函数

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

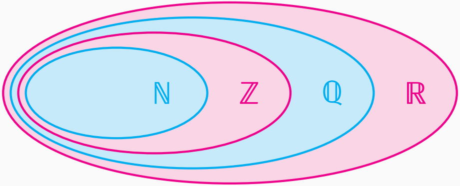
常用数集

自然数集 $\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$

整数集 $\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

有理数集 $\mathbb{Q} \overset{\text{def}}{=} \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{Z}) \wedge (n \neq 0)\right\}$

实数集 $\mathbb{R}$, 可以认为是小数组成的集合。



- $\mathbb{N}_+$ 表示正整数集
- $\mathbb{R}^*$ 表示非零实数集

有界区间

$$(a,b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

$$(a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

$$[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$,

- 本课程约定：无特殊说明，要求 $a < b$.
- 称 a, b 为区间的**端点**。
- 称 (a,b) 为这些区间的内部。

无界区间

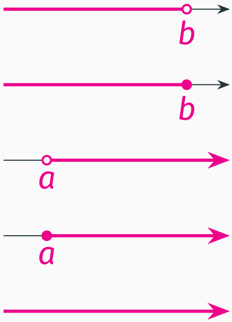
$$(-\infty, b) \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < b\right\}$$

$$(-\infty, b] \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqslant b\right\}$$

$$(a, +\infty) \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > a\right\}$$

$$[a, +\infty) \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqslant a\right\}$$

$$(-\infty, +\infty) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}$$



其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 称 a, b 为对应区间的**端点**。

邻域

以 $a \in \mathbb{R}$ 为中心，$\delta \in \mathbb{R}_+$ 为半径的**邻域**

$$U(a,\delta) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

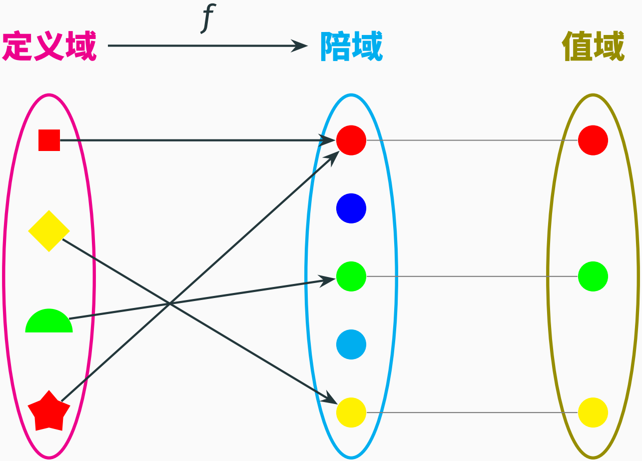
表示数轴上到点 a 的距离不超过 δ 的点的集合。

以 $a \in \mathbb{R}$ 为中心，$\delta \in \mathbb{R}_+$ 为半径的**去心邻域**

$$\mathring{U}(a,\delta) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

表示数轴上到点 a 的距离不超过 δ 且异于 a 的点的集合。

函数是一种特殊的对应法则



函数的定义

定义 (函数)

设 X 和 Y 是两个集合，f 是从 X 到 Y 的对应法则。如果对于 X 的任意一个元素 x, 按照法则 f, 在 Y 中都存在唯一的元素 y 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的**函数**。

称 X 为函数 f 的**定义域**（通常记为 D_f），称 Y 为函数 f 的**陪域**，称 x 为**自变量**，称 y 为**因变量**。

与 x 对应的 y 记为 $f(x)$, 称为函数 f 在 x 处的**函数值**，从而 $y = f(x)$.

关于函数记法的几点说明

- 函数名变量，如：$f, F, \phi, \cdots$.
- 函数名常量，如：$\log, \ln, \sin, \cos, \cdots$.
- 函数的完整记法

$$\begin{aligned} f \quad : \quad X & \longrightarrow Y \\ x & \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- 强调定义域 X 和培域 Y 时，函数 f 可简记为 $f : X \to Y$.
- 强调对应法则时，函数 f 可简记为，例如，$f(x) = x^2$.
- 变量记法，例如 $y = x^2$.
- 因变量名与函数名相同的记法：$y = y(x)$, $u = u(t)$, $\cdots$.
- 函数 f 的**值域**（通常记为 R_f）为 $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in X\right\} \subset Y$.
- 函数 f 的**图象**为 $\left\{(x, f(x)) \,\middle|\, x \in X\right\}$.

