

V101

# Das Trägheitsmoment

Toby Teasdale  
toby.teasdale@tu-dortmund.de

Erich Wagner  
erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 7.12.2021

Abgabe: 14.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Statische Methode . . . . .	4
2.2 Dynamische Methode . . . . .	4
<b>3 Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$ und des Eigenträgheitsmomentes $i_D$	5
3.2 Bestimmung der Trägheitsmomente einer Kugel und eines Zylinders . . .	6
3.3 Trägheitsmoment einer Holzpuppe . . . . .	6
<b>4 Fehlerrechnung</b>	<b>6</b>
<b>5 Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1 Vorbereitung . . . . .	7
5.2 Trägheitsmoment eines Zylinders . . . . .	10
5.3 Trägheitsmoment der Kugel . . . . .	11
5.4 Trägheitsmoment der Puppe . . . . .	11
5.4.1 Abmessungen . . . . .	11
5.4.2 Trägheitsmoment der Puppe: Pose 1 . . . . .	14
5.4.3 Trägheitsmoment der Puppe: Pose 2 . . . . .	16
<b>6 Diskussion</b>	<b>17</b>
<b>Literatur</b>	<b>18</b>

## 1 Ziel

Im Versuch „V101: Das Trägheitsmoment“ soll das Trägheitsmoment verschiedener Körper untersucht werden. Zusätzlich soll der Steiner'sche Satz empirisch nachgewiesen werden.

## 2 Theorie

Die Rotationsbewegung eines Körpers lässt sich durch die physikalischen Größen *Drehmoment*  $M$ , das *Trägheitsmoment*  $I$  und die *Winkelbeschleunigung*  $\dot{\omega}$  beschreiben. Das Trägheitsmoment ist gewissermaßen ein Widerstand, den ein Körper der Bewegung entgegenbringt. Die Formel für das Trägheitsmoment lautet

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i ,$$

wobei  $m_i$  Massepunkte in dem Objekt beschreibt und  $r_i^2$  den senkrechten Abstand von der Rotationsachse. Nun werden allerdings nicht einzelne Massepunkte betrachtet, sondern eine kontinuierliche Massenverteilung. Dies ergibt die folgende Integration

$$I = \int r^2 dm . \quad (1)$$

Diese Gleichungen sind in dieser Form nur dann richtig, wenn die Drehachse auch die Schwerpunktachse ist. Sobald dies nicht mehr gewährleistet ist, ist der *Satz von Steiner* erforderlich. Dabei ist  $I_s$  das Trägheitsmoment des Körpers, wenn die Schwerpunktachse der Rotationsachse entspricht und  $a$  der parallele Abstand zur Rotationsachse ist. Es folgt

$$I = I_s + m \cdot a^2 . \quad (2)$$

Durch Anwendung dieser Gleichungen, ergibt sich das Trägheitsmoment der Kugel

$$I_K = \frac{2}{5} m r^2 . \quad (3)$$

Ebenfalls berechnet sich das Trägheitsmoment eines Zylinders zu

$$I_{Zyl} = \frac{m \cdot R^2}{2} . \quad (4)$$

Ebenfalls ist das *Drehmoment*  $M$  von Interesse, welches mit dem Winkel  $\varphi$  zwischen dem Orts- und Kraftvektor die Formel

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \implies |M| = |F||r| \sin \varphi \quad (5)$$

ergibt. Bei schwingungsfähigen Systemen wie bei einer Feder, lässt sich  $M$  auch mithilfe der *Winkelrichtgröße*  $D$  beschreiben. Es gilt

$$M = D \cdot \varphi . \quad (6)$$

Mit (5) und (6) ergibt sich

$$D = \frac{|F||r|\sin\vartheta}{\varphi} \stackrel{F,r>0}{=} \frac{Fr\sin\vartheta}{\varphi} \stackrel{\vartheta=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{F \cdot r}{\varphi} . \quad (7)$$

Dabei gilt für  $D$  die wichtige Beziehung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} . \quad (8)$$

Durch umstellen ergeben sich die Gleichungen

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad (9)$$

und

$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2} . \quad (10)$$

Zu beachten ist jedoch, dass (8), (9) und (10) ihre Gültigkeit nur für kleine Auslenkungen  $\varphi$  wahren. Es gelten die Näherungen der Kleinwinkelnäherung. Zur Berechnung von  $D$  bieten sich dafür zwei Methoden an.

