# 连续函数的运算

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

# 连续函数的运算

**定理 (连续函数关于四则运算封闭)**

设 $f$ 和 $g$ 在 $a$ 处连续，则

- 函数 $f+g$ 在 $a$ 处连续，
- 函数 $f-g$ 在 $a$ 处连续，
- 函数 $f\cdot g$ 在 $a$ 处连续，
- 当 $g(a)\neq 0$ 时函数 $\frac{f}{g}$ 在 $a$ 处连续。

定理可简记为“连续函数的和差积商还是连续函数”。

# 反函数的连续性

**定理**

设函数 $f$ 的定义域为区间且有反函数 $f^{-1}$，如果函数 $f$ 连续，则函数 $f$ 单调且反函数 $f^{-1}$ 连续。

定理中函数 $f$ 的定义域为区间很重要。

- 因为正弦函数 $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ 连续，所以反正弦函数 $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 也连续。
- 因为余弦函数 $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ 连续，所以反余弦函数 $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ 也连续。

类似地，反正切函数 arctan 和反余切函数 arccot 的连续性。

# 复合函数的连续性

**定理**

设函数 $g$ 在 $a$ 处连续，且函数 $f$ 在 $g(a)$ 处连续，则复合函数 $f\circ g$ 在 $a$ 处连续。

定理可简记为“连续函数的复合还是连续函数”。

**例 1.** 讨论函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性。

**解.** 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 可以看成是函数 $y=\sin u$ 和函数 $u=\frac{1}{x}$ 的复合，因为这两个函数都连续，所以它们的复合函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 也连续。 ■

不需要求出函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的定义域，只需要知道函数 $y=\sin u$ 和 $u=\frac{1}{x}$ 是连续的即可。

# 初等函数的连续性

**定理**

基本初等函数都是连续函数。

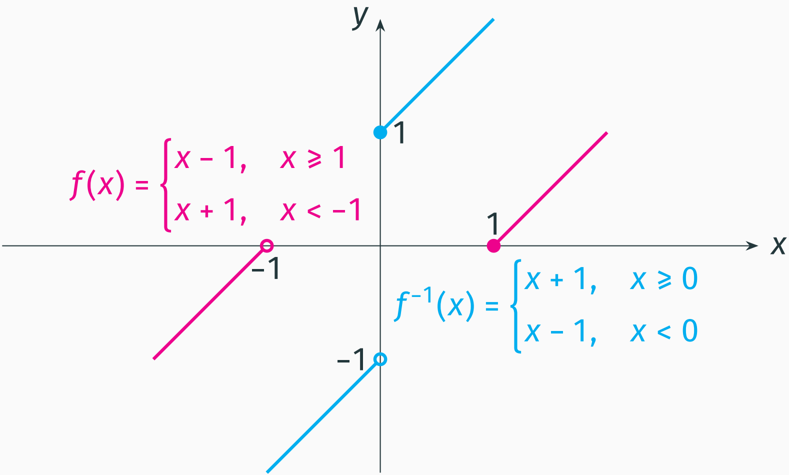
- 定理的证明需要用到实数的公理化定义，比较麻烦，直观的从函数的图象上理解此结论即可。

**定理**

初等函数都是连续函数。

- 用基本初等函数的连续性，和连续函数的加减乘除及复合都是连续函数即可证明此结论。

# 连续函数的反函数不一定是连续函数




函数 $f$ 在其定义域上连续，且有反函数，但其反函数在 0 处不连续，导致这一现象的原因是函数 $f$ 的定义域不是区间。