分部积分法

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

如何把乘积的导数公式

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

用到不定积分中？

基本思想

由导数公式

$$\big[f(x)g(x)\big]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

可知不定积分公式

$$\begin{aligned} f(x)g(x) + C &= \int \big[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big]\,\mathrm{d}x \\ &= \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

从而，右侧的两个不定积分，只要能计算出其中的一个就能计算出另一个，即

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

主要结论

定理 (分部积分法)

设函数 f 和 g 都连续可导，则

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

求原函数

求导

定理用微分的形式可表示为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x).$$

和换元积分法类似，分部积分法只是把一个积分转化成另一个积分，在这两个积分中，可以用较简单的一个计算另一个。

反函数的积分

设函数 f 的反函数为 f^{-1}. 则

$$y = f^{-1}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f(y)$$

从而由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}x = xy - \int x\,\mathrm{d}y \\ = xy - \int f(y)\,\mathrm{d}y \\ = xf^{-1}(x) - \left[\int f(y)\,\mathrm{d}y\right]_{y=f^{-1}(x)}\end{aligned}$$

即若已知函数 f 的不定积分，则可以用分部积分求出反函数 f^{-1} 的不定积分。

对数的积分

例 1. 求不定积分 $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, \mathrm{d}x &= x \ln x - \int x \, \mathrm{d} \ln x \\
&= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= x \ln x - \int \mathrm{d}x \\
&= x \ln x - x + C \\
&= x(\ln x - 1) + C.
\end{aligned}$$

■

反正弦函数的积分

例 2. 求不定积分 $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x \, \mathrm{d}x &= x \arcsin x - \int x \, \mathrm{d} \arcsin x \\
&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= x \arcsin x + \int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}(1-x^2) \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

∎

反正切函数的积分

例 3. 求不定积分 $\int \arctan x \, \mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, \mathrm{d}x &= x \arctan x - \int x \, \mathrm{d} \arctan x \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}(1+x^2) \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

■

幂函数与对数函数乘积的积分

例 4. 求不定积分 $\int x \ln x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int \ln x \cdot x \, dx = \int \ln x \, d\frac{x^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \, d \ln x \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

∎

幂函数与对数函数乘积的积分

例 5. 求不定积分 $\int x^a \ln x \, dx$.

解. 当 $a = -1$ 时

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int \ln x \, d \ln x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

当 $a \neq -1$ 时

$$\begin{aligned}\int x^a \ln x \, dx &= \int \ln x \, d\frac{x^{a+1}}{a+1} = \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \, d \ln x \\ &= \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \int \frac{x^a}{a+1} \, dx \\ &= \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C.\end{aligned}$$

■

幂函数与指数函数乘积的积分

例 6. 求不定积分 $\int xe^x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int xe^x \, dx &= \int x \, de^x = xe^x - \int e^x \, dx \\ &= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.\end{aligned}$$

∎

例 7. 求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= \int x^2 \, de^x = x^2 e^x - \int e^x \, dx^2 \\ &= x^2 e^x - 2\int xe^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

∎

幂函数与三角函数乘积的积分

例 8. 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= x\sin x + \cos x + C.$$

例 9. 求不定积分 $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = -\int x^2\,\mathrm{d}\cos x = -x^2\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x^2$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

春去春回来

例 10. 求不定积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, de^x = e^x \sin x - \int e^x \, d \sin x \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int \cos x \, de^x \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x \, d \cos x \\
&= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx \\
&= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.
\end{aligned}$$

∎

正割立方的积分

例 11. 求不定积分 $\int \sec^3 x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \, d \tan x = \sec x \tan x - \int \tan x \, d \sec x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\
&= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C.
\end{aligned}$$

■

经验：站在巨人的肩膀上

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

通常我们应按照如下顺序来选择分部积分中的函数 $g'(x)$.

1. 指数函数：e^x, a^x.
2. 三角函数：$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cdots$
3. 幂函数：x, x^2, x^a.
4. 反三角函数：$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\cdots$
5. 对数函数：$\ln x$, $\log_a x$.

和换元法一起用

例 12. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解. 取 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, 从而

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\cdot 2t\,dt = 2\int te^t\,dt\\ &= 2\int t\,de^t = 2te^t - 2\int e^t\,dt\\ &= 2te^t - 2e^t + C = 2(t-1)e^t + C\\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

■

作业：习题 4–3

- 4, 5, 8, 13.

例 13. 求不定积分 $\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2}-\int x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}\\ &= x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x-\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C.\end{aligned}$$

∎

例 14. 求不定积分 $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2+1} - \int x\,\mathrm{d}\sqrt{x^2+1} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) + C.
\end{aligned}$$

■

分部积分综合题举例

例 15. 求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x + 1)^2\,dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}(\tan x + 1)^2\,dx &= \int e^{2x}(\tan^2 x + 2\tan x + 1)\,dx \\
&= \int e^{2x}(\sec^2 x + 2\tan x)\,dx \\
&= \int e^{2x}\sec^2 x\,dx + \int e^{2x}2\tan x\,dx \\
&= \int e^{2x}\,d\tan x + \int \tan x\,de^{2x} \\
&= e^{2x}\tan x + C.
\end{aligned}$$

■

分部积分综合题举例

例 16. 求不定积分 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} \\
&= \int x\cdot\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} + \int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\tan\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

■

例 17. 求不定积分 $\int \sin \ln x \, \mathrm{d}x$.

解. 取 $u = \ln x$, 则 $x = \mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u$, 从而

$$\begin{aligned} \int \sin \ln x \, \mathrm{d}x &= \int \sin u \cdot \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u = \int \mathrm{e}^u \sin u \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^u(\sin u - \cos u) + C \\ &= \frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C. \end{aligned}$$

■