2.3 函数的光滑化

定义 2.2 设 $0 \le J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且对$|x| \ge 1$, $J(x) = 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1$. 则称$J$为光滑子(Mollifier). 对于$\varepsilon > 0$, 记 $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(\frac{x}{\varepsilon})$. 如果$u \in L^p_{loc}(\Omega)$, 定义

$= \int_{B_\varepsilon(x)} J(x-y)u(y)dy$

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)u(y)dy := (u)_\varepsilon(x),$$

当 $|x-y| > \varepsilon$ 时 为0

其中

$$x \in \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

$J_\varepsilon * u$称为u的光滑化或正则化.

这样的J可取：

$$J(x)=\begin{cases} c\exp\frac{1}{|x|^2-1}, & |x|<1; \\ 0, & |x|\geq 1. \end{cases}$$

$c=(\int_{\{|x|<1\}}\exp\frac{1}{|x|^2-1}dx)^{-1}.$

记号: $f_m\to f$ in $L^p_{loc}(\Omega)$ 表示对于任意的有可测集$K\subset\subset\Omega$， 都有

$$\lim_{m\to\infty}\|f_m-f\|_{L^p(K)}=0.$$

正则化算子有下列基本性质：

命题 2.3 (1)如果$u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 则 $J_\varepsilon * u(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
(2) 假设$\mathrm{Supp}\, u \subset\subset \Omega, \varepsilon < dist(\mathrm{Supp}\, u, \partial\Omega)$, 则
$J_\varepsilon * u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.
内闭一致收敛
(3) 设$u \in C(\Omega)$, 则当$\varepsilon \to 0$时， $J_\varepsilon * u(x) \to u$ 在Ω内部一致收敛. 如果$u \in C(\overline{\Omega})$且它在$\bar{\Omega}$外延拓为零, 则$J_\varepsilon * u(x) \to u$ 在Ω中一致收敛.

(4) 如果$u \in L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, 则对于任意的可测集$\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 有

$$\|J_\varepsilon * u\|_{L^p(\Omega_1)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega_2)}, \quad \forall \varepsilon \in (0, dist(\Omega_1, \partial\Omega_2)),$$

并且对任意的可测集$K \subset\subset \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p(K)} = 0.$$

即：$J_\varepsilon * u \to u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega)$.

(5) 对于u的每个Lebesgue 点x, 则当$\varepsilon \to 0$时，$J_\varepsilon * u(x) \to u(x)$. 特别地,

$$J_\varepsilon * u(x) \to u(x), a.e. x \in \Omega.$$

证明. (1),(2)的证明是显然的。 而从不等式

$$|J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \le \sup_{|x-y|<\varepsilon} |u(y) - u(x)|,$$

容易证明(3). 详见 [Admas: 2003, Th2.29].
先证(4)的第一个结论：

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon * u(x)| &\le \int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|\overset{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{u(y)}|dy \\
&\le \left(\int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

由Fubini定理,

$$= \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_2} 1_{\{|x-y|<\varepsilon,\ x\in\Omega_1\}} J_\varepsilon(x-y)\,|u(y)|^p\,dx\,dy$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |J_\varepsilon * u(x)|^p dx &\le \int_{\Omega_1} dx \int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy \\
&\le \int_{\Omega_2} |u(y)|^p dy.
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_2} 1_{\{|x-y|<\varepsilon,\ x\in\Omega_1\}} J_\varepsilon(x-y)\,dx \le 1$$

为证(4)的第二个结论， 取定$u \in L^p_{loc}(\Omega)$和可测集$K \subset\subset \Omega$, 只要证明： $\forall \delta > 0$, 只要 $\varepsilon << 1$ (表示充分小）， 就有$\|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p(K)} < \delta$.