函数的自然定义域

称使得表达式 $f(x)$ 成立的所有实数 x 构成的集合为函数 f 的**自然定义域**。例如

1. 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的自然定义域为 $[0, +\infty)$.
2. 函数 $g(x) = \ln x$ 的自然定义域为 $(0, +\infty)$.
3. 函数 $h(x) = \frac{1}{x}$ 的自然定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

本课程约定，除非特殊说明

- 函数的陪域为 $\mathbb{R}$.
- 若没有指明定义域，函数 $f(x)$ 的定义域为其自然定义域。

求函数定义域练习

例 1. 设 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$, 求函数 f 的定义域。

解 在 $\mathbb{R}$ 上表达式 $f(x)$ 有意义当且仅当 $x+1 \geqslant 0$ 且 $x-2 \neq 0$, 解之得 $x \geqslant -1$ 且 $x \neq 2$, 所以 f 的定义域为 $[-1,2) \cup (2,+\infty)$. ■

可以用下面的方法指明函数的定义域，

1. 函数 $f(x) = \sin x$, $x > 0$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.
2. 函数 $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

函数的相等

在前面的约定下，两个函数相等当且仅当它们的定义域和对应法则都相等。

例 2. 设 $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$, 判断 f 和 g 是否相等。

解 函数 f 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 函数 g 的定义域为 $(0, +\infty)$. 所以函数 f 和 g 不相等。 ■

例 3. 设 $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$, 判断 f 和 g 是否相等。

解 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$, 函数 g 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 所以函数 f 和 g 不相等。 ■

常用函数举例

例 4. 设 $c \in \mathbb{R}$，称函数 $f(x) = c$ 为**常值函数**。

例 5. 设 $n \in \mathbb{Z}^+, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ 且 $a_n \neq 0$, 则称

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

为关于 x 的 n **次实多项式**，简称为**多项式**。

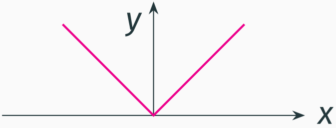
例 6. 称两个多项式的商为**有理分式函数**，简称有理函数。

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}.$$

分段函数举例

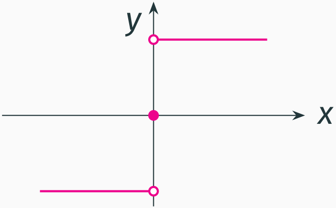
例 7. 绝对值函数

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases}$$



例 8. 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



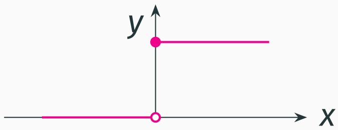
不难发现这两个函数有如下关系

$$|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x \qquad x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

常用函数举例

例 9. **单位阶越函数**

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$



例 10. **狄利克雷函数**

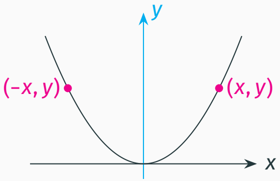
$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

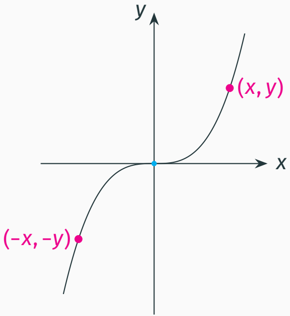
函数的奇偶性

定义 (奇偶函数)

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$.

- 若对任意 $x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$，则称 f 为**偶函数**；
- 若对任意 $x \in D$ 都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 f 为**奇函数**。





函数的奇偶性

常见奇函数

$$y = 0 \qquad y = x \qquad y = \frac{1}{x} \qquad y = \sin x \qquad y = \tan x$$

常见偶函数

$$y = 0 \qquad y = 1 \qquad y = x^2 \qquad y = \frac{1}{x^2} \qquad y = \cos x$$

例 11. 判断下列函数的奇偶性

1. $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ 偶函数
2. $f(x) = x^2 - x + 1$ 非奇非偶函数
3. $f(x) = x^3 + x$ 奇函数

函数的单调性

定义 (函数的单调性)

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 集合 $A \subset D$. 称函数 f 在集合 A 上**单调递增**，若对任意 $x_1, x_2 \in A$ 都有

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

称函数 f 在集合 A 上**单调递减**，若对任意 $x_1, x_2 \in A$ 都有

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

若 f 在其定义域 D 上单调递增，则称 f 为**单调递增函数**。类似地，若 f 在其定义域 D 上单调递减，则称 f 为**单调递减函数**。单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**。

函数的单调性

例 12. 函数 $f(x) = x$ 是单调递增函数。

例 13. 函数 $f(x) = \ln x$ 是单调递增函数。

例 14. 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，从而在 $\mathbb{R}$ 不单调，即 f 不是单调函数。

例 15. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，但 f 不是单调递减函数。

函数的周期性

定义 (周期函数、周期)

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 若存在实数 $T \neq 0$, 使得对集合 D 中的任意 x 都有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 f 为**周期函数**，称 T 是 f 的一个**周期**。

如果周期函数 f 的所有正周期中存在一个最小的周期 T，则称 T 为函数 f 的**最小正周期**，也称“函数 f 的周期为 T.”。

例 16. 常值函数 $f(x) = 1$ 是周期函数，但没有最小正周期性。

例 17. 函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期为 2π.

