

V606

## **Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe**

Toby Teasdale  
toby.teasdale@tu-dortmund.de

Erich Wagner  
erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 31.05.2022

Abgabe: 07.06.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Berechnung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen . . . . .	3
2.2	Vorgehen zur Bestimmung der Suszeptibilität . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Theoretische Bestimmung der Suszeptibilität . . . . .	8
4.2	Bestimmung der Filterfrequenz und Güte des Selektivverstärkers . . . . .	9
4.3	Experimentelle Bestimmung der Suszeptibilität . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Ziel

In dem Versuch „Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen“ sollen die Suszeptibilitäten verschiedener Stoffe untersucht und experimentell ermittelt werden.

## 2 Theorie

Zunächst wird die grundlegende Theorie für den folgenden Versuch aufgearbeitet. Dafür wird die Suszeptibilität erklärt und wie diese errechnet werden kann. Weiterhin wird theoretisch erklärt, wie diese Suszeptibilität experimentell ermittelt werden kann.

### 2.1 Berechnung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen

Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  wird im Vakuum durch die Gleichung

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

beschrieben, wobei  $\mu_0$  die Induktionskonstante und  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke ist. Bei Anwesenheit von Materie muss der Term noch durch die Magnetisierung  $\vec{M}$  erweitert werden. Es folgt

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \quad (1)$$

Diese Magnetisierung wird durch magnetische Momente in der Probe hervorgerufen. Die Magnetisierung ist durch

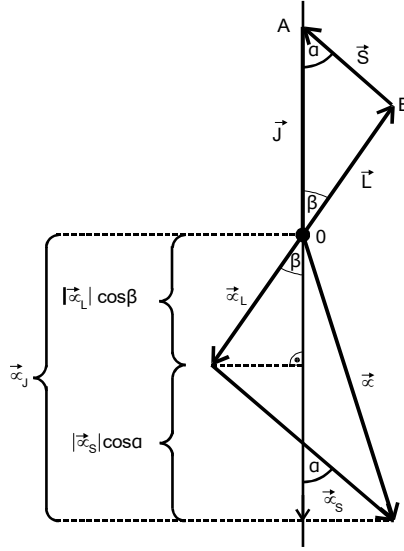
$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H}$$

gegeben. Dabei ist der Faktor  $\chi$  die sogenannte Suszeptibilität, die sowohl von der Temperatur  $T$  und  $\vec{H}$  abhängig ist. Um die Eigenschaften des Paramagnetismus, die in diesem Experiment von Interesse sind, beobachten zu können, muss die Probe ein nicht verschwindenden Drehimpuls aufweisen können. Dies ist notwendig, da die Orientierung der mit dem Drehimpuls gekoppelten magnetischen Momente relativ zum äußeren Feld ist. Die Ausrichtung dieser Momente wird aber durch die thermische Bewegung ständig gestört, weshalb der Paramagnetismus eine temperaturabhängige Größe ist. Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  setzt sich aus drei Anteilen zusammen, welche auch schematisch in Abbildung 1 dargestellt sind. Einmal der Bahndrehimpuls der Elektronenhülle, dem Eigendrehimpuls der Elektronen, auch Spin genannt, und der Kerndrehimpuls. Letzterer kann hier vernachlässigt werden. Es folgt also

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},$$

wobei  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  jeweils die Vektorsummen der Einzeldrehimpulse der Elektronen in der Hülle sind. Quantenmechanisch lässt sich jetzt zeigen, dass

$$\vec{\mu}_L = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \quad \text{und} \quad \vec{\mu}_S = -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$



**Abbildung 1:** Vektordiagramm der Drehimpulsvektoren einer Elektronenhülle und den daraus resultierenden magnetischen Momenten [6].

ist, wobei  $g_S$  dem gyromagnetische Verhältnis des freien Elektrons und

$$\mu_B = \frac{e_0}{2m_0} \hbar$$

dem Bohrsche Magneton entspricht. Mit

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)} \cdot \hbar$$

folgt

$$|\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)} \quad \text{und} \\ |\vec{\mu}_S| = g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)}.$$

