《微分方程1》第十讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2017年11月29日

Theorem

当实方阵A 的每个特征值均有负实部时，常系数线性齐次方程组$y' = Ay$ 的每个解$y(x) \to 0$, as $x \to +\infty$. 此时称方程组$y' = Ay$ 具有正向渐近稳定性.

证：注意方程 $y' = Ay$ 每个解$y(x)$ 均可表示为$y = e^{Ax}y_0$，其中$y_0 = y(0)$. 故只要证$e^{Ax} \to 0$, as $x \to +\infty$. 由上述Jordan形定理知$e^{Ax} = Pe^{Jx}P^{-1}$, $e^{Jx} = \mathrm{diag}(e^{J_1x}, \cdots, e^{J_rx})$，其中$P$ 为可逆矩阵. 考虑每个块e^{J_jx}, $j = 1, 2, \cdots, r$. 它具有如下形式

$$e^{J_j x} = e^{\lambda_j x}\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

不难看出，当矩阵A 的每个特征值均有负实部，$e^{J_j x}$ 的每个元素均趋向于零，当$x \to +\infty$ 时．故$e^{J_j x} \to 0$, as $x \to +\infty$．于是$e^{Ax} \to 0$, as $x \to +\infty$．定理得证． □

Definition

实方阵称为称为稳定的，如果它的每个特征值均有负实部.

Theorem

若实方阵A 是稳定的，则存在$\delta > 0$，使得

(i) $\|e^{Ax}\| \le Ce^{-\delta x}$，$\forall x \in [0, +\infty)$，其中$C > 0$ 为一个正常数;

(ii) 方程组 $y' = Ay$ 的每个解$y(x)$ 满足$\|y(x)\| \le Me^{-\delta x}$，$\forall x \in [0, +\infty)$，其中$M > 0$ 为一个正常数. 换言之，每个解均以指数衰减的方式趋向于零.

定理证明

证：根据上述Jordan 表示定理可知$e^{Ax} = Pe^{Jx}P^{-1}$, P 为非奇矩阵，并且$e^{Jx} = \mathrm{diag}(e^{J_1x}, \cdots, e^{J_rx})$. 进一步$e^{J_jx} = e^{\lambda_j x}L_j(x)$,

$$L_j(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

这里λ_j 是矩阵A 的特征值, $j = 1, \cdots, r$, 且A 有r 个Jordan 块.

设$\lambda_j = a_j + ib_j$, 其中a_j, b_j 分别是特征值λ_j 的实部和虚部.

根据假设 A 是稳定的，即 $a_j < 0, j = 1, \cdots, r$. 考虑$e^{J_1 x}$.

$$e^{J_1 x} = e^{\lambda_1 x} L_1(x) = e^{\frac{a_1}{2}x} e^{\frac{a_1}{2}x} e^{ib_1 x} L_1(x).$$

由于$a_1 < 0$，矩阵$L_1(x)$ 的元素为多项式，故

$$e^{\frac{a_1}{2}x} e^{ib_1 x} L_1(x) \to 0, \quad x \to +\infty.$$

由此可知存在$C_1 > 0$，使得

$$\|e^{\frac{a_1}{2}x} e^{ib_1 x} L_1(x)\| \le C_1, \quad \forall x \ge 0.$$

于是

$$\|e^{J_1 x}\| = e^{\frac{a_1}{2}x} \|e^{\frac{a_1}{2}x} e^{ib_1 x} L_1(x)\| \le C_1 e^{\frac{a_1}{2}x}, \quad \forall x \ge 0.$$

证明续2

同理可证存在正常数$C_j > 0$, 使得

$$\|e^{J_j x}\| \le C_j e^{\frac{a_j}{2}x}, \quad \forall x \ge 0.$$

$j = 2, \cdots, r$. 记$-\delta := \max\{\frac{a_1}{2}, \cdots, \frac{a_r}{2}\}$, 则

$$\|e^{Ax}\| = \|Pe^{Jx}P^{-1}\| \le \|P\|\|e^{Jx}\|\|P^{-1}\|$$

$$\le \|P\|\|P^{-1}\|\left(\|e^{J_1 x}\| + \cdots + \|e^{J_r x}\|\right)$$

$$\le \|P\|\|P^{-1}\|(C_1 + \cdots + C_r)e^{-\delta x} = Ce^{-\delta x}, \quad \forall x \ge 0,$$

这里$C = \|P\|\|P^{-1}\|(C_1 + \cdots + C_r)$. 结论(1)得证. 以下证(2).

