V355

Gekoppelte Schwingkreise

Toby Teasdale
toby.teasdale@tu-dortmund.de

Erich Wagner
erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.11.2021

Abgabe: 21.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel **3**

2 Theorie **3**
2.1 Verhalten kapazitiv gekoppelter Schwingkreise 3
2.2 Abhängigkeit des Stromes von der Frequenz 6

3 Durchführung **8**
3.1 Justierung der Schwingkreise 8
3.2 Messung 8

4 Fehlerrechnung **10**

5 Auswertung **10**
5.1 Justierung 10
5.2 Verhältnis Schwingung- und Schwebungsfrequenz 11
5.3 Die Frequenzen der Fundamentalschwingungen 13
5.4 Frequenzabhängige Stromstärke 14

6 Diskussion **15**

Literatur **15**

1 Ziel

Ziel des Versuchs ist, auf verschiedene Weisen die Fundamentalfrequenzen der Schwingkreise bei Anregung durch ein äußeres Signal zu untersuchen.

2 Theorie

Zwei schwingende Systeme nennt man dann gekoppelt, wenn sie aufeinander eine Rückwirkung ausüben. Die Kopplung zweier schwingungsfähiger Systeme kann mithilfe äußerer Anregungen zur Energieübertragung gebracht werden, welche sich in Form von Resonanzeffekten erkennbar macht.

Als ein gekoppeltes Schwingsystem sind zwei durch eine Feder verbundene Fadenpendel schwer zu untersuchen. Es wird daher auf elektrische Schwingkreise zurückgegriffen, da Frequenz und Amplitude dabei leichter zu bestimmen sind.

2.1 Verhalten kapazitiv gekoppelter Schwingkreise

Es werden zwei identische Schwingkreise betrachtet, die durch eine Kapazität C_K miteinander verbunden sind.

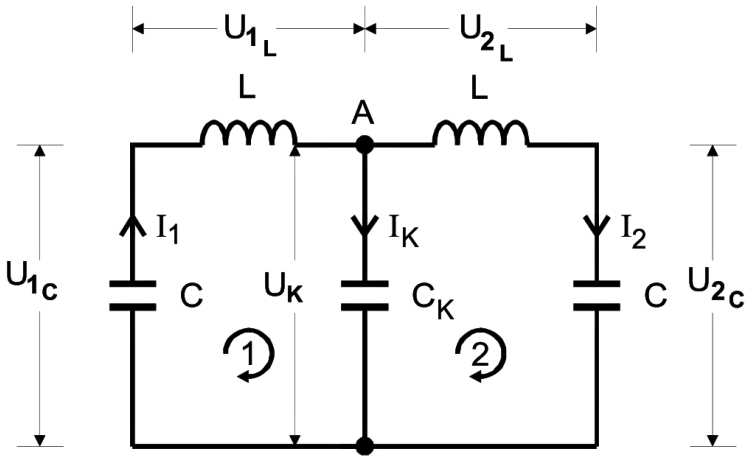


Abbildung 1: Schaltung kapazitiv gekoppelter Schwingkreise. [5]

Mithilfe der *Kirchhoffschen Gesetze*, welche den Zusammenhang zwischen mehreren elektrischen Strömen und Spannungen beschreiben, ergibt sich im Knotenpunkt A

$$I_1 = I_\mathrm{K} + I_2 \,. \tag{1}$$

Für Masche 1 und 2 ergibt sich

$$U_{1,2_C} + U_{1,2_\mathrm{L}} + U_\mathrm{K} = 0\,. \tag{2}$$

In dieses Gleichungssystem werden die Beziehungen

$$U_C = \frac{1}{C}\,\mathrm{d}t \int I \quad \text{und} \quad U_\mathrm{L} = L\dot{I} \tag{3}$$

eingesetzt. Damit ergeben sich für die beiden Maschen mit Differentiation nach t die Differentialgleichungen

$$L\dot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C_\mathrm{K}}(I_1 - I_2) = 0 \tag{4}$$

$$L\dot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C_\mathrm{K}}(I_1 - I_2) = 0\,. \tag{5}$$

