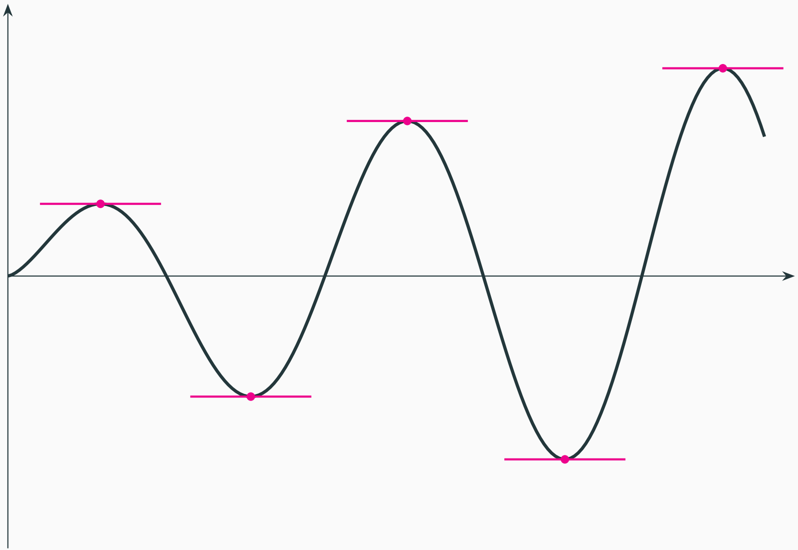
微分中值定理

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

函数在极值点处的形态



费马引理

引理 (费马引理)

设函数 $f(x)$ 在点 a 处可导且存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(x) \leqslant f(a), \qquad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

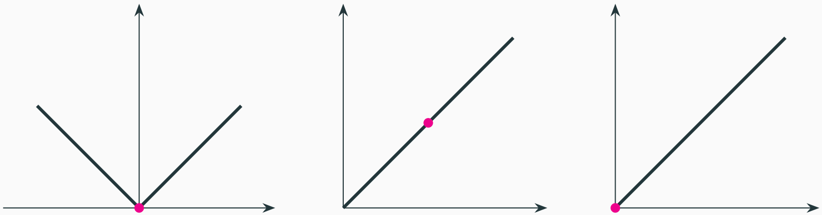
或

$$f(x) \geqslant f(a), \qquad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

则 $f'(a) = 0$.

- 费马引理的物理意义是：在直线运动中，当运动的方向发生变化时，速度一定为零。
- 从最值问题的角度而言费马引理可以叙述为：若函数在内部极值点处可导，则此导数一定为零。

费马引理中三个条件缺一不可



1. 条件 f 在点 a 处可导不能去掉，如：$f(x) = |x|$, $a = 0$.
2. 条件 $f(x) \geqslant f(a)$ 不能去掉，如：$f(x) = x$, $a = 1$.
3. 条件 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 不能去掉，如：$f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, $a = 0$.

费马引理证明

证明. 因为 f 在 a 处可导，从而

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

又 $f(x) \leqslant f(a), x \in (a - \delta, a + \delta)$, 利用单侧极限与一般极限的关系及极限的局部保号性可得

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

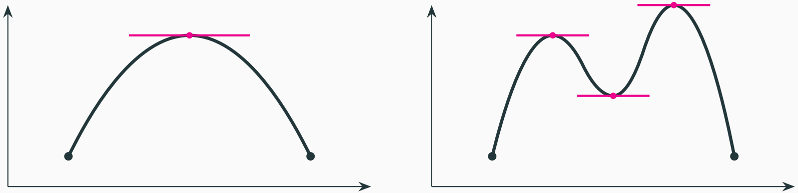
即 $f'(a) \leqslant 0$ 且 $f'(a) \geqslant 0$, 所以 $f'(a) = 0$.

