连续的概念

王二民（✉ wagermn@126.com）

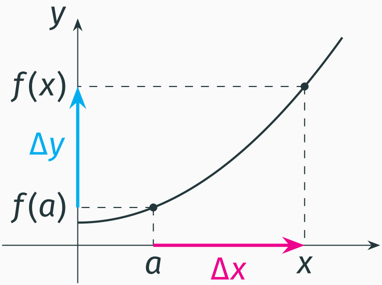
2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

什么是连续？

变化的描述

	初值	终值	增量
自变量	a	x	$\Delta x = x - a$
函数值	$f(a)$	$f(x)$	$\Delta y = f(x) - f(a)$ $= f(a + \Delta x) - f(a)$



称 Δx 为自变量 x 在 a 处的增量，称 Δy 为自变量在 a 处有增量 Δx 时对应的函数值或因变量的增量。

Δx 的值可以自由变化，但跟 a 以及函数的定义域有关。

连续的概念

函数 $y = f(x)$ 在 a 处连续的意思就是“当自变量的变化 Δx 较小时，因变量的变化 Δy 也不能太大”。用数学语言描述即“当 Δx 无限接近于 0 时 Δy 也无限接近于 0”。

定义

设函数 f 在 a 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \big(f(a + \Delta x) - f(a)\big) = 0,$$

则称函数 f 在 a 处连续，并称 a 为函数 f 的连续点。

记 $x = a + \Delta x$, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \big(f(a + \Delta x) - f(a)\big) = 0 \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

函数在内点连续的概念

定义 (函数在一点连续)

设函数 f 在 a 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

则称**函数 f 在点 a 处连续**，并称 a 为函数 f 的一个**连续点**。

1. 极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在。
2. 函数 f 在点 a 处有定义。
3. 左端的极限值与右端的函数值相等，即 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

左右连续的概念

定义 (左连续)

设存在 $\delta > 0$ 使得函数 f 在 $(a-\delta, a]$ 上有定义，如果

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a),$$

则称**函数 f 在点 a 处左连续**。

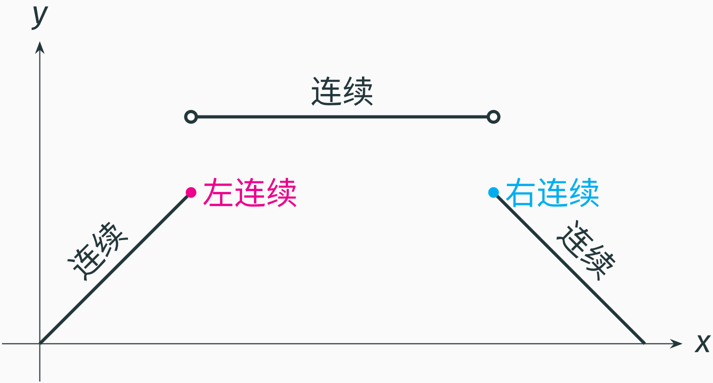
定义 (右连续)

设存在 $\delta > 0$ 使得函数 f 在 $[a, a+\delta)$ 上有定义，如果

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a),$$

则称**函数 f 在点 a 处右连续**。

连续、左连续、右连续图示



函数在区间上连续的概念

设 $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, 设 I 表示区间 (a, b), $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, b]$ 中的任何一种。如果函数 f 满足

1. 在开区间 (a, b) 上的每一点处都连续。
2. 若 $a \in I$, 则 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
3. 若 $b \in I$, 则 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

则称**函数 f 在区间 I 上连续**。

连续的本质是求极限与求函数值可以交换顺序

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \to a} x\right)$$

用函数的连续性求极限

例 1. 求极限 $\lim_{x\to 0} \arctan \mathrm{e}^{\sin x}$.