例 18. 函数 $\tan x$ 的周期为 π.

函数的上界与下界

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 集合 $A \subset D$. 若存在实数 M, 使得对任意 A 中的 x 都有 $f(x) \leqslant M$, 则称 M 为函数 f 在集合 A 上的一个**上界**，称**函数 f 在集合 A 上有上界**，否则称**函数 f 在集合 A 上无上界**。

例 19. 函数 $f(x) = 1 - x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上有上界。

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 集合 $A \subset D$. 若存在实数 M, 使得对任意 A 中的 x 都有 $f(x) \geqslant M$, 则称 M 为函数 f 在集合 A 上的一个**下界**，称**函数 f 在集合 A 上有下界**，否则称**函数 f 在集合 A 上无下界**。

例 20. 函数 $f(x) = x^2 + 3x + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上有下界。

函数的有界性

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 集合 $A \subset D$. 若存在实数 M 使得对于 A 中的任意 x 都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称**函数 f 在集合 A 上有界**; 否则称函数 f 在集合 A 上**无界**。

特殊地，若函数 f 在其定义域 D 上有界，则称 f 为**有界函数**；若函数 f 在其定义域 D 上无界，则称 f 为**无界函数**。

- 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上有界。
- 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有下界、无上界、无界。
- 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是无界函数。
- 函数 $f(x) = \sin x$ 是有界函数

函数的四则运算

设 f 和 g 是两个实函数，由于实数之间有四则运算，从而易由此定义实函数的四则运算

$$(f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)+g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)-g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f\cdot g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)\cdot g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in \left\{x \in D_f \cap D_g \,\middle|\, g(x) \neq 0\right\}$$

函数的线性运算

定义实函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 与实数 $c \in \mathbb{R}$ 的数乘运算为

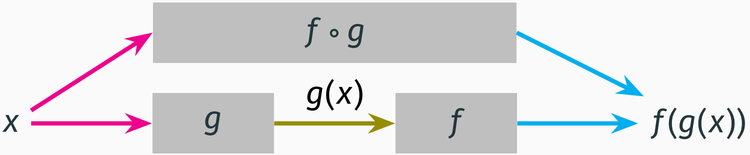
$$(c \cdot f)(x) \overset{\text{def}}{=} c \cdot f(x), \qquad x \in D.$$

设 f 和 g 是两个实函数，λ 和 μ 是两个实数，定义函数

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x).$$

称为函数 f 与 g 的线性组合。

函数的复合



设 f 和 g 是两个实函数，若函数 g 的输出可以当做函数 f 的输入，则可以得到一个新的函数

$$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)),$$

其定义域为 $\left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right\}$.

若记 $u = g(x)$, 则复合函数 $f \circ g$ 也可记为

$$y = f(u), \quad u = g(x).$$

函数的复合举例

例 21. 设 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, 则

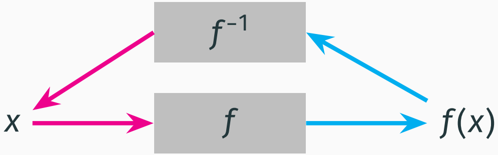
- $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sin x) = \sin(\sin x)$.
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x$.
- $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$.

例 22. 设 $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$, 则 y 关于 x 的函数为

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

其定义域为 $[-1, 1]$.

反函数



设函数 $f: X \to Y$，如果对 Y 中的任意 y, 在 X 中都存在唯一的 x 使得 $y = f(x)$, 则称 f 是从 X 到 Y 的**一一映射**，由此可以定义从 Y 到 X 的函数 f^{-1}，使得

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

并称 f^{-1} 为函数 f 的**反函数**。

函数 f 的定义域为 X, 值域为 Y; 函数 f 的定义域为 Y, 值域为 X. 函数 f 与函数 f^{-1} 的图象关于直线 $y = x$ 对称。

反函数练习

例 23. 函数 $y = f(x) = 2x - 1$ 的反函数是 $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 1)$.

