

洛必达法则

王二民 (✉ wagermn@126.com)

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

引例

例 1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

解. 由导数的定义可知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= \tan' \frac{\pi}{4} = \left(\sec \frac{\pi}{4} \right)^2 \\ &= 2.\end{aligned}$$



导数是用极限定义的，从而导数就是极限。由于导数的运算法则较多，计算相对比较简单，所以用导数求极限是可行的。

洛必达法则

定理 (洛必达法则)

设函数 f 和 g 在开区间 (a, b) 上可导且 $g'(x) \neq 0$, 若

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}.$$

而且函数 f 和 g 还满足下面的两个条件之一

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$.

则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

关于洛必达法则的一些说明

- ① 当 $a = -\infty$ 时, 极限过程 $x \rightarrow a^+$ 即 $x \rightarrow -\infty$.
- ② 定理对极限过程 $x \rightarrow b^-$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 也成立。
- ③ 利用极限之间的关系, 适当修改定理中的区间, 定理对双侧极限过程 $x \rightarrow a$ 和 $x \rightarrow \infty$ 也成立。
- ④ 洛必达法则主要处理 “ $\frac{0}{0}$ ” 和 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 类型的极限。
- ⑤ 仅当**导数的比值极限存在或趋于无穷**时才能使用此法则。
- ⑥ 由 $g'(x) \neq 0$ 及导数的介值性质可知, 单侧极限过程下, 定理中的所有 ∞ 必可写成 $+\infty$ 或 $-\infty$, 但在双侧极限中, 两侧可能一个是 $+\infty$, 一个是 $-\infty$, 所以仍然保留此形式。

 定理可简记为: “函数比值的极限等于它们导数比值的极限”。

洛必达法则应用举例

例 2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

解. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0.$$

所以可以用洛必达法则试一试

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1. \quad \blacksquare$$

只有到最后计算出结果，才算是验证了洛必达法则中“导数的商的极限存在或趋于无穷”的条件，在此之前都算是在尝试。

有理分式的极限

例 3. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

💡 因为求导比分解因式要简单，所以有理分式中“ $\frac{0}{0}$ ”型的极限建议用洛必达法则计算。

洛必达法则应用举例

例 4. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{3x^2} = \frac{1}{6} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} \\&= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

注意不能用洛必达法则证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 因为求 $\sin x$ 的导数时就用到了此极限。

洛必达法则应用举例

例 5. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \tan^2 x}$.

解. 由等价无穷小和洛必达法则（用上一题的结论）计算可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

在用洛必达法则时，要适当地结合其它极限计算方法。

例 6. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.

解. 由初等函数的连续性可知

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \left[\frac{\sin x}{1 - \cos x} \right]_{x=\pi} = 0.$$

S

在用洛必达法则时，一定要验证其条件。

无穷大的数量级

例 7. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}}$, 其中 $a > 0, b > 0$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^{a-1}}{be^{bx}} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(a-1)x^{a-2}}{b^2e^{bx}} \\&\dots \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}}{b^ne^{bx}}\end{aligned}$$

取 $n \geq a$ 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$. ■

无穷大的数量级

例 8. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a}$, 其中 $a > 0$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{ax^a} \\ &= 0.\end{aligned}$$



综合上题的结论可知, 若 $a > 0, b > 0$, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\ln x \ll x^a \ll b^x.$$

洛必达法则不是万能的

例 9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

若使用洛必达法则，可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

出现了循环，无法直接的到结果。

解. 由极限的四则运算规律计算可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$



洛必达法则失效的例子

例 10. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

i 若用洛必达法则

$$\frac{(x + \sin x)'}{x'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

但当 $x \rightarrow \infty$ 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ 不存在, 定理失效。

解. 由极限的四则运算规律、无穷小与有界量的乘积还是无穷小计算可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \sin x \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 1. \quad \blacksquare$$

未定式

设同一极限过程下 f 和 g 的极限存在或趋于无穷，即

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B, \quad A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

若对于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的四则运算和乘方运算，其极限结果是不确定的，就称为是**未定式**。

- $f(x) + g(x)$, 未定式形式: $\infty + \infty$.
- $f(x) \cdot g(x)$, 未定式形式: $0 \cdot \infty$.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$, 未定式形式: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.
- $f(x)^{g(x)}$, 由 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ 及乘积的未定式形式可得，幂指未定式形式: $0^0, \infty^0, 1^\infty$.


乘积未定式

利用无穷小与无穷大之间的关系，乘积未定式 $0 \cdot \infty$ 可以转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，再进行计算。

例 11. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

解. 由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \quad \blacksquare$$

 $0 \cdot \infty$ 型未定式转化为 $\frac{0}{0}$ 还是 $\frac{\infty}{\infty}$ 要视具体情况而定，没有经验时，需要试一下才知道，但通常会先试把简单的因式放到分母上。

乘积未定式举例

例 12. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \\&= 1.\end{aligned}$$

和差未定式

例 13. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} \\&= 0.\end{aligned}$$

💡 $\infty - \infty$ 型未定式可试着化为积或商的未定式后再进行计算。

和差未定式

例 14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$.

解. 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ 可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 + \frac{x^2}{e^x} \right) \right] = +\infty. \quad \blacksquare$$

🔗 当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 实在不能通分也没有公因式时，可以用恒等式

$$f(x) + g(x) = f(x) \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)} \right)$$

类似可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + ax^3 + cx^2 + dx + e) = +\infty$$

幂指未定式举例

例 15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

解. 由洛必达法则计算可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1. \quad \blacksquare$$

幂指未定式举例

例 16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

解. 由洛必达法则计算可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1. \quad \blacksquare$$

🗨 本题结论的一种特殊情况为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

幂指未定式举例

例 17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

解. 由洛必达法则计算可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = +\infty.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = +\infty.$$

类似地, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

作业：习题 3-2

- 1.(2), 1.(3), 1.(8), 1.(13), 1.(15).

洛必达法则应用举例

例 18. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln \tan \frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln \tan \frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} \sec^2 \frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{x-1}} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{\sin \pi x}}{\frac{1}{x-1}} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(x-1)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{\pi \cos \pi x} \\&= -1.\end{aligned}$$

洛必达法则应用举例

例 19. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x} \\&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \\&= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$