**1.(1) 解.** 显然函数 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ 可导，且

$$y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x-3)(x+1),$$

解 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = 3$, 从而

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,3)$ | $3$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | $17$ | | $-47$ | |

从而函数 $y$ 的极大值为 17, 极小值为 $-47$. ■

- 不能只求出驻点不分析导数的符号就写结果。

**1.(9) 解.** 函数 $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且当 $x \neq -1$ 时

$$y' = -\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} < 0,$$

从而 $y$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，所以函数 $y$ 没有极值。 ■

- 注意函数 $y$ 在 $x = -1$ 时不可导。
- 需要用单调性或一阶导数在 $-1$ 两侧符号相同说明 $-1$ 不是极值点。

**6.(3) 解.** 显然函数 $y$ 在 $[-5,1]$ 上连续，且当 $x \in (-5,1)$ 时

$$y' = 1 + \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}},$$

解 $y' = 0$ 可得 $x = \dfrac{3}{4}$, 从而比较

$$y\big|_{x=-5} = \sqrt{6} - 5, \qquad y\big|_{x=\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}, \qquad y\big|_{x=1} = 1,$$

可得函数 $y$ 的最大值为 $\dfrac{5}{4}$, 最小值为 $\sqrt{6} - 5$. ■

- 求导数时，尽量把 $x$ 的范围指出来。

**12 解.** 由图可知

$$5 = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

从而

$$y = \left(5 - \frac{\pi x^2}{8}\right)\Big/ x = \frac{5}{x} - \frac{\pi x}{8}$$

设截面的周长为 $L(x)$m, 则

$$L(x) = x + 2y + \frac{1}{2}\pi x = x + \frac{\pi x}{4} + \frac{10}{x}, \qquad x \in \left(0, \sqrt{\frac{40}{\pi}}\right]$$

对函数 $L(x)$ 求导可得，当 $x \in \left(0, \sqrt{\frac{40}{\pi}}\right)$ 时

$$L'(x) = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{10}{x^2}, \qquad L''(x) = \frac{20}{x^3},$$

解 $L'(x) = 0$ 可得唯一驻点 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$, 且此时 $L'' > 0$, 从而 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 是 $L(x)$ 在定义区间上的唯一内部极值点且是极小值点，所以 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 是 $L(x)$ 在定义区间上的唯一最小值点。即当底宽为 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$m 时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省。 ■

💬 一定要说明极值点的唯一性，才能得到最值点的存在性。