

# 连续的概念

---

王二民 ( ✉ [wagermn@126.com](mailto:wagermn@126.com) )

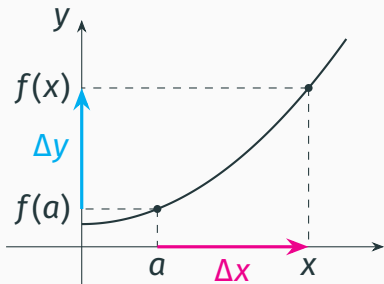
2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

**什么是连续？**

# 变化的描述

	初值	终值	增量
自变量	$a$	$x$	$\Delta x = x - a$
函数值	$f(a)$	$f(x)$	$\Delta y = f(x) - f(a)$ $= f(a + \Delta x) - f(a)$



称  $\Delta x$  为自变量  $x$  在点  $a$  处的增量，称  $\Delta y$  为自变量在点  $a$  处有增量  $\Delta x$  时对应的函数值或因变量的增量。

🌀  $\Delta x$  的值可以自由变化，但跟  $a$  以及函数的定义域有关。

# 连续的概念

函数  $f(x)$  在点  $a$  处连续的意思就是“当自变量的变化较小时，因变量的变化也不能太大”。用数学语言描述即“当  $\Delta x$  无限接近于 0 时  $\Delta y$  也无限接近于 0”。

## 定义

设函数  $f$  在  $a$  的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(a + \Delta x) - f(a)) = 0,$$

则称函数  $f$  在  $a$  处连续，并称  $a$  为函数  $f$  的连续点。

记  $x = a + \Delta x$ , 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(a + \Delta x) - f(a)) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

# 函数在内点连续的概念

## 定义 (函数在一点连续)

设函数  $f$  在  $a$  的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

则称**函数  $f$  在点  $a$  处连续**, 并称  $a$  为函数  $f$  的一个**连续点**。

- ① 极限  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  存在。
- ② 函数  $f$  在点  $a$  处有定义。
- ③ 左端的极限值与右端的函数值相等, 即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

# 左右连续的概念

## 定义 (左连续)

设存在  $\delta > 0$  使得函数  $f$  在  $(a - \delta, a]$  上有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a),$$

则称**函数  $f$  在点  $a$  处左连续**。

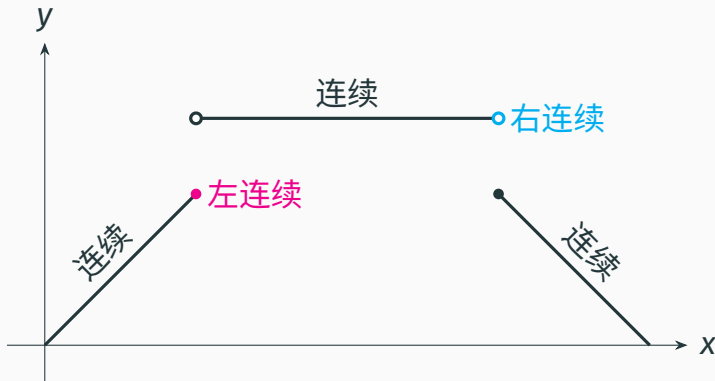
## 定义 (右连续)

设存在  $\delta > 0$  使得函数  $f$  在  $[a, a + \delta)$  上有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a),$$

则称**函数  $f$  在点  $a$  处右连续**。

# 连续、左连续、右连续图示



# 函数在区间上连续的概念

设  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $a < b$ , 设  $I$  表示区间  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b]$  中的任何一种。如果函数  $f$  满足

- ① 在开区间  $(a, b)$  上的每一点处都连续。
- ② 若  $a \in I$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .
- ③ 若  $b \in I$ , 则  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