Durch einige geometrischen Beziehungen, die sich der Abbildung 1 entnehmen lassen und der Näherung von  $g_S \approx 2$ , folgt dann schließlich, dass

$$|\vec{\mu}_J| \approx \mu_B \sqrt{J(J+1)} \frac{3J(J+1) + \{S(S+1) - L(L+1)\}}{2J(J+1)}.$$

Dabei wird der Term

$$g_J := \frac{3J(J+1) + \{S(S+1) - L(L+1)\}}{2J(J+1)} \quad (2)$$

der Landé-Faktor des betreffenden Atoms genannt. Damit gilt

$$|\vec{\mu}_J| \approx \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}. \quad (3)$$

Durch das quantenmechanische Phänomen der Richtungsquantelung gilt

$$\mu_{J_z} = -\mu_B g_J m,$$

wobei  $m$  die Orientierungszahl ist. Es lässt sich nun durch längere Rechnung zeigen, dass

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3k_B T} \quad (4)$$

ist [6]. Dabei ist  $N$  die Anzahl der Momente pro Volumeneinheit und  $k$  die Boltzmann-Konstante. Es lässt sich auch das Curiesche Gesetz des Paramagnetismus

$$\chi \sim \frac{1}{T} \quad (5)$$

erkennen.

Bekanntermaßen lässt sich Paramagnetismus sehr gut bei Verbindungen beobachten, die Ionen Seltener Erden enthalten. Daraus lässt sich nach obigen Eigenschaften des Paramagnetismus folgern, dass die Elektronenhüllen dieser Verbindungen große Drehimpulse haben müssen. Diese können nur durch die inneren Elektronen erzeugt werden, genauer gesagt durch die Elektronen in der 4f-Schale. Die Anordnung der Elektronen in dieser Schale und der daraus resultierende Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  werden durch die sogenannten Hundschen Regeln beschrieben. Diese lauten:

1. Die Spins  $\vec{s}_i$  addieren sich zum Gesamtspin  $\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i$ . Dabei darf das Pauli-Prinzip nicht verletzt werden.
2. Der maximale Drehimpuls  $\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$  entsteht so, dass die Bahndrehimpulse  $\vec{l}_i$  weder das Pauli-Prinzip noch die erste Regel verletzen.
3. Der Gesamtdrehimpuls ist  $\vec{J} = \vec{L} - \vec{S}$ , falls die Schale weniger als zu Hälfte gefüllt ist und  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , wenn sie mehr als zur Hälfte gefüllt ist.

Diese Regeln basieren darauf, dass die Hüllenelektronen sich untereinander elektrostatisch abstoßen.

## 2.2 Vorgehen zur Bestimmung der Suszeptibilität

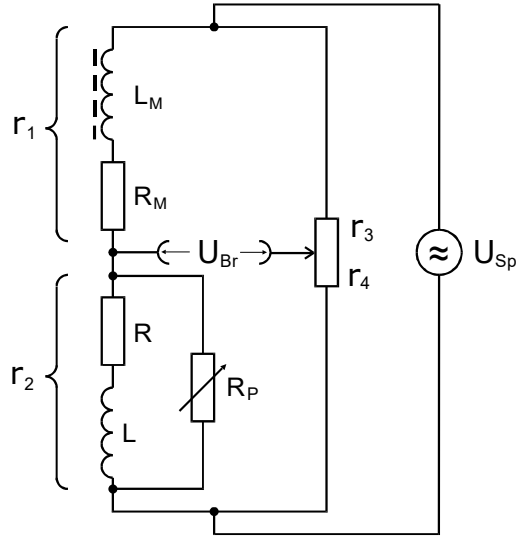
Um die Suszeptibilität  $\chi$  experimentell zu bestimmen, wird eine Brückenschaltung wie in Abbildung 2 verwendet. Die Induktivität einer Spule ist durch

