期末习题课

2018.6.14.

2.

一阶线性方程 特征线法，找 $X(t)$ 使 $\frac{du(X(t),t)}{t}=0$.

波动方程：用特征线得到一维时的 D'Alembert公式.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi,$$

为方程
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x) & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$
的解

高维基本解.

注1)边值问题和混合边值问题的转化.(有界域上)

2).半无界问题的奇偶延拓.

能量不等式. 例 2.3.(3)

Cauchy 不等式, $ab\le\frac{1}{2m}a^2+\frac{1}{2}mb^2$.

Gronwall 不等式.

设函数 Ω 满足 $\frac{d\Omega(\tau)}{d\tau}\le C\Omega(\tau)+F(\tau)$

则有 $\Omega(\tau)\le\Omega(0)e^{C\tau}+\int_0^\tau e^{C(\tau-t)}F(t)dt$.

特征线

有界域，分离变量法，特征函数系

广义解的定义 $\langle Lu,\varphi\rangle=\langle u,L^*\varphi\rangle$

广义解唯一，古典解为广义解.

例题 2.3.(3) 用分离变量法解

$$\begin{cases} Lu=A,\ (x,t)\in Q, \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=B,\ t\geq 0 \\ u|_{t=0}=\frac{Bx}{l},\ u_t|_{t=0}=0,\ 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

证：令 $v=u-\frac{B}{l}x$ 齐次化方程，分离变量 $v(x,t)=X(x)T(t)$

$$X\frac{dT}{dt}-a^2\frac{d^2X}{dx^2}=0 \Rightarrow \frac{T'}{aT}=\frac{X''}{X}=-\lambda \Rightarrow$$

结合初值，$\lambda\geq 0$，$X_n(x)=\sin\beta_n x$，$\beta_n=\frac{n\pi}{l}$，$\lambda_n=\beta_n^2$，

令 $v(x,t)=\sum X_n(x)T_n(t)$，有

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)(T_n''+\lambda_n a^2 T_n)=A, \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n(0)=0. \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n'(0)=0 \end{cases}$$

解得 $T_n''+\lambda_n a^2 T_n=A_n$，$T_n(0)=T_n'(0)=0$.

$$A_n=\frac{\int_0^l A\sin\beta_n x\,dx}{\int_0^l \sin\beta_n x\,dx}=\frac{2A(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

$$\Rightarrow T_n(t)=\frac{A_n}{a^2\beta_n^2}+C_1\cos(a\beta_n t)+C_2\sin(a\beta_n t). \Rightarrow C_1=0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2=0,\ n=2k; \\ C_2=\frac{4Al^2}{a^2n^2\pi^3},\ n=2k+1; \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x,t)=\frac{B}{l}x+\sum_{n=1,2\nmid n}^{\infty}\frac{4Al^2}{a^3n^3\pi^3}\left(1-\cos\frac{an\pi}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}.$$

例 2.3.(1). 用特征线法解 $\begin{cases} u_t+2u_x=0 \\ u|_{t=0}=x^2. \end{cases}$

证：$\frac{dx}{dt}=2$. $x(0)=c \Rightarrow x=x(t,c)=2t+c$.

$$\frac{d\,u(x(t),t)}{dt}=0 \Rightarrow u(x(t,c),t)=u(c,0)=c^2 \Rightarrow u(x,t)=(x-2t)^2.$$

例3.23. 设 $u\in C^{1,0}(\overline{Q_T})\cap C^{2,1}(Q_T)$ 满足

$$\begin{cases} u_t - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0\le x\le l, \\ \left[-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right]\Big|_{x=0} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\right]\Big|_{x=l} = 0. & 0\le t\le T. \end{cases}$$

其中 $a(x,t)\ge a_0>0$, $\alpha,\beta\ge 0$, a,b,c 有界只增.

