微积分基本公式

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

如何计算定积分?

速度与位移中的启示

考虑质点在时间段 $[t_0, t]$ 内的位移

- 用速度 $v(t)$ 可表示为 $\int_{t_0}^{t} v(x)\,\mathrm{d}x$,
- 用位移 $s(t)$ 可表示为 $s(t) - s(t_0)$.

从而

$$\int_{t_0}^{t} v(x)\,\mathrm{d}x = s(t) - s(t_0).$$

而由速度的定义 $v(t) = s'(t)$ 可知 $s(t)$ 为 $v(t)$ 的一个原函数。

猜想 若 F 是 f 在 $[a, x]$ 上的一个原函数，则

$$\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

变上限积分函数及其连续性

设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积，则对任意的 $x \in [a, b]$, 函数 f 在区间 $[a, x]$ 上都可积，于是可以定义函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in [a, b].$$

称为**变上限积分函数**。

由可积的必要条件可知，存在 $M > 0$ 使得

$$|f(t)| \leqslant M \qquad t \in [a, b].$$

从而由定积分的估计可得

$$\left|F(x+h) - F(x)\right| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|h|.$$

所以函数 F 在区间 $[a, b]$ 上连续，此性质称为**定积分的连续性**。

变上限积分函数的导数

由导数的定义、定积分的性质、积分中值定理及函数 f 的连续性计算可得

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{h\to 0} f\big(\xi(h)\big)\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

其中 $\xi(h)$ 在 x 与 $x+h$ 之间，从而 $\lim\limits_{h\to 0}\xi(h) = x$.

变上限积分函数的导数

定理 (变上限积分函数的导数)

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

在区间 $[a,b]$ 上可导，且

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

在区间端点处 $F'_+(a)=f(a)$, $F'_-(b)=f(b)$.

推论 (连续函数必有原函数)

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，则定理中的函数 $F(x)$ 是函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数。

变上限积分函数的导数

例 1. 求函数 $G(x) = \int_0^{x^3} \arctan t \, \mathrm{d}t$ 的导数.

解. 定义

$$F(u) = \int_0^u \arctan t \, \mathrm{d}t,$$

则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} F(u) = \arctan u$. 令 $u = x^3$, 则 $G(x) = F(u)$, 从而由复合函数的求导法则可知

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} F(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ &= \arctan u \cdot 3x^2 = 3x^2 \arctan x^3. \end{aligned}$$

∎

变限积分函数的导数

设函数 f 连续，则

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad F'(x) = f(x).$$

从而对于可导函数 g 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

同理，若函数 h 可导，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -f(h(x))h'(x).\end{aligned}$$

与变上限积分函数相关的极限

例 2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,dt}{x^2}$.

解. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ 及积分的连续性可知

$$\lim_{x\to 0}\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,dt = 0,$$

即所求极限为"$\frac{0}{0}$"未定式，从而由洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,dt}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-(\cos x)^2}\cdot(\cos x)'}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-(\cos x)^2}\sin x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-(\cos x)^2}}{2} = \frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

■

定积分与变上限积分函数

设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则由变上限函数的导数可知

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad x\in[a,b]$$

是函数 f 的一个原函数。设 G 是 f 在 $[a,b]$ 上的任意一个原函数，则存在 $C\in\mathbb{R}$ 使得

$$F(x)=G(x)+C$$

因为

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

所以 $C=-G(a)$, 从而 $F(x)=G(x)-G(a)$, 所以

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)=G(b)-G(a).$$

微积分基本定理

定理 (牛顿 – 莱布尼茨公式)

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

- 若把连续的条件改成可积，定理的结论依然成立。
- 定理把定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算问题转化成了不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算问题。

通常记 $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$, 从而定理的结论可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b.$$

定积分的计算举例

例 3. 求定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

解. 因为 $\frac{x^3}{3}$ 是函数 x^2 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数，所以

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

例 4. 求定积分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 因为 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \big[\arctan x\big]_{-1}^{\sqrt{3}} &= \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

定积分的计算举例

例 5. 求定积分 $\int_1^{e} \frac{1}{x}\,dx$.

解. 因为 $\ln x$ 是函数 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数，所以

$$\int_1^{e} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^{e} = 1.$$

■

例 6. 计算过程 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = 0$ 对吗?

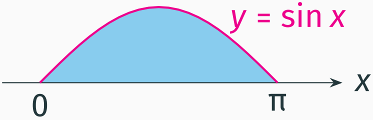
解. 不对。函数 $\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 时无定义，即使补充定义也不可能连续，所以不能直接用微积分基本定理，实际上 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界，从而所求积分不存在。 ■

定积分计算练习

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = 1.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \tan x \, dx = \left[\sec x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x-1} = \left[\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln 2.$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$
5. $\displaystyle\int_2^3 (x + x^3) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_2^3 = \frac{75}{4}.$

定积分的简单应用

例 7. 求曲线 $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ 与 x 轴围成的有界区域的面积。



解. 由定积分的几何意义可知所求面积为

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2. \qquad \blacksquare$$

变上限积分函数的导数

例 8. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 内连续且 $f(x)>0$. 证明函数

$$F(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增。

解. 由变上限积分函数的导数公式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=xf(x).$$

从而由商的导数公式及 $f(x)>0$ 可得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right) \Big/ \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &= \left(f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\right) \Big/ \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

从而函数 F 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增。 ■

作业：习题 5–2

- 5.(1),
- 8.(2), 8.(5), 8.(12).

微积分基本定理

定理

若函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积，且 F 在 f 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

微积分基本定理的证明

证明. 取区间 $[a,b]$ 的 n 等分分割 P_n, 由 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的原函数及微分中值定理，对任意 $i=1,2,\cdots,n$, 可取 ξ_i 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记取法为 $\xi(P_n)$, 从而

$$\begin{aligned}\sigma(f;P_n,\xi(P_n))&=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\big(F(x_k)-F(x_{k-1})\big)\\&=F(x_n)-F(x_0)=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

由函数 f 在 $[a,b]$ 上积分的存在性，让 n 趋于无穷，并求极限可知

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi)&=\lim_{n\to\infty}\sigma(f;P_n,\xi(P_n))=\lim_{n\to\infty}\big(F(b)-F(a)\big)\\&=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

定理得证。 ∎