PDE2 作业参考解答

作业 1

(1)

首先验证 $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})})$ 是一个赋范线性空间，再证明其完备性：任意选取一个 Cauchy 列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，由 C^k 空间的完备性设在 C^k 空间里有收敛 $u_n \to u \in C^k$，在下列各式中令 p 趋近 ∞ 即得到 $u \in C^{k,\alpha}$ 与 $u_n \to u\ in\ C^{k,\alpha}$。

$$\begin{aligned} &|D^\beta u_p(x) - D^\beta u_p(y)| \leq C|x-y|^\alpha; \\ &|D^\beta u_p(x) - D^\beta u_p(y) - D^\beta u_n(x) + D^\beta u_n(y)| \leq \varepsilon |x-y|^\alpha \ (p > n > N). \end{aligned} \tag{1}$$

(2)

这里要加上 Ω 有界的条件，然后由定义以及下述不等式即可得证：

$$|x-y| \leq |x-y|^\beta diam(\Omega)^{1-\beta} \leq |x-y|^\alpha diam(\Omega)^{1-\alpha}. \tag{2}$$

(3)

利用中值不等式 $|f(x) - f(y)| \leq |Df(\xi)||x-y|, \xi \in [x,y]$ 与两个空间的定义即得。如果要用中值公式，要注意导数项是函数沿 $y-x$ 方向的方向导数。

作业 2

考虑函数 $y = x^{p-1}$ 在坐标系里的图像，找到各式对应的区域面积来完成证明 (2.1)。然后用 $\varepsilon^{1/p}a$ 与 $\varepsilon^{-1/p}b$ 代替 (2.1) 中的 a 与 b 即得第二个不等式。

作业 3

(1)

任取 $u \in L^p(\Omega)$，设 u 的截断 $u_n(x) = u(x)1_{dist(x,\Omega)>\frac{1}{n}}$，再考虑对 u^n 做光滑化得到 u_n^δ，于是 $u_n^\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ 且

$$\|u_n^\delta - u\|_{L^p} \le \|u_n^\delta - u_n\|_{L^p} + \|u_n - u\|_{L^p} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{3}$$

(2)

任意 $y \in U^\varepsilon$，令 $\phi(x) = J_\varepsilon(y-x)$，可知 $u^\varepsilon(y) = 0$。令 $\varepsilon \to 0$ 得到 $u(x) = 0$ $a.e.$

作业 4

由弱导数定义直接验证即可。

作业 5

由弱导数定义直接验证即可。

作业 6

计算出导数，根据可积性讨论 γ 的取值。

作业 7

P5.10: 2

记 $p = \frac{1-\beta}{1-\gamma}, q = \frac{1-\beta}{\gamma-\beta}$，于是 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，且

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |u(x) - u(y)|^{1/p}|u(x) - u(y)|^{1/q} \\ &\le [u]_\beta^{1/p}[u]_1^{1/q}|x-y|^{\beta/p+1/q} = [u]_\beta^{1/p}[u]_1^{1/q}|x-y|^\gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

因此 $[u]_\gamma \le [u]_\beta^{1/p}[u]_1^{1/q}$. 令 $a = \frac{[u]_\beta}{\|u\|_\beta}, b = \frac{[u]_1}{\|u\|_1}$，则由 Young 不等式得到

$$a^{1/p}b^{1/q} + (1-a)^{1/p}(1-b)^{1/q} \le \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\frac{1}{p}(1-a) + \frac{1}{q}(1-b) = 1. \tag{5}$$

结合 (4)(5) 的结果得证原不等式。

P5.10: 3

按定义计算弱导数：任取 $\varphi \in C_0^\infty(U)$，利用分部积分计算 $\int_U u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\ i=1,2$。最后注意到 u 和 Du 均有界，则对任意的 $p\in[0,\infty]$ 均可。

注意：弱导数是在整个区域上整体定义的，局部存在弱导数或者几乎处处存在经典导数并不能推出整体弱导数的存在。例如 $(0,2)$ 上的阶梯函数几乎处处可导，但不存在弱导数。在做题时，可以先求出函数的经典导数，但是一定要有证明弱导数几乎处处等于这个经典导数的过程。

P5.10: 4

(a) 设 $v(x)=\int_0^x Du(s)ds$，由积分的绝对连续性知道 v 是绝对连续函数。注意到 $D(u-v)=0\ a.e.$，由光滑化的办法（见 P5.10 的第 11 题，作业 11 的证明）可知 $u-v=constant\ a.e.$

