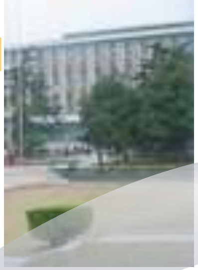
Computer Science and Technology



运 筹 学

中国科学技术大学
1958—2008

目标规划

Chp.5 Goal Programming

5.0 引言——目标规划的提出

- 最优和满意
  - 在现实经济生活中，没有最优（max，min）只有满意。
    - 一开始，资产阶级经济学家的一个基本假设就是认为企业的决策者是“经济人”，他们的行为只受“最大化”的行为准则所支配，只以追求最大经济利益（利润）为唯一目标。
    - 社会的发展已经证明，“经济人”的假设根本不适应现代管理的需要。
    - H.A.西蒙（H.A.Simon-美国卡内基-梅隆大学,1916-）教授着眼于现代企业的管理职能,否定了“经济人”概念和“最大化”行为准则，提出了“管理人”的概念和“令人满意”的行为准则。由于西蒙教授对现代经济管理的决策科学进行了开创性的研究，荣获了1978年诺贝尔经济学奖。他提出满意行为模型要比最大化行为模型丰富得多。从而现代管理决策所追求的不是绝对意义下的最优解，而是相对意义下的满意解。
    - 目标规划的有关概念和模型最早在1961年由美国学者A.查恩斯和W.库伯在他们合著的《管理模型和线性规划的工业应用》一书中提出，以后这种模型又先后经尤吉·艾吉里、杰斯基莱恩和桑·李不断完善改进。1976年伊格尼齐奥发表了《目标规划及其扩展》一书，系统归纳总结了目标规划的理论和方法。

5.0 引言——目标规划的提出(cont.)

- 线性规划的不足
  - 线性规划只研究在满足一定条件下，单一目标函数取得最优解，而在企业管理中，经常遇到多目标决策问题，如拟订生产计划时，不仅考虑总产值，同时要考虑利润，产品质量和设备利用率等。这些指标之间的重要程度（即优先顺序）也不相同，有些目标之间往往相互发生矛盾。
  - 线性规划致力于某个目标函数的最优解，这个最优解若是超过了实际的需要，很可能是以过分地消耗了约束条件中的某些资源作为代价。
  - 线性规划把各个约束条件的重要性都不分主次地等同看待，这也不符合实际情况。

5.0 引言——目标规划的提出(cont.)

- 求解线性规划问题，首先要求约束条件必须相容，如果约束条件中，由于人力，设备等资源条件的限制，使约束条件之间出现了矛盾，就得不到问题的可行解，但生产还得继续进行，这将给人们进一步应用线性规划方法带来困难。

- 目标规划的提出
  - 为了弥补线性规划问题的局限性，解决有限资源和计划指标之间的矛盾，在线性规划基础上，建立目标规划方法，从而使一些线性规划无法解决的问题得到满意的解答。
  - 在实际问题中，可能会同时考虑几个方面都达到最优：产量最高，成本最低，质量最好，利润最大，环境达标，运输满足等。多目标规划能更好地兼顾统筹处理多种目标的关系，求得更切合实际要求的解。
  - 目标规划可根据实际情况，分主次地、轻重缓急地考虑问题。

5.1 目标规划的数学模型

- 一个典型例子
  - 某企业在计划期内生产甲乙丙三种产品，这些产品分别需要在设备A、B上加工，需要消耗材料I和II，单件产品需要消耗的原料、台时及利润如下表，为该企业制定生产计划。

资源 \ 消耗 \ 产品	甲	乙	丙	现有资源
原材料I(千克)	3	1	2	200
原材料II(千克)	2	2	4	200
设备A(台时)	4	5	1	360
设备B(台时)	2	3	5	300
利润（元/件）	40	30	50	

$$\max z = 40x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 360 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 300 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解得上述线性规划问题的最优解为

$$z = 3400, X = (50,30,10)$$

5.1 目标规划的数学模型(cont.)

- 现在决策者根据企业的实际情况和市场需求，需要重新定制经营目标：
  - 利润不少于3200元；
  - 产品甲与产品乙的产量比例尽量不超过1.5；
  - 提高产品丙的产量使之达到30件；
  - 设备加工能力不足可以加班解决，但能不加班最好不加班；
  - 受到企业资金限制，只能使用现有材料而不能再购进。
- 加入上述条件，可得不等式组：

$$\begin{cases} 40x_1+30x_2+50x_3 \geq 3200 \\ x_1-1.5x_2 \leq 0 \\ x_3 \geq 30 \\ 3x_1+x_2+2x_3 \leq 200 \\ 2x_1+2x_2+4x_3 \leq 200 \\ 4x_1+5x_2+x_3 \leq 360 \\ 2x_1+3x_2+5x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

该不等式组无解，即使令设备B加班10小时仍然无解。而在实际生产过程中，生产方案总是存在的，无解只能说明在现有资源条件下，不可能完全满足所有的经营目标。

– 例5.1 某工厂生产I，II两种产品，已知有关数据见下表，试求获利最大的方案。

	I	II	拥有量
原材料（kg）	2	1	11
设备（台时）	1	2	10
利润（元/件）	8	10	

- 解：这是一个单目标的规划问题，用线性模型表述为：

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 用图解法易求得最优方案为： $x_1^* = 4, x_2^* = 3, z^* = 62$元

5.1 目标规划的数学模型(cont.)

