《初等概率论》第 2 讲

邓 婉 璐

清华大学
统计学研究中心

September 21, 2018

目录

Review

概率模型的基本构成

- 样本空间 Ω: 一个试验的所有可能结果的集合;
- 概率：概率就是为试验结果的集合 A(称之为事件) 确定一个非负数 $\mathbf{P}(A)$ (称为事件 A 的概率). 此非负数刻画了我们对事件 A 的认识或所产生的信念程度.

概率公理

1. (非负性) 对一切事件 A，满足 $\mathbf{P}(A) \geq 0$.
2. (归一化) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
3. (可列可加性) 若 $A_1, A_2, \ldots$ 是互不相容的事件序列，满足 $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

Review

古典概型

- 情景证明
- 证明有放回无序的结论
- 多项式系数

Review

概率模型

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \le x, y \le 1\} = \bigcup_{x,y} \{(x, y)\}. \quad P(A) = area(A).$$

x∈[0,1]
y∈[0,1]

于是，

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{x,y} \{(x, y)\}) \cancel{=} \sum_{x,y} P(\{(x, y)\}) \cancel{=} \sum_{x,y} 0 = 0.$$

矛盾?!

$$P((x, y) \neq (0, 0)) = 1.$$

- 为什么把概率分配到事件上，而非每一个试验结果上？
- $P(A) = 1$，几乎必然 (a.s. almost surely) 发生.
- 任意奇怪的集合都有概率么？

一、概率空间

定义：事件域或 σ-域或 σ-代数 (σ-field 或 σ-algebra)

设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 表示 Ω 的某些子集构成的集合，如果 $\mathscr{F}$ 满足以下三个条件：

1. $\Omega \in \mathscr{F}$；
2. 如果 $A \in \mathscr{F}$，则 $A^c \in \mathscr{F}$；
3. 如果 $A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1, 2, \ldots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，

称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的事件域或 σ-域或 σ-代数，称 $\mathscr{F}$ 中的元素为事件，称 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间 (measurable space).

♣ σ-代数的例子：

1. $\mathscr{F} = \{\Omega, \emptyset\}$，平凡的 σ-代数；
2. $\mathscr{F} = \{\Omega$ 的所有子集$\}$，最大的 σ-代数；
3. $\mathscr{F} = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ 是包含 A 的最小 σ-代数.
4. 对于固定的 Ω，甚至可以构造出无穷多个 Ω 的 σ-代数.

Ω $(\Omega, \mathscr{F})$

一、概率空间

♣ 注：

1. Ω 的任意子集未必是事件，只有 $\mathscr{F}$ 中的元素才能称之为事件；
2. 如果 Ω 是可列的，则 Ω 的任一子集都可测，当然此时 $\mathscr{F}$ 可以包含 Ω 的所有子集；
3. 如果 Ω 是不可列的，则存在 Ω 的不可测子集，此时这些不可测子集就不能把它们当成事件了，因为我们无法确定其概率.
4. $\mathscr{F}$ 对集合的各种运算都是封闭的，包括事件列的极限运算.

♣ $\mathscr{F}$ 的构造：一个简单的例子

如果 A, B 是 Ω 的两个子集，且 $B \neq A^c$，那么由 $\mathscr{A} = \{A, B\}$ 所生成的 σ-域 $\mathscr{F}$ 是：

$$\begin{aligned}\mathscr{F} = \{&\Omega, \emptyset, A, A^c, B, B^c, AB, AB^c, A^cB, A^cB^c, A\cup B,\\ &A^c\cup B, A\cup B^c, A^c\cup B^c, AB\cup A^cB^c, AB^c\cup A^cB\}\end{aligned}$$

一、概率空间

♣ $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是两个 σ-域，但 $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ 并不一定是 σ-域.

$\Omega=\{a,b,c\},\quad \mathscr{F}=\{\Omega,\emptyset,\{a\},\{b,c\}\},\quad \mathscr{G}=\{\Omega,\emptyset,\{c\},\{a,b\}\}.$

于是 $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}=\{\Omega,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$,

但是 $\{a\}\cup\{c\}=\{a,c\}\notin\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$.

