INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Trabalho de PSD (DFT)

PSD129005 - PROCESSAMENTO DE SINAIS DIGITAIS (2025 .1-T01)
Prof. Elen Macedo Lobato

Wagner Flores dos Santo

Julho de 2025

Sumário

1. Suponha que temos duas sequências de quatro pontos $x[n]$ e $h[n]$, da seguinte forma:

$$x[n] = \cos(\tfrac{\pi n}{2}) \qquad n = 0, 1, 2, 3$$
$$h[n] = 2^n \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

1.1. Calcule a DFT de quatro pontos $X[k]$.

$$x[n] = \cos(\tfrac{\pi n}{2}) \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{gathered} x[0] = \cos\left(\frac{\pi 0}{2}\right) = 1, x[1] = \cos\left(\frac{\pi 1}{2}\right) = 0 \\ x[2] = \cos\left(\frac{\pi 2}{2}\right) = -1, x[3] = \cos\left(\frac{\pi 3}{2}\right) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

1.1.1. Teórico

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j(\frac{2\pi}{4})kn}, \text{ para } \; k = 0, 1, 2, 3 \tag{2}$$

- $k = 0$

$$X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \tag{3}$$

- $k = 1$

$$\begin{gathered} X[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\frac{2\pi}{4}n} = x[0].1 + x[1].e^{-j(\frac{\pi}{2})} + x[2].e^{-j(\pi)} + x[3].e^{-j(\frac{3\pi}{2})} \\ X[1] = 1.1 + 0.(-j) + (-1).(-1) + 0.j = 1 + 1 = 2 \end{gathered} \tag{4}$$

- $k = 2$

$$\begin{gathered} X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\pi n} = x[0].1 + x[1].(-1) + x[2].1 + x[3].(-1)) \\ X[2] = 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

- $k = 3$

$$\begin{gathered} X[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\frac{6\pi}{4}n} = x[0].1 + x[1].j + x[2].(-1) + x[3].(-j)) \\ X[3] = 1 + 0 - 1 + 0 = 2 \end{gathered} \tag{6}$$

Resultado:

$$X[k] = [0, 2, 0, 2] \tag{7}$$

1.1.2. Matlab:

```
x = [1 0 -1 0];
fft(x)

ans =
     0     2     0     2
```

1.2. Calcule a DFT de quatro pontos $H[k]$.

$$h[n] = 2^n \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$h[n] = h[0] = 2^0 = 1,\ \ h[1] = 2^1 = 2,\ \ h[2] = 2^2 = 4,\ \ h[3] = 2^3 = 8 \tag{8}$$

1.2.1. Teórico

$$H[k] = \sum_{n=0}^{3} h[n].e^{-j(\frac{2\pi}{4})kn},\ \text{para}\ \ k = 0, 1, 2, 3 \tag{9}$$

- $k = 0$

$$H[0] = h[0] + h[1] + h[2] + h[3] = 1 + 2 - 4 + 8 = 15 \tag{10}$$

- $k = 1$

$$\begin{gathered} H[1] = \sum_{n=0}^{3} h[n].e^{-j\frac{2\pi}{4}n} \\ H[1] = 1 + 2.(-j) + 4.(-1) + 8.(j) = 1 - 4 - 2j + 8j = -3 + 6j \end{gathered} \tag{11}$$

- $k = 2$

$$\begin{gathered} H[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\pi n} \\ H[2] = 1 + 2.(-1) + 4.(1) + 8.(-1) = 1 - 2 + 4 - 8 = -5 \end{gathered} \tag{12}$$

- $k = 3$

$$\begin{gathered} H[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\frac{6\pi}{4}n} \\ H[3] = 1 + 2.(j) + 4.(-1) + 8.(-j) = 1 - 4 + 2j - 8j = -3 - 6j \end{gathered} \tag{13}$$

Resultado:

$$H[k] = [15, -3 + 6j, -5, -3 - 6j] \tag{14}$$

1.2.2. Matlab:

```
h = [1 2 4 8];
fft(h)

ans =

  15.0000 + 0.0000i  -3.0000 + 6.0000i  -5.0000 + 0.0000i  -3.0000 - 6.0000i
```

