1 解. 当 $x \to 0$ 时 $2x - x^2 \to 0$ 且 $x^2 - x^3 \to 0$, 又因为

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^3}{2x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^2}{2 - x} = 0.$$

所以当 $x \to 0$ 时 $x^2 - x^3$ 是比 $2x - x^2$ 更高阶的无穷小。 ■

- 证明 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小时，尽量用 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 的形式，而不是 $\lim \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.
- $f(x) = o(g(x))$ 与 $f(x) = O(g(x))$ 是两个不同的符号。

4.(2) 证明. 由当 $x \to 0$ 时 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 及等价无穷小替换，计算可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec x - 1}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

所以当 $x \to 0$ 时 $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$. ■

- 证明等价无穷小时，尽量用定义，而不是等价无穷小与高阶无穷小的关系。
- 当 $x \to 0$ 时 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ 的意思是 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$, 而不是 $1 - \cos x = \frac{x^2}{2}$.

5.(1) 解. 由当 $x \to 0$ 时 $\tan x \sim x$, 及等价无穷小替换，计算可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$ ■

5.(3) 解. 由当 $x \to 0$ 时 $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\tan x \sim x$, 及等价无穷小替换，计算可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$ ■