考书: 《数学分析》(第4版) 第一卷、第二卷, V.A. Zorich (卓里奇) 编著, 中译本, 高等教育出版社; **《数学分析》徐森林、薛春华** 编著, 共三册，清华大学出版社; 《数学分析教程》上下册, 常庚哲、史济怀编著, 中科大出版社

清华大学数学科学系 2016 级数学分析教学 卢旭光 Nov. 2017

数学分析讲义总目录

第十二章 微分形式的积分, 场论初步

§12.0.引言 本章我们继续学习积分理论.前面学习的积分$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$有时也称为第一型积分, 即它们是关于正测度的积分, 是长度、面积、体积等概念和计算方法的推广, 基本不涉及积分的方向问题, 这是因为当测度μ确定后, 积分$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$前面的正负号已经由被积函数决定了.注意, 在这类积分中, 积分号里的"$f(x)\mathrm{d}\mu(x)$"完全是底面积$\mathrm{d}\mu(x)$ 乘以高$f(x)$的意思, 只是这高$f(x)$可能取负值, 因此它与微分"$f(x)\mathrm{d}x$"在概念上是有区别的(也见下面), 只是由于在一维积分中, 对$\mathrm{d}x$沿着x增加的方向求积分(此时$\mathrm{d}x>0$), 与对古典Lebesgue测度元$\mathrm{d}\mu(x)$求积分, 二者效果和数值完全相同, 人们才将测度元$\mathrm{d}\mu(x)$ 与长度之差$\mathrm{d}x$ 不做区别, 即$\mathrm{d}\mu(x)=\mathrm{d}x$.

现在学习的积分—— 微分形式的积分—— 也称为第二型积分, 是牛顿-莱布尼茨公式(即微积分基本定理)的深刻推广, 其主要概念是两块：**微分形式的积分、沿给定方向的积分**.

为清楚理解本章主要概念, 我们先对几个主要方面作些解释.以下总假定出现的函数是足够光滑的以便满足需要的可微性和可积性.

回忆一下, 牛顿- 莱布尼茨公式是差和公式的连续版本：

$$\text{差和公式}\quad \sum_{k=1}^{N}\Delta y_k=\sum_{k=1}^{N}(y_k-y_{k-1})=y_N-y_0.$$

$$\text{牛-莱公式}\quad \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}F(x)=F(b)-F(a).$$

这里包括$a\ge b$的情形.

1 **次微分形式的积分:** 在上一章我们学习了如何计算力对质点位移时所做的功, 这里再复习一下: 设空间中一个质点沿着曲线

$$\Gamma(A,B)=\{x=x(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}\subset\mathbb{R}^n$$

从点$A=x(\alpha)$移动到点$B=x(\beta)$, 向量场$\mathbf{F}(x)\in\mathbb{R}^n$是在$\Gamma(A,B)$附近有定义的一个力场. 则在这个有向移动过程中力场$\mathbf{F}(x)$对该质点所做的功为

$$W=\int_{\Gamma(A,B)}\langle\mathbf{F}(x),\overrightarrow{\mathrm{d}x}\rangle=\int_{\Gamma(A,B)}\langle\mathbf{F}(x),\mathbf{T}(x)\rangle\mathrm{d}s(x)=\int_\alpha^\beta\langle\mathbf{F}(x(t)),x'(t)\rangle\mathrm{d}t.$$

这里从**Riemann 和** 出发不难里理解: $\overrightarrow{\mathrm{d}x}$是曲线$\Gamma(A,B)$沿$A$到$B$的方向在点$x$处的向量差, 即有向微分, $\mathbf{T}(x)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}x}}{|\overrightarrow{\mathrm{d}x}|}$是曲线在点$x$ 处的单位切向量, $\mathrm{d}s(x)=|\overrightarrow{\mathrm{d}x}|$是点$x$处

的微小弧长. 如果写$\overrightarrow{\mathrm{d}x}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,...,\mathrm{d}x_n)$, $\mathbf{F}=(F_1,F_2,...,F_n)$, 则有$\langle\mathbf{F}(x),\overrightarrow{\mathrm{d}x}\rangle=F_1(x)\mathrm{d}x_1+F_2(x)\mathrm{d}x_2+\cdots+F_n(x)\mathrm{d}x_n$ 从而以上可写成

$$W=\int_{\Gamma(A,B)}F_1(x)\mathrm{d}x_1+F_2(x)\mathrm{d}x_2+\cdots+F_n(x)\mathrm{d}x_n=\int_\alpha^\beta\sum_{i=1}^n F_i(x(t))x_i'(t)\,\mathrm{d}t.$$

上式左边称为1次微分形式$F_1(x)\mathrm{d}x_1+F_2(x)\mathrm{d}x_2+\cdots+F_n(x)\mathrm{d}x_n$ 在曲线$\Gamma(A,B)$上沿A到B的方向的积分, 等式右边是这积分的计算公式.

为了进一步联系牛顿-莱布尼茨公式, 我们继续看两个重要情形:

情形1. 设上述质点的运动与力场$\mathbf{F}$ 服从牛顿第二定律, 即

$$x''(t)=\frac{1}{m}\mathbf{F}(x(t)),\quad 即\quad x_i''(t)=\frac{1}{m}F_i(x(t)),\qquad t\in[\alpha,\beta].$$

这里$m>0$为质点的质量. 则有

$$W=\int_\alpha^\beta\sum_{i=1}^n mx_i''(t)x_i'(t)\,\mathrm{d}t=m\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}(x_i'(t))^2\Big|_{t=\alpha}^{\beta}=\frac{m}{2}|\mathbf{v}(\beta)|^2-\frac{m}{2}|\mathbf{v}(\alpha)|^2$$

其中$\mathbf{v}(t)=x'(t)$ 是质点运动速度. 这表明功等于动能之差.

情形2. 设上述力场$\mathbf{F}$ 有位势函数, 即有函数$U(x)$ (称为$\mathbf{F}$的势函數) 使得

$$\mathbf{F}(x)=-\nabla U(x)\qquad\forall\,x\in\Omega\supset\Gamma(A,B).$$

也即$F_i(x)=-\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$, $i=1,2,...,n$.

意即1次微分形式$F_1(x)\mathrm{d}x_1+F_2(x)\mathrm{d}x_2+\cdots+F_n(x)\mathrm{d}x_n$ 是函数$-U(x)$的全微分: $-\mathrm{d}U(x)=F_1(x)\mathrm{d}x_1+F_2(x)\mathrm{d}x_2+\cdots+F_n(x)\mathrm{d}x_n$. 此时有

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U(x(t)))=\sum_{i=1}^n-\frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t)=\sum_{i=1}^n F_i(x(t))x_i'(t)$$

从而有

$$W=\int_\alpha^\beta-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U(x(t)))\,\mathrm{d}t=-U(x(t))\Big|_{t=\alpha}^{\beta}=U(x(\alpha))-U(x(\beta)).$$

这表明功等于势能之差.

若设**情形1**与**情形2**同时满足, 则由两个结果相同得到

$$\frac{m}{2}|\mathbf{v}(\beta)|^2+U(x(\beta))=\frac{m}{2}|\mathbf{v}(\alpha)|^2+U(x(\alpha)).$$

这正是牛顿力学中的机械能守恒律: 质点在不同时间不同地点的机械能(即动能与位能之和) 保持不变.

【注】若使用$\mathbf{F} = \nabla U$而不是$\mathbf{F} = -\nabla U$, 则机械能就被说成是“动能与位能之差”, 产生混乱: 到底谁减谁? 而表述“动能与位能之和”就没有混乱, 这就是使用$\mathbf{F} = -\nabla U$ 的唯一原因.

不难看出, 由于曲线的定向十分简单(且属于有序行为, 例如以参数增大的方向为正向), 因此曲线上的微分形式的积分与前面学习的一维积分没有本质区别.但是在曲面的情形就突然复杂起来, 因为这不光涉及曲面积分的方向问题，被积函数也至少是2次微分形式, 其特殊的多重线性结构反映了一般微分形式和微分形式运算的本性, 属于新概念.

2 **次微分形式的积分:** 理解2次微分形式的积分的典型例子是我们上一章讲过的流体的流量计算公式. 为看得更清楚, 我们就在$\mathbb{R}^3$中考虑问题.

设$\mathbb{R}^3$中的一流体在指定的时刻的流速场为

$$\mathbf{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x)), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega.$$

设在这个指定时刻该流体通过一块二维定向曲面

$$S = \{x = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) \mid (u,v) \in D\} \subset \Omega.$$

设$Q(S)$为这时刻该流体从S的一侧通过S的另一侧的流量[准确地说是“体积流量”(volumetric flow rate), 即它只考虑通过曲面的流体的体积而不区别是何种流体(特别不考虑流体的密度)]. 则由上一章我们知道

$$Q(S) = \int_S \langle \mathbf{V}(x), \mathbf{n}(x) \rangle \mathrm{d}\sigma(x)$$

其中$\mathbf{n}(x)$曲面S在点$x \in S$处的单位法向$\mathbf{n}(x)$, 它的方向与所测量的流量的方向一致.【如果不一致, 则把$\mathbf{n}(x)$换成$-\mathbf{n}(x)$ 就一致了, 这是因为S是定向的！】

由上一章可知在用曲面的参数表示计算时, 单位法向量$\mathbf{n}(x)$ 和面积元$\mathrm{d}\sigma(x)$ 分别等于

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right|^2}} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \mathbf{e}_3 & \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right)}{\sqrt{\left|\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right|^2}}\Bigg|_{(u,v)=\varphi^{-1}(x)},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\sigma(x)=\sqrt{\Big|\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\Big|^2+\Big|\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\Big|^2+\Big|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\Big|^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

代入$Q(S)$的定义式得到

$$Q(S)=\iint_D\left(V_1\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}+V_2\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}+V_3\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中在$uv-$平面的积分中

$$V_i=V_i(x_1(u,v),x_2(u,v),x_3(u,v)),\quad i=1,2,3.\qquad (\text{下同}).$$

如令

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}(x)=\mathbf{n}(x)\mathrm{d}\sigma(x)$$

则$\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}(x)$ 是曲面S上点x处的一个有向小圆柱, 这圆柱的高为1, 底面积为$\mathrm{d}\sigma(x)$, 从底部指向顶部的方向为$\mathbf{n}(x)$. 将上面的关系式代入后有

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}(x)=\left(\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ \frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right).$$

另一方面, 由于(u,v)是自变量, 故$\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 可以取作uv-平面上的Lebesgue 测度元(因而>0), 于是由二重积分换元公式知

$$\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\Big|\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1=\Big|\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\Big|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

分别是位于x_2x_3-平面、x_3x_1-平面、x_1x_2-平面上的面积元. 为了恢复原来的有向信息, 我们定义**有向面积元**:

$$\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1=\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2=\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

它们是有向小圆柱$\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}(x)$ 分别向x_2x_3-平面、x_3x_1-平面、x_1x_2-平面上的投影. 这样一来我们可以写

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}(x)=(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,\ \mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)$$

从而有

$$\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\langle\mathbf{V}(x),\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}(x)\rangle$$

$$=V_1(x)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+V_2(x)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+V_3(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$$

这等式右边称为一个2次微分形式. 于是流量$Q(S)$便等于这个2次微分形式的积分:

$$Q(S)=\iint_S V_1(x)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+V_2(x)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+V_3(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2.$$

在上面推导中我们还得到了这个2次微分形式积分的换元计算公式:

$$\begin{aligned}&\iint_S V_1(x)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+V_2(x)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+V_3(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\&=\iint_D\left(V_1\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}+V_2\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}+V_3\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}\qquad(*)$$

其中等式右边$V_i=V_i(x_1(u,v),x_2(u,v),x_3(u,v))$, $i=1,2,3$.

为看清等式$(*)$两边的特性, 我们再分析: 在$(*)$的左边, $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ 分别是1次微分和2次微分, 它们是有方向的(特别, 它们不能当做测度元), 而在$(*)$的右边, $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$也分别是1次微分和2次微分, 但由于$(u,v)$ 是平面区域D中的自变量, 并且一般总是以u,v增大的方向为参数域D的正方向, 因此在这个约定下, 微分$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$就总是正的, 从而可当做测度元.

为了强调与普通微分算子和普通乘积的区别, 人们把等式$(*)$左边出现的微分算子d叫做**外微分**, 而称$\wedge$为**外积**. 下一节我们将系统介绍外微分和外积的概念和基本性质, 此刻我们先看看怎样从外微分和外积的性质导出等式$(*)$: 暂时承认以下三点:

(1) d 作用到函数时, 具有通常微分运算性质.

(2) 加法$+$和外积$\wedge$ 运算具有通常加法和乘积运算的结合律、分配律, 数乘关系, 例如

$$(\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j)\wedge\mathrm{d}x_k=\mathrm{d}x_i\wedge(\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k)=:\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k,$$

$$f(x)\mathrm{d}x_i\wedge g(x)\mathrm{d}x_j=f(x)g(x)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j,$$

但成立反交换律:

$$\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=-\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i,\quad \mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=-\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u,\quad \text{etc.}$$

这蕴含 (例如在$u=v$的情形) $\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}u=0$.

(3) 当(u,v) 是自变量时, 由于u,v增大的方向为参数域D的正方向, 故此时定义$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$, 它可当做测度元.

现在利用(1),(2),(3) 我们计算:

$$x_1=x_1(u,v),\quad x_2=x_2(u,v),\quad x_3=x_3(u,v)\quad\Longrightarrow$$

$$\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2=\Big(\frac{\partial x_1}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x_1}{\partial v}\mathrm{d}v\Big)\wedge\Big(\frac{\partial x_2}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x_2}{\partial v}\mathrm{d}v\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial x_1}{\partial u}\mathrm{d}u\wedge\frac{\partial x_2}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x_1}{\partial u}\mathrm{d}u\wedge\frac{\partial x_2}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial x_1}{\partial v}\mathrm{d}v\wedge\frac{\partial x_2}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x_1}{\partial v}\mathrm{d}v\wedge\frac{\partial x_2}{\partial v}\mathrm{d}v\\
&= \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}u+\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v+\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u}\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u+\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v}\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}v\\
&= \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v-\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\\
&= \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v}\\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v}\end{pmatrix}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

最后的等号用到了约定(3). 同样计算得到

$$
\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1=\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
&V_1(x)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+V_2(x)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x+V_3(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\
&=\left(V_1\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}+V_2\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}+V_3\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

其中等式右边$V_i=V_i(x_1(u,v),x_2(u,v),x_3(u,v))$, $i=1,2,3$. 两边取积分, 则在S上关于$x=(x_1,x_2,x_3)$的二次微分形式的积分就转换成了D上关于(u,v)的二重积分, 即等式$(*)$成立.

牛顿-莱布尼兹公式的高维推广是本章要学习的**Stokes 公式**:

$$
\int_M \mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega \tag{$**$}
$$

其中M是$\mathbb{R}^n$中的一个紧的k维可定向流形$(1\le k\le n)$, ∂M 为M的边(包括$\partial M=\emptyset$的情形, 此时上式右边$=0$), ω是定义在一个包含M的开集上的光滑的$k-1$次微分形式.

作为Stokes 公式$(**)$的一个应用, 我们在再次联系流量问题. 取$k=n=3$, $S=\partial M$ 其中M 是同胚于三维球体的紧集(例如M是有内点的紧凸集), 从而$M,\partial M$皆可定向.设开集$\Omega\supset M$, $V_1,V_2,V_3\in C^1(\Omega)$, 并令

$$
\omega(x)=\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=V_1(x)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+V_2(x)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+V_3(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2,
$$

$x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$, 则ω是Ω上光滑的2次微分形式. 根据外微分d的运算法则(见下一节) 我们计算

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega(x)=\mathrm{d}(V_1(x)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3)+\mathrm{d}(V_2(x)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1)+\mathrm{d}(V_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)\\
&=\mathrm{d}V_1(x)\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\mathrm{d}V_2(x)\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\mathrm{d}V_3(x)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V_1(x)\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3 &= \Big(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\Big)\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3\\
&= \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3+\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3+\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3\\
&= \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3.
\end{aligned}
$$

同样计算得到

$$
\mathrm{d}V_2(x)\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1=\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,\qquad \mathrm{d}V_3(x)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2=\frac{\partial V_3(x)}{\partial x_3}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3.
$$

三式相加得到

$$
\mathrm{d}\omega(x)=\Big(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3(x)}{\partial x_3}\Big)\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3,\quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega.
$$

进一步令

$$
\mathrm{div}\mathbf{V}(x)=\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3(x)}{\partial x_3}
$$

它叫做向量场$\mathbf{V}(x)$的**散度**. 将这些代入Stokes 公式(∗∗) 得到

$$
\int_{\partial M}\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\int_M \mathrm{div}\mathbf{V}(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3.
$$

由于(x_1,x_2,x_3)是三维流形$M\subset\mathbb{R}^3$中的自变量, 故有$\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\mathrm{d}x$, 它就是三重积分的**测度元**. 于是上式可写成

$$
\int_{\partial M}\langle\mathbf{V}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\int_M \mathrm{div}\mathbf{V}(x)\mathrm{d}x
$$

它就是曲面积分中著名的**Gauss 散度定理** 或**Gauss 公式**.

§12.1. 微分形式和外微分运算

微分形式和外微分运算的严格建立需要学习交替张量和Grassmann代数, 详见陈天权《数学分析讲义》第三册.技术上的难点在于建立外积运算的结合律, 这正是Grassmann的伟大贡献. 囿于学时, 我们将**直接承认外积运算的结合律.**

【外积和微分形式】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集[1], $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega$, 其中分量$x_i$可以是自变量也可以是因变量, 设$\mathrm{d}x_i$ 为x_i的通常的一阶微分, 它是$\mathbb{R}^n$上的线性函数:

$$\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{\xi})=\xi_i\qquad \text{其中}\quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n.$$

对于$i,j,i_1,i_2,...,i_k\in\{1,2,...,n\}$, 定义一阶微分之间的外积$\wedge$为

$$\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j,\quad \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

它们是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$上和$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n$ (k个) 上的双线性函数和k-重线性函数:

$$\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\det\begin{pmatrix}\xi_{1i}&\xi_{2i}\\ \xi_{1j}&\xi_{2j}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_m=(\xi_{m1},\xi_{m2},...,\xi_{mn})^\tau\in\mathbb{R}^n,\ m=1,2.$$

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k)=\det\begin{pmatrix}\xi_{1i_1}&\xi_{2i_1}&\cdots&\xi_{ki_1}\\ \xi_{1i_2}&\xi_{2i_2}&\cdots&\xi_{ki_2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \xi_{1i_k}&\xi_{2i_k}&\cdots&\xi_{ki_k}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_m=(\xi_{m1},\xi_{m2},...,\xi_{mn})^\tau\in\mathbb{R}^n,\ m=1,2,...,k.$$

设$f(x),a_i(x),a_{ij}(x),a_{i_1i_2...i_k}(x)$都是$\Omega$上的数值函数, 称

$$\begin{aligned}\omega(x)&=f(x),\\ \omega(x)&=\sum_{i=1}^n a_i(x)\mathrm{d}x_i,\\ \omega(x)&=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j,\\ \omega(x)&=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2...i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\end{aligned}$$

分别为**Ω上的0次, 1次, 2次和k次微分形式**. **它们是线性空间上的映射**(尽管在计算

[1]**对Ω的这个开集要求主要是为了与后面定义外微分$\mathrm{d}\omega$时一致, 因为函数的偏导数一般只在这类开集上才好定义.**

时可以当做数来对待), **当次数≥ 1时, 它们作用到线性空间中的向量后的取值为**

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\xi_i,\quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(x)\det\begin{pmatrix}\xi_{1i}&\xi_{2i}\\ \xi_{1j}&\xi_{2j}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\xi}_m=(\xi_{m1},\xi_{m2},...,\xi_{mn})^\tau\in\mathbb{R}^n,\ m=1,2;$$

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k)=\sum_{1\leq i_1,i_2,\cdots,i_k\leq n}a_{i_1i_2...i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k)$$

$$=\sum_{1\leq i_1,i_2,\cdots,i_k\leq n}a_{i_1i_2...i_k}(x)\det\begin{pmatrix}\xi_{1i_1}&\xi_{2i_1}&\cdots&\xi_{ki_1}\\ \xi_{1i_2}&\xi_{2i_2}&\cdots&\xi_{ki_2}\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \xi_{1i_k}&\xi_{2i_k}&\cdots&\xi_{ki_k}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_m=(\xi_{m1},\xi_{m2},...,\xi_{mn})^\tau\in\mathbb{R}^n,\ m=1,2,...,k.$$

k次微分形式也简称为**k次形式** 或 **k-形式.**

外积$\wedge$ 的运算性质、微分形式、微分形式之间的外积$\wedge$ 运算的常用性质如下:

(i) **外积$\wedge$ 运算满足结合律:** [证明很长, 涉及张量等. 我们**直接承认这一事实**.]

$$(\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j)\wedge\mathrm{d}x_k=\mathrm{d}x_i\wedge(\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k)=:\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k.$$

(ii) **外积$\wedge$ 运算具有反交换性:** (由行列式性质导出)

$$\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=-\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i.\quad \text{特别对于}i=j\text{的情形有}\quad \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_i=0.$$

(iii) **微分形式最简表示的唯一性:** 设$1\leq k\leq n$, $\omega(x)$ 是Ω上的一个k次微分形式. 则$\omega(x)$ 可以被唯一地表示成

$$\omega(x)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}a_{i_1i_2...i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},\quad x\in\Omega.$$

称这一表示为k次微分形式ω的最简表示. 这里唯一性是指: 若等式

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}a_{i_1i_2...i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}b_{i_1i_2...i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

对所有$x \in \Omega$成立, 则必有$a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) = b_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)$ for all $x \in \Omega$ and for all $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. [这性质的证明不难.]

(iv) **微分形式的加法和数乘:** 设$f(x), g(x)$ 均为Ω上的数值函数,

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_k \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

$$\eta(x) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_k \le n} b_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

都是Ω上的k次微分形式, 则定义

$$f(x)\omega(x)+g(x)\eta(x) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_k \le n} \Big(f(x) a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) + g(x) b_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) \Big) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

它仍是Ω上的一个k次微分形式.

(v) **微分形式之间的外积:** 设$f(x), a(x), b(x)$ 为Ω上的数值函数,

$$\omega_p(x) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

$$\omega_q(x) = \sum_{1 \le j_1, j_2, \cdots, j_q \le n} b_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q},$$

分别是Ω上的p次和q次微分形式, $p, q \in \mathbb{N}$. 则定义

$$f(x) \wedge \omega_p(x) = f(x)\omega_p(x) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n} f(x) a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

$$a(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge b(x)\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$$

$$= a(x)b(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q},$$

$$(\omega_p \wedge \omega_q)(x) = \omega_p(x) \wedge \omega_q(x)$$

$$= \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n} \sum_{1 \le j_1, j_2, \cdots, j_q \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) b_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$$

它是Ω上的一个$p+q$次微分形式.

(vi) **加法+与外积$\wedge$的分配律:** 设$\omega_p(x), \eta_p(x)$都是Ω上的p次微分形式, $\zeta_q(x)$是Ω上的q次微分形式. 则有

$$(\omega_p(x) + \eta_p(x)) \wedge \zeta_q(x) = \omega_p(x) \wedge \zeta_q(x) + \eta_p(x) \wedge \zeta_q(x),$$

$$\zeta_q(x) \wedge (\omega_p(x) + \eta_p(x)) = \zeta_q(x) \wedge \omega_p(x) + \zeta_q(x) \wedge \eta_p(x).$$

$\square$

【注】1. 把$\wedge$叫做外积是为了区别于内积$\cdot$. 外积与向量的向量积$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$有一个共同点, 即反交换性: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. 有些书中也把向量的向量积叫做向量的外积.

2. 由上述定义易见外积$\wedge$ 运算满足结合律:

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\zeta=\omega\wedge(\eta\wedge\zeta)=:\omega\wedge\eta\wedge\zeta.$$

两个微分形式的外积$\wedge$ 具有带符号的交换性: 若ω_p,ω_q 分别是p-形式和q-形式, 则有

$$\omega_p\wedge\omega_q=(-1)^{pq}\omega_q\wedge\omega_p.$$

3. 由外积$\wedge$ 运算的结合律和反交换性易见：若$\Omega\subset\mathbb{R}^n$上的微分形式$\omega(x)$ 的次数$k>n$, 则必有$\omega(x)\equiv 0, x\in\Omega$. 因此在研究中只需考虑次数$\le n$的微分形式.

【外微分算子d】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集, $r\ge 1$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$为C^r类函数, 即f 是一个C^r类的零次微分形式. 定义f的外微分$\mathrm{d}f(x)$ 为通常的函数的全微分:

$$\mathrm{d}f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i,\quad x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega.$$

它是Ω上的一个C^{r-1}类的1次微分形式.

设ω 是Ω上的一个C^r类的k次微分形式, 即

$$\omega(x)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2\dots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},\quad x\in\Omega$$

其中所有$a_{i_1i_2\dots i_k}$都是Ω上的C^r类函数. 定义ω的外微分$\mathrm{d}\omega(x)$ 为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(x) &= \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}\mathrm{d}a_{i_1i_2\dots i_k}(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\ &= \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1i_2\dots i_k}(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},\quad x\in\Omega.\end{aligned}$$

它是Ω上的一个C^{r-1}类的$k+1$次微分形式. $\square$

如上所说, 当Ω上光滑的k次微分形式ω满足$k\ge n$时, $\mathrm{d}\omega$是Ω上的一个$k+1\ge n+1$次微分形式, 因此$\mathrm{d}\omega=0$于Ω. 这表明, 我们只需考虑次数$\le n-1$的光滑微分形式的外微分.

在给出外微分算子d的运算性质前, 先看d的几个典型计算例子. 以下n, k 分别表示微分形式ω的定义域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$所在空间的维数和$\omega$的次数, 总假定$\omega$是$C^r$类的, $r \geq 1$. 当用到二阶偏导数时, 自动假定$r \geq 2$.

1. $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
&k = 1: \quad \omega(x) = f(x)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\omega(x) = f'(x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0, \\
&k = 0: \quad \omega(x) = g(x), \quad \mathrm{d}\omega(x) = g'(x)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}^2\omega(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)(x) = 0.
\end{aligned}
$$

2. $n = 2$:

$$
k = 1: \quad \omega(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y,
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \Big(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\Big) \wedge \mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\Big) \wedge \mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \\
&= \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

3. $n = 3$:

$$
k = 1: \quad \omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z,
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \Big(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\Big) \wedge \mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\Big) \wedge \mathrm{d}y \\
&+ \Big(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\Big) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&+ \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \\
&+ \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

这是常用的微分形式的计算公式. 为便于记忆, 人们使用行列式:

对于1次形式 $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$

有 $\mathrm{d}\omega(x,y,z)=\det\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{pmatrix}$ 按第一行展开.

$$k=2:\quad \omega(x,y,z)=P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \Big(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\ &+ \Big(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \qquad (\text{有两个相同d}*\text{者为零})\\ &= \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \qquad (\text{做两次相邻交换})\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

4. $n\geq 2$:

$$k=1:\quad \omega(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\mathrm{d}x_i,$$

$$\mathrm{d}\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i=\sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\Big)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j,$$

$$k=0:\quad \omega(x)=f(x),\quad \mathrm{d}\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i,$$

$$\mathrm{d}^2\omega(x)=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)(x)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\Big)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=0.$$

这里用到性质 $f\in C^2(\Omega)\Longrightarrow\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}$.

5. $n\geq 2, k=n-1$:

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i(x)\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n,\quad x\in\Omega$$

这里“$\widehat{\mathrm{d}x_i}$”表示“去掉$\mathrm{d}x_i$ 这一项”. 此时由外积的反交换性有

$$\text{当}j=i\text{时}\quad \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=(-1)^{i-1}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\quad (\text{补全第}i\text{项}),$$

$$\text{当}j\neq i\text{时}\quad \mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=0.$$

于是得到

$$\mathrm{d}\omega(x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge \mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}\Big)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n. \qquad\Box
\end{aligned}
$$

【定理12.1(外微分算子d的基本性质)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集, ω,η 为Ω上的C^r 类的微分形式($r\geq 1$). 则外微分算子d具有如下性质(以下所有等式都是关于$x\in\Omega$的恒等式):

(a). d是线性的:

$$\mathrm{d}(\omega+\eta)=\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}\eta,\quad \mathrm{d}(c\omega)=c\mathrm{d}\omega$$

其中ω,η的次数相同, c为常数.

(b). 设ω是p次形式, η是q次形式. 则有

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\eta.$$

(c). 若ω 为C^r 类的形式且$r\geq 2$, 则有

$$\mathrm{d}^2\omega=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0.$$

【证】(a)是显然的.

(b): 先设ω,η都是单项式:

$$\omega(x)=f(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},\quad \eta(x)=g(x)\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}.$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\omega(x)\wedge\eta(x)=f(x)g(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},\\
&\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)(x)=\mathrm{d}(fg)(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=\Big(g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)\Big)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=g(x)\mathrm{d}f(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&+f(x)\mathrm{d}g(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}.
\end{aligned}
$$

对上式右端第一项, 由微分形式之间的外积的定义有

$$
\begin{aligned}
&g(x)\mathrm{d}f(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=\mathrm{d}f(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge g(x)\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=(\mathrm{d}\omega)(x)\wedge\eta(x).
\end{aligned}
$$

对上式右端第二项有

$$
\begin{aligned}
&f(x)\mathrm{d}g(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}.\\
&=f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}.
\end{aligned}
$$

作p次相邻外积的交换有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=(-1)^p\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}.\\
&=(-1)^p\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=(-1)^p\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=(-1)^pf(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=(-1)^pf(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}g(x)\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\\
&=(-1)^p\omega(x)\wedge\mathrm{d}\eta(x).
\end{aligned}
$$

所以此时有

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)(x)=(\mathrm{d}\omega)(x)\wedge\eta(x)+(-1)^p\omega(x)\wedge\mathrm{d}\eta(x).$$

对一般情形, 写

$$\omega(x)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n}a_{i_1i_2\dots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n}\omega_{i_1i_2\dots i_p}(x),$$

$$\eta(x)=\sum_{1\le j_1,j_2,\cdots,j_q\le n}b_{j_1j_2\dots j_q}(x)\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}=\sum_{1\le j_1,j_2,\cdots,j_q\le n}\eta_{j_1j_2\dots j_q}(x),$$

则有

$$(\omega\wedge\eta)(x)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n}\ \sum_{1\le j_1,j_2,\cdots,j_q\le n}\omega_{i_1i_2\dots i_p}(x)\wedge\eta_{j_1j_2\dots j_q}(x)$$

从而有d的线性性和上面的结果有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)(x)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n}\ \sum_{1\le j_1,j_2,\cdots,j_q\le n}\mathrm{d}(\omega_{i_1i_2\ldots i_p}\wedge\eta_{j_1j_2\ldots j_q})(x)\\
&=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n}\ \sum_{1\le j_1,j_2,\cdots,j_q\le n}\Big((\mathrm{d}\omega_{i_1i_2\ldots i_p})(x)\wedge\eta_{j_1j_2\ldots j_q}(x)+(-1)^p\omega_{i_1i_2\ldots i_p}(x)\wedge\mathrm{d}\eta_{j_1j_2\ldots j_q}(x)\Big)\\
&=\Big(\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n}(\mathrm{d}\omega_{i_1i_2\ldots i_p})(x)\Big)\wedge\Big(\sum_{1\le j_1,j_2,\cdots,j_q\le n}\eta_{j_1j_2\ldots j_q}(x)\Big)\\
&+(-1)^p\Big(\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n}\omega_{i_1i_2\ldots i_p}(x)\Big)\wedge\Big(\sum_{1\le j_1,j_2,\cdots,j_q\le n}\mathrm{d}\eta_{j_1j_2\ldots j_q}(x)\Big)\\
&=(\mathrm{d}\omega)(x)\wedge\eta(x)+(-1)^p\omega(x)\wedge\mathrm{d}\eta(x).
\end{aligned}
$$

(c): 若$\omega(x)=f(x)$是零次形式, 则我们在上面外积运算的演示中已证明了$\mathrm{d}^2\omega=0$ 即此时有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega(x)=\mathrm{d}f(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i,\\
&\mathrm{d}^2\omega(x)=\mathrm{d}^2f(x)=\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\Big)\wedge\mathrm{d}x_i\\
&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i=\sum_{1\le i<j\le n}\Big(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\Big)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=0.
\end{aligned}
$$

设ω是$k\ge 1$次形式. 先设ω是单项式:

$$\omega(x)=f(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}.$$

则由外微分运算的定义有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega(x)=\mathrm{d}f(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},\\
&\mathrm{d}^2\omega(x)=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)(x)=\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\
&=0\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=0
\end{aligned}
$$

后者用到零次形式的结果: $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)=\mathrm{d}^2f(x)\equiv 0$.

