抽象代数学(XXII)

设 R 是含幺交换环, 上一讲已得带针除法: $\forall f(x), g(x) + o \in R[x], 且 g(x) 首项 義 是 尺中单位, 则$ 存在唯一多项式 2(x), Y(x) ER[x], 使得

f(x) = g(x)g(x) + r(x), A deg r(x) < deg g(x)推论 设尺如上, $f(x) \in R[x]$, $\forall c \in R$,存在唯一e(x) $\in R[x], f(x) = g(x)(x-c) + f(c).$

定义设尺是交换环S的子环, $f(x_1,...,x_n) = \sum a_{i_1...i_n} x_{i_1...x_n}^{i_1...x_n}$ ER[x1,···, xn], C1,···, Cn∈S 使得f(C1,···, Cn)=0,则 ((,,…, Сл) 称为 f的根(或零点)

定理设口是唯一分解整区,分式域为下,设于(火)=至 αιχί ED[x], 若 $u=C \in F$, $c,d \in D$, (c,d)=1 且 u 是 f(x) 的根,则 Cla。且dlan.

证明: $f(u)=0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{c}{d}\right)^n = 0 \Rightarrow a_o d^n + a_i c d^{n-1} + \cdots + a_n c^n$ ⇒ $c | a_0 d^n, d | a_n c^n, 因为(c,d)=1 \Rightarrow c | a_0, d | a_n$ 例 D=Z, F=Q, $f(x)=3x^4-6x^3-21x^2-11x-4 \in Z[x]$ 设员是一个根,则人可能工1, ±2, ±4, 对那生1, ±3

以下目标: D唯一分解整区 \Rightarrow D[x]唯一分解整区 定义设 及 D是唯一分解整区, φ f(x) = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in D[x]$, 记 (a_0, a_1, \cdots, a_n) 为 D中单位,则 f(x) 是本原多项式 记 是 \forall f(x) \forall f(x) f(x) \forall f(x) f

定理(Gauss)本原多项式乘积是本原多项式.

证明: 没 $f(x) = \overset{h}{\underset{i=0}{\sum}} a_i x^i$, $g(x) = \overset{h}{\underset{j=0}{\sum}} b_j x^j$ 均是D[x]上本原多项式.

 $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} C_k x^k$, $G_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, 若 f(x)g(x) 非本原, 则存在不可约礼 $P(\text{也是素礼}) \in D$, $P(C_K, K=0,..., N+m)$ 因为 f(x), g(x) 均本原, 存在 S, t 使得 $P(a_i, (i < S))$ 则 a_S , $P(b_j, (j < t), P) b_t$

 $C_{S+t} = a_0 b_{S+t} + a_1 b_{S+t-1} + \cdots + a_{s-1} b_{t+1} + a_s b_t + a_{s+1} b_{t-1} + \cdots + a_{s+1} b_s$ (若 S+t>m,则 $Q_{m+1} = \cdots = a_{s+t} = 0$, 同理对于 b_{n+1}, \cdots, b_{s+t}) P C_{S+t} ,但 $P + a_s b_t$ (P是素元)矛盾!

推论.设D是唯一分解整区,分式域为F, $f \in D[x]$,是本原多项式,deg f(x) > 0,则f(x)在D[x]中不可匀 \Leftrightarrow f(x)在F[x]中不可匀

驻:若f(x)非本原,结论不对,例如2x+26Z[x]可约 2X+2在QEX了中不可约.

证明,没f(x) \in D[x] 不形为且f(x) = g(x)h(x), g(x), h(x) $\in [F[x], \deg g(x) \ge 1, \deg h(x) \ge 1$.

 $\widehat{\mathcal{I}}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right) x^i, \quad h(x) = \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{C_j}{d_j}\right) x^j, \quad a_i, b_i, C_j, d_j$ $\mathbb{B}b_{i}, d_{j} \neq 0$ $b = b_{0}b_{i} = b_{0}b_{0} = b_{0}$ $g_1(x) = \emptyset$ $\sum_{i=n}^{\infty} a_i b_i x^i \in D(x)$, $f(x) = c g_2(x)$, $g_2(x)$ \in D[x] 是本原多项式, $g = \frac{1}{6}g_1 = \frac{6}{6}g_2$, $\deg g_{(x)} = \deg g_{(x)}$ 同理 htt= ghz(x), hz(x) ED[x]本原, d,eED.

 $\Rightarrow f(x) = \left(\frac{c}{b}\right) \cdot \left(\frac{e}{d}\right) g_{z}(x) h_{z}(x) \Rightarrow (bd) f(x) = (ce) g_{z}(x) h_{z}(x)$ 因为f(x), fz(x)hz(x)均本原, bd和ce在D中相伴.

即f(x)和引(x)在D[x]中相伴,从而和f(x)不够分析 反之, 若f(x)在下(x)中不够的且f(x)=g(x)h(x), g(x), h(x)€D[x], g(x),h(x) 可看成下(x)中多项式,从有一个为下中 单位,设为f(x), f(x)在D[x]中是一个常数 $f_o \in D$. (deg f(x)) 因为f(x)是本原的, 牙。是口中单位.