乘 u 在 Q 上积分

$$\int_0^s\int_0^l u u_t\,dx\,dt - a^2\int_0^s\int_0^l u_{xx}u\,dx\,dt = \int_0^s\int_0^l uf\,dx\,dt \le \frac{1}{2}\int_0^s\int_0^l (u^2+f^2)$$

$$\int_0^s\int_0^l u_t u = \int_0^s\int_0^l \left(\frac{u^2}{2}\right)_t = \int_0^l \frac{u^2(x,s)}{2}dx - \int_0^l \frac{\phi^2(x)}{2}dx,$$

$$\int_0^s\int_0^l u_{xx}u = \int_0^s u_x u\Big|_{x=0}^{x=l}dt - \int_0^s\int_0^l (u_x)^2\,dt.$$

而

$$\int_0^s u_x u\Big|_{x=0}^{x=l}dt = -\int_0^s\left(\alpha u^2(0,t) + \beta u^2(l,t)\right)ds \le 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l \frac{u^2(l,s)}{2}dx + a^2\int_0^s\int_0^l (u_x)^2dt \le \int_0^s\int_0^l \frac{1}{2}(u^2+f^2) + \int_0^l \frac{\phi^2(x)}{2}dx$$

令 $G(s) = \int_0^s\int_0^l u^2$, $F(s) = \int_0^s\int_0^l f^2 + \int_0^l \phi^2$

$$\Rightarrow \frac{dG(s)}{ds} \le \frac{1}{2}G(s) + F(s) \Rightarrow G(s)\le e^s F(s).$$

即 $$\max_{0<t<T}\int_0^l u^2 + \int_0^T\int_0^l u_x^2 \le M\left(\int_0^l \varphi^2 + \int_0^T\int_0^l f^2\right).$$

3.1.

Fourier 变换：$f \to \hat{f}$

若 $f \in L(-\infty,\infty)$，则 $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$；

若 $f \in L(-\infty,\infty) \cap C^1(-\infty,\infty)$，则逆变换 $\hat{f} \to (\hat{f})^\vee = f$.

$$(\hat{f})^\vee = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda;$$

性质：1). 线性. $a\hat{f}_1 + b\hat{f}_2 = (af_1 + bf_2)^\wedge$

2). 微分. $\left(\frac{df}{dx}\right)^\wedge = i\lambda \hat{f}$, $(\Delta f)^\wedge = -|x|^2[\hat{f}]^2$;

3). 平移与指数变换. $\tau_h f = f(x+h)$，则

$$(\tau_h f)^\wedge = e^{i\lambda h} f^\wedge, \quad (e^{-ixh} f)^\wedge = \tau_h f^\wedge;$$

4). 多项式. 由(2). 设 p 为一多项式，则有

$$(p(x) f)^\wedge = p\left(i\frac{d}{d\lambda}\right) \hat{f}$$

$$\left(p\left(\frac{d}{dx}\right) f\right)^\wedge = p(i\lambda) \hat{f}.$$

5). 伸缩. $(f(kx))^\wedge = \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{k}\right)$

6). 乘法与卷积变换.

$$(f*g)^\wedge = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \hat{g}, \quad (f\cdot g)^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f*g.$$

例：1). $f_1(x) = \chi_{[-A,A]} \Rightarrow \hat{f}_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda A}{\lambda}$

2). $f_2(x) = e^{-x}\chi_{[0,\infty)} \Rightarrow \hat{f}_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\lambda}$

3). $f_3(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{f}_3(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\lambda^2}$

4). $f_4(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \hat{f}_4(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$

高维 Poisson 核. $K(x;y;t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}$，n维时 $\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \int K(x,y,t)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^t \left(\int K(x,y;t-s) f(y,s)\,dy\right) ds.$$

广义函数：

广义函数空间 $D'(\Omega)$ 定义为 $D(\Omega)$ 的对偶空间，其中 $D(\Omega)$ 拓扑由 $C_0^k(\Omega)$, $k=1, \cdots, \infty$ 决定，即对 $\forall\ V_k \in D'(\Omega)$，有：

1). $V_i = V_j \Leftrightarrow\ V_i(\varphi) = V_j(\varphi),\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

2). $V_k \to V_0 \Leftrightarrow\ \lim V_k(\varphi) = V_0(\varphi),\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

例：$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2} \in D(-\infty, \infty)$，$f_n \to \delta_0$.