对一般情形, 写

$$\omega(x)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2\ldots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}\omega_{i_1i_2\ldots i_k}(x)$$

则由d的线性性和单项式的结果有

$$\mathrm{d}^2\omega(x)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}\mathrm{d}^2\omega_{i_1i_2\ldots i_k}(x)=0.\qquad\Box$$

• **拉回(pull-back)**

【定义(拉回映射)】设$1 \le k \le n, D \subset \mathbb{R}^k$是$\mathbb{R}^k$的或$\mathbb{H}^k$的开集, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)^\tau : D \to \Omega$为光滑映射. 设$\omega$是$\Omega$上的$p$次微分形式. 定义映射$\omega \mapsto \varphi^*\omega$ 如下:

当$p = 0$时, 即$\omega(x) = f(x)$为Ω上的数值函数, 定义新的零次形式

$$\varphi^* f(t) = f \circ \varphi(t) = f(\varphi(t)), \qquad t = (t_1, t_2, ..., t_k) \in D\,.$$

当$1 \le p \le k$时, 对任意$i_1, i_2, ..., i_p \in \{1, 2, ..., n\}$, 经代换$x = \varphi(t), t \in D$, 而定义

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p})(t) &= \mathrm{d}\varphi_{i_1}(t) \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_2}(t) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_p}(t) \\ &= \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le k} \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_p})}{\partial(t_{j_1}, t_{j_2}, ..., t_{j_p})}(t) \mathrm{d}t_{j_1} \wedge \mathrm{d}t_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{j_p}.\end{aligned}$$

上面第二个等号的证明留为习题. 见本节作业题6. 这里和今后规定:

$$\text{当}p > k\text{时} \qquad \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le k} \{\cdots\} \equiv 0.$$

由此, 对于一般的p-形式

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

通过代换$x = \varphi(t)$ 我们定义

$$\varphi^*\omega(t) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(\varphi(t)) \mathrm{d}\varphi_{i_1}(t) \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_2}(t) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_p}(t)$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le k} \left(\sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(\varphi(t)) \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_p})}{\partial(t_{j_1}, t_{j_2}, ..., t_{j_p})}(t) \right) \mathrm{d}t_{j_1} \wedge \mathrm{d}t_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{j_p}$$

$t \in D$. 称映射$\omega \mapsto \varphi^*\omega$为拉回映射. (意指: φ^*把Ω上的微分形式ω拉回到参数域D 上的微分形式$\varphi^*\omega$.). □

上述定义也可以等价地直接通过微分形式的多重线性函数表示给出.我们以最常用的情形$p = k$为例说明这一点. 我们有

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., \boldsymbol{\xi}_k) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_k \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) \det \begin{pmatrix} \xi_{1i_1} & \xi_{2i_1} & \cdots & \xi_{ki_1} \\ \xi_{1i_2} & \xi_{2i_2} & \cdots & \xi_{ki_2} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \xi_{1i_k} & \xi_{2i_k} & \cdots & \xi_{ki_k} \end{pmatrix}$$

$x\in\Omega$, $\boldsymbol{\xi}_m=(\xi_{m1},\xi_{m2},...,\xi_{mn})^\tau\in\mathbb{R}^n, m=1,2,...,k.$ 做代换

$$x=\varphi(t),\quad \boldsymbol{\xi}_m=\varphi'(t)\boldsymbol{h}_m=\Big(\sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_j}h_{mj},\sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_j}h_{mj},\cdots,\sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_n(t)}{\partial t_j}h_{mj}\Big)^\tau$$

$\boldsymbol{h}_m=(h_{m1},h_{m2},...,h_{mk})^\tau\in\mathbb{R}^k, m=1,2,...,k.$ 则有

$$\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,...,\boldsymbol{h}_k):=\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\boldsymbol{h}_1,\varphi'(t)\boldsymbol{h}_2,...,\varphi'(t)\boldsymbol{h}_k)$$

$$=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))\det\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_1}(t)}{\partial t_j}h_{1j} & \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_1}(t)}{\partial t_j}h_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_1}(t)}{\partial t_j}h_{kj}\\ \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_2}(t)}{\partial t_j}h_{1j} & \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_2}(t)}{\partial t_j}h_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_2}(t)}{\partial t_j}h_{kj}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_k}(t)}{\partial t_j}h_{1j} & \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_k}(t)}{\partial t_j}h_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_k}(t)}{\partial t_j}h_{kj}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))\det\left(\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_{i_1}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_{i_1}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{i_1}(t)}{\partial t_k}\\ \frac{\partial\varphi_{i_2}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_{i_2}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{i_2}(t)}{\partial t_k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\varphi_{i_k}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_{i_k}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{i_k}(t)}{\partial t_k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{k1}\\ h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{k2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ h_{1k} & h_{2k} & \cdots & h_{kk}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_p})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\det\begin{pmatrix}h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{k1}\\ h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{k2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ h_{1k} & h_{2k} & \cdots & h_{kk}\end{pmatrix}.\quad(1.1)$$

再代入外积的定义有

$$\det\begin{pmatrix}h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{k1}\\ h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{k2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ h_{1k} & h_{2k} & \cdots & h_{kk}\end{pmatrix}=\mathrm{d}t_1\wedge\mathrm{d}t_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,...,\boldsymbol{h}_k)$$

这就对$p=k$的情形得到

$$\begin{aligned}&\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,...,\boldsymbol{h}_k)\\&=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t_1\wedge\mathrm{d}t_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,...,\boldsymbol{h}_k).\end{aligned}$$

因对每个$t\in D$, 这等式对所有$(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,...,\boldsymbol{h}_k)\in(\mathbb{R}^n)^k$ 成立, 故得到函数关系的等式:

$$\varphi^*\omega(t)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t_1\wedge\mathrm{d}t_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k.\quad(1.2)$$

进一步分析: $p=k$的情形直接联系到k次微分形式在k维光滑曲面(流形)上的积分. 在这种情况下, 拉回的定义是说, 如果x在位于Ω内的一个光滑的k维曲面(流形) S上运动, $x=\varphi(t)\,(t\in D)$是S的一个光滑的局部图, 则可以把k次形式$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k)$ 中的向量$\boldsymbol{\xi}_i$取成在点$x=\varphi(t)$处的切向量$\boldsymbol{\xi}_i=\varphi'(t)\boldsymbol{h}_i, i=1,2,...,k$. 也就是说, 研究微分形式$\omega$在抽象曲面$S$上的行为可以等效地转化为研究$\omega$在曲面的局部图的参数域上的行为. 例如取$\boldsymbol{h}_i=\mathbf{e}_i$, 即

$$\boldsymbol{\xi}_i=\varphi'(t)\mathbf{e}_i=\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_i},\quad i=1,2,...,k$$

其中$\mathbf{e}_1=(1,0,...,0)^\tau,\mathbf{e}_k=(0,1,0...,0)^\tau,...,\mathbf{e}_k=(0,...,0,1)^\tau\in\mathbb{R}^k$. 则有 (注意此时上面(1.1)中关于$\boldsymbol{h}_i=\mathbf{e}_i$的行列式等于单位矩阵的行列式等于1)

$$\begin{aligned}\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\mathbf{e}_1,\varphi'(t)\mathbf{e}_2,...,\varphi'(t)\mathbf{e}_k) &= \omega(\varphi(t))\Big(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1},\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2},\,...,\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\Big)\\ &= \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n} a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t).\end{aligned}$$

在建立k次微分形式$\omega(x)$在k维曲面S上的积分时(借助Riemann 和), 切向量$\boldsymbol{\xi}_i=\varphi'(t)\boldsymbol{h}_i$将取成切向量$\varphi'(t)\mathbf{e}_i$的小倍数, 即取成

$$\boldsymbol{\xi}_i=\varphi'(t)\mathbf{e}_i\Delta t_i,\quad i=1,2,...,k$$

其中$\Delta t_i>0$是数值小量. 这时结合$\Delta t_i=1$的情形有 (注意$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k)$ 关于每个$\boldsymbol{\xi}_i$都是线性的!)

$$\begin{aligned}&\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\mathbf{e}_1\Delta t_1,\,\varphi'(t)\mathbf{e}_2\Delta t_2,\,...,\,\varphi'(t)\mathbf{e}_k\Delta t_k)\\ &=\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\mathbf{e}_1,\varphi'(t)\mathbf{e}_2,...,\varphi'(t)\mathbf{e}_k)\Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_k\\ &=\omega(\varphi(t))\Big(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1},\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2},\,...,\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\Big)\Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_k\\ &=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n} a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_k.\end{aligned}$$

从Riemann 和的角度看, 上式右边是相应的函数在D上确立积分时的Riemann 和式中的一般项. 对这Riemann 和取极限, 也即将$\Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_k$换成测度元$\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k$ 并取积分, 则得到微分形式ω在S上的积分的定义和计算公式:

$$\int_S\omega(x):=\int_D\varphi^*\omega(t)=\int_D\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n} a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k.$$

当然这里假定φ 是S的参数整体表示, 即$S = \varphi(D)$. 比较一下(1.2) 我们看到, 此刻我们在积分时把外积$\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k$ 换成了测度元$\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k$. 这是因为我们在对拉回$\varphi^*\omega(t)$作积分时, 是沿着每个切向量$\varphi'(t)\mathbf{e}_i$的正方向作的积分, 也即在Riemann 和中, 我们使用了切向量$\varphi'(t)\mathbf{e}_i\Delta t_i$ 其中$\Delta t_i > 0\,(i = 1, 2, ..., k)$. 这种取法是由问题的要求决定的: 切向量(的方向)的这种取法对应于$\omega(x)$沿着定向曲面S的一个指定的方向的积分 (例如积分是“从S的下方到S的上方”或对于封闭曲面积分是“从S里面到S的外面”等等）.如果这种取法不对应$\omega(x)$的定向积分$\int_S \omega(x)$, 则它一定对应于$-\omega(x)$的定向积分$\int_S -\omega(x) = -\int_S \omega(x)$. 因此我们总可使用正方向的切向量$\varphi'(t)\mathbf{e}_i\Delta t_i$, $\Delta t_i > 0\,(i = 1, 2, ..., k)$. 进一步我们还看到, 对于$\boldsymbol{h}_i = \mathbf{e}_i\Delta t_i$ 有

$$\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k(\mathbf{e}_1\Delta t_1, \mathbf{e}_2\Delta t_2, \cdots, \mathbf{e}_k\Delta t_k) = \Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_k > 0.$$

因此对于t的区域D上的任意函数$f(t)$ (假定可积) 就直接规定

$$\int_D f(t)\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k := \int_D f(t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k \tag{1.3}$$

其中右边$\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k$是Lebesgue 测度元.

从上面分析我们看到了拉回映射的重要作用. 它在直观操作上就是把抽象曲面上的点x作变量代换$x = \varphi(t)$化成参数域D中的点t. 正如卓里奇书中说的那样“曲面上的形式及其演算, 归根到底是在局部图的参数域上给出的”(第二卷p.187).

下面命题是拉回映射的基本性质.

【命题12.2.】 设$1 \le k \le n, D \subset \mathbb{R}^k, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为拉回映射定义中的集合, $\varphi : D \to \Omega$是光滑映射. 则

(a) $\omega \mapsto \varphi^*\omega$ 是线性的: 若$\omega_1, \omega_2, \omega$都是$\Omega$上的微分形式且$\omega_1, \omega_2$的次数相同, 则

$$\varphi^*(\omega_1 + \omega_2)(t) = \varphi^*\omega_1(t) + \varphi^*\omega_2(t)\,, \qquad t \in D,$$

$$\varphi^*(c\,\omega)(t) = c\,\varphi^*\omega(t)\,, \quad c = \text{const.}, \qquad t \in D.$$

(b) 若ω, η是Ω上的微分形式,则

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta)(t) = \varphi^*\omega(t) \wedge \varphi^*\eta(t), \qquad t \in D.$$

(c) 若φ 属于C^2类, ω是Ω上的光滑的微分形式, 则有$\mathrm{d}\varphi^*\omega = \varphi^*(\mathrm{d}\omega)$, 即

$$\mathrm{d}\varphi^*\omega(t) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega)(t), \qquad t \in D.$$

(**d**) 若$\psi : U \subset \mathbb{R}^k \to D$也是光滑的, 则有$(\varphi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\varphi^*$, 即对于$\Omega$上的任意微分形式$\omega$ 有

$$(\varphi\circ\psi)^*\omega(t) = \psi^*(\varphi^*\omega)(t)\,, \quad t\in U.$$

【证】(a) 是显然的, (b),(d)留为作业. 下证(c): 先设$\omega = f$ 是零次形式. 来证明

$$\mathrm{d}\varphi^* f(t) = \varphi^*(\mathrm{d}f)(t)\,.$$

这实际上是通常的一阶微分的形式不变性, 即

$$\mathrm{d}(f(\varphi(t))) = (\mathrm{d}f)(\varphi(t)).$$

事实上我们有

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\,, \quad \mathrm{d}\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_j}\mathrm{d}t_j$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\varphi^* f)(t) = \mathrm{d}(f(\varphi(t))) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial t_j}(f(\varphi(t))\mathrm{d}t_j = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\varphi(t))\frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_j}\right)\mathrm{d}t_j\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\varphi(t))\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_j}\mathrm{d}t_j = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi_i(t)\\
&= (\mathrm{d}f)(x)\Big|_{x=\varphi(t)} = (\mathrm{d}f)(\varphi(t)) = \varphi^*(\mathrm{d}f)(t).
\end{aligned}$$

设$p\ge 1$. 先设ω是p次单项式, 即对于$i_1, i_2, ..., i_p\in\{1,2,...,n\}$, 有

$$\omega(x) = a(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

其中$a(x)$是光滑函数. 此时有

$$\varphi^*\omega(t) = a(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi_{i_1}(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_2}(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}(t).$$

由外微分运算法则, φ属于C^2类以及$\mathrm{d}^2 = 0$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\varphi^*\omega(t) = \mathrm{d}\Big(a(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi_{i_1}(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_2}(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}(t)\Big)\\
&= \mathrm{d}(a(\varphi(t))\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_1}(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_2}(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}(t) + a(\varphi(t))\mathrm{d}\Big(\mathrm{d}\varphi_{i_1}(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_2}(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}(t)\Big)\\
&= \mathrm{d}(a(\varphi(t))\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_1}(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_2}(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}(t)\\
&= (\mathrm{d}a)(\varphi(t))\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_1}(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_2}(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_p}(t)\\
&= \varphi^*(\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})(t) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega)(t).
\end{aligned}$$

对于一般情形

$$\omega(x)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n} a_{i_1i_2\dots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

由φ^*的线性性和单项式的结果即知$\mathrm{d}\varphi^*\omega(t)=\varphi^*(\mathrm{d}\omega)(t)$也成立. $\square$

为了了解微分形式的特性也为了作业题中和后面的需要, 我们学习两个命题.

【命题12.3】设$1\le k\le n$, $a_{ij}(x)$为数值函数, $i=1,2,...,k, j=1,2,...,n$. 则有

$$\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}(x)\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^n a_{2j}(x)\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(\sum_{j=1}^n a_{kj}(x)\mathrm{d}x_j\Big)$$

$$=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\det\begin{pmatrix} a_{1i_1}(x) & a_{2i_1}(x) & \cdots & a_{ki_1}(x)\\ a_{1i_2}(x) & a_{2i_2}(x) & \cdots & a_{ki_2}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1i_k}(x) & a_{2i_k}(x) & \cdots & a_{ki_k}(x)\end{pmatrix}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}.$$

特别当$k=n-1$时有

$$\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}(x)\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^n a_{2j}(x)\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(\sum_{j=1}^n a_{(n-1)j}(x)\mathrm{d}x_j\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^n\det\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{21}(x) & \cdots & a_{n-11}(x)\\ a_{12}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{(n-1)2}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n}(x) & a_{2n}(x) & \cdots & a_{(n-1)n}(x)\end{pmatrix}_{\text{去掉第}i\text{行}}\mathrm{d}x_1\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n.$$

这里$\widehat{\mathrm{d}x_i}$ 表示在$\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,...,\mathrm{d}x_n$的顺序外积中去掉$\mathrm{d}x_i$ 这一项.

【证】简记$a_{ij}=a_{ij}(x)$. 对任一组$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, 令$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 的排列的全体为

$$\mathrm{P}_{i_1,i_2,...,i_k}=\{(j_1,j_2,...,j_k)\mid\{j_1,j_2,...,j_k\}=\{i_1,i_2,...,i_k\}\}$$

并令S_k是一一对应$\sigma:\{1,2,...,k\}\to\{1,2,...,k\}$的全体(也即$\mathrm{S}_k$是$k$!阶置换群). 则易见映射$\sigma\mapsto(i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},...,i_{\sigma(k)})$ 是S_k到$\mathrm{P}_{i_1,i_2,...,i_k}$的一一对应.因此

$$\mathrm{P}_{i_1,i_2,...,i_k}=\left\{(i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},...,i_{\sigma(k)})\mid\sigma\in\mathrm{S}_k\right\}.$$

由外积$\wedge$的性质(结合律、反交换律等)我们计算

$$\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^n a_{2j}\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(\sum_{j=1}^n a_{kj}\mathrm{d}x_j\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} a_{1j_1}a_{1j_2}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge \mathrm{d}x_{j_2}\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{3j}\mathrm{d}x_j\Big)\cdots\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\mathrm{d}x_j\Big)\\
&= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n} a_{1j_1}a_{1j_2}\cdots a_{kj_k}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge \mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{j_k}\\
&= \sum_{j_1,j_2,\dots,j_k\in\{1,2,\dots,n\}\ \text{互不相同}} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge \mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{j_k}\\
&= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left(\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_k)\in \mathrm{P}_{i_1i_2\dots i_k}} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge \mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{j_k}\right)\\
&= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left(\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_k} a_{1i_{\sigma(1)}}a_{2i_{\sigma(2)}}\cdots a_{ki_{\sigma(k)}}\mathrm{d}x_{i_{\sigma(1)}}\wedge \mathrm{d}x_{i_{\sigma(2)}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_{\sigma(k)}}\right)\\
&= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left(\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)a_{1i_{\sigma(1)}}a_{2i_{\sigma(2)}}\cdots a_{ki_{\sigma(k)}}\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}
\end{aligned}
$$

其中用到$\wedge$的反交换律, 它给出

$$\mathrm{d}x_{i_{\sigma(1)}}\wedge \mathrm{d}x_{i_{\sigma(2)}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_{\sigma(k)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

其中$\mathrm{sgn}(\sigma)$是σ的符号, 即$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^s$, 其中$s$是$(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(k))$通过施行相邻对换化成$(1,2,..,n)$时使用的相邻对换的次数. 【因此若$s$为偶数, 则$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$; 若$s$为奇数, 则$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$.】

而由行列式的定义知

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1i_{\sigma(1)}}a_{2i_{\sigma(2)}}\cdots a_{ki_{\sigma(k)}} = \det\begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{2i_1} & \cdots & a_{ki_1}\\ a_{1i_2} & a_{2i_2} & \cdots & a_{ki_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1i_k} & a_{2i_k} & \cdots & a_{ki_k}\end{pmatrix}.$$

代入上式即得

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\mathrm{d}x_j\Big)\\
&= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\det\begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{2i_1} & \cdots & a_{ki_1}\\ a_{1i_2} & a_{2i_2} & \cdots & a_{ki_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1i_k} & a_{2i_k} & \cdots & a_{ki_k}\end{pmatrix}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}.
\end{aligned}
$$

□

【例】设$k\geq 2, D\subset\mathbb{R}^k$ 为$\mathbb{R}^k$的开集或$\mathbb{H}^k$的开集, $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{k-1}$ 为D 上的光滑函数. 则当$t\in D$时有

$$\mathrm{d}\varphi_1(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_2(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{k-1}(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{k-1})}{\partial(t_1,...,\widehat{t_j},...,t_k)}(t)\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k.$$

这里

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{k-1})}{\partial(t_1,...,\widehat{t_j},...,t_k)}(t)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_k}\\ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_k}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial\varphi_{k-1}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_{k-1}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{k-1}(t)}{\partial t_k}\end{pmatrix}_{\text{去掉第}j\text{列}}$$

$\widehat{t_j},\widehat{\mathrm{d}t_j}$等表示在相关的一串顺序排列中去掉$t_j,\mathrm{d}t_j$. □

【命题12.4(矩阵形式的勾股定理)】设$1\leq k\leq n$, $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_k)\in\mathbb{R}^{n\times k}$ 其中$\mathbf{a}_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})^\tau\in\mathbb{R}^n, i=1,2,...,k$. 则有

$$\det(A^\tau A)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\Big(\det A_{i_1i_2...i_k}\Big)^2$$

其中$A_{i_1i_2...i_k}\in\mathbb{R}^{k\times k}$是从$A$中保留第$i_1,i_2,...,i_k$ 行、删去其它行后, 构成的方阵, 即

$$A_{i_1i_2...i_k}=\begin{pmatrix}a_{1i_1} & a_{2i_1} & \cdots & a_{ki_1}\\ a_{1i_2} & a_{2i_2} & \cdots & a_{ki_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1i_k} & a_{2i_k} & \cdots & a_{ki_k}\end{pmatrix}.$$

【证】(参见陈天权《数学分析讲义》第三册命题16.3.2.) 当$k=1$或$k=n$时, 等式显然成立. 设$1<k<n$. 考虑

$$F(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,...,\mathbf{b}_k)=F(B)=\det(A^\tau B),$$
$$H(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,...,\mathbf{b}_k)=H(B)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\det A_{i_1i_2...i_k}\det B_{i_1i_2...i_k}$$

其中

$$\mathbf{b}_i=(b_{i1},b_{i2},...,b_{in})^\tau\in\mathbb{R}^n,\quad i=1,2,...,k$$

$B_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathbb{R}^{k\times k}$是从$B$中保留第$i_1, i_2, ..., i_k$ 行、删去其它行后, 构成的方阵，即

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \begin{pmatrix} b_{1i_1} & b_{2i_1} & \cdots & b_{ki_1} \\ b_{1i_2} & b_{2i_2} & \cdots & b_{ki_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1i_k} & b_{2i_k} & \cdots & b_{ki_k} \end{pmatrix}.$$

为证本命题, 只需证明

$$F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k) = H(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k) \quad \forall (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k) \in (\mathbb{R}^n)^k.$$

首先易见

$$F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k) = \det(A^\tau B) = \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_k\rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_k\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1\rangle & \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k\rangle \end{pmatrix}.$$

因此F是$(\mathbb{R}^n)^k$上的斜对称的k重线性函数, 这里斜对称指当$i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ 且$i \neq j$时$F(..., \mathbf{b}_i, ..., \mathbf{b}_j, ...) = -F(..., \mathbf{b}_j, ..., \mathbf{b}_i, ...)$. 这特别蕴含：当$i \neq j$ 而$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_j$时 $F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k) = 0$. 同理由行列式性质知$H$也是$(\mathbb{R}^n)^k$上的斜对称的$k$重线性函数.

设$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$是$\mathbb{R}^n$的通常的标准正交基, 即$\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in})^\tau$ 其中$\delta_{ij} = 1$当$i = j$; $\delta_{ij} = 0$当$i \neq j$. 则可写$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}\mathbf{e}_j, i = 1, 2, ..., k$ 从而由F的重线性有

$$\begin{aligned} F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k) &= F\Big(\sum_{j=1}^n b_{1j}\mathbf{e}_j,\ \sum_{j=1}^n b_{2j}\mathbf{e}_j,\ ...,\ \sum_{j=1}^n b_{kj}\mathbf{e}_j\Big) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{kj_k} F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}). \end{aligned}$$

同理有

$$H(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{kj_k} H(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}).$$

为证$F = H$, 只需证明

$$F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = H(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}).$$

当$j_1, j_2, ..., j_k$ 中有两个相同时, 据F, H的斜对称性知$F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = 0 = H(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k})$.

设$j_1, j_2, ..., j_k$ 互不相同. 先设$(1 \le) j_1 < j_2 < \cdots < j_k (\le n)$. 下面取矩阵

$$B = (\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}).$$

则对任意一组$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ 有

$$B_{i_1 i_2 \dots i_k} = \begin{pmatrix} \delta_{j_1 i_1} & \delta_{j_2 i_1} & \cdots & \delta_{j_k i_1} \\ \delta_{j_1 i_2} & \delta_{j_2 i_2} & \cdots & \delta_{j_k i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{j_1 i_k} & \delta_{j_2 i_k} & \cdots & \delta_{j_k i_k} \end{pmatrix}.$$

若$(i_1, i_2, ..., i_k) \neq (j_1, j_2, ..., j_k)$, 则当$i_1 \neq j_1$ 时方阵$B_{i_1 i_2 \dots i_k}$中的第一行全为0(当$i_1 < j_1$时)或第一列全为0 (当$j_1 < i_1$时) 从而有$\det B_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$. 设$i_1 = j_1$. 此时$\det B_{i_1 i_2 \dots i_k}$等于一个$(k-1) \times (k-1)$方阵的行列式. 然后讨论$i_2, j_2$ 是否相等.用归纳法即知总有$\det B_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$. 于是得到

$$H(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = \det A_{j_1 j_2 \dots j_k} \det B_{j_1 j_2 \dots j_k} = \det A_{j_1 j_2 \dots j_k}, \quad B = (\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k})$$

这里用到$B_{j_1 j_2 \dots j_k} = \mathrm{I}_{k \times k}$ (单位阵). 而再由$B = (\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k})$的取法易见也有

$$F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = \det(A^\tau B) = \det A_{j_1 j_2 \dots j_k}.$$

所以当$j_1 < j_2 < \cdots < j_k$时有$F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = H(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k})$. 对一般情形, 由斜对称性知存在$s \in \mathbb{N}$ 使得

$$F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = (-1)^s F(\mathbf{e}_{l_1}, \mathbf{e}_{l_2}, ..., \mathbf{e}_{l_k}), \quad H(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = (-1)^s H(\mathbf{e}_{l_1}, \mathbf{e}_{l_2}, ..., \mathbf{e}_{l_k})$$

其中$l_1 < l_2 < \cdots < l_k$, $\{l_1, l_2, ..., l_k\} = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$. 于是由已证的结果知此时仍有$F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k}) = H(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_k})$. 命题证毕. □

【例】设$\le k \le n, D \subset \mathbb{R}^k, \varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. 对任意一组$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 令

$$\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, t_2, ..., t_k)}(t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_{i_1}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_1}(t)}{\partial t_k} \\ \frac{\partial \varphi_{i_2}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_{i_2}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_2}(t)}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_{i_k}(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_k}(t)}{\partial t_k} \end{pmatrix}.$$

则由**命题12.4** 知

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, t_2, ..., t_k)}(t) \right)^2 = \det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t)), \quad t \in D.$$

特别对每一组$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$都有

$$\left| \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, t_2, ..., t_k)}(t) \right| \le \sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t))}, \quad t \in D. \qquad \square$$

作业

1. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$的或$\mathbb{H}^3$的开集, $f = f(x,y,z), g = g(x,y,z), h = h(x,y,z), P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ 为Ω上的实值函数.

(1) 对于Ω上的微分形式 $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z, \eta = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 证明

$$\omega \wedge \eta = \det \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ f & g & h \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$$

(2) 对于Ω上的微分形式$\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z, \eta = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 证明

$$\omega \wedge \eta = (fP + gQ + hR)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

2. $n \ge 2, \Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集, $u \in C^2(\Omega)$为调和函数.令

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n, \quad x \in \Omega.$$

证明$\mathrm{d}\omega = 0$于Ω.

3. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集, ω, η, ζ分别是Ω上的p-形式,q-形式和r-形式(不妨设p, q, r都≥ 1):

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

$$\eta(x) = \sum_{1 \le j_1, j_2, \cdots, j_q \le n} b_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q},$$

$$\zeta(x) = \sum_{1 \le l_1, l_2, \cdots, l_r \le n} c_{l_1 l_2 \dots l_r}(x) \mathrm{d}x_{l_1} \wedge \mathrm{d}x_{l_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{l_r}.$$

(1) 证明结合律:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta) \qquad (\text{因此记作 } \omega \wedge \eta \wedge \zeta).$$

(2) 证明带符号的交换律:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega.$$

4. (1) 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集，$\omega$是$\Omega$上的1次微分形式. 证明$\omega \wedge \omega = 0$.

(2) 设$\omega(x)=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2-\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$是开集$\Omega\subset\mathbb{R}^4$ 上的2次微分形式. 证明

$$\omega(x)\wedge\omega(x)\neq 0\qquad \forall\, x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\Omega.$$

[注意每个$x\in\Omega$, 微分形式$\eta(x)$ 是线性空间上的线性映射. 因此这里“$\neq 0$”指的是“不等于恒为零的线性映射”.]

5. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集, ω_i是Ω上的1次微分形式:

$$\omega_i(x)=\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\mathrm{d}x_j,\quad x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega,\quad i=1,2,...,n.$$

证明

$$\omega_1(x)\wedge\omega_2(x)\wedge\cdots\wedge\omega_n(x)=\det A(x)\mathrm{d}x_1\wedge x_2\cdots\wedge\mathrm{d}x_n,\quad x\in\Omega.$$

其中$A(x)=(a_{ij}(x))_{n\times n}$.

6. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为$\mathbb{R}^n$的或$\mathbb{H}^n$的开集, $f_i\in C^r(\Omega,\mathbb{R}), r\geq 1, i=1,2,...,n$. 证明

$$\mathrm{d}f_1(x)\wedge\mathrm{d}f_2(x)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f_n(x)=\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}(x)\mathrm{d}x_1\wedge x_2\cdots\wedge\mathrm{d}x_n,\quad x\in\Omega$$

其中$\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}(x)$是映射$x\mapsto(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))^\tau$的Jacobi矩阵的行列式.

一般地证明：对于$1\leq p\leq n$ 有

$$\mathrm{d}f_1(x)\wedge\mathrm{d}f_2(x)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f_p(x)=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_p\leq n}\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_p)}{\partial(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_p})}(x)\mathrm{d}x_{j_1}\wedge x_{j_2}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p}$$

$x\in\Omega$, 其中

$$\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_p)}{\partial(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_p})}(x)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{j_p}}\\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_{j_p}}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_{j_p}}\end{pmatrix}.$$

7. 证明**命题12.2**中的(b),(d).

补充习题. 设$1\leq k\leq n, S\subset\mathbb{R}^n$为紧的$k$维流形, $\mathcal{A}(S)=\{(I_\alpha^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是$S$的一个图册, 其中$I_\alpha^k=\mathbb{R}^k$ 或$\mathbb{H}^k$. 证明存在有限集$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N\}\subset A$ 和$0<R<\infty$ 使得$S=\bigcup_{j=1}^N U_j$ 其中

$$U_j=U_{\alpha_j}\cap\varphi_{\alpha_j}(I_{\alpha_j}^k\cap(-R,R)^k).$$

于是可知$\{(I_{\alpha_j}^k\cap(-R,R)^k,\varphi_{\alpha_j},U_j)\}_{j=1}^N$仍是$S$的一个图册.

【提示: 同胚映射把(相对)开集映为(相对)开集.】

§12.2. 微分形式沿定向曲面的积分(第二型曲面积分)

本节我们将导出第二型积分的定义和计算公式. 为此我们先对正则曲面建立微分形式的积分, 目的是**看清有向积分的结构和计算规则**; 然后利用曲面的可定向性和第一型曲面积分的已知结果, 将微分形式的积分的定义转化为特殊的第一型曲面积分的存在性, 从而可以将微分形式的积分建立在一般定向曲面上. 一旦有了微分形式积分的一般存在性定理, 对于积分的具体计算, 便可利用一般积分的可加性和换元公式等灵活地给予解决.

关于曲面定向的等价定义. 在进入积分之前, 我们对曲面的定向的等价定义(见陈书第三册)做一概要说明: 设$1 \le k \le n$.

设列向量$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ 和$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k$ 是同一个k维线性空间$V \subset \mathbb{R}^n$中的两组基向量, 设$T \in \mathbb{R}^{k\times k}$是它们之间的表示矩阵, 即满足(例如) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k)T$者. 如果$\det T > 0$, 则称两个有序基$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$ 与$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k)$ **有相同的定向**, 简称**同向**.否则, 即$\det T < 0$, 则称两个有序基$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$与$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k)$ **有相反的定向**, 简称**反向**. [当V的维数$k = 1$时, 易见V中两个非零向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 同向当且仅当存在$\lambda > 0$使得$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.]

设S是$\mathbb{R}^n$中的一个光滑的k维曲面, $\mathcal{A}(S)$是它的一个光滑图册. 如果$\mathcal{A}(S)$中的两个相交的局部图$(I^k_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha), (I^k_\beta, \varphi_\beta, U_\beta)$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 在每个相交点

$$x = \varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(s) \in U_\alpha \cap U_\beta$$

的切空间TS_x上的两个**有序基**

$$(\varphi'_\alpha(t)\mathbf{e}_1, \varphi'_\alpha(t)\mathbf{e}_2, ..., \varphi'_\alpha(t)\mathbf{e}_k) \text{ 与 } (\varphi'_\beta(s)\mathbf{e}_1, \varphi'_\beta(s)\mathbf{e}_2, ..., \varphi'_\beta(s)\mathbf{e}_k) \text{ 同向}$$

也即

$$\varphi'_\alpha(t) = \Big(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t_2}(t), ..., \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t_k}(t)\Big) \text{ 与 } \varphi'_\beta(s) = \Big(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t_1}(s), \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t_2}(s), ..., \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t_k}(s)\Big) \text{ 同向}$$

则称$(I^k_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$ 与$(I^k_\beta, \varphi_\beta, U_\beta)$ 同向. 如果S 有这样的光滑图册$\mathcal{A}(S)$, 它的任何两个相交的局部图都是同向的, 则称S是可定向的并称这个图册$\mathcal{A}(S)$为S的一个定向或S的一个定向图册.否则, 就称S不是可定向的.回忆上一章讲的转移映射:

$$s = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t)) =: T_{\alpha\beta}(t) \Longrightarrow \varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(T_{\alpha\beta}(t)) \Longrightarrow \varphi'_\alpha(t) = \varphi'_\beta(s)T'_{\alpha\beta}(t)$$

可见这里给出的“同向”的定义与前面用转移映射给出的“相容”的定义是一回事, 因此二者给出的关于流形定向的定义也是一致的. 但这里给出的定义由于采用了更加广泛的有序**活动标架**之间是否同向的做法, 就显得更突出本质也比较直观.

在往下讲授前, 让我们再看看是否总能把两个不同向的局部图调整为同向的局部图以及何时能调整成功. 为简便起见我们只考虑曲面维数$k\ge 2$的情形. 设S是$\mathbb{R}^n$中的一个光滑的k维曲面, $(I_\alpha^k,\varphi_\alpha,U_\alpha),(I_\beta^k,\varphi_\beta,U_\beta)$ 是S的两个相交的光滑的局部图. 注意由流形的定义知I_α^k,I_β^k分别等于$\mathbb{R}^k$ 或$\mathbb{H}^k$. 因$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, 故这两个局部图之间的转移映射为

$$T_{\alpha\beta}(t)=\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t))\in I_\beta^k,\quad t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\subset I_\alpha^k,$$

$$T_{\beta\alpha}(s)=\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(s))\in I_\alpha^k,\quad s\in\varphi_\beta^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\subset I_\beta^k.$$

易见$T_{\alpha\beta}(T_{\beta\alpha}(s))\equiv s$, 因此

$$T'_{\alpha\beta}(t)T'_{\beta\alpha}(s)|_{t=T_{\beta\alpha}(s)}=\mathrm{I}\quad\text{从而有}\quad \det T'_{\alpha\beta}(t)\det T'_{\beta\alpha}(s)=1>0,\quad t=T_{\beta\alpha}(s).$$

这表明为检查两个相交的局部图是否同向、能否调整成同向, 只要考察一个方向的转移映射即可.例如我们考察$T_{\alpha\beta}$. 假设这两个局部图不同向. 分两种情形:

情形1: 这两个局部图反向, 即

$$\text{对任意}\ \ t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\ \ \text{都有}\quad \det T'_{\alpha\beta}(t)<0.$$

例如当$U_\alpha\cap U_\beta$是连通集时, 就属于这种情况. 此时令$A\in\mathbb{R}^{k\times k}$是由

$$At=(t_1,t_2,...,t_{k-1},-t_k)^\tau,\quad t=(t_1,t_2,...,t_k)^\tau\in\mathbb{R}^k$$

确定的线性变换, 即$A=\mathrm{diag}(1,1,...,1,-1)$. 注意由$k\ge 2$ 可知A 保持I_α^k 不变, 即$A(I_\alpha^k)=I_\alpha^k$. 令

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(t)=\varphi_\alpha(At),\quad t\in I_\alpha^k$$

则$(I_\alpha^k,\widetilde{\varphi}_\alpha,U_\alpha)$ 仍是S的光滑的局部图. 这时两个局部图$(I_\alpha^k,\widetilde{\varphi}_\alpha,U_\alpha),(I_\beta^k,\varphi_\beta,U_\beta)$之间的转移映射为

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta}(t)=\varphi_\beta^{-1}(\widetilde{\varphi}_\alpha(t))=\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(At))=T_{\alpha\beta}(At)\in I_\beta^k,\quad t\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\subset I_\alpha^k.$$

此时有$\widetilde{T}'_{\alpha\beta}(t)=T'_{\alpha\beta}(At)A,\ t\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)=A^{-1}(\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta))$, 从而有

$$\det\widetilde{T}'_{\alpha\beta}(t)=\det T'_{\alpha\beta}(At)\det A=-\det T'_{\alpha\beta}(At)>0\qquad\forall\, t\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta).$$

这表明, 调整后, 两个局部图$(I_\alpha^k,\widetilde{\varphi}_\alpha,U_\alpha),(I_\beta^k,\varphi_\beta,U_\beta)$ 是同向的. 或者从

$$s=\widetilde{T}_{\alpha\beta}(t),\quad \widetilde{\varphi}'_\alpha(t)=\varphi'_\beta(s)\widetilde{T}'_{\alpha\beta}(t)\qquad \forall\, t\in\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$$

和切向量的有序活动标架的同向的定义也可知, 调整后, 两个局部图$(I_\alpha^k,\widetilde{\varphi}_\alpha,U_\alpha)$, $(I_\beta^k,\varphi_\beta,U_\beta)$是同向的.