- 实际上工厂在做决策时，要依次考虑市场等一系列其他条件，如：
  - 根据市场信息，产品I的销售量有下降趋势，故考虑产品I的产量不能高于产品II；
  - 超过计划供应的原材料时，需用高价采购，这就使成本增加；
  - 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班；
  - 应尽可能达到并超过计划利润指标56元。
- 这样，在考虑产品决策时，便为多目标决策问题。目标规划方法是解决这类决策问题的方法之一。

- 目标规划数学模型的有关概念：
  - 设x_1、x_2为决策变量，此外，引进正、负偏差变量d^+，d^-，这两个偏差变量均≥0。
    - 正偏差分量d^+表示决策值超过目标值的部分；负偏差分量d^-表示决策值未达到目标值的部分。以上例说明：
    - 设上例中，d_3^-为未达到利润目标的差值，d_3^+为超出利润目标的差值

      当利润小于56时，$d_3^- > 0$且$d_3^+ = 0$，有$8x_1 + 10x_2 + d_3^- = 56$成立；

      当利润大于56时，$d_3^+ > 0$且$d_3^- = 0$，有$8x_1 + 10x_2 - d_3^+ = 56$成立；

      当利润等于56时，$d_3^- = 0$且$d_3^+ = 0$，有$8x_1 + 10x_2 = 56$成立；
    - 实际利润只有上述三种情况之一发生，即决策值不可能既超过目标值同时又未达到目标值，因此恒有$d^+ \times d^- = 0$。因而可以将三个等式写成一个等式：

$$8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$$

    - 利润尽可能达到并超过56元，理解为即使不能达到也要尽可能接近56，即：

$$\min d_3^-$$

5.1 目标规划的数学模型(cont.)

– 绝对约束和目标约束

- 绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束。目标约束是目标规划特有的，可把约束右端项看作要追求的目标值，在达到目标值时允许发生正或负偏差。因此线性规划问题在约束条件或目标函数中加入正、负偏差变量可变换为目标约束。以上例说明:
- 如果超过了原材料的限制，需用高价采购，则利润就会大幅度降低，因此应严格满足，即

$$2x_1 + x_2 \le 11$$

– 优先因子（优先等级）与权系数

- 一个规划问题常常有若干目标，但决策者在要求达到这些目标时，是有主次、轻重、缓急的不同。凡要求第一位达到的目标赋予优先因子P_1，次位的赋予P_2，依次类推，并规定$P_k >> P_{k+1}$，$k=1,2,\cdots,K$。表示P_k比P_{k+1}有更大的优先权，即首先保证高级别优先因子的目标的实现。若要区别具有相同优先因子的两个目标，可分别赋予它们权系数ω_j。

5.1 目标规划的数学模型(cont.)

– 目标规划的目标函数

- 目标规划的目标函数（准则函数）是按各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子而构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能缩小偏差量。目标规划的目标函数基本形式有三种：

(1)要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能的小，这时：

$$\min z = f(d^+, d^-)$$

(2)要求不超过目标值，即允许达不到目标值，即正偏差变量要尽可能的小，这时：

$$\min z = f(d^+)$$

(3)要求超过目标值，即超过量不限，但负偏差变量要尽可能的小，这时：

$$\min z = f(d^-)$$

目标规划是按事先制定的目标顺序逐项检查，尽可能使得结果达到预定目标，即使不能达到目标，也应使得离目标的差距最小。

这就是目标规划的求解思路，对应的解称为<u>满意解</u>。

5.1 目标规划的数学模型(cont.)

- 例5.2 将例5.1依次考虑以下目标：产品II的产量不低于产品I；充分利用台时不加班；利润额不小于56元，求决策方案。
  - 解：

原问题线性规划模型

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

按目标顺序分别赋予三个目标优先因子：P_1, P_2, P_3。数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

5.1 目标规划的数学模型(cont.)

- 目标规划的一般数学模型为：

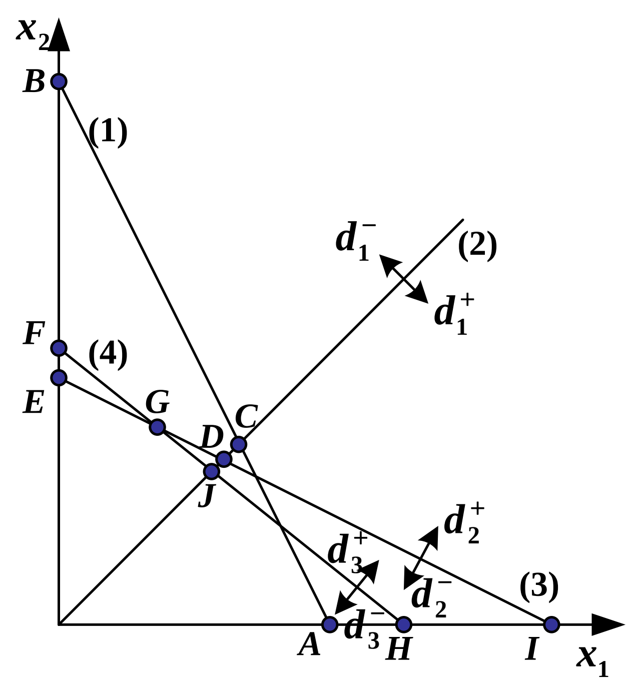
$$\min z = \sum_{l=1}^{L} P_l \left(\sum_{k=1}^{K} \omega_{lk}^{-} d_k^{-} + \omega_{lk}^{+} d_k^{+} \right)$$

$$\begin{cases} \boxed{\sum_{j=1}^{n} c_{lj} x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k, k = 1, \cdots, K} & \text{目标约束} \\ \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=,\ge) b_i, i = 1, \cdots, m} & \text{系统约束} \\ x_j \ge 0, j = 1, \cdots, n \\ d_k^{-}, d_k^{+} \ge 0, k = 1, \cdots, K \end{cases}$$