对任意解$y(x)$, 解$y(x)$ 可以写作$y(x) = e^{Ax}y_0$. 于是

$$\|y(x)\| = \|e^{Ax}y_0\| \le \|e^{Ax}\|\|y_0\| \le Me^{-\delta x}, \quad \forall x \ge 0,$$

其中$M = C\|y_0\|$. 结论(2)得证. 定理得证. □

Definition

定义: 称实系数多项式为稳定多项式, 如果它的每个根(零点)均有负实部.

注: 回忆一个实方阵称为是稳定的, 如果它的每个特征值均有负实部. 因此一个实方阵是稳定的, 当且仅当它的特征多项式是稳定的.

Theorem

高阶线性齐次常系数方程$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$ 的每个解$y(x)$ 当$x\to+\infty$ 均趋向于零，当且仅当其特征多项式$L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$ 是稳定的.

Proof.

证明留作习题. □

Definition

常系数线性齐次方程$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$ 称作是(正向)渐近稳定的，如果它的每个解$y(x)$ 当$x\to+\infty$ 均趋向于零.

之前已证明高阶线性齐次常系数方程(*) $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$ 等价于一阶齐次线性方程组$u'=Au$, 其中矩阵A 为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

根据矩阵特征值理论可知，矩阵$\mathbf{A}$ 的特征多项式也是$\mathbf{L}(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$. 也就是说高阶方程(*)与对应的方程组的特征多项式相同. 因此高阶高阶线性齐次方程(*)渐近稳定，当且仅当它对应的一阶方程组$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ 渐近稳定.

Theorem

一次多项式$p_1(x) = x + a_1$ 稳定，当且仅当$a_1 > 0$.

上述结论显然成立.

Theorem

二次多项式$p_2(x) = x^2 + a_1x + a_2$ 稳定，当且仅当$a_1, a_2 > 0$.

Proof.

证明留作习题. □

Theorem

三次多项式$p_3(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 稳定，当且仅当$a_1,a_2,a_3>0$ 且$a_1a_2>a_3$.

证：设$p_3(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$，其中a,b,c 均为实数. 根据上述讨论可知，$p_3(x)$ 稳定，当且仅当$a,b,c>0$. 于是我们只需证明

$$a,b,c>0 \iff a_1,a_2,a_3>0 \text{ 且 } a_1a_2>a_3. \qquad (*)$$

将恒等式$(x+a)(x^2+bx+c)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 的左边乘积展开，并比较两边系数得

$$\begin{cases} a_1 = a + b, \\ a_2 = ab + c, \\ a_3 = ac. \end{cases} \qquad (**)$$

现在证等价关系(*). 证 $\Rightarrow$. 设 $a, b, c > 0$, 由关系式(**) 知 $a_1, a_2, a_3 > 0$, 并且

$$a_1 a_2 - a_3 = (a+b)(ab+c) - ac = a^2 b + ab^2 + bc$$

$$= b(a^2 + ab + c) = b(a^2 + a_2). \quad (***)$$

由此可知$a_1 a_2 - a_3 > 0$. 必要性得证.

证明续2

证$\Leftarrow$. 设$a_1, a_2, a_3 > 0$ 且$a_1 a_2 > a_3$. 由关系式(***), 即$a_1 a_2 - a_3 = b(a^2 + a_2)$ 可知$b > 0$. 再根据关系式(**), 即

$$\begin{cases} a_1 = a + b, \\ a_2 = ab + c, \\ a_3 = ac. \end{cases} \qquad (**)$$

的第三个方程知a, c 同号. 进一步由式(**)的第二个方程可知$a, c > 0$. 充分性得证. $\square$

Theorem

多项式 $p_4(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ 稳定，当且仅当 $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ 且 $a_1a_2a_3 > a_1^2a_4 + a_3^2$.

Proof.

证明留作习题. □

多项式稳定的必要条件

Theorem

若n 次多项式$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 稳定，则它的n 个系数均大于零，即$a_j > 0, j = 1, 2, \cdots, n$.

Proof.

证明留作习题. $\square$

必要条件

例子

Example (1)

多项式$x^5+3x^4-2x^3+2x^2+x+1$ 不稳定，因为有一个系数为$-2<0$，不满足稳定性的必要条件.

Example (2)

多项式$x^6+x^5+x^3+x^2+x+1$ 不稳定，因为有一个系数即x^4的系数为零，不满足稳定性的必要条件.

