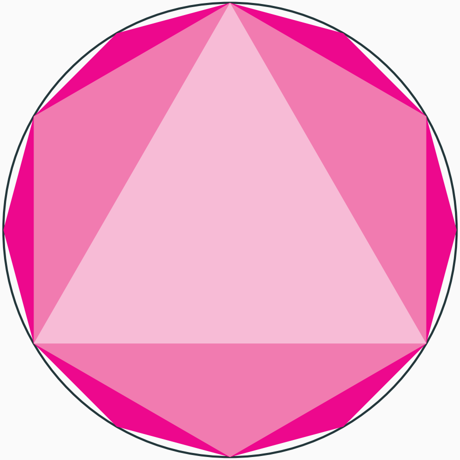
数列的极限

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

单位圆的面积



$$
\begin{aligned}
A_3 &= 1.29904\\
A_6 &= 2.59808\\
A_{12} &= 3.00000\\
A_{24} &= 3.10583\\
A_{48} &= 3.13263\\
A_{96} &= 3.13935\\
A_{192} &= 3.14103\\
A_{384} &= 3.14145\\
A_{768} &= 3.14156\\
A_{1536} &= 3.14158\\
A_{3072} &= 3.14159
\end{aligned}
$$

$$A_3, A_6, A_{12}, \cdots, A_{3\times 2^{n-1}}, \cdots$$

$\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504 88\cdots$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.\cdots & \Longrightarrow && \sqrt{2} &\in [1, 2] \\
\sqrt{2} &= 1.4\cdots & \Longrightarrow && \sqrt{2} &\in [1.4, 1.5] \\
\sqrt{2} &= 1.41\cdots & \Longrightarrow && \sqrt{2} &\in [1.41, 1.42] \\
\sqrt{2} &= 1.414\cdots & \Longrightarrow && \sqrt{2} &\in [1.414, 1.415]
\end{aligned}$$

无穷数列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$$

表示了无理数 $\sqrt{2}$.

数列

定义 (无穷数列)

称定义在正整数上的函数 $x : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$ 为**无穷数列**。

通常记

$$x_n \overset{\text{def}}{=} x(n)$$

称为数列的**一般项**或**通项**。

数列 x 通常记为

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

也可以简记为 $\{x_n\}$.

数列举例

1. $1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$ 一直为 1
2. $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$ 振荡
3. $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 无限变大
4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 无限接近于 0
5. $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{(-1)^n+1}{n}, \cdots$ 无限接近于 0
6. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^n}{n}, \cdots$ 无限接近于 0
7. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ 无限接近于 1
8. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ 无限接近于 0
9. $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$ 无限变大

数列极限

定义 (数列极限)

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 $A \in \mathbb{R}$, 使得当 n 无限增大时 x_n 无限接近于 A, 则称 A 为此数列的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

并称**数列** $\{x_n\}$ **收敛**；否则称**数列** $\{x_n\}$ **发散**。

当数列 $\{x_n\}$ 收敛时，表达式 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 有意义，当数列 $\{x_n\}$ 发散时，表达式 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 无意义。

数 x_n 与 A 的接近程度是 $|x_n - A|$, 它越小，x_n 与 A 就越接近。

数列极限的说法

表达式

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

可以读为

- 数列 $\{x_n\}$ 的收敛于 A.
- 数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A.
- 当 n 趋于无穷时 x_n 趋于 A.
- 当 n 趋于无穷时 x_n 的极限为 A.

数列极限理解举例

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

一般项 $\frac{n}{n+1}$ 与极限值 1 的接近程度为 $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{100} \qquad \Longleftarrow \qquad n > 100$$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10^{10}} \qquad \Longleftarrow \qquad n > 10^{10}$$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10^{1000}} \qquad \Longleftarrow \qquad n > 10^{1000}$$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon > 0 \qquad \Longleftarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

即，随着 n 的增大 $\frac{n}{n+1}$ 与 1 可以任意接近。

数列极限理解举例

例 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0.$　　无限接近不一定是越来越接近

一般项 $\frac{1+(-1)^n}{n}$ 与极限值 0 的接近程度为

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{|1+(-1)^n|}{n}\leqslant\frac{2}{n}$$

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n}-0\right|<\frac{1}{100}\quad\Longleftarrow\quad n>200$$

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n}-0\right|<\frac{1}{10000}\quad\Longleftarrow\quad n>20000$$

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon>0\quad\Longleftarrow\quad n>\frac{2}{\varepsilon}$$

即，随着 n 的增大 $\frac{1+(-1)^n}{n}$ 与 0 可以任意接近。

常用数列极限举例

例 3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

例 4. 设 $k > 0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}$.