(b) 由 (a) 和 $H\ddot{o}lder$ 不等式得证。

注意 (a) 中的常数并不一定就是 $u(0)$。

P5.10: 5

按提示证明即可。

作业 8

设 $x_0\in\partial\Omega,\Omega\cap B_r(x_0)=\{x_n>\gamma(x')\}$. 考虑单位向量 $e=(e',e_n)$ 与小参数 $\varepsilon>0$,

$$\gamma(x'+\varepsilon e')=\gamma(x')+\varepsilon e'\cdot\gamma'(x')+O(\varepsilon^2). \tag{6}$$

取 $e'=(-\gamma'(x_0))\|e'\|, e_n>0$, 则若 $|x-x_0|<\delta$, 则 $\gamma(x'+\varepsilon e')\le\gamma(x')-\frac{C}{4}\epsilon<\gamma(x')+e_n\varepsilon$，因此取 $y_{x_0}=\varepsilon e$，则有 $\gamma(x'+ty')<x_n+ty_n$，即 $x+ty\in\Omega$。

作业 9

$H_0^2\subset H_0^1\cap H^2$ 但一般不相同。注意到 H_0^2 空间要求函数的一阶弱导数的迹为 0，例如如果 $\partial\Omega\in C^2$，那么取 $u=dist(\cdot,\partial\Omega)$，则有 $u\in H_0^1\cap H^2$ 但不在 H_0^2 里。

作业 10

仿照定理 2.13 的办法，取光滑函数逼近 u 即可。

作业 11

P5.10: 11

对 u 光滑化得到 u^ε，由题设有 $Du^\varepsilon = 0$，于是 u_ε 在其定义域内为常数，由收敛性可知 u 几乎处处为常数。

P5.10: 14

考虑一族光滑函数 $u_\varepsilon = loglog(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+\varepsilon^2}})$，证明它们在 $W^{1,n}$ 意义下收敛到 u。

P5.10: 16

由稠密性不妨设 $u \in C_0^\infty$，于是

$$\begin{aligned}(n-2)\int \frac{u^2}{|x|^2} &= \int u^2 div(\frac{x}{|x|^2}) \\ &= -2\int uDu \cdot \frac{x}{|x|^2} \leq \int 2|Du|^2 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{|x|^2}.\end{aligned} \tag{7}$$

移项后得证。

P5.10: 18

只需证明 (2) 即可。例如对于 u^+，按提示选取 $u^+ = \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u)$，证明按 $W^{1,p}$ 收敛即可。

作业 12(13)

仿照 $n \geq 3$ 的情形证明即可。

作业 14

δ 足够小时，$B[u,v]$ 有界强制，由 Lax-Milgram 定理得到弱解存在唯一。

作业 15

通常考虑的话，利用一般的 Sobolev 不等式，只要系数使得弱解有高阶的 Sobolev 正则性即可。更弱的条件也是可行的，只要合理都行。

注：只要求解是局部 $C^{2,\alpha}$ 的，因此实际上不需要对 Ω 的边界有所限制。

作业 16

P6.6: 3

$B[u,v] := \int_U \Delta u \Delta v dx, u, v \in H_0^2(U)$，容易证明其有界强制，因此由 Lax-Milgram 定理即证。

P6.6: 4

必要性取 $v=1$ 即可；充分性则考虑子空间 $H=\{u \in H^1(U) | \int_U u dx = 0\}$，首先验证 H 是闭子空间，再验证 H 上的双线性算子 $B[u,v] = \int_U Du \cdot Dv dx$ 有界强制，利用 Lax-Milgram 定理证明存在 $u \in H$ 使得 $B[u,v] = (f,v), v \in H$，最后用 $v - \int_U v dx$ 代替 v 得到 $v \in H^1(U)$ 该式也成立，即 u 的确是原问题的唯一弱解。

注：注意不要漏掉证明的某些环节。

P6.6: 7

由 u 紧支，取 $v = D_k^{-h} D_k^h u$，于是由弱解定义知：

$$\int Du \cdot Dv + c(u) v dx = \int f v dx. \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Left &= -\int (|D_k^h Du|^2 + D_k^h c(u) D_k^h u) dx \\ (\because c' \geq 0) &\leq -\int |D_k^h Du|^2 dx = -\|D_k^h Du\|_{L^2}^2; \end{aligned} \tag{9}$$

因此

$$\begin{aligned} \|D_k^h Du\|_{L^2}^2 &\leq -\int f v dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq C \|f\|_{L^2} \|D_k^h Du\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

由 h 充分小，得到 $\|D^2 u\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$.

