9.5

数学规划第二次作业

夏　燚　2016012110

汪　圣　2015012087

胡家琦　2016012108

2019 年 11 月 15 日

3.2

引理1：非空闭凸集$\mathcal{X}$没有极点$\Leftrightarrow \mathcal{X}$包含直线

引理1的证明：

"$\Leftarrow$"设$at+b \in \mathcal{X},\quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall z \in \mathcal{X}, \forall s \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in (0,1), let \quad t = s/\lambda,\quad sa + \lambda b + (1-\lambda) z \in conv\{z, at+b, t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow sa + z \in cl\{conv\{z, at+b, t \in \mathbb{R}\}\} \subset \mathcal{X}, \forall s \in \mathbb{R}$

"$\Rightarrow$"我们对n进行归纳：

$n=1$,非空闭凸集$\mathcal{X}$只能为闭区间，又没极点，只得为$\mathcal{R}$。

设$n=k$成立，$n=k+1$时，$\mathcal{X}=\mathbb{R}^{k+1}$则结论显然，若$\mathcal{X} \neq \mathbb{R}^{k+1} \Rightarrow \exists z \in boundry\{\mathcal{X}\}$，不然即有$\bar{\mathcal{X}} = int\{\mathcal{X}\} \Rightarrow \mathcal{X} = \mathbb{R}^{k+1}$矛盾！由凸集分离定理，$\exists$超平面$\mathcal{H}$过$z$且分离$\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}$为$\mathbb{R}^k$上非空闭凸集，且其没有极点。这是因为易知$\mathcal{X} \cap \mathcal{H}$上极点必为$\mathcal{X}$上极点，矛盾！由归纳假设，$\mathcal{X} \cap \mathcal{H}$含有直线。

由归纳原理，"$\Rightarrow$"得证，引理1得证。

引理2：设函数在$x \in ri\{\mathcal{X}\}$取得最小值m,则函数在$\mathcal{X}$上恒为m。

引理2的证明：取$\mathcal{X}$最小仿射空间$\mathscr{A}$.$\exists x$的邻域$U, s.t. U \cap \mathscr{A} \subset \mathcal{X}$易知$\forall z \in \mathcal{X}, \exists y \in U \cap \mathscr{A}, s.t. x$可以表示成$z, y$凸组合，由函数凹性，即得$f(z) = f(y) = f(x) = m$，引理2得证。

回到原题的证明：

设函数在$x \in \mathcal{X}$取得最小值m，若$x \notin ri\{\mathcal{X}\} \Rightarrow x \in bd\{\mathcal{X}\}$由凸集分离定理，$\exists$超平面$\mathcal{H}_1$过$x$且分离$\mathcal{X}, \mathcal{X}_1 =: \mathcal{X} \cap \mathcal{H}_1$为非空闭凸集。我们再考察是否有$x \in ri\{\mathcal{X}_1\}$,若不然，我们继续操作下去，必然在有限步结束,因为最坏我们也会最终得到单点集$\{x\}$。

因此我们得到$x \in ri\{\mathcal{X}_k\}, \mathcal{X}_k \subset \mathcal{X}$为非空闭凸集。由引理2，该集合上所有点取到最小值$m$。若其无极点。则由引理1，$\mathcal{X}_k$必包含直线，则$\mathcal{X}$包含直线，从而无极点，矛盾！故$\mathcal{X}_k$必有极点$z$。同引理证明中间过程，$z$为$\mathcal{X}_{k-1}$极点，递推得到$z$为$\mathcal{X}$极点。且$z$取到最小值$m$。

综上，命题得证。

3.3

(1) 由$Minkowski$多面体表示定理，$\exists x_1, \cdots, x_n; \quad y_1, \cdots, y_k; \quad s.t. \quad \mathcal{X} = \{\sum_{i=i}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j y_j | \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1; \quad \beta_1, \cdots, \beta_k \geq 0\} \Rightarrow \forall z = \sum_{i=i}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j y_j, f(z) = \sum_{i=i}^{n} \lambda_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j f(y_j)$。