$$L_{\text{ges}} = \mu \mu_0 \frac{n^2}{l} F$$

gegeben, welche sich aber aufgrund der technischen Realisierbarkeit zu

$$L'_{\text{ges}} = \mu_0 \frac{n^2}{l} F + \chi \mu_0 \mu_0 \frac{n^2}{l} Q \quad (6)$$

abändert. Dabei ist  $Q$  der Querschnitt der Probe und  $F$  der Spulenquerschnitt. Es werden zwei Spulen möglichst gleicher Induktivität  $L$  benutzt, da die Induktionsdifferenz  $\Delta L$  für



**Abbildung 2:** Suszeptibilitätsmessung mittels einer Brückenschaltung [6].

die Suszeptibilitätsmessung entscheidend ist. Es lässt sich für hohe Frequenzen zeigen, dass

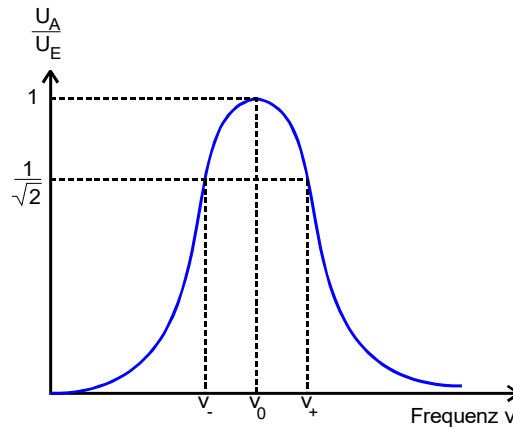
$$\omega \rightarrow \text{inf} : \chi = 4 \cdot \frac{F U_{\text{Br}}}{Q U_{\text{Sp}}} \quad (7)$$

mit  $U_{\text{Br}}$  als Brückenspannung und  $U_{\text{Sp}}$  als Speisespannung gilt [6]. Nach langer Rechnung lässt sich außerdem für hohe Frequenzen zeigen, dass

$$\omega \rightarrow \text{inf} : \chi = 2 \cdot \frac{F \Delta R}{Q R_3} \quad (8)$$

gilt [6].  $R_3$  ist dabei der feste Widerstand in der Brückenschaltung, dargestellt in Abbildung 2, mit  $R_3 = 1\text{k}\Omega$  und  $\Delta R$  die Differenz am Potentiometer.

### 3 Durchführung



**Abbildung 3:** Die Filterkurve eines Selektivverstärkers. [6]

Zunächst soll die Filterkurve, dargestellt in Abbildung 4, des Selektivverstärkers untersucht werden. Als Quelle wird eine konstante Eingangsspannung in Abhängigkeit von einer Frequenz gewählt. Dafür wird als Signalquelle ein sogenannter Synthesizer gewählt. Dieser ermöglicht eine genaue Einstellung der Frequenz. Diese ist erforderlich um das Maximum der Filterkurve genau abzutasten. Es wird dann jeweils die Spannung und die Frequenz notiert. Dabei wird die Güteklasse auf  $Q = 20$  gestellt und die Frequenz wird im Bereich (20–40) kHz eingestellt. Nun soll weiterhin die Suszeptibilität gemessen werden. Dafür wird der Aufbau in Abbildung 4 verwendet. Zunächst wird die Brückenschaltung so eingestellt, dass die gemessene Spannung minimal wird. Dann wird die Einstellung am Widerstand abgelesen und notiert. Nun wird die Probe in die Gerätschaft eingeführt und die Spannung wird abgelesen. Schließlich wird der Widerstand so eingestellt, dass die Spannung wieder minimal wird, während die Probe eingeführt ist. Dann wird die Probe wieder entnommen. Im Anschluss wird dieser Prozess drei mal für jede der drei Proben wiederholt. Während des Prozesses wird darauf geachtet, dass die Proben nicht lange in der Hand gehalten werden um diese nicht zu erwärmen und nicht aufgrund der Temperaturabhängigkeit zwischen Messspulen und Probe die Ergebnisse zu verfälschen.

