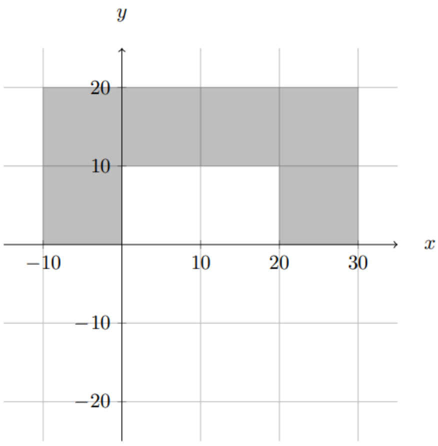
PRE029006 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (2024 .2 - T01)
Avaliação 3
Aluno: Wagner Santos

9. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com PDF conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apenas na Área sombreada da figura abaixo.



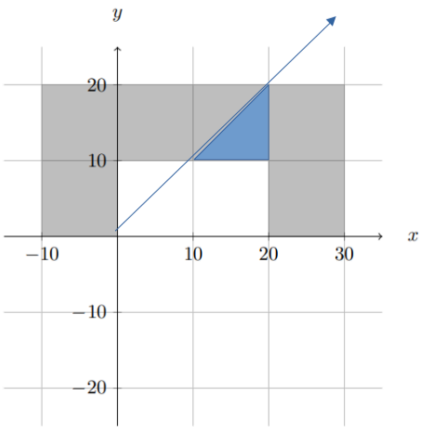
(a) Determine o valor da constante k.

fx,y(x,y) = k [(0 <= y <= 20 & -10 <= x <= 30) ≠ (0 <= y <= 10 & 0 <= x <= 20)]

A1 = (0-(-10))*(10-0)=100 uA
A2 = (30-20)*(10-0)=100 uA
A3 = (30-(-10))*(20-10)=400 uA

Ab = A1+A2+A3=100+100+400=600 uA
Ab*k=1
k=1/600

(b) Determine Pr[X ≥ Y].



A1 = (20-10)*(20-10)*½=50 uA
A2 = (30-20)*(20-0)=200 uA

Ap = A1+A2=250 uA

600 uA -> 1
250 uA -> Pr[x >= y]

Pr[x >= y] = 250/600
Pr[x >= y] = 0.417

(c) Determine e esboce a PDF marginal de Y .

fy(y) = integral de -inf a inf fx,y(x,y) dx
fx,y(x,y) é a constante k = 1/600

Caso 1: 0 <= y <= 10 , onde x varia de -10 a 0 e de 20 até 30;

fy(y) = integral de -10 a 0 1/600 dx + integral de 20 a 30 1/600 dx
fy(y) = [1/600 * (0-(-10))] + [1/600 * (30-20)]
fy(y) = 10/600 + 10/600 = 20/600 = 1/30

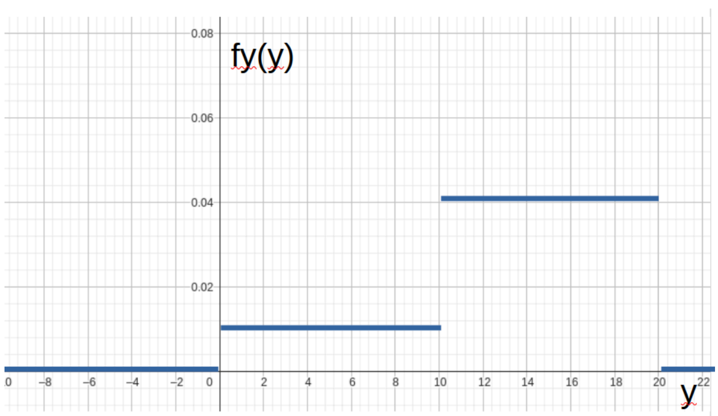
Caso 2: 10 <= y <= 20, onde x varia de -10 a 30;

fy(y) = integral de -10 a 30 1/600 dx
fy(y) = [1600 * (30-(-10))]
fy(y) = 40/600 = 1/15

Fora dessas regiões é zero.

Portanto:

fy(y) = {	***1/30,***	***0 <= y <= 10***
	1/15,	***10 <= y <= 20;***



(d) Determine e esboce a CDF marginal de Y .

