选作题(Nov22)解答 杨利军 Jan. 11, 2018

**选作题**：考虑线性非齐次周期方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t) \tag{1}$$

其中系数矩阵 $A(t)$ 和向量 $b(t)$ 均为周期连续的, 周期为 $\omega > 0$. 证明, 若方程组有一个解在 $[0, +\infty)$ 上有界, 则方程组存在一个 $\omega$ 周期解.

证明: 反证. 假设方程没有周期解. 我们来导出矛盾. 设 $\Phi(t)$ 为对应齐次系统 $\dot{x} = A(t)x$ 的基本解矩阵，且满足 $\Phi(0) = I$, 则非齐次系统 (1) 满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的解可表为

$$\phi(t, x_0) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}b(s)ds. \tag{2}$$

于是方程组 (1) 没有 $\omega$ 周期解当且仅当方程 $\phi(\omega, x_0) = \phi(0, x_0)$ 关于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 没有解, 此即线性代数方程组

$$(I - C)\, x_0 = C\int_0^\omega \Phi(s)^{-1}b(s)ds$$

关于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 没有解, 这里记 $C = \Phi(\omega)$. 这表明

$$C\int_0^\omega \Phi(s)^{-1}b(s)ds \notin Range(I - C).$$

回忆线性代数中有一个结论: 对于 $n$ 阶矩阵 $M$, 成立 $Range(M) = Ker(M^T)^\perp$. 这里 $\perp$ 表示取正交补. 根据这个结论, 必存在 $z \in Ker(I - C^T)$, 使得

$$z^T C\int_0^\omega \Phi(s)^{-1}b(s)ds \neq 0.$$

由关系 $z \in Ker(I - C^T)$ 我们得到 $z^T = z^T C$. 于是

$$z^T \int_0^\omega \Phi(s)^{-1}b(s)ds \neq 0.$$

回忆基本解矩阵 $\Phi(t)$ 满足 $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)C$. 由此得 $\Phi(n\omega) = C^n$. 于是由通解表达式 (2) 我们进一步有

$$\phi(n\omega, x_0) = C^n x_0 + C^n \int_0^{n\omega} \Phi(s)^{-1}b(s)ds.$$

由于

$$\int_{k\omega}^{(k+1)\omega} \Phi(s)^{-1}b(s)ds = \int_0^\omega \Phi(k\omega + \tau)^{-1}b(k\omega + \tau)d\tau = C^{-k}\int_0^\omega \Phi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau,$$

因此

$$
\begin{aligned}
\phi(n\omega, x_0) &= C^n x_0 + C^n \left\{ \int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{2\omega} + \cdots + \int_{(n-1)\omega}^{n\omega} \Phi(s)^{-1} b(s) ds \right\} \\
&= C^n x_0 + \left\{ C^n + C^{n-1} + \cdots + C \right\} \int_0^{\omega} \Phi(s)^{-1} b(s) ds.
\end{aligned}
$$

以 $z^T$ 左乘上式, 并注意到 $z^T = z^T C$, 我们就得

$$
z^T \phi(n\omega, x_0) = z^T x_0 + n z^T \int_0^{\omega} \Phi(s)^{-1} b(s) ds.
$$

由此可以看出 $|z^T \phi(n\omega, x_0)| \to +\infty$. 这表明方程 $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ 的每个解均无界. 这与假设有一个有界解相矛盾. 证毕. ∎