连续函数的性质

王二民（✉ wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

1. 有界闭区间上连续函数的最值性质

2. 区间上连续函数的介值性质

最值的概念

定义 (最小值、最大值)

设函数 f 在集合 D 上有定义, 若存在 $a \in D$, 使得对任意 $x \in D$ 都有

$$f(x) \geqslant f(a),$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 在集合 D 上的**最小值**。若存在 $a \in D$, 使得对任意 $x \in D$ 都有

$$f(x) \leqslant f(a),$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 在集合 D 上的**最大值**。

最值的概念

定义 (最小值、最大值)

设函数 f 在集合 D 上有定义, 若存在 $a \in D$, 使得对任意 $x \in D$ 都有

$$f(x) \geqslant f(a),$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 在集合 D 上的**最小值**。若存在 $a \in D$, 使得对任意 $x \in D$ 都有

$$f(x) \leqslant f(a),$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 在集合 D 上的**最大值**。

最大值和最小值统称为**最值**, 它们都是函数的整体性概念。

最值的概念

定义 (最小值、最大值)

设函数 f 在集合 D 上有定义, 若存在 $a \in D$, 使得对任意 $x \in D$ 都有

$$f(x) \geqslant f(a),$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 在集合 D 上的**最小值**。若存在 $a \in D$, 使得对任意 $x \in D$ 都有

$$f(x) \leqslant f(a),$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 在集合 D 上的**最大值**。

- 最大值和最小值统称为**最值**, 它们都是函数的整体性概念。
- 定义中，当 D 为函数 f 的定义域时，也称 $f(a)$ 为函数 f 的最值。

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

例 2. 设函数 $f(x) = x$, 则 f 在 $(0, 1)$ 上

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

例 2. 设函数 $f(x) = x$, 则 f 在 $(0, 1)$ 上没有最值。

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

例 2. 设函数 $f(x) = x$, 则 f 在 $(0, 1)$ 上没有最值。

例 3. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 f 在 $[1, +\infty)$ 上

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

例 2. 设函数 $f(x) = x$, 则 f 在 $(0, 1)$ 上没有最值。

例 3. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 f 在 $[1, +\infty)$ 上有最大值 1 但无最小值。

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

例 2. 设函数 $f(x) = x$, 则 f 在 $(0, 1)$ 上没有最值。

例 3. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 f 在 $[1, +\infty)$ 上有最大值 1 但无最小值。

例 4. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值为 M, 最小值为 m,

最值的存在性及其关系

例 1. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

例 2. 设函数 $f(x) = x$, 则 f 在 $(0, 1)$ 上没有最值。

例 3. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 f 在 $[1, +\infty)$ 上有最大值 1 但无最小值。

例 4. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $m \leqslant M$.

最值定理

定理 (最值定理)

设函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值，即存在 $x_m, x_M \in [a,b]$，使得对任意 $x \in [a,b]$ 都有

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M).$$

最值定理

定理 (最值定理)

设函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值，即存在 $x_m, x_M \in [a,b]$，使得对任意 $x \in [a,b]$ 都有

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M).$$

推论

若函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有界。

1. 有界闭区间上连续函数的最值性质

2. 区间上连续函数的介值性质

零点定理

定义 (函数的零点)

设 f 为一函数，如果 $f(a) = 0$, 则称 a 为函数 f 的**零点**。

零点定理

定义 (函数的零点)

设 f 为一函数，如果 $f(a) = 0$, 则称 a 为函数 f 的**零点**。

定理 (零点定理)

若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

零点定理

定义 (函数的零点)

设 f 为一函数，如果 $f(a) = 0$, 则称 a 为函数 f 的**零点**。

定理 (零点定理)

若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

定理中的条件 $f(a)f(b) < 0$ 也可表述为“$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号”。

零点定理

定义 (函数的零点)

设 f 为一函数，如果 $f(a) = 0$, 则称 a 为函数 f 的**零点**。

定理 (零点定理)

若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

- 定理中的条件 $f(a)f(b) < 0$ 也可表述为“$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号”。
- 定理的结论也可表述为“函数 f 在 (a, b) 上存在零点“。

如何证明方程根的存在性

例 5. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根。

如何证明方程根的存在性

例 5. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根。

证明. 定义函数

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1,$$

则 f 为初等函数，从而在闭区间 $[0, 1]$ 上连续。

如何证明方程根的存在性

例 5. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根。

证明. 定义函数

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1,$$

则 f 为初等函数，从而在闭区间 $[0, 1]$ 上连续。

由 $f(0) = 1$ 和 $f(1) = -2$ 可知 $f(0)f(1) < 0$, 从而由零点定理可知，在开区间 $(0, 1)$ 上存在 ξ 使得

$$f(\xi) = 0,$$

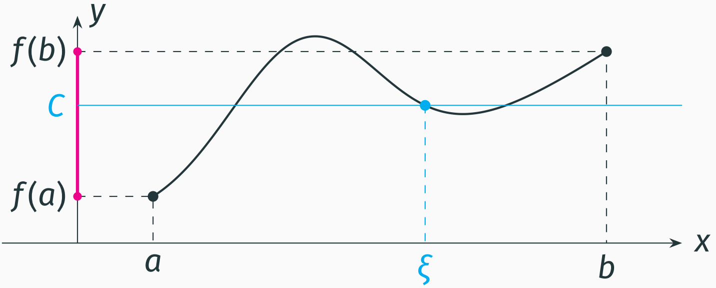
即方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根。 ∎

