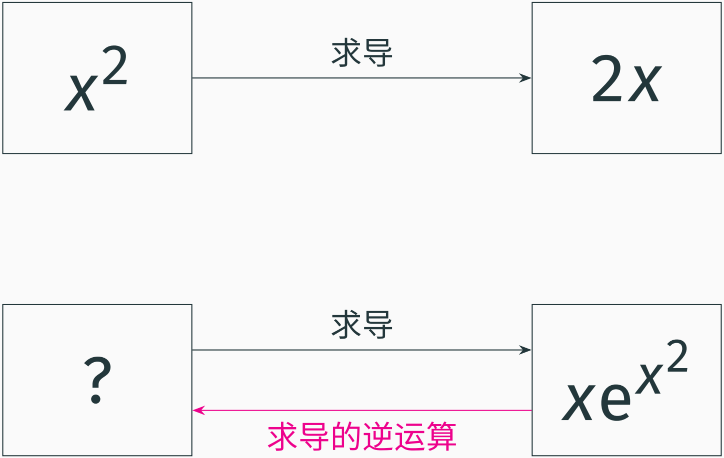
不定积分的概念与性质

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部


x^2
求导
$2x$
?
求导
xe^{x^2}
求导的逆运算

原函数

定义 (原函数)

设函数 f 在区间 I 上有定义，若存在函数 F 使得在 I 上

$$F'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则称函数 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**。

设函数 f 的定义域为 D, 若对任意区间 $I \subset D$, 函数 F 都是 f 在 I 上的一个原函数，则称 F 为 f 的一个原函数。

- 因为 $\left(x^2\right)' = 2x$, 所以 x^2 是 $2x$ 的一个原函数。
- 因为 $\left(x^2+1\right)' = 2x$, 所以 x^2+1 是 $2x$ 的一个原函数。
- 因为 $\left(\sin x\right)' = \cos x$, 所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数。

原函数的存在性与唯一性

定理 (连续函数一定有原函数)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则一定存在区间 I 上的函数 F 使得

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in I.$$

定理只是原函数存在的一个充分条件，不是必要条件。

若 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，则对任意常数 C 有

$$\big(F(x) + C\big)' = F'(x) = f(x), \qquad x \in I,$$

从而 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，所以原函数若存在必不唯一。

原函数之间的关系

定理

如果函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，则存在常数 C 使得

$$G(x) - F(x) = C, \qquad x \in I.$$

条件“在区间 I 上”不能去掉。如设

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{|x|}, \qquad G(x) = \frac{1}{x},$$

则 $F'(x) = G'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 但 $F(x) - G(x) = \frac{x}{|x|}$ 并不是常数。

推论

若 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $f(x)$ 在 I 上的任何一个原函数都可表示为 $F(x) + C$ 的形式。

不定积分的定义

定义 (不定积分)

已知函数 $f(x)$ 求其在任意定义区间上的原函数的运算称为**不定积分**，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 $\int$ 称为 **积分号**，f 称为 **被积函数**，x 称为 **积分变量**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为 **被积表达式**.

不定积分的结果可以看成是 $f(x)$ 的所有原函数的集合。

不定积分的计算

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 若对任意区间 $I \subset D$, 函数 $F(x)$ 都是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，则不难得到

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

其中 C 称为**积分常量**。

- 一定要保证 $F(x)$ 的定义域要和 $f(x)$ 的定义域一样。如：虽然 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 但 $\ln x$ 不是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数。
- 积分常量 C 在任何包含于 D 的区间 I 上都是常数，但它在 D 上取值不一定为常数。若 D 是两个不相交的开区间的并，则它在这两个开区间上可以取不同的常数。

求下列不定积分

例 1. 求 $\int x^2\,\mathrm{d}x$.

