

V353

Relaxionsverhalten eines RC-Kreises

Toby Teasdale	Erich Wagner
toby.teasdale@tu-dortmund.de	erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.01.22	Abgabe: 18.01.22
------------------------	------------------

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemeine Relaxionsgleichung	3
2.2	Entladevorgang	3
2.3	Aufladevorgang	4
2.4	Relaxionsphänomene bei Wechselspannungen	4
2.5	Integrationsverhalten eines RC-Kreises	5
3	Durchführung	5
3.1	Bestimmung der Zeitkonstanten	5
3.2	Messung der Frequenzabhängigkeit und Phasenverschiebung	6
3.3	Dreiecksanregung eines RC-Kreises	6
4	Fehlerrechnung	7
5	Auswertung	7
5.1	Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Entladnugskurve	7
5.2	Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Frequenz und der anliegenden Wechselspannung	9
5.3	Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Phasenverschiebung	10
6	Diskussion	13
	Literatur	14

1 Ziel

2 Theorie

Da *RC-Kreise* immer eine gewisse Zeit brauchen um sich aufzuladen, beziehungsweise zu entladen, müssen diese Prozesse natürlich auch mathematisch beschrieben werden. Im folgenden sind die wichtigsten Formeln zusammengefasst [6, S. 1–5].

2.1 Allgemeine Relaxionsgleichung

Es wird davon ausgegangen dass es eine Größe A gibt, die ein Supremum bei der Auf/- und Entladung besitzt. Das bedeutet, es gibt eine Änderungsgeschwindigkeit, die sich für große t gegen null bewegen muss, da $A(t)$ immer weiter gegen $\sup(A(t))$ strebt. Es zeichnet sich also ein asymptotisches Verhalten ab. Die allgemeine Änderungsgeschwindigkeit wird durch

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

beschrieben, wobei c eine Konstante ist. Außerdem gilt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] e^{ct}. \quad (2)$$

Dabei ist jedoch zu beachten, dass für den beschränkten Fall, der ja hier interessant ist, $c < 0$ sein muss, da sonst kein Supremum von A vorliegt.

2.2 Entladevorgang

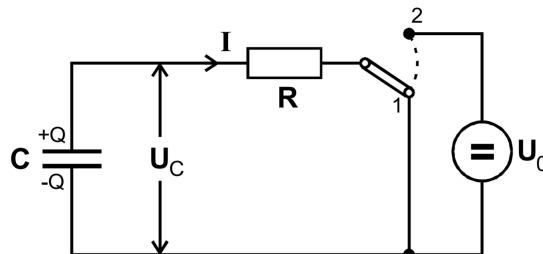


Abbildung 1: Schaltung mit Entladung in Pos. 1 und Aufladung in Pos. 2 [6, S. 1].

Eine beispielhafte Schaltung mit Auf/- und Entladevorgängen ist in Abbildung 1 dargestellt. Für die Entladung wird davon ausgegangen, dass der Schalter lange genug in Position 1, also dem Aufladevorgang war, dass sich die Ladung Q dort deponiert hat. Dann gilt für die Kondensatorspannung

$$U_C = \frac{Q}{C}, \quad (3)$$

wobei C die Kapazität des Kondensators beschreibt. Nun wird durch das Ohmsche Gesetz ein Strom angelegt. Es gilt

$$I = \frac{U_C}{R}. \quad (4)$$

Dabei ist R ein ohmscher Widerstand. Da nach Umlegung des Schalters Ladung abfließt, gilt

$$dQ = -I dt,$$

woraus sich

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot Q(t)$$

ergibt. Da sich ein Grenzwert $Q(\infty) = 0$ einstellen wird, gilt

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5)$$

2.3 Aufladevorgang

Analog lässt sich auch die Aufladung beschreiben. Es wird also davon ausgegangen, dass der Schalter in Abbildung 1 eine große Zeit t in Position 2 war. Nun gelten die Anfangsbedingungen

$$Q(0) = 0 \quad \text{und} \quad Q(\infty) = CU_0.$$

Der Aufladevorgang wird also durch die Gleichung

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (6)$$

beschrieben.

2.4 Relaxationsphänomene bei Wechselspannungen

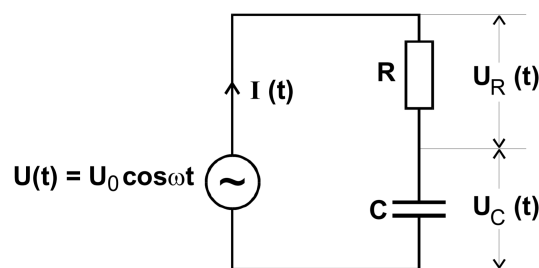


Abbildung 2: Beispielschaltung für Relaxationsphänomene bei einer Wechselspannung [6, S. 3].