例：$\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$，有 $\delta_x \in D'(\Omega)$

定义运算：设 $u, v \in D'(\Omega)$，$f \in C^\infty(a,b)$

则 1). $fu: \stackrel{\text{def}}{=} fu(\varphi) = u(f\varphi)$;

2). $Du: \stackrel{\text{def}}{=} Du(\varphi) = -u(D\varphi)$

3) $f*u: \stackrel{\text{def}}{=} f*u(\varphi) = u(\tilde{f}*\varphi)$. $\tilde{f}(x) = f(-x)$

4) $D(u\cdot v) = Du\cdot v + Dv\cdot u$

例：$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$ $\quad H' = \delta_0$

广义Fourier变换 $\hat{f}(\varphi) = f(\hat{\varphi})$ 对 $\forall \varphi$ 为速降函数.

基本解：$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}$ 的基本解为 $H(x, y, t)$ 使

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(x,y,t,s)}{\partial s} - a^2 \Delta_y H(x,y,t,s) = \delta_{y,s}(x,t) \\ H(x,0,t) = 0. \end{cases}$$

例 3.5.(3). $x\delta^{(m)}(\varphi) = \delta^{(m)}(x\varphi) = (-1)^m \delta(D^m(x\varphi)) = (-1)^m D^m(x\varphi)(0) = (-1)^m m D^{m-1}\varphi(0)$
$= -m\,\delta^{(m-1)}(\varphi)$;

(5). $(H\rho)'(\varphi) = -H\rho(\varphi') = -H(\rho\varphi') = -H((\rho\varphi)' - \rho'\varphi) = \rho\varphi(0) + H\rho'(\varphi)$
$= (\delta\rho + H\rho')(\varphi)$

例 3.6(1). $|x|^{(m)}(\varphi) = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi^{(m)} = 2\langle \delta^{(m-2)}, \varphi\rangle$, $m>2$

$|x|' = H(x) - H(-x)$

(3) $(He^{\rho x})^{(2)} = \rho^2 He^{\rho x} + 2\rho\delta + \delta' e^{\rho x}$.

但 $(\delta' e^{\rho x} + \rho\delta)(\varphi) = \delta'(e^{\rho x}\varphi) + \delta(\rho\varphi) = -\delta'(\varphi)$.

例 3.7 (3) $(x^2\chi_{[-1,1]})' = 2x\chi_{[-1,1]} + x^2[H(x+1) - H(x-1)]' = 2x\chi_{[-1,1]} + x^2(\delta_{-1} - \delta_1)$

例3.8.(1). $\hat{\delta}(x-x_0)\varphi = \langle \delta(x-x_0), \hat{\varphi}\rangle = e^{-ix_0x}(\varphi)$.

例3.9(5). 设 u 满足

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} + h(u-u_0) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_x|_{x=0,l} = 0. \end{cases}$$

证：$\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = u_0$.

有令 $v = e^{ht}(u-u_0)$ 则

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - u_0 \\ v_x|_{x=0,l} = 0. \end{cases}$$

解得：$v(x,t) = (\varphi_0 - u_0) + \sum(\varphi_n - u_{0n})e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}t \to \varphi_0 - u_0$

由 $h>0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} u = u_0$.

补充题.

$$f(x) = \begin{cases} \log|x| & n=2 \\ 1/|x|^{n-2} & n\geq 3. \end{cases} \quad \text{满足 } \Delta f = \delta_0 \cdot C$$

证：知 f 可知在0点外 f 光滑且

$$\Delta f = \sum \partial_i\left(\frac{x_i}{r^n}\right) = \sum\left(\frac{\delta_{ij}}{r^n} - n\frac{x_ix_j}{r^{n+2}}\right) = \sum\frac{1}{r^n} - \frac{n}{r^n} = 0.$$

对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\Delta\phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} f\Delta\phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f\frac{\partial\phi}{\partial r}\,ds + \int_{\partial B_\varepsilon(0)}\phi\frac{\partial f}{\partial r}ds\right)$$

$$+ \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)}}\Delta\phi = 0$$

但 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\left(f\frac{\partial\phi}{\partial r} + \phi\frac{\partial f}{\partial r}\right)ds = c\phi(0)$

$\underbrace{\text{另}}_{T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$：设 T 为一分布且 $T' = 0$. 证 $T = \text{const}$.

