

V302

## Elektrische Brückenschaltungen

Toby Teasdale	Erich Wagner
toby.teasdale@tu-dortmund.de	erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.12.21	Abgabe: 11.01.22
------------------------	------------------

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

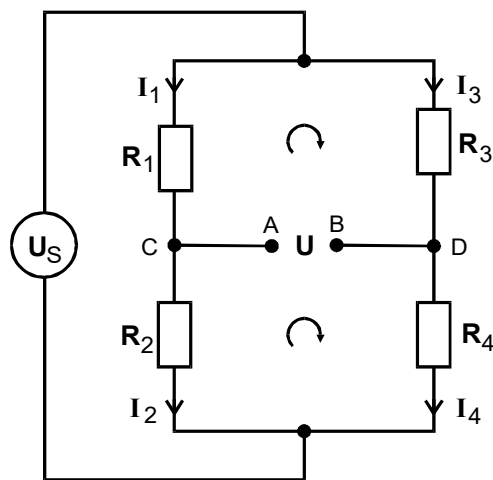
<b>1 Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Allgemeine Brückenschaltung . . . . .	3
2.2 Wheatstonesche Brücke . . . . .	4
2.3 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	4
2.4 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	5
2.5 Maxwell Brücke . . . . .	6
2.6 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	6
<b>3 Durchführung</b>	<b>8</b>
3.1 Wheatstonesche Brücke . . . . .	8
3.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	8
3.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	9
3.4 Maxwell Brücke . . . . .	9
3.5 Wien-Robinson-Messbrücke . . . . .	9
<b>4 Fehlerrechnung</b>	<b>9</b>
<b>5 Auswertung</b>	<b>10</b>
5.1 Wheatstonesche Brücke . . . . .	10
5.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	10
5.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	11
5.4 Maxwell Brücke . . . . .	11
5.5 Wien-Robinson-Messbrücke . . . . .	12
<b>6 Diskussion</b>	<b>14</b>
<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Ziel

In dem Versuch „Brückenschaltung“ werden unbekannte Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten gemessen. Dies geschieht durch diverse Brückenschaltungen. Außerdem wird die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mithilfe einer sogenannten *Wien-Robinson-Brücke* sowie der Klirrfaktor ermittelt.

## 2 Theorie

### 2.1 Allgemeine Brückenschaltung



**Abbildung 1:** Ein beispielhafter Aufbau einer einfachen Brückenschaltung [5, S. 1].

Brückenschaltungen sind essentiell, wenn unbekannte Widerstände bestimmt werden sollen. Um mit einer Brückenschaltung, beispielsweise wie in Abbildung 1, benötigt man eine bekannte Speisespannung  $U_S$  und vier Widerstände. Durch alle Widerstände wird ein Strom fließen. Es gelten die *Kirchhoffschen Regeln*. Es gilt für die Summe aller Ströme an einem Knotenpunkt

$$\sum_k I_k = 0, \quad (1)$$

und für die Summe der Spannungen in einem abgeschlossenen Stromkreis

$$\sum_k U_k = 0. \quad (2)$$

Durch diese Regeln lässt sich die Formel für die Brückenspannung, die an den Punkten  $A$  und  $B$  abgegriffen wird, angeben. Diese lautet

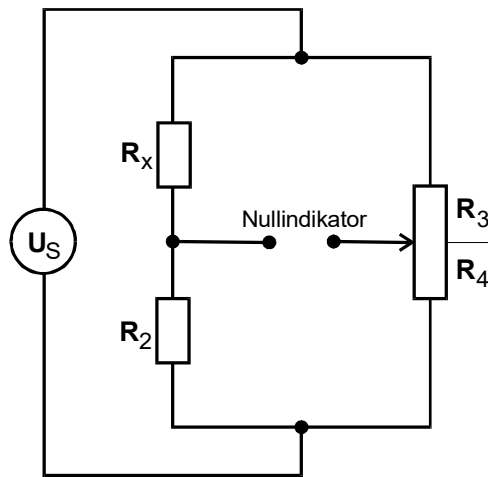
$$U_{\text{Brück}} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S. \quad (3)$$

Es kann durchaus der Fall auftreten, oder willentlich bewirkt werden, dass die Brückenspannung vollständig verschwindet. In diesem Falle gilt

$$R_2 R_3 = R_1 R_4, \quad (4)$$

damit ist die Brücke „abgeglichen“.