Legt man eine Wechselspannung an, wie beispielsweise in Abbildung 2, dann kommt es zu Relaxationsphänomenen. Dabei wird durch die äußere Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (7)$$

der RC-Kreis weiter angeregt. Dadurch wird sich eine Phasenverschiebung zwischen Generatorspannung und Kondensatorspannung ergeben. Dieses problem versucht man dann durch den Ansatz

$$U_C = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \phi(\omega))$$

zu lösen. Nach etwaigen Umformungen und weiteren Annahmen gelangt man zu der Gleichung

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (8)$$

2.5 Integrationsverhalten eines RC-Kreises

Unter bestimmten Bedingungen, kann ein RC-Kreis als Integrator dienen. Dafür muss zunächst

$$\omega \gg \frac{1}{RC}$$

erfüllt sein. Dann gilt

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (9)$$

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten

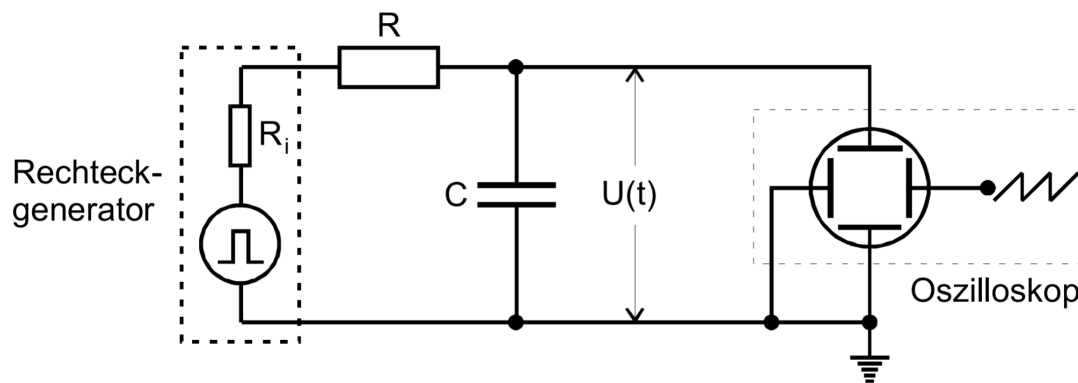


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Zeitkonstanten [6].

Um die Zeitkonstante zu bestimmen, wird zunächst der RC-Kreis wie in Abbildung 3 an ein Oszilloskop angeschlossen und mit einem Rechteckpuls $U_0(t)$ angeregt. Dabei ist der Widerstand R und die Kapazität C unbekannt. Dann wird mit Hilfe des Triggers die Entladekurve der Kondensatorspannung $U_C(t)$ fixiert und zu verschiedenen Zeiten t notiert.

3.2 Messung der Frequenzabhängigkeit und Phasenverschiebung

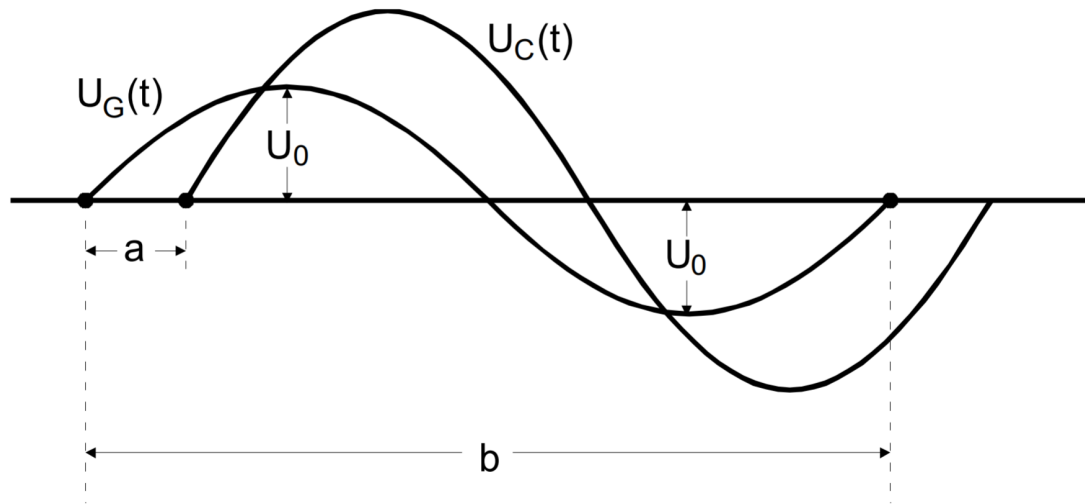


Abbildung 4: Skizze einer Phasenverschiebung zweier Spannungen [6].

