Exercice 1 (6pts)

Var de décisions (yi 1pt + xi 1pt)

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{si on décide de cultiver le légume } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

x_i : nombre de m^2 alloués à la culture i

1 : carottes
2 : courgettes
3 : Tomates
4 : concombres

$$\underset{kg}{\text{Max } Z} = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4$$

1 pt

s.l.c

Contraintes 0.25pt par contrainte

$$0,75x_1 + 1,5x_2 + 2,25x_3 + 1,8x_4 \leq 250$$

$$1,25x_1 + 1,70x_2 + 1,75x_3 + 1,4x_4 \leq 210$$

$$0,5x_1 + x_2 + 1,2x_3 + x_4 \leq 180$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12000\,m^2$$

$$4x_1 \leq 0,3\,(4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \leq y_2 \\ y_1 \leq y_4 \end{pmatrix} \text{ ou } (2y_1 \leq y_2 + y_4)$$

$$x_1 \leq M_1 y_1$$

$$x_2 \leq M_2 y_2$$

$$x_3 \leq M_3 y_3$$

$$x_4 \leq M_4 y_4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

Exercice 2

3pts = Domaine réalisable 2pt ; solution optimale 1pt

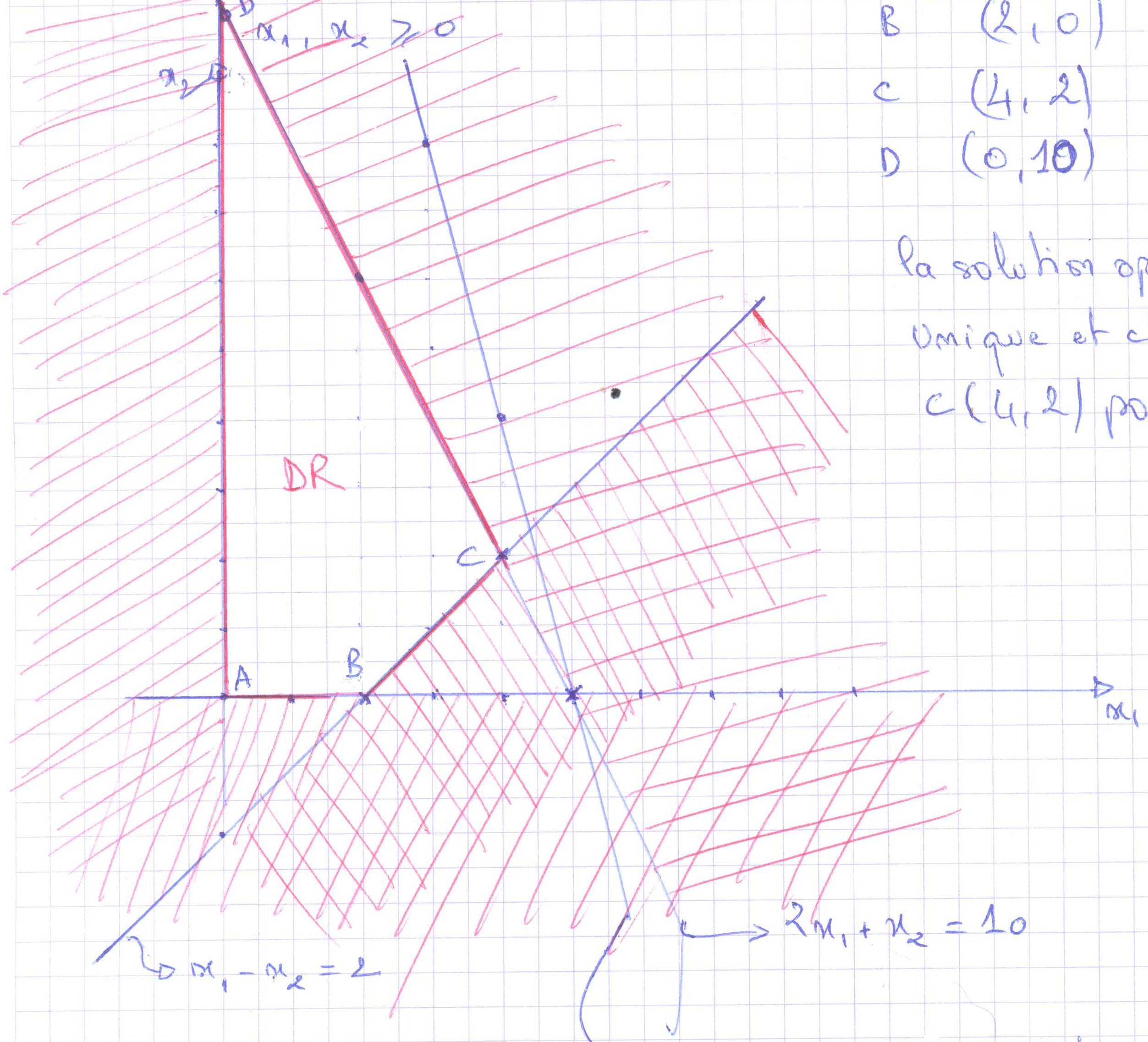
$$\text{Max } Z = 6x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.l.c} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 4x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \equiv (P)$$

