

V407

Fresnelsche Formeln

Toby Teasdale	Erich Wagner
toby.teasdale@tu-dortmund.de	erich.wagner@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.04.22	Abgabe: 03.05.22
------------------------	------------------

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Die Strahlungsleistung des elektromagnetischen Feldes	3
2.2	Berechnung der Amplitude einer reflektierten Lichtwelle	3
2.3	Reflexion des senkrechten polarisierten Lichtstrahls	4
2.4	Reflexion des parallel polarisierten Lichtstrahls	6
3	Durchführung	7
4	Fehlerrechnung	8
5	Auswertung	8
5.1	Der Brechungsindex bei Polarisation senkrechter Ausrichtung	8
5.2	Der Brechungsindex bei Polarisation paralleler Ausrichtung	9
5.3	Der Brechungsindex durch Approximation des Brewsterwinkels	11
5.4	Plot der Messwerte gegen die Theorie aus dem gemittelten Brechungsindex	11
6	Diskussion	11
	Literatur	13

1 Ziel

Im folgenden Versuch soll die Intensität der einfallenden und der an einer Si-Oberfläche reflektierten Strahlung in Abhängigkeit des Einfallswinkels gemessen werden. Anschließend werden die Messdaten mit der Theorie verglichen.

2 Theorie

2.1 Die Strahlungsleistung des elektromagnetischen Feldes

Für die Herleitung die Winkelabhängigkeit der Intensität werden zunächst die Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt}$$

betrachtet. Die elektrische und magnetische Arbeit

$$W_{\text{el}} := \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad \text{und} \quad W_{\text{mag}} := \frac{1}{2}\mu_0 \vec{H}^2$$

stellen dabei die Energie der Strahlungsleistung pro Volumeneinheit dar. Der Energietransport wird dabei durch den *Poynting-Vektor*

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{und} \quad |\vec{S}| = v\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad (1)$$

beschrieben.

2.2 Berechnung der Amplitude einer reflektierten Lichtwelle

Fällt nun eine ebene Lichtwelle der Form

$$\vec{E} = \vec{E}_e \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (2)$$

aus dem Vakuum unter dem Winkel α auf eine Grenzfläche, wird ein Teil der Strahlung mit der Amplitude \vec{E}_r reflektiert, während der andere Teil mit der Amplitude \vec{E}_d in das Medium eindringt. Dieser Prozess ist in Abbildung 1 dargestellt und wird als absorptionsfrei angenommen.

Da die Lichtgeschwindigkeit im Medium geringer ist als im Vakuum, ändert der eindringende Lichtstrahl seine Richtung, sodass $\beta < \alpha$ gilt. Dadurch ergibt sich auch eine Querschnittänderung des Strahlenbündels von F_e und F_d . Dem Energiesatz nach gilt

$$S_e F_e = S_r F_e + S_d F_d \quad (3)$$

oder

$$S_e \cos(\alpha) = S_r \cos(\alpha) + S_d \cos(\beta). \quad (4)$$

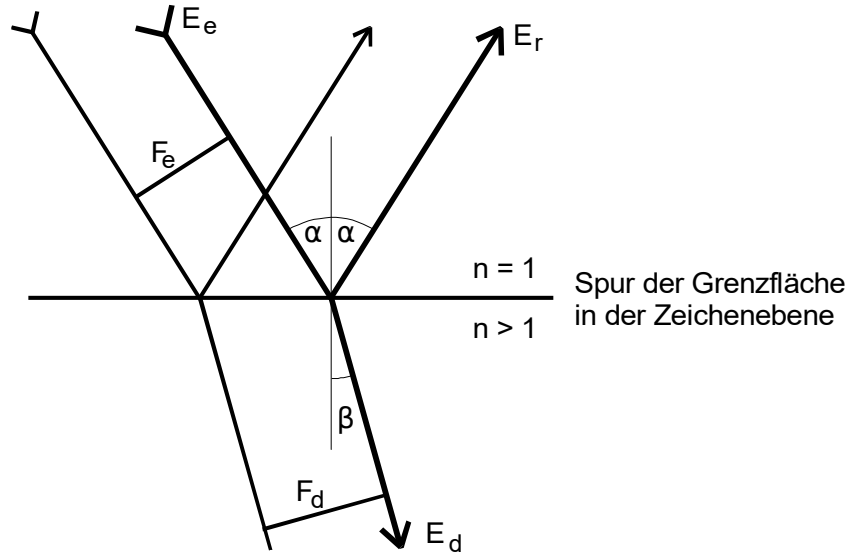


Abbildung 1: Reflexion und Brechung der ebenen Lichtwelle. [7]