5.2 目标规划的图解法

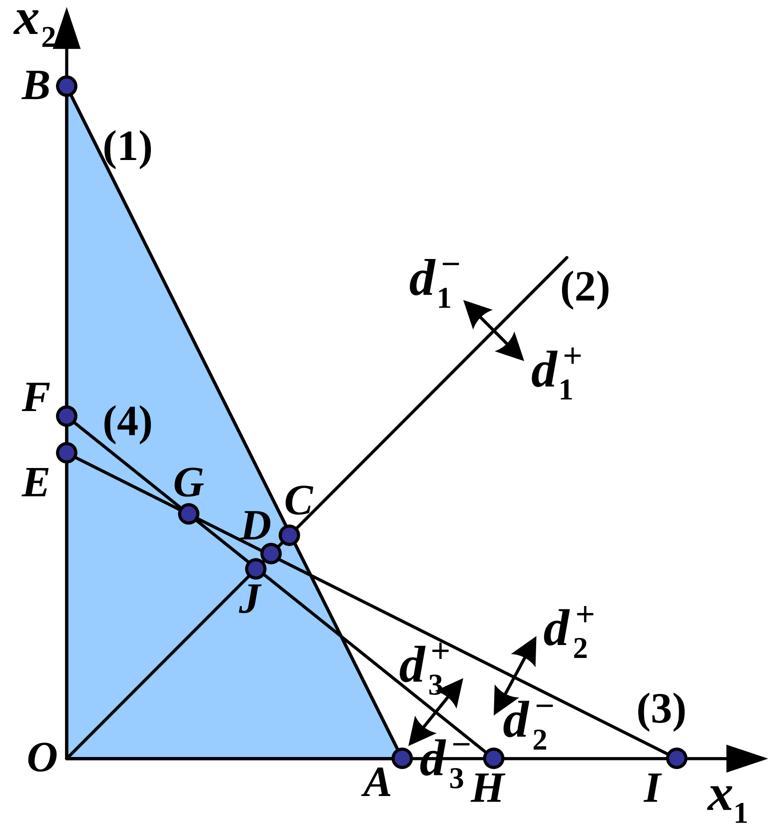
- 对只具有两个决策变量的目标规划的数学模型，可以用图解法来分析求解。
  - 以例5.2说明：绝对约束条件的作图与线性规划相同。作目标约束时，先令$d_i^-, d_i^+ = 0$，作相应的直线，然后在这直线旁标上d_i^-, d_i^+，表明目标约束可以沿着d_i^-, d_i^+所示的方向平移。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

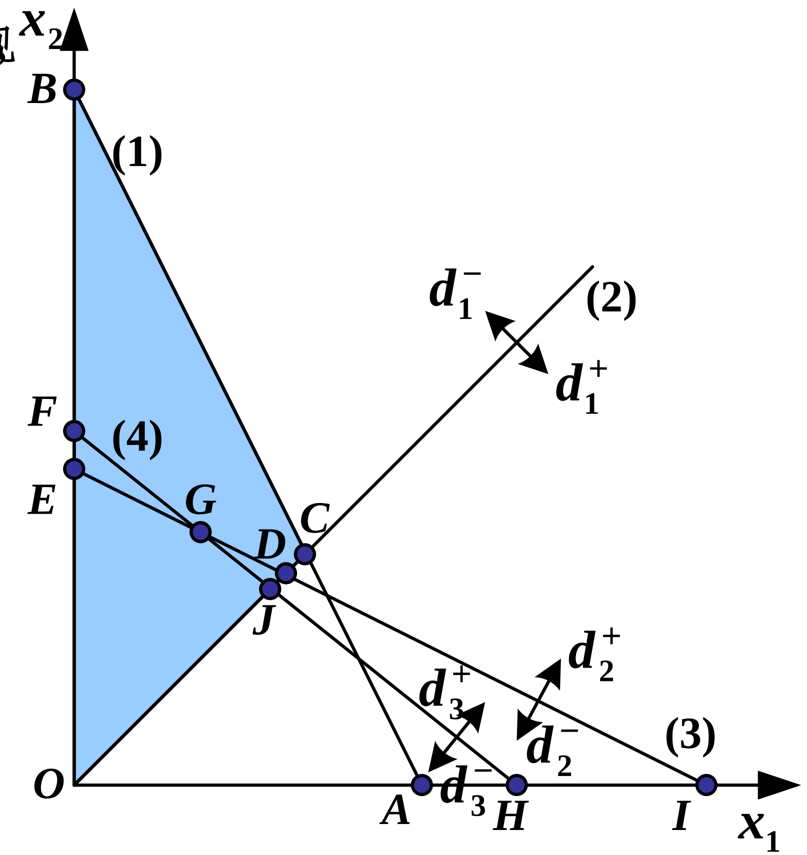


5.2 目标规划的图解法(cont.)

