不定积分的换元法

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

如何把复合函数的导数公式

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))g'(x)$$

用于不定积分中?

第一换元法的思路

若

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

则

$$F'(x) = f(x),$$

从而对任意可导函数 $g(x)$ 都有

$$\left[F(g(x))\right]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

从而

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=g(x)}.$$

主要定理

定理 (第一换元法)

若函数 f 有原函数，函数 g 可导，则

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=g(x)}.$$

令 $u = g(x)$, 则 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, 从而

$$f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(u)\,\mathrm{d}u.$$

令 $u = g(x)$, 则

$$f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x))\,\mathrm{d}g(x) = f(u)\,\mathrm{d}u.$$

第一换元法

应用第一换元法时

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=g(x)}.$$

其核心步骤是

$$h(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x))\,\mathrm{d}g(x) = f(u)\,\mathrm{d}u$$

所以第一换元法又称**凑微分法**。

要想凑出其中的 f 和 g, 除了经验外，主要靠观察等式

$$h(x) = f(g(x))g'(x)$$

右侧的特征

- 复合函数项 $f(g(x))$.
- 导数关系，函数 $g(x)$ 和 $g'(x)$ 同时出现。

一个简单的例子

例 1. 求不定积分 $\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

ℹ 函数 $\cos 2x$ 是由 $\cos u$ 和 $u = 2x$ 复合而成的，且 $u' = 2$.

解（写法一）. 记 $u = 2x$, 则

$$\begin{aligned}\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \int \cos 2x \cdot 2\,\mathrm{d}x = \int \cos 2x \cdot (2x)'\,\mathrm{d}x\\ &= \int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C\\ &= \sin 2x + C.\end{aligned}$$

■

解（写法二）. 记 $u = 2x$, 则 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$, 从而

$$\begin{aligned}\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \int \cos 2x \cdot 2\,\mathrm{d}x = \int \cos u\,\mathrm{d}u\\ &= \sin u + C = \sin 2x + C.\end{aligned}$$

■

第一换元法举例

例 2. 求不定积分 $\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x$.

ℹ 函数 $\sin(3x+2)$ 是由 $\sin u$ 和 $u = 3x+2$ 复合而成的，且 $u' = 3$.

解. 记 $u = 3x+2$, 则 $\mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x$, 所以

$$\begin{aligned}\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \sin(3x+2)\cdot 3\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos u + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C.\end{aligned}$$

■

💬 虽然被积函数中没有出现 $u = 3x+2$ 的导数 $u' = 3$, 但考虑到积分公式 $\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 有没有这个系数 3 都无关紧要。

第一换元法练习

例 3. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $u = 1 - 3x$, 则 $\mathrm{d}u = -3\,\mathrm{d}x$, 从而

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{1-3x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{1-3x}\cdot(-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{u} + C = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1-3x} + C.\end{aligned}$$

■

例 4. 求不定积分 $\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $u = 2x - 1$, 则 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$, 从而

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

■

第一换元法练习

例 5. 求不定积分 $\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x$.

ℹ 函数 $\frac{1}{2x+3}$ 是由 $\frac{1}{u}$ 和 $u = 2x + 3$ 复合而成的，且 $u' = 2$.

解. 记 $u = 2x + 3$, 则 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$, 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+3}\cdot 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.\end{aligned}$$

■

推论

当 $a \neq 0$ 时

$$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

一个经典例子

例 6. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a > 0$.

解. 计算可得

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C. \\
&= \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C.
\end{aligned}
$$

∎

若被积函数能写成（设 $c_1 \neq c_2$）

$$\frac{k_1}{x+c_1} + \frac{k_2}{x+c_2} = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c},$$

也可用此题的方法计算，思考右侧分母中一元二次函数的特征。

第一换元法练习

例 7. 求不定积分 $\int (x+1)^8 \, dx$.

ⓘ 函数 $(x+1)^8$ 是由 u^8 和 $u = x+1$ 复合而成的，且 $u' = 1$.

