V103

Biegung elastischer Stäbe

Toby Teasdale
toby.teasdale@tu-dortmund.de

Erich Wagner
erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.12 Abgabe: 11.01

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

In diesem Vesuch wird der Elastizitätsmodul E verschiedener Metallarten untersucht werden. Außerdem wird versucht, anhand des experimentell ermittelten Wertes von E das Material zu bestimmen.

2 Theorie

Der Elastizitätsmodul E beschreibt die physikalische Materialkonstante, die als Proportionalitätskonstante im Hookschen Gesetz vorkommt. Es handelt sich also bei E um eine maßgebliche Einheit für die Elastizität eines Objektes. Das **Hookesche Gesetz** lautet

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \ , \tag{1}$$

wobei $\frac{\Delta L}{L}$ die relative Änderung einer Körperdimension beschreibt. Anschaulich ist dies in Abbildung 1 dargestellt.

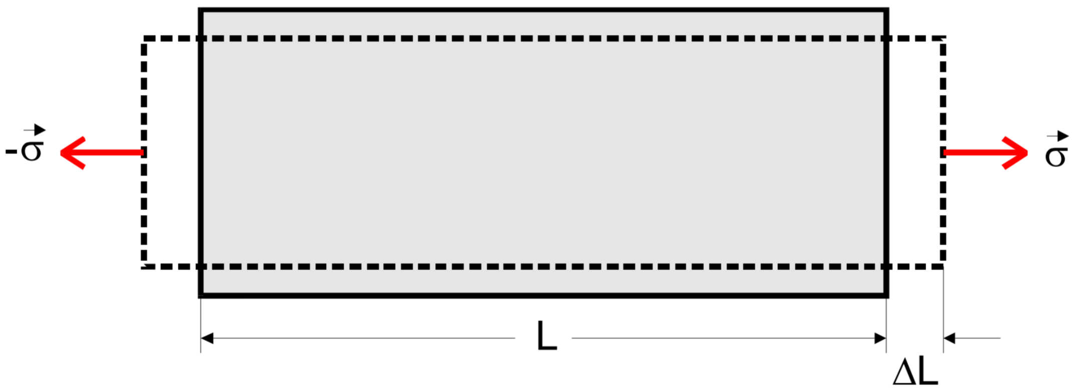

Abbildung 1: Darstellung des Hookeschen Gesetztes.

Da es deutlich leichter ist, die Biegung von Stäben zu untersuchen, wird sich in diesem Versuch darauf beschränkt. Um E zu bestimmen, werden Metallstäbe unbekannten Materials eingespannt und die Biegung untersucht. Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 2 zu finden.

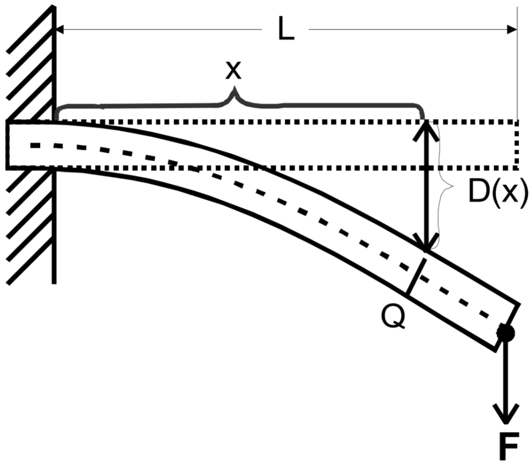

Abbildung 2: Darstellung eines durch die Kraft F gebogenen Stabes.

Die Biegung entsteht durch ein angehängtes Gewicht an das Ende des Stabes. Dieses sorgt durch die Gravitation für ein *äußeres* Drehmoment auf den Stab. Dieses Drehmoment lässt den Stab biegen, jedoch nur bis zu dem Punkt, an dem das *innere* Drehmoment dem äußeren entspricht. Nach Umstellen einiger Formeln, ergibt sich eine Formel für die Auslenkung $D(x)$. Es gilt

$$D(x) = \frac{m \cdot g}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \ . \tag{2}$$