在情况 $f(x) \geqslant f(a)$ 下，取 $g(x) = -f(x)$, 则 $g(x) \leqslant g(a)$, 从而 $g'(a) = 0$, 由 $f(x) = -g(x)$, 可知 $f'(x) = -g'(x)$, 从而 $f'(a) = -g'(a) = 0$. ∎

罗尔定理

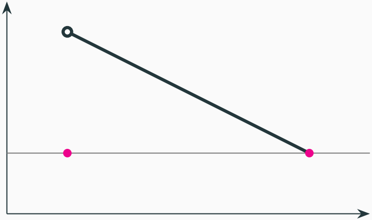
定理 (罗尔定理)

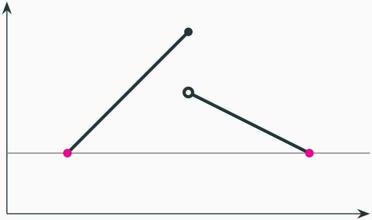
设函数 $f(x)$, 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导且 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.



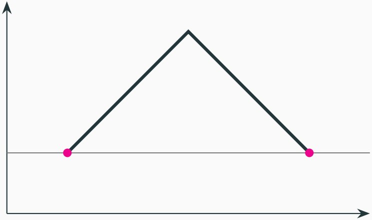
- 物理意义：直线运动中，如果质点经过一段时间又回到了出发点，则在此时间段内必有某一时刻质点的速度为 0.
- 几何意义：一阶光滑平面曲线段中，必有某一点的切线与曲线两端点连线是平行的。

罗尔定理中的三个条件缺一不可

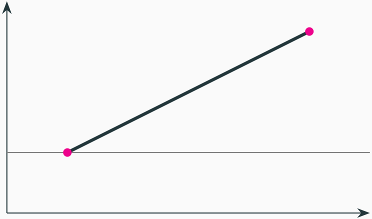




f 在 $[a,b]$ 上连续不能去掉



f 在 (a,b) 上可导不能去掉



$f(a)=f(b)$ 不能去掉

罗尔定理证明

证明. 因为函数 f 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续，从而由最值定理存在 $x_m, x_M \in [a, b]$, 使得 f 在 x_m 处取到最小值 m, 在 x_M 处取到最大值 M.

1. 如果 $m = M$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) = m$, 从而对任意 $x \in (a, b)$ 都有 $f'(x) = 0$, 定理得证。
2. 如果 $m < M$, 由 $f(a) = f(b)$ 可知，x_m 和 x_M 至少有一个在开区间 (a, b) 内。不失一般性，设 $x_m \in (a, b)$, 则由罗尔定理可知 $f'(x_m) = 0$, 定理得证。 ■

区间上导数非零的函数

定理

若函数 f 在区间 I 上连续，在 I 的内部可导且 $f' \neq 0$, 则函数 f 在区间 I 上严格单调，且

- 当 f 在 I 上单调递增时，还有 $f' > 0$,
- 当 f 在 I 上单调递减时，还有 $f' < 0$.

证明. 在区间 I 上任取两个点 $a < b$, 若 $f(a) = f(b)$, 由 f 的可导性，在区间 $[a, b]$ 上应用罗尔定理，可知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 与 $f'(x) \neq 0$ 矛盾，从而 $f(a) \neq f(b)$, 即 f 为单射。从而 f 是区间 I 上有反函数的连续函数，所 f 在 I 上严格单调。

不妨设 f 在 I 上严格递增，在 I 的内容任取 a, 则

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0,$$

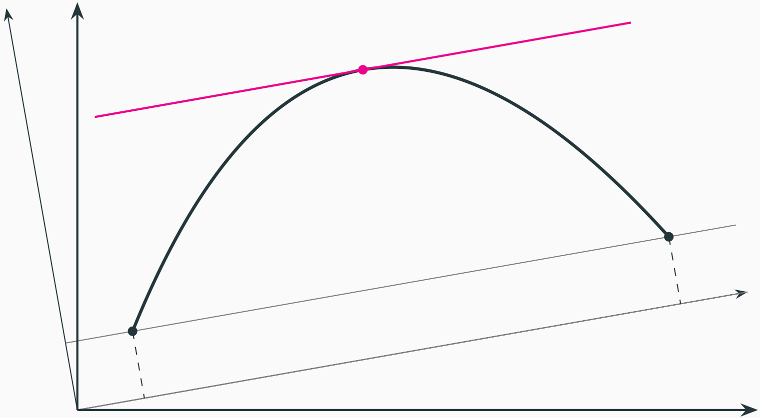
再由函数的可导性及极限的保号性可知

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0,$$

又 $f(a)' \neq 0$, 所以 $f'(a) > 0$.

