函数的单调性与曲线的凹凸性

王二民（ wagermn@126.com ）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

单调函数的导数

定理 (单调可导函数的导数)

设函数在区间 I 上单调，若函数在区间 I 上可导，则

- 当函数单调递增时，在区间 I 上 $f' \geqslant 0$,
- 当函数单调递减时，在区间 I 上 $f' \leqslant 0$.

结论不能改成严格不等号，如：函数 $f(x) = x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增，但 $f'(0) = 0 \ngtr 0$.

设函数 f 在 I 上单调递增，则对任意 $a, x \in I$ 且 $x \neq a$ 有 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, 从而由函数的可导性及极限的保号性可知

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0.$$

单调性的判断

定理 (单调性的判断)

设函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 的内部可导，则

- 若在 I 的内部 $f' > 0$, 则 f 在 I 上严格单调递增；
- 若在 I 的内部 $f' < 0$, 则 f 在 I 上严格单调递减。

- 定理不要求函数在区间端点处可导。从而可用来证明 $\sqrt{x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是严格单调递增的。
- 单调性有连接性，即如果 f 在区间 $(a, b]$ 和 $[b, c)$ 上分别单调递增，则 f 在区间 (a, c) 上也单调递增。

推论

若函数 f 在区间 I 上连续，在 I 的内部除有限个点外都可导且 $f' > 0$ (或 $f' < 0$), 则 f 在 I 上严格单调递增（或递减)。

单调性判断定理的证明

证明. 设 a, b 是区间 I 上的任意两个数且 $a < b$, 则 $[a, b] \subset I$. 则由题目中的条件可知 f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，从而由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi \in (a, b) \subset I$ 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

若在 I 的内部 $f' > 0$, 则由 $\xi \in (a, b)$ 在 I 的内部可知

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) > 0.$$

即函数 f 在 I 上严格单调递增。

若在 I 的内部 $f' < 0$, 则由 $\xi \in (a, b)$ 在 I 的内部可知

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) < 0.$$

即函数 f 在 I 上严格单调递减。 ∎

求函数在区间上的单调性

例 1. 求函数 $f(x) = x - \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调性。

解. 显然 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可导，且

$$f'(x) = 1 - \cos x,$$

当 $x \in (-\pi, \pi)$ 时 $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x) = x - \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调递增。 ∎

实际上，可以证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增。

求函数的单调区间

例 2. 求函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x}$ 的单调区间。

解. 显然 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，对函数 f 求导可得，当 $x \neq 0$ 时

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 $\frac{1}{4}$, 再结合不可导点 0, 从而

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	f 连续	$-$	0	$+$

所以函数 f 在区间 $(-\infty, \frac{1}{4}]$ 上严格单调递减，在区间 $[\frac{1}{4}, +\infty)$ 上严格单调递增。 ∎

求函数单调区间的基本步骤

1. 求函数 f 的定义域 D （假设 f 在 D 上连续）。
2. 考察函数 f 的可导性（假设仅有有限个不可导点），并求其导函数 $f'(x)$.
3. 解方程 $f'(x) = 0$ （假设仅有有限个根）。
4. 利用不可导点和导数为 0 的点，把函数的定义域 D 为成一个个小区间 I （尽量包含区间端点）。
5. 求出函数 f 在每个小区间 I 上单调（f 在 I 上连续，在 I 的内部 $f' \neq 0$, 从而 f 在 I 上必有单调性）。
6. 连接相邻单调性相同且有公共点的区间，得到函数的单调区间。

求函数的单调区间

例 3. 考察函数 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ 的单调性，求其单调区间。

解. 显然 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且可导，对函数 f 求导得

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x + 2)(x - 2).$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 -2 和 2, 从而

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

所以函数 f 在区间 $(-\infty, -2]$ 和 $[2, +\infty)$ 上分别严格单调递增，在区间 $[-2, 2]$ 上严格单调递减。 ■

用单调性证明不等式

例 4. 证明不等式 $e^x \geqslant 1 + x$.