- 首先考虑绝对约束条件;

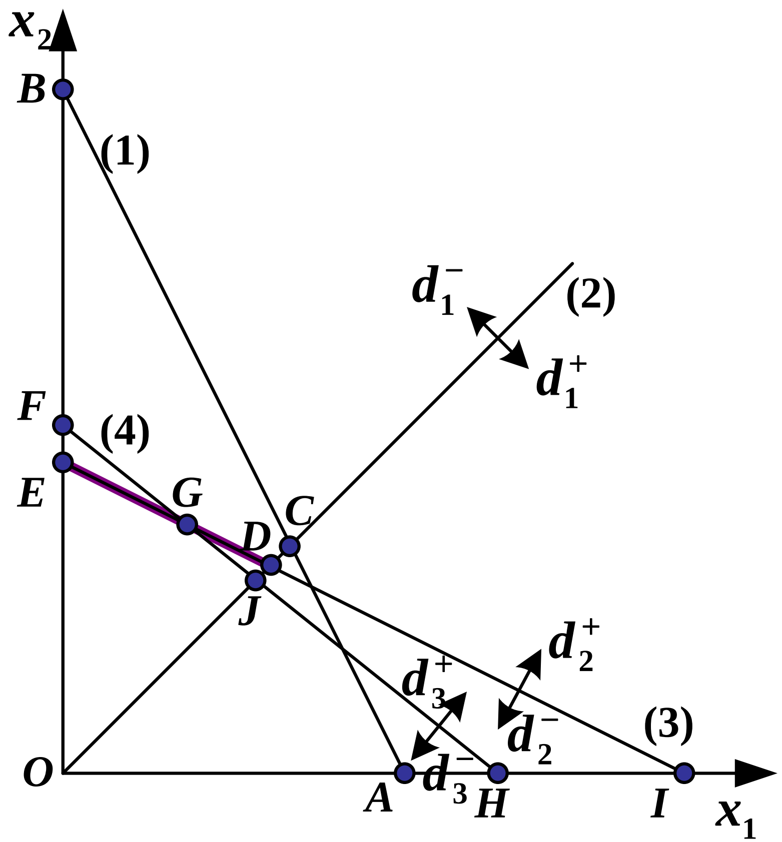


再考虑具有P_1优先因子的目标的实现，
在目标函数中要求实现$\min d_1^+$，
从图中看出，x_1, x_2在ΔOBC的边界
和内部取值才能满足$d_1^+ = 0$。

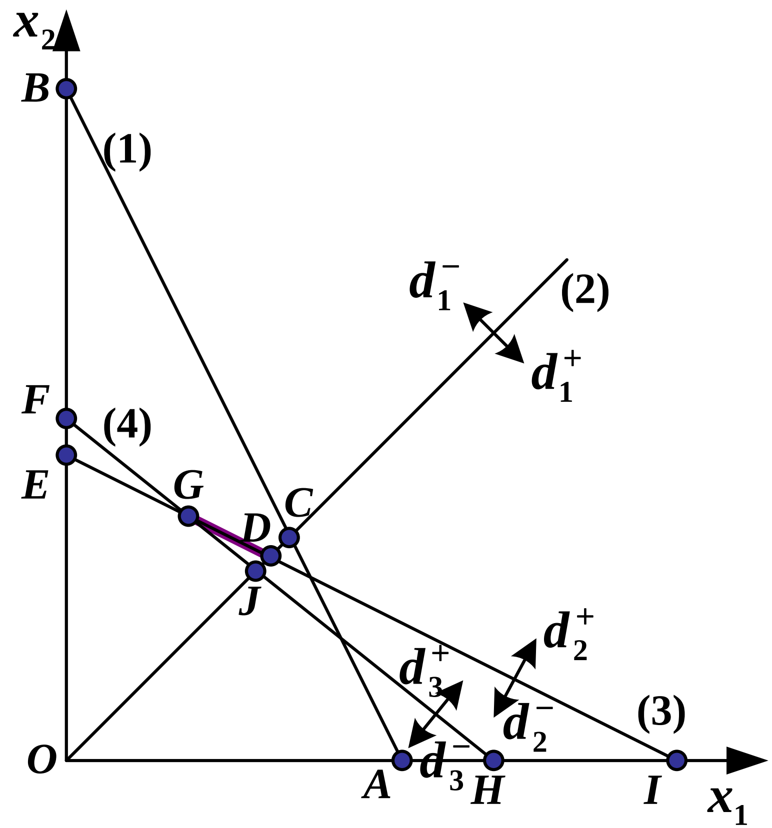


接着考虑P_2，要求实现$\min(d_2^+ + d_2^-)$，

当$d_2^+, d_2^- = 0$时，x_1, x_2可在线段ED上取值。



最后考虑P_3，要求实现$\min d_3^-$，当$d_3^-=0$时，使x_1, x_2的取值范围缩小到线段GD上取值。



最终可求得：G的坐标为(2,4)，D的坐标为(10/3,10/3)，G、D的线性组合都是该目标规划问题的满意解。

5.2 目标规划的图解法(cont.)

