# 极限存在准则　两个重要极限

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

# 夹逼准则（数列形式）

**定理 (夹逼准则)**

如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 满足

- 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得对于任意 $n > N$ 都有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

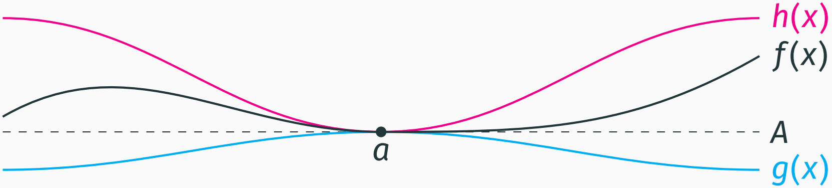
# 夹逼准则（函数形式）

**定理 (夹逼准则)**

若在 $a$ 的某个去心邻域内有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, 且

$$\lim_{x\to a} g(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} h(x) = A.$$

则 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

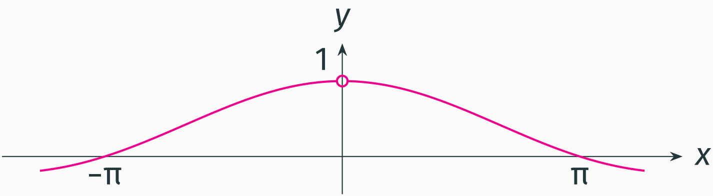



定理中的 $x \to a$ （对应的“在 $a$ 的某个去心邻域”），可以相应的换成 $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

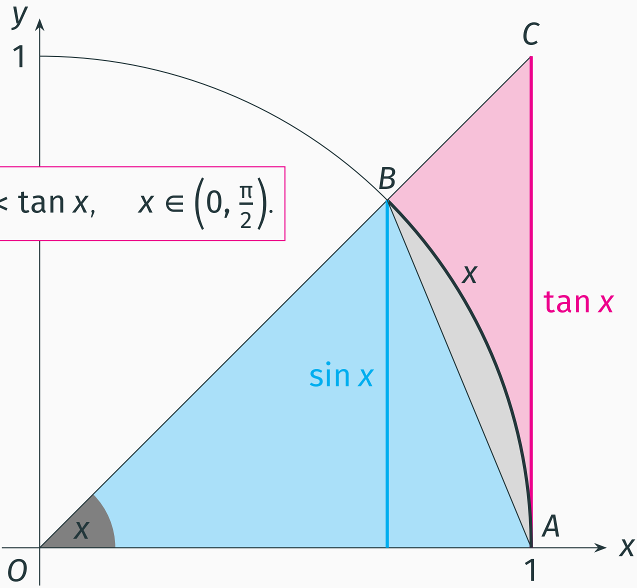
# 第一个重要极限

**定理 (第一个重要极限)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



# 三角不等式




$$\sin x < x < \tan x, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

# 第一个重要极限的证明

**证明**. 由图知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $S_{\Delta OAB} < S_{扇形OAB} < S_{\Delta OAC}$, 即

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

变形可知

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因为 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 都是偶函数，从而

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, 所以由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

# 正切函数相关的极限

**例** 1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

**解**. 由极限的四则运算规律和第一个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\\ &= 1\cdot\frac{1}{\cos 0}\\ &= 1.\end{aligned}$$

■

# 利用第一个重要极限计算极限

**例** 2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$.

**解**. 把 $\frac{\sin x^2}{x^2}$ 看成 $\frac{\sin u}{u}$ 与 $u = x^2$ 的复合。因为 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, 且 $x^2 \neq 0$, 所以由复合函数的极限运算规律可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1.$$

■

# 第一个重要极限的一般形式

**推论**

$$\lim \text{🐈} = 0 \implies \lim \frac{\sin \text{🐈}}{\text{🐈}} = 1.$$

因为表达式 $\frac{\sin \text{🐈}}{\text{🐈}}$ 有意义时，必有 $\text{🐈} \neq 0$, 所以这里省略了复合函数极限运算规律中的条件 $\text{🐈} \neq 0$.

- 因为 $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$.
- 因为 $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \ln x}{\ln x} = 1$.
- 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \sin x}{\sin x} = 1$.

