极限的运算法则

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

回顾

数列极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

函数极限

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = A \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = A$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

无穷大

$$\lim f(x) = \infty \qquad \lim f(x) = -\infty \qquad \lim f(x) = +\infty$$

极限的四则运算法则

定理 (极限的四则运算法则)

若同一极限过程中极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则

- $\lim\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim f(x) \pm \lim g(x).$
- $\lim\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$
- 当 $\lim g(x) \neq 0$ 时，有 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$

定理的结论中包含了两层意思

- 左侧的极限是存在的。
- 左侧的极限值等于右侧的计算结果。

一个简单的例子

例 1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\left(2\cos x+3\right)$.

解. 由函数和与乘积的极限运算规律可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi}\left(2\cos x+3\right) &= \lim_{x\to\pi}2\cos x+\lim_{x\to\pi}3\\
&= \left(\lim_{x\to\pi}2\right)\left(\lim_{x\to\pi}\cos x\right)+3\\
&= 2\times(-1)+3\\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

其中一个函数为常值函数的情况

设 $c \in \mathbb{R}$, 若极限 $\lim f(x)$ 存在，则

- $\lim\big(f(x) \pm c\big) = \lim f(x) \pm c$.
- $\lim\big(cf(x)\big) = c \lim f(x)$.
- 若还有 $\lim f(x) \neq 0$, 则 $\lim \dfrac{c}{f(x)} = \dfrac{c}{\lim f(x)}$.

线性组合的极限

例 2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(3e^x + 4\arctan x\right)$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(3e^x + 4\arctan x\right) &= \lim_{x\to 0}\left(3e^x\right) + \lim_{x\to 0}\left(4\arctan x\right)\\ &= 3\lim_{x\to 0} e^x + 4\lim_{x\to 0}\arctan x\\ &= 3e^0 + 4\arctan 0\\ &= 3\end{aligned}$$

∎

若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则

$$\lim\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha\lim f(x) + \beta\lim g(x)$$

即**求极限是函数上的线性运算**。

多个函数和的极限

例 3. 求极限 $\lim_{x\to\pi}(\sin x + \cos x + \sec x)$.

解. 由和的极限等于极限的和可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pi}(\sin x + \cos x + \sec x) \\
&= \lim_{x\to\pi}\big((\sin x + \cos x) + \sec x\big) \\
&= \lim_{x\to\pi}(\sin x + \cos x) + \lim_{x\to\pi} \sec x \\
&= \Big(\lim_{x\to\pi} \sin x + \lim_{x\to\pi} \cos x\Big) + \lim_{x\to\pi} \sec x \\
&= \lim_{x\to\pi} \sin x + \lim_{x\to\pi} \cos x + \lim_{x\to\pi} \sec x \\
&= \sin\pi + \cos\pi + \sec\pi \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

■

多个函数的和或乘积的极限

若极限 $\lim f(x), \lim f_i(x)$ 存在，则

- $\lim\big(f_1(x)+\cdots+f_n(x)\big)=\lim f_1(x)+\cdots+\lim f_n(x)$
- $\lim\big(f_1(x)\times\cdots\times f_n(x)\big)=\lim f_1(x)\times\cdots\times\lim f_n(x)$
- $\lim\big(f(x)\big)^n=\big(\lim f(x)\big)^n$

一般地，若极限 $\lim f_i(x)$ 存在，$c_i\in\mathbb{R}$, 则有

$$\lim\big(c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x)\big)=c_1\lim f_1(x)+\cdots+c_n\lim f_n(x).$$

多项式的极限

例 4. 求极限 $\lim_{x\to 1}(3x^6 + 2x^5 + 4x^2 - 7x + 1)$.

解. 由极限的线性性质可知：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left(3x^6 + 2x^5 + 4x^2 - 7x + 1\right)\\
&= 3\lim_{x\to 1} x^6 + 2\lim_{x\to 1} x^5 + 4\lim_{x\to 1} x^2 - 7\lim_{x\to 1} x + 1\\
&= 3 + 2 + 4 - 7 + 1\\
&= 3.
\end{aligned}$$

■

一般地，设 $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ 为多项式，则有

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a).$$

有理分式的极限

例 5. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{6x^3+2x^2+x+1}{3x^2+2}$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$\lim_{x\to1}\frac{6x^3+2x^2+x+1}{3x^2+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}\left(6x^3+2x^2+x+1\right)}{\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2+2\right)}$$
$$=\frac{10}{5}=2.$$

■

一般地，设 $Q(x)$ 为有理分式函数，且 Q 在 a 处有定义，则

$$\lim_{x\to a}Q(x)=Q(a).$$

分母趋于零但分子不趋于零的情况

例 6. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+5x+3}{x^2+2x-3}$.