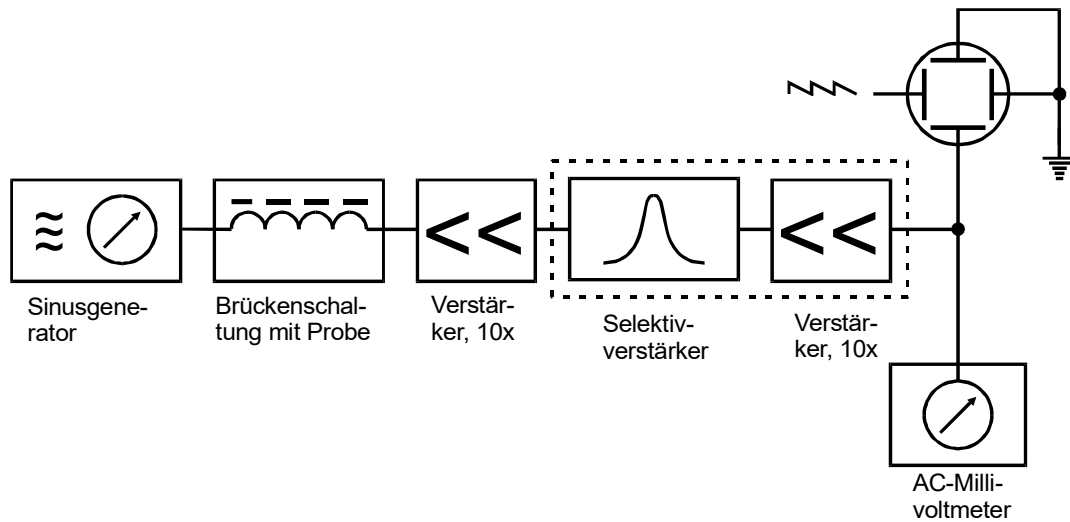


Abbildung 4: Blockschaltbild der verwendeten Messapparatur [6].

## 4 Auswertung

In der folgenden Auswertung wird die Filterkurve des Selektiv-Verstärkers untersucht und mithilfe einer Brückenschaltung die Suszeptibilitäten verschiedener Selten-Erd-Metalle bestimmt, sowie mit den theoretisch ermittelten Suszeptibilitäten verglichen.

### 4.1 Theoretische Bestimmung der Suszeptibilität

Zum Vergleich der zu bestimmenden Suszeptibilitäten werden diese zunächst theoretisch mithilfe der Hundschen Regeln in Abschnitt 2 ermittelt. Bei den hier verwendeten Selten-Erd-Metallen handelt es sich um  $\text{Dy}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Gd}_2\text{O}_3$  und  $\text{Nd}_2\text{O}_3$ . Bei allen Stoffen ist die maximale Hauptquantenzahl  $n = 4$ , woraus für die Orientierungsquantenzahl  $m = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$  ergibt. Damit folgt für die drei Stoffe:

- $\text{Dy}_2\text{O}_3$  besitzt neun Elektronen in der 4f-Schale und damit mehr als die Anzahl von  $m$ , weswegen zwei Elektronen einen negativen Spin haben. Damit ist  $S = \sum_i s_i = \frac{5}{2}$  und der Drehimpuls ergibt sich zu  $L = \sum_i m_i = 5$ . Da die Schale mehr als halb voll ist, ist der Gesamtdrehimpuls  $J = L + S = 5 + \frac{5}{2} = 7,5$ . Nach Gleichung 3 ist der Landé-Faktor somit  $g_j = \frac{4}{3}$ .
- $\text{Gd}_2\text{O}_3$  besitzt sieben Elektronen in der 4f-Schale mit dem selben Spin folgt für  $S = \frac{7}{2}$  und für  $L = 0$ , da  $m$  gleich der Anzahl an Elektronen ist. Damit ist  $J = S = 3,5$  und  $g_j = 2$
- $\text{Nd}_2\text{O}_3$  besitzt drei Elektronen in der 4f-Schale, also ist  $S = \frac{3}{2}$  und  $L = 6$ . Aufgrund der weniger als halbvollen Schale folgt für  $J = L - S = 6 + \frac{3}{2} = 4,5$  und für  $g_j = \frac{8}{11}$