Dabei ist m die Masse, g die Erdbeschleunigung und L die Länge des Objektes. Das I jedoch beschreibt das sogenannte *Flächenträgheitsmoment*. Dieses berechnet sich über die Formel

$$I := \int_Q y^2 dq(y) \ . \tag{3}$$

Das Flächenträgheitsmoment eines Kreises entspricht

$$I_{\text{Kreis}} = \int_{\text{A}} r^2 \cdot dA = \int_0^R 2\pi r^3 \cdot dr = \frac{R^4\pi}{2} \ . \tag{4}$$

Außerdem für Stäbe mit quadratischem Querschnitt ist das Flächenträgheitsmoment eines Quadrates relevant. Mit $a = h/2$ ergibt sich

$$I_{\text{Quadrat}} = \int_{\text{A}} a^2 \cdot dA = \frac{h^4}{12} \ , \tag{5}$$

wobei h die Kantenlänge ist.

Zusätzlich relevant ist die Formel für $D(x)$, wenn beide Enden des Stabes eingespannt werden und ein Gewicht in die Mitte gehängt wird. Für diesen Fall ist

$$D(x) = \frac{m \cdot g}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \tag{6}$$

für $x \in [0, L/2]$ und

$$D(x) = \frac{m \cdot g}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \tag{7}$$

für $x \in [L/2, L]$.

3 Durchführung

Im folgenden wird jeweils für zwei Stäbe einmal eine Messung mit einseitiger Einspannung und mit beidseitiger Einspannung vorgenommen.

3.1 Einseitige Einspannung

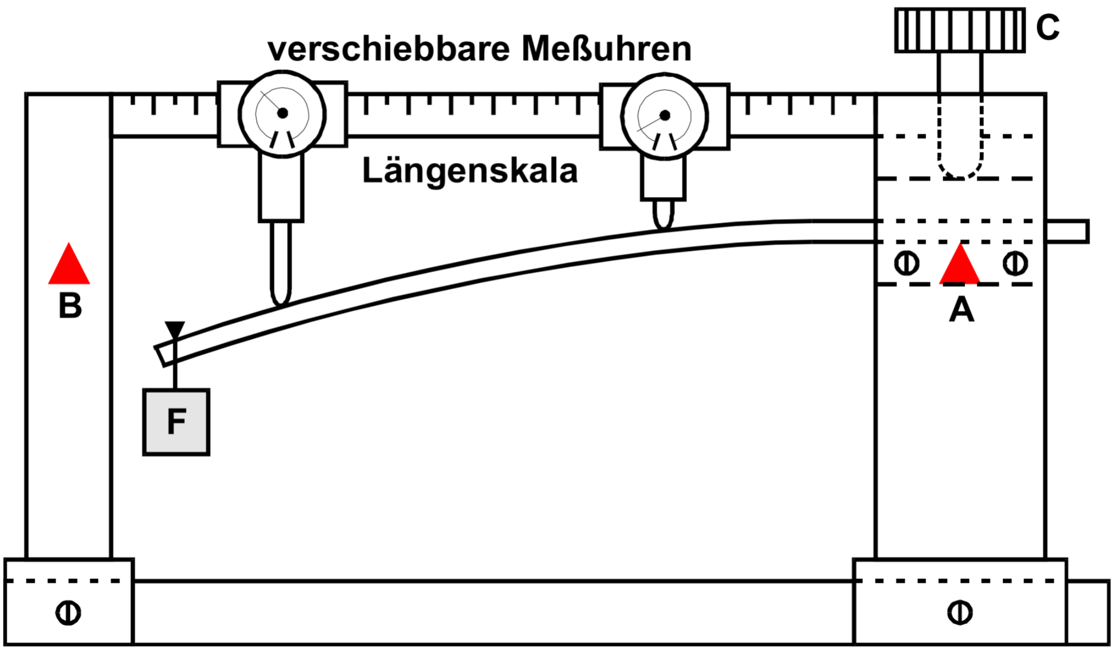

Abbildung 3: Aufbau zur Messung elastischer Stäbe und deren Elastizitätsmodul [6].