解. 记 $f(x) = e^x - x - 1$, 显然函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且

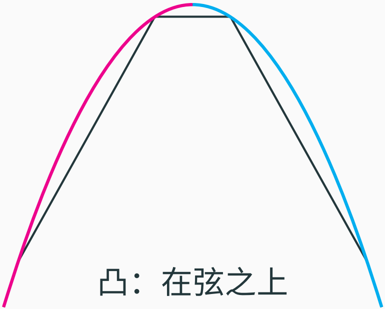
$$f'(x) = e^x - 1.$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 0, 从而

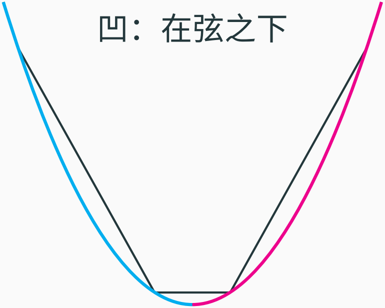
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

所以函数在区间 $(-\infty, 0]$ 上严格单调递减，在区间 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增。从而 $f(x) \geqslant f(0) = 0$, 即 $e^x \geqslant x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号。 ■

引例



$$f''(x) = c < 0$$



$$f''(x) = c > 0$$

凹凸性

定义 (凹函数)

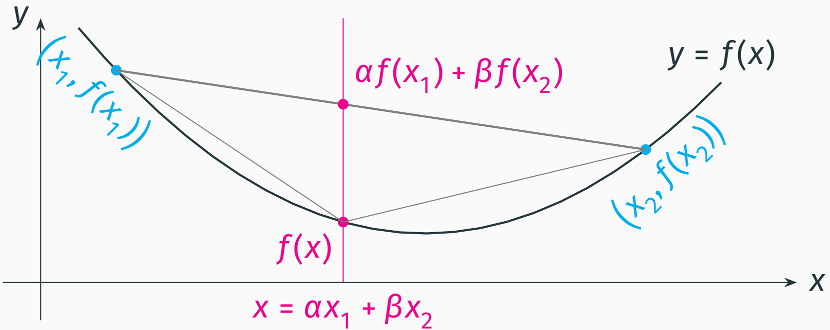
如果对任意满足 $\alpha+\beta=1$ 的正数 α 和 β, 及区间 I 上任意两个不同的点 x_1 和 x_2, 都有

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant \alpha f(x_1)+\beta f(x_2).$$

则称 f 是区间 I 上的**凹函数**，并称曲线 $y=f(x), x\in I$ 在 x-y 坐标系下是**凹的**（或**向上凹的**或**向下凸的**）。

- 若把 $\leqslant$ 换成 $\geqslant$, 对应的有凸函数、向上凸的、向下凹的等概念。
- 若把不等号改为严格不等号，则有**严格凹**和**严格凸**的概念。
- 凹凸性不能简单地连接，如 W 形曲线不是凹的。
- 凹的和凸的不是对立的，如 C 形的曲线即不是凹的也不是凸的。
- 按照这里的定义，一段曲线是凹的还是凸的与选取的坐标系有关，所以完整的说法是曲线在坐标系下是凹的或凸的。

凹函数的图像



设 $x_1 < x_2$ 且 $x = \alpha x_1 + \beta x_2$，则再由 $\alpha + \beta = 1$ 解关于 α 和 β 的方程组可得 $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $\beta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, 从而

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

凹函数的性质

凹函数的性质

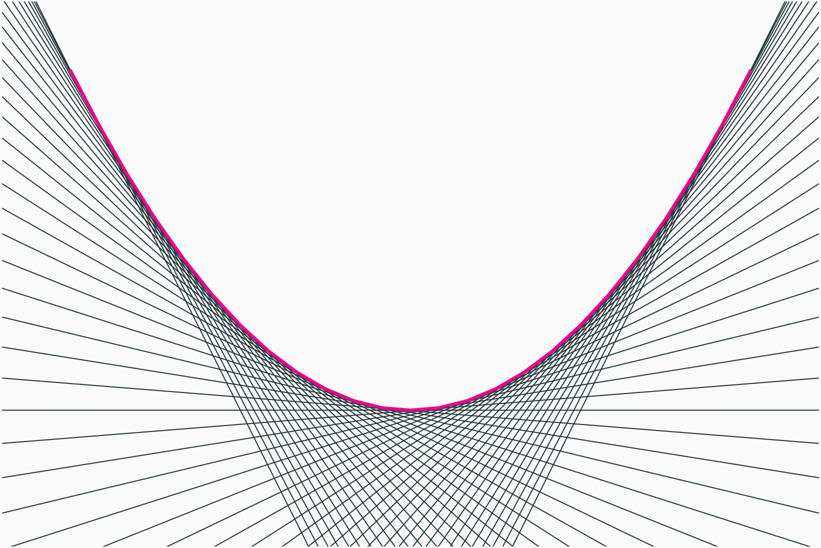
设 f 是区间 I 上的凹函数，定义

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \qquad x\in I, y\in I, x\neq y.$$

