问题

$$(3.2)\quad \begin{cases} \text{Ł}u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

其中

$$\text{Ł}u \equiv -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

弱解的定义

$$B(u,v)=\int_\Omega[\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}$$

$$+d^i(x)u)v_{x_i}+\sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v+c(x)uv]dx.$$

设$f\in H^{-1}(\Omega)$. 如果$u\in H_0^1(\Omega)$满足

$$B(u,v)=(\leq\ \ \geq)<f,v>,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),(v\geq 0)$$

则称u为问题(3.2)的一个弱(下，上)解.

特别地 若 $f=0$ 则 $Lu\leq 0$的弱下解

条件:

$$(3.1)\quad a^{ij}(x)=a^{ji}(x), \forall i,j=1,2,\cdots,n;\ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2.$$

$$(3.3)\quad \begin{cases} \text{若}n\geq 3,\text{存在}\Lambda=C(n)\text{使得} \\ \sum_{i,j=1}^{n}||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}(||d^i||_{L^n(\Omega)}+||b^i||_{L^n(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{n/2}(\Omega)}\leq\Lambda; \\ \text{若}n=2,\text{存在}p>2\text{和}\Lambda=C(p)\text{使得} \\ \sum_{i,j=1}^{2}||a^{ij}||_{L^\infty(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}(||d^i||_{L^p(\Omega)}+||b^i||_{L^p(\Omega)}) \\ +||c||_{L^{p/2}(\Omega)}\leq\Lambda. \end{cases}$$

Theorem

3.5 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$Ł$的系数满足*(3.1)*和*(3.3)*， 则
(i) 下面两个性质有且只有一个成立：
(a) $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中存在唯一的弱解,
(b) 对于$f = 0$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中有非零的解；
(ii) $dim(\{u \in H_0^1(\Omega): \quad Łu = 0\}) = dim(\{u \in H_0^1(\Omega): Ł^* u = 0\}) < \infty$;
(iii) $\forall f \in L^2(\Omega)$, *Dirichlet*问题*(3.2)*在$H_0^1(\Omega)$中存在弱解的充要条件是

$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \{u \in H_0^1(\Omega): \quad Ł^* u = 0\}.$$

5. 弱解的极值原理

本小节证明： 在(3.1), (3.3)以及另外的条件

$$\int_\Omega [c(x)\phi(x) + \sum_{i=1}^{n} d^i(x)\phi_{x_i}]dx \geq 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0 \tag{3.7}$$

之下， 定理3.5 (i)(b)的情况不可能发生， 从而得到问题(3.2)弱解的存在唯一性。我们用的方法是著名的De Giorgi弱极值原理, 它依赖于下面的初等引理。

$c(x)\phi(x)$ $\sum_{i=1}^{n} d^i(x)$

Lemma

3.1 设$F(t)$是$[k_0,\infty)$上的非负非增函数， 且存在常数$\gamma>0,\alpha>0,\beta>1$使得

$$F(h)\le\frac{\gamma}{(h-k)^\alpha}F(k)^\beta,\quad \forall h>k\ge k_0$$

超线性衰减

则$F(k_0+d)=0$，其中

$$d=\gamma^{\frac{1}{\alpha}}F(k_0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}}2^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

引进记号：

$$U^+(x) = max\{U(x), 0\}, \quad U^-(x) = min\{U(x), 0\};$$

$$sup_\Omega u = inf\{M: \ (u - M)^+(x) = 0 \ a.e. \ x \in \Omega\};$$

本性上界

$$sup_{\partial\Omega} u = inf\{M: \ (u - k)^+(x) \in H_0^1(\Omega), \forall k \geq M\};$$

$$inf_\Omega u = -sup_\Omega(-u), \quad inf_{\partial\Omega} u = -sup_{\partial\Omega}(-u).$$

Theorem

3.6 设Ω为有界开，$\L$的系数满足*(3.1),(3.3)*和*(3.7)*,

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} \in H^{-1}(\Omega),$$

且存在$p > n$使得

$$f_0 \in L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega), \quad f^i \in L^p(\Omega), i = 1, 2, \cdots, n.$$

