函数的极限

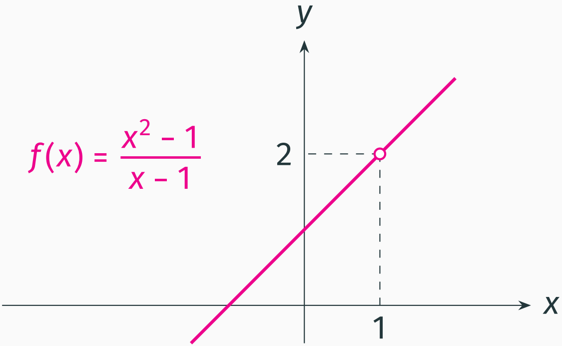
王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

合理推测

例 1. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 且当 $x\neq 1$ 时 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. 你觉得 $f(1)$ 最有可能是多少?



函数极限

定义 (函数极限)

设函数 f 在 a 的某个去心邻域内有定义, 若存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得当 x 无限接近且不等于 a 时 $f(x)$ 无限接近于 A, 则称 A 是函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的**极限**, 记作

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

否则, 称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限不存在。

- 定义中“不等于 a”的意思是不考虑等于 a 的情况，并不意味着等于 a 时就不怎么。
- 定义中，存在 A 时，称表达式 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 有意义，否则，称表达式 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 无意义。

极限中的相关说法

表达式 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 读为

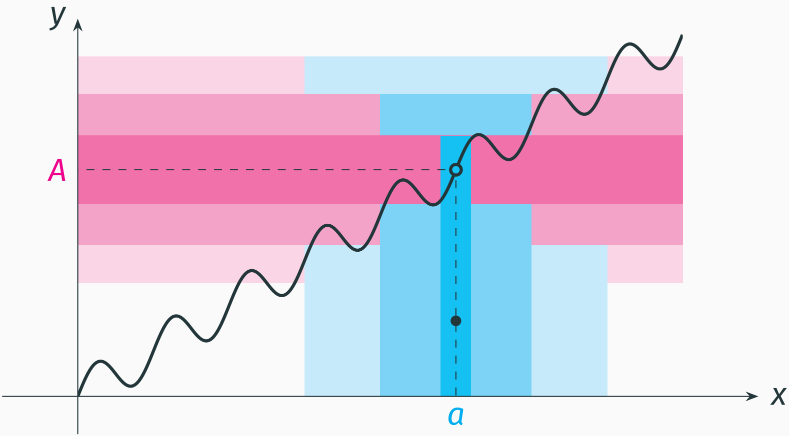
- 当 x 趋于 a 时 $f(x)$ 趋于 A.
- 当 x 趋于 a 时 $f(x)$ 的极限为 A.
- 函数 f 在 a 处的极限为 A.

极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在时也可以说

- 当 x 趋于 a 时 $f(x)$ 的极限不存在。
- 函数 f 在 a 处的极限不存在。

函数极限图示

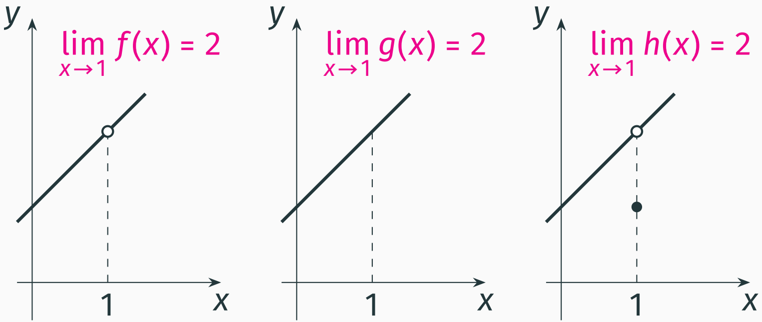
$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$



函数极限举例

例 2. 考察函数下列函数在 $x = 1$ 处的极限。

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad g(x) = x + 1 \qquad h(x) = \begin{cases} x + 1 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



极限 $\lim_{x \to a} f(x)$ 与函数 f 在 a 处是否有定义及函数值无关。

基本初等函数中的极限

定理 (基本初等函数的连续性)

