

# 极限存在准则 两个重要极限

---

王二民 ( ✉ wagermn@126.com )

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

# 夹逼准则（数列形式）

## 定理（夹逼准则）

如果数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  和  $\{z_n\}$  满足

- 存在  $N \in \mathbb{N}_+$ , 使得对于任意  $n > N$  都有  $y_n \leq x_n \leq z_n$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ .

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

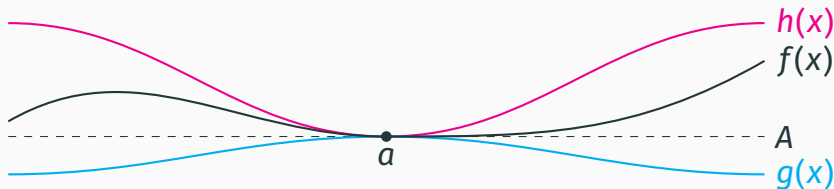
# 夹逼准则（函数形式）

## 定理（夹逼准则）

若在  $a$  的某个去心邻域内有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A.$$

则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

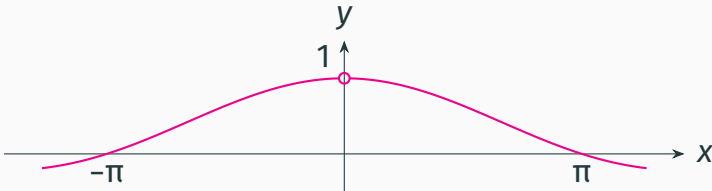


定理中的  $x \rightarrow a$ （对应的“在  $a$  的某个去心邻域”），可以相应的换成  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

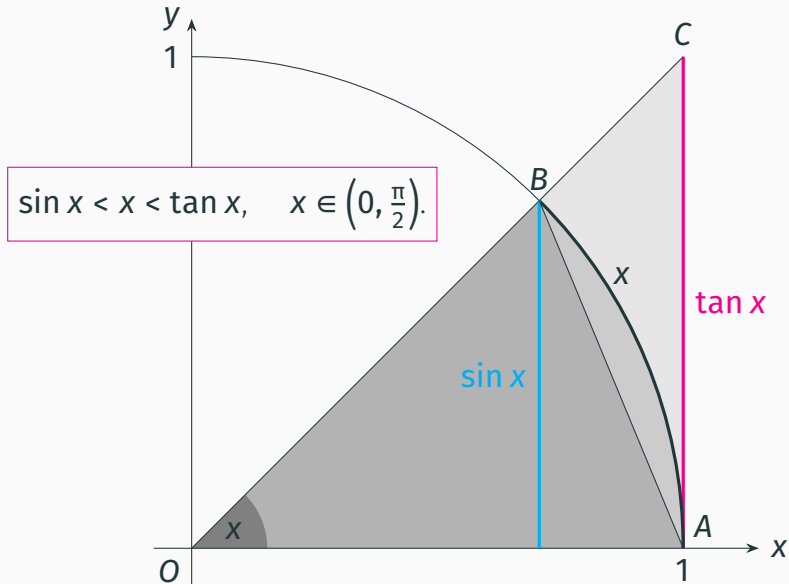
# 第一个重要极限

## 定理 (第一个重要极限)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



# 三角不等式



# 第一个重要极限的证明

**证明.** 由图知  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时  $S_{\triangle OAB} < S_{\text{扇形}OAB} < S_{\triangle OAC}$ , 即

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

变形可知

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因为  $\cos x$  和  $\frac{\sin x}{x}$  都是偶函数, 从而

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

又因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , 所以由夹逼准则可知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . ■

# 正切函数相关的极限

**例 1.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

**解.** 由极限的四则运算规律和第一个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\&= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} \\&= 1.\end{aligned}$$



# 利用第一个重要极限计算极限

**例 2.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ .

**解.** 把  $\frac{\sin x^2}{x^2}$  看成  $\frac{\sin u}{u}$  与  $u = x^2$  的复合。因为  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , 且  $x^2 \neq 0$ , 所以由复合函数的极限运算规律可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$





# 第一个重要极限的一般形式

## 推论

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

因为表达式  $\frac{\sin x}{x}$  有意义时，必有  $x \neq 0$ ，所以这里省略了复合函数极限运算规律中的条件  $x \neq 0$ 。

- 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$ 。
- 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \ln x}{\ln x} = 1$ 。
- 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x}{\sin x} = 1$ 。

