分部积分法

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

如何把乘积的导数公式

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

用到不定积分中?

基本思想

由导数公式

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

可知不定积分公式

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) + C$$

从而对于左侧的两个不定积分而言，只要能计算出其中的一个就能计算出另一个，即

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

主要结论

定理 (分部积分法)

设函数 f 和 g 都连续可导，则

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

求原函数

求导

定理用微分的形式可表示为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x).$$

和换元积分法类似，分部积分法只是把一个积分转化成另一个积分，在这两个积分中，可以用较简单的一个计算另一个。

反函数的积分

设函数 f 的反函数为 f^{-1}. 则

$$y = f^{-1}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f(y)$$

从而由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}x = xy - \int x\,\mathrm{d}y \\
= xy - \int f(y)\,\mathrm{d}y \\
= xf^{-1}(x) - \left[\int f(y)\,\mathrm{d}y\right]_{y=f^{-1}(x)}
\end{aligned}$$

即从理论上讲，若函数 f 可积出，则反函数 f^{-1} 也可积出。

对数的积分

例 1. 求不定积分 $\int \ln x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \, d \ln x \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

■

反正弦函数的积分

例 2. 求不定积分 $\int \arcsin x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int x \, d \arcsin x \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \arcsin x + \int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \, d(1-x^2) \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

∎

反正切函数的积分

例 3. 求不定积分 $\int \arctan x \, \mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$
\begin{aligned}
\int \arctan x \, \mathrm{d}x &= x \arctan x - \int x \, \mathrm{d} \arctan x \\
&= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}(1+x^2) \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}
$$

■

幂函数与对数函数乘积的积分

例 4. 求不定积分 $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, \mathrm{d}x &= \int \ln x \cdot x \, \mathrm{d}x = \int \ln x \, \mathrm{d}\frac{x^2}{2} \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d} \ln x \\
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

∎

幂函数与对数函数乘积的积分

例 5. 求不定积分 $\int x^a \ln x \, \mathrm{d}x$.

解. 当 $a = -1$ 时

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, \mathrm{d}x = \int \ln x \, \mathrm{d} \ln x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

当 $a \neq -1$ 时

$$\begin{aligned}\int x^a \ln x \, \mathrm{d}x &= \int \ln x \, \mathrm{d} \frac{x^{a+1}}{a+1} = \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \, \mathrm{d} \ln x \\ &= \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \int \frac{x^a}{a+1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \frac{x^a}{(a+1)^2} + C.\end{aligned}$$

∎

幂函数与指数函数乘积的积分

例 6. 求不定积分 $\int xe^x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int xe^x \, dx &= \int x \, de^x = xe^x - \int e^x \, dx \\ &= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.\end{aligned}$$

■

例 7. 求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= \int x^2 \, de^x = x^2 e^x - \int e^x \, dx^2 \\ &= x^2 e^x - 2\int xe^x \, dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

■

幂函数与三角函数乘积的积分

例 8. 求不定积分 $\int x \cos x \, dx$.

解. 计算可得

$$\int x \cos x \, dx = \int x \, d \sin x = x \sin x - \int \sin x \, dx$$
$$= x \sin x + \cos x + C.$$

例 9. 求不定积分 $\int x^2 \sin x \, dx$.

解. 计算可得

$$\int x^2 \sin x \, dx = -\int x^2 \, d \cos x = -x^2 \cos x + \int \cos x \, dx^2$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

例 10. 求不定积分 $\int e^x \sin x \,dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \,dx &= \int \sin x \,de^x = e^x \sin x - \int e^x \,d\sin x\\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \,dx = e^x \sin x - \int \cos x \,de^x\\ &= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x \,d\cos x\\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \,dx\\ &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.\end{aligned}$$

■

正割立方的积分

例 11. 求不定积分 $\int \sec^3 x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \, d \tan x = \sec x \tan x - \int \tan x \, d \sec x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\
&= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C.
\end{aligned}$$

∎

经验：站在巨人的肩膀上

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

通常我们应按照如下顺序来选择分部积分中的函数 $g(x)$.

1. 指数函数：e^x, a^x.
2. 三角函数：$\sin x, \cos x, \tan x, \cdots$
3. 幂函数：x, x^2, x^a.
4. 反三角函数：$\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \cdots$
5. 对数函数：$\ln(x), \log_a(x)$.

和换元法一起用

例 12. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解. 取 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$, 从而

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t = 2t\mathrm{e}^t - 2\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ &= 2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t + C = 2(t-1)\mathrm{e}^t + C\\ &= 2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

∎

作业：习题 4–3

- 1.(4), 1.(10), 1.(12), 1.(13).