函数的极值与最值

王二民（wagermn@126.com）

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

最值与最值点

定义 (最小值、最小值点)

设 $f : D \to \mathbb{R}$, 若存在 $a \in D$ 使得

$$f(x) \geqslant f(a), \qquad x \in D.$$

则称 $f(a)$ 为函数 f 的**最小值**，称 a 为函数 f 的**最小值点**。若存在 $b \in D$ 使得

$$f(x) \leqslant f(b), \qquad x \in D.$$

则称 $f(b)$ 为函数 f 的**最大值**，称 b 为函数 f 的**最大值点**。

- 最大值和最小值统称为**最值**，最大值点和最小值点统称为**最值点**。
- 最值和最值点都是与函数相关的整体性概念。

内部极值与极值点

定义 (内部极小值、内部极小值点)

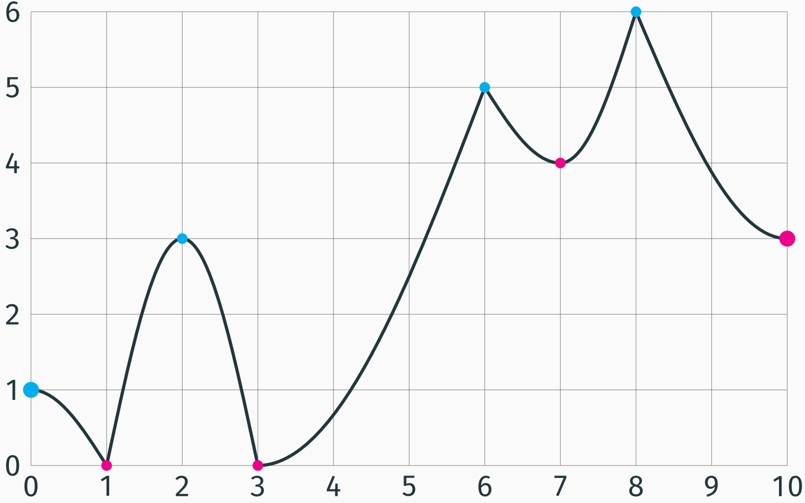
设 $f : D \to \mathbb{R}$, 若存在 $a \in D$ 及 $\delta > 0$ 使得

$$f(x) \geqslant f(a), \qquad x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).$$

则称 $f(a)$ 为函数 $f(x)$ 的一个内部**极小值**，称 a 为与此极小值对应的一个内部**极小值点**。

- 把定义中的 $\geqslant$ 改为 $\leqslant$，则有**极大值**和**极大值点**的概念。
- 把定义中的 $\geqslant$ 改为 $>$，则有**严格极小值**和**严格极小值点**的概念。
- 把定义中的 $\geqslant$ 改为 $<$，则有**严格极大值**和**严格极大值点**的概念。
- 极大值和极小值统称为**极值**，极大值点和极小值点统称为**极值点**。类似地，有**严格极值**和**严格极值点**的概念。
- 极值和极值点的概念，是最值和最值点的局部化后形成的概念。

最值与极值、最值点与极值点



最值与极值、最值点与极值点的关系

1. 极值和最值在值域上，极值点和最值点在定义域上。
2. 最值和极值都可能不存在。
3. 最大（小）值若存在则必唯一，但极大（小）值若存在不一定唯一。
4. 最大（小）值点、极大（小）值点若存在不一定唯一。
5. 最大（小）值一定是极大（小）值，最大（小）值点一定是极大（小）值点。
6. 最大值不小于最小值，但极大值可能小于极小值。
7. 极小值不小于最小值，极大值不大于最大值。
8. 若 $f(a)$ 是最大（小）值，则 a 一定最大（小）值点。
   若 $f(a)$ 是极大（小）值，则 a 不一定是极大（小）值点。

可导内部极值点的必要条件

定理 (费马引理)

设 a 是函数 f 的内部极值点，若函数 f 在 a 处可导，则 $f'(a) = 0$.

