洛必达法则

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

引例

例 1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

解. 由导数的定义可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= \tan'\frac{\pi}{4} = \left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= 2.\end{aligned}$$

■

导数是用极限定义的，从而导数就是极限。由于导数的运算法则较多，计算相对比较简单，所以用导数求极限是可行的。

洛必达法则

定理 (洛必达法则)

设函数 f 和 g 在开区间 (a,b) 上可导且 $g'(x) \neq 0$, 若

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}.$$

而且函数 f 和 g 还满足下面的两个条件之一

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ 且 $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$;
- $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$.

则

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

关于洛必达法则的一些说明

1. 当 $a = -\infty$ 时，极限过程 $x \to a^+$ 即 $x \to -\infty$.
2. 定理对极限过程 $x \to b^-$ 和 $x \to +\infty$ 也成立。
3. 利用极限之间的关系，适当修改定理中的区间，定理对双侧极限过程 $x \to a$ 和 $x \to \infty$ 也成立。
4. 洛必达法则主要处理 “$\frac{0}{0}$” 和 “$\frac{*}{\infty}$” 类型的极限。
5. 仅当导数的比值极限存在或趋于无穷时才能使用此法则。
6. 由 $g'(x) \neq 0$ 及导数的介值性质可知，单侧极限过程下，定理中的所有 ∞ 必可写成 $+\infty$ 或 $-\infty$, 但在双侧极限中，两侧可能一个是 $+\infty$, 一个是 $-\infty$, 所以仍然保留此形式。

定理可简记为：“函数比值的极限等于它们导数比值的极限”。

洛必达法则应用举例

例 2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$.

解. 由于

$$\lim_{x\to 1}\ln x = 0, \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0.$$

所以可以用洛必达法则试一试

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1. \qquad \blacksquare$$

只有到最后计算出结果，才算是验证了洛必达法则中“导数的商的极限存在或趋于无穷”的条件，在此之前都算是在尝试。

有理分式的极限

例 3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

■

因为求导比分解因式要简单，所以有理分式中“$\frac{0}{0}$”型的极限建议用洛必达法则计算。

洛必达法则应用举例

例 4. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{3x^2} = \frac{1}{6} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

■

注意不能用洛必达法则证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, 因为求 $\sin x$ 的导数时就用到了此极限。

洛必达法则应用举例

例 5. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\tan^2 x}$.

解. 由等价无穷小和洛必达法则（用上一题的结论）计算可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}. \qquad \blacksquare$$

在用洛必达法则时，要适当地结合其它极限计算方法。

例 6. 计算极限 $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos x}{1-\sin x}$.

解. 由初等函数的连续性可知

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\left[\frac{\cos x}{1-\sin x}\right]_{x=\pi}=-1. \qquad \blacksquare$$

在用洛必达法则时，一定要验证其条件。

例 7. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}$, 其中 $a>0$, $b>0$.

解. 由洛必达法则知

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{be^{bx}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)x^{a-2}}{b^2e^{bx}} \\
&\cdots \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}}{b^ne^{bx}}
\end{aligned}
$$

取 $n\geqslant a$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}=0$. ■

无穷大的数量级

例 8. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}$, 其中 $a>0$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}\\&=0.\end{aligned}$$

■

综合上题的结论可知，若 $a>0$, $b>0$, 则当 $x\to+\infty$ 时

$$\ln x \ll x^a \ll b^x.$$

洛必达法则不是万能的

例 9. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

若使用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

出现了循环，无法直接的到结果。

解. 由极限的四则运算规律计算可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

■

洛必达法则失效的例子

例 10. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$.

若用洛必达法则

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'} = \frac{1+\cos x}{1} = 1+\cos x$$

但当 $x \to \infty$ 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在，定理失效。

解. 由极限的四则运算规律、无穷小与有界量的乘积还是无穷小计算可得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cdot\sin x\right) = 1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x = 1. \quad \blacksquare$$

未定式

设同一极限过程下 f 和 g 的极限存在或趋于无穷，即

$$\lim f(x) = A, \quad \lim f(x) = B, \qquad A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

若对于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的四则运算和乘方运算，其极限结果是不确定的，就称为是**未定式**。

- $f(x) + g(x)$, 未定式形式：$\infty + \infty$.
- $f(x) \cdot g(x)$, 未定式形式：$0 \cdot \infty$.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$, 未定式形式：$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.
- $f(x)^{g(x)}$, 由 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ 及乘积的未定式形式可得，幂指未定式形式：0^0, ∞^0, 1^∞.

乘积未定式

利用无穷小与无穷大之间的关系，乘积未定式 $0\cdot\infty$ 可以转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，再进行计算。

例 11. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$.

解. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to0+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0. \qquad \blacksquare$$

$0\cdot\infty$ 型未定式转化为 $\frac{0}{0}$ 还是 $\frac{\infty}{\infty}$ 要视具体情况而定，没有经验时，需要试一下才知道，但通常会先试把简单的因式放到分母上。

乘积未定式举例

例 12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

和差未定式

例 13. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}\\&=0.\end{aligned}$$

■

$\infty-\infty$ 型未定式可试着化为积或商的未定式后再进行计算。

和差未定式

例 14. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$.

解. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$ 可知

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x + x^2) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)\right] = +\infty.$$ ■

当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 实在不能通分也没有公因式时，可以用恒等式

$$f(x) + g(x) = f(x)\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

类似可知

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^4 + ax^3 + cx^2 + dx + e\right) = +\infty.$$

幂指未定式举例

例 15. 求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

解. 由洛必达法则计算可得

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0.$$

从而

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = 1. \qquad \blacksquare$$

幂指未定式举例

例 16. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

解. 由洛必达法则计算可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1. \qquad \blacksquare$$

本题结论的一种特殊情况为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

幂指未定式举例

例 17. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

解. 计算可得

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right) = -\infty.$$

从而

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0. \qquad \blacksquare$$

- 当 $x \to 0^+$ 时 $\ln x \to -\infty$, $x \to 0$, 所以计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$ 时不能直接用洛必达法则。
- 实际上当 $x \to 0^+$ 时 $x \to 0$, $\frac{1}{x} \to +\infty$ 不是未定式，此时必有 $x^{\frac{1}{x}} \to 0$, 即 “$0^{+\infty} = 0$”。

作业：习题 3–2

- 1.(2), 1.(3), 1.(8), 1.(13), 1.(15).

洛必达法则应用举例

例 18. 计算极限 $\lim_{x\to1^-}\frac{\ln\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{\ln\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)} &= \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi}{2}x}{\tan\frac{\pi}{2}x}}{\frac{1}{x-1}} \\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{\pi}{\sin\pi x}}{\frac{1}{x-1}} \\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{\pi(x-1)}{\sin\pi x} = \lim_{x\to1^-}\frac{\pi}{\pi\cos\pi x} \\ &= -1.\end{aligned}$$

■

洛必达法则应用举例

例 19. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$.

解. 由洛必达法则知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\sec^2 x\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

■