## 习题 3.1

1.（i）设 $z=2e^{i\theta},0\le\theta\le\pi$，则 $\int\limits_{\gamma}\frac{2z-3}{z}dz=\int\limits_{\pi}^{0}\left(2e^{i\theta}-3\right)id\theta=4+3i\pi$；

（ii）设 $z=2e^{i\theta},-\pi\le\theta\le 0$，则 $\int\limits_{\gamma}\frac{2z-3}{z}dz=\int\limits_{-\pi}^{0}\left(2e^{i\theta}-3\right)id\theta=4-3i\pi$；

（iii）设 $z=2e^{i\theta},-\pi\le\theta\le\pi$，则 $\int\limits_{\gamma}\frac{2z-3}{z}dz=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(2e^{i\theta}-3\right)id\theta=-6i\pi$ 。

2. 首先在 $\mathbb{C}-(-\infty,-2]$ 上可以定义 $\log(z+2)$ 的单值分支，从而 $\frac{1}{z+2}$ 在 $\mathbb{C}-(-\infty,-2]$ 上有原函数，那么 $\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z+2}dz=0$ 。

另一方面，沿着上半圆从 1 到-1（记为 $C^+$）积分，有 $\int\limits_{C^+}\frac{1}{z+2}dz=\log 3$ 。又令 $z=e^{i\theta},0\le\theta\le\pi$，则 $\int\limits_{C^+}\frac{1}{z+2}dz=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{-\sin\theta+i\cos\theta}{\cos\theta+2+i\sin\theta}d\theta$，计算其虚部为 $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{2\cos\theta+1}{4\cos\theta+5}d\theta$，所以 $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{2\cos\theta+1}{4\cos\theta+5}d\theta=0$ 。

4. 首先 $\frac{P}{Q}=\frac{a}{z^2}\left(1+o(1)\right),z\to\infty$，那么

$$\left|\int\limits_{|z|=R}\frac{P}{Q}dz\right|\le\int\limits_{|z|=R}\left|\frac{P}{Q}\right||dz|=\int\limits_{|z|=R}\frac{|a|}{|z|^2}\left(1+o(1)\right)|dz|,$$

$$\le\int\limits_{0}^{2\pi}2\frac{|a|}{R^2}Rd\theta=\frac{4\pi|a|}{R}\to 0,R\to\infty\ 。$$

7.（i）首先可以假设 $\varphi$ 在 $\gamma$ 的一个紧致邻域 $V$ 上定义。又由于 $\varphi'(z)$ 的连续性，于是可设 $M=\sup\limits_{z\in V}|\varphi'(z)|<+\infty$ 。对于 $[0,1]$ 区间的足够细小的划分 $0=t_0<t_1<...<t_n=1$，可以认为线段 $\overline{\gamma(t_k)\gamma(t_{k+1})},0\le k\le n-1$ 位于 $V$ 中。于是

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\varphi\left(\gamma(t_{k+1})\right)-\varphi\left(\gamma(t_k)\right)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int\limits_{\overline{\gamma(t_k)\gamma(t_{k+1})}}\varphi'(z)dz\right|$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\overline{\gamma(t_k)\gamma(t_{k+1})}}|\varphi'(z)||dz|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma(t_k)\gamma(t_{k+1})} M|dz|$$

$$= M\sum_{k=0}^{n-1}|\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)| \le Ml(\gamma),$$

于是$\Gamma$可求长；

注：|dz|即 ds

（ii）按照积分的定义，$\int_\Gamma f(w)dw = \lim\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\gamma(t_k)))\left(\varphi(\gamma(t_{k+1}))-\varphi(\gamma(t_k))\right)$，极限是对划分不断变细所做的，即 $\max_{0\le k\le n-1}|t_{k+1}-t_k|\to 0$。而

$$\int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \lim\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\gamma(t_k)))\varphi'(\gamma(t_k))\left(\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)\right),$$

两个积分作差有

$$\int_\Gamma f(w)dw - \int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

$$= \lim\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\gamma(t_k)))\left(\varphi(\gamma(t_{k+1}))-\varphi(\gamma(t_k))-\varphi'(\gamma(t_k))\left(\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)\right)\right),$$

