函数的微分

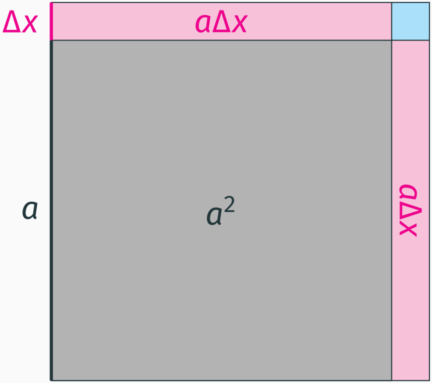
王二民（✉ wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

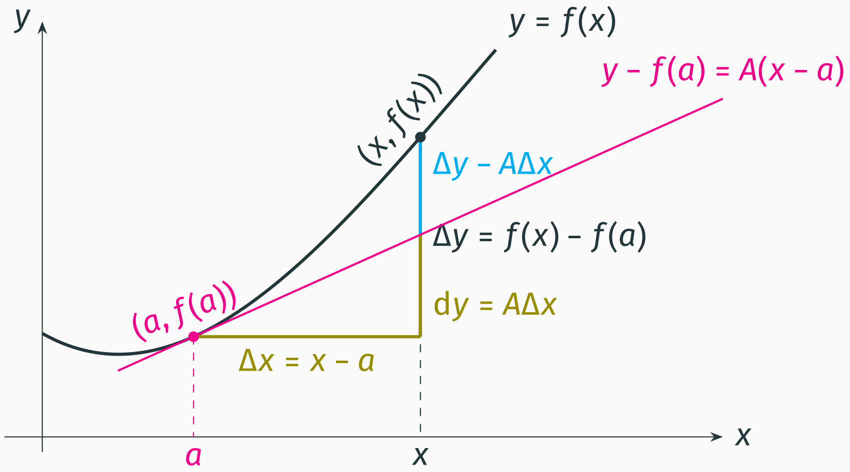
估计函数值的增量

$$(a+\Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2$$



当 $\Delta x \to 0$ 时 $(\Delta x)^2$ 是关于 Δx 的高阶无穷小, 从而 x^2 在 $x=a$ 附近的函数值增量主要由 $2a\Delta x$ 的大小决定。

函数的线性化



y
$y = f(x)$
$y - f(a) = A(x - a)$
$(x, f(x))$
$\Delta y - A\Delta x$
$\Delta y = f(x) - f(a)$
$dy = A\Delta x$
$(a, f(a))$
$\Delta x = x - a$
x
a
x

微分的定义

定义 (微分)

设函数 $y = f(x)$ 在 a 的某个邻域内有定义，当 x 有增量 Δx 时 y 的增量为 $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, 若存在常数 A 使得

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (\Delta x \to 0).$$

则称函数 f 在点 a 处**可微**，称 $A\Delta x$ 为函数 f 在点 a 处有增量 Δx 时的**微分**, 记为 $\mathrm{d}y\big|_{x=a}$，即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=a} = A\Delta x.$$

- 常数 A 和 Δx 无关，但一般跟 a 有关。
- $\mathrm{d}y$ 也称为 Δy 关于 Δx 的**线性主部**。
- $\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x), (\Delta x \to 0).$

一次函数的微分

例 1. 利用定义求函数 $y = ax + b$ 的微分。

解. 计算可得

$$\Delta y = \big(a(x + \Delta x) + b\big) - \big(ax + b\big) = a\Delta x$$

从而由微分的定义可知

$$\mathrm{d}y = a\Delta x. \qquad \blacksquare$$

若令 $a = 1$, $b = 0$, 则 $y = x$, 从而 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \Delta x$.

定理

自变量的微分等于自身的增量。

为了对称，通常把定义中的微分写成

$$\mathrm{d}y = A\,\mathrm{d}x.$$

二次函数的微分

例 2. 求函数 $y = f(x) = x^2$ 的增量 Δy 和微分 $\mathrm{d}y$, 并进一步计算 $x = 1$, $\Delta x = 0.1$ 时的增量 Δy 和微分 $\mathrm{d}y$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

显然 $(\Delta x)^2$ 是 Δx 趋于 0 时的高阶无穷小，从而

$$\mathrm{d}y = 2x\Delta x.$$

把 $x = 1$, $\Delta x = 0.1$ 代入上面的公式可得

$$\mathrm{d}y = 0.2 \qquad \Delta y = 0.21.$$

∎

微分中的系数 A

若函数 f 在点 a 处可微，则

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (\Delta x \to 0).$$

由无穷小的定义，可以等价为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x} = 0$$

化简可得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - A \right) = 0$$

由无穷小与一般极限的关系可得

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

导数与微分的关系

定理

函数 $y = f(x)$ 在点 a 处可微的充要条件是 $y = f(x)$ 在点 a 处可导，且

$$f'(a) = A \iff \mathrm{d}y\Big|_{x=a} = A\,\mathrm{d}x$$

从定理中可以得到微分的计算公式：

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 一元函数中可微与可导是等价的。
- 导数可表示为微分的商，简称为**微商**，即

