

V206

Die Wärmepumpe

Toby Teasdale	Erich Wagner
toby.teasdale@tu-dortmund.de	erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 16.11.2021	Abgabe: 7.12.2021
--------------------------	-------------------

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Aufbau	3
2.2	Güteziffer	4
2.3	Massendurchsatz	5
2.4	Mechanische Kompressionsleistung	5
3	Durchführung	6
4	Auswertung	7
4.1	Bestimmung der Güteziffer	7
4.2	Bestimmung des Messdurchsatzes	9
4.3	Bestimmung der mech Kompressorleistung N_{mech}	11
5	Fehlerrechnung	12
6	Diskussion	13
	Literatur	13

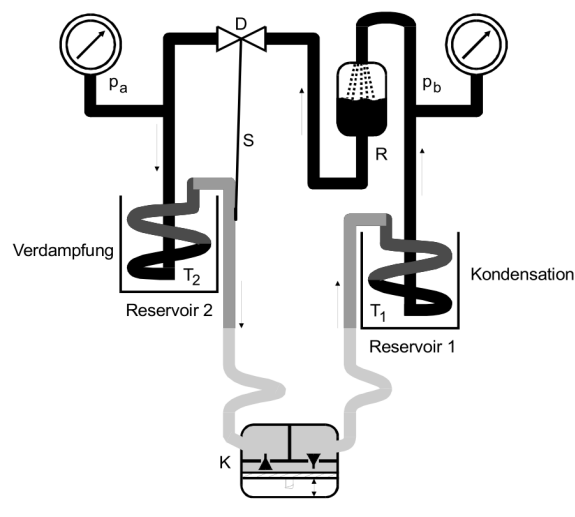
1 Ziel

Ziel des Versuchs ist es, mithilfe von den erhobenen Daten eine Aussage über die Gütezahl der Anlage, den Massendurchsatz des Transportmediums und dem Wirkungsgrad des Kompressors treffen.

2 Theorie

Bei natürlichen Prozessen ist zu beobachten, dass die höhere Temperatur sich immer auf die niedrigere Temperatur zubewegt. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass Temperatur eine Energieform ist, deren Fließrichtung durch Hinzunahme von Arbeit umkehrbar ist. Eine solche Arbeit A wird bei der Wärmepumpe in Form von mechanischer Arbeit durch den Kompressor verrichtet.

2.1 Aufbau



[2]

Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau einer Wärmepumpe

In 1 ist der Kompressor K , die beiden Reservoirs 1 und 2, die Drossel D , der Reiniger R und die beiden Druckmessgeräte P_a und P_b zu erkennen, welche durch Leitungen verbunden sind. Innerhalb dieser Leitungen fließt das Transportmedium. Dabei handelt es sich um das Gas Dichlordifluormethan ($\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$). Dieses wird sich je nach Lage verflüssigen oder verdampfen. Beim verdampfen nimmt das Gas Verdampfungswärme auf und beim verflüssigen gibt es diese ab.

Im Aufbau der Skizze ist das wärmeabgebende (flüssige) Reservoir das Reservoir 2 mit T_2 und p_a . Demnach ist Reservoir 1 das wärmeaufnehmende (gasförmige) Reservoir mit der Temperatur T_1 und p_b .

Der Kompressor K erzeugt diesen Kreislauf durch nahezu adiabatische Kompression. Strömt also Gas durch den Kompressor wird dieses komprimiert und somit erwärmt. Dadurch steigt der Druck auf Seiten des wärmeaufnehmenden Reservoirs. Die gewonnene Energie gibt das Gas an das Reservoir 1 ab und verflüssigt sich dann wieder.

Dabei ist zu beachten, dass in einer realen, nicht idealen Wärmepumpe weitere Komponenten benötigt werden, wie zum Beispiel den Reiniger R . Dieser ist dafür verantwortlich, dass das flüssige Medium keinerlei Gasrückstände hat, wenn es die Drossel erreicht. Zusätzlich wird die Steuereinrichtung S für D benötigt. Dadurch wird sichergestellt, dass nur Gase in den Kompressor gelangen.