首先由于 $f$ 连续，可设 $N=\sup_{w\in\Gamma}|f(w)|<+\infty$。再由 $\varphi'(z)$ 在 $V$ 上一致连续，那么 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要 $|z'-z|<\delta$，则 $|\varphi'(z')-\varphi'(z)|<\varepsilon$。我们可以取划分足够小，使得当 $t,t'\in[t_k,t_{k+1}],0\le k\le n-1$ 时，有 $|\gamma(t')-\gamma(t)|<\delta$。再由

$$\varphi(\gamma(t_{k+1}))-\varphi(\gamma(t_k))-\varphi'(\gamma(t_k))\left(\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)\right) = \int_{\gamma(t_k)\gamma(t_{k+1})}\left(\varphi'(z)-\varphi'(\gamma(t_k))\right)dz,$$

于是 $\left|\int_\Gamma f(w)dw - \int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)dz\right|$

$$\le \lim\sum_{k=0}^{n-1}|f(\varphi(\gamma(t_k)))|\left|\varphi(\gamma(t_{k+1}))-\varphi(\gamma(t_k))-\varphi'(\gamma(t_k))\left(\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)\right)\right|$$

$$\le \lim\sum_{k=0}^{n-1} N\int_{\gamma(t_k)\gamma(t_{k+1})}|\varphi'(z)-\varphi'(\gamma(t_k))||dz|$$

$$\le N\varepsilon l(\gamma),$$

由 $\varepsilon$ 得任意性可知结论。

注：在留作业是假定了 $\gamma$ 光滑， 这里得解法则不用这个假设。

9. $\frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}dz=\frac{1}{2i}\int_\gamma (x-iy)(dx+idy)=\frac{1}{2i}\left(\int_\gamma xdx+ydy+i\int_\gamma -ydx+xdy\right)$，再由 Green 公式得到上式为 $\iint_\Omega dxdy$，$\Omega$ 为 $\gamma$ 所围区域。

10. 由 9 题，$\Gamma$ 所围的面积是 $\frac{1}{2i}\int_\Gamma \bar{w}dw$，再由 7 题结论，$\frac{1}{2i}\int_\Gamma \bar{w}dw=\frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz$。

## 习题 3.2

1.（i）设 $z=re^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$，则 $dz=rie^{i\theta}d\theta=izd\theta$，$|dz|=rd\theta=-ir\frac{dz}{z}$，另一方面有 $|z-a|^2=(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(z-a)\left(\frac{r^2}{z}-\bar{a}\right)$，那么

$$\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=\int_{|z|=r}\frac{-irdz}{(z-a)(r^2-\bar{a}z)}$$

$$=\frac{-ir}{r^2-|a|^2}\int_{|z|=r}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-\frac{r^2}{\bar{a}}}\right)dz,$$

若 $|a|<r$，上式 $=\frac{2\pi r}{r^2-|a|^2}$，若 $|a|>r$，上式 $=\frac{2\pi r}{|a|^2-r^2}$；

（ii）由 $\frac{2z-1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}$，则 $\int_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz=\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz=4\pi i$；

（iii）$\frac{z}{z^4-1}=\frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)}=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{z^2-1}-\frac{1}{z^2+1}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right),$$

那么 $\int_{|z|=5}\frac{z}{z^4-1}dz=\int_{|z|=5}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=0$；

注：由第 4 题直接可得结论

（iv）$\int_{|z|=2a}\frac{e^z}{z^2+a^2}dz=\frac{1}{2ai}\int_{|z|=2a}\left(\frac{e^z}{z-ai}-\frac{e^z}{z+ai}\right)dz=\frac{2\pi i\sin a}{a}$。

4.（i）取以原点为圆心，半径分别为 $r$ 和 $\delta(<r)$ 的两个圆周。对 $\frac{f(z)}{z}$ 应用 Cauchy 积分定理有

$$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz=\int_{|z|=\delta}\frac{f(z)}{z}dz\text{。}$$

在左边令 $z=re^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$，那么左边$=i\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta$，类似的有右边$=i\int_0^{2\pi}f(\delta e^{i\theta})d\theta$。

再令 $\delta\to 0$，则右边$\to 2\pi i f(0)$。于是 $i\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta=2\pi i f(0)$。

（ii）对 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})d\theta=f(0)$ 两边同时乘 $\rho$，得到 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho d\theta=\rho f(0)$，再关于 $\rho$ 在 $[0,r]$ 上积分，则右边为 $\frac{r^2}{2}f(0)$，现在计算左边：