Um den Elastizitätsmodul E eines Stabes zu bestimmen, wird zunächst der jeweilige Stab einseitig in die Apperatur in Abbildung 3 am Fußpunkt A eingespannt. Die Messung wird für einen eckigen Stab mit Länge $l_{\text{eck}} = 0.602\text{m}, m_{\text{eck}} = 0.5365\text{kg}$ und der Seitenlänge $s = 0.01\text{m}$ durchgeführt. Ebenfalls wird die Messung einen runden Stab mit den Eigenschaften $l_{\text{run}} = 0.59\text{m}, m_{\text{run}} = 0.4122\text{kg}$ und einem Durchmesser von $d = 0.01\text{m}$ durchgeführt. Um den Elastizitätsmodul E richtig zu bestimmen, muss zunächst eine Nullmessung durchgeführt werden um die Messunsicherheit zu verringern. Das bedeutet, es wird zunächst die Messuhr über den Stab geschoben und die Auslenkungen $D_0(x)$ notiert. Diese werden hinterher herausgerechnet, um die verbogenen Stellen des Stabes auszugleichen, damit das Ergebnis nicht verfälscht wird. Nun wird ein Gewicht von $m = 0.654$kg an den Stab herangehängt. Dabei ist das Gewicht so nah am Ende des Stabes, als dass es als nahtlos am Ende angehängt angenommen werden kann. Nun wird die Messuhr erneut über den Stab geschoben und die Auslenkungen $D_m(x)$ werden ebenfalls notiert.

3.2 Beidseitige Einspannung

Es wird die selbe Konstruktion wie in Abbildung 3 benutzt, mit der Ausnahme, dass nun beide Seiten aufgelegt werden. Das bedeutet, das „herabhängende“ Ende wird nun auf den Fußpunkt B gelegt. Im Unterschied zur einseitigen Messung, werden in diesem Aufbau zwei verschiedene Uhren genommen. Das bedeutet auch, das für jeweils beide eine Nullmessung vorgenommen werden muss. Dann werden die Auslenkungen $D_0(x)$ und $D_m(x)$ gemessen. Bei der Messung für $D_m(x)$ wird ein Gewicht von $m = 1.5524$kg in die Mitte gehängt. Diese Messung wird jeweils für den eckigen und runden Stab vorgenommen. Außerdem kann aufgrund der beiden Messuhren, nur bis zur Mitte des Stabes gemessen werden.

4 Fehlerrechnung

Im Folgenden wird die allgemeine Fehlerrechnung, und alle wichtigen Größen der entsprechenden Rechnung, erklärt. Die wichtigsten Werte dabei sind der Mittelwert und die Standartabweichung. Der arithmetische Mittelwert wird dabei durch die Gleichung

$$\bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{n} x_i \tag{8}$$

beschrieben. Die Standartabweichung ist durch

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N} (x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2} \tag{9}$$

gegeben. Dabei entspricht N der Anzahl an Werten und x_i ist jeweils ein mit einem Fehler gemessener Wert.

Es ergibt sich ebenfalls die statistische Messunischerheit

$$\Delta \bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^{N} (x_i - \bar{x}_{\text{arithm}})^2} \ . \tag{10}$$

Sind nun mehrere fehlerbehaftete Größen in der Messung, wird der sich fortpflanzende Fehler wichtig. Es gilt die *Gaußsche Fehlerfortplanzung*

$$\Delta f(y_1, y_2, ..., y_N) = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_2}\Delta y_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_N}\Delta y_N\right)^2} \, . \tag{11}$$

5 Auswertung

5.1 Runder Stab, einseitige Einspannung

Zunächst soll die Gesamtauslenkung bestimmt werden. Dafür wird die Nullmessung von der Messung mit Gewicht abgezogen. Außerdem werden die Stellen, an denen der Stab gemessen wird, in die Formel

$$f(x) = Lx^2 - \frac{x^3}{3} \tag{12}$$

eingesetzt und dann als x Koordinate für den Plot verwendet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgetragen.

Aus der Ausgleichrechnung für den Plot in Abbildung 4 mit dem Ansatz

$$y(x) = a + b \cdot x$$

gehen die Parameter

$$a = 0.0380 \pm 0.0004 \frac{1}{\mathrm{m}^2} \qquad \text{und} \qquad b = (0.1248 \pm 0.0193) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$$

hervor. Nun wird diese Gerade mit der Formel für den Elastizitätsmodul E in (2) verglichen, wobei für I nach (4)

$$I = \frac{R^4\pi}{2} = \frac{0.005^4\pi}{2}\mathrm{m}^4$$

und es gilt

$$E = \frac{m \cdot g}{2 \cdot I \cdot a} = (108.4 \pm 1.1)10^9 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \, .$$

Tabelle 1: Messwerte der Auslenkung des runden Stabes bei einseitiger Einspannung.