Für die Anzahl der Momente pro Volumen gilt

$$N = 2 N_a \frac{\rho}{M_{\text{mol}}} , \quad (9)$$

mit der Avogadrokonstante  $N_a = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$ , der Dichte  $\rho$  und der molaren Masse  $M_{\text{mol}}$ .

Diese Werte und die berechnete Anzahl der Momente pro Volumen sind in Tabelle 1 dargestellt.

**Tabelle 1:** Die Werte zur Berechnung der Anzahl der Momente  $N$  mit den Dichten  $\rho$  nach [6].

Stoff	$\rho_w / \text{g cm}^{-3}$	$M_{\text{mol}} / \text{g mol}^{-1}$	$N / \text{cm}^{-3} \cdot 10^{22}$
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	7,80	373,00	2,518643
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	7,40	362,50	2,405534
Nd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	7,24	336,48	2,591554

Daraus kann nach Gleichung 4 die theoretische Suszeptibilität der Stoffe in Tabelle 2 berechnet werden.

**Tabelle 2:** Die theoretisch berechneten Suszeptibilitäten der drei Stoffe.

Stoff	$\chi_{\text{theoretisch}}$
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,025421
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,013497
Nd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,003021

## 4.2 Bestimmung der Filterfrequenz und Güte des Selektivverstärkers

Unter Verwendung eines Selektiv-Verstärkers mit einer Güte von  $Q = 20$  und einer konstanten Sinus-Speisespannung von  $U_{\text{Sp}} = 35 \text{ kHz}$  werden für Frequenzen im Bereich  $20 - 40 \text{ kHz}$  die Ausgangsspannungen  $U_A$  untersucht. Die Messdaten sind in Tabelle 3 zu sehen.

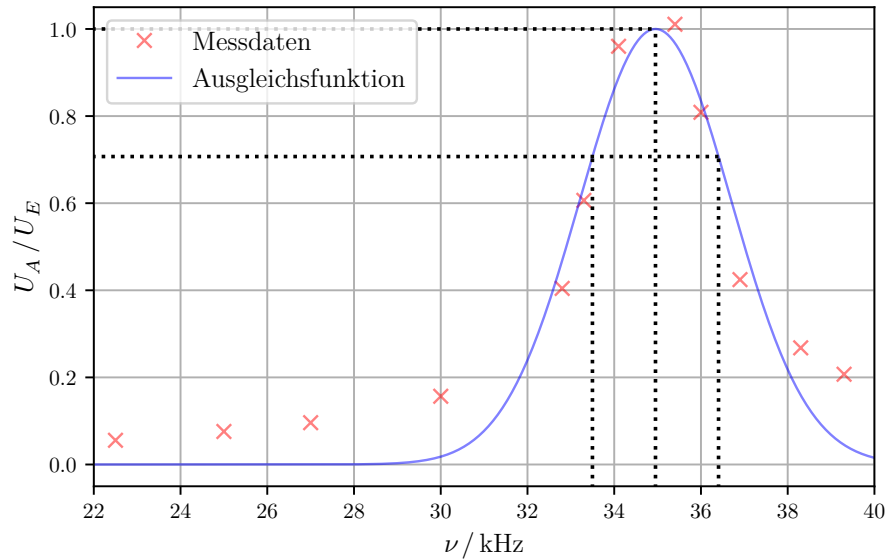
**Tabelle 3:** Die Messdaten der Ausgangsspannungen des Selektiv-Verstärkers.