左边$=\int_0^r d\rho\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta$，最后一项就是极坐标下表达的 $\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|\le r}f(z)dxdy$。即 $\frac{r^2}{2}f(0)=\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|\le r}f(z)dxdy$。

5. 注意到在 $B(0,R)$（单连通域）上的任何一个调和函数 $u$ 都是某个解析函数 $f$ 的实部，那么由 4（i）的结论分离实部和虚部就能得到本题结论。

## 习题 3.3

2. 应用牛顿-莱布尼茨公式，由于 $f$ 有原函数 $F$，那么 $\int_\gamma f(z)dz=F(\gamma(1))-F(\gamma(0))$，再由于 $\gamma(1)=\gamma(0)$，则 $\int_\gamma f(z)dz=0$。

4. 首先我们取从原点到 1 的直线段 $l(t)=t$， $0\le t\le 1$。沿 $l$ 积分为

$$\int_l\frac{1}{1+z^2}dz=\int_0^1\frac{1}{1+z^2}dz=\frac{\pi}{4}\text{。}$$

对于一般的 $\gamma$，我们有 $\int_\gamma\frac{1}{1+z^2}dz-\int_l\frac{1}{1+z^2}dz=\int_{\gamma+l^-}\frac{1}{1+z^2}dz$，注意到 $\gamma+l^-$ 是一条闭曲线，不经过 $\pm i$，那么 $\int_{\gamma+l^-}\frac{1}{1+z^2}dz=\frac{1}{2i}\int_{\gamma+l^-}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=k\pi$，这里的 $k$ 是 $\gamma+l^-$ 环绕 $i$ 和 $-i$ 的次数之差，为一个整数。那么本题结论得证。

## 习题 3.4

1.（i）$\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin z}{z^2-1}dz=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\left(\frac{\sin z}{z+1}\right)}{z-1}dz=2\pi i\frac{\sin 1}{1+1}=\pi i\sin 1$；

（ii）$\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{1+z^2}dz=\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=0$；

（iii）注意到积分曲线$\gamma$是以$i$为中心,，长轴长度为 1，平行于虚轴，短轴平行于实轴，长度为$\frac{1}{2}$。那么$\int\limits_{\gamma}\frac{e^{\pi z}}{\left(1+z^2\right)^2}dz=\int\limits_{\gamma}\frac{\left(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right)}{(z-i)^2}dz=2\pi i\left(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i}=\frac{-1+i\pi}{2}$；

（iv）$\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{\left(1+z^2\right)\left(4+z^2\right)}dz=\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{4+z^2}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=0$；

（v）这个要应用 Cauchy 积分定理，把沿$|z|=2$的积分化为沿两个圆心分别在原点和 1 的小圆周的积分，即

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}dz=\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}dz+\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}dz,$$

第一项为

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}dz=\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{(z-1)^3(z-3)^5}}{z^3}dz=\pi i\left(\frac{1}{(z-1)^3(z-3)^5}\right)''\Bigg|_{z=0}=\frac{61}{3^6}\pi i,$$

类似的第二项为$-\frac{3}{8}\pi i$；

（vi）要根据$|a|,|b|,R$的大小关系进行讨论。通常认为$n$是正整数。

如果$|a|<R,|b|<R$，则沿$|z|=R$的积分化为沿两个圆心分别在$a$和$b$的小圆上的积分，结果是$\frac{2\pi i}{(b-a)^n}+\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(\frac{1}{z-b}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=a}=\frac{2\pi i}{(b-a)^n}-\frac{2\pi i}{(a-b)^n}$。

其他情形类似讨论。

2. If $z\in G_1$, draw a circle $C$ centered at $z$ with radius $R$ large enough such that $\gamma$ is contained in the disk $\{\varsigma\in\mathbb{C}:|\varsigma-z|<R\}$. Since $\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}$ is holomorphic on $\{\varsigma\in\mathbb{C}:|\varsigma-z|<R\}\bigcap G_2$ with boundary $\gamma\bigcup C$, according to Cauchy’s formule, we have

$$\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \int_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma .$$

For the RHS, let $\varsigma = z + Re^{i\theta}$, then we get

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\theta}) d\theta .$$

Finally let $R \to \infty$, since $f(z + Re^{i\theta}) \to A$, we get what we want