定义：给定n 次多项式$p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，称如下$n$ 阶矩阵

$$M_n=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ & 1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$$

为多项式$p_n(x)$ 的稳定性矩阵．矩阵M 的形成规则如下，其第j 列为

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ a_{j+1} \\ a_j \\ a_{j-1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

即系数a_j 位于对角元的位置，亦即位于向量的第j 个分量位置.

一次二次三次多项式的稳定性矩阵

依定义，一次，二次，三次多项式

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= x + a_1, \\
p_2(x) &= x^2 + a_1 x + a_2, \\
p_3(x) &= x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3
\end{aligned}
$$

的稳定性矩阵分别为

$$
M_1 = [a_1], \quad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}.
$$

对于四次多项式$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$，其对应四阶稳定性矩阵为

$$M_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}.$$

定理：实系数多项式$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 稳定，当且仅当其稳定性矩阵M 的每个顺序主子式均大于零，即$\triangle_k > 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$，其中

$$\triangle_1 := a_1, \quad \triangle_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\triangle_3 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \triangle_n := \det M.$$

上述稳定性准则的证明尚无简洁的证明. 两个参考文献如下,

(1). Gantemacher (甘特马赫尔, 俄)所著的经典《矩阵论》下册, 第十六章(共70页), 哈工大出版社, 2013. 这里可初步了解这个准则的发展历史.

(2). Roger A. Horn and Charles R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, Chapter 2(46 pages), 1991, Cambridge University Press. 人民邮电出版社于2005年授权在中国大陆出版了这本英文版著作. 在这里还可以找到更多的关于稳定性准则的进一步发展.

根据Routh-Hurwitz稳定性准则知，二次多项式$x^2 + a_1x + a_2$稳定，当且仅当

$$\triangle_1 = a_1 > 0, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 > 0.$$

显然这两个条件等价于$a_1, a_2 > 0$.

三次多项式情形

根据Routh-Hurwitz稳定性准则知，三次多项式$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 稳定，当且仅当

$$\triangle_1 = a_1 > 0, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0.$$

$$\triangle_3 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1a_2 - a_3)a_3 > 0.$$

显然这三个条件等价于之前已提及过的条件$a_1, a_2, a_3 > 0$ 且$a_1a_2 > a_3$.

考虑周期线性方程组$y' = A(x)y + b(x)$，这里 $A(x)$ 为n 阶矩阵函数，$b(x)$ 为n 维向量函数，它们都是周期连续，其最小正周期均为$\omega > 0$. 这类方程组常称为Floquet 方程组或Floquet 系统. 我们关心两件事情：(i) Floquet 系统是否存在非平凡周期解; (ii) 系统的解的稳定性.

注：Gaston Floquet, French, 1847-1920.

Floquet周期系统不一定有非平凡的周期解

Example

考虑一维线性周期方程 $y' = [\sin^2 x]y$. 这是变量分离型方程. 不难求得其通解为

$$y(x) = y_0 e^{\int_0^x \sin^2 s ds} = y_0 e^{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x}.$$

显然方程没有非平凡的周期解.

考虑齐次Floquet 系统 $y' = A(x)y$. 设$\Phi(x)$ 是系统的一个基本解矩阵. 根据上次作业习题五的结论可知, $\Phi(x+\omega)$ 也是基本解矩阵. 因此存在可逆矩阵C, 使得$\Phi(x+\omega) = \Phi(x)C$.

Definition

满足等式$\Phi(x+\omega) = \Phi(x)C$ 的常数矩阵C 称为$\Phi(x)$ 所确定的转移矩阵(transition matrix).

注: 上次习题五还有两个结论: (1) 记C_1 为另一个基本解矩阵$\Phi_1(x)$ 所确定的转移矩阵, 则矩阵C 和C_1 相似; (2) 周期线性方程组 $y' = A(x)y + b(x)$ 有唯一一个ω 周期解, 当且仅当1 不是矩阵C 的特征值.

Definition

对于给定 n 阶复方阵A，若存在一个n 阶复方阵B，使得$e^B = A$，则称矩阵B 为矩阵A 的对数，并记作$B = \ln A$.

注：(i) 方阵A 存在对数的一个必要条件是A 非奇，因为矩阵指数e^B 对任意矩阵B 均可逆. (ii) 若矩阵A 存在对数矩阵$\ln A$，则它的对数矩阵不唯一. 这是因为若$e^B = A$，则$e^{B_k} = A$，其中$B_k = B + 2k\pi iE$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Theorem

(i) 若复方阵 A 非奇, 则存在复方阵 B, 使得 $e^B = A$;

(ii) 若 A 为非奇实方阵, 则存在实方阵 B, 使得 $e^B = A^2$.

