补充练习(6)

1.(1) 求 $\mathbb{Z}[i]$ 中全部不可约元；

(2) 将 $81+8i$ 写成不可约元的乘积；

(3) 证明：一个素数 p 能写成两个整数的平方和 $p=x^2+y^2$

$\Leftrightarrow p=2$ 或 $p\equiv 1 \pmod 4$

2. (1) 设 D 是一个整数，满足 $D\neq 0,1$，D 不是一个整数的平方，假设 $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ 是一个 UFD（唯一分解整环），则对于一个素数 p，$p=|x^2-Dy^2|$, $x,y\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow D\equiv x^2 \pmod p$, $x\in\mathbb{Z}$

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ 不是唯一分解整环，当 $D<-2$.

(3) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是一个欧氏整区.

3. 设 $\mathbb{F}$ 是一个有限域，$\mathbb{F}[x,y]$ 是 $\mathbb{F}$ 上二元多项式环. 令

$$R=\frac{\mathbb{F}[x,y]}{(x^3-y^2)}$$

见98页习题1

(1) 证明：R 是整环；P 极大理想，R_P 是关于 $S=R-P$ 作分式~~域~~环

(2) 令 $P_0=(\bar{x},\bar{y})\subset R$ 证明：P_0 是 R 的极大理想，且

$\dfrac{P_0R_{P_0}}{(P_0R_{P_0})^2}$ 是 $\mathbb{F}$ 上 2 维空间.

(3) 令 $P_1=(\bar{x}-1,\bar{y}-1)\subset R$. 证明：$P_1$ 是 R 的极大理想，且

$\dfrac{(P_1R_{P_0})}{(P_1R_{P_0})^2}$ 是 $\mathbb{F}$ 上 1 维空间.

4. 设R是唯一分解整~~环~~区, $a,b\neq 0\in R$, 且
$(a,b)=1$, $f(x)\in R[x]$
证明: 在R的分式域F_R中, 若$\frac{b}{a}$是$f(x)$的根, 则
$(a-b)\mid f(1)$, $(a+b)\mid f(-1)$

5. 设$\mathbb{F}$是一个域 $\mathbb{F}[[x]]=\left\{\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i \mid a_i\in\mathbb{F}, x\text{不定元}\right\}$
证明: $\mathbb{F}[[x]]$是主理想整环

6. 设$\mathbb{R}$是实数域, 证明: $\mathbb{R}[x,y]$不是主理想整环.

7. 设$a_1,\cdots,a_n$是主理想整区D的n个非零元$(n\geq 2)$, d_n是n个元的最大公约~~数~~元. 证明: 存在矩阵$A_n\in D_{n\times n}$使得A_n的第一行元素是$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 且$\det(A_n)=d_n$

8. 求$D=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ -3n & m \end{pmatrix} \middle| m,n\in\mathbb{Z}\right\}$的分式域

9. 证明$f(x)=x^2+x-1$在$\mathbb{Z}_3[x]$中不可约, 但在扩域$\mathbb{F}=\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2+1)}$中有两个根