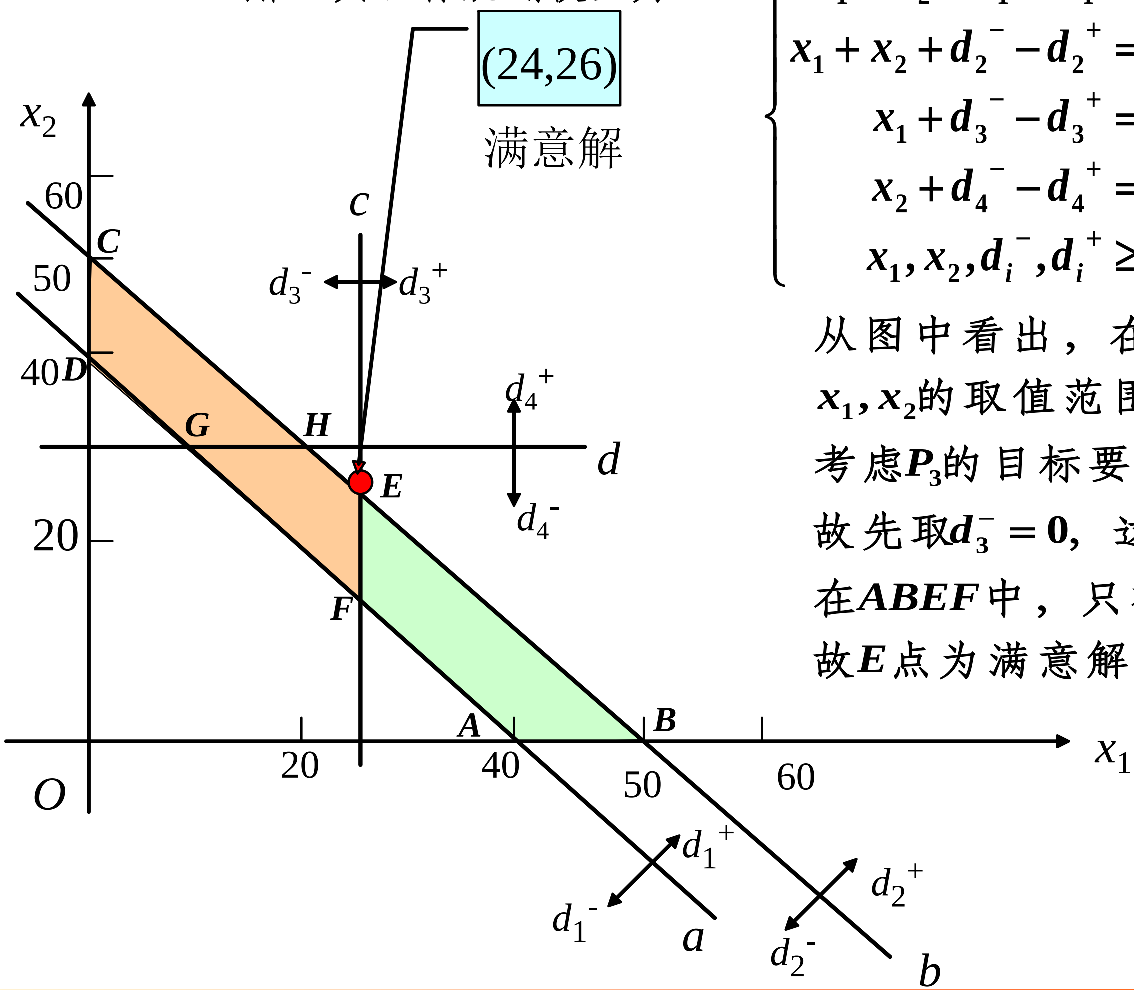
- 注意：目标规划问题求解时，把绝对约束作最高优先级考虑。但在大多数问题中可能出现非可行解，故将目标规划问题的最优解称为满意解。
  - 例5.3 某电视厂装配黑白、彩色两种电视，每装配一台电视占用装配线1小时，装配线每周计划开动40小时。预计市场每周彩色电视销量是24台，每台可获利80元；黑白是30台，每台可获利40元。该厂确定的目标为：
    - 第一优先级：充分利用装配线，每周计划开动40小时；
    - 第二优先级：允许装配线加班，但加班时间每周不超过10小时；
    - 第三优先级：装配电视的数量尽量满足市场需求，因彩色电视利润高，所以其权系数为2;
  - 试建立这个问题的目标规划模型，并求解黑白和彩色电视的产量。

5.2 目标规划的图解法

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$$

- 解：其目标规划模型为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 & (a) \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 & (b) \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 & (c) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 & (d) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$



从图中看出，在考虑P_1, P_2的目标实现后，x_1, x_2的取值范围为$ABCD$。

考虑P_3的目标要求时，因d_3^-的权系数大于d_4^-，故先取$d_3^- = 0$，这时x_1, x_2的取值范围为$ABEF$。

在$ABEF$中，只有E点使d_4^-取值最小，故E点为满意解。

5.3 解目标规划的单纯形法

- 目标规划的数学模型与线性规划基本相同，所以用单纯形法求解时的方法步骤也基本相同。但要考虑目标规划的一些特点，作以下规定：
  - 因目标规划问题的目标函数都是最小化，所以以 $c_j - z_j \geq 0$ ，j=1,2,···,n为最优准则；
  - 因非基变量的检验数中含有不同等级的优先因子，既：

$$c_j - z_j = \sum \alpha_{kj} P_k, j = 1,2,\cdots,n, k = 1,2,\cdots,K$$

因$P_1 >> P_2 >> \cdots >> P_K$；从每个检验数的整体来看：

检验数的正负首先决定于P_1的系数α_{1j}的正负。

若$\alpha_{1j} = 0$，这时此检验数的正负就决定于P_2的系数α_{2j}的正负，

下面以此类推。

5.3 解目标规划的单纯形法(cont.)

