题 723. 试证, 当 $q(x) \le 0$ 时方程 $y'' + q(x)y = 0$ 以 $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ 为正初值条件的所有解, 对所有的 $x > x_0$ 都是正的.

证明：只要证明, 满足初值条件 $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ 的解 $y(x)$ 必有 $y(x) > 0$, $\forall x > x_0$ 即可. 反证. 假设满足条件 $\phi(x_0) > 0$, $\phi'(x_0) > 0$ 的解 $\phi(x)$ 在 x_0 的右侧有零点. 我们假设 $x_1 > x_0$ 是 x_0 右边第一个零点(也就是右边最小的零点), 则根据解 $\phi(x)$ 的初值条件可知 $\phi(x) > 0$, $\forall x \in [x_0, x_1)$. 于是根据假设我们有

$$\phi''(x) = -q(x)\phi(x) \ge 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1).$$

进一步我们有

$$\phi'(x) \ge \phi'(x_0) > 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1).$$

这表明解 $\phi(x)$ 在区间 $[x_0, x_1)$ 上严格单调上升. 于是

$$\phi(x_1) > \phi(x_0) > 0.$$

这就导出了一个矛盾. 矛盾说明解 $\phi(x)$ 在 x_0 的右边永远大于零. 证毕. ∎

题 724. 试证, 方程 $y'' - x^2 y = 0$ 以 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 为初始条件的解是一个处处为正的偶函数.

证明： 记 $y(x)$ 为方程 $y'' - x^2 y = 0$ 以 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 为初始条件的解. 我们先来证明 $y(x)$ 是偶函数. 记 $z(x) := y(-x)$. 则不难验证 $z(x)$ 满足方程 $z'' - x^2 z = 0$, 即 $z(x)$ 也是方程 $y'' - x^2 y = 0$ 的解. 考虑 $z(x)$ 在 $x = 0$ 处的初值, $z(0) = y(0) = 1$, $z'(0) = -y'(0) = 0$. 也就是说解 $z(x)$ 和解 $y(x)$ 满足相同的初值条件. 根据解的唯一性, 它们恒同, 即 $y(-x) = z(x) = y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 即 $y(x)$ 是偶函数.

我们再来证明解 $y(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 由于 $y(x)$ 是偶函数, 故我们只需证明

$$y(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty). \tag{1}$$

我们用反证法来证明 (1). 假设不等式 (1) 不成立, 则解 $y(x)$ 有最小正的零点, 记作 $x_1 > 0$. 与上题 723 证明方法相同, 我们说明解 $y(x)$ 在区间 $[0, x_1)$ 上严格单调. 因此 $y(x_1) > y(0) = 1$. 这就导出矛盾. 证毕. ∎

题 725. 试证, 当 $q(x) \le 0$ 时, 边值问题

$$y'' + q(x)y = 0, \quad y(x_1) = a, y(x_2) = b \tag{2}$$

对任何的 a, b 和 $x_1 \ne x_2$ 都具有唯一的解. 并证明, 当 $b = 0$ 是这个解是单调函数. (注：原题未说明 $q(x)$ 的定义域. 我们不妨设将其定义域看作整个实轴)

证明: 第一步我们证明任意给定的两个实数 a, b, 两点边值问题 (2)有唯一解 $\Longleftrightarrow$ 齐次边值问题

$$y'' + q(x)y = 0, \quad y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0, \tag{3}$$

只有平凡解(即零解). 记 $y_1(x), y_2(x)$ 是线性齐次方程 $y'' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关的解.
$\Longleftarrow$: 设对应齐次边值问题 (3) 满足零边界条件 只有平凡解. 这就是说，齐次方程 $y''+q(x)y = 0$ 的一个解 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 满足边值条件 $y(x_1) = 0, y(x_2) = 0$ 的唯一可能情形是 $c_1 = 0, c_2 = 0$, 即解 $y(x)$ 是零解. 换言之, 关于 c_1, c_2 的二阶线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1y_1(x_1) + c_2y_2(x_1) = 0, \\ c_1y_1(x_2) + c_2y_2(x_2) = 0 \end{cases}$$

只有零解 $c_1 = 0, c_2 = 0$. 这表明矩阵

$$\begin{bmatrix} y_1(x_1) & y_2(x_1) \\ y_1(x_2) & y_2(x_2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

是满秩的. 对于任意给定的两个实数 a, b, 考虑边值问题 (2). 由于非齐次方程 $y'' + q(x)y = 0$ 的通解可表为

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

对于给定的 $a, b \in \mathbb{R}$, 令 $y(x_1) = a, y(x_2) = b$, 即

$$\begin{cases} c_1y_1(x_1) + c_2y_2(x_1) = a, \\ c_1y_1(x_2) + c_2y_2(x_2) = b. \end{cases} \tag{5}$$

由于系数矩阵满秩，故上述线性代数方程组的解存在且唯一。这说明两点边值问题 (2) 对任意两个实数 a，b 的解存在且唯一.

$\Longrightarrow$: 假设两点边值问题 (2) 对任意两个实数 a，b 的解存在且唯一. 这个假设意味着关于 c_1, c_2 的二阶线性代数方程组 (5) 对任意右端项存在唯一解。 因此系数矩阵 (4) 满秩. 齐次线性代数方程组 (2) 只有零解. 这表明对应齐次边值问题 (3) 满足零边界条件只有平凡解. 证毕.

第二步： 根据第一步所证明的结论可知, 要证两点边值问题 (2) 对任意两个实数 a，b 的解存在且唯一, 只要证明对应齐次边值问题

$$y'' + q(x)y = 0, \quad y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0, \tag{6}$$

只有平凡解(即零解). 以下证明当 $q(x) \le 0$ 时, 边值问题 (6)只有平凡解. 反证. 假设边值问题 (6)有非平凡解 $y(x)$, 则 $y(x)$ 至少有两个零点. 考虑比较方程 $y'' = 0$, 其一般解为线性函数. 故它的每个非零解至多有一个零点. 另一方面由假设 $q(x) \le 0$, 以及 Sturm 比较定理知, 方程 $y'' = 0$ 的一个非零常数解 $y = 1$ 在点 x_1 和 x_2 之间有零点. 矛盾. 这说明边值问题 (6)只有平凡解. 第一部分结论证得.

记 $\phi(x)$ 为边值问题 (2) 当 $b = 0$ 时的唯一解。此时若 $a = 0$, 则 $\phi(x) \equiv 0$. 结论得证. 设 $a \neq 0$. 此时可以断言，解 $\phi(x) = 0$ 仅有一个零点 x_2 而再无其他零点. 不然解 $\phi(x)$ 恒为零, 矛盾. 由于 $\phi(x_2) = 0$, 故有 $\phi'(x_2) \neq 0$. 不妨设 $\phi'(x_2) > 0$, 否则以 $-\phi(x)$ 代替 $\phi(x)$. 由于 $\phi(x_2) = 0$, $\phi'(x_2) > 0$, 故解 $\phi(x)$ 在 $x = x_2$ 附近严格单调上升. 从而有 $\phi(x) > 0$, $\forall x \in (x_2, +\infty)$. 于是根据方程 $\phi''(x) = -q(x)\phi(x) \ge 0$ 知 $\phi'(x) \ge \phi(x_2) > 0$, $\forall x \in (x_2, +\infty)$. 这表明解 $\phi(x)$ 在 $[x_2, +\infty)$ 上严格单调上升. 同理可证 $\phi(x)$ 在 $(-\infty, x_2]$ 上严格单调上升. 从而解 $\phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调上升. 证毕. ∎