Trabalho 5 Aluno :

1. Considere a seguinte série infinita (Valor 1.5 ponto)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+30}{n^4}$$

   (a) Use a soma dos 10 primeiros termos para aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+30}{n^4}$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

   (b) Quantos termos são necessários para se obter uma aproximação $S \approx s_n$ com um erro menor do que 0.001

2. Considere a seguinte função (Valor: 1.5 ponto)

$$f(x) = 36\sqrt{x}$$

   (a) Encontre os polinômios de Taylor do grau 1 até o grau 4 em torno de $x = 36$. Faça uma figura com o gráfico de $f(x)$ e dos polinômios $P_i(x), i = 1, \ldots, 4$. Comente como os polinômios convergem para $f(x)$. Considere o seguinte intervalo $0 \leq x \leq 72$ para gerar as figuras.

   (b) Use a desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx P_4(x)$ no seguinte intervalo $36 \leq x \leq 37$. Verifique o resultado obtido plotando no intervalo considerado o erro exato encontrado na aproximação e o erro estimado $R_n(x)$ por meio da desigualdade de Taylor. Comente os resultados obtidos.

3. A resistividade ρ de um fio condutor é o reciproco da condutividade podendo ser medido em ohm-metros $(\Omega \cdot m)$. A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a seguinte equação

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)},$$

   sendo que t é a temperatura em ^oC. Existem tabelas que listam o valor de α (chamado de coeficiente de temperatura) e ρ_{20} (a resistividade em 20^oC) para vários metais. Em condições climáticas normais a resistividade varia quase de forma linear com a temperatura sendo comum aproximar $\rho(t)$ por seu polinômio de Taylor de primeiro ou segundo grau em $t = 20^oC$. (Valor: 2 pontos)

   (a) Encontre expressões para essas aproximações linear e quadrática.

   Considerando o níquel, temos que

$$\alpha = 0.006/^oC \text{ e } \rho_{20} = 7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m.$$

   (b) Faça um gráfico da função $\rho(t)$ e dos seus polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus para $-250^oC \leq t \leq 1000^oC$.

   (c) Faça uma figura para verificar os valores de t para os quais a aproximação linear fica dentro de uma faixa de 1% do valor exato da resistividade. Indique o intervalo de valores observado com uma casa decimal.

4. Considere a função complexa (Valor 3.0 pontos)

$$w = f(z) = z^2 - 2z + 2,$$

   sendo que $z = x + iy$, $w = u + iv$. Considere que $-2 \leq x \leq 4$ e $-2 \leq y \leq 2$.

   (a) Determine as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$, encontrando os valores máximos e mínimos para u e v no intervalo de valores de x e y considerado.

   (b) Determine todos os valores de z = x +iy que são mapeados por meio da função $w = f(z) = z^2 - 2z + 2$ no eixo imaginário do plano complexo w, i.e., $\text{Re}(w) = 0$

   (c) Determine todos os valores de z = x +iy que são mapeados por meio da função $w = f(z) = z^2 - 2z + 2$ no eixo real do plano complexo w, i.e., $\text{Im}(w) = 0$

   (d) Determinar as raízes da equação $z^2 - 2z + 2 = 0$

   (e) Criar uma Figura em Pyhton plotando um gráfico 3D usando Surface do módulo plotly.graph_objs, sendo que as três dimensões espaciais serão dadas por x, y e u. Os valores de v devem ser representados por um mapa de cores (colorscale = 'jet '), sendo que a escala de cores deve aparecer na figura. Por último, o título deve ser a expressão de $f(z)$ e os eixos devem ser identificados por x, y e u.

   (f) Nessa mesma figura devem ser plotadas as curvas para $u = 0$ **em preto** e $v = 0$ **em azul**. De modo a poder identificar graficamente as raízes da equação. Os gráficos dessas curvas devem se estender até os limites da superfície, mas sem ultrapassá-los. Para plotar essas curvas vocês poderão usar Scatter3d (mode= 'lines ').

   (g) Para cada uma das curvas encontradas vocês devem calcular os valores de x, y, u, v nos pontos iniciais e finais das curvas.

5. Considere a seguinte função complexa
(Valor: 2.0 pontos)

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-5)}$$

(a) Encontre a série de Laurent em torno de $z = 2$ que representa a função $f(z)$, indicando a parte principal da série. Determine a região de convergência da série encontrada.

(b) Calcule a integral de $f(z)$ ao longo dos seguintes caminhos orientados no sentido anti-horário

i. $\oint_{C_1} f(z)dz, \quad C_1 : |z-2| = 1$

ii. $\oint_{C_2} f(z)dz, \quad C_2 : |z-2| = 6$