- 解目标规划问题的单纯形法的计算步骤：
  - (1)建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别列成*K*行，置*k=1*；
  - (2)检查该行中是否存在负数，且对应的前*k-1*行的系数是0：若有取其中最小者对应的变量为换入变量，转(3)；若无负数，则转(5)；
  - (3)按最小比值规则确定换出变量，当存在两个或两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量；
  - (4)按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回(2)；
  - (5)当*k=K*时，计算结束，表中的解即为满意解。否则置*k=k+1*，返回到(2)。
- 注：当非基变量的检验数全部为0时，该问题有多重解。

– 例5.4 试用单纯形法求解例5.2。

- 解：标准化数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_s = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, x_s, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

(1)取x_s, d_1^-, d_2^-, d_3^-为初始基变量，列初始单纯形表：

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	X_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	11	2	1	1							
	d_1^-	0	1	−1		1	−1					
P_2	d_2^-	10	1	[2]				1	−1			10/2
P_3	d_3^-	56	8	10						1	−1	
$c_j - z_j$	P_1						1					
	P_2		−1	−2					2			
	P_3		−8	−10							1	

5.3 解目标规划的单纯形法(cont.)

– 检验数的求法：

$$\sigma_1 = c_1 - z_1 = 0 - (0,0,P_2,P_3)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = -P_2 - 8P_3$$

$$\sigma_2 = c_2 - z_2 = 0 - (0,0,P_2,P_3)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = -2P_2 - 10P_3$$

$$\sigma_5 = c_5 - z_5 = P_1 - (0,0,P_2,P_3)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P_1$$

以下略，可求得$\sigma_7 = 2P_2, \sigma_9 = P_3$

5.3 解目标规划的单纯形法(cont.)

(2)取$k=1$，检查检验数的P_1行，因该行无负检验数，故转(5);

(5)因$(k=1)<K(=3)$，置$k=k+1=2$，返回到(2);

(2)查出检验数P_2行中有$-1,-2$，取$\min(-1,-2)=-2$。

它对应的变量x_2为换入变量，转入(3);

(3)在上表中计算最小比值 $\theta=\min(11/1,-,10/2,56/10)=10/2$

它对应的变量d_2^-为换出变量，转入(4);

(4)进行基变换，得到下表

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	6	3/2		1			−1/2	1/2			
	d_1^-	5	3/2			1	−1	1/2	−1/2			
P_2	x_2	5	1/2	1				1/2	−1/2			
	d_3^-	6	[3]					−5	5	1	−1	6/3
c_j-z_j	P_1						1					
	P_2							1	1			
	P_3		−3					5	−5		1	

5.3 解目标规划的单纯形法(cont.)

- 以次类推，直到得到最终表（见下表）为止。

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	3			1			2	−2	−1/2	1/2	
	d_1^-	2				1	−1	3	−3	−1/2	1/2	
	x_2	4		1				4/3	−4/3	−1/6	1/6	
	x_1	2	1					−5/3	5/3	1/6	−1/3	
c_j-z_j		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3								1		

- 上表中得到的解$x_1^*=2$，$x_2^*=4$相当于例5.2图解法中的G点。检查上表中的检验数行，发现非基变量d_3^+的检验数为0，这表示存在多重解。以非基变量d_3^+为换入变量，d_1^-为换出变量，经迭代可得另一最终表。

5.3 解目标规划的单纯形法(cont.)

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	1			1	−1	1	−1	1			
	d_3^+	4				2	−2	6	−6	−1	1	
	x_2	10/3		1		−1/3	1/3	1/3	−1/3			
	x_1	10/3	1			2/3	−2/3	1/3	−1/3			
$c_j - z_j$		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3								1		

- 上表中得出另一个解$x_1^*=10/3$，$x_2^*=10/3$就是例5.2图解法中的D点。
- G、D两点的凸线性组合都是上例的满意解。

5.4* 灵敏度分析

- 目标规划的灵敏度分析方法与线性规划相似，除了分析各项系数的变换外，还有优先因子的变化问题。
  - 例5.5 已知目标规划问题：

$$\min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2 d_3^- + P_3 d_4^+$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 \qquad\quad + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

在得到最终表（下表）后，目标函数的优先等级变化为：

$$(1)\min z = P_1(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_2 d_4^+ + P_3 d_3^-$$

$$(2)\min z = P_1 d_3^- + P_2(2d_1^+ + 3d_2^+) + P_3 d_4^+$$

试分析原解有什么变化。

5.4 灵敏度分析(cont.)

- 解：最终表为：

c_j						$2P_1$		$3P_1$	P_2			P_3
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
	x_2	6		1	1	-1	-1	1				
	x_1	4	1				1	-1				
P_2	d_3^-	18			-3	3	-2	2	1	-1		
	d_4^-	2			-1	1					1	-1
$c_j - z_j$		P_1				2		3				
		P_2			3	-3	2	-2		1		
		P_3										1

- 分析（1），实际是将原目标函数中的d_4^+、d_3^-的优先因子对换了一下。这时将上表中的检验数行中的P_2、P_3行和c_j行的P_2、P_3对换即可。
- 这时可见原解仍满足最优性条件。

5.4 灵敏度分析(cont.)

