Otimização com incerteza -- chance-constrained LP

sábado, 16 de novembro de 2024 11:15

- LPs do tipo "chance-constrained" surgem naturalmente de LPs padrão, quando algumas desigualdades lineares são incertas/probabilísticas.

Considere um LP na forma padrão:

$$\min_x \; c^T x$$
$$\text{s.a.} \; a_i^T x \leq b_i \,, \; i = 1, \ldots, m$$

Suponhamos que os vetores a_i não sejam conhecidos exatamente. Isto é, os vetores a_i são distribuídos de acordo com uma distribuição gaussiana com média $\bar{a}_i$ e matriz de covariância $\Sigma_i \succ 0$ positiva definida.

Mostre que, neste caso, o escalar $a_i^T x$ também é variável aleatória com distribuição gaussiana, com média $\bar{a}_i^T x$ e variância $x^T \Sigma_i x$.

Não faz sentido impor uma restrição do tipo $a_i^T x \leq b$, uma vez que o lado esquerdo é variável aleatória, que poderia assumir qualquer valor e, portanto, violaria a restrição para algumas realizações do dado aleatório a_i.

Ao invés disso, podemos exigir que a restrição $a_i^T x \leq b_i$ seja satisfeita com alguma probabilidade $p_i \in (0,1)$. Esta probabilidade p_i é escolhida a priori pelo usuário e representa o nível de confiança na não-violação da restrição apesar das variações aleatórias nos dados a_i.

Com isso, a versão de um programa linear com restrições probabilísticas fica assim:

$$\min_x \; c^T x$$
$$\text{s.a.} \; \text{Prob}\{a_i^T x \leq b_i\} \geq p_i \,, \; i = 1, \ldots, m \qquad \text{(CCLP)}$$

sendo os p_i's níveis de confiança pre-especificados.

Considere o problema (CCLP) supondo que $p_i > 0.5$, $i = 1, \ldots, m$ e que a_i, $i = 1, \ldots, m$ são vetores aleatórios, independentes, com distribuição normal (média $\bar{a}_i$, covariância $\Sigma_i \succ 0$). Então, (CCLP) equivale ao SOCP dado abaixo:

$$\min_x \qquad \text{(CC-SOCP)}$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{a}_i^T x \leq b_i - \Phi^{-1}(p_i) \, \| \Sigma_i^{1/2} x \|_2 \,, \quad i = 1, \ldots, m$$

sendo $\Phi^{-1}(p)$ a distribuição cumulativa inversa de uma variável com distribuição normal padrão.

A prova do resultado (CC-SOCP) segue os passos abaixo:

1) $$a_i^T x \leq b_i \iff \frac{a_i^T x - \bar{a}_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}} \leq \frac{b_i - \bar{a}_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}}$$

Sejam $\sigma_i(x) := \sqrt{x^T \Sigma_i x} = \| \Sigma_i^{1/2} x \|_2$

$$z_i(x) := \frac{a_i^T x - \bar{a}_i^T x}{\sigma_i(x)} \; ; \quad \tau_i(x) := \frac{b_i - \bar{a}_i^T x}{\sigma_i(x)}$$

2) Então $\text{Prob}\{ a_i^T x \leq b_i \} = \text{Prob}\{ z_i(x) \leq \tau_i(x) \}$

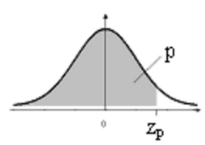
$z_i(x)$ é variável aleatória padrão e normalizada (i.e. $\mathcal{N}(0, 1)$).

↪ i.e. média nula, variância 1

3) Seja $\Phi(\zeta)$ a função de distribuição normal padrão acumulada

$$\Phi(\zeta) := \text{Prob}\{ z_i(x) \leq \zeta \}$$ (bem conhecida, existem tabelas)

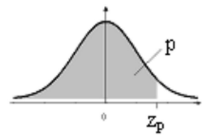
Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Obs.: Se z < 0, então $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z) = 1 - \Phi(-z)$.

Versão probabilística do problema de alocação ótima de carteira.
= carteira (portfolio)

a) Seja $x \in \mathbb{R}^n$ uma alocação de investimentos (fração x_i no i-ésimo ativo)

x satisfaz a restrição $\sum x_i = 1$

o retorno da carteira (em %) é $p^T x$, sendo $p \sim \mathcal{N}(\bar{p}, \Sigma)$

(ou seja, vetor de retorno médio $= \bar{p}$, matriz de covariância Σ.

b) Formule o problema de maximizar o retorno esperado sujeito a um limite na probabilidade de perda como um SOCP.

c) Compare o resultado com o QP do Markowitz (conjunto 12 dos slides das aulas)

c) Compare o resultado com o QP do Markowitz (conjunto 12 dos slides das aulas) utilizando os dados disponibilizados folio_mean.csv, folio_cov.csv no site Dropbox/COM361_24/notebooks_Jupyter.