

PRE029006 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (2024 .2 - T01)

Avaliação 5

Aluno: Wagner Santos

5. Um vetor gaussiano $X = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$ tem média nula e matriz covariância

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- (a) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3]$.
- (b) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2]$.
- (c) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \text{ e } X_3 = 3]$.
- (d) $\Pr[X_1 - X_3 > 4]$.

Com base nas informações do enunciado e matriz C_x , temos:

$\text{var}(X_1)$	$\text{cov}(X_1, X_2)$	$\text{cov}(X_1, X_3)$
$\text{cov}(X_2, X_1)$	$\text{var}(X_2)$	$\text{cov}(X_2, X_3)$
$\text{cov}(X_3, X_1)$	$\text{cov}(X_3, X_2)$	$\text{var}(X_3)$

- médias = 0
- $\text{var}(X_1) = 5$, $\text{var}(X_2) = 4$, $\text{var}(X_3) = 3$
- $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$, $\text{cov}(X_1, X_3) = 2$, $\text{cov}(X_2, X_3) = 0$;

(a) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3]$.

$X_1 \sim N(0, 5)$

$$\Pr[2 \leq X_1 \leq 3] = \Phi(3/\sqrt{5}) - \Phi(2/\sqrt{5}) = 0,910144 - 0,814453 = 0,096$$

(b) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2]$.

Dado que a $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$, a distribuição é a mesma do item “a”, $X_2 \sim N(0, 5)$

$$\Pr[2 \leq X_1 \leq 3] = \Phi(3/\sqrt{5}) - \Phi(2/\sqrt{5}) = 0,910144 - 0,814453 = 0,096$$

(c) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \text{ e } X_3 = 3]$.

$X_1 \mid (X_2 = 2, X_3 = 3)$

$$f_X(x_1 \mid a, b) = 1/(2\pi) \sigma^2 \exp \left(-\frac{(x - u)^2}{\sigma^2} \right)$$

Blocos da matriz

$$C_{X_1} = 5 \quad C_{X_2, X_3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C_{X_1, X_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Média condicional} &= 0 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 + 6/3 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variância condicional} &= \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = 4/3 \\ &= 5 - 4/3 = 11/3 \end{aligned}$$

Probabilidade condicional

$$X_1 \mid (X_2 = 2, X_3 = 3) \sim N(2, 11/3)$$

$$\Pr[2 \leq X_1 \leq 3] = \Phi(3 - 2 / \sqrt{11/3}) - \Phi(2 - 2 / \sqrt{11/3}) = 0,699246 - 0,5 = 0,199$$

(d) $\Pr[X_1 - X_3 > 4]$.

$$\text{var}(X_1 - X_3) = \text{var}(X_1) + \text{var}(X_3) - 2 * \text{cov}(X_1, X_3) = 5 + 3 - 2*2 = 4$$

$$X_1 - X_3 \sim N(0, 4)$$

$$\Pr[X_1 - X_3 > 4] = 1 - \Phi(4/\sqrt{4}) = 1 - 0,97725 = 0,023$$