为证明定理, 我们需要实矩阵的实Jordan 标准形定理, 以及三个引理.

定理: 每个实n 阶方阵A 实相似于如下实对角块矩阵

$$\mathrm{diag}\Big[J_1(\mu_1),\cdots,J_r(\mu_r),C_1(a_1,b_1),\cdots,C_s(a_s,b_s)\Big],$$

其中μ_p 为A 的实特征值, $p=1,\cdots,r$, 它们所对应的Jordan 块$J_p(\mu_p)$ 有如下形式

$$J_p(\mu_p)=\begin{bmatrix}\mu_p & 1 & & \\ & \mu_p & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu_p\end{bmatrix},$$

复数$a_q \pm ib_q$ ($b_q > 0$) 为A 的共轭复特征值，$q = 1, \cdots, s$，它们所对应的Jordan 块 $C_q(a_q, b_q)$ 有如下形式

$$C_q(a_q, b_q) = \begin{bmatrix} S(a_q, b_q) & E_2 & & \\ & S(a_q, b_q) & \ddots & \\ & & \ddots & E_2 \\ & & & S(a_q, b_q) \end{bmatrix},$$

其中 E_2 为二阶单位矩阵，$S(a, b)$ 为如下形式的二阶矩阵

$$S(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

关于实Jordan标准形定理证明的参考文献

上述定理的证明可参见

Roger A. Horn and Charles R. Johnson, Matrix Analysis, Second edition, 2013, Canbridge University Press, page 202.

这是当代关于矩阵理论的经典著作(有中译本). 应该是数学工作者的案头必备的工具书.

Lemma (1)

记J 为一个Jordan 块矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n} = \lambda E + N,$$

其中$\lambda = re^{i\theta} \neq 0$ 为非零复数，则存在矩阵B 满足$e^B = J$，其中$B = B_1 + B_2$，$B_1 = (\ln r + i\theta)E$，$B_2 = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N_1^k}{k}$，$N_1 = -\lambda^{-1}N$ 为也为幂零矩阵.

证: 将 J 写作 $J=\lambda E+N=\lambda(E-N_1)$, 其中 $N_1=-\lambda^{-1}N$, N 为标准幂零矩阵, 即

$$N=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $B_1=(\ln r+i\theta)E$, 则 $e^{B_1}=e^{(\ln r)E}e^{i\theta E}=(re^{i\theta})E=\lambda E$. 往下我们需要一个命题

证明续

命题: 记E 为n 阶单位阵, N_1 为n 阶幂零阵, 则 $E-N_1=e^L$, 其中 $L=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{N_1^k}{k}$. (命题的证明留作选作题).

由上述命题可知$e^{B_2}=E-N_1$, 其中$B_2=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{N_1^k}{k}$. 记$B=B_1+B_2$, 则 $e^B=e^{B_1}e^{B_2}=\lambda E(E-N_1)=\lambda E+N=A$.

Lemma 1 得证. □

标准二阶实Jordan块的对数矩阵

Lemma (2)

记复数$a+ib=re^{i\theta}$, $r>0$, 记二阶矩阵

$$S(a,b)=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

则存在矩阵$B_0=(\ln r)E_2+\theta V$ 满足$e^{B_0}=S(a,b)$, 其中E_2 为二阶单位矩阵.

Proof.

证明留作习题. □

Lemma 3: 记 $C(a,b)$ 为如下$2k$ 阶实Jordan 块矩阵

$$C(a,b)=\begin{bmatrix} S(a,b) & E_2 & & \\ & S(a,b) & \ddots & \\ & & \ddots & E_2 \\ & & & S(a,b) \end{bmatrix}_{2k\times 2k},$$

这里矩阵$S(a,b)$ 定义同Lemma 2, 则 $e^B=C(a,b)$, 其中 $B=B_1+B_2$, $B_1=\mathrm{diag}(B_0,\cdots,B_0)$, B_1 共有k 个二阶块B_0, B_0 的定义同Lemma 2, $B_2=-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{N_1^j}{j}$,

N_1 为如下$2k$ 阶幂零矩阵

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & S^{-1}(a,b) & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & S^{-1}(a,b) \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Lemma 3 的证明留作习题.

证(1): 设$A = PJP^{-1}$, 其中P 为可逆阵, J 为矩阵A 的Jordan 标准形, $J = \mathrm{diag}(J_1, \cdots, J_r)$,

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \cdots, r.$$

由于A 非奇, 故每个$\lambda_j \neq 0$. 由Lemma 1 可知, 对每个J_j, 存在矩阵K_j, 使得$e^{K_j} = J_j$.

