函数的极值与最值

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

最值与最值点

定义 (最小值、最小值点)

设 $f: D \to \mathbb{R}$, 若存在 $a \in D$ 使得

$$f(x) \geqslant f(a), \qquad x \in D.$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 的**最小值**，称 a 为函数 f 的**最小值点**。若存在 $b \in D$ 使得

$$f(x) \leqslant f(b), \qquad x \in D.$$

则称 $f(b)$ 为函数 f 的**最大值**，称 b 为函数 f 的**最大值点**。

- 最大值和最小值统称为**最值**，最大值点和最小值点统称为**最值点**。
- 最值和最值点都是与函数相关的整体性概念。

内部极值与极值点

定义 (内部极小值、内部极小值点)

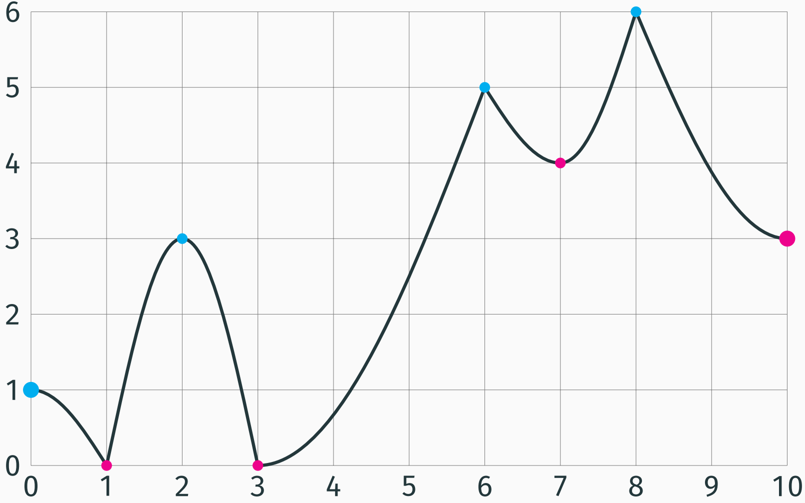
设 $f: D \to \mathbb{R}$, 若存在 $a \in D$ 及 $\delta > 0$ 使得:

$$f(x) \geqslant f(a), \qquad x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).$$

则称 $f(a)$ 为函数 $f(x)$ 的一个内部**极小值**，称 a 为与此极小值对应的内部**极小值点**。

- 把定义中的 $\geqslant$ 改为 $\leqslant$，则有**极大值**和**极大值点**的概念。
- 把定义中的 $\geqslant$ 改为 $>$，则有**严格极小值**和**严格极小值点**的概念。
- 把定义中的 $\geqslant$ 改为 $<$，则有**严格极大值**和**严格极大值点**的概念。
- 极大值和极小值统称为**极值**，极大值点和极小值点统称为**极值点**。类似地，有**严格极值**和**严格极值点**的概念。
- 极值和极值点的概念，是最值和最值点的局部化后形成的概念。

最值与极值、最值点与极值点



最值与极值、最值点与极值点的关系

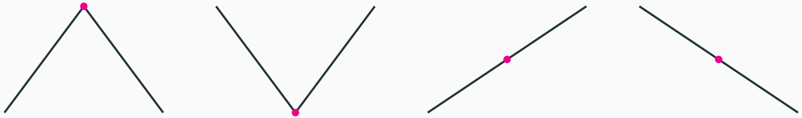
1. 极值和最值在函数的值域上，极值点和最值点在函数的定义域上。
2. 函数的最值和极值都可能不存在。
3. 函数的最大（小）值若存在则必唯一，但对应的最大（小）值点不一定唯一。
4. 最大（小）值一定是极大（小）值，最大（小）值点一定是极大（小）值点。
5. 最大值不小于最小值，但极大值可能小于极小值。
6. 极小值不小于最小值，极大值不大于最大值。
7. 若 $f(a)$ 是最大（小）值，则 a 一定最大（小）值点。
   若 $f(a)$ 是极大（小）值，则 a 不一定是极大（小）值点。

内部极值点的判断

定理 (内部极值点的充分条件)

设 $\delta > 0$, 函数 f 在开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 上有定义，

- 若 f 在 $(a - \delta, a]$ 上严格递增，在 $[a, a + \delta)$ 上严格递减，则 a 是 f 的一个严格极大值点；
- 若 f 在 $(a - \delta, a]$ 上严格递减，在 $[a, a + \delta)$ 上严格递增，则 a 是 f 的一个严格极小值点；
- 若 f 在 $(a - \delta, a + \delta)$ 上严格单调，则 a 不是 f 的极值点。



内部极值点的判断

定理（内部极值点的充分条件）

设函数 f 在点 a 处连续但不可导或 $f'(a) = 0$, $\delta > 0$.

