2.8 Sobolev 不等式

如$u \in C_0^1(\Omega)$, 则$\forall x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) dy_i.$$

于是

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)| dy_i. \tag{2.9}$$

进一步我们有下面Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式.

Theorem

2.12 设$1 \leq p < n$, 则存在正常数$C = \frac{(n-1)p}{n-p}$, 使得

$$\|u\|_{L^{p*}(R^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(R^n)}, \quad \forall u \in C_0^1(R^n), \tag{2.10}$$

其中$p* := \frac{np}{n-p}$ 称为$W^{1,p}$的Sobolev(共轭)指数.

u有积分表示

证明. (1) 先设$p=1$, 此时$p*=\frac{n}{n-1}$, 由(2.9)得

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

对此式关于x_1积分，并利用Hölder不等式， 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 = \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}dx_1\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} f_i(x_1)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$

$\le \prod_{i=2}^{n} \left(\int f_i(x) dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

把 $\int_{-\infty}^{\infty} Du(\cdots)dy_i$ 看整体

$$\cdot \prod_{i=2}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dx_1dy_i\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

再将此式关于x_2积分，并利用Hölder不等式， 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2\\
\le\ &\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}\\
\cdot\ &\prod_{i=3}^{n}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dx_1dy_i\Big)^{\frac{1}{n-1}}\\
\le\ &\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x)|dx_1dx_2\Big)^{\frac{2}{n-1}}\prod_{i=3}^{n}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\\
&|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dx_1dx_2dy_i\Big]^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

如果$n=2$，最后一项不会出现。如果$n\geq 3$，则依次下去，直到关于x_n积分，最后得到

$$\int_{R^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx \leq [\int_{R^n}|Du|dx]^{\frac{n}{n-1}}, \quad \forall u\in C_0^1(R^n). \tag{2.11}$$

这就是(2.10)在$p=1$的情况.
(2) 当$p>1$时，对函数$|u|^\gamma$ ($\gamma>1$ 待定)使用(2.11)得

$$\begin{aligned}(\int_{R^n}|u|^{\gamma\frac{n}{n-1}}dx)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{R^n}|D|u|^\gamma|dx \qquad (2.12)\\ &= \gamma\int_{R^n}|u|^{\gamma-1}|Du|dx\\ &\leq \gamma[\int_{R^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}dx]^{\frac{p-1}{p}}[\int_{R^n}|Du|^pdx]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

选$\gamma > 1$使得

$$\gamma \frac{n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = p*,$$

即

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

又

$$\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p*},$$

所以，化简(2.12)即得（2.10） $\square$

Theorem

2.13 *(Sobolev-Poincaré不等式)* 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集，$1 \le p < n$，则存在正常数$C = \frac{(n-1)p}{n-p}$，使得

$p^* = \frac{np}{n-p} > p$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.13}$$

边界为0

证明. 任取$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，则存在

$$u_m \in C_0^\infty(\Omega), \quad \|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \text{ as } m \to \infty.$$

令

$$\bar{u}_m = \begin{cases} u_m, & x \in \Omega \\ 0, & x \in R^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

则 $\bar{u}_m \in C_0^\infty(R^n)$，由定理2.12知

$$\|u_m\|_{L^{p*}(\Omega)} = \|\bar{u}_m\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p)\|D\bar{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|Du_m\|_{L^p(\Omega)},$$

令$m \to \infty$得之。 □

Theorem

2.14 *(Sobolev不等式)* 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集，它满足线段性质，$1 \le p < n$，则存在正常数$C = C(n,p,\Omega)$，使得

$$\|u\|_{L^{p*}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{2.14}$$

证明. 任取$u \in W^{1,p}(\Omega)$，由延拓定理， 存在$\bar{u} = u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$使得$Sup\ u$是有界集， 而且

$$u = \bar{u} \text{ in } \Omega, \quad \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, n, \Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \qquad (2.15)$$

不能换为L^p模或Du的L^p模

令$u_m = J_{\frac{1}{m}} * \bar{u}$, 则

$$u_m \in C_0^\infty(R^n), \quad \|u_m - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ as } m \to \infty.$$

由定理2.12知$\{u_m\}$是$L^{p*}(R^n)$中的Cauchy序列， 于是

$$\|u_m - \bar{u}\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ as } m \to \infty.$$

再由定理2.12知

$$\|u_m\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p)\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

令$m \to \infty$得

$\bar{u}$ 为 u 的延拓

$$\|\bar{u}\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p)\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

结合(2.15)我们就得到(2.14)。 □

问题: 利用$C_0^\infty(R^n)$在$u \in W^{1,p}(\Omega)$中的稠密性, 可否证明该定理?

p^* 换为任意 $q \in [1, p^*]$ 只要区域满足延拓定理条件 也成立. (利用 Hölder 不等式)

有界区域换为无界区域 也成立.