证：$\forall\varphi$ 速降函数 $\langle\hat{T},\varphi\rangle = \langle T,\hat{\varphi}\rangle = -\langle T,\hat{\varphi}'\rangle = -\langle T,\widehat{ix\varphi}\rangle = \langle\hat{T}, ix\varphi\rangle = 0$

$\Rightarrow \hat{T} = c\delta_0 \Rightarrow T = \text{Const}.\ C.$

3.3

弱极值原理:

1) 设算子 $Lu = u_t - a^2\Delta u$，若 $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ 满足;

$Lu = f \le 0$

则: $\sup\limits_{\overline{Q}} u \le \sup\limits_{\Gamma} u \qquad \Gamma = \partial Q$

2) 设算子: $Lu = u_t - a^2\Delta u + b_i u_i + cu$. 若

$Lu = f \le 0$

则 $\sup\limits_{\overline{Q}} u^+ \le \sup\limits_{\Gamma} u^+$

2.2). 设 $c \ge -c_0$. 且 $f \le 0$. $\sup\limits_{\Gamma} u \le 0$. 则 $\sup\limits_{\overline{Q}} u \le 0$.

2.3) 比较原理; 同 2.2). $c \ge -c_0$

设 $Lu \le Lv$. $(u-v)|_{\Gamma} \le 0$. 则 $(u-v)|_{Q} \le 0$.

由此推最大模估计;

例13: 设 $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$, $u_t \in C^{2,1}(Q_T)$ 满足

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

则 $v = u_t$ 满足. $\begin{cases} v_t - v_{xx} = f_t \\ v|_{t=0} = \varphi_{xx} + f \\ v|_{x=0} = 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow \sup_{Q} |u_t| = \sup |v| \le C(\|f\|_{C^1} + \|\varphi''\|_{C^0})$$

例20, 设 $u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 满足

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -u^2 + a(x,t)u, \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u|_{x=0,L} = 0. \end{cases}$$

$\varphi \in C[0,L]$, $a(x,t) \in C(\overline{Q_T})$. $\varphi \ge 0$.

则 $0\le u(x,t)\le M\varphi(x)$

证：由 u 连续及 $u|_\Gamma\ge 0$，考虑到

$$Lu=u_t-u_{xx}+(u-a)u=0\Rightarrow (u-a)_t-(u-a)_{xx}+(u-a)u=0$$

知在 t 小时有 $\sup\limits_{Q_t}(u-a)\le c$，

令 $c(x,t)=u-a$，知 $-u$ 满足

$$(-u)_t-a^2(-u)_{xx}+c(-u)=0$$

$$\Rightarrow \sup_{Q_t}-u\le \sup_{\partial Q_t}-u\le 0\Rightarrow \text{在 } Q_t \text{ 上 } u\ge 0.$$

由 t 任意性，$u\ge 0$，

从而令 $c_0=\sup|a(x,t)|$ 得到 对 $v=ue^{-c_0t}$

$$v_t-a^2v_{xx}+(c_0-a(x,t))v\le 0.$$

从而 $$u(x,t)\le e^{c_0t}\sup_{Q_t}v\le e^{c_0t}\sup_{\Gamma}v\le e^{c_0t}\|\varphi\|_{L^\infty}.$$

例5.2.4：半无界问题
$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f\\ u|_{t=0}=\varphi & x\in R^+\\ u|_{x=0}=\mu & t\ge 0.\end{cases}$$