设基本初等函数 f 在 a 的某个邻域内有定义，则

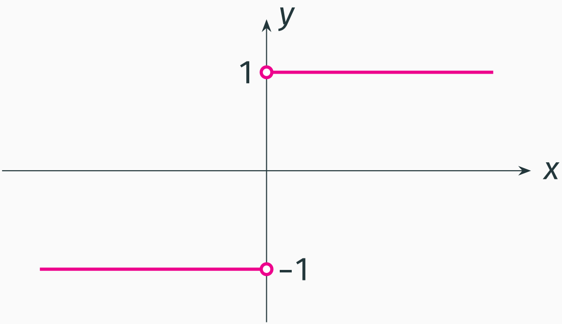
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

求基本初等函数的极限举例

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c.$
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3.$
4. $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} \ln x = \ln \mathrm{e} = 1.$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}.$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \arctan x = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}.$

极限不存在的例子

例 3. 考察函数 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ 在点 0 处的极限。



- 当 x 从 0 的左侧趋于 0 时，$f(x)$ 无限接近于 1.
- 当 x 从 0 的右侧趋于 0 时，$f(x)$ 无限接近于 −1.

左极限、右极限

设存在 $\delta > 0$ 使得函数 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a)$ 上有定义。若存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得当 x 无限接近且小于 a 时 $f(x)$ 无限接近于 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的**左极限**，记作

$$f(a^-) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^-} f(x) = A. \tag{1}$$

否则, 称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的左极限不存在。

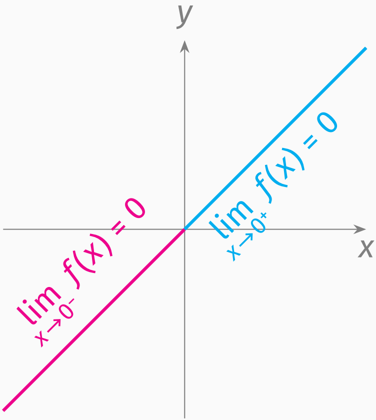
设存在 $\delta > 0$ 使得函数 $f(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 上有定义。若存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得当 x 无限接近且大于 a 时 $f(x)$ 无限接近于 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的**右极限**，记作

$$f(a^+) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^+} f(x) = A. \tag{2}$$

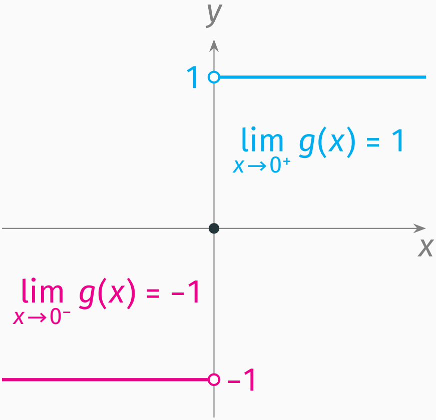
否则, 称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的右极限不存在。

左极限和右极限统称为**单侧极限**。

左右极限举例



$\lim_{x\to0} f(x) = 0$



$\lim_{x\to0} g(x)$ 不存在

左右极限与一般极限的关系

定理

设函数 f 在 a 的某个去心邻域内有定义，则

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

推论

如果极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 都存在且不相等，那么极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在。

分段函数极限计算举例

例 4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ e^x & x \geqslant 0 \end{cases}$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解. 计算可得

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0,$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1.$$

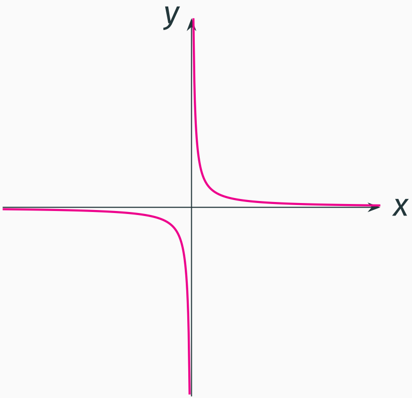
因为 $f(0^-) \neq f(0^+)$, 所以极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。 ■

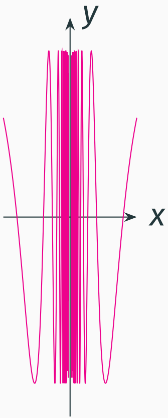
极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 只与函数 f 在 $(-\infty, 0)$ 上的定义有关，而此时 $f(x) = x^2$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2$.