断言：$f(y_j) \geq 0, \forall j$否则令$\beta_j \to +\infty$得f无下界，矛盾！从而有$\inf\{f\{\mathcal{X}\}\} = inf\{f\{conv\{x_1, \cdots, x_n\}\}\}$ 而$conv\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathcal{X}$是有界闭集，从而紧集；而线性函数连续，在其上下确界可达。

(2) 线性函数是凹函数，多面体$\mathcal{X}$非空闭凸集，且由(1)及3.2知，结论成立。

3.4

设$\mathcal{I}(x) = \{i_1, \cdots, i_k\}$,反设$\lambda_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}\alpha_{x_k} = 0, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}$不全为零.又由题$x_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\alpha_{x_k} = 0, x_{i_1} > 0, \cdots, x_{i_k} > 0$.取$\epsilon > 0$使得$x_{i_1} \pm$

$\epsilon\lambda_{i_1} > 0, \cdots, x_{i_k} \pm \epsilon\lambda_{i_k} > 0 \Rightarrow (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) = \frac{1}{2}(x_{i_1} - \epsilon\lambda_{i_1}, \cdots, x_{i_k} - \epsilon\lambda_{i_k}) + \frac{1}{2}(x_{i_1} + \epsilon_{i_1}, \cdots, x_{i_k} + \epsilon\lambda_{i_k})$.最后令$\lambda_i = 0, i \notin \mathcal{I}(x), \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x - \epsilon\lambda) + \frac{1}{2}(x + \epsilon\lambda), (x - \epsilon\lambda) \in \mathcal{X}, (x + \epsilon\lambda) \in \mathcal{X}$.与$x$为极点矛盾，这矛盾证明了$\{\alpha_i | i \in \mathcal{I}(x)\}$线性无关.

3.5

调整A的列的顺序后不妨设其前m列线性无关，即$x = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^T, x_B = (x_1, \cdots, x_m)^T$.反设存在$y = (y_1, \cdots, y_n)^T \in \mathcal{X}, z = (z_1, \cdots, z_n)^T \in \mathcal{X}, y \neq z$使得$x = \alpha y + (1-\alpha)z, \alpha \in (0,1)$,则易见$(y_{m+1}, \cdots, y_n) = (z_{m+1}, \cdots, z_n) = (0, \cdots, 0)$,又由$Ay = b$及$A$的前$m$列线性无关知$y_B = B^{-1}b = x_B$,同理$z_B = x_B \Rightarrow y = z$,矛盾,于是得到$x$为极点.

3.6

cl(conv(f))(x)为：

$$\mathrm{cl(conv(f))}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]; \\ \sin(x), & x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

cl(conv(f))(x)的共轭函数为$f^*(y) = \sup_{x \in [-\frac{\pi}{2}, 2\pi]}(xy - \mathrm{cl(conv(f))}(x))$,对任意$y \in \mathbb{R}$, $xy - \mathrm{cl(conv(f))}(x)$在$[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$连续,从而对任意$y \in \mathbb{R}$, $f^*(y)$存在,即共轭函数函数值有界的定义域为$\mathbb{R}$.

注：原题叙述不清，故将其改为共轭函数函数值有界.

3.8

用数学归纳法证明,$n = 0$显然成立，设$n - 1$成立，任取$x_0 \in \mathcal{X}$,则存在$r > 0$使得闭方体：

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_0\|_\infty \leq r\} \subset \mathcal{X}$$

共$2n$个超平面$H_{i,e}, 1 \leq i \leq n, e \in \{-1, 1\}$由$x^{(i)} = x_0^{(i)} + er, x^{(j)} = x_0^{(j)}, i \neq j$给出，由归纳假设,$f|_{\mathcal{X} \cap H_{i,e}}$上连续从而有界，而$H_{i,e}, 1 \leq i \leq n, e \in \{-1, 1\}$组