$x/10^{-3}$m	$D_0(x)/10^{-3}$m	$D_m(x)/10^{-3}$m	$D(x)/10^{-3}$m	$(Lx^2 - \frac{x^3}{3})/10^{-3}$m
30.000	0.000	0.040	0.040	0.522
50.000	0.020	0.200	0.180	1.433
70.000	0.006	0.280	0.274	2.777
90.000	0.120	0.350	0.230	4.536
110.000	0.200	0.530	0.330	6.695
130.000	0.290	0.715	0.425	9.239
150.000	0.380	0.980	0.600	12.150
170.000	0.495	1.200	0.705	15.413
190.000	0.640	1.460	0.820	19.013
210.000	0.700	1.710	1.010	22.932
230.000	0.830	2.010	1.180	27.155
250.000	0.920	2.310	1.390	31.667
270.000	1.070	2.610	1.540	36.450
290.000	1.160	2.950	1.790	41.489
310.000	1.350	3.300	1.950	46.769
330.000	1.440	3.630	2.190	52.272
350.000	1.610	3.980	2.370	57.983
370.000	1.765	4.350	2.585	63.887
390.000	1.925	4.710	2.785	69.966
410.000	2.090	5.120	3.030	76.205
430.000	2.280	5.510	3.230	82.589
450.000	2.430	5.910	3.480	89.100
470.000	2.540	6.340	3.800	95.723
490.000	2.830	6.690	3.860	102.443

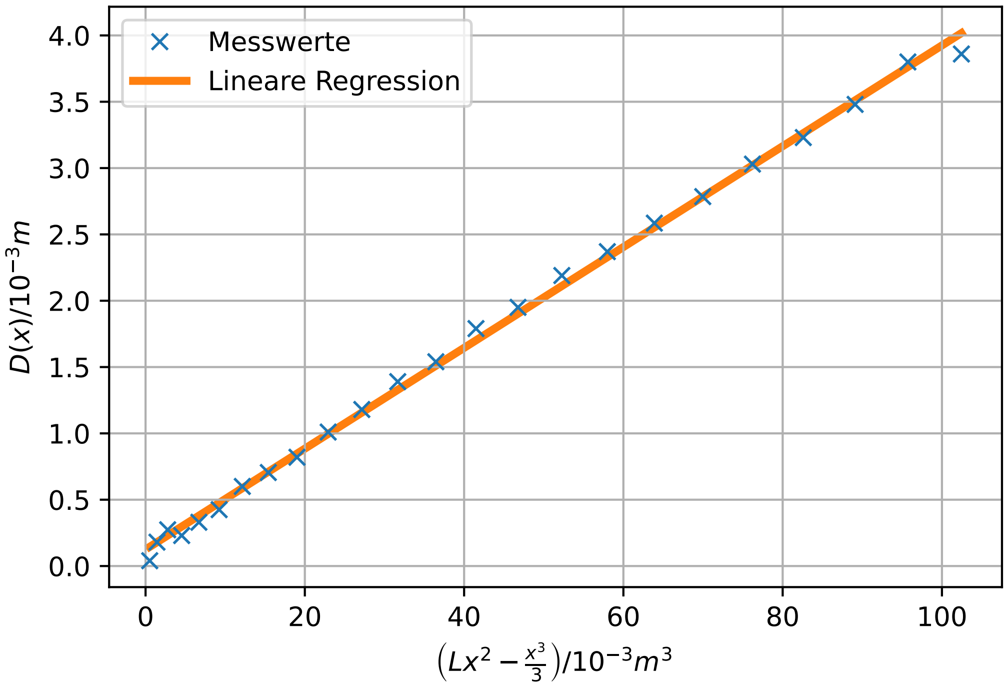

Abbildung 4: Plot des runden, einseitig eingespannten Stabes mit der Regressionsgerade für die aufgenommenen Messwerte.

