答疑

1. 设 F 是一个自由 Abel 群，基为 $\{x_1,\cdots,x_n\}=X$

则 $F \xrightarrow{\pi} F/2F$ 使得 $\pi(x_1),\cdots,\pi(x_n)$ 是 $F/2F=(\mathbb{Z}_2)^n$ 的一组基（$\mathbb{Z}_2$ 是一个域，$(\mathbb{Z}_2)^n$ 是 $\mathbb{Z}_2$ 上 n 维向量空间）

证明：若 $\pi(x_1)=\bar{0}\in F/2F$ 则 $x_1\in 2F$ 即存在 $n_1,\cdots,n_n$

$x_1=2n_1x_1+\cdots+2n_nx_n \Rightarrow (2n_1-1)x_1+\cdots+2n_nx_n=0$

这与 X 是一组基矛盾. 所以 $\pi(x_1),\cdots,\pi(x_n)\neq\bar{0}$ $i=1,\cdots,n$

设 $\bar{t}_1\pi(x_1)+\cdots+\bar{t}_n\pi(x_n)=\bar{0}$ $\quad \bar{t}_i\in\{\bar{0},\bar{1}\}$

即 $t_1x_1+\cdots+t_nx_n\in 2F$ $\quad t_i\in\{0,1\}$

则 $\exists m_1,\cdots,m_n$ $\quad t_1x_1+\cdots+t_nx_n=2m_1x_1+\cdots+2m_nx_n$，若 $\exists t_i\neq 0$

这与 X 是一组基矛盾.

推论 $\left|F/2F\right| \geq |X|$

2. 有限生成 Abel 群的自同构群.

一般情况看不清楚.

(1) 若 $G=G_1\times G_2$ 则 $\mathrm{Aut}(G_1)\times\mathrm{Aut}(G_2)\leq\mathrm{Aut}(G)$

这一般不相等 例如 $G=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\quad \mathrm{Aut}\,G=GL(2,\mathbb{Z})$.

(2) $\forall f\in\mathrm{Aut}\,G$. $G=G_1\times G_2$ 则 $f=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}$ $\quad G_1\ncong G_2$.

设 G 有限生成Abel群，$G\cong \bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{j=1}^{l_i}\mathbb{Z}_{p_i^{e_{ij}}}\oplus\mathbb{Z}^t$

其中 $p_1,\cdots,p_s$ 互异素数，$1\le e_{i1}\le e_{i2}\le\cdots\le e_{il_i}$ 正整数

令 $H_1=\bigoplus_{j=1}^{l_1}\mathbb{Z}_{p_1^{e_{1j}}}$，$H_2=\bigoplus_{j=1}^{l_2}\mathbb{Z}_{p_2^{e_{2j}}}$，$\cdots$，$H_s=\bigoplus_{j=1}^{l_s}\mathbb{Z}_{p_s^{e_{sj}}}$，$H_{s+1}=\mathbb{Z}^t$

$G\cong H_1\oplus\cdots\oplus H_s\oplus H_{s+1}$

设 $\tau\in\mathrm{Aut}\,G$　考虑
$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\text{嵌入}"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & G \arrow[loop above, "\tau"] \arrow[r, "\text{投射}"] & H_t \end{tikzcd}\qquad t\neq 1$$

$\forall h_1\in H_1$　$h_1\longmapsto(h_1,e_2,\cdots,e_{s+1})\xrightarrow{\tau}(a_1,a_2,\cdots,a_{s+1})\mapsto a_t$

因为 $p_1^{e_{1l_1}}h_1=0$，$\varphi(p_1^{e_{1l_1}}h_1)=p_1^{e_{1l_1}}a_t\in H_t$

即 $p_t^{e_{tl_t}}\mid a_t\Rightarrow a_t=e_t=\bar{0}$　若 $t=1$，τ 给定 H_1 的自同构 记作 τ_1

$\forall(h_1,\cdots,h_{s+1})\in G$

$\tau(h_1,\cdots,h_{s+1})=(\tau_1(h_1),\cdots,\tau_{s+1}(h_{s+1}))$

即
$$\mathrm{Aut}\,G\xrightarrow{\sim}\mathrm{Aut}\,H_1\times\cdots\times\mathrm{Aut}\,H_{s+1}$$
$$\tau\longmapsto(\tau_1,\cdots,\tau_{s+1})$$

$\mathrm{Aut}\,H_{s+1}=\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^t)\cong GL(t,\mathbb{Z})$

$\mathrm{Aut}\,H_1,\cdots,\mathrm{Aut}\,H_s$ 不容易计算．一般地，令 $H=\bigoplus_{i=1}^{l}\mathbb{Z}_{p^{e_i}}$ $(e_1\le e_2\le\cdots\le e_l)$

p 素数，我们检查 $\mathrm{Aut}\,H$，设 $\phi\in\mathrm{Aut}\,H$，固定 i,j

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{p^{e_i}} \arrow[r] & H \arrow[loop above, "\phi"] \arrow[r] & \mathbb{Z}_{p^{e_j}} \end{tikzcd}$$

由 扫描全能王 扫描创建

给定 $\bar{1} \in \mathbb{Z}_{p^{e_i}}$

$$\begin{array}{ccc} \bar{1} \longmapsto (\bar{0},\cdots,\bar{0},\bar{1},\bar{0},\cdots\bar{0}) & \xmapsto{\phi} & (\overline{a_{i1}},\cdots,\overline{a_{i\ell}}) \\ & \searrow^{\phi_{ij}} & \downarrow \\ & & \overline{a_{ij}} \in \mathbb{Z}_{p^{e_j}} \end{array}$$

这给出 $\phi_{ij}: \mathbb{Z}_{p^{e_i}} \to \mathbb{Z}_{p^{e_j}}$ 群同态

因为 $p^{e_i}\bar{1} = \bar{0}$ $\quad \overline{p^{e_i}a_{ij}} = \bar{0} \in \mathbb{Z}_{p^{e_j}}$ 即 $p^{e_j} \mid p^{e_i}a_{ij}$

即 $p^{e_j-e_i} \mid a_{ij}$ ←若 $j\geq i$ 若 $i=j$ 则 $\overline{a_{ij}} = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{p^{e_i}}$

ϕ 可写成矩阵 $\phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^{\ell} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=1}^{\ell}$ $\quad p^{e_j-e_i} \mid a_{ij}$

令 $M_p = \{(a_{ij}) \in M_\ell(\mathbb{Z}) \mid p^{e_j-e_i} \mid a_{ij},\ i,j=1,\cdots,\ell\}$

~~则有~~ $\cancel{M_p \longrightarrow \mathrm{Aut} H}$

反之，给定 $A \in M_p$ 有一个群同态 $H \longrightarrow H$

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots \\ \bar{x}_\ell\end{pmatrix} \longmapsto \overline{A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\ell\end{pmatrix}}$$

需要检查哪些 A 给出的同态是自同构？

考虑 $M_p \xrightarrow{h} M_\ell(\mathbb{Z}_p)$

$$(a_{ij}) \longmapsto (\overline{a_{ij}} \bmod p)$$

若 $A \in M_p$ 满足 $h(A)$ 可逆，则 A 诱导了 H 上自同构.