成了Q的边界∂Q,故可设$|f(x)|< M, \forall x \in Q, M > 0$为常数.
现在考虑任意$x \in Q \backslash x_0, g(t) \triangleq x_0 + (x - x_0) \cdot t$为通过$x$与$x_0$的直线，在$t = t_1 = \frac{r}{\|x-x_0\|_\infty} \geq 1$与$-t_1$时经过$\partial Q$,因而$h = f \circ g$为$[-t_1, t_1]$上的凸函数,于是我们得到：

$$h(1) \leq \frac{h(t_1) + (t_1 - 1)h(0)}{t_1}$$

与

$$h(0) \leq \frac{h(-t_1) + t_1 h(1)}{t_1 + 1}$$

由此得到：

$$\frac{h(0) - h(-t_1)}{t_1} \leq h(1) - h(0) \leq \frac{h(t_1) - h(0)}{t_1}$$

利用$h(0) = f(x_0), h(1) = f(x), |h(-t_1)|< M, |h(t_1)|< M, 0 < \frac{1}{t_1} = \frac{\|x-x_0\|_\infty}{r} \leq \frac{\|x-x_0\|_2}{r}$我们得到：

$$|f(x) - f(x_0)|\leq \frac{M + |f(x_0)|}{r} \|x - x_0\|_2$$

于是$|f(x) - f(x_0)|\leq \epsilon, \forall x s.t. \|x - x_0\|_2 < \delta \triangleq \min\{r, \frac{r\epsilon}{M+|f(x_0)|}\}$,由此即知$f$连续

3.9

取$\mathcal{X} = \{(t, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n | t \in [0, 1]\}$非空凸。

$f(x) = 1, x = (0, 0, \cdots, 0); f(x) = 0$,其他。为$\mathcal{X}$上凸，但不连续。

3.10

不需要仿射吧?

利用空间位移法，取$\mathcal{X}$最小仿射空间$\mathscr{A}$,不妨设其为线性空间，将其视作$\mathbb{R}^k$, $\exists x^0$的邻域$U, s.t. \mathcal{X}^0 =: U \cap \mathscr{A} \subset \mathcal{X}$为包含$x^0$的$\mathbb{R}^k$上非空开凸集。由3.8知$\mathcal{X}^0$上$f$在$x^0$连续，可知$\mathcal{X}$上$f$在$x^0$连续。

3.11

取$d \in \partial f(0)$,则d满足$x^2 \geq dx$, if $x \leq 0$与$x \geq dx$, if $x > 0$, 解得$0 \leq d \leq 1 \Rightarrow \partial f(0) = [0, 1]$.

3.12 f(x)的范围?

(1) $f(x)+b$

$$f_1^*(y)=\sup_{x\geq 0}(xy-x^3-b)=\begin{cases}-b, & y\leq 0;\\ \frac{2\sqrt{3}}{9}y^{3/2}-b, & y>0.\end{cases}$$

(2) $f(x+a)$

$$f_2^*(y)=\sup_{x\geq 0}(xy-(x+a)^3)=\begin{cases}-a^3, & y\leq 3a^2;\\ \frac{2\sqrt{3}}{9}y^{3/2}-ay, & y>3a^2.\end{cases}$$

(3) $cf(x+a)$

$$f_3^*(y)=\sup_{x\geq 0}(xy-c(x+a)^3)=cf_2^*(\tfrac{y}{c})\begin{cases}-ca^3, & y\leq 3ca^2;\\ \frac{2\sqrt{3}}{9}c(\frac{y}{c})^{3/2}-ay, & y>3ca^2.\end{cases}$$

3.15

首先易见有

$$\mathcal{F}_m=\left(\bigcap_{i=1}^m\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)\leqslant b_i\}\right)\bigcap\mathcal{K}$$

由于$g_i(x)$ 连续，于是有$\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)\leqslant b_i\}=g_i^{-1}((-\infty,b_i])$ 为闭集，又由于$g_i(x)$ 为凸函数，于是有

$$\begin{aligned}&\forall x,y\in\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)\leqslant b_i\},0\leqslant\lambda\leqslant 1\\ \Rightarrow& g_i((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)g_i(x)+\lambda g_i(y)\leqslant b_i\\ \Rightarrow&(1-\lambda)x+\lambda y\in\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)\leqslant b_i\}\\ \Rightarrow&\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)\leqslant b_i\}\text{ 为凸集}\end{aligned}$$

于是有$\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)\leqslant b_i\}$ 为闭凸集，又$\mathcal{K}$为有界闭凸集，于是有$\mathcal{F}_m=(\bigcap_{i=1}^m\{x\in\mathbb{R}^n|g_i(x)\leqslant b_i\})\bigcap\mathcal{K}$ 为有界闭凸集。