解. 记 $u = x+1$, 则 $du = dx$, 从而

$$\int (x+1)^8 \, dx = \int u^8 \, du = \frac{u^9}{9} + C = \frac{(x+1)^9}{9} + C. \qquad \blacksquare$$

定理

若函数 f 有原函数，且 $a \neq 0$, 则

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a}\Big[\int f(u) \, du\Big]_{u=ax+b}.$$

第一换元法举例

例 8. 求不定积分 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a > 0$.

解. 记 $u = \frac{x}{a}$, 则 $\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x$, 所以

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

■

若把积分 $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 中的 x 换成 $\alpha x + \beta$, 则此积分形如

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x,$$

思考此时分母中一元二次函数的特征。

第一换元法练习

例 9. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$.

解. 记 $u=\frac{x}{a}$, 则 $\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x$, 所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$ ■

若把积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 中的 x 换成 $\alpha x+\beta$, 则此积分形如

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

思考此时根号中一元二次函数的特征。

第一换元法举例

例 10. 求不定积分 $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

ⓘ 显然 e^{x^2} 由 e^u 和 $u=x^2$ 复合而成，且 $(x^2)'=2x$.

解（写法一）. 记 $u=x^2$, 则 $du=2x\,dx$, 从而

$$\int 2xe^{x^2}\,dx=\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx=\int e^u\,du$$
$$=e^u+C=e^{x^2}+C.$$ ∎

解（写法二）. 记 $u=x^2$, 则

$$\int 2xe^{x^2}\,dx=\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx=\int e^{x^2}\,d(x^2)=\int e^u\,du$$
$$=e^u+C=e^{x^2}+C.$$ ∎

解（写法三）. 计算可得

$$\int 2xe^{x^2}\,dx=\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx=\int e^{x^2}\,d(x^2)=e^{x^2}+C.$$ ∎

第一换元法练习

例 11. 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

ℹ 函数 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 由 $\frac{1}{\sqrt{u}}$ 和 $u = 1 + x^2$ 复合而成，且 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $u = 1 + x^2$, 则

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \mathrm{d}(1+x^2)$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

∎

推论

若函数 f 可导，则

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

第一换元法练习

例 12. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(\ln x+1)}\,\mathrm{d}x$.

ℹ 函数 $\frac{1}{\ln x+1}$ 是由 $\frac{1}{u}$ 和 $u=\ln x+1$ 复合而成，且 $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $u=\ln x+1$, 则

$$\int \frac{1}{x(\ln x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x+1}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x+1}\cdot \mathrm{d}(\ln x+1)$$

$$= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|\ln x+1| + C.$$

■

推论

若函数 f 可导，则

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

第一换元法练习

例 13. 求不定积分 $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

ℹ 函数 $e^{2\sqrt{x}}$ 是由 e^u 和 $u = 2\sqrt{x}$ 复合而成，且 $du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,du$.

解. 计算可得

$$\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{2\sqrt{x}}\,d(2\sqrt{x}) = e^{2\sqrt{x}} + C. \quad \blacksquare$$

例 14. 求不定积分 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

ℹ 函数 $e^{\frac{1}{x}}$ 是由 e^u 和 $u = \frac{1}{x}$ 复合而成，且 $du = -\frac{1}{x^2}\,dx$.

解. 计算可得

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = -\int e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\int e^{\frac{1}{x}}\,d\frac{1}{x} = -e^{\frac{1}{x}} + C. \quad \blacksquare$$

第一换元法练习

例 15. 求不定积分 $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

函数 $\frac{1}{e^x+1}$ 是由 $\frac{1}{u}$ 和 $u = e^x + 1$ 复合而成，且 $du = e^x\,dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{e^x+1}\cdot e^x\,dx \\ &= \int \frac{1}{e^x+1}\,d(e^x+1) \\ &= \ln(e^x+1)+C.\end{aligned}$$

■

经验很重要

例 16. 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$.

