# 导数的概念

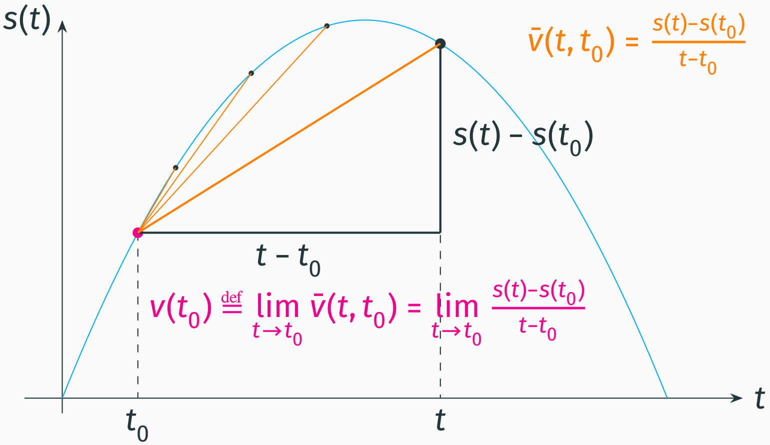
王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

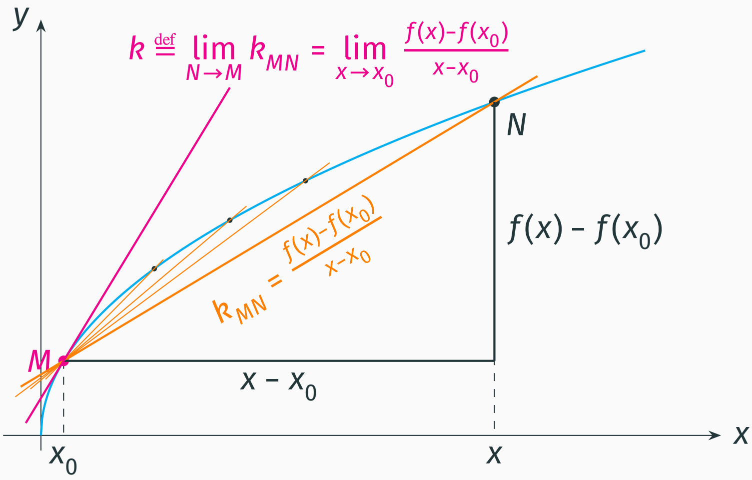
# 直线运动的速度

直线运动中，质点的位移为 $s(t)$，如何定义质点在 $t_0$ 时刻的瞬时速度?



# 平面曲线的切线

如何定义曲线 $y = f(x)$ 在点 $M = (x_0, f(x_0))$ 处的切线?



# 共性

对于函数 $f$ 及其定义区间上的一点 $a$, 求极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

用增量形式表示，自变量增量为 $\Delta x = x - a$, 对应的因变量增量为

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a+\Delta x) - f(a).$$

上面的极限也可以表示为：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

即都是函数值关于自变量的变化率。

# 导数的概念

**定义 (导数)**

设函数 $f$ 在 $a$ 的某个邻域内有定义，**函数 $f$ 在点 $a$ 处的导数**记为 $f'(a)$, 定义为

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

如果这个极限存在，则称**函数 $f$ 在点 $a$ 处可导**，否则称**函数 $f$ 在点 $a$ 处不可导**。

函数 $y = f(x)$ 在点 $a$ 处的导数还可以记为

$$y'\Big|_{x=a} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=a} \qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=a} \qquad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right]_{x=a}$$

# 导数的其它形式

记 $\Delta x = x - a$, 则 $x = a + \Delta x$, 从而

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

此时，函数 $f$ 在数 $a$ 处的导数可以等价的定义为：

$$\begin{aligned} f'(a) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

不难看出，导数表示**函数值关于自变量的变化率**。

# 左导数、右导数

### 函数 $f$ 在点 $a$ 处的左导数

$$f'_-(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

### 函数 $f$ 在点 $a$ 处的右导数

$$f'_+(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

由一般极限与左右极限的关系可知

$$f'(a) = A \iff f'_-(a) = f'_+(a) = A.$$

# 导函数

若函数 $f$ 在开区间 $(a,b)$ 内的每一点处都可导，则称**函数 $f$ 在开区间 $(a,b)$ 上可导**。

设函数 $f$ 的定义域为开区间 $(a,b)$, 且函数 $f$ 在开区间 $(a,b)$ 内可导，则记函数 $f$ 的**导函数**为 $f'$, 定义为

$$\begin{array}{rccc} f' & : & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}.$$

即

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{w\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}.$$

