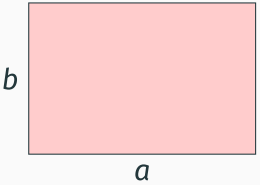
定积分的概念与性质

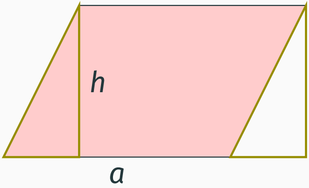
王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

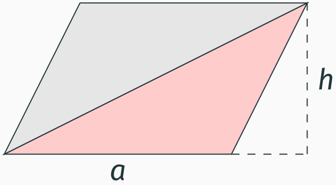
郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

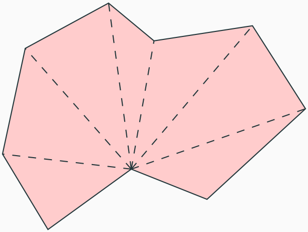
多边形的面积



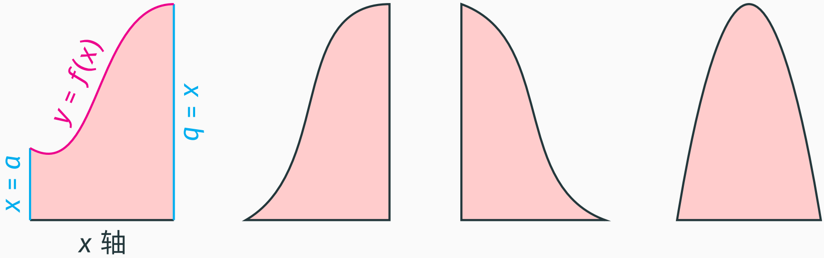


先分割，再求和





设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则称由直线 $x=a$, $x=b$, $y=0$ 和曲线 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 围成的有界闭区域为函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上对应的**曲边梯形**。

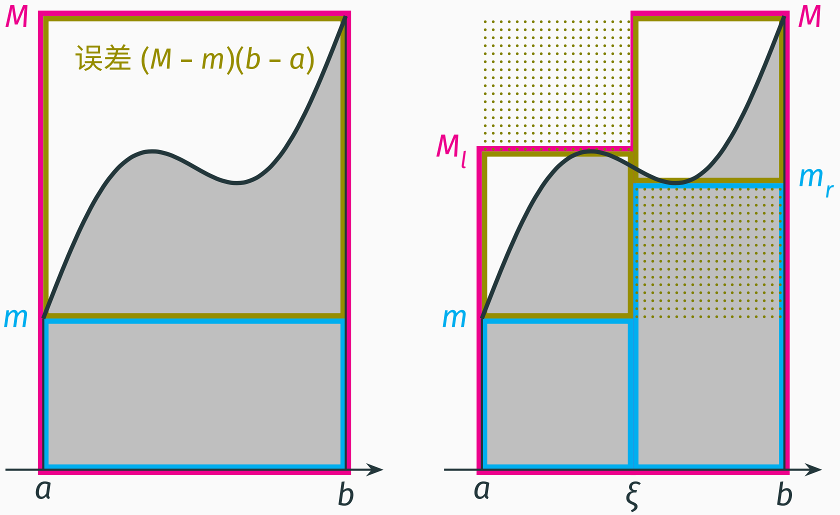


- 当 f 在 $[a,b]$ 上有定义时，也有类似的概念。
- 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上对应的曲边梯形可用集合表示为

$$\left\{(x,y)\;\middle|\; a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant yf(x), |y|\leqslant|f(x)|\right\}$$