## 2.1 Statische Methode

Bei der statischen Methode wird mit einem Newtonmeter die Kraft  $F$  bestimmt, die bei einer Auslenkung  $\varphi$  wirkt. Dadurch lässt sich durch (5) und (10)  $D$  bestimmen. Dabei ist darauf zu achten, dass das Newtonmeter im rechten Winkel zum Hebelarm zu halten ist.

## 2.2 Dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode wird die Beziehung (9) benutzt. Es wird also die Schwingungsdauer  $T$  gemessen und mit dem bekannten Trägheitsmoment  $I$  die Winkelrichtgröße  $D$  bestimmt. Es sei angemerkt, dass durch die Anwendung beider Methoden  $D$  und  $I$  gleichzeitig bestimmt werden können.

### 3 Versuchsaufbau und Durchführung

Für diesen Versuch wird ein gedämpfter Schwingkreis benutzt. Der Schwingkreis ist in Form der *Drillachse*, welche in Abbildung 1 zu erkennen ist, vorliegend. Dabei handelt es sich um eine Apperatur, bei der ein beliebiger Körper eingespannt werden kann. Diese ist mit der Winkelrichtgröße  $D$  verknüpft.

#### 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$ und des Eigenträgheitsmomentes $i_D$

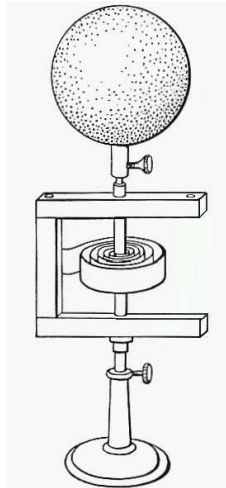


Abbildung 1: Aufbau der Drillachse [3].

Zunächst wird die charakteristische Winkelrichtgröße  $D$  der Drillachse gemessen. Dazu wird als Erstes ein Stab eingespannt. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird dieser als masselos angenommen. Es wird nun wie in Kapitel 2.1 vorgegangen. Zunächst wird mithilfe der **statischen Methode** die Kraft  $F$  gemessen, die benötigt wird, den Stab um den Winkel  $\varphi$  auszulenken. Es wird auch der Radius  $r$  notiert, an der das Newtonmeter angebracht wird. Hier sei erneut angemerkt, dass das Newtonmeter möglichst senkrecht an den Stab angebracht wird. Deshalb wird der Winkel als  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  angenommen. Die Messung wird in  $10^\circ$  Schritten von  $\varphi = 20^\circ$  auf  $\varphi = 120^\circ$  durchgeführt.

Nun wird zur **dynamischen Methode** übergegangen, um das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  zu bestimmen. Der Ablauf dieser Methode wurde in Kapitel 2.2 ausgeführt. Dafür werden auf dem eingespannten Stab zwei Gewichte symmetrisch zur Mitte mit Radius  $r$  angebracht. Danach wird dieser Aufbau um den Winkel  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ausgelenkt und losgelassen. Dieser schwingt nun um die Ruhelage mit einer Schwingungszeit  $T$ . Es werden Radius  $r$  und Schwingungszeit  $T$  notiert. Die Messung wird ebenfalls 10 Mal für verschiedenen Radien durchgeführt.

### 3.2 Bestimmung der Trägheitsmomente einer Kugel und eines Zylinders

Nun werden jeweils eine Kugel und ein Zylinder vermessen und eingespannt. Um das Trägheitsmoment dieser Körper zu bestimmen, wird analog zu Kapitel 3.1 vorgegangen. Dieser Prozess wird für beide Körper 10-fach durchgeführt.