Addition und Subtraktion der Gleichungen (4) und (5) ergibt die entkoppelten Differentialgleichungen für die neuen Variablen $(I_1 + I_2)$ und $(I_1 - I_2)$

$$L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \tag{6}$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_\mathrm{K}}\right)(I_1 - I_2) = 0\,. \tag{7}$$

Diese werden durch

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1,0} + I_{2,0})\cos(I_1 + I_2) \tag{8}$$

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1,0} - I_{2,0})\cos\left(\frac{t}{\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_\mathrm{K}}\right)^{-1}}}\right) \tag{9}$$

gelöst. Durch erneute Addition und Subtraktion von (8) und (9) ergeben sich die Lösungen der ursprünglichen Ströme I_1 und I_2

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0})\cos(2\pi\nu^+ t) + \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0})\cos(2\pi\nu^- t) \tag{10}$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0})\cos(2\pi\nu^+ t) - \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0})\cos(2\pi\nu^- t)\,, \tag{11}$$

wobei

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \text{und} \qquad \nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_\mathrm{K}}\right)^{-1}}} \tag{12}$$

die Schwingungsfrequenzen von (8) und (9) darstellen.

Sind zu Beginn die Amplituden beider Schwingkreise gleich groß ($I_{1,0} = I_{2,0}$), so entfallen bei (10) und (11) die jeweils letzten Terme. In diesem Fall schwingen die beiden Schwingkreise gleichphasig mit der Schwingunsfrequenz ν^+, am Koppelkondensator C_K liegt dabei nie eine Spannung an. Bei gegengleichen Amplituden ($I_{1,0} = -I_{2,0}$) schwingen die Schwingkreise gegenphasig mit der erhöhten Schwingunsfrequenz ν^- und die Spannung an C_K wird maximal. Diese beiden Schwingungstypen werden *Fundamentalschwingungen* genannt.

Wird hingegen nur einer der beiden Schwingkreise ausgelenkt ($I_{1,0} \neq 0\,, I_{2,0} = 0$), so ergeben sich Schwebungen. Für die Ströme gilt dann

$$I_1(t) = I_{1,0} \cos(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cos(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \tag{13}$$

$$I_2(t) = I_{1,0} \sin(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \sin(\pi(\nu^+ - \nu^-)t)\,. \tag{14}$$

Der Verlauf der Ströme $I_1(t)$ und $I_2(t)$ werden in Abbildung (2) dargestellt.

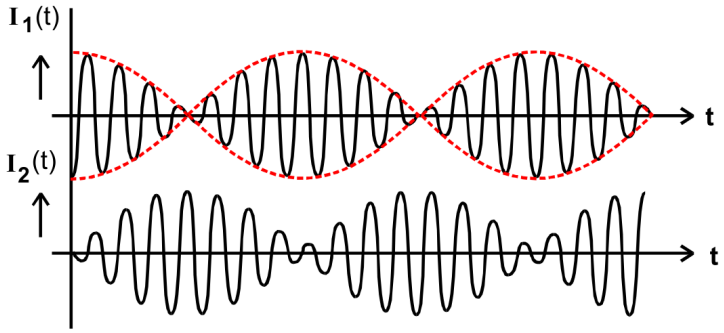


Abbildung 2: Zeitlicher Verlauf der Ströme im Falle einer Schwebung. [5]

Bei diesen Anfangsbedingungen wird die Energie des ausgelenkten Schwingkreises auf den ruhenden übertragen, was eine gekoppelte Schwingung zur Folge hat. Die Amplitude der Schwingungsfrequenz ändert sich mit der *Schwebungungsfrequenz*

$$\nu_\mathrm{Schwebung} = \nu^- - \nu^+, \tag{15}$$

während das System mit der Schwingungsfrequenz

$$\nu_\mathrm{Schwingung} = \frac{1}{2}\left(\nu^+ + \nu^-\right) \approx \nu^+ \tag{16}$$

schwingt.

