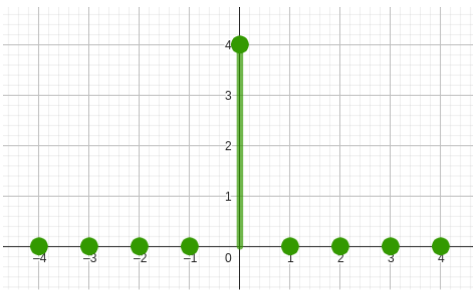
PRE029006 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (2024 .2 - T01)
Avaliação 8
Aluno: Wagner Santos

4. Seja $X[n]$ um processo estocástico de parâmetro discreto, em que $X[n]$, para todo n, são variáveis aleatórias gaussianas i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) de média 0 e variância 4. Seja

$$Y[n] = 4X[n] - 3X[n-1].$$

Determine:
(a) A função autocovariância de $X[n]$. Esboce.

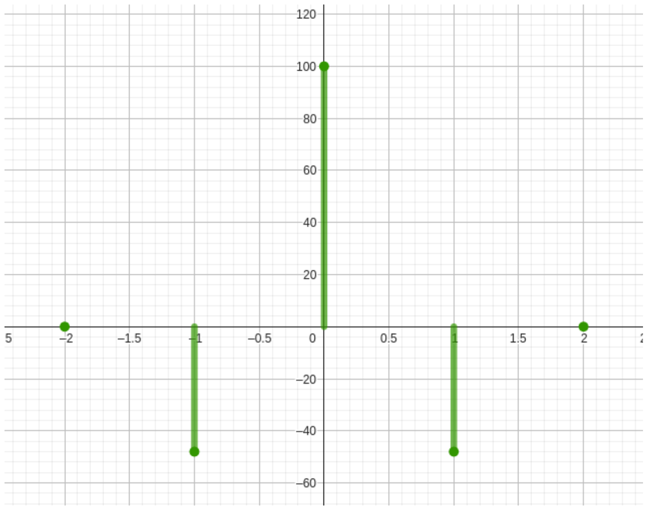
C_x[n1, n2] = cov[X_n1, X_n2] = {4, n1 = n2 e 0, n1 ≠ n2



Fonte: https://www.geogebra.org/classic/n4kkamn9

(b) A função autocovariância de $Y[n]$, sem utilizar análise no domínio da frequência. Esboce.

C_Y[n1, n2] = cov[Y_n1, Un2]
= E[(4X_n1 - 3X_n1-1)(4X_n2 - 3X_n2-1)]
= E[4X_n1 4X_n2]+E[4X_n1 (- 3X_n2-1)]+E[(-3X_n1-1) 4X_n2]+E[(-3X_n1-1)(- 3X_n2-1)]
=16E[X_n1, X_n2]-12E[X_n1, X_n2-1]-12E[X_n1-1, X_n2]+9E[X_n1-1, X_n2-1]
= 16C_X[n1, n2]-12C_X[n1, n2-1]-12C_X[n1-1, n2]+9C_X[n1-1, n2-1]
= 16C_X[ℓ]-12C_X[ℓ+1]-12C_X[ℓ-1]+9C_X[ℓ]
= 25C_X[ℓ]-12C_X[ℓ+1]-12C_X[ℓ-1]
= 25δ[ℓ]-12δ[ℓ+1]-12δ[ℓ-1]
= 4*25δ[ℓ]-4*12δ[ℓ+1]-4*12δ[ℓ-1]
= 100δ[ℓ]-48δ[ℓ+1]-48δ[ℓ-1]



Fonte: https://www.geogebra.org/classic/ntexfgtb

(c) A função autocovariância de $Y[n]$, utilizando análise no domínio da frequência.

Substituição:
C_X(ℓ) = {4, ℓ = 0 e 0, ℓ ≠ 0

C_Y(ℓ) = 25C_X[ℓ]-12C_X[ℓ+1]-12C_X[ℓ-1]

para ℓ = 0 ,	C_Y(0) = 25C_X[0]-12C_X[0+1]-12C_X[0-1] = 100
para ℓ = ±1,	C_Y(±1) = 25C_X[±1]-12C_X[(0]-12C_X[(±1)-1] = -48
para ℓ ≥ ±2,	C_Y(ℓ) = 25C_X[ℓ]-12C_X[(ℓ-1]]-12C_X[(ℓ-1] = 0

C_Y(ℓ)={100, ℓ = 0, -48, ℓ = ±1 e 0, ℓ ≥ ±2.

H(f)=−∞∑∞C_Y(ℓ)e^−j2πfℓ = 100e^−j2πf(0) + (-48e^−j2πf(1)) + (-48e^−j2πf(-1))
=100 - 48e^−j2πf - 48e^j2πf = 100 - 48 * 2cos(2πf) = 100 - 96 cos(2πf)

(d) A função densidade de probabilidade de $Y[5]$.

μY=0
Y[5] = 4X[5] - 3X[4]
Var(Y[5])=Var(4X[5]−3X[4])
Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y), se X e Y são independentes.
Var(Y[5])=4^2*4 + (-3)^2*4 = 100
Y[5]=(0, 100)

f_Y(y)=(1/raiz2πVarY^2)e^(y-μY^2/VarY^2)
f_Y(y)=(1/10raiz2π)e^(−y^2/200)

(e) A covariância entre $Y[5]$ e $Y[6]$.

C_Y(5, 6) = E[Y[5]*Y[6]]

$Y[5] = 4X[5] - 3X[4]$
$Y[6] = 4X[6] - 3X[5]$

$E[Y[5]*Y[6]] = E[(4X[5] - 3X[4])] E[(4X[6] - 3X[5])]$
$=E[4X[5] \cdot 4X[6]] - E[4X[5] \cdot 3X[5]] - E[3X[4] \cdot 4X[6]] + E[3X[4] \cdot 3X[5]]$
$=16E[X[5]X[6]] - 12E[X[5]X[5]] - 12E[X[4]X[6]] + 9E[X[4]X[5]]$
$= 16E[X[5] X[6]] - 12E[X[5] X[5]] - 12E[X[4] X[6]] + 9E[X[4] X[5]]$
$=16E[X[5]X[6]] - 12E[X[5]X[5]] - 12E[X[4]X[6]] + 9E[X[4]X[5]]$
$=16(0) - 12(4) - 12(0) + 9(0) = -48$

C_Y(5, 6) = -48

(f) $\Pr[Y[5] > 0 \mid Y[3] = 1]$.

sabemos que Y[5]=(0, 100)

usando a propriedade da distribuição normal:

$= \Phi((b - \mu)/\sigma - \Phi((b - \mu)/\sigma) = \Phi((\infty - 0)/\text{raiz}100) - \Phi((0-0/\text{raiz}100) = 1 - 0,5 = 0,5$