5.2 Eckiger Stab, einseitige Einspannung

Für den eckigen Stab wird analog vorgangen. Die Messwerte für diese Messung sind in Tabelle 2 zu finden. Die Ausgleichsgerade $y(x) = a \cdot x + b$ in Abbildung 5 hat die Parameter

$$a = 0.0254 \pm 0.0003 \frac{1}{\mathrm{m}^2} \qquad \text{und} \qquad b = (0.0401 \pm 0.0138) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \ .$$

Das Flächenträgheitsmoment wird nach Formel (4) bestimmt und liefert mit Höhe $H = 0.01\mathrm{m}$

$$I_{\mathrm{Quadrat}} = \frac{h^4}{12} = \frac{0.01^4}{12}\mathrm{m}^4 \ .$$

Nun kann das Elastizitätsmodul berechnet werden zu

$$E = (124.3 \pm 1.5) \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \ .$$

Tabelle 2: Messwerte der Auslenkung des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung.

$x/10^{-3}$m	$D_0(x)/10^{-3}$m	$D_m(x)/10^{-3}$m	$D(x)/10^{-3}$m	$(Lx^2 - \frac{x^3}{3})/10^{-3}$m
30.000	0.000	0.030	0.030	0.533
50.000	0.010	0.040	0.030	1.463
70.000	0.042	0.085	0.043	2.835
90.000	0.040	0.160	0.120	4.633
110.000	0.050	0.270	0.220	6.841
130.000	0.095	0.370	0.275	9.441
150.000	0.130	0.500	0.370	12.420
170.000	0.200	0.650	0.450	15.760
190.000	0.290	0.815	0.525	19.446
210.000	0.310	0.950	0.640	23.461
230.000	0.390	1.160	0.770	27.790
250.000	0.490	1.370	0.880	32.417
270.000	0.580	1.560	0.980	37.325
290.000	0.610	1.760	1.150	42.499
310.000	0.620	1.965	1.345	47.922
330.000	0.730	2.180	1.450	53.579
350.000	0.800	2.380	1.580	59.453
370.000	0.880	2.620	1.740	65.529
390.000	1.000	2.880	1.880	71.791
410.000	1.100	3.150	2.050	78.223
430.000	1.210	3.380	2.170	84.807
450.000	1.300	3.640	2.340	91.530
470.000	1.385	3.905	2.520	98.374
490.000	1.450	4.050	2.600	105.324

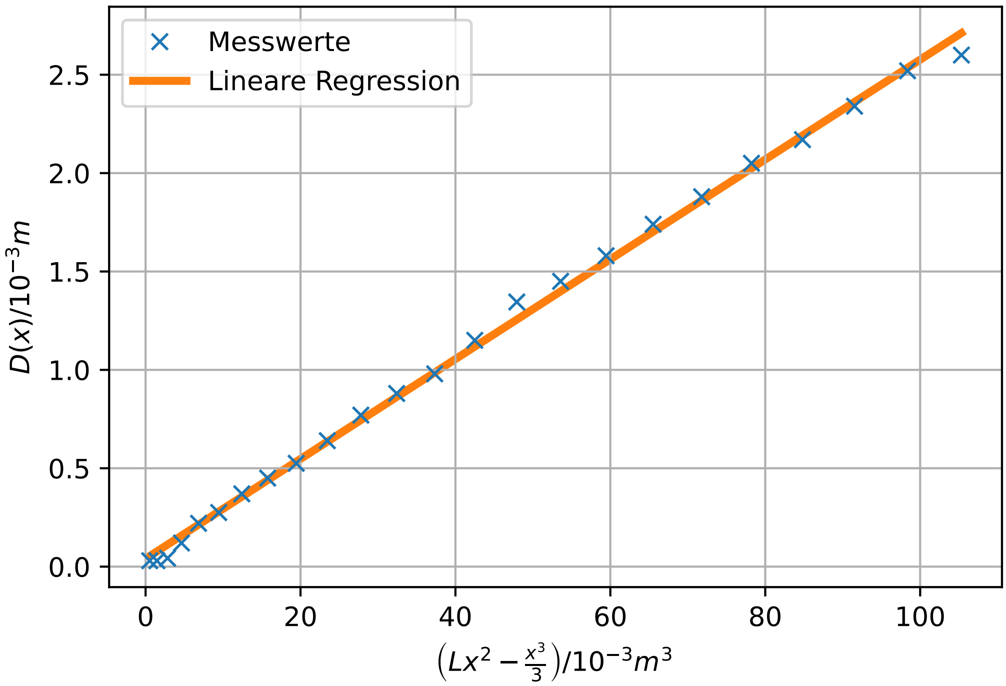

Abbildung 5: Plot des eckigen, einseitig eingespannten Stabes mit der Regressionsgerade für die aufgenommenen Messwerte.

