第二章　Sobolev空间

直接找方程(1.1),(1.2)和(1.4)的经典解（二阶偏导数处处存在）是一件很不容易的事，如果我们用古典方法去寻求解， 比如级数展开， 那么它的收敛性要求函数和它相应阶偏导函数的一致收敛， 而这个是不太容易得到的。 相反， 在积分意义下的收敛性是比较容易得到的， 因此我们自然将连续可微函数空间 在某种积分模意义下的完备化空间作为解的存在空间， 这个空间就是Sobolev 空间等.

2.1. 连续可微函数空间

如果没有特殊说明， 我们总设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是开集（不一定要求有界）， $k \geq 0$是整数。如果$K \subset \Omega$是有界集而且它与Ω的边界的距离大于零， 则记 $K \subset\subset \Omega$。 定义如下的函数空间：

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R} : \ D^\alpha u \text{ 在}\overline{\Omega}\text{中一致连续且有界},$$

$$\forall \alpha \in Z_n, \ |\alpha| \leq k\},$$

$$C^k(\Omega) = \left\{u : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \ u \in C^k(\overline{K}), \forall K \subset\subset \Omega\right\}.$$

特别当$k = 0$时，记

$$C(\Omega) = C^0(\Omega), \quad C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega}).$$

在空间$C^k(\overline{\Omega})$引进范数

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{\{\alpha\in Z_n, 0\le|\alpha|\le k\}} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|.$$

下面定理的证明可见[Admas;2003, Th 1.33].

定理2.1 (Ascoli-Arzela 定理) 设Ω是有界开集，$K \subset C(\overline{\Omega})$是有界等度连续的，即满足： (i) 存在常数$M > 0$, 使得 $|\phi(x)| \le M, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \phi \in K$;

(ii) 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$x, y \in \overline{\Omega}$且$|x - y| < \delta$时， 均有

$$|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon, \quad \forall \phi \in K.$$

则K是列紧的. 即：对于K中任意的序列， 均在$C(\overline{\Omega})$中按照其范数收敛于$C(\overline{\Omega})$的一个函数。

为了研究Hölder连续性， 引进量刚

$$[u]_{C^{0,\alpha}}(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

其中 $\alpha \in [0,1]$是给定的常数. 记

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty \right\},$$

则$C^{0,1}(\overline{\Omega})$就是熟悉的Lipschitz函数空间。再定义

$$\begin{aligned} C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) &= \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty, \\ &\qquad \text{对一切满足}|\beta| = k\text{的多重指标}\beta\}. \end{aligned}$$

显然， $C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega})$.

在空间$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$引进范数

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{\{\beta\in Z_n, |\beta|=k\}} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

我们有如下的结论。

定理2.2 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$0 \le \alpha \le 1$, 那么

(i) $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})})$ 是Banach 空间；

(ii) 如果$0 \le \alpha \le \beta \le 1$ 且$k \ge 0$是整数， 则

$$C^k(\overline{\Omega}) \supset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \supset C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \supset C^{k,1}(\overline{\Omega});$$

(iii) 如果Ω是有界凸集，则

$$C^{k,1}(\overline{\Omega}) \supset C^{k+1}(\overline{\Omega}).$$

作业1： 证明定理2.2.

作为本节的结尾， 再引进几个常用的空间。

$$C^{k,\alpha}(\Omega)=\left\{u\in C^k(\Omega):\ u\in C^{k,\alpha}(\overline{K}),\ \forall K\subset\subset\Omega\right\}.$$

$$C_0(\Omega)=\{u\in C(\Omega):\mathrm{Supp}\,u\subset\subset\Omega\},$$

这里 $\mathrm{Supp}\,u=\overline{\{x\in\Omega:u(x)\neq 0\}}$. 记

$$C_0^k(\Omega)=C^k(\Omega)\bigcap C_0(\Omega),\ \ C_0^\infty(\Omega)=C^\infty(\Omega)\bigcap C_0(\Omega):=\mathcal{D}(\Omega);$$

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{k=0}^{\infty}C^k(\Omega),\quad C^\infty(\overline{\Omega})=\bigcap_{k=0}^{\infty}C^k(\overline{\Omega}).$$

2.2 L^p空间

L^p空间是Soblev空间的基本函数空间，本节主要介绍它的定义和基本性质.

1. 定义和性质

定义 2.1 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是开集，$1\le p<\infty$, $u:\Omega\to\mathbb{R}$, 定义

$$L^p(\Omega)=\left\{u:\ \Omega\to\mathbb{R}\text{在}\Omega\text{中Lebesque可测且}\int_\Omega|u(x)|^p dx<\infty\right\},$$

$$\begin{aligned}L^\infty(\Omega)\ &=\ \{u:\ \Omega\to\mathbb{R}\text{在}\Omega\text{中Lebesque可测且}\\&\quad\ \inf\{m:|u(x)|\le m,\ a.e.x\in\Omega\}<\infty\},\end{aligned}$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ m : |u(x)| \leq m,\ a.e. x \in \Omega \right\},$$

$$\begin{aligned} L^p_{loc}(\Omega) \quad = \quad & \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{在} \Omega \text{中Lebesque可测且} \\ & u \in L^p(K), \text{对任意可测集} K \subset\subset \Omega \}. \end{aligned}$$

