

## PRE029006 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (2024 .2 - T01)

Recuperação Avaliação 4

Aluno: Wagner Santos

7. Sejam  $X_1, X_2 \sim \text{Unif}([-2, 1])$  variáveis aleatórias sorteadas independentemente.

(a) Sejam

$$Y_1 = X_1^2,$$

$$Y_2 = X_2^2,$$

$$Y_3 = X_1 * X_2.$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório  $Y = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3]^T$ .

(b) Sejam

$$Z_1 = Y_1,$$

$$Z_2 = Y_1 + Y_2,$$

$$Z_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório  $Z = [Z_1 \ Z_2 \ Z_3]^T$ . Utilize a formulação matricial.

### Parte (a)

Média e variância de  $X_1$  e  $X_2$ :

$X_1$  e  $X_2$  são independentes e têm distribuição uniforme no intervalo entre -2 e 1.

$$E[X] = a+b/2 = (-2 + 1) / 2 = -1/2$$

$$E[X^2] = \text{integral de } -2 \text{ até } 1 \ x^2 f_X(x) \ dx \rightarrow \text{integral de } -2 \text{ até } 1 \ x^2 (1/b-a) \ dx = 1$$

[Resolução WolframAlpha](#)

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - (-1/2)^2 = 3/4$$

$$E[X_1] = E[X_2] = -1/2$$

$$\text{Var}[X_1] = \text{Var}[X_2] = 3/4$$

Média de  $Y_1, Y_2$  e  $Y_3$ :

$$Y_1 = X_1^2 \quad \text{Já calculado acima para } E[X^2] = 1$$

$$Y_2 = X_2^2 \quad \text{Como } X_2 \text{ tem a mesma distribuição de } X_1 = 1$$

$$Y_3 = X_1 * X_2 \quad E[Y_3] = E[X_1] * E[X_2] = (-1/2) * (-1/2) = 1/4$$

**Vetor média de Y:**

$$E[Y] = E[Y_1] \ [1]$$

$$E[Y_2] \ [1]$$

$$E[Y_3] \ [1/4]$$

Cov(Y) =

var(Y1)	cov(Y1, Y2)	cov(Y1, Y3)
cov(Y2, Y1)	var(Y2)	cov(Y2, Y3)
cov(Y3, Y1)	cov(Y3, Y2)	var(Y3)

$$\text{Var}(Y1) = \text{Var}(Y2) = E[Y1^2] - E[Y1]^2$$

$$E[Y1^2] = E[X1^4] = \text{integral de } -2 \text{ até } 1 \ x^4 \ (1/b-a) \ dx = 11/5$$

[Resolução WolframAlpha](#)

$$\text{Var}(Y1) = \text{Var}(Y2) = 11/5 - 1^2 = 6/5$$

$$\text{Var}[Y3] = E[Y3^2] - E[Y3]^2$$

$$\text{Var}[Y3] = 1 - (1/4)^2 = 15/16$$

**Cov(Y1, Y2) = 0** , são independentes

**Cov(Y1, Y3):**

$$Y1 = X^2 \text{ e } Y3 = X1 * X2$$

$$\text{Cov}(Y1, Y3) = E[Y1, Y3] - E[Y1]E[Y3]$$

$$E[Y1, Y3] = E[X1^2 * X1 * X2] = E[X1^3] * E[X2]$$

$$E[X1^3] = \text{integral de } -2 \text{ a } 1 \ x^3 * 1/3 \ dx = -5/4$$

[Resolução WolframAlpha](#)

$$E[X2] = -1/2$$

$$E[Y1, Y3] = (-5/4)*(-1/2) = 5/8$$

$$\text{Cov}(Y1, Y3) = E[Y1, Y3] - E[Y1]E[Y3] = 5/8 - (1)*(1/4) = 3/8$$

**Cov(Y1, Y2):** é simétrica a Cov(Y1, Y3)

**Matriz covariância de Y:**

Cov(Y) =

6/5	0	3/8
0	6/5	3/8
3/8	3/8	15/16

**Parte (b)**

Definindo Z como uma transformação linear de Y ,  $Z = AY$

$$A =$$

1	0	0
1	1	0
1	1	1

**Vetor média de Z:**

$$Z = AY$$

[Resolução WolframAlpha](#)

$$E[Z] =$$

1	0	0		1		1
1	1	0	*	1	=	2
1	1	1		1/4		9/4

**Matriz covariância de Z:**

$$CZ = ACY AT$$

[Resolução WolframAlpha](#)

$$CZ =$$

1	0	0		6/5	0	3/8		1	1	1		6/5	6/5	63/40
1	1	0	*	0	6/5	3/8	*	0	1	1	=	6/5	12/5	63/20
1	1	1		3/8	3/8	15/16		0	0	1		63/40	63/20	387/80