2.9 Morrey 不等式

当$p > n$时，与Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式对应的是下面的Morrey不等式.

Theorem

2.15 *(Morrey不等式)* 设$n < p \leq \infty$,则存在正常数$C = C(n,p)$, 使得对任意$u \in C^1(\Omega)$和任意的球$B(x,r) \subset \Omega$,

参见Evans第266页

$$|u(y) - u(z)| \leq c(n,p)|y - z|^{m_p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall y, z \in B(x,r).$$ ∀ u

其中$m_p := \begin{cases} 1 - \frac{n}{p}, & p < \infty \\ (0,1)\text{中的任意数}, & p = \infty \end{cases}$ 称 一致Hölder连续

为$W^{1.p}$的Morrey指数.

证明*.　以$n<p<\infty$为例。$u\in C^1(\bar{\Omega})$, 则 对 $y,z\in B(x,r)$, 将函数u在处w作展开, 我们有

$$
\begin{aligned}
|u(y)-u(z)| &= \fint_{B(x,r)} |u(y)-u(z)|dw \\
&\le \fint_{B(x,r)} (|u(y)-u(w)|+|u(w)-u(z)|)dw \\
&\le c(n)\int_{B(x,r)} |Du(w)|(|y-w|^{1-n}+|z-w|^{1-n})dw \\
&\le c(n)\left(\int_{B(x,r)} (|y-w|^{1-n}+|z-w|^{1-n})^{\frac{p}{p-1}} dw\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_{B(x,r)} |Du(w)|^p dw\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le c(n)r^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

利用定理2.15， 类似于定理2.14的证明， 我们有

Theorem

2.16 *(Morrey不等式)* 设$n < p \leq \infty$， $\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， $\partial\Omega \in C^{0,1}$, 则存在正常数$C = C(n, p, \Omega)$, 使得对任意$u \in W^{1,p}(\Omega)$, 都存在$\bar{u} \in C^{0,m_p}(\bar{\Omega})$， 使得

$$u = \bar{u}\ a.e\ in \Omega$$

且

$$\|\bar{u}\|_{C^{0,m_p}(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

$\|Du_m\| \to$

$\|Du_m - Du\| \leq$

$\|Du_m\| \leq C.$

再利用定理2.15， 类似于定理2,13的证明， 我们有

Theorem

2.17 设$n < p \leq \infty$， $\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， 则存在正常数$C = C(n, p, \Omega)$, 使得对任意$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 都存在$\bar{u} \in C^{0,m_p}(\bar{\Omega})$， 使得$u = \bar{u}\ a.e\ in \Omega$且

$$[\bar{u}]_{C^{0,m_p}(\bar{\Omega})} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

作业 10： 证明定理2.17
作业 11： Evans's Book: Problem 5.10: 11,14,,16,18.

2.10 Sobolev嵌入定理

1. 嵌入

Definition

2.7 设X, Y均为线性赋范空间， 如果$X \subset Y$且恒等算子$Id: X \mapsto Y$ 是线性有界的， 则称X嵌入Y中， 记为$X \hookrightarrow Y$.

$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$

例如：

(1) 当$m \leq k$, $\beta \leq \alpha$ 时,

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\bar{\Omega});$$

(2) 当$p \leq q$且Ω为有界开集时,

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega);$$

(3) 当$p < n$, $q \in [1, p*]$, Ω为有界开集且$\partial\Omega \in C^{0,1}$时,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega);$$

(4) 当$p \in (n, \infty]$，Ω为有界开集且$\partial\Omega \in C^{0,1}$时,

$W^{1,p}(\Omega) \subseteq C^{0,mp}(\bar{\Omega})$

反复利用定理2.14和2.16， 类似(3)和(4), 我们容易得到

Theorem

2.18 *(Sobolev嵌入定理)* 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial\Omega \in C^{0,1}$, $1 \le p$, $k \ge 1$为整数。

(i) 如果$kp < n, q \in [1, p_k^*]$, 则$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, 其中

$$p_k^* = \frac{np}{n-kp};$$

$k=2$时 $\forall |\beta| \le k-1, D^\beta u \in W^{1,p}$

$\Rightarrow D^\beta u \in L^{p^*}(\Omega)$

(ii) 如果$kp = n$, 则*(i)*中的q可取任意正数; $k=$

(iii) 如果$kp > n$, 则$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1, m_{k,p}}(\bar{\Omega})$, 其中

$$m_{k,p} := \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p}\text{不是整数} \\ (0,1)\text{中的任意数}, & \frac{n}{p}\text{是整数} \end{cases}.$$

注： Ω的条件可以减弱，而(ii)的结论可以加强，详见[Admas: 2003] Ch.4.