- 由引理可知，若 a 是 f 的内部极值点，则要么 f 在 a 处不可导要么 $f'(a) = 0$.
- 费马引理可以判断哪些点不是函数的极值点。

推论

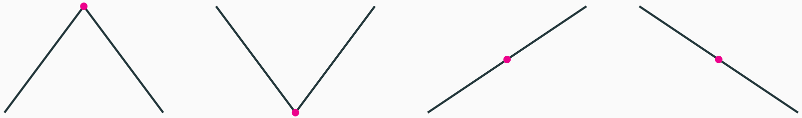
设函数 f 在 a 的某个邻域内有定义，若函数 f 在 a 处可导且 $f'(a) \neq 0$, 则 a 不是函数 f 的极值点。

内部极值点的判断

定理 (内部极值点的充分条件)

设 $\delta > 0$, 函数 f 在开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 上有定义，

- 若 f 在 $(a-\delta, a]$ 上严格递增，在 $[a, a+\delta)$ 上严格递减，则 a 是 f 的一个严格极大值点；
- 若 f 在 $(a-\delta, a]$ 上严格递减，在 $[a, a+\delta)$ 上严格递增，则 a 是 f 的一个严格极小值点；
- 若 f 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 上严格单调，则 a 不是 f 的极值点。



内部极值点的判断

定理 (内部极值点的充分条件)

设函数 f 在 a 处连续,

- 若在 $(a-\delta, a)$ 上 $f' > 0$, 在 $(a, a+\delta)$ 上 $f' < 0$, 则 a 是 f 的一个严格极大值点;
- 若在 $(a-\delta, a)$ 上 $f' < 0$, 在 $(a, a+\delta)$ 上 $f' > 0$, 则 a 是 f 的一个严格极小值点;
- 若在 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 上恒有 $f' > 0$ 或恒有 $f' < 0$, 则 a 不是函数 f 的极值点。

由费马引理可知，若 a 是 f 的内部极值点，则要么 f 在 a 处不可导要么 $f'(a) = 0$.

求极值点练习

例 1. 求函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x}$ 的极值点。

解. 易知函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，当 $x \neq 0$ 时 f 可导且

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 $\frac{1}{4}$, 再结合点 0, 可得

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1/4)$	$1/4$	$(1/4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$

所以由 f' 的符号可知函数 f 有唯一的严格极小值点 $\frac{1}{4}$, 没有极大值点。 ■

不用讨论函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的可导性。

求极值练习

例 2. 求函数 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$ 的极值。

解. 易知函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导且

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2.$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 0 和 1, 从而

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

所以由 f' 的符号可知 f 有唯一的严格极小值 $f(0) = 1$, 没有极大值。 ∎

用高阶导数判断极值点

定理

设函数 f 在 a 处二阶可导，且 $f'(a) = 0$,

- 若 $f''(a) < 0$, 则 a 是 f 的一个严格极大值点;
- 若 $f''(a) > 0$, 则 a 是 f 的一个严格极小值点。

当 $f''(a) = 0$ 时，没有确定的结论，如

- $f(x) = x^3$, 则 $f''(0) = f'(0) = 0$ 且 0 不是 f 的极值点。
- $f(x) = x^4$, 则 $f''(0) = f'(0) = 0$ 且 0 是 f 的极小值点。
- $f(x) = -x^4$, 则 $f''(0) = f'(0) = 0$ 且 0 是 f 的极大值点。

求极值练习

例 3. 求函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的极值。

解. 求函数 $f(x)$ 的导数可得

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1).$$
$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2).$$

解 $f'(x) = 0$ 得驻点 0 和 1, 因为 $f''(1) > 0$ 所以 1 是 f 的极小值点，因为在 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 上 $f' < 0$, 所以 0 不是 f 的极值点。

综合可得，f 有唯一的极小值 $f(1) = 0$, 没有极大值。 ■

当用高阶导数判断极值点失效时，可以用一阶导数判断极值点。

有界闭区间上的最值问题

例 4. 求函数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 在区间 $[-4, 2]$ 上的最值和最值点。

解. 求函数 $f(x)$ 的导数可得

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1).$$

解 $f'(x) = 0$ 可得驻点 -2 和 1.

