关于振动理论习题解答　　　　杨利军　08, Jan., 2018

菲 731. 试证, 方程 $y'' + xy = 0$ 在区间 $-25 \le x \le 25$ 上至少具有15个零点.

注： 题目的意思是, 证明方程 $y'' + xy = 0$ 的任意一个非平凡解在区间 $-25 \le x \le 25$ 上至少有15个零点.

证明：实际上我们将证明更强的结论, 即方程 $y'' + xy = 0$ 的任意一个非平凡解在区间 $-25 \le x \le 25$ 上至少有20个零点, 并且我们还可以对这20个零点作一个初步定位. 以下我们分三个步骤来证明.

1). 任意一个非平凡解在区间 $[16, 25)$ 上至少有11个零点.

证：显然方程 $u'' + 16u = 0$ 有解 $u(x) = \sin 4(x - 16)$, $u(x)$ 在区间 $[16, 25)$ 上有12个零点 $16 + \frac{k\pi}{4} \in [16, 25)$, $k = 0, 1, \cdots, 11$. 因此根据 Sturm 比较定理可知方程 $y'' + xy = 0$ 的任意非平凡解在 $[16, 25)$ 上至少有11个零点.

2). 任意一个非平凡解在区间 $[9, 16)$ 上至少有6个零点.

证：方程 $u'' + 9u = 0$ 有解 $u(x) = \sin 3(x - 9)$, 它在区间 $[9, 16)$ 上有7个零点 $9 + \frac{k\pi}{3} \in [9, 16)$, $k = 0, 1, \cdots, 6$. 因此方程 $y'' + xy = 0$ 的任意非平凡解在 $[9, 16)$ 上至少有6个零点.

3). 任意一个非平凡解在区间 $[4, 9)$ 上至少有3个零点.

证：方程 $u'' + 4u = 0$ 有解 $u(x) = \sin 2(x - 4)$, 它在区间 $[4, 9)$ 上有4个零点 $4 + \frac{k\pi}{2} \in [4, 9)$, $k = 0, 1, 2, 3$. 因此方程 $y'' + xy = 0$ 的任意非平凡解在 $[4, 9)$ 上至少有3个零点.

综上所述, 方程 $y'' + xy = 0$ 的任意一个非平凡解在区间 $[4, 25) \subset [-25, 25]$ 上至少有 $11 + 6 + 3 = 20$ 个零点. 证毕. (注: 根据 Simmons 课本第191页 Theorem B 可知方程 $y'' + xy = 0$ 的任意一个非平凡解在区间 $[-25, 0)$ 上至多有一个零点.)

菲 732. 设 x_1, x_2, $\cdots$ 是方程 $y'' + q(x)y = 0$ 的（一个非平凡）解按大小的顺序依次排列的零点， 其中 $q(x) > 0$, 且当 $x_1 \le x < +\infty$ 时函数 $q(x)$ 连续并且是单调递增的。 证明 $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$ (即相邻零点的距离是严格递减的)。

注：这里函数 $q(x)$ 单调递增性质应该理解为严格单调增。不然结论不成立。 例如极端情形当 $q(x) = 1$ 时, $x_{n+1} - x_n = \pi$.

证明: 记 $\delta_n = x_{n+1} - x_n$. 要证对于任意正整数 n, $\delta_{n+1} < \delta_n$。 我们考虑以下两个方程

$$u'' + q(x + x_n)u = 0 \quad \text{和} \quad v'' + q(x + x_{n+1})v = 0.$$

我们不难看出 $u(x) = \phi(x+x_n)$ 和 $v(x) = \phi(x+x_{n+1})$ 分别是上述两个方程的解, 并且 $u(0) = 0$, $u(\delta_n) = 0$, $v(0) = 0$, $u(\delta_{n+1}) = 0$. 由 $q(x)$ 是严格单调上升的假设可知 $q(x+x_n) < q(x+x_{n+1})$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$. 根据 Sturm 比较定理可知 $\delta_{n+1} < \delta_n$. 结论成立. 证毕. ∎

菲733. 在上题中用 C 表示当 $x \to +\infty$ 时函数 $q(x)$ 的有限或无穷极限。证明 $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+} - x_n) = \pi/\sqrt{C}$.