则对于任意 $a\in I$, 函数 $F(x,a)$ 是关于 x 的单调递增的函数。

- 开区间上的凹函数一定连续。
- 若凹函数在一点可导，则函数图象在此点处切线的上方。
- 设函数 f 在区间 $(a,b]$ 和 $[b,c)$ 上都是凹的（或凸的），若 f 在 b 处可导，则 f 在 (a,b) 上是凹的（或凸的）。
- 若凹函数可导，则其导数必单调递增且连续。
- 若凹函数在一点二阶可导，则此点处的二阶导数必非负。

凹函数的切线



可导函数凹凸性的判断

定理 (凹凸性的判断)

设函数 f 在区间 I 上连续，在 I 的内部可导，则

- 若 f' 严格单调递增，则 f 在区间 I 上严格凹；
- 若 f' 严格单调递减，则 f 在区间 I 上严格凸。

定理表明，若 f 可导，则 f 的凹凸性就是 f' 的单调性。

定理 (凹凸性的判断)

设函数 f 在区间 I 上连续，在 I 的内部可导，若对任意 I 的内点 a, f 的图像都在其在点 $(a, f(a))$ 处的切线的上方，即

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), \qquad x \in I, x \neq a,$$

则 f 在 I 上严格凹。

二阶可导函数凹凸性的判断

定理 (凹凸性的判断)

设函数 f 在区间 I 上连续，在 I 的内部二阶可导，则

- 若 $f'' > 0$, 则函数 f 在区间 I 上严格凹;
- 若 $f'' < 0$, 则函数 f 在区间 I 上严格凸。

定理并不要求函数在区间端点处可导。从而可用定理证明 $\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的严格凸性。

推论

若函数 f 在区间 I 上连续，在 I 的内部一阶可导，在 I 上除有限个点外都二阶可导且 $f'' > 0$（或 $f'' < 0$），则 f 在 I 上严格单调凹（或凸）。

考察函数的凹凸性

例 5. 考察函数 $f(x) = \ln x$ 的凹凸性。

解. 函数 f 的定义域为 $(0, +\infty)$, 在其内 f 二阶可导且 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 所以 $f(x) = \ln x$ 为严格凸函数。 ■

例 6. 考察函数 $f(x) = x^4$ 的凹凸性。

解. 易知函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导且 $f''(x) = 12x^2$, 从而当 $x \neq 0$ 时都有 $f''(x) > 0$, 所以 $f(x) = x^4$ 为严格凹函数。 ■

例 7. 考察函数 $f(x) = x^3$ 的凹凸性。

解. 易知函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导且 $f''(x) = 6x$, 当 $x > 0$ 时有 $f''(x) > 0$, 所以 f 在 $[0, +\infty)$ 上严格凹；当 $x < 0$ 时有 $f''(x) < 0$, 所以 f 在 $(-\infty, 0]$ 上严格凸。 ■

拐点

定义 (拐点)

设函数 f 在点 a 的某个邻域内连续，若存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$，使得函数在区间 $(a-\delta_1, a]$ 上严格凹（严格凸）但在区间 $[a, a-\delta_2)$ 上严格凸（严格凹），则称 a 为**函数 $y = f(x)$ 的拐点**，称点 $(a, f(a))$ 为**曲线 $y = f(x)$ 的拐点**。

- 曲线的拐点只与曲线本身有关，与坐标系无关。

定理 (拐点的必要条件)

设 a 是函数 f 的拐点，若函数 f 在点 a 处二阶可导，则 $f''(a) = 0$.

- $f''(a) = 0$ 不是拐点的充分条件，如：设 $f(x) = x^4$, 则 $f''(0) = 0$, 但 f 是严格凹的，没有拐点。

考察曲线的凹凸性

例 8. 考察曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸性及拐点。

解. 显然，函数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶导，且

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$

解 $f''(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 从而

x	$(-\infty, -0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

所以所求曲线在 $x \in (-\infty, 0]$ 和 $x \in [1, +\infty)$ 对应的两段上分别是凹的，在 $x \in [0, 1]$ 对应的一段上是凸的，曲线的拐点为 $x = 0$ 和 $x = 1$ 对应的点 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$. ∎

考察曲线的拐点

例 9. 考察曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点。

解. 易知，函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 连续，且当 $x \neq 0$ 时，函数二阶可导

