

# 函数的微分

---

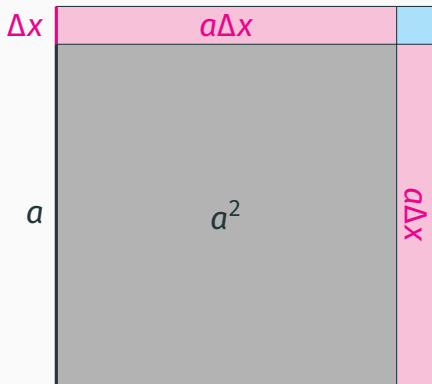
王二民 ( ✉ [wagermn@126.com](mailto:wagermn@126.com) )

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

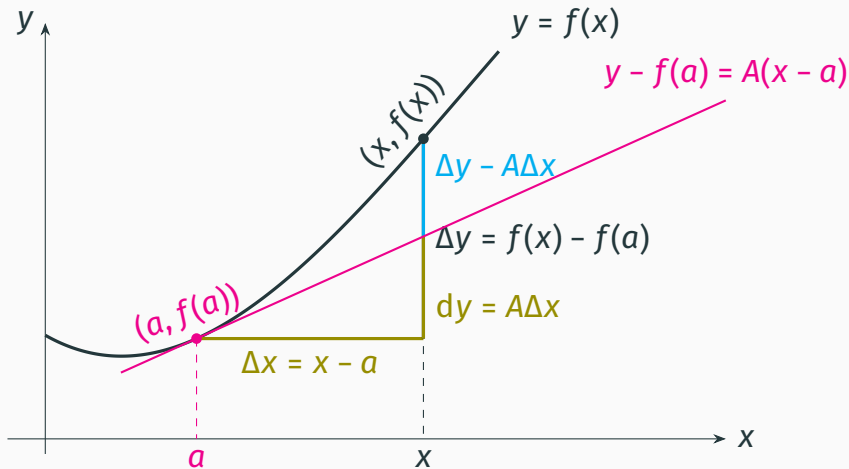
# 估计正方形面积的增量

$$(a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2$$



当  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $(\Delta x)^2$  是关于  $\Delta x$  的高阶无穷小, 从而  $x^2$  在  $x = a$  附近的函数值增量主要由  $2a\Delta x$  的大小决定。

# 函数的线性化



# 微分的定义

## 定义 (微分)

设函数  $y = f(x)$  在  $a$  的某个邻域内有定义, 当  $x$  有增量  $\Delta x$  时  $y$  的增量为  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ , 若存在常数  $A$  使得

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

则称函数  $f$  在点  $a$  处**可微**, 称  $A\Delta x$  为函数  $f$  在点  $a$  处有增量  $\Delta x$  时的**微分**, 记为  $dy|_{x=a}$ , 即

$$dy|_{x=a} = A\Delta x.$$

- 常数  $A$  和  $\Delta x$  无关, 但一般跟  $a$  有关。
- $dy$  也称为  $\Delta y$  关于  $\Delta x$  的**线性主部**。
- $\Delta y = dy + o(\Delta x), (\Delta x \rightarrow 0)$ .

# 一次函数的微分

**例 1.** 利用定义求函数  $y = ax + b$  的微分。

**解.** 计算可得

$$\Delta y = (a(x + \Delta x) + b) - (ax + b) = a\Delta x$$

从而由微分的定义可知

$$dy = a\Delta x.$$

💡 若令  $a = 1, b = 0$ , 则  $y = x$ , 从而  $dx = dy = \Delta x$ .

## 定理

自变量的微分等于自身的增量。

为了对称，通常把定义中的微分写成

$$dy = A dx.$$

## 二次函数的微分

**例 2.** 求函数  $y = f(x) = x^2$  的增量  $\Delta y$  和微分  $dy$ , 并进一步计算  $x = 1, \Delta x = 0.1$  时的增量  $\Delta y$  和微分  $dy$ .

**解.** 计算可得

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

显然  $(\Delta x)^2$  是  $\Delta x$  趋于 0 时的高阶无穷小, 从而

$$dy = 2x\Delta x.$$

把  $x = 1, \Delta x = 0.1$  代入上面的公式可得

$$dy = 0.2$$

$$\Delta y = 0.21.$$



## 微分中的系数 $A$

若函数  $f$  在点  $a$  处可微, 则

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

由无穷小的定义, 可以等价于

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x} = 0$$

化简可得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} - A \right) = 0$$

由无穷小与一般极限的关系可得

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

# 导数与微分的关系

## 定理

函数  $y = f(x)$  在点  $a$  处可微的充要条件是  $y = f(x)$  在点  $a$  处可导, 且

$$f'(a) = A \iff dy|_{x=a} = A dx$$

从定理中可以得到微分的计算公式:

$$dy = df(x) = f'(x) dx.$$

- 💡 一元函数中可微与可导是等价的。
- 💡 导数可表示为微分的商, 简称为**微商**, 即

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$



## 微分的计算举例

**例 3.** 求函数  $y = \arctan e^x$  的微分。

**解.** 计算可得

$$dy = (\arctan e^x)' dx = \frac{(e^x)'}{1 + e^{2x}} dx = \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}. \quad \blacksquare$$