证明：根据上题的结论可知序列 $\{\delta_n\}$严格单调下降。因此极限 $\lim_{n\to+\infty} \delta_n$ 存在, 且极限大于或等于零. 以下我们证明

(i)当 $C > 0$ 有限时 $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = \pi/\sqrt{C}$;

(ii)当 $C = +\infty$ 时, $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

证(i). 设 $C > 0$ 有限正数。对于 $\forall \varepsilon > 0$. 不妨设 $\varepsilon < C/2$. 由假设 $q(x) \uparrow C$, 可知存在 $T > 0$, 使得 $c - \varepsilon < q(x) < c$, 对于 $\forall x \geq T$. 又由于 $x_n \uparrow +\infty$, 可知存在 $N > 0$, 使得 $x_n \geq T$, 当 $n \geq N$. 考虑如下三个方程

$$u'' + Cu = 0,$$

$$y'' + q(x)y = 0,$$

$$v'' + (C - \varepsilon)v = 0.$$

在区间 $(T, +\infty)$ 上应用 Sturm 比较定理于上述三个方程可知对 $\forall n \geq N$,

$$\frac{\pi}{\sqrt{C}} < \delta_n = x_{n+1} - x_n < \frac{\pi}{\sqrt{C-\varepsilon}}.$$

于是

$$\left|\delta_n - \frac{\pi}{\sqrt{C}}\right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{C-\varepsilon}} - \frac{\pi}{\sqrt{C}} = \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{C(C-\varepsilon)}(\sqrt{C} + \sqrt{C-\varepsilon})} \leq \frac{2\pi\varepsilon}{C^{3/2}(\sqrt{2}-1)}.$$

这就证明了 $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = \pi/\sqrt{C}$. 结论成立. 证毕.

证(ii). 以下我们来证当 $q(x)\uparrow +\infty$ 时，$\delta_n \to 0$. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得 $q(x)>1/\varepsilon^2, \forall x>M$. 考虑如下两个方程

$$y''+q(x)y=0 \quad \text{和} \quad w''+\frac{1}{\varepsilon^2}w=0.$$

显然后一方程的任何非零解零点的间距为 $\varepsilon\pi$. 根据 Sturm 比较定理知, 当 n 充分大时，$0<\delta_n<\varepsilon\pi$。这就证明了 $\delta_n \to 0$. 证毕。∎

菲 734. 设 $y(x)$ 和 $z(x)$ 分别是方程 $y''+q(x)y=0$ 和 $z''+Q(x)z=0$ 满足条件 $y(x_0)=z(x_0)$, $y'(x_0)=z'(x_0)$ 的两个解, 并且在区间 (x_0,x_1) 上有 $Q(x)>q(x)$, $y(x)>0$, $z(x)>0$. 证明，在此区间上比 $z(x)/y(x)$ 是递减的。

证明: 由于

$$\left[\frac{z(x)}{y(x)}\right]'=\frac{z'(x)y(x)-y'(x)z(x)}{y(x)^2},$$

故要证 $z(x)/y(x)$ 在区间 (x_0,x_1) 上是递减的, 只要证

$$z'(x)y(x)-y'(x)z(x)<0, \quad \forall x\in(x_0,x_1).$$

考虑解 $y(x)$ 和 $z(x)$ 所满足的方程

$$y''(x)+q(x)y(x)=0 \quad \text{和} \quad z''(x)+Q(x)z(x)=0.$$

于上述两个等式分别乘以 $z(x)$ 和 $y(x)$, 并相减得

$$z''(x)y(x)-y''(x)z(x)+[Q(x)-q(x)]y(x)z(x)=0.$$

关于从 x_0 到 $x\in(x_0,x_1)$ 上式积分得

$$\int_{x_0}^{x}[z''(s)y(s)-y''(s)z(s)]ds+\int_{x_0}^{x}[Q(s)-q(s)]y(s)z(s)ds=0.$$

对上式的第一个积分式作分部积分，并注意到解 $y(x)$ 和 $z(x)$ 在点有相同的初值条件，我们就得到

$$z'(x)y(x)-y'(x)z(x)=-\int_{x_0}^{x}[Q(s)-q(s)]y(s)z(s)ds, \quad \forall x\in(x_0,x_1).$$

根据假设，在区间 (x_0,x_1) 上有 $Q(x)>q(x)$, $y(x)>0$, $z(x)>0$. 因此上式右端严格大于零. 这就证明了$z(x)/y(x)$在区间 (x_0,x_1) 上是严格递减的. 证毕. ∎

菲735. 假设题732的条件被满足, 并且设

$$b_n = \max\{|y(x)|, x_n \le x \le x_{n+1}\}.$$

证明 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$.

证明：设 $y(x)$ 是方程 $y'' + q(x)y = 0$ 的非平凡解, $\{x_n\}$ 是 $y(x)$ 的零点, 且 $x_n \uparrow +\infty$, 即零点 x_n 单调上升趋向正无穷. 由于

$$y''(x) = -q(x)y(x) \neq 0, \quad \forall x \in (x_n, x_{n+1}),$$

故一阶导数 $y'(x)$ 在 (x_n, x_{n+1}) 上严格单调. 因此存在唯一一点 $x'_n \in (x_n, x_{n+1})$, 使得

$$y'(x'_n) = 0 \quad 且 \quad |y(x'_n)| = \max\{|y(x)|, x_n \le x \le x_{n+1}\} =: b_n.$$

考虑 $y(x)$ 在区间 (x_n, x_{n+2}) 上的性态, 见图1.