2.2 Abhängigkeit des Stromes von der Frequenz

Werden die Schwingkreise durch eine von außen angelegte Sinusspannung angeregt (siehe Abbilldung 3),

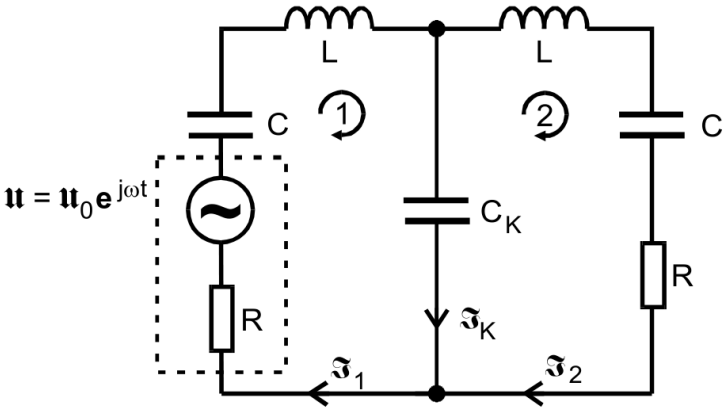


Abbildung 3: Schwingkreise mit Sinusgenerator. [5]

so ergeben sich mithilfe der *Kirchhoffschen Maschenregel* die Gleichungen

$$U = (z_C + z_\mathrm{L} + z_{C_\mathrm{K}} + z_R)I_1 - z_{C_\mathrm{K}} I_2 \tag{17}$$

$$0 = (z_C + z_\mathrm{L} + z_{C_\mathrm{K}} + z_R)I_2 - z_{C_\mathrm{K}} I_1 \tag{18}$$

mit den Impedanzen

$$z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad z_\mathrm{L} = i\omega L \qquad z_R = R\,. \tag{19}$$

Nach Elimination von I_1 folgt für I_2

$$I_2 = U \frac{\frac{1}{i\omega C_\mathrm{K}}}{\left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{i\omega C_\mathrm{K}} + R\right)^2 + \frac{1}{\omega^2 C_\mathrm{K}^2}} \tag{20}$$

$$\Rightarrow |I_2| = |U| \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_\mathrm{K}^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_\mathrm{K}} - \omega C_\mathrm{K} Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_\mathrm{K}\right)^2}} \tag{21}$$

mit

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_\mathrm{K}}\right)^{-1}}\,. \tag{22}$$

Der Strom I_2 nimmt für ν^+ und ν^- seine Maxima an:

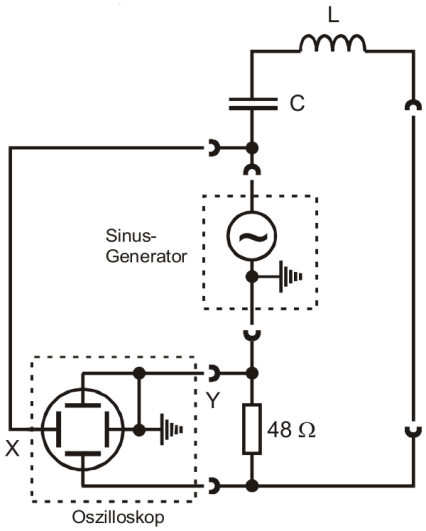
$$\left|I_2\left(\omega^+\right)\right| = \frac{1}{R\sqrt{4+\frac{R^2C_\mathrm{K}^2}{LC}}} \tag{23}$$

$$\left|I_2\left(\omega^-\right)\right| = \frac{1}{R\sqrt{4+\frac{R^2C_\mathrm{K}^2}{LC}\left(1+\frac{C}{C_\mathrm{K}}\right)}} \tag{24}$$