解. 因为 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, 所以 $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$. ■

例 2. 求 $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 因为 $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, 所以 $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$. ■

积分常量 C 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时可以取不同的常数。

例 3. 求 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 因为 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, 所以 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$. ■

求函数 f 的原函数 F 时，一定要保证 F 和 f 的定义域相同。

不定积分与微分和导数的关系

由定义不难得到，若函数 $f(x)$ 有原函数则

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$$

若函数 $F(x)$ 可导，则

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

若函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 的定义域相同且 $F' = f$, 则

$$\mathrm{d}\big(F(x) + C\big) = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

即求微分（或求导）和求不定积分是一对互逆的运算。

幂函数、指数函数的积分公式

$$\int k \, \mathrm{d}x = kx + C.$$

$$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1. \qquad \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C. \qquad \int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1. \qquad \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

三角函数相关的积分公式

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

反三角函数相关的积分公式

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

不定积分计算练习

$$\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + C = -\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + C$$

$$\int 2^x e^x\,\mathrm{d}x = \int (2e)^x\,\mathrm{d}x = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{(2e)^x}{1+\ln 2} + C$$

$$\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

不定积分是线性运算

定理 (不定积分是线性运算)

若 f 和 g 有原函数，则

$$\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若还有 $k \in \mathbb{R}$, 则

$$\int [kf(x)] = k\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

一般地，若 f 和 g 有原函数，$a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\int [af(x)+bg(x)]\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 4. 求不定积分 $\int (\cos x + e^x)\, dx$.

解. 由不定积分的线性性质可得

$$\begin{aligned}\int (\cos x + e^x)\, dx &= \int \cos x\, dx + \int e^x\, dx \\ &= \sin x + e^x + C.\end{aligned}$$

■

例 5. 求不定积分 $\int 2\sin x\, dx$.

解. 由不定积分的线性性质可得

$$\int 2\sin x\, dx = 2\int \sin x\, dx = -2\cos x + C.$$

■

不定积分练习

例 6. 求不定积分 $\int\left(2\mathrm{e}^x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\int\left(2\mathrm{e}^x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\mathrm{e}^x - 3\arcsin x + C.$$

∎

例 7. 求不定积分 $\int \sqrt{x}(x^2-5)\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\int \sqrt{x}(x^2-5)\,\mathrm{d}x = \int\left(x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x - 5\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

∎

不定积分练习

例 8. 求不定积分 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}x - 3\int \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C.
\end{aligned}$$

■

不定积分练习

例 9. 求不定积分 $\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x &= \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x \\ &= \tan x - x + C.\end{aligned}$$

■

例 10. 求不定积分 $\int \cot^2 x \,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \cot^2 x \,\mathrm{d}x &= \int (\csc^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \csc^2 x \,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x \\ &= -\cot x - x + C.\end{aligned}$$

■

不定积分练习

例 11. 求不定积分 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\left(1 - \cos x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \sin x\right) + C.
\end{aligned}$$

■

不定积分练习

例 12. 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$.

解. 计算可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -4\cot x + C.$$

■

练习

例 13. 求不定积分 $\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2x^3}{3} - x + 4\arctan x + C.
\end{aligned}
$$

■

不可积与积不出

不可积 原函数不存在。

积不出 原函数存在，但原函数不是初等函数。

常见的积不出例子

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \int \sin x^2\,dx \qquad \int \cos x^2\,dx \qquad \int x^x\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx \qquad k\in(-1,1).$$

作业：习题 4–1

- 2.(4), 2.(5), 2.(14), 2.(15), 2.(21), 2.(25).

原函数不一定存在

设 $F(x)$ 是函数 $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ 的一个原函数，则不难知道

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & x > 0 \\ -x + c_2 & x < 0 \end{cases}$$

由函数可导与连续的关系可知，函数 F 在 0 处连续，从而

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + c_1) = c_1$$

$$F(0) = \lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x + c_2) = c_2$$

所以 $c_1 = F(0) = c_2$, 记为 c, 则

$$F(x) = |x| + c$$

但 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导，从而 $F(x)$ 不是 $\mathrm{sgn}(x)$ 的原函数。从而 函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 没有原函数。

不连续但有原函数的例子

设函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

则 F 可导，且

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

因为极限 $\lim_{x\to 0}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$, 极限 $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 所以极限 $\lim_{x\to 0}\left(x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$ 不能存在，即 $F'(x)$ 在 0 处不连续。从而 $F'(x)$ 不连续，但其有原函数 $F(x)$.

不定积分练习

例 14. 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \\
&= \int \csc^2 x\, dx - \int \sec^2 x\, dx \\
&= -\cot x - \tan x + C.
\end{aligned}$$

■

不定积分练习

例 15. 求不定积分 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.
\end{aligned}$$

■

不定积分练习

例 16. 求不定积分 $\int \frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+2x+1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{(x^2+1)+2x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| + 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

■