由连续函数的最值定理可知，f 在区间 $[-4, 2]$ 上一定有最大值和最小值，且最值点只可能在驻点 -2 与 1 和区间端点 -4 与 2 中。所以比较函数 f 在这些点处的函数值

$$f(-4) = -31 \qquad f(-2) = 21 \qquad f(1) = -6 \qquad f(2) = 5,$$

可得函数的最大值为 21, 最大值点为 -2, 最小值为 -31, 最小值点为 -4. ■

最值的存在性

定理 (最值原理)

有界闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值。

设函数 f 在区间 I 上存在最大值（或最小值），则可按下面的步骤求最大值点（或最小值点）

- 求出 f 在 I 上的不可导点（假设仅有有限个）和驻点（假设仅有有限个）。
- 计算函数 f 在所求不可导点和驻点以及区间端点处的函数值。
- 比较以上点处的函数值，可得函数在 I 上的最大值点和最大值（或最小值点和最小值）。

有界闭区间上的最值问题

例 5. 求函数 $f(x) = x|x-1|$ 在区间 $[0,2]$ 上的最值和最值点。

解. 显然，函数 f 在 $[0,2]$ 上连续，且

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & x \in [0,1], \\ x^2 - x & x \in (1,2]. \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \in (0,1), \\ 2x - 1 & x \in (1,2). \end{cases}$$

解 $f'(x) = 0$ 可得驻点 $\frac{1}{2}$, 比较函数 f 在 $0, \frac{1}{2}, 1, 2$ 处的函数值

$$f(0) = 0 \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4} \qquad f(1) = 0 \qquad f(2) = 2,$$

可得函数的最大值为 2, 最大值点为 2, 最小值为 0, 最小值点为 0 和 1. ∎

💬 不用考察函数 f 在 $x = 1$ 处是否可导。

其它区间上的最值问题

例 6. 求 $f(x) = \frac{600x}{x-8} + 3x$ 在区间 $(8, +\infty)$ 上的最值和最值点。

解. 求函数 $f(x)$ 的导数可得

$$f'(x) = \frac{-4800}{(x-8)^2} + 3 = \frac{3(x-48)(x+32)}{(x-8)^2}.$$

解 $f'(x) = 0$ 得唯一驻点 $x = 48$, 又 $x < 48$ 时 $f'(x) < 0$, $x > 48$ 时 $f'(x) > 0$, 从而 f 在 $(8, 48]$ 上严格递减，在 $[48, +\infty)$ 上严格递增，所以 48 是 f 的唯一最小值点。

即函数 f 的最小值为 $f(48) = 864$, 最小值点为 48, 没有最大值。 ■

单调性是求函数最值的有力工具。

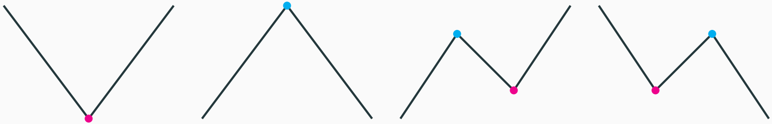
区间上有唯一内部极值点的连续函数

定理

设函数 f 在区间 I 上连续，若在 I 上 f 有唯一内部极值点 a, 则 a 是 f 在 I 上的最值点，且

- 若 a 是极小值点，则 f 在 a 的左侧严格单调递减，在 a 的右侧严格单调递增，从而 a 是 f 的最小值点。
- 若 a 是极大值点，则 f 在 a 的左侧严格单调递增，在 a 的右侧严格单调递减，从而 a 是 f 的最大值点。

