齐次微分方程

王二民（wagermn@126.com）
郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

齐次微分方程

称形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

的微分方程称为**齐次微分方程**。

例 1. 判断下列微分方程是否为齐次微分方程。

1. $xy' = x + y$ ✓
2. $xy' = 1 + y$ ✗
3. $y^2 + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ✓
4. $(y - xy)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ ✗
5. $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xe^{-\frac{y}{x}} + y$ ✓

齐次微分方程的解法

记 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

从而微分方程 (1) 可写为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u)$$

当 $g(u) - u \neq 0$ 时，分离变量可得

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{g(u) - u}\,\mathrm{d}u$$

进一步计算可得微分方程的通解。

若存在 u_0 使得 $g(u_0) - u_0 = 0$, 即 u_0 是函数 g 的不动点，则函数 $y = u_0 x$ 是所给微分方程的解。

齐次微分方程求解举例

例 2. 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xe^{-\frac{y}{x}} + y$ 的解。

解. 当 $x \neq 0$ 时，对原微分方程变形可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{y}{x}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, 从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入上面的方程可得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^{-u} + u$$

化简并分离变量可得

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e^{u}\,\mathrm{d}u \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int e^{u}\,\mathrm{d}u$$

计算可得 $\ln|x| = e^{u} + C_1$, 化简可得

$$x = \pm e^{e^{u}+C_1} = \pm e^{C_1} e^{e^{\frac{y}{x}}},$$

记 $C = \pm e^{C_1}$, 可得微分方程的通解为 $x = Ce^{-e^{\frac{y}{x}}}$. ∎

齐次微分方程求通解练习

例 3. 求微分方程 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解。

解. 对原微分方程变形可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(y/x)^2}{(y/x)-1}$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=xu$, 从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入上面的方程可得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1}$$

化简并分离变量可得

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \qquad\Longrightarrow\qquad \int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$$

计算可得 $\ln|x|=u-\ln|u|+C_1$, 化简可得 $xu=\pm e^{C_1+u}$, 代入 $u=\frac{y}{x}$ 可得 $y=\pm e^{C_1+\frac{y}{x}}=\pm e^{C_1}e^{\frac{y}{x}}$, 记 $C=\pm e^{C_1}$, 又 $y=0$ 也是方程的解，从而所求通解为 $y=Ce^{\frac{y}{x}}$. ■

另一解法

解. 当 $y \neq 0$ 时，对原微分方程变形可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{xy - x^2}{y^2} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $x = yu$, 从而 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, 代入上面的方程可得

$$u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = u - u^2$$

化简可得 $\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$, 积分可得

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \frac{1}{u} + C_1 = \frac{y}{x} + C_1$$

化简可得 $y = \pm e^{\frac{y}{x} + C_1} = \pm e^{C_1} e^{\frac{y}{x}}$, 记 $C = \pm e^{C_1}$, 又 $y = 0$ 也是方程的解，从而所求通解为 $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. ■

齐次微分方程初值问题求解练习

例 4. 求微分方程 $xy' = x + y$ 在初值条件 $y(1) = 1$ 下的特解。

解. 考虑到初值条件中 $x = 1 \neq 0$, 对原微分方程变形可得

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, 从而 $y' = u + xu'$, 代入上面的方程可得

$$u + xu' = 1 + u$$

化简可得 $u' = \frac{1}{x}$. 由初值条件中 $x = 1 > 0$ 积分可得

$$u = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln x + C.$$

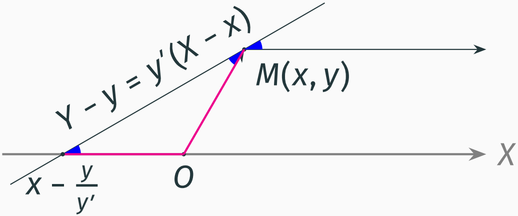
代入 $u = \frac{y}{x}$ 并化简可得

$$y = x(\ln x + C).$$

由 $y(1) = 1$ 可得 $C = 1$, 从而所求特解为 $y = x(\ln x + 1)$. ■

例 5. 请设计曲面把点光源转化为平行光源。

以点光源所在位置为坐标原点，平行光源的方向为正方向做 x 轴，由对称性不难知道，所求曲面是以 x 轴为旋转轴的旋转面，任取与 x 轴垂直的方向做 y 轴，下面只需求旋转面与 x-y 坐标面的交线的 $y > 0$ 的部分即可。



$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2} \implies y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

齐次解法

因为 $y > 0$, 所以对方程变形可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$$

令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $x = yu$, 从而 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, 代入上面的方程可得

$$u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = u + \sqrt{u^2 + 1}$$

化简，并分离变量后可得

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\,\mathrm{d}u \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\,\mathrm{d}u$$

计算可得

$$\ln|y| = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C_1$$

化简可得

$$y = \pm e^{C_1}(u + \sqrt{u^2 + 1})$$

记 $C = \pm e^{C_1}$, 并代入 $u = \frac{x}{y}$, 则有

$$y = C\left(\frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}\right)$$

两端同时乘以 y, 并去掉根号可得原微分方程的通解为

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

另一种解法

对微分方程变形可得

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$$

进一步并化简可得

$$yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

从而

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)' = \frac{yy' + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

两端积分可得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$$

去掉根号，可得所求微分方程的通解为 $y^2 = 2Cx + C^2$.

作业：习题 7–3

- 1.4;
- 2.2.

齐次函数

设 f 是二元函数，若存在常数 k 使得对 $(x,y) \in D_f$ 有

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y), \qquad \lambda > 0.$$

则称 f 为 k 次**齐次函数**，k 称为该齐次函数的次数。

例 6. 判断下列函数是否为齐次函数，若是请指出其次数

1. $f(x,y) = c.$ 0 次 ✓
2. $f(x,y) = x^s y^t.$ $s+t$ 次 ✓
3. $f(x,y) = ax + by.$ 1 次 ✓
4. $f(x,y) = ax^2 + bxy.$ 2 次 ✓
5. $f(x,y) = 3x^4 + x^2 y.$ ✗
6. $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right).$ 0 次 ✓

线性函数是特殊的齐次函数。

齐次微分方程的其它定义方式

设 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 是次数相同的齐次函数，则称形如

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2}$$

的微分方程为**齐次微分方程**。

把上面的微分方程写成显示一般形式为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)} = -\frac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

这样就得到了公式 (1) 的形式。

💬 两种形式的区别在于，方程 (1) 要求 $x \neq 0$, 但方程 (2) 不一定有这一要求。