

函数的求导法则

王二民 (✉ wagermn@126.com)

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

导数公式回顾

$$(c)' = 0$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

求导是线性运算

定理

- 若函数 f 和 g 在 x 处都可导, 则 $f \pm g$ 在 x 处可导, 且

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

- 设 $c \in \mathbb{R}$, 若函数 f 在 x 处可导, 则 cf 在 x 处可导, 且

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

○ 设 $c \in \mathbb{R}$, 若函数 f 在 x 处可导, 则 $(f + c)'(x) = f'(x)$.

○ 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 若函数 f 和 g 在 x 处都可导, 则

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

○ 设 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, 若函数 f_1, \dots, f_n 在 x 处都可导, 则

$$(c_1 f_1 + \dots + c_n f_n)'(x) = c_1 f_1'(x) + \dots + c_n f_n'(x).$$

导数线性性质的应用

例 1. 求函数 $f(x) = 2x^5 + 3e^x + 5 \ln x$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^5 + 3e^x + 5 \ln x)' = 2(x^5)' + 3(e^x)' + 5(\ln x)' \\ &= 2 \cdot 5x^4 + 3e^x + 5 \cdot \frac{1}{x} = 10x^4 + 3e^x + \frac{5}{x}. \end{aligned}$$

例 2. 求函数 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 - 5x^2 + 3x - 7)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 3(x)' \\ &= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 6x^2 - 10x + 3. \end{aligned}$$

函数乘积的导数

定理 (乘积的导数公式)

若函数 f 和 g 在 x 处都可导, 则函数 $f \cdot g$ 在 x 处可导,
且

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

🗨 三个函数乘积的导数公式为

$$fgh = f'gh + fg'h + fgh'.$$

🗨 乘积的导数公式可以推广到有限个的形式

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$$

特殊地, 当 $f_1 = \cdots = f_n = f$ 时, 有 $(f^n(x))' = n f^{n-1}(x) f'(x)$.

导数计算举例

例 3. 求函数 $f(x) = \sin x \cos x$ 的导数。

解. 由函数乘积的导数公式可知

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x \cos x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x. \end{aligned}$$

例 4. 求函数 $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ 的导数。

解. 由函数乘积的导数公式可知

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x(\sin x - \cos x))' \\ &= (e^x)'(\sin x - \cos x) + e^x(\sin x - \cos x)' \\ &= e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) \\ &= 2e^x \sin x. \end{aligned}$$

多个函数乘积的导数

例 5. 求函数 $f(x) = x^3 e^x \cos x$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 e^x \cos x)' \\ &= (x^3)' e^x \cos x + x^3 (e^x)' \cos x + x^3 e^x (\cos x)' \\ &= 3x^2 e^x \cos x + x^3 e^x \cos x + x^3 e^x (-\sin x) \\ &= e^x ((x^3 + 3x^2) \cos x - x^3 \sin x). \end{aligned}$$



函数商的导数

定理 (商的导数公式)

若函数 f 和 g 在 x 处都可导且 $g(x) \neq 0$, 则函数 $\frac{f}{g}$ 在 x 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

特殊地, 当 $f(x) = 1$ 时有

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

正切函数的导数

例 6. 求函数 $f(x) = \tan x$ 的导数。

解. 利用函数商的导数公式可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x. \end{aligned}$$

💡 利用同样的方法可以得到

$$(\cot x)' = -\csc^2 x.$$

正割函数的导数

例 7. 求函数 $f(x) = \sec x$ 的导数。

解. 利用函数商的导数公式可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' \\ &= -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \sec x \tan x. \end{aligned}$$

💡 利用同样的方法可以得到

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

导数的计算

例 8. 求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

例 9. 求函数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ 的导数。

解. 计算可得

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x} \right)' = \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

反函数的导数

定理 (反函数的导数)

若函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 上可导且 $f'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{f(y) \mid y \in I_y\}$ 上可导, 且

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

💡 定理的结论用变量形式可写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

💡 定理只是反函数可导的充分条件, 而非充要条件。如函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 0 处不可导, 但其反函数 $f^{-1}(x) = x^3$ 在 $f(0) = 0$ 处可导。