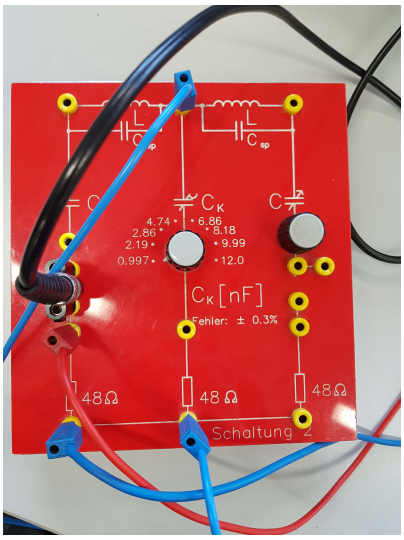
3 Durchführung

3.1 Justierung der Schwingkreise

Da die Schwingkreise nicht dieselbe Resonanzfrequenz besitzen, muss der einstellbare Schwingkreis an die Resonanzfrequenz des Referenzschwingkreises angepasst werden, indem dort die Kapazität variiert wird. Also wird zunächst die Resonanzfrequenz des Referenzschwingkreises bestimmt.



(a) Schematischer Aufbau. [5]



(b) Aufbau des Schwingkreises 1.

Abbildung 4: Schaltung zur Bestimmung der Resonanzfrequenz.

Zunächst wird die Frequenz der Sinusspannung angepasst, bis das Oszilloskop eine maximale Amplitude zeigt. Für eine genaue Messung wird anschließend das Oszilloskop zusätzlich mit der Generatorspannung über den zweiten Eingang verbunden. Dafür wird mithilfe der Schaltung in Abblildung 4 die Frequenz des Sinus-Signals solange variiert, bis die *Lissajous-Figur* die From einer Gerade annimmt. Ist die Resonanzfrequenz erreicht, so befinden sich die Sinus-Spannung und der Strom in Phase. Analog wird der andere Schwingkreis passend einstellen. Die anpassbare Kapazität wird auf die ermittelte Fequenz eingestellt und für alle folgenden Messungen nicht mehr geändert.

3.2 Messung

Schwebungsfrequenz

Nun wird die Schaltung in Abbildung 5 mit einem Rechteckspuls angeregt.

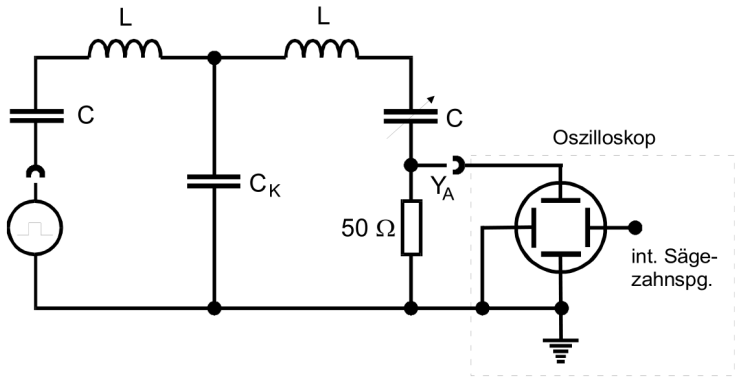


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Energieübertragung. [5]

Durch die Widerstände von $R = 48\,\Omega$ ergibt sich ein Spannungsabfall. Die Stromänderung wird zur Beobachtung der Schwebung am Oszilloskop visualisiert und die Maxima der Schwingung innerhalb einer Periode gezählt.

Damit lässt sich schließlich das Verhältnis der Schwebungsfrequenz und der Schwingungsfrequenz bestimmen. Dieser Prozess wird für mehrere Koppelkapazitäten durchgeführt. Dabei sind Kapazitäten zwischen $C_\mathrm{K} = 2\,\mathrm{nF}$ und $C_\mathrm{K} = 12\,\mathrm{nF}$ möglich.

Fundamentalschwingungen

Jetzt werden die Frequenzen ν^- und ν^+ der *Fundamentalschwingungen* in Abhängigkeit der Koppelkapazität C_K gemessen. Dafür wird die Anregung wieder auf eine Sinusanregung gestellt. Zusätzlich wird die Generatorspannung als x-Ablenkung benutzt. Nun sucht man wie zu Beginn mithilfe der Lissajous-Figuren die Frequenzen, bei denen die Phase 0 oder π ist. Dies wird für alle Kapazitäten C_K durchgeführt.