为此取可测集$K \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, 由命题2.1（2-3），存在$v \in C_0(\Omega_2)$使得

$$\|v-u\|_{L^p(\Omega_2)} < \frac{\delta}{3}.$$

由Minkowski不等式和(4)的第一个结论， 我们有

$$\begin{aligned}
\|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p(K)} &\le \|J_\varepsilon * u - J_\varepsilon * v\|_{L^p(K)} + \|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(K)} \\
&+ \|v-u\|_{L^p(K)} \\
&= \|J_\varepsilon * (u-v)\|_{L^p(K)} + \|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(K)} \\
&+ \|v-u\|_{L^p(K)} \\
&\le 2\|v-u\|_{L^p(\Omega_2)} + \|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(K)}.
\end{aligned}$$

于是结合(3)我们就证明了(4)。

对于(5),假设$u \in L_{loc}(\Omega)$, 则 对每个Lebesgue点 x, 当$\varepsilon \to 0$时

$$|J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \le c(n)\|J\|_{L^\infty(R^n)} \fint_{B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)|dy \to 0,$$

这里$\fint_A f(x)dx = \frac{1}{|A|}\int_A f(x)dx$ 表示f在A上的积分平均. $\square$

利用命题2.3容易证明

定理2.3

(1) 对$1 \le p < \infty$, $C_0^\infty(\Omega)$在$L^p(\Omega)$ 中稠密.

(2)如果$u \in L^1_{loc}(\Omega)$满足

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则$u(x) = 0, \quad a.e. x \in \Omega$.

证明. 作业3. $\square$

2.4. Sobolev 空间的定义及简单性质

1. 弱导数的定义及性质

如果$u \in C^1(\Omega)$, 则$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 取$C^1$区域$\Omega_1$使得$supp\ \phi \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. 由散度定理，我们有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{x_i}\phi dx &= \int_{\Omega_1}[div(u\phi \mathbf{e_i}) - u\phi_{x_i}]dx \\
&= \int_{\partial\Omega_1} u\phi \mathbf{e_i}\cdot \overrightarrow{n}\, ds_x - \int_{\Omega_1} u\phi_{x_i}dx \\
&= -\int_\Omega u\phi_{x_i}dx.
\end{aligned}$$

其中$\mathbf{e_i}$是第个分量为1其余分量全为0的n-维向量， 而$\overrightarrow{n}$是$\partial\Omega_1$的单位外法向量。

重复这样的推导我们有：如果$u \in C^m(\Omega)$，
则$\forall \alpha \in Z_n, |\alpha| \le m$, 均有

$$\int_{\Omega} D^{\alpha}_{u} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega). \qquad (2.2)$$

定义2.3 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是开集，$u \in L^1_{loc}(\Omega)$，如果存在$v \in L^1_{loc}(\Omega)$ 使得

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

则称v为u的α阶弱导数，仍记为$v = D^{\alpha} u$.

由(2.2)和定义2.3， 容易得到

命题 2.4(1) 如果$u \in C^m(\Omega)$, 则$\forall \alpha \in Z_n, |\alpha| \le m$, 弱导数$v = D^\alpha u$存在， 且与经典的偏$\alpha$阶导数一致。

(2) 如果u_i的α阶弱导数存在，λ_i是常数，$(i = 1, 2)$, 则

$$D^\alpha(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2). = \lambda_1 D^\alpha u_1 + \lambda_2 D^\alpha u_2.$$

(3) 在弱导数意义下：如果$v_i = D^\alpha u$, $(i = 1, 2)$, 则$v_1 = v_2$; 如果$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$存在, 则$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$也存在, 而且这两者相等。

(4) 如果弱导数$\frac{\partial u}{\partial x_i}$存在, $\eta \in C^\infty(\Omega)$, 则$\frac{\partial(\eta u)}{\partial x_i}$也存在, 而且

$$\frac{\partial(\eta u)}{\partial x_i} = u\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

作业4： 证明 命题2.4 (4).