1/

P.E	(x_1, x_2)	$Z = 6x_1 + 2x_2$
A	(0,0)	0
B	(2,0)	12
C	(4,2)	28
D	(0,10)	20

la solution optimale est unique et c'est le point C(4,2) pour Z = 28



← c'est une contraintes inutile

2/ $\text{Min } Z' = 10y_1 + 2y_2 + 20y_3$

s.l.c

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 6$$

$$y_1 - y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

c'est le Dual de (P)

1.5pt =Fonction-objectif 0.5pt contraintes 1pt

3/

(P) $\text{Max } Z = 6x_1 + 2x_2$

s.l.c

$2x_1 + x_2 + s_1 = 10 \longrightarrow y_1$

$x_1 - x_2 + s_2 = 2 \longrightarrow y_2$

$4x_1 + x_2 + s_3 = 20 \longrightarrow y_3$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

(D) $\text{Min } Z' = 10y_1 + 2y_2 + 20y_3$

s.l.c

$2y_1 + y_2 + 4y_3 - r_1 = 6$

$y_1 - y_2 + y_3 - r_2 = 2$

$y_1, y_2, y_3, r_1, r_2 \geq 0$

les écarts complémentaires indique que :

$x_1 \times r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$

$x_2 \times r_2 = 0 \Rightarrow r_2 = 0$

$y_1 \times s_1 = 0$ —

$y_2 \times s_2 = 0$ —

$y_3 \times s_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 0$

la solution optimale de (P) est :

$Z = 28$ $\begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 6 \\ y_1 - y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \frac{8}{3}, \quad y_2 = 2/3$

$\Rightarrow$ la solution optimale de (D) est :

$Z' = 28$ $\begin{pmatrix} y_1 = 8/3 \\ y_2 = 2/3 \\ y_3 = 0 \\ r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \end{pmatrix}$

2pts = Z' 0.5pt + 0.5pt x 3 pour yi

4/ et 5/

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	CD	Ratio
s_1	2	1	1	0	0	10	5
s_2	1	-1	0	1	0	2	2 ←
s_3	4	1	0	0	1	20	5
Z	-6 ↑	-2	0	0	0	0	

solutions de Base

A $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ s_1 = 10 \\ s_2 = 2 \\ s_3 = 20 \end{pmatrix}$

$Z_A = 0$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	CD	Ratio
s_1	0 ^{0}	3 ^{1}	1 $^{1/3}$	-2 $^{-2/3}$	0 ^{0}	6 ^{2}	2 ←
x_1	1	-1	0	1	0	2	—
s_3	0	5	0	-4	1	12	$\frac{12}{5}$
Z	0	-8 ↑	0	6	0	12	

B $\begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ s_1 = 6 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 12 \end{pmatrix}$

$Z_B = 12$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	CD
x_2	0	1	1/3	-2/3	0	2
x_1	1	0	1/3	1/3	0	4
s_3	0	0	-5/3	-2/3	1	2
Z	0	0	8/3	2/3	0	28

C $\begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 2 \end{pmatrix}$

$Z_C = 28$

le point C est l'unique solution optimale

3pts = 2 pts pour les dictionnaires et 1 pt pour la solution optimale

6/ on sait que la solution optimale de (P) est :

1.5pt= 0.5 par contrainte + 0.5pt pour l'explication

$$\begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Donc les deux premières contraintes de (P) sont saturées puisque leur variable d'écart sont nulles ($s_1 = s_2 = 0$)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$ sont saturés à l'optimalité

7/ si on remplace le coté droit de la première contrainte de (P) par (11) (Donc +1 par rapport l'ancienne valeur) alors la nouvelle valeur de $z = 28 + \underbrace{8/3}_{} = 30,67$

c'est le coût réduit associé à la première contrainte.

1.5pt = 1pt pour la solution + 0.5ptpourl'explication