无穷小的比较

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

高阶无穷小

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $x \to a$ 时的无穷小，若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称

- 当 $x \to a$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ **高阶的无穷小**，
- 当 $x \to a$ 时，$g(x)$ 是比 $f(x)$ **低阶的无穷小**，

记为

$$f(x) = o\big(g(x)\big), \quad (x \to a).$$

例 1. 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, 所以 $x \to 0$ 时 $x^2 = o(x)$.

例 2. 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, 所以 $x \to 0$ 时 $x^3 = o(x)$.

等价无穷小

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $x \to a$ 时的无穷小，若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, 则称当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**同阶的无穷小**。

例 3. 当 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 与 $2x^2$ 是同阶无穷小。

特殊地，若 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**等价无穷小**。记为

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \to a).$$

例 4. 当 $x \to 0$ 时，无穷小量 $\sin x$ 与 x 是等价无穷小。

常用等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，有以下常用等价无穷小

$$
\begin{aligned}
ax &\sim (1+x)^a - 1 \\
x \ln a &\sim a^x - 1 \qquad a > 0 \\
x &\sim e^x - 1 \\
x &\sim \ln(1+x) \\
x &\sim \sin x \sim \tan x \\
\frac{1}{2}x^2 &\sim 1 - \cos x \\
x &\sim \arcsin x \sim \arctan x
\end{aligned}
$$

等价无穷小的与高阶无穷小的关系

定理

同一极限过程下

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

由等价的对称性，也等价于 $f(x) - g(x) = o(f(x))$.

- 因为 $x \to 0$ 时 $x^2 = o(x)$, 所以 $x \sim x + x^2$.
- 因为 $x \to 0$ 时 $x^3 = o(x)$, 所以 $x \sim x + x^3$.

等价无穷小替换

定理 (等价无穷小替换)

设 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 和 $g(x)$ 与 $\bar{g}(x)$ 都是 $x \to a$ 时的等价无穷小，则当极限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$ 存在时，有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

- 极限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 和 $\lim\limits_{x \to a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$ 要么同时不存在，要么同为无穷大，要么同时存在且极限值相等。
- 设 $\cdot$ 与 $\bar{\cdot}$ 是等价无穷小，则由等价的自反性可知

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\bar{f}(x)}{g(x)} = \lim \frac{f(x)}{\bar{g}(x)} = \lim \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

等价无穷小替换证明

证明. 因为 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 和 $g(x)$ 与 $\bar{g}(x)$ 都是 $x \to a$ 时的等价无穷小，所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\bar{f}(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a}\frac{\bar{g}(x)}{g(x)} = 1.$$

从而

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{\bar{f}(x)}\cdot\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}\cdot\frac{\bar{g}(x)}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\bar{f}(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\bar{g}(x)}{g(x)} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}.
\end{aligned}$$

■

等价无穷小的应用

例 5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$.

解. 当 $x \to 0$ 时，因为 $\sin x \sim x$ 且 $3x \to 0$, 所以 $\sin 3x \sim 3x$.

当 $x \to 0$ 时，因为 $\tan x \sim x$ 且 $2x \to 0$, 所以 $\tan 2x \sim 2x$.

从而利用等价无穷小替换定理可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

例 6. 利用等价无穷小计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{e^{6x}-1}$.

解. 利用等价无穷小替换定理可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{e^{6x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

等价无穷小的应用

例 7. 利用等价无穷小计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^3+2x}$.

解. 由等价无穷小替换计算可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^3+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x^3+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{x^2+2}=\frac{5}{2}.$$ ■

解. 因为，当 $x\to 0$ 时 $x^3=o(2x)$, 所以 $2x\sim 2x+x^3$, 从而由等价无穷小替换计算可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^3+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}.$$ ■

等价无穷小的应用

例 8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(e^{2x}-1)\arctan 3x}$.

解. 由等价无穷小可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(e^{2x}-1)\arctan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x\cdot 2x}=\frac{1}{3}.\qquad\blacksquare$$

可以对极限中的因式直接用等价无穷小代换。

例 9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\arctan 2x}$.