如果$u \in H^1(\Omega)$为方程$\L u = f$之弱下解，则

$$\begin{aligned} sup_{\Omega} u \quad &\leq \quad sup_{\partial\Omega} u^+ + C(n, p, \L)||u||_{L^2(\Omega)} \\ &+ \quad C(n, p, \L)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||f^i||_{L^p(\Omega)}] \cdot \\ &\quad |\{x \in \Omega : \ u(x) > 2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}\}|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}}. \qquad (3.8) \end{aligned}$$

若 $f=0$
则 $C(n,p,L)=0$

证明. **(1).** 由下解的定义3.2(3), 条件(3.1),(3.3)知

$$
\begin{aligned}
B(u,v) &= \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j} + d^i(x)u)v_{x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv]dx \\
&\le \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i})dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), v \ge 0.
\end{aligned}
$$

(2). 令$l = sup_{\partial\Omega} u^+$, 若$l \ge sup_\Omega u$, 则结论自然成立， 故下设$l < sup_\Omega u$.
欲证$sup_\Omega u \le l + d_0$. 令

$$A(k) = \{x \in \Omega : \ u(x) > k\},$$

只要证$|A(l+d_0)| = 0$.

为此， 任取$k > l$, 令$v = (u-k)^+$ 则$v \geq 0$ a.e. in Ω, $v \in H_0^1(\Omega)$且 由[Evans'book: Problem 18 in Section 5.10],

$v = u-k$

$v = 0$

$$Dv(x) = \begin{cases} Du(x) & if \quad u(x) > k, \\ 0 \quad if \quad u(x) \leq k. \end{cases}$$

在(1)中取这样的v, 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i}) dx \quad &\geq \quad \int_\Omega [\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_j} + d^i(x) v) v_{x_i} \\ &+ \quad \sum_{i=1}^n b^i(x) v_{x_i} v + c(x) v^2] dx \\ &+ \quad k \int_\Omega (\sum_{i=1}^n d^i(x) v_{x_i} + c(x) v) dx \\ &\equiv \quad I_1 + I_2. \end{aligned}$$

利用(3.7), $I_2 \geq 0$.

而利用能量估计推论3.1,

$$I_1 \geq \frac{\lambda}{2}||Dv||^2_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu}||v||^2_{L^2(\Omega)}.$$

于是由Hölder不等式，定理2.13 (下面不妨设$n > 2$) 和Young不等式,

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2}||Dv||^2_{L^2(\Omega)} &- \bar{\mu}||v||^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i})dx \\
&= \int_{A(k)} (f_0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i})dx \\
&\le [||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} \underbrace{||v||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}_{=2^*} |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} ||f^i||_{L^p(\Omega)} ||Dv||_{L^2(\Omega)} |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\
&\equiv F_0 ||Dv||_{L^2(\Omega)} |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{\lambda}{8}||Dv||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\lambda} F_0^2 |A(k)|^{1-\frac{2}{p}},
\end{aligned}
$$

先有　再有　最后

其中$F_0 = C(n)||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||f^i||_{L^p(\Omega)}$.

因此, 再由Hölder不等式和定理2.13， 我们有

$$
\begin{aligned}
||Dv||^2_{L^2(\Omega)} &\leq C(n, \text{Ł})[||v||^2_{L^2(\Omega)} + F_0^2|A(k)|^{1-\frac{2}{p}}] \\
&\leq C(n, \text{Ł})[||v||^2_{L^{2^*}(\Omega)}|A(k)|^{\frac{2}{n}} \\
&+ F_0^2|A(k)|^{1-\frac{2}{p}}] \\
&\leq C_1(n, \text{Ł})[||Dv||^2_{L^2(\Omega)}|A(k)|^{\frac{2}{n}} \\
&+ F_0^2|A(k)|^{1-\frac{2}{p}}].
\end{aligned}
$$

下面不妨取$C_1 \geq 1$, 注意它可取任意大的数.