面积的估计

分割后估计误差变小



面积的估计

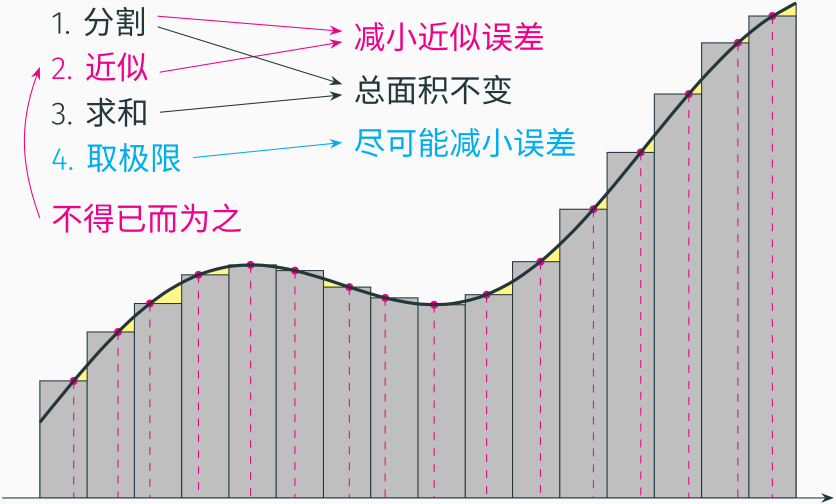
1. 分割
2. 近似
3. 求和
4. 取极限

减小近似误差

总面积不变

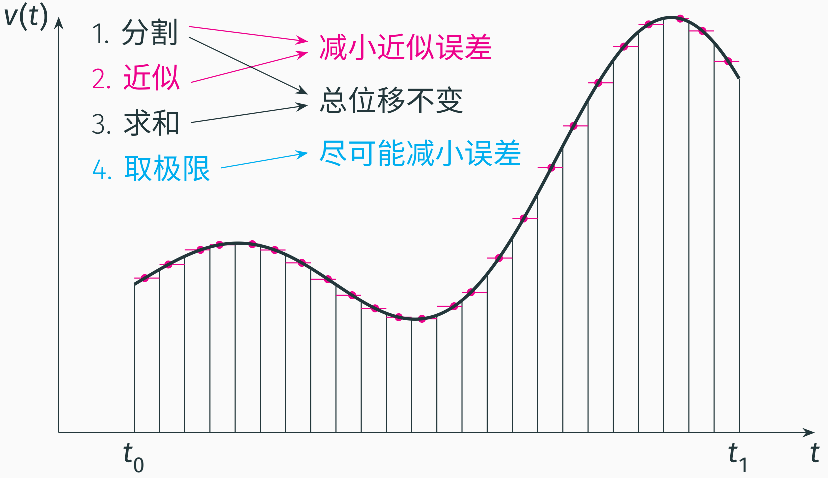
尽可能减小误差

不得已而为之

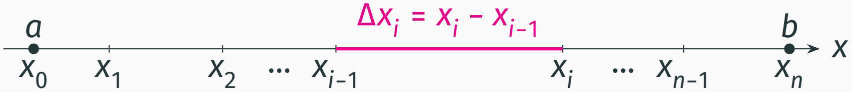


直线运动中，已知速度求在某段时间内的位移?

假设速度 $v(t)$ 连续，则短时间内速度的变化不会太大，从而可近似看成匀速运动。



闭区间的分割



闭区间 $[a,b]$ 的一个**分割** P 指的是这个区间上的有限个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 使得

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

其中 n 称为**分割 P 的份数**。对于任意 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 称 $[x_{i-1}, x_i]$ 为分割 P 的第 i 个区间，其长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 记

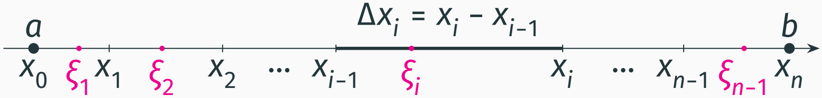
$$\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

称为**分割 P 的网格**。

当 $\lambda(P) \to 0$ 时，必有 $n(P) \to 0$, 反之不一定成立。

黎曼和

对于任意 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 记取法为 ξ, 分割 P 连同取法 ξ 称为 $[a, b]$ 上**带选择点的分割**，记为 (P, ξ).



对任意在闭区间 $[a, b]$ 有定义的函数 f, 称

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

为 f 在区间 $[a, b]$ 上对应于带选择点的分割 (P, ξ) 的**黎曼和**。

定积分的定义

定义 (定积分)

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，定义 f 在 $[a,b]$ 上的**定积分**为其黎曼和 $\sigma(f;P,\xi)$ 在 $\lambda(P)\to 0$ 时的极限，记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称 f 为**被积函数**，称 x 为**积分变量**，称 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为**被积表达式**，称 a 为**积分下限**，称 b 为**积分上限**，称 $[a,b]$ 为**积分区间**。当极限不存在时，称函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上**不可积**。

用定义求定积分

例 1. 求函数 $f(x) = c$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分 $\int_a^b c\,\mathrm{d}x$.