### 3.3 Trägheitsmoment einer Holzpuppe

Hierfür wird eine Holzpuppe eingespannt und es soll für zwei verschiedene Posen das Trägheitsmoment bestimmt werden. Die Puppe wird bei der einen Pose so ausgerichtet, dass die Arme abstehen. Bei der anderen Pose wird sie so ausgerichtet, dass die Beine in einem 90° Winkel zum Torso stehen. Auch hier wird analog zu Kapitel 3.1 vorgegangen. Allerdings müssen dabei die Maße des Körpers aufwendiger aufgenommen werden, da es sich nun nicht mehr um ein symmetrisches Objekt handelt. Es werden also verschiedene Durchmesser an den Gliedmaßen gemessen und es wird zur Approximation ein Mittelwert gebildet.

## 4 Fehlerrechnung

Im Folgenden wird die allgemeine Fehlerrechnung, und alle wichtigen Größen der entsprechenden Rechnung, erklärt. Die wichtigsten Werte dabei sind der Mittelwert und die Standardabweichung. Der arithmetische Mittelwert wird dabei durch die Gleichung

$$\bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n x_i \quad (11)$$

beschrieben. Die Standardabweichung ist durch

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2} \quad (12)$$

gegeben. Dabei entspricht N der Anzahl an Werten und  $x_i$  ist jeweils ein mit einem Fehler gemessener Wert.

Es ergibt sich ebenfalls die statistische Messunsicherheit

$$\Delta \bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2} . \quad (13)$$

Sind nun mehrere fehlerbehaftete Größen in der Messung, wird der sich fortpflanzende Fehler wichtig. Es gilt die *Gaußsche Fehlerfortpflanzung*

$$\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sqrt{\left(\frac{df}{dy_1} \Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dy_2} \Delta y_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dy_N} \Delta y_N\right)^2} . \quad (14)$$

## 5 Auswertung

### 5.1 Vorbereitung

Um die Messungen auswerten zu können, muss zunächst das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  und die Winkelrichtgröße  $D$  berechnet werden.

In Tabelle 1 sind die entsprechenden Messwerte und die berechneten Winkelrichtgrößen.

**Tabelle 1:** Die Messdaten zu der Winkelrichtgröße bei  $r = 20\text{cm}$ .

$\varphi/^\circ$	$F/\text{N}$	$D/\text{N m}$
20	0,022	0,012605
30	0,054	0,020626
40	0,077	0,022059
50	0,092	0,021085
60	0,120	0,022918
70	0,144	0,023573
80	0,162	0,023205
90	0,188	0,023937
100	0,190	0,021772
110	0,200	0,020835
120	0,230	0,021963

Es ergibt sich der Mittelwert

$$D_{\text{mittel}} = D = (0,021 \pm 0,003) \text{ N m} .$$

Um das Eigenträgheitsmoment zu bestimmen wird  $I$  nach (9) berechnet. Die Daten sind in Tabelle 2 aufgetragen.

Aus diesen Daten wird das Eigenträgheitsmoment bestimmt. Mit dem Satz von Steiner aus (2) und dem Trägheitsmoment eines Zylinder aus (4) ergibt sich

$$I_{\text{Zyl}} = I_D + m_{\text{Zyl}} \left( \frac{3r^2 + h^2}{6} \right) . \quad (15)$$

**Tabelle 2:** Die Messdaten zum Eigenträgheitsmoment  $I_D$ .

$r/\text{m}$	$T/\text{s}$	$r^2/(\text{m})^2$	$T^2/(\text{s})^2$
0,050	2,750	0,003	7,562
0,075	3,100	0,006	9,610
0,100	3,800	0,010	14,440
0,125	4,100	0,016	16,810
0,150	4,750	0,022	22,562
0,175	5,300	0,031	28,090
0,200	5,800	0,040	33,640
0,225	6,600	0,051	43,560
0,250	7,150	0,062	51,123
0,275	7,800	0,076	60,840

Nach Einsetzen von  $I_{\text{Zyl}}$  in Gleichung (9) und Umstellen, ergibt sich:

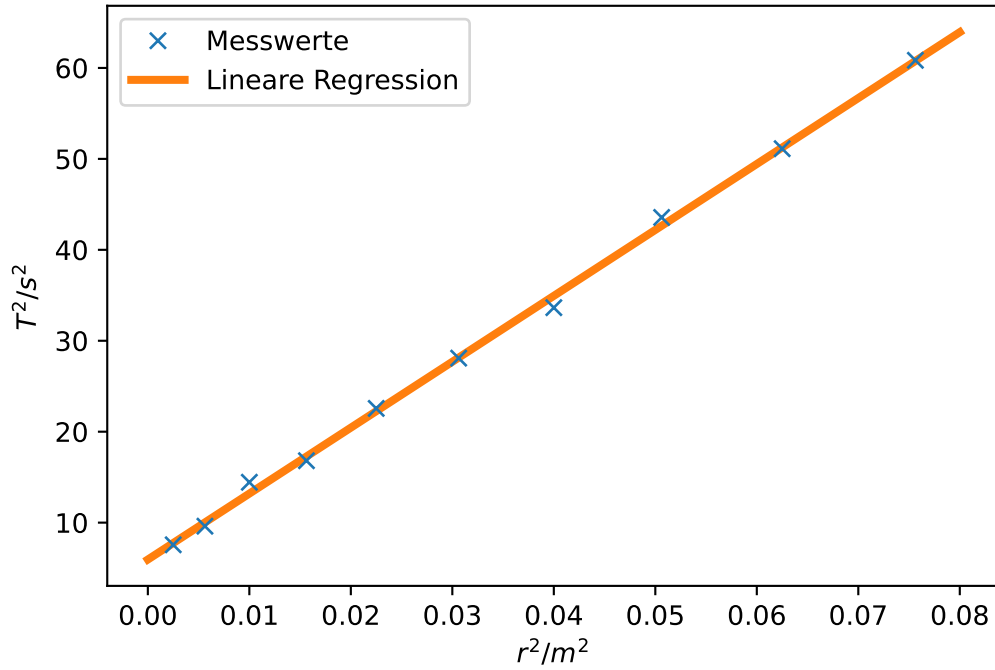
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot (2ma^2 + I_{\text{Zyl}}) \stackrel{(15)}{=} \frac{4\pi^2}{D} \left( 2ma^2 + I_D + m_{\text{Zyl}} \left( \frac{3r^2 + h^2}{6} \right) \right) \quad (16)$$

Durch lineare Regression mithilfe der Ausgleichsgerade

$$y = a \cdot x + b$$

mit den Parametern  $a = 724,885 \pm 10,115 \frac{1}{\text{s}^2 \text{m}^2}$  und  $b = 5,945 \pm 0,400 \frac{1}{\text{s}^2}$  ergibt sich der Plot in Abbildung 2.





**Abbildung 2:** Regressionsgerade des Eigenträgheitsmomentes.

Nun wird durch Koeffizientenvergleich a und b in (15) erkannt und eingesetzt. Es ergibt sich für

$$a = \frac{8\pi^2 m}{D} \quad \text{und} \quad b = \frac{4\pi^2}{D} \left( I_D + m_{\text{Zyl}} \frac{3r^2 + h^2}{6} \right). \quad (17)$$

Wird (15) nach  $I_D$  umgestellt, gilt

$$\begin{aligned} I_D &= I_{\text{Zyl}} - m_{\text{Zyl}} \left( \frac{3r^2 + h^2}{6} \right) \\ &\stackrel{17}{=} \frac{b \cdot D}{4 \cdot \pi^2} - m_{\text{Zyl}} \left( \frac{3r^2 + h^2}{6} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Mit (14) ergibt sich

$$\Delta I_D = \sqrt{\left( \frac{b}{4\pi^2} \cdot \Delta D \right)^2 + \left( \frac{D}{4\pi^2} \cdot \Delta b \right)^2}.$$

Damit lässt sich der Fehler für das Eigenträgheitsmoment angeben. Die Zylinder haben die Maße  $h = 0.023 \text{ m}$ ,  $d = 0.45 \text{ m}$  und  $m = 0.0624 \text{ kg}$ . Es gilt also für das Trägheitsmoment

$$I_D = (0.0016 \pm 0.0005) \text{ kg m}^2 .$$

Es ist also so klein, dass das Eigenträgheitsmoment in der folgenden Auswertung vernachlässigt wird.