分母的极限为 0, 所以不能直接使用商的极限运算法则。

解. 由有理分式函数的极限可得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+5x+3}=0,$$

从而由无穷小与无穷大的关系可知

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{x^2+2x-3}{2x^2+5x+3}}=\infty.$$

■

分子分母都趋于零的情况

例 7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$.

- 分母的极限为 0, 所以不能直接使用商的极限运算法则。
- 设 $P(x)$ 是多项式，如果 $P(a) = 0$, 则 $P(x)$ 有一个因式 $x - a$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{x+3} \\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

■

例 8. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3}$.

解. 由极限的四则运算规律可知：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{3+4x^{-1}+2x^{-3}}{7+5x^{-2}-3x^{-3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+4x^{-1}+2x^{-3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(7+5x^{-2}-3x^{-3})} \\
&= \frac{3+4\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}+2\lim\limits_{x\to\infty}x^{-3}}{7+5\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}-3\lim\limits_{x\to\infty}x^{-3}} \\
&= \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

■

自变量趋于无穷时的极限

例 9. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^3-x^2+5}$.

解. 由极限的四则运算规律可知：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^3-x^2+5} &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^{-1}-2x^{-2}+x^{-3}}{2-x^{-1}+5x^{-3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3x^{-1}-2x^{-2}+x^{-3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2-x^{-1}+5x^{-3})} \\
&= \frac{3\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}-2\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}+\lim\limits_{x\to\infty}x^{-3}}{2-\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}+5\lim\limits_{x\to\infty}x^{-3}} \\
&= \frac{0}{2}=0.
\end{aligned}
$$

■

自变量趋于无穷时的极限

例 10. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x+1}$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^3-x^2+5}=0,$$

从而由无穷小与无穷大的关系可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{3x^2-2x+1}{2x^3-x^2+5}}=\infty.$$

■

自变量趋于无穷时有理分式的极限

设 $m, n \in \mathbb{N}$, $a_0, \cdots, a_m, b_0, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$, 且 $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, 则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m < n, \\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m = n, \\ \infty, & m > n. \end{cases}$$

有界量与无穷小的乘积

定理

有界量与无穷小的乘积还是无穷小。

例 11. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解. 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 和 $|\sin x|\leqslant 1$ 可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)=0. \qquad \blacksquare$$

例 12. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.

解. 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 和 $|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\arctan x\right)=0. \qquad \blacksquare$$

复合函数的极限

定理 (复合函数的极限)

如果 $\lim_{u\to a} f(u) = A$, $\lim g(x) = a$，且 $g(x) \neq a$, 则

$$\lim f(g(x)) = A.$$

- 定理中 $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$, $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.
- 当 $a \in \{\infty, +\infty, -\infty\}$, 可以去掉条件 $g(x) \neq a$.
- 条件 $g(x) \neq a$, 源于极限过程 $u \to a$ 中不需要考虑 $u = a$ 的情况。

定理 (复合函数的极限（特殊形式）)

如果 $\lim_{u\to a} f(u) = f(a)$ 且 $\lim g(x) = a$ 则

$$\lim f(g(x)) = f(a) = f(\lim g(x)).$$

- 基本初等函数都满足定理中函数 f 的条件。

复合函数的极限举例

例 13. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{x^2+1}{x^2+x}$.

解. 由复合函数的极限运算规律及有理函数的极限公式可得

$$\lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2+1}{x^2+x} = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x}\right) = \ln 1 = 0. \qquad \blacksquare$$

例 14. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{2x} + e^x + 1\right)$.

解. 把 $e^{2x} + e^x + 1$ 看成 $u^2 + u + 1$ 与 $u = e^x$ 的复合，因为 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, 所以由复合函数的极限运算规律可知

$$\lim_{x\to-\infty} \left(e^{2x} + e^x + 1\right) = \lim_{u\to 0}\left(u^2 + u + 1\right) = 1. \qquad \blacksquare$$

💬 当外层函数不是抽象函数时，复合过程可能没有那么明显。

💬 依据目前的知识，此题还有其它解法。

作业：习题 1–5

- 1.(1), 1.(3), 1.(5), 1.(6), 1.(7),
- 3.(1).