情形2: 这两个局部图既不同向也不反向, 即

$$\text{存在}\ \ t_0,t_1\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\ \ \text{使得}\quad \det T'_{\alpha\beta}(t_0)<0<\det T'_{\alpha\beta}(t_1).$$

当$U_\alpha\cap U_\beta$不连通集时, 这是可能发生的. 对这种情况, 两个局部图不可能调整成同向的. 例如二维不带边的默比乌斯带就属于这种情况, 直观上可以看出它有一个只有两个局部图的图册，$\{(I_\alpha^2,\varphi_\alpha,U_\alpha),(I_\beta^2,\varphi_\beta,U_\beta)\}$, 两个局部图的交集$U_\alpha\cap U_\beta$ 不连通, 陈天权《数学分析讲义》第三册对第13章的关于不带边的默比乌斯带的习题解答中对此给出了严格证明. 由于默比乌斯带不是可定向的, 因此情形2 一定发生.这时就不可能把$(I_\alpha^2,\varphi_\alpha,U_\alpha),(I_\beta^2,\varphi_\beta,U_\beta)$ 调整成同向的(否则矛盾于默比乌斯带不是可定向). 此处感谢**2016级的黄巍同学**用默比乌斯带指出了这种较为普遍存在的现象: 一个光滑曲面S, 其图册$\mathcal{A}(S)$只由两张局部图组成, 仍可以是不可定向的.

【互为反向的定向】如果$\mathcal{A}(S)=\{(I_\alpha^k,\varphi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是定向曲面$S$的一个定向图册, 其中(例如)$I_\alpha^k=\mathbb{R}^k$ 或$=\mathbb{H}^k$, 那么如上令

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(t)=\varphi_\alpha(t_1,...,t_{k-1},-t_k),\quad t=(t_1,t_2,...,t_k),$$

$$\text{当}k\ge 2\text{时},\quad \mathcal{A}(-S):=\{(I_\alpha^k,\widetilde{\varphi}_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A},$$
$$\text{当}k=1\text{时},\quad \mathcal{A}(-S):=\{(\widetilde{I}_\alpha^1,\widetilde{\varphi}_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

其中$\widetilde{I}_\alpha^1=I_\alpha^1=\mathbb{R}^1$当$I_\alpha^1=\mathbb{R}^1$时; $\widetilde{I}_\alpha^1=[0,\infty)$当$I_\alpha^1=\mathbb{H}^1=(-\infty,0]$时. 则$\mathcal{A}(-S)$也是$S$的一个定向图册其定向与$\mathcal{A}(S)$相反. 这时我们用$-S$表示与$S$是同一个曲面、以$\mathcal{A}(-S)$为定向图册的曲面, 也称$-S$是$S$的反向曲面.

注意: 当S连通时, S只有两个定向, 因此这两个定向是互反的。当S不连通时, 例如S有N个连通分支($N\ge 2$), 则S共有2^N个不同的定向, 因此这时S的互为反向的定向只是这些不同的定向中的两种, 而不是全部。

对于$k = n-1(\geq 2)$的情形, 即S是定向的超曲面时, S上有连续的单位法向量场. 从第十一章学习的连续单位法向量场的构造我们知道, 对应于S的两个定向图册$\mathcal{A}(S)$和$\mathcal{A}(-S)$, S 上的两个连续的单位法向量场$\mathbf{n}(x)$ 和$\widetilde{\mathbf{n}}(x)$ 可由下式确定:

$$\mathbf{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi_\alpha'(t)^\tau \varphi_\alpha'(t))}} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\partial \varphi_{\alpha,1}}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial \varphi_{\alpha,1}}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial \varphi_{\alpha,1}}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial \varphi_{\alpha,2}}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial \varphi_{\alpha,2}}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial \varphi_{\alpha,2}}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & \frac{\partial \varphi_{\alpha,n}}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial \varphi_{\alpha,n}}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial \varphi_{\alpha,n}}{\partial t_{n-1}}(t) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{n}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(\widetilde{\varphi}_\alpha'(\tilde{t})^\tau \widetilde{\varphi}_\alpha'(\tilde{t}))}} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,1}}{\partial t_1}(\tilde{t}) & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,1}}{\partial t_2}(\tilde{t}) & \cdots & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,1}}{\partial t_{n-1}}(\tilde{t}) \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,2}}{\partial t_1}(\tilde{t}) & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,2}}{\partial t_2}(\tilde{t}) & \cdots & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,2}}{\partial t_{n-1}}(\tilde{t}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,n}}{\partial t_1}(\tilde{t}) & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,n}}{\partial t_2}(\tilde{t}) & \cdots & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{\alpha,n}}{\partial t_{n-1}}(\tilde{t}) \end{pmatrix}$$

其中

$$\tilde{t} = (t_1, t_2, ..., t_{n-2}, -t_{n-1}), \quad \varphi_\alpha(t) = \widetilde{\varphi}_\alpha(\tilde{t}) = x \in S.$$

由$\widetilde{\varphi}_\alpha$的定义易见

$$\widetilde{\mathbf{n}}(x) = -\mathbf{n}(x) \qquad \forall\, x \in S.$$

这表明S的两个定向可以分别由S上的连续单位法向量场$\mathbf{n}(\cdot)$ 和$-\mathbf{n}(\cdot)$ 决定: 如果$\mathbf{n}(x)$的指向与S的被指定的定向一致, 则$-\mathbf{n}(x)$的指向就与S的反向曲面$-S$一致; 如果$-\mathbf{n}(x)$的指向与S的被指定的定向一致, 则$\mathbf{n}(x)$的指向就与S的反向曲面$-S$一致.

【例】设$\mathbb{S}^2$和$\mathbb{S}^2_+$分别且为二维完整球面和上半球面:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}, \quad \mathbb{S}^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid z \geq 0\}.$$

则周知它们是定向曲面, 一个是封闭的(紧且无边)，一个不是封闭的. 若用单位法向量场来指明定向, 则通常采用如下说法:

$\mathbb{S}^2$取朝内的定向, 即$\mathbb{S}^2$上的连续单位法向量场的方向为指向球心(也称指向球体的内部).

$\mathbb{S}^2$取朝外的定向, 即$\mathbb{S}^2$上的连续单位法向量场的方向为指向球外(也称指向球体的外部).

$\mathbb{S}^2_+$取朝上的定向, 即$\mathbb{S}^2_+$上的连续单位法向量场在z-轴附近的方向为与z-轴的正向成锐角.

$\mathbb{S}^2_+$取朝下的定向, 即$\mathbb{S}^2_+$上的连续单位法向量场在z-轴附近的方向为与z-轴的正向成钝角. $\Box$

对于可定向的超曲面的方向的确定, 我们知道只要在某一点处确定单位法向量的指向就确定了整个曲面的方向, 只是在问题的描述中人们习惯于使用熟悉的或更直观的说法, 但当曲面较怪使你做不到这点时, 就采用前半句的做法吧.

最后我们说明, 在建立积分和进行积分计算时, 对于曲面的参数域$D \subset \mathbb{R}^k, I^k \subset \mathbb{R}^k$, 等等, 我们总使用其上的自然定向, 也即使用参数域所在空间$\mathbb{R}^k$的正向, 它是由$\mathbb{R}^k$中的有序标准基组$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k$ 确定的定向, 也就是**使参数$t = (t_1, t_2, ..., t_k)$的每个分量都增大的方向**.这样做的好处是把积分时候的约定$\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k = \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k$与Lebesgue 测度元的表示$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k$ 统一起来了.

【定义(边界的和谐定向)】设$2 \le k \le n$, $S \subset \mathbb{R}^n$是一个光滑的k维定向曲面且$\partial S \neq \emptyset$. 设$\mathcal{A}(S) = \{(\mathbb{R}^k, \varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A} \cup \{(\mathbb{H}^k, \varphi_\beta, U_\beta)\}_{\beta \in B}$ 为S的一个定向图册, 其定向与S的(被指定的)定向一致. 由**命题11.11** 知$\mathcal{A}(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_\beta(0, \cdot), \partial U_\beta)\}_{\beta \in B}$是$\partial S$的一个定向图册, 它确定了$\partial S$的一个定向, 称之为$\partial S$的与$S$的定向和谐的定向. 当$\partial S = \emptyset$ 即S无边时, 也称∂S的定向与S的定向和谐. $\Box$

【例: $\mathbb{R}^3$中2维带边曲面的和谐定向】$\mathbb{R}^3$中的连通的二维带边的定向曲面S的边界∂S的和谐定向, 直观上可以用下述方法获得:

(1)如果S是单连通的(即S连通且无“洞”), 则右手螺旋法则确定了一个∂S的与S的定向和谐的定向: 让右手的大拇指的方向代表S上的单位法向量的方向, 则弯曲的四指的方向表示曲线∂S的正方向. (**图示**)

(2) 如果S是复连通的(即S连通且有“洞”), 则一个∂S的与S的定向和谐的定向可由“在边界上沿着边界的定向行走时左侧是S的内部”获得, 意即一个人在∂S上沿着曲线∂S的定向行走时, 他的左侧紧挨着S的内部而他的头代表S的单位法向量的方向.或者这样做: S的外围边界服从右手螺旋法则, S的小洞的边界服从左手螺旋法则. (**图示**).

【关于定向曲面的子集和扩充集的定向】 设$1 \le k \le n$, σ_k为k维Hausdorff 测度, $S \subset \mathbb{R}^n$是一个k维定向曲面.

1° 若$E \subset S$ 为一个σ-可测集(例如E是一个Borel集), 则我们也称E是可定向的并规定E 只能取S可能具有的定向. 例如E可以分别取S的定向和$-S$的定向。当E取S的定向时, 称E与S同向. 我们规定: 当且仅当$\sigma_k(E) = 0$ 时, E同时与S的所有定向同向.

2° 若$S^\sharp \supset S$ 为σ_k-可测集且$\sigma_k(S^\sharp \setminus S) = 0$, 则我们也称$S^\sharp$是可定向的并规定$S^\sharp$ 只能取S可能具有的定向.

子集和扩充集的定向的这一约定将在定义分片光滑曲面和建立积分的同向可加性时用到。由于零测集对积分无贡献, 故扩充集上的积分行为完全等于扩充前的集上的积分行为. □

很多常见的曲线曲面如三角形的边界(一维曲面), 立方体的表面(二维曲面)等都不是光滑的, 但它们属于下列定义概括的分片光滑的曲面:

【定义(紧的分片光滑的定向曲面的归纳定义)】 设$1 \le k \le n$, $S \subset \mathbb{R}^n$是一个紧的k维曲面, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(I) $k = 1$: 我们称S是一个紧的分片C^r类的曲线(一维曲面) 如果存在有限多个互不相交的有界闭区间$[\alpha_i, \beta_i] \subset \mathbb{R}\,(i = 1, 2, ..., m)$和分段$C^r$类的映射$\varphi : \bigcup_{i=1}^m [\alpha_i, \beta_i] \to \mathbb{R}^n$ 使得$S = \varphi(\bigcup_{i=1}^m [\alpha_i, \beta_i])$ 并且φ满足$\varphi : \bigcup_{i=1}^m [\alpha_i, \beta_i] \to S$ 是同胚且对每个$[\alpha_i, \beta_i]$有分划$\alpha_i = \alpha_{i0} < \alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \cdots < \alpha_{in_i} = \beta_i$ 使得$\varphi|_{[\alpha_{i(j-1)}, \alpha_{ij}]} \in C^r([\alpha_{i(j-1)}, \alpha_{ij}], S)$且$\varphi'(t) \ne 0\ \forall\, t \in [\alpha_{i(j-1)}, \alpha_{ij}]$, $\quad j = 1, 2, ..., n_i, i = 1, 2, ..., m$. 这时每个$S_i = \varphi([\alpha_i, \beta_i])$自己有两个定向: 一个是从点$\varphi(\alpha_i)$沿$S_i$到$\varphi(\beta_i)$的方向, 另一个是它的反向, 即从$\varphi(\beta_i)$沿$S_i$到$\varphi(\alpha_i)$的方向. S的定向由S_i的定向的组合给出, 例如可取作使每个参数区间$[\alpha_i, \beta_i]$中参数都增大的方向, 即取为从α_i到β_i的方向, $i = 1, 2, ..., m$.

(II) $2 \le k \le n$: 我们称S是一个分片C^r类的k维定向曲面如果S有有限分解$S = \bigcup_{j=1}^N S_j$ 其中$S_1, S_2, ..., S_N$都是紧的k维曲面并满足下列(i),(ii),(iii):

(i) $S_1, S_2, ..., S_N$ 互不重叠, 即当$i \ne j$时$\sigma_k(S_i \cap S_j) = 0$.

(ii) 对每个S_j, 其边∂S_j是一个分片C^r类的$k-1$维定向曲面, 并且存在$Z_j \subset \partial S_j$满足$\sigma_{k-1}(Z_j) = 0$ 使得

$$\widetilde{S}_j := S_j \setminus Z_j \ \text{是一个}C^r\text{类的}k\text{维定向曲面}$$

同时存在一列C^r类的k维紧定向曲面$S_{jm}\subset S_j\,(m=1,2,3,...)$ 满足S_{jm}与$\widetilde{S}_j$有相同的定向且

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_k(S_j\setminus S_{jm})=\lim_{m\to\infty}\sigma_{k-1}(\partial S_j\setminus\partial S_{jm})=\lim_{m\to\infty}\sigma_{k-1}(\partial S_{jm}\setminus\partial S_j)=0. \qquad (*)$$

此外$\partial\widetilde{S}_j$的定向与∂S_j一致并与$\widetilde{S}_j$的定向和谐. 由于有$(S_j)^\circ=(\widetilde{S}_j)^\circ,\partial S_j=(\partial\widetilde{S}_j)\cup Z_j$ (见后面说明**4°**) 故我们约定: S_j是定向的且其定向与$\widetilde{S}_j$的定向一致从而与∂S_j的定向和谐.

(iii) 当$i\neq j$且$\sigma_{k-1}(\partial\widetilde{S}_i\cap\partial\widetilde{S}_j)>0$时$\sigma_{k-1}(\partial S\cap\partial\widetilde{S}_i\cap\partial\widetilde{S}_j)=0$ 且$\partial\widetilde{S}_i\cap\partial\widetilde{S}_j$是一个连通的$C^r$类的$k-1$维定向曲面, 并且$\partial\widetilde{S}_i\cap\partial\widetilde{S}_j$的与$\partial\widetilde{S}_i$ 的定向一致的定向和$\partial\widetilde{S}_i\cap\partial\widetilde{S}_j$的与$\partial\widetilde{S}_j$的定向一致的定向**互为反向**. (**图示**)

对于这样构成的曲面S, S的定向被定义为是由$S_1,S_2,...,S_N$的定向联合确定的定向; ∂S的与S的定向和谐的定向被定义为是由$(\partial S)\cap(\partial S_1),(\partial S)\cap(\partial S_2),...,(\partial S)\cap(\partial S_N)$的定向联合确定的定向.(**图示**)

【说明】 1° $k=1$时, 即曲线的情形, 本质上是简单的**:** 有序且边界是任意光滑的(因孤立点是零维曲面故是任意光滑的). 但当$k\geq 2$时, 曲面立刻极为复杂. 此时为了建立积分公式的需要我们不得不要求每一片S_j具有光滑逼近性质$(*)$. 这个逼近性质直观上看比较容易满足, 但具体构造S_{jm} 则不容易. 例如即便对最简单的非光滑的二维流形$S=[0,1]^2$, 可以构造一列C^2类的二维定向流形$S_m\subset S$ 它们具有逼近性质$(*)$, 但构造过程并不简单. 逼近性质$(*)$很难从其它几条推出(从$k=1$的情形即可看到这点), 换言之它应该不是多余的[2]. 经历曲面积分的多年教学, 我们认为逼近性质$(*)$或类似性质在证明分片光滑流形上的Stokes 公式时是绕不过去的.

2° 因为紧的光滑k维曲面的k维面积是有限的, 故从定义中的(iv) 易见$\sigma_k(S_j)<\infty,\sigma_{k-1}(\partial S_j)<\infty, j=1,2,...,N$, 从而有$\sigma_k(S)<\infty,\sigma_{k-1}(\partial S)<\infty$.

此外由于本讲义只考虑紧流形及其子集上的积分, 故以上定义中的"分片"只涉及"有限分片", 也即我们没有考虑"可数分片"的情形, 这点请同学们注意.原因是这已足够广泛, 且能在证明积分公式时避免过多的零碎的讨论.

3° 在涉及流形的分析中我们将常用到下面性质(已编入更新版的**定理11.1(流形上的区域不变定理)的推论**):

若$\widetilde{S},S$ 都是$\mathbb{R}^n$ 中的k维流形且$\widetilde{S}\subset S$, 则有$(\widetilde{S})^\circ\subset S^\circ$.

[2]欢迎同学们讨论;我目前没找例子支持这一点.

这是因为对任意$x\in(\widetilde{S})^\circ$, 由定义, 存在$\mathbb{R}^n$的开集$V$使得$x\in\widetilde{S}\cap V$ 且$\widetilde{S}\cap V$与$\mathbb{R}^k$同胚, 即存在同胚$\varphi:\mathbb{R}^k\to\widetilde{S}\cap V$. 因$\widetilde{S}\cap V\subset S$ 且S是k维流形, 故由**定理11.1(流形上的区域不变定理)** 知$\varphi(\mathbb{R}^k)$是S的开集, 即存在$\mathbb{R}^n$的开集$\widetilde{V}$使得$\widetilde{S}\cap V=\varphi(\mathbb{R}^k)=S\cap\widetilde{V}$. 于是有$x\in S\cap\widetilde{V}$且$S\cap\widetilde{V}$与$\mathbb{R}^k$同胚. 这表明$x\in S^\circ$. 所以$(\widetilde{S})^\circ\subset S^\circ$.

4° 不难证明定义中(ii)中的条件蕴含

$$(\widetilde{S}_j)^\circ=(S_j)^\circ \quad \text{即} \quad (S_j\setminus Z_j)^\circ=(S_j)^\circ$$

从而有

$$\partial\widetilde{S}_j=(\partial S_j)\setminus Z_j \quad \text{即} \quad \partial(S_j\setminus Z_j)=(\partial S_j)\setminus Z_j.$$

因此∂S_j 与$\partial\widetilde{S}_j$相差一个零测集. 事实上我们有

$$(\widetilde{S}_j)^\circ=(S_j)^\circ \quad \text{即} \quad (S_j\setminus Z_j)^\circ=(S_j)^\circ.$$

这是因为由于$S_j\setminus Z_j$也是k维流形, 故由说明**3°** 有$(S_j\setminus Z_j)^\circ\subset(S_j)^\circ$. 反之对任意$x\in(S_j)^\circ$, 存在$\mathbb{R}^n$的开集$V$ 使得$x\in S_j\cap V$ 且$S_j\cap V$与$\mathbb{R}^k$同胚. 由流形内部的定义知这蕴含$S_j\cap V\subset(S_j)^\circ$ (也见**命题11.3**之(**a**)). 因$Z_j\cap(S_j)^\circ=\emptyset$, 故有$x\in(S_j\setminus Z_j)\cap V$同时有$S_j\cap V=(S_j\setminus Z_j)\cap V$, 后者表明$(S_j\setminus Z_j)\cap V$与$\mathbb{R}^k$同胚. 于是再由流形内部的定义知$x\in(S_j\setminus Z_j)^\circ$. 所以$(S_j)^\circ\subset(S_j\setminus Z_j)^\circ$. 这就证明了$(S_j\setminus Z_j)^\circ=(S_j)^\circ$. 由此即得

$$\partial(S_j\setminus Z_j)=(S_j\setminus Z_j)\setminus(S_j\setminus Z_j)^\circ=(S_j\setminus Z_j)\setminus(S_j)^\circ=[S_j\setminus(S_j)^\circ]\setminus Z_j=(\partial S_j)\setminus Z_j.$$

5° 在上述定义中的最后一段, 我们用到了下面事实: 由说明**3°** 易见

$$S^\circ\supset\bigcup_{j=1}^N(S_j)^\circ \quad \text{因此} \quad \partial S=S\setminus S^\circ=\bigcup_{j=1}^N S_j\setminus S^\circ\subset\bigcup_{j=1}^N\partial S_j.$$

从而有

$$\partial S=\bigcup_{j=1}^N(\partial S)\cap\partial S_j.$$

根据定义中的条件(iii)和S°与∂S 不相交以及∂S_j 与$\partial\widetilde{S}_j$相差一个零测集可知$(\partial S)\cap\partial S_1,(\partial S)\cap\partial S_2,...,(\partial S)\cap\partial S_N$ 是(关于测度σ_{k-1})互不重叠的, 因此上述定义中用它们各自的定向来联合定义∂S的定向是合理的. **此外应该可以证明∂S 是分片C^r 类的$k-1$ 维定向曲面.**[3]

[3]**欢迎同学给出证明.**

6° 从条件(iii)中的定向约束可以推出$\partial S_1, \partial S_2, ..., \partial S_N$三不重叠, 即

$$\sigma_{k-1}(\partial S_i \cap \partial S_j \cap \partial S_l) = 0 \qquad 当 i, j, l \text{ 互不相同时}.$$

事实上由于∂S_i 与$\partial \widetilde{S}_i$相差一个零测集, 故只需证明

$$\sigma_{k-1}(\partial \widetilde{S}_i \cap \partial \widetilde{S}_j \cap \partial \widetilde{S}_l) = 0 \qquad 当 i, j, l \text{ 互不相同时}.$$

反证法: 设存在i, j, l 互不相同使得$\sigma_{k-1}(\partial \widetilde{S}_i \cap \partial \widetilde{S}_j \cap \partial \widetilde{S}_l) > 0$. 我们把三个光滑曲面$\widetilde{S}_i, \widetilde{S}_j, \widetilde{S}_l$ 局限在$\partial \widetilde{S}_i \cap \partial \widetilde{S}_j \cap \partial \widetilde{S}_l$的一个邻域内并仍用同样记号, 使得在这个邻域内三块边$A := \partial \widetilde{S}_i, B := \partial \widetilde{S}_j, C := \partial \widetilde{S}_l$是连通的. 此时每个$A, B, C$只有两个定向(二者互反). 注意$A \cap B \cap C$ 是A, B, C的公共子集且有正测度, 因此$A \cap B \cap C$可以取A, B, C各自两个定向中的任何一个但不能同时与两个互反的定向同向。若$A \cap B \cap C$ 取的定向与A的定不一致, 则这个定向就同时与B, C的定向一致, 于是B与C在正测度的交集$A \cap B \cap C$处的定向是一致的, 这就与(iii)中的定向约束矛盾. 若$A \cap B \cap C$ 取的定向与A的定向一致, 则$A \cap B \cap C$的这个定向就与B的定向不一致, 从而同样导出矛盾。(**图示**)

7° 在(iii)中, 由∂S_i 与$\partial \widetilde{S}_i$相差一个零测集易见$\sigma_{k-1}(\partial S_i \cap \partial S_j) = \sigma_{k-1}(\partial \widetilde{S}_i \cap \partial \widetilde{S}_j)$. 于是由(iii)可知当$i \neq j$且$\sigma_{k-1}(\partial S_i \cap \partial S_j) > 0$时$\partial S_i \cap \partial S_j$的与$\partial S_i$ 的定向一致的定向和$\partial S_i \cap \partial S_j$的与$\partial S_j$的定向一致的定向**互为反向**.

8° 对于分片光滑的曲面S, 由于除掉一个零测集外S的所有点都是S的"光滑点"(即该点位于S的光滑的局部图上), 故S上的切空间TS_x对几乎所有$x \in S$ 有定义, 也即S上的切向量几乎处处存在. 特别当S是超曲面时, S 上的单位法向量场$\mathbf{n}(x)$在S的每个光滑点有定义. 由于零测集对积分无贡献, 故在积分时可认为$\mathbf{n}(x)$在S上处处有定义. $\square$

【例】下面两个典型例子有助于理解上述关于分片光滑曲面的定向方式.

(1) 周知, 球面$\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$的定向可以由其上的单位法向量的方向确定: 朝内方向和朝外方向. 今取$\mathbb{S}^2$的定向为(例如)朝外方向, 然后将$\mathbb{S}^2$切开成两个闭的半球面的并, 在每个半球面的边上画上与$\mathbb{S}^2$的朝外方向和谐的箭头(箭头的方向可用右手螺旋法则确定). 这时我们看到, 两个半球面的边的方向是相反的.

(2) $\mathbb{R}^3$中的圆柱侧面$\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$是定向的光滑的带边曲面.现在把圆柱面的两个边画上箭头, 方向与圆柱面的定向和谐, 然后把圆柱面剪两刀使成为两个闭的半柱面的

并(它们当然都是光滑的定向曲面), 在两个交集处每个半柱面的边上各自画上边的和谐定向的箭头, 则我们看到在两个交接处的两个箭头都是反向的. 但是如果把两个半柱面这样粘合: 先将一个交接处粘合成与剪断前的一样(此处粘合处的两个箭头是反向的), 然后将另一个交接处作翻转粘合, 从而构成一个带边的默比乌斯带. 这时会看见, 在翻转粘合处的两个箭头是同向的而不是反向的. □

1. 曲线上的第二型积分

曲线积分比高维曲面积分实质性地简单得多(或说高维曲面积分比一维积分有本质上的区别), 它能使我们从"连续Riemann和"出发直接对分段光滑的曲线建立一次形式的积分. 先考虑连通曲线.

设$[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$是有界闭区间, $S=\varphi([\alpha,\beta])\subset\mathbb{R}^n$为分段$C^r$类的曲线($r\ge 1$), 即$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n):[\alpha,\beta]\to S$ 是同胚且有分划$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_N=\beta$ 使得$\varphi|_{[\alpha_{j-1},\alpha_j]}\in C^r([\alpha_{j-1},\alpha_j],S)$且$\varphi'(t)\neq 0\ \ \forall\, t\in[\alpha_{j-1},\alpha_j],\quad j=1,2,...,N$. 设$\omega$为$S$上的连续的一次形式, 即

$$\omega(x)=F_1(x)\mathrm{d}x_1+F_2(x)\mathrm{d}x_2+\cdots+F_n(x)\mathrm{d}x_n$$

其中$F_i\in C([\alpha,\beta]),\ \ i=1,2,...,n$. 令$\mathbf{F}(x)=(F_1(x),F_2(x),...,F_n(x))$. 回忆一次形式的定义知对任意$\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ (例如取$\boldsymbol{\xi}$为**切向量**...), 注意$\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{\xi})=\xi_i$ 有

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^n F_i(x)\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{\xi})=\langle\mathbf{F}(x),\boldsymbol{\xi}\rangle.$$

设想$\mathbf{F}(x)$是空间中的一个力场, 空间中一个质点从位置$\varphi(\alpha)$ 移动到位置$\varphi(\beta)$, 其运动轨迹是曲线$S=\varphi([\alpha,\beta])$. 我们来建立在这个移动过程中力场$\mathbf{F}$对质点作的功的计算公式.

对曲线上任意可微点$x=\varphi(t),t\in[\alpha,\beta]\setminus\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N\}$, 沿着移动方向，力$\mathbf{F}(x)$对质点在微小区间段$[t,t+\mathrm{d}t]$上作的功为

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi})|_{x=\varphi(t),\boldsymbol{\xi}=\varphi'(t)\mathrm{d}t}=\langle\mathbf{F}(\varphi(t)),\varphi'(t)\mathrm{d}t\rangle=\langle\mathbf{F}(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle\mathrm{d}t.$$

因功是可加量, 故求和(即取积分)得到所做的功为

$$\int_S\omega(x)=\int_\alpha^\beta\langle\mathbf{F}(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle\mathrm{d}t$$

即

$$\int_S \sum_{i=1}^n F_i(x)\mathrm{d}x_i = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\mathrm{d}t.$$

若套用一次形式的拉回映射的写法, 则有

$$\varphi^*\omega(t) = \omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\mathrm{d}t) = \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\mathrm{d}t = \langle \mathbf{F}(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \mathrm{d}t$$

因此上式写成 (先在光滑的曲线段上给出表示然后利用叠加性定义分段光滑的情形)

$$\int_S \omega(x) = \int_{[\alpha,\beta]} \varphi^*\omega(t) = \int_\alpha^\beta \langle \mathbf{F}(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

另一方面注意到$|\varphi'(t)|\mathrm{d}t = \mathrm{d}s$ 是弧长测度元(即一维Hausdorff 测度元) 并令

$$\mathbf{T}(x) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad x \in S \setminus Z$$

(其中$Z = \{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), ..., \varphi(\alpha_N)\}$是有限集, 在这些点上$\mathbf{T}(x)$可能不存在, 但不影响积分) 是曲线在点$x$处的单位切向量, 方向与曲线的走向一致, 因此上面积分等式的右边也写成

$$\int_\alpha^\beta \langle \mathbf{F}(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \langle \mathbf{F}(\varphi(t)), \mathbf{T}(\varphi(t))\rangle |\varphi'(t)|\mathrm{d}t = \int_S \langle \mathbf{F}(x), \mathbf{T}(x)\rangle \mathrm{d}s.$$

于是又有

$$\int_S \omega(x) = \int_S \langle \mathbf{F}(x), \mathbf{T}(x)\rangle \mathrm{d}s. \tag{2.0}$$

这样我们就从两种方式定义了积分$\int_S \omega$: 一种通过参数表示将其定义为普通的区间$[\alpha, \beta]$上的积分, 其中积分方向是质点从起点到终点的方向, 即从α到β, 即是参数增大的方向; 另一种是利用曲线测度的积分(第一型积分) 其中积分的方向体现在被积函数中的单位切向量$\mathbf{T}(x)$, **它的方向与质点运动方向一致**.

这样我们就建立了曲线上的一次形式的积分$\int_S \omega$ 并给出了计算公式. 特别记住一点: **一次形式的积分就是沿着曲线切线方向的积分**.

如果S不连通, 则有$S = \bigcup_{j=1}^N S_j$, 其中S_j是互不相交的分段C^r类的连通曲线。于是定义

$$\int_S \omega = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \omega.$$

然后对每一段S_j 用上面公式进行计算.

下面给出并证明**零次形式的Stokes公式**:

【**Newton-Lebnitz 公式**】(1) 设$S\subset\mathbb{R}^n$是一条分段C^1 类的连通曲线(紧的一维流形), S的起点为$\mathbf{A}$ 终点为$\mathbf{B}$, 设ω 是定义在包含S的开集上的C^1类函数. 则沿着S的定向积分有

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x)=\int_{\partial S}\omega=\omega(x)\Big|_{x=\mathbf{A}}^{x=\mathbf{B}}=\omega(\mathbf{B})-\omega(\mathbf{A}).$$

特别当$\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 即S是闭合曲线(即S无边) 时有

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x)=\int_{\partial S}\omega=\int_{\emptyset}\omega=0=\omega(\mathbf{A})-\omega(\mathbf{A}).$$

(2) 设$S=\bigcup_{j=1}^N S_j\subset\mathbb{R}^n$是一条分段$C^1$ 类的曲线(一维流形), 其中S_j互不相交且每个S_j都是分段C^1 类的连通曲线(注意它是紧集). 设ω 是定义在包含S的开集上的C^1类函数. 则沿着S的定向积分有

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x)=\int_{\partial S}\omega=\sum_{j=1}^N\int_{\partial S_j}\omega.$$

而对每个$\int_{\partial S_j}\omega$可按(1)中计算.

【证】只需证(1). 由假设知$S=\varphi([\alpha,\beta])$ 其中$[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$是有界闭区间, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n):[\alpha,\beta]\to S$ 是同胚且有分划$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_N=\beta$ 使得$\varphi|_{[\alpha_{j-1},\alpha_j]}\in C^1([\alpha_{j-1},\alpha_j],S)$且$\varphi'(t)\neq 0\ \ \forall\, t\in[\alpha_{j-1},\alpha_j],\quad j=1,2,...,N.$

令$S_j=\varphi([\alpha_{j-1},\alpha_j]),\mathbf{A}_0=\mathbf{A}=\varphi(\alpha),\mathbf{A}_j=\varphi(\alpha_j),j=1,2,...,N,\mathbf{A}_N=\mathbf{B}=\varphi(\beta)$. 则在每个光滑段$S_j=\varphi([\alpha_{j-1},\alpha_j])$ 上有

$$\begin{aligned}&\int_{S_j}\mathrm{d}\omega(x)=\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\varphi^*(\mathrm{d}\omega)(t)=\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\mathrm{d}(\varphi^*\omega)(t)=\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\mathrm{d}(\omega(\varphi(t)))=\omega(\varphi(t))\Big|_{t=\alpha_{j-1}}^{t=\alpha_j}\\&=\omega(\varphi(\alpha_j))-\omega(\varphi(\alpha_{j-1}))=\omega(\mathbf{A}_j)-\omega(\mathbf{A}_{j-1}).\end{aligned}$$

然后由积分的可加性有(又见差和!)

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x)=\sum_{j=1}^N\int_{S_j}\mathrm{d}\omega(x)=\sum_{j=1}^N\Big(\omega(\mathbf{A}_j)-\omega(\mathbf{A}_{j-1})\Big)=\omega(\mathbf{A}_N)-\omega(\mathbf{A}_0)=\omega(\mathbf{B})-\omega(\mathbf{A}).$$

□

2. 正则曲面上的第二型积分

【定义(正则曲面)】设$1 \le k \le n$. 我们称集合$S \subset \mathbb{R}^n$ 是一块k-维正则曲面, 如果S可以用一张光滑参数图表示, 即$S = \varphi(D)$, 其中$D \subset \mathbb{R}^k$为$\mathbb{R}^k$的连通开集(即区域), $\varphi : D \to S$ 为同胚且φ 在D 上光滑、处处满秩. [此时S显然是定向流形.] 这时如果不加说明, 那么S定向就是指由有序切向量标架组

$$(\varphi'(t)\mathbf{e}_1, \varphi'(t)\mathbf{e}_2, ..., \varphi'(t)\mathbf{e}_k) = \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t),\, \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t),\, ...,\, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)\Big) = \varphi'(t), \quad t \in D$$

给出的定向. □

还可以定义由闭区域上的参数映射确定的正则曲面, 但对于本讲义的安排来说, 上述定义已经够用: 在建立了微分形式的积分后, 可以导出参数域为闭区域的积分换元公式.

注:这里和下面, "光滑"指至少是C^1的. .

以下设$\Omega \supset S$为开集, ω是Ω上的一个光滑的k次微分形式(不失一般性只需考虑最简形式):

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \quad x \in \Omega.$$

为建立ω在$S = \varphi(D)$上的积分, 分两种情况考虑:

<u>**情形(1)**</u>: S在某点(从而在任意点)$x = \varphi(t)$处的有序切向量标架

$$\varphi'(t)\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_1}, \quad \varphi'(t)\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_2}, \quad \ldots, \quad \varphi'(t)\mathbf{e}_k = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_k}$$

构成的定向与S的被指定的定向一致.