## 5.2 Trägheitsmoment eines Zylinders

Der betrachtete Zylinder hat die Maße:  $m_1 = 0,3678 \text{ kg}$  und  $d_1 = 0,0983 \text{ m}$ . Damit errechnet sich der Theoriewert des Trägheitsmomentes mit Formel (4) zu

$$I_{\text{Zyl, theo}} = 4,4425 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 .$$

Die experimentellen Werte sind in Tabelle 3 zu finden.

**Tabelle 3:** Messung der Schwingungsdauer des Zylinders.

Messung	$T/\text{s}$
1	0,800
2	0,750
3	0,760
4	0,720
5	0,750
6	0,740
7	0,740
8	0,790
9	0,750
10	0,780

Damit lässt sich die Schwingungsdauer

$$T_{\text{Zyl}} = (0,76 \pm 0,024) \text{ s}$$

angeben.

Der Fehler des Trägheitsmomentes berechnet sich nach (18). Es folgt

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot D \cdot T \cdot \Delta T}{4\pi}\right)^2 + \left(\frac{T^2 \cdot \Delta D}{4\pi}\right)^2} .$$

Damit kann das Trägheitsmoment nach Formel (9) nun angegeben werden zu

$$I_{\text{Zyl}} = (3,056 \pm 1,475) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 .$$

### 5.3 Trägheitsmoment der Kugel

Die betrachtete Kugel hat die Eigenschaften  $m_2 = 1,1716 \text{ kg}$  und  $d = 0,014645 \text{ m}$ . Durch die Gleichung (3) lässt sich das theoretische Trägheitsmoment zu

$$I_{\text{K, theo}} = 2.5128 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

berechnen.

**Tabelle 4:** Messung der Schwingungsdauer der Kugel.

Messung	$T/\text{s}$
1	1,770
2	1,900
3	1,850
4	1,800
5	1,800
6	1,800
7	1,900
8	1,850
9	1,880
10	1,870

Damit ergibt sich aus Mittelwert und Standardabweichung für

$$T_{\text{Kug}} = (1,842 \pm 0,044) \text{ s} .$$

Daraus folgt mit Formel (3) das Trägheitsmoment

$$I_{\text{Kug}} = (1.8048 \pm 0.8413) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 .$$

### 5.4 Trägheitsmoment der Puppe

#### 5.4.1 Abmessungen

Die Puppe hat die Masse  $m_{\text{Puppe}} = 0.1079 \text{ kg}$ . Die Maße der Gliedmaßen der Puppe sind in Tabelle 5 aufgetragen. Dabei hat das Bein insgesamt eine Länge von 14,33 cm, der

**Tabelle 5:** Abmessungen der Puppe in cm

Bein		Arm		Körper		Kopf
ober	unter	ober	unter	ober	unter	-
1,54	1,64	1,3	1,24	3,96	3,33	2,83
1,64	1,72	1,31	1,37	4,24	5,43	2,97
1,73	1,42	1,4	1,42	4,3	3,5	2,73
1,84	1,41	1,24	1,3	3,94	3,3	2,60
1,8	1,3	1,22	1,2	3,25	3,17	2,25

Arm von 13,02 cm, der Torso von 9,81 cm und der Kopf von 4,71 cm. Diese Werte werden gemittelt, um die Gliedmaßen durch einen Zylinder zu approximieren. Die dazugehörigen Werte sind in Tabelle 6 aufgetragen.

**Tabelle 6:** Mittelwerte der Glieder.

Glied	$r/m$
$r_{\text{Bein, ober}}$	$0,008550 \pm 0,000544$
$r_{\text{Bein, unter}}$	$0,007490 \pm 0,000783$
$r_{\text{Arm, ober}}$	$0,006470 \pm 0,000316$
$r_{\text{Arm, unter}}$	$0,006530 \pm 0,000404$
$r_{\text{Körper, ober}}$	$0,019690 \pm 0,001866$
$r_{\text{Körper, unter}}$	$0,018730 \pm 0,004243$
$r_{\text{Kopf}}$	$0,013380 \pm 0,001225$

