

# 高阶导数

---

王二民 (✉ [wagermn@126.com](mailto:wagermn@126.com))

2019 至 2020 学年

郑州工业应用技术学院 · 基础教学部

# 高阶导数

## 定义 (二阶导数)

如果函数  $f$  的导函数  $f'$  在点  $a$  处可导, 则称函数  $f$  在点  $a$  处**二阶可导**, 并称此导数为  $f$  在点  $a$  处的**二阶导数**, 记为  $f''(a)$ .

如果可导函数  $f$  的导函数  $f'$  也是可导函数, 则定义

$$f'' \stackrel{\text{def}}{=} (f')'.$$

称为  $f$  的**二阶导函数**。

记函数  $f$  的  $n$  阶导函数为  $f^{(n)}$ , 定义为  $f$  的  $n-1$  阶导函数  $f^{(n-1)}$  的导数, 即

$$f^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)})', \quad n \in 2, 3, \dots$$

并规定  $f^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} f$ .

# 高阶导数的变量记法

函数  $y = f(x)$  的  $n$  阶导数也可以记为

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

其中

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right), \quad n = 2, 3, \dots$$

## 二阶导数计算练习

**例 1.** 设  $y = ax + b$ , 求  $y''$ .

**解.** 计算可得  $y' = a$ ,  $y'' = (a)' = 0$ . ■

**例 2.** 设  $y = \sin \omega t$ , 求  $y''$

**解.** 计算可得

$$y' = \cos \omega t \cdot \omega = \omega \cos \omega t$$

$$y'' = \omega(-\sin \omega t)\omega = -\omega^2 \sin \omega t. \quad \blacksquare$$

## 二阶导数的计算

**例 3.** 求函数  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  的 2 阶导函数.

**解.** 由  $f$  的定义可知

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f''(x) &= [f'(x)]' = \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]' = \left[ (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right]' \\ &= -\frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} (1+x^2)' = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

# 幂函数的任意阶导数

**例 4.** 求函数  $y = x^a$  的  $n$  阶导函数, 其中  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

**解.** 计算可得:

$$y' = ax^{a-1}$$

$$y'' = a(a-1)x^{a-2}$$

$$y''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}.$$

特殊地,  $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}.$

设  $m, n \in \mathbb{N}$ , 则  $(x^n)^{(m)} = \begin{cases} n! & m = n \\ 0 & m > n \end{cases}.$

# 指数函数的任意阶导数

**例 5.** 求函数  $y = a^x$  的  $n$  阶导函数.

**解.** 计算可得

$$y' = a^x \ln a$$

$$y'' = a^x (\ln a)^2$$

$$y''' = a^x (\ln a)^3$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$



🗨 特殊地, 当  $a = e$  时  $(e^x)^{(n)} = e^x$ .

# 对数函数的任意阶导数

**例 6.** 求对数函数  $y = \ln x$  的  $n$  阶导函数.

**解.** 计算可得

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

从而由幂函数的  $n$  阶导数公式可知, 当  $n \in \mathbb{N}_+$  时

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2) \cdots (-(n-1))x^{-n} \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}. \end{aligned}$$



# 正弦余弦的任意阶导数

**例 7.** 求函数  $y = \sin x$  的  $n$  阶导函数.

**解.** 计算可得

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\(\sin x)'' &= -\sin x = \sin(x + \pi) \\(\sin x)''' &= -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\(\sin x)'''' &= \sin x = \sin(x + 2\pi)\end{aligned}$$

用数学归纳法可得

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

同理可得  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

# 高阶导数的运算法则

## 定理 (求高阶导数是线性运算)

若函数  $f$  和  $g$  都  $n$  阶可导,  $c \in \mathbb{R}$ , 则

- $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)},$
- $(cf)^{(n)} = cf^{(n)}.$

## 定理 (莱布尼茨公式)

若函数  $f$  和  $g$  都  $n$  阶可导, 则

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

其中  $C_n^k$  为二项式系数。

## 高阶导数练习

**例 8.** 求函数  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  的  $n$  阶导数。

**解.** 易知  $f(x) = (2x+1)^{-1}$ , 从而

$$f'(x) = (-1)(2x+1)^{-2}(2x+1)' = -2(2x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = -2(-2)(2x+1)^{-3}(2x+1)' = (-2)^2 2!(2x+1)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-2)^2 2!(-3)(2x+1)^{-4}(2x+1)' = (-2)^3 3!(2x+1)^{-4}$$

所以由归纳法可知

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

一般地, 若函数  $f$  是  $n$  阶可导的, 则

$$(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

# 高阶导数练习

**例 9.** 设  $y = x^2 e^{2x}$ , 求  $y^{(20)}$ .

**解.** 由莱布尼茨公式可得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{20-k} \\ &= \sum_{k=0}^2 C_{20}^k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{20-k} = \sum_{k=0}^2 C_{20}^k (x^2)^{(k)} e^{2x} 2^{20-k} \\ &= 1 \cdot x^2 \cdot e^{2x} 2^{20} + 20 \cdot 2x \cdot e^{2x} 2^{19} + 190 \cdot 2 \cdot e^{2x} 2^{18} \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

# 任意阶导数练习

**例 10.** 求函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$  的  $n$  阶导数。

**解.** 计算可得

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

从而

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}. \end{aligned}$$



## 作业：习题 2-3

- 1.(1), 1.(4), 1.(9), 1.(10),
- 3.(1).