命题 2.1 (1) (Höder 不等式) 对于任意的$p_k \geq 1, \sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k} = 1, u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, 均有

$$\int_\Omega |\prod_{k=1}^m u_k| dx \leq \prod_{k=1}^m \left(\int_\Omega |u_k|^{p_k} dx \right)^{\frac{1}{p_k}}.$$

(2) (Minkowski 不等式) 对于任意的$p \in [1, \infty]$, $u, v \in L^p(\Omega)$,, 均有

$$||u + v||_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

(3) 对于任意的$1 \leq p < \infty$, 简单函数类和$C_0(\Omega)$都在$L^p(\Omega)$空间稠密. 简单函数类在$L^\infty(\Omega)$中也稠密.

(4) 对于任意的$1 \le p < \infty$, L^p是可分的. 对$1 < p < \infty$, $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$, 而且$L^p(\Omega)$是自反的Banach 空间. $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$，$L^\infty(\Omega)$是Banach空间，但 它既不可分，也不是自反的.

证明. 这些性质的证明都可以在[Admas;2003]中查到，下面只给出(1)和(3)的证明。
(1) 由于$\log x$是凹函数, 对$a_k > 0$,

$$\log\Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k^{p_k}}{p_k}\Big) \ge \sum_{k=1}^{m} \frac{\log a_k^{p_k}}{p_k} = \log \prod_{k=1}^{m} a_k.$$

我们得到

$$\prod_{k=1}^{m} a_k \le \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k^{p_k}}{p_k}. \tag{2.1}$$

显然(2.1)对于所有的$a_k \geq 0$也是正确的。
于是取 $a_k = \frac{|u_k(x)|}{\|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}}$代入(2.1), 则

$$\frac{\prod_{k=1}^{m} |u_k(x)|}{\prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|u_k(x)|^{p_k}}{p_k(\|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)})^{p_k}},$$

两边Ω在上积分就可得到(1).
(3) 对任何实函数u, 存在一列简单函数序列$\{s_n\}$收敛 到它.
进一步，如果函数u有界, 可以选取简单函数列一致收敛到它.

下证$C_0(\Omega)$在$L^p(\Omega)$中稠密。 由于$u=u^+-u^-$, 可以假设$u\geq 0$. 于是存在一个单调增加的简单函数列$\{s_n\}$点收敛到$u(x)$. 由于$0\leq s_n(x)\leq u(x)$, $s_n\in L^p(\Omega)$. 由控制收敛定理$\|s_n-u\|_{L^p(\Omega)}\to 0$. 对任意$\varepsilon>0$, 存在一个$s_k(x)$ 使得$\|s_k-u\|_{L^p}<\varepsilon$. 因为$s_k$是简单函数, 其支集有有限的体积, 可以假设 $s_k(x)=0, x\in\Omega^c$. 由Lusin定理, 存在一个连续函数$\phi\in C_0(\Omega)$,

$$|\phi(x)|\leq\|s_k\|_{L^\infty}, \forall x\in\Omega,$$

$$meas(\{x\in\Omega:\phi(x)\neq s_k(x)\})\leq\left(\frac{\varepsilon}{2\|s_k\|_{L^\infty}}\right)^p.$$

因此

$$\|\phi-s_k\|_{L^p}\leq\varepsilon,$$

$$\|u-\phi\|_{L^p}\leq\|u-s_k\|_{L^p}+\|s_k-\phi\|_{L^p}\leq 2\varepsilon.$$

□

我们还需用到L^p空间的插值不等式。

命题 2.2 (1) 对于任意的$p,q,r\geq 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}, u\in L^p(\Omega), v\in L^q(\Omega)$, 均有$uv\in L^r(\Omega)$且

$$||uv||_{L^r(\Omega)}\leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^q(\Omega)};$$

(2) 对于任意的$1\leq p<r<q, \theta\in(0,1)$满足$\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}=\frac{1}{r}$, $u\in L^p(\Omega)\bigcap L^q(\Omega)$, 均有

$$||u||_{L^r(\Omega)}\leq ||u||^{\theta}_{L^p(\Omega)}\cdot ||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

证明. (1)是[Admas;2003， Corol 2.5]，而(2)是[Admas;2003， Th2.11].

我们还将用到离散形式的Höder不等和Minkowski 不等式：
设$a_i, b_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m$, $p \geq 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{m} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{m} b_i^{p'})^{\frac{1}{p'}},$$

$$[\sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)^p]^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{m} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{m} b_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

其中$p' = \frac{p}{p-1}$称为p对偶指数. 当$p = 1$时规定$p' = \infty$;
当$p = \infty$时规定$p' = 1$.
作业2： 利用定积分的几何意义证明不等式(2.1)在$m = 2$的情况， 并证明如下的Young不等式： 对任意$a, b, \varepsilon > 0$和$p \geq 1$, 存在只与ε和p 有关的 常数$C(p, \varepsilon) > 0$, 使得

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + C(p, \varepsilon) \frac{b^{p'}}{p'}.$$