可分离变量的微分方程

王二民（ wagermn@126.com ）
郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

最简单的微分方程

对于一阶微分方程

$$y' = f(x), \tag{1}$$

由不定积分的定义可知，若函数 F 是函数 f 的一个原函数，则该微分方程的所有解为

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{2}$$

微分方程 (1) 用对称形式可以表示为

$$\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

两端同时求不定积分可得

$$\int \mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

计算之后同样可以得到所有解 (2).

微分方程求通解举例

例 1. 求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解。

解. 微分方程 $y' = 2xy^2$ 的对称形式为 $\mathrm{d}y = 2xy^2\,\mathrm{d}x$, 当 $y \neq 0$ 时，分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 2x\,\mathrm{d}x.$$

等式两端同时求不定积分可得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x\,\mathrm{d}x,$$

计算不定积分可得 $-\frac{1}{y} = x^2 + C$, 化简可得通解为 $y = -\frac{1}{x^2+C}$. ■

💬 通解 $y = -\frac{1}{x^2+C}$ 的定义域与 C 的取值有关，这说明我们不能直接的从微分方程 $y' = f(x,y)$ 中 x 的取值范围来确定解函数的定义域。

可分离变量的微分方程

如果一阶常微分方程可以写成

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

的形式，则称为**可分离变量的微分方程**。

对方程 (3) 两端同时求不定积分可得

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

设函数 G 是函数 g 的一个原函数，函数 F 是函数 f 的一个原函数，则可得微分方程 (3) 的所有解为

$$G(y) = F(x) + C.$$

由于这个解是用隐函数的形式表示的，所以也称为**隐式通解**。

可分离变量的微分方程的其它形式

对于形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)h(y) \tag{4}$$

的微分方程，当 $h(y) \neq 0$ 时，等价于可分离变量的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

所以也称微分方程 (4) 为可分离变量的微分方程。

若存在 y_0 使得 $h(y_0) = 0$, 则可以验证常值函数 $y = y_0$ 是微分方程 (4) 的解，称为微分方程的**常值解**。

在初值问题满足解的唯一性条件下，常值解 $y = y_0$ 可以把其它解分成恒有 $y > y_0$ 和恒有 $y < y_0$ 两大类。

可分离变量微分方程计算举例

例 2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ 的通解。

解. 对微分方程 $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ 分离变量可得

$$e^y\,dy = e^x\,dx$$

两端求不定积分可得

$$\int e^y\,dy = \int e^x\,dx$$

计算可得

$$e^y + C_1 = e^x + C_2$$

化简可得

$$y = \ln(e^x + C_2 - C_1)$$

记 $C = C_2 - C_1$, 则得微分方程的通解为 $y = \ln(e^x + C)$. ■

可分离变量微分方程求通解举例

例 3. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解。

解. 当 $y \neq 0$ 时，对所给方程分离变量可得

$$\frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx$$

两端求不定积分可得

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$$

计算可得

$$\ln|y| = x^2 + C_1$$

化简可得

$$y = \pm e^{x^2+C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

显然 $\pm e^{C_1}$ 可取任意非零常数，又 $y = 0$ 是微分方程的解，所以微分方程的通解为 $y = Ce^{x^2}$. ■

可分离变量微分方程求通解练习

例 4. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x}$ 的通解。

解. 当 $y \neq 0$ 时，对所给方程分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两端求不定积分可得

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分可得

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

化简可得

$$y = \pm e^{C_1} x$$

又 $y = 0$ 也是方程的解，从而原微分方程的通解为 $y = Cx$. ■

初值问题举例

例 5. 求微分方程 $y' = y$ 在初值条件 $y(0) = 2$ 下的特解。

解. 考虑到 $y(0) = 2 \neq 0$, 对微分方程 $y' = y$ 分离变量可得

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

两端积分即为

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

考虑到 $y(0) = 2 > 0$, 计算可得

$$\ln y = x + C$$

代入 $y(0) = 2$ 可得 $C = \ln 2$, 化简可得所求特解为 $y = 2\mathrm{e}^x$. ■

💬 因为微分方程的特解可导，所以必连续，从而由初值条件 $y(0) = 2$ 可得到 0 的某邻域内 y 的大致范围，并把它做为条件应用到初值问题的求解中。

初值问题练习

例 6. 求微分方程 $y' = 2\sqrt{y}$ 在初值条件 $y(0) = 4$ 下的特解。

解. 原方程可等价写为 $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$, 考虑到 $y(0) = 4 > 0$, 从而分离变量可得

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

两端同时求不定积分并计算可得

$$\sqrt{y} = x + C$$

代入 $y(0) = 4$ 可得 $C = 2$, 从而微分方程的特解为 $\sqrt{y} = x + 2$. ■

💬 特解为 $\sqrt{y} = x + 2$ 的显示形式为 $y = (x + 2)^2$, $x \geq -2$. 此例告诉我们，对于计算结果，若没有特殊需求，尽量不要随意化简。

作业：习题 7–2

- 1.1, 1.9;
- 2.1, 2.5;
- 5.

可分离变量微分方程求通解举例

例 7. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y+\cos y}$ 的通解。

解. 对微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y+\cos y}$ 分离变量可得

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

两端积分即为

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

计算可得

$$y^2 + \sin y = 2x^3 + C.$$

化简可得微分方程的解为 $y^2 + \sin y - 2x^3 = C$. ∎