定理若D是唯一分解整区,则DEXJ也是. 证明: 若 $f(x) \in D[x]$ degf(x) > 0, 则 $f(x) = Cf_1(x)$, $c \in D$, fi(x)本原多项式,设下是D的分式域,则下(x)是欧氏整 区从而是唯一分解整区,且包含口印,设于(x)=Pt(x)-Pt(x)-Pt(x) $P_i^*(x) \in F(x)$ 不可约,由上一推论证明, $P_i^*(x) = \left(\frac{a_i}{b_i}\right)P_i(x)$, $ai, bi \in \mathbb{D}, bi \neq 0, \frac{ai}{bi} \in \mathbb{F}, P_i(x) \in D(x), P_i(x) 是本原的,$ Pi(x1)在Fix7中不够为,从而在Dix7中不可约.令a= $a_1 \cdots a_n$, $b = b_1 \cdots b_n$, $f_1(x) = \left(\frac{a}{b}\right) p(x) - P_n(x)$, $f_1(x) \neq 0$ P,(x)···Pn(x)均本原,从而 Q~b(在D中) 号=U单位. $f(x) = C_1 \cdot \cdot \cdot C_2(u f_1) P_2 \cdot \cdot \cdot P_n \qquad C_1 \cdot \cdot \cdot C_2 = C, C_1 \cdot \overline{T_1} \cdot \overline{T_2} \cdot \overline{T_1} \cdot \overline{T_2} \cdot \overline{T_2} \cdot \overline{T_1} \cdot \overline{T_2} \cdot \overline{T_$ 即f(x)写成有限个不形约剂(D[x]中)乘积 (时主一种) 设 f(xc)=C1···CmP1···Pn=d1···dr21···2s 其中 C1,…, Cm, d1,…, dr ED 不可约,

重排后,Pi和qi在F(x)中相伴,存在兴e下; U,VED $P_i = \frac{4}{2} e_i$ P_i , e_i 本原 $\Rightarrow u \sim v(在D中)$ ⇒Pi, ?i在D似中相伴.

推论. 若下是一个域,则下(x1,…,xn)是唯一分解整区.

養理想

以下尺是含长交换环

定义 I是R的理想且I+R, 若Ya,bER, abEI均 可推断 aEI或 bEI. 则I称为素理想

例. Z=R, P是一个素数, (P)是素理想.

尺整区, (0)是一个素理想.

定理 设R是整区,P, C≠O E R

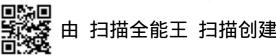
(1) P为素社⇔ (P)是非零素理想.

(2) C不可约元⇔(C)是尺的全体真主理想中极大理想

(四)证明(1) P为素礼,●若ab∈(P), Plab, Pla或Plb,

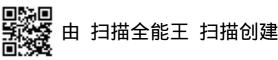
⇒险(α ∈ (P)或 b ∈ (P) 反之亦然.

(2) 设 (不可约元, (c) + R, 若(c) c (d), 则 c = dx, >> d或x是单位,即(d)=尺或 c~d, (c)=(d)



风之, 若(c)在真主理想中极大,则C+0,C非单位,若 C=ab, 则(c)c(a), (c)c(b) 由极大性(c)=(a)或(a)=R, (c)=(a) ⇒ cx=a, ay=c ⇒ c=cxy ⇒ xy=1 定理. 若I是R的理想且I+R,则I是素理想的是 是整区。(2) Ⅰ是极大理想⇔ 尽是域 证明: (1)"⇒"∀下,下2€层,且下,下2=0则以下2€I ⇒reI或reI⇒r=ō或r=ō "一"若 是 是 整 区 , a b \in I ,则 \overline{a} · \overline{b} = $\overline{0}$ ⇒ \overline{a} = $\overline{0}$ 或 \overline{b} = $\overline{0}$ ⇒aeI或beI. 例. Z[x], f(x) 不可约 $\in Z[x]$ (f(x))是素理想. 不是极大理想 则 2[汉] 是整区 定理 Z[x]中素理想有以下三类。 (1) (0); (2) (f(x)), f(x) E Z(x) 不够为; (此时非极大理想)

素理想一个重要应用是代数几何



一般地, "极大理想是素理想, 反之不然如卫[2] 设尺是含么交换环,I是一个素理想,则S=R-I是一 个乘法闭集,即∀si, sz ∈ S, s, sz ∈ S FRS= { reR, ses} 今R×S={(r,s)|r∈R,s∈S} 定义"~" $(r,s) \sim (r',s') \iff s(rs'-r's)=0, \exists s \in S$ 定理 Rs是一个含幺交换环,有唯一极大理想、J={a|aEII 证明: 甘安年丁,则个年工,因此一会是单位,从面 丁极大.

1 Fly Page 114-115. 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10

