微分方程的基本概念

王二民（wagermn@126.com）
郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

自由落体运动

设一质量为 m 的质点在 0 时刻的高度为 s_0, 且有一个竖直向上的速度 v_0, 且从此时刻开始只受重力作用，求质点的位移（即质点离地面的高度）。

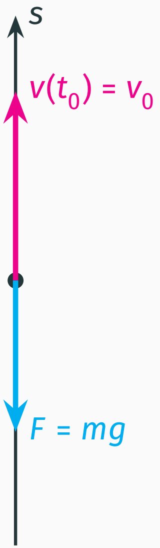
设质点的位移函数为 $s(t)$, 则由牛顿第二定律可知 $ms''(t) = -F = -mg$, 其中 $g \approx 9.81$ 是重力加速度。因为 $m > 0$, 所以

$$s''(t) = -g. \tag{1}$$

再由

$$s'(0) = v(0) = v_0, \qquad s(0) = s_0. \tag{2}$$

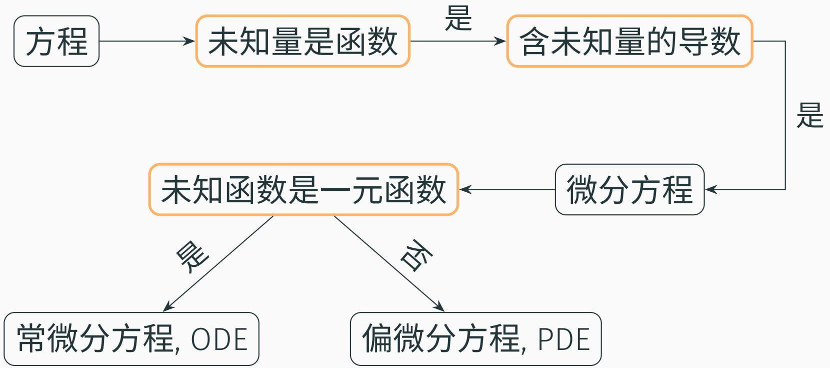
可完全确定位移函数 $s(t)$.



微分方程的概念

定义 1 (微分方程)

称含有未知函数的导数或微分的方程为**微分方程**。



判断是否为常微分方程

1. $y = 0$ 不含未知函数的导数或微分 ✗
2. $y' = 0$ ✓
3. $y + x = 0$ 不含未知函数的导数或微分 ✗
4. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x = 0$ ✓
5. $y' + y = 0$ 可以不含自变量 ✓
6. $y' + y + x = 0$ ✓
7. $y' + y + t = 0$ 自变量为 t, 此时 y' 表示 y 对 t 的导数 ✓
8. $x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = 0$ 含未知函数的微分 ✓

💬 微分方程中必须含有未知函数的导数或微分，可以（但不一定）含有未知函数或其自变量。

微分方程的阶数

定义 2 (微分方程的阶数)

微分方程中未知函数的导数或微分的最高阶数称为**微分方程的阶数**。

例 1. 指出下列微分方程的阶数

1. $y' + y + x = 0$ 1 阶
2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x = 0$ 1 阶
3. $(3y + 2x)\,\mathrm{d}x + (3x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$ 1 阶
4. $xy^4 + y^2y''' + \sin y = 0$ 3 阶
5. $y^{(4)} + 3x^2y' + y + x = 0$ 4 阶

微分方程的一般形式

一阶微分方程的一般形式分别为

$$y' = f(x, y), \qquad\qquad F(x, y, y') = 0,$$

其中，左侧的称为**显式形式**，右侧的称为**隐式形式**。除此之外，一阶微分方程还通常表示为如下的**对称形式**

$$p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

二阶微分方程的显式和隐式一般形式分别为

$$y'' = f(x, y, y') \qquad\qquad F(x, y, y', y'') = 0.$$

一般地，n 阶常微分方程的显式和隐式一般形式分别为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

常微分方程的解的概念

定义 3 (常微分方程的解)