解. 由幂函数的图象可知，$k > 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

■

同理可知，当 $k > 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0.$$

等比数列的极限

例 5. 设 $q \in \mathbb{R}$, 观察数列 $\{q^n\}$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$.

解. 通过指数函数 a^x 的图像可知：

- 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
- 当 $|q| > 1$ 时，随着 n 无限增大，q^n 也无限增大，从而数列的极限不存在。
- 当 $q = 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.
- 当 $q = -1$ 时，$q^n = (-1)^n$, 随着 n 无限增大一直在 1 和 −1 之间振荡，从而数列的极限不存在。 ∎

发散数列的例子

无界型 如

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \cdots$$

振荡型 如

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{8}, \cdots$$

数列极限的唯一性

定理

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一，即

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = A \\ \lim_{n\to\infty} x_n = B\end{aligned}\right\} \Longrightarrow A = B.$$

收敛数列的有界性

定理

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 有界，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \implies \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_+, |x_n| \leqslant M.$$

例 6. 讨论数列 $0, 1, 0, 2, 0, 3, \cdots$ 的敛散性。 发散

推论

如果数列 $\{x_n\}$ 无界，则数列 $\{x_n\}$ 发散。

极限的保号性

定理

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 若 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时恒有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）。

当 $A = 0$ 时没有保号性, 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

推论

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 若存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时有 $x_n \leqslant 0$（或 $x_n \geqslant 0$），则 $A \leqslant 0$（或 $A \geqslant 0$）.

结论中的 $\leqslant$ 和 $\geqslant$ 不能改成 $<$ 和 $>$, 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pm 1}{n} = 0$.

作业：习题 1–2

- 1.(1), 1.(3), 1.(5), 1.(7),
- 2.(2).

数列极限的 ε-N 定义

定义 (数列极限)

设 $\{x_n\}$ 是一数列，如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意整数 $n > N$ 都有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 则称 A 为此数列的**极限**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

否则, 称极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在。

定义中的 N 是一个关于 ε 变化的量。

用逻辑语言，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 的定义可表示为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \left(\mathbb{N} \ni n > N \implies |x_n - A| < \varepsilon\right).$$

用定义证明极限举例

例 7. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}=1$.

解. 对于任意的正实数 ε, 如果要让 $\left|\frac{n-1}{n+2}-1\right|=\frac{3}{n+2}<\varepsilon$, 只需要 $n>\frac{3}{\varepsilon}-2$ 即可, 此时我们可取 $N=\left\lfloor\frac{3}{\varepsilon}-2\right\rfloor$, 从而当 $n>N$ 时就有 $\left|\frac{n-1}{n+2}-1\right|<\varepsilon$。 ■

- 如果 N 满足定义中的要求，则比 N 大的任意整数也一定满足定义中的要求，即 N 不是惟一的。
- 在寻找 N 时，只要能保证 $\mathbb{N}\ni n>N \implies |x_n-A|<\varepsilon$ 即可，不一定非得由不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 解出 $n>N$. 本题中，取 $N=\left\lfloor\frac{3}{\varepsilon}\right\rfloor$ 也可以。

数列的子列

设 $\{x_n\}$ 时一个数列，设 $k_i \in \mathbb{N}_+, (i = \mathbb{N}_+)$, 且

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots$$

则称数列

$$x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$$

为数列 $\{x_n\}$ 的一个子列，可记为 $\left\{x_{k_n}\right\}$.

数列 $\{x_n\}$ 的奇数项子列为 $\left\{x_{2n-1}\right\}$, 偶数项子列为 $\left\{x_{2n}\right\}$.

收敛数列的子列的极限

定理

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 如果数列 $\{y_n\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个子列，那么 $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

例 8. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 如果数列 $\{x_n\}$ 中有无限项 1, 求 A.

解. 取数列 $\{x_n\}$ 中的无限项 1, 可以看成数列 $\{x_n\}$ 的一个子列，记为 $\{y_n\}$, 则 $y_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

又 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 所以 $A = 1$. ■

有界数列发散的判断

推论

如果数列 $\{x_n\}$ 有两个收敛子列且它们的极限不相等，则数列 $\{x_n\}$ 发散。

例 9. 证明数列 $x_n = (-1)^n$ 发散。

考虑其奇数项子列与偶数项子列

解. 记数列 $\{x_n\}$ 的奇数项子列为 $\{y_n\}$, 则 $y_n = -1$; 记数列 $\{x_n\}$ 的偶数项子列为 $\{z_n\}$, 则 $z_n = 1$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} -1 = -1 \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

所以数列 $\{x_n\}$ 发散。 ■