2.2 Gütezyiffer

Die Gütezyiffer ν beschreibt das Verhältnis zwischen der transportierten Wärmemenge Q_1 und der verrichteten Arbeit A . Q_1 entspricht der abgegebenen Wärme an Reservoir 1. Also gibt uns die Gütezyiffer ν eine Aussage über die Effektivität der Pumpe. Dabei ist zu beachten, dass Q_1 immer Q_2 plus A entspricht:

$$Q_1 = Q_2 + A \qquad \nu = \frac{Q_1}{A} = \frac{Q_2 + A}{A} \quad (1)$$

Für die ideale Wärmepumpe ohne weitere Verluste gilt:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \implies \nu_{id} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (2)$$

Da wir hier allerdings eine reale Wärmepumpe haben, geschehen diese Prozesse nie verlustfrei:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \implies \nu = \frac{Q_1}{A} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (3)$$

Hieraus erkennt man, dass bei geringerer Temperaturdifferenz mehr Wärme umverlagert werden kann.

Nun sind wir allerdings an der realen Gütezyiffer ν_{real} interessiert. Diese kann man durch eine Messreihe einfach durch den Differenzenquotienten ermitteln:

$$\frac{dQ_1}{dt} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{dT_1}{dt} \quad (4)$$

Dabei beschreiben $m_1 c_w$ die Wärmekapazität in Reservoir 1 und $m_k c_k$ die Wärmekapazität der Kupferschlange und des Eimers. Daraus folgt für ν :

$$\stackrel{(4)}{\implies} \nu = \frac{dQ_1}{dt N} \quad (5)$$

2.3 Massendurchsatz

Unter dem Massendurchsatz versteht man die Masse eines Mediums, das sich pro Zeitspanne durch einen Querschnitt bewegt. Dafür wird der Differenzenquotient von Q_2 analog zu (4) gebildet:

$$\frac{dQ_2}{dt} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt} \quad (6)$$

Außerdem gilt mit der Kondensationswärme/Verdampfungswärme L :

$$\frac{dQ_2}{dt} = L \frac{dm}{dt} \quad (7)$$

Nun ergibt sich aus dem Gleichsetzen von (6) und (7) die Gleichung 8:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_2}{dt} &= (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt} \\ &\stackrel{(7)}{=} L \frac{dm}{dt} \end{aligned} \quad (8)$$

Dadurch ergibt sich die Formel für den Massendurchsatz:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{L} (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt} \quad (9)$$

2.4 Mechanische Kompressionsleistung

Die mechanische Kompressionsleistung des Kompressors K liefert die benötigte Arbeit für die Änderung der Fließrichtung. Die Arbeit die dieser leistet berechnet sich durch

$$A_m = - \int_{V_a}^{V_b} p \, dV \quad (10)$$

wobei V_a und V_b die Gasvolumina sind, wobei V_a auf V_b verringert wird. Daraus kann N berechnet werden:

$$N_{\text{mech}} = \frac{dA_m}{dt} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{dV_a}{dt} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt}. \quad (11)$$

Dabei entspricht ρ der Massendichte, κ dem Verhältnis der Molwärmen und p_i dem entsprechenden Druck.