1.3. Calcule $y[n] = x[n] ④ h[n]$ (realizando a convolução circular diretamente).

1.3.1. Teórico

$$y[n] = \sum_{n=0}^{3} x[m].h[(n-m) \bmod 4] \tag{15}$$

- $y[0]$

$$\begin{gathered} y[0] = x[0]h[0] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] = \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 8 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 2 = -3 \end{gathered} \tag{16}$$

- $y[1]$

$$\begin{gathered} y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[3] + x[3]h[2] = \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 4 = -6 \end{gathered} \tag{17}$$

- $y[2]$

$$\begin{gathered} y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] + x[3]h[3] = \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 8 = 4 - 1 = 3 \end{gathered} \tag{18}$$

- $y[3]$

$$\begin{gathered} y[3] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] = \\ 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8 - 2 = 6 \end{gathered} \tag{19}$$

Resultado:

$$y[n] = [-3, -6, 3, 6] \tag{20}$$

1.3.2. Matlab

```
x = [1 0 -1 0];
h = [1 2 4 8];
cconv(x, h, 4)
```

```
ans =

    -3    -6     3     6
```

1.4. Calcule $y[n]$ do item (c) multiplicando as DFT's de $x[n]$ e $h[n]$ e realizando uma DFT inversa.

1.4.1. Teórico

Temos:

$$X[k] = [0, 2, 0, 2], \qquad H[k] = [15, -3 + 6j, -5, -3 - 6j] \tag{21}$$

Multiplicando ponto a ponto:

$$\begin{gathered} Y[k] = X[k] \cdot H[k] \\ Y[0] = 0 \cdot 15 = 0 \\ Y[1] = 2 \cdot (-3 + 6j) = -6 + 12j \\ Y[2] = 0 \cdot (-5) = 0 \\ Y[3] = 2 \cdot (-3 - 6j) = -6 - 12j \end{gathered} \tag{22}$$

Agora aplicamos a IDFT:

$$y[n] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} Y[k].e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)kn} \tag{23}$$

Na IDFT usamos

$W_3^{-km} = e^{j2\frac{\pi}{4}kn}$
- $W_4^0 = 1$
- $W_4^1 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$
- $W_4^2 = e^{-j\pi} = -1$
- $W_4^3 = e^{-j3\frac{\pi}{2}} = j$

- $y[0]$

$$\begin{gathered} y[0] = \frac{1}{4}(Y[0] + Y[1] + Y[2] + Y[3]) \\ y[0] = \frac{1}{4}(0 + (-6 + 12j) + 0 + (-6 - 12j)) \\ y[0] = \frac{1}{4}(-12 + 0j) = -3 \end{gathered} \tag{24}$$

- $y[1]$

$$\begin{aligned}
y[1] &= \frac{1}{4}[Y[0].W_4^0 + Y[1].W_4^1 + Y[2].W_4^2 + Y[3].W_4^3] \\
y[1] &= \frac{1}{4}[0 + (-6 + 12j).(j) + 0 + (-6 - 12j).(j)] \\
y[1] &= \frac{1}{4}[(-12 - 6j) + (-12 + 6j)] = \frac{1}{4}(-24) = -6
\end{aligned} \tag{25}$$

- $y[2]$

$$\begin{aligned}
y[2] &= \frac{1}{4}[Y[0] + Y[1].W_4^2 + Y[2].W_4^0 + Y[3].W_4^2] \\
y[2] &= \frac{1}{4}[0 + (-6 + 12j).(-1) + 0 + (-6 - 12j).(-1)] \\
y[2] &= \frac{1}{4}[(6 - 12j) + (6 + 12j)] = \frac{1}{4}(12) = 3
\end{aligned} \tag{26}$$

- $y[3]$

$$\begin{aligned}
y[3] &= \frac{1}{4}[Y[0] + Y[1].W_4^3 + Y[2] + Y[3].W_4^1] \\
y[3] &= \frac{1}{4}[0 + (-6 + 12j).(-j) + 0 + (-6 - 12j).(j) \\
y[3] &= \frac{1}{4}(12 + 6j + 12 - 6j) = \frac{1}{4}(24) = 6
\end{aligned} \tag{27}$$