的解是唯一的（不妨设 $f=\varphi=\mu=0$）

证：在 $Q_{L,T}=[0,L]\times[0,T]$ 上考虑 上(下)解

$$w_\pm=\frac{K}{L^2}(2a^2t+x^2)\pm u\ ,\ K=\sup|u|$$

有 $$\begin{cases}L(w_\pm)=0,\\ w_\pm|_{\partial Q_{L,T}}\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow |u|\le\frac{K}{L^2}(2a^2t+x^2)\quad \text{令 } L\to\infty\Rightarrow u=0.$$

4.1

极值原理：

考虑椭圆算子：

$$L(u) = -a_{ij}u_{ij} + b_i u_i + cu = f \quad \text{on } \Omega.$$

其中：a_{ij}为半正定矩阵，$c \geq 0$，

假设u满足给定边值条件，我们想控制u在内部的L^∞模，

假设$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$，$-a_{ij}u_{ij} = \Delta u$，

1). 极值原理。

设$u = \varphi$ on $\partial\Omega$，$f < 0$，则 $\sup\limits_{\Omega} u^+ < \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$

2). 弱极值原理。

设$u = \varphi$ on $\partial\Omega$，$f \leq 0$，c, b有界，则

$$w = u + \varepsilon a^{ax_1}$$ 对a较大满足1).

令$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$

3). Hopf 引理：

设$f \leq 0$，b, c有界，$u = \varphi$ on $\partial\Omega$，φ在$x_0 \in \partial\Omega$取严格极大值$\varphi(x_0) \geq 0$

Ω满足内球条件；$\langle \nu, n \rangle > 0$，$n$为$x_0$处外法向；

则 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > 0.$$

4). 强极值原理。

设Ω有界，b, c有界；u在内部达到极大值，则u恒为常数。

5). Dirichlet 问题的先验估计。

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{on } \Omega. \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sup_{\Omega}|u| \leq c\sup_{\Omega}|f| + \sup_{\partial\Omega}|\varphi|$$

例4.1 (2). 设u满足 $\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{on } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

证: 若 $c(x) \geq 0$, 且有界, 令 $L(u) = -\Delta u + cu$, $w = c\|f\|_{L^\infty}(d^2 - |x|^2)$. $d = \operatorname{diam}\Omega$.

$\Rightarrow \begin{cases} Lu \leq Lw & ; \Omega \\ u \leq w & ; \partial\Omega. \end{cases}$

$\Rightarrow \sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\Omega}(u-w) + |w|_{L^\infty} \leq \sup\limits_{\partial\Omega}(u-w)^+ + |w|_{L^\infty} \leq c\|f\|_{L^\infty}$

类似. $\sup\limits_{\Omega} -u \leq c\|f\|_{L^\infty}$.

例4.2(2). 设u满足 $\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{on } \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial n} + au = \varphi_1 & \text{on } \partial\Omega_1 \\ u = \varphi_2 & \text{on } \partial\Omega_2 \end{cases}$ $\quad \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega.$ $\quad \partial\Omega_2 \neq \phi.$

若 $c \geq 0$. $a \geq 0$. c有界, $\partial\Omega_1$满足内球条件, 则解唯一;

证: 不妨设 $\varphi_1 = \varphi_2 = f = 0$. 下证 $u = 0$.

设 $\sup u > 0$, 类似强极值原理,知 u极大值在 $x_0 \in \partial\Omega_1$取到且严格

$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\partial u}{\partial n} + au\right)\Big|_{x_0} \geq \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x_0} \underset{\text{Hop. f.}}{>} 0$

例4.4 设定解问题 $\begin{cases} -\Delta u + \sum b_i u_i + cu = f. & \text{on } \Omega. \\ u = 0. & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$

且 $c > \frac{1}{4}\sum b_i^2$, 则解唯一,

证: 有 $\int_\Omega (-\Delta u + \sum b_i u_i + cu)u = \int_\Omega fu \leq \left(\int u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}}$

而 $\int_\Omega (-\Delta u + \sum b_i u_i + cu)\, u \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 + cu^2 - \sum\left(\frac{1}{4}b_i^2 u^2 + u_i^2\right)$

即 $\int \left(c - \frac{1}{4}\sum b_i^2\right) u^2 \leq \left(\int u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}}$

若 $c - \frac{1}{4}\sum b_i^2 \geq c_0 > 0$, 即证!