## 2.2 Wheatstonesche Brücke



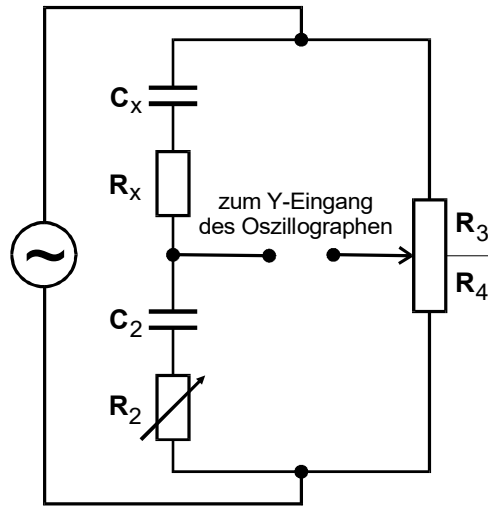
**Abbildung 2:** Die Wheatstonesche Brückenschaltung [5, S. 4].

Mit der Wheatstonschen Brückenschaltung lassen sich besonders einfach unbekannte ohmsche Widerstände bestimmen. Die Schaltung ist analog zu der in Abbildung 1, mit der Ausnahme das  $R_1$  nun durch einen unbekannten Widerstand  $R_x$  ersetzt wird. Durch die Gleichung (4) erhält man dann

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}. \quad (5)$$

## 2.3 Kapazitätsmessbrücke

Mit der Kapazitätsmessbrücke lassen sich komplexe Widerstände bestimmen. Ein realer Kondensator ist aber niemals rein kapazitiv, sondern immer auch teilweise ohmisch. Dies



**Abbildung 3:** Eine Kapazitätsmessbrücke mit unbekanntem ohmschen und kapazitiven Widerstand [5, S. 5].

liegt daran, dass beim realen Kondensator die hindurchfließende Energie zum Teil in Wärme verloren geht (sogenannte dielektrische Verluste). Dieser Verlust wird durch einen Widerstand innerhalb der Reihenschaltung in Abbildung 3 realisiert. Natürlich muss bei dieser Art Widerstand Wechselstrom angelegt werden, da sonst der Kondensator eine Art unendlich großer Widerstand wird und der Zweck der Messung verfehlt wird. Für diese Schaltung gelten die Gleichungen

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad \text{und} \quad R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}.$$

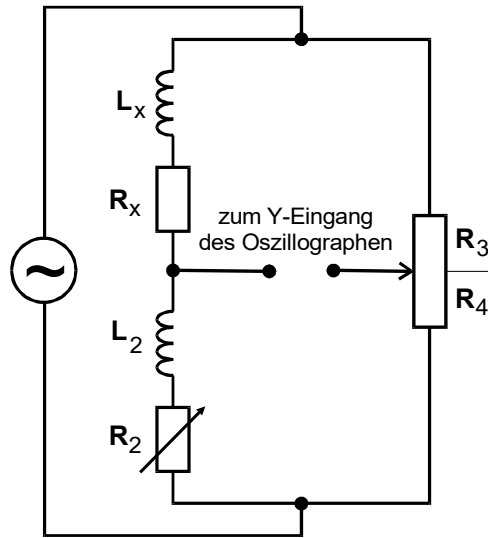
## 2.4 Induktivitätsmessbrücke

Mit einer Induktivitätsmessbrücke werden nun Induktivitäten gemessen. Auch diese komplexen Widerstände bestehen immer aus einem ohmschen und einem induktiven Widerstand, da eine reale Induktivität einen Teil der in ihr steckenden magnetischen Feldenergie irreversibel in Wärme um. Diese werden dann im Schaltbild dadurch realisiert, dass sie in Reihe geschaltet werden. Das vollständige Schaltbild ist in Abbildung 4 zu sehen. Für die unbekannten Induktivitäten ergibt sich

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (6)$$

und für den ohmschen Widerstand des Widerstandes

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (7)$$



**Abbildung 4:** Die Induktivitätsmessbrücke mit unbekanntem ohmschen und induktiven Widerstand [5, S. 6].

## 2.5 Maxwell Brücke

Eine Alternative zu der Induktivitätsmessbrücke ist die Maxwellbrücke. Auch diese Brückenschaltung ist eine Schaltung, um Induktivitäten zu bestimmen. Der grundlegende Unterschied liegt darin, dass ein Bauteil ausgetauscht wird. Dabei handelt es sich um die bekannte Induktivität  $L_2$ . Nun wird eine bekannte Kapazität benötigt. Diese hat baubedingt einen deutlich geringeren ohmschen Widerstand. Nun werden die Unbekannten durch die Gleichungen