极限不存在的例子

例 5. 考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

这两个极限都不存在





自变量趋于无穷时的极限

定义 (自变量趋于无穷时的极限)

设存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得函数 $f(x)$ 在 $|x| > M$ 时有定义，若存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得当 $|x|$ 无限增大时 $f(x)$ 无限接近于 A, 则称 A 为 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时的极限，记为

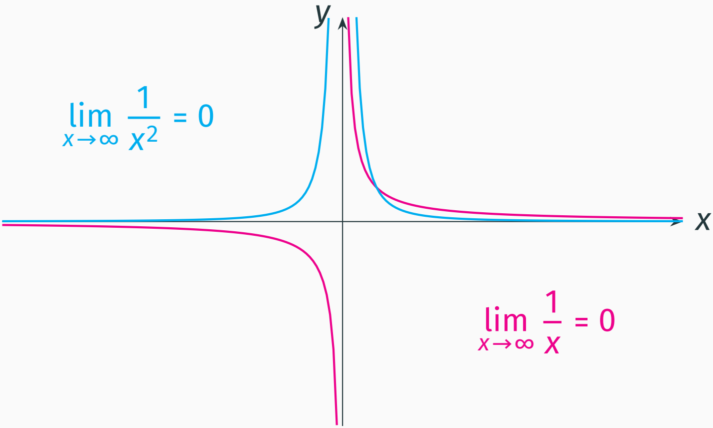
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

否则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时的极限不存在。

- 注意 $x \to \infty$, 指的是 $|x|$ 无限增大，即 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两个部分都要考虑。

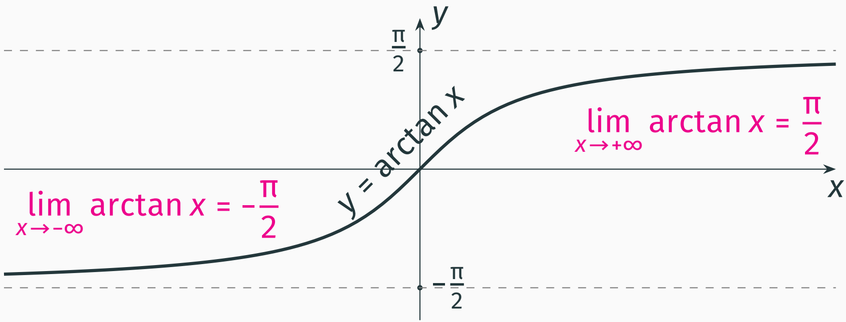
自变量趋于无穷时的极限举例

例 6. 考虑极限 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ 和 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$.



无穷极限不存在的情况

例 7. 考虑极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$. 不存在



- 只考虑 $x < 0$ 时，$\arctan x$ 无限接近于 $-\frac{\pi}{2}$;
- 只考虑 $x > 0$ 时，$\arctan x$ 无限接近于 $\frac{\pi}{2}$.

自变量趋于正、负无穷时的极限

设存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得函数 f 在 $(M, +\infty)$ 上有定义，若存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得 x 无限增大时 $f(x)$ 无限接近于 A, 则称 A 为 x 趋于正无穷时 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

否则，称函数 $f(x)$ 在 x 趋于正无穷时的极限不存在。

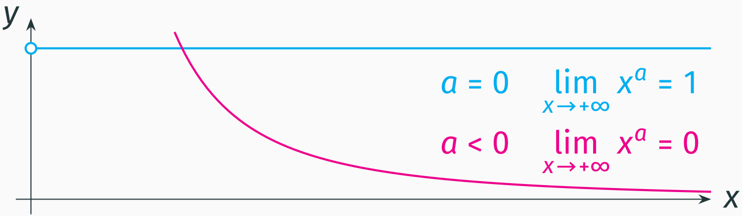
设存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得函数 f 在 $(-\infty, -M)$ 上有定义，若存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得 $-x$ 无限增大时 $f(x)$ 无限接近于 A, 则称 A 为 x 趋于负无穷时 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

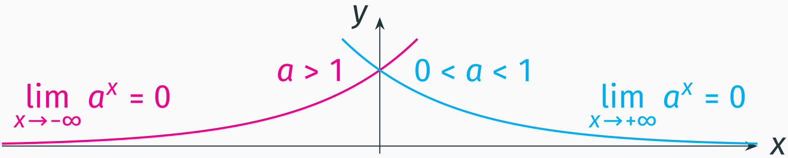
否则，称函数 $f(x)$ 在 x 趋于负无穷时的极限不存在。

幂函数和指数函数中的无穷极限

例 8. 考察极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.