# 利用第一个重要极限计算极限

**例 3.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

**解.** 由极限的四则和复合运算规律及第一个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \\ &= 3.\end{aligned}$$

类似地有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a.$$

# 反三角函数相关的极限

**例 4.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ .

**解.** 令  $u = \arcsin x$ , 则  $x = \sin u$ , 从而

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{u}{\sin u}.$$

即  $\frac{\arcsin x}{x}$  可以看成  $\frac{u}{\sin u}$  与  $u = \arcsin x$  的复合。又当  $x \rightarrow 0$  时  $u \rightarrow 0$ , 所以由复合函数的极限运算规律可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}} = 1. \quad \blacksquare$$

类似地有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

# 余弦函数相关的极限

例 5. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

解. 化简, 并由第一个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\&= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

# 单调有界原理

设  $\{x_n\}$  是一个数列，若

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$

则称数列  $\{x_n\}$  单调递增；若

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$$

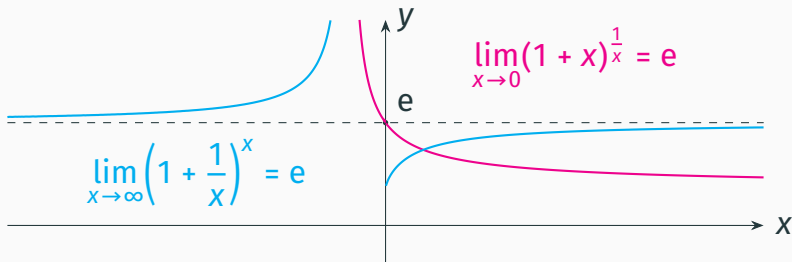
则称数列  $\{x_n\}$  单调递减。

## 定理

单调有界数列必收敛。

- 如果数列  $\{x_n\}$  单调递增且有上界，则数列  $\{x_n\}$  收敛。
- 如果数列  $\{x_n\}$  单调递减且有下界，则数列  $\{x_n\}$  收敛。

## 第二个重要极限相关的函数图象



特殊形式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

其中

$$e = 2.718281828459045235360287471352 \dots$$

称为**自然常数**。

## 第二个重要极限应用举例

**例 6.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ .

**解.** 由第二个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{e}\end{aligned}$$



## 第二个重要极限应用举例

**例 7.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ .

**解.** 由极限的运算规律及第二个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^x \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right)^{-1} \\&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right)^{-1} \\&= e^{-1}\end{aligned}$$



## 第二个重要极限应用举例

**例 8.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ .

**解.** 由第二个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-2x))^{\frac{1}{x}} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-2x))^{\frac{1}{-2x} \cdot (-2)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + (-2x))^{\frac{1}{-2x}} \right)^{-2} \\&= \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-2x))^{\frac{1}{-2x}} \right)^{-2} \\&= e^{-2}.\end{aligned}$$



## 第二个重要极限的一般形式

### 推论

$$\lim \text{🐱} = 0 \implies \lim (1 + \text{🐱})^{\frac{1}{\text{🐱}}} = e.$$

💡 因为表达式  $(1 + \text{🐱})^{\frac{1}{\text{🐱}}}$  有意义时, 必有  $\text{🐱} \neq 0$ , 所以这里省略了复合函数极限运算规律中的条件  $\text{🐱} \neq 0$ .

主要特征是, 被求极限表达式是幂指函数的形式, 且

- 底数部分  $1 + \text{🐱} \rightarrow 0$ ,
- 指数部分  $\text{🐱} \rightarrow \infty$ ,
- 底数部分减去 1 的部分  $\text{🐱}$  与指数部分  $\frac{1}{\text{🐱}}$  互为倒数。

# 对数函数相关的重要极限

**例 9.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

**解.** 由第二个重要极限计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \ln(1+x) \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\&= \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \\&= \ln e \\&= 1.\end{aligned}$$



# 指数函数相关的重要极限

例 10. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

解. 令  $u = e^x - 1$ , 则  $x = \ln(u + 1)$ , 从而

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{u}{\ln(u + 1)}$$

即  $\frac{e^x - 1}{x}$  可以看成  $\frac{u}{\ln(u+1)}$  与  $u = e^x - 1$  的复合。又  $x \rightarrow 0$  时  $u \rightarrow 0$ , 所以由复合函数的极限运算规律可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(u + 1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(u+1)}{u}} = 1. \quad \blacksquare$$

# 指数函数相关的重要极限

**例 11.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ , 其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ .

**解.** 利用极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  及  $a^x = e^{x \ln a}$  计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x \ln a} - 1) \ln a}{x \ln a} \\&= \ln a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \\&= \ln a.\end{aligned}$$

一般地, 对于任意  $a > 0$  都有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

# 幂函数相关的重要极限

例 12. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}$ , 其中  $a \neq 0$ .

