Homework Assignment 9: Due Wednesday, June 5

Problem 1. 考虑投资组合风险管理问题。假设你有一笔可用资金(不防设一个单位)全部用来投资两种股票。由于投资收益的不确定性，设投资第1种股票收益的期望和方差分别为1和2，投资第2种股票收益的期望和方差分别为2和3, 它们的协方差为-2。假设你的最小期望收益为1.4。试确定一个最优的投资方案(不允许卖空)，使得在一定的条件下你的投资风险最小。

回答下列问题：

1) 建立该问题的优化模型。
2) 利用其KKT条件求解该优化问题，来确定你的最优投资方案。
3) 利用MATLAB或LINGO编程求解。

Problem 2. 设函数$f:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$连续可微。考虑约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Ax=b, \end{aligned}$$

其中$A\in\mathcal{R}^{m\times n}$且$A$的秩是$m$，$b\in\mathcal{R}^m$。令$A=(A_B,A_N)$, $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, 其中$A_B$是基阵，$x_B$和$x_N$分别是由基变量和非基变量构成的向量，则

$$x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N.$$

于是该约束优化问题转化成无约束优化问题

$$\min \ \ \varphi(x_N),$$

其中$\varphi(x_N)$是仅以x_N为自变量的函数。设x是所给优化问题一个可行解。

定义$d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$，其中

$$d_N = -\nabla \varphi(x_N), \quad d_B = -A_B^{-1} A_N d_N.$$

证明：

1. x是该优化问题的KKT点当且仅当$d = 0$。

2. 若$d \neq 0$，则d是该优化问题在x处的可行下降方向。

Problem 3. 设函数$f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$连续可微，矩阵$A, B \in \mathcal{R}^{m \times n}$，向量$a, b \in \mathcal{R}^m$。考虑约束优化问题

$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Ax \geq a, \\ & Bx = b. \end{aligned}$$

设$\bar{x}$是(P)的一个可行解，在$\bar{x}$处不等式约束$Ax \geq a$分为积极约束$A_{\mathcal{E}} \bar{x} = a_{\mathcal{E}}$和非积极约束$A_{\mathcal{I}} \bar{x} > a_{\mathcal{I}}$，相应地有$A = (A_{\mathcal{E}}; A_{\mathcal{I}})$和$a = (a_{\mathcal{E}}; a_{\mathcal{I}})$。考虑下面的线性规划问题

$$\begin{aligned} (P_d) \quad \min \quad & \nabla f(\bar{x})^T d \\ s.t. \quad & A_{\mathcal{E}} d \geq 0, \\ & Bd = 0, \\ & |d_i| \leq 1, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

设d^*是(P_d)的最优解。证明：

1) $\bar{x}$是优化问题(P)的KKT点当且仅当$\nabla f(\bar{x})^T d^* = 0$。

2) 若$\nabla f(\bar{x})^T d^* \neq 0$，则$d^*$是该优化问题(P)在$\bar{x}$处的可行下降方向。

problem 4. Let $B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ and $b \in \mathcal{R}^n$. If $d^T B d > 0$ for any vector $d \in \mathcal{R}^n$ with $d \neq 0$ and $b^T d = 0$, then there exists $c^* > 0$ such that the matrix $B + cbb^T$ is positive definite for any $c \geq c^*$.

Problem 5. Consider the equality-constrained optimization problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & h_i(x) = 0, \ i \in \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{1}$$

Let (x^*, v^*) satisfy the second-order sufficiency condition for problem (1). Then there exists $c^* > 0$ such that for any $c \geq c^*$, x^* is a strict local minimum for the unconstrained problem

$$\min \ \phi(x, c) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E}} v_i^* h_i(x) + \frac{c}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} (h_i(x))^2.$$

If x_c is a minimum point of min $\phi(x, c)$ and $h_i(x_c) = 0, \ i \in \mathcal{E}$, then x_c is a local optimal solution to (1).