例 9. 考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty} a^x$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.



无穷极限之间的关系

定理

设存在 M 使得函数 f 在 $|x| > M$ 时有定义，则

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

推论

若极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在但不相等，则极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在。

水平渐近线

定义 (水平渐近线)

称直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线，如果

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

例 10. 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的水平渐进线。

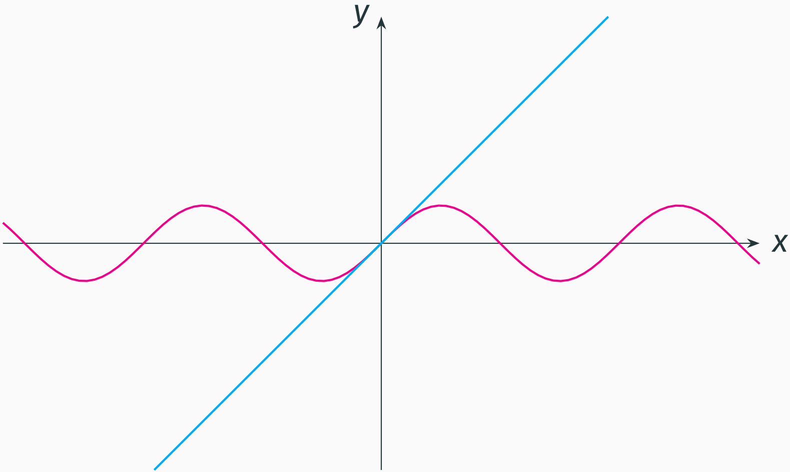
解. 因为极限

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

所以曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的水平渐进线为 $y = 0$. ■

无穷极限不存在的情况

例 11. 考虑极限 $\lim_{x\to\infty}\sin x$ 和 $\lim_{x\to\infty}x$.



函数极限的唯一性

定理

如果极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，那么它的值唯一，即

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = A\\ \lim_{x\to a} f(x) = B\end{aligned}\right\} \implies A = B.$$

定理中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 后依然成立。

局部有界性

定理 (极限的局部有界性)

如果极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，那么存在 $\delta > 0$ 和 $M \in \mathbb{R}$ 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

- 定理结论也可以描述为“函数 f 在 a 的某个去心邻域内有界”。
- 定理中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 后依然有类似的结论。

局部保号性

定理 (函数保持极限的符号)

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 若 $A > 0$ （或 $A < 0$）, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $f(x) > 0$ （或 $f(x) < 0$）.

定理中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 后也有类似的结论。

当极限为 0 时，没有局部保号性。例如

局部保号性

定理 (极限保持函数的符号)

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 若在 a 的某个去心邻域内恒有 $f(x) \leqslant 0$（或 $f(x) \geqslant 0$），则 $A \leqslant 0$（或 $A \geqslant 0$）.

- 定理中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 后也有类似的结论。

定理结论中的非严格不等式不能改为严格不等式。例如设 $f(x) = \frac{x^3}{x}$, 则 $f(x) > 0$, 但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

作业：习题 1–3

1. 1.
2. 2.
3. 3.
4. 4.

函数极限的 ε-δ 定义，$x \to a$

定义 (函数极限)

设函数 f 在 a 的某个去心邻域内有定义, 若存在常数 A, 使得对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限为 A, 记作

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

否则, 称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限不存在。

函数极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 用逻辑语言可以表示为

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \big(0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

单侧极限及其理解

函数左极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$ 用逻辑语言可以表示为

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \big((0 < |x - a| < \delta) \land (x < a) \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

函数右极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$ 用逻辑语言可以表示为

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \big((0 < |x - a| < \delta) \land (x > a) \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

函数在 $x \to a$ 时的极限与在 $x \to a^-$ 和 $x \to a^+$ 时的极限的关系，类似于“整体与局部的关系”。

左右极限与一般极限关系的证明图示

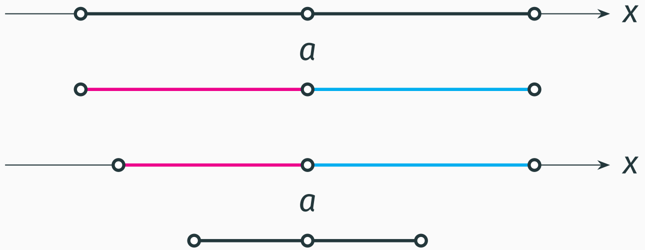
定理

设函数 f 在 a 的某个去心邻域内有定义，则

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

充分性

必要性



函数极限的 ε-δ 定义，$x \to \infty$

定义 (函数极限)