Nach Einsetzen der Gleichung 1 für die Strahlungsleistung ergibt sich für Gleichung 3

$$c\varepsilon_0 \vec{E}_e^2 \cos(\alpha) = c\varepsilon_0 \vec{E}_r^2 \cos(\alpha) + v\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_d^2 \cos(\beta) . \quad (5)$$

Mithilfe des Brechungsindex und der Maxwellschen Relation

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{und} \quad n^2 = \varepsilon$$

kann Gleichung 5 als

$$\left(\vec{E}_e^2 - \vec{E}_r^2 \right) \cos(\alpha) = n \vec{E}_d^2 \cos(\beta) \quad (6)$$

ausgedrückt werden. Dabei setzt sich die eingehende Welle \vec{E}_e aus einem parallelen und senkrechten Teil zusammen, es gilt

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} . \quad (7)$$

Aufgrund des unterschiedlichen Verhaltens der Wellen an der Grenzfläche, werden diese zunächst getrennt betrachtet.

2.3 Reflexion des senkrechten polarisierten Lichtstrahls

In Abbildung 2 ist die Reflexion des senkrecht polarisierten Lichts dargestellt.

Da die Tangentialkomponente des Feldstärkevektors stetig durch die Grenzfläche geht, ist sie auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich und es gilt daher

$$\vec{E}_{e_{\perp}} + \vec{E}_{r_{\perp}} = \vec{E}_{d_{\perp}} . \quad (8)$$

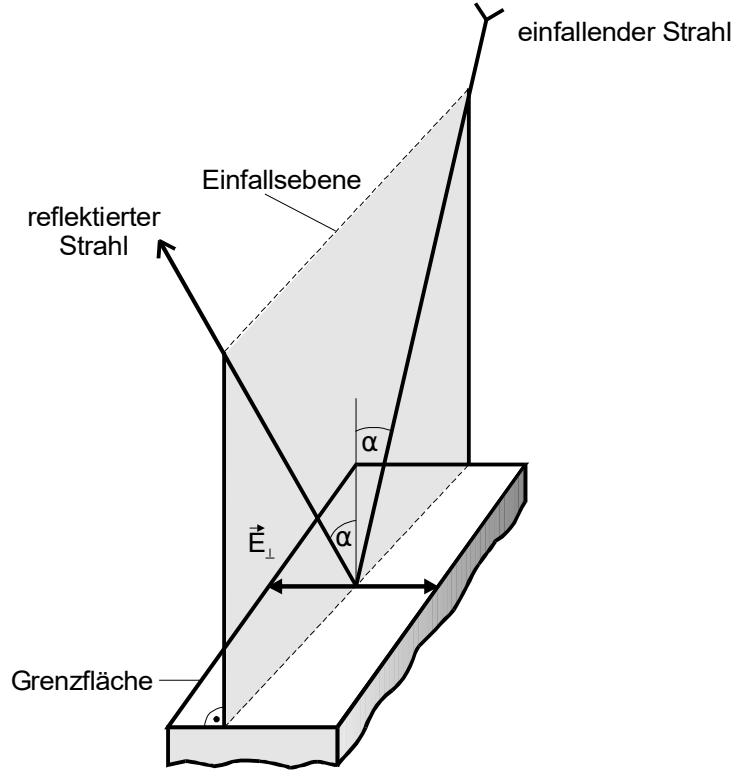


Abbildung 2: Reflexion und Brechung des senkrecht polarisierten Lichtstrahls. [7]

Daraus lässt sich in Gleichung 6 nun \vec{E}_d eliminieren und es ergibt sich

$$\vec{E}_{r_\perp} = -\vec{E}_{e_\perp} \frac{n \cos(\beta) - \cos(\alpha)}{n \cos(\beta) + \cos(\alpha)}. \quad (9)$$

