无穷小与无穷大

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

无穷小的定义

定义 (无穷小)

如果 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的**无穷小**.

定义中的 $x \to a$ 可以换成 $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

定义 (数列无穷小)

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是 $n \to \infty$ 时的**无穷小**.

由极限的定义容易知道

$$\lim f(x) = 0 \iff \lim |f(x)| = 0.$$

即在某个极限过程下, $f(x)$ 时无穷小等价于 $|f(x)|$ 时无穷小。

无穷小举例

- $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, 从而 $\sin x$ 是 $x \to 0$ 时的无穷小。
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, 从而 $\sin x$ 不是 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时的无穷小。
- $\lim_{x \to \pi} \sin x = 0$, 从而 $\sin x$ 是 $x \to \pi$ 时的无穷小。
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, 从而 $\frac{1}{x}$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小。

在说无穷小时必须指出自变量的变化趋势

基本初等函数中的典型无穷小

1. $\lim 0 = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0,\ a < 0;\ \lim\limits_{x\to 0} x^a = 0,\ a > 0.$
3. $\lim\limits_{x\to 1}(x^a - 1) = 0,\ a \in \mathbb{R}.$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0,\ 0 < a < 1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0,\ a > 1.$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(a^x - 1) = 0,\ a > 0.$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0.$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} \tan x = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0.$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \lim\limits_{x\to 0} \arctan x = 0$

无穷小与一般极限的关系

定理 (无穷小与一般极限的关系)

$$\lim f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x), \quad \lim \alpha(x) = 0.$$

- 在某种极限过程下 $f(x)$ 的极限为 A 等价于 $f(x)$ 可以写成 A 加上一个同一极限过程下的无穷小。
- 定义中的 $x \to a$ 可以换成 $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. 数列极限中也有类似的结论。

定理成立的关键是 $f(x)$ 与 A 的接近程度与 $\alpha(x)$ 与 0 的接近程度相同，即

$$\alpha(x) = f(x) - A \implies |f(x) - A| = |\alpha(x) - 0|$$

无穷大的概念

如果当 x 无限接近且不等于 a 时，$|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的**无穷大**, 记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

如果当 x 无限接近且不等于 a 时，$|f(x)|$ 无限增大且 $f(x) > 0$, 则称 $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的**正无穷大**, 记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

如果当 x 无限接近且不等于 a 时，$|f(x)|$ 无限增大且 $f(x) < 0$, 则称 $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的**负无穷大**, 记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

类似地，可以定义 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ 时的无穷大、正无穷大、负无穷大，及数列无穷大。

无穷大

表达式 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ 只是无穷大的记号，读为

- 当 x 趋于 a 时 $f(x)$ 趋于无穷。
- $f(x)$ 是 x 趋于 a 时的无穷大。

按照极限的定义，此时 $f(x)$ 的极限不存在，从而也不能说 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限为无穷。

由定义不难得出

$$\lim f(x) = +\infty \implies \lim f(x) = \infty$$
$$\lim f(x) = -\infty \implies \lim f(x) = \infty$$

基本初等函数中的无穷大量

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} x^{-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} x^{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \cot x = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} \cot x = -\infty$$

铅直渐近线

定义 (铅直渐近线)

称直线 $x = a$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线，若

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

例 1. 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的铅直渐近线。

解. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 是基本初等函数，其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
又因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

所以曲线 $y = \frac{1}{x}$ 只有一条竖直渐近线，为 $x = 0$. ∎

无穷小与无穷大的关系

因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

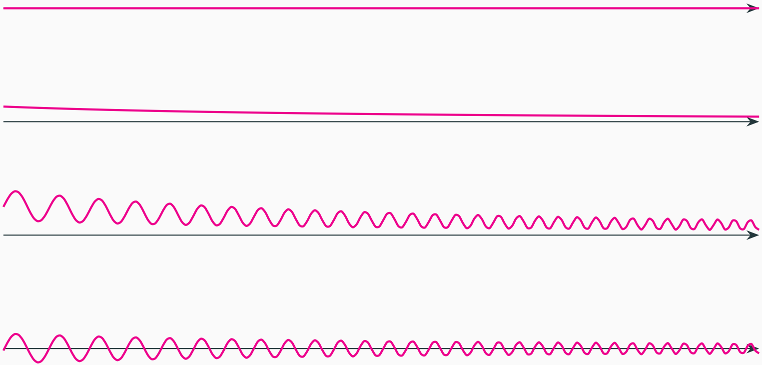
所以，在同一极限变化过程中

- 如果 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小;
- 如果 $f(x)$ 是无穷小且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

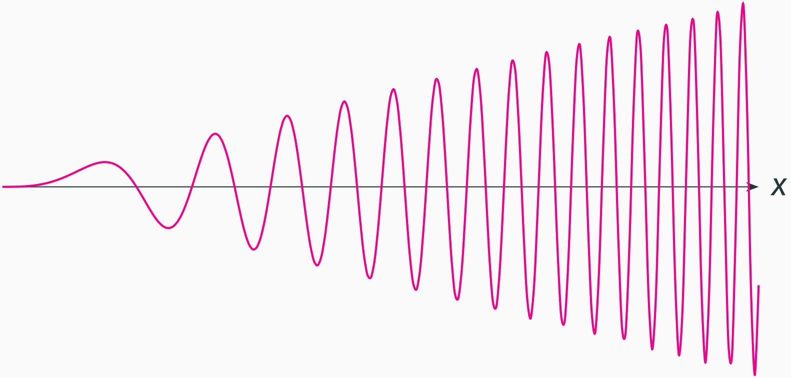
作业：习题 1–4

- 4.

趋于 0 的几种情况, 以 $x \to +\infty$ 为例



无穷大与无界



- 若 $x \to a$ 时 $f(x)$ 无界，$f(x)$ 不一定是 $x \to a$ 时的无穷大。
- 若 $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的无穷大，则当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 无界。

铅直渐近线

定义 (铅直渐近线)

称直线 $x = a$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线，若

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

例 2. 求曲线 $y = \ln x$ 的铅直渐进线。

解. 函数 $y = \ln x$ 是基本初等函数，其定义域为 $(0, +\infty)$. 又

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \infty,$$

所以曲线 $y = \ln x$ 只有一条竖直渐进线，为 $x = 0$. ∎