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = A.$$

If $z \in G_2$, still we draw a circle $C$ centered at $z$ with radius $R$ large enough such that $\gamma$ is contained in the disk $\{\varsigma \in \mathbb{C} : |\varsigma - z| < R\}$. But this time we need another little circle $C'$ also centered at $z$ with radius $r$ small enough such that the disk $\{\varsigma \in \mathbb{C} : |\varsigma - z| \le r\}$ does not intersect with $\gamma$. Now we can see $\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$ is holomorphic on $\{\varsigma \in \mathbb{C} : |\varsigma - z| < R\} \cap G_2 \cap \{\varsigma \in \mathbb{C} : |\varsigma - z| > r\}$ with boundary $\gamma \cup C \cup C'$, again according to Cauchy's formule we get

$$\int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \int_{C'} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \int_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma . \qquad (*)$$

For $C$, let $\varsigma = z + Re^{i\theta}$. And for $C'$, let $\varsigma = z + re^{i\theta}$. Then

$$\int_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = i \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\theta}) d\theta ,$$

$$\int_{C'} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta ,$$

let $R \to \infty, r \to 0$, since $f(z + Re^{i\theta}) \to A, f(z + re^{i\theta}) \to f(z)$, we have

$$\int_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = iA ,$$

$$\int_{C'} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = if(z).$$

Take the above two formule into (*), we get what we want

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = A - f(z).$$

9. 首先由 Cauchy 导数公式

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}dz,$$

参数化 $z = re^{i\theta}$，则

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left(u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta})\right)e^{-i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta + \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} iv(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$$

现在证明以上两项相等即可。

$$\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)d\theta,$$

由于在参数化 $z = re^{i\theta}$ 下， $dx = -r\sin\theta d\theta, dy = r\cos\theta d\theta$，则

$$\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)d\theta = \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|z|=r} udy + iudx,$$

由 Green 公式上式

$$= \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|z|\le r}\left(u_x - iu_y\right)dxdy,$$

即 $\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|z|\le r}\left(u_x - iu_y\right)dxdy$，

完全类似的方法， $\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} iv(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|z|\le r}\left(iv_x + v_y\right)dxdy$，

再由 Cauchy-Riemann 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$，则

$$\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|z|\le r}\left(u_x - iu_y\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|z|\le r}\left(v_y + iv_x\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} iv(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta\text{。}$$

习题 3.5

1. 设 $\forall z\in\mathbb{C},|f(z)|<M$。那么

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz\right|\le\int_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z-z_1||z-z_2|}|dz|$$

$$\le\int_{|z|=r}\frac{M}{(r-|z_1|)(r-|z_2|)}|dz|=\frac{2\pi rM}{(r-|z_1|)(r-|z_2|)},$$

显然，当 $r\to+\infty$ 时，$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz\to 0$。但是注意到，$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz$ 的值实际上和 $r$ 无关，所以 $\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz=0$。

另一方面，

$$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz=\frac{1}{z_1-z_2}\left(\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_1}dz-\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_2}dz\right)=\frac{2\pi i}{z_1-z_2}\big(f(z_1)-f(z_2)\big)\text{。}$$

所以 $f(z_1)=f(z_2)$，再由 $z_1,z_2$ 的任意性可得到 Liouville 定理。

2. This problem needs Cauchy's derivative formule. Draw a circle $C$ centered at the origin with radius $R$. According to Cauchy' formule, for any $z$ with $|z|<R$, we have

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma=f(z).$$

Take the n-th order derivative for $z$ on both sides, we get

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^{n+1}}d\varsigma=f^{(n)}(z).$$

Then use the integral inequality

$$|f^{(n)}(z)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^{n+1}}d\varsigma\right|\le\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta}-z|^{n+1}}Rd\theta\qquad(**)$$

Since $|f(z)|=O(|z|^{\alpha})$, we have $|f(Re^{i\theta})|=O(|R|^{\alpha})$, which means there exists a positive number $M$ such that $|f(Re^{i\theta})|\le M|R|^{\alpha}$. Let $R\to\infty$, we will have $|z|<\frac{R}{2}$, which means $|Re^{i\theta}-z|>\frac{R}{2}$. Then

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta}-z|^{n+1}}Rd\theta \le \frac{2^n n!}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M|R|^{\alpha}}{R^{n+1}}Rd\theta .$$

If $\alpha < n$ and $R \to \infty$, $|f^{(n)}(z)| = 0$. So $f(z)$ is a polynomial with degree at most $[\alpha]$.

