函数的求导法则

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

导数公式回顾

$$(c)' = 0 \qquad (x^a)' = ax^{a-1}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

求导是线性运算

定理

- 若函数 f 和 g 在 x 处都可导，则 $f \pm g$ 在 x 处可导，且
$$\left(f \pm g\right)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$
- 设 $c \in \mathbb{R}$, 若函数 f 在 x 处可导，则 cf 在 x 处可导，且
$$\left(cf\right)'(x) = cf'(x).$$

- 设 $c \in \mathbb{R}$, 若函数 f 在 x 处可导，则 $\left(f + c\right)'(x) = f'(x)$.
- 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 若函数 f 和 g 在 x 处都可导，则
$$\left(af + bg\right)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$
- 设 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$, 若函数 $f_1, \cdots, f_n$ 在 x 处都可导，则
$$\left(c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n\right)'(x) = c_1 f_1'(x) + \cdots + c_n f_n'(x).$$

导数线性性质的应用

例 1. 求函数 $f(x) = 2x^5 + 3e^x + 5\ln x$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^5 + 3e^x + 5\ln x\right)' = 2\left(x^5\right)' + 3\left(e^x\right)' + 5\left(\ln x\right)' \\ &= 2\cdot 5x^4 + 3e^x + 5\cdot\frac{1}{x} = 10x^4 + 3e^x + \frac{5}{x}. \end{aligned}$$

∎

例 2. 求函数 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 7\right)' = 2\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' + 3\left(x\right)' \\ &= 2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 3\cdot 1 = 6x^2 - 10x + 3. \end{aligned}$$

∎

函数乘积的导数

定理 (乘积的导数公式)

若函数 f 和 g 在 x 处都可导，则函数 $f \cdot g$ 在 x 处可导，且

$$\big(f \cdot g\big)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

- 三个函数乘积的导数公式为

$$fgh = f'gh + fg'h + fgh'.$$

- 乘积的导数公式可以推广到有限个的形式

$$\big(f_1 f_2 \cdots f_n\big)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$$

特殊地，当 $f_1 = \cdots = f_n = f$ 时，有 $\big(f^n(x)\big)' = nf^{n-1}(x)f'(x)$.

导数计算举例

例 3. 求函数 $f(x) = \sin x \cos x$ 的导数。

解. 由函数乘积的导数公式可知

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sin x \cos x\right)' = (\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)' \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.
\end{aligned}
$$

■

例 4. 求函数 $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ 的导数。

解. 由函数乘积的导数公式可知

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^x(\sin x - \cos x)\right)' \\
&= \left(e^x\right)'(\sin x - \cos x) + e^x\left(\sin x - \cos x\right)' \\
&= e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) \\
&= 2e^x \sin x.
\end{aligned}
$$

■

多个函数乘积的导数

例 5. 求函数 $f(x) = x^3 e^x \cos x$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 e^x \cos x\right)' \\ &= \left(x^3\right)' e^x \cos x + x^3 \left(e^x\right)' \cos x + x^3 e^x \left(\cos x\right)' \\ &= 3x^2 e^x \cos x + x^3 e^x \cos x + x^3 e^x (-\sin x) \\ &= e^x \left((x^3 + 3x^2) \cos x - x^3 \sin x\right). \end{aligned}$$

∎

函数商的导数

定理 (商的导数公式)

若函数 f 和 g 在 x 处都可导且 $g(x) \neq 0$, 则函数 $\frac{f}{g}$ 在 x 处可导，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

特殊地，当 $f(x) = 1$ 时有

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

正切函数的导数

例 6. 求函数 $f(x) = \tan x$ 的导数。

解. 利用函数商的导数公式可得

$$
\begin{aligned}
f'(x) = (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

■

💬 利用同样的方法可以得到

$$
(\cot x)' = -\csc^2 x.
$$

正割函数的导数

例 7. 求函数 $f(x)=\sec x$ 的导数。

解. 利用函数商的导数公式可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' \\ &= -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \sec x \tan x. \end{aligned}$$

∎

利用同样的方法可以得到

$$\left(\csc x\right)' = -\csc x \cot x.$$

例 8. 求函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 的导数。

解. 计算可得

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

■

例 9. 求函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ 的导数。

解. 计算可得

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}.$$

■

反函数的导数

定理 (反函数的导数)

若函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 上可导且 $f'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{f(y) \mid y \in I_y\}$ 上可导，且

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- 定理的结论用变量形式可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

- 定理只是反函数可导的充分条件，而非充要条件。如函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 0 处不可导，但其反函数 $f^{-1}(x) = x^3$ 在 $f(0) = 0$ 处可导。

反正弦函数的导数

反正弦函数 arcsin ：$[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是正弦函数 sin ：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ 的反函数。正弦函数 $x = \sin y$ 的导数为 $\frac{dx}{dy} = \cos y$, 当 $\cos y \neq 0$ 时 $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 且

$$0 < \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

所以当 $x \in (-1,1)$ 时反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

函数 $\arcsin x$ 仅在 $(-1,1)$ 上可导，在 -1 和 1 两点不可导。

反余弦函数的导数

反余弦函数 $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ 是余弦函数 $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ 的反函数。余弦函数 $x = \cos y$ 的导数为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\sin y$, 当 $-\sin y \neq 0$ 时 $y \in (0,\pi)$ 且

$$0 < \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

所以当 $x \in (-1,1)$ 时反余弦函数 $y = \arccos x$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