$\nu$ / kHz	$U_A$ / V
20,0	0,085
22,5	0,110
25,0	0,150
27,0	0,190
30,0	0,310
32,8	0,800
33,3	1,200
34,1	1,900
35,4	2,000
36,0	1,600
36,9	0,840
38,3	0,530
39,3	0,410

Zur Bestimmung der Filterfrequenz  $\nu_0$  sowie der maximalen Ausgangsspannung  $U_A$  werden die Messdaten unter Betrachtung einer Gaußverteilung wie folgt angenähert:

$$U_g(\nu) = a \cdot \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{b}\right). \quad (10)$$

Die Messdaten und die daraus berechnete Ausgleichsfunktion wird in Abbildung 5 dargestellt. Aus Gleichung 10 ergeben sich die Parameter



**Abbildung 5:** Die Messdaten sowie die Ausgleichsrechnung nach Gaußverteilung der Spannung in Abhängigkeit der Frequenz.

$$a = (1,98 \pm 0,15) \text{ V} ,$$

$$b = 6,1 \pm 1,2$$

und die zu bestimmenden Werte

$$\nu_0 = (34,95 \pm 0,14) \text{ kHz} \approx 35 \text{ kHz} \quad \text{mit} \quad U_A = 1,97 \text{ V} \approx 2 \text{ V} .$$

Zur Bestimmung der Güte werden zusätzlich noch diejenigen Frequenzen  $\nu_-$  und  $\nu_+$  in Abbildung 5 erfasst, bei denen das Verhältnis von Aus- und Eingangsspannung  $U_A/U_E$  auf  $1/\sqrt{2}$  absinkt. Diese ergeben sich zu

$$\nu_- = (33,52 \pm 0,14) \text{ kHz} \quad \text{und} \quad (36,38 \pm 0,14) \text{ kHz} .$$

Die experimentell ermittelte Güte des Selektivverstärkers ist somit

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_+ - \nu_-} = (12,0 \pm 0,8) . \quad (11)$$

### 4.3 Experimentelle Bestimmung der Suszeptibilität

Für die folgende experimentelle Untersuchung der Suszeptibilität wird eine Sinusspannung mit der davor bestimmten Frequenz von 35 kHz und einer Speisespannung von  $U_{Sp} = 1 \text{ V}$  verwendet. Da jede Probe in Pulverform vorliegt, ist die Dichte  $\rho_P$  geringer als die eines Einkristalls. Der real Querschnitt der Probe ergibt sich also zu

$$Q_{\text{real}} = \frac{M_P}{l \rho_w} , \quad (12)$$

dabei ist  $M_P$  die Masse der Probe,  $l$  die Länge der Probe und  $\rho_w$  die Dichte eines Einkristalls.

In Tabelle 4 sind die Werte der Proben dargestellt.

**Tabelle 4:** Die Kennwerte der jeweiligen Stoffproben.

Stoff	$m / \text{g}$	$l / \text{cm}$	$\rho_w / \text{g cm}^{-3}$	$Q_{\text{real}} / \text{cm}^2$
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	15,10	15,9	7,80	0,1217
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	14,08	16,5	7,40	0,1153
Nd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	8,48	16,5	7,24	0,0709

In den folgenden Tabellen sind die Messdaten der Stoffproben dargestellt, dabei werden die Brückenspannungen und Widerstände vor und nach Einführen der Proben mithilfe ihrer Differenz verglichen.