# 利用第一个重要极限计算极限

**例** 3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

**解**. 由极限的四则和复合运算规律及第一个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\\ &= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\\ &= 3.\end{aligned}$$

■

类似地有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x} = a.$$

# 反三角函数相关的极限

**例** 4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

**解**. 令 $u=\arcsin x$, 则 $x=\sin u$, 从而

$$\frac{\arcsin x}{x}=\frac{u}{\sin u}.$$

即 $\frac{\arcsin x}{x}$ 可以看成 $\frac{u}{\sin u}$ 与 $u=\arcsin x$ 的复合。又当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$, 所以由复合函数的极限运算规律可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\sin u}{u}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}=1. \qquad \blacksquare$$

类似地有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1.$$

# 余弦函数相关的极限

**例** 5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

**解**. 化简，并由第一个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■

# 单调有界原理

设 $\{x_n\}$ 是一个数列，若

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$$

则称数列 $\{x_n\}$ 单调递增；若

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$$

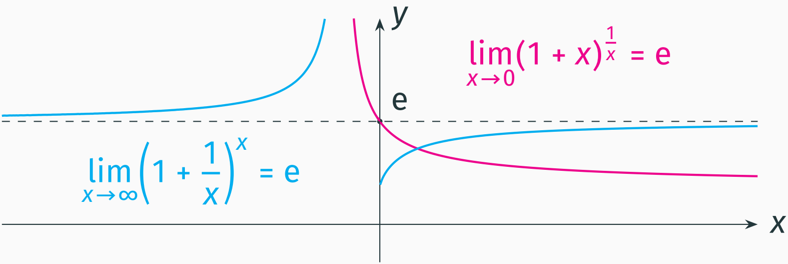
则称数列 $\{x_n\}$ 单调递减。

**定理**

单调有界数列必收敛。

- 如果数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。
- 如果数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

# 第二个重要极限相关的函数图象




特殊形式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

其中

$$e = 2.718281828459045235360287471352\cdots$$

称为**自然常数**。

# 第二个重要极限应用举例

**例** 6. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$.

**解**. 由第二个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{e}\end{aligned}$$

∎

# 第二个重要极限应用举例

**例** 7. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

**解**. 由极限的运算规律及第二个重要极限计算可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1} \\
&= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}
$$

■

# 第二个重要极限应用举例

**例** 8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

**解**. 由第二个重要极限计算可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2} \\
&= \left(\lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2} \\
&= e^{-2}.
\end{aligned}
$$

■

# 第二个重要极限的一般形式

**推论**

$$\lim \text{🐈} = 0 \implies \lim\left(1 + \text{🐈}\right)^{\frac{1}{\text{🐈}}} = e.$$

因为表达式 $(1 + \text{🐈})^{\frac{1}{\text{🐈}}}$ 有意义时，必有 $\text{🐈} \neq 0$, 所以这里省略了复合函数极限运算规律中的条件 $\text{🐈} \neq 0$.

主要特征是，被求极限表达式是幂指函数的形式，且

- 底数部分 $1 + \text{🐈} \to 0$,
- 指数部分 $\text{🐈} \to \infty$,
- 底数部分减去 1 的部分 🐈 与指数部分 $\frac{1}{\text{🐈}}$ 互为倒数。

# 对数函数相关的重要极限

**例** 9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

**解**. 由第二个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \ln e\\ &= 1.\end{aligned}$$

■

# 指数函数相关的重要极限

**例** 10. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$.

**解**. 令 $u=e^x-1$, 则 $x=\ln(u+1)$, 从而

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{u}{\ln(u+1)}$$

即 $\frac{e^x-1}{x}$ 可以看成 $\frac{u}{\ln(u+1)}$ 与 $u=e^x-1$ 的复合。又 $x\to0$ 时 $u\to0$, 所以由复合函数的极限运算规律可得

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln(u+1)}=\lim_{u\to0}\frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to0}\frac{\ln(u+1)}{u}}=1.\quad\blacksquare$$

# 指数函数相关的重要极限

**例** 11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

**解**. 利用极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 及 $a^x=e^{x\ln a}$ 计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x\ln a}-1)\ln a}{x\ln a}\\&=\ln a\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\\&=\ln a.\end{aligned}$$

■

一般地，对于任意 $a>0$ 都有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

# 幂函数相关的重要极限

**例** 12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x}$, 其中 $a \neq 0$.

**解**. 计算可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{a\ln(1+x)} - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left( \frac{e^{a\ln(1+x)} - 1}{a\ln(1+x)} \frac{a\ln(1+x)}{x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{a\ln(1+x)} - 1}{a\ln(1+x)} \lim_{x\to 0} \frac{a\ln(1+x)}{x} \\
&= a.
\end{aligned}$$

∎

一般地，对任意 $a \in \mathbb{R}$ 有

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

# 重要极限结论

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

# 作业：习题 1–6

- 1.(1), 1.(3), 1.(5),
- 2.(1), 2.(3).