设存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得函数 f 在 $|x| > M$ 时有定义, 若存在常数 A, 使得对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x| > \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时的极限为 A, 记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

否则, 称函数 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时的极限不存在。

函数极限 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 用逻辑语言可以表示为

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \big(|x| > \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

自变量趋于正、负无穷时的极限及其理解

函数极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 用逻辑语言可以表示为

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \big((|x| > \delta) \wedge (x > 0) \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

函数右极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 用逻辑语言可以表示为

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \big((|x| > \delta) \wedge (x < 0) \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

函数在 $x \to \infty$ 时的极限与在 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时的极限的关系，类似于“整体与局部的关系”。

极限中的函数的局部性质及其描述

极限过程	对应的局部	备注
$x \to a$	$(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$	$\delta > 0$
$x \to a^-$	$(a-\delta, a)$	$\delta > 0$
$x \to a^+$	$(a, a+\delta)$	$\delta > 0$
$x \to \infty$	$(-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$	$\delta > 0$
$x \to +\infty$	$(\delta, +\infty)$	$\delta > 0$
$x \to -\infty$	$(-\infty, -\delta)$	$\delta > 0$

极限过程中逐点性质的描述，例如，称当 $x \to a$ 时 $f(x) > 0$，如果存在 $\delta > 0$，使得对任意 $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$，都有 $f(x) > 0$.

极限过程中有界无界的描述

称当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 有界，如果存在 $\delta > 0$ 使得函数 f 在 $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 上有界。

称当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 无界，如果对任意 $\delta > 0$, 当函数 f 在 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 上有定义时，函数 f 在 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 上都无界。

这里之所以用“对任意”，是因为此时关心的是 a 附近的情况。

不难发现“当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 有界”与“当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 无界”互为否命题。

极限的局部有界性

定理 (极限的局部有界性)

若函数 $f(x)$ 在 $x \to a$ 时的极限存在，则当 $x \to a$ 时函数 $f(x)$ 有界。

定理及下面推论中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 后依然成立。

推论

若当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 无界，则函数 $f(x)$ 在 $x \to a$ 时的极限不存在。

极限的局部保号性

定理 (极限的局部保号性)

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 若 $A > 0$（或 $A < 0$），则当 $x \to a$ 时 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）。

定理中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 后依然成立。

推论

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 若当 $x \to a$ 时 $f(x) \leqslant 0$（或 $f(x) \geqslant 0$），则 $A \leqslant 0$（或 $A \geqslant 0$）。

推论中的 $x \to a$, 换成 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 后依然成立。

海涅原理

定理 (海涅原理)

极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的充要条件是，对于任意取值异于 a 且收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 数列 $\left\{f(x_n)\right\}$ 都收敛到 A.

例 12. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n}$.

解. 因为极限 $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 且 $\frac{1}{n} \neq 0$, 所以由海涅原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$. ∎

有界函数极限不存在的判断

推论

如果存在两个取值异于 a 且收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 使得对应的数列 $\left\{f(x_n)\right\}$ 收敛到不同的数，则极限 $\lim\limits_{x\to a}$ 不存在。

例 13. 考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 的存在性。 不存在

解. 记 $x_n=\frac{1}{n\pi}$, 则 $x_n\neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 记 $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, 则 $y_n\neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}0=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在。 ∎

极限不存在情况的分类

依据极限的局部有界性，可以把 $x \to a$ 时，极限不存在的情况分为两类

- 当 $x \to a$ 时函数 $f(x)$ 无界
- 当 $x \to a$ 时函数 $f(x)$ 有界，但存在两个取值异于 a 且收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 使得对应的数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到不同的数。

其它极限过程下也有类似的结果。

水平渐近线

定义 (水平渐近线)

称直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线，如果

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

例 14. 求曲线 $y = \arctan x$ 的水平渐进线。

解. 因为极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 所以曲线 $y = \arctan x$ 有两条水平渐进线，分别为 $y = -\frac{\pi}{2}$ 和 $y = \frac{\pi}{2}$. ■

例 15. 求曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 的水平渐进线。

解. 因为极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$ 不存在，所以曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 只有一条水平渐进线，为 $y = 0$. ■