解法一. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int 1-\frac{e^x}{1+e^x}\,dx\\ &= \int dx - \int \frac{1}{e^x+1}\,d(e^x+1)\\ &= x-\ln(e^x+1)+C.\end{aligned}$$

■

解法二. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx &= -\int \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot e^{-x}\,dx\\ &= -\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,d(1+e^{-x})\\ &= -\ln(1+e^{-x})+C.\end{aligned}$$

■

正余弦乘方之积的积分

例 17. 求不定积分 $\int \sin^3 x \cos x \, dx$.

解. 计算可得

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^3 x \, d \sin x = \frac{1}{4} \sin^4 x + C. \qquad \blacksquare$$

例 18. 求不定积分 $\int \cos^3 x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx &= \int \cos^2 x \, d \sin x \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \, d \sin x \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

正余弦乘方之积的积分

例 19. 求不定积分 $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos x \, dx \\ &= \int \sin^2 x \cos^2 x \, d \sin x \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, d \sin x \\ &= \int \sin^2 x - \sin^4 x \, d \sin x \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}$$

■

- 类似地，可计算积分 $\int \sin^\alpha x \cos^{2n+1} x \, dx$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 同理，可计算积分 $\int \sin^{2n+1} x \cos^\alpha x \, dx$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

正切余切的积分

例 20. 求不定积分 $\int \tan x \, dx$.

解. 计算可得

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x) \, dx$$
$$= -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln|\cos x| + C.$$ ■

同理可得

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

正割余割的积分

例 21. 求不定积分 $\int \sec x \, dx$.

解. 计算可得

$$
\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, d \sin x \\
&= \int \frac{1}{1 - \sin^2 x} \, d \sin x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \right| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} \right| + C = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \\
&= \ln |\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}
$$

■

结果的另一形式为 $-\ln|\sec x - \tan x| + C$.

正割余割的积分：反其道而行

例 22. 求不定积分 $\int \sec x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \, dx \\
&= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \, dx \\
&= \int \frac{1}{\sec x + \tan x} \, d(\sec x + \tan x) \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}$$

■

- 通过对积分结果求导的方法也许能找到求不定积分更简洁的方法。
- 类似地，计算可得

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C = -\ln|\csc x + \cot x| + C.$$

例 23. 求不定积分 $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x \,\mathrm{d}(2x) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.\end{aligned}$$

∎

同理（或由 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$）可得

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

正割与正切乘方之积的积分

例 24. 求不定积分 $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx &= \int \sec^2 x \tan^2 x \cdot \sec^2 x \, dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x) \tan^2 x \, d \tan x \\ &= \int \left(\tan^2 x + \tan^4 x\right) d \tan x \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C.\end{aligned}$$

■

类似地，可计算积分 $\int \sec^{2n} x \tan^{\alpha} x \, dx$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

同理，可计算积分 $\int \csc^{2n} x \cot^{\alpha} x \, dx$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

正割与正切乘方之积的积分

例 25. 求不定积分 $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx &= \int \sec^2 x \tan^2 x \cdot \sec x \tan x \, dx \\ &= \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1) \, d \sec x \\ &= \int \left(\sec^4 x - \sec^2 x\right) d \sec x \\ &= \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C.\end{aligned}$$

■

- 类似地，可计算积分 $\int \sec^\alpha x \tan^{2n+1} x \, dx$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 同理，可计算积分 $\int \csc^\alpha x \cot^{2n+1} x \, dx$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

正弦与余弦乘积的积分

例 26. 求不定积分 $\int \cos 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \cos x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \cos 5x \, \mathrm{d}(5x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) + C \\ &= \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{10} + C.\end{aligned}$$

■

常用的第一换元积分模式

$$\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{u} + C \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{u} + C \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

第二换元法

定理

设函数 f 有原函数，若函数 g 可导且有反函数 g^{-1}, 则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=g^{-1}(x)}.$$

注意，使用时要保证函数 g 的值域与函数 f 的定义域相同。

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(g(t))\,\mathrm{d}g(t) = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\int h(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=g^{-1}(x)}.\end{aligned}$$