4.2

定理：（Green 公式）对 $u, v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，$\partial\Omega$ 分段光滑，

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right).$$

定义，基本解：
$$\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \ln|x-\xi|\, C_2 & n=2 \\ |x-\xi|^{-(n-2)} C_n & n>2. \end{cases}$$

为 Laplace 算子的基本解，即在分布意义下，

$$\Delta_x \Gamma(x,\xi) = \delta_\xi$$

设 $\partial\Omega$ 分段光滑，$u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，则

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x,y)\Delta u(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \Gamma(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial n} u(y)$$

$n=2$ 维时的有界区域上格林函数 $G(z_1,z_2)$，$z_1=(x_1,y_1)$，$z_2=(x_2,y_2)$ 若 G 满足

$$\begin{cases} \Delta_{z_1} G(z_1,z_2) = \delta_{z_2} & \text{广义解意义下.} \\ G|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

单位球上格林函数为 $G(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln|z_1-z_2| - \ln|z_1 - z_2/|z_2|^2|\right)$

例 4.17. 求下列区域上的格林函数（关于 Dirichlet 边值）。

1). Ω 为上半平面，　视 $z_j = x_j + i y_j$

∴ 对称开拓 ⇒ $G(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln|z_1-z_2| - \ln|z_1-\bar{z}_2|\right)$

2). Ω 为第一象限，

对称开拓 ⇒ $G(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln|z_1-z_2| + \ln|z_1+z_2| - \ln|z_1-\bar{z}_2| - \ln|z_1+\bar{z}_2|\right)$

3). Ω 为带形区域；$\{(x,y)\mid -\infty<x<\infty,\ 0<y<a\}$，

F: $\ln\frac{2\pi z}{a}$，$W(z_1,z_2) = (F(z_1)-F(z_2))/1-F(z_1)\overline{F(z_2)}$，$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|W(z_1,z_2)|}$

设 $F: \Omega_1\to\Omega_2$ 是全纯映射，则有 $\Delta u(F) = \Delta u\cdot|DF|^2$，故二维时对单连通区域只需找出相应共形变换 F 即可。

例 4.20. 求 $R_2^+=\{(x,y)\mid -\infty<x<\infty,\ y>0\}$ 上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u=0, & (x,y)\in R_2^+ \\ u|_{y=0}=u_0(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

的有界解:

解: 有格林函数 $G(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi}(\ln|z_1-z_2|-\ln|z_1-\bar{z}_2|)$.

从而 $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial R_2^+}=-\frac{y_2}{\pi(x_1-x_2)^2+y_2^2}$.

$\Rightarrow u(x_2,y_2)=-\int_{\partial R_2^+}\frac{\partial G}{\partial n}u_0=\frac{y_2}{\pi}\int\frac{u_0(x)}{(x-x_2)^2+y_2^2}dx$

(3). 当 $u_0=\frac{1}{1+x^2}$ 时, 有

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\frac{1}{1+t^2}dt=2yi\left(\frac{1}{2i}\frac{1}{(i-x)^2+y^2}+\frac{1}{2iy(1+(x+iy)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2+x^2}$$

4.3.

性质：设 u 为调和函数在 Ω 上，则对 $\forall\, B_R(p_0)\subset\Omega$ 有：

$$u(p_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(p_0)} u\,dl.$$

反之也成立。

例 4.24. 若 u 满足平均值性质，则 $u\in C^\infty(\Omega)$ 且 $\Delta u=0$.

证明：1) 取磨光对称函数 J，令 $J_\varepsilon(x)=J(\frac{x}{\varepsilon})\frac{1}{\varepsilon^n}$.