- （2）将变化了的优先等级直接反映到原最终表，再计算检验数，得下表：

c_j						$2P_2$		$3P_2$	P_1			P_3
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
	x_2	6		1	1	−1	−1	1				
	x_1	4	1				1	−1				
P_1	d_3^-	18			−3	3	−2	2	1	−1		
	d_4^-	2			−1	[1]					1	−1
$c_j - z_j$	P_1				3	−3	2	−2		1		
	P_2					2		3				
	P_3											1

- 检查上表可知检验行有负数，根据换入换出规则选择换入换出变量，经迭代可以得到新的满意解：

5.4 灵敏度分析(cont.)

c_j						$2P_2$		$3P_2$	P_1			P_3
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
	x_2	8		1			−1	1			1	−1
	x_1	4	1				1	−1				
P_1	d_3^-	12					−2	2	1	−1	−3	[3]
$2P_2$	d_1^+	2			−1	1					1	−1
c_j-z_j		P_1					2	−2		1	3	−3
		P_2			2			3				2
		P_3										1
	x_2	12		1			−5/3	5/3	1/3	−1/3		
	x_1	4	1				1	−1				
	d_4^+	4					−2/3	2/3	1/3	−1/3	−1	1
P_3	d_1^+	6			−1	1	−2/3	2/3	1/3	−1/3		
c_j-z_j		P_1							1			
		P_2				2		3				
		P_3					2/3	−2/3	−1/3	1/3		

- 可得新的满意解为：$x_1^*=4$，$x_2^*=12$。

5.5 应用举例

- 例5.6 某单位领导在考虑本单位职工的升级调资方案时，依次遵守以下规定：
  - 不超过年工资总额60000元；
  - 每级的人数不超过定编规定的人数；
  - II，III级的升级面尽可能达到现有人数的20%；
  - III级不足编制的人数可录用新职工，又I级的职工中有10%要退休。
- 有关资料在下表中，问该领导应如何拟定一个满意方案。

等级	工资额（元/年）	现有人数	编制人数
I	2000	10	12
II	1500	12	15
III	1000	15	15
合计		37	42

5.5 应用举例(cont.)

- 解：设x_1、x_2、x_3分别表示提升到I、II级和录用到III级的新职工人数
  对各目标确定的优先因子为：
  P_1——不超过年工资总额60000元；
  P_2——每级的人数不超过定编规定的人数；
  P_3——I、II级的升级面尽可能达到现有人数的20%;
- 建立目标约束为：年工资总额不超过60000元：

$$2000(10-10\times10\%+x_1)+1500(12-x_1+x_2)+$$

$$1000(15-x_2+x_3)+d_1^- - d_1^+ = 60000$$

- 每级的人数不超过定编规定的人数：

$$I级: 10(1-10\%)+x_1+d_2^- - d_2^+ = 12$$

$$II级: 12-x_1+x_2+d_3^- - d_3^+ = 15$$

$$III级: 15-x_2+x_3+d_4^- - d_4^+ = 15$$

- II，III级升级面不大于现有人数的20%，但尽可能多提：

$$I级：x_1+d_5^- - d_5^+ = 12\times20\%$$

$$III级：x_2+d_6^- - d_6^+ = 15\times20\%$$

5.5 应用举例(cont.)

- 目标函数: $\min z = P_1 d_1^+ + P_2\left(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+\right) + P_3\left(d_5^- + d_6^-\right)$
- 以上目标规划模型可用单纯形法求解得到多个方案（过程略），如下。

变量	含义	解1	解2	解3	解4
x_1	晋升到I级的人数	2.4	2.4	3	3
x_2	晋升到II级的人数	3	3	3	5
x_3	新招收到III级的人数	0	3	3	5
d_1^-	工资总额的结余额	6300	3000	3000	0
d_2^-	I级缺编人数	0.6	0.6	0	0
d_3^-	II级缺编人数	2.4	2.4	3	1
d_4^-	III级缺编人数	3	0	0.6	0
d_5^+	II级超编人数	0	0	0	0.6
d_6^+	III级超编人数	0	0	0	2

5.5 应用举例(cont.)

- 例5.7 已知有三个产地给四个销地供应某种产品，产销地之间的供需量和单位运价如下表。有关部门在研究调运方案时依次考虑以下七项目标，并规定其相应的优先等级：
  - P_1——B_4是重点保护单位，必须全部满足要求；
  - P_2——A_3向B_1提供的产量不少于100；
  - P_3——每个销地的供应量不小于其需要量的80%；
  - P_4——所订调运方案的总运费不超过最小运费调运方案的10%；
  - P_5——因路段问题，尽量避免安排将A_2的产品运往B_4；
  - P_6——给B_1和B_3的供应率要相同；
  - P_7——力求总运费最省。
- 试求满意的调度方案。

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	5	2	6	7	300
A2	3	5	4	6	200
A3	4	5	2	3	400
销量	200	100	450	250	900/1000

5.5 应用举例(cont.)

- 解：先用表上作业法求得最小运费方案，此时最小运费为2950元。

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	200	100			300
A2	0		200		200
A3			250	150	400
虚设点				100	100
销量	200	100	450	250	1000/1000

- 供应约束：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 300$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 200$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 400$$

- 需求约束：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_1^- - d_1^+ = 200$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_2^- - d_2^+ = 100$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_3^- - d_3^+ = 450$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_4^- - d_4^+ = 250$$

5.5 应用举例(cont.)