Frequenzabhängige Stromstärke

Schließlich werden die Fundamentalschwingungen anhand des Stromverlaufs bestimmt. Dafür wird der im Sinusgenerator verbaute Wobbelgenerator dafür verwendet, um für die jeweils eingestellte Koppelkapazität C_K das Frequenzintervall zu durchlaufen. Erreicht der Strom sein Maximum, so wird auf dem Frequenzintervall ein Maximum erkenntlich, dessen Zeitpunkt abgelesen wird. Auch dies wird für alle Kapazitäten C_K durchgeführt.

4 Fehlerrechnung

Im Folgenden wird die allgemeine Fehlerrechnung, und alle wichtigen Größen der entsprechenden Rechnung, erklärt. Die wichtigsten Werte dabei sind der Mittelwert und die Standartabweichung

$$\text{Mittelwert: } \bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n} x_i \tag{25}$$

$$\text{Standartabweichung: } \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N}(x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2}\,. \tag{26}$$

Dabei entspricht N der Anzahl an Werten und x_i ist jeweils ein mit einem Fehler gemessener Wert.

Es ergibt sich ebenfalls die statistische Messunsicherheit

$$\Delta\,\bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=0}^{N}(x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2}\,. \tag{27}$$

Entstehen mehrere Unbekannte in einer Messung, folgen daraus auch mehrere Messunischerheiten. Diese müssen in dem weiteren Verlauf der Rechnung berücksichtigt werden. Es gilt die *Gaußsche Fehlerfortplanzung*

$$\Delta f(y_1, y_2, ..., y_N) = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_2}\Delta y_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_N}\Delta y_N\right)^2}\,. \tag{28}$$

5 Auswertung

5.1 Justierung

Die in Schaltung 1 (siehe Abbildung 4b) verbauten Kenngrößen sind sind in Tabelle 1 zu sehen.

Wobei C_{Sp} die Kapazität der realen Spule entspricht, wie der Abblildung 6 entnommen werden kann.

Die bei der Justierung gemessene Resonanzfrequenz des ersten Schwingkreises beträgt

$$\nu^{+}_{\text{gemessen}} = 35{,}7\,\text{kHz}\,.$$

Tabelle 1: Werte der in Schwingkreis 1 verbauten Komponenten

Kompentente	Wert
L	23.954 mH
C	0.7932 nF
C_{Sp}	0.028 nF
R	48 Ω

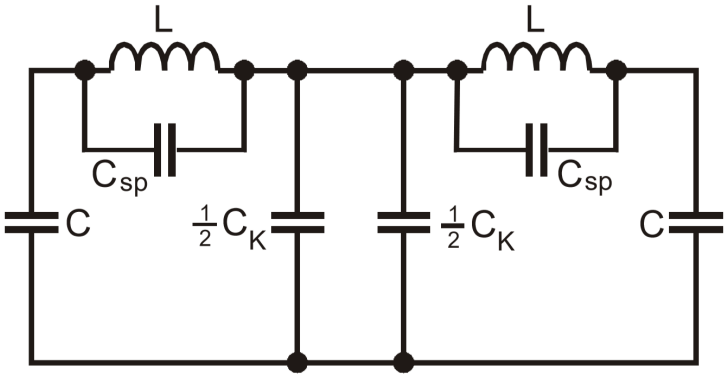


Abbildung 6: Berücksichtigung der Spulenkapazität $\mathrm{C_{Sp}}$. [5]

Mithilfe von (12) lässt sich die theoretische Fundamentalfrequenz von Schwingkreis 1 errechnen:

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = 36{,}51\,\mathrm{kHz} \quad \text{bzw.} \quad \nu^+ = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L\,(C + C_{\mathrm{SP}})}} = 35{,}88\,\mathrm{kHz} \tag{29}$$

Die Ergebnisse zwischen Messung und Theoriewerte stimmen mit geringer Abweichung überein (siehe Tabelle 2).