Mithilfe des *Snelliuschen Gesetzes*

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad (10)$$

kann Gleichung 9 als

$$\vec{E}_{r_\perp}(\alpha) = -\vec{E}_{e_\perp} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = -\vec{E}_{e_\perp} \frac{(\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} - \cos^2(\alpha))^2}{n^2 - 1} \quad (11)$$

ausgedrückt werden. Für den streifenden Einfall gilt $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also

$$\vec{E}_{r_\perp}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{E}_{e_\perp}$$

und für den senkrechten Einfall bei $\alpha = 0$ ergibt sich

$$\vec{E}_{r_\perp}(0) = -\vec{E}_{e_\perp} \frac{n - 1}{n + 1}.$$

2.4 Reflexion des parallel polarisierten Lichtstrahls

In Abbildung 3 ist die Reflexion und Brechung des parallel polarisierten Lichtstrahls dargestellt.

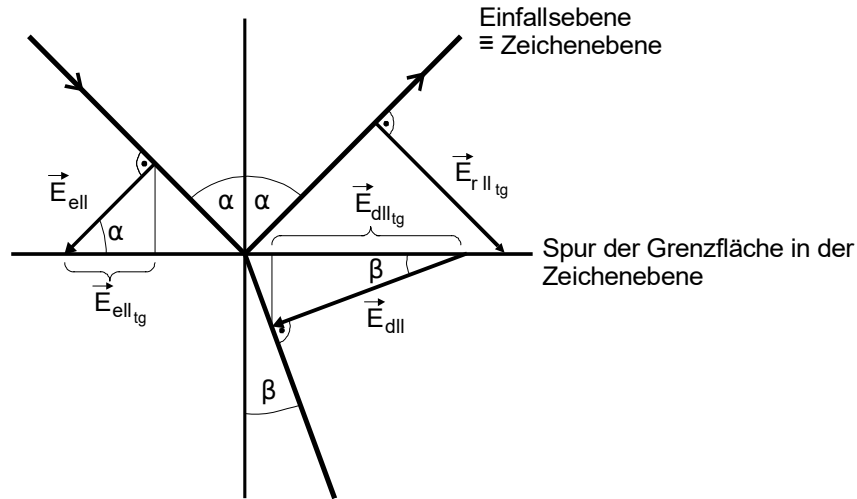


Abbildung 3: Reflexion und Brechung des parallel polarisierten Lichtstrahls. [7]

Die Tangentialkomponenten ergeben sich dabei zu

$$\begin{aligned}\vec{E}_{e||tg} &= \vec{E}_{e||} \cos(\alpha), \\ \vec{E}_{r||tg} &= -\vec{E}_{r||} \cos(\alpha) \quad \text{und} \\ \vec{E}_{d||tg} &= \vec{E}_{d||} \cos(\beta).\end{aligned}$$

Mithilfe der Stetigkeitsbedingung

$$\vec{E}_{e||tg} + \vec{E}_{r||tg} = \vec{E}_{d||tg}$$

beziehungsweise

$$(\vec{E}_{e||} - \vec{E}_{r||}) \cos(\alpha) = \vec{E}_{d||} \cos(\beta) \quad (12)$$

wird Gleichung 6 zu

$$\vec{E}_{r||} = \vec{E}_{e||} \frac{n \cos(\alpha) - \cos(\beta)}{n \cos(\alpha) + \cos(\beta)} = \vec{E}_{e||} \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (13)$$

oder erneut mit dem Snelliuschen Gesetz in Gleichung 10

$$\vec{E}_{r||}(\alpha) = \vec{E}_{e||} \frac{n^2 \cos(\alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)})}{n^2 \cos(\alpha) + \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}. \quad (14)$$

Hierbei gilt für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}_{r||}(0) = \vec{E}_{e||} \frac{n-1}{n+1} \quad \text{und} \quad \vec{E}_{r||}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{E}_{e||}.$$

Nach Gleichung 13 ergibt sich für

$$\alpha_p + \beta_p = \frac{\pi}{2} \vec{E}_{r\parallel}(\alpha_p) = 0$$

und nach dem Snelliuschen Gesetz in Gleichung 10 folgt demnach

$$n = \tan(\alpha_p) .$$

Dabei wird der Winkel α_p als *Brewsterwinkel* bezeichnet, der derjenige Winkel ist, ab dem kein Licht mehr reflektiert wird, sondern vollständig vom Medium absorbiert wird.