3 Durchführung

Im folgenden ist eine ergänzende Skizze aus der Versuchsanleitung beigelegt

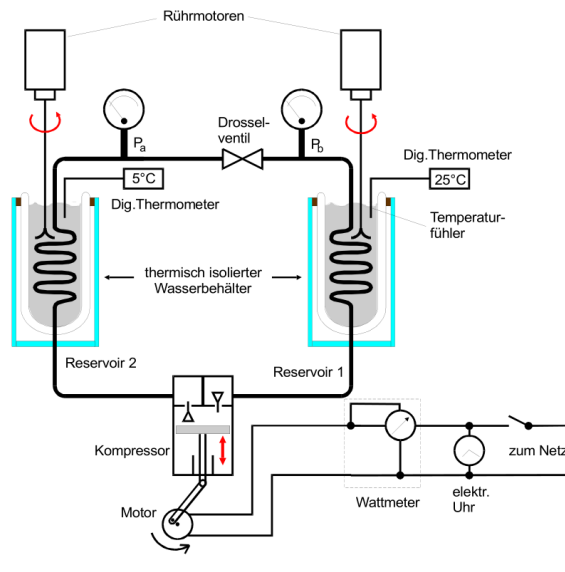


Abbildung 2: Schematische Darstellung der kompletten Messapparatur

Bei der Durchführung sind einige Dinge zu beachten. Zuerst wird die genaue Menge an Wasser für beide Reservoirs mithilfe eines Messgefäßes gemessen. Danach wird die exakte Temperatur des Wassers durch die beiden digitalen Thermometer ermittelt. Ebenfalls wird jeder andere Wert bereits notiert (Druck, spezifische Wärmekapazität der Kupferschlange). Für ein sinnvolles Ergebnis sind bei dem gesamten Experiment Rührmotoren einzusetzen, damit das Wasser homogen aufgewärmt und abgekühlt wird. Das Einschalten des Kompressors K einzuschalten leitet schließlich den Wärmetransport vom einen Reservoir in das nächste.

Ab hier werden minütlich Werte notiert: Die Drücke p_a , p_b , die Temperaturen T_1 , T_2 und die Leistung P des Kompressors.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Gütezahl

Die gemessenen Daten werden für die Bestimmung der in 1 genannten Größen ausgewertet. Es sei im Voraus angemerkt, dass die Messung der Leistung aufgrund von technischen Schwierigkeiten erst ab der fünften Minute erfolgen konnte.

Alle Größen wurden in SI-Einheiten umgerechnet, die Zeit für die Ausgleichsrechnung quadriert und gemäß der Versuchsanleitung [2] den Drücken p_a und p_b 1 bar bzw. 100000 Pa addiert.

In (3) werden die Temperaturverläufe in einem Diagramm dargestellt:

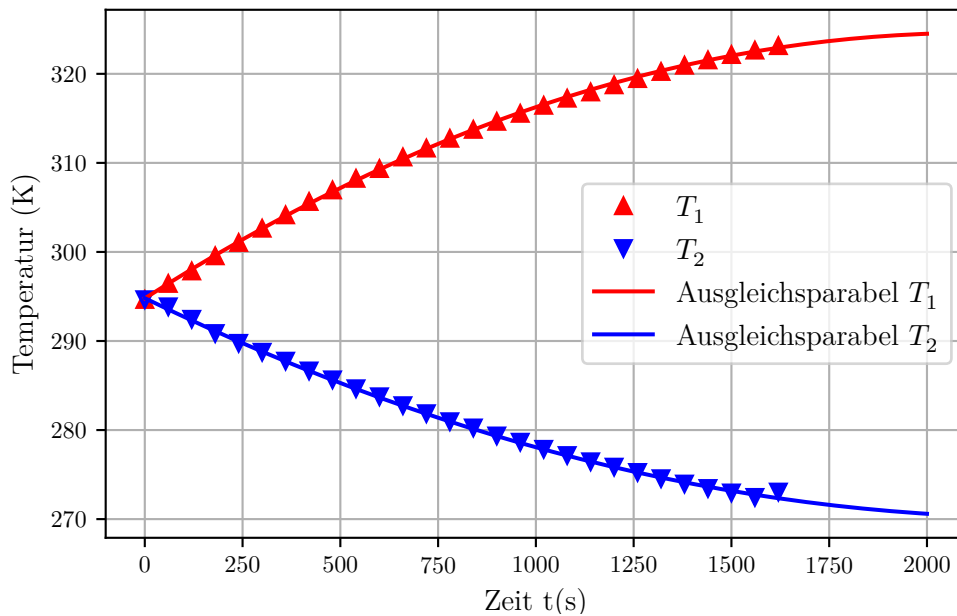


Abbildung 3: Temperaturverläufe während der Messung

Eine nicht-lineare Ausgleichsrechnung der Temperaturverläufe mittels PYTHON mithilfe der Näherungsfunktion

$$T(t) = At^2 + Bt + C$$

ergibt die folgenden Parameter für T_1 (K):

