INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

TRABALHO - SIS029006 - SINAIS E SISTEMAS II (2024 .2 - T01)

TRANSFOMADA Z

Jamilly da Silva Pinheiro,
Joana da Silva e
Wagner Flores dos Santos

25 de Fevereiro de 2025

Sumário

1. Enunciado

Considere um sistema linear e invariante no tempo com condições iniciais

$$y[-1] = 1ey[-2] = 1 \quad (1)$$

e descrito pela equação de diferença

$$y[n] + y[n-1] + 0.21y[n-2] = x[n] \quad (2)$$

e sinal de entrada

$$x[n] = (1 - 0.8n)u[n] \quad (3)$$

1.1. Determine a expressão da função de transferência do sistema (cálculo)

Aplicando a Transformada Z à equação diferencial:

$$Y(Z) + Z^{\{-1\}}Y(Z) + 0.21Z^{\{-2\}}Y(Z) = X(Z) \quad (4)$$

Ajustando:

$$Y(Z)\left[1 + Z^{\{-1\}} + 0.21Z^{\{-2\}}\right] = X(Z) \quad (5)$$

A função de transferência é então:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + Z^{\{-1\}} + 0.21Z^{\{-2\}}} \quad (6)$$

1.2. Represente graficamente o sistema no plano z. Verifique e justifique a estabilidade do sistema. (cálculo e via simulação).

Para analisar a estabilidade do sistema, devemos verificar a localização dos pólos da função de transferência. A equação característica do denominador é:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + Z^{\{-1\}} + 0.21Z^{\{-2\}}} . \frac{Z^2}{Z^2} \quad (7)$$

$$H(Z) = \frac{Z^2}{Z^2 + Z + 0.21} \quad (8)$$

$$Z^2 + Z + 0.21 = 0 \quad (9)$$

Resolvendo para Z:

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(0,21)2(1)}}{2(1)} \quad (10)$$

$$z' = -0,7 \quad (11)$$

e

$$z'' = -0,3 \tag{12}$$

Código matlab:

```
a = [1, 1, 0.21];
b = [1];
zplane(b, a);
roots(a)
roots(b)
```

```
ans =
   -0.7000
   -0.3000
```

