3.4. Cauchy 积分公式

习题3.3.4：1，2，8，9.（8讲稿有提示）

Cauchy 型积分. 设 $f(\zeta)$ 在可求长曲线 $\gamma\subset\mathbb{C}$ 上连续，则：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$$

叫 Cauchy 型积分.

定理3.4.2. $F(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上全纯，各阶导数存在，且

$$F^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{1}{(\zeta-z)}\right]_z^{(n)}f(\zeta)\,d\zeta=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (1)$$

证法1：只证 $n=1$ 的情形（当 $n>1$ 时可用类似方法对 n 归纳证之）. 只须证

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|=0.$$

详证如下：

$$\begin{aligned}\Delta F&=F(z+\Delta z)-F(z)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Delta z f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta.\end{aligned}$$

再记 $R(\Delta z)=\frac{\Delta F}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$，则有

$$\begin{aligned}R(\Delta z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right]d\zeta\\&=\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\end{aligned}$$

再记 $M=\max\limits_{\zeta\in\gamma}|f(\zeta)|$

$$d=\operatorname{dist}(\gamma,z)=\min\{|z-\zeta|;\ \zeta\in\gamma\}$$

设 $|\Delta z|<\frac{d}{2}$. 则

$$|R(\Delta z)|\le\frac{|\Delta z|}{2\pi}\int_\gamma\frac{M}{\frac{d}{2}\cdot d^2}d\zeta=\frac{ML(\gamma)}{\pi d^3}|\Delta z|\to 0\ (\Delta z\to 0)$$

所以 $F'(z)$ 存在且 $F'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$

证法2. 上定理可由下引理直接推出：

补充引理：设 D 是 $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ 中的区域，γ 是 $\mathbb{C}$ 中可求长曲线，$f(x,y,\xi)\in C(D\times\gamma)$. 定义

$$F(x,y)=\int_\gamma f(x,y,\xi)\,d\xi,\ (x,y)\in D. \qquad (2)$$

则 $F\in C(D)$. 若对 $\forall\xi\in\gamma$, $f'_x, f'_y\in C(D\times\gamma)$, 则

$$F'_x(x,y)=\int_\gamma f'_x(x,y,\xi)\,d\xi,\quad F'_y(x,y)=\int_\gamma f'_y(x,y,\xi)\,d\xi, \qquad (3)$$

且 $F\in C^1(D)$. [请大家观察(2)如何推出(3)].

证. 任取 $z=x+iy\in D$，再取 $\delta_0>0$, s.t. $\overline{B(z,\delta_0)}\subset D$. (这里将 z, (x,y), $x+iy$ 等同视之)

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta<\delta_0$, s.t. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时

$$|f(x+\Delta x, y+\Delta y,\xi)-f(x,y,\xi)|<\frac{\varepsilon}{L(\gamma)}.$$

从而 $|F(z+\Delta z)-F(z)|$

$$=|F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)|$$

$$\le\int_\gamma|f(x+\Delta x,y+\Delta y,\xi)-f(x,y,\xi)|\,ds\le\varepsilon.$$

即 $F\in C(D)$.

现在设 $f'_x\in C(D\times\gamma)$, 则 f'_x 在 $\overline{B(z,\delta_0)}\times\gamma$ 上一致连续，从而

$$\left|\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}-\int_\gamma f'_x(x,y,\xi)\,d\xi\right|$$

$$=\left|\int_\gamma\left[f(x+\Delta x,y,\xi)-f(x,y,\xi)-f'_x(x,y,\xi)\right]d\xi\right|$$

$$=\int_\gamma|f'_x(x+\theta\Delta x,y,\xi)-f'_x(x,y,\xi)|\,ds \quad (\text{一元微分中值公式})$$

$\to 0$ ($\Delta x\to 0$, 用了一致连续性).

这说明 $F'_x(x,y)=\int_\gamma f'_x(x,y,\xi)\,d\xi$, 同理有

$$F_y'(x,y)=\int_\gamma f_y'(x,y,\xi)\,d\xi.$$

进而 $F\in C^1(D)$. 同法可证当 $f(z,\zeta)$ 关于 z 解析且 $f_z'(z,\zeta)\in C(D)$ 时，$F'(z)=\int_\gamma f_z'(z,\zeta)\,d\zeta$.

Cauchy积分公式. 设 D 是可求长 Jordan 曲线所围曲域，$f\in H(D)\cap C(\overline{D})$，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z},\quad \forall z\in D.$$

证：任取 $z\in D$，$r>0$，s.t. $\overline{B(z,r)}\subset D$. 则由Cauchy定理，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

易见

$$R(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-f(z)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(z)}{\zeta-z}\right]d\zeta$$

再记 $M(r)=\max\{|f(\zeta)-f(z)|,\ \zeta\in\partial B(z,r)\}$. 则

$$|R(r)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{M(r)}{r}ds=M(r)\to 0\ (r\to 0).$$

而 $\int_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 与 r 无关. 故Cauchy公式成立.

定理3.4.6. 若 D 由互不相交的有限条可求长Jordan曲线所围且 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$，则

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

定理3.4.4 若 $f\in H(D)$ 则 $f\in C^\infty(D)$. 即 $H(D)\subset C^\infty(D)$.

例1 $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2(z^2+16)}=2\pi i\times\left(\frac{1}{z^2+16}\right)'_0=0.$

例2. $I=\int_{|z|=5}\frac{dz}{(z-1)^6(z-2)^7(z-3)^8}$

$=\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-1)^6(z-2)^7(z-3)^8}\quad(\forall R>3)$

$|I|<\int_{|z|=R}\frac{ds}{(R-1)^6(R-2)^7(R-3)^8}\longrightarrow 0.\ \therefore I=0$

例. 习题8. 设 $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$, $f=u+iv$.