$$A = (-6,6217 \pm 0,1407) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2$$

$$B = (0,0281 \pm 0,0002) \text{ K/s}$$

$$C = (294,7858 \pm 0,0825) \text{ K}$$

und für $T_2(\text{K})$:

$$A = (4,6346 \pm 0,1811) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2$$

$$B = (-0,0214 \pm 0,0003) \text{ K/s}$$

$$C = (294,8097 \pm 0,1062) \text{ K}$$

Mithilfe dieser Funktionen sollen nun die Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ und $\frac{dT_2}{dt}$ für vier verschiedene Temperaturen berechnet werden. Hierbei wird sich für die Temperaturen bei 300s, 600s, 900s und 1200s entschieden.

Aus dem Diagramm werden die entsprechenden Steigungen über die Ableitungen der Näherungsfunktion entnommen:

$$\frac{dT}{dt} = 2At + B$$

Für $T_1(\text{K})$ ergeben sich folgende Differentialquotienten:

Tabelle 1: Differentialquotient für T_1

Zeit $t(\text{s})$	$T_1(\text{K})$	$\frac{dT_1}{dt}$	Gauß-Fehler $\Delta \frac{dT_1}{dt}$
300.0	302.65	0.0241	0.0003
600.0	309.35	0.0202	0.0003
900.0	314.65	0.0162	0.0003
1200.0	318.75	0.0122	0.0004

und analog für $T_2(\text{K})$:

Tabelle 2: Differentialquotient für T_2

Zeit $t(\text{s})$	$T_2(\text{K})$	$\frac{dT_2}{dt}$	Gauß-Fehler $\Delta \frac{dT_2}{dt}$
300.0	288.75	-0.0186	0.0003
600.0	283.75	-0.0158	0.0004
900.0	279.35	-0.0130	0.0004
1200.0	275.85	-0.0103	0.0005

Aus den vier gewählten Temperaturen wird die Güteziffer ν nach (4) berechnet. Die Wärmekapazität der Kupferschlange beträgt $m_k c_k = 750 \frac{\text{J}}{\text{K}}$. Die Wärmekapazität

der Wassermenge berechnet sich durch Multiplikation der Masse, hier 3 kg, mit der spezifischen Wärmekapazität von Wasser nach [1, S. 278] zu $m_w c_w = 12546 \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Für die ideale Güteziffer ν_{id} nach (2) und die empirische Güteziffer nach (5) ergibt sich mit den vier Temperaturen für T_1 :

Tabelle 3: Theoretische und empirische Güteziffer der Messreihe T_1

Zeit $t(\text{s})$	Güteziffer (Theorie)	Güteziffer (empirisch)	Gauß-Fehler	Abweichung (%)
300.0	21.773	2.563	0.032	88.23
600.0	12.084	2.149	0.032	82.22
900.0	8.914	1.873	0.035	78.99
1200.0	7.430	1.411	0.046	81.01

Die Güteziffer für T_2 wird nicht erneut betrachtet, da diese im Idealfall gleich sein müsste, hier aber geringer war.

4.2 Bestimmung des Messdurchsatzes

Der Messdurchsatz berechnet sich zunächst durch die Bestimmung der Verdampfungswärme L . Dazu wird aus den Wertepaaren (p, T) der Messreihe und einer linearen Ausgleichsrechnung mittels PYTHON die Steigung und Achsenabschnitt der ermittelten Ausgleichsgerade dargestellt:

Tabelle 4: Steigung und Achsenabschnitt der Ausgleichsgerade

	Wert	Fehler
Steigung m	-2651.537	97.560
Achsenabschnitt b	9.203	0.313

Die Verdampfungswärme ergibt sich aus $L = -m \cdot R$, wobei m die Steigung der Geraden und R die allgemeine Gaskonstante ist. Das negative Vorzeichen rührt von der negativen Steigung.

Somit ergibt sich für die Verdampfungswärme: $L = (22\,046,074 \pm 811,158) \text{ Js/molK}$.