同理可证 f 在 I 上严格递减时 $f' < 0$. ∎

换个坐标系看罗尔定理的几何意义



拉格朗日中值定理

定理 (拉格朗日中值定理)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- 物理意义：直线运动中，一段时间内的平均速度一定等于这段时间内某一时刻的瞬时速度。
- 定理结论的另一个常见形式是

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a,b).$$

- 此定理的另一个用途是可以通过导数来估计函数的值，如

$$|\sin x - 0| = |\sin x - \sin 0| = |(\cos\xi)x| \leqslant |x|$$

拉格朗日中值定理的证明

证明. 定义函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

则函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且 $F(a) = F(b) = 0$，在开区间 (a, b) 内可导且

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

从而由罗尔定理可知，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

定理得证。 ■

区间上导数为零的函数

定理

设 $f(x)$ 是定义在某区间上的函数，则：

$$f(x) = c \iff f'(x) = 0.$$

条件“函数定义在某区间上”不能去掉，如 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ 在其定义域上都有 $f'(x) = 0$, 但它不是常值函数。

证明. 充分性是显然的，下面证明必要性。任取区间上的两点 a, b 不妨设 $a < b$，则 $[a, b]$ 属于此区间。因为 $f'(x) = 0$, 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理，可得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) = 0, \quad \xi \in (a, b).$$

从而 $f(b) = f(a)$, 即 f 在区间上任两点处的取值相等，从而 f 在区间上是常值函数。 ■

用中值定理证明不等式

例 1. 证明当 $x > 0$ 时

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x.$$

证明. 显然函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在区间 $[0, x]$ 上满足拉格朗日定理中的条件，且 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. 从而存在 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = f'(\xi)x = \frac{x}{1+\xi}.$$

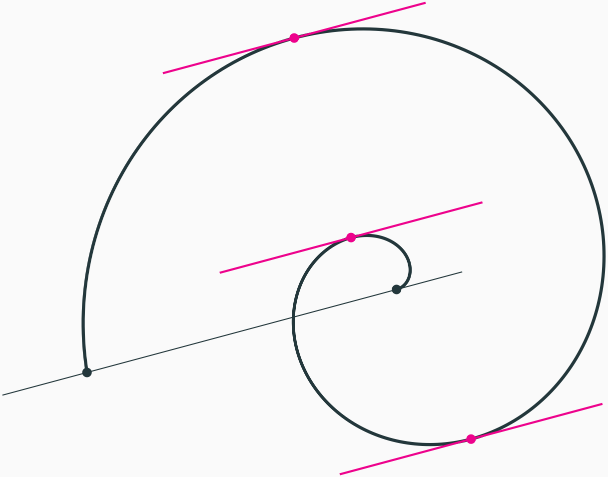
由 $x > 0$ 及 $\xi \in (0, x)$ 可得

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < \frac{x}{1+0} = x.$$

从而

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x. \qquad \blacksquare$$

中值定理的几何意义对更一般的曲线成立吗?



柯西中值定理

定理 (柯西中值定理)

设函数 f 和 g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导且 $g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

- 取 $g(x) = x$, 则柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。
- 物理意义是：平面运动中，一段时间内，一定有某一时刻的速度的方向与此段时间段内位移的方向是相同的。
- 几何意义：一阶光滑平面曲线段中，必有某一点的切线与曲线两端点连线是平行的。

柯西中值定理的证明

证明. 定义函数

$$H(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big) - \big(g(x) - g(a)\big)\big(f(b) - f(a)\big)$$

则函数 $H(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且 $H(a) = H(b) = 0$，在开区间 (a, b) 内可导且

$$H'(x) = f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(x)\big(f(b) - f(a)\big)$$

从而由罗尔定理可知，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$H'(\xi) = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big) = 0$$

由 $g'(x) \neq 0$ 用拉格朗日中值定理可知 $g(a) \neq g(b)$, 从而上式两端同时除以非零量 $\big(g(b) - g(a)\big)g'(\xi)$ 再化简定理即得证。 ∎