P6.6: 11

由 u 有界得到 $w \in H^1(U), \phi'(u) \in H^1(U)$，任取非负的 $v \in H_0^1(U)$，由 u 为弱解有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_U u_{x_i} a^{ij} [\phi'(u)v]_{x_j} dx \\
&= \int_U [u_{x_i} a^{ij} \phi'(u) v_{x_j} + u_{x_i} a^{ij} \phi''(u) u_{x_j} v] dx \\
&\geq \int_U u_{x_i} a^{ij} \phi'(u) v_{x_j} dx = \int_U w_{x_i} a^{ij} v_{x_j} dx.
\end{aligned} \tag{11}$$

作业 17

P6.6: 5

通过分部积分的观察，定义双线性泛函 $B[u,v] = \int_U Du \cdot Dv dx + \int_{\partial U} TuTv ds,\ u,v \in H^1(U)$，其中 T 为迹映射。进而定义 u 是弱解当且仅当 $\forall v \in H^1(U), B[u,v] = \int_U fv dx.$ 为了验证这个定义合理，需要证明 u 是光滑解的时候，该定义与原方程等价，这一部分利用分布积分和简单的试验函数选取容易证明。接下来弱解的存在唯一性只需验证 $B[\cdot,\cdot]$ 的有界性和强制性即可。有界性由迹映射的性质直接得到，而强制性通过反证法证明：假设存在 $u^k \in H^1(U)$ 满足 $\|u^k\|_{H^1} = 1, B[u^k,u^k] \leq \frac{1}{k}$，由弱紧性和紧嵌入知在子列的意义下 $u^k \rightharpoonup u\ in\ H^1(U), u^k \to u\ in\ L^2(U)$，但由 $B[u^k,u^k] \leq \frac{1}{k}$ 得到 $Du^k \to 0\ in\ L^2(U)$，因此 u^k 实际上强收敛到 u，进而 $\|u\|_{H^1} = 1, Tu = 0, Du = 0$，这显然不可能，矛盾。

注：弱解定义要注意与经典解定义相容，即解为经典解的时候，弱解定义式能够反推回原方程成立，很多同学在作业里并没有这一步。本题中该部分的具体证明过程为：首先考虑 $v \in H_0^1(U)$ 时，由 $B[u,v] = \int_U fv dx$ 及分部积分推出 $\int_U -\Delta u \cdot v dx = \int_U fv dx$, 故 $-\Delta u = f\ in\ U$；接着考虑 $v \in H^1(U)$，将 $-\Delta u = f$ 代入分部积分的结果里得到 $\int_{\partial U} (\frac{\partial u}{\partial \nu} + u) Tv ds = 0$，因此 $\frac{\partial u}{\partial \nu} + u = 0\ in\ \partial U.$

P6.6: 6

设子空间 $H = \{u \in H^1(U) : Tu|_{\Gamma_1} = 0\}$，由迹映射的性质可知 H 是闭子空间，在 H 上定义双线性泛函 $B[u,v] = \int_U Du \cdot Dv dx$，于是 u 为弱解当且仅当 $B[u,v] = \int_U fv dx, \forall v \in H.$ 其余的证明过程与上一题基本一致。

P6.6: 10

(a) 能量方法：$\int_U |Du|^2 dx = \int_U -u\Delta u dx + \int_{\partial U} u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0 \Rightarrow u \equiv const.$

(b) 假设不取常数，则在边界某点取得严格极大值，由 Hopf 引理知该点 $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$，矛盾。

P6.6: 12

首先计算

$$\begin{aligned}
\sum a^{ij}(v^2 w_i)_j &= \sum a^{ij}(u_{ij}v - uv_{ij} + u_i v_j - u_j v_i) \\
&= v\sum a^{ij}u_{ij} - u\sum a^{ij}v_{ij} \\
&= uLv - vLu + \sum b^i(u_i v - uv_i) \\
&= uLv - vLu + \sum b^i w_i v^2.
\end{aligned} \tag{12}$$

移项得到

$$-\sum a^{ij}w_{ij} + \sum_i \Big(b^i - 2\sum_j a^{ij}\frac{v_j}{v}\Big)w_i = \frac{vLu - uLv}{v^2}. \tag{13}$$

等号左边记为 Mw，记区域 $D = \{u > 0\}$，假设 D 非空，则在 D 上有 $Mw \leq 0$，利用弱极值原理有 w 在 ∂D 上达到最大值，由 D 的定义知 $w = 0 \ on \ \partial D$，矛盾，因此 D 为空集。