反正弦函数的导数

反正弦函数 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是正弦函数 $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ 的反函数。正弦函数 $x = \sin y$ 的导数为 $\frac{dx}{dy} = \cos y$, 当 $\cos y \neq 0$ 时 $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 且

$$0 < \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

所以当 $x \in (-1, 1)$ 时反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

🗨 函数 $\arcsin x$ 仅在 $(-1, 1)$ 上可导, 在 -1 和 1 两点不可导。

反余弦函数的导数

反余弦函数 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ 是余弦函数 $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ 的反函数。余弦函数 $x = \cos y$ 的导数为 $\frac{dx}{dy} = -\sin y$, 当 $-\sin y \neq 0$ 时 $y \in (0, \pi)$ 且

$$0 < \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

所以当 $x \in (-1, 1)$ 时反余弦函数 $y = \arccos x$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

即

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

 函数 $\arccos x$ 仅在 $(-1, 1)$ 上可导, 在 -1 和 1 两点不可导。

反正切函数的导数

例 10. 求反正切函数 $\arctan x$ 的导数。

解. 函数 $\arctan x$ 的反函数是 $\tan x$, 且 $\tan' x = \sec^2 x$, 所以

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}.$$

由 $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ 可知

$$\sec^2(\arctan x) = 1 + \tan^2 \arctan x = 1 + x^2.$$

所以

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

🗨 同理可得 $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}.$

基本初等函数的导数

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

复合函数的导数

定理 (链式法则)

如果函数 g 在点 x 处可导, 函数 f 在点 $g(x)$ 处可导, 则函数 $f \circ g$ 在点 x 处可导且

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

🗨 定理的结论也可记为

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

🗨 若定理中 f 和 g 都是可导函数, 则有 $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

🗨 若记 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则定理的结论可表示为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

复合函数求导举例与练习

例 11. 求函数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ 的导数。

解. 记 $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 + 1$, 则函数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ 可以看成它们两个的复合, 从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad \blacksquare$$

例 12. 求函数 $y = e^{\cos x}$ 的导数。

解. 记 $y = e^u$, $u = \cos x$, 则函数 $y = e^{\cos x}$ 可以看成它们两个的复合, 从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = e^u \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x. \quad \blacksquare$$

复合函数求导举例与练习

例 13. 求函数 $y = \sin x^2$ 的导数。

解. 由复合函数的求导公式可知

$$\begin{aligned}y' &= (\sin x^2)' = (\sin' x^2) \cdot (x^2)' \\&= (\cos x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2.\end{aligned}$$



例 14. 求函数 $y = \sin^2 x$ 的导数。

解. 由复合函数的求导公式可知

$$\begin{aligned}y' &= ((\sin x)^2)' = (2 \sin x) \cdot (\sin x)' \\&= 2 \sin x \cos x = \sin 2x.\end{aligned}$$



复合函数求导练习

例 15. 求函数 $y = \ln(-x)$ 的导数。

解. 由复合函数的求导公式可知

$$\begin{aligned}y' &= (\ln(-x))' = \ln'(-x) \cdot (-x)' \\&= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

再由 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 可知

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

更一般地，若函数 f 非零且可导，则

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

多个函数复合的情况

例 16. 求函数 $y = \ln \sin e^x$ 的导数。

解. 利用复合函数的导数公式可得

$$\begin{aligned} y' &= (\ln \sin e^x)' = \frac{1}{\sin e^x} \cdot (\sin e^x)' = \frac{1}{\sin e^x} \cdot (\sin e^x)' \\ &= \frac{1}{\sin e^x} \cdot \cos e^x \cdot (e^x)' = \frac{1}{\sin e^x} \cdot \cos e^x \cdot e^x \\ &= e^x \cot e^x. \end{aligned}$$

若 $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$, 且 f, g, h 都可导, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

或

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

复合函数求导练习

例 17. 求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + c})$ 的导数。

解. 利用复合函数的导数公式可得：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} (x + \sqrt{x^2 + c})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + c}} (x^2 + c)' \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} \frac{x + \sqrt{x^2 + c}}{\sqrt{x^2 + c}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}}. \end{aligned}$$

复合函数求导练习

例 18. 求函数 $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ 的导数。

解. 利用复合函数的导数公式可得：

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$



作业：习题 2-2

- $2.(5), 2.(10),$
- $6.(3), 6.(8),$
- $7.(2), 7.(7).$