则称**函数  $f$  在区间  $I$  上连续**。

连续的本质是求极限与求函数值可以交换顺序

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$$



# 用函数的连续性求极限

**例 1.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan e^{\sin x}$ .

**解.** 由函数  $\arctan x$ ,  $e^x$ , 以及  $\sin x$  的连续性可知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \arctan e^{\sin x} &= \arctan \left( \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \right) \\ &= \arctan e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x} \\ &= \arctan e^0 \\ &= \arctan 1 \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$



# 间断点的概念

设函数  $f$  在点  $a$  的某个去心邻域内有定义，若  $a$  不是函数  $f$  的连续点，即

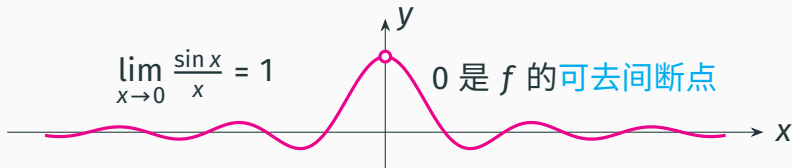
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a),$$

则称  $a$  为函数  $f$  的**不连续点**（或**间断点**），此时可能出现下面三种情况

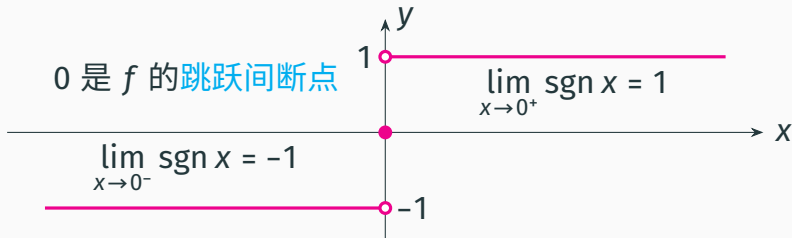
- 表达式  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  无意义，极限  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  不存在；
- 表达式  $f(a)$  无意义，即函数  $f$  在点  $a$  处无定义；
- 表达式  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  和  $f(a)$  都有意义，但二者的值不相等。

# 函数间断点举例

例 2. 考察函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  的间断点。

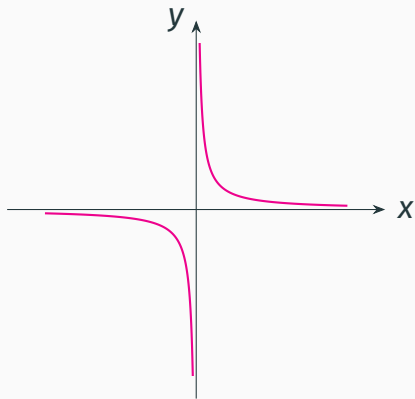


例 3. 考察函数  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$  的间断点。

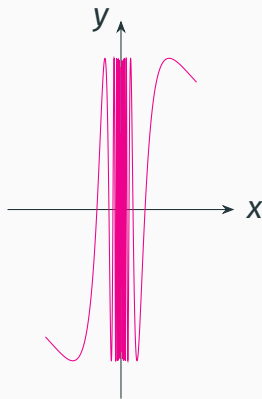


# 函数间断点举例

例 4. 考察极限  $f(x) = \frac{1}{x}$  和  $g(x) = \sin \frac{1}{x}$  的间断点.



无穷间断点



振荡间断点

# 间断点的分类

**第一类** 极限  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  都存在

**可去间断点** 两者相等，即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  存在。

**跳跃间断点** 两者不相等。

**第二类** 极限  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  至少有一个不存在。

# 连续函数的概念

## 定义 (连续函数)

设函数  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , 若对任意  $a \in D$ , 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - a| < \delta$  且  $x \in D$  时, 有  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , 则函数  $f$  为**连续函数**。

- 通俗地说, 连续函数的意思就是, 对于定义域内的任意一点  $a$ , 当自变量增量无限接近于 0 时, 对应的函数值增量也无限接近与 0.
- 为了可以考虑任何函数的连续性, 该定义增加了条件  $x \in D$ .