5.3 Runder Stab, beidseitige Einspannung

Für die beidseitige Einspannung ergeben sich die Werte

$$a = (0.0041 \pm 0.0005)\frac{1}{\mathrm{m}^2} \qquad \text{und} \qquad b = (0.0824 \pm 0.0725) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}\ .$$

Da es sich nun um eine beidseitige Einspannung handelt, muss die Formel (6) angewendet werden. Somit wird E zu

$$E = \frac{m_{\text{angehängt}} \cdot g}{48 \cdot I \cdot a} = (158 \pm 19) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

bestimmt.

Tabelle 3: Messwerte der Auslenkung des runden Stabes bei beidseitiger Einspannung.

$x/10^{-3}$m	$D_0(x)/10^{-3}$m	$D_m(x)/10^{-3}$m	$D(x)/10^{-3}$m	$(3L^2x-4x^3)/10^{-3}$m	$(4x^3-12Lx^2+9L^2x-L^3)/10^{-3}$m
30.000	0.000	0.320	0.320	31.221	-
50.000	0.120	0.570	0.450	51.715	-
70.000	0.240	0.770	0.530	71.729	-
90.000	0.400	0.960	0.560	91.071	-
110.000	0.530	1.170	0.640	109.549	-
130.000	0.640	1.360	0.720	126.971	-
150.000	0.720	1.520	0.800	143.145	-
170.000	0.820	1.680	0.860	157.879	-
190.000	0.910	1.810	0.900	170.981	-
210.000	0.960	1.860	0.900	182.259	-
230.000	1.010	1.960	0.950	191.521	-
250.000	1.060	2.030	0.970	198.575	-
270.000	1.090	2.060	0.970	203.229	-
285.000	0.180	1.140	0.960	-	205.021
305.000	0.200	1.130	0.930	-	205.029
325.000	0.200	1.100	0.900	-	202.301
345.000	0.190	1.050	0.860	-	197.029
365.000	0.180	0.980	0.800	-	189.405
385.000	0.170	0.910	0.740	-	179.621
405.000	0.160	0.830	0.670	-	167.869
425.000	0.150	0.740	0.590	-	154.341
505.000	0.060	0.270	0.210	-	86.309
525.000	0.000	0.120	0.120	-	66.781