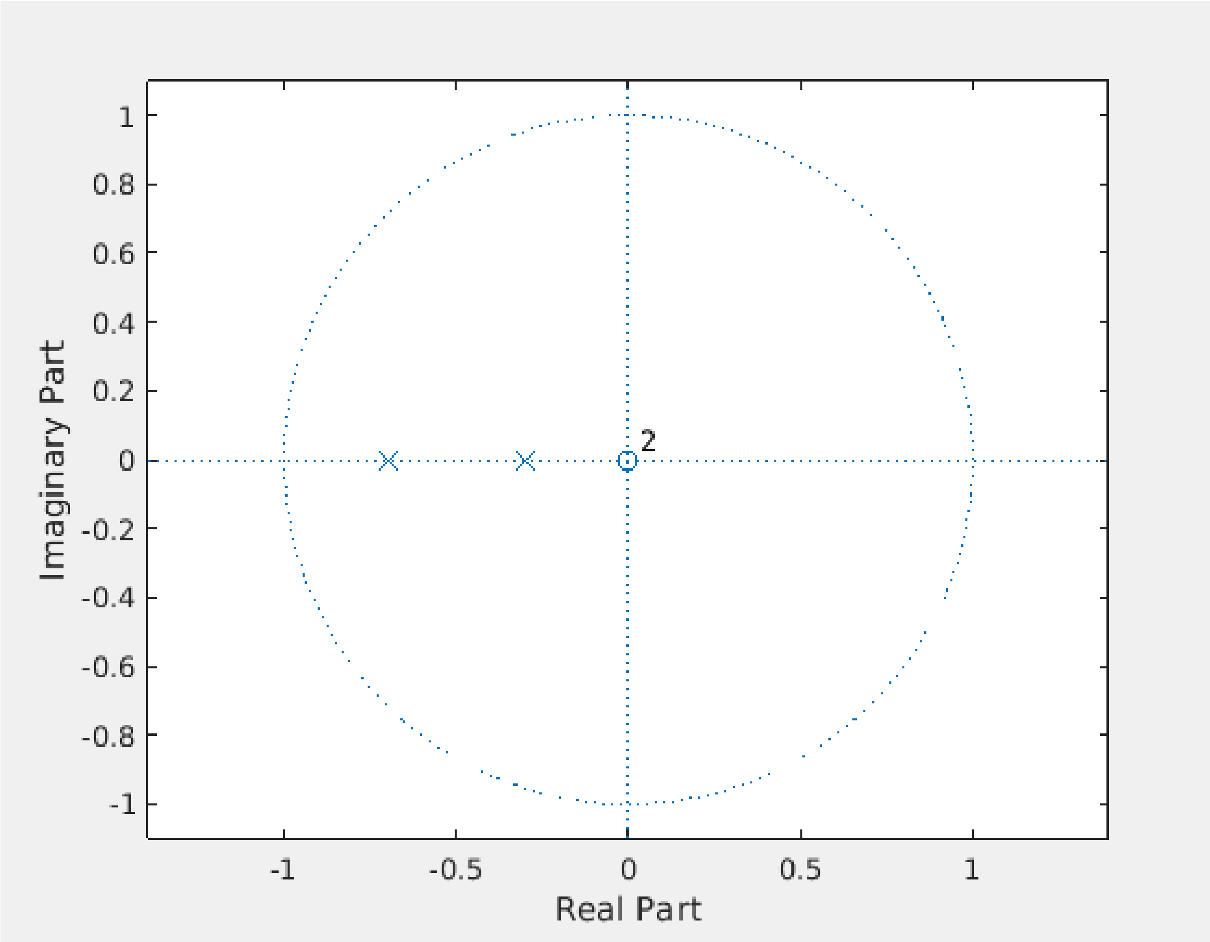

Figure 1: Sistema no plano.

Os valores dos pólos indicam que o sistema é estável se todos os pólos estiverem dentro do círculo unitário.

1.3. Determine a expressão da resposta ao impulso do sistema (cálculo e via simulação).

$$\frac{H(Z)}{Z} = \frac{Z}{(Z+0,3)(Z+0,7)} = \frac{A}{Z+0,3} + \frac{B}{Z+0,7} \tag{13}$$

$$A = \frac{A}{Z+0,3} = \frac{-0,3}{0,4} = -\frac{3}{4} \tag{14}$$

$$B = \frac{B}{Z+0,7} = \frac{-0,7}{-0,4} = \frac{7}{4} \tag{15}$$

Retomando o calculo do impulso:

$$H(Z) = \left(-\frac{3}{4}.\frac{Z}{Z+0,3}\right) + \left(\frac{7}{4}.\frac{Z}{Z+0,7}\right) \tag{16}$$

$$h[n] = -\frac{3}{4}(-0,3^n)u[n] + \frac{7}{4}(-0,7^n)u[n] \tag{17}$$

Código matlab:

```
%1.3)
[r p k] = residuez(b, a)
r =

    1.7500
   -0.7500


p =

   -0.7000
   -0.3000


k =

     []
```

1.4. Represente graficamente a resposta ao impulso do sistema.

Código matlab:

```
n = 20;
h = impz(b, a, n);
stem(0:n-1, h, 'filled', 'LineWidth', 1.5);
```