Nun soll die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung U_C und die jeweilige Phasenverschiebung zur Generatorspannung bestimmt werden. Dafür wird die Anregungsfrequenz auf eine Sinusanregung umgestellt. Es werden also jeweils die Frequenz f , die Phasenverschiebung ϕ und die Spannung U_C notiert. Die Phasenverschiebung wird am Oszilloskop einfach abgelesen, indem das Oszilloskop so eingestellt wird, dass die beiden Symmetriepunkte der Generatorspannung und der Kondensatorspannung im Mittelpunkt sind. Die Amplitude der Kondensatorspannung kann dann auch einfach abgelesen werden. Die Frequenz wird einfach am Gerät eingestellt und notiert.

Aus dem Abstand der Nullstellen a und der Wellenlänge b berechnet sich die Phasenverschiebung über

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi. \quad (10)$$

3.3 Dreiecksanregung eines RC-Kreises

Am Schluss soll noch der RC-Kreis aus Abbildung 3 mit einer Dreiecksanregung angeregt werden und dann für hohe Frequenzen beobachtet werden. Dafür wird am Generator auf

Dreiecksanregung gestellt und eine Frequenz von $f \geq 10\text{kHz}$ gewählt.

4 Fehlerrechnung

Im Folgenden wird die allgemeine Fehlerrechnung und alle wichtigen Größen der entsprechenden Rechnung erklärt. Die wichtigsten Werte dabei sind der

$$\text{Mittelwert} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n x_i \quad \text{und die} \quad (11)$$

$$\text{Standartabweichung} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (12)$$

Dabei entspricht N der Anzahl an Werten und x_i ist jeweils ein mit einem Fehler gemessener Wert. Es ergibt sich ebenfalls die statistische Messunsicherheit

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (13)$$

Entstehen mehrere Unbekannte in einer Messung, folgen daraus auch mehrere Messunsicherheiten, die in dem weiteren Verlauf der Rechnung berücksichtigt werden müssen. Es gilt die *Gaußsche Fehlerfortpflanzung*

$$\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sqrt{\left(\frac{df}{dy_1} \Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dy_2} \Delta y_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dy_N} \Delta y_N\right)^2}. \quad (14)$$

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Entladungskurve

Die bei dem Spannungsabfall des Kondensators gemessenen Wertepaare (U_c, T) sind in Tabelle 1 zu sehen.

Aus diesen Wertepaaren und einer linearen Ausgleichsrechnung wird mittels SCIPY [2] die Ausgleichsgerade der Form

$$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t + b$$

in Abbildung 5 dargestellt.

Tabelle 1: Messdaten zur Entladnugskurve

U_c / V	$T / \mu\text{s}$
10,00	0
10,00	3
9,00	4
8,00	7
7,00	9
6,00	13
5,00	18
4,00	23
3,50	26
3,00	30
2,50	33
2,00	40
1,50	47
1,00	57
0,50	80
0,25	128