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \qquad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},$$

当 $x < 0$ 时 $y'' > 0$, 所以 $x \in (-\infty, 0]$ 对应的一段曲线是凹的，
当 $x > 0$ 时 $y'' < 0$, 所以 $x \in [0, +\infty)$ 对应的一段曲线是凸的，
所以曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点是 $x = 0$ 时所对应的点 $(0, 0)$. ■

问题可等价为“求曲线 $x = y^3$ 的拐点”。

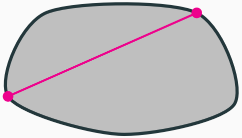
作业：习题 3–4

- 3.(1), 3.(4),
- 4,
- 5.(1).

凸集

定义 (凸集)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 若对于任意 $A \in \Omega$ 和任意 $B \in \Omega$ 都有直线段 AB 上所有的点都属于集合 Ω, 则称 Ω 为**凸集**。



线段 AB 可以表示为

$$\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} \qquad \lambda \in [0,1].$$

当 $\lambda = 0$ 时表示点 A, 当 $\lambda = 1$ 时表示点 B. 记 $\lambda_1 = 1-\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, 则上式可表示为

$$\lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

定理

设 f 是区间 I 上的凹函数，则对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ 以及正数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使得 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ 都有

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

定理可记为，对于凹函数而言，线性组合的函数值小于或等于函数值的线性组合。

凹凸性等价定义的证明

证明. 用数学归纳法，由定义 $n = 2$ 时显然成立，假设 $n = k$ 时定理成立，则对任意 $x_1, \cdots, x_{k+1} \in I$ 以及正数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1}$ 使得 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k+1} = 1$ 都有

$$
\begin{aligned}
& f(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \\
&= f\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + (\alpha_k + \alpha_{k+1}) \frac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}\right) \\
&\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_{k-1} f(x_{k-1}) + (\alpha_k + \alpha_{k+1}) f\left(\frac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}\right) \\
&\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_{k-1} f(x_{k-1}) + (\alpha_k + \alpha_{k+1}) \cdot \frac{\alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1})}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} \\
&= \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_{k-1} f(x_{k-1}) + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&= \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

即 $n = k + 1$ 时定理成立，定理得证。 ■

连续函数的凹凸性

设函数 f 在区间 I 上连续，若对于任意 $a, b \in I$ 且 $a \neq b$ 都有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

则 f 是区间 I 上的凹函数。

注意定义中的条件“函数 f 在区间 I 上连续”，没有此条件，函数 f 不一定是凹函数。

凹凸性判断定理的证明

设 $x_1 < x_2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 且 $\alpha + \beta = 1$, 若 $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, 则 $x_1 < x < x_2$, 由 f' 的单调性和拉格朗日中值定理可知存在 $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 \in (x, x_2)$ 使得

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x - x_1) < f'(x)(x - x_1) = \beta f'(x)(x_2 - x_1),$$
$$f(x) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x - x_2) < f'(x)(x - x_2) = \alpha f'(x)(x_1 - x_2)$$

从而

$$\alpha\big(f(x) - f(x_1)\big) + \beta\big(f(x) - f(x_2)\big) < 0,$$

整理可得

$$f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) < \alpha f(x_1) + \beta f(x_1).$$

即 $f\big(\alpha x_1 + \beta x_2\big) < \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$, 定理得证。

用凹凸性证明不等式

定理 (Jessen's inequality)

设 f 是区间 I 上的严格凹函数，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 则对任意 $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathbb{R}^+$ 都有

$$f\left(\frac{w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + \cdots + w_n}\right) \leqslant \frac{w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n)}{w_1 + \cdots + w_n}$$

且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号。

此不等式可以看成是凹函数的定义式，对应于 x_i 的系数为 $\alpha_i = \frac{w_i}{w_1 + \cdots + w_n}$, 此时自然有 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

当函数 f 是严格凸函数时，只需要把定理中的小于等于号 $\leqslant$ 改为大于等于号 $\geqslant$ 即可。

几何算术平均不等式

例 10. 证明对任意正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 都有

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

解. 不难验证 $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, 从而 ln 是 $\mathbb{R}^+$ 上的凸函数，从而对于任意正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$\begin{aligned}
\ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &\leqslant \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n} \\
&= \frac{1}{n} \ln\left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n\right) \\
&= \ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}\right)
\end{aligned}$$

再由 ln 是严格单调递增函数，题目中的不等式得证。 ■