Fy(y) = integral de -inf a y fy(u) du

Caso 0: y < 0

Fy(y) = 0

sabemos que: fy(y) = { 1/30, 0 <= y <= 10 e 1/15, 10 <= y <= 20;

Caso 1: 0 <= y <= 10

Fy(y) = integral de 0 a y 1/30 du = 1/30 * y = 1/30 * y = y/30

Caso 2: 10 <= y <= 20

Área acumulada calculada no caso 1 até y = 10 é y/30, portanto fy(10)=10/30=1/3

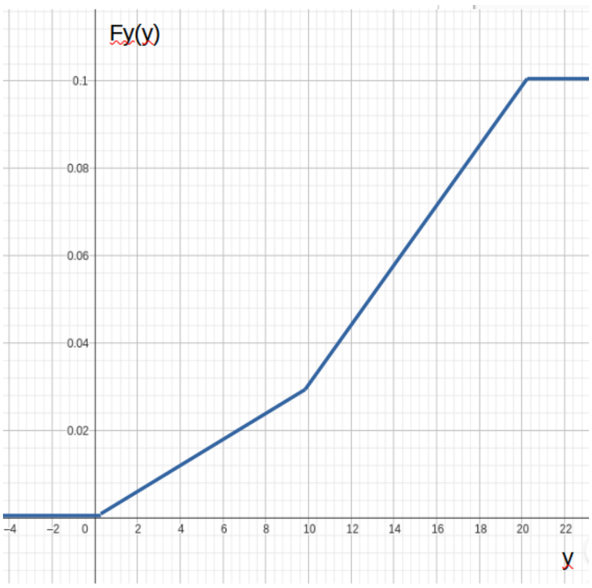
Fy(y) = 1/3 + integral 10 a y 1/15 du = 1/3 + 1/15 * (y-10)
Fy(y) = 1/3 + (y-10)/15

Caso 3: y > 20

Fy(y) = 1

Portanto:

Fy(y) = {	***0,***	***y <0***
	y/30,	***0 <= y <= 10***
	1/3 + (y-10)/15,	***10 <= y <= 20***
	1,	***y > 20;***



(e) Determine e esboce a PDF condicional de Y dado X = 5.

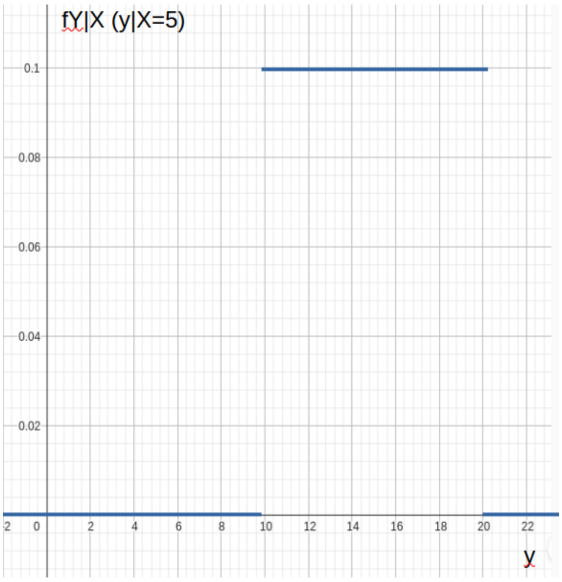
Fórmula PDF Condicional: fY|X (y|X=x) = fY, X (x,y) / fX(x)

fY, X (x,y) = 1/600, já temos.

fx(5) = integral de 10 a 20 1/600 dy = 1/600 * (20-10) = 10/600 = 1/60 fY|X (y|X=5) = 1/600 / 1/60 = 1/10

Portanto;

fY|X (y|X=5) = {	***1/10,***	***10 <= y <= 20***
	0,	***cc;***



(f) Determine a covariância entre X e Y .

cov[X,Y] = E[XY} - E[X]*E[Y]

Expectativas:

fX,Y(x,y) = k = 1/600

1. 0 <= y <= 10 e -10 <= x <= 0,
2. 0 <= y <= 10 e 20 <= x <= 30,
3. 10 <= y <= 20 e -10 <= x <= 30.

E[X] = Integral de x=-inf a x=inf integral de y=-inf a y=inf x fX,Y(x,y) dy dx

E[X] = integral de -10 a 0 integral de 0 a 10 x k dy dx + integral de 20 a 30 integral de 0 a 10 x k dy dx + integral de -10 a 30 integral de 10 a 20 x k dy dx

Integral de y terá o mesmo resultado para todos os intervalos:

1. integral de 0 a 10 1/600 dy = 1/600 * (10-0) = 10/600 = 1/60
2. integral de -10 a 0 1/600 dy = 1/600 * (0-(-10)) = 10/600 = 1/60
3. integral de 10 a 20 1/600 dy = 1/600 * (20-10) = 10/600 = 1/60

E[X] = 1/60 [integral de -10 a 0 x dx + integral de 20 a 30 x dx + integral de -10 a 30 x dx]
E[X] = 1/60 [integral de -10 a 0 (x^2)/2 + integral de 20 a 30 (x^2)/2 + integral de -10 a 30 (x^2)/2]
E[X] = 1/60 [(0^2/2 - (-10)^2/2) + (30^2/2 - 20^2/2) + (30^2/2 - (-10)^2/2)]
E[X] = [(-5/6) + (25/6) + (20/3)]
E[X] = 10