证明续1

定义$B=PKP^{-1}$, $K=\mathrm{diag}(K_1,\cdots,K_r)$, 则

$$e^B=e^{PKP^{-1}}=Pe^KP^{-1}=P\mathrm{diag}(e^{K_1},\cdots,e^{K_r})P^{-1}$$

$$=P\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_r)P^{-1}=PJP^{-1}=A.$$

因此结论(1)得证. 结论(2)的证明以后单独给出. 此处略去.

Floquet 表示定理：考虑 Floquet 系统 $y' = A(x)y$，假设 $A(x)$ 是ω 周期连续的矩阵函数，则(i) 系统的每个基本解矩阵 $\Phi(x)$ 均可表示

$$\Phi(x) = P(x)e^{Bx}, \quad (*)$$

其中 $P(x)$ 是ω 周期的，可逆的C^1 矩阵函数，B 为常数矩阵(可能是复的)，满足$e^{\omega B} = C$，矩阵C 是基本解矩阵$\Phi(x)$ 所对应的转移矩阵，即由等式$\Phi(x+\omega) = \Phi(x)C$ 唯一确定.

(ii) 当系数矩阵$A(x)$ 为实矩阵时，系统的每个实的基本解矩阵$\Phi(x)$ 均可表示为

$$\Phi(s) = Q(x)e^{Bx}, \quad (**)$$

其中$Q(x)$ 为2ω 为周期的，可逆的C^1 实矩阵，B 为实方阵，满足$e^{2\omega B} = C^2$.

注：公式(*) 和(**) 分别称为系统复的和实的Floquet 表示，常简称F 表示. 根据这两个公式可知，系统$y' = A(x)y$ 解的性质在很大程度上由常数矩阵B 来确定.

注：由基本解矩阵$\Phi(x)$ 所确定的转移矩阵C 可以表为$C=\Phi(0)^{-1}\Phi(\omega)$. 在等式$\Phi(x+\omega)=\Phi(x)C$ 中取$x=0$ 时即可得到这个表示. 特别当$\Phi(0)=E$ 时，转移矩阵可写作$C=\Phi(\omega)$.

Example

再考虑一维线性方程$y'=(\sin^2 x)y$. 最小周期为$\omega=\pi$. 方程有非零解$\phi(x)=e^{-\frac{\sin 2x}{4}}e^{\frac{x}{2}}$. 注意方程的任何非零解都是基本解阵. 解$\phi(x)$ 的表达式已经是Floquet 表示，$\phi(x)=P(x)e^{Bx}$，这里$P(x)=e^{-\frac{\sin 2x}{4}}$，$B=\frac{1}{2\pi}$.

Floquet表示定理证明

证: 由对数矩阵存在定理可知, 存在常数矩阵B, 使得$e^{\omega B} = C$. 要证存在矩阵$P(x)$ 满足等式(*), 即$\Phi(x) = P(x)e^{Bx}$, 只要证明$P(x) := \Phi(x)e^{-Bx}$ 满足要求即可. 显然$P(x)$ 可逆, C^1 光滑的, 且

$$P(x+\omega) = \Phi(x+\omega)e^{-B(x+\omega)} = \Phi(x)Ce^{-\omega B}e^{-Bx}$$

$$= \Phi(x)e^{-Bx} = P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

这表明$P(x)$ 是ω 周期的. 结论(i)得证.

证(ii): 当系数矩阵$A(x)$, 以及基本解矩阵$\Phi(x)$ 都是实的矩阵时, 转移矩阵$C=\Phi(0)^{-1}\Phi(\omega)$ 也是实的. 根据对数矩阵存在定理可知, 存在实方阵B, 使得$e^{2\omega B}=C^2$. 要证等式(*), 只要证$Q(x):=\Phi(x)e^{-Bx}$ 满足要求即可. 显然$Q(x)$ 可逆, C^1 光滑的, 且

$$Q(x+2\omega)=\Phi(x+2\omega)e^{-B(x+2\omega)}=\Phi(x)C^2e^{-2\omega B}e^{-Bx}$$

$$=\Phi(x)e^{-Bx}=Q(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

这表明$Q(x)$ 是2ω 周期的. 结论(ii) 得证. 定理得证. □

Theorem

设$\Phi(x)$ 是Floquet 齐次系统$y' = A(x)y$ 一个基本解矩阵，且有F 表示$\Phi(x) = P(x)e^{Bx}$，则变系数系统 $y' = A(x)y$ 与常系数系统 $z' = Bz$ 在如下意义下等价.