解. 计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} \cdot \frac{a \ln(1+x)}{x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+x)}{x} \\&= a.\end{aligned}$$

一般地, 对任意  $a \in \mathbb{R}$  有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

# 重要极限结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

## 作业：习题 1-6

- 1.(1), 1.(3), 1.(5),
- 2.(1), 2.(3).



# 夹逼准则

## 定理 (夹逼准则)

如果当  $x \rightarrow a$  时  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

- 定理中  $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .
- 把定理中的  $x \rightarrow a$ , 换成  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , 或  $x \rightarrow -\infty$ , 结论依然成立。
- 数列极限中也有类似的结论。
- 当  $A = \infty$  时结论不再成立, 如设  $x_n = (-1)^n$ ,  $y_n = -n$ ,  $z_n = n$ , 则  $y_n \leq x_n \leq z_n$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$ .

# 无穷项和的极限

**例 13.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$ .

**解.** 对于任意  $k = 1, 2, \dots, n$ , 有

$$\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

从而对  $k = 1, 2, \dots, n$  求和可得

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1,$$

从而由夹逼准则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = 1. \quad \blacksquare$$

# 实数的完备性

## 公理 (实数的完备性)

设  $X \subset \mathbb{R}$ , 若  $X$  有上界, 则必有最小上界, 称为  $X$  的上确界, 记为  $\sup X$ ; 若  $X$  有下界, 则必有最大下界, 称为  $X$  的下确界, 记为  $\inf X$ .

💡 当  $X$  无上界时, 也可以称  $X$  的上确界为  $+\infty$ , 记为  $\sup X = +\infty$ , 当  $X$  无下界时, 也可以称  $X$  的下确界为  $-\infty$ , 记为  $\inf X = -\infty$ .

## 定理 (单调有界原理)

若函数  $f(x)$  在单侧极限过程中单调且有界, 则对应的极限存在。

💡 单侧极限过程指的是  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow +\infty$  和  $x \rightarrow -\infty$ .

# 单调有界原理

## 定理 (单调有界原理)

若存在  $\delta > 0$  使得函数  $f$  在  $(a - \delta, a)$  (或  $(\delta, +\infty)$ ) 上单调且有界, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  (或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ) 存在。

记函数  $f$  在对应区间上值域为  $R$ , 若  $f$  单调递增, 则极限值为  $\sup R$ , 若  $f$  单调递减, 则极限值为  $\inf R$ .

## 定理 (单调有界原理)

若存在  $\delta > 0$  使得函数  $f$  在  $(a, a + \delta)$  (或  $(-\infty, -\delta)$ ) 上单调且有界, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  (或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ) 存在。

记函数  $f$  在对应区间上值域为  $R$ , 若  $f$  单调递增, 则极限值为  $\inf R$ , 若  $f$  单调递减, 则极限值为  $\sup R$ .

# 单调有界原理

🗨 单调有界原理只能用于单侧极限和数列极限，如设

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (0, 1) \\ x - 1, & x \in (-1, 0) \end{cases}.$$

虽然  $f(x)$  单调递增且有界，但极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  并不存在。

## 第二个重要极限的证明

用二项式定理展开可得

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + C_n^n \left(\frac{1}{n}\right)^n \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\&\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\&= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\&< 3\end{aligned}$$

## 第二个重要极限的证明

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 \frac{1}{n+1} + C_{n+1}^2 \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\&\quad + \cdots + C_{n+1}^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^n + C_{n+1}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\&\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + C_{n+1}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\&> x_n\end{aligned}$$

从而数列  $\{x_n\}$  单调递增且有上界, 由单调有界原理可知, 数列  $\{x_n\}$  收敛, 并定义其极限为  $e$ , 即

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

## 第二个重要极限的证明

对于任意实数  $x > 1$ , 有  $[x] \leq x < [x] + 1$ , 从而

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

由自然常数  $e$  的定义计算可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1} = e$$

从而由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$



## 第二个重要极限的证明

由此计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1} \frac{x}{1+x}\right) \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{-(x+1)} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{-(1+x)}\right)^{-(x+1)} = e\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

# 幂指函数的极限举例

**例 14.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x}$ .

**解.** 由幂指函数的极限公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \right)^{\frac{2x}{x+1}} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1}} \\ &= e^2.\end{aligned}$$



# 幂指函数的极限举例

**例 15.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{2x}$ .

**解.** 由幂指函数的极限公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-5}{x+3} \right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{-5}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-5}} \right)^{\frac{-10x}{x+3}} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-5}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-5}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x}{x+3}} \\ &= e^{-10}. \end{aligned}$$



# 幂指函数的极限举例

**例 16.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**解.** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$  和幂指函数的极限公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{x^2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} \\&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}} \\&= e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