E[Y] = integral de x=-inf a x=inf integral de y=-inf a y=inf y fx,y (x,y) dy dx

E[Y] = integral de 0 a 10 integral de -10 a 0 y 1/60 dy dx + integral de 0 a 10 integral de 20 a 30 y 1/60 dy dx + integral de 0 20 integral de -10 a 30 y 1/60 dy dx

Integral de x terá o mesmo resultado para as duas primeiras regiões:

1. integral de -10 a 0 1/600 dx = 1/600 * (0-(-10)) = 10/600 = 1/60
2. integral de 20 a 30 1/600 dx = 1/600 * (30-20) = 10/600 = 1/60
3. integral de -10 a 30 1/600 dx = 1/600 * (30-(-10)) = 40/600 = 2/30

E[Y] = 1/60[integral de 0 a 10 y dy + integral de 0 a 10 y dy] + 2/30 integral de 10 a 20 y dy
E[Y] = 1/60[integral de 0 a 10 (y^2/2) + integral de 0 a 10 (y^2/2)] + 2/30 integral de 10 a 20 (y^2/2)
E[Y] = 1/60[(10^2/2 - 0^2/2) + (10^2 - 0^2/2)] + 2/30 * (20^2/2 - 10^2/2)
E[Y] = [(5/6) + (5/6)]+10
E[Y] = 35/3

E[XY] = integral de x=-inf a x=inf integral de y=-inf a y=inf xy fX,Y(x,y) dx dy

E[XY] = integral de -10 a 0 integral de 0 a 10 xy k dy dx + integral de 20 a 30 integral de 0 a 10 xy k dy dx + integral de -10 a 30 integral de 10 a 20 xy k dy dx

Dividindo por região:

1. 0 <= y <= 10 e -10 <= x <= 0

E[XY] = integral de -10 a 0 integral de 0 a 10 xy k dy dx
E[XY] = integral de -10 a 0 integral de 0 a 10 xy 1/600 dy dx

Integrando em y:

E[XY] = x 1/600 integral de 0 a 10 y dy = 1/600 integral de 0 a 10 y^2/2
E[XY] = x 1/600 * (10^2 - 0^2/2) = x 1/600 * 100/2 = x 1/600 * 50 = x 50/600 = x 1/12

Integrando em x:

E[XY] = integral de -10 a 0 x 1/12 dx = 1/12 integral de -10 a 0 x dx

E[XY] = 1/12 integral de -10 a 0 x^2/2 = 1/12 * (0^2/2 - (-10)^2/2) = 1/12 * (-50)
E[XY] = -25/6

2. 0 <= y <= 10 e 20 <= x <= 30

E[XY] = integral de 20 a 30 integral de 0 a 10 xy k dy dx
E[XY] = integral de 20 a 30 integral de 0 a 10 xy 1/600 dy dx

Integrando em y:

E[XY] = x 1/600 integral de 0 a 10 y dy = 1/600 integral de 0 a 10 y^2/2
E[XY] = x 1/600 * (10^2 - 0^2/2) = x 1/600 * 100/2 = x 1/600 * 50 = x 50/600 = x 1/12

Integrando em x:

E[XY] = integral de 20 a 30 x 1/12 dx = 1/12 integral de 20 a 30 x dx
E[XY] = 1/12 integral de 20 a 30 x^2/2 = 1/12 * (30^2/2 - 20^2/2) = 1/12 * (900/2 - 400/2)
E[XY] = 125/6

3. 10 <= y <= 20 e -10 <= x <= 30

E[XY] = integral de -10 a 30 integral de 20 a 10 xy k dy dx
E[XY] = integral de -10 a 30 integral de 20 a 10 xy 1/600 dy dx

Integrando em y:

E[XY] = x 1/600 integral de 10 a 20 y dy = 1/600 integral de 10 a 20 y^2/2
E[XY] = x 1/600 * (20^2/2 - 10^2/2) = x 1/600 * (400/2 - 100/2) = x 1/600 * 150
E[XY] = x 1/4

Integrando em x:

E[XY] = integral de -10 a 30 x 1/4 dx = 1/4 integral de -10 a 30 x dx
E[XY] = 1/4 integral de -10 a 30 x^2/2 = 1/4 * (30^2/2 - (-10)^2/2) = 1/4 * (900/2 - 100/2)
E[XY] = 100

Somando as 3 regiões:

E[XY] = -25/6 + 125/6 + 100 = 116.667

cov[X,Y] = E[XY} - E[X]*E[Y] = 116,667 - (10 * 35/3) = 0