为了看清楚微分形式积分的结构, 并注意到$\mathbb{R}^k$ 的开集可以被分解为可数多个互不重叠的有界闭区间的并, 我们先考察S上的微分形式ω在S的子集$\varphi(I)$上的积分, 其中I是含于D中的有界闭区间: $I = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$.

为了得到ω在$\varphi(I)$上的积分的**Riemann和**, 我们对参数域I 做分割:

$$I = \bigcup_{j=1}^{N} I_j, \quad I_j = \prod_{i=1}^{k} [t_{ji}, t_{ji} + \Delta t_{ji}], \quad \Delta t_{ji} > 0$$

这些闭区间I_j互不重叠. 注意因$\varphi : I \to \varphi(I)$是单射且光滑, 故相应地得到$\varphi(I)$的分割:

$$\varphi(I) = \bigcup_{j=1}^{N} \varphi(I_j).$$

这些曲面$\varphi(I_j)$也是互不重叠的(即只在它们的边界上可能相交). 令$L=\max\limits_{t\in I}\|\varphi'(t)\|$, 则由$I_j$是凸集和微分中值不等式有$|\varphi(t)-\varphi(s)|\le L|t-s|\ \forall t,s\in I_j$ 从而有

$$\mathrm{diam}(\varphi(I_j))\le L\mathrm{diam}(I_j),\quad j=1,2,...,N.$$

现在在每个$\varphi(I_j)$中**任取**一点$x_j=\varphi(\tau_j)$, 并将微分形式的函数表示$\omega(x_j)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k)$中的向量$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k$ 依次取为曲面S在点$x_j=\varphi(\tau_j)$处的k个线性无关的切向量:

$$\boldsymbol{\xi}_{j1}=\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\tau_j)\Delta t_{j1},\quad \boldsymbol{\xi}_{j2}=\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\tau_j)\Delta t_{j2},\quad ...,\quad \boldsymbol{\xi}_{jk}=\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\tau_j)\Delta t_{jk}.$$

代入$\omega(x_j)(\boldsymbol{\xi}_{j1},\boldsymbol{\xi}_{j2},...,\boldsymbol{\xi}_{jk})$得到

$$\begin{aligned}&\omega(x_j)(\xi_{j1},\xi_{j2},...,\xi_{jk})=\omega(\varphi(\tau_j))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\tau_j)\Delta t_{j1},\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\tau_j)\Delta t_{j2},\,...,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\tau_j)\Delta t_{jk}\Big)\\&=\omega(\varphi(\tau_j))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\tau_j),\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\tau_j),\,...,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\tau_j)\Big)\Delta t_{j1}\Delta t_{j2}\cdots\Delta t_{jk}.\end{aligned}$$

因$\Delta t_{j1}>0,\Delta t_{j2}>0,...,\Delta t_{jk}>0$, 故乘积$\Delta t_{j1}\Delta t_{j2}\cdots\Delta t_{jk}=m(I_j)$ 等于I_j的Lebesgue测度. 于是我们看到, ω沿着曲面S的定向的“Riemann和”就化成了通常的Riemann和:

$$\sum_{j=1}^N\omega(x_j)(\boldsymbol{\xi}_{j1},\boldsymbol{\xi}_{j2},...,\boldsymbol{\xi}_{jk})=\sum_{j=1}^N\omega(\varphi(\tau_j))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\tau_j),\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\tau_j),\,...,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\tau_j)\Big)m(I_j).$$

因ω的系数函数在$\varphi(I)$上连续, 故让最大子区间的直径$\lambda=\max\limits_{1\le j\le N}\mathrm{diam}(I_j)\to 0$ (这蕴含$\max\limits_{1\le j\le N}\mathrm{diam}(\varphi(I_j))\to 0$) 即得

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=1}^N\omega(x_j)(\boldsymbol{\xi}_{j1},\boldsymbol{\xi}_{j2},...,\boldsymbol{\xi}_{jk})\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=1}^N\omega(\varphi(\tau_j))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\tau_j),\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\tau_j),\,...,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\tau_j)\Big)m(I_j)\\&=\int_I\omega(\varphi(t))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t),\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t),\,...,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t)\Big)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

据此, 我们定义ω在$\varphi(I)$上沿着S的定向的积分为

$$\int_{\varphi(I)}\omega(x)=\int_I\omega(\varphi(t))\Big(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^1},\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^2},\,...,\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^k}\Big)\mathrm{d}t.\tag{2.1}$$

也即

$$\int_{\varphi(I)}\omega(x)=\int_I\varphi^*\omega(t)=\int_D\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t.\tag{2.2}$$

上式积分中

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k$$

是通常的Lebesgue 测度元, 相应的积分是通常的Riemann积分或Lebesgue 积分. 注意, 从上面积分看到, 这积分是微分形式ω 沿着S的切空间(切平面)方向的积分! 且这切空间的正向与S的定向一致.

扩展到D上的积分: 对于一般的参数域D 我们要求绝对可积性:

$$\int_D \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))|\left|\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\right|\mathrm{d}t < +\infty.$$

而由上节**例**题和第一型曲面积分的换元公式有

$$\begin{aligned}
&\int_D \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))|\left|\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\right|\mathrm{d}t \\
\le& \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \int_D |a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))|\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}\mathrm{d}t \\
=& \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \int_S |a_{i_1i_2\ldots i_k}(x)|\mathrm{d}\sigma(x), \qquad S=\varphi(D)
\end{aligned}$$

因此只要每个函数$a_{i_1i_2\ldots i_k}(x)$都在S上σ-可积即可, 也即$a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}$都在$D$上$L$-可积即可.

在上述可积的条件下, 根据上面关于有界闭区间的情形的结果, 我们可以直接定义ω在正则曲面$S=\varphi(D)$上的积分为

$$\int_S \omega(x) = \int_D \varphi^*\omega(t) \tag{2.3}$$

也即

$$\int_S \omega(x) = \int_D \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} a_{i_1i_2\ldots i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

我们也可以根据分解$D=\bigcup_{j=1}^\infty I_j$, 其中$I_j$为有界闭区间且互不重叠, 和$S=\bigcup_{j=1}^\infty S_j, S_j=\varphi(I_j)$, 和上面的结果来定义积分:

$$\int_S \omega(x) = \sum_{j=1}^\infty \int_{S_j}\omega(x).$$

根据Lebesgue积分的可加性易知这两种方式定义的积分相同. 这里我们用到了S_j 互不重叠, 即当$i\ne j$ 时$\sigma(S_i\cap S_j)=0$. 这是因为由$\varphi: D\to\mathbb{R}^n$ 为光滑单射知$S_i\cap S_j=$

$\varphi(I_i \cap I_j) \subset \varphi(\partial I_i)$, 于是由$m(\partial I_i) = m_k(\partial I_i) = 0$ 有$\sigma(\varphi(\partial I_i)) = H_k(\varphi(\partial I_i)) = 0$ (见第九章**命题9.35**). 所以S_j 互不重叠.

后面我们还要证明, 积分$\int_S \omega(x)$ 与S的参数图的选取方式无关!

情形(2)：曲面S在某点(从而在任意点)$x = \varphi(t)$处的有序切向量标架

$$\varphi'(t)\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_1}, \quad \varphi'(t)\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_2}, \quad \ldots, \quad \varphi'(t)\mathbf{e}_k = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_k}$$

构成的定向与S的被指定的定向不一致.

这时由前面分析知上述有序切向量标架构成的定向与$-S$的定向一致. 根据**情形(1)**的结果, 我们定义ω 沿着S的定向的积分为

$$\int_S \omega(x) = -\int_{-S} \omega(x).$$

当然, 对于$\int_{-S} \omega$的计算, 可按上面建立的关系式(2.3),(2.4)进行. 于是对于**情形(2)** 有

$$\int_S \omega = -\int_D \varphi^* \omega(t) = -\int_D \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\varphi(t)) \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_k)}(t)\mathrm{d}t. \qquad (2.5)$$

2. 一般定向曲面上的第二型积分.

有了正则曲面上第二型积分的构建, 我们固然可以通过将S分解成可数个正则曲面的并, 利用可加性和这些曲面之间定向的协调一致性, 将积分$\int_S \omega$ 建立在一般的分片光滑定向曲面S 上(其中注意光滑流形的边是σ-零测集, 对积分无贡献, 故积分时只需考虑流形的内部). 但因为我们之前已有了曲面测度和积分的基础, 我们将利用第一型积分来定义第二型积分. 这做法的好处是可以避免一些技术细节的纠缠, 同时给出了第二型积分$\int_S \omega$的一种等价表示: 将其表示成第一型积分, 积分的方向由被积函数确定.

先做些准备. 以下设$S \subset \mathbb{R}^n$是一个紧的分片光滑的k-维定向曲面.

【S上的函数组$\{T_S^{i_1 i_2 \dots i_k}(\cdot) \,|\, 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n\}$】 设$S_*$是$S$的光滑点的集合, 即

$$S_* = \{x \in S \,|\, \text{存在}\mathbb{R}^k\text{的开区域}D\text{和光滑的满秩单射}\varphi : D \to S \text{ 使得}x \in \varphi(D)\}.$$

先证明$\sigma(S \setminus S_*) = 0$, 即$S$中几乎所有点都是光滑点. 事实上设$S = \bigcup_{j=1}^N S_j$ 其中$S_1, S_2, \dots, S_N$是**定义(紧的分片光滑k维定向的归纳定义)**中的曲面. 因$(S_j)^\circ = (\widetilde{S}_j)^\circ$是$C^r$类的, 故由流形的内部和边界的定义知

$$\bigcup_{j=1}^N (S_j)^\circ \subset S_*, \quad S \setminus S_* \subset S \setminus \bigcup_{j=1}^N (S_j)^\circ \subset \bigcup_{j=1}^N \partial S_j.$$

注意$\partial S_j = Z_j \cup \partial \widetilde{S}_j$ 其中$\sigma_{k-1}(Z_j) = 0$ (更有$\sigma(Z_j) = \sigma_k(Z_j) = 0$). 因$\widetilde{S}_j$至少是$C^1$类的, 故由**命题11.10**知, 当$\partial \widetilde{S}_j$ 非空时, 它等于可数多个形如$\varphi(\partial \mathbb{H}^k)$的并集, 其中$\varphi \in C^1(\mathbb{H}^k, \widetilde{S}_j)$. 注意$\varphi$可以被光滑地延拓到$\mathbb{R}^k$, 也即$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$.于是由$m_k(\partial \mathbb{H}^k) = 0$和第九章**命题9.35** 知$\sigma(\varphi(\partial \mathbb{H}^k)) = 0$. 这蕴含$\sigma(\partial S_j) = \sigma(\partial \widetilde{S}_j) = 0$ 从而有$\sigma(S \setminus S_*) = 0$, 也即$S$的非光滑点的集合的面积为零.

对任一组$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ 我们定义S上的函数$T_S^{i_1 i_2 \dots i_k}(x)$如下:

$$T_S^{i_1 i_2 \dots i_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau \varphi'(t))}} \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_k)}(t)\Big|_{\varphi(t)=x} \quad \text{当 } x \in S_*, \tag{2.6}$$

$$T_S^{i_1 i_2 \dots i_k}(x) = 0 \qquad \text{当 } x \in S \setminus S_* \tag{2.7}$$

其中$\varphi : D \to S$为光滑的满秩单射, 满足$\varphi(D) \ni x$, 其中$D \subset \mathbb{R}^k$ 为开区域, 并且$\varphi(D)$的定向与S的定向一致. 【回忆: $\mathbb{R}^k$中的开区域就是$\mathbb{R}^k$的连通开集.】注意, 据**定理11.1(流形上的区域不变定理)** 知: $\varphi(D)$是S的开集且$\varphi : D \to \varphi(D)$是同胚, $\varphi(D)$也是一个k维流形且$\varphi(D) \subset S^\circ$.

需要证明$T_S^{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$在$S_*$上是良好定义的(well-defined), 即它不依赖于参数图φ的选择.

任取$x\in S_*$. 设$D,\Delta\subset\mathbb{R}^k$是开区域,

$$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)^\tau: D\to S,\quad \psi=(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)^\tau:\Delta\to S$$

均为光滑的满秩单射, 满足$x\in\varphi(D)\cap\psi(\Delta)$ 且$\varphi(D)$ 和$\psi(\Delta)$的定向都与S 的定向一致. 注意, 因$\varphi(D),\psi(\Delta)$ 都是S的开集且$\varphi(D)\cap\psi(\Delta)\ni x$, 故$\varphi(D)\cap\psi(\Delta)$ 也是S的开集, 因此(例如)$\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta))$ 是D内的非空开集.

来证明

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\det(\psi'(\tau)^\tau\psi'(\tau))}}\frac{\partial(\psi_{i_1},\psi_{i_2},...,\psi_{i_k})}{\partial(\tau_1,\tau_2,...,\tau_k)}(\tau)\Big|_{\psi(\tau)=x}\\ =&\frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}}\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\Big|_{\varphi(t)=x}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

因两个光滑图$\varphi:D\to S,\psi:\Delta\to S$有相同定向, 故转移映射

$$T=\psi^{-1}\circ\varphi:\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta))\to\psi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta))$$

有正的Jacobi行列式: $\det T'(t)>0$ for all $t\in\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta))$.

由T的定义有

$$\psi(T(t))=\varphi(t)\qquad\forall\, t\in\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta)).$$

对任一组$1\le i_1<i_2<...<i_k\le n$, 记

$$\varphi_{i_1i_2...i_k}(t)=(\varphi_{i_1}(t),\varphi_{i_2}(t),...,\varphi_{i_k}(t))^\tau,\quad \psi_{i_1i_2...i_k}(s)=(\psi_{i_1}(s),\psi_{i_2}(s),...,\psi_{i_k}(s))^\tau$$

则有

$$\psi_{i_1i_2...i_k}(T(t))=\varphi_{i_1i_2...i_k}(t)\qquad\forall\, t\in\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta)).$$

于是有

$$\varphi'_{i_1i_2...i_k}(t)=\psi'_{i_1i_2...i_k}(s)\Big|_{s=T(t)}T'(t)\quad\forall\, t\in\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta)).$$

从而有

$$\det\varphi'_{i_1i_2...i_k}(t)=\det\psi'_{i_1i_2...i_k}(s)\Big|_{\tau=T(t)}\det T'(t)\quad\forall\, t\in\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta)).$$

即

$$\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)=\frac{\partial(\psi_{i_1},\psi_{i_2},...,\psi_{i_k})}{\partial(s_1,s_2,...,s_k)}(s)\Big|_{s=T(t)}\det T'(t)\quad\forall\, t\in\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta)).$$

同样计算有

$$\varphi'(t)=\psi'(s)T'(t)\quad\Longrightarrow\quad\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))}=\sqrt{\det(\psi'(s)^{\tau}\psi'(s))}|\det T'(t)|\ (\neq 0).$$

因$|\det T'(t)|=\det T'(t)>0$, 并注意当$t\in\varphi^{-1}(\varphi(D)\cap\psi(\Delta))$时, $s=T(t)$等价于$\psi(s)=\varphi(t)$, 这就给出(2.8). 所以$T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$在S_*上是良好定义的.

其次我们证明$x\mapsto T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$在每个$(S_j)^\circ$ 上是连续的. 任取$x_0\in(S_j)^\circ$. 因$(S_j)^\circ$是光滑流形(**命题11.10**), 故x_0位于一个光滑的局部图(D,φ,U)内, 即$x_0=\varphi(t_0)\in U, t_0\in D$, 这里$D=\mathbb{R}^k$ 或$=(\mathbb{H}^k)^\circ$. 因D是$\mathbb{R}^k$的开集, 故存在$\delta>0$ 使得$B^k(t_0,\delta)\subset D$. 因$\varphi:D\to U$ 是同胚而$U=(S_j)^\circ\cap V$ 是$(S_j)^\circ$的开集, 故$\varphi(B^k(t_0,\delta))$是U的开集从而是$(S_j)^\circ$的开集. 于是存在$\varepsilon>0$使得$(S_j)^\circ\cap B^n(x_0,\varepsilon)\subset\varphi(B^k(t_0,\delta))$. 令

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))}}\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t),\quad t\in B^k(t_0,\delta).$$

则f在$B^k(t_0,\delta)$连续. 同时由$T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$ 的定义有(此处注意当$x\in(S_j)^\circ\cap B^n(x_0,\varepsilon)$ 时, $t:=\varphi^{-1}(x)\in B^k(t_0,\delta)\subset D$ 且$\varphi(\varphi^{-1}(x))=x$)

$$T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)=f(t)\Big|_{\varphi(t)=x}=f(\varphi^{-1}(x)),\quad x\in(S_j)^\circ\cap B^n(x_0,\varepsilon).$$

由复合函数$x\mapsto f(\varphi^{-1}(x))$在$(S_j)^\circ\cap B^n(x_0,\varepsilon)$连续即知$x\mapsto T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$在$(S_j)^\circ\cap B^n(x_0,\varepsilon)$连续. 再由$x_0\in(S_j)^\circ$的任意性即知$x\mapsto T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$在$(S_j)^\circ$ 上连续.

因$\bigcup_{j=1}^N(S_j)^\circ$是Borel 集(见**命题11.6的推论:** $\mathbb{R}^n$中的每个流形都是Borel 集), 故$x\mapsto T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$是$\bigcup_{j=1}^N(S_j)^\circ$上的Borel 可测函数从而是$\sigma$-可测函数. 于是由(2.6),(2.7) 和$S\setminus\bigcup_{j=1}^N(S_j)^\circ$ 是σ-零测集即知$x\mapsto T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$是$S$上的$\sigma$-可测函数.

注意: 记号$T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$下标中的S 主要提示$T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)$的定义是按照S的定向确定的. 如果把S换成$-S$, 即考虑S的相反定向, 则有关系

$$T_{-S}^{i_1i_2\dots i_k}(x)=-T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)\qquad\forall\,x\in S.\tag{2.9}$$

事实上对任意$x\in S$, 当$x\in S\setminus S_*$ 时, 由定义当然有$T_S^{i_1i_2\dots i_k}(x)=T_{-S}^{i_1i_2\dots i_k}(x)=0$. 设$x\in S_*$. 设$\varphi:D\to S$ 为光滑的满秩的单射, 满足$\varphi(D)\ni x$, 其中$D\subset\mathbb{R}^k$ 为开区域, 并且$\varphi(D)$的定向与$-S$的定向一致. 据$T_{-S}^{i_1i_2\dots i_k}(x)$的定义有

$$T_{-S}^{i_1i_2\dots i_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^{\tau}\varphi'(t))}}\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(s_1,s_2,...,s_k)}(s)\Big|_{\varphi(s)=x}$$

令

$$\Delta=\{t=(t_1,t_2,...,t_k)\in\mathbb{R}^k\,|\,(t_1,...,t_{k-1},-t_k)\in D\},$$
$$\psi(t)=\varphi(t_1,...,t_{k-1},-t_k),\quad t\in\Delta.$$

则$\psi:\Delta\to S$是光滑的满秩的单射, 其定向与S的定向一致. 易见$\psi(\Delta)=\varphi(D)$ 因此$\psi(\Delta)\ni x$ 从而有

$$T_S^{i_1i_2...i_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\det(\psi'(t)^\tau\psi'(t))}}\frac{\partial(\psi_{i_1},\psi_{i_2},...,\psi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\Big|_{\psi(t)=x}.$$

如令$A=\mathrm{diag}(1,...,1,-1)\in\mathbb{R}^{k\times k}$(对角阵), 并记$\psi_{i_1i_2...i_k}(t),\varphi_{i_1i_2...i_k}(s)$ 如上. 则有

$$\psi_{i_1i_2...i_k}(t)=\varphi_{i_1i_2...i_k}(At),\quad \psi'_{i_1i_2...i_k}(t)=\varphi'_{i_1i_2...i_k}(At)A,$$

$$\psi(t)=\varphi(At),\quad \psi'(t)=\varphi'(At)A,\quad \det A=-1$$

从而有

$$\frac{\partial(\psi_{i_1},\psi_{i_2},...,\psi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)=\det\psi'_{i_1i_2...i_k}(t)=\det\varphi'_{i_1i_2...i_k}(s)\Big|_{s=At}\det A$$
$$=-\det\varphi'_{i_1i_2...i_k}(t)\Big|_{s=At}=-\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(s_1,s_2,...,s_k)}(s)\Big|_{s=At},$$

$$\det(\psi'(t)^\tau\psi'(t))=\det(\varphi'(s)^\tau\varphi'(s))|_{s=At}.$$

这就导出

$$T_S^{i_1i_2...i_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\det(\psi'(t)^\tau\psi'(t))}}\frac{\partial(\psi_{i_1},\psi_{i_2},...,\psi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\Big|_{\psi(t)=x}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{\det(\varphi'(s)^\tau\varphi'(s))}}\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(s_1,s_2,...,s_k)}(s)\Big|_{\varphi(s)=x}=-T_{-S}^{i_1i_2...i_k}(x).$$

所以(2.9)成立.

此外由**命题12.4** 知

$$\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\right)^2=\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t)).\tag{2.10}$$

代入$T_S^{i_1i_2...i_k}(x)$的定义(2.6)可知

$$\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}\left(T_S^{i_1i_2...i_k}(x)\right)^2\equiv 1,\quad x\in S_*.\tag{2.11}$$

以上我们对k维分片光滑的定向曲面定义了一组σ-可测函数组$\{T_S^{i_1i_2\dots i_k}(\cdot)\,|\,1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n\}$, 它们在$S_*$上连续且满足(2.11).

【微分形式的积分】我们称ω是S上的一个微分形式如果存在开集$\Omega\supset S$ 使得ω是Ω上的微分形式, 即ω的系数函数在Ω上有定义. 我们称k次微分形式

$$\omega(x)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}a_{i_1i_2\dots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},\quad x\in S \tag{2.12}$$

在S上可积如果所有系数函数$a_{i_1i_2\dots i_k}(x)$都在S上σ-可积, 这里$\sigma=H_k$是欧空间上的k-维Hausdorff 测度.

$S\subset\mathbb{R}^n$是一个紧的分片光滑的k-维定向曲面. 此时有$\sigma(S)<\infty$. 因此若ω的系数函数$a_{i_1i_2\dots i_k}(x)$为S上的有界连续函数或是有界Borel可测函数, 则可保证$a_{i_1i_2\dots i_k}(x)$在S上σ-可积.】设微分形式(2.12)在S上可积. 此时由(2.6) 和$\sigma(S\setminus S_*)=0$ 易见

$$\begin{aligned}&\int_S\left(\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}|a_{i_1i_2\dots i_k}(x)||T_S^{i_1,i_2,\dots,i_k}(x)|\right)\mathrm{d}\sigma(x)\\ \le&\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}\int_S|a_{i_1i_2\dots i_k}(x)|\mathrm{d}\sigma(x)<+\infty.\end{aligned}$$

于是我们定义$\omega(x)$在S**上沿着**S**的定向的积分**为

$$\int_S\omega(x)=\int_S\left(\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}a_{i_1i_2\dots i_k}(x)T_S^{i_1,i_2,\dots,i_k}(x)\right)\mathrm{d}\sigma(x). \tag{2.13}$$

注意由(2.9)有

$$\int_{-S}\omega(x)=-\int_S\omega(x).$$

这样, 我们就在第一型曲面积分的基础上定义了微分形式在曲面上的积分.

但是必需注意: 在第一型曲面积分中, 积分集S是曲面测度$\sigma(\cdot)$的积分集, 它与S的定向无关, 因此对S上的σ-可积的或非负σ-可测的任意函数$f(x)$ 都有

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma(x)=\int_{-S}f(x)\mathrm{d}\sigma(x).$$

而上面建立的第二型曲面积分所表现的定向, 也即积分前面正负符号的确定, 是由函数组$\{T_S^{i_1i_2\dots i_k}(\cdot)\,|\,1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n\}$和反号关系(2.9) 确定的！

【相差零测集不影响积分】设S 如上, 若集合(不必是流形)$\widetilde{S}\supset S$ 满足$\sigma(\widetilde{S}\setminus S)=0$, 则对于在$S$上可积的$k$次微分形式$\omega$, 将其系数做零延拓至$\widetilde{S}$上并定义$\int_{\widetilde{S}}\omega=\int_S\omega$.

【子集上的积分】设$E \subset S$ 是S一个σ-可测子集. 我们定义**在S的σ-可测子集E上的沿S 的定向的积分**为

$$\int_E \omega(x) = \int_S 1_E(x)\omega(x). \tag{2.14}$$

也即对于由形式

$$\omega(x) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} a_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

产生的形式

$$1_E(x)\omega(x) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} 1_E(x)a_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

我们定义在σ-可测子集E上的沿S的定向的积分为

$$\int_E \omega(x) = \int_S \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} 1_E(x)a_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

若使用第一型积分和特征函数性质, 则有

$$\int_E \omega(x) = \int_E \left(\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} a_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)T_S^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x)\right)\mathrm{d}\sigma(x). \tag{2.15}$$

注意这里我们默认了这样的约定: 当$E\subset S$且E是分片光滑的k-维定向曲面时, E的定向与S的定向相同. 对这种情形需要证明: 积分$\int_E \omega(x)$的含义与上面的定义是一致的, 也即需证明对任意一组$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$ 有

$$T_E^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x) = T_S^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x) \quad \text{a.e.} \quad x\in E. \tag{2.16}$$

其中a.e. (几乎处处) 是对曲面测度σ而言的. 但这是显然的: 令E_*是E的光滑点的集合, 即

$$E_* = \{x\in E \,|\, \text{存在}\mathbb{R}^k\text{的开区域}D\text{和光滑的满秩单射}\varphi : D\to E \text{ 使得}x\in\varphi(D)\}.$$

则由$E\subset S$ 知$E_*\subset S_*$ 从而当$x\in E_*$ 时有$T_E^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x) = T_S^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x)$. 而如前有$\sigma(E\setminus E_*)=0$, 所以(2.16) 成立.

由(2.15),(2.16) 便有

$$\int_E \omega(x) = \int_E \left(\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} a_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)T_E^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x)\right)\mathrm{d}\sigma(x). \tag{2.17}$$

因此上面用同一个记号$\int_E \omega$定义的两种积分是一致的.

此外容易看出, 这样定义的积分与前面对正则曲面建立的积分也是一致的, 意即当k次微分形式ω在S的任一正则的k维子曲面S_0上积分时, 积分的表示与上面得到的相同. 此外还可以要求S_0与S有相同的定向.事实上设$S_0=\varphi(D)\subset S$, 其中$D\subset\mathbb{R}^k$为$\mathbb{R}^k$的开区域, $\varphi: D\to S$ 为光滑的满秩单射. 因S是流形, 故由**定理11.1(流形上的区域不变定理)** 知$\varphi(D)$是S的开集, $\varphi: D\to S_0=\varphi(D)$ 是同胚. 因此S_0也是光滑的k-维定向曲面. 于是有

$$T_{S_0}^{i_1,i_2,...,i_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}}\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\Big|_{\varphi(t)=x}\quad\forall\, x\in S_0=\varphi(D)$$

(这是因为$S_0=S_{0*}$, 即S_0中每一点都是S_0的光滑点) 从而有

$$T_{S_0}^{i_1,i_2,...,i_k}(\varphi(t))=\frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}}\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\quad\forall\, t\in D. \tag{2.18}$$

于是对于S_0上可积的k次微分形式$\omega(x)=\sum\limits_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}a_{i_1i_2...i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ 有

$$\int_{S_0}\omega(x)=\int_D\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t.$$

进一步, 简单调整后可使S_0的定向与S的定向一致.此时由$T_S^{i_1,i_2,...,i_k}$的定义知$T_{S_0}^{i_1,i_2,...,i_k}(x)=T_S^{i_1,i_2,...,i_k}(x)$ for all $x\in S_0$. 于是将系数函数$a_{i_1i_2...i_k}(x)$ 作延拓, 例如零延拓至S 上, 便有

$$\int_{S_0}\omega(x)=\int_S 1_{S_0}(x)\omega(x)=\int_{S_0}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}a_{i_1i_2...i_k}(x)T_S^{i_1,i_2,...,i_k}(x)\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$=\int_D\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t.$$

以上提供了计算积分的方法— **拉到参数域上计算积分.**

对于S的**几乎正则**的子曲面S_0—— 即存在开区域$D\subset\mathbb{R}^k$ 满足$m(\partial D)=0$ 和存在$\varphi\in C^1(\overline{D},\mathbb{R}^n)$ 满足φ 在D内是光滑的满秩单射且$\varphi(D)\subset S_0\subset\varphi(\overline{D})$—— 则也有

$$\int_{S_0}\omega(x)=\int_{\overline{D}}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t.$$

它的证明是简单的, 留为练习.

让我们概括一下上述第二型曲面积分(即流形上的积分)的特点:

1° $\int_S \omega$ 表示微分形式ω 沿着定向曲面S的各点处的“切空间片”的积分, 只是这“切空间片”在积分(即有向Riemann和)中取得微分小而已. 这道理与力对质点移动的做功一样: 只有切向力对做功有贡献.

2° 积分$\int_S \omega$的定义还表明, ω在S上的积分只由ω 在S和S 的切空间上的行为决定, 与其它信息无关. 换言之, 只要两个微分形式$\omega(x), \eta(x)$ 对于S上的每一点x, 作为k-重线性函数$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., \boldsymbol{\xi}_k)$ 与$\eta(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., \boldsymbol{\xi}_k)$ 在$TS_x \times TS_x \times \cdots \times TS_x = (TS_x)^k$上相等, 则它们在$S$上的积分就相等, 即$\int_S \omega = \int_S \eta$. 这一点从积分的建立过程或积分的定义即可看出.

3° 如通常的积分一样, 第二型曲面积分具有**线性性、可加性、积分不等式等**. 但第二型曲面积分最重要的特性是它对**定向**的要求. 这些性质被收集在下面命题中:

【命题12.5(第二型积分的基本性质).】设$1 \le k \le n$. 设$S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个连通的分片光滑的k-维定向曲面, 设

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\eta(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

都是S上的σ-可积的k次微分形式(即它们的系数函数$a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x), b_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$ 在S上σ-可积),其中$\sigma = H_k$是欧空间上的k维Hausdorff 测度. 则有:

(a) 积分的基本估计:

$$\Big| \int_S \omega(x) \Big| \le \int_S \sqrt{\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} [a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)]^2} \, \mathrm{d}\sigma(x)$$
$$\le \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \int_S |a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)| \mathrm{d}\sigma(x) \;\; (< +\infty).$$

(b) 线性性: 对任意常数$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有

$$\int_S \alpha\omega(x) + \beta\eta(x) = \alpha \int_S \omega(x) + \beta \int_S \eta(x).$$

(c) 同向可加性: 设$E_j, j \ge 1$, 是S中可数个互不重叠的σ-可测集. 则沿着S的定向积分有

$$\int_{\bigcup_{j \ge 1} E_j} \omega(x) = \sum_{j \ge 1} \int_{E_j} \omega(x).$$

(d) 若ω,η的系数函数在S上对应地几乎处处相等, 即$a_{i_1i_2...i_k}(x) = b_{i_1i_2...i_k}(x)$ a.e. $x \in S$ for all $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$, 则沿着$S$的定向积分有

$$\int_S \omega(x) = \int_S \eta(x).$$

(e) 若对于S的每个光滑点x, 微分形式$\omega(x),\eta(x)$ 在切空间乘积$(TS_x)^k$ 上相等, 即

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k) = \eta(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_k) \in (TS_x)^k$$

则沿着S的定向积分有

$$\int_S \omega(x) = \int_S \eta(x).$$

(f) 沿相反定向的积分:

$$\int_{-S} \omega(x) = -\int_S \omega(x).$$

(g) 零测集对积分无贡献: 若$Z \subset S$ 且$\sigma(Z) = 0$, 则沿S 或$-S$的定向积分有

$$\int_Z \omega(x) = 0.$$

设$A, B \subset S$是S的σ-可测子集且$\sigma(A \setminus B) = \sigma(B \setminus A) = 0$, 则沿$S$的定向积分有

$$\int_A \omega(x) = \int_B \omega(x).$$

(h) 积分的计算: 设$S_0 \subset S$是S的一块正则子曲面, 即$S_0 = \varphi(D)$, 其中D为$\mathbb{R}^k$的开区域, $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ 是光滑的满秩单射. 则沿S_0的定向积分有

$$\int_{S_0} \omega(x) = \int_D \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t)) \frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

进一步有: 对于任一σ-可测集$E \subset S_0$, 沿S_0的定向积分有

$$\int_E \omega(x) = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t)) \frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(I) 积分的计算: 设$S_0 \subset S$ 并有开区域$D \subset \mathbb{R}^k$ 满足$m_k(\partial D) = 0$ 和映射$\varphi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ 满足φ 在D内是光滑的满秩单射使得$\varphi(D) \subset S_0 \subset \varphi(\overline{D})$. 则$\varphi(D)$是$S$上的一块正则曲面, $\sigma(S_0 \setminus \varphi(D)) = \sigma(\varphi(\overline{D}) \setminus \varphi(D)) = 0$, ω在S_0上沿着$\varphi(D)$的定向的积分为

$$\int_{S_0} \omega = \int_{\varphi(D)} \omega = \int_{\varphi(\overline{D})} \omega = \int_{\overline{D}} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} a_{i_1i_2...i_k}(\varphi(t)) \frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,t_2,...,t_k)}(t)\mathrm{d}t.$$

【证】留为练习. $\square$

【命题12.7(超曲面上的第二型积分).】 设$n \geq 2$, $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个紧的分片光滑的$n-1$维定向曲面, ω是定义在一个包含S的开集Ω上的C^1类的$n-1$次微分形式, 即

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}F_i(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

其中$F_i \in C^1(\Omega, \mathbb{R}), i = 1, 2, ..., n$. 设$\mathbf{n}(x)$ 是S上的单位法向量场, 其方向与S的定向一致(由于S可定向且出去一个零测集外S上的点都是光滑点, 故$\mathbf{n}(x)$ 在S上几乎处处有定义), 设$\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$. 则沿着$S$的定向积分(等价地, 沿着$\mathbf{n}(x)$的方向积分) 有

$$\int_S \omega(x) = \int_S \langle \mathbf{F}(x), \mathbf{n}(x)\rangle \mathrm{d}\sigma(x). \tag{2.19}$$

【证】由假设知$\sigma(S) < \infty$ 且$\mathbf{F}$在S上有界. 因此以上积分绝对收敛. 由第二型积分的第一型表示(2.13) 有

$$\int_S \omega(x) = \int_S \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}F_i(x)T_S^{1,...,\widehat{i},...,n}(x)\right)\mathrm{d}\sigma(x) \tag{2.20}$$

其中当$x \in S$为S的光滑时,

$$T_S^{1,...,\widehat{i},...,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}}\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \widehat{\varphi}_i, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t_1, t_2, ..., t_{n-1})}(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

这里局部图(I^k, φ, U)的定向与S的定向一致. 另一方面由方向与(I^k, φ, U)的定向一致的单位法向量的表示有

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}}\det\begin{pmatrix}
\mathbf{e}_1 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) \\
\mathbf{e}_2 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_{n-1}}(t) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{e}_n & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t)
\end{pmatrix}_{t=\varphi^{-1}(x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(\varphi'(t)^\tau\varphi'(t))}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \widehat{\varphi}_i, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t_1, t_2, ..., t_{n-1})}(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\mathbf{e}_i.
\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{n}(x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}T_S^{1,...,\widehat{i},...,n}(x)\mathbf{e}_i.$$

于是得到

$$\langle \mathbf{F}(x), \mathbf{n}(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)(-1)^{i-1} T_S^{1,\dots,\widehat{i},\dots,n}(x).$$

代入(2.20)即得(2.19). $\square$

【例】设$n \geq 2$,

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

则对于任一紧的分片光滑的$n-1$维定向曲面$S \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 沿着$S$的定向积分有

$$\int_S \omega(x) = \int_S \Big\langle \frac{x}{|x|^n}, \mathbf{n}(x) \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x).$$

特别对于球面

$$\mathbb{S}^{n-1}(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = R\}, \quad R > 0$$

沿着球面朝外的方向积分有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} \omega(x) &= \int_{|x|=R} \Big\langle \frac{x}{|x|^n}, \frac{x}{|x|} \Big\rangle \mathrm{d}\sigma(x) = \int_{|x|=R} \frac{1}{|x|^{n-1}} \mathrm{d}\sigma(x) \\ &= \frac{1}{R^{n-1}} \int_{|x|=R} \mathrm{d}\sigma(x) = \frac{1}{R^{n-1}} \sigma(\mathbb{S}^{n-1}(R)) = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}(1)) = |\mathbb{S}^n|\end{aligned}$$

其中$|\mathbb{S}^{n-1}| = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$是单位球面的面积.