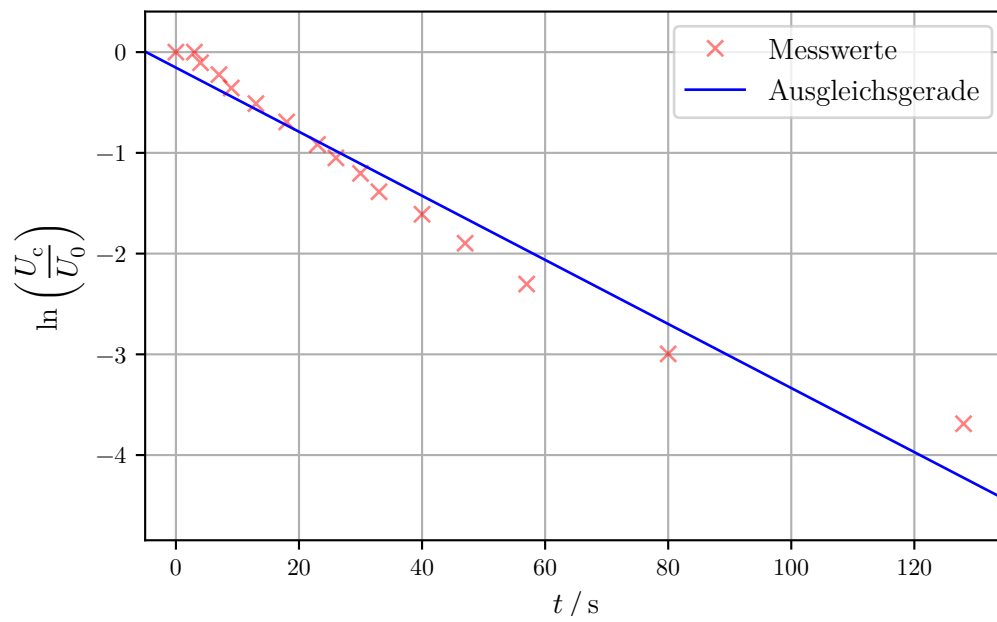


Abbildung 5: Lineare Ausgleichsgerade zur Bestimmung der Zeitkonstanten mithilfe der Entladekurve.

Aus den resultierenden Parametern

$$a = (-0,032 \pm 0,002) \, \mu\text{s}^{-1} \quad \text{und} \\ b = (-0,154 \pm 0,083) \cdot 10^{-6}$$

ergibt sich nach (5) für die Zeitkonstante

$$RC = -\frac{1}{a} = (31,4 \pm 1,8) \, \mu\text{s}.$$

5.2 Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Frequenz und der anliegenden Wechselspannung

Die bei den modulierten Frequenzen f gemessene Wechselspannung U_c sind in Tabelle 2 zu sehen.

Tabelle 2: Messdaten zur Frequenz.

f / Hz	U_c / V
250	5,00
500	4,80
750	4,60
1000	4,60
1250	4,20
1500	4,10
1750	4,00
2000	3,95
2250	3,60
2500	3,30
2750	3,20
3000	3,00
3250	2,80
3500	3,00
3750	2,80
4000	2,75
6000	2,00
8000	1,50
10000	1,20
20000	0,60
30000	0,39
50000	0,25
100000	0,13

Aus diesen Werten und einer Ausgleichsrechnung nach (8) wird die Ausgleichsgerade der Form

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

in Abbildung 6 dargestellt.

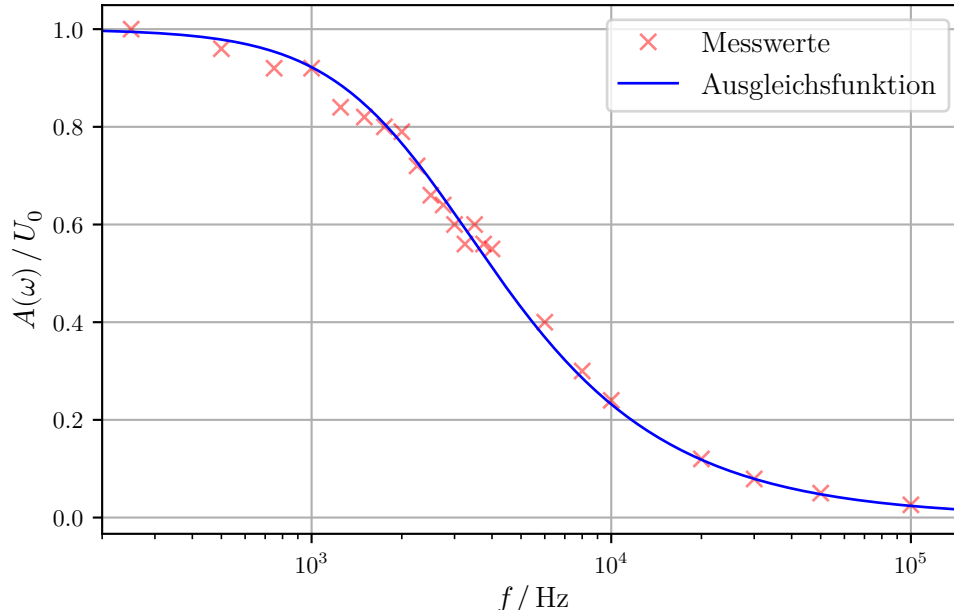


Abbildung 6: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Zeitkonstanten mithilfe der Frequenz.