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (8)$$

und

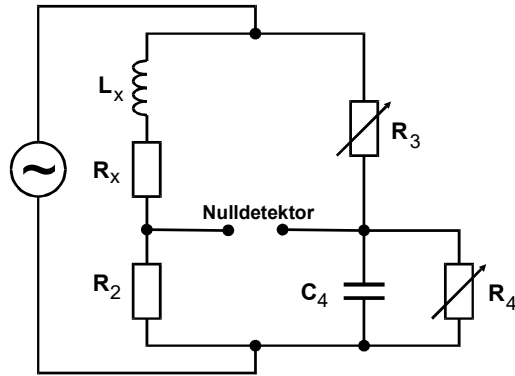
$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

beschrieben.

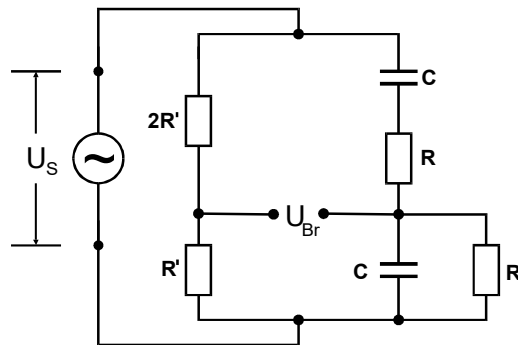
## 2.6 Wien-Robinson-Brücke

Die Wien-Robinson-Brücke, dargestellt in Abbildung 6, ist eine Brückenschaltung die vor allem als Bandpass fungiert. Ein Bandpass ist ein elektronischer Filter, der nur bestimmte Frequenzbänder hindurch lässt. Die Formel

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9 [(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9 \omega^2 R^2 C^2]} \quad (9)$$



**Abbildung 5:** Eine Maxwellsche Brückenschaltung zur Messung eines ohmschen und induktiven Widerstandes [5, S. 7].



**Abbildung 6:** Die Wien-Robinson-Brücke [5, S. 8].

sei hier nur angegeben [5, S. 9]. Jedoch wird hier erkennbar, dass die Brückenspannung dann verschwindet, wenn

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

gilt. Nun kann man sich das Frequenzverhältnis definieren als

$$\Omega := \frac{\nu}{\nu_0} \quad \text{mit} \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Führt man  $\Omega$  in (9) ein, verändert sich die Gleichung zu der Form

$$\left| \frac{U_{\text{Br}}}{U_{\text{S}}} \right|^2 = \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{9((1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2)} \quad (10)$$

Mit der Wien-Robinson-Brücke lässt sich eine sogenannte Klirrfaktor-Messung durchführen. Das bedeutet, dass der Anteil an Oberwellen im Verhältnis zur Grundwelle eines Generators gemessen wird. Ein Sinusgenerator sollte beispielsweise keine Oberwellen haben. Ist der Klirrfaktor also klein, ist die Qualität des Sinusgenerators hoch. Der Klirrfaktor ist gegeben durch

$$k := \frac{\sum_{i=2}^N U_i^2}{U_1^2}. \quad (11)$$

### 3 Durchführung

Zunächst werden die Geräte eingestellt. Die Anregungsfrequenz wird auf 1kHz eingestellt. Die Speisepannung darf 1V nicht überschreiten.

#### 3.1 Wheatstonesche Brücke

Es erfolgt ein Aufbau nach dem Beispiel in Abbildung 2. Dann wird das Potentiometer so eingestellt, bis die Brückenspannung minimal wird. Im Idealfall verschwindet diese komplett. Die drei bekannten Widerstände werden notiert. Als unbekannter Widerstand wird „Wert 13“ benutzt. Ist die Messung abgeschlossen, wird diese nochmal für einen anderen unbekannten Widerstand durchgeführt. Hier wird „Wert 18“ in den Schaltkreis eingebaut.

#### 3.2 Kapazitätsmessbrücke

Es wird die Schaltung in Abbildung 2 nachgebaut. Als unbekannter Kondensator wird „Wert 8“ gewählt. Nun werden ebenfalls die Potentiometer alternierend solange justiert, bis die Brückenspannung minimal ist oder verschwindet. Es werden wieder alle Werte notiert, auch die Werte der bekannten Widerstände.