Im Folgenden wird das Volumen der Puppe errechnet. Dazu wird das Volumen der einzelnen Zylinder berechnet. Das Zylindervolumen ist gegeben durch

$$V_{\text{Zyl}} = \pi r^2 h .$$

Ebenfalls wird das Kugelvolumen benötigt, um den Kopf zu approximieren. Es gilt

$$V_{\text{Kug}} = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Um den Fehler anzugeben, ist die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung (14) mit

$$\Delta V_{\text{Ges}} = \sqrt{(\Delta V_{\text{Körper}})^2 + 4 \cdot (\Delta V_{\text{Arm}})^2 + 4 \cdot (\Delta V_{\text{Bein}})^2 + (\Delta V_{\text{Kopf}})^2} \quad (19)$$

erforderlich, wobei die einzelnen Volumina durch

$$\Delta V_{\text{Zyl}} = \sqrt{4\pi^2 \cdot r^2 \cdot h^2 \cdot (\Delta r)^2} \quad \text{und} \quad \Delta V_{\text{Kug}} = \sqrt{16\pi^2 \cdot r^4 \cdot (\Delta r)^2}$$

**Tabelle 7:** Volumen der Körperteile.

Glied	$V/\text{mm}^3$
$V_{\text{Bein, ober}}$	$16,45501 \pm 2,09415$
$V_{\text{Bein, unter}}$	$12,62785 \pm 2,63873$
$V_{\text{Arm, ober}}$	$8,561294 \pm 0,83520$
$V_{\text{Arm, unter}}$	$8,720818 \pm 1,08035$
$V_{\text{Körper, ober}}$	$59,74207 \pm 11,3208$
$V_{\text{Körper, unter}}$	$54,05855 \pm 24,4906$
$V_{\text{Kopf}}$	$10,03360 \pm 2,75676$

gegeben sind. Damit lassen sich die Volumina der einzelnen Körperteile angeben. Diese sind in Tabelle 7 notiert.

Daraus resultiert das Gesamtvolumen

$$V_{\text{Ges}} = \sum_i V_i \pm \Delta V_{\text{Ges}} = (170,199 \pm 55,954) \cdot 10^{-6} \text{m}^3 ,$$

wobei das Volumen der Arme und Beine doppelt gezählt wird. Nun werden die einzelnen Anteile am Gesamtvolumen bestimmt. Damit wird schließlich die Masse der einzelnen Teile bestimmt. Die Volumenanteile berechnen sich über die Formel

$$A_{\text{Körperteil}} = \frac{V_{\text{Körperteil}}}{V_{\text{Ges}}}$$

mit dem Fehler

$$\Delta A_{\text{Körperteil}} = \sqrt{\left(\frac{1}{V_{\text{Ges}}}\right)^2 \cdot ((\Delta V_{\text{Körperteil}})^2 + (V_{\text{Körperteil}} \cdot \Delta V_{\text{Ges}})^2)} .$$

Damit ergeben sich die Anteile in Tabelle 8.

**Tabelle 8:** Anteile der Glieder.

Glied	Prozentualer Anteil
$A_{\text{Bein, ober}}$	$0,097 \pm 0,034$
$A_{\text{Bein, unter}}$	$0,074 \pm 0,029$
$A_{\text{Arm, ober}}$	$0,050 \pm 0,017$
$A_{\text{Arm, unter}}$	$0,051 \pm 0,018$
$A_{\text{Körper, ober}}$	$0,351 \pm 0,133$
$A_{\text{Körper, unter}}$	$0,317 \pm 0,178$
$A_{\text{Kopf}}$	$0,058 \pm 0,025$

Nun werden die Massen der Gliedmaßen berechnet. Die Formel lautet

$$m_{\text{Körperteil}} = A_{\text{Körperteil}} \cdot M_{\text{Ges}} \cdot$$

Damit ergeben sich die Massen in Tabelle 9.

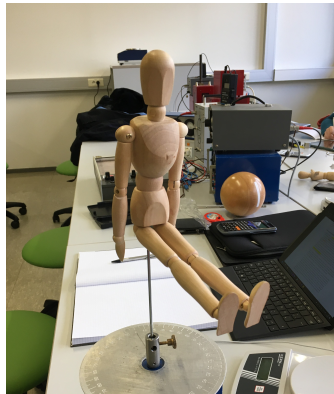
**Tabelle 9:** Massenanteile.