Tabelle 2: Werte der in Schwingkreis 1 verbauten Komponenten

Betrachtete Kapazität / nF	Abweichung / %
$\mathrm{C} = 0.7932$	2.3
$\mathrm{C} + \mathrm{C_{Sp}} = 0.8212$	0.5

5.2 Verhältnis Schwingung- und Schwebungsfrequenz

Die Verhältnisse der Schwingungs- und Schwebungsfrequenz lassen sich anhand der Anzahl an Schwingungen pro Schwebung bestimmen (siehe Tabelle 3).

Tabelle 3: Anzahl der bei der Messung ersichtlichen Maxima/Minima der Schwebungen im Vergleich mit dem Theoriewert.

C_K / nF	Maxima	n	Δn_rel / %
2.19	4	3.69	7.69
2.86	5	4.55	9.01
4.74	7	6.94	0.90
6.86	9	9.62	6.85
8.18	10	11.28	12.82
9.99	11	13.56	23.31
12.00	12	16.10	34.14

Die Frequenzen werden in Tabelle 4 mithilfe von (12), (15) und (16) theoretisch berechnet. Der Koppelkondensator C_K besitzt dabei einen Fehler von 0.3 %, der sich wie in Kapitel 4 beschrieben fortpflanzt.

Tabelle 4: Berechnung der Schwingungs- und Schwebungsfrequenz anhand der Theoriewerte in Abhängigkeit der Kapazität C_K.

C_K / nF	ν_t^+ / kHz	ν_t^- / kHz	$\nu_\mathrm{Schwingung}$ / kHz	$\nu_\mathrm{Schwebung}$ / kHz
0.997 ± 0.003	36.51	58.77 ± 0.050	47.64 ± 0.027	22.26 ± 0.050
2.19 ± 0.007	36.51	47.95 ± 0.030	42.23 ± 0.015	11.44 ± 0.030
2.86 ± 0.009	36.51	45.53 ± 0.024	41.02 ± 0.012	9.02 ± 0.024
4.74 ± 0.014	36.51	42.18 ± 0.016	39.35 ± 0.008	5.67 ± 0.016
6.86 ± 0.021	36.51	40.51 ± 0.011	38.51 ± 0.006	4.00 ± 0.011
8.18 ± 0.025	36.51	39.90 ± 0.010	38.20 ± 0.005	3.39 ± 0.010
9.99 ± 0.030	36.51	39.30 ± 0.008	37.91 ± 0.004	2.79 ± 0.008
12.00 ± 0.040	36.51	38.85 ± 0.007	37.68 ± 0.003	2.34 ± 0.007

Die Größe n in Tabelle 3 beschreibt das Verhältnis zwischen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz. Somit gibt es die Anzahl der Maxima bzw. Minima innerhalb der Schwebung an. Die Maxima und Minima wechseln nach jeder π Periode der Schwebung, sodass die Anzahl der Maxima immer π periodisch zwischen den zwei Werten schwankt. Die Berechnung von n erfolgt dabei mit

$$n = \frac{\nu^+ + \nu^-}{2\left(\nu^- - \nu^+\right)} = \frac{\nu_\mathrm{Schwingung}}{\nu_\mathrm{Schwebung}} \,. \tag{30}$$

Zu beachten ist, dass die Messwerte ganzzahlige Maxima darstellen, während die Theoriewerte das exakte Verhältnis von Schwingungs- und Schwebungsfrequenz angeben. Die Berechnung der Abweichung Δn_rel erfolgt durch

$$\Delta n_\mathrm{rel} = \frac{\Delta n}{n} = \frac{|n - n_t|}{n} \,. \tag{31}$$

5.3 Die Frequenzen der Fundamentalschwingungen

Die Ergebnisse der Messungen sind in Tabelle 5 zu sehen, während die theoretischen Frequenzen der Fundamentalschwingungen bereits bei der Ermittelung der Verhältnisse zwischen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz berechnet wurden (siehe Tabelle 4). Der dabei auftretende Fehler wird in der Diskussion behandelt.

Tabelle 5: Vergleich der Theorie und Messwerte der Frequenzen der Fundamentalschwingungen. Die dabei genutzten Werte stammen aus Tabelle 3 und 4.