### 3.3 Induktivitätsmessbrücke

Mit der Induktivitätsmessbrücke wird die Induktivität  $L$  und der ohmsche Widerstand  $R$  der Spule bestimmt. Auch hier werden die Potentiometer solange alternierend eingestellt, bis die Brückenspannung minimal ist. Im Optimalfall wird diese ebenfalls komplett verschwinden. Es werden die Werte der bekannten Widerstände aufgenommen. Als unbekannten Wert wird „Wert 17“ benutzt.

### 3.4 Maxwell Brücke

Nun soll mit der Maxwellbrücke die selbe Spule bestimmt werden, wie mit der Induktivitätsmessbrücke. Dafür wird eine Schaltung gemäß 5 aufgebaut. Dieses Mal werden die einzelnen Widerstände variiert, bis auch hier die Brückenspannung minimal wird. Es werden wieder alle Bekannten und Unbekannten notiert.

### 3.5 Wien-Robinson-Messbrücke

Es wird die Schaltung aus Abbildung 6 nachgebaut. Es wird im Bereich  $\nu \in [320, 30000]$  Hz gemessen. Dabei wird um das Minimum die Schrittweite verringert, um die Genauigkeit zu verbessern. Ansonsten wird die Frequenz immer verdoppelt. Es werden also Frequenz  $\nu$ , die Brückenspannung  $U_{Br}$  und die Speisespannung  $U_S$  bei jedem Schritt notiert.

## 4 Fehlerrechnung

Im Folgenden wird die allgemeine Fehlerrechnung und alle wichtigen Größen der entsprechenden Rechnung erklärt. Die wichtigsten Werte dabei sind der

$$\text{Mittelwert} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n x_i \quad \text{und die} \quad (12)$$

$$\text{Standartabweichung} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (13)$$

Dabei entspricht  $N$  der Anzahl an Werten und  $x_i$  ist jeweils ein mit einem Fehler gemessener Wert. Es ergibt sich ebenfalls die statistische Messunsicherheit

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (14)$$

Entstehen mehrere Unbekannte in einer Messung, folgen daraus auch mehrere Messunsicherheiten, die in dem weiteren Verlauf der Rechnung berücksichtigt werden müssen. Es gilt die *Gaußsche Fehlerfortpflanzung*

$$\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sqrt{\left(\frac{df}{dy_1} \Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dy_2} \Delta y_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dy_N} \Delta y_N\right)^2}. \quad (15)$$

## 5 Auswertung

### 5.1 Wheatstonesche Brücke

Die Werte der bei der Messung bekannten Widerstände sind in Tabelle 1 aufgetragen.

**Tabelle 1:** Werte der bekannten Widerstände.

	Messung 1	Messung 2
Bestimmung von $R_{x, 13}$		
$R_2 / \Omega$	1000	500
$R_3 / \Omega$	240	388
$R_4 / \Omega$	760	612
Bestimmung von $R_{x, 18}$		
$R_2 / \Omega$	1000	500
$R_3 / \Omega$	190	321
$R_4 / \Omega$	810	679

Die baubedingte Abweichung für  $R_2$  beträgt 0,2 %. Die Abweichung für das Verhältnis  $\frac{R_3}{R_4}$  beträgt 0,5 %. Mit den bekannten Werten  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  und der (5) ergibt sich mithilfe der Fehlerrechnung nach Abschnitt 4 für die gemittelten unbekannten Widerstände

$$\begin{aligned} \bar{R}_{x, 13} &= (316,4 \pm 1,2) \Omega \quad \text{und} \\ \bar{R}_{x, 18} &= (235,5 \pm 0,9) \Omega. \end{aligned}$$

### 5.2 Kapazitätsmessbrücke

Die Werte der bekannten Kenngrößen sind in Tabelle 2 zu sehen.

Die Abweichung für  $C_2$  beträgt 0,2 %, wobei die Abweichung des Potentiometers beibehält und die Abweichung für  $R_2$  ist nun 3 %. Die Berechnung von  $C_c$  und  $R_c$  geschieht nach (5):

$$\begin{aligned} C_{x, 8} &= (233,7 \pm 1,3) \text{ nF}, \\ R_{x, 8} &= (433,0 \pm 13,0) \Omega. \end{aligned}$$

**Tabelle 2:** Werte der bekannten Kapazitäten und Widerstände.

Messung 1	
Bestimmung von $C_{x, 8}$ und $R_{x, 8}$	
$C_2 / \text{nF}$	450
$R_2 / \Omega$	500
$R_3 / \Omega$	388
$R_4 / \Omega$	612