P6.6: 13

L 对应的双线性型设为 $B[u,v] = \int_U a^{ij}u_i v_j dx$，特征函数系 $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 构成 $L^2(U)$ 的一组标准正交基，而 $\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ 构成在 $B[\cdot,\cdot]$ 内积下 $H_0^1(U)$ 的一组标准正交基。任取 $S \in \Sigma_{k-1}$，由于 $S^{\perp} \cap span\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ 非空，设 $\sum_{i=1}^k a_i w_i \in S^{\perp}, \sum_{i=1}^k a_i^2 = 1$，于是

$$\min_{u\in S^{\perp}, \|u\|_{L^2}=1} B[u,u] \leq B[\sum_{i=1}^k a_i w_i, \sum_{i=1}^k a_i w_i] = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i^2 \leq \lambda_k. \tag{14}$$

因此

$$\max_{S\in\Sigma_{k-1}} \min_{u\in S^{\perp}, \|u\|_{L^2}=1} B[u,u] \leq \lambda_k. \tag{15}$$

取 $S = span\{w_1, w_2, \cdots, w_{k-1}\}$，有 $\min_{u\in S^{\perp}, \|u\|_{L^2}=1} B[u,u] = \lambda_k$，故上式取等号。

P6.6: 15

由 $\lambda=\int_{U(\tau)}\lambda w^2dx=-\int_{U(\tau)}w\Delta wdx=\int_{U(\tau)}|\nabla w|^2dx$ 得到

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}&=\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\mathbf{v}\cdot\nu ds+\int_{U(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}(|\nabla w|^2)dx\\&=\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\mathbf{v}\cdot\nu ds+2\int_{U(\tau)}\nabla w_\tau\cdot\nabla wdx\\&=\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\mathbf{v}\cdot\nu ds-2\int_{U(\tau)}\Delta w_\tau\cdot wdx\\&=\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\mathbf{v}\cdot\nu ds+2\int_{U(\tau)}(\lambda w)_\tau\cdot wdx\\&=\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\mathbf{v}\cdot\nu ds+2\dot{\lambda}+2\int_{U(\tau)}\lambda w_\tau wdx\end{aligned}\tag{16}$$

注意到

$$0=\frac{d}{d\tau}\int_{U(\tau)}w^2dx=\int_{\partial U(\tau)}w^2\mathbf{v}\nu ds+2\int_{U(\tau)}\lambda w_\tau wdx=2\int_{U(\tau)}\lambda w_\tau wdx\tag{17}$$

因此

$$\dot{\lambda}=-\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\mathbf{v}\cdot\nu ds.\tag{18}$$

实际上由于 w 在边界上恒为 0，有 $|\nabla w|=|\frac{\partial w}{\partial\nu}|$.

作业 18

设 $v_\pm=u_k-u\pm\frac{|x|^2-\rho^{2k}}{2n}w(\rho^k)$，于是 $\Delta v_\pm=f(0)-f(x)\pm w(\rho^k)$, 有 $\Delta v_+\geq 0,\Delta v_-\leq 0$，而 $v_\pm|_{\partial B_k}=0$，由极值原理知 $v_+\leq 0,v_-\geq 0$，因此 $\|u-u_k\|_{L^\infty(B_k)}\leq\frac{1}{2n}\rho^{2k}w(\rho^k)$.

作业 19

k=0 时已经证明，下证明 k = 1 时结论成立。记差商 $v=D_l^hu$，则 v 满足方程

$$Lv=D_l^hf-(D_l^ha^{ij})D_iju(x+he_l)-(D_l^hb^i)D_iu(x+he_l)-(D_l^hc)u(x+he_l).\tag{19}$$

利用 k=0 时的估计以及差商的性质可以得到估计

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}')}\leq C(\|u\|_{C(\bar{\Omega})}+\|f\|_{C^{1.\alpha}(\bar{\Omega})})\tag{20}$$

因此当 $h \to 0$ 时，v 以及它的一阶导数和二阶导数存在一致收敛的子列，因此 $u \in C^{3,\alpha}$. 当 $k > 1$ 时，通过简单的归纳法即可证明。

注：k=1 时，不能直接令 $w = D_l u$，通过 k=0 时的结论推出 $w \in C^{2,\alpha}$，因为此时只知道 $w \in C^{1,\alpha}$ 而没有 $w \in C^2$。