4. Since $\operatorname{Im} f(z) > 0$ always holds, consider $f(z)+i$. Obviously

$$|f(z)+i| = \sqrt{(\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z)+1)^2} \ge 1 + \operatorname{Im} f(z) \ge 1.$$

Then $\frac{1}{f(z)+i}$ is an entire function with upper bound 1. According to Liouville's theorem 3.5.2, $\frac{1}{f(z)+i}$ is a constant, which means $f(z)$ itself is a constant.

5. 我们可以对 $f(z)$ 复合一些单叶全纯映射，从而化归为 4 题的情形。令 $h(w) = \frac{w}{1-w}$，那么可以验证 $h([0,1]) = [0,+\infty)$，所以 $h\big(f(z)\big)$ 是一个整函数，且不取 $[0,+\infty)$ 上的值。进一步有 $\sqrt{h\big(f(z)\big)}$ 的值域只能包含在一个半平面，这是 4 题的情形。

6. 首先明显的是 $F$ 是连续的，且在 $z_0$ 之外是全纯的 。只要证明 $F$ 在 $z_0$ 处可导即可。设 $\gamma$ 是包含 $z$ 和 $z_0$ 的小圆，$z \ne z_0$。那么

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{F(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma &= \int_\gamma \frac{f(\varsigma)-f(z_0)}{(\varsigma - z_0)(\varsigma - z)}d\varsigma \\ &= \frac{1}{z-z_0}\int_\gamma\left(\frac{f(\varsigma)-f(z_0)}{\varsigma - z} - \frac{f(\varsigma)-f(z_0)}{\varsigma - z_0}\right)d\varsigma \\ &= \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = F(z), \quad \text{......................} \quad (*)\end{aligned}$$

注意到 $\int_\gamma \frac{F(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$ 是关于 $z$ 的全纯函数，且在 $z_0$ 处全纯，所以按照 $F$ 的连续性以及（*）知 $F(z)$ 在 $z_0$ 处全纯。

7. $\forall z_0 \in D$，取圆心在 $z_0$ 处的包含在 $D$ 中的小圆盘 $B$。只要证明 $f$ 沿 $B$ 中任何闭曲线的积分为零即可。我们证明 $f$ 在 $B$ 中有原函数。

给定一点 $z\in B$，用两条折线段连接 $z_0$ 和 $z$。第一条折线段 $\gamma_1$：先从 $z_0$ 到 $\operatorname{Re} z_0+i\operatorname{Im} z$ 的竖直线，然后从 $\operatorname{Re} z_0+i\operatorname{Im} z$ 到 $z$ 的水平直线。第二条折线 $\gamma_2$：先从 $z_0$ 到 $\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} z_0$ 的水平直线，然后从 $\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} z_0$ 到 $z$ 的竖直线。我们定义 $F(z)=\int_{\gamma_1} f(z)dz$。

现在我们来证明 $\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_{\gamma_2} f(z)dz$。由于 $\gamma_2-\gamma_1$ 是一个正方形 $S$ 的边界，而 $\gamma$ 的部分线段连同 $\gamma_2-\gamma_1$ 把 $S$ 分割为一些隔离的区域 $G_1,G_2,\ldots$。又由 Cauchy 积分定理知 $\int_{\partial G_k} f(z)dz=0$，所以 $\int_{\partial G_1+\partial G_2+\ldots} f(z)dz=0$。这其中沿 $\gamma$ 的线段部分计算两次，一次正向一次反向，抵消。所以 $\int_{\partial G_1+\partial G_2+\ldots} f(z)dz=\int_{\gamma_2-\gamma_1} f(z)dz=0$。

由于 $F(z)=\int_{\gamma_1} f(z)dz$，所以 $\frac{\partial F(z)}{\partial x}=f(z)$，又由于 $F(z)=\int_{\gamma_2} f(z)dz$，$\frac{\partial F(z)}{\partial y}=if(z)$。这表明 $\frac{\partial F(z)}{\partial y}=i\frac{\partial F(z)}{\partial x}$，注意到这就是 Cauchy-Riemann 方程，所以 $F(z)$ 解析，那么作为其导数的 $f(z)$ 也是解析的。特别地，$f(z)$ 在 $z_0$ 解析。由 $z_0$ 任意性，$f(z)$ 在 $D$ 上解析。