### 5.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Werte der bekannten Kenngrößen sind in Tabelle 3 zu sehen.

**Tabelle 3:** Werte der bekannten Induktivität und der Widerstände.

	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Bestimmung von $L_{x, 17}$ und $R_{x, 17}$			
$L_2 / \text{mH}$	14,6	27,5	20,1
$R_2 / \Omega$	30,0	33,0	42,0
$R_3 / \Omega$	745,0	606,0	678,0
$R_4 / \Omega$	255,0	396,0	322,0

Die baubedingten Abweichungen sind dieselben wie im vorangegangenen Unterabschnitt 5.2. Die Abweichung für die Induktivität  $L_2$  der Spule beträgt 0,2 %. Die gemittelten Werte für  $L_{x, 17}$  und  $R_{x, 17}$  ergeben sich nach (6) und (7) zu

$$\begin{aligned}\bar{L}_{x, 17} &= (42,4 \pm 0,1) \text{ mH} \quad \text{und} \\ \bar{R}_{x, 17} &= (75,5 \pm 1,4) \Omega.\end{aligned}$$

### 5.4 Maxwell Brücke

Die Werte der bekannten Kenngrößen sind in Tabelle 4 ersichtlich.

Die Abweichungen der beiden einstellbaren Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  betragen jeweils 3 %. Die des Widerstands  $R_2$  und der Kapazität  $c_4$  des Kondensators betragen beide 0,2 %. Die gemittelten Werte für  $L_{x, 17}$  und  $R_{x, 17}$  ergeben sich nach (8) und (5) zu

$$\begin{aligned}\bar{L}_{x, 17} &= (47,2 \pm 1,4) \text{ mH} \quad \text{und} \\ \bar{R}_{x, 17} &= (105,0 \pm 4,0) \Omega.\end{aligned}$$

**Tabelle 4:** Werte der bekannten Kapazität und der Widerstände.

	Messung 1	Messung 2
Bestimmung von $L_{x, 17}$ und $R_{x, 17}$		
$C_4 / \text{nF}$	450	660
$R_2 / \Omega$	1000	1000
$R_3 / \Omega$	85	60
$R_4 / \Omega$	960	700

## 5.5 Wien-Robinson-Messbrücke

In dieser Messreihe wird die Frequenzabhängigkeit einer Wien-Robinson-Messbrücke untersucht. Hierzu wird das Verhältnis der Brückenspannung  $U_{\text{Br}}$  zur Speisespannung  $U_{\text{S}}$  gegen  $\Omega = \frac{\nu}{\nu_0}$  abgetragen. Wobei sich die Frequenz  $\nu_0$ , bei der die Brückenspannung verschwinden sollte, sich ergibt durch:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \text{ k}\Omega \cdot 660 \text{ nF}} = 1515,15 \text{ Hz}$$
$$\Leftrightarrow \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 241,14 \text{ Hz}.$$

Das Minimum wird, im Vergleich dazu sehr genau, bei  $\nu_{0, \text{exp}} = 241 \text{ Hz}$  gemessen.

Die dabei gemessene Speisespannung erweist sich zu jeder Frequenz als konstant:  $U_{\text{S}} = 4 \text{ V}$ . In Abbildung 7 sind die Messdaten und die Theoriekurve nach (10) dargestellt.

Für die Bestimmung des Klirrfaktors wird zunächst genähert, dass die Summe der Oberwellen nur von dem Term der zweiten Oberwelle bestimmt wird. Dabei ist es egal, ob die Effektivspannung oder die Amplituden der Spannung betrachtet werden. Im Folgenden wird mit der Effektivspannung gerechnet, da diese bereits berechnet wurde. Nach (11) werden die Werte für  $U_2$  und  $U_1$  benötigt, wobei  $U_1 = 4 \text{ V}$  und von  $U_{\text{S}} = 0,002 \text{ mV}$  bei  $\nu_0$  ist. Mithilfe von (10) folgt für

$$U_2 = \frac{0,002 \text{ V}}{\sqrt{\frac{(2^2-1)^2}{9 \cdot [(1-2^2)^2 + 9 \cdot 2^2]}}}$$
$$= 13,041 \text{ mV}.$$