解. 由等价无穷小可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\arctan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.\qquad\blacksquare$$

等价无穷小的应用

例 10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解. 由 $x \to 0$ 时 $\tan x \sim x$ 和 $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ 可得:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\tan x}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\cdot x}{x^3}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

∎

💬 等价无穷小替换只能用于乘法和除法中。

作业：习题 1–7

- 1,
- 4,
- 5.(1), 5(3).

小 o 记法

若存在函数 $\alpha(x)$ 使得

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

且 $\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$, 则记为

$$f(x) = o\big(g(x)\big), \quad (x \to a).$$

- 不使用除法定义的好处是函数 $g(x)$ 可以取到 0.
- 定义中不需要极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都是 0.
- 公式的意思是，当 $x \to a$ 时，$f(x)$ 远小于 $g(x)$.
- 更准确地，符号 $o\big(g(x)\big)$ 表示一个集合，而表达式 $f(x) = o\big(g(x)\big)$ 中的 = 表示元素与集合间的属于关系。
- 其它极限过程下也有类似的定义。

小 o 记法举例

- 当 $x \to 0$ 时，$x^2 = o(x)$.
- 当 $x \to -\infty$, $e^x = o(x)$.
- 当 $x \to \infty$ 时，$x = o(x^2)$.
- 当 $x \to +\infty$, $2^x = o(3^x)$.
- 当 $x \to +\infty$, $\ln x = o(x)$.

小 o 记法的运算

在同一极限过程下，若函数 $h(x)$ 有适当的定义域，则

$$o\big(g(x)\big) + o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big)$$

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \implies o\big(f(x)\big) = o\big(g(x)\big)$$
$$f(x) = o\big(g(x)\big) \implies o\big(f(x)\big) + o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big)$$

$$f(x)o\big(g(x)\big) = o\big(f(x)g(x)\big)$$
$$o\big(f(x)\big)o\big(g(x)\big) = o\big(f(x)g(x)\big)$$

极限中的等价

若存在函数 $\alpha(x)$ 使得

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

且 $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$, 则称 $x \to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价，记为

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \to a).$$

- 不使用除法定义的好处是函数 $g(x)$ 可以取到 0.
- 定义中不需要极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都是 0.
- 其它极限过程下也有类似的定义。

- 当 $x \to 0$ 时，$x + x^2 \sim x$.
- 当 $x \to \infty$ 时，$x + x^2 \sim x^2$.

等价关系

同一极限过程下（如 $x \to a$），容易证明上面定义的等价满足，对于“任意”（在 a 的某个去心邻域上有定义）的函数 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$, 都有

自反性 $f(x) \sim f(x)$.

对称性 若 $f(x) \sim g(x)$, 则 $g(x) \sim f(x)$.

传递性 若 $f(x) \sim g(x)$ 且 $g(x) \sim h(x)$, 则 $f(x) \sim h(x)$.

等价的运算

在同一极限过程下，

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\sim f_1(x) \\ g(x) &\sim g_1(x) \\ f_1(x) &= o\big(g_1(x)\big) \end{aligned}\right\} \implies f(x)+g(x) \sim g(x).$$

简单地说，从等价的角度来看，加法中相对较小的量可以忽略。

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\sim f_1(x) \\ g(x) &\sim g_1(x) \end{aligned}\right\} \implies f(x)g(x) \sim f_1(x)g_1(x)$$

$$f(x) \sim g(x) \implies f(x)h(x) \sim g(x)h(x)$$

$$f(x) \sim g(x) \implies \frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)}$$

最后一个等式，要求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在极限过程中非零。

等价替换定理

定理 (等价替换定理)

如果在同一极限过程中 $f_1(x) \sim f_2(x)$ 且 $g_1(x) \sim g_2(x)$, 则在同一极限过程中

$$\lim\bigl(f_1(x)\cdot g_1(x)\bigr) = \lim\bigl(f_2(x)\cdot g_2(x)\bigr).$$

由等价的自反性，不难验证，在定理的条件下有

$$\begin{aligned}\lim\bigl(f_1(x)\cdot g_1(x)\bigr) &= \lim\bigl(f_1(x)\cdot g_2(x)\bigr)\\ &= \lim\bigl(f_2(x)\cdot g_1(x)\bigr) = \lim\bigl(f_2(x)\cdot g_2(x)\bigr).\end{aligned}$$