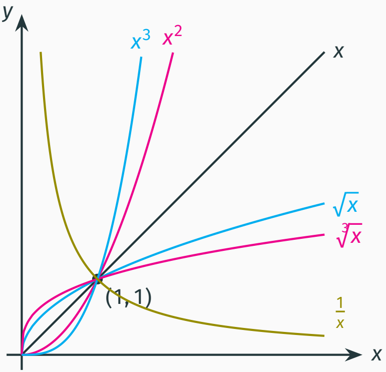
当用变量表示函数时，习惯于用 y 表示隐变量，用 x 表示自变量，从而上面的事实也可以写成“函数 $y = 2x - 1$ 的反函数是 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$.”。

例 24. 求函数 $f(x) = e^x$ 的反函数。 $x = f^{-1}(y) = \ln y$

幂函数

设 $a \in \mathbb{R}$, 称形如 $x \mapsto x^a$ 的函数为幂函数。

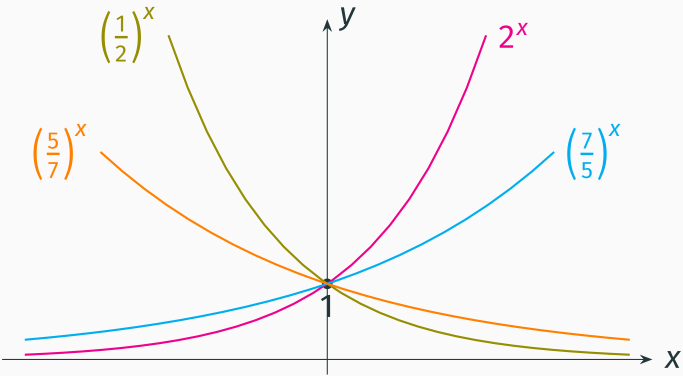
- 定义域与 a 有关，但在区间 $(0, +\infty)$ 上总有定义。
- 点 $(1, 1)$ 总在函数图象上。



指数函数

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 称形如 $x \mapsto a^x$ 的函数为指数函数。

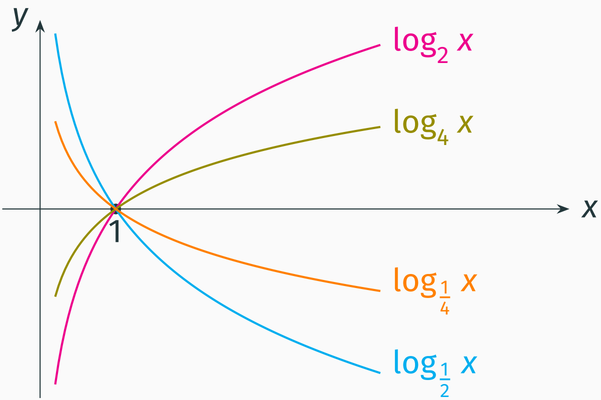
- 定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $\mathbb{R}_+$.
- 点 $(0, 1)$ 总在函数图象上。



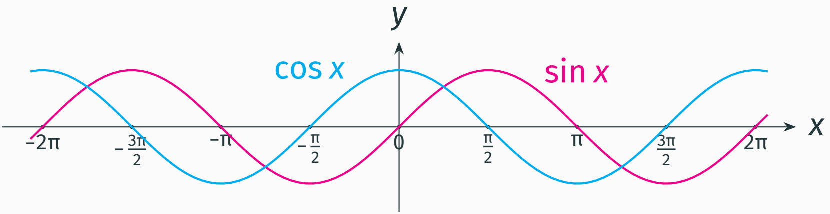
对数函数

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 称形如 $x \mapsto \log_a x$ 的函数为对数函数。