极大值点和极小值点只能有一个，而不是可以各有一个。



其它区间上的最值问题

例 7. 求 $f(x)=\frac{600x}{x-8}+3x$ 在区间 $(8,+\infty)$ 上的最值和最值点。

解. 求函数 $f(x)$ 的导数可得

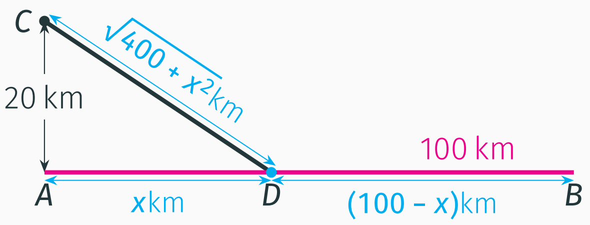
$$f'(x)=-\frac{4800}{(x-8)^2}+3=\frac{3(x-48)(x+32)}{(x-8)^2},$$

$$f''(x)=\frac{9600}{(x-8)^3}.$$

解 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=48$, 又 $f''(48)>0$, 所以 48 时 f 在区间 $(8,+\infty)$ 上的唯一极值点且是极小值点，从而 48 是 f 在区间 $(8,+\infty)$ 上的唯一最小值点。

即函数 f 的最小值为 $f(48)=864$, 最小值点为 48, 没有最大值。 ■

例 8. 如图所示，铁路线上的 AB 段的距离为 100 km. 工厂 C 距 A 处为 20 km, AC 垂直于 AB. 为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路。已知铁路每千米货运的运费与公路每千米货运的运费之比为 3 : 5. 为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应选在何处?



解答

解. 如图所示，设 $AD = x\text{km}$, 则

$$BD = (100 - x)\text{km}, \qquad DC = \sqrt{400 + x^2}\text{km}.$$

因为铁路每千米货运的运费与公路每千米货运的运费之比为 3 : 5, 所以可设铁路货运的运费与公路货运的运费分别为 $3k$/km 与 $5k$/km, 其中 $k > 0$. 设从 B 经过 D 到 C 需要的总分用为 $C(x)$, 则

$$\begin{aligned} C(x) &= 3k \cdot BD + 5k \cdot DC \\ &= 3k(100 - x) + 5k\sqrt{400 + x^2}, \qquad x \in [0, 100]. \end{aligned}$$

题目所问问题可等价于求函数 $C(x)$ 的最小值点。显然函数 $C(x)$ 可导，且

$$C'(x) = \frac{5kx}{\sqrt{400 + x^2}} - 3k,$$

解 $C'(x) = 0$ 可得 $x = 15$, 比较

$$C(0) = 400k \qquad C(15) = 380k \qquad C(100) = 500k\sqrt{1 + \frac{1}{25}}$$

考虑到 $k > 0$, 可得函数 $C(x)$ 的最小值点为 $x = 15$. 所以当 $AD = 15\text{km}$ 时总运费最省。 ■

最值应用题举例

例 9. 在边长为 12 cm 的正方形纸板的四个角剪去同样大小的正方形后折成一个无顶的纸盒子。问剪去边长多大的正方形时盒子的容积最大?

解. 设剪去正方形的边长为 x cm, 盒子的容积为 $V(x)$ cm^3, 则

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x, \quad x \in (0, 6).$$

对 $V(x)$ 求导可得

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x - 2)(x - 6),$$

$$V''(x) = 24x - 96 = 24(x - 4),$$

解 $V'(x) = 0$ 得唯一驻点 $x = 2$, 又 $V''(2) < 0$, 所以 2 是 V 在 $(0, 6)$ 上的唯一极值点且是极大值点，从而函数 V 有唯一最大值点 2. 即当四个角剪去边长为 2 cm 的正方形时盒子的容积最大。 ■