利用(4)和数学归纳法可证**Leibniz 公式**:
如果$\alpha \in Z_n$, 对所有满足$\beta| <\leq \alpha$的$\beta \in Z_n$, 弱导数$D^\beta u$都存在, $\eta \in C^\infty(\Omega)$, 则$D^\beta(\eta u)$也存在, 并且

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta \in Z_n, \beta| <\leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta \eta D^{\alpha-\beta} u, \tag{2.3}$$

此处

$$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdot \alpha_n!,$$

$$\beta| <\leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

其完整可见[Evans: pp264].

命题 2.5 若$u, D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 则$\forall \varepsilon > 0$, 有

$$(D^\alpha u)_\varepsilon = D^\alpha(u)_\varepsilon \quad \text{in} \quad \Omega_\varepsilon.$$

证明. 注意当$x \in \Omega_\varepsilon$时， 作为y的函数$J_\varepsilon(x-y)$属于$C_0^\infty(\Omega)$, 于是我们有

$$\begin{aligned}
D^\alpha(u)_\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&= \int_\Omega D_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha J_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&= (-1)^{2|\alpha|} \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)D_y^\alpha u(y)dy \\
&= (D^\alpha u)_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

命题 2.6(1) 如果$v, u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 且弱导数$D^\alpha u$存在且等于$v$， 则存在$\{u_m\} \subset C^\infty(\Omega)$使得
$u_m \to u \text{ in } L^1_{loc}(\Omega)$且$D^\alpha u_m \to v \text{ in } L^1_{loc}(\Omega)$。
(2) 如果$v, u \in L^1_{loc}(\Omega)$, 并存在$\{u_m\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$使得$\{D^\alpha u_m\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$， $u_m \to u \text{ in } L^1_{loc}(\Omega)$
且$D^\alpha u_m \to v \text{ in } L^1_{loc}(\Omega)$， 则弱导数$D^\alpha u$存在且等于$v$。
(3) 如果$f \in C^1(R)$, $f' \in L^\infty(R)$, u的弱导数$\frac{\partial u}{\partial x_i}$存在, 则弱导数

$$\frac{\partial(f \circ u)}{\partial x_i} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

证明. (1)的证明可由命题2.3 (4)和由命题2.5容易得到。 事实上， 取$u_m = J_{\frac{1}{m}} * u$即可。
(2)可直接证明。 因为对任意的$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 我们有

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \phi dx =$$

$$\lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_m \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx.$$

(3)的证明可由(1)和(2)得到。 事实上，由(1)可选$\{u_m\} \subset C^\infty(\Omega)$使得 $u_m \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$
且$D^\alpha u_m \to v$ in $L^1_{loc}(\Omega)$。而对于任意的有界闭集$K \subset\subset \Omega$，我们有

$$\int_K |f(u_m) - f(u)| dx \le \|f'\|_{L^\infty(R)} \int_K |u_m - u| dx \le C < \infty,$$

$$\int_K |f'(u_m)D^\alpha u_m - f'(u)D^\alpha u|dx \leq 2\|f'\|_{L^\infty(R)} \int_K [|D^\alpha u_m - D^\alpha u| + |D^\alpha u|]dx \leq C < \infty,$$

其中常数C只与$\|f'\|_{L^\infty}$, $\|u\|_{L^1(K)}$, $\|D^\alpha u\|_{L^1(K)}$有关. 于是由控制收敛定理， 我们得到

$$\lim_{m\to\infty} \int_K |f(u_m) - f(u)|dx = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_K |f'(u_m)D^\alpha u_m - f'(u)D^\alpha u|dx = 0.$$

利用(2)，我们就证明(3)。 $\square$

作业*： 证明： 如果$u, v, D^{e_i}u, D^{e_i}v \in L^2(\Omega)$,
则$D^{e_i}(uv)$ =存在， 且$D^{e_i}(uv) = uD^{e_i}v + vD^{e_i}u$。

注意， 定义2.3， 命题2.4和2.6是求弱导数的基本工具。

Example

2.1 求一阶弱导数$D^\alpha|x|^\gamma$, 其中$\gamma > 1-n$为常数，$\alpha \in Z_n, |\alpha| = 1.$