则 $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}u(Re^{i\theta})\,d\theta+iv(0)$

提示: 右 $=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{1}{2}(f(\zeta)+\overline{f}(\zeta))d\zeta/\zeta+iv(0)$

用Cauchy公式补出 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\cdot\frac{1}{2}\cdot f(\zeta)$.

而 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{1}{2}(\overline{f}(\zeta))d\zeta/\zeta$

$=\frac{1}{2\pi i}\overline{\int_{|\zeta|=R}\frac{\overline{\zeta}+\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\cdot\frac{1}{2}f(\zeta)\,d\overline{\zeta}/\overline{\zeta}}$ 记 $\frac{1}{2\pi i}\overline{I/2}$

$I=\int_{|\zeta|=R}\frac{R^2/\zeta+\overline{z}}{R^2/\zeta-\overline{z}}\cdot f(\zeta)\cdot\frac{\zeta}{R^2}\cdot -R^2\frac{d\zeta}{\zeta^2}$

$=\int_{|\zeta|=R}\frac{R^2+\overline{z}\zeta}{R^2-\overline{z}\zeta}\cdot f(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{-\zeta}$

$=-f(0)\cdot 2\pi i\cdots\cdots$

作业：1, 2, 4, 5, 6, 7 (5, 6, 7 在讲稿有提示)

§3.5 Cauchy 积分定理的重要推论

定理 5.1. (Cauchy 不等式) 设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯且 $|f(z)|<M$, $\forall z\in B(a,R)$. 则

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!M}{R^n}.$$

证：对 $\forall r<R$, $f\in H(\overline{B(a,r)})$, 从而

$$|f^{(n)}(a)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}\right|$$

$$\le\frac{n!}{2\pi}\int_{|z-a|=r}\frac{M\,ds}{r^{n+1}}=\frac{n!M}{r^n}.$$

进而 $|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!M}{R^n}$.

定理 5.2 (Liouville) 有界整函数必为常数。

证. 任取 $a\in\mathbb{C}$, 任取 $R>0$, 都有

$$|f'(a)|<\frac{M_f}{R}\to 0\quad(R\to\infty).$$

其中 $M_f=\sup_{\mathbb{C}}|f(z)|<+\infty$.

$\therefore f'(z)\equiv 0$ on $\mathbb{C}$. 即 $f\equiv\text{const}$.

定理5.3. 代数学基本定理：$\mathbb{C}$上的非常值多项式在$\mathbb{C}$中至少有一个零点.

证：反设多项式 $P(z)=a_0z^n+\cdots+a_n\ (a_0\neq 0, n\geq 1)$ 在$\mathbb{C}$无0点，则 $1/P(z)$ 在$\mathbb{C}$解析，且

$$\frac{1}{P(z)}\to 0\ (z\to\infty).$$

从而 $\frac{1}{P(z)}\in H(\mathbb{C})$ 且有界. 进而由Liouville定理，$\frac{1}{P(z)}\equiv \text{Const}$，与假设矛盾.

定理5.4. (Morera) 如果 $f\in C(D)$ 且沿D内任一可求长闭曲线 γ，$\int_\gamma f(z)dz=0$，则f在D上解析。

证明：依题意，对 $\forall$ 可求长曲线 $\Gamma\subset D$，积分 $\int_\Gamma f(z)dz$ 与路径无关，因而对 $\forall a\in D$，

$$F(z)=\int_a^z f(z)dz,\quad z\in D$$

定义了一个D上的函数，由定理3.3.2的证明可知，$F'(z)=f(z)$，$z\in D$.

习题5. 易见存在共形映射 φ 将 $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ 映为 $|z|<1$：

考虑 $\varphi_1(z)=\dfrac{z}{z-1}$: $\mathbb{C}\setminus[0,1]\to\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$.

$\varphi_2(z)=\sqrt{z}$ (的一个单值分支) $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)\to H^+$ (上半平面)

$\varphi_3(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$: $H^+\to B(0,1)$.

令

$$\varphi=\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1.$$

但 $\varphi\circ f$ 是整函数 且 $|\varphi\circ f|<1$. $\therefore$ $\varphi\circ f\equiv$ 常数.

由于 φ 是同胚, $f\equiv$ 常数.

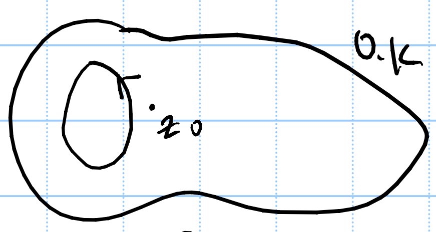
习题6. 设 f 在域 D 上全纯, $z_0\in D$, 定义

$$F(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z\in D\setminus\{z_0\}\\ f'(z_0), & z=z_0.\end{cases}$$

证明 $F\in H(D)$.

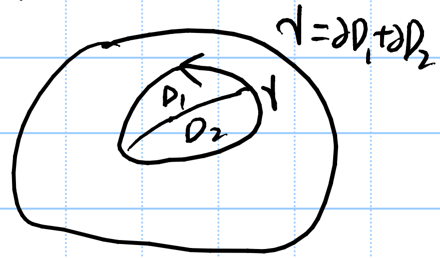
证: 用定义证不出 (即用分析 $\dfrac{\Delta F}{\Delta z}$ 难证) 但用 Morera 好证:

对 D 内任一闭曲线 γ, $\int_\gamma F(z)\,dz=0$



定理3.2.3

定理3.2.4



用两次定理3.2.4

习题7.(要设γ是可求长简单光滑曲线),与上题类似.