(i) 若$y(x)$ 是系统$y' = A(x)y$ 的解，则$z(x) = P(x)^{-1}y(x)$ 是常系数系统 $z' = Bz$ 的解;

(ii) 若 $z(x)$ 是常系数系统 $z' = Bz$ 的解，则 $y(x) := P(x)z(x)$ 是变系数系统 $y' = A(x)y$ 的解.

简言之，Floquet 线性系统 $y' = A(x)y$ 可约化为常数线性系数 $z' = Bz$.

证明

Proof.

证(i). 设$y(x)$ 是$y' = A(x)y$ 的解，则$y(x)$ 可以表示为 $y(x) = \Phi(x)y_0$. 由F 表示$\Phi(x) = P(x)e^{Bx}$ 知$z(x) = P(x)^{-1}y(x) = P(x)^{-1}\Phi(x)y_0 = e^{Bx}y_0$. 故$z(x)$ 是$z' = Bz$ 的解.

证(ii). 设$z(x)$ 是$z' = Bz$ 的解，则$z(x)$ 可以写作$z(x) = e^{Bx}z_0$. 于是$y(x) = P(x)z(x) = P(x)e^{Bx}z_0 = \Phi(x)z_0$. 这表明$y(x)$ 是$y' = A(x)y$ 的解. 定理得证. □

注记

注：两个系统$y' = A(x)y$ 和$z' = Bz$ 的等价性是通过可逆且周期的矩阵$P(x)$ 得以实现的. 但$P(x)$ 一般说来很难显式给出. 因为矩阵$P(x)$ 由Floquet 表示$\Phi(x) = P(x)e^{Bx}$ 确定的，而基本解矩阵$\Phi(x)$ 一般很难显式给出.

Floquet 乘子, Floquet 指数

Definition

考虑n 维ω 周期的Floquet 系统$y' = A(x)y$.

(i) 任意一个转移矩阵C 的n 个特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 称为该系统的Floquet 乘子(Floquet multipliers), 也称为特征乘子(characteristic multipliers), 常简称为F 乘子.

(ii) 设常数矩阵B 满足$e^{\omega B} = C$, 则称矩阵B 的n 个特征值$\mu_1, \cdots, \mu_n$ 为该系统的Floquet 指数(Floquet exponents), 也称为特征指数(characteristic exponents). 常简称为F 指数.

注记: (i) 由于任意两个转移矩阵都相似, 故它们的特征值相同. 因此Floquet 乘子的定义有意义(well defined). 故Floquet 乘子由系统$y' = A(x)y$ 唯一确定, 不依赖于转移矩阵的选取.

(ii) Floquet 指数则不是唯一确定的. 因为满足$e^{\omega B} = C$ 的矩阵B 不唯一, 若B 满足$e^{\omega B} = C$, 则$B_k = B + \frac{1}{\omega}2k\pi i$ 也满足, 其中$k = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Theorem

考虑n 维ω 周期的Floquet 系统$y' = A(x)y$. 设$\mu_1, \cdots, \mu_n$ 为一组F 指数，则

(i) $\lambda_j := e^{\omega\mu_j}$ 是系统的F 乘子，$j = 1, \cdots, n$;

(ii) 对每个j，乘子λ_j 作为转移矩阵$C = e^{\omega B}$ 的特征值，与指数μ_j 作为矩阵B 的特征值所对应的Jordan 块的阶相同.

注：后面讨论解的稳定性时需要定理中的结论(ii).

证: 不失一般性, 设$\omega = 1$. 考虑矩阵B 和$C = e^{B}$ 的特征值以及特征向量之间的关系. 回忆指数矩阵e^{Bx} 的Jordan 形表示. 设方阵$B = PJP^{-1}$, 其中P 为非奇矩阵, J 为B 的Jordan 标准形, 即

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}, \quad J_j = \begin{bmatrix} \mu_j & 1 & & \\ & \mu_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu_j \end{bmatrix},$$

这里μ_j 是矩阵B 的特征值. 记Jordan块J_j 的阶为m_j, 则

证明续1

$$e^{Bx} = P \begin{bmatrix} e^{J_1 x} & & & \\ & e^{J_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r x} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$e^{J_j x} = e^{\mu_j x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

证明续2

令$x=1$ 得

$$e^{B}=P\begin{bmatrix} e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r} \end{bmatrix}P^{-1},$$

$$e^{J_j}=e^{\mu_j}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(m_j-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