解. 由函数 $\arctan x$, e^x, 以及 $\sin x$ 的连续性可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \arctan \mathrm{e}^{\sin x} &= \arctan\left(\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sin x}\right) \\
&= \arctan \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x} \\
&= \arctan \mathrm{e}^0 \\
&= \arctan 1 \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

■

间断点的概念

设函数 f 在点 a 的某个去心邻域内有定义，若 a 不是函数 f 的连续点，即

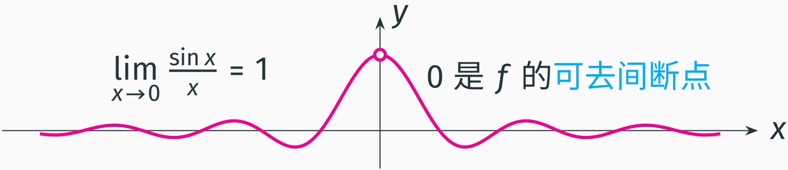
$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a),$$

则称 a 为函数 f 的**不连续点**（或**间断点**），此时可能出现下面三种情况

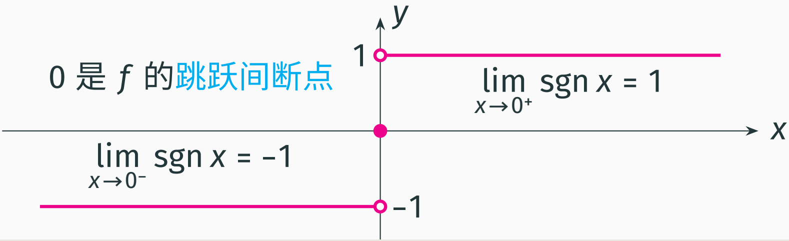
- 表达式 $\lim_{x \to a} f(x)$ 无意义，极限 $\lim_{x \to a} f(x)$ 不存在；
- 表达式 $f(a)$ 无意义，即函数 f 在点 a 处无定义；
- 表达式 $\lim_{x \to a} f(x)$ 和 $f(a)$ 都有意义，但二者的值不相等。

函数间断点举例

例 2. 考察函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点。

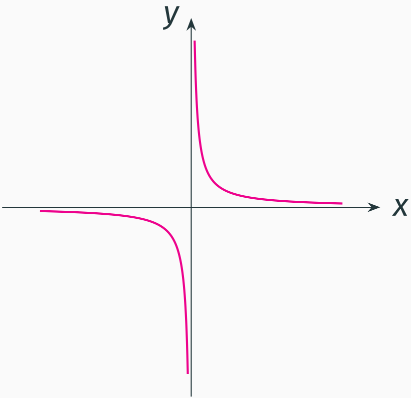


例 3. 考察函数 $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ 的间断点。

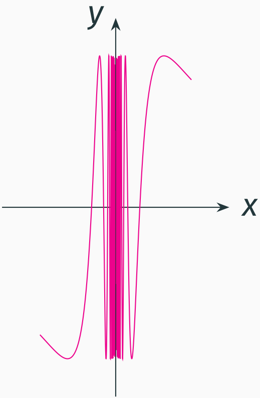


函数间断点举例

例 4. 考察极限 $f(x) = \frac{1}{x}$ 和 $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ 的间断点.



无穷间断点



振荡间断点

间断点的分类

第一类 极限 $\lim_{x \to a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 都存在

可去间断点 两者相等，即 $\lim_{x \to a} f(x)$ 存在。

跳跃间断点 两者不相等。

第二类 极限 $\lim_{x \to a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 至少有一个不存在。

连续函数的概念

定义 (连续函数)

设函数 $f : D \to \mathbb{R}$, 若对任意 $a \in D$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in D$ 且 $|x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, 则函数 f 为**连续函数**。

- 通俗地说，连续函数的意思就是，对于定义域内的任意一点 a, 当自变量增量无限接近于 0 时，对应的函数值增量也无限接近与 0.
- 为了可以考虑任何函数的连续性，该定义增加了条件 $x \in D$.