In Tabelle 5 sind die nach (9) berechneten Massendurchsätze:

Für weitere Berechnungen soll der Massendurchsatz nun noch in SI-Einheiten umgewandelt. Dafür wird mit der molaren Masse $120,91 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ von Dichlordifluormethan multipliziert.

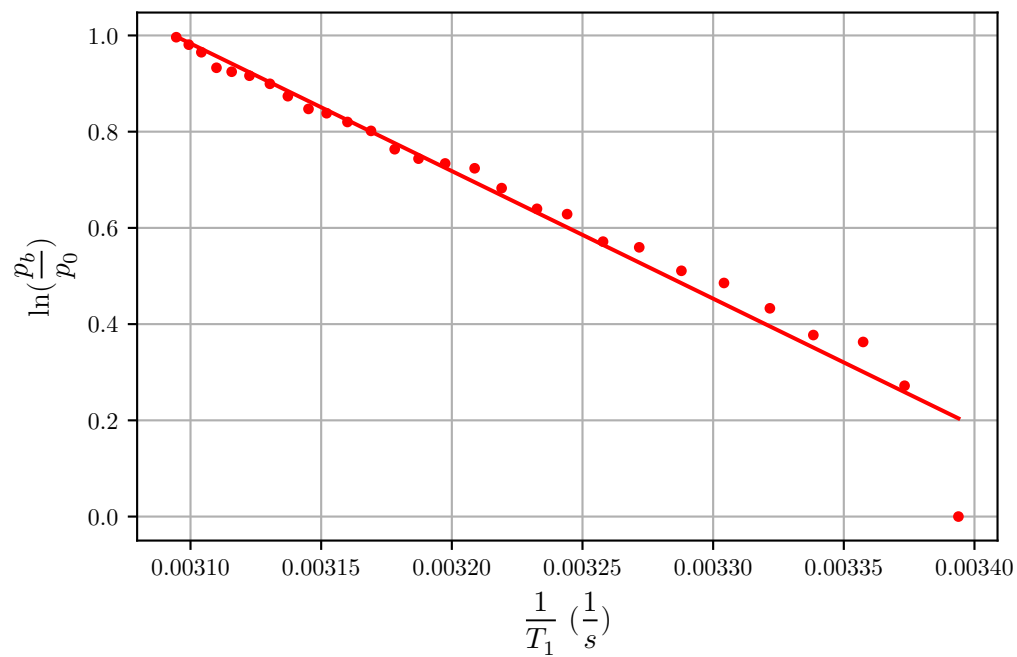


Abbildung 4: Logarithmischer Druckverlauf des Drucks p_b

Tabelle 5: berechneter Massendurchsatz

Zeit $t(s)$	$\frac{dQ_2}{dt}$	$\frac{dm}{dt}(\frac{\text{mol}}{s})$	Gauß-Fehler $\Delta \frac{dm}{dt}(\frac{\text{mol}}{s})$	$\frac{dm}{dt}(\frac{g}{s})$	Gauß-Fehler $\Delta \frac{dm}{dt}(\frac{g}{s})$
300.0	-247.3056	-0.0112	0.0008	-1.3542	0.0967
600.0	-210.0768	-0.0095	0.0007	-1.1486	0.0846
900.0	-172.8480	-0.0078	0.0006	-0.9431	0.0725
1200.0	-136.9488	-0.0062	0.0005	-0.7496	0.0605

4.3 Bestimmung der mech Kompressorleistung N_{mech}

Die Gasdichte ρ lässt sich aus dem in der Versuchsanleitung [2, S. 7] angegebenen Wert $p_0 = 5,51 \text{ g/l}$ (Dichlordifluormethan) und der idealen Gasgleichung berechnen:

$$pV = nRT \Leftrightarrow \frac{pV}{T} = nR$$

mit $R = 8,3144508 \frac{\text{J s K}}{\text{mol}}$, $p_0 = 1 \text{ bar}$, $\kappa = 1,14$ und $T_0 = 0^\circ\text{C} = 273,14\text{K}$

aus $nR = \text{const.}$, also $n_1 R = n_2 R$, folgt:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Mit $\rho V \Leftrightarrow V = \frac{m}{\rho}$ folgt:

$$\frac{p_0 \mathcal{M}}{\rho_0 T_0} = \frac{p_2 \mathcal{M}}{\rho_2 T_2}$$

Somit folgt mit $\rho_0 = \rho$ und $p_2 = p_a$ schließlich:

$$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_a}{T_2 \rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{p_0 T_0 p_a}{T_2 p_0} \quad (12)$$