极限公式的记忆

两函数和的极限公式为：同一极限过程中，若极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则极限 $\lim\big(f(x)+g(x)\big)$ 存在，且

$$\lim\big(f(x)+g(x)\big)=\lim f(x)+\lim g(x). \tag{1}$$

记忆该公式时，可省略条件，

1. 公式中三个 lim 对应的极限过程完全相同，
2. 当等式右侧有意义时等式的左侧也有意义，
3. 左侧的值等于右侧的值。

微积分中很多与极限相关的公式都可以这样记忆。

和中一个极限存在一个极限不存在的情况

例 15. 若极限 $\lim f(x)$ 存在，但极限 $\lim g(x)$ 不存在，那么极限 $\lim\big(f(x)+g(x)\big)$ 的存在性如何?

解. 假若极限 $\lim\big(f(x)+g(x)\big)$ 存在，则再由

$$g(x)=\big(f(x)+g(x)\big)-f(x)$$

及极限 $\lim f(x)$ 存在，用极限的运算规律可知极限 $\lim g(x)$ 存在，与题设矛盾。从而极限 $\lim\big(f(x)+g(x)\big)$ 一定不存在。 ∎

和中两个极限都不存在的情况

例 16. 如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都不存在，那么极限 $\lim\big(f(x)+g(x)\big)$ 的存在性如何？

解. 极限 $\lim\big(f(x)+g(x)\big)$ 可能存在也可能不存在。

- 设 $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=-f(x)$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 都不存在，但极限
$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to 0} 0=0$$
存在。
- 设 $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=f(x)$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 都不存在。极限
$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to 0} 2f(x)$$
也不存在。 ■

无穷多个无穷小的代数和不一定是无穷小

用 $x_{i,n}$ 表示第 i 个数列的第 n 项，并定义

$$x_{i,n} = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}_+, n \in \mathbb{N}_+.$$

则对于任意 $i \in \mathbb{N}_+$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i,n} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 即 $\{x_{i,n}\}$ 都是 n 趋于无穷时的无穷小。

记这些数列的和数列为 $\{x_n\}$, 则

$$x_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i,n} = x_{n,n} = 1,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, 即 $\{x_n\}$ 不是 n 趋于无穷时的无穷小。

积中一个极限存在一个极限不存在的情况

例 17. 若极限 $\lim f(x)$ 存在，但极限 $\lim g(x)$ 不存在，那么极限 $\lim\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ 的存在性如何?

解. 极限 $\lim\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ 可能存在也可能不存在。

- 设 $f(x)=0$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x)$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$ 存在。
- 设 $f(x)=1$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x)$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在。 ∎

积中两个极限都不存在的情况

例 18. 如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都不存在，那么极限 $\lim\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ 的存在性如何？

解. 极限 $\lim\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ 可能存在也可能不存在。

- 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}=f(x)$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 都不存在，但极限 $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$ 存在。
- 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$, $g(x)=f(x)$, 则极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ 都不存在。极限 $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 也不存在。

∎

无穷多个无穷小的乘积不一定是无穷小

用 $x_{i,n}$ 表示第 i 个数列的第 n 项，并定义

$$x_{i,n} = \begin{cases} 1 & n < i \\ n^n & n = i \\ \frac{1}{n} & n > i \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}_+, n \in \mathbb{N}_+.$$

则对于任意 $i \in \mathbb{N}_+$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i,n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 即 $\{x_{i,n}\}$ 都是 n 趋于无穷时的无穷小。

记这些数列的和数列为 $\{x_n\}$, 则

$$x_n = \prod_{i=1}^{\infty} x_{i,n} = \prod_{i=1}^{n} x_{i,n} = n,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, 即 $\{x_n\}$ 不是 n 趋于无穷时的无穷小。

商的极限举例：分子分母趋于零

例 19. 求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

■

商的极限举例：分子分母趋于零

例 20. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

解. 由极限的四则运算规律可知：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

■

商的极限举例：分子分母趋于零

例 21. 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+3}}{x-2}$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+3}}{x-2}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+3}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}\right)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{4-2x}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}\right)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}}=-\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

∎

商的极限举例：分子分母趋于无穷

例 22. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+e^{-x}}{e^x+5}$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+e^{-x}}{e^x+5} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^{-2x}}{1+5e^{-x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(2+e^{-x})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+5e^{-x})} \\
&= \frac{2+\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}}{1+5\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}} \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

■

商的极限举例：分子分母趋于无穷

例 23. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x+1}{3^x+5}$.

