

无穷小的比较

王二民 (✉ wagermn@126.com)

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

高阶无穷小

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $x \rightarrow a$ 时的无穷小, 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称

- 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ **高阶的无穷小**,
- 当 $x \rightarrow a$ 时, $g(x)$ 是比 $f(x)$ **低阶的无穷小**,

记为

$$f(x) = o(g(x)), \quad (x \rightarrow a).$$

例 1. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 所以 $x \rightarrow 0$ 时 $x^2 = o(x)$.

例 2. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, 所以 $x \rightarrow 0$ 时 $x^3 = o(x)$.

等价无穷小

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $x \rightarrow a$ 时的无穷小, 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, 则称当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**同阶的无穷小**。

例 3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 x^2 与 $2x^2$ 是同阶无穷小。

特殊地, 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**等价无穷小**。记为

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \rightarrow a).$$

例 4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $\sin x$ 与 x 是等价无穷小。

常用等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时，有以下常用等价无穷小

$$ax \sim (1+x)^a - 1$$

$$x \ln a \sim a^x - 1 \quad a > 0$$

$$x \sim e^x - 1$$

$$x \sim \ln(1+x)$$

$$x \sim \sin x \sim \tan x$$

$$\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x$$

$$x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

等价无穷小的与高阶无穷小的关系

定理

同一极限过程下

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

💡 由等价的对称性，也等价于 $f(x) - g(x) = o(f(x))$.

- 因为 $x \rightarrow 0$ 时 $x^2 = o(x)$, 所以 $x \sim x + x^2$.
- 因为 $x \rightarrow 0$ 时 $x^3 = o(x)$, 所以 $x \sim x + x^3$.

等价无穷小替换

定理 (等价无穷小替换)

设 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 和 $g(x)$ 与 $\bar{g}(x)$ 都是 $x \rightarrow a$ 时的等价无穷小, 则当极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$ 存在时, 有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

🗨 极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$ 要么同时不存在, 要么同为无穷大, 要么同时存在且极限值相等。

🗨 设 \cdot 与 $\bar{\cdot}$ 是等价无穷小, 则由等价的自反性可知

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\bar{f}(x)}{g(x)} = \lim \frac{f(x)}{\bar{g}(x)} = \lim \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

等价无穷小替换证明

证明. 因为 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 和 $g(x)$ 与 $\bar{g}(x)$ 都是 $x \rightarrow a$ 时的等价无穷小, 所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\bar{f}(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{g}(x)}{g(x)} = 1.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{\bar{f}(x)} \cdot \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} \cdot \frac{\bar{g}(x)}{g(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\bar{f}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{g}(x)}{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}. \end{aligned}$$

等价无穷小的应用

例 5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$.

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 因为 $\sin x \sim x$ 且 $3x \rightarrow 0$, 所以 $\sin 3x \sim 3x$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 因为 $\tan x \sim x$ 且 $2x \rightarrow 0$, 所以 $\tan 2x \sim 2x$.

从而利用等价无穷小替换定理可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

例 6. 利用等价无穷小计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{e^{6x}-1}$.

解. 利用等价无穷小替换定理可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{e^{6x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

等价无穷小的应用

例 7. 利用等价无穷小计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x^3 + 2x}$.

解. 由等价无穷小替换计算可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2 + 2} = \frac{5}{2}. \quad \blacksquare$$

解. 因为, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $x^3 = o(2x)$, 所以 $2x \sim 2x + x^3$, 从而由等价无穷小替换计算可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}. \quad \blacksquare$$

等价无穷小的应用

例 8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(e^{2x} - 1) \arctan 3x}$.

解. 由等价无穷小可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(e^{2x} - 1) \arctan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x \cdot 2x} = \frac{1}{3}.$$

💡 可以对极限中的因式直接用等价无穷小代换。

例 9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\arctan 2x}$.

解. 由等价无穷小可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\arctan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

等价无穷小的应用

例 10. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解. 由 $x \rightarrow 0$ 时 $\tan x \sim x$ 和 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ 可得:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \tan x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x}{x^3} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

🗨 等价无穷小替换只能用于乘法和除法中。

作业：习题 1-7

- 1,
- 4.(2),
- 5.(1), 5(3).

小 o 记法

若存在函数 $\alpha(x)$ 使得

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

且 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, 则记为

$$f(x) = o(g(x)), \quad (x \rightarrow a).$$

- 不使用除法定义的好处是函数 $g(x)$ 可以取到 0.
- 定义中不需要极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都是 0.
- 公式的意思是, 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 远小于 $g(x)$.
- 更准确地, 符号 $o(g(x))$ 表示一个集合, 而表达式 $f(x) = o(g(x))$ 中的 $=$ 表示元素与集合间的属于关系。
- 其它极限过程下也有类似的定义。

小 o 记法举例

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 = o(x)$.
- 当 $x \rightarrow -\infty$, $e^x = o(x)$.
- 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x = o(x^2)$.
- 当 $x \rightarrow +\infty$, $2^x = o(3^x)$.
- 当 $x \rightarrow +\infty$, $\ln x = o(x)$.

小 o 记法的运算

在同一极限过程下, 若函数 $h(x)$ 有适当的定义域, 则

$$o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$$

$$f(x) = o(g(x)) \implies o(f(x)) = o(g(x))$$

$$f(x) = o(g(x)) \implies o(f(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$$

$$f(x)o(g(x)) = o(f(x)g(x))$$

$$o(f(x))o(g(x)) = o(f(x)g(x))$$

极限中的等价

若存在函数 $\alpha(x)$ 使得

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

且 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$, 则称 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价, 记为

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \rightarrow a).$$

- 不使用除法定义的好处是函数 $g(x)$ 可以取到 0.
- 定义中不需要极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都是 0.
- 其它极限过程下也有类似的定义。

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x + x^2 \sim x$.
- 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x + x^2 \sim x^2$.

等价关系

同一极限过程下（如 $x \rightarrow a$ ），容易证明上面定义的等价满足，对于“任意”（在 a 的某个去心邻域上有定义）的函数 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$, 都有

自反性 $f(x) \sim f(x)$.

对称性 若 $f(x) \sim g(x)$, 则 $g(x) \sim f(x)$.

传递性 若 $f(x) \sim g(x)$ 且 $g(x) \sim h(x)$, 则 $f(x) \sim h(x)$.

等价的运算

在同一极限过程下,

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \\ f_1(x) = o(g_1(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) + g(x) \sim g(x).$$

💡 简单地说, 从等价的角度来看, 加法中相对较小的量可以忽略。

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x)g(x) \sim f_1(x)g_1(x)$$

$$f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x)h(x) \sim g(x)h(x)$$

$$f(x) \sim g(x) \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)}$$

💡 最后一个等式, 要求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在极限过程中非零。

等价替换定理

定理 (等价替换定理)

如果在同一极限过程中 $f_1(x) \sim f_2(x)$ 且 $g_1(x) \sim g_2(x)$, 则
在同一极限过程中

$$\lim(f_1(x) \cdot g_1(x)) = \lim(f_2(x) \cdot g_2(x)).$$

由等价的自反性, 不难验证, 在定理的条件下有

$$\begin{aligned}\lim(f_1(x) \cdot g_1(x)) &= \lim(f_1(x) \cdot g_2(x)) \\ &= \lim(f_2(x) \cdot g_1(x)) = \lim(f_2(x) \cdot g_2(x)).\end{aligned}$$