Glied	$m/\text{kg}$
$m_{\text{Bein, ober}}$	$0,01043 \pm 0,00367$
$m_{\text{Bein, unter}}$	$0,00800 \pm 0,00311$
$m_{\text{Arm, ober}}$	$0,00542 \pm 0,00186$
$m_{\text{Arm, unter}}$	$0,00552 \pm 0,00194$
$m_{\text{Körper, ober}}$	$0,03787 \pm 0,01437$
$m_{\text{Körper, unter}}$	$0,03427 \pm 0,01918$
$m_{\text{Kopf}}$	$0,00636 \pm 0,00272$

Nun sind alle nötigen Parameter bestimmt, um die Trägheitsmomente der Puppe zu berechnen.

#### 5.4.2 Trägheitsmoment der Puppe: Pose 1

Zunächst soll die „90° Pose“ untersucht werden. Diese ist in Abbildung 3 zu sehen. In Tabelle 10 sind die experimentellen Messwerte aufgetragen.



**Abbildung 3:** Die Puppe mit nach vorne gestreckten Beinen (90° Pose).

**Tabelle 10:** Messwerte der Periodendauer der ersten Pose.

	$T/s$	$T/s$
$\varphi :$	$90^\circ$	$120^\circ$
	0,90	0,86
	0,87	0,90
	0,86	0,85
	0,85	0,90
	0,88	0,80
$T_{\text{mittel}} :$	0,872	0,862

Daraus lässt sich die gemittelte Schwingungsdauer

$$T_E = (0,867 \pm 0,02934) \text{ s}$$

bestimmen. Nun lässt sich das Trägheitsmoment berechnen. Aus Gleichung (9) und (14) ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$I_E = (0,39985 \pm 0,07382) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 .$$

Nun wird das theoretische Trägheitsmoment berechnet. Dafür wird zunächst das Trägheitsmoment der einzelnen Zylinder berechnet. Dies leisten die Gleichungen

$$\begin{aligned} I_{\text{Oberschenkel}} &= \frac{m_{\text{OS}} \cdot r_{\text{OS}}^2 + 2 \cdot m_{\text{OS}} \cdot r_{\text{OS}}^2}{2} , \\ I_{\text{Unterschenkel}} &= \frac{m_{\text{US}} \cdot r_{\text{US}}^2 + 2 \cdot m_{\text{US}} \cdot r_{\text{US}}^2}{2} , \\ I_{\text{Oberarm}} &= \frac{m_{\text{OA}} \cdot h_{\text{OA}}^2 + 3 \cdot m_{\text{OA}} \cdot r_{\text{OK}}^2}{3} \text{ und} \\ I_{\text{Unterarm}} &= \frac{m_{\text{UA}} \cdot h_{\text{UA}}^2 + 3 \cdot m_{\text{UA}} \cdot (r_{\text{OK}} + h_{\text{OA}})^2}{3} . \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$I_{\text{theo}} = (0,477969 \pm 0,00495) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 .$$

### 5.4.3 Trägheitsmoment der Puppe: Pose 2

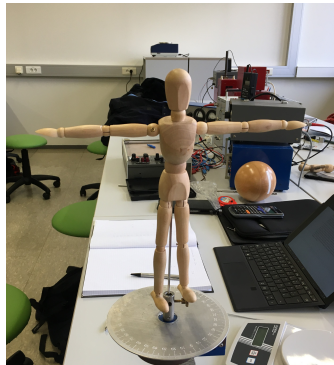
Nun wird das Trägheitsmoment der Figur in der „T-Pose“ untersucht. Diese ist in Abbildung 4 dargestellt. Zunächst wird die theoretische Erwartung berechnet. Aus dem Satz von Steiner (2) folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 I_{\text{Oberschenkel}} &= \frac{m_{\text{OS}} \cdot h_{\text{OS}}^2}{3} , \\
 I_{\text{Unterschenkel}} &= \frac{m_{\text{US}} \cdot h_{\text{US}}^2 + 3 \cdot m_{\text{US}} \cdot h_{\text{OS}}^2}{3} , \\
 I_{\text{Oberarm}} &= \frac{m_{\text{OS}} \cdot r_{\text{OS}}^2 + 2 \cdot m_{\text{OA}} \cdot (r_{\text{OA}} + r_{\text{OK}})^2}{2} \text{ und} \\
 I_{\text{Unterarm}} &= \frac{m_{\text{UA}} \cdot r_{\text{UA}}^2 + 2 \cdot m_{\text{UA}} \cdot (r_{\text{UA}} + r_{\text{OK}})^2}{2} .
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich das Trägheitsmoment

$$I_{\text{theo}} = (0,13192 \pm 0,00672) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

berechnen.