- A_3向B_1提供的产量不少于100： $x_{31}+d_5^- - d_5^+ = 100$
- 每个销地的供应量不少于其需求量的80%：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_6^- - d_6^+ = 200\times 80\%$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_7^- - d_7^+ = 100\times 80\%$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_8^- - d_8^+ = 450\times 80\%$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_9^- - d_9^+ = 250\times 80\%$$

- 调运方案的总运费不超过最小运费的10%：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 2950\times(1+10\%)$$

- 因路段问题，尽量避免安排将A_2的产品运往B_4：

$$x_{24}+d_{11}^- - d_{11}^+ = 0$$

- 给B_1和B_3的供应率要相同：

$$(x_{11}+x_{21}+x_{31}) - \frac{200}{450}(x_{13}+x_{23}+x_{33}) + d_{12}^- - d_{12}^+ = 0$$

5.5 应用举例(cont.)

- 力求总运费最省：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+d_{13}^{-}-d_{13}^{+}=2950$$

- 目标函数为：

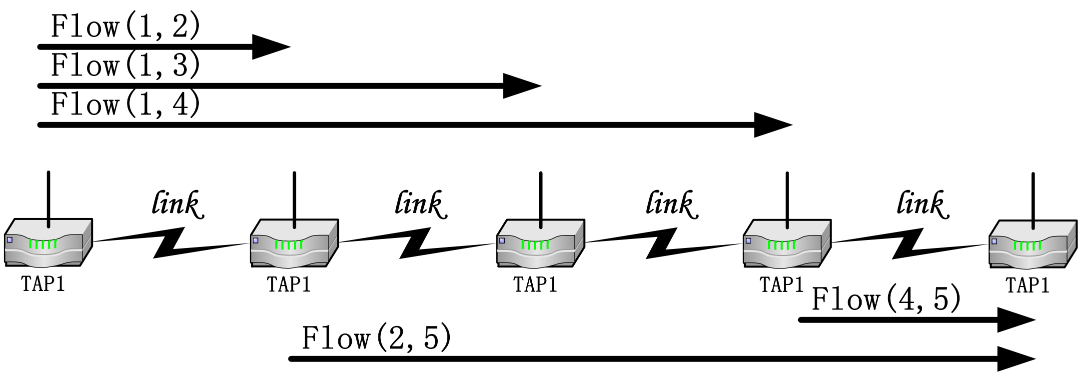
$$\min z=P_1d_4^{-}+P_2d_5^{-}+P_3(d_6^{-}+d_7^{-}+d_8^{-}+d_9^{-})+P_4d_{10}^{+}+P_5d_{11}^{+}+P_6(d_{12}^{-}+d_{12}^{+})+P_7d_{13}^{+}$$

- 计算结果可得：（过程略）

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1		100		200	300
A2	90		110		200
A3	100		250	50	400
虚设点	10			90	100
销量	200	100	450	250	1000/1000

5.5 应用举例

- 目标规划在信息领域



- 仅考虑吞吐量目标达到最大情况下的求解为：

$$P:\max(T_{12}+T_{13}+T_{14}+T_{25}+T_{45})$$

$$S:T_{12}+T_{13}+T_{14}\le 1$$

$$T_{25}+T_{45}\le 1$$

- $\mathbf{T_{12}=1,T_{45}=1,T_{13}=0,T_{14}=0,T_{25}=0}$

– 为了避免单个节点出现“饿死”情况而产生的约束条件：

- 不同节点聚集流之和相等；
- 同一个节点流出的不同流分配到的时间片相等。

$$\min z = P_1\left(\sum_{k=1}^{3}(w_{1k}^{-}d_k^{-} + w_{1k}^{+}d_k^{+})\right) + P_2\left(\sum_{k=4}^{6}(w_{2k}^{-}d_k^{-} + w_{2k}^{+}d_k^{+})\right)$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} T_{12} + T_{13} + T_{14} - T_{25} + d_1^{-} - d_1^{+} = 0 \\ T_{12} + T_{13} + T_{14} - T_{45} + d_2^{-} - d_2^{+} = 0 \\ T_{25} - T_{45} + d_3^{-} - d_3^{+} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{TAP1、TAP2、TAP4节点的聚集流分配的时间片之和大致相等} \\ \left.\begin{array}{l} T_{12} - T_{13} + d_4^{-} - d_4^{+} = 0 \\ T_{12} - T_{14} + d_5^{-} - d_5^{+} = 0 \\ T_{13} - T_{14} + d_6^{-} - d_6^{+} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{从TAP1发出的不同流分配的时间片大致相等} \\ T_{12} + 2\times T_{13} + 3\times T_{14} + 2\times T_{25} \le 1 \Rightarrow \text{Link2的独立集时间片之和不超过1} \\ T_{13} + 2\times T_{14} + 3\times T_{25} + T_{45} \le 1 \Rightarrow \text{Link3的独立集时间片之和不超过1} \\ T_{ij} > 0, 1 \le i < j \le 5 \\ d_i^{-}, d_i^{+} \ge 0, i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$$T_{12} = T_{13} = T_{14} = 0.07$$

$$T_{25} = T_{45} = 0.20$$

本章完