$A_1\in\mathscr{F}$

$A_2\in\mathscr{G}$

$A_1\cup A_2$

♣ 如果 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是两个 σ-域，且 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$，则 $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ 是 σ-域.

$\mathscr{G}$

$\Omega\in\mathscr{F}$

$A\in\mathscr{F},\ A^c\in\mathscr{F}$

$A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$

$\bigcup A$

一、概率空间

定义：概率或概率测度 (probability measure)

设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间，$\mathbb{P}$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的函数，如果 $\mathbb{P}$ 满足下面三个条件：

1. (非负性) 对任意的 $A \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
2. (完全性) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. (可列可加性, σ-additivity) 对于 $\mathscr{F}$ 中互不相交 (disjoint) (或互不相容) 的事件 $A_1, A_2, \ldots$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

称 $\mathbb{P}$ 为 $\mathscr{F}$ 上的**概率测度** (probability measure)，简称**概率** (probability)，称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为**概率空间** (probability space).

一、概率空间

♣ 对于 $A \in \mathscr{F}$, 如果 $\mathbb{P}(A) = 1$, 称 A 以**概率 1 发生或几乎处处发生**, 这里的几乎处处是指对几乎每个 $\omega \in \Omega$. 几乎处处有时又称为**几乎必然**, 记作 a.s. (almost surely).

♣ $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 的构造: 简单例子

1. 掷一枚硬币. $\Omega = \{H, T\}$, $\mathscr{F} = \{\Omega, \emptyset, \{H\}, \{T\}\}$, $\mathbb{P}(\{H\}) = p = 1 - \mathbb{P}(\{T\})$, 其中 $p \in [0,1]$ 是某个固定实数.
2. 掷一枚骰子. $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ (Ω 的所有子集构成的集合, 称为幂集, power sets), $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$, $i = 1, ..., 6$, 对任意的 $A \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(A) = \#(A)/6$.
3. 反复掷一枚不均匀的硬币, 直到正面向上.
$\Omega = \{T^n H : n \geq 0\} \cup \{T^\infty\}$.
$\mathbb{P}(T^n H) = (1-p)^n p$, $\quad \mathbb{P}(T^\infty) = \lim_{n\to\infty} (1-p)^n = 0$.

二、概率的性质

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

证明. 因为 $\Omega = \Omega + \emptyset + \emptyset + \cdots$, 由概率公理 (3) 得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}(\Omega + \emptyset + \emptyset + \cdots) \\ &= \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \cdots .\end{aligned}$$

由概率公理 (2), 得

$$1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \cdots ,$$

即

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \cdots .$$

再由概率公理 (1), 得

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

二、概率的性质

2. (概率的有限可加性)

对 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, n$, 且 $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, 则

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

证明. 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$, 则 $\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, 且当 $i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \emptyset$, 由概率公理 (3) 和概率性质 1, 可得

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

二、概率的性质

3. 如果 $A \in \mathscr{F}$, 则 $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

证明. 因为 $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = \Omega$, 由性质 2 和概率公理 (2) 得

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c).$$

故 $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

4. 如果 $A, B \in \mathscr{F}$, 且 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

证明. 因为 $B = A \cup (B \setminus A)$ 且 $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, 由性质 2 得

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A),$$

即: $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

推论:

1. (概率的单调性) 如果 $A, B \in \mathscr{F}$, 且 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
2. 对任意的 $A \in \mathscr{F}$, 有 $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

5. 如果 $A, B \in \mathscr{F}$, 则 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

证明. 因为 $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, 且 $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, 由性质 2 和 4 得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

推论:

(有限次可加性, finite subadditivity, 或 Boole's inequality) 如果 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, ..., n$, 则

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

二、概率的性质

6. 如果 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, n$, 则

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{1\le i\le n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

7. (Bonferroni's inequality) 如果 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, n$, 则

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \ge \sum_{1\le i\le n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

(Kounias's inequality)

归纳!