解. 由极限的四则运算规律可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+1}{3^x+5} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+3^{-x}}{1+5\cdot 3^{-x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+3^{-x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+5\cdot 3^{-x})} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}}{1+5\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

■

复合函数极限深入理解例子

例 24. 设 $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z}^* \\ 1, & \text{其它且} x \neq 0 \end{cases}$$

虽然 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, 但 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在。

复合函数极限运算法则的特殊形式及其应用

定理 (复合函数的极限（特殊形式）)

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ 且 $\lim g(x) = a$ 则

$$\lim f(g(x)) = f(a) = f(\lim g(x)).$$

例 25. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+3x+5}$.

解. 由复合函数的极限运算规律可知：

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+3x+5} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(x^2+3x+5)} = \sqrt{9} = 3.$$

■

初等函数的极限

定理 (初等函数的极限)

设初等函数 f 在 a 的某个邻域内有定义，则

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

证明思路. 把定理中的“初等”两个字去掉，把剩下的内容看成关于函数 f 的性质，下面研究所有满足这种性质的函数组成的集合 S, 最终只要证明初等函数在这个集合中就行了。

1. 根据函数四则运算的极限的运算规律可知，如果 $f, g \in S$, 则 $f+g \in S$, $f-g \in S$, $f \cdot g \in S$, $f/g \in S$.
2. 根据复合函数的极限的运算规律（特殊形式）可知，如果 $f, g \in S$, 则 $f \circ g \in S$.
3. 由前两条可知，集合 S 中的函数经过有限次四则运算和复合运算得到的函数还在 S 中。
4. 基本初等函数在集合 S 中，从而基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算的到的初等函数也在集合 S 中。 ■

幂指函数的极限

定理 (幂指函数的极限运算法则)

如果极限 $\lim f(x) = A$, 且 $A > 0$, 极限 $\lim g(x) = B$, 则

$$\lim f(x)^{g(x)} = \left(\lim f(x)\right)^{\lim g(x)}$$

定理证明的关键，是下面的恒等变换

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

简记符号

在同一极限过程中，若 $\lim f(x) = +\infty$ 且 $\lim g(x) = +\infty$, 则 $\lim\big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$, 简记为

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

在同一极限过程中，若 $\lim f(x) = A \in \mathbb{R}$ 且 $\lim g(x) = +\infty$, 则 $\lim\big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$, 简记为

$$A + (+\infty) = +\infty.$$

加法与减法

$$A + \infty = \infty \qquad A + (+\infty) = +\infty \qquad A + (-\infty) = -\infty$$

$$A - \infty = \infty \qquad A - (+\infty) = -\infty \qquad A - (-\infty) = +\infty$$

$$\infty \pm A = \infty \qquad (+\infty) \pm A = +\infty \qquad (-\infty) \pm A = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) - (-\infty) = +\infty \qquad (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

乘法与除法：无穷与有限

设 $A > 0$, 则

$$A \cdot \infty = \infty \qquad A \cdot (+\infty) = +\infty \qquad A \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\infty \cdot A = \infty \qquad (+\infty) \cdot A = +\infty \qquad (-\infty) \cdot A = -\infty$$

$$\frac{\infty}{A} = \infty \qquad \frac{+\infty}{A} = +\infty \qquad \frac{-\infty}{A} = -\infty$$

$$\frac{A}{\infty} = 0 \qquad \frac{A}{+\infty} = 0 \qquad \frac{A}{-\infty} = 0$$

设 $A < 0$, 则

$$A \cdot \infty = \infty \qquad A \cdot (+\infty) = -\infty \qquad A \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\infty \cdot A = \infty \qquad (+\infty) \cdot A = -\infty \qquad (-\infty) \cdot A = +\infty$$

$$\frac{\infty}{A} = \infty \qquad \frac{+\infty}{A} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{A} = +\infty$$

$$\frac{A}{\infty} = 0 \qquad \frac{A}{+\infty} = 0 \qquad \frac{A}{-\infty} = 0$$

乘法与除法：无穷与无穷

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot (+\infty) = \infty \qquad (+\infty) \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = \infty \qquad (-\infty) \cdot \infty = \infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

幂指函数

设 $0 < A < 1$, 则

$$A^{+\infty} = 0 \qquad A^{-\infty} = +\infty$$

设 $A > 1$, 则

$$A^{+\infty} = +\infty \qquad A^{-\infty} = 0$$

设 $A > 0$, 则

$$(+\infty)^{A} = +\infty \qquad (+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

设 $A < 0$, 则

$$(+\infty)^{A} = 0 \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0$$