3 Durchführung

In Abbildung 4 wird die Messapparatur schematisch dargestellt.

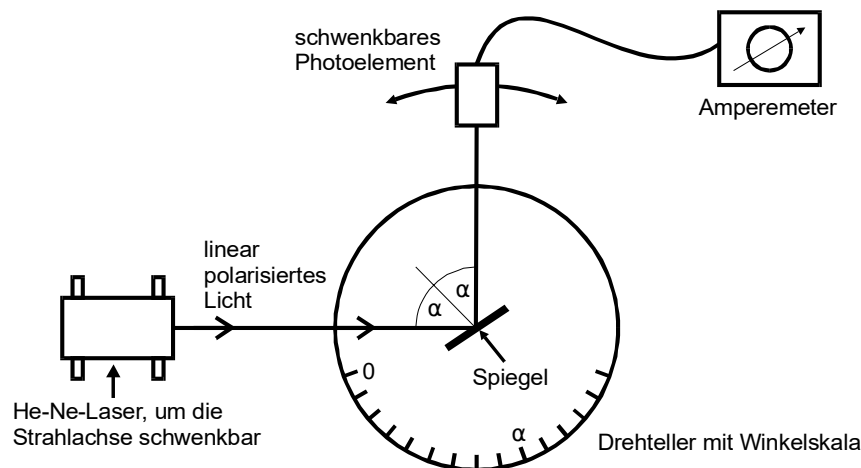


Abbildung 4: Reflexion und Brechung des parallel polarisierten Lichtstrahls. [7]

Durch ein schwenkbares Photoelement wird dabei die Intensität des Lasers gemessen, welche als Strahlung von einer Si-Oberfläche reflektiert wird. Um polarisiertes Licht herzustellen, wird ein Polfilter zwischen Laser und Si-Oberfläche platziert. Zum Einstellen des Einfallswinkels, befindet sich die Si-Oberfläche auf einer Drehscheibe. Dabei muss darauf geachtet werden, dass der reflektierte Lichtstrahl auf einer festen Höhe der Drehscheibe die Öffnung des Photoelements fällt. Durch ein Amperemeter wird der Strom gemessen, der durch das einfallende Licht erzeugt wird. Nach der Messung des Nullstroms, werden bei einer Schrittweite von 2° im Bereich von 6° bis 88° die Ströme jeweils für senkrechte und parallele Polarisation aufgenommen.

4 Fehlerrechnung

Im Folgenden wird die allgemeine Fehlerrechnung und alle wichtigen Größen der entsprechenden Rechnung erklärt. Die wichtigsten Werte dabei sind der

$$\text{Mittelwert} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n x_i \quad \text{und die} \quad (15)$$

$$\text{Standartabweichung} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (16)$$

Dabei entspricht N der Anzahl an Werten und x_i ist jeweils ein mit einem Fehler gemessener Wert. Es ergibt sich ebenfalls die statistische Messunsicherheit

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (17)$$

Entstehen mehrere Unbekannte in einer Messung, folgen daraus auch mehrere Messunsicherheiten, die in dem weiteren Verlauf der Rechnung berücksichtigt werden müssen. Es gilt die *Gaußsche Fehlerfortpflanzung*

$$\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sqrt{\left(\frac{df}{dy_1} \Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dy_2} \Delta y_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dy_N} \Delta y_N\right)^2}. \quad (18)$$

5 Auswertung

Nun sollen die Brechungsindizes n bestimmt werden. Diese werden bei paralleler und senkrechter Polarisation benötigt. Die beiden Gleichungen werden aus Gleichung 11 und Gleichung 14 extrahiert. Als Referenzstrom wird $I_r = 167\text{nm}$ gemessen.