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

微分的计算举例

例 3. 求函数 $y = \arctan \mathrm{e}^x$ 的微分。

解. 计算可得

$$\mathrm{d}y = \left(\arctan \mathrm{e}^x\right)' \mathrm{d}x = \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)'}{1 + \mathrm{e}^{2x}} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}. \qquad \blacksquare$$

例 4. 求函数 $y = \sin(2x + 1)$ 在 $x = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{d}x = 0.01$ 时的微分。

解. 计算可得

$$\mathrm{d}y = \left(\sin(2x + 1)\right)' \mathrm{d}x = 2\cos(2x + 1)\, \mathrm{d}x.$$

当 $x = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{d}x = 0.01$ 时可得

$$\mathrm{d}y = 2\cos(2x + 1)\, \mathrm{d}x = 2(\cos 0) \cdot 0.01 = 0.02. \qquad \blacksquare$$

微分的形式不变性

在函数 $y = f(x)$ 的微分的定义中，因为 x 为自变量，所以 $\mathrm{d}x = \Delta x$, 从而可以把微分 $A\Delta x$ 写成 $A\,\mathrm{d}x$. 如果 x 不是自变量而是中间变量，还能这样写吗?

设 $y = f(x)$, $x = g(t)$, 则 $y = f(g(t))$, 从而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y = \mathrm{d}\big(f(g(t))\big) &= f'(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = f'(g(t))\,\mathrm{d}x \\ &= f'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

所以，无论 x 是不是自变量，只要函数 f 可微，都有

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

称此性质为**微分的形式不变性**。

求微分时，无论是对自变量求还是对因变量求，方式都是一样的。

微分的运算法则

由微分的计算公式

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

及导数的四则运算法则不难得到

$$\mathrm{d}\,(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}\,(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}\,\frac{f}{g} = \frac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$$

由微分的形式不变性可知

$$\mathrm{d}\,(f \circ g) = \mathrm{d}f \circ g \cdot \mathrm{d}g$$

用微分的运算法则求微分

例 5. 设 $y = \sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \mathrm{d}\sin(2x+1) = \cos(2x+1)\,\mathrm{d}(2x+1)\\ &= \cos(2x+1)\cdot 2\,\mathrm{d}x = 2\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

∎

例 6. 设 $y = \ln(x^2 + \mathrm{e}^x)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \mathrm{d}\ln(x^2+\mathrm{e}^x) = \frac{\mathrm{d}(x^2+\mathrm{e}^x)}{x^2+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}\\ &= \frac{2x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^2+\mathrm{e}^x} = \frac{2x+\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

∎

函数在一点处的线性近似

若函数 $y = f(x)$ 在点 a 处可微，则

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + o(\Delta x), \quad (\Delta x \to 0).$$

记 $x = a + \Delta x$, 则有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad (x \to a).$$

去掉高阶无穷小部分 $o(x - a)$, 记

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

称为函数 f 在点 a 处的**一阶近似函数**，此时有

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

几何上直线 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线。

基本初等函数的一阶近似式

在 $x = 0$ 处，有下列的一阶近似式

$$
\begin{aligned}
(1+x)^a &\approx 1 + ax \\
\mathrm{e}^x &\approx 1 + x \\
\ln(1+x) &\approx x \\
\sin x &\approx x \\
\cos x &\approx 1 \\
\tan x &\approx x \\
\arcsin x &\approx x \\
\arctan x &\approx x
\end{aligned}
$$

求近似值

例 7. 用函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的一阶近似式求 $\sqrt{3.98}$ 的近似值。

解. 求 f 的导数可得 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 从而由 $f(4)=2$, $f'(4)=\frac{1}{4}$, 可知 $f(x)$ 在 $x=4$ 处的一阶近似式为

$$L(x)=f(4)+f'(4)(x-4)=2+\frac{x-4}{4}=1+\frac{x}{4}.$$

从而当 $x=3.98$ 时有

$$\sqrt{3.98}=f(3.98)\approx L(3.98)=1+\frac{3.98}{4}=1.995.$$

即 $\sqrt{3.98}\approx 1.995$. ■

实际上，$\sqrt{3.98}=1.9949937\cdots$, 所求近似值的误差小于 10^{-5}.

作业：习题 2–5