则有 $u=u*J_\varepsilon\in C^\infty_{loc}(\Omega)$

再对 $\phi(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(p_0)} u\,dl$. 微分有

$\phi'(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(p_0)}\frac{\partial u}{\partial r}\,dl=\int_{B_r(p_0)}\Delta u$ 令 $r\to 0\Rightarrow \Delta u\equiv 0$

2) 构造 v 使

$$\begin{cases}\Delta v=0, & \text{on } B_r(p_0)\\ v=u, & \text{on } \partial B_r(p_0)\end{cases}$$

则 $u-v$ 满足平均值性质 $\Rightarrow \sup_{B_r(p_0)}|u-v|=\sup_{\partial B_r(p_0)}|u-v|=0.\Rightarrow u\equiv v$。

定理：Harnack 不等式.

设 u 在 $B_R(p_0)$ 内调和，则对 $\forall\, p\in B_r(p_0)$, $r<R$ 有

非负、 $\frac{R-r}{R+r}u(p_0)\le u(p)\le\frac{R+r}{R-r}u(p_0)$

定理：Liouville 定理.

全平面上有上(下)界调和函数为常数。

例 4.25. 调和函数的一致极限为调和函数.

证：因为平均值等式在一致极限下满足。

4.4.

把方程的求解转化为求变分问题的极小值.

例: $J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$,

设 u_0 s.t. $J(u_0)=\inf\limits_{u\in C^2,\ u|_{\partial\Omega}=\varphi} J(u)$.

则任取 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$, $J(u_0+t\varphi)\geq J(u_0)$.

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{J(u_0+t\varphi)-J(u_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\int \nabla u_0\nabla\varphi+o(t)\right)=0$$

$$\Rightarrow -\int \Delta u\varphi=\int \nabla u\nabla\varphi=0 \Rightarrow \Delta u\equiv 0.$$

但通常变分问题极小值不一定在 $C^2(\Omega)$ 中存在, 引进空间 H.

定义: $u\in H_1(\Omega)$, 如果下式之一成立, 且 $u\in L^2(\Omega)$

1). $\exists\ u_k\in C^1(\overline{\Omega})$, s.t. $\exists\ Du\in L^2(\Omega)$, 使

$$\|u_k-u\|_{L^2(\Omega)}\to 0,\quad \|u_k-Du\|_{L^2(\Omega)}\to 0;$$

2). 对任意 $\varphi\in C_0^1(\overline{\Omega})$,

$$\int u\nabla\varphi=-\int Du\,\varphi$$

且 $Du\in L^2(\Omega)$. 即 u 的广义导数可用 $L^2(\Omega)$ 中函数表示。

此时定义范数 $\|u\|_{H_1(\Omega)}=\int_\Omega(u^2+|\nabla u|^2)$,

知 $H_1(\Omega)$ 是一完备空间, 类似定义 $H_1(\Omega)$ 为 $C_0^1(\overline{\Omega})$ 关于 $\|\cdot\|_{H^1}$ 的完备化,

我们寻求 $H_1(\Omega)$ 或 $H_1(\Omega)$ 上泛函 $J(u)$ 的存在性。

通常要求 $J(u)$ 满足:

1). 有正下界 $\inf\limits_{u\in H_1(\Omega)} J(u)>$ 常数 C,

2). 强迫性, $\lim\limits_{\|u\|_{H^1}\to\infty} J(u)=+\infty$. 保证可取 H_1 有界的极小化序列.

3). 一致凸性 $J(u)+J(v)-2J\left(\frac{u+v}{2}\right)>d(\|u-v\|)$. 保证解的唯一性及极小化序列存在。

4). 连续性, 保证收敛到极小值点,

公

常用不等式.

1). Friedrich 不等式.

如果 $u\in \mathring{H}_1(\Omega)$. 则 $\|u\|_{L^2(\Omega)}\le \|u\|_{\mathring{H}_1(\Omega)}$.

2). 平行四边形法则. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

$$\|u+v\|_{L^2}+\|u-v\|_{L^2}=2(\|u\|_{L^2}+\|v\|_{L^2})$$

$$\|u+v\|_{H_1}+\|u-v\|_{H_1}=2(\|u\|_{H_1}+\|v\|_{H_1})$$

3). 迹定理.