5.1 Der Brechungsindex bei Polarisation senkrechter Ausrichtung

Allgemein gilt die Proportionalität

$$\frac{I_r}{I_e} \sim \frac{E_r^2}{E_e} = E^2. \quad (19)$$

Durch diese Beziehung lässt sich Gleichung 11 zu der Form

$$E_{\perp} = \left| \frac{(\cos^2(\alpha) - \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)})^2}{n^2 - 1} \right|$$

umstellen. Diese lässt sich nach n umformen. Das ergibt

$$\sqrt{1 + \frac{4E \cos^2(\alpha)}{(E-1)^2}}. \quad (20)$$

In Tabelle 1 sind die Messwerte und das jeweilige errechnete n aufgetragen.

Wird n gemittelt ergibt sich ein Brechungsindex von

$$n_{\perp} = 4.8 \pm 8.9.$$

Tabelle 1: Die Messwerte und die Ergebnisse der Rechnung.

$\alpha/^{\circ}$	I/mA	$\frac{I_{\text{gem}}}{I_{\text{ref}}}$	n	$\alpha/^{\circ}$	I/mA	$\frac{I_{\text{gem}}}{I_{\text{ref}}}$	n
6,0	0,013	0,092857	1,167118	48	0,086	0,614286	2,218190
8,0	0,015	0,107143	1,193855	50	0,088	0,628571	2,211720
10,0	0,015	0,107143	1,191895	52	0,093	0,664286	2,302198
12,0	0,020	0,142857	1,261561	54	0,096	0,685714	2,322735
14,0	0,021	0,150000	1,272628	56	0,100	0,714286	2,377642
16,0	0,025	0,178571	1,328640	58	0,106	0,757143	2,518670
18,0	0,027	0,192857	1,353637	60	0,106	0,757143	2,399442
20,0	0,030	0,214286	1,393850	62	0,113	0,807143	2,589478
22,0	0,033	0,235714	1,433663	64	0,116	0,828571	2,593267
24,0	0,038	0,271429	1,507659	66	0,120	0,857143	2,646371
26,0	0,040	0,285714	1,529146	68	0,126	0,900000	2,833082
28,0	0,047	0,335714	1,643088	70	0,130	0,928571	2,901770
30,0	0,050	0,357143	1,682241	72	0,130	0,928571	2,656563
32,0	0,058	0,414286	1,829007	74	0,140	1,000000	3,278201
34,0	0,060	0,428571	1,845555	76	0,142	1,014286	3,143644
36,0	0,066	0,471429	1,956716	78	0,146	1,042857	3,249584
38,0	0,068	0,485714	1,969244	80	0,160	1,142857	8,171412
40,0	0,070	0,500000	1,978976	82	0,166	1,185714	46,355221
42,0	0,080	0,571429	2,213412	84	0,166	1,185714	34,822183
44,0	0,080	0,571429	2,157172	86	0,166	1,185714	23,250316
46,0	0,083	0,592857	2,189004	88	0,166	1,185714	11,664424

5.2 Der Brechungsindex bei Polarisation paralleler Ausrichtung

Bei paralleler Polarisation gilt die Gleichung 20 so nicht mehr. Aus der Beziehung

$$E_{\parallel} = \left| \frac{n^2 \cos(\alpha) - \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}{n^2 \cos(\alpha) + \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}} \right| \quad (21)$$

lässt sich nach umstellen nach n die Gleichung

$$n_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{E_{r\parallel} + E_{e\parallel}}{E_{r\parallel} - E_{e\parallel}} \frac{1}{\cos \alpha} \right)^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{E_{r\parallel} + E_{e\parallel}}{E_{r\parallel} - E_{e\parallel}} \frac{1}{\cos \alpha} \right)^4 - \left(\frac{E_{r\parallel} + E_{e\parallel}}{E_{r\parallel} - E_{e\parallel}} \right)^2 \tan^2 \alpha} \quad (22)$$

herstellen. Dabei ist n natürlich stets $n \in \mathbb{R}$, weshalb in der Wurzel nur das Plus relevant ist. Die Messdaten wurden in Tabelle 2 aufgetragen, zusammen mit den implizierten Ergebnissen für n .

Der Mittelwert für n beträgt: 3.2 ± 1.4 .

Tabelle 2: Die Messwerte und die Ergebnisse der Rechnung.