2. 紧嵌入

Definition

2.8 设X, Y均为线性赋范空间，且$X \hookrightarrow Y$. 如果恒等算子$Id: X \mapsto Y$是紧线性的，（即将X中的有界集映为Y中的准（列）紧集），则称X紧嵌入Y中，记为$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

X的有界列在Y中有收敛子列(依范数)

Theorem

2.19 设Ω是有界区域, 则对$p < n$, 空间$W_0^{1,p}(\Omega)$嵌入到$L^q(\Omega), q \in [1, p^*)$是紧的; 对$p > n$, 空间$W_0^{1,p}(\Omega)$嵌入到$C^0(\overline{\Omega})$是紧的.

证明*. 由Morrey的嵌入定理，第二种情形成立. 我们证明第一种情形. 设$A \subset C_0^1(\Omega), \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1, \forall u \in A$, 固定$\varepsilon > 0$,

$$|J_\varepsilon * u(x)| \le \int_{|z|\le 1} J(z)|u(x-\varepsilon z)|dz \le \varepsilon^{-n} \sup J \cdot \|u\|_{L^1},$$

$$|D(J*u(x))| \le \varepsilon^{-1} \int_{|z|\le 1} |DJ(z)u(x-\varepsilon z)|dz \le \varepsilon^{-n-1} \sup |DJ| \|u\|_{L^1}.$$

于是$\{J_\varepsilon * u, u \in A\}$在$C^0(\overline{\Omega})$上有界, 等度连续, 从而在$C^0(\overline{\Omega}), L^1(\Omega)$中准紧.

现在

$$
\begin{aligned}
|u(x) - J_\varepsilon * u(x)| &\le \int_{|z|\le 1} J(z)|u(x) - u(x-\varepsilon z)|dz \\
&\le \int_{|z|\le 1}\int_0^{\varepsilon|z|} |D_r u(x - r\omega)|drdz,\ \omega = \frac{z}{|z|};
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int_\Omega |u(x) - J_\varepsilon * u(x)|dx \le \varepsilon\frac{\omega_n}{n}\int_\Omega |Du|dx \le \frac{\omega_n}{n}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\varepsilon.
$$

我们看到在$q = 1$时成立. 而用不等式

$$
\|u\|_{L^q} \le \|u\|_{L^1}^{\lambda}\|u\|_{L^{p^*}}^{1-\lambda} \le C\|u\|_{L^1}^{\lambda}\|\nabla u\|_{L^p}^{1-\lambda}
$$

我们能证明在L^q的准紧性质. $\square$

Example

2.4 设

$$u_k(x)=\begin{cases} k^{\frac{n-p}{p}}(1-k|x|), & |x|<\frac{1}{k};\\ 0, & 1\geq |x|\geq \frac{1}{k}.\end{cases}$$

我们看到:

$$\int_B |\nabla u_k|^p dx=\omega_n k^n\int_0^{1/k} r^{n-1}dr=\frac{\omega_n}{n},$$

$$\int |u_k|^{p^*}dx=\omega_n k^n\int_0^{1/k}(1-kr)^{p^*}r^{n-1}dr=\omega_n\int_0^1 t^{p^*}(1-t)^{n-1}dt,$$

而

$$u_k(x)\to 0,\ a.e.\, x\in B,$$ $q=p^*$ 时的反例

我们看到u_k不能在$L^{p^*}(B)$中强收敛.

Theorem

2.20 *(Sobolev紧嵌入定理)* 设$\Omega, p, k, p_k^*, m_{k,p}$ 如定理*2.18*所示， 那么
(i) 如果$kp < n$, 则$\forall q \in [1, p_k^*)$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;
(ii) 如果$kp = n$, 则$\forall q \in [1, \infty)$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;
(iii) 如果$kp > n$, 则$\forall \gamma \in [0, m_{k,p})$,

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{\Omega}).$$

证明. 详见[Admas: 2003] Ch.4. □

作业 12: 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集， $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 1$, k为非负整数。 则 $C^{k,\alpha_2}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k,\alpha_1}(\bar{\Omega})$.