Daraus ergibt sich nun die Zeitkonstante zu

$$RC = (-66,7 \pm 1,2) \mu\text{s}.$$

5.3 Bestimmung der Zeitkonstanten durch die Phasenverschiebung

Die Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen Generatorspannung und Kondensatorspannung erfolgt mithilfe der Messwerte in Tabelle 3.

Aus diesen Werten und einer Ausgleichsrechnung nach (10) wird die Ausgleichsgerade der Form

$$\phi = a \arctan(bx)$$

in Abbildung 7 dargestellt.

Tabelle 3: Messdaten zur Phasenverschiebung.

f / Hz	U_c / V	ϕ / rad
250	5	0,0628
500	5	0,1257
750	5	0,1885
1000	5	0,1759
1250	4	0,1649
1500	4	0,1885
1750	4	0,2199
2000	4	0,2513
2250	4	0,2827
2500	3	0,3142
2750	3	0,3283
3000	3	0,3581
3250	3	0,3676
3500	3	0,3738
3750	3	0,4006
4000	3	0,4273
6000	2	0,4524
8000	2	0,5027
10000	1	0,5027
20000	1	0,7540
30000	0	0,3770
50000	0	0,6283
100000	0	0,6283

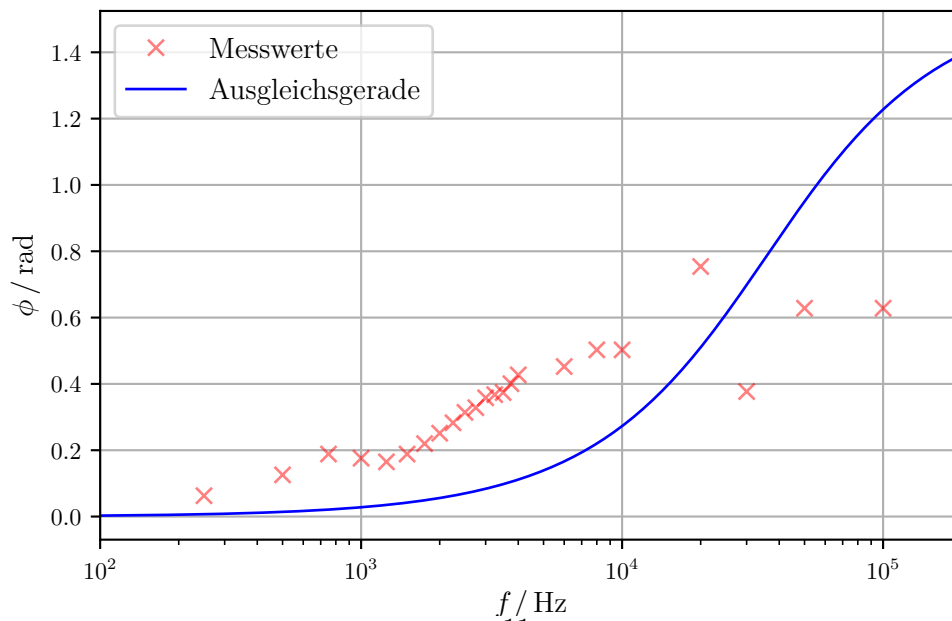


Abbildung 7: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Zeitkonstanten mithilfe der Phasenverschiebung.

Daraus ergibt sich nun die Zeitkonstante zu

$$RC = (4,5 \pm 1,2) \mu s.$$

Es wird des Weiteren zur besseren Veranschaulichung ein Polarplot in Abbildung 8 dargestellt.