- 定义域为 $\mathbb{R}_+$, 值域为 $\mathbb{R}$.
- 点 $(1, 0)$ 总在函数图象上。



三角函数



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

正切 $\tan x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sin x}{\cos x}$

正割 $\sec x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\cos x}$

余切 $\cot x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\cos x}{\sin x}$

余割 $\csc x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\sin x}$

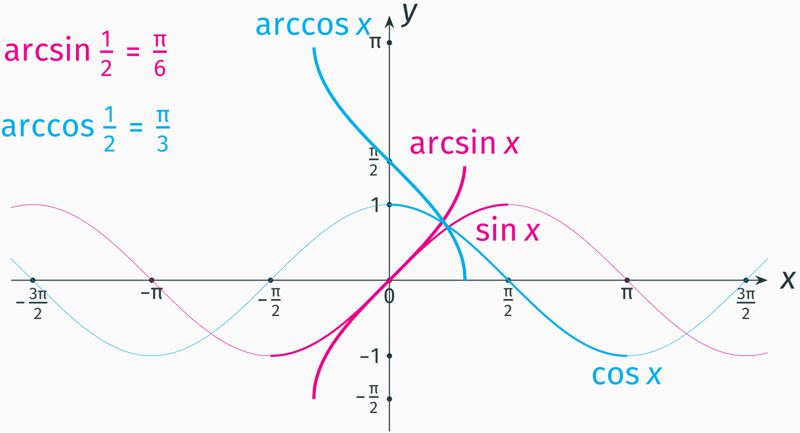
反正弦函数与反余弦函数

$$\alpha = \arcsin x \iff (\sin \alpha = x) \land \left(\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

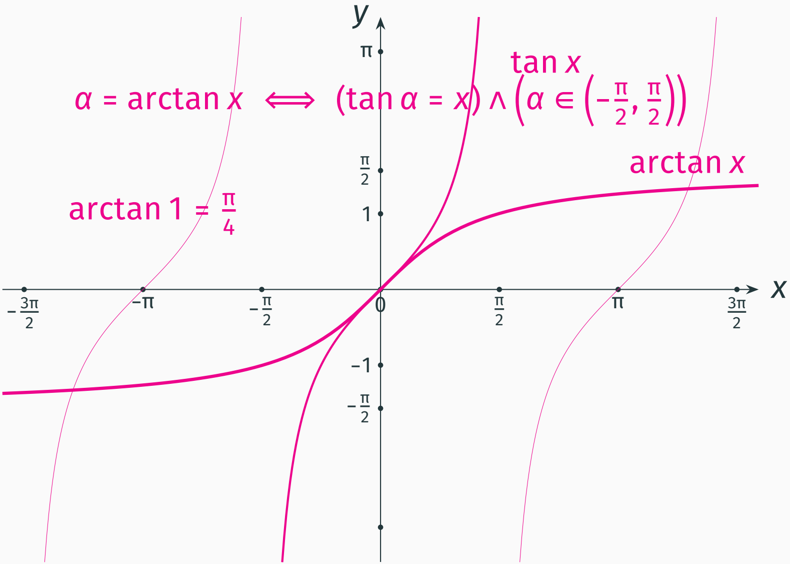
$$\alpha = \arccos x \iff (\cos \alpha = x) \land (\alpha \in [0, \pi])$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$



反正切函数



y
x
π
$\frac{\pi}{2}$
1
-1
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$\tan x$
$\alpha = \arctan x \iff (\tan\alpha = x) \wedge \left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$
$\arctan x$
$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

反三角函数总结

- 正弦函数 $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ 的反函数为反正弦函数 $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，且

$$y = \arcsin x \iff (\sin y = x) \wedge \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

- 余弦函数 $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ 的反函数为反余弦函数 $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$，且

$$y = \arccos x \iff (\cos y = x) \wedge (y \in [0, \pi])$$

- 正切函数 $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$ 的反函数为反正切函数 $\arctan : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，且

$$y = \arctan x \iff (\tan y = x) \wedge \left(y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

初等函数

基本初等函数	
	常值函数
	幂函数
	指数函数
	对数函数
	三角函数
	反三角函数

$+$

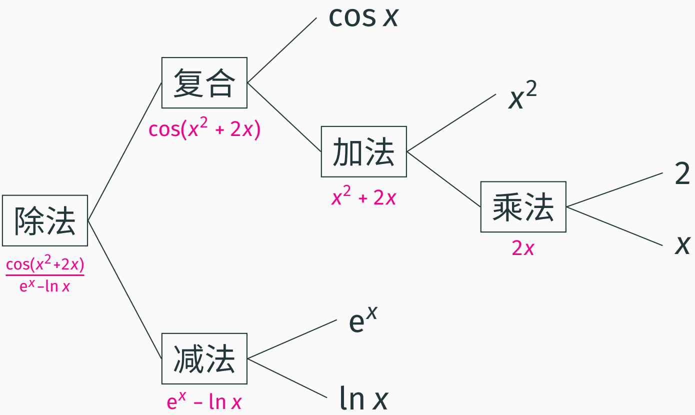
有限次运算	
	加法
	减法
	乘法
	除法
	复合

$=$

初等函数

初等函数的分解

例 25. 设 $f(x) = \frac{\cos(x^2+2x)}{e^x - \ln x}$，分析函数 f 是如何由基本初等函数经过四则运算和复合运算形成的。



作业：习题 1–1

- 1.(3), 1.(7),
- 2.(2),
- 9.(1),
- 11.(4).