最值应用题举例

解. 设剪去正方形的边长为 x cm, 盒子的容积为 $V(x)$ cm^3, 则

$$V(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x, \quad x \in (0,6).$$

对 $V(x)$ 求导可得

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x-2)(x-6).$$

解 $V'(x) = 0$ 得唯一驻点 $x = 2$, 当 $x < 2$ 时 $V'(x) > 0$, 当 $x > 2$ 时 $V'(x) < 0$, 从而 f 在 $(0,2]$ 上严格递增，在 $[2,6)$ 上严格递减，所以函数 V 有唯一最大值点 2. 即当四个角剪去边长为 2 cm 的正方形时盒子的容积最大。 ■

也可以先求出 V 在 $[0,6]$ 上的最大值点，因为它不在区间端点，所以也是 V 在 $(0,6)$ 上的最大值点。

作业：习题 3–5

- 1.(1), 1.(9),
- 6.(3),
- 12.

不能用单调性判断极值点的例子

对于连续函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

由定义易知 0 是其极小值点。曲线 $y = f(x)$ 在曲线 $y = x^2$ 与 $y = 2x^2$ 之间振荡，且 x 越靠近 0 时其振荡越快，从而在 0 的任何左或右邻域内 f 都没单调性。

实际上，可求得 f 的导函数为

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

因为当 $x \to 0$ 时 $4x + 2x\sin\frac{1}{x} \to 0$, $\cos\frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 之间振荡，所以在 0 的任何左或右邻域内 f' 都没有固定的符号。

用高阶导数判断内部极值点

定理 (极值点的充分条件)

设 $n \in \mathbb{Z}_+$, 函数 f 在点 a 处 n 阶可导，如果 $f^{(n)}(a) \neq 0$ 且 $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$，则

1. 当 n 是奇数时，a 不是极值点。
2. 当 n 是偶数时，a 是严格的极值点，且
   - 当 $f^{(n)}(a) > 0$ 时，a 是极小值点。
   - 当 $f^{(n)}(a) < 0$ 时，a 是极大值点。

- 当 n 为奇数时与 $n = 1$ 时的结论类似，当 n 为偶数时与 $n = 2$ 时的结论类似。
- 设 f 满足定理中的条件，则从考察 a 是否为极值点的角度来看，当 $f^{(n)}(a) > 0$ 时 f 在 a 附近的图像和 x^n 在 0 附近的图像类似，当 $f^{(n)}(a) < 0$ 时 f 在 a 附近的图像和 $-x^n$ 在 0 附近的图像类似。

定理的证明

证明. 不失一般性，可设 $f(a)=0$, $f^{(n)}(a)>0$. 由题设可知

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}\qquad n\geqslant 1$$

由极限的局部保号性知 $x<a$ 时 $f^{(n-1)}(x)<0$, $x>a$ 时 $f^{(n-1)}(x)>0$, 从而由导数的符号与单调性的关系可知，存在 $\delta>0$ 使得

	$f^{(n-1)}$	$f^{(n-2)}$	$f^{(n-3)}$	$f^{(n-4)}$	$\cdots$	f
$(a-\delta,a)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$(-)^n$
a	0	0	0	0	$\cdots$	0
$(a,a+\delta)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$

考虑到 $f(a)=0$, 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 a 两侧异号，从而 a 不是极值点，当 n 为偶数时, $f(x)$ 在 a 两侧同为正，从而 a 是极小值点。

当 $f^{(n)}(a)<0$ 时考虑函数 $g(x)=-f(x)$ 即可。当 $f(a)\neq 0$ 时考虑函数 $g(x)=f(x)-f(a)$ 即可。从而定理得证。 ∎