作业 20

考虑 $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}_T)$，由紧集上连续函数的一致连续性，立即有 $\lim_{t\to t_0} \max_{x\in\bar{\Omega}} |u(x,t) - u(x,t_0)| = 0$，因此 $u(x,t) == [u(t)](x) \in C([0,T], C(\bar{\Omega}))$。再考虑 $u(x,t) = [u(t)](x) \in C([0,T], C(\bar{\Omega}))$，由 $|u(x,t) - u(x_0,t_0)| \le |u(x,t) - u(x,t_0)| + |u(x,t_0) - u(x_0,t_0)|$ 即得 $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}_T)$。

注：做这题时要理解这两个空间的定义。

作业 21

完全仿照 u_m 的能量不等式证明过程即可（将 u_m 替换为 u，利用 u 满足的方程）。

作业 22

P7.5: 1

只需证明 f, g 均为 0 时方程只有 0 解即可。方程两边乘以 u 在 $U_\tau (0 < \tau \le T)$ 上积分得到

$$\int_{U_\tau} (\frac{1}{2}u^2)_t dxdt = \int_{U_\tau} u\Delta u dxdt \tag{21}$$

进而

$$\int_U u^2(x,\tau)dx + 2\int_{U_\tau} |\nabla u|^2 dxdt = 0. \tag{22}$$

因此 u 恒为 0.

P7.5: 2

乘以 u 在 U 上积分得到

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}\int_U \frac{d}{dt}u^2dx - \int_U u\Delta u dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U u^2dx + \int_U |\nabla u|^2dx \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U u^2dx + \lambda_1\int_U u^2dx.\end{aligned} \tag{23}$$

因此 $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(U)} \leq e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}$.

P7.5: 4

$$\int_U |Du_m|^2dx = \int_U fu_mdx \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_U f^2dx + \varepsilon\int_U u_m^2dx \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_U f^2dx + C\varepsilon\int_U |Du_m|^2dx. \tag{24}$$

因此 $\{u_m\}$ 在 $H_0^1(U)$ 内一致有界,在子列意义下弱收敛到 $u \in H_0^1(U)$。设 $v \in span\{w_1,\cdots,w_N\}, m \geq N$，因此有

$$\int_U Du_m \cdot Dvdx = \int_U fu_mdx$$

令 $m \to \infty$ 再令 $N \to \infty$ 可知 u 为原方程弱解。

P7.5: 5

任取 $\phi \in C_c^1(0,T), w \in H_0^1(U)$，因此由

$$\int_0^T < u_k', \phi w > dt = -\int_0^T < u_k, \phi' w > dt.$$

令 $k \to \infty$，得到

$$\int_0^T < v, \phi w > dt = -\int_0^T < u, \phi' w > dt = \int_0^T < u', \phi w > dt.$$

由 ϕ, w 的任意性得到 $u' = v$

P7.5: 6

由题设知 $\forall 0 \leq a \leq b \leq T, v \in H$

$$\int_a^b (v, u_k(t))dt \leq C\|v\||b-a|. \tag{25}$$

令 $k \to \infty$ 得到

$$\int_a^b (v, u(t))dt \le C\|v\||b-a|. \tag{26}$$

由 a, b 任意性知 $a.e.t \in [0,T]$

$$(v, u_k(t)) \le C\|v\|. \tag{27}$$

进而 $esssup_{0\le t\le T}\|u(t)\| \le C$.

作业 23

P7.5: 7

设 $v = Ce^{-\gamma t} \pm u, C = \|g\|_{L^\infty(U)}$，于是

$$v_t - \Delta v + cv = C(c-\gamma)e^{-\gamma t} \ge 0 \ in \ U \times (0,T).$$

而在 $\partial U \times [0,T)$ 上 $v = Ce^{-\gamma t} \ge 0$，在 $U \times \{t=0\}$ 上 $v = C \pm g \ge 0$. 因此由弱极值原理得到 $v \ge 0 \ in \ U_T$，进而 $|u(x,t)| \le Ce^{-\gamma t}$.

P7.5: 8

令 $v = e^{-\gamma t}u$，于是 v 满足以下方程

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + (c+\lambda)v = 0 \ in \ U \times (0,\infty) \\ v = 0 \ on \ \partial U \times [0,\infty) \\ v = g \ on \ U \times \{t=0\} \end{cases} \tag{28}$$

取 $\lambda = \|c\|_{L^\infty}$，则 $c+\lambda \ge 0$. 任取 $T>0$，在 U_T 上应用弱极值原理有 $u \ge 0 \ in \ \bar{U}_T$，因此 $u \ge 0 \ in \ \bar{U} \times [0,\infty)$.