

连续函数的运算

王二民 (✉ wagermn@126.com)

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

连续函数的运算

定理 (连续函数关于四则运算封闭)

设 f 和 g 在 a 处连续, 则

- 函数 $f + g$ 在 a 处连续,
- 函数 $f - g$ 在 a 处连续,
- 函数 $f \cdot g$ 在 a 处连续,
- 当 $g(a) \neq 0$ 时函数 $\frac{f}{g}$ 在 a 处连续。

🗨 定理可简记为“连续函数的和差积商还是连续函数”。

反函数的连续性

定理

如果函数 $f: I_x \rightarrow I_y$ 在区间 I_x 上单调增加（或减少）且连续，那么它的反函数 $f^{-1}: I_y \rightarrow I_x$ 在区间 I_y 上单调增加（或减少）且连续。

💡 定理中函数 f 的定义域为区间很重要。

利用定理可以证明反三角函数的连续性。如

- 因为函数 $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ 单调递增且连续，所以其反函数 $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 也单调递增且连续。
- 因为函数 $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ 单调递减且连续，所以其反函数 $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ 也单调递减且连续。

💡 类似地，可以证明 \arctan 和 arccot 的连续性。

复合函数的连续性

定理

设函数 g 在 a 处连续，且函数 f 在 $g(a)$ 处连续，则复合函数 $f \circ g$ 在 a 处连续。

💡 定理可简记为“连续函数的复合还是连续函数”。

例 1. 讨论函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的连续性。

解. 函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 可以看成是函数 $y = \sin u$ 和函数 $u = \frac{1}{x}$ 的复合，因为这两个函数都连续，所以它们的复合函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 也连续。 ■

💡 不需要求出函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的定义域，只需要知道函数 $y = \sin u$ 和 $u = \frac{1}{x}$ 是连续的即可。

初等函数的连续性

定理

基本初等函数都是连续函数。

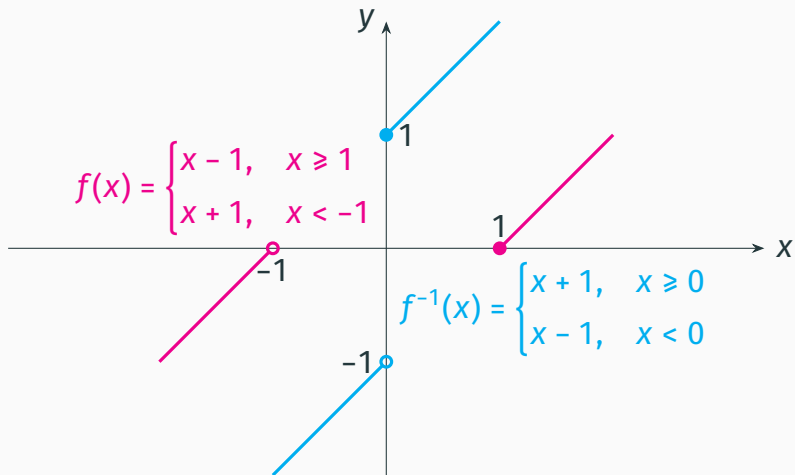
- 💡 定理的证明需要用到实数的公理化定义，比较麻烦，直观的从函数的图象上理解此结论即可。

定理

初等函数都是连续函数。

- 💡 用基本初等函数的连续性，和连续函数的加减乘除及复合都是连续函数即可证明此结论。

连续函数的反函数不一定是连续函数



函数 f 在其定义域上连续，且有反函数，但其反函数在 0 处不连续，导致这一现象的原因是函数 f 的定义域不是区间。