Resultado:

$$y[n] = [-3, -6, 3, 6] \tag{28}$$

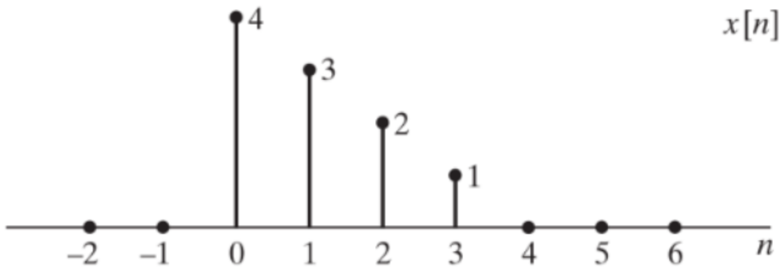
1.4.2. Matlab

```
x = [1 0 -1 0];
h = [1 2 4 8];
cconv(x, h, 4)

ans =

    -3    -6     3     6
```

2. Considere a sequência de comprimento finito real x[n] mostrada na Figura a seguir



2.1. Esboce a sequência de comprimento finito *y*[*n*] cuja DFT de seis pontos seja

$$Y[k] = W_6^{5k} X[k] \tag{29}$$

sendo *X*[*k*] a DFT de seis pontos de *x*[*n*].

2.1.1. Teórico

A DFT de uma sequência de 6 pontos é dada por:

$$y[n] = \sum_{n=0}^{5} x[n].W_6^{kn}, \quad \text{k=0, 1, 2, 3, 4, 5} \tag{30}$$

Onde:

$$W_6 = e^{-j2\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{31}$$

Essa operação é uma modulação na frequência com fator W_6^{5k}. Isso equivale a uma rotação no tempo (ou seja, atraso) por 5 amostras no domínio do tempo.

- Propriedade da DFT:

Se:

$$Y[k] = W_N^{mk}.X[k] \Rightarrow y[n] = x[(n-m) \mod N] \tag{32}$$

Portanto, como $m = 5$ e $N = 6$, temos:

$$y[n] = x[(n-5) \mod 6] \tag{33}$$

Ou seja, atraso circular de 5 amostras em x[n]:

n	x[n]	y[n]=x[(n-5) mod 6]
0	1	x[1]=0
1	0	x[2]=-1
2	−1	x[3]=0
3	0	x[4]=1
4	1	x[5]=0
5	0	x[0]=1

Resultado:

$$y[n] = \{0, -1, 0, 1, 0, 1\} \tag{34}$$

2.1.2. Matlab

```
N = 6;
x = [1 0 -1 0 1 0];          % Sinal de entrada
m = 5;                       % Atraso desejado

X = fft(x);                  % DFT de x[n]

k = 0:N-1;                   % Índice de frequência
W = exp(-1j*2*pi/N);         % Raiz da unidade
Y = (W.^(m*k)) .* X;         % Modulação: Y[k] = W^(mk) * X[k]

y = ifft(Y, 'symmetric') % IDFT para obter y[n] no tempo real

stem(0:N-1, y, 'filled');
xlabel('n');
ylabel('y[n]');
title(['y[n] tal que Y[k] = W^{' num2str(m) 'k}_' num2str(N) ' * X[k]']);
grid on;
```

```
y =

   -0.0000   -1.0000    0.0000    1.0000   -0.0000    1.0000
```

