反常积分

王二民（✉ wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

问题

定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

的定义中要求 $[a,b]$ 为有界闭区间，且此积分存在时函数 f 在区间 $[a,b]$ 上必有界。

- 无界区间上的定积分该如何定义?
- 其它有界区间上的定积分该如何定义?
- 当函数 f 在区间上无界时，定积分该如何定义?

基本原则 尽可能保持定积分的几何意义

基本思想 用有界闭区间去逼近这些区间

区间 $[a, B)$ 上的积分

定义

设函数 f 在区间 $[a, B)$ 上有定义，若函数 f 在任意闭区间 $[a, b] \subset [a, B)$ 上都可积，则定义 f 在 $[a, B)$ 上的积分为

$$\int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{b \to B^-} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 定义中的极限存在时，称函数 f 在区间 $[a, B)$ 上可积，也称函数 f 在区间 $[a, B)$ 上的**积分是收敛的**。
- 定义中的极限不存在时，称函数 f 在区间 $[a, B)$ 上不可积，也称函数 f 在区间 $[a, B)$ 上的**积分是发散的**。

区间 $[a, B)$ 上的积分的计算

在定义 1 的条件下，若还有 F 是函数 f 在区间 $[a, B)$ 上的一个原函数，则由微积分基本定理可知

$$\int_a^B f(x)\,dx = \lim_{b\to B^-}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to B^-}\Big(F(b) - F(a)\Big)$$
$$= \lim_{b\to B^-} F(b) - F(a).$$

若记

$$\Big[F(x)\Big]_a^B \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to B^-} F(b) - F(a),$$

则此时有类似于微积分基本定理结论的公式

$$\int_a^B f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^B = \lim_{b\to B^-} F(b) - F(a).$$

区间 $(A, b]$ 上的积分

定义

设函数 f 在区间 $(A, b]$ 上有定义，若函数 f 在任意闭区间 $[a, b] \subset (A, b]$ 上都可积，则定义 f 在 $(A, b]$ 上的积分为

$$\int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{a \to A^+} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 定义中的极限存在时，称函数 f 在区间 $(A, b]$ 上可积，也称函数 f 在区间 $(A, b]$ 上的**积分是收敛的**。
- 定义中的极限不存在时，称函数 f 在区间 $(A, b]$ 上不可积，也称函数 f 在区间 $(A, b]$ 上的**积分是发散的**。

区间 $(A,b]$ 上的积分的计算

在定义 2 的条件下，若还有 F 是函数 f 在区间 $(A,b]$ 上的一个原函数，则由微积分基本定理可知

$$\int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to A^+}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to A^+}\big(F(b)-F(a)\big)$$
$$= F(b) - \lim_{a\to A^+} F(a).$$

若记

$$\Big[F(x)\Big]_A^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - \lim_{a\to A^+} F(a),$$

则此时有类似于微积分基本定理结论的公式

$$\int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_A^b = F(b) - \lim_{a\to A^+} F(a).$$

区间 (A,B) 的积分

定义

设函数 f 在区间 (A,B) 上有定义，若函数 f 在任意闭区间 $[a,b]\subset(A,B)$ 上都可积，则定义 f 在 (A,B) 上的积分为

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \int_A^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^B f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 c 是区间 (A,B) 上的任意一点。

可以证明，该定义与 c 的选择无关。

- 定义右侧的两个积分都收敛时，称函数 f 在区间 (A,B) 上可积，也称函数 f 在区间 (A,B) 上的**积分是收敛的**。
- 定义右侧的两个积分有一个发散时，称 f 在区间 (A,B) 上不可积，也称函数 f 在区间 (A,B) 上的**积分是发散的**。

区间 (A,B) 上的积分的计算

在定义的条件下，若还有 F 是函数 f 在区间 (A,B) 上的一个原函数，则由微积分基本定理可知

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_A^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^B f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(F(c) - \lim_{a\to A^+} F(x)\right) - \left(\lim_{b\to B^-} F(x) - F(c)\right) \\ &= \lim_{b\to B} F(b) - \lim_{a\to A} F(a).\end{aligned}$$

若记

$$\Big[F(x)\Big]_A^B \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to B^-} F(x) - \lim_{a\to A^+} F(a),$$

则此时有类似于微积分基本定理结论的公式

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_A^B = \lim_{b\to B^-} F(b) - \lim_{a\to A^+} F(a).$$

有界区间上反常积分的计算

例 1. 求反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

解. 计算可得

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = \lim_{x\to 0^+}(2\sqrt{x}) = 2.$$

■

函数 $\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处右连续，可以利用连续性求限值。

例 2. 求反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

解. 计算可得

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_0^1 = \lim_{x\to 1^-}\arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

■

函数 $\arcsin x$ 在 $x=1$ 处左连续，可以利用连续性求限值。

例 3. 讨论反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得当 $p \neq 1$ 时

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_0^1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1. \end{cases}$$

当 $p = 1$ 时

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_0^1 = -\lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty.$$ ■

定理

设 $a > 0$, 则反常积分 $\int_0^a \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $p < 1$.

区间 $[a,+\infty)$ 的反常积分

定义

设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义，若函数 f 在任意闭区间 $[a,b]\subset[a,+\infty)$ 上都可积，则定义函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若右侧的极限存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，否则，称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

若还有 F 是函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数，则由定义和微积分基本定理可知

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

区间 $(-\infty, b]$ 的反常积分

定义

设函数 f 在区间 $(-\infty, b]$ 上有定义，且函数 f 在任意闭区间 $[a, b] \subset (-\infty, b]$ 上都可积，则定义函数 f 在区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 若右侧的极限存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

若还有 F 是函数 f 在区间 $(-\infty, b]$ 上的一个原函数，则由定义和微积分基本定理可知

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a).$$

区间 $(-\infty, +\infty)$ 的反常积分

定义

设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义，且函数 f 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 上都可积，则定义 f 在 $\mathbb{R}$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若右侧的极限存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

若还有 F 是函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数，则由微积分基本定理可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

区间 $(A, +\infty)$ 的反常积分

定义

设函数 f 在 $(A, +\infty)$ 上有定义，且函数 f 在任意闭区间 $[a, b] \subset (A, +\infty)$ 上都可积，则定义函数 f 在区间 $(A, +\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \int_A^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 c 是区间 $(A, +\infty)$ 上的任意一点。

可以证明，该定义与 c 的选择无关。

若还有 F 是函数 f 在 $(A, +\infty)$ 上的一个原函数，则由微积分基本定理可知

$$\int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_A^{+\infty} \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to A^+} F(a).$$

区间 $(-\infty, B)$ 的反常积分

定义

设函数 f 在 $(-\infty, B)$ 上有定义，且函数 f 在任意闭区间 $[a, b] \subset (-\infty, B)$ 上都可积，则定义函数 f 在区间 $(-\infty, B)$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{B} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{B} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

可以证明，该定义与 c 的选择无关。

若还有 F 是函数 f 在 $(-\infty, B)$ 上的一个原函数，则由微积分基本定理可知

$$\int_{-\infty}^{B} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{B} = \lim_{b \to B} F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a).$$

反常积分举例

例 4. 求反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

解. 计算可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 1. \qquad \blacksquare$$

例 5. 求反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

无界区间上反常积分练习

例 6. 讨论反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

解. 计算可得，当 $p \neq 1$ 时

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

当 $p = 1$ 时

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\ln x\right)_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty. \qquad \blacksquare$$

定理

设 $a > 0$, 则反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $p > 1$.