解： 不妨设$\alpha = e_i$, $\forall \phi \in C_0^\infty(R^n)$, 取$\delta > 0$使得 $Suup\ \phi \subset\subset B_\delta(0)$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int_{R^n} |x|^\gamma D^{e_i}\phi dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_\delta(0)\setminus B_\varepsilon(0)} |x|^\gamma D^{e_i}\phi dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_\delta(0)\setminus B_\varepsilon(0)} [div(|x|^\gamma \phi e_i) - \gamma|x|^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|}\phi]dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_\delta(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \gamma|x|^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|}\phi dx \\
&= -\int_{B_\delta(0)} v(x)\phi dx,
\end{aligned}
$$

其中第三，四个等式用到了$\gamma > 1-n$，而

$$v(x) = \begin{cases} \gamma|x|^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|}, & x \neq 0 \\ \text{任意值}, & x = 0 \end{cases}$$

所以由定义2.3， $D^{e_i}|x|^{\gamma} = v(x)$.

Example

2.2 设$a, b \in R, a \neq 0$, 则$H(x) = \begin{cases} a, & x > b \\ 0, & x \leq b \end{cases}$没有弱导数。

解： 反之， 记δ是它的弱导数, 由于它是δ是局部可积的, 则由定义， 对任意$\varphi \in C_0^\infty(b-1,b) \subset C_0^\infty(R)$,

$$\int_{b-1}^{b} \delta\varphi dx = \int_R \delta\varphi dx = -\int_R H\varphi' dx = 0,$$

由定理2.3(2)推出$\delta(x) = 0,\ a.e.x \in (b-1,b)$.
类似地, $\delta = 0,\ a.e.x \in (b,b+1)$. 因此
$\delta(x) = 0,\ a.e.\ x \in (b-1,b+1)$. 故

$$0 = \int_{b-1}^{b+1} \delta\varphi dx = -\int_{b-1}^{b+1} H\varphi' dx = a\varphi(b), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(b-1,b+1),$$

矛盾！

注： 数学上称$C_0^\infty(R^n)$的线性连续泛函为广义函数， 引进广义函数$\delta_b(x)$,

$$<\delta_b, \varphi>:=\delta_b(\varphi)=\varphi(b), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n),$$

则$H(x)$的广义导函数为$a\delta_b(x)$.

2. Sobolev空间的定义

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集, k为非负整数， $1 \le p \le \infty$, 记

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in Z_n, |\alpha| \le k\}.$$

由弱导数的线性运算性质及L^p是一线性空间这一事实知：按照通常的线性运算$W^{k,p}(\Omega)$是一线性空间。 在其中引进范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} [\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}]^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}], & p = \infty. \end{cases}$$

则$W^{k,p}(\Omega)$是一 线性赋范空间。 再记 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包，即

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists \{u_m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$$

$$\text{使得} \lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0\}.$$

Definition

2.4 $W^{k,p}(\Omega)$和$W_0^{k,p}(\Omega)$都称为Sobolev空间。

最后记

$$H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega),\quad H_0^k(\Omega)=W_0^{k,2}(\Omega).$$

引入数对

$$<u,v>_{H^k(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx,\quad \forall u,v\in H^k(\Omega),\quad (2.4)$$

则$H^k(\Omega)$和 $H_0^k(\Omega)$都是线性内积空间， 且

$$<u,u>_{H^k(\Omega)}=\|u\|^2_{H^k(\Omega)},$$

即内积诱导的范数与原范数一致。

3. Sobolev空间的一些简单性质

Theorem

2.4 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集, k为非负整数, $1 \leq p \leq \infty$. 那么
(1) $W^{k,p}(\Omega)$和$W_0^{k,p}(\Omega)$都是*Banach*空间;
(2) $H^k(\Omega)$和 $H_0^k(\Omega)$按照内积*(2.4)*都是*Hilbert*空间.