函数 $y=f(x)$ 的导函数通常也可记为

$$y' \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

# 常值函数的导数

**例** 1. 求函数 $f(x) = c$ 的导数。

**解**. 由导数的定义计算可得：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

∎

# 幂函数的导数

**例** 2. 求函数 $f(x)=x^a$, $x>0$ 的导数。

**解**. 利用极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$ 计算可得：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^a-x^a}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} x^a\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^a-1}{h} = x^a\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^a-1}{h} \\
&= x^a\lim_{h\to 0}\frac{a\times\frac{h}{x}}{h} = x^a\times\frac{a}{x} = ax^{a-1}.
\end{aligned}
$$

∎

- 若函数 $f(x)=x^a$ 在 $x<0$ 时也有定义，则结论依然成立。
- 若 $a>0$ 则 $f(x)=x^a$ 在 $x=0$ 处有定义。当 $0<a<1$ 时 $f'(0)$ 不存在，当 $a=1$ 时 $f'(0)=1$, 当 $a>1$ 时 $f'(0)=0$.

# 幂函数导数的特殊情况

$$
\begin{aligned}
(x)' &= 1, \\
(\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\
\left(\frac{1}{x}\right) &= -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}
$$

# 指数函数的导数

**例** 3. 求函数 $f(x) = a^x$ 的导数，其中 $a > 0$ 。

**解**. 由导数的定义及等价无穷小替换计算可得：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h-1}{h} \\ &= a^x \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\ln a}-1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{h\ln a}{h} \\ &= a^x \ln a. \end{aligned}$$

■

特殊地，当 $a = e$ 时有 $(e^x)' = e^x$.

# 对数函数的导数

**例** 4. 求函数 $f(x) = \ln x$ 的导数。

**解**. 由导数的定义及等价无穷小替换计算可得：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x}}{h} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

∎

由 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 可知 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

# 正弦函数的导数

**例** 5. 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数。

**解**. 由导数的定义及等价无穷小替换计算可得：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2}h^2}{h} + \cos x \\
&= \cos x.
\end{aligned}
$$

■

# 余弦函数的导数

**例** 6. 求函数 $f(x) = \cos x$ 的导数。

**解**. 由导数的定义及等价无穷小替换计算可得：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2}h^2}{h} - \sin x \\
&= -\sin x.
\end{aligned}
$$

■

# 不可导的例子

**例** 7. 设函数 $f(x) = |x|$, 求 $f'(0)$.

**解**. 由导数的定义可知

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

因为

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1.$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

所以极限 $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ 不存在，即 $f'(0)$ 不存在。 ■

绝对值函数在 $x = 0$ 处不可导，但在 $x = 0$ 处连续，从而函数在一点处连续，在此点不一定可导。

# 可导与连续的关系

若函数 $y = f(x)$ 在 $a$ 处可导，则 $f$ 在 $a$ 处一定连续吗？

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \\
&= f'(a) \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

- 若函数 $f$ 在 $a$ 处可导，则函数 $f$ 在 $a$ 处连续。
- 若函数 $f$ 在 $a$ 处不可导，则函数 $f$ 在 $a$ 处不连续。

# 曲线的切线

当函数 $f$ 在 $a$ 处可导时，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线斜率为 $f'(a)$, 切线方程为

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

当 $f'(a) \neq 0$ 时对应的法线斜率为

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

# 求曲线的切线

**例** 8. 求曲线 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程。

**解**. 计算可得 $y' = (x^2)' = 2x$，由导数的几何意义可知曲线 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = (2x)_{x=1} = 2,$$

所以所求切线的方程为

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

即曲线 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2x - 1$. ■

# 作业：习题 2–1

- 9.(2), 9.(4), 9.(7),
- 14,
- 18.

# 分段函数在分段点处的导数

**例** 9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$.

**解**. 由极限的定义可得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left( h \sin \frac{1}{h} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

# 分段函数在分段点处的导数

**例** 10. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ \cos x & x>0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$.

**解**. 因为 $f(0)=1$, 从而由导数的定义可得

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}.$$

又因为

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}h^2}{h}=0.$$

从而极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$ 不存在，导数 $f'(0)$ 不存在。 ■

# 分段函数在分段点处的导数

**例** 11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leqslant 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$.

**解**. 计算可得

$$f'_{-}(0) = \left(e^x\right)'\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1.$$

因为 $f(0) = 0 = \cos 0$, 所以计算可得

$$f'_{+}(0) = \left(\cos x\right)'\Big|_{x=0} = \left(-\sin x\right)\Big|_{x=0} = 0.$$

从而 $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$, 导数 $f'(0)$ 不存在。 ■

# 分段函数在分段点处的导数

**例** 12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \sin x & x \geqslant 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$.

**解**. 因为 $f(0) = 0 = x|_{x=0}$, 所以计算可得

$$f'_-(0) = \left(x\right)'\Big|_{x=0} = 1.$$

进一步计算可得

$$f'_+(0) = \left(\sin x\right)'\Big|_{x=0} = \left(\cos x\right)\Big|_{x=0} = 1.$$

从而 $f'(0) = 1$. ∎