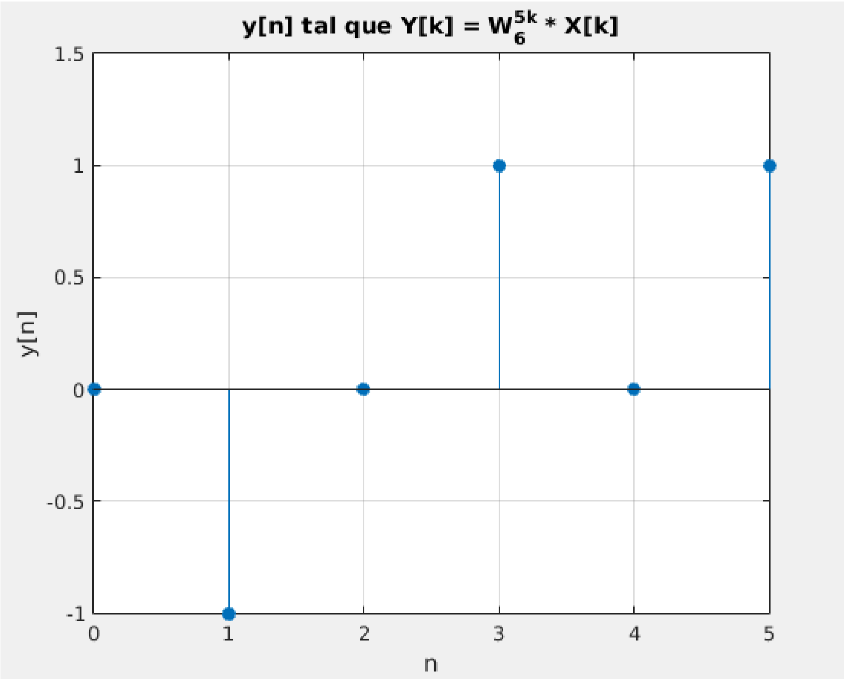


Figure 2: Plot Matlab ex. 2.1

2.2. Esboce a sequência de comprimento finito $w[n]$ cuja DFT de seis pontos seja

$$W[k] = Im\{X[k]\} \tag{35}$$

2.2.1. Teórico

A DFT $W[k]$ contém somente a parte imaginária de $X[k]$.

Propriedade:

Se $W[k] = Im\{X[k]\}$, então no tempo isso equivale à parte ímpar da convolução com o kernel correspondente à DFT.

Mas como o sinal x[n] é real e simétrico, sua DFT terá componentes imaginárias nulas ou puramente ímpares. Assim, a parte imaginária da DFT corresponde à parte ímpar da sequência.

Parte ímpar de $x[n]$:

$$x_{\text{impar}}[n] = \frac{x[n] - x[-n \bmod 6]}{2} \tag{36}$$

n	x[n]	x[(-n mod 6]	x_impar[n]
0	1	x[0]=1	(1-1)/2=0
1	0	x[5]=0	(0-0)/2=0
2	−1	x[4]=1	(-1-1)/2=-1
3	0	x[3]=0	(0-0)/2=0
4	1	x[2]=-1	(1-(-1))/2=1
5	0	x[1]=0	0

Resultado:

$$w[n] = \{0, 0, -1, 0, 1, 0\} \tag{37}$$

2.2.2. Matlab

```
% Sinal da questão
x = [1, 0, -1, 0, 1, 0];  % sequência x[n]
N = length(x);
x_odd = zeros(1, N);      % para armazenar a parte ímpar

% Cálculo da parte ímpar
for n = 0:N-1
    idx_pos = mod(n, N) + 1;         % índice n
    idx_neg = mod(-n, N) + 1;        % índice -n (módulo circular)
    x_odd(n+1) = 0.5 * (x(idx_pos) - x(idx_neg));
end

% Cálculo alternativo via parte imaginária da DFT
X = fft(x);
W_imag = imag(X);
w_check = ifft(1j * W_imag);  % Parte ímpar via IDFT

% Exibição
disp('Parte ímpar diretamente de x[n]:');
disp(x_odd);

disp('Parte ímpar via ifft(j * imag(DFT)):');
disp(real(w_check));  % garantir parte real (devido a pequenas imprecisões
numéricas)

% Plotagem
figure;
subplot(2,1,1);
```

```
stem(0:N-1, x_odd, 'filled'); grid on;
title('Parte ímpar de x[n] (direta)');
xlabel('n'); ylabel('x_{ímpar}[n]');

subplot(2,1,2);
stem(0:N-1, real(w_check), 'filled'); grid on;
title('Parte ímpar de x[n] via imag(DFT)');
xlabel('n'); ylabel('w[n]');

Parte ímpar diretamente de x[n]:
     0     0    -1     0     1     0

Parte ímpar via ifft(j * imag(DFT)):
         0         0   -1.0000         0    1.0000         0
```