设 I 是区间, 函数 $g : I \to \mathbb{R}$, 若

$$F\big(x, g(x), g'(x), \cdots, g^{(n)}(x)\big) = 0, \quad x \in I,$$

则称函数 $y = g(x)$ 是微分方程的 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ **解**。

例 2. 验证函数 $y = \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的解。

解. 计算可得

$$y' = \cos x \qquad\qquad y'' = -\sin x$$

从而

$$y'' + y = (-\sin x) + \sin x = 0,$$

即 $y = \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的解。 ■

解微分方程举例

例 3. 求微分方程 $y' = 2x$ 的解。

解. 由不定积分的定义可知

$$y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C,$$

其中 C 是积分常量，可以取任意常数。 ∎

- 解 $y = x^2 + C$ 中的 x 为函数的自变量，C 为可以取任意常数的参数。所以，更准确地，应该写为 $y(x) = x^2 + C$.
- 若函数 $y = f(x)$ 是微分方程 $y' = 2x$ 在区间 I 上的一个特解，则存在常数 c 使得 $f(x) = x^2 + c$.

微分方程的解

一般地，若微分方程的解中含有可以取任意常数的参数，则称为微分方程的**带任意常数解**或**带参解**。

💬 严格意义上，这里的任意需要加引号。

定义 4 (微分方程的特解)

称微分方程不含任何参数的解为微分方程的**特解**。

💬 所谓不含任何参数，意思是解函数的定义中，除了自变量外其它的量都是常量。

若微分方程的任何特解都通过确定某带参解中的参数而得到，则称此带参解为微分方程的**所有解**。

解微分方程举例

例 4. 求微分方程 $s''(t) = -g$ 的解。

解. 由导数的定义可知 $(s'(t))' = -g$, 从而积分可得

$$s'(t) = \int -g \, \mathrm{d}t = -gt + A$$

$$s(t) = \int (-gt + A) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B,$$

其中 A 和 B 是积分常量，可以取任意常数。 ∎

定义 5 (微分方程的通解)

称 n 阶微分方程带 n 个独立任意常数的解为微分方程的**通解**。

微分方程几类不同解的区别

例 5. 判断微分方程 $y'' = 0$ 的下列解属于微分方程的所有解、通解、特解中的哪些？

1. $y(x) = ax + b$ 所有解、通解
2. $y(x) = a^2x + b$ 不是所有解，因为 $a^2 \geqslant 0$ 通解
3. $y(x) = ax - e^b$ 不是所有解，因为 $e^b > 0$ 通解
4. $y(x) = a + b$ 因为 a 和 b 不独立 都不是
5. $y(x) = x + 2$ 特解

💬 微分方程的通解不唯一。

💬 微分方程的通解不一定能表示微分方程的所有解。

验证微分方程的带参解

例 6. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$$

的解。

解. 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt = -k^2 x$$

从而 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$, 即函数 x 是所给微分方程的解。 ■

💬 当 $k \neq 0$ 时，题中的解是通解；当 $k = 0$ 时，题中的解不是通解。

初值条件

称确定微分方程通解中任意常数的值的条件为微分方程的**定解条件**。并称由未知函数及其导数在某同一点处的值确定的定解条件为常微分方程的**初值条件**。

一阶常微分方程的初值条件形如

$$y(x_0) = y_0,$$

其中 x_0, y_0 是两个已知常数。

二阶常微分方程的初值条件形如

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0.$$

其中 x_0, y_0, y'_0 是三个已知常数。

初值问题

称由微分方程及其初值条件求微分方程特解的问题为**初值问题**，简记为 IVP.