**Tabelle 5:** Die Messdaten für Dy<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

$U_v / \text{mV}$	$R_v / \Omega$	$U_n / \text{mV}$	$R_n / \Omega$	$\Delta U / \text{mV}$	$\Delta R / \Omega$
5,5	3,405	0,40	1,855	5,10	1,550
5,6	3,330	0,33	1,825	5,27	1,505
5,4	3,330	0,31	1,830	5,09	1,500

**Tabelle 6:** Die Messdaten für  $\text{Gd}_2\text{O}_3$ .

$U_v / \text{mV}$	$R_v / \Omega$	$U_n / \text{mV}$	$R_n / \Omega$	$\Delta U / \text{mV}$	$\Delta R / \Omega$
2,5	3,370	0,29	2,69	2,21	0,680
2,8	3,355	0,28	2,64	2,52	0,715
2,7	3,370	0,26	2,68	2,44	0,690

**Tabelle 7:** Die Messdaten für  $\text{Nd}_2\text{O}_3$ .

$U_v / \text{mV}$	$R_v / \Omega$	$U_n / \text{mV}$	$R_n / \Omega$	$\Delta U / \text{mV}$	$\Delta R / \Omega$
0,440	3,340	0,38	3,305	0,060	0,035
0,425	3,380	0,36	3,285	0,065	0,095
0,510	3,405	0,34	3,315	0,170	0,090

Die Suszeptibilität  $\chi$  lässt sich dadurch nach Gleichung 7 und Gleichung 8 zu den Werten in Tabelle 8 berechnen und mit den theoretischen aus Tabelle 2 vergleichen.

**Tabelle 8:** Die experimentell und theoretisch bestimmten Suszeptibilitäten.

Stoff	$\chi_U$	$\chi_R$	$\chi_{\text{theoretisch}}$
$\text{Dy}_2\text{O}_3$	0,146616	0,021642	0,025421
$\text{Gd}_2\text{O}_3$	0,071794	0,010460	0,013497
$\text{Nd}_2\text{O}_3$	0,004798	0,001793	0,003021

## 5 Diskussion

Die experimentell bestimmte Güte des Selektivverstärkers hat eine Abweichung von  $\Delta Q = (40 \pm 4) \%$  vom tatsächlich eingestellten Wert  $Q = 20$ . Dabei muss hier ohne weitere Hinweise auf einen fehlerhaften Bandpassfilter geschlossen werden.

Zum Vergleich der theoretisch und experimentell bestimmten Werten, wird in Tabelle 9 die relative Abweichung der beiden dargestellt.

**Tabelle 9:** Die relative Abweichungen von der theoretischen Suszeptibilität.

Stoff	$\Delta\chi_U / \%$	$\Delta\chi_R / \%$
$\text{Dy}_2\text{O}_3$	476,74	14,87
$\text{Gd}_2\text{O}_3$	431,94	22,50
$\text{Nd}_2\text{O}_3$	58,82	40,66

Bei der Messung der Filterfrequenz erschwerte zum einen der Bandpass-Filter das Einstellen eines klaren Sinus-Signals, was nur durch wiederholtes An- und Ausschalten gelöst werden

konnte. Zum Anderen schwankte die Messanzeige des Selektivverstärkers stark, weswegen die Annäherung der Filterfrequenz und der maximalen Spannung äußerst ungenau ist.

Da die Suszeptibilität stark von der Temperatur des Stoffes abhängt, kann das Einlegen der Proben als Fehlerquelle betrachtet werden. Die vermutlich größte Fehlerquelle stellt jedoch der Abgleich der Brückenspannung dar, da diese nur minimiert werden und nicht auf Null reduziert werden konnte, trotz des Selektivverstärkers. Dies hat auch als Ursache, dass sich eine genauere Messung mithilfe der Widerstände erzielen lässt.

## Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] The pandas development team. *pandas-dev/pandas: Pandas*. Version latest. Feb. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3509134. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3509134>.
- [6] *Versuchsanleitung „Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.

a)  $Q = 20$

$f / \text{kHz}$

$u_A / \text{V}$

20

0,085

22,5

0,11

25,

0,15

27

0,19

30,0

0,31

32,8

0,8

33,3

1,2

34,1

1,9

35,4

2,0

36,9

1,6

36,9

0,84

38,3

0,53

39,3

0,41