- 若在 $(a-\delta, a)$ 上 $f' > 0$, 在 $(a, a+\delta)$ 上 $f' < 0$, 则 a 是 f 的一个严格极大值点;
- 若在 $(a-\delta, a)$ 上 $f' < 0$, 在 $(a, a+\delta)$ 上 $f' > 0$, 则 a 是 f 的一个严格极小值点;
- 若在 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 上恒有 $f' > 0$ 或恒有 $f' < 0$, 则 a 不是函数 f 的极值点。

由费马引理可知，若 a 是 f 的内部极值点，则要么 f 在 a 处不可导要么 $f'(a) = 0$.

求极值点练习

例 1. 求函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x}$ 的极值点。

解. 易知函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，当 $x \neq 0$ 时 f 可导且

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 $\frac{1}{4}$, 再结合不可导点 0, 从而

x	$(-\infty, -0)$	0	$(0, 1/4)$	$1/4$	$(1/4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	f 连续	$-$	0	$+$

所以由 f' 的符号可知函数 f 有唯一的严格极小值点 $\frac{1}{4}$, 没有极大值点。 ∎

求极值练习

例 2. 求函数 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$ 的极值。

解. 易知函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导且

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2.$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 0 和 1, 从而

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

所以由 f' 的符号可知 f 有唯一的极小值 $f(0) = 1$, 没有极大值。 ∎

用高阶导数判断极值点

定理

设函数 f 在 a 的某个邻域内可导，在 a 处二阶可导，且 $f'(a)=0$,

- 若 $f''(a)<0$, 则 a 是 f 的一个严格极大值点；
- 若 $f''(a)>0$, 则 a 是 f 的一个严格极小值点。

当 $f''(a)=0$ 时，没有确定的结论，如

- $f(x)=x^3$, 则 $f''(0)=f'(0)=0$ 且 0 不是 f 的极值点。
- $f(x)=x^4$, 则 $f''(0)=f'(0)=0$ 且 0 是 f 的极小值点。
- $f(x)=-x^4$, 则 $f''(0)=f'(0)=0$ 且 0 是 f 的极大值点。

求极值练习

例 3. 求函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的极值。

解. 求函数 $f(x)$ 的导数可得

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1).$$
$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2).$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 0 和 1, 因为 $f''(1) > 0$ 所以 1 是 f 的极小值点，因为在 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 上 $f' < 0$, 所以 0 不是 f 的极值点。

综合可得，f 有唯一的极小值 $f(1) = 0$, 没有极大值。 ■

当用高阶导数判断极值点失效时，可以用一阶导数判断极值点。

有界闭区间上的最值问题

例 4. 求函数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 在区间 $[-4, 2]$ 上的最值和最值点。

解. 求函数 $f(x)$ 的导数可得

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1).$$

解 $f'(x) = 0$ 可得驻点 -2 和 1.

由连续函数的最值定理可知，f 在区间 $[-4, 2]$ 上一定有最大值和最小值，且最值点只可能在驻点 -2 与 1 和区间端点 -4 与 2 上。所以比较函数 f 在这些点处的函数值

$$f(-4) = -31 \qquad f(-2) = 21 \qquad f(1) = -6 \qquad f(2) = 5,$$

可得函数的最大值为 21, 最大值点为 -2, 最小值为 -31, 最小值点为 -4. ∎

最值的存在性

定理 (最值原理)

有界闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值。

设函数 f 在区间 I 上存在最大值（或最小值），则可按下面的步骤求最大值点（或最小值点）：

- 求出 f 在 I 上的不可导点（假设仅有有限个）和驻点（假设仅有有限个）。
- 计算函数 f 在所求不可导点和驻点以及区间端点处的函数值。
- 比较以上点处的函数值，可得函数在 I 上的最大值点和最大值（或最小值点和最小值）。

有界闭区间上的最值问题

例 5. 求函数 $f(x) = x|x-1|$ 在区间 $[0,2]$ 上的最值和最值点。

解. 显然，函数 f 在 $[0,2]$ 上连续，且

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & x \in [0,1], \\ x^2 - x & x \in (1,2]. \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \in [0,1), \\ 2x - 1 & x \in (1,2]. \end{cases}$$

解 $f'(x) = 0$ 可得驻点 $\frac{1}{2}$,

比较函数 f 在 $0, \frac{1}{2}, 1, 2$ 处的函数值

$$f(0) = 0 \qquad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \qquad f(1) = 0 \qquad f(2) = 2,$$

可得函数的最大值为 2, 最大值点为 2, 最小值为 0, 最小值点为 0 和 1. ■

不用考察函数 f 在 $x = 1$ 处是否可导。

其它区间上的最值问题

例 6. 求 $f(x)=\frac{600x}{x-8}+3x$ 在区间 $(8,+\infty)$ 上的最值和最值点。

解. 求函数 $f(x)$ 的导数可得

$$f'(x)=\frac{600(x-8)-600x}{(x-8)^2}+3=\frac{3(x-48)(x+32)}{(x-8)^2}.$$

解 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=48$, 又 $x<48$ 时 $f'(x)<0$, $x>48$ 时 $f'(x)>0$, 从而 f 在 $(8,48]$ 上严格递减，在 $[48,+\infty)$ 上严格递增，所以 48 是 f 的唯一最小值点。

即函数 f 的最小值为 $f(48)=864$, 最小值点为 48, 没有最大值。 ∎

最值应用题举例

例 7. 在边长为 12 cm 的正方形纸板的四个角剪去同样大小的正方形后折成一个无顶的纸盒子。问剪去边长多大的正方形时盒子的容积最大?