Damit folgt aus Gleichung (11):

$$N_{mech} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\frac{\rho_0 T_0 p_a}{T_2 p_0}} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{T_2 p_0}{\rho_0 T_0 p_a} \frac{dm}{dt}$$

Die mechanische Leistung des Kompressors beträgt somit:

Es fällt auf, dass die mechanische Leistung negativ ist. Dies rührt von dem negativen Massendurchsatz wie der Tabelle (5) entnommen werden kann. Aus dem Zusammenhang soll dieses Ergebnis als die tatsächlich positive Leistung interpretiert werden, die dem System zugefügt wird.

Tabelle 6: Gasdichte und mechanische Leistung N_{mech} (W)

Zeit $t(\text{s})$	Dichte $\rho \left(\frac{\text{g}}{\text{m}^3}\right)$	Leistung $N_{\text{mech}}(\text{W})$	Gauß-Fehler $\Delta N_{\text{mech}}(\text{W})$
300.0	23.455	-12.969	0.926
600.0	20.156	-17.510	1.290
900.0	18.318	-18.232	1.402
1200.0	16.368	-17.607	1.421

5 Fehlerrechnung

Im Folgenden wird die allgemeine Fehlerrechnung, und alle wichtigen Größen der entsprechenden Rechnung, erklärt. Die wichtigsten Werte dabei sind der Mittelwert und die Standardabweichung

$$\text{Mittelwert: } \bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n x_i \quad (13)$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2}. \quad (14)$$

Dabei entspricht N der Anzahl an Werten und x_i ist jeweils ein mit einem Fehler gemessener Wert.

Es ergibt sich ebenfalls die statistische Messunsicherheit

$$\Delta \bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2}. \quad (15)$$

Entstehen mehrere Unbekannte in einer Messung, folgen daraus auch mehrere Messunsicherheiten. Diese müssen in dem weiteren Verlauf der Rechnung berücksichtigt werden. Es gilt die *Gaußsche Fehlerfortpflanzung*

$$\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sqrt{\left(\frac{df}{dy_1} \Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dy_2} \Delta y_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dy_N} \Delta y_N\right)^2}. \quad (16)$$

6 Diskussion

Im Folgenden sind Faktoren genannt, die die Replizierbarkeit des oben behandelten Experimentes beeinflussen können. Darunter ist unter anderem der kleine „systematische Fehler“, dass der Deckel die jeweiligen Reservoirs nicht zu hundert Prozent von außen abdichten können, da diese nur auf dem Gefäß aufliegen. Weiterhin sind die Skalen des Manometers nicht ganz so eindeutig wie vergleichsweise das Thermometer für die Wassertemperatur. Außerdem kommt die Zeitunsicherheit der Messung hinzu. Es wurde mit einer Stoppuhr im Minutentakt die Messwerte notiert, jedoch ließt man dabei die verschiedenen Werte um einige wenige Sekunden zu unterschiedlichen Zeiten ab.

Auffallend ist, dass die Güteziffer stark von der idealen Güteziffer abweicht. Ein Grund für diese Abweichung ist die Irreversibilität des Prozesses, obwohl bei der Berechnung der Güteziffer von einem reversiblen Prozess ausgegangen wurde. Außerdem kommt es durch Reibung zu Energieverlusten. Es wird weiter davon ausgegangen, dass der Kompressor adiabatisch komprimiert, was aufgrund natürlicher Umstände nicht möglich ist.

All das hat Einflüsse auf die Messung und somit auch auf die daraus resultierenden Werte, wie die Güteziffer ν und Kondensationswärme L , den Massendurchsatz, und schließlich die mech. Kompressionsleistung N_{mech} .

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme*. Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-54846-2.
- [2] *Versuchsanleitung „Die Wärmepumpe“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.