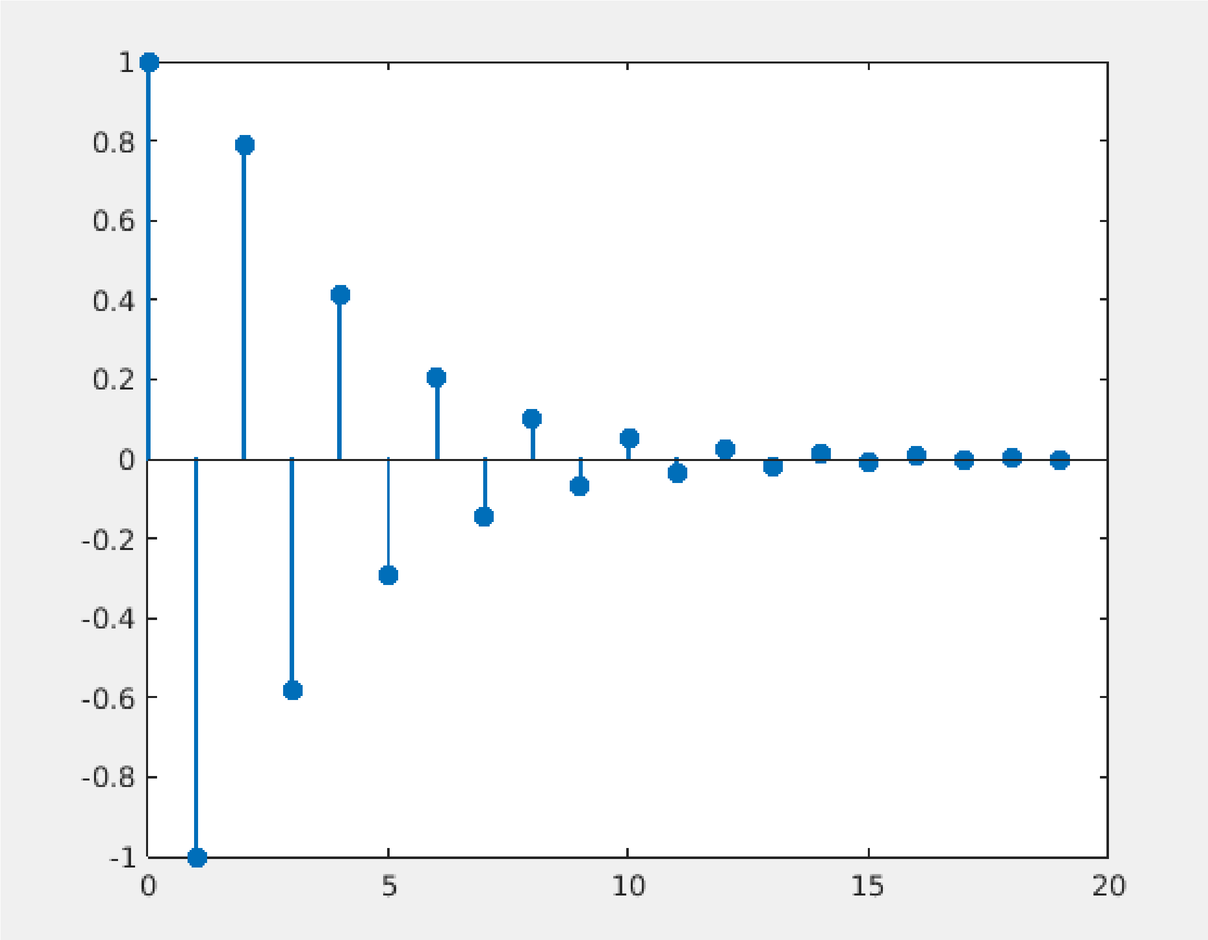

Figure 2: Resposta ao impulso do sistema.

1.5. Determine a expressão da resposta em frequência do sistema (módulo e fase).

A resposta em frequência do sistema pode ser obtida substituindo $Z = e^{j\Omega}$ na função de transferência:

$$H[Z] = \frac{1}{1 + Z^{-1} + 0,21Z^{-2}} = H[\Omega]_{Z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 + e^{-j\Omega} + 0,21e^{-2j\Omega}} \tag{18}$$

1.6. Represente graficamente a resposta em frequência do sistema (módulo e fase).

Código matlab:

```
%1,6)
w = 0:pi/100:pi;
[H, w] = freqz(b, a, w);

figure;
subplot(2,1,1);
plot(w, abs(H));
grid on;
```

```
subplot(2,1,2);
plot(w, angle(H));
grid on;
```