又易见$\mathcal{F}_m\subseteq\mathcal{F}_{m-1}$，于是若$\mathcal{F}_m\neq\mathcal{F}_{m-1}$，则存在$x_0\notin\mathcal{F}_m,x_0\in\mathcal{F}_{m-1}$，于是由凸集分离定理知，存在

$$c\in\mathbb{R}^n\ s.t.\ c^Tx_0<c^Tx\quad\forall x\in\mathcal{F}_m$$

于是有

$$\min_{x\in\mathcal{F}_m} c^T x > c^T x_0 \geqslant \min_{x\in\mathcal{F}_{m-1}} c^T x$$

3.16

该命题不成立！即存在$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^m$，使得

$$f^{-1}(\mathrm{ri}(\mathcal{X}))\neq \mathrm{ri}(f^{-1}(\mathcal{X}))$$

取

$$f(x)=(||x||,\cdots,||x||)^T\in\mathbb{R}^m\quad \forall x\in\mathbb{R}^n;\quad \mathcal{X}=\{(x,\cdots,x)^T\in\mathbb{R}^m : x\in[0,1)\}$$

于是有$\mathrm{ri}(\mathcal{X})=\{(x,\cdots,x)^T\in\mathbb{R}^m : x\in(0,1)\}$，注意到此时 $0\notin f^{-1}(\mathrm{ri}(\mathcal{X}))=\{x\in\mathbb{R}^n : 0<||x||<1\}$ 然而 $0\in\mathrm{ri}(f^{-1}(\mathcal{X}))=f^{-1}(\mathcal{X})=\{x\in\mathbb{R}^n : ||x||<1\}$。于是易见此时$f^{-1}(\mathrm{ri}(\mathcal{X}))\neq\mathrm{ri}(f^{-1}(\mathcal{X}))$。

3.17

记

$$\mathcal{X}=\left\{\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}^T\middle| x\in\mathcal{F}\right\}$$

则原二次约束二次规划问题等价于

$$\begin{array}{ll}\min & \frac{1}{2}M_0\bullet X\\ \text{s.t.} & \frac{1}{2}M_i\bullet X\leq 0, i=1,2,\ldots,m\\ & X\in\mathcal{X}\end{array}$$

而注意到 $\mathcal{F}$ 定义，于是当 $X\in\mathcal{X}$ 时有 $\frac{1}{2}M_i\bullet X\leq 0, i=1,2,\ldots,m$ 自然成立，并且由运算 $M\bullet X$ 的线性性知，当 $X\in\mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\,(\mathcal{X}))$ 时有 $\frac{1}{2}M_i\bullet X\leq 0, i=1,2,\ldots,m$ 同样自然成立。于是只需说明下面两个问题有相同的目标值即可。

$$\begin{array}{lll}\min & \frac{1}{2}M_0\bullet X & \\ \text{s.t.} & X\in\mathcal{X} & (1)\end{array}\qquad \begin{array}{lll}\min & \frac{1}{2}M_0\bullet X & \\ \text{s.t.} & X\in\mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})) & (2)\end{array}$$

易见$\mathcal{X} \subseteq \mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\,(\mathcal{X}))$，于是问题(1)目标值（不妨记为$J_1$）和问题(2)目标值（不妨记为$J_2$），有$J_1 \geqslant J_2$，另一方面，显然有

$$\frac{1}{2}M_0 \bullet X \geqslant J_1 \quad \forall\, X \in \mathcal{X}$$

于是对 $\forall \lambda_1, \cdots \lambda_n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{X}$，由运算 $M \bullet X$ 的线性性知

$$\frac{1}{2}M_0 \bullet \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{1}{2}M_0 \bullet X_i \right) \geqslant J_1$$

也即

$$\frac{1}{2}M_0 \bullet X \geqslant J_1 \quad \forall\, X \in \mathrm{conv}(\mathcal{X})$$

进而得知

$$\frac{1}{2}M_0 \bullet X \geqslant J_1 \quad \forall\, X \in \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\mathcal{X})) \Rightarrow J_2 \geqslant J_1$$

于是有$J_1 = J_2$成立。也即两问题目标值相等。