3. Poincaré不等式

边界不一定为0时

Theorem

2.21 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界连通开区域，$\partial\Omega \in C^{0,1}$，$p \geq 1$，则有

$$||u - u_\Omega||_{L^q(\Omega)} \leq C(p, n, q, \Omega)||Du||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

其中$u_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$称为$u$在$\Omega$上的平均值，而

$$q \in \begin{cases} [1, \frac{np}{n-p}) & if \quad p < n \\ [1, \infty), & if \quad p = n \\ [1, \infty], & if \quad p > n \end{cases}.$$

证明. (Blow up 方法) 不妨设$p < n$， 其它情况类似， 详见[E. H. Lieb , M. Loss: Analysis, AMS, 2001]. 此时$q \in [1, \frac{np}{n-p})$. 利用Hölder不等式， 只要对$q \in [p, \frac{np}{n-p})$证明即可. 反设结论不正确， 则存在$\{u_m\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ 使得

$$||u_m - (u_m)_\Omega||_{L^q(\Omega)} > m||Du_m||_{L^p(\Omega)}.$$

令$v_m = \frac{u_m-(u_m)_\Omega}{||u_m-(u_m)_\Omega||_{L^q(\Omega)}}$, 则

$$||v_m||_{L^q(\Omega)} = 1, \quad ||Dv_m||_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \cdots$$

因为Ω有界且$p \le q$, 所以v_m为$W^{1,p}(\Omega)$中的有界序列. 由定理2.20， 存在子列（仍记为本身）和$v \in L^q(\Omega)$ 使得$v_m \to v$ in $L^q(\Omega)$ $(m \to \infty)$. 故有

$$v_\Omega = \lim_{m\to\infty} (v_m)_\Omega = 0, \tag{2.16}$$

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{L^q(\Omega)} = 1. \tag{2.17}$$

另一方面，$Dv_m \to 0$ in $L^p(\Omega)$, 所以由命题2.6(2)知Dv存在，且$Dv = 0$ in Ω, 即$v \in W^{1,p}(\Omega)$.

又Ω连通， 不难证明: $v = constant$ a.e. in Ω ([Evans, Problem 11 in Section 5.10])。 再由(2.16), $v = 0$ a.e. in Ω 这与(2.17)矛盾。 □

注: 由[Gilbarg-Trudinger]的(7.45)知： 如果Ω是有界凸, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 对于Ω的任何可测集E， 均有

L^p 范数

$$||u - u_E||_{L^p(\Omega)} \le \left(\frac{\omega_n}{|E|}\right)^{1-\frac{1}{n}} d^n ||Du||_{L^p(\Omega)}, \tag{2.18}$$

其中$d = diam(\Omega), \omega_n = |B(0,1)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$. 特别，当$S = \Omega = B(x,r)$时, 有

$$||u - u_{B(x,r)}||_{L^p(B(x,r))} \le 2^n r ||Du||_{L^p(B(x,r))}. \tag{2.19}$$

2.11 差商与弱导数

函数$u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$关于第i变量步长为h的差商定义为

$$D_i^h u(x)=\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}.$$

记$D^h u=(D_1^h u,\cdots,D_n^h u)$.
先设$u\in C^1(\Omega)$, 取$\Omega_1\subset\subset\Omega$, 当$|h|<dist(\Omega_1,\partial\Omega)$时，
$\forall x\in\Omega_1$, 有

$$\begin{aligned}|D_i^h u(x)| &= \left|\frac{1}{h}\int_0^1\frac{du(x+hte_i)}{dt}dt\right| \\ &\le \int_0^1 |D_{x_i}u(x+hte_i)|dt.\end{aligned}$$

所以利用Hölder不等式， 有

$$\int_{\Omega_1}|D_i^h u(x)|^p dx\le\int_{\Omega}|D_{x_i}u(x)|^p dx. \qquad (2.20)$$

Theorem

2.22 *(i)* 设$u \in W^{1,p}(\Omega), p \in [1, \infty], \Omega_1 \subset\subset \Omega$, 则

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)} \le \|D^{e_i} u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall h, 0 < |h| < dist(\Omega_1, \partial\Omega).$$

(ii) 设$p \in (1, \infty), \Omega_1 \subset\subset \Omega, u \in L^p(\Omega)$且存在常数$C_i, \delta > 0$使得

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega_1)} \le C_i, \quad \forall h, 0 < |h| < \delta,$$

则弱导数$D^{e_i} u$存在属于$L^p(\Omega_1)$, 且$\|D^{e_i} u\|_{L^p(\Omega_1)} \le C_i$.