如果 $u\in H_1(\Omega)$, Ω 边界光滑. 则 $u|_{\partial\Omega}$ 是良定的, 且满足.

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\le C\|u\|_{H_1(\Omega)}$$

特别地 $\mathring{H}_1(\Omega)=\{u\in H_1(\Omega)\mid u|_{\partial\Omega}=0\}$.

(一维要会证明)

例: 4.36. Ω 如题. $f\in L_2(\Omega)$, $g\in L_2(\partial\Omega)$. 则变分问题

$$J(u)=\inf_{u\in H_1(\Omega)}J(v)$$

存在唯一解. 其中

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla v|^2+v^2)-\int_\Omega fv-\int_{\partial\Omega}gv$$

且若 $u\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$. 则 u 满足.
$$\begin{cases}-\Delta u+u=f. & \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega}=g, & \partial\Omega.\end{cases}$$

证明: 1), 有下界与强凸性. 由

$$\int_\Omega fv\le\frac{1}{4}\int v^2+2\int f^2.$$

$$\int_{\partial\Omega}gv\le\frac{1}{4C}\int_{\partial\Omega}v^2+4C\int_{\partial\Omega}g^2\le\frac{1}{4}\int_\Omega(|\nabla v|^2+v^2)+4C\int_{\partial\Omega}g^2.$$

$$\Rightarrow J(v)\ge\frac{1}{8}\int_\Omega(|\nabla v|^2+v^2)-4C\int_{\partial\Omega}g^2-2\int_\Omega f^2.$$

2) 一致凸性, 由平行四边形法则即证. (见 b))

$$-2J\left(\frac{u+v}{2}\right)+J(u)+J(v)=\frac{1}{4}\|u-v\|_{H_1(\Omega)}$$

故由 u). 可取 u_k 使 $J(u_k) < \inf J + \frac{1}{k}$.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{k}+\frac{1}{l} = J(u_k)+J(u_l)-2J(\frac{u_k+u_l}{2}) \geq \frac{1}{4}\|u_k-u_l\|_{H_1(\Omega)}$

$\Rightarrow$ u_k 在 $H_1(\Omega)$ 中收敛到 u. 从而

$$J(u) = 2J(u_k) - J(2u_k-u) + \frac{1}{4}\|u_k-u\|_{H_1(\Omega)}$$

$$\leq \frac{2}{k} + \frac{1}{4}\|u_k-u\|_{H_1(\Omega)} + \inf J$$

令 $k\to\infty$ $\quad J(u) = \inf J$.

由 u 为极小值点,

$$DJ(u)\cdot\phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(u+\varepsilon\phi)-J(u)}{\varepsilon} = 0. \text{ 对 } \forall \phi\in H_1(\Omega) \text{ 成立},$$

即 $$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi + \int_\Omega u\phi - \int_\Omega f\phi = \int_{\partial\Omega} g\phi \text{ 成立},$$

若 $u\in L^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$, 则

$$\int(-\Delta u+u-f)\,\phi = \int_{\partial\Omega}(-\frac{\partial u}{\partial n}+g)\,\phi.$$

由 ϕ 任意 u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u+u = f, & \text{on } \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

例 4.31. 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 且 $f'(x)$ 有界. 如果 $u\in H_1(\Omega)$, 则 $f\circ u\in H_1(\Omega)$

证明: 取 u 的逼近列 $u_k\in H_1(\Omega)$.

则 $$\|f(u_k)-f(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f'\|_{L^\infty}\|u_k-u\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

且下证 $f'(u)Du = Df(u)$, 由 $\forall\varphi\in C_0^1(\bar\Omega)$

$$\int_\Omega f(u)D\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f(u_k)D\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega Du_k\cdot f'(u_k)\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega Du\, f'(u_k)\varphi.$$

但有 $f'(u_k)\xrightarrow{L^2} f'(u)$ $\quad\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\int_\Omega Du f'(u_k)\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega Du\, f'(u)\varphi.$