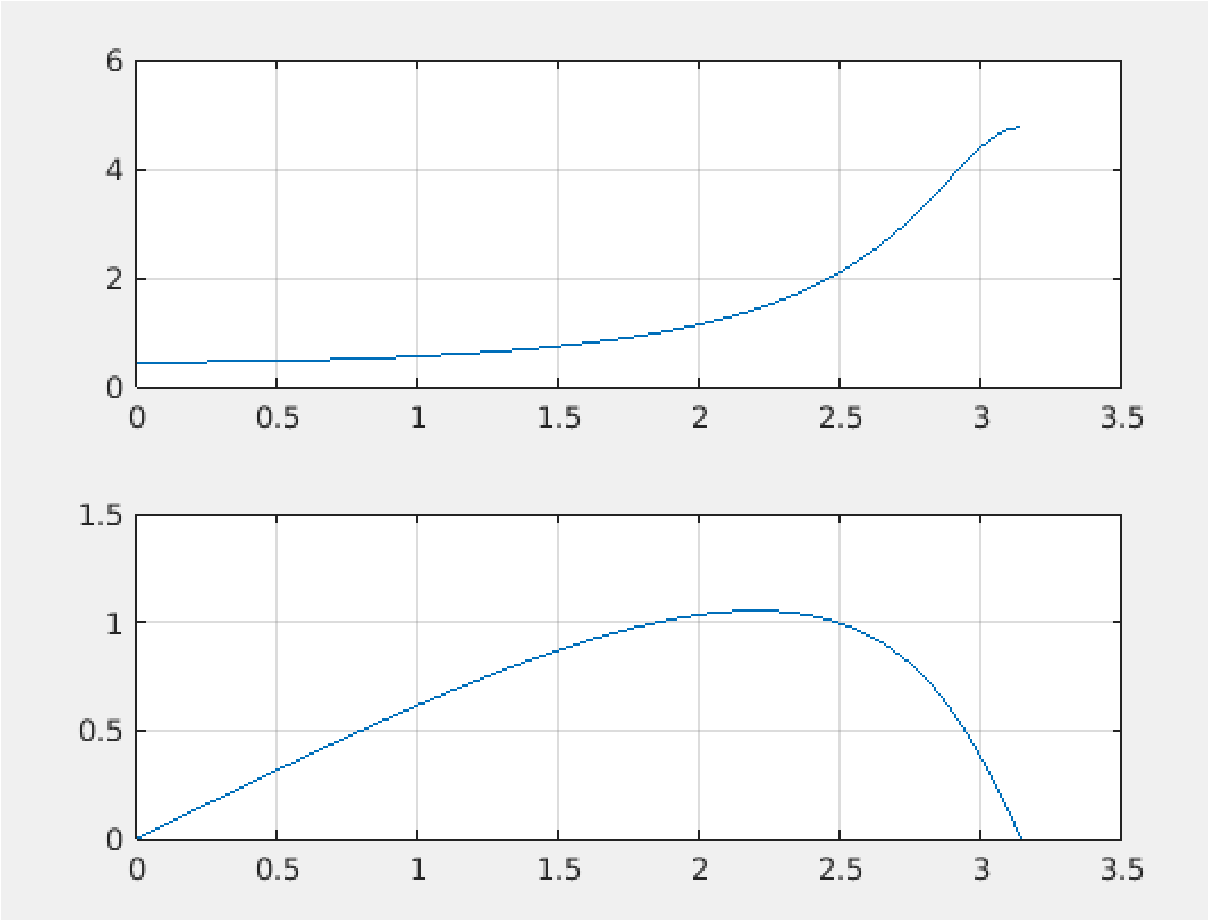

Figure 3: Resposta em frequência do sistema (Módulo e Fase).

1.7. Represente graficamente o sinal de entrada.

O sinal de entrada $x[n] = (1 - 0.8^n)u[n]$
Código matlab:

```
%1,7)
n = 0:20;
x = (1 - 0.8.^n);

figure;
stem(n, x, 'filled', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
```