函数 $\arccos x$ 仅在 $(-1,1)$ 上可导，在 -1 和 1 两点不可导。

反正切函数的导数

例 10. 求反正切函数 $\arctan x$ 的导数。

解. 函数 $\arctan x$ 的反函数是 $\tan x$, 且 $\tan' x = \sec^2 x$, 所以

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}.$$

由 $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ 可知

$$\sec^2(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2.$$

所以

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$ ■

同理可得 $(\operatorname{arccot} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

基本初等函数的导数

$$(x^a)' = ax^{a-1} \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

复合函数的导数

定理 (链式法则)

如果函数 g 在点 x 处可导，函数 f 在点 $g(x)$ 处可导，则函数 $f\circ g$ 在点 x 处可导且

$$\big(f\circ g\big)'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

- 定理的结论也可记为

$$\big(f(g(x))\big)'=f'(g(x))g'(x).$$

- 若定理中 f 和 g 都是可导函数，则有 $(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$.
- 若记 $y=f(u)$, $u=g(x)$, 则定理的结论可表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

复合函数求导举例与练习

例 11. 求函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的导数。

解. 记 $y=\sqrt{u}$, $u=x^2+1$, 则函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 可以看成它们两个的复合，从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

■

例 12. 求函数 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$ 的导数。

解. 记 $y=\mathrm{e}^u$, $u=\cos x$, 则函数 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$ 可以看成它们两个的复合，从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot(-\sin x)=-\mathrm{e}^{\cos x}\sin x.$$

■

复合函数求导举例与练习

例 13. 求函数 $y = \sin x^2$ 的导数。

解. 由复合函数的求导公式可知

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sin x^2\right)' = \left(\sin' x^2\right) \cdot (x^2)' \\ &= \left(\cos x^2\right) \cdot 2x = 2x \cos x^2. \end{aligned}$$

■

例 14. 求函数 $y = \sin^2 x$ 的导数。

解. 由复合函数的求导公式可知

$$\begin{aligned} y' &= \left((\sin x)^2\right)' = (2 \sin x) \cdot (\sin x)' \\ &= 2 \sin x \cos x = \sin 2x. \end{aligned}$$

■

复合函数求导练习

例 15. 求函数 $y = \ln(-x)$ 的导数。

解. 由复合函数的求导公式可知

$$\begin{aligned} y' &= \big(\ln(-x)\big)' = \ln'(-x)\cdot(-x)' \\ &= \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

■

再由 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 可知

$$\big(\ln|x|\big)' = \frac{1}{x}$$

更一般地，若函数 f 非零且可导，则

$$\big(\ln|f(x)|\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

导数计算举例

例 16. 求函数 $y=(1+2x)^5$ 的导数。

解. 计算可得

$$y'=5(1+2x)^4(1+2x)'=10(1+2x)^4. \qquad \blacksquare$$

例 17. 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 的导数。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} y' &= \left((x^2+x+1)^{-\frac{1}{3}}\right)' \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}(x^2+x+1)' \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}(2x+1). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

多个函数复合的情况

例 18. 求函数 $y = \ln\sin e^x$ 的导数。

解. 利用复合函数的导数公式可得

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln \sin e^x\right)' = \frac{1}{\sin e^x} \cdot \left(\sin e^x\right)' = \frac{1}{\sin e^x} \cdot \left(\sin e^x\right)' \\
&= \frac{1}{\sin e^x} \cdot \cos e^x \cdot (e^x)' = \frac{1}{\sin e^x} \cdot \cos e^x \cdot e^x \\
&= e^x \cot e^x.
\end{aligned}
$$

∎

若 $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$, 且 f, g, h 都可导，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

或

$$\left(f(g(h(x)))\right)' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

复合函数求导练习

例 19. 求函数 $y = \cos(\sin(\tan x))$ 的导数。

解. 由复合函数的求导公式可知

$$\begin{aligned} y' &= \big(\cos(\sin(\tan x))\big)' \\ &= -\sin(\sin(\tan x))\big(\sin(\tan x)\big)' \\ &= -\sin(\sin(\tan x))\cos(\tan x)\big(\tan x\big)' \\ &= -\sin(\sin(\tan x))\cos(\tan x)\sec^2 x. \end{aligned}$$

■

复合函数求导练习

例 20. 求函数 $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + c}\right)$ 的导数。

解. 利用复合函数的导数公式可得：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + c}\right)\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}}\left(x + \sqrt{x^2 + c}\right)' \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + c}}(x^2 + c)'\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}}\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} \frac{x + \sqrt{x^2 + c}}{\sqrt{x^2 + c}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}}.
\end{aligned}
$$

∎

作业：习题 2–2

- 2.(5), 2.(10),
- 6.(3), 6.(8),
- 7.(2), 7.(7).