解. 设 (P, ξ) 是区间 $[a, b]$ 上任意一个带选择点的分割，则 f 在其上对应的黎曼和为

$$\begin{aligned}\sigma(f; P, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i \\ &= c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).\end{aligned}$$

从而

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi) = c(b-a). \qquad \blacksquare$$

定积分的存在性

定理 (可积的必要条件)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有界。

例 2. 狄利克雷函数 $D(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上都不可积, 其中

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

定理 (连续必可积)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

定理 (可积的充分条件)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有界且仅有有限个间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

用定义求已知存在的定积分

例 3. 求函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的定积分。

解. 取区间 $[0, 1]$ 的 n 等分分割，选择点取区间右端点，即

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = \frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

从而 $f(x) = x^2$ 在其上对应的黎曼和为

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

从而

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

■

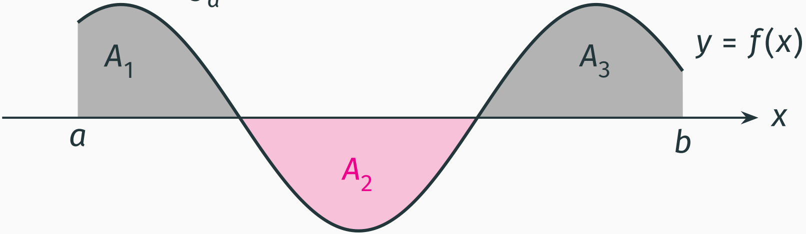
一般上下限的定积分

1. 当 $b < a$ 时，规定
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. 当 $a = b$ 时，规定
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} 0.$$
3. 对于任意的实数 a, b 有
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定积分的几何意义

设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上可积，则定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示函数 f 在区间 $[a, b]$ 上对应的曲边梯形的有向面积（x 轴上方的面积为正，x 轴下方的面积为负）。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3.$$



例 4. 定积分 $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

定积分的性质

线性性质

设函数 f 和 g 在以 a, b 为端点的区间上可积，则对任意常数 α 和 β 都有

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

区间可加性

设函数 f 在以 a, c 和 c, b 为端点的区间上都可积，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理中的 a, b, c 可以为任意实数。

定积分的比较

定理

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，若在 $[a,b]$ 上 $f \geqslant 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

推论

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，若在 $[a,b]$ 上 $f \geqslant 0$, 且存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) > 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

定积分的比较

推论

设函数 f 和 g 在闭区间 $[a,b]$ 上都可积，若在 $[a,b]$ 上恒有 $f \geqslant g$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若把可积改为连续，且存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) > g(c)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 5. 比较定积分的大小

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x > \int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x < \int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$$

和的绝对值不大于绝对值的和

由 $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, 可知

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

推论

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

平均值不小于最小值且不大于最大值

若在 $[a,b]$ 上 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 则

$$m(b-a) = \int_a^b m \, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M \, \mathrm{d}x = M(b-a)$$

推论

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，且存在常数 m 和 M, 使得当 $x \in [a,b]$ 时有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 则

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant M.$$

并称 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ 为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的平均值。

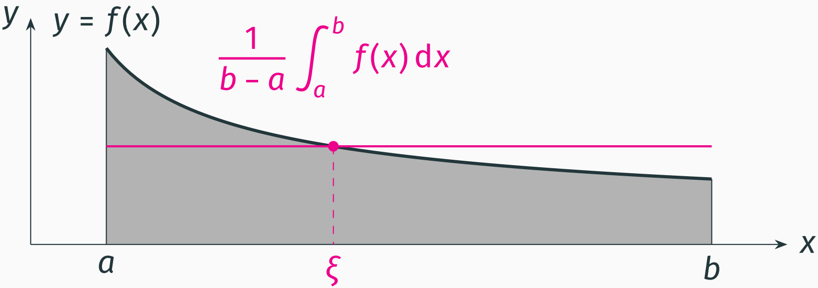
积分中值定理

定理 (积分中值定理)

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

实际上，可要求 $\xi \in (a,b)$.



黎曼和的极限的精确定义

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，则对于区间 $[a,b]$ 的任意带选择点的分割 (P,ξ), 可定义黎曼和

$$\sigma(f;P,\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

它是关于带选择点的分割 (P,ξ) 的一个函数。

若存在常数 I 使得对任意 $\epsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得

$$\lambda(P)<\delta \implies \left|\sigma(f;P,\xi)-I\right|<\epsilon,$$

则称当 $\lambda(P)\to 0$ 时 $\sigma(f;P,\xi)$ 的极限为 I, 记为

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi)=I.$$

定理的证明

证明. 对区间 $[a,b]$ 上的任意带选择点的分割 (P,ξ), 由 $\Delta x_k > 0$ 和 $f(\xi_k) \geqslant 0$ 可知

$$f(\xi_k)\Delta x_k \geqslant 0,$$

从而

$$\sigma(f;P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geqslant 0,$$

再由定积分的定义和存在性及极限的保号性可知

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f;P,\xi) \geqslant 0. \qquad \blacksquare$$