定积分的换元法和分部积分法

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

把不定积分公式转化为定积分公式

设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

由微积分基本定理可知，若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = \Big[F(x) + C\Big]_a^b$$

对比可知，在所有被积函数在积分区间上连续的条件下，把不定积分公式转化为定积分公式的方法是

- 不定积分加上对应的积分上下限。
- 函数变成对应积分上下限时的增量。

定积分的换元法

定理 (定积分的换元法)

设函数 g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可导，且函数 f 在 g 在 $[a,b]$ 上的值域上可积，则

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

积分的上下限不是根据大小得到的，而是要两侧对应的。

与不定积分的换元法相比，区别在于

1. 换元后积分上下限发生了变化。
2. 换元后可直接计算出结果，不用再回代。

定积分换元法举例

例 1. 求定积分 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 设 $x=\sin t$, 则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 又当 $t=-\frac{\pi}{2}$ 时 $x=-1$, 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时 $x=1$, 当 $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时有

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos t|=\cos t,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

∎

定积分换元法举例

例 2. 求定积分 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $t=\sqrt{2x+1}$, 则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 又当 $x=0$ 时 $t=1$, 当 $x=4$ 时 $t=3$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 \left(t^2+3\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^3\\ &= \frac{22}{3}.\end{aligned}$$

■

定积分换元法举例

例 3. 求定积分 $\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $u = 4x + 1$, 则 $\mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}x$, 又当 $x = 0$ 时 $u = 1$, 当 $x = 2$ 时 $u = 9$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{4x+1}\cdot 4\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 \\ &= \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

∎

定积分换元法举例

例 4. 求定积分 $\int_1^2 \frac{dx}{(5x-3)^2}$.

解. 记 $u = 5x - 3$, 则 $du = 5\,dx$, 又当 $x = 1$ 时 $u = 2$, 当 $x = 2$ 时 $u = 7$, 所以

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{(5x-3)^2} &= \frac{1}{5}\int_1^2 \frac{1}{(5x-3)^2}\cdot 5\,dx \\
&= \frac{1}{5}\int_2^7 \frac{du}{u^2} \\
&= \frac{1}{5}\Big[-\frac{1}{u}\Big]_2^7 \\
&= \frac{1}{14}.
\end{aligned}$$

∎

定积分换元法举例

例 5. 求定积分 $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x \, \mathrm{d}x$.

解法一. 记 $u = \cos x$, 则 $\mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x$, 又当 $x = 0$ 时 $u = 1$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时 $u = 0$, 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot (-\sin x) \, \mathrm{d}x$$

$$= -\int_1^0 u^5 \, \mathrm{d}u = -\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^0 = \frac{1}{6}. \qquad \blacksquare$$

解法二. 计算可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, \mathrm{d} \cos x = -\left[\frac{\cos^6 x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}. \ \blacksquare$$

定积分换元法举例

例 6. 求定积分 $\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sqrt{(1-\sin^2 x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\sin x \\
&= \left[\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

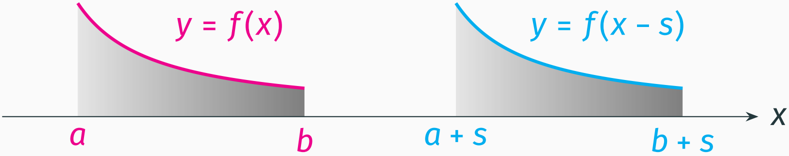
■

把积分区间平移到其它区间

定理

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，则对任意 $s \in \mathbb{R}$ 都有

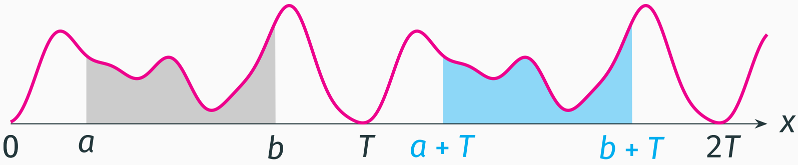
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+s}^{b+s} f(x-s)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$