例如对$n = 2, 3$ 分别有(沿着球面朝外的方向积分)

$$\int_{x^2+y^2=R^2} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 2\pi \qquad \text{(这也是沿圆周逆时针方向的线积分, 见后面命题)},$$

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\pi$$

其中用到

$$-\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.$$

$\square$

作业题

1. 证明**命题12.5(第二型积分的基本性质)** 中的**(a), (b), (c), (h),(I).**

【低维曲面和低维形式的积分, 例题】

考虑$\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$中的第二型曲线、曲面积分(即一次和二次形式的积分). 强调一点: 在计算积分时, 一般的参数换元公式

$$t \mapsto (x(t), y(t)), \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [\alpha, \beta];$$

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

等等当然是普适的, 但是若曲线或曲面有显式表示, 例如

平面曲线为

$$(x, y) = (x, y(x)) \ \ [x\text{是保向自变量}], \quad \text{或} \quad (x, y) = (x(y), y) \ \ [y\text{是保向自变量}]$$

或空间曲线为$(x, y, z) = (x, y(x), z(x)) \quad [x$是保向自变量] 等等,

或空间曲面为

$$(x, y, z) = (x, y, z(x, y)) \quad [(x, y)\text{是保向自变量}], \quad (x, y, z) = (x, y(x, z), z) \quad [(x, z)\text{是自保向变量}]$$

等等, 则也可以考虑这些以曲线、曲面所在空间中的变量为自变量的换元。

曲线积分: 一般公式(等式右边使用了曲线的参数表示并取参数增加的方向)

$$\int_S P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \Big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\Big)\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}&\int_S P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z \\ &= \int_\alpha^\beta \Big(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\Big)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这是普适的, 没什么好说的。

再看一种: 曲线S是矩形$[a, b] \times [c, d]$边界上的从右下角(b, c)经过逆时针走向到左下角(a, b)的这段折线。这时曲线积分的计算就要利用积分的同向可加性然后在每个光滑段上分别计算(计算时注意保持定向):

$$\begin{aligned}&\int_S P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \\ =\ &\int_{(b,c)\to(b,d)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \\ +\ &\int_{(b,d)\to(a,d)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \\ +\ &\int_{(a,d)\to(a,c)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对右边第一段: 曲线段为竖直线段: $x=x(y)=b$(常数), $y\in[c,d]$, 且y的增加的方向与曲线定向一致, 因此y可做参数自变量. 这时有$x'(y)\equiv 0, y'(y)\equiv 1$ 从而有

$$\int_{(b,c)\to(b,d)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \Big(P(x(y),y)x'(y)+Q(x(y),y)y'(y)\Big)\mathrm{d}y$$
$$=\int_c^d Q(b,y)\mathrm{d}y.$$

对右边第二段: 曲线段为水平线段$x\in[a,b], y=y(x)=d$(常数), 但x减少的方向与曲线定向一致, 或者做替换$x=x(t)=a+b-t$, $t\in[a,b]$. 这时t的增加的方向与原曲线的定向一致. 这时有$x'(t)=(a+b-t)'\equiv -1, y'(t)\equiv 0$ 从而有

$$\int_{(b,d)\to(a,d)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b \Big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b P(a+b-t,d)(-1)\mathrm{d}t=-\int_a^b P(a+b-t,d)\mathrm{d}t.$$

注意：由于$t\in[a,b]$是取增加的方向, 因此积分中的$\mathrm{d}t$ 就是Lebesgue 测度元即$\mathrm{d}t>0$, 也即积分$\int_a^b P(a+b-t,d)\mathrm{d}t$就是通常的定积分. 故我们可以做变量替换

$$\int_a^b P(a+b-t,d)\mathrm{d}t \quad (t=a+b-x) \quad =\int_a^b P(x,d)\mathrm{d}x.$$

于是第二段积分也可写成

$$\int_{(b,d)\to(a,d)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_a^b P(x,d)\mathrm{d}x.$$

所以

$$\int_S P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b P(x,c)\mathrm{d}x+\int_a^b Q(b,y)\mathrm{d}y$$

对这段积分的计算也可以采用这样的做法: 对水平线段$x\in[a,b], y=y(x)=d$(常数), 先按x增加的方向计算, 也即先按原曲线段的反向曲线计算, 算完后, 由于正向积分与反向积分二者只差一个符号, 故在将结果乘以-1即可. 也即

$$-\int_{(b,d)\to(a,d)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(a,d)\to(b,d)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b \Big(P(x,y(x))x'(x)+Q(x,y(x))y'(x)\Big)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,d)\mathrm{d}x,$$
$$\Longrightarrow \quad \int_{(b,d)\to(a,d)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_a^b P(x,d)\mathrm{d}x.$$

对右边第三段: 曲线段为数值线段$x = x(y) = a, y \in [c, d]$ (常数), 但y减少的方向与曲线定向一致, 也即y增加的方向与曲线的反向一致. 因此有

$$
\begin{aligned}
&-\int_{(a,d)\to(a,c)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(a,c)\to(a,d)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d \Big(P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)y'(y)\Big)\mathrm{d}y = \int_c^d Q(a,y)\mathrm{d}y \\
&\Longrightarrow \quad \int_{(a,d)\to(a,c)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_c^d Q(a,y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

综合起来得到

$$
\begin{aligned}
&\int_S P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d Q(b,y)\mathrm{d}y - \int_a^b P(x,d)\mathrm{d}x - \int_c^d Q(a,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d \Big(Q(b,y) - Q(a,y)\Big)\mathrm{d}y - \int_a^b P(x,d)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

对$\mathbb{R}^3$中的曲线积分也做类似计算.

曲面积分: 一般计算公式(总假定参数域D的正向对应S的定向)

$$
\begin{aligned}
&\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \bigg(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\
&\qquad + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \\
&\qquad + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\bigg)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

S上的连续单位法向量为

$$
\mathbf{n}(x,y,z) = \frac{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)}{\sqrt{\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2}}\Bigg|_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(x,y,z)}.
$$

如果S上的单位法向量场是这样确定的(例如): S在z-轴附近的单位法向量场$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$与$z$-轴的正向成锐角, 即$n_3 > 0$, 则你在计算时就要检查上述单位法向量场$\mathbf{n}(x,y,z)$在$z$-轴附近是否满足$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$. 如果不是, 则表明你是在计算$S$的反向的积分, 这时只要在计算结果中乘以$-1$就得到原来定向的积分. 大体上可以用这类办法保证定向积分符号的正确性。

显式曲面的情形, 例如$S:\ z=z(x,y),\ (x,y)\in D$. 则有

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\iint_D\Big(P(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial x})+Q(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial y})+R(x,y,z(x,y))\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

S上的连续单位法向量为

$$\mathbf{n}(x,y,z)=\frac{(-\frac{\partial z}{\partial x},\ -\frac{\partial z}{\partial y},\ 1)}{\sqrt{|\frac{\partial z}{\partial x}|^2+|\frac{\partial z}{\partial y}|^2+1}}\Bigg|_{z=z(x,y)}.$$

这个法向量的方向与z-轴成锐角, 也即S的定向是S的上侧, 即朝上的方向. 如果要计算沿S的下侧(即朝下方向)的积分, 则或者把上面$\mathbf{n}$ 换成$-\mathbf{n}$ 然后计算, 或者先按朝上方向计算, 然后对计算结果乘以-1.

【例】设

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1\}.$$

试给出沿S下侧的积分

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

的计算公式。

【解】S的下侧即S在z-轴附近的单位法向量场$\mathbf{n}$与z-轴的正向成**顿**角。这S的显式曲面$S:z=z(x,y)=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1$. S的上侧即S的与z-轴的正向成**锐**角的单位法向量为

$$\mathbf{n}(x,y,z)=\frac{(-2x,\ -2y,\ 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\Bigg|_{z=x^2+y^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\iint_{S_{\text{上侧}}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\le1}\Big(P(x,y,x^2+y^2)(-2x)+Q(x,y,x^2+y^2)(-2y)+R(x,y,x^2+y^2)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

进一步的计算可以利用极坐标换元公式. 计算后乘以-1即得沿S下侧的积分:

$$\begin{aligned}&\iint_{S_{\text{下侧}}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\le1}\Big(P(x,y,x^2+y^2)2x+Q(x,y,x^2+y^2)2y-R(x,y,x^2+y^2)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

12.3 Stokes 公式

本节学习流形上的微分形式积分中最重要的定理— Stokes 公式, 它是牛顿-莱布尼兹公式的深刻推广.

为证明Stokes 公式, 需要回忆函数的支集概念并证明两个引理.

设r为非负整数或$r=\infty$. 令

$$C_c^r(\mathbb{R}^n)=\{f\in C^r(\mathbb{R}^n)\mid \mathrm{supp}f:=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\neq 0\}}\ \text{是紧集}\}.$$

【引理12.7.】设$S\subset\mathbb{R}^n$是一个紧集, $\Omega\subset\mathbb{R}^n S$为一开集且$S\subset\Omega$. 设$r$为非负整数或$r=\infty$, 设$a\in C^r(\Omega)$. 则存在$\mathbb{R}^n$的开集$\widetilde{\Omega}$满足$S\subset\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ 和函数$\widetilde{a}\in C_c^r(\mathbb{R}^n)$ 使得$\widetilde{a}|_{\widetilde{\Omega}}=a$.

【证】令$\Omega_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\mathrm{dist}(x,S)<\varepsilon\},\varepsilon>0$ 则存在$\varepsilon>0$ 充分小使得$\Omega_{4\varepsilon}\subset\Omega$. 对于紧集$\overline{\Omega_\varepsilon}=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\mathrm{dist}(x,S)\le\varepsilon\}$ (这个等式是第七章关于距离函数性质的例题的结果) 和包含它的开集$\Omega_{2\varepsilon}$, 由第八章单位分解定理的推论知存在函数$\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足$0\le\phi\le1$ 于$\mathbb{R}^n$,$\mathrm{supp}\phi\subset\Omega_{2\varepsilon}$ 和$\phi(x)=1$ for all $x\in\overline{\Omega_\varepsilon}$. 将函数$a$零延拓至$\mathbb{R}^n$并令$\widetilde{a}(x)=\phi(x)a(x),x\in\mathbb{R}^n$. 来证明这个函数$\widetilde{a}$ 和开集$\widetilde{\Omega}=\Omega_\varepsilon$即满足引理要求. 首先有当$x\in\Omega_\varepsilon$时$\widetilde{a}(x)=a(x)$, 所以$\widetilde{a}|_{\Omega_\varepsilon}=a$. 其次证明$\widetilde{a}\in C^r(\mathbb{R}^n)$. 对任意$x_0\in\mathbb{R}^n$, 若$x_0\in\Omega_{3\varepsilon}$, 则有$B^n(x_0,\varepsilon)\subset\Omega_{4\varepsilon}$ [细节: 取$x_{0*}\in S$ 使得$\mathrm{dist}(x_0,S)=|x_0-x_{0*}|<3\varepsilon$. 因此当$x\in B^n(x_0,\varepsilon)$时$\mathrm{dist}(x,S)\le|x-x_{0*}|\le|x-x_0|+|x_0-x_{0*}|<\varepsilon+3\varepsilon=4\varepsilon$ 因此$x\in\Omega_{4\varepsilon}$. 所以$B^n(x_0,\varepsilon)\subset\Omega_{4\varepsilon}$.] 这导出函数$\widetilde{a}(x)=\phi(x)a(x)$在$B^n(x_0,\varepsilon)$上属于$C^r$类. 若$x_0\notin\Omega_{3\varepsilon}$, 则必有$B^n(x_0,\varepsilon)\cap\Omega_{2\varepsilon}=\emptyset$ [细节: 反证法, 假设存在$y\in B^n(x_0,\varepsilon)\cap\Omega_{2\varepsilon}$. 那么取$y_*\in S$ 使得$\mathrm{dist}(y,S)=|y-y_*|<2\varepsilon$. 由此因此有$\mathrm{dist}(x_0,S)\le|x_0-y_*|\le|x_0-y|+|y-y_*|<\varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon$ 因此$x_0\in\Omega_{3\varepsilon}$, 这矛盾于$x_0\notin\Omega_{3\varepsilon}$.] 因$\mathrm{supp}\phi\subset\Omega_{2\varepsilon}$, 故得$\widetilde{a}(x)=\phi(x)a(x)=0$ for all $x\in B^n(x_0,\varepsilon)$ 从而仍有$\widetilde{a}(x)=\phi(x)a(x)$在$B^n(x_0,\varepsilon)$上属于$C^r$类. 据$x_0\in\mathbb{R}^n$的任意性知$\widetilde{a}\in C^r(\mathbb{R}^n)$. 最后再由$\widetilde{a}=\phi a$ 和$\mathrm{supp}\phi$是紧集有

$$\mathrm{supp}\widetilde{a}=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n \mid \widetilde{a}(x)\neq0\}}\subset\overline{\{x\in\mathbb{R}^n \mid \phi(x)\neq0\}}=\mathrm{supp}\phi$$

所以$\mathrm{supp}\widetilde{a}$是紧集.所以$\widetilde{a}\in C_c^r(\mathbb{R}^n)$. $\square$

【引理12.8.】 设$2\le k\le n, D=\mathbb{R}^k$或$=\mathbb{H}^k$, $S=\varphi(D)$ 其中$\varphi\in C^2(D,\mathbb{R}^n)$ 为满秩单射且$\varphi: D\to S$是同胚(从而S是k维光滑曲面). 假设$\sigma(S)<\infty$, 这里$\sigma=\sigma_k$ 是欧空间上的k-维Hausdorff测度. 设$a\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ (即支集$\mathrm{supp}a:=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n\mid a(x)\neq 0\}}$是紧集). 对于正整数组$1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\le n$, 令$\omega$是$\mathbb{R}^n$上的$k-1$次微分形式单项式:

$$\omega(x)=a(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{k-1}}.$$

则$\mathrm{d}\omega,\omega$分别在S上和∂S上可积且

$$\int_S\mathrm{d}\omega(x)=\int_{\partial S}\omega(x).$$

特别当$D=\mathbb{R}^k$时有$S=S^\circ$即$\partial S=\emptyset$ 从而有

$$\int_S\mathrm{d}\omega(x)=\int_\emptyset\omega(x)=0.$$

【证】 先证a的偏导数$\frac{\partial a}{\partial x_j}$也有紧支集且$\mathrm{supp}\frac{\partial a}{\partial x_j}\subset\mathrm{supp}a, j=1,2,...,n$. 令$K=\mathrm{supp}a$. 则对任意$x_0\in\mathbb{R}^n\setminus K$ 存在$\delta>0$ 使得$B^n(x_0,\delta)\subset\mathbb{R}^n\setminus K$(因这集合是开集). 由$K$和支集的定义知$a(x)=0$ for all $x\in B^n(x_0,\delta)$. 因此$\frac{\partial a}{\partial x_j}(x_0)\,(j=1,2,...,n)$. 由$x_0\in\mathbb{R}^n\setminus K$的任意性知$\{x\in\mathbb{R}^n\mid\frac{\partial a}{\partial x_j}(x)\neq 0\}\subset K$. 因此

$$K_j:=\mathrm{supp}\frac{\partial a}{\partial x_j}=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n\mid\frac{\partial a}{\partial x_j}(x)\neq 0\}}\subset\overline{K}=K,\quad j=1,2,...,n.$$

这同时表明K_j是紧集.由于紧集上的连续函数有界, 故有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|a(x)|=\max_{x\in K}|a(x)|<\infty,\quad\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\Big|=\max_{x\in K_j}\Big|\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\Big|<\infty,\quad j=1,2,...,n.$$

由假设$\sigma(S)<\infty$ 有

$$\int_S\Big|\frac{\partial a}{\partial x_j}(x)\Big|\mathrm{d}\sigma(x)\le\max_{x\in K_j}\Big|\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\Big|\sigma(S)<+\infty,\quad j=1,2,...,n$$

因此$\mathrm{d}\omega$在S上σ-可积.

计算$\varphi^*\omega(t)$和$\varphi^*(\mathrm{d}\omega)(t)$:

$$\begin{aligned}&\varphi^*\omega(t)=a(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi_{i_1}(t)\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_2}(t)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_{k-1}}(t)\\&=a(\varphi(t))\sum_{j=1}^k\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_{k-1}})}{\partial(t_1,...,\widehat{t_j},...,t_k)}(t)\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k\\&=\sum_{j=1}^kA_j(t)\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k\end{aligned}$$

其中

$$A_j(t)=(a(\varphi(t))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_{k-1}})}{\partial(t_1,...,\widehat{t_j},...,t_k)}(t),\quad j=1,2,...,k.$$

继续, 由拉回映射和外微分的运算性质有

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathrm{d}\omega)(t)&=\mathrm{d}(\varphi^*\omega)(t)=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{d}A_j(t)\wedge\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k\\&=\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial A_j}{\partial t_r}(t)\mathrm{d}t_r\wedge\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k\\&=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t_j\wedge\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k\qquad(\text{然后相邻交换}j-1\text{次})\\&=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t_1\wedge\mathrm{d}t_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k.\end{aligned}$$

注意$S=\varphi(D)$, 于是有 (注意积分时$\mathrm{d}t_1\wedge\mathrm{d}t_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k=\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k=\mathrm{d}t$)

$$\int_S\mathrm{d}\omega(x)=\int_D\varphi^*(\mathrm{d}\omega)(t)=\sum_{s=1}^{k}(-1)^{j-1}\int_D\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t.\tag{3.1}$$

来计算右边积分. 首先对于紧集$K=\mathrm{supp}a$ 有

$$\{t\in D\mid a(\varphi(t))\neq0\}\subset\{t\in D\mid\varphi(t)\in K\}=\varphi^{-1}(K).$$

因$\varphi^{-1}:S\to D$连续, 故$\varphi^{-1}(K)$是D中的紧集, 从而是有界集. 因此存在$0<R<\infty$ 使得$\varphi^{-1}(K)\subset D\cap[-R,R]^k$. 于是得到

$$\{t\in D\mid a(\varphi(t))\neq0\}\subset D\cap[-R,R]^k.\tag{3.2}$$

因$D\cap[-R,R]^k$ 是D的闭集, 也即$D\setminus(D\cap[-R,R]^k)$ 是D的开集, 故由$a(\varphi(t))=0$ for all $t\in D\setminus(D\cap[-R,R]^k)$ 知

$$a(\varphi(t))=0,\quad\frac{\partial}{\partial t_j}(a(\varphi(t)))=0\quad\forall\,t\in D\setminus(D\cap[-R,R]^k),\ j=1,2,...,k.$$

这蕴含

$$\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)=0\qquad\forall\,t\in D\setminus(D\cap[-R,R]^k),\ \ j=1,2,...,k.$$

此外注意: 当D中的$t=(t_1,t_2,...,t_k)$的分量中有一个等于R 或$-R$时必有$a(\varphi(t))=0$ 从而$A_j(t)=0$, 否则由$a(\varphi(\cdot))$的连续性知将与(3.2)矛盾.

于是有

$$\int_D\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t=\int_{D\cap[-R,R]^k}\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t.$$

当$D=\mathbb{R}^k$时, 由Fubini 定理和一维区间上的牛顿-莱布尼茨公式和

$$A_j(t)|_{t_j=-R}=A_j(t)|_{t_j=R}=0$$

有

$$\int_{\mathbb{R}^k}\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t=\int_{[-R,R]^{k-1}}\left(\int_{-R}^{R}\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t_j\right)\mathrm{d}t_1\cdots\widehat{\mathrm{d}t_j}\cdots\mathrm{d}t_k$$
$$=\int_{[-R,R]^{k-1}}\left(A_j(t)\Big|_{t_j=-R}^{t_j=R}\right)\mathrm{d}t_1\cdots\widehat{\mathrm{d}t_j}\cdots\mathrm{d}t_k=0,\quad j=1,2,...,k.$$

因此当$D=\mathbb{R}^k$时有

$$\int_S\mathrm{d}\omega(x)=0=\int_{\emptyset}\omega(x).$$

设$D=\mathbb{H}^k$. 令$\widetilde{\varphi}(s)=\varphi(0,s)=\varphi(0,s_1,s_2,...,s_{k-1})$. 则由$S=\varphi(\mathbb{H}^k)$是一个$k$维光滑曲面知$\partial S=\varphi(\partial\mathbb{H}^k)=\widetilde{\varphi}(\mathbb{R}^{k-1})$ 是一个$k-1$维的光滑曲面(参见**命题11.4**,**命题11.10**,**命题11.11**). 看可积性: 易见$\widetilde{\varphi}$ 在$\mathbb{R}^{k-1}$ 是满秩的: $\det(\widetilde{\varphi}'(s)^\tau\widetilde{\varphi}'(s))=\det(\varphi'(0,s)^\tau\varphi'(0,s))>0$ for all $s\in\mathbb{R}^{k-1}$. 因此由第一型曲面积分的换元公式有

$$\int_{\partial S}|a(x)|\mathrm{d}H_{k-1}(x)=\int_{\mathbb{R}^{k-1}}|a(\widetilde{\varphi}(s))|\sqrt{\det(\widetilde{\varphi}'(s)^\tau\widetilde{\varphi}'(s))}\,\mathrm{d}s$$
$$=\int_{\mathbb{R}^{k-1}}|a(\varphi(0,s))|\sqrt{\det(\varphi'(0,s)^\tau\varphi'(0,s))}\,\mathrm{d}s$$
$$=\int_{[-R,R]^{k-1}}|a(\varphi(0,s))|\sqrt{\det(\varphi'(0,s)^\tau\varphi'(0,s))}\,\mathrm{d}s<\infty.$$

所以ω在∂S上可积.

计算: 由$\mathbb{H}^k\cap[-R,R]^k=[-R,0]\times[-R,R]^{k-1}$ 知当$2\le j\le k$时, 如上由Fubini 定理和一维区间上的牛顿-莱布尼茨公式有

$$\int_{\mathbb{H}^k}\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t=\int_{[-R,0]\times[-R,R]^{k-2}}\left(\int_{-R}^{R}\frac{\partial A_j}{\partial t_j}(t)\mathrm{d}t_j\right)\mathrm{d}t_1\cdots\widehat{\mathrm{d}t_j}\cdots\mathrm{d}t_k$$
$$=0,\quad j=2,3,...,k.$$

当$j=1$时,

$$\int_{\mathbb{H}^k}\frac{\partial A_1}{\partial t_1}(t)\mathrm{d}t=\int_{[-R,R]^{k-1}}\left(\int_{-R}^{0}\frac{\partial A_1}{\partial t_1}(t)\mathrm{d}t_1\right)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\cdots\mathrm{d}t_k$$
$$=\int_{[-R,R]^{k-1}}A_1(0,t_2,t_3,...,t_k)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\cdots\mathrm{d}t_k$$
$$=\int_{[-R,R]^{k-1}}a(\varphi(0,t_2,...,t_k))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_{k-1}})}{\partial(t_2,t_3,...,t_k)}(0,t_2,...,t_k)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\cdots\mathrm{d}t_k$$
$$=\int_{[-R,R]^{k-1}}a(\varphi(0,s_1,...,s_{k-1}))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_{k-1}})}{\partial(s_1,s_2,...,s_{k-1})}(0,s_1,...,s_{k-1})\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_{k-1}.$$

另一方面有

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}^*\omega(s) &= a(\widetilde{\varphi}(s))\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_{i_1}(s)\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_{i_1}(s)\wedge\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_{i_2}(s)\cdots\wedge\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_{i_{k-1}}(s)\\ &= a(\widetilde{\varphi}(s))\frac{\partial(\widetilde{\varphi}_{i_1},\widetilde{\varphi}_{i_2},...,\widetilde{\varphi}_{i_{k-1}})}{\partial(s_1,s_2,...,s_{k-1})}(s)\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}s_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}s_{k-1}\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial S}\omega(x)=\int_{\varphi(\partial\mathbb{H}^k)}\omega(x)=\int_{\widetilde{\varphi}(\mathbb{R}^{k-1})}\omega(x)=\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\widetilde{\varphi}^*\omega(s)\\ &=\int_{\mathbb{R}^{k-1}}a(\widetilde{\varphi}(s))\frac{\partial(\widetilde{\varphi}_{i_1},\widetilde{\varphi}_{i_2},...,\widetilde{\varphi}_{i_{k-1}})}{\partial(s_1,s_2,...,s_{k-1})}(s)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_{k-1}\\ &=\int_{\mathbb{R}^{k-1}}a(\varphi(0,s))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_{k-1}})}{\partial(s_1,s_2,...,s_{k-1})}(0,s)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_{k-1}\\ &=\int_{[-R,R]^{k-1}}a(\varphi(0,s))\frac{\partial(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},...,\varphi_{i_{k-1}})}{\partial(s_1,s_2,...,s_{k-1})}(0,s)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_{k-1}.\end{aligned}$$

将这些计算结果代入$\int_S\mathrm{d}\omega$的算式(3.1)可知这时仍有

$$\int_S\mathrm{d}\omega(x)=\int_{\partial S}\omega(x).\qquad\Box$$

在证明一般的紧光滑定向曲面上Stokes公式时, 需要第八章讲授的单位分解定理. 为了同学复习方便, 我们把这一定理列在下面(记号略有调整):

【定理8.31(单位分解).】 设$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为$\mathbb{R}^n$中的一族开集, 则存在**非负**函数列$\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$具有下列性质:

(i) 对每个$j\in\mathbb{N}$, $\psi_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且存在$\alpha_j\in A$ 使得$\mathrm{supp}\phi_j\subset V_{\alpha_j}$, 并且

$$\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha=\bigcup_{j=1}^\infty V_{\alpha_j}.$$

(ii) 函数列$\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$具有局部有限性, 即对每个紧集$K\subset\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha$, 下标集 $J:=\{j\in\mathbb{N}\mid\exists x\in K\ \text{s.t.}\ \psi_j(x)\neq 0\}$ 是有限集. 因此

$$\text{对任意}j\in\mathbb{N}\setminus J\ \text{有}\quad\phi_j(x)\equiv 0,\quad x\in K.$$

(iii)

$$\sum_{j=1}^\infty\psi_j(x)\equiv 1,\qquad x\in\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha.$$

[**具有性质(i)-(iii)的非负函数列**$\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ **称为从属于开集族**$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$**的一个光滑的单位分解.**]

【**定理12.9(紧的光滑定向曲面上的Stokes公式)**】设$2 \le k \le n$, $S \subset \mathbb{R}^n$是一个紧的C^2类的k维定向曲面. 设ω是定义在一个包含S的开集上的C^1类的$k-1$次微分形式. 则有

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x) = \int_{\partial S} \omega(x).$$

这里当$\partial S \neq \emptyset$时, ∂S的定向与S的定向和谐. 若$\partial S = \emptyset$, 即S无边, 则上式右边为0.

【证】设$\mathcal{A}(S) = \{(I_\alpha^k, \varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是S的一个C^2类的定向图册, 其中$I_\alpha^k = \mathbb{R}^k$ 或$\mathbb{H}^k$. 因U_α是S的开集, 故存在$\mathbb{R}^n$的开集V_α使得$U_\alpha = S \cap V_\alpha$. 于是开集族$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 覆盖了S. 由**定理8.31(单位分解)**知存在从属于开集族$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$的一个光滑的单位分解$\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$.

为证Stokes 公式, 先设ω是单项式:

$$\omega(x) = a(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{k-1}}, \quad x \in \Omega$$

其中$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \le n$, Ω是$\mathbb{R}^n$的一个包含S的开集, 函数$a \in C^1(\Omega)$. 因外微分$\mathrm{d}\omega(x)$只由ω的系数函数在S的小邻域内确定, 与在小邻域外的值无关(因而在小邻域外可以任意修改函数值), 故由**引理12.6**知可以假定$a \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. 考虑包含$S$的开集:

$$\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, S) < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

因S是紧集且$S \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, 故有$\mathrm{dist}(S, (\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha)^c) > 0$. 取$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(S, (\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha)^c)$ 则有

$$\overline{\Omega}_\varepsilon \subset \Omega_{2\varepsilon} \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$$

由S是紧集(从而是有界集)知$\overline{\Omega}_\varepsilon$是紧集. 对这个紧集$\overline{\Omega}_\varepsilon$, 由上述单位分解定理知$J := \{j \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \overline{\Omega}_\varepsilon \text{ s.t. } \psi_j(x) \neq 0\}$ 是有限集. 调整记号后可设$J = \{1, 2, ..., N\}$. 于是有: $\alpha_j \in A, j = 1, 2, ..., N$, $0 \le \psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), j = 1, 2, ..., N$ 和

$$\mathrm{supp}\psi_j \subset V_{\alpha_j}, \ \ j = 1, 2, ..., N; \quad \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \equiv 1, \quad x \in \overline{\Omega}_\varepsilon.$$

因$S \subset \Omega_\varepsilon \subset \overline{\Omega}_\varepsilon$, 故这蕴含$S \subset \bigcup_{j=1}^N V_{\alpha_j}$ 从而有$S = \bigcup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$. 于是$\{(I_{\alpha_j}^k, \varphi_{\alpha_j}, U_{\alpha_j})\}_{j=1}^N$ 仍是S的定向图册.

因S是紧的C^2类的k维曲面故易见$\sigma(S) = \sigma_k(S) < +\infty$. 同时$\partial S$ 也是紧的C^2类的$k-1$维曲面. 因此$\sigma_{k-1}(\partial S) < +\infty$. 由紧集上的连续函数有界知$\frac{\partial a}{\partial x_i}$在$S$上$\sigma$-可积($i = 1, 2, .., n$), a在∂S上σ_{k-1}-可积. 换言之$\mathrm{d}\omega$在S上σ-可积, ω在∂S上σ_{k-1}-可积. 这些保证了下面推导中出现的微分形式都是可积的.

注意外微分d是对定义在开集上的C^1类的形式定义的. 因此由$\sum_{j=1}^N \psi_j(x) \equiv 1$于$\Omega_\varepsilon$ 有

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x)\omega(x) \qquad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon$$

从而由外微分的线性性有

$$\mathrm{d}\omega(x) = \sum_{j=1}^N \mathrm{d}(\psi_j\omega)(x) \qquad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon.$$

于是再由积分的线性性有

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x) = \int_S \sum_{j=1}^N \mathrm{d}(\psi_j\omega)(x) = \sum_{j=1}^N \int_S \mathrm{d}(\psi_j\omega)(x). \tag{3.3}$$

注意$\psi_j(x)\omega(x) = \psi_j(x)a(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{k-1}}$ 且$\psi_j a \in C_c^1(\mathbb{R}^n), \mathrm{supp}(\psi_j a) \subset \mathrm{supp}\psi_j \subset U_{\alpha_j}$. 因$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}\psi_j$是**开集**, 且$\psi_j(x)a(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}\psi_j$, 故有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_j a)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}\psi_j, \quad i = 1, 2, ..., n$$

从而有$\mathrm{d}(\psi_j\omega)(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}\psi_j$. 又因$\mathrm{supp}\psi_j \subset V_{\alpha_j}$ 和$S \cap V_{\alpha_j} = U_{\alpha_j} = \varphi_{\alpha_j}(I_{\alpha_j}^k)$, 因此有

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{d}(\psi_j\omega)(x) &= \int_{S\setminus V_{\alpha_j}} \mathrm{d}(\psi_j\omega)(x) + \int_{S\cap V_{\alpha_j}} \mathrm{d}(\psi_j\omega)(x)\\ &= \int_{U_{\alpha_j}} \mathrm{d}(\psi_j\omega)(x) = \int_{\partial U_{\alpha_j}} \psi_j\omega, \quad j = 1, 2, ..., N\end{aligned}$$

这里最后一个积分等号用到了**引理12.8.** 于是由(3.3)有

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial U_{\alpha_j}} \psi_j\omega. \tag{3.4}$$

若$\partial S = \emptyset$, 即一切$I_{\alpha_j}^k = \mathbb{R}^k$ 时, 此时有$U_{\alpha_j} = \varphi_{\alpha_j}(\mathbb{R}^k), \partial U_{\alpha_j} = \emptyset, j = 1, 2, ..., N$ 从而有

$$\int_S \mathrm{d}\omega(x) = \sum_{j=1}^N \int_\emptyset \psi_j\omega = 0 = \int_{\partial S} \omega.$$

设$\partial S \neq \emptyset$. 则$\partial S$的与$S$的定向和谐的定向图册为

$$\mathcal{A}(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_{\alpha_j}(0, \cdot), \partial U_{\alpha_j}) \mid j \in \{1, 2, ..., N\}, I_{\alpha_j}^k = \mathbb{H}^k\}.$$

特别注意这蕴含$\partial S \supset \partial U_{\alpha_j}, j = 1, 2, ..., N$. 这是因为对任意$j \in \{1, 2, ..., N\}$, 若$I_{\alpha_j}^k = \mathbb{H}^k$, 则当然有$\partial S \supset \partial U_{\alpha_j}$; 若$I_{\alpha_j}^k = \mathbb{R}^k$, 则也有$\partial S \supset \emptyset = \partial U_{\alpha_j}$.

来证明
$$\int_{(\partial S)\setminus\partial U_{\alpha_j}}\psi_j\omega=0\quad 即\quad \int_{\partial U_{\alpha_j}}\psi_j\omega=\int_{\partial S}\psi_j\omega,\quad j=1,2,...,N. \tag{3.5}$$
为此只需证明当$x\in(\partial S)\setminus\partial U_{\alpha_j}$时$\psi_j(x)=0$. 否则存在$x_0\in(\partial S)\setminus\partial U_{\alpha_j}$使得$\psi_j(x_0)\neq 0$. 则这蕴含$x_0\in\mathrm{supp}\psi_j$ 从而由$\partial S\subset S$ 有$x_0\in S\cap V_{\alpha_j}=U_{\alpha_j}$. 于是有$x_0\in U_{\alpha_j}\setminus\partial U_{\alpha_j}=(U_{\alpha_j})^\circ\subset S^\circ$, 这与$x_0\in\partial S$ 矛盾. 这证明了(3.5)成立.