由此可见矩阵$C = e^B$ 与对角块矩阵$\mathrm{diag}(e^{J_1}, \cdots, e^{J_r})$ 相似. 不难看出每个块e^{J_j} 的Jordan标准形为

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

于是矩阵C 的特征值为$\lambda_j = e^{\mu_j}$, 并且特征值λ_j 与μ_j 所在的Jordan 块的阶数相同. 定理证毕. $\square$

例: 考虑Floquet 系统$y' = A(x)y$, 其中

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{\cos x+\sin x}{2+\cos x-\sin x} \end{bmatrix}.$$

求系统的Floquet 乘子和指数.

解: 一般说来Floquet 乘子和指数的计算是很困难的. 因为基本解矩阵, 从而转移矩阵C 通常很难显式给出. 但对于本例而言, 由于系数矩阵$A(x)$ 具有上三角形状, 故可以求得一个显式的基本解矩阵如下

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} -2-\sin x & e^x \\ 2+\sin x-\cos x & 0 \end{bmatrix}.$$

所考虑系统的周期为2π. 故基解阵$\Phi(x)$ 所确定的转移矩阵为$C=\Phi^{-1}(0)\Phi(2\pi)$. 简单计算得

$$\Phi(0)=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \Phi^{-1}(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},$$

$$\Phi(2\pi)=\begin{bmatrix}-2 & e^{2\pi}\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

由此求得转移矩阵为

$$C=\Phi^{-1}(0)\Phi(2\pi)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & e^{2\pi}\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi}\end{bmatrix}.$$

由此得到系统的两个Floquet乘子$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{2\pi}$. 由F 乘子与F 指数的一般关系

$$\lambda_j = e^{\omega\mu_j} \text{ 或 } \mu_j = \frac{1}{\omega}\Big(\ln\lambda_j + 2ki\pi\Big), \ j = 1, \cdots, n,$$

进一步得系统的两个Floquet指数

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2\pi}\Big(\ln\lambda_1 + 2k\pi i\Big) = ki,$$
$$\mu_2 = \tfrac{1}{2\pi}\Big(\ln\lambda_2 + 2k\pi i\Big) = 1 + ki,$$

其中$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. 解答完毕.

Theorem

Floquet系统$y' = A(x)y$ 的Floquet乘子$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 乘积可表为

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = e^{\int_0^\omega trA(s)ds}. \quad (*)$$

其中ω 为系统的周期.

注: 虽然F 乘子一般是未知的, 但是它们的乘积却有一个显式表示(*). 在某些情形下, 式(*)很有用.

Proof.

设$\Phi(x)$ 是系统$y' = A(x)y$ 的基本解矩阵，且满足$\Phi(0) = E$，则$\Phi(x)$ 所确定的转移矩阵为$C = \Phi(\omega)$. 其n 个特征值就是乘子$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 于是它们得乘积为$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det\Phi(\omega)$. 根据Liouville 公式得

$$\det\Phi(x) = \det\Phi(0)e^{\int_0^x \mathrm{tr}A(s)ds} = e^{\int_0^x \mathrm{tr}A(s)ds}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

于上式令$x = \omega$ 得公式(*). 命题得证. □

常微分方程(组)解的稳定性有各种不同的定义，例如Lyapunov稳定性，Poisson 稳定性等．这些稳定性概念之间有联系，也有区别．稳定性研究是常微理论的一个很大的研究领域．本节考虑比较简单的线性方程组$y' = A(x)y + f(x)$ 解的稳定性．以及稳定性判据，其中$A(x)$，$b(x)$ 假设在$[0, +\infty)$ 上的连续函数．记$\phi(x, y_0)$ 为系统满足初值条件$y(0) = y_0$ 的唯一解．

定义: (i) 称解$\phi(x, y_0)$ 是稳定的(stable), 如果对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当$\|y_1 - y_0\| < \delta$ 时, $\|\phi_1(x, y_1) - \phi(x, y_0)\| < \varepsilon$, $\forall x \geq 0$;

一致连续

(ii) 称解$\phi(x, y_0)$ 不是稳定的, 则称解$\phi(x, y_0)$ 不稳定 (unstable);

(iii) 称解$\phi(x, y_0)$ 是局部渐近稳定的(locally stable), 如果存在$\delta > 0$, 使得当$\|y_1 - y_0\| < \delta$ 时, 如果$\lim_{x \to +\infty} \phi(x, y_0) = 0$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$;

(iv) 称解$\phi(x, y_0)$ 是全部渐近稳定的(globally stable)，如果对$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{x\to+\infty} \phi(x, y_0) = 0$.