注意到

$$\int_{\Omega} u^2 dx \geq \int_{A(k)} k^2 ds = k^2 |A(k)|,$$

可取$k_0 = max\{l,\ (2C_1)^{\frac{n}{4}} ||u||_{L^2(\Omega)}\}$，于是

$$C_1 |A(k_0)|^{\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{2}.$$

从而有，

$$||Dv||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2(n, \text{Ł}) F_0^2 |A(k)|^{1-\frac{2}{p}}, \quad \forall k \geq k_0,$$

再由定理2.13，

$$||v||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_3(n, \text{Ł}) F_0 |A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, \quad \forall k \geq k_0.$$

而$\forall h > k$,

$$\begin{aligned} ||v||_{L^{2^*}(\Omega)} &\geq [\int_{A(h)} (u-k)^{+\frac{2n}{n-2}} dx]^{\frac{n-2}{2n}} \\ &\geq (h-k)|A(h)|^{\frac{n-2}{2n}}, \end{aligned}$$

所以

$$|A(h)| \leq (\frac{C_3 F_0}{h-k})^{\frac{2n}{n-2}} |A(k)|^{\frac{n(p-2)}{p(n-2)}}, \quad \forall h > k \geq k_0.$$

令

$$\alpha = \frac{2n}{n-2}, \quad \beta = \frac{n(p-2)}{p(n-2)}.$$

注意到$p > n$, $\beta > 1$. 故由引理3.1有$|A(k_0 + d)| = 0$, 其中

$$d = C_3 F_0 |A(k_0)|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} 2^{\frac{n(p-2)}{2(n-2)}}.$$

注意

$$C_1 \geq 1, \quad 2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)} \leq k_0 \leq l + 2^{n/4} C_1 ||u||_{L^2(\Omega)},$$

我们有

由 $|A(k_0+d)|=0$ 再由 A 定义

$$\begin{aligned}
sup_\Omega u \quad &\leq \quad k_0 + d \\
&\leq \quad l + C(n,p,Ł)||u||_{L^2(\Omega)} + d \\
&\leq \quad l + C(n,p,Ł)||u||_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad +C(n,p,Ł)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||f^i||_{L^p(\Omega)}] \\
&\cdot \quad |\{x \in \Omega : \ u(x) > 2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

这就证明了(3.8).

(3).

如果$f\equiv 0$， 此时利用(3.7)及稠密性， 有

结合 u为弱解 $\forall\ v\in H_0^1(\Omega),\ v\geq 0$

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i} + \sum_{j=1}^n d^j(x)uv_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v + c(x)vu]d \\
\geq & \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v - \sum_{j=1}^n d^j(x)vu_{x_i}]dx \\
& + \int_\Omega [\sum_{j=1}^n d^j(x)(vu)_{x_i} + c(x)vu]dx \\
\geq & \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}v - \sum_{j=1}^n d^j(x)vu_{x_i}]dx
\end{aligned}
$$

$\equiv I.$

令$\Omega(k)=\{x\in\Omega:\ Dv(x)\neq 0\}$，利用$u$和$v$的关系以及推论（3.1），我们有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega(k)}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)v_{x_j}v_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(b^i(x)-d^i(x))v_{x_i}v\Big]dx \\
&\geq \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega(k)}|Dv|^2dx - C(n,\text{Ł})\int_{\Omega(k)}|v|^2dx.
\end{aligned}
$$

于是由Hölder不等式和定理2.13，

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega(k)} |Dv|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq C(n,\text{Ł})\left(\int_{\Omega(k)} |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(n,\text{Ł})\left[\int_{\Omega(k)} |v|^{2^*} dx\right]^{\frac{1}{2^*}} |\Omega(k)|^{\frac{1}{n}} \\
&= C(n,\text{Ł})\left[\int_{\Omega} |v|^{2^*} dx\right]^{\frac{1}{2^*}} |\Omega(k)|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq C(n,\text{Ł})\left[\int_{\Omega} |Dv|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} |\Omega(k)|^{\frac{1}{n}} \\
&= C_4(n,\text{Ł})\left[\int_{\Omega(k)} |Dv|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} |\Omega(k)|^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

