答疑

1. 实数域$\mathbb{R}$的自同构只有恒等自同构.

首先，设$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 一个自同构，则$\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$，$\varphi(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$，若$a \notin \mathbb{Q}$，令$\varphi(a) = b$，设$a > 0$，

则$a = x^2, x > 0$ $\quad \varphi(a) = \varphi(x)^2 = b > 0$

若$a \neq b$，存在$\frac{m}{n} = c \in \mathbb{Q}$，$\quad a < \frac{m}{n} < b$ 或 $b < \frac{m}{n} < a$

$\varphi(c-a) = c - \varphi(a)$ $\quad$ 但$c - a > 0 \Rightarrow \varphi(c-a) > 0$

(假设$a < \frac{m}{n} < b$)

$\Rightarrow c > \varphi(a) = b$ 矛盾!

2. 设$\mathbb{F}$数域，$m \neq n \in \mathbb{N}$，则$M_n(\mathbb{F})$到$M_m(\mathbb{F})$不存在满同态.

设$f: M_n(\mathbb{F}) \to M_m(\mathbb{F})$是一个满环同态，$\ker f$是$M_n(\mathbb{F})$的理想，则$\ker f = \{0\} \Rightarrow f$是环同构.

设$I_n \in M_n(\mathbb{F})$单位阵，则$f(I_n) = I_m$

$\forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{F}$ $\quad f(\lambda I_n) = A \in M_m(\mathbb{F})$ A和$M_m(\mathbb{F})$中任意矩阵交换，则A是纯量阵，设$A = \mu I_m$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &\xrightarrow{f} \mathbb{F} \\ \lambda &\longmapsto \mu \end{aligned}$$ 是$\mathbb{F}$的域自同构.

设 $M_1,\cdots,M_{n^2}\in M_n(\mathbb{F})$ 是一组基（$M_n(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 n^2 维空间），则 $f(M_1),\cdots,f(M_{n^2})$ 线性无关. 否则

令 $c_1 f(M_1)+\cdots+c_{n^2}f(M_{n^2})=0$ $\quad c_i\in\mathbb{F}$.

$\cancel{\Rightarrow f(f^{-1}c_1M_1+\cdots+}$

$\Rightarrow f[f^{-1}(c_1)M_1+\cdots+f^{-1}(c_{n^2})M_{n^2}]=0$

$\Rightarrow f^{-1}(c_1)M_1+\cdots+f^{-1}(c_{n^2})M_{n^2}=0\Rightarrow f^{-1}(c_i)=0\Rightarrow c_i=0$

同理，取 $N_1,\cdots,N_{m^2}\in M_m(\mathbb{F})$ 是一组基，则

$f^{-1}(N_1),\cdots,f^{-1}(N_{m^2})$ 线性无关.

$\Rightarrow n=m$ 与假设矛盾.

3. 设 R 是一个环，I, J 两个理想，则 $IJ=\{\sum_{i<\infty}a_ib_i \mid a_i\in I, b_i\in J\}\subseteq I\cap J$

这一般不相等，例如 $R=\mathbb{Z}$ $\quad I=(4), J=(6)$

$IJ=(24)$ $\quad I\cap J=(12)$

若 R 含幺交换 $I+J=R$，则 $IJ=I\cap J$

$\forall x\in I\cap J\subseteq R$，则 $x=x_1+x_2$, $x_1\in I$, $x_2\in J$

$1\in R$, $1=a+b$, $a\in I$, $b\in J\Rightarrow x\cdot 1=x=xa+bx\in IJ$

4. 设 $R=\frac{\mathbb{Q}[x,y]}{(f(x,y))}$ $f(x,y)$ 不可约多项式

则 R 是一个含幺交换整环，若 $\overline{g_1(x,y)}\cdot\overline{g_2(x,y)}=\bar{0}$

$\Rightarrow g_1(x,y)g_2(x,y)\in(f(x,y))\Rightarrow f(x,y)\mid g_1(x,y)g_2(x,y)$

$\Longrightarrow$ f 不可约元（因而是素元），$f(x,y)\mid g_1(x,y)$ 或

$f(x,y)\mid g_2(x,y)\Rightarrow\overline{g_1(x,y)}=\bar{0}$ 或 $\overline{g_2(x,y)}=\bar{0}$.

（这里使用了~~R~~是 $\mathbb{Q}[x,y]$ 是唯一分解整环）

例如 $f(x,y)=y^2-x^3\xrightarrow{\text{参数化}}(t^2,t^3)$

$\mathbb{Q}[x,y]\xrightarrow{\Phi}\mathbb{Q}[t^2,t^3]$

显然 $(y^2-x^3)\subseteq\ker\Phi$，设 $P(x,y)\in\ker\Phi$，$P(x,y)\notin(y^2-x^3)$

$P(x,y)=(y^2-x^3)Q(x,y)+a(x)y+b(x)$（关于 y 的带余除法）代入 (t^2,t^3) $P(t^2,t^3)=0=a(t^2)t^3+b(t^2)$

分离 $a(x),b(x)$ 奇偶次的项 $\Rightarrow a(x)=b(x)=0$ 矛盾.

因此 $\ker\Phi=(y^2-x^3)$

$\mathbb{Q}[t^2,t^3]$ 的分式域 $=\mathbb{Q}(t)=\left\{\frac{f(t)}{g(t)}\,\middle|\,\begin{array}{l}f(t),g(t)\in\mathbb{Q}[t]\\ g(t)\neq0\end{array}\right\}$

的确，设 F 是分式域，$F=\left\{\frac{f(t^2,t^3)}{g(t^2,t^3)}\,\middle|\,f,g\in\mathbb{Q}[t^2,t^3],\ g\neq0\right\}$

$F\subseteq\mathbb{Q}(t)$，另一方面 $t=\frac{t^3}{t^2}$，$\frac{1}{t}=\frac{t^2}{t^3}\in F\Rightarrow F=\mathbb{Q}(t)$.