	Theoriewerte		Messwerte	
C_K / nF	ν_t^+ / kHz	ν_t^- / kHz	ν^+ / kHz	ν^- / kHz
0.997 ± 0.003	36.51	58.77 ± 0.050	35.1	55.8
2.19 ± 0.007	36.51	47.95 ± 0.030	35.1	43.9
2.86 ± 0.009	36.51	45.53 ± 0.024	35.1	46.1
4.74 ± 0.014	36.51	42.18 ± 0.016	35.1	40.7
6.86 ± 0.021	36.51	40.51 ± 0.011	35.1	39.2
8.18 ± 0.025	36.51	39.90 ± 0.010	35.1	38.6
9.99 ± 0.030	36.51	39.30 ± 0.008	35.1	38.0
12.00 ± 0.040	36.51	38.85 ± 0.007	35.1	37.5

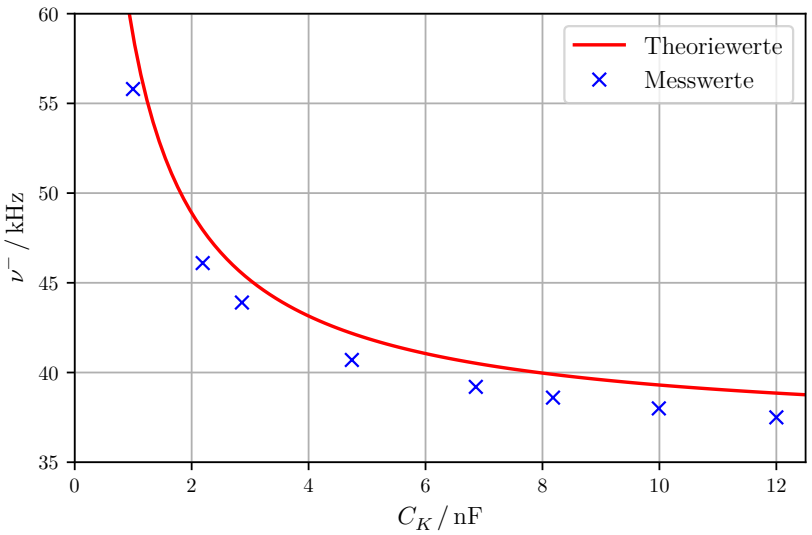


Abbildung 7: Theorie- und Messwerte der Fundamentalschwingung ν^- in Abhängigkeit der Kapazität C_K.

5.4 Frequenzabhängige Stromstärke

Die Fundamentalfrequenzen sind die Frequenzen, für die der Strom maximal wird. Daraus und dem *ohmschen Gesetz* $U = R \cdot I$ folgt, dass auch die Sinusspannung maximal wird, was sich in Form von einer Amplitude innerhalb des Frequenzintervalls äußert.

Es sei angemerkt, dass bei dieser Messung aus technischen Gründen auf einen analogen Aufbau mit anderen Kenngrößen zurückgegriffen wurde (siehe Tabelle 6). Die hierbei gemessene Resonanzfrequenz ist

$$\nu^+_{\text{gemessen}} = 30{,}66\,\text{kHz}\,.$$

Tabelle 6: Werte der im analogen Aufbau verbauten Komponenten.

Kompentente	Wert
L	32.351 mH
C	0.8015 nF
C_{Sp}	0.037 nF
R	48 Ω

Die mithilfe des Wobbelgenerators gemessenen Zeitpunkte der Amplituden sind in Tabelle 7 zu sehen.

Tabelle 7: Die Zeitpunkte der Amplituden, die daraus resultierenden theoretischen Fundamentalfrequenzen und die relative Abweichung zum Messwert.