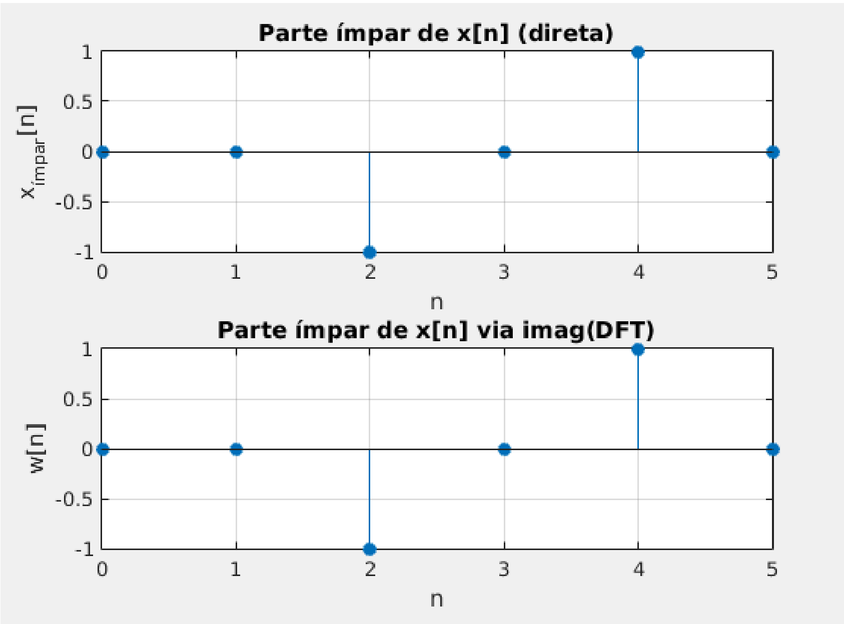


Figure 3: Plot Matlab ex. 2.2

2.3. Esboce a sequência de comprimento finito $q[n]$ cuja DFT de três pontos seja

$$Q[k] = X[2k+1], k = 0, 1, 2. \tag{38}$$

2.3.1. Teórica

Essa operação está extraindo apenas as componentes ímpares da DFT $X[k] = X[1], X[3], X[5]$. Como a DFT é uma transformação linear, isso corresponde a aplicar uma janela na frequência, o que gera uma interpolação no tempo (sinal mais espalhado).

- Operação inversa:

Para obter $q[n]$, fazemos a IDFT de 3 pontos da sequência:

$$Q[k] = \{X[1], X[3], X[5]\} \tag{39}$$

A sequência $q[n]$ será obtida por:

$$q[n] = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} Q[k].e^{j2\pi kn3}, \quad n = 0, 1, 2 \tag{40}$$

Pegamos o resultados obtido na questão 2.1:

$$y[n] = \{0, -1, 0, 1, 0, 1\} \tag{41}$$

Calculamos o DFT da sequÊncia:

```
x = [1 -1 1 -1 1 -1];   % Sinal x[n] de comprimento 6

X = fft(x);   % DFT de 6 pontos

X =
     0 + 0i
     3 + 1.7321i
     0 + 0i
     3 - 1.7321i
     0 + 0i
    -6 + 0i
```

Extrair as componentes ímpares da DFT:

- $X[1] = X(2) = 3 + 1.7321j$
- $X[3] = X(4) = 3 - 1.7321j$
- $X[5] = X(6) = -6 + 0j$

obs: No Matlab o índice começa do 1

Aplicando a sequência:

$$q[n] = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} Q[k].e^{j2\pi kn3}, \quad n = 0, 1, 2 \tag{42}$$

Sabemos que:

- $Q[0] = X[1] = 3 + j\sqrt{3}$
- $Q[1] = X[3] = 3 - j\sqrt{3}$
- $Q[2] = X[5] = -6$