于是再注意$\partial S\subset S$ 和$\sum_{j=1}^N\psi_j(x)\equiv 1$于$\Omega_\varepsilon\supset S$ 以及(3.4), (3.5)得到
$$\int_S \mathrm{d}\omega(x)=\sum_{j=1}^N\int_{\partial S}\psi_j\omega=\int_{\partial S}\sum_{j=1}^N\psi_j\omega=\int_{\partial S}\Big(\sum_{j=1}^N\psi_j\Big)\omega=\int_{\partial S}\omega.$$
最后设ω为一个定义在包含S的开集上的一般的C^1类的$k-1$次形式:
$$\omega=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}a_{i_1i_2...i_{k-1}}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{k-1}}=:\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}\omega_{i_1i_2...i_{k-1}}.$$
则对每个单项式
$$\omega_{i_1i_2...i_{k-1}}(x)=a_{i_1i_2...i_{k-1}}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{k-1}}$$
应用上面结果, 据外微分的线性性和积分的线性性即得
$$\begin{aligned}\int_S\mathrm{d}\omega&=\int_S\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}\mathrm{d}\omega_{i_1i_2...i_{k-1}}=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}\int_S\mathrm{d}\omega_{i_1i_2...i_{k-1}}\\&=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}\int_{\partial S}\omega_{i_1i_2...i_{k-1}}=\int_{\partial S}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}\omega_{i_1i_2...i_{k-1}}=\int_{\partial S}\omega.\end{aligned}$$
定理证毕. □

【定理12.10 (紧的分片光滑的定向曲面上的Stokes公式)】设$2\le k\le n$, $S\subset\mathbb{R}^n$是一个紧的分片C^2类的k维定向曲面. 设ω是定义在一个包含S的开集上的C^1类的$k-1$次微分形式. 则有
$$\int_S\mathrm{d}\omega(x)=\int_{\partial S}\omega(x).$$
这里当$\partial S\neq\emptyset$时, ∂S的定向与S的定向和谐. 若$\partial S=\emptyset$, 即S 无边, 则上式右边为0.

【证】设$S_j, Z_j\subset\partial S_j, S_{jm}$ 是**定义(紧的分片光滑的定向曲面)**中给出的集合, 具体到本定理, 光滑类为C^2类. 在该定义后面的说明中我们已指出$S,\partial S$都是测度有限的：$\sigma_k(S)<\infty,\sigma_{k-1}(\partial S)<\infty$. 因紧集上的连续函数有界, 故微分形式$\mathrm{d}\omega$ 和ω 具有各自的可积性.

因$S=\bigcup_{j=1}^N S_j$ 且$S_1,S_2,...,S_N$ 关于曲面测度σ_k 互不重叠, 且S的定向与每个$S_1,S_2,...,S_N$的定向一致(因为它就是这样定义的), 故由同向积分的可加性有

$$\int_S \mathrm{d}\omega=\sum_{j=1}^N\int_{S_j}\mathrm{d}\omega. \tag{3.6}$$

下证

$$\int_{S_j}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial S_j}\omega,\quad j=1,2,...,N. \tag{3.7}$$

首先由**定理12.8(紧的光滑定向曲面上的Stokes公式)** 和S_{jm} 为紧的C^2类定向曲面有

$$\int_{S_{jm}}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial S_{jm}}\omega,\quad m=1,2,3,\dots.$$

写

$$\omega=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}a_{i_1i_2...i_{k-1}}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{k-1}}.$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(x)&=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{i_1i_2...i_{k-1}}(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{k-1}}\\&=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}b_{i_1i_2...i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\end{aligned}$$

其中$b_{i_1i_2...i_k}(x)$是一些$\frac{\partial a_{i_1i_2...i_{k-1}}(x)}{\partial x_j}$的线性组合. 由假设知$b_{i_1i_2...i_k}(x)$在$S$上连续. 令

$$M=\max_{x\in S}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}|b_{i_1i_2...i_k}(x)|,\quad L=\max_{x\in\partial S}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{k-1}\le n}|a_{i_1i_2...i_{k-1}}(x)|.$$

则因$S_{jm}\subset S_j$ 与S_j同向, ∂S_{jm} 与∂S_j同向, 故由同向积分的可加性有

$$\begin{aligned}&\int_{S_j}\mathrm{d}\omega=\int_{S_{jm}}\mathrm{d}\omega+\int_{S_j\setminus S_{jm}}\mathrm{d}\omega,\\&\int_{\partial S_j}\omega=\int_{(\partial S_j)\cap(\partial S_{jm})}\omega+\int_{\partial S_j\setminus\partial S_{jm}}\omega,\\&\int_{\partial S_{jm}}\omega=\int_{(\partial S_{jm})\cap(\partial S_j)}\omega+\int_{\partial S_{jm}\setminus\partial S_j}\omega\end{aligned}$$

从而由积分不等式有

$$\Big|\int_{S_j}\mathrm{d}\omega-\int_{S_{jm}}\mathrm{d}\omega\Big|=\Big|\int_{S_j\setminus S_{jm}}\mathrm{d}\omega\Big|\le M\sigma_k(S_j\setminus S_{jm})\to 0\ \ (m\to\infty),$$

$$\Big|\int_{\partial S_j}\omega-\int_{\partial S_{jm}}\omega\Big|=\Big|\int_{\partial S_j\setminus\partial S_{jm}}\omega-\int_{\partial S_{jm}\setminus\partial S_j}\omega\Big|\le\Big|\int_{\partial S_j\setminus\partial S_{jm}}\omega\Big|+\Big|\int_{\partial S_{jm}\setminus\partial S_j}\omega\Big|$$

$$\le L\sigma_{k-1}(\partial S_j \setminus \partial S_{jm}) + L\sigma_{k-1}(\partial S_{jm} \setminus \partial S_j) \to 0 \quad (m \to \infty).$$

所以

$$\int_{S_j} \mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty}\int_{S_{jm}} \mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty}\int_{\partial S_{jm}} \omega = \int_{\partial S_j} \omega.$$

这证明了(3.7).

往下, 由$S = S^\circ \cup \partial S$ 有

$$\partial S_j = (S^\circ \cup \partial S) \cap \partial S_j = [S^\circ \cap \partial S_j] \cup [(\partial S) \cap \partial S_j]$$

因此

$$\int_{\partial S_j} \omega = \int_{S^\circ \cap \partial S_j} \omega + \int_{(\partial S)\cap \partial S_j} \omega.$$

从而有

$$\sum_{j=1}^N \int_{\partial S_j} \omega = \sum_{j=1}^N \int_{S^\circ \cap \partial S_j} \omega + \sum_{j=1}^N \int_{(\partial S)\cap \partial S_j} \omega. \tag{3.8}$$

由**定义(紧的分片光滑的定向曲面)**后面的说明知 $\partial S = \bigcup_{j=1}^N (\partial S) \cap \partial S_j$ 且 $(\partial S) \cap \partial S_1, (\partial S) \cap \partial S_2, ..., (\partial S) \cap \partial S_N$ 关于测度σ_{k-1} 互不重叠, 且∂S的定向与每个$(\partial S) \cap \partial S_1, (\partial S) \cap \partial S_2, ..., (\partial S) \cap \partial S_N$ 的定向一致(因为它就是这样定义的), 因此由同向积分的可加性有

$$\int_{\partial S} \omega = \sum_{j=1}^N \int_{(\partial S)\cap \partial S_j} \omega. \tag{3.9}$$

下证

$$\sum_{j=1}^N \int_{S^\circ \cap \partial S_j} \omega = 0. \tag{3.10}$$

设$j \in \{1, 2, ..., N\}$使得$S^\circ \cap \partial S_j \neq \emptyset$. 这时$S^\circ \cap \partial S_j$中每一点也同时落在某个$S_i$的边界$\partial S_i$上($i \neq j$), 且当$\sigma_{k-1}((\partial S_j) \cap (\partial S_i)) > 0$时,由**定义(紧的分片光滑的定向曲面)**后面的说明**6**°知在$(\partial S_j) \cap (\partial S_i)$附近, ∂S_j与∂S_i的定向相反, 也即在$(\partial S_j) \cap (\partial S_i)$附近$-\partial S_i$的定向与$\partial S_j$的定向一致.于是此时若考虑同向求交集的话, 则交集$(\partial S_j) \cap (\partial S_i)$可写成$(\partial S_j) \cap (-\partial S_i)$. 这里**强调:** 若不考虑定向, $(\partial S_j) \cap (\partial S_i)$与$(\partial S_j) \cap (-\partial S_i)$作为集合是同一个集合！当$\sigma_{k-1}((\partial S_j)\cap(\partial S_i)) = 0$时, 自然也有$\sigma_{k-1}((\partial S_j)\cap(-\partial S_i)) = 0$, 此时$(\partial S_j) \cap (-\partial S_i)$对积分无贡献. 于是按同向求并我们有

$$S^\circ \cap S_j = \bigcup_{i=1}^N S^\circ \cap (\partial S_j) \cap (-\partial S_i)$$

其中为了书写统一我们规定$(\partial S_j)\cap(-\partial S_j)=\emptyset$. 据**定义(紧的分片光滑的定向曲面)**中的条件(v) 知 [注意$(\partial S_j)\cap(-\partial S_i)$与$(\partial S_j)\cap(\partial S_i)$ 只当做集合的话是同一个集合!]

$$(\partial S_j)\cap(-\partial S_1),\ (\partial S_j)\cap(-\partial S_2),\ \cdots,\ (\partial S_j)\cap(-\partial S_N)\quad \text{关于测度}\sigma_{k-1}\text{互不重叠}.$$

于是由微分形式积分的同向可加性有

$$\int_{S^\circ\cap\partial S_j}\omega=\sum_{i=1}^N\int_{S^\circ\cap(\partial S_j)\cap(-\partial S_i)}\omega,\quad j=1,2,...,N.$$

当$\sigma_{k-1}(S^\circ\cap(\partial S_j)\cap(-\partial S_i))>0$时, $S^\circ\cap(\partial S_j)\cap(-\partial S_i)$是定向的$k-1$维曲面, 它的反向曲面是$S^\circ\cap(-\partial S_j)\cap(\partial S_i)=S^\circ\cap(\partial S_i)\cap(-\partial S_j)$ 因此有

$$\int_{S^\circ\cap(\partial S_j)\cap(-\partial S_i)}\omega=-\int_{S^\circ\cap(\partial S_i)\cap(-\partial S_j)}\omega,\qquad i\neq j. \tag{3.11}$$

当$\sigma_{k-1}(S^\circ\cap(\partial S_j)\cap(-\partial S_i))=0$时(3.11)也成立: 两边都等于0. 于是若令

$$a_{ij}=\int_{S^\circ\cap(\partial S_i)\cap(-\partial S_j)}\omega,\quad i,j=1,2,...,N$$

则由(3.11) 知

$$a_{ij}=-a_{ji},\quad i,j=1,2,...,N.$$

这就导出

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N\int_{S^\circ\cap\partial S_j}\omega&=\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\int_{S^\circ\cap(\partial S_j)\cap(-\partial S_i)}\omega\\&=\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N a_{ji}=\frac12\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\Big(a_{ji}+a_{ij}\Big)=0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

所以(3.10)成立.

联合(3.6)–(3.10) 即得

$$\int_S \mathrm{d}\omega=\int_{\partial S}\omega.$$

定理证毕. □

以上我们完成了著名的Stokes公式的证明[4].

[4]**必须向同学们说明: 在上述分片光滑曲面上的Stokes公式的证明中和分片光滑曲面的定义的说明中, 都没有完全摆脱几何直观的辅助, 所以还不能认为是真正严格的证明, 它只是比多数教材的证明相对严格.**

【关于Stokes 公式的说明】

1° Stokes公式对非紧的光滑曲面不成立。主要原因是: 在$\int_S \mathrm{d}\omega$这一边, 去掉S的一个k维零测集固然不影响积分$\int_S \mathrm{d}\omega$, 但可能影响$\int_{\partial S}\omega$这边的积分。例如设$2\le k\le n, S\subset\mathbb{R}^n$是一个紧的$C^2$类的带边曲面。则$S$的边$\partial S$是一个$k$维零测集. 而$S$的内部$S^\circ$是$C^2$类的无边曲面: $\partial S^\circ=\emptyset$. 假如Stokes公式对非紧的光滑曲面$S^\circ$成立, 则对定义在包含$S$的开集上的任何光滑的$k-1$次形式$\omega$ 将有

$$\int_{\partial S}\omega=\int_S \mathrm{d}\omega=\int_{S^\circ}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial S^\circ}\omega=\int_{\emptyset}\omega=0$$

它显然不可能总成立。

2° Stokes公式具有巨大威力, 任何证明较长的定理、公式等都如此, 因为它们一劳永逸地吸收了主要难点. 从分片光滑曲面上的Stokes公式的证明中同学们可能看到Stokes公式的组合意味。为了加深对这一点的理解, 让我们以$\mathbb{R}^3$ 中的曲面为例从另一"实际"的角度来体验一下这个组合效应. 考虑$\mathbb{R}^3$中的单位球面$\mathbb{S}^2$. 如通常一样设$\mathbb{S}^2$的定向为其上单位法向量朝外的方向. 将$\mathbb{S}^2$分为单位法向量朝上($z\ge 0$) 和朝下两块($z\le 0$): $\mathbb{S}^2=\mathbb{S}^2_+\cup\mathbb{S}^2_-$. 根据可加性有

$$\int_{\mathbb{S}^2}\mathrm{d}\omega=\int_{\mathbb{S}^2_+}\mathrm{d}\omega+\int_{\mathbb{S}^2_-}\mathrm{d}\omega.$$

对两个有边流形$\mathbb{S}^2_+$, $\mathbb{S}^2_-$ 分别应用Stokes公式有

$$\int_{\mathbb{S}^2_+}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial(\mathbb{S}^2_+)}\omega,\quad \int_{\mathbb{S}^2_-}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial(\mathbb{S}^2_-)}\omega.$$

易见两个边界$\partial(\mathbb{S}^2_+),\partial(\mathbb{S}^2_-)$(它们是封闭曲线)作为集合相等, 即都是赤道, 但定向相反: 从z轴的正方向往下看, 这两个封闭曲线的定向沿原球面$\mathbb{S}^2$的定向分别是逆时针方向和顺时针方向——即方向相反: $\mathbb{S}^2_-=-\mathbb{S}^2_+$. 因此有

$$\int_{\partial(\mathbb{S}^2_+)}\omega+\int_{\partial(\mathbb{S}^2_-)}\omega=\int_{\partial(\mathbb{S}^2_+)}\omega-\int_{\partial(\mathbb{S}^2_+)}\omega=0.$$

整个计算过程即为

$$\int_{\mathbb{S}^2}\mathrm{d}\omega=\int_{\mathbb{S}^2_+}\mathrm{d}\omega+\int_{\mathbb{S}^2_-}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial(\mathbb{S}^2_+)}\omega+\int_{\partial(\mathbb{S}^2_-)}\omega=\int_{\partial(\mathbb{S}^2_+)}\omega-\int_{\partial(\mathbb{S}^2_+)}\omega=0.$$

假如你用此方式考虑四维空间中的单位球面$\mathbb{S}^3$, 则会在直观上遇到困难: 你看不到$\partial(\mathbb{S}^3_\pm)$的定向.... 那么就回到Stokes公式吧, 它已经解决了所有类似问题, 无论背景空间$\mathbb{R}^n$是多少维的! □

下我们介绍两类重要的微分形式: 闭形式和恰当形式.

【定义(闭形式和恰当形式) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为开集, ω是Ω上的C^r类的微分形式.

若$r\ge 1$ 且$\mathrm{d}\omega=0$ 于Ω, 则称ω在Ω上是一个闭形式.

若$r\ge 0$ 且在Ω上存在一个C^{r+1}类的微分形式η使得$\omega=\mathrm{d}\eta$ 于Ω, 则称ω在Ω上是一个恰当形式. $\square$

由定义可见当$r\ge 1$时, 恰当形式一定闭形式. 但有例子表明, 闭形式不都是恰当形式. 不过**Poincaré 引理** 表明：若Ω是开凸集, 则Ω上的闭形式一定是恰当形式. 证明见陈天权《数学分析讲义》第三册§ 15.5 Poincaré 引理.

【命题12.11】设$2\le k\le n$, $S\subset\mathbb{R}^n$是一个紧的分片C^2类的k维定向曲面. 设ω是定义在一个包含S 的开集上的C^1类的$k-1$次闭形式. 则有

$$\int_{\partial S}\omega(x)=0.$$

【证】由假设知$\mathrm{d}\omega=0$ 于S. 因此由Stokes 公式即得证. $\square$

【例】设$n\ge 2$,

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^n\frac{(-1)^{i-1}x_i\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n}{|x|^n},\quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \tag{3.13}$$

则ω在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$内是闭形式但不是恰当形式.

【证】首先回忆

$$\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=0\quad 当i\ne j时.$$

对任意$x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 计算:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{x_i}{|x|^n}\Big)=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(x_i(|x|^2)^{-\frac{n}{2}}\Big)=(|x|^2)^{-\frac{n}{2}}-nx_i^2(|x|^2)^{-\frac{n}{2}-1}=\frac{1}{|x|^n}-\frac{nx_i^2}{|x|^{n+2}},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(x)&=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\mathrm{d}\Big(\frac{x_i}{|x|^n}\Big)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{x_i}{|x|^n}\Big)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{x_i}{|x|^n}\Big)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{x_i}{|x|^n}\Big)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{|x|^n} - \frac{nx_i^2}{|x|^{n+2}}\Big)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$
$$= \Big(\frac{n}{|x|^n} - \frac{n|x|^2}{|x|^{n+2}}\Big)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = 0.$$

所以ω在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$内是闭形式. 我们在上节例题中已经计算了$\omega$在球面上的积分:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} \omega(x) = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} > 0 \qquad (\forall\, R > 0.) \tag{3.14}$$

这就蕴含ω不是恰当形式, 即ω在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$内没有光滑的“原函数”。否则, 设$\omega$在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$内有光滑的“原函数”$\eta(x)$, 它是光滑的$n-2$次形式, 使得$\omega = \mathrm{d}\eta$ 于$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 则由Stokes 公式和$\partial\mathbb{S}^{n-1}(R) = \emptyset$ (无边) 将有

$$0 < \int_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} \omega(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} \mathrm{d}\eta(x) = \int_{\partial\mathbb{S}^{n-1}(R)} \eta(x) = \int_{\emptyset} \eta(x) = 0$$

矛盾. $\square$

为了熟悉Stokes 公式, 再讲一个重要例题.

【例】设$n \ge 2$. 证明**命题**: 不存在映射$\varphi \in C^1(\mathbb{B}^n; \mathbb{R}^n)$ 使得

$$\varphi(\mathbb{B}^n) = \partial\mathbb{B}^n, \quad \varphi(x) = x \quad \forall\, x \in \partial\mathbb{B}^n.$$

这个性质我们在证明Brouwer不动点定理时证过, 它是不动点定理证明和定理基本思想的核心部分.

【证】反证法. 假设存在映射$\varphi \in C^1(\mathbb{B}^n; \mathbb{R}^n)$ 它具有命题中所说的性质. 由$\varphi \in C^1(\mathbb{B}^n; \mathbb{R}^n)$ 知存在开集$\Omega \supset \mathbb{B}^n$使得$\varphi$ 在Ω 上是光滑的且$\varphi(x) \neq 0\ \forall\, x \in \Omega$. 考虑上面(3.13)介绍的$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上的$n-1$次微分形式$\omega(x)$. 由$\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$和拉回映射的定义知$\varphi^*\omega$在$\Omega$上有定义. 于是我们对$n-1$次形式$\varphi^*\omega$ 可以应用Stokes公式:

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} \varphi^*\omega = \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \int_{\mathbb{B}^n} \varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{B}^n} \varphi^* 0 = 0 \tag{3.15}$$

其中用到ω是闭形式: $\mathrm{d}\omega = 0$ 于$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 对这个等式左端的另一重要沟通是

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} \varphi^*\omega = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \omega. \tag{3.16}$$

如果这个等式成立, 则结合(3.14),(3.15) 即得矛盾:

$$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \omega = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \varphi^*\omega = 0.$$

为证(3.16), 只需证明微分形式$\varphi^*\omega$ 和ω在$\partial\mathbb{B}^n$ 上积分时所需要的所有信息上都相等, 也只需证明二者在$\partial\mathbb{B}^n$及其切空间上相等:

$$\begin{aligned}
&\varphi^*\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_{n-1}),\\
&\forall\, x\in\partial\mathbb{B}^n,\quad \forall\,\boldsymbol{\xi}_i\in T\partial\mathbb{B}^n_x,\quad i=1,2,...,n-1.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

也即

$$\begin{aligned}
&\omega(\varphi(x))(\varphi'(x)\boldsymbol{\xi}_1,\varphi'(x)\boldsymbol{\xi}_2,...,\varphi'(x)\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_{n-1}),\\
&\forall\, x\in\partial\mathbb{B}^n,\quad \forall\,\boldsymbol{\xi}_i\in T\partial\mathbb{B}^n_x,\quad i=1,2,...,n-1.
\end{aligned}$$

因$\varphi(x)\equiv x, x\in\partial\mathbb{B}^n$, 故为证(3.17), 只需证明切向量相等:

$$\varphi'(x)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}\qquad \forall\, x\in\partial\mathbb{B}^n,\quad \forall\,\boldsymbol{\xi}\in T\partial\mathbb{B}^n_x.\tag{3.18}$$

任取$x\in\partial\mathbb{B}^n,\boldsymbol{\xi}\in T\partial\mathbb{B}^n_x$. 由切空间的定义, 存在可微道路$\gamma:(-1,1)\to\partial\mathbb{B}^n$ 使得$\gamma(0)=x,\gamma'(0)=\boldsymbol{\xi}$. 而由$\gamma(t)\equiv\varphi(\gamma(t))$ 和复合映射微分法有

$$\gamma'(0)=(\varphi(\gamma(t)))'|_{t=0}=\varphi'(\gamma(t))\gamma'(t)|_{t=0}=\varphi'(x)\gamma'(0)\quad\text{so}\quad \boldsymbol{\xi}=\varphi'(x)\boldsymbol{\xi}.$$

因此(3.18)成立从而(3.17)成立. 因为一个微分形式在曲面S上的积分只由这个形式(作为斜对称形式) 在S3.17)知(3.16)成立. $\square$

下面几节来看它的几种典型应用, 即它的几个常见的经典情形(历史上往往是先有特殊结果, 而后才拓广到一般情形).

§12.4. Gauss散度定理(Green 公式)

经典的Gauss散度定理(也叫Gauss 公式或Green公式) 是Stokes公式最常用的特殊情形: 其中曲面$S\subset\mathbb{R}^n$ 的维数等于它所在的欧空间$\mathbb{R}^n$的维数, 即S 紧的分片光滑的n维定向曲面.此时有$S=\overline{\Omega}$ 其中Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界开区域, 其边∂S与Ω的拓扑边界$\partial\Omega$ 重合: $\partial S=\partial\Omega$.

需要说明: 由流形的定义易见$\mathbb{R}^n$中任何开集Ω都是C^∞光滑的n维流形, 从定向的定义也不难看出Ω是可定向的. 如果Ω的拓扑边界$\partial\Omega$ 不太坏的话, 那么$\overline{\Omega}$ 便是带边的n维定向流形, 其拓扑边界$\partial\Omega$ 也是$\overline{\Omega}$的作为流形的边.(见陈天权《数学分析讲义》第三册第13章**命题13.4.3.**).

【说法约定】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为一有界区域(即有界连通开集), $r\ge 1$. 我们称Ω是C^r类的如果$\overline{\Omega}$是C^r类的流形. 这时$\partial\Omega$(拓扑边界)$=\partial\overline{\Omega}$(流形的边) [它是一个$C^r$类的$n-1$维定向曲面]. 类似地, 我们称$\Omega$是分片$C^r$类的如果$\overline{\Omega}$是分片$C^r$类的流形. 此时有$\partial\Omega$(拓扑边界)$=\partial\overline{\Omega}$(流形的边) [它是一个分片$C^r$类的$n-1$维定向曲面[5]]. 同时我们规定: Ω的正向就是$\mathbb{R}^n$的正向, 即每个坐标都增大的方向.

【注】如果$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是分片$C^r$类的, 则$\partial\Omega$是一个分片$C^r$类的$n-1$维曲面, 从而易见$\partial\Omega$是一个$n$维$L$-零测集. 因此

$$\int_{\Omega}\{\cdots\}\mathrm{d}x=\int_{\overline{\Omega}}\{\cdots\}\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

【单位法向量的指向】只考虑紧流形. 设$r\ge 1,\Omega\subset\mathbb{R}^n$是分片$C^r$类的有界区域. 这时边界$\partial\Omega$的定向可以用其上的单位法向量场$\mathbf{n}(x)$的指向确定. 注意, 由于边$\partial\Omega$是分片$C^r$类的超曲面, 故其上的单位法向量$\mathbf{n}(x)$几乎处处有定义, 并且在$\partial\Omega$ 的所有光滑片上是连续的.我们说$\mathbf{n}(x)$的指向当然是指它在光滑片上的指向.

如果$\overline{\Omega}$的定向(等价地Ω的定向)取为**正向**, 则根据陈天权《数学分析讲义》第三册第13章**命题13.4.5** 知此时$\partial\Omega$的与$\overline{\Omega}$的定向和谐的定向是: $\mathbf{n}(x)$指向$\overline{\Omega}$ 的**外侧**. (**图示**)

【例】(1) 球体: $\Omega=B^n(x_0,r)$. 这时$\overline{\Omega}=\overline{B}^n(x_0,r)$是闭球, 其边$\partial B^n(x_0,r)$(球面)是$C^\infty$类的$n-1$维流形, 因此$\overline{B}^n(x_0,r)$是紧的带边的$C^\infty$类的$n$维流形, 它的正向对应的单位法向量为$\mathbf{n}(x)=\frac{x-x_0}{r}, x\in\partial B^n(x_0,r)$, 指向球体$\overline{B}^n(x_0,r)$的外侧.

[5] 如果证明不了这一性质, 就将其作为条件要求它被满足. 与前面关于分片光滑曲面的定义后面提出的问题一样, 欢迎讨论.

(2) 有界区间$\Omega=\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$. 这时$\overline{\Omega}=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$是有界闭区间, $\partial\Omega$为$2n$片$n-1$维有界闭区间,

【定理12.11(Gauss散度定理(即Green公式))】设$n\geq 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个分片$C^2$类的有界区域. 设

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}F_i(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

是$\overline{\Omega}$上的C^1类的$n-1$次微分形式, 即$F_i\in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}), i=1,2,...,n$. 则沿着$\Omega$的正向积分有

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega. \tag{4.2}$$

其中左边是沿着$\partial\Omega$的外法向的积分. 这个关系式也可以等价地用第一型曲面积分和散度的体积积分来表示(此即Gauss散度定理的原意):

$$\int_{\partial\Omega}\langle\mathbf{F}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\int_{\Omega}\mathrm{div}\mathbf{F}(x)\mathrm{d}x \tag{4.3}$$

其中$\mathbf{n}(x)$是在曲面$\partial\Omega$上点x处**方向朝外**的单位法向量. 上式也写成

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}(x)\cdot\mathbf{n}(x)\mathrm{d}\sigma(x)=\int_{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{F}(x)\mathrm{d}x \tag{4.4}$$

其中

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)=\nabla\cdot\mathbf{F}(x) \tag{4.5}$$

称为$\mathbf{F}(x)=(F_1(x),F_2(x),...,F_n(x))$ 的散度.

【证】令$S=\overline{\Omega}$. 则有$\partial S=\partial\Omega$. 因此由(4.1) 和Stokes 公式知(4.2)成立. 下面只需证明(4.2),(4.3)两边分别相等.

因$\partial\Omega$是分片C^2类的$n-1$为定向曲面, 故由**定理12.6** 有

$$\int_{\partial\Omega}\omega(x)=\int_{\partial\Omega}\langle\mathbf{F}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x). \tag{4.6}$$

另一方面根据外微分运算法则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\Big(\mathrm{d}F_i(x)\Big)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\Big)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\right).\end{aligned}$$

对每个$i,j\in\{1,2,...,n\}$, 当$j\neq i$ 时, $\mathrm{d}x_j$ 必在$\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ 中出现, 故此时(应用外微分的结合律和带符号的交换律)有

$$\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=0.$$

当$j=i$ 时, 计算

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i-1}\wedge\mathrm{d}x_{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=(-1)_{i-1}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i-1}\wedge\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=(-1)^{i-1}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

所以得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=(-1)^{i-1}\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

从而有

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\mathrm{div}\mathbf{F}(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n,$$

$$\int_\Omega\mathrm{d}\omega=\int_\Omega\mathrm{div}\mathbf{F}(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\int_\Omega\mathrm{div}\mathbf{F}(x)\mathrm{d}x\tag{4.7}$$

上式右端的**积分中** $\mathrm{d}x$ 是通常的Lebesgue 测度元.

联合(4.6),(4.7)即得证. □

【注】当区域Ω 有洞时, 可以把Gauss 散度定理中在洞的边界上的积分移到公式右边, 即和在Ω上的重积分放在公式的同一边, 但注意此时洞上的单位法向量指向洞外, 也即它(们)是关于洞的单位外法向量. 我们以常用的情形说明这一点. 设

$$\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_0\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_N),\quad\overline{\Omega}_j\subset\Omega_0,\quad j=1,2,3,...,N$$

其中$\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_N$ 都与闭球$\mathbb{B}^n$同胚且都是分片C^2类的, $\Omega_1,...,\Omega_N$就是所说的洞, 它们互不相交. 此时有

$$\partial\Omega=\partial\Omega_0\cup\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\cup\cdots\cup\partial\Omega_N.$$

因$\partial\Omega$上的单位法向量场$\mathbf{n}(x)$指向$\overline{\Omega}$ 外部, 故$\mathbf{n}(x)$ 当$x \in \partial\Omega_0$ 时指向$\overline{\Omega}_0$的外侧, 而当x 属于洞的边界$\partial\Omega_j$ 时, $\mathbf{n}(x)$ 指向$\overline{\Omega}_j$的内侧. 现在我们将$\mathbf{n}(x)$在$\partial\Omega_j$上反号, 即当$x \in \partial\Omega_j$时令$\mathbf{n}(x)$指向$\overline{\Omega_j}$的外侧. 则Gauss散度定理中的边界积分可写成

$$\int_{\partial\Omega}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega_0}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma + \sum_{j=1}^{N}\int_{\partial\Omega_j}\langle\mathbf{F},-\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega_0}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma - \sum_{j=1}^{N}\int_{\partial\Omega_j}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma$$

从而Gauss散度定理可写成

$$\int_{\partial\Omega_0}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega}\mathrm{div}\mathbf{F}(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{N}\int_{\partial\Omega_j}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma$$

其中单位法向量$\mathbf{n}(x)$ 都指向x所在区域闭包的**外侧**.

以后我们常将Gauss散度定理叫做Green 公式.

【例(Green 公式的法方向导数表示)】设$n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$是一个分片$C^2$类的有界区域. 设函数$u \in C^2(\overline{\Omega})$. 则沿着$\Omega$的正向积分有

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\Omega}\Delta u(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.8}$$

其中$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$为$\partial\Omega$的**单位外法向**, 即从$x \in \partial\Omega$出发**指向$\overline{\Omega}$的外部**(包括$\Omega$有洞的情形), $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(x)$为$u$在$x$处沿方向$\mathbf{n}$的方向导数, 即$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(x+t\mathbf{n}))\Big|_{t=0}$, Δu 为u的Laplacian, 即

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2}.$$

【证】留为作业. 注意方向导数与梯度的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(x) = \langle\nabla u(x),\mathbf{n}\rangle = \langle\nabla u(x),\mathbf{n}(x)\rangle.$$

【例】设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$满足Green 公式中的条件, 设数值函数$\varphi_i \in C^2(\overline{\Omega}), i = 1,2,...,n$. 证明: 沿着$\Omega$的正向积分有

$$\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\varphi_i(x)\,\mathrm{d}\varphi_1(x)\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}\varphi_i(x)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_n(x) = n\int_{\Omega}\det\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

【证】留为作业.

下面看$n=2$ (平面上) 和$n=3$ ($\mathbb{R}^3$上)的公式, 它们是最常用的情形, 是早期的Green公式和Gauss公式.

平面上的Green 公式出现了曲线积分, 因此我们先介绍

【单连通集和复连通集】设$n\ge 2, E\subset\mathbb{R}^n$ 为一连通集. 我们称一条连续闭合曲线$\gamma:[0,1]\to E$ (即$\gamma\in C([0,1],E)$ 且满足$\gamma(0)=\gamma(1)=:\mathbf{p}_0$) 可以在$E$中连续形变缩成一点, 如果存在连续映射$H:[0,1]\times[0,1]\to E$ 使得一族连续曲线$\gamma_s(t):=H(s,t)$ 满足 (给图示)

$$\text{每条曲线 } t\mapsto\gamma_s(t) \text{ 都是闭合的：} \gamma_s(0)=\gamma_s(1)=\mathbf{p}_0,$$
$$\text{初始曲线为}\gamma\text{：} \gamma_0(t)=\gamma(t),\quad \text{终端曲线为定点}\mathbf{p}_0\text{：} \gamma_1(t)\equiv\mathbf{p}_0.$$

如果E中的每条连续闭合曲线都能在E中连续收缩成一点, 则称E是单连通的. 否则称E为复连通的. □

单连通的例子：

1. $\mathbb{R}^n$中的任何开凸集都是单连通的.
2. 当$n\ge 3$时, 球面$\mathbb{S}^{n-1}$、半球面$\mathbb{S}^{n-1}_+$是单连通的.
3. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a^2<x^2+y^2+z^2\le b^2\}(0\le a<b)$ 是单连通的.

复连通的例子：

1. 圆环$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}(0<a\le b)$ 不是单连通的, 特别圆周$\mathbb{S}^1$不是单连通的.
2. 汽车轮胎表面不是单连通的.
3. $\mathbb{R}^3\setminus(\mathbb{B}^2\times\mathbb{R})$ (即空间挖掉一个两头无界的柱体) 不是单连通的。

可以承认一个明显的事实: 同胚保持连通程度, 即单连通集合(非单连通集合) 在同胚映射后仍是单连通的(非单连通的)。

还有一个将在复变函数论中证明的重要事实是

Riemann 映照定理: 平面上的单连通区域同胚于开的单位圆盘.

【$\mathbb{R}^2$上的Green 公式】

首先说明$\mathbb{R}^2$**中封闭曲线的法向量与切向量可以互相表示**. 这性质显然是高维空间中的曲线所不具备的。具体来说, 设$S=\partial D$ 其中$D\subset\mathbb{R}^2$中的分片光滑的单连通或复连

通区域(因此S是分段光滑的连通的一维无边流形), 设∂D的定向为逆时针方向(从z-轴正向看). 令

$\mathbf{n}(x,y)=(n_1(x,y),n_2(x,y))$为$\overline{D}$的朝外方向的单位法向量,

$\mathbf{T}(x,y)=(T_1(x,y),T_2(x,y))$ 为∂D上的与∂D的走向同向的单位切向量.