令 $x = t - s$, 则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, 从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+s}^{b+s} f(t-s)\,\mathrm{d}t = \int_{a+s}^{b+s} f(x-s)\,\mathrm{d}x.$$

周期函数的积分



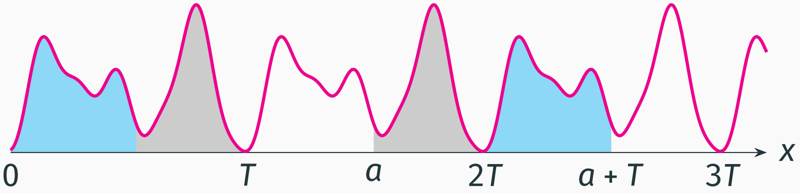
设 f 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的函数，且 f 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x+T)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

由归纳法易知，对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

周期函数在一个周期上的积分



设 f 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的函数，且 f 在 $[0, T]$ 上可积，则由前面的结论可知，对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_a^{a+T} f(x+b)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

即 f 在任意长度为周期 T 的区间上的积分都相等，从而对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\int_a^{a+nT} f(x+b)\,\mathrm{d}x = \int_0^{nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

周期函数积分举例

例 7. 求定积分 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x &= n\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= n\int_0^{\pi} |\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}n\int_0^{\pi} |\sin(x+\pi/4)|\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}n\int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}n\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}n.
\end{aligned}$$

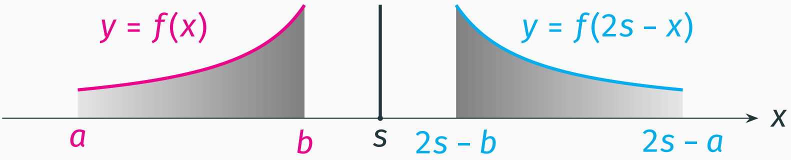
■

把积分区间对称到其它区间

定理

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，则对任意 $s \in \mathbb{R}$ 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2s-b}^{2s-a} f(2s-x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$



令 $x = 2s - t$, 则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, 从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{2s-a}^{2s-b} f(2s-t)\,\mathrm{d}t = \int_{2s-b}^{2s-a} f(2s-t)\,\mathrm{d}t = \int_{2s-b}^{2s-a} f(2s-x)\,\mathrm{d}x.$$

把积分区间换到对称的区间上

特殊地，在公式 (2) 中取 $s = 0$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

所以当函数 f 在区间 $[-a, a]$ 上可积时，有

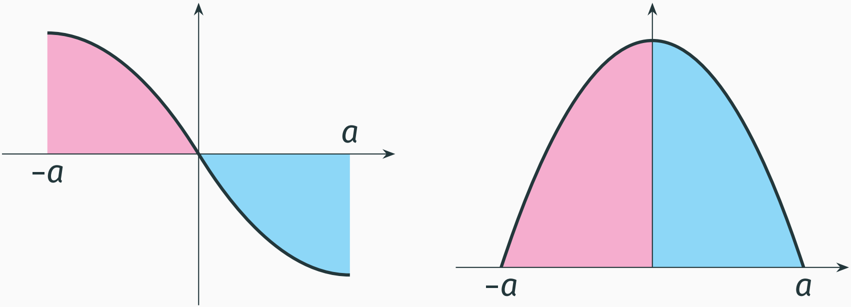
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \big(f(x) + f(-x)\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用对称性计算微积分

定理 (奇偶函数在对称区间上的积分)

设函数 f 在区间 $[-a, a]$ 上可积,

- 若 f 是 $[-a, a]$ 上的奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- 若 f 是 $[-a, a]$ 上的偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.



利用奇偶性计算定积分举例

例 8. 定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x^2} \sin x \, dx = 0$.

