高阶导数

王二民（✉ wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

高阶导数

定义 (二阶导数)

如果函数 f 的导函数 f' 在点 a 处可导，则称函数 f 在点 a 处**二阶可导**，并称此导数为 f 在点 a 处的**二阶导数**，记为 $f''(a)$.

如果可导函数 f 的导函数 f' 也是可导函数，则定义

$$f'' \overset{\text{def}}{=} \left(f'\right)'.$$

称为 f 的**二阶导函数**。

记函数 f 的 n 阶导函数为 $f^{(n)}$, 定义为 f 的 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}$ 的导数，即

$$f^{(n)} \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}\right)', \quad n \in 2, 3, \cdots$$

并规定 $f^{(0)} \overset{\text{def}}{=} f$.

高阶导数的变量记法

函数 $y = f(x)$ 的 n 阶导数也可以记为

$$y^{(n)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}, \qquad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}, \qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x).$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} f(x)\right), \quad n = 2, 3, \cdots$$

二阶导数计算练习

例 1. 设 $y = ax + b$, 求 y''.

解. 计算可得 $y' = a$, $y'' = (a)' = 0$. ■

例 2. 设 $y = \sin \omega t$, 求 y''

解. 计算可得

$$\begin{aligned} y' &= \cos \omega t \cdot \omega = \omega \cos \omega t, \\ y'' &= \omega(-\sin \omega t)\omega = -\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

■

二阶导数的计算

例 3. 求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的 2 阶导函数.

解. 由 f 的定义可知

$$f'(x) = \left(\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}(x + \sqrt{1 + x^2})'$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

从而

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)' = \left((1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}(1 + x^2)' = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

■

幂函数的任意阶导数

例 4. 求函数 $y = x^a$ 的 n 阶导函数，其中 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

解. 计算可得：

$$\begin{aligned}
y' &= ax^{a-1} \\
y'' &= a(a-1)x^{a-2} \\
y''' &= a(a-1)(a-2)x^{a-3} \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}.
\end{aligned}$$

■

- 特殊地，$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$.
- 设 $m, n \in \mathbb{N}_+$, 则 $(x^n)^{(m)} = \begin{cases} n! & m = n \\ 0 & m > n \end{cases}$.

指数函数的任意阶导数

例 5. 求函数 $y = a^x$ 的 n 阶导函数.

解. 计算可得

$$\begin{aligned} y' &= a^x \ln a \\ y'' &= a^x (\ln a)^2 \\ y''' &= a^x (\ln a)^3 \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= a^x (\ln a)^n. \end{aligned}$$

■

特殊地，当 $a = \mathrm{e}$ 时 $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$.

对数函数的任意阶导数

例 6. 求对数函数 $y = \ln x$ 的 n 阶导函数.

解. 计算可得

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

从而由幂函数的 n 阶导数公式可知，当 $n \in \mathbb{N}_+$ 时

$$y^{(n)} = \left(x^{-1}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}. \qquad \blacksquare$$

正弦余弦的任意阶导数

例 7. 求函数 $y = \sin x$ 的 n 阶导函数.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x &= \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)\\
(\sin x)'' &= -\sin x &= \sin(x + \pi)\\
(\sin x)''' &= -\cos x &= \sin\left(x + \tfrac{3\pi}{2}\right)\\
(\sin x)'''' &= \sin x &= \sin(x + 2\pi)
\end{aligned}$$

由数学归纳法可得

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \qquad \blacksquare$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

高阶导数的运算法则

定理 (求高阶导数是线性运算)

若函数 f 和 g 都 n 阶可导，$c \in \mathbb{R}$, 则

- $\left(f \pm g\right)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$,
- $\left(cf\right)^{(n)} = cf^{(n)}$.

定理 (莱布尼茨公式)

若函数 f 和 g 都 n 阶可导，则

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

其中 C_n^k 为二项式系数。

高阶导数练习

例 8. 求函数 $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ 的 n 阶导数。

解. 易知 $f(x) = (2x + 1)^{-1}$, 从而

$$f'(x) = (-1)(2x + 1)^{-2}(2x + 1)' = -2(2x + 1)^{-2}$$

$$f''(x) = -2(-2)(2x + 1)^{-3}(2x + 1)' = (-2)^2 2!(2x + 1)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-2)^2 2!(-3)(2x + 1)^{-4}(2x + 1)' = (-2)^3 3!(2x + 1)^{-4}$$

所以由归纳法可知

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2x + 1)^{n+1}}.$$

■

一般地，若函数 f 是 n 阶可导的，则

$$\big(f(ax + b)\big)^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

高阶导数练习

例 9. 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解. 由莱布尼茨公式可得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^{k} (x^2)^{(k)} \left(e^{2x}\right)^{20-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} C_{20}^{k} (x^2)^{(k)} \left(e^{2x}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{2} C_{20}^{k} (x^2)^{(k)} e^{2x} 2^{20-k} \\ &= 1 \cdot x^2 \cdot e^{2x} 2^{20} + 20 \cdot 2x \cdot e^{2x} 2^{19} + 190 \cdot 2 \cdot e^{2x} 2^{18} \\ &= 2^{20} e^{2x} \left(x^2 + 20x + 95\right). \end{aligned}$$

■

任意阶导数练习

例 10. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 的 n 阶导数。

解. 计算可得

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

从而

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

∎

作业：习题 2–3

- 1.(1), 1.(4), 1.(9), 1.(10),
- 3.(1).