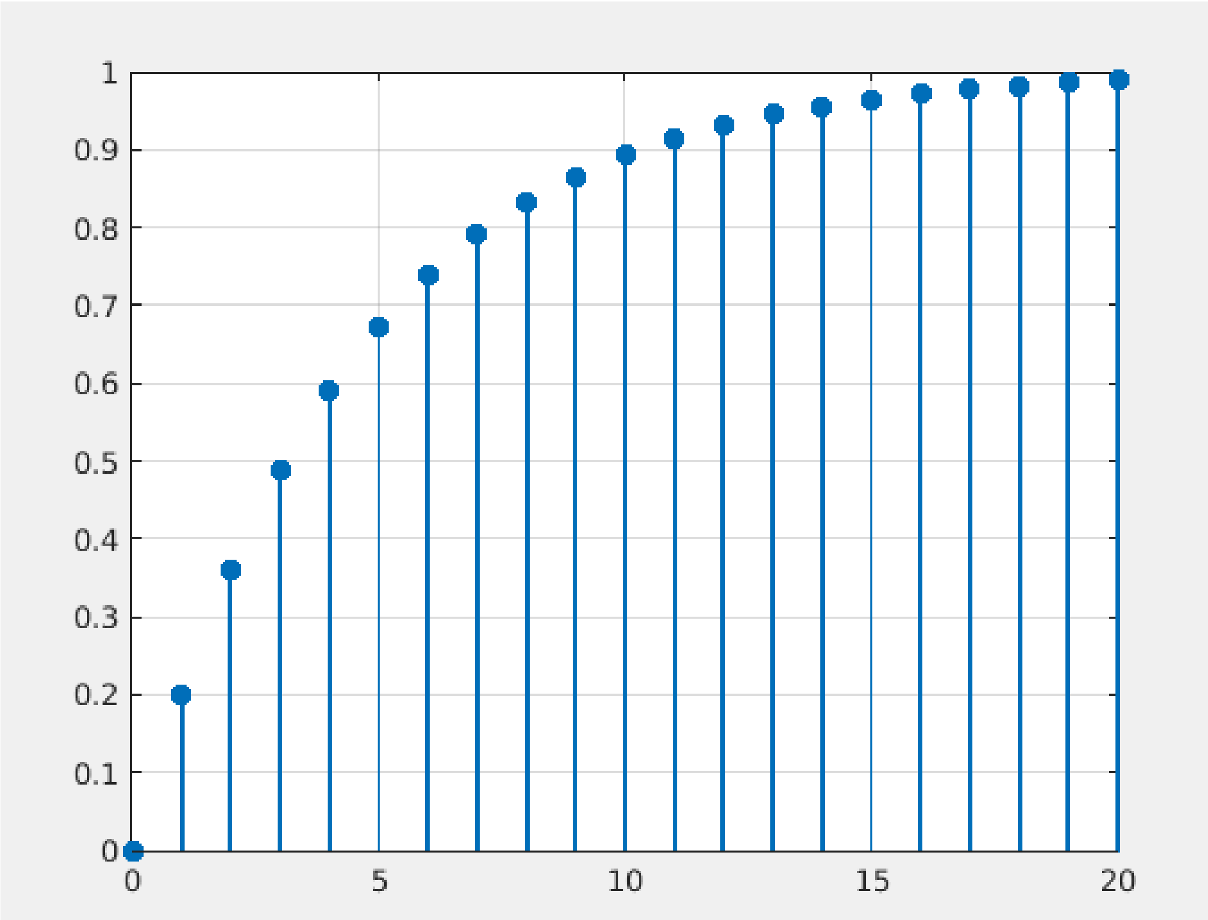

Figure 4: Sinal de entrada.

1.8. Determine a transformada z do sinal de entrada (via tabela/propriedades/definição e via simulação).

$$x[n] = (1 - 0,8^n)u[n] = u[n] - 0,8^n u[n] \tag{19}$$

Transformada:

$$u[n] \leftrightarrow \frac{Z}{Z-1} \tag{20}$$

$$0,8^n u[n] \leftrightarrow \frac{Z}{Z-0,8} \tag{21}$$

$$X[Z] = \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-0,8} \tag{22}$$

Código matlab:

```
syms n z;
x = (1 - 0.8^n) * heaviside(n);
X_Z = ztrans(x, n, z);
pretty(X_Z);
```

```
r =
```

```
    1.7500
   -0.7500


p =

   -0.7000
   -0.3000


k =

     []

  1        1
----- - -------
z - 1   5 z
        --- - 1
         4
```

1.9. Represente o sinal de entrada no plano z.

$$X[Z] = \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-0,8} \tag{23}$$

$$X[Z] = \frac{Z(Z-0,8) - Z(Z-1)}{(Z-1)(Z-0,8)} = \frac{Z^2 - 0,8Z - Z^2 + Z}{(Z-1)(Z-0,8)} = \frac{0,2Z}{(Z-1)(Z-0,8)} \tag{24}$$

Código matlab:

```
%1.9)
a = poly([1 0.8]); %coeficiente do denominador (polos)
b = [0 0.2]; % coeficiente do numerador (zero)

figure;
zplane(b, a);
grid on;
```