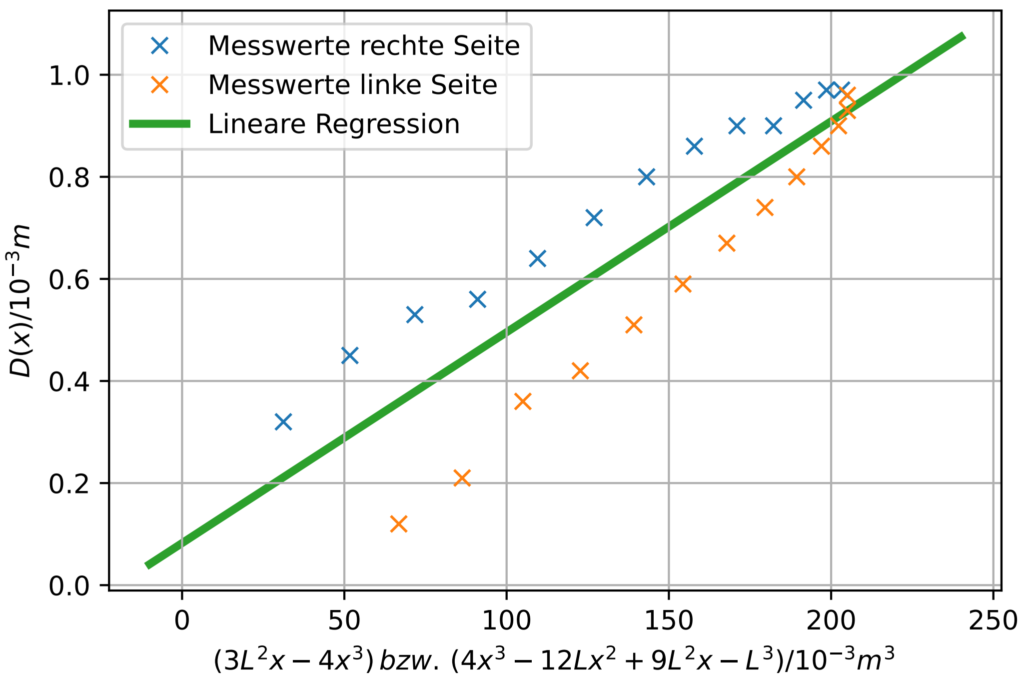

Abbildung 6: Plot des runden, beidseitig eingespannten Stabes mit der Regressionsgerade für die aufgenommenen Messwerte.

5.4 Eckiger Stab, beidseitige Einspannung

Es ergeben sich die Werte

$$a = (0.0047 \pm 0.0006)\frac{1}{\mathrm{m}^2} \qquad \text{und} \qquad b = (-0.4450 \pm 0.0948) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \ .$$

Nun kann der Elastizitätsmodul berechnet werden. Es gilt

$$E = \frac{m_{\text{angehängt}} \cdot g}{48 \cdot I \cdot a} = (81 \pm 10) \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \ .$$

Tabelle 4: Messwerte der Auslenkung des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung.

$x/10^{-3}$m	$D_0(x)/10^{-3}$m	$D_m(x)/10^{-3}$m	$D(x)/10^{-3}$m	$(3L^2x - 4x^3)/10^{-3}$m	$(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3)/10^{-3}$m
30.000	0.000	0.260	0.260	31.221	-
50.000	0.030	0.280	0.250	51.715	-
70.000	0.070	0.280	0.210	71.729	-
90.000	0.110	0.300	0.190	91.071	-
110.000	0.160	0.300	0.140	109.549	-
130.000	0.220	0.320	0.100	126.971	-
150.000	0.270	0.270	0.000	143.145	-
170.000	0.310	0.290	-0.020	157.879	-
190.000	0.360	0.280	-0.080	170.981	-
210.000	0.440	0.210	-0.230	182.259	-
230.000	0.490	0.130	-0.360	191.521	-
250.000	0.550	0.120	-0.430	198.575	-
270.000	0.630	0.040	-0.590	203.229	-
295.000	0.900	1.500	0.600	-	205.379
305.000	0.850	1.460	0.610	-	205.029
325.000	0.800	1.400	0.600	-	202.301
345.000	0.740	1.300	0.560	-	197.029
365.000	0.630	1.170	0.540	-	189.405
385.000	0.550	1.050	0.500	-	179.621
405.000	0.500	0.920	0.420	-	167.869
425.000	0.400	0.810	0.410	-	154.341
445.000	0.340	0.680	0.340	-	139.229
465.000	0.250	0.530	0.280	-	122.725
485.000	0.240	0.430	0.190	-	105.021
505.000	0.110	0.300	0.190	-	86.309
525.000	0.000	0.110	0.110	-	66.781