则有

$$\mathbf{T}(x,y)=(-n_2(x,y),n_1(x,y)),\quad \mathbf{n}(x,y)=(T_2(x,y),-T_1(x,y)). \tag{4.9}$$

二者的关系可以这样确定: 将方向朝外的单位法向量$\mathbf{n}$逆时针旋转90度就得到$\mathbf{T}$, 它的方向就是∂D 的逆时针走向. 例如把向量$(0,1)$ 逆时针旋转90度后就得到$(-1,0)$. 由可定向性知, 只要在某处操作方式正确, 就处处正确.

【定理12.12($\mathbb{R}^2$上单连通和复连通区域的Green 公式)】设$D\subset\mathbb{R}^2$是一个分片C^2类的复连通有界区域：$D=D_0\setminus(\overline{D}_1\cup\overline{D}_2\cup\cdots\cup\overline{D}_N)$, 其中$D_j\subset\mathbb{R}^2\,(j=0,1,2,...,N)$都是分片$C^2$ 类的单连通有界区域且$\overline{D}_j\subset D_0, j=1,2,...,N$. (**图示**) 设$P,Q\in C^1(\overline{D};\mathbb{R})$. 则沿着$D$的正向积分有

$$\int_{\partial D_0}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum_{j=1}^{N}\int_{\partial D_j}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \tag{4.10}$$

其中$\partial D_0,\partial D_j\,(j=1,2,...,N)$ 都取逆时针方向.

此外这一公式有下列**法向量**表示和**切向量**表示:

设$\mathbf{F}(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$ 在$\overline{D}$上属于C^1类, 令$\mathbf{n}(x,y)$为∂D上的朝外的单位法向量, $\mathbf{T}(x,y)$为∂D上的与∂D的走向同向的单位切向量, 并设$\mathrm{d}s(x,y)=\mathrm{d}\sigma_1(x,y)$ 为弧长测度元, 则有

$$\int_{\partial D}\langle\mathbf{F}(x,y),\mathbf{n}(x,y)\rangle\mathrm{d}s(x,y)=\iint_D\mathrm{div}\mathbf{F}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.11}$$

即

$$\int_{\partial D}F_1(x,y)\mathrm{d}y-F_2(x,y)\mathrm{d}x=\iint_D\Big(\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.12}$$

以及

$$\int_{\partial D}\langle\mathbf{F}(x,y),\mathbf{T}(x,y)\rangle\mathrm{d}s(x,y)=\iint_D\Big(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.13}$$

即

$$\int_{\partial D}F_1(x,y)\mathrm{d}x+F_2(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\Big(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.14}$$

以上我们认定包括了$D_j, \partial D_j$不出现的情形即包括了D是单连通的情形, 此时$D = D_0$.

【证】对于(4.10), 令$\omega(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则有

$$\mathrm{d}\omega(x,y) = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

在Stokes 公式中取$S = \overline{D}$. 则计入定理中说明的定向有

$$\partial S = \partial D = \partial D_0 \cup (-\partial D_1) \cup (-\partial D_2) \cup \cdots \cup (-\partial D_N)$$

从而由**同向可加性**有

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial S} \omega = \int_{\partial D_0} \omega + \sum_{j=1}^N \int_{-\partial D_j} \omega = \int_{\partial D_0} \omega - \sum_{j=1}^N \int_{\partial D_j} \omega.$$

然后注意在沿D的正向积分时, $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$是Lebesgue 测度元. 这就得到(4.10).

法向量表示(4.11) 是**定理12.11(Gauss散度定理(即Green公式))**中$n = 2$和$x = x_1, y = x_2$的特殊情形.

切向量表示(4.12),(4.13) 是一次形式积分本身的定义(见前面关于曲线上的第二型积分)和Stokes公式的直接结果. 切向量表示(4.12) 也可借助(4.9)由法向量表示(4.11)导出: 令

$$\widetilde{\mathbf{F}} = (\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2) = (F_2, -F_1).$$

则由(4.9)和(4.11)有

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \langle \mathbf{F}(x,y), \mathbf{T}(x,y)\rangle \mathrm{d}s(x,y) = \int_{\partial D} \langle (F_1, F_2), (-n_2, n_1)\rangle \mathrm{d}s(x,y) \\
&= \int_{\partial D} \Big(F_2 n_1 + (-F_1)n_2\Big)\mathrm{d}s(x,y) = \int_{\partial D} \langle \widetilde{\mathbf{F}}(x,y), \mathbf{n}(x,y)\rangle \mathrm{d}s(x,y) \\
&= \iint_D \Big(\frac{\partial \widetilde{F}_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{F}_2(x,y)}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \Big(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

【例】设$D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个边界分片C^2类的有界区域(单连通或复连通). 则D的面积$mes(D)$ 可由Green 公式计算:

$$mes(D) = \int_{\partial D} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

右边是沿着D的正向的曲线积分.

【证】写在下面.

□

【**例**】设$D\subset\mathbb{R}^2$ 是分段C^2类的单连通有界区域, $(0,0)\in D$. 试计算

$$\int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\ \ (=0\,),\qquad \int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\ \ (=2\pi).$$

并考察两个积分的被积函数是否是闭形式, 是否是恰当形式。

【证】原点$(0,0)$是被积函数的奇点(不连续点, 该点附近无界,...), 设法把它挖去(这不改变原来的边界∂D), 也即考虑复连通域. 取$\varepsilon>0$ 充分小使得闭圆盘$\overline{B_\varepsilon((0,0))}\subset D$. 因圆周$\partial B_\varepsilon((0,0))$是$C^\infty$光滑的, 故复连通区域$D_\varepsilon=D\setminus\overline{B_\varepsilon(0,0)}$ 仍是分段C^2类的.

对于第一个积分, 被积函数为

$$P=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log(x^2+y^2)}{\partial x},\quad Q=\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log(x^2+y^2)}{\partial y}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log(x^2+y^2)}{\partial y\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log(x^2+y^2)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

因此分别用复连通域上的Green 公式和单连通域上的Green公式有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial B_\varepsilon((0,0))}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{x^2+y^2\le\varepsilon^2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

也可以直接考虑全微分:

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)=\mathrm{d}\omega(x,y)$$

其中$\omega(x,y)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ 是零次形式. 这说明一次形式$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$内是恰当的(即它有原函数)从而是闭形式. 函数$(x,y)\mapsto\omega(x,y)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ 属于$C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. 令$S=\partial D$. 则$S\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 且S 无边, 即$\partial S=\partial(\partial D)=\emptyset$. 于是由零次形式的Stokes 公式有

$$\int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_S\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_S\mathrm{d}\omega=\int_{\partial S}\omega=\int_\emptyset\omega=0.$$

第二个积分是前面讲过的例题(见(3.13)) 在$n=2$的特殊情形, 这里我们在重复一次。被积函数为$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$. 计算:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad\forall\,x^2+y^2>0.$$

因此
$$\mathrm{d}\Big(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\Big)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0\qquad\forall\, x^2+y^2>0.$$
因此一次形式$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$内是闭形式. 于是如上, 由复连通域上的Green 公式和单连通域上的Green公式有

$$\int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$
$$=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\varepsilon^2=2\pi.$$

注意这个非零结果表明: 一次形式$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$内不是恰当形式, 即它在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 内没有光滑的原函数. 否则, 设在这区域内有光滑的原函数$\eta(x,y)$, 即$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\eta(x,y)$, 则由零次形式的Stokes 公式和$\partial(\partial D)=\emptyset$ 将有

$$2\pi=\int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{\partial D}\mathrm{d}\eta(x,y)=\int_{\partial(\partial D)}\eta(x,y)=\int_{\emptyset}\eta(x,y)=0$$

矛盾. □

【注】设开集$D\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x<0\}$ 或$D\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0\}$, 则有

$$\mathrm{d}\arctan(\frac{y}{x})=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\qquad\forall\,(x,y)\in D$$

因此一次形式$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在D内是恰当形式. 后面在学习场论时我们将证明, 只要开集D不包含奇点$(0,0)$, 一次形式$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在D内就是恰当形式, 即有光滑的原函数.

【例】设$D\subset\mathbb{R}^2$ 是边界分段C^2类的单连通有界区域, $(0,0)\in D$.

设$P,Q\in C(\overline{D}\setminus\{(0,0)\})\cap C^1(D\setminus\{(0,0)\})$ 并设P,Q 在$D\setminus\{(0,0)\}$上有界. 进一步假设
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad 于\ \ D\setminus\{(0,0)\}.$$
则有
$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$
换言之, 若一次形式$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在$\overline{D}\setminus\{(0,0)\}$ 内是闭形式且P,Q在奇点$(0,0)$处不太坏, 则ω围绕奇点的闭路积分仍可能为零.

【证】由假设知存在常数$0<M<\infty$ 使得

$$|P(x,y)|,\,|Q(x,y)|\le M\quad\forall\,(x,y)\in D\setminus\{(0,0)\}.$$

取$\varepsilon > 0$ 充分小使得$\overline{B_\varepsilon((0,0))} \subset D$. 令$D_\varepsilon = D \setminus \overline{B_\varepsilon(0,0)}$. 则由Green公式和题中假设有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| = \left|\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \le \int_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\sqrt{P^2+Q^2}\,\mathrm{d}s \\ &\le \sqrt{2}\,M\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\mathrm{d}s = \sqrt{2}M\cdot 2\pi\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon \to 0^+).\end{aligned}$$

所以$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$. $\square$

【$\mathbb{R}^3$上的Green 公式】

所有基本性质已在一般的Gauss散度定理中给出了. 进一步的应用将在场论中介绍, 这里主要熟悉一下$\mathbb{R}^3$中常用的表示.

区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$为无洞或有洞的分片$C^2$类的有界区域:

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N), \quad \overline{\Omega}_j \subset \Omega_0, \quad j = 1,2,3,...,N$$

其中$\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_N$ 都与闭球$\mathbb{B}^3$同胚且都是分片C^2类的, $\Omega_1, ..., \Omega_N$就是所说的洞, 它们互不相交. 此时有

$$\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \cdots \cup \partial\Omega_N.$$

因$\partial\Omega$上的单位法向量场$\mathbf{n}(x)$指向$\overline{\Omega}$ 外部, 故$\mathbf{n}(x)$ 当$x \in \partial\Omega_0$ 时指向$\overline{\Omega}_0$的外侧, 而当x 属于洞的边界$\partial\Omega_j$ 时, $\mathbf{n}(x)$ 指向$\overline{\Omega}_j$的内侧. 现在我们将$\mathbf{n}(x)$在$\partial\Omega_j$上反号, 即当$x \in \partial\Omega_j$时令$\mathbf{n}(x)$指向$\overline{\Omega_j}$的外侧. 设$\mathbf{F} = (P,Q,R) \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. 则沿着$\Omega$的正向积分(即沿着$\partial\overline{\Omega}$朝外的积分) 有

$$\int_{\partial\Omega_0}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^N\int_{\partial\Omega_j}\langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma$$

其中单位法向量$\mathbf{n}(x)$ 都指向x所在区域闭包的**外侧**.

也写成

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial\Omega_0} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= \iiint_\Omega\Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &+ \sum_{j=1}^N\iint_{\partial\Omega_j} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

再次说明: 上面用到反交换性: $-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$.

以上包括无洞的情形即$\Omega=\Omega_0$ 而$\Omega_j,\partial\Omega_j\,(j=1,2,...,N)$不出现.

本节最后我们讲一个有趣的综合例题, 它本身也极为有用.

【例(向量场的旋转度)】设$n\ge 2,\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个分片C^2类的有界区域(无洞或有洞), 映射$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ 在边界$\partial\Omega$上无零点, 即$0\notin\varphi(\partial\Omega)$. 令

$$\deg(\varphi,\partial\Omega)=\frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\partial\Omega}\varphi^*\omega$$

其中ω是(3.13)给出的$n-1$次形式, 即

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}x_i\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n}{|x|^n},\quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

称$\deg(\varphi,\partial\Omega)$为向量场$\varphi$沿$\partial\Omega$的旋转度. 证明:

(a) 方程$\varphi(x)=0$在Ω 至多有有限多个解, 即集合$\Omega(\varphi=0)$是有限集[6].

(b) 若$\deg(\varphi,\partial\Omega)\neq 0$, 则方程$\varphi(x)=0$在$\Omega$内有解.

(c) 设方程$\varphi(x)=0$在Ω内有解且这些解均为**正则解**且个数有限, 即

$$\varphi(p_j)=0,\quad \det\varphi'(p_j)\neq 0,\quad p_j\in\Omega,\quad j=1,2,...,N.$$

则

$$\deg(\varphi,\Omega)=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j)).$$

(d) 设φ是保向的(即$\det\varphi'(x)>0\ \forall\,x\in\Omega$), 则

$$\deg(\varphi,\Omega)=\mathrm{card}(\Omega(\varphi=0))$$

即$\deg(\varphi,\partial\Omega)$等于方程$\varphi(x)=0$在$\Omega$内的解的个数(包括个数为零的情形).

【证】部分(c)是证明的主要部分. 我们将使用局部反函数定理、Green公式(或Stokes公式)、拉回、重积分换元公式, 以及ω是闭形式这一事实.

首先说明拉回$\varphi^*\omega$在$\partial\Omega$的一个邻域内有定义. 事实上由假设可知存在开集$W\supset\partial\Omega$ 使得φ在W上是光滑的且$\varphi(x)\neq 0\ \forall\,x\in W$. 因此$\varphi(W)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 所以$\varphi^*\omega$在$W$上有定义且是光滑的.

[6]**注意：空集也是有限集.**

(a): 应用反证法(列紧性)、$0 \notin \varphi(\partial\Omega)$、局部反函数定理易证方程$\varphi(x)=0$在$\Omega$内只有有限多个解.

(b): 反证法: 假设方程$\varphi(x)=0$在Ω无解. 则结合假设知$\varphi(x)\neq 0\ \forall x\in\overline{\Omega}$. 因此如上所说, 存在开集$D\supset\overline{\Omega}$ 使得$\varphi(x)\neq 0\ \forall x\in D$从而有$\varphi(D)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 因而$\varphi^*\omega$在D上是光滑的. 于是对$n-1$次形式$\varphi^*\omega$ 应用Stokes公式(或Green公式) 并应用拉回映射的性质有

$$\int_{\partial\Omega}\varphi^*\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\varphi^*\omega=\int_{\Omega}\varphi^*(\mathrm{d}\omega)=\int_{\Omega}0=0$$

即$\deg(\varphi,\partial\Omega)=0$, 与假设矛盾.

(c)**:** 以下我们用(例如)$B_\varepsilon(0)=B^n(0,\varepsilon)$ 表示$\mathbb{R}^n$中的以0为中心以$\varepsilon>0$为半径的开球. 由假设条件和局部反函数定理, 对每个p_j, 存在p_j的邻域$U(p_j)\subset\Omega$ 和$0=\varphi(p_j)$的邻域$V_j(0)$ 使得$\varphi:U(p_j)\to V_j(0)$微分同胚, 即$\varphi:U(p_j)\to V_j(0)$和它的逆映射$(\varphi|_{U(p_j)})^{-1}:V_j(0)\to U(p_j)$都是$C^1$类的. 特别有$\det\varphi'(x)\neq 0\ \forall x\in U(p_j)$. 因只有有限多个互不相同的$p_j$ $(j=1,2,...,N)$, 故我们可以缩小$U(p_j)$ 使得这些邻域$U(p_j)$的闭包互不相交. 因$0\in\bigcap_{j=1}^N V_j(0)$ 且后者是开集, 故存在$\varepsilon>0$ 充分小使得闭球$\overline{B}_\varepsilon(0)\subset\bigcap_{j=1}^N V_j(0)$. 令

$$\Omega_j=(\varphi|_{U(p_j)})^{-1}(B_\varepsilon(0)),\quad j=1,2,...,N.$$

则由同胚性质（**同胚映射把内部映为内部、把边界映为边界、把连通集映为连通集**)可知Ω_i是连通集且

$$\overline{\Omega}_j=(\varphi|_{U(p_j)})^{-1}(\overline{B}_\varepsilon(0)),\quad \partial\Omega_j=(\varphi|_{U(p_j)})^{-1}(\partial B_\varepsilon(0)).$$

此外由$\overline{\Omega}_j\subset U(p_j)$ 知$\overline{\Omega}_1,\overline{\Omega}_2,...,\overline{\Omega}_N$ 互不相交. 考虑开集

$$\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\Big(\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\cup\cdots\cup\overline{\Omega}_N\Big).$$

易见

$$\partial\Omega_\varepsilon=\partial\Omega\cup\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\cup\cdots\cup\partial\Omega_N.$$

由对φ的假设知存在开集$\widetilde{\Omega_\varepsilon}\supset\overline{\Omega}_\varepsilon$使得$\varphi$在$\widetilde{\Omega_\varepsilon}$内是光滑的且$\varphi(x)\neq 0\ \forall x\in\widetilde{\Omega_\varepsilon}$ 也即$\varphi(\widetilde{\Omega_\varepsilon})\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 因此由拉回的性质知$\varphi^*\omega$在$\widetilde{\Omega_\varepsilon}$上是光滑的. 于是对$n-1$次形式$\varphi^*\omega$ 应用Stokes 公式或Green公式, 沿着Ω_ε的朝外方向积分, 如上有

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\varphi^*\omega=\int_{\Omega_\varepsilon}\mathrm{d}\varphi^*\omega=\int_{\Omega_\varepsilon}\varphi^*(\mathrm{d}\omega)=0.$$

假如将每个小邻域Ω_j的定向也取为指向Ω_j外侧, 则上式写成

$$\int_{\partial\Omega}\varphi^*\omega-\sum_{j=1}^N\int_{\partial\Omega_j}\varphi^*\omega=0\quad\text{i.e.}\quad\int_{\partial\Omega}\varphi^*\omega=\sum_{j=1}^N\int_{\partial\Omega_j}\varphi^*\omega.$$

计算: 由$\partial\Omega_j=(\varphi|_{U(p_j)})^{-1}(\partial B_\varepsilon(0))$知当$x\in\partial\Omega_j$时$|\varphi(x)|=\varepsilon$, 故沿着$\partial\Omega_j$ 朝外方向积分并应用Green 公式有 (以下sgn$(\cdot)$ 为符号函数, $mes(\cdot)$为$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_j}\varphi^*\omega &= \int_{\partial\Omega_j}\sum_{i=1}^n\frac{(-1)^{i-1}\varphi_i(x)\mathrm{d}\varphi_1(x)\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}\varphi_i(x)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_n(x)}{|\varphi(x)|^n}\\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\partial\Omega_j}\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\varphi_i(x)\mathrm{d}\varphi_1(x)\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}\varphi_i(x)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_n(x)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\Omega_j}\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\varphi_i(x)\mathrm{d}\varphi_1(x)\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}\varphi_i(x)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_n(x)\right)\\
&= \frac{n}{\varepsilon^n}\int_{\Omega_j}\det\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{n}{\varepsilon^n}\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j))\int_{\Omega_j}|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x\\
&= \frac{n}{\varepsilon^n}\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j))mes(\varphi(\Omega_j))=\frac{n}{\varepsilon^n}\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j))mes(B_\varepsilon(0))\\
&= n\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j))mes(\mathbb{B}^n)=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j))
\end{aligned}$$

以上用到$\det\varphi'(x)$在Ω_j上不变号, 它蕴含

$$\det\varphi'(x)\equiv\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j))|\det\varphi'(x)|,\quad x\in\Omega_j.$$

这个绝对值使得我们能使用通常的重积分换元公式:

$$\int_{\Omega_j}|\det\varphi'(x)|\mathrm{d}x=mes(\varphi(\Omega_j))$$

此外用到了$\varphi(\Omega_j)=B_\varepsilon(0), mes(B_\varepsilon(0))=\varepsilon^n mes(\mathbb{B}^n)$ 以及$mes(\mathbb{B}^n)=\frac{1}{n}\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$. 这就给出

$$\int_{\partial\Omega}\varphi^*\omega=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\sum_{i=1}^n\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j))$$

从而得到

$$\deg(\varphi,\partial\Omega)=\frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\partial\Omega}\varphi^*\omega=\sum_{i=1}^n\mathrm{sgn}(\det\varphi'(p_j)).$$

(d): 设φ保向. 若方程$\varphi(x)=0$在Ω 内无解, 则由(b)知$\deg(\varphi,\partial\Omega)=0$. 设方程$\varphi(x)=0$在$\Omega$内有解, 则由(a)知方程$\varphi(x)=0$在$\Omega$内只有有限多个解. 设这些解为$p_1,p_2,...,p_N$.

则由φ保向有$\det\varphi'(p_j)>0, j=1,2,...,N$. 于是由(c)即知$\deg(\varphi,\partial\Omega)=N$. $\square$

【关于用Stokes公式或Green 公式计算不封闭曲线曲面的积分的补线补面法】

我们以$\mathbb{R}^3$中的曲线曲面为例说明这一点.

1. 设L为$\mathbb{R}^2$或$\mathbb{R}^3$中一条分段光滑的连续曲线, 不闭合. 取另一段曲线$\widetilde{L}$, 它与L有相同起点和终点, 使得$L\cup(-\widetilde{L})$是一条不自交的闭合曲线. 选择一块以$\partial S=L\cup(-\widetilde{L})$ 为边的定向曲面S [总要求分片光滑且与边∂S的定向和谐]. 则对于在S附近有定义且光滑的一次形式$\omega(x,y,z)$, 沿着L的定向积分有

$$\int_L\omega=\int_{L\cup(-\widetilde{L})}\omega+\int_{\widetilde{L}}\omega=\int_{\partial S}\omega+\int_{\widetilde{L}}\omega=\int_S \mathrm{d}\omega+\int_{\widetilde{L}}\omega.$$

这一策略的作用是: 很多情况下后两个积分$\int_S\mathrm{d}\omega, \int_{\widetilde{L}}\omega$相对好计算, 例如若$\omega$是闭形式, 即$\mathrm{d}\omega\equiv 0$, 则有

$$\int_L\omega=\int_{\widetilde{L}}\omega.$$

因此只需计算$\int_{\widetilde{L}}\omega$. 而选择合适的路线$\widetilde{L}$ 例如直线段等, 可使$\int_{\widetilde{L}}\omega$ 容易算出. 同学们自己可以编造很多这种例子. 也见后面场论初步一节。

2. 设S为$\mathbb{R}^3$中一块分片光滑的定向曲面, 不封闭. 取另块曲面$\widetilde{S}$, 它与S有相同边界, 使得$S\cup(-\widetilde{S})$是一个封闭曲面. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是$S\cup(-\widetilde{S})$包围的区域, 即$\partial\Omega=S\cup(-\widetilde{S})$. 则对于在$\overline{\Omega}$附近有定义且光滑的2次形式$\omega(x,y,z)$, 沿着$S$的定向积分有

$$\int_S\omega=\int_{S\cup(-\widetilde{S})}\omega+\int_{\widetilde{S}}\omega=\int_{\partial\Omega}\omega+\int_{\widetilde{S}}\omega=\int_\Omega \mathrm{d}\omega+\int_{\widetilde{S}}\omega.$$

这里$\partial\Omega$的定向与S的定向和谐, 即$\partial\Omega$朝外(朝内)的方向与S的定向和谐.

如上, 这一策略的作用是: 很多情况下后两个积分$\int_\Omega\mathrm{d}\omega, \int_{\widetilde{S}}\omega$相对好计算, 例如若$\omega$是闭形式, 即$\mathrm{d}\omega\equiv 0$, 则有

$$\int_S\omega=\int_{\widetilde{S}}\omega.$$

因此只需计算$\int_{\widetilde{S}}\omega$. 而选择合适的曲面$\widetilde{S}$ 例如平面片等, 可使$\int_{\widetilde{S}}\omega$ 容易算出.

来看例子.

【例】设$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0\}$ 为上半球面, 设$P(y,z),Q(z,x),R(x,y)$在上半球体$B^3_+=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0\}$ 附近光滑. 来计算沿S上

侧的积分:

$$\iint_S P(y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

【解】补充平面$S_0=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\le R^2\}$. 取$S_0$的定向为上侧(即法方向朝上). 则$S\cup(-S_0)=\partial B^3_+$. 由同向积分的可加性和Gauss 散度定理(即Green公式)有 [注意被积形式是个闭形式 (或Green 公式右边的散度项$\equiv 0$)]

$$\begin{aligned}
&\iint_S P(y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_S\omega\\
&=\iint_{S\cup(-S_0)}\omega+\iint_{S_0}\omega=\iint_{\partial B^3_+}\omega+\iint_{S_0}\omega\\
&=\iiint_{B^3_+}\mathrm{d}\omega+\iint_{S_0}\omega\\
&=\iiint_{B^3_+}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{S_0}P(y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&=\iint_{S_0}P(y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

计算最后这个积分: 平面片S_0是显式曲面:

$$S_0:\quad z=z(x,y)=0,\quad (x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\le R^2\}.$$

因此由显式曲面上第二型积分的换元公式有

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_0}P(y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\Big(P(y,0)0+Q(x,0)0+R(x,y)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{x^2+y^2\le R^2}R(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

这就给出这类积分计算的中间结果:

$$\iint_S P(y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le R^2}R(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

然后根据$R(x,y)$的具体情况计算右边的积分. □

§12.5. Green第一公式(分部积分), 调和函数

有了Gauss散度定理, 即Green 公式, 再结合微分基本运算就可导出分部积分等各种基本关系式, 它们比一元函数的微积分丰富得多、复杂得多，也最活跃最有用, 在物理学、力学、几何学、数学物理、偏微分方程等等很多方面都是基本工具.

先复习 **梯度** ∇、**散度** div、**Laplace 算符** Δ.

$\mathbb{R}^n$上关于可微函数和光滑函数的梯度算符∇, 散度算符div 和Laplace 算符Δ 为

$$\nabla=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big),$$

$$\mathrm{div}=\nabla\cdot=\langle\nabla,\cdot\rangle\,,$$

$$\Delta=\mathrm{div}\nabla=\nabla\cdot\nabla=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^2$$

也常写成

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

作用到合适的函数f 和向量值函数$\mathbf{F}=(F_1,F_2,...,F_n)$即为

$$\nabla f(x)=\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big),$$

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(x)=\nabla\cdot\mathbf{F}(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x),$$

$$\Delta f(x)=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}=\mathrm{trace}(H_f(x)).$$

具体操作: 例如对算符div和∇具体操作有

$$\mathrm{div}\nabla f(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\Big)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}=\Delta f(x).$$

【定理12.13(Green第一公式: 分部积分)】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个分片$C^2$类的有界区域. 则对任意函数$f\in C^2(\overline{\Omega})$, $g\in C^1(\overline{\Omega})$, 沿着$\Omega$的正向积分有

$$\int_\Omega g(x)\Delta f(x)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma(x)-\int_\Omega\langle\nabla g(x),\nabla f(x)\rangle\mathrm{d}x$$

其中$\frac{\partial f(x)}{\partial\mathbf{n}}$ 为沿着$\overline{\Omega}$的外法向$\mathbf{n}=\mathbf{n}(x)$ 的方向导数.

【证】回忆

$$\frac{\partial f(x)}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f(x+t\mathbf{n})\Big)\Big|_{t=0}=\langle\nabla f(x),\mathbf{n}\rangle=\langle\nabla f(x),\mathbf{n}(x)\rangle.$$

上述FGreen第一公式实为分部积分公式: 令

$$\mathbf{F}(x)=g(x)\nabla f(x)=\Big(g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^1},\,g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^2},\,...,\,g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^n}\Big).$$

则

$$\mathrm{div}\mathbf{F}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(g\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^i}+\sum_{i=1}^n g\frac{\partial^2 f}{\partial(x^i)^2}=\langle\nabla g,\nabla f\rangle+g\Delta f.$$

同时有

$$\langle\mathbf{F}(x),\mathbf{n}(x)\rangle=g(x)\langle\nabla f(x),\mathbf{n}(x)\rangle=g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial\mathbf{n}}.$$

于是由Green 公式即得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega g(x)\Delta f(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega\langle\nabla g(x),\nabla f(x)\rangle\mathrm{d}x=\int_\Omega\mathrm{div}\mathbf{F}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\partial\Omega}\langle\mathbf{F}(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\int_{\partial\Omega}g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}\sigma(x).\qquad\Box\end{aligned}$$

• **关于函数的平均值估计.**

利用Green 公式我们可以建立关于函数的均值与Laplace 算子的关系. 以下简记

$$B_r(x_0)=B^n(x_0,r)\ \text{为以}x_0\text{为中心、}r>0\text{为半径的}n\text{维球}.$$

【命题12.14】设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, 函数$u\in C^2(\Omega)$. 则对任意$x_0\in\Omega$ 和满足$\overline{B_R(x_0)}\subset\Omega$ 的任意$R>0$ 有球面均值等式和球体均值等式:

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(x_0+Ry)\mathrm{d}\sigma(y)=u(x_0)+\int_0^R\frac{r}{n}\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r,$$

$$\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)}u(x)\mathrm{d}x=u(x_0)+\int_0^R\frac{r}{n}\Big(1-\frac{r^n}{R^n}\Big)\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r.$$

这里$|E|=mes(E),|S|=\sigma(S)$ 分别表示E 的体积和曲面S 的面积.

【证】设$R>0$ 满足$\overline{B_R(x_0)}\subset\Omega$. 令

$$\varphi(r)=\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(x_0+ry)\mathrm{d}\sigma(y),\quad r\in[0,R].$$

易见φ 在$[0,R]$上连续. 由积分号下求导定理(条件显然满足)还易见φ在$(0,R)$ 上可导且对任意$r\in(0,R)$ 有

$$\begin{aligned}\varphi'(r)&=\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|\mathbb{S}^{n-1}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u(x_0+ry))\mathrm{d}\sigma(y)=\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\langle(\nabla u)(x_0+ry),y\rangle\mathrm{d}\sigma(y)\\&=\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x_0)}\Big\langle\nabla u(x),\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\Big\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x_0)}\langle\nabla u(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x).\end{aligned}$$

以上用到

$$\partial B_r(x_0)=x_0+r\mathbb{S}^{n-1}$$

和第一型曲面积分的简单性质(平移和伸缩). 而由Green 公式有

$$\int_{\partial B_r(x_0)}\langle\nabla u(x),\mathbf{n}(x)\rangle\mathrm{d}\sigma(x)=\int_{B_r(x_0)}\nabla\cdot\nabla u(x)\mathrm{d}x=\int_{B_r(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x.$$

再注意

$$|\mathbb{S}^{n-1}|=n|\mathbb{B}^n|,\quad |\mathbb{S}^{n-1}|r^{n-1}=\frac{n}{r}|\mathbb{B}^n|r^n=\frac{n}{r}|B_r(0)|=\frac{n}{r}|B_r(x_0)|$$

有

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|r^{n-1}}\int_{B_r(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x=\frac{r}{n}\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)}\Delta u(x).$$

因此

$$\varphi'(r)=\frac{r}{n}\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x,\quad r\in(0,R).$$

易见$\varphi'(r)$ 有界从而在$[0,R]$ 上可积. 因此由Newton-Lebinitz 公式有

$$\varphi(R)-\varphi(0)=\int_0^R\varphi'(r)\mathrm{d}r=\int_0^R\frac{r}{n}\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r.\tag{5.1}$$

注意到$\varphi(0)=u(x_0)$, 这就证明了命题中的第一个等式.

为证命题中的第二个等式, 让我们把(5.1)写成

$$\varphi(r)-\varphi(0)=\int_0^r\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho,\quad r\in(0,R].$$

然后两边乘以r^{n-1} 再对r 积分并经过积分换序有

$$\begin{aligned}
&\int_0^R r^{n-1}\varphi(r)\mathrm{d}r-\frac{R^n}{n}\varphi(0)=\int_0^R r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^r\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho\\
&=\int_0^R r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^R 1_{\{0\le\rho<r<R\}}\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho\\
&=\int_0^R\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^R r^{n-1}1_{\{0\le\rho<r<R\}}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\rho\\
&=\int_0^R\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_\rho^R r^{n-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\rho\\
&=\int_0^R\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\frac{R^n-\rho^n}{n}\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

然后两边乘以 $\frac{n}{R^n}$ 得到

$$\frac{n}{R^n}\int_0^R r^{n-1}\varphi(r)\mathrm{d}r-\varphi(0)=\int_0^R\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\Big(1-\frac{\rho^n}{R^n}\Big)\mathrm{d}\rho.$$

另一方面由

$$|B_R(x_0)|=|\mathbb{B}^n|R^n=\frac{1}{n}|\mathbb{S}^{n-1}|R^n$$

和重积分的球极坐标换元公式有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)}u(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{|\mathbb{B}^n|R^n}\int_0^R r^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(x_0+ry)\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}r\\&=\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|R^n}\int_0^R r^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(x_0+ry)\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}r=\frac{n}{R^n}\int_0^R r^{n-1}\varphi(r)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)}u(x)\mathrm{d}x-u(x_0)=\int_0^R\frac{\rho}{n}\left(\frac{1}{|B_\rho(x_0)|}\int_{B_\rho(x_0)}\Delta u(x)\mathrm{d}x\right)\Big(1-\frac{\rho^n}{R^n}\Big)\mathrm{d}\rho.$$

这证明了命题中的第二个等式成立. $\square$

应用这一定理即可导出调和函数的均值等式和次调和函数的均值不等式, 请同学写在下面：

§12.6. 场论初步

这一节我们将应用Stokes 公式等基本工具学习数学物理中重要性质: 例如怎样判断某些道路积分只与起点和终点有关而与中途无关? 这问题联系着是否可以用“变上限”的道路积分来定义函数,联系着力场对质点的运动期间的做功是否只与起点和终点有关. 与此相关的一个重要概念是向量场(如力场)的旋度, 它顾名思义描述向量场在指定点附近是否在旋转. 等等。这一部分主要涉及曲线积分(1次形式的积分)和由此与Stokes 公式导出的二维曲面的积分(2次形式的积分). 在进入主要内容之前让我们先复习一下**1 次形式的外微分**:

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\mathrm{d}x_i,$$
$$\mathrm{d}\omega(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = \sum_{1\le i<j\le n}\Big(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\Big)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

例如对$n = 3$ 有 ($x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$) 有

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$
$$\mathrm{d}\omega(x,y,z) = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

其中再次用到反交换: $-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z = \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$.