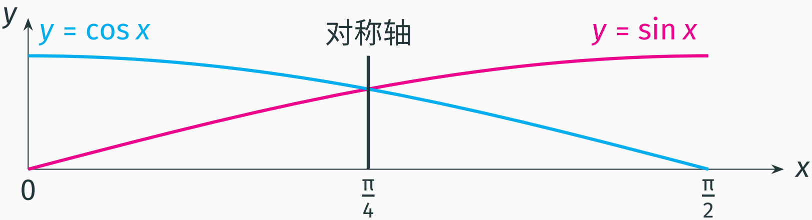
例 9. 计算定积分 $\int_{-1}^{1}(|x| + \sin x)x^2 \, dx$.

解. 由奇偶函数在对称区间上的积分定理可知

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(|x| + \sin x)x^2 \, dx &= \int_{-1}^{1} |x|x^2 \, dx + \int_{-1}^{1} x^2 \sin x \, dx \\ &= 2\int_{0}^{1} |x|x^2 \, dx \\ &= 2\int_{0}^{1} x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

∎

正弦和余弦的函数的积分



设函数 f 在闭区间 $[0,1]$ 上可积，在公式 (2) 中，取 $s=\frac{\pi}{4}$
则 $2s=\frac{\pi}{2}$, 从而

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

特殊地，取 $f(x)=x^n$, 则有

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

利用对称性求积分举例

例 10. 设函数 f 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

证明. 在公式 (2) 取 $s = \pi/2$, 则 $2s = \pi$, 从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

■

利用对称性求积分举例

例 11. 求不定积分 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解. 由 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 和上面的结论可知

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{-1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\cos x \\
&= \frac{\pi}{2}\Big[-\arctan\cos x\Big]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

∎

定积分的分部积分法

定理 (定积分的分部积分公式)

若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上连续可导，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

由微积分基本定理，可证明如下

$$\begin{aligned}\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b &= \int_a^b \mathrm{d}\big(f(x)g(x)\big)\\ &= \int_a^b \big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

定积分的分部积分法举例

例 12. 求定积分 $\int_0^1 x e^x \,dx$.

解. 计算可得

$$\int_0^1 x e^x \,dx = \int_0^1 x \,de^x = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \,dx$$
$$= e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

■

例 13. 求定积分 $\int_1^e \ln x \,dx$.

解. 计算可得

$$\int_1^e \ln x \,dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e x \,d\ln x$$
$$= e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1.$$

■

定积分的分部积分法举例

例 14. 求定积分 $\int_0^1 \arctan x \, dx$.

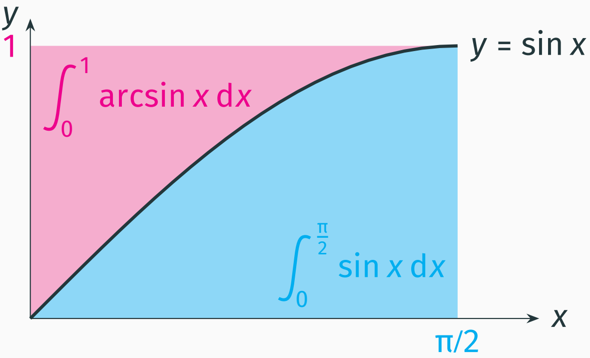
解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x \, dx &= \left[x \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 x \, d \arctan x \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

■

定积分的分部积分法举例

例 15. 求定积分 $\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{d}x$.