Der Klirrfaktor ergibt sich entsprechend zu

$$k = \frac{U_2}{U_1} = 3,35 \cdot 10^{-3}.$$

**Tabelle 5:** Gemessene Spannungen in Abhängigkeit von der Frequenz am Sinusspannungsgenerator.

$\nu / \text{Hz}$	$U_{\text{Br}} / \text{mV}$	$\frac{U_{\text{Br}}}{U_{\text{s}}}$
20	280	0,068
40	260	0,063
80	200	0,049
160	80	0,020
230	32	0,008
232	26	0,006
234	20	0,005
236	15	0,004
238	10	0,002
240	4	0,001
241	2	0,001
242	5	0,001
244	10	0,002
246	15	0,004
248	20	0,005
250	26	0,006
320	55	0,013
640	180	0,044
1280	245	0,060
2560	280	0,068
5020	1000	0,244
10040	1400	0,341
20080	1000	0,244
30000	750	0,183

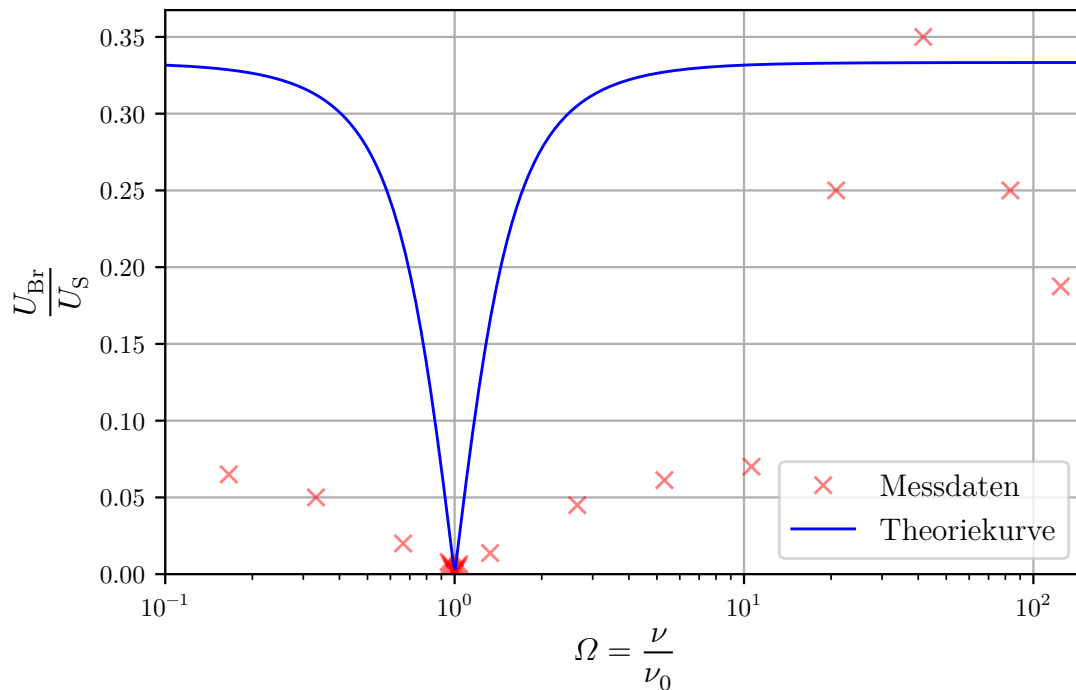


Abbildung 7: Vergleich von Messdaten mit der Theoriekurve.

## 6 Diskussion

Bei allen Widerstandsbestimmungen wurde der Fehler nur durch die Bauteile bestimmt. Dies lässt im Prinzip auf eine sehr gute Messung schließen, die ohne neue Bauteile nicht weiter verbessert werden kann.

Bei dem Vergleich der Messung der Induktivität und des Innenwiderstandes der Spule in Unterabschnitt 5.3 und Unterabschnitt 5.4 fallen zwei Unterschiede auf. So sind die Fehler bei der Messung mit der Maxwell-Brücke deutlich kleiner, was erneut auf eine genauere Messmethode schließen lässt.

Die in Unterabschnitt 5.5 gemessenen Daten besitzen jedoch eine sehr hohe Abweichung von der Theoriekurve, obwohl der Klirrfaktor relativ gering erscheint. Dies liegt daran, dass dieser nur ein Maß der Qualität des Sinusspannungsgenerators im Bereich des Spannungsminimums darstellt. Die hohe Abweichung von der Theorie außerhalb des Minimums lässt sich also zumindest auf bautechnischen Probleme schließen, wie etwa fehlerhafte Potentiometer oder Induktivitäten.

## Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [4] The pandas development team. *pandas-dev/pandas: Pandas*. Version latest. Feb. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3509134. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3509134>.
- [5] *Versuchsanleitung „Elektrische Brückenschaltungen“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.