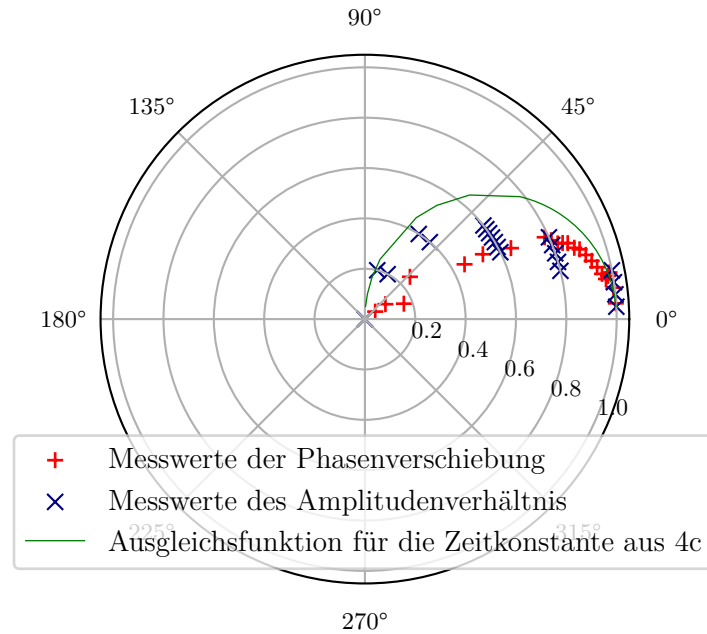


Abbildung 8: Polarplot zur Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator und Kondensatorspannung.

Um die Integrierbarkeit der RC-Spannung zu zeigen, wird der Erwartungswert mit dem Realwert vom Oszilloskop verglichen. Da sich Erwartungs- und Realwert decken ist gezeigt das die RC Spannung integrabel ist.

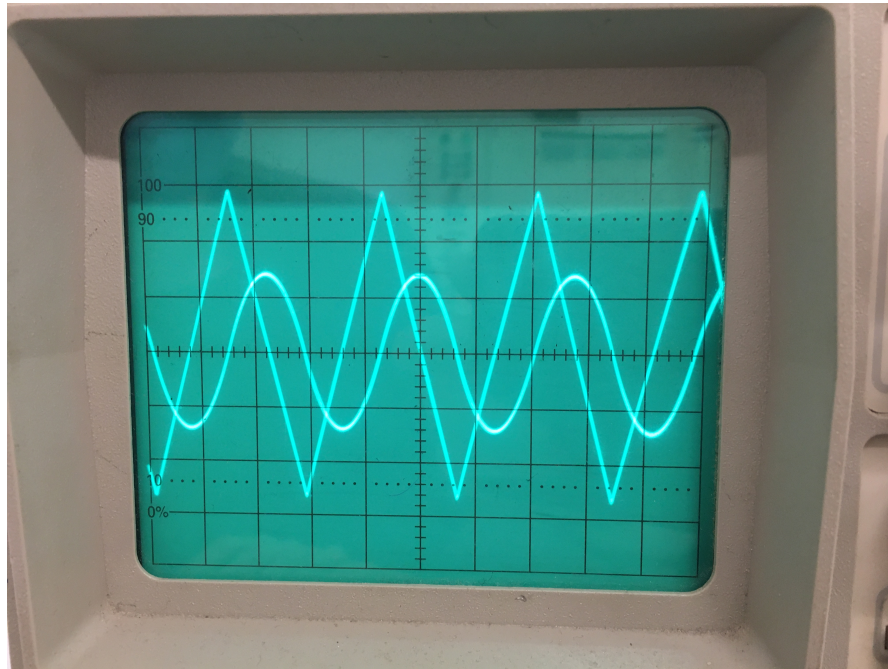


Abbildung 9: Dreiecksspannung integriert.

6 Diskussion

Auffällig ist, dass die Werte der Zeitkonstanten nah bei einander liegen und generell die experimentellen Graphen meist den theoretischen, erwarteten Graphen sehr ähnlich sind. Die Entladekurve des Kondensators entspricht einem erwarteten exponentiellen Abfall der Spannung. Die Amplitude der Kondensatorspannung sinkt mit zunehmender Frequenz ebenfalls wie erwartet exponentiell. Auch die Phasenverschiebung bleibt wie erwartet zwischen 0 und $\pi/2$. Die Zeitkonstante kann über die drei Messreihen ausgerechnet werden. Der genaue Wert für der Zeitkonstante kann nicht weiter berechnet werden, da der Ohmsche Widerstand R des Widerstand und die Kapazität C des Kondensators nicht gegeben sind und keine Messgeräte vorhanden sind. Die gemessene Zeitkonstante über die Methode der Entladung des Kondensators ist 2.03 mal kleiner als die Zeitkonstante aus der Messreihe zur Methode der Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Zeitkonstante aus der Messung der Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz ist 2.69 mal kleiner als der Wert aus der Methode über die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung. Diese Abweichungen können unter anderem daher kommen, dass eine geringer Ablesefehler auf dem Oszilloskop nicht ausgeschlossen werden kann.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] The pandas development team. *pandas-dev/pandas: Pandas*. Version latest. Feb. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3509134. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3509134>.
- [6] *Versuchsanleitung „Das Relaxionsverhalten eines RC Kreises“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.