如果存在$k \in (l, \overset{max}{\cancel{sum}}_\Omega u)$使得$\int_{\Omega(k)} |Dv|^2 dx = 0$, 则$Dv = 0$ a. e. in Ω, 即

$$(u-k)^+ = v \equiv constans \geq 0,$$

此时显然有$Sup_\Omega u \leq Sup_{\partial\Omega} u^+$. 否则，我们有

$$|\Omega(k)| \geq \frac{1}{C_4(n, \text{Ł})}, \forall k \in (l, Sup_\Omega u).$$

另一方面，

$$\Omega(k) \subset A(k) \backslash \{x \in \Omega : \ Du(x) = 0\} \subset A(k) \backslash \{x \in \Omega : \ u(x) = Sup_\Omega u\},$$

令$k \to Sup_\Omega u$,得$|\Omega(k)| \to 0$, 矛盾！ $\square$

注意： 若$u \in H^1(\Omega)$为方程$\text{Ł}u = f$之弱上解，则$-u \in H^1(\Omega)$为方程$\text{Ł}u = -f$之弱下解， 于是由定理3.6立即有

Corollary

3.2 设Ω为有界开，$\L$的系数满足*(3.1)*,*(3.3)*和*(3.7)*, $f = f_0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, 且存在$p > n$使得

$$f_0 \in L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega), \quad f^i \in L^p(\Omega), i = 1, 2, \cdots, n.$$

如果$u \in H^1(\Omega)$为方程$\L u = f$之弱上解， 则

$$\begin{aligned} inf_{\Omega} u \quad &\geq \quad sup_{\partial\Omega} u^- - C(n, p, \L)||u||_{L^2(\Omega)} \\ &- \quad C(n, p, \L)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||f^i||_{L^p(\Omega)}] \\ &\cdot \quad |\{x \in \Omega : \ u(x) < -2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}\}|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

如果还有$f \equiv 0$, 则有

$$inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

注1: 注意定理3.6及其推论中的常数与Ω无关， 这一事实可以将它们用于无界区域. 比如Ω为R^n, R^n_+, 或一个有界区域的外区域, 此时定理3.6的结论修改为

$$\begin{aligned} sup_\Omega u &\leq max\{sup_{\partial\Omega} u^+, \limsup_{x\to\infty} u^+(x)\} + C(n,p,Ł)||u||_{L^2(\Omega)} \\ &+ C(n,p,Ł)[||f_0||_{L^{\frac{np}{n+p}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||f^i||_{L^p(\Omega)}] \\ &\cdot |\{x\in\Omega:\ u(x) > 2^{n/4}||u||_{L^2(\Omega)}\}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

注意$u\in L^2(\Omega)$, 最后一项集合的测度一定是有限的， 除非$u=0$ a. e in Ω.

事实上， 从证明中可以看出，最后一项是

$$|\{x \in \Omega : \ u(x) > C_1 2^{n/4} ||u||_{L^2(\Omega)}\}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}},$$

而C_1又可以取任意大的数， 所以最后一项集合的测度可以取得任意的小。 这一结论在实际研究中很有用。

注2: 通过选取更加复杂的对数型试验函数， 定理3.6及其推论中的不等式右边的第二项$C||u||_{L^2(\Omega)}$可以用零代替， 但此时常数$C(n, p, Ł)$要换成$C(n, p, \Omega, Ł)$, 详见[Gilbarg-Trudinger, Theorem 8.16]. 注意$\frac{np}{n+p} \in (\frac{n}{2}, n)$, 这一结论比著名的Alexandrov极值原理还要强。

现在将定理3.8及其推论用于问题(3.2), 并利用定理3.5(i), 我们终于得到

Theorem

3.7 设Ω为有界开，$\L$的系数满足*(3.1),(3.3)*和*(3.7)*, 则

(i) 方程方程$\L u=0$在空间$H_0^1(\Omega)$中只有零解*(*即：问题*(3.2)*对应的齐次问题只有零解*)*;

(ii) 如果 $f\in H^{-1}(\Omega)$, 则问题*(3.2)*存在唯一的弱解.

注1: 利用定理3.5和推论3.2的注1，可以得到如推论3.2的注1所示的无界区域上的问题（3.2）在预定$\limsup_{x\to\infty}u^+(x)$条件下的弱解的存在唯一性。