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \le \min_k \Big\{ \sum_{1\le i\le n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i:i\ne k} \mathbb{P}(A_i \cap A_k) \Big\}.$$

8. (可列次可加性, σ-subadditivity) 如果 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, 则

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

证明. 令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ 且 $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $B_n \subset A_n$. 由概率公理 (3) 和概率的单调性，得

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

二、概率的性质

9. 如果 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, 则

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i^c).$$

特别地

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq 1 - \mathbb{P}(A_1^c) - \mathbb{P}(A_2^c).$$

证明. 由性质 3 和 8 得,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big)^c\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\Big)$$

$$\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i^c).$$

特别地, 令 $A_3 = A_4 = \cdots = \Omega$, 由性质 (1), 可得第二个结论.

三、概率的连续性

定义：事件列的上极限与下极限

$\limsup_{n\to\infty}$

设 $\{A_i, i=1,2,\ldots\}$ 是 Ω 中的事件列，定义：

1. $\{A_i, i=1,2,\ldots\}$ 的上极限，记作 $\limsup_{n\to\infty} A_n$，定义为：

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega\in\Omega : \omega \text{属于无穷多个} A_i\}.$$

2. $\{A_i, i=1,2,\ldots\}$ 的下极限，记作 $\liminf_{n\to\infty} A_n$，定义为：

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$= \{\omega\in\Omega : \omega \text{属于所有的 } A_i \text{ 除了有限个之外}\}.$$

3. 如果 $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$，则称事件列 $\{A_i\}$ 的极限存在，记作 $\lim_{n\to\infty} A_n$.

三、概率的连续性

对给定的事件列 $\{A_i, i = 1, 2, ...\}$,

1. 如果 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 称事件列 $\{A_i, i = 1, 2, ...\}$ 是单调递增的;
2. 如果 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 称事件列 $\{A_i, i = 1, 2, ...\}$ 是单调递减的;

♣ 单调增序列和单调减序列统称为单调序列.

♣ 对于单调增序列 $\{A_i\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

♣ 对于单调减序列 $\{A_i\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

三、概率的连续性

定理

设 $\{A_i\}$ 和 $\{B_j\}$ 是事件列.

1. 如果 $\{A_i\}$ 是单调增序列，则

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. 如果 $\{B_j\}$ 是单调减序列，则

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

证明. (1) 因为 $\{A_i\}$ 是单调增的，所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_i - A_{i-1}).$$

由概率公理 (3) 得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) &= \mathbb{P}(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty}\{\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1})\}\\ &= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\{\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1})\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

(2). 因为 $\{B_j\}$ 是单调减序列，所以 $\{\Omega - B_j\}$ 是单调增序列，因此

$$\begin{aligned}1 - \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} B_n\Big) &= \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty}(\Omega - B_n)\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\Omega - B_n) = 1 - \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n).\end{aligned}$$

即
$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n).$$

定理

***Borel-Cantelli* 引理.** 设 $\{A_i\}$ 是事件列.

1. 如果

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

则 $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$

2. 如果 $\{A_i\}$ 是相互独立的，且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty,$$

则 $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$

小结

知识点

- 概率空间（事件域、概率是一种度量）
- 概率的性质（利用公理推演得到）：有限、可列；等式、不等式；极限

技巧

- 类比熟悉的概念／技巧，理解、掌握新概念（e.g. 数列的极限、集合的极限)
- 应用 e^x 的 Taylor 展开公式进行近似
- 复杂概念/定理，找简单例子，通过逐层拆解进行理解

作业

- 设 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ 都是 Ω 上的事件域，验证 $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ 也是 Ω 上的事件域。
- 设 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，且事件 $A_i, i = 1, \ldots, n$ 互不相交，每个事件 A_i 发生的概率为正数。设 $\mathscr{F}$ 是包含所有 A_i 的最小事件域，问 $\mathscr{F}$ 中有多少个元素？
- 设 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的事件列，证明：如果 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在，那么 $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
- 证明概率的性质的第 7 条。任选两个不等式中的一个（*Bonferroni's inequality* 或 *Kounias's inequality*），进行证明即可。

祝大家中秋节快乐!