一个基本例子

例 27. 求不定积分 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

ℹ 积分之所以难算，是因为分母中有一项 $\sqrt{x}$, 把它看成变量 t, 进一步的计算可知

解. 记 $x = t^2$, $t \geqslant 0$, 则 $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, $t = \sqrt{x}$, 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+t} 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2\big(t - \ln(1+t)\big) + C \\ &= 2\left(\sqrt{x} - \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right) + C.\end{aligned}$$

∎

💬 解答的开头可以更自然地写成“记 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$”。

第二换元法举例

例 28. 求不定积分 $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $x = \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, 则 $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, $t = \arcsin x$, 且

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|,$$

又因为 $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, 所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, 从而

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{2}\big(\cos 2t + 1\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin 2t}{2} - t\Big) + C \\
&= \frac{1}{2}\big(\sin t\cos t - t\big) + C \\
&= \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x\Big) + C.
\end{aligned}$$

∎

第二换元法举例

例 29. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $x = \tan t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, 则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 且

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\sec^2 t} = \sec t,$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sec t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t\\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

∎

第二换元法举例

例 30. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

解. 取 $x=\sec t$, $t\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)$, 则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$, 且 $\sqrt{x^2-1}=\operatorname{sgn}x\cdot\tan t$. 从而

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\operatorname{sgn}x\cdot\tan t}\cdot\sec t\tan t\,\mathrm{d}t\\&=\operatorname{sgn}x\int\sec t\,\mathrm{d}t=\operatorname{sgn}x\cdot\ln|\sec t+\tan t|+C\\&=\operatorname{sgn}x\cdot\ln\left|x+\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{x^2-1}\right|+C\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.\end{aligned}$$

■

因为 $\operatorname{sgn}x$ 在被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的任何定义区间上都是常数，所以积分时可以当成常数使用。

作业：习题 4–2

- 1.(5), 1.(7), 1.(9), 1.(11), 1.(14)
- 2.(1), 2.(4), 2.(6), 2.(10), 2.(11), 2.(13), 2.(15), 2.(34)

一元二次函数的分类

设 $a \neq 0$, 对于一元二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

根据判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的符号可以分为以下三类

- 当 $\Delta > 0$ 时，方程 $f(x) = 0$ 有两个实根，其典型例子为
$$x^2 - 1, \qquad 1 - x^2.$$
- 当 $\Delta = 0$ 时，方程 $f(x) = 0$ 有一个实根，其典型例子为
$$x^2, \qquad -x^2.$$
- 当 $\Delta < 0$ 时，方程 $f(x) = 0$ 无实根，其典型例子为
$$x^2 + 1, \qquad -x^2 - 1.$$

不定积分

设 $a \neq 0$, 观察如下类型的不定积分

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, \mathrm{d}x$$

其典型代表为

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \, \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, \mathrm{d}x$$

三角恒等式

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &+ \cos^2 x &= 1 \\
\tan^2 x &+ 1 &= \sec^2 x \\
1 &+ \cot^2 x &= \csc^2 x
\end{aligned}$$

两角和的正弦余弦公式

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \\
&= 1 - 2\sin^2 x \qquad \Longrightarrow \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}
\end{aligned}
$$

积化和差与和差化积公式

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

三角函数的积分

$$\sin' x = \cos x, \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

$$\cos' x = -\sin x, \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

$$\tan' x = \sec^2 x, \qquad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

$$\sec' x = \sec x \tan x, \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

第二换元法的一点说明

教材上第 201 页定理 2 中，条件 $\psi'(t) \neq 0$ 不能去掉。

设函数 $\psi(t) = t^3$, 则函数 ψ 在 $\mathbb{R}$ 上单调且可导，计算可得

$$\operatorname{sgn}(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = 3t^2 \operatorname{sgn}(t^3)$$

在 $\mathbb{R}$ 上连续，从而有原函数。由于导函数没有第一类间断点，所以符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

没有原函数。之所以会出现这样的情况就是因为在 $t = 0$ 时 $\psi'(t) = 0$, 而在 $\psi(0) = 0$ 处函数 sgn 又恰巧是不连续的。