A matriz da IDFT de ordem 3 é:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & W & W^2 \\ 1 & W^2 & W^4 \end{pmatrix} \tag{43}$$

```
N = 3;
q = zeros(1,N);
for n = 0:N-1
    for k = 0:N-1
        q(n+1) = q(n+1) + Q(k+1) * exp(1j*2*pi*k*n/N);
    end
end
q = q / N;
```

Resultado:

```
q =
         0   2  1
```

O que equivale a:

$$q[n] = \{0, 2, 1\} \tag{44}$$

2.3.2. Matlab

```
x = [1 -1 1 -1 1 -1];   % Sinal original
X = fft(x);             % DFT de 6 pontos

% Seleciona X[1], X[3], X[5] => índices 2, 4, 6 em MATLAB
Q = [X(2), X(4), X(6)];  % Componentes ímpares da DFT

% Calcula IDFT de ordem 3
N = 3;
q = zeros(1,N);
for n = 0:N-1
    for k = 0:N-1
        q(n+1) = q(n+1) + Q(k+1) * exp(1j*2*pi*k*n/N);
    end
end
q = q / N;

% Exibe resultado
disp('q[n] =');
disp(real(q));  % Apenas parte real, pois q[n] é real

% Esboço gráfico
figure;
stem(0:N-1, real(q), 'filled');
title('q[n] a partir de Q[k] = X[2k + 1]');
```

```
xlabel('n'); ylabel('q[n]');
grid on;
```

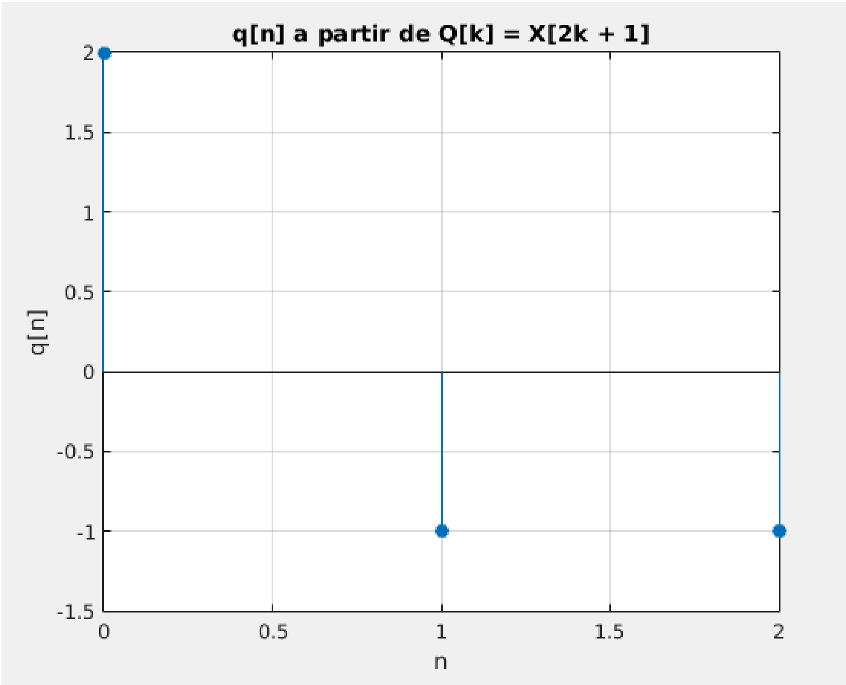


Figure 4: Plot Matlab ex. 2.3

3. Conclusão

Ao longo do relatório, conseguimos entender na prática como as propriedades da DFT se refletem no domínio do tempo. Foi possível observar, por exemplo, que aplicar uma multiplicação por uma exponencial complexa em frequência resulta num atraso circular no tempo. Também vimos que a parte imaginária da DFT corresponde à parte ímpar da sequência original.

Além disso, extraímos apenas algumas componentes específicas da DFT (as de índice ímpar) e, com isso, reconstruímos uma nova sequência por meio da IDFT. Todos esses conceitos foram testados no MATLAB, confirmando os cálculos teóricos e permitindo visualizar melhor o efeito de cada operação.

No fim, ficou claro como a DFT é uma ferramenta poderosa para analisar, modificar e entender sinais, sendo muito útil em áreas como processamento digital, comunicações e sistemas discretos em geral.