

分部积分法

王二民 (✉ wagermn@126.com)

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

如何把乘积的导数公式

$$\left[f(x)g(x) \right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

用到不定积分中？

基本思想

由导数公式

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

可知不定积分公式

$$\begin{aligned} f(x)g(x) + C &= \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

从而，右侧的两个不定积分，只要能计算出其中的一个就能计算出另一个，即

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

主要结论

定理 (分部积分法)

设函数 f 和 g 都连续可导, 则

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

求原函数

求导

定理用微分的形式可表示为

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x).$$

和换元积分法类似, 分部积分法只是把一个积分转化成另一个积分, 在这两个积分中, 可以用较简单的一个计算另一个。

反函数的积分

设函数 f 的反函数为 f^{-1} . 则

$$y = f^{-1}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f(y)$$

从而由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x) dx &= \int y dx = xy - \int x dy \\&= xy - \int f(y) dy \\&= xf^{-1}(x) - \left[\int f(y) dy \right]_{y=f^{-1}(x)}\end{aligned}$$

即若已知函数 f 的不定积分, 则可以用分部积分求出反函数 f^{-1} 的不定积分。

对数的积分

例 1. 求不定积分 $\int \ln x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \, d \ln x \\&= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\&= x \ln x - \int dx \\&= x \ln x - x + C \\&= x(\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$



反正弦函数的积分

例 2. 求不定积分 $\int \arcsin x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int x \, d \arcsin x \\&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\&= x \arcsin x + \int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \, d(1-x^2) \\&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$



反正切函数的积分

例 3. 求不定积分 $\int \arctan x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int x \, d \arctan x \\&= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \, d(1+x^2) \\&= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

幂函数与对数函数乘积的积分

例 4. 求不定积分 $\int x \ln x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int \ln x \cdot x \, dx = \int \ln x \, d\frac{x^2}{2} \\&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \, d \ln x \\&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, dx \\&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

幂函数与对数函数乘积的积分

例 5. 求不定积分 $\int x^a \ln x \, dx$.

解. 当 $a = -1$ 时

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int \ln x \, d \ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

当 $a \neq -1$ 时

$$\begin{aligned} \int x^a \ln x \, dx &= \int \ln x \, d \frac{x^{a+1}}{a+1} = \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \, d \ln x \\ &= \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \int \frac{x^a}{a+1} \, dx \\ &= \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C. \end{aligned}$$

幂函数与指数函数乘积的积分

例 6. 求不定积分 $\int x e^x dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.\end{aligned}$$



例 7. 求不定积分 $\int x^2 e^x dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \int x^2 d e^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$



幂函数与三角函数乘积的积分

例 8. 求不定积分 $\int x \cos x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, dx &= \int x \, d \sin x = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$



例 9. 求不定积分 $\int x^2 \sin x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= - \int x^2 \, d \cos x = -x^2 \cos x + \int \cos x \, dx^2 \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.\end{aligned}$$



例 10. 求不定积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, de^x = e^x \sin x - \int e^x \, d \sin x \\&= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int \cos x \, de^x \\&= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x \, d \cos x \\&= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx \\&= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.\end{aligned}$$



正割立方的积分

例 11. 求不定积分 $\int \sec^3 x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \, d \tan x = \sec x \tan x - \int \tan x \, d \sec x \\&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\&= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\&= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx \\&= \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

经验：站在巨人的肩膀上

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

通常我们应按照如下顺序来选择分部积分中的函数 $g'(x)$.

- ① 指数函数： e^x, a^x .
- ② 三角函数： $\sin x, \cos x, \tan x, \dots$
- ③ 幂函数： x, x^2, x^a .
- ④ 反三角函数： $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \dots$
- ⑤ 对数函数： $\ln x, \log_a x$.

和换元法一起用

例 12. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

解. 取 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 从而

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t \cdot 2t dt = 2 \int te^t dt \\&= 2 \int t de^t = 2te^t - 2 \int e^t dt \\&= 2te^t - 2e^t + C = 2(t - 1)e^t + C \\&= 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$



作业：习题 4-3

- 4, 5, 8, 13.

分部积分举例

例 13. 求不定积分 $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x d\sqrt{1-x^2} \\&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx \\&= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2} dx \\&= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C.\end{aligned}$$

分部积分举例

例 14. 求不定积分 $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 1} dx &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int x d\sqrt{x^2 + 1} \\&= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\&= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\&= x\sqrt{x^2 + 1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx - \int \sqrt{x^2 + 1} dx \\&= x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int \sqrt{x^2 + 1} dx \\&= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) + C.\end{aligned}$$

分部积分综合题举例

例 15. 求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx &= \int e^{2x}(\tan^2 x + 2 \tan x + 1) dx \\&= \int e^{2x}(\sec^2 x + 2 \tan x) dx \\&= \int e^{2x} \sec^2 x dx + \int e^{2x} 2 \tan x dx \\&= \int e^{2x} d \tan x + \int \tan x de^{2x} \\&= e^{2x} \tan x + C.\end{aligned}$$



分部积分综合题举例

例 16. 求不定积分 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{x+2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \\&= \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \int \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \\&= \int x \cdot \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx \\&= \int x d \tan \frac{x}{2} + \int \tan \frac{x}{2} dx \\&= x \tan \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

例 17. 求不定积分 $\int \sin \ln x \, dx$.

解. 取 $u = \ln x$, 则 $x = e^u$, $dx = e^u du$, 从而

$$\begin{aligned}\int \sin \ln x \, dx &= \int \sin u \cdot e^u \, du = \int e^u \sin u \, du \\ &= \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) + C \\ &= \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C.\end{aligned}$$