【旋度算符】对于$\mathbb{R}^3$中的向量场$\mathbf{F} = (P,Q,R)$, 引进旋度算符$\mathbf{curl} = \mathbf{rot}$ 如下:

$$\mathbf{curlF} = \mathbf{rotF} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big). \tag{6.1}$$

其点态写法是

$$\mathbf{curlF}(\mathbf{p}) = \mathbf{rotF}(\mathbf{p}) = \Big(\frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{p}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{p}),\ \frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{p}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{p}),\ \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{p}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{p})\Big)$$

其中

$$\mathbf{p} = (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

若引用三维梯度算符$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)$, 则旋度可写成便于记忆的形式:

$$\mathbf{rotF} = \nabla\times\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

其点态的写法为

$$\mathbf{rot}\mathbf{F}(\mathbf{p})=(\nabla\times\mathbf{F})(\mathbf{p})=\det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P(\mathbf{p}) & Q(\mathbf{p}) & R(\mathbf{p})\end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{i}=(1,0,0),\quad \mathbf{j}=(0,1,0),\quad \mathbf{k}=(0,0,1).$$

【定理12.15($\mathbb{R}^3$中的Stokes公式)】设$S\subset\mathbb{R}^3$ 是一个紧的分片C^2类的二维定向曲面, $\mathbf{F}=(P,Q,R)\in C^1(S,\mathbb{R}^3)$. 则沿着$S$的定向的积分有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial S}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\ &=\int_S\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{6.3}$$

如令$\mathbf{T}(\mathbf{p})$ 是曲线∂S 上的单位切向量场, 方向与∂S的方向一致, 令$\mathbf{n}(\mathbf{p})$是曲面S上的单位法向量场其方向与曲线∂S的定向和谐(例如二者满足右手螺旋关系), 则Stokes公式(6.3)可写成紧凑且突出几何和力学含义的形式:

$$\int_{\partial S}\langle\mathbf{F}(\mathbf{p}),\,\mathbf{T}(\mathbf{p})\rangle\mathrm{d}s(\mathbf{p})=\int_S\langle\mathbf{rot}\mathbf{F}(\mathbf{p}),\,\mathbf{n}(\mathbf{p})\rangle\mathrm{d}\sigma(\mathbf{p})\tag{6.4}$$

其中$\mathrm{d}s(\mathbf{p})$ 是曲线∂S上的弧长测度元, $\mathrm{d}\sigma(\mathbf{p})$ 是曲面S上的面测度元.

【证】(6.3) 是已证的一般Stokes 公式的特例, (6.4)左边是(6.3)左边(即第二型曲线)的切向量表示(见(2.0)), (6.4)右边是(6.3)右边(即$\mathbb{R}^3$中二维曲面上的第二型曲面积分)的法向量表示(见**命题12.7(超曲面上的第二型积分)**), 也即若令

$$\widetilde{\mathbf{F}}=(\widetilde{F}_1,\widetilde{F}_2,\widetilde{F}_3)=\mathbf{rot}\mathbf{F}=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

则有

$$(6.3)\text{右边}=\int_S\widetilde{F}_1\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\widetilde{F}_2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\widetilde{F}_3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int_S\langle\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{p}),\,\mathbf{n}(\mathbf{p})\rangle\mathrm{d}\sigma(\mathbf{p})=(6.4)\text{右边}.$$

□

【旋度的几何、力学意义】

在上述Stokes 公式中, 取一点$\mathbf{p}_0\in S^\circ$ 并令S_ε 为含于S内的一族包含$\mathbf{p}_0$的光滑曲面, 满足$\mathrm{diam}(S_\varepsilon)\to 0$ as $\varepsilon\to 0^+$. 对S_ε 应用Stokes公式有

$$\frac{1}{\sigma(S_\varepsilon)}\int_{\partial S_\varepsilon}\langle\mathbf{F}(\mathbf{p}),\mathbf{T}(\mathbf{p})\rangle\mathrm{d}s(\mathbf{p})=\frac{1}{\sigma(S_\varepsilon)}\int_{S_\varepsilon}\langle\mathbf{rotF}(\mathbf{p}),\mathbf{n}(\mathbf{p})\rangle\mathrm{d}\sigma(\mathbf{p}).$$

因$\mathbf{F}(\mathbf{p}),\mathbf{n}(\mathbf{p})$在$S$上连续, 故易见有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sigma(S_\varepsilon)}\int_{\partial S_\varepsilon}\langle\mathbf{F}(\mathbf{p}),\mathbf{T}(\mathbf{p})\rangle\mathrm{d}s=\langle\mathbf{rotF}(\mathbf{p}_0),\mathbf{n}(\mathbf{p}_0)\rangle\,.$$

我们观察到, 当$\varepsilon>0$充分小时, 小曲面S_ε就像切空间$TS_{\mathbf{p}_0}$中的一块包含$\mathbf{p}_0$的平面片. 于是**近似地**我们有(**图示**)

$$\mathbf{n}(\mathbf{p}_0)\perp S_\varepsilon,\quad \text{特别有}\quad \mathbf{n}(\mathbf{p}_0)\perp\mathbf{T}(\mathbf{p})\quad\forall\,\mathbf{p}\in\partial S_\varepsilon.$$

于是若$\langle\mathbf{rotF}(\mathbf{p}_0),\mathbf{n}(\mathbf{p}_0)\rangle\neq 0$, 例如若$\langle\mathbf{rotF}(\mathbf{p}_0),\mathbf{n}(\mathbf{p}_0)\rangle>0$, 则当$\varepsilon>0$ 充分小时有

$$\langle\mathbf{F}(\mathbf{p}),\,\mathbf{T}(\mathbf{p})\rangle>0\quad\text{for}\;\;\text{most}\quad\mathbf{p}\in\partial S_\varepsilon.$$

这就是说向量场$\mathbf{F}(\mathbf{p})$ 的大多数在边缘曲线∂S_ε的正的切方向上有贡献. 换言之, 向量场$\mathbf{F}(\mathbf{p})$ 看起来象是在$\mathbf{p}_0$附近围绕法轴$\mathbf{n}(\mathbf{p}_0)$旋转. 这就是为什么人们把$\mathbf{curlF}=\mathbf{rotF}$叫做向量场$\mathbf{F}$的旋度.

当然, $\langle\mathbf{rotF}(\mathbf{p}),\mathbf{n}(\mathbf{p})\rangle>0$ 和$\langle\mathbf{rotF}(\mathbf{p}),\mathbf{n}(\mathbf{p})\rangle<0$ 给出不同方向的旋转.

当$\mathbf{rotF}(\mathbf{p})\equiv\mathbf{0}$时, 称$\mathbf{F}$ 是一个无旋场. 顾名思义, 这意味着向量场$\mathbf{F}$“不旋转”, 这里打引号表示不排除有这样的情形: 不同方向的旋转互相抵消而使合成的结果为无旋.

下面定理是场论中的基本定理.

【定理12.16】设$D\subset\mathbb{R}^2$ 为一区域, $\mathbf{F}=(P,Q)\in C^r(D,\mathbb{R}^2)$ 其中r为非负整数. 考虑下面四条性质:

1° 闭路积分恒为零: 对于D中的任何连续的分段光滑的不自交的闭合曲线C 都有,

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$

2° 路径积分与中途无关: 对于D中的任何两条具有相同起点和终点的连续的分段光滑的曲线γ_1,γ_2 都有

$$\int_{\gamma_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\gamma_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

换言之, 位于D中的道路积分$\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 只与道路γ的起点和终点有关而与道路的中途无关.

3° **F是有势场**: 存在$U\in C^{r+1}(D,\mathbb{R})$ 使得$\mathbf{F}=\nabla U$ 于D. 这函数U称为$\mathbf{F}$的一个位势函数[7]。

4° 当$r\geq 1$时, P,Q满足恰当方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\qquad 于\ D.$$

我们有: **1°**, **2°**, **3°** 彼此等价且都蕴含**4°**, 即

$$\mathbf{1}^\circ\Longleftrightarrow\mathbf{2}^\circ\Longleftrightarrow\mathbf{3}^\circ\Longrightarrow\mathbf{4}^\circ.$$

进一步, 若D 还是单连通的, 则以上四条彼此等价:

$$\mathbf{1}^\circ\Longleftrightarrow\mathbf{2}^\circ\Longleftrightarrow\mathbf{3}^\circ\Longleftrightarrow\mathbf{4}^\circ.$$

【定理12.17】设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为一区域, $\mathbf{F}=(P,Q,R)\in C^r(\Omega,\mathbb{R}^3)$ 其中r为非负整数. 考虑下面四条性质:

1° **闭路积分恒为零**: 对于Ω中的任何连续的分段光滑的不自交的闭合曲线C 都有,

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0.$$

2° **路径积分与中途无关**: 对于Ω中的任何两条具有相同起点和终点的连续的分段光滑的曲线γ_1,γ_2 都有

$$\int_{\gamma_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\gamma_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

换言之, 位于Ω中的道路积分$\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 只与道路γ的起点和终点有关而与道路的中途无关.

3° **F是有势场**: 存在$U\in C^{r+1}(\Omega,\mathbb{R})$ 使得$\mathbf{F}=\nabla U$ 于Ω. 这函数U称为$\mathbf{F}$的一个位势函数。

4° **F是无旋场**: $\mathbf{rot}\mathbf{F}=\mathbf{0}$ 于Ω. 这里自动假定$r\geq 1$.

我们有: **1°**, **2°**, **3°** 彼此等价且都蕴含**4°**, 即

$$\mathbf{1}^\circ\Longleftrightarrow\mathbf{2}^\circ\Longleftrightarrow\mathbf{3}^\circ\Longrightarrow\mathbf{4}^\circ.$$

[7]有些文献和教科书中把满足$\mathbf{F}=-\nabla U$的U叫做$\mathbf{F}$的位势函数. 按此约定, 我们这里的$-U$是$\mathbf{F}$的位势函数.

进一步, 若Ω 还是单连通的, 则以上四条彼此等价:

$$\mathbf{1}^\circ \Longleftrightarrow \mathbf{2}^\circ \Longleftrightarrow \mathbf{3}^\circ \Longleftrightarrow \mathbf{4}^\circ.$$

【两个定理的大致证明】证法完全相同, 这里只证**定理12.17.** 以下记

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z, \quad (x,y,z)\in\Omega.$$

并总假定所考虑的曲线都是位于Ω内的连续的分段光滑的曲线.

$\mathbf{1}^\circ \Longrightarrow \mathbf{2}^\circ$: 设$\gamma_1$和$\gamma_2$有相同的起点和终点. 因$\gamma_1,\gamma_2$ 是Ω内的紧集, 故直观上可以找到第三条曲线$\gamma_3\subset\Omega$ 它与γ_1,γ_2有相同的起点和终点且$\gamma_1\cup(-\gamma_3)$ 和$\gamma_2\cup(-\gamma_3)$ 都是Ω内的闭合曲线。于是由假设有

$$\int_{\gamma_1}\omega - \int_{\gamma_3}\omega = \int_{\gamma_1\cup(-\gamma_3)}\omega = 0, \quad \int_{\gamma_2}\omega - \int_{\gamma_3}\omega = \int_{\gamma_1\cup(-\gamma_3)}\omega = 0.$$

因此

$$\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_3}\omega = \int_{\gamma_2}\omega.$$

$\mathbf{2}^\circ \Longrightarrow \mathbf{3}^\circ$: 固定一点$\mathbf{A}\in\Omega$. 考虑变终端的函数

$$U(x,y,z) = \int_{\mathbf{A}}^{(x,y,z)}\omega = \int_{\mathbf{A}}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z, \quad (x,y,z)\in\Omega.$$

注意假设条件$\mathbf{2}^\circ$ 保证了$U(x,y,z)$ 是良好定义的, 也即$U(x,y,z)$只由终端(x,y,z) 决定而与从$\mathbf{A}$到(x,y,z)的(分段光滑的)路径无关. 任取定$(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$. 因Ω是开集, 故存在$\delta>0$ 使得以(x_0,y_0,z_0)为中心、棱长为2δ的闭方体含于Ω内:

$$[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\times[z_0-\delta,z_0+\delta]\subset\Omega.$$

任取$h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$. 考虑直线段

$$L:\ (x,y,z)=\varphi(t)=(x_0+th,y_0,z_0), \quad t\in[0,1].$$

连接$\mathbf{A}$与(x_0+h,y_0,z_0)的道路可以分解为

$$\mathbf{A}\sim(x_0+h,y_0,z_0) = [\mathbf{A}\sim(x_0,y_0,z_0)]\cup L.$$

由积分的可加性有

$$U(x_0+h,y_0,z_0) = \int_{\mathbf{A}}^{(x_0+h,y_0,z_0)}\omega = \int_{\mathbf{A}}^{(x_0,y_0,z_0)}\omega + \int_L\omega$$

即

$$U(x_0+h,y_0,z_0)-U(x_0,y_0,z_0)=\int_L\omega.$$

计算

$$\int_L\omega=\int_0^1\varphi^*\omega(t)=\int_0^1\langle\mathbf{F}(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle\mathrm{d}t=h\int_0^1P(x_0+th,y_0,z_0)\mathrm{d}t.$$

由此得到

$$\frac{U(x_0+h,y_0,z_0)-U(x_0,y_0,z_0)}{h}=\int_0^1P(x_0+th,y_0,z_0)\mathrm{d}t\to P(x_0,y_0,z_0)\quad\text{as}\quad h\to 0.$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=P(x_0,y_0,z_0).$$

据$(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$的任意性即得

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z)=P(x,y,z),\qquad (x,y,z)\in\Omega.$$

同样可证

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=R\qquad\text{in}\quad\Omega.$$

所以U是$\mathbf{F}=(P,Q,R)$的一个位势: $\nabla U=\mathbf{F}$ 于Ω. 【当然对任意常数c, 函数$c+U$也是$\mathbf{F}$的位势.】

3° $\Longrightarrow$ **1°**: 设$U\in C^{r+1}(\Omega,\mathbb{R})$是$\mathbf{F}=(P,Q,R)$的一个位势函数, 即满足

$$\mathrm{d}U(x,y,z)=\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\omega(x,y,z)\quad 于\ \Omega.$$

设C是Ω内的一条分段光滑的不自交的闭合曲线, 即C是一个连通的紧的无边的分段光滑的一维流形。则根据Newton-Lebunitz 公式(即零次形式的Stokes 公式)有

$$\int_C\omega(x,y,z)=\int_C\mathrm{d}U(x,y,z)=\int_{\partial C}U(x,y,z)=\int_{\emptyset}U(x,y,z)=0.$$

3° $\Longrightarrow$ **4°**: 设$U\in C^{r+1}(\Omega,\mathbb{R})$是$\mathbf{F}=(P,Q,R)$的一个位势函数并设$r\ge 1$. 此时$U$至少是$C^2$类的. 因此由$C^2$类的函数的二阶偏导数可换序有

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big)=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)=\frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big)=\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

所以$\mathbf{rotF}=\mathbf{0}$ 于Ω, 即$\mathbf{F}$无旋.

最后假设Ω还是单连通的. 来证明

$\mathbf{4}^\circ\implies\mathbf{1}^\circ$: 设$C\subset\Omega$ 是一条分段光滑的闭合曲线(即C是一个紧的连通的无边的分段光滑的一维流形). 通过一个逼近过程我们可以假定C是光滑的. 由Ω 单连通, 我们可以承认或假定具有这样的性质: 存在含于Ω内的一个分片C^2类的二维定向曲面$S:(x,y,z)=H(s,t)\in\Omega$, $(s,t)\in[0,1]^2$ 使得$C=\partial S$. 因此由Stokes公式(6.3)和第二型曲面积分的法向表示以及无旋$\mathbf{rotF}\equiv\mathbf{0}$ 得到

$$\int_C\omega=\int_{\partial S}\omega=\int_S\mathrm{d}\omega=\int_S\langle\mathbf{rotF},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma=\int_S\langle\mathbf{0},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma=0.$$

□

【注1】以上证明中, **“$\mathbf{2}^\circ\implies\mathbf{3}^\circ$”**, **“$\mathbf{3}^\circ\implies\mathbf{1}^\circ$”**, **“$\mathbf{3}^\circ\implies\mathbf{4}^\circ$”**是严格的(也容易严格), 而**“$\mathbf{1}^\circ\implies\mathbf{2}^\circ$”**和**“$\mathbf{4}^\circ\implies\mathbf{1}^\circ$”**就基本上是靠几何直观辅助了, 也确实很难在本科教材中给出严格证明.

【注2】在力学中, 人们把有位势的力场叫做保守力场。我们在本章引言中已说过，保守力场的做功只与路径的起点和终点有关, 与中间路径无关. 上面定理则说明, 反之也对, 即若某力场的做功只与路径的起点和终点有关而与中间路径无关, 则这力场必是保守的.

【流体力学连续性方程的建立】

这块参考卓里奇《数学分析》第二卷第十四章：以建立流体力学连续性方程为例, 学习如何建立流体力学基本模型.

首先回忆前面讲过的流体的流量: 设在指定时刻t_0, 空间中的一流体的流速场为$\mathbf{u}(x,y,z,t_0)$, 则这块流体在t_0时刻穿过一块定向曲面S(沿着S的定向)的流量为

$$Q(t_0)=\int_S\langle\mathbf{u}(x,y,z,t_0),\mathbf{n}(x,y,z)\rangle\mathrm{d}\sigma(x,y,z)$$

如前, 必须说明这里的流量指的是“体积流量”(volumetric flow rate), 即它只考虑通过曲面的流体的体积而不区别是何种流体(特别不考虑流体的密度).

很多实际问题中还要考虑有多少流体本身穿过S, 即还要考虑**“质量流量”**(mass flow rate), 它是在上述计算体积流量的积分中, 把面积测度元$\mathrm{d}\sigma(x,y,z)$ 换成带有密度$\rho(x,y,z,t_0)$的测度元$\rho(x,y,z,t_0)\mathrm{d}\sigma(x,y,z)$, 也即我们把

$$\begin{aligned}\dot{m}(t_0) &= \int_S \langle \mathbf{u}(x,y,z,t_0), \mathbf{n}(x,y,z)\rho(x,y,z,t_0)\rangle \mathrm{d}\sigma(x,y,z) \\ &= \int_S \langle \rho(x,y,z,t_0)\mathbf{u}(x,y,z,t_0), \mathbf{n}(x,y,z)\rangle \mathrm{d}\sigma(x,y,z)\end{aligned}$$

叫做这块流体在t_0时刻穿过一块定向曲面S(沿着S的定向)的**质量流量**, 其中$\rho(x,y,z,t_0)$是所考虑的流体的质量密度函数(当然非负).

设在所考察的空间内充满某种流体(即某种介质, 如水,油,空气,...), 流体的密度函数为$\rho=\rho(x,y,z,t)$, 运动速度为$\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,y,z,t)$, 它们是空间中的点$(x,y,z)$ 和时间t的函数. 我们将用Gauss 散度定理(Green 公式) 建立ρ 和$\mathbf{u}$的关系.

设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是所考察的有界区域(可以假定它是光滑的). 从时刻t到$t+\Delta t$, 流体在Ω 内的质量的改变量为

$$\iiint_\Omega \rho(x,y,z,t+\Delta t)\mathrm{d}V - \iiint_\Omega \rho(x,y,z,t)\mathrm{d}V. \quad \text{这里}\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{6.5}$$

当间隔Δt很小时, 在时刻t 和$t+\Delta t$, 流体通过Ω的流速(显然近似相等)

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,y,z,t)\approx\mathbf{u}(x,y,z,t+\Delta t)$$

的方向都是从Ω的“左”方经过Ω内到Ω 的“右”方, 因而$-\iiint_\Omega \rho(x,y,z,t)\mathrm{d}V$ 对应的流速方向便是从Ω的“右”方经过Ω 内到Ω的“左”方. 因此差值$\iiint_\Omega \rho(x,y,z,t+\Delta)\mathrm{d}V - \iiint_\Omega \rho(x,y,z,t)\mathrm{d}V$对应的流速的方向便大体上是从$\Omega$的边界指向$\Omega$的内部. 因此如用$\mathbf{n}=\mathbf{n}(x,x,z)$ 表示$\partial\Omega$上的朝外的单位法向量场, 也即$-\mathbf{n}$ 表示$\partial\Omega$上的朝内的单位法向量场, 则在t 和$t+\Delta t$ 之间的任一时刻τ, 流体穿过$\partial\Omega$的质量流量为

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \rho\mathbf{u}, -\mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\sigma.$$

对τ取从t到$t+\Delta t$的积分$\int_t^{t+\Delta t}\{\cdots\}\mathrm{d}\tau$ (包括$\Delta t<0$的情形), 就得到流体从时刻t到$t+\Delta t$在Ω 内的质量的改变量(6.6), 即

$$\iiint_\Omega \rho(x,y,z,t+\Delta t)\mathrm{d}V - \iiint_\Omega \rho(x,y,z,t)\mathrm{d}V = \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}\tau \iint_{\partial\Omega}\langle \rho\mathbf{u}, -\mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\sigma$$

也即

$$\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z,t+\Delta t)-\rho(x,y,z,t)}{\Delta t}\mathrm{d}V = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}\tau \iint_{\partial\Omega}\langle \rho\mathbf{u}, -\mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\sigma.$$

令$\Delta t \to 0$ (应用积分号下求微商定理)得到

$$\iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\iint_{\partial\Omega} \langle \rho\mathbf{u}, \mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\sigma. \tag{6.6}$$

接下来是对右端使用Gauss 散度定理(即Green公式)：因$\mathbf{n}$指向$\partial\Omega$的外侧, 故有

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \rho\mathbf{u}, \mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})\mathrm{d}V.$$

代入(6.6) 得到

$$\iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\iiint_\Omega \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})\mathrm{d}V$$

即

$$\iiint_\Omega \Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})\Big)\mathrm{d}V = 0.$$

把Ω换成Ω内的任何开球$B_r(x,y,z)$得到

$$\iiint_{B_r(x,y,z)} \Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})\Big)\mathrm{d}V = 0.$$

应用积分中值定理, 令$r \to 0$ 则由被积函数的连续性得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 \quad 于\ \Omega. \tag{6.7}$$

这个偏微分方程给出了流体的质量密度$\rho = \rho(x,y,z,t)$ 和流速$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,y,z,t)$的关系. 在流体力学中, 称方程(6.7)为**流体的连续性方程**.

注意若写$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 并把**内积**写成**点积**并将散度div 也写成点积形式$\nabla\cdot$, 则有

$$\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) = \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_3) = \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}.$$

采用**点积**运算, (6.7) 可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad 于\ \Omega. \tag{6.7$'$}$$

不可压流体. 若一流体满足: 对流体所在区域Ω中的任一有界区域D, 流体流进D的量等于流出D的量, 也即这流体通过封闭曲面∂D的流量等于零, 即

$$\int_{\partial D} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}\rangle \mathrm{d}V = 0 \tag{6.8}$$

则称这流体是不可压缩的, 简称不可压. 例如水、油是不可压的, 空气是可压的.

由Green 公式和(6.8) 有 (注意$\nabla\cdot\mathbf{u} = \mathrm{div}\mathbf{u}$是$\mathbf{u}$的散度)

$$\int_D \nabla\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}V = \int_{\partial D} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}\rangle \mathrm{d}V = 0.$$

特别对任意开球$B_r(x,y,z)$ 有

$$\int_{B_r(x,y,z)} \nabla\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}V = 0.$$

这就给出

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad 于\ \Omega. \tag{6.9}$$

反之若一流体的流速$\mathbf{u}$满足(6.9), 则再次应用Green 公式知这流体是不可压的. 于是人们也把流速满足微分方程(6.9)的流体叫做不可压流体.

对于不可压流体, 其连续性方程(6.7$'$) 简化成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0 \quad 于\ \Omega. \tag{6.7$''$}$$

作业题

以下“光滑”指满足相关定理要求的“C^1类”或“C^2类”. 为避免非本质的讨论, 以下约定“分段光滑” = “连通且分段光滑”. 对计算题建议两种方法: (1)直接计算, (2) 看看能否利用Stokes公式或Gauss 散度定理(Green 公式), 包括补线或补面的方法. 两种方法各有优缺点. 此外对第二型曲面积分也可以考虑把它写成法向量形式的第一型积分, 特别是当曲面的单位法向量场是常量时, 此法很便利.

【据说徐利治教授早年研究积分的降维计算时遇到同行的质疑: 你把高维积分降低一维计算, 但低维曲面积分可能更复杂难算！徐利治回应道: 那我就用高维计算低维, 二者总有一个好算的。】

1. 计算第二型曲线积分

$$I_1 = \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y \qquad \text{逆时针},$$

$$I_2 = \int_C (x^2-2xy)\mathrm{d}x + (y^2-2xy)\mathrm{d}y, \quad C:\ x=y^2, y\in[-1,1]\ \text{沿}y\text{增加的方向},$$

$$I_3 = \int_C x\mathrm{d}y, \quad C: \text{直线}2x+y=1\ \text{与两坐标轴组成的三角形, 逆时针},$$

$$I_4 = \int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}y, \quad C: \text{直线}x=1, x=3\ \text{和}y=1, y=4\text{构成的矩形, 逆时针},$$

$$I_5 = \int_{x^2+y^2=1} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{ax^2+2bxy+cy^2} \qquad \text{逆时针, 这里}ac-b^2>0,$$

$$I_6 = \int_C (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z,$$
$$C:\ (x,y,z) = (a\sin^2 t, 2a\sin t\cos t, a\cos^2 t),\ t\in[0,\pi],\ \text{沿}t\text{增加的方向},$$

$$I_7 = \int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z, \quad C\text{为球面片}x^2+y^2+z^2=1,$$
$x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$的边界, 方向是从$(1,0,0)$到$(0,1,0)$到$(0,0,1)$再到$(1,0,0)$,

$$I_8 = \int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z, \quad C\text{是平面}x+y=2\text{与球面}x^2+y^2+z^2=2(x+y)$$
交成的圆周, 眼睛从原点看去顺时针的方向是C的方向.

2. 计算第二型曲面积分

$$I_1 = \iint_S (2x+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y, \quad S:\ z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1,\ \text{下侧},$$

$$I_2 = \iint_S x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \quad S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ z\ge 0,\ \text{上侧},$$

$$I_3 = \iint_{x^2+y^2+z^2=a^2} x^4\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^4\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^4\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \quad \text{内侧},$$

$$I_4 = \iint_S f(x)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \quad S = \partial([0,a]\times[0,b]\times[0,c]) \text{ 外侧},$$

$$I_5 = \iint_S (y-z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$S:\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = h \text{ 所围曲面, 外侧} \quad (h>0),$$

$$I_6 = \iint_{x,y,z\ge 0, x+y+z=1} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \quad \text{曲面单位法向与}(1,1,1)\text{同向},$$

$$I_7 = \iint_{(x-a^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \text{外侧}} x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

3. 对$n=2,3$的情形, 利用第二型积分的线性性、同向可加性和换元计算公式, **直接证明** 关于二维和三维区间的Green 公式, 即

(1) 设$[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$为有界闭区间, $P,Q\in C^1([a,b]\times[c,d])$. 证明沿着$[a,b]\times[c,d]$的正向(等价地沿着$\partial([a,b]\times[c,d])$的逆时针方向) 积分有

$$\int_{\partial([a,b]\times[c,d])} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设$P,Q,R\in C^1([0,1]^3)$. 证明沿着$[0,1]^3$的正向(等价地沿着$\partial([0,1]^3)$的外法向) 积分有

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial[0,1]^3} P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\ &= \iiint_{[0,1]^3} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

4. 计算曲线积分

$$I = \int_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

其中C是任意一条不经过$(0,0)$的光滑的不自交的封闭曲线, 逆时针方向.

5. 计算第二型曲线曲面积分

$$I_1 = \int_{x^2+y^2=a^2} xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x, \quad \text{逆时针},$$

$$I_2 = \int_L e^x\sin y\mathrm{d}x + e^x\cos y\mathrm{d}y, \quad L: x^2+y^2=ax,\ y\ge 0\ (a>0), \text{沿}x\text{增加的方向}.$$

$$I_3 = \int_L (e^x\sin y - my)\mathrm{d}x + (e^x\cos y - m)\mathrm{d}y, \quad L \text{ 同上题, 沿}x\text{减少的方向. } m \text{ 为常数}.$$

$$I_4 = \int_C \frac{e^x}{x^2+y^2}\Big((x\sin y - y\cos y)\mathrm{d}x + (x\cos y - y\sin y)\mathrm{d}y\Big)$$

C 是分段光滑的不自交的封闭曲线, 严格包围原点.

$I_5 = \int_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$

C为椭圆: $x^2+y^2=1, x+z=1$; 从x-轴正向看去, C是顺时针方向.

$I_6 = \iint_S yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=R^2,\ 0\le z\le h\}$ 外侧,

$I_7 = \iint_S (y^2+z^2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (z^2+x^2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$S: x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0$, 上侧.

$I_8 = \iint_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S是由圆柱面$x^2+y^2=1$, 三个坐标平面以及上半球面$x^2+y^2+z^2=2z\,(z\ge 1)$ 所围立体在第一挂限部分的外侧面,

$I_9 = \iint_S \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S是$(x-a)^2+2(y-b)^2+3(z-c)^2=1$的外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 常数a,b,c满足$a^2+2b^2+3c^2\neq 1$.

6. (1) 设封闭曲线C 有光滑的参数表示$(x,y)=(x(t),y(t)), t\in[\alpha,\beta]$, C的定向为参数t增加的方向. 证明C围成的面积A为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \Big(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

[当然若你没把握结果是否≥ 0, 就对计算结果取绝对值.]

(2) 利用Green 公式计算下列曲线围成的面积:

$$\text{星型曲线}:(x,y)=(a\cos^3 t,\ a\sin^3 t),\quad t\in[0,2\pi].$$

$$\text{双纽线}:(x^2+y^2)^2=a^2(y^2-x^2)\qquad [\text{提示：令}y=xt.]$$

7. 设C_1, C_2 是$\mathbb{R}^2$ 中两条不相交的包围原点的光滑的不自交的闭合曲线且C_1 严格地介于原点和C_2 之间. 证明对任意$p>0$ 有

$$\int_{C_1} r^p\mathrm{d}\theta < \int_{C_2} r^p\mathrm{d}\theta$$

其中$r=(x^2+y^2)^{1/2}, \theta=\arctan(y/x)$ 即$\mathrm{d}\theta$ 是关于(x,y)的全微分(一次微分形式).

8. 试在$\mathbb{R}^2$中寻求一个面积为π的紧的分片光滑的有界区域D, 使得下面积分达到最大值:

$$I(D)=\int_{\partial D} y^3\mathrm{d}x + (3x-x^3)\mathrm{d}y.$$

9. 设$f\in C^1(\mathbb{R})$, $C\subset\mathbb{R}^2$是任一条光滑的不自交的封闭曲线. 证明

$$\int_C f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0,\qquad \int_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0.$$

10. (1) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为一个分片光滑的有界区域, $\mathbf{n}=\mathbf{n}(x,y,z)$为$\partial\Omega$上的连续单位外法向量场.

(1.1) 证明对于常向量$\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ 有

$$\iint_{\partial\Omega}\langle\mathbf{a},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma=0.$$

(1.2) 设$(x_0,y_0,z_0)\notin\partial\Omega$, 令$\mathbf{p}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. 证明

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{1}{|\mathbf{p}|}\langle\mathbf{p},\mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=2\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|\mathbf{p}|}.$$

(2)设紧的光滑的二维曲面$S\subset\mathbb{R}^3$ 有连续的单位法向量场$\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{r})$. 证明对于常向量$\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ 有

$$\int_{\partial S}\mathbf{a}\times\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=2\iint_S\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

其中$\mathbf{r}=(x,y,z)$, $\mathrm{d}\mathbf{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$, “$\times$ ”是向量之间的向量积, “$\cdot$”是向量之间的内积：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\langle\mathbf{a},\mathbf{n}\rangle$.

11. 设$2\le k\le n$, $S\subset\mathbb{R}^n$ 为紧的分片光滑的k维定向流形.

(1) 设ω是定义在包含S的一个开集上的光滑的$k-1$次形式且是闭形式, 又设$u\in C^1(S,\mathbb{R})$ 且$u|_{\partial S}=0$. 证明

$$\int_S(\mathrm{d}u)\wedge\omega=0.$$

(2) 设ω,η是定义在包含S的一个开集上的光滑的i次形式和j次形式且$i+j+1=k$, $\eta|_{\partial S}=0$. 证明

$$\int_S\omega\wedge\mathrm{d}\eta=(-1)^{i-1}\int_S(\mathrm{d}\omega)\wedge\eta.$$

12. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个分片光滑的有界区域, 函数$u,v\in C^2(\overline{\Omega})$, 这$\mathbf{n}$为$\partial\Omega$上的单位外法向量场. 证明沿着$\Omega$的正向积分有

$$\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}\sigma=\int_\Omega(v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)\mathrm{d}V,$$

$$\int_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big)\mathrm{d}\sigma=\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V.$$

[这里$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x$是$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue 测度.]

13. 设$D \subset \mathbb{R}^2$为开集, $u \in C^2(D, \mathbb{R})$. 证明u在D内为调和函数的充分必要条件是对于D内的任何光滑的不自交的闭合曲线C 满足$\mathrm{Int}C \subset D$ 都有

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}s = 0.$$

这里$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y)$ 是C的单位外法向, $\mathrm{Int}C$ 是C包围的闭区域, $\mathrm{d}s$为弧长测度元.

14. (1) 设$f \in C^1(\mathbb{R})$ 恒正且$f(0) = 1$. 假设对于$\mathbb{R}^2$中的任一条分段光滑的不自交的闭合曲线C 恒有

$$\int\limits_C \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{f(x) + y^2} = 0\,.$$

(a)求 $f(x)$ 的表达式。(b) 对所求出的函数 $f(x)$ 计算曲线积分

$$I = \int\limits_\gamma \frac{xdx + ydy}{f(x) + y^2}$$

其中γ 是从点 $(0, 0)$ 出发经过点 $(1, 1)$ 到点 $(2, 0)$ 终止 的折线。

(2) 设$f \in C^1(\mathbb{R})$且$f(0) = -1/2$. 求这样的f使得第二型曲线积分

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} (e^x + f(x))y\mathrm{d}x - f(x)\mathrm{d}y$$

只与起点$\mathbf{A}$ 和终点$\mathbf{B}$ 有关而与中途无关. 然后对求得的函数f 计算当$\mathbf{A} = (0, 0), \mathbf{B} = (1, 1)$时的上述积分.

15. 设函数$f \in C([0, \infty)$, 令$\mathbf{F}(x) = f(|x|)x$, $x \in \mathbb{R}^n$. 证明$\mathbf{F}$ 在$\mathbb{R}^n$上是有势场, 即存在$U \in C^1(\mathbb{R}^n)$使得$\mathbf{F}(x) = \nabla U(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

16. 试寻求所有的具有以下形式的$\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$上的调和函数$f$: $f(x) = g(|x|)$, 其中g在$(0, \infty)$上是光滑函数.

17. 设空间$\Omega \subset \mathbb{R}^3$内的连续流体运动的(光滑的)速度场$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ 是有势场. 证明当这流体为不可压流体时, $\mathbf{u}$的势函数在Ω内是调和函数.

18. 众所周知以下的亥姆霍兹(Helmholtz)定理: 在区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$内, 任何光滑场$\mathbf{F}$能分解为无旋场$\mathbf{F}_1$ (即$\mathbf{rot}\mathbf{F}_1 = 0$) 与管量场$\mathbf{F}_2$ (即$\mathrm{div}\mathbf{F}_2 = 0$) 之和$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. 试证明这种分解的存在性可以归结为泊松方程$\Delta\varphi = \mathrm{div}\mathbf{F}$的解$\varphi$的存在性.

[本题的目的是学习梯度∇、散度$\mathrm{div} = \nabla\cdot$, 旋度$\mathbf{rot} = \nabla\times$, Laplacian Δ, 等算符的运算性质.]