一阶常微分方程的初值问题形如

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

二阶常微分方程的初值问题形如

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{4}$$

引例中问题的解

引例问题对应的初值问题为

$$\begin{cases} s''(t) = -g, \\ s'(0) = v_0, s(0) = s_0. \end{cases}$$

由例 4 可知该微分方程的通解为

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Ax + B.$$

从而 $s'(t) = -gt + A$, 所以 $s'(0) = A$, $s(0) = B$, 代入初值条件可得

$$A = v_0, \qquad B = s_0,$$

即质点的位移为

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0.$$

利用通解和定解条件求特解

例 7. 已知，当 $k \neq 0$ 时，函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的通解，求此时方程满足初值条件

$$x\Big|_{t=0} = A, \qquad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0,$$

的特解。

解. 把 $t = 0$ 代入 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 和

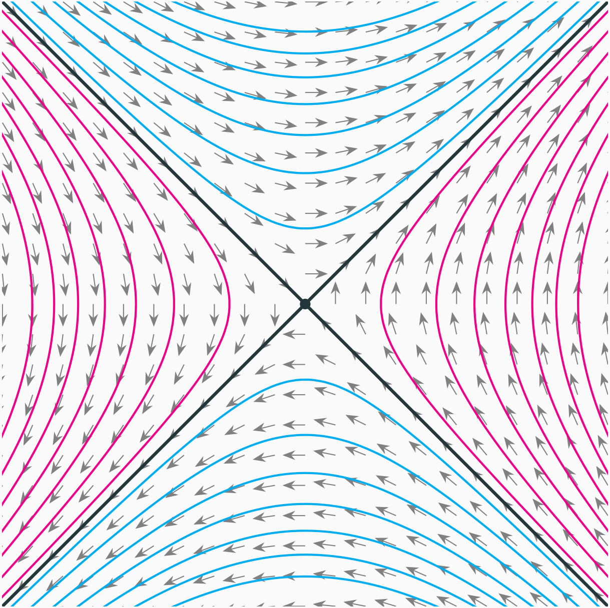
$$\frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

可得

$$C_1 = A, \qquad kC_2 = 0,$$

又 $k \neq 0$, 从而 $C_1 = A$, $C_2 = 0$, 即所求的特解为 $x = A \cos kt$. ■

向量场、方向场、积分曲线



一阶微分方程

$$x\,dx - y\,dy = 0$$

向量场

$$(y, x)$$

方向场

$$\frac{(y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

积分曲线

$$x^2 - y^2 = C$$

作业：习题 7–1

- 1.1, 1.3, 1.5; 此题可一起拍照，保存为 7.1.1.jpg
- 2.3, 2.4; 写出过程
- 4.2;
- 5.1.

一阶常微分方程的隐式解举例

例 8. 设 $y = f(x)$ 是方程 $x^2 + y^2 = 1$ 确定的一个可导隐函数，验证 $y = f(x)$ 是微分方程

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$$

的解。

解. 计算可得，隐函数 $y = f(x)$ 的导数为

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

化简得 $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}y = 0$, 从而 $y = f(x)$ 是所给微分方程的解。 ∎

一阶常微分方程的隐式解

定义 6 (微分方程的有隐式解)

若方程 $F(x, y) = 0$ 确定的任意可导隐函数都是某微分方程的解，则称 $F(x, y) = 0$ 为该微分方程的**隐式解**。

在一阶微分方程的对称形式

$$p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

中，没有明确自变量和因变量，从而它的解更适合写成隐式解。

不同解的说明

- 微分方程不一定有通解，如微分方程 $(y')^2 + y^2 = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有一个解为 $y = 0$.

一个简单的例子

例 9. 验证 $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解，并求此微分方程在定解条件 $y(0) = 3, y'(0) = 4$ 下的特解。

解. 计算可得

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} \qquad y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x}$$

从而

$$y'' - 3y' + 2y = (1 - 3 + 2)C_1e^x + (4 - 3 \cdot 2 + 2)C_2e^{2x} = 0.$$

即 $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解。

又由 $y(0) = 3, y'(0) = 4$ 可得二元一次线性方程组

$$C_1 + C_2 = 3 \qquad C_1 + 2C_2 = 4$$

解之得 $C_1 = 2, C_2 = 1$, 从而所求特解为 $y = 2e^x + e^{2x}$. ∎