C_{K} / nF	Amplitude bei t / ms	ν_t^+ / kHz	Δn_{rel} / %	ν_t^- / kHz
1.11 ± 0.003	2.25	22.22	27.52	48.86 ± 0.040
2.03 ± 0.006	2.00	25.00	18.46	41.81 ± 0.028
3.00 ± 0.009	1.75	28.57	6.81	38.72 ± 0.020
4.00 ± 0.012	1.75	28.57	6.81	36.99 ± 0.016
5.02 ± 0.015	1.50	33.33	8.72	35.90 ± 0.013
6.47 ± 0.019	1.50	33.33	8.72	34.91 ± 0.010
8.00 ± 0.024	1.50	33.33	8.72	34.24 ± 0.009
9.99 ± 0.030	1.50	33.33	8.72	33.67 ± 0.007

Die theoretische Fundamentalfrequenz ν_t^+ und der relative Abweichung $\Delta\nu^+_{\text{rel}}$ von der gemessenen Resonanzfrequenz berrechnen sich dabei mithilfe von

$$\nu_t^+ = \frac{1}{t} \cdot \mu \quad \text{und} \quad \Delta\nu^+_{\text{rel}} = \frac{\Delta\nu^+}{\nu^+} = \frac{\left|\nu^+ - \nu_t^+\right|}{\nu^+}\,.$$

Wobei $\mu = \frac{1}{20}\,\text{kHz}$ ist und ν_t^- analog zum ursprünglichen Aufbau nach (12) berechnet wird.

6 Diskussion

Bereits bei der Justierung der Messgeräte fallen die genauen Messwerte für die erste Eigenfrequenz auf. Denn die Abweichung beträgt auch bei Vernachlässigung der Kapazität der Spule nur 2,3 %, wie es schon in Tabelle 2 dargestellt wird. Der Grund für diese geringe Abweichung besteht darin, dass nur in einem schmalen Frequenzbereich die gewünschte Lissajous-Figur auf dem Oszilloskop zu sehen ist. Denn sobald sich die Frequenz ein wenig von der Resonanzfrequenz unterscheidet, ist die geradenförmige Lissajous-Figur, welche eine Phasenverschiebung von 0 bzw. π indiziert, nicht mehr auf dem Oszilloskop nachweisbar. Somit erfordert diese Einstellung zwar ein gewisses Feingefühl bei der Einstellung der Frequenz, allerdings resultiert dies auch in genauen Werten. Die Schaltungsbauteile scheinen aufgrund der gemessen Größen die Wirklichkeit der angegebenen Größen dieser zu bestätigen.

Bei der Betrachtung der Verhältnisse der Schwingungsfrequenzen pro Schwebung wird ersichtlich, dass sie zwar von den Theoriewerten abweichen, jeoch sie sich noch in einem absehbaren Rahmen halten (siehe Tabelle 3), wenn die Tatsache berücksichtigt wird, dass einzelne Schwingungen an den Rändern einer Schwebung häufig nicht eindeutig zugeordnet werden können. Denn es werden bei der Schwebung nicht zwei ganze Schwebungen als eine Wellenlänge angesehen, sondern nur die Länge einer einzigen „Perle“. Daraus resultiert die Tatsache, dass bei der Schwebung, effektiv gesehen, die doppelte Frequenz zum Vergleich mit der Schwingungsfrequenz verwendet wird.

Im Gegensatz zu den oben diskutierten Messresultaten kommt es bei der Messung der Resonanzfrequenzen zu ähnlichen Abweichungen, wie der Vergleich mit Tabelle 5 zeigt oder in Abbildung 7 zu erkennen ist. Dabei weichen die Messwerte alle um einen ähnlichen Wert nach unten relativ zu den Theoriewerten ab. Der Schluss, der daraus gezogen werden kann, ist, dass ein systematischer Fehler auftritt. Doch auch der systematische Fehler kann nicht sehr groß sein, da die maximale Abweichung in Tabelle 5 max $\{\Delta\nu^{-}_{\mathrm{rel}}\} = 5{,}33\,\%$ beträgt.

Literatur

[1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[4] The pandas development team. *pandas-dev/pandas: Pandas*. Version latest. Feb. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3509134. URL: https://doi.org/10.5281/zenodo.3509134.

[5] *Versuchsanleitung „Gekoppelte Schwingkreise“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.