**Abbildung 4:** Die Puppe mit ausgestreckten Armen („T-Pose“).

Nun lässt sich die Schwingungsdauer angeben zu

$$T_E = (0,678 \pm 0.02271) \text{ s} .$$

Daraus wiederum analog wie bei Pose 1 das Trägheitsmoment aus Gleichung (9) und (14) mit dem Wert

$$I_E = (0,24452 \pm 0,00524) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 .$$



**Tabelle 11:** Messwerte der Periodendauer der zweiten Pose.

	$T/s$	$T/s$
$\varphi :$	$90^\circ$	$120^\circ$
	0,64	0,70
	0,70	0,67
	0,66	0,68
	0,67	0,70
	0,65	0,71
$T_{\text{mittel}} :$	0,664	0,692

## 6 Diskussion

Die Messung des Eigenträgheitsmoment in Abbildung 2 lässt auf eine gute Messung schließen, da hier die Abweichung der linearen Regression sehr gering ist. Das Eigenträgheitsmoment ist  $I_D = (0.0016 \pm 0.0005) \text{ kg m}^2$ . Es ist also zu klein, als das es in den Rechnungen berücksichtigt werden müsste. Dadurch vereinfachen sich die Rechnungen, jedoch wird dadurch der Fehler theoretisch etwas größer.

Die Messung der Trägheitsmomente der Objekte wird dadurch erschwert, dass letztlich die Fähigkeit des Experimentators die Zeit zur richtigen Zeit zu stoppen, gefordert ist. Aufgrund der schnellen Umdrehungen, ist dies eine große experimentelle Schwierigkeit. Dieser Fehler wird dadurch verringert, indem viele Messungen durchgeführt werden. Es ergaben sich die Werte  $I_{\text{Zyl}} = (3,056 \pm 1,475) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$  und  $I_{\text{Zyl, theo}} = 4,4425 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$  für den Zylinder. Es gibt also eine Abweichung von circa 31,21% zum Theoriewert. Bei der Kugel ergaben sich die Werte  $I_{\text{K, theo}} = 2.5128 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  und  $I_{\text{Kug}} = (1.8048 \pm 0.8413) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ . Zum Theoriewert ist also eine Abweichung von 28.32 % zu erkennen. Bei der Puppe traten zudem noch andere Probleme auf. Die Körperteile werden stark vereinfacht und einige werden schlicht nicht berücksichtigt. Beispielsweise werden die Hände, Füße aber auch die Gelenke der Figur vernachlässigt, so auch die Reibung. Diese tritt in Form von Luftreibung an der Puppe selbst auf, aber vor allem in der Drillachse. Dies sorgt dafür, dass sich die Amplituden der Umdrehungen drastisch verringern und die Messung ebenfalls erschweren, da die Messung „per Augenmaß“ deutlich erschwert wird. Es ergaben sich für die „90°-Pose“ die Werte  $I_E = (0,39985 \pm 0,07382) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  und  $I_{\text{theo}} = (0,477969 \pm 0,00495) \text{ kg m}^2$ . Die Abweichung berechnet sich zu 16.34 %, welches ein zufriedenstellendes Ergebnis ist. Bei der „T-Pose“ ergaben sich die Werte  $I_{\text{theo}} = (0,13192 \pm 0,00672) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  und  $I_E = (0,24452 \pm 0,00524) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ . Daraus berechnet man eine Abweichung von 85 % zum Theoriewert. Abschließend wird noch das Verhältnis der Trägheitsmomente der Puppe angegeben mit

$$\frac{I_{\text{Pose 1}}}{I_{\text{Pose 2}}} = \frac{0,39985}{0,24452} = 1,63524 .$$

## Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [3] *Versuchsanleitung „Trägheitsmoment“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.