$\alpha/^\circ$	I/nA	$\frac{I_{\text{gem}}}{I_{\text{ref}}}$	n	$\alpha/^\circ$	I/nA	$\frac{I_{\text{gem}}}{I_{\text{ref}}}$	n
6	68,0	0,42500	4,745817	48	40,0	0,25000	3,000285
8	62,0	0,38750	4,297955	50	38,0	0,23750	2,901516
10	66,0	0,41250	4,590698	52	32,0	0,20000	2,618315
12	66,0	0,41250	4,590707	54	30,0	0,18750	2,527704
14	68,0	0,42500	4,745851	56	28,0	0,17500	2,438671
16	64,0	0,40000	4,441569	58	24,0	0,15000	2,264516
18	66,0	0,41250	4,590744	60	20,0	0,12500	2,094106
20	61,0	0,38125	4,228210	62	18,0	0,11250	2,009645
22	64,0	0,40000	4,441613	64	14,0	0,08750	1,840365
24	62,0	0,38750	4,298051	66	10,0	0,06250	1,666882
26	60,0	0,37500	4,159715	68	7,5	0,04687	1,552864
28	58,0	0,36250	4,026270	70	4,0	0,02500	1,375766
30	57,0	0,35625	3,961295	72	2,4	0,01500	1,279256
32	56,0	0,35000	3,897428	74	1,0	0,00625	1,171768
34	54,0	0,33750	3,772860	76	1,0	0,00625	1,171772
36	52,0	0,32500	3,652315	78	2,5	0,01562	1,285858
38	50,0	0,31250	3,535540	80	7,5	0,04687	1,552939
40	49,0	0,30625	3,478503	82	18,0	0,11250	2,009847
42	46,0	0,28750	3,312359	84	34,0	0,21250	2,711185
44	44,0	0,27500	3,205513	86	61,0	0,38125	4,229506
46	42,0	0,26250	3,101554	88	96,0	0,60000	7,875767

5.3 Der Brechungsindex durch Approximation des Brewsterwinkels

Allgemein gilt die Beziehung

$$\tan(\alpha) = n.$$

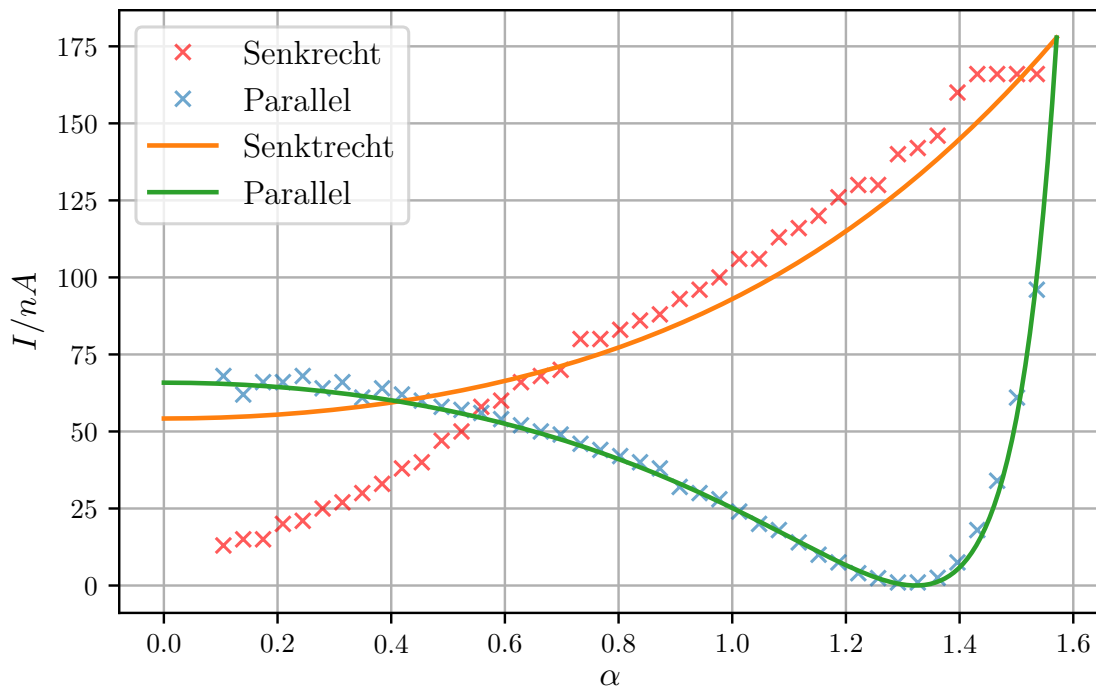
Nun lässt sich mithilfe des gemessenen Minimums, welches aus Tabelle 2 entnommen werden kann, dieser ermitteln. Der Brewsterwinkel liegt circa bei 75° . Damit ergibt sich