解. 设剪去正方形的边长为 x cm, 盒子的容积为 $V(x)$ cm^3, 则

$$V(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x, \quad x \in (0,6).$$

对 $V(x)$ 求导可得

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x-2)(x-6).$$

解 $V'(x) = 0$ 得唯一驻点 $x = 2$, 当 $x < 2$ 时 $V'(x) > 0$, 当 $x > 2$ 时 $V'(x) < 0$, 从而 f 在 $(0,2]$ 上严格递增，在 $[2,6)$ 上严格递减，所以函数 V 有唯一最大值点 2. 即当四个角剪去边长为 2 cm 的正方形时盒子的容积最大。 ∎

作业：习题 3–5

- 1.(1), 1.(9),
- 6.(3),
- 12.

不能用单调性判断极值点的例子

对于连续函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0, \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

易知 0 是其极小值点，但 f 在 0 附近无限振荡，没有单调性。

用高阶导数判断内部极值点

定理 (极值点的充分条件)

设 $n \in \mathbb{Z}_+$, 函数 f 在点 a 处 n 阶可导，如果 $f^{(n)}(a) \neq 0$ 且 $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$，则

1. 当 n 是奇数时，a 不是极值点。
2. 当 n 是偶数时，a 是严格的极值点，且
   - 当 $f^{(n)}(a) > 0$ 时，a 是极小值点。
   - 当 $f^{(n)}(a) < 0$ 时，a 是极大值点。

设函数 f 满足定理中的条件，则从极值的角度看，当 $f^{(n)}(a) > 0$ 时 f 在 a 附近的图像和 x^n 在 0 附近的图像类似，当 $f^{(n)}(a) < 0$ 时 f 在 a 附近的图像和 $-x^n$ 在 0 附近的图像类似。

定理的证明

证明. 不失一般性，可设 $f(a)=0$, $f^{(n)}(a)>0$. 由题设可知

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}\qquad n\geqslant 1$$

由极限的局部保号性知 $x<a$ 时 $f^{(n-1)}(x)<0$, $x>a$ 时 $f^{(n-1)}(x)>0$, 从而由导数的符号与单调性的关系可知，存在 $\delta>0$ 使得

	$f^{(n-1)}$	$f^{(n-2)}$	$f^{(n-3)}$	$f^{(n-4)}$	$\cdots$	f
$(a-\delta,a)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$(-)^n$
a	0	0	0	0	$\cdots$	0
$(a,a+\delta)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$

考虑到 $f(a)=0$, 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 a 两侧异号，从而 a 不是极值点，当 n 为偶数时, $f(x)$ 在 a 两侧同为正，从而 a 是极小值点。

当 $f^{(n)}(a)<0$ 时考虑函数 $g(x)=-f(x)$ 即可。当 $f(a)\neq 0$ 时考虑函数 $g(x)=f(x)-f(a)$ 即可。从而定理得证。 ∎

一元函数最值点与极值点的关系

定理 (一元函数唯一的内部极值点是最值点)

设 f 是区间 I 上的连续函数，若 f 有唯一极值点 a, 则 a 是 f 在 I 上的最值点，且

- 若 a 是极小值点，则 f 在 a 的左侧严格单调递减，在 a 的右侧严格单调递增，从而 a 是 f 的最小值点。
- 若 a 是极大值点，则 f 在 a 的左侧严格单调递增，在 a 的右侧严格单调递减，从而 a 是 f 的最大值点。

定理的证明

证明. 不失一般性，设 a 是唯一的极小值点。

任取 $x \in I$ 且 $x < a$, 考虑函数 f 在 $[x, a]$ 上的最值点，因为 a 为 f 的唯一内部极值点，从而 f 在 $[x, a]$ 上的最值点必是区间端点，又 a 是极小值点，所以在 $[x, a]$ 上，a 是 f 的最小值点，x 是 f 的最大值点，从而 $f(x) \geqslant f(a)$. 当 $f(x) = f(a)$ 时 f 在 $[x, a]$ 上为常值，从而 (x, a) 上的点都是 f 的内部极值点，与已知条件矛盾，所以 $f(x) > f(a)$, 即函数 f 在 a 的左侧严格单调递减。

同理可证 f 在 a 的右侧严格单调递减。从而 a 是 f 在 I 上的唯一最小值点。 ∎

凹凸函数的最值点

下面只考虑区间上凹凸函数的极值点与最值点

- 凹函数的最大值点必是区间端点;
- 凹函数的极小值点必是最小值点;
- 凸函数的最小值点必是区间端点;
- 凸函数的极大值点必是最大值点。