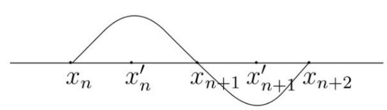

图1: 解 $y(x)$ 在区间 $[x_n, x_{n+2}]$ 上的图像.

由恒等式 $y''(x) + q(x)y(x) = 0$ 得

$$2y'(x)y''(x) + 2q(x)y(x)y'(x) = 0, \quad \forall x \ge x_1$$

对上式从 x'_n 到 x'_{n+1} 积分得

$$\int_{x'_n}^{x'_{n+1}} 2y'(x)y''(x)dx + \int_{x'_n}^{x'_{n+1}} 2y(x)y'(x)dx = 0.$$

显然上式第一个积分为零. 将第二个积分的区间分成两个部分 $[x'_n, x'_{n+1}] = [x'_n, x_{n+1}] \cup [x_{n+1}, x'_{n+1}]$, 于是我们得到

$$\int_{x'_n}^{x_{n+1}} 2q(x)y(x)y'(x)dx + \int_{x_{n+1}}^{x'_{n+1}} 2q(x)y(x)y'(x)dx = 0.$$

注意到乘积 $y(x)y'(x)$ 在区间 $[x'_n, x_{n+1}]$ 和 $[x_{n+1}, x'_{n+1}]$ 上不变号, 于是利用积分中值定理得

$$q(\xi_n)\int_{x'_n}^{x_{n+1}} 2y(x)y'(x)dx + q(\eta_n)\int_{x_{n+1}}^{x'_{n+1}} 2y(x)y'(x)dx = 0,$$

其中 $\xi_n \in (x'_n, x_{n+1})$, $\eta_n \in (x_{n+1}, x'_{n+1})$, 见图2.

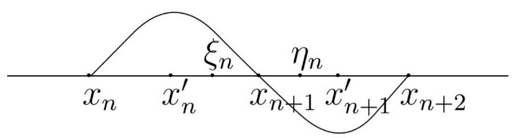

图2: ξ_n 和 η_n 的位置.

由此立刻得到

$$-q(\xi_n)y^2(x'_n) + q(\eta_n)y^2(x'_{n+1}) = 0.$$

由于 $\xi_n < \eta_n$ 且 $q(x)$ 严格单调上升, 我们立刻得到

$$y^2(x'_n) > y^2(x'_{n+1}) \quad 即 \quad b_n > b_{n+1}.$$

证毕. ∎

菲736. 假设 733 题中的极限 C 是有限的, 证明当 $n \to +\infty$ 时 $b_n \to B > 0$.

注：由题 735 可知序列 b_n 严格单调下降, 因此序列 b_n 有极限, 记作 B. 这道题要求证明极限 $B > 0$.

证明： 在上一题证明过程中, 我们已经证明了如下结论,

$$-q(\xi_n)y^2(x'_n) + q(\eta_n)y^2(x'_{n+1}) = 0.$$

由此得

$$b_{n+1}^2 = y^2(x'_{n+1}) = \frac{q(\xi_n)}{q(\eta_n)}y^2(x'_n) = \frac{q(\xi_n)}{q(\eta_n)}b_n^2 = \cdots = \frac{q(\xi_n)q(\xi_{n-1})\cdots q(\xi_1)}{q(\eta_n)q(\eta_{n-1})\cdots q(\eta_1)}b_1^2. \tag{1}$$

由于 $q(x)$ 严格单调上升且 $q(x) \to C < +\infty$, 并且

$$\xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \cdots < \eta_{n-1} < \xi_n < \eta_n < \xi_{n+1} < \cdots.$$

于是根据等式 (1) 得

$$\frac{q(\xi_1)}{q(\eta_n)} < \frac{b_{n+1}^2}{b_1^2} = \frac{q(\xi_n)q(\xi_{n-1})\cdots q(\xi_1)}{q(\eta_n)q(\eta_{n-1})\cdots q(\eta_1)} < \frac{q(\xi_n)}{q(\eta_1)}. \tag{2}$$

于上式中令 $n \to +\infty$ 得

$$0 < \frac{q(\xi_1)}{C} \leq \frac{B^2}{b_1^2} \leq \frac{C}{q(\eta_1)}.$$

由上式立刻得到 $B > 0$. 证毕. ∎