证明. 利用(2.20)和定理2.7， 我们立即得到(i). 下面证明(ii).

$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_1)$, 则

$$\int_{\Omega_1} u(x)\phi(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{\Omega_1} u(x)D_i^h\phi(x)dx.$$

而$\forall h, 0 < |h| < dist(Supp\,\phi, \partial\Omega_1)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} u(x)D_i^h\phi(x)dx &= -\frac{1}{h}\int_{\Omega_1} u(x)\phi(x)dx \\
&+ \frac{1}{h}\int_{\Omega_1} u(x)\phi(x+he_i)dx \\
&= -\frac{1}{h}\int_{\Omega_1} u(x)\phi(x)dx \\
&+ \frac{1}{h}\int_{\Omega_1+he_i} u(x-he_i)\phi(x)dx \\
&= -\int_{\Omega_1} D_i^{-h}u(x)\phi(x)dx. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

因为(ii)的条件说集合$\{D_i^{-h}u, 0 < |h| < \delta\}$ 是$L^p(\Omega_1)$的有界集， 而当$p > 1$时它自是反的空间，其有界集为弱*列紧集。 即：存在子列 $h_k \to 0$使得
$D_i^{-h_k}u \to v_i$ 弱* in $L^p(\Omega_1)$, 且$\|v_i\|_{L^p(\Omega_1)} \le C_i$.
于是由(2.21)得

$$\int_{\Omega_1} u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_{\Omega_1} v_i(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

即$D^{e_i}u = v_i$且$\|D^{e_i}u\|_{L^p(\Omega_1)} \le C_i$. □

注: 当$p=1$时, (ii)不一定正确，可见[Evans, Problem 12 in Section 5.10].

为了以后方便，我们把(2.21)写成一个推论。

Corollary

2.1 如果$u \in L^1_{loc}(\Omega), \Omega_1 \subset\subset \Omega$, 则 $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_1)$,有

$$\int_{\Omega_1} u(x) D_i^h \phi(x) dx = -\int_{\Omega_1} D_i^{-h} u(x) \phi(x) dx$$

$$\forall h, 0 < |h| < dist(Supp\, \phi, \partial\Omega_1).$$

2.12 空间$H^{-1}(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$上的全体有界线性泛函记为$H^{-1}(\Omega)$.
对于$f \in H^{-1}(\Omega)$, 定义

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = sup\{< f, u >:= f(u): \ u \in H_0^1(\Omega), \ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1\}.$$

则$\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$为线性空间$H^{-1}(\Omega)$的范数，且$H^{-1}(\Omega)$是一个Bananch空间。

Example

2.5 如果$f_0, f^1, \cdots, f^n \in L^2(\Omega)$, 定义

$\int_\Omega f^i u_{x_i} dx = -\int_\Omega f^i_{x_i} u\, dx$

$$< f, u >= \int_\Omega (f_0 u + \sum_{i=1}^n f^i u_{x_i}) dx, \quad \forall u H_0^1(\Omega), \qquad (2.22)$$

$= \int_\Omega u \left(f_0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i} \right) dx$

当 $f \in L^2$ 时

$f = f_0 - \sum f^i_{x_i}$

则$f \in H^{-1}(\Omega)$.

Theorem

2.23 如果 $f \in H^{-1}(\Omega)$，则
(i) 存在$f_0, f^1, \cdots, f^n \in L^2(\Omega)$, 使得*(2.22)*成立;
(ii) 下式恒成立

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} &= inf\{[\int_\Omega (f_0^2 + \sum_{i=1}^n (f^i)^2) dx]^{\frac{1}{2}} : \\ &\quad f_0, f^1, \cdots, f^n \in L^2(\Omega) \text{满足}(2.22)\}.(2.23) \end{aligned}$$

(iii) 如果 $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$，则

$$< f, u >= \int_\Omega f(x)u(x)dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

证明. 因为$H_0^1(\Omega)$是Hilbert空间，由其Riesz表示定理，存在唯一的$v \in H_0^1(\Omega)$使得

$$f(u) = < v, u >_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (vu + \sum_{i=1}^n v_{x_i} u_{x_i}) dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

于是取$f_0 = v, f^i = v_{x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$，即得(2.22)。

(ii)和(iii)的证明可见[Evans, P.302]. $\square$

注1: 采用弱导数的记号，上述定理的结论可记为$f = f_0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}$.

$f \in L^2$ 时直接相等