**例 4.** 求函数  $y = \sin(2x + 1)$  在  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $dx = 0.01$  时的微分。

**解.** 计算可得

$$dy = (\sin(2x + 1))' dx = 2 \cos(2x + 1) dx.$$

当  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $dx = 0.01$  时可得

$$dy = 2 \cos(2x + 1) dx = 2(\cos 0) \cdot 0.01 = 0.02. \quad \blacksquare$$

# 微分的形式不变性

在函数  $y = f(x)$  的微分的定义中，因为  $x$  为自变量，所以  $dx = \Delta x$ ，从而可以把微分  $A\Delta x$  写成  $A dx$ 。如果  $x$  不是自变量而是中间变量，还能这样写吗？

设  $y = f(x)$ ,  $x = g(t)$ , 则  $y = f(g(t))$ , 从而

$$\begin{aligned} dy &= d(f(g(t))) = f'(g(t)) \cdot g'(t) dt = f'(g(t)) dx \\ &= f'(x) dx. \end{aligned}$$

所以，无论  $x$  是不是自变量，只要函数  $f$  可微，都有

$$df(x) = f'(x) dx.$$

称此性质为**微分的形式不变性**。

🗨 求微分时，无论是对自变量求还是对因变量求，方式都是一样的。

# 微分的运算法则

由微分的计算公式

$$df(x) = f'(x) dx$$

及导数的四则运算法则不难得到

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$

$$d \frac{f}{g} = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

由微分的形式不变性可知

$$d(f \circ g) = df \circ g \cdot dg$$

# 用微分的运算法则求微分

**例 5.** 设  $y = \sin(2x + 1)$ , 求  $dy$ .

**解.** 计算可得

$$\begin{aligned} dy &= d \sin(2x + 1) = \cos(2x + 1) d(2x + 1) \\ &= \cos(2x + 1) \cdot 2 dx = 2 \cos(2x + 1) dx. \end{aligned}$$

**例 6.** 设  $y = \ln(x^2 + e^x)$ , 求  $dy$ .

**解.** 计算可得

$$\begin{aligned} dy &= d \ln(x^2 + e^x) = \frac{d(x^2 + e^x)}{x^2 + e^x} = \frac{dx^2 + de^x}{x^2 + e^x} \\ &= \frac{2x dx + e^x dx}{x^2 + e^x} = \frac{2x + e^x}{x^2 + e^x} dx. \end{aligned}$$

# 函数在一点处的线性近似

若函数  $y = f(x)$  在点  $a$  处可微, 则

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + o(\Delta x), \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

记  $x = a + \Delta x$ , 则有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad (x \rightarrow a).$$

去掉高阶无穷小部分  $o(x - a)$ , 记

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

称为函数  $f$  在点  $a$  处的**一阶近似函数**, 此时有

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

几何上直线  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  就是曲线  $y = f(x)$  在点  $(a, f(a))$  处的切线。

# 基本初等函数的一阶近似式

在  $x = 0$  处，有下列的一阶近似式

$$(1 + x)^a \approx 1 + ax$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1 + x) \approx x$$

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

$$\arcsin x \approx x$$

$$\arctan x \approx x$$

# 求近似值

**例 7.** 用函数  $f(x) = \sqrt{x}$  的一阶近似式求  $\sqrt{3.98}$  的近似值。

**解.** 求  $f$  的导数可得  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , 从而由  $f(4) = 2, f'(4) = \frac{1}{4}$ , 可知  $f(x)$  在  $x = 4$  处的一阶近似式为

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{x - 4}{4} = 1 + \frac{x}{4}.$$

从而当  $x = 3.98$  时有

$$\sqrt{3.98} = f(3.98) \approx L(3.98) = 1 + \frac{3.98}{4} = 1.995.$$

即  $\sqrt{3.98} \approx 1.995$ . ■

🗨 实际上,  $\sqrt{3.98} = 1.9949937 \dots$ , 所求近似值的误差小于  $10^{-5}$ .

## 作业：习题 2-5

- 3.(2), 3.(7),
- 4.(2), 4.(5), 4.(7).