线性系统解的稳定性均等价于齐次系统零解的稳定性

Theorem

线性系统$y' = A(x)y + f(x)$ 的每个解$\phi(x, y_0)$ 是稳定的(不稳定的，局部或全局渐近稳定的)，当且仅当齐次系统$y' = A(x)y$零解是稳定的(不稳定的，局部或全局渐近稳定的).

Proof.

由于线性系统的任意两个解$\phi(x, y_0)$，$\phi(x, y_0)$ 的差$\phi(x, y_0) - \phi(x, y_0)$ 是齐次系统$y' = A(x)y$ 的解．故定理得证． $\square$

Definition

考虑齐次线性系统$y' = A(x)y$，其中$A(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上连续。记$\phi(x, y_0)$ 为系统满足初值条件$y(0) = y_0$ 的唯一解。

(i) 称零解稳定(stable)，如果对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$\|y_0\| < \delta$ 时，$\|\phi(x, y_0)\| < \varepsilon$, $\forall x \geq 0$;

(ii) 称零解全局渐近稳定(globally asymptotically stable)，如果$\lim_{x \to +\infty} \phi(x, y_0) = 0$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$;

(iii) 称零解不稳定(unstable)，如果零解按定义(i)的意义不是稳定的。

作业

习题一: 证明常系数线性齐次方程$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$ 的每个解$y(x)$ 当$x \to +\infty$ 均趋向于零，当且仅当其特征多项式$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ 是稳定的.

习题二: 证明二次多项式$p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ 稳定，当且仅当$a_1, a_2 > 0$. (不利用Routh-Hurwitz准则)

习题三: 证明四次多项式$p_4(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ 稳定，当且仅当$a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ 且$a_1 a_2 a_3 > a_1^2 a_4 + a_3^2$. (不利用Routh-Hurwitz准则)

习题四：证明若n 次多项式$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 稳定，则它的n个系数均大于零，即$a_j>0$, $j=1,2,\cdots,n$.

习题五：记复数$a+ib=re^{i\theta}$, $r>0$, 记二阶矩阵

$$S(a,b)=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

这里$r>0$, $\theta\in[0,\pi]$. 证明矩阵$B_0=(\ln r)E_2+\theta V$ 满足$e^{B_0}=S$, 其中E_2为二阶单位矩阵.

作业续2

习题六：证明Lemma 3：记 $C(a,b)$ 为如下2k 阶实Jordan 块矩阵

$$C(a,b)=\begin{bmatrix} S(a,b) & E_2 & & \\ & S(a,b) & \ddots & \\ & & \ddots & E_2 \\ & & & S(a,b) \end{bmatrix}_{2k\times 2k},$$

这里矩阵$S(a,b)$ 定义同习题五，则 $e^B=C(a,b)$，其中 $B=B_1+B_2$，$B_1=\mathrm{diag}(B_0,\cdots,B_0)$，$B_1$ 共有k 个二阶块B_0，B_0 的定义同习题五，$B_2=-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{N_1^j}{j}$，$N_1$ 为如下2k 阶幂零矩阵

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & S^{-1}(a,b) & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & S^{-1}(a,b) \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

(提示：利用习题五2的结论，以及Lemma 1 的证明思想)

习题七：考虑Floquet 线性系统$y' = A(x)y + b(x)$，其中系数矩阵$A(x)$ 和向量$b(x)$ 均为周期连续的，周期为$\omega > 0$. 假设对应齐次系统$y' = A(x)y$ 的每个解$y(x)$ 均满足$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$，证明Floquet 系统$y' = A(x)y + b(x)$ 存在唯一一个ω 周期解.

作业续4

菲利波夫习题: 723, 724, 725

选作题: 记E 为n 阶单位矩阵, N_1 为n 阶幂零矩阵. 证明$E-N_1=e^L$, 其中$L=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{N_1^k}{k}$.

提示: 记$M(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^kN_1^k}{k}$, 则所要证明的结论可写作$e^{-M(1)}=E-N_1$ 或等价地$e^{M(1)}=(E-N_1)^{-1}$. 再证$e^{M(t)}=(E-tN_1)^{-1}$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 证明思想是寻找这两个矩阵函数$e^{M(t)}$和$(I-tN)^{-1}$都满足的某一个矩阵微分方程. 注意它们在$t=0$ 处取相同的初始值, 即单位矩阵E.