

# 数列的极限

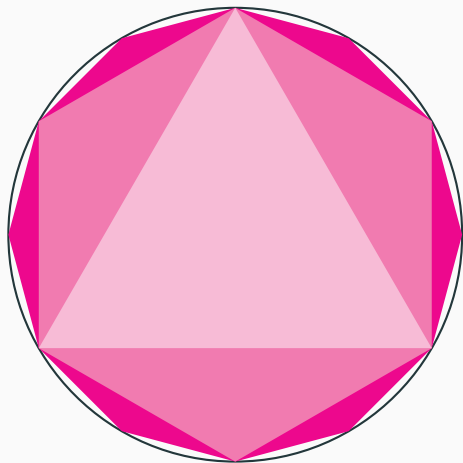
---

王二民 ( ✉ wagermn@126.com )

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

# 单位圆的面积



$$A_3 = 1.29904$$

$$A_6 = 2.59808$$

$$A_{12} = 3.00000$$

$$A_{24} = 3.10583$$

$$A_{48} = 3.13263$$

$$A_{96} = 3.13935$$

$$A_{192} = 3.14103$$

$$A_{384} = 3.14145$$

$$A_{768} = 3.14156$$

$$A_{1536} = 3.14158$$

$$A_{3072} = 3.14159$$

$$A_3, A_6, A_{12}, \dots, A_{3 \times 2^{n-1}}, \dots$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1. \dots \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1, 2]$$

$$\sqrt{2} = 1.4 \dots \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.4, 1.5]$$

$$\sqrt{2} = 1.41 \dots \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.41, 1.42]$$

$$\sqrt{2} = 1.414 \dots \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.414, 1.415]$$

无穷数列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

表示了无理数  $\sqrt{2}$ .

# 数列

## 定义 (无穷数列)

称定义在正整数上的函数  $x : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  为**无穷数列**。

通常记

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} x(n)$$

称为数列的**一般项**或**通项**。

数列  $x$  通常记为

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

也可以简记为  $\{x_n\}$ .

# 数列举例

1.  $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

一直为 1

2.  $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$

振荡

3.  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

无限变大

4.  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

无限接近于 0

5.  $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots$

无限接近于 0

6.  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

无限接近于 0

7.  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

无限接近于 1

8.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

无限接近于 0

9.  $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$

无限变大

# 数列极限

## 定义 (数列极限)

设  $\{x_n\}$  为一数列, 如果存在常数  $A \in \mathbb{R}$ , 使得当  $n$  无限增大时  $x_n$  无限接近于  $A$ , 则称  $A$  为此数列的**极限**, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

并称**数列**  $\{x_n\}$  **收敛**; 否则称**数列**  $\{x_n\}$  **发散**。

当数列  $\{x_n\}$  收敛时, 表达式  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  有意义, 当数列  $\{x_n\}$  发散时, 表达式  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  无意义。

数  $x_n$  与  $A$  的接近程度是  $|x_n - A|$ , 它越小,  $x_n$  与  $A$  就越接近。

# 数列极限的说法

表达式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

可以读为

- 数列  $\{x_n\}$  的收敛于  $A$ .
- 数列  $\{x_n\}$  的极限为  $A$ .
- $n$  趋于无穷时  $x_n$  趋于  $A$ .
- $n$  趋于无穷时  $x_n$  的极限为  $A$ .

# 数列极限理解举例

例 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

一般项  $\frac{n}{n+1}$  与极限值 1 的接近程度为  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{100} \quad \Longleftrightarrow \quad n > 100$$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{10^{10}} \quad \Longleftrightarrow \quad n > 10^{10}$$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{10^{1000}} \quad \Longleftrightarrow \quad n > 10^{1000}$$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

即，随着  $n$  的增大  $\frac{1+(-1)^n}{n}$  与 1 可以任意接近。



# 数列极限理解举例

例 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$ . 无限接近不一定是越来越接近

一般项  $\frac{1+(-1)^n}{n}$  与极限值 0 的接近程度为

$$\left| \frac{1+(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{|1+(-1)^n|}{n} \leq \frac{2}{n}$$

$$\left| \frac{1+(-1)^n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{100} \quad \Longleftarrow \quad n > 200$$

$$\left| \frac{1+(-1)^n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{10000} \quad \Longleftarrow \quad n > 20000$$

$$\left| \frac{1+(-1)^n}{n} - 1 \right| < \varepsilon > 0 \quad \Longleftarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon}$$

即，随着  $n$  的增大  $\frac{n}{n+1}$  与 1 可以任意接近。

# 常用数列极限举例

**例 3.** 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$ .

**例 4.** 设  $k > 0$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k}$ .

**解** 由幂函数的图象可知,  $k > 0$  时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

同理可知, 当  $k > 0$  时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0$$

# 等比数列的极限

**例 5.** 设  $q \in \mathbb{R}$ , 观察数列  $\{q^n\}$ , 并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ .

**解** 通过指数函数  $a^x$  的图像可知:

- 当  $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .
- 当  $|q| > 1$  时, 随着  $n$  无限增大,  $q^n$  也无限增大, 从而数列的极限不存在。
- 当  $q = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ .
- 当  $q = -1$  时, 随着  $n$  无限增大,  $q^n = (-1)^n$  一直在 1 和 -1 之间振荡, 从而数列的极限不存在。 ■

# 发散数列的例子

**无界型** 如

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$$

**振荡型** 如

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{8}, \dots$$

# 数列极限的唯一性

## 定理

如果数列  $\{x_n\}$  收敛，那么它的极限唯一，即

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B \end{array} \right\} \Rightarrow A = B.$$



# 收敛数列的有界性

## 定理

如果数列  $\{x_n\}$  收敛，那么数列  $\{x_n\}$  有界，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \implies \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_+, |x_n| \leq M.$$



**例 6.** 讨论数列  $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots$  的敛散性。

**发散**

## 推论

如果数列  $\{x_n\}$  无界，则数列  $\{x_n\}$  发散。

# 极限的保号性

## 定理

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 若  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时恒有  $x_n > 0$  (或  $x_n < 0$ )。



## 推论

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 若存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时恒有  $x_n \leq 0$  (或  $x_n \geq 0$ ), 则  $A \leq 0$  (或  $A \geq 0$ ) .

即使把  $x_n \geq 0$  改为  $x_n > 0$ , 也不能得到  $A > 0$ . 如, 设  $x_n = \frac{1}{n}$ , 则  $x_n > 0$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

# 数列的子列

设  $\{x_n\}$  是一个数列, 设  $k_i \in \mathbb{N}_+$ , ( $i = \mathbb{N}_+$ ), 且

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots$$

则称数列

$$x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots, x_{k_n}, \dots$$

为数列  $\{x_n\}$  的一个子列, 可记为  $\{x_{k_n}\}$ .

数列  $\{x_n\}$  的奇数项子列为  $\{x_{2n-1}\}$ , 偶数项子列为  $\{x_{2n}\}$ .



# 数列极限与其子列极限的关系

## 定理

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 如果数列  $\{y_n\}$  是数列  $\{x_n\}$  的一个子列, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ .

**例 7.** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 如果数列  $\{x_n\}$  中有无限项 1, 则  $A = 1$ .

## 推论

如果数列  $\{x_n\}$  有两个收敛子列且它们的极限不相等, 则数列  $\{x_n\}$  发散。

**例 8.** 证明数列  $x_n = (-1)^n$  发散。 考虑其奇数项子列与偶数项子列

## 作业：习题 1-2

- 1.(1), 1.(3), 1.(5), 1.(7),
- 2.(2).