证明. 由Hilbert空间的定义和第2小节的论述知, 只要证明$W^{k,p}(\Omega)$ 的完备性。 为此任取$W^{k,p}(\Omega)$中的一Cauchy序列$\{u_m\}$, 由$W^{k,p}(\Omega)$中范数的定义知: $\forall \alpha \in Z_n, |\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_m\}$是$L^p(\Omega)$中的Cauchy序列, 由于它是Banach空间（命题2.1）, 故存在$u_\alpha \in L^p(\Omega)$使得$\{D^\alpha u_m\}$在$L^p(\Omega)$中 （按范数）收敛于u_α。记$u = u_{(0,0,\cdots,0)}$. 则由命题2.6 (2)知: $D^\alpha u = u_\alpha$. 所以, $\{u_m\}$在$W^{k,p}(\Omega)$中按范数收敛于u。 $\square$

利用L^p空间的性质，弱导数的定义和性质以及Leibniz公式(2.3)，容易证明

命题 2.7 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集，k为非负整数， $1 \le p \le \infty$，$u, v \in W^{k,p}(\Omega)$，$\alpha \in Z_n, |\alpha| \le k$. 那么

(1) 对任意开集$\Omega_1 \subset \Omega$, $\quad u \in W^{k,p}(\Omega_1)$;

(2) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, 且对满足$|\alpha| + |\beta| \le k$的$\beta \in Z_n$,均有

$$D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u;$$

(3) $\forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \quad \eta u \in W^{k,p}(\Omega)$.

作业5： 证明命题2.7 (2).

Example

2.3 试确定γ的值，使得函数$u(x,y)=|ln(x^2+y^2)|^\gamma \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$，其中

$$B_r=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le r\}.$$

解： 可以像例2.1一样由弱导数的定义直接求弱导数， 然后验证之。 但我们想利用命题2.6 (2)来解题。 为此令$u_m(x,y)=|ln(\frac{1}{3m}+x^2+y^2)|^\gamma$. 显然$u_m$在$B_{\frac{1}{2}}$中几乎处处收敛于$u$. 又

$$\|u_m\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})}\le\sqrt{|B_{\frac{1}{2}}|}\|u_m\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})}\le\begin{cases}\|u\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})}, & \gamma>0\\ \|u_1\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})}, & \gamma\le 0,\end{cases}$$

而 $\int_{B_{\frac{1}{2}}} |u|^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} |2lnr|^{2\gamma} rdr < \infty$. 所以由控制收敛定理， 对任意的$\gamma$， u_m在$^1(B_{\frac{1}{2}})$中（按范数）收敛于u, 并且$u \in L^2(B_{\frac{1}{2}})$.

因为

$$Du_m = \gamma |ln(\frac{1}{3m} + r^2)|^{\gamma-1} \frac{2r}{\frac{1}{3m} + r^2} (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

类似地， 由控制收敛定理， 对任意的γ, Du_m在$^1(B_{\frac{1}{2}})$中（按范数）收敛于

$$v = \gamma |ln(r^2)|^{\gamma-1} \frac{2}{r} (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}),$$

因此由命题2.6(2)得到 $Du = v$.

于是， $u(x,y)\in H^1(B_{\frac{1}{2}})$等价于$v\in L^2(B_{\frac{1}{2}})$. 而

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}}|v|^2dx = 2^{2\gamma}\pi\gamma^2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{|lnr|^{2(\gamma-1)}}{r}dr$$

$$= 2^{2\gamma}\pi\gamma^2\int_{ln2}^{\infty}s^{2(\gamma-1)}ds.$$

该积分收敛当且仅当$\gamma<\frac{1}{2}$. 所以，函数$u\in H^1(B_{\frac{1}{2}})$当且仅当$\gamma<\frac{1}{2}$.

作业6： 在例2.3的记号下， 试确定γ的值, 使得函数$u(x,y)=|ln(x^2+y^2)|^\gamma\in H^1(B_1\setminus\overline{B_{\frac{1}{2}}})$. （答案：$\gamma=0$或$\gamma>\frac{1}{2}$)