介值定理

定理 (介值定理)

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于任意在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 C, 都存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(\xi) = C.$$



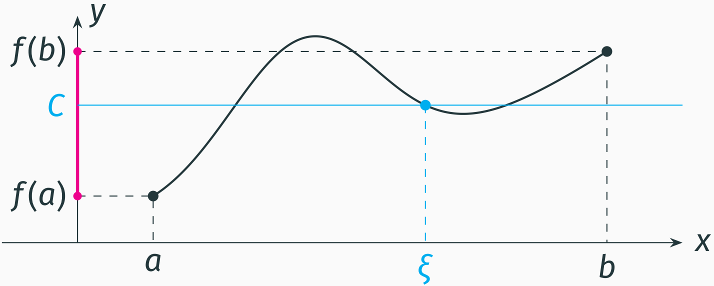
介值定理

定理 (介值定理)

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于任意在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 C, 都存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(\xi) = C.$$

介值定理描述了区间上连续函数的值域的性质。



有界闭区间上连续函数的值域

推论

设函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的值域为 $[m,M]$, 其中 m 和 M 分别为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值。

3. 最值定理

4. 介值定理

函数最值的存在性举例

例 6. 函数 $f(x) = \sin x$ 有最小值 -1 和最大值 1.

例 7. 设函数 $f(x) = x$, 则

- 函数 f 在 $[0, 1]$ 上有最小值 0 和最大值 1.
- 函数 f 在 $(0, 1)$ 上既没有最小值也没有最大值。

例 8. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则

- 函数 f 在 $(0, 1]$ 上有最小值 1 但没有最大值。
- 函数 f 在 $[1, +\infty)$ 上有最大值 1 但没有最小值。
- 函数 f 在 $(0, +\infty)$ 上既没有最小值也没有最大值。

最值定理中条件的说明

例 9. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则

- 函数 f 无最大值。
- 函数 f 的最小值为 0.
- 函数 f 无界。

定理中连续的条件不能去掉

例 10. 设函数 $f(x) = x$, 则函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上无最大值。

定理中区间的有界性不能去掉

例 11. 设函数 $f(x) = x$, 则函数 f 在 $(0, 1]$ 上无最小值。

定理中区间的闭性不能去掉

3. 最值定理

4. 介值定理

4.1 连续函数的值域

4.2 区间上有反函数的连续函数

4.3 根的个数

区间上连续函数的值域

推论

设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上连续，记函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 R, 则

$$[f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)] \subset R.$$

推论 (区间上连续函数的值域还是区间)

设函数 f 在区间 I 上连续，则函数 f 在区间 I 上的值域是区间。

例 12. 设 $a \in \mathbb{R}$, 求函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ 的值域。

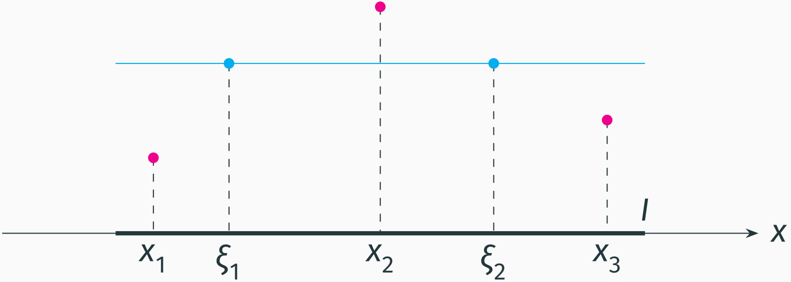
解. 不难知道 f 的定义域为 $\mathbb{R}$, 是初等函数，从而连续。对任意 $a \in \mathbb{R}$, 易知 f 无上界且无下界，从而 f 的值域为 $\mathbb{R}$. ∎

区间上有反函数的连续函数

定理 (区间上连续函数的反函数还是连续函数)

设函数 f 的定义域为区间 I, 若函数 f 连续，且有反函数 f^{-1}, 则函数 f 严格单调，且函数 f^{-1} 连续。

若函数 f 不单调，则存在定义域上的 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_2)$ 比 $f(x_1)$ 和 $f(x_3)$ 都大或都小。



如何说明零点的唯一性

例 13. 证明方程 $e^x + x = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有唯一解。

证明. 设函数 $f(x) = e^x + x$, 则 f 是初等函数，定义域为 $\mathbb{R}$, 从而 f 在区间 $[-1, 0]$ 上连续。

又因为 $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$, 所以方程 $f(x) = 0$ 即方程 $e^x + x = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 上一定有解。

又函数 f 在区间 $[-1, 0]$ 上严格单调，从而方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 上有唯一解。 ∎