解. 由图可知

$$\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1.$$

■

定积分的分部积分法举例

例 16. 求定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2$, 从而 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$, 又当 $x=0$ 时 $t=0$, 当 $x=1$ 时 $t=1$, 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t \\
&= 2\left(\left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\left(\mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^t\right)_0^1\right) \\
&= 2(\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

■

例 17. 对于自然数 $n \in \mathbb{N}$, 记

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

证明当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

其中 $n!!$ 为双阶乘，定义为

$$n!! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ n \cdot (n-2)!!, & n > 2 \end{cases}$$

正弦 n 次方的定积分

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, \mathrm{d}\cos x = \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}\sin^{n-1} x \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right) \mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right) \mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n)
\end{aligned}
$$

从而 $n \geqslant 2$ 时，

$$
I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \implies I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}
$$

计算易知 $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, 所以

$$
\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \\
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}
$$

定积分换元法定理的证明

因为 g 在 $[a,b]$ 上连续可导，从而 g 在 $[a,b]$ 上连续，所以以 $g(a)$ 和 $g(b)$ 为端点的区间包含在 g 在 $[a,b]$ 上的值域内。

设函数 f 在 g 在 $[a,b]$ 上的值域上的一个原函数为 F, 再由函数 f 的连续性，用微积分基本定理可知

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

又由

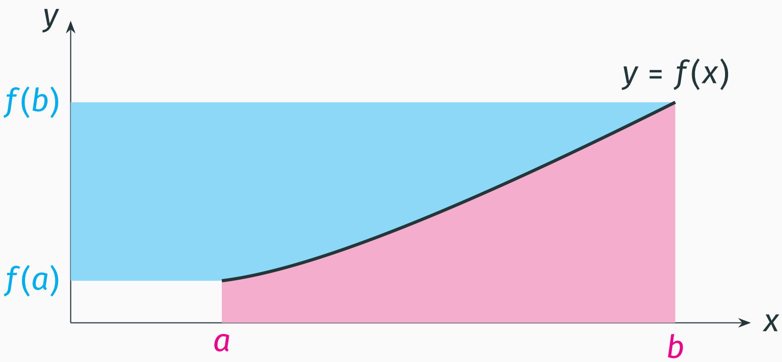
$$\Big[F(g(x))\Big]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

及函数 f 和 g' 的连续性可知

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

从而定理得证。

反函数的定积分



设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上严格单调递增，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = bf(b) - af(a).$$

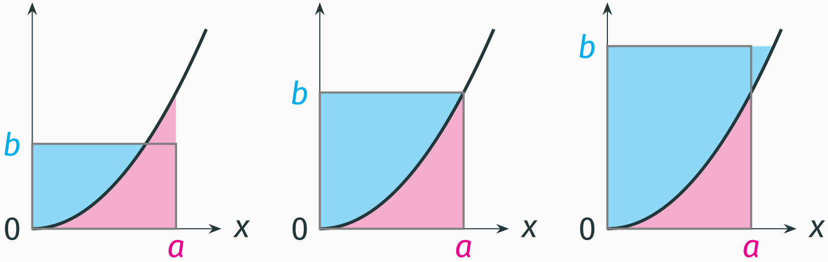
杨不等式

定理 (Young's inequality)

设 $c > 0$, 函数 f 在区间 $[0, c]$ 上连续且严格单调递增且 $f(0) = 0$, 则对任意 $a \in [0, c]$ 和 $b \in [0, f(c)]$ 有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

且仅当 $b = f(a)$ 时不等式取等号。



杨不等式

设 $c > 0$, 则 $f(x) = x^c$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调递增，其值域为 $[0, +\infty)$, 反函数为 $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{c}}$. 从而对任意正数 a 和 b 有

$$\begin{aligned} ab &\leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a x^c\,\mathrm{d}x + \int_0^b x^{\frac{1}{c}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{c+1}}{c+1} + \frac{b^{1+\frac{1}{c}}}{1+\frac{1}{c}} \end{aligned}$$

记 $p = 1 + c$, $q = 1 + \frac{1}{c}$, 则

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

消去 c 可知其中 $p > 1$, $q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

交流电的功率

设交流电的电压为

$$u(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right),$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^2\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A^2}{2}\big(1-\cos(2x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

即从功率上来讲交流电 $u(t)$ 相当于电压为 $\frac{A}{\sqrt{2}}$ 的直流电。