# 夹逼准则

**定理 (夹逼准则)**

如果当 $x \to a$ 时 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, 且

$$\lim_{x\to a} g(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} h(x) = A,$$

则 $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

- 定理中 $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
- 把定理中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, 或 $x \to -\infty$, 结论依然成立。
- 数列极限中也有类似的结论。
- 当 $A = \infty$ 时结论不再成立，如设 $x_n = (-1)^n$, $y_n = -n$, $z_n = n$, 则 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ 且 $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, 但 $\lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty$.

# 无穷项和的极限

**例** 13. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

**解**. 对于任意 $k=1,2,\cdot,n$, 有

$$\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{n}{n^2+k}\leqslant\frac{n}{n^2+1}$$

从而对 $k=1,2,\cdots,n$ 求和可得

$$\frac{n}{n+1}\leqslant\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}.$$

计算可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1,$$

从而由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=1.$$

∎

# 实数的完备性

**公理（实数的完备性）**

设 $X \subset \mathbb{R}$, 若 $X$ 有上界，则必有最小上界，称为 $X$ 的上确界，记为 $\sup X$; 若 $X$ 有下界，则必有最大上界，称为 $X$ 的下确界，记为 $\inf X$.

当 $X$ 无上界时，也可以称 $X$ 的上确界为 $+\infty$, 记为 $\sup X = +\infty$, 当 $X$ 无下界时，也可以称 $X$ 的下确界为 $-\infty$, 记为 $\inf X = -\infty$.

**定理 (单调有界原理)**

若函数 $f(x)$ 在单侧极限过程中单调且有界，则对应的极限存在。

单侧极限过程指的是 $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$.

# 单调有界原理

**定理 (单调有界原理)**

若存在 $\delta > 0$ 使得函数 $f$ 在 $(a-\delta, a)$（或 $(\delta, +\infty)$）上单调且有界，则极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$）存在。

记函数 $f$ 在对应区间上值域为 $R$, 若 $f$ 单调递增，则极限值为 $\sup R$, 若 $f$ 单调递减，则极限值为 $\inf R$.

**定理 (单调有界原理)**

若存在 $\delta > 0$ 使得函数 $f$ 在 $(a, a+\delta)$（或 $(-\infty, -\delta)$）上单调且有界，则极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$）存在。

记函数 $f$ 在对应区间上值域为 $R$, 若 $f$ 单调递增，则极限值为 $\inf R$, 若 $f$ 单调递减，则极限值为 $\sup R$.

# 单调有界原理

- 单调有界原理只能用于单侧极限和数列极限，如设

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0,1) \\ x-1, & x \in (-1,0) \end{cases}.$$

虽然 $f(x)$ 单调递增且有界，但极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 并不存在。

# 第二个重要极限的证明

用二项式定理展开可得

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 3
\end{aligned}
$$

# 第二个重要极限的证明

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^{1}\frac{1}{n+1} + C_{n+1}^{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2} \\
&\quad + \cdots + C_{n+1}^{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n} + C_{n+1}^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + C_{n+1}^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&> x_n
\end{aligned}
$$

从而数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，由单调有界原理可知，数列 $\{x_n\}$ 收敛，并定义其极限为 e, 即

$$
\mathrm{e} \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.
$$

# 第二个重要极限的证明

对于任意实数 $x > 1$，有 $[x] \leqslant x < [x] + 1$, 从而

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

由自然常数 e 的定义计算可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \mathrm{e}$$

从而由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}$$

# 第二个重要极限的证明

由此计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}\frac{x}{1+x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-(x+1)} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{-(x+1)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(1+x)}\right)^{-(x+1)} = e\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

# 幂指函数的极限举例

**例** 14. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x}$.

**解**. 由幂指函数的极限公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right)^{\frac{2x}{x+1}}\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}}\\ &= e^2.\end{aligned}$$

∎

# 幂指函数的极限举例

**例** 15. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x}$.

**解**. 由幂指函数的极限公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-5}}\right)^{\frac{-10x}{x+3}}\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-5}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x}{x+3}}\\ &= e^{-10}.\end{aligned}$$

■

# 幂指函数的极限举例

**例** 16. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

**解**. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 和幂指函数的极限公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left((1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x-1}{x^2}}\\ &= e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

■