隐函数与参数方程确定的函数的导数

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

如何求曲线的切线方程?

1. $x^2 + y^2 = 5.$
2. $x^3 + y^3 = 1.$
3. $x^4 + y^4 = 16.$
4. $x^3 + y^3 = 6xy.$
5. $\sin(x + y) = y^2 \cos x.$
6. $\sin(xy) = \sin x + \sin y.$

1. $\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \end{cases}$

由于切线是曲线的局部性质，可以考虑局部上把曲线看成是 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$ 的图像，然后再求切线。

显函数与隐函数

函数 $y = f(x)$ 可以用关于自变量 x 和因变量 y 的表达式表示。

显函数 已知自变量 x 的值，可以直接求出函数值 $y = f(x)$，如

$$y = \ln x + \sqrt{1 - x^2}.$$

隐函数 已知自变量 x 的值，不能直接求出函数值 $y = g(x)$，如

$$y^3 + x^3 + 1 = 0.$$

把隐函数 $y^3 + x^3 + 1 = 0$ 写成显函数

$$y = -\sqrt[3]{x^3 + 1}$$

的过程称为**隐函数的显化**。

隐函数的概念

定义 (隐函数)

设函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 若对于任意 $x \in I$ 都有

$$y = f(x) \implies F(x, y) = 0,$$

则称函数 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的一个**隐函数**。

- 一般，一个方程可以确定多个隐函数。
- 隐函数可能连续、可导，也可能不连续、不可导。
- 若对于任意 $y \in I$, 当 $x = f(y)$ 时都有 $F(x, y) = 0$, 则称 $x = f(y)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的一个隐函数。

如何计算隐函数的导数?

设可导函数 $y = f(x)$ 是由方程 $x^2 + y^2 = 25$ 确定的一个隐函数，则从方程 $x^2 + y^2 = 25$ 中可以解出

$$y = f(x) = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

如果还有 $y \geqslant 0$, 则可以确认函数

$$y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

设可导函数 $y = g(x)$ 是由方程 $x^3 + y^3 = 6xy$ 确定的一个隐函数，则要解出函数 g 就比较困难了，虽然用计算机代数系统可以解出来，但表达式相当麻烦。

对于由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的可导隐函数 $y = h(x)$, 并没有解出函数 h 的通用方法，更一般的情况是解不出函数 h.

隐函数导数的计算举例

例 1. 求由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的可导隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解. 记可导隐函数为 $y = f(x)$, 则把 $y = f(x)$ 代入方程可得

$$e^{f(x)} + xf(x) - e = 0,$$

方程两端都看成关于 x 的一元函数，由隐函数的可导性，方程两端同时对 x 求导可得

$$e^{f(x)}f'(x) + \big(f(x) + xf'(x)\big) - 0 = 0,$$

从中解出 $f'(x)$ 可得 $f'(x) = -\frac{f(x)}{x+e^{f(x)}}$, 用变量的形式表示即为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + e^y}.$$ ∎

计算中需要用到隐函数的可导性。

隐函数导数的计算练习

例 2. 求由方程 $x^3+y^3=6xy$ 确定可导隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解. 方程 $x^3+y^3=6xy$ 两端同时对 x 求导可得

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6y+6x\frac{dy}{dx}.$$

从中解出 $\frac{dy}{dx}$ 可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}.$$

■

隐函数导数的计算练习

例 3. 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的可导隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解. 把 $x=0$ 代入方程可得 $y=0$, 方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 两端同时对 x 求导可得

$$5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0,$$

当 $x=0$, $y=0$ 时，有

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1=0,$$

解之得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$. ■

隐函数导数的计算举例

例 4. 求圆 $x^2 + y^2 = 25$ 在点 $(3, 4)$ 处的切线方程。

解. 方程 $x^2 + y^2 = 25$ 两端同时对 x 求导可得

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

解之得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$. 从而由导数的几何意义可知曲线 $x^2 + y^2 = 25$ 在点 $(3, 4)$ 处的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=3\\y=4}} = \left[-\frac{x}{y}\right]_{\substack{x=3\\y=4}} = -\frac{3}{4}.$$

所求切线方程为 $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$, 化简可得 $3x + 4y = 25$. ■

隐函数的二阶导数

例 5. 求由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的可导隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 方程 $x^2+y^2=1$ 两端同时对 x 求导可得

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$, 进一步计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2}\\&=-\frac{y+x\cdot\frac{x}{y}}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.\end{aligned}$$

∎

可以用原方程化简计算结果。

幂指函数导数举例

例 6. 求函数 $y = x^x$ 的导函数.

解. 方程 $y = x^x$ 两端同时取对数可得

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x.$$

等式两端同时对 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

∎

幂指函数求导公式

定理 (幂指函数求导公式)

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都可导，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)^{g(x)} &= f(x)^{g(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\ln f(x)\big)\\ &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\end{aligned}$$

也可以用下面的等式求幂指函数的导数

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

幂指函数求导练习

例 7. 求函数 $y = x^{\sin x}$ 的导函数.

解. 由幂指函数的求导法则可知

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\sin x} \\
&= x^{\sin x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x \ln x) \\
&= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).
\end{aligned}
$$

■

对数求导法练习

例 8. 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数。

解. 等式两端同时取对数可得

$$\ln y=\frac{1}{2}\Big(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|\Big)$$

两边同时对 x 求导可得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

从而

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

∎

可以证明，当 $x=1$ 和 $x=2$ 时，函数虽然有定义但不可导。

参数方程确定的函数的导数

设函数 $f : I_x \to \mathbb{R}$, 参数方程 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$, $t \in I_t$, 其中 I_x 和 I_t 都是区间。如果对于任意 $x \in I_x$, 都存在 $t \in I_t$ 使得

$$x = g(t) \text{ 且 } y = g(t) \implies y = f(x).$$

则称函数 $y = f(x)$ 是由此参数方程确定的一个函数。

若函数 g 和 h 在 I_t 上可导且 $g(t) \neq 0$, 则 $x = g(t)$ 有反函数 $t = g^{-1}(x)$, 此时该参数方程确定了函数

$$y = h(t) = h(g^{-1}(x))$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{h'(t)}{g'(t)}.$$

参数方程求导举例

例 9. 求曲线 $\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(2t) \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 所对应点处的切线方程。

解. 曲线在点 t 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{(\cos(3t))'}{(\sin(2t))'} = \frac{-3\sin(3t)}{2\cos(2t)}.$$

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时，$x = 0$, $y = 0$, 切线斜率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3}{2}$, 所以曲线在 $t = \frac{\pi}{2}$ 所对应点处的切线方程为 $y = -\frac{3}{2}x$. ∎

参数方程求导举例

例 10. 求摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$ 在 $t = \pi$ 所对应点处的切线方程。

解. 摆线在 t 所对应点处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{(1 - \cos t)'}{(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

当 $t = \pi$ 时，$x = \pi$, $y = 2$, 切线斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, 所以摆线在 $t = 0$ 所对应点 $(\pi, 2)$ 处的切线方程为 $y - 2 = 0 \cdot (x - \pi)$, 化简得所求切线方程为 $y = 2$. ■

例 11. 求由参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$ 确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 计算可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'}{(a\cos t)'} = \frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2}\csc^3 t. \quad \blacksquare$$

作业：习题 2–4