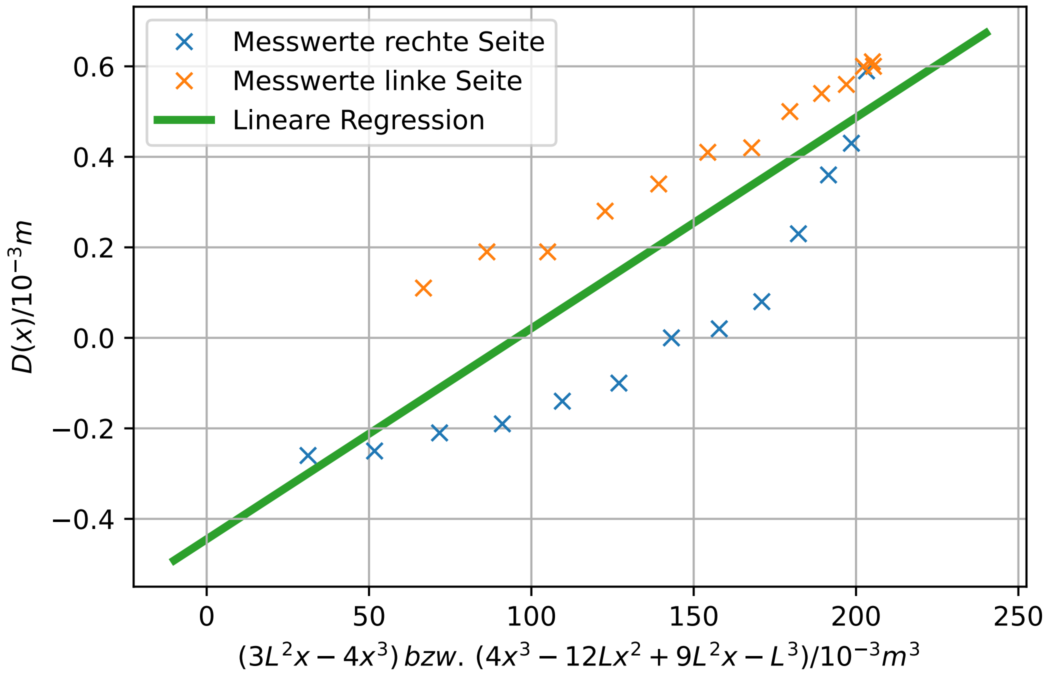

Abbildung 7: Plot des eckigen, beidseitig eingespannten Stabes.

6 Diskussion

Die Werte bei der einseitig eingespannten Messung sind durchaus vielversprechend. Die Ergebnisse werden nun mit dem Literaturwert von Kupfer verglichen, welcher laut der Quelle [1] bei

$$E_{\text{Lit}} = 125 \cdot 10^9 \,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

liegt. Bei dem runden Stab ergibt sich eine Abweichung von

$$\Delta E = \left| \frac{108.4 - 125}{125} \right| \cdot 100 = 13.28\%$$

zum Theoriewert. Die Abweichung bei dem eckigen berechnet sich zu

$$\Delta E = \left| \frac{124.3 - 125}{125} \right| \cdot 100 = 0.56\% \;.$$

Bei Abweichungen von 13.28 % und 0.56 % kann von einer erfolgreichen Messung gesprochen werden. Bei der beidseitigen Messung jedoch ergeben sich große Abweichungen.

Bei dem runden Stab ergibt sich eine Abweichung von

$$\Delta E = \left|\frac{158 - 125}{125}\right| \cdot 100 = 26.4\% \ ,$$

obwohl der selbe Stab verwendet wurde. Bei dem eckigen Stab berechnet sich die Abweichung zu

$$\Delta E = \left|\frac{81 - 125}{125}\right| \cdot 100 = 35.2\% \ .$$

Die Messung ist weniger erfolgreich und die Standartabweichung ist mit 10 auch noch relativ hoch. In Abbildung 7 wird ersichtlich, dass die beiden Messuhren wohl unterschiedlich gemessen haben, trotz Nullmessung, denn die Diskrepanz zwischen den Werten ist groß. Natürlich hat der Stab an einigen Stellen eine andere Beschaffenheit, jedoch sollte sich dies eigentlich durch die Nullmessung der Uhren rauskürzen. Dennoch ist die Messung grundsätzlich ein Erfolg gewesen, jedoch scheint es ein systematischen Fehler bei der Messung bei beidsetiger Einspannung gegeben zu haben. Das geringe Gewicht, welches bei der Belastung verwendet wurde, wurde zu gering gewählt. Dadurch konnte der Stab bei beidseitiger Auflage nicht weit genug durchgebogen werden. Es kann also nicht mit Sicherheit gesagt werden, dass es sich wirklich um das angenommene Material (Kupfer) handelt.

Literatur

[1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme*. Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-54846-2.

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[5] The pandas development team. *pandas-dev/pandas: Pandas*. Version latest. Feb. 2020. DOI: `10.5281/zenodo.3509134`. URL: `https://doi.org/10.5281/zenodo.3509134`.

[6] *Versuchsanleitung „Trägheitsmoment“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.