

函数图形的描绘

王二民 (✉ wagemn@126.com)

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

描绘函数图形的基本步骤

- ① 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，考察函数的奇偶性、周期性；
- ② 考察函数的一阶可导性（假设仅有有限个不可导点），求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 及其零点（假设仅有有限个），并得到函数的单调区间；
- ③ 考察函数的二阶可导性（假设仅有有限个不可导点），求出函数的二阶导数 $f''(x)$ 及其零点（假设仅有有限个），并得到函数的凹凸区间；
- ④ 以函数 f 的一阶、二阶不可导点和零点为分割点，把函数的定义域分成一个个开区间 I ，则 f' 和 f'' 在 I 符号不变，有单调性和凹凸性。
- ⑤ 求函数在每个开区间 I 的端点处的函数值（有定义的话）和单侧极限（依据第 2 步必存在或趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ ），并画出对应的点；

描绘函数图形的基本步骤（续）

- ⑥ 若 f 在 0 处有定义，画出点 $(0, f(0))$;
- ⑦ 若可能的话，求出函数的斜渐近线（水平和竖直渐近线在第 5 步中已经求出）;
- ⑧ 依据已画出的点、函数在每个区间 I 上的单调性和凹凸性以及函数的渐近线，画出函数在每个开区间 I 内的图形。

图象	增区间	减区间
凸区间		
凹区间		

函数图形描绘举例





例 1. 画出函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ 的图形。

解. 计算可得, 函数 f 在 \mathbb{R} 上二阶可导, 且

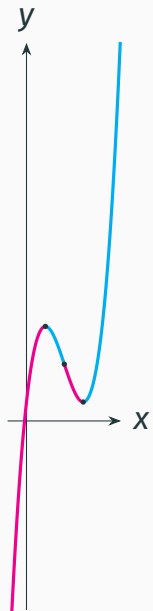
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3),$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

解 $f'(x) = 0$ 可得 $x = 1$ 或 $x = 3$, 解 $f''(x) = 0$ 可得 $x = 2$, 从而

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$		5		3		1	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
图象							

再由 $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 可做函数的图象。 ■



画函数图象举例





例 2. 画函数 $f(x) = x^4 - 4x^3$ 的示意图象。

解. 易知 f 在 \mathbb{R} 上二阶可导, 计算可得

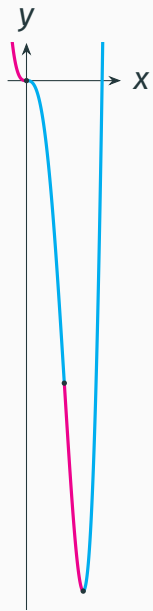
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

解 $f'(x) = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = 3$, 解 $f''(x) = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = 2$, 从而

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$		0		-16		-27	
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+
图象							

再由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 可做函数图象。







函数图形描绘举例

例 3. 画出函数 $f(x) = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形。

解. 函数 f 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, 二阶可导且

$$f'(x) = \frac{36(3-x)}{(x+3)^3}, \quad f''(x) = \frac{72(x-6)}{(x+3)^4},$$

解 $f'(x) = 0$ 得 $x = 3$, 解 $f''(x) = 0$ 得 $x = 6$, 从而

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	3	$(3, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f(x)$			4		$\frac{11}{3}$	
$f'(x)$	-	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+
图象						

再由 $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ 可做函数的图象。 ■