$$\alpha_{\text{Brew}} = \tan\left(75 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = 3.73. \quad (23)$$

5.4 Plot der Messwerte gegen die Theorie aus dem gemittelten Brechungsindex

Im folgenden wird $\bar{n} = \frac{3.2+3.73}{2} = 3.465$ angenommen. Der Wert für n aus der ersten Messung wird vernachlässigt, siehe Abschnitt 6. Nun werden die Messwerte und die Theoriekurve mit \bar{n} geplottet. Der Plot ist in Abbildung 5 zu finden.

Abbildung 5: Die Intensität in Abhängigkeit des Winkels α



6 Diskussion

Aus der ersten Messung ergab sich für den Brechungsindex $n_{\perp} = 4.8 \pm 8.9$. Es fällt sofort auf, dass die Standardabweichung immens groß ist. Dies deutet auf einen oder mehrere große systematische Fehler hin. Ein Fehler ist sicherlich die mit einer großen Wahrscheinlichkeit

falsch aufgenommene Referenzintensität. Diese liegt laut Originaldaten bei $I_r = 1,4$. Diese wurde bereits in Abschnitt 5 als deutlich höher, nämlich $I_r = 1,67$ angenommen. Dies liegt daran, dass die Messergebnisse sonst keinen Sinn machen. Schließlich wären viele Werte dann höher als die Referenz, welches physikalisch nicht möglich ist. Deshalb wurde eine realistische Referenz gewählt. Weiterhin war es eine große Schwierigkeit immer genau die Öffnung der Photozelle zu treffen. Bereits kleine Auslenkungen im Millimeter-Bereich sorgten für große Schwankungen. Außerdem wurde die Messung dadurch erschwert, dass die Apparatur wackelte und sich sogar im Verlauf der Experiments löste, weshalb die Werte teilweise unerwartete Sprünge machten. Aus diesen Gründen kann die erste Messung nicht als Erfolg angesehen werden, welches auch wie erwähnt leicht durch die Standartabweichung eingesehen werden kann.

Die zweite Messung jedoch lässt sich als Erfolg werten, da hier die Standartabweichung nicht so immens groß ist und außerdem sehr nah an dem Wert liegt, die der Brewsterwinkel liefert. Dabei ergeben sich $n = 3.2 \pm 1.4$ und $n_{\text{Brew}} = 3.73$. Gemittelt ergibt sich hier $\bar{n} = 3.5 \pm 0.7$. Der Theoriewert von Silizium ist nach Literatur [5] bei $n_{\text{Lit}} = 3.673$. Damit ergibt sich eine Abweichung von

$$\Delta n = \frac{3.673 - 3.2}{3.2} \cdot 100 = 14.78\%$$

für den Wert aus der Messung der parallelen Polarisierung und für den geschätzten Brewsterwinkel

$$\Delta n = \frac{3.73 - 3.673}{3.673} \cdot 100 = 1.55\%. \quad (24)$$

Für den Mittelwert ergibt sich die Abweichung

$$\Delta n = \frac{3.673 - 3.5}{3.5} \cdot 100 = 4.94\%.$$

Dies kann als Erfolg gewertet werden, da die zuvor genannten Fehlerquellen hier immer noch beitragen, jedoch die Messpräzision erhöht wurde.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] Mikhail Polyanskiy. *Brechungsindexdatenbank*. 2022. URL: <https://refractiveindex.info/?shelf=main&book=Cs&page=Smith> (besucht am 24.04.2022).
- [6] The pandas development team. *pandas-dev/pandas: Pandas*. Version latest. Feb. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3509134. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3509134>.
- [7] *Versuchsanleitung „Fresnelsche Formeln“*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.