连续函数的极值点与单调性的关系

定理

设函数 f 在区间 I 上连续，则函数 f 在 I 上没有内部极值点的充要条件是函数 f 在 I 上严格单调。

证明. 必要性是显然的，下面证明充分性，因为函数 f 在区间 I 上连续，所以只需要证明函数 f 在 I 上为单射即可。

设 $a, b \in I$ 且 $a < b$, 则 $[a, b] \subset I$, 因为 f 在 $[a, b]$ 上连续所以 f 在 $[a, b]$ 上必有最大值点和最小值点，若其中有一个在开区间 (a, b) 上，则由最值点和极值点定义可知此点必为 f 在 I 上的内部极值点，因为 f 在 I 上没有内部极值点，所以最大值点与最小值点都是区间端点。若 $f(a) = f(b)$ 则 f 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值相等，从而 f 在 $[a, b]$ 上为常数，(a, b) 上的点都是它的极值点，与题设矛盾。从而 $f(a) \neq f(b)$, 即 f 在 I 上为单射，定理得证。 ∎

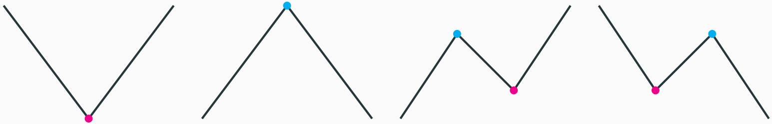
区间上有唯一内部极值点的连续函数

定理

设函数 f 在区间 I 上连续，若在 I 上 f 有唯一内部极值点 a, 则 a 是 f 在 I 上的最值点，且

- 若 a 是极小值点，则 f 在 a 的左侧严格单调递减，在 a 的右侧严格单调递增，从而 a 是 f 的最小值点。
- 若 a 是极大值点，则 f 在 a 的左侧严格单调递增，在 a 的右侧严格单调递减，从而 a 是 f 的最大值点。

极大值点和极小值点只能有一个，而不是可以各有一个。



特殊函数的极值点与最值点

定理

若函数 f 在区间 I 上单调，则函数 f 没有内部极值点，函数 f 的最值点一定是区间 I 的端点。

定理

若函数 f 在区间 I 上是凹的（或凸的），则

- 函数 f 在区间 I 上的最大值点（或最小值点）必是区间端点；
- 函数 f 在区间 I 上至多有一个极小值点（或极大值点）；
- 函数 f 在区间 I 上的极小值点（或极大值点）必是最小值点（或最大值点）；

为什么要用二阶导数判断极值点?

例 10. 考察由方程 $x^3 + y^3 = 6xy$ 确定的可导隐函数 $y = f(x)$ （假设 $y^2 \neq 2x$）的极值与极值点。

解. 把 y 看成关于 x 的可导函数，方程 $x^3 + y^3 = 6xy$ 两端同时对 x 求导并化简可得

$$x^2 + y^2 y' = 2(y + xy') \tag{1}$$

从而 $y' = \frac{x^2-2y}{2x-y^2}$, 令 $y' = 0$ 可得 $x^2 = 2y$, 再联合方程 $x^3 + y^3 = 6xy$, 又由假设 $y^2 \neq 2x$ 解方程组可得此时有 $x = 2^{\frac{4}{3}}$, $y = 2^{\frac{5}{3}}$.

方程 (1) 两端同时对 x 求导（由 y' 的公式可知其关于 x 可导）并化简可得

$$2x + 2y(y')^2 + y^2 y'' = 2(2y' + xy'') \tag{2}$$

把 $x = 2^{\frac{4}{3}}$, $y = 2^{\frac{5}{3}}$, $y' = 0$ 代入方程 (2) 可得此时 $y'' = -1 < 0$.

所以当 $y = f(x)$ 在 $x = 2^{\frac{4}{3}}$ 的某个邻域内有定义且 $f(2^{\frac{4}{3}}) = 2^{\frac{5}{3}}$ 时，函数 f 有极大值 $2^{\frac{5}{3}}$, 对应的极大值点为 $2^{\frac{4}{3}}$, 无极小值；其它情况下函数 f 无极值。 ■

用二阶导数判断极值点的方法通常用于函数 f 不是显函数的情况。