泰勒公式

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

引例

利用一阶近似式可知，当 x 较小时有

$$\sin x \approx x,$$

近似误差虽小，当不知道误差有多大。

由拉格朗日中值定理可知，当 x 较小时有

$$\sin x \approx 0,$$

近似误差比上式小些，但可估计误差 $|\sin x - 0| \leqslant |x|$.

如何把近似程度高和误差可估计两个优点结合起来？

泰勒多项式

为方便计算 a 处的值，设多项式为

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

其中 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 为 $n+1$ 个待定系数，考虑到 $n=1$ 时为 f 在 a 处的一阶近似式，类似与其中的条件不妨要求

$$P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k \in 0, 1, 2, \cdots, n.$$

由 $P^{(k)}(a) = k!c_k$ 可知 $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. 从而

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

记 $P(x)$ 为 $P_n(a;x)$, 称为 $f(x)$ 在点 a 处的 n 阶**泰勒多项式**，记 $R_n(a;x) = f(x) - P_n(a;x)$, 称为 $P_n(a;x)$ 的**余项**，从而

$$f(x) = P_n(a;x) + R_n(a;x).$$

定理 (局部泰勒公式)

设函数 f 在以 a 为端点的某个闭区间上有定义，且在 a 处 n 阶可导，则当 $x \to a$ 时

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

当 $n = 1$ 时，类似于函数在点 a 处可微的定义。

定理对应于泰勒公式中的余项 $R_n(a;x) = o\big((x-a)^n\big)$, 称为**余项的皮亚诺形式**。当 $a = 0$ 时，上面的公式变为，$x \to 0$ 时

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

称为带有皮亚诺余项的麦克劳林公式。

局部泰勒公式证明

证明. 定义函数

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right)$$

则 R_n 在 a 的某个邻域内 $n-1$ 阶可导，在 a 处 n 阶可导，且

$$R_n^{(k)}(a) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

反复使用洛必达法则，最后由导数的定义可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x \to a} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \cdots \\
&= \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(a)}{x-a} \\
&= \frac{1}{n!} R_n^{(n)}(a) = 0.
\end{aligned}$$

即 $R_n(x) = o((x-a)^n)$, 定理得证。 ■

正切函数的麦克劳林公式

例 1. 求正切函数 $\tan x$ 的带有皮亚诺形式余项的 3 阶麦克劳林公式。

解. 计算可得

$$\begin{aligned} & & \tan 0 &= 0 \\ \tan' x &= \sec^2 x & \tan' 0 &= 1 \\ \tan'' x &= 2\sec^2 x \tan x & \tan'' 0 &= 0 \\ \tan''' x &= 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x & \tan''' 0 &= 2 \end{aligned}$$

从而

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad (x \to 0).$$

∎

局部泰勒公式的应用

例 2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$.

解. 由泰勒公式可知，当 $x\to 0$ 时 $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \frac{1}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

∎

余项的估计

把 x 看成常数，定义一元函数 $F(t) = P_n(t; x)$, 即

$$F(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

则

$$R_n(a; x) = f(x) - P_n(a; x) = F(x) - F(a).$$

求 F 的导数可得

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

设 $\varphi(t)$ 在以 a 和 x 为区间端点的闭区间上连续，在对应的开区间上可导，对 F 和 φ 应用柯西中值定理可得

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)}.$$

泰勒中值定理

定理 (泰勒中值定理)

如果函数 f 在端点为 a 和 x 的闭区间上有直到 n 阶的连续导数，在此闭区间的内部 $n+1$ 可导，则对于任何在这个闭区间上连续，在区间内部有非零导数的函数 φ，一定存在 a 和 x 之间的某个点 ξ 使得：

$$R_n(a;x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

余项的拉格朗日形式

在泰勒中值定理中取 $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$, 则存在 ξ 在 a 和 x 之间使得：

$$R_n(a; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

称此为**余项的拉格朗日形式**。

若在 a 和 x 之间有 f 的 $n+1$ 阶导数有界，即存在 M 使得 $|f^{(n+1)}| < M$, 则

$$|R_n(a; x)| < \frac{M|x - a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

即用 $P_n(a; x)$ 近似 $f(x)$ 时，其误差不超过 $\frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. 不难证明，当 n 趋于无穷时，误差是 $(x - a)^{n+1}$ 的高阶无穷小。

麦克劳林公式

若泰勒公式 $f(x) = P_n(a; x) + R_n(a; x)$ 中的 $a = 0$, 即公式

$$f(x) = P_n(0; x) + R_n(0; x)$$

称为**麦克劳林公式**，记 $P_n(x) = P_n(0; x)$ 称为 f 的 n **阶麦克劳林多项式**，并记相应的余项为 $R_n(x) = R_n(0; x)$. 此时

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

在余项的拉格朗日形式 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 中 ξ 在 0 和 x 之间，从而可以记为 $\xi = \theta x$, $\theta \in (0, 1)$. 即

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

指数函数的麦克劳林公式

由 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的导数公式 $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x$, $k\in\mathbb{N}$, 计算可得

$$f^{(k)}(0)=\mathrm{e}^0=1,\quad k\in\mathbb{N}.$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)\\ &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x).\end{aligned}$$

其中 $R_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}x^n}{n!}$, $\theta\in(0,1)$, 简单的估计可得

$$|R_n(x)|=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}|x|^n}{n!}\leqslant\max\left\{\frac{|x|^n}{n!},\frac{\mathrm{e}^x|x|^n}{n!}\right\}.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)\to 0$.

正弦函数的麦克劳林公式

由导数公式 $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, 计算可得

$$\sin^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & k = 2m \\ (-1)^m & k = 2m+1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_{2(n+1)}(x).$$

其中

$$R_{2(n+1)}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2}\right)x^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

简单的估计可知 $|R_{2(n+1)}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2(n+1)}(x) = 0$.

余弦函数的麦克劳林公式

由导数公式 $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, 计算可得

$$\cos^{(k)}(0) = \cos\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & k = 2m \\ 0 & k = 2m+1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

其中

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\cos\left(\theta x + (n+1)\pi\right) x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

简单的估计可知 $|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$.

对数相关的麦克劳林公式

设 $f(x)=\ln(1+x)$, 则：

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k},\quad k=1,2,\cdots$$

计算可得

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,\quad k=1,2,\cdots$$

从而

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x).$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\quad \theta\in(0,1).$$

且 $x\in(-1,1)$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

二项式定理

设 $f(x) = (1+x)^\alpha$, 则

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

计算可得

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1), \quad k = 1, 2, \cdots$$

从而

$$(1+x)^a = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x).$$

其中

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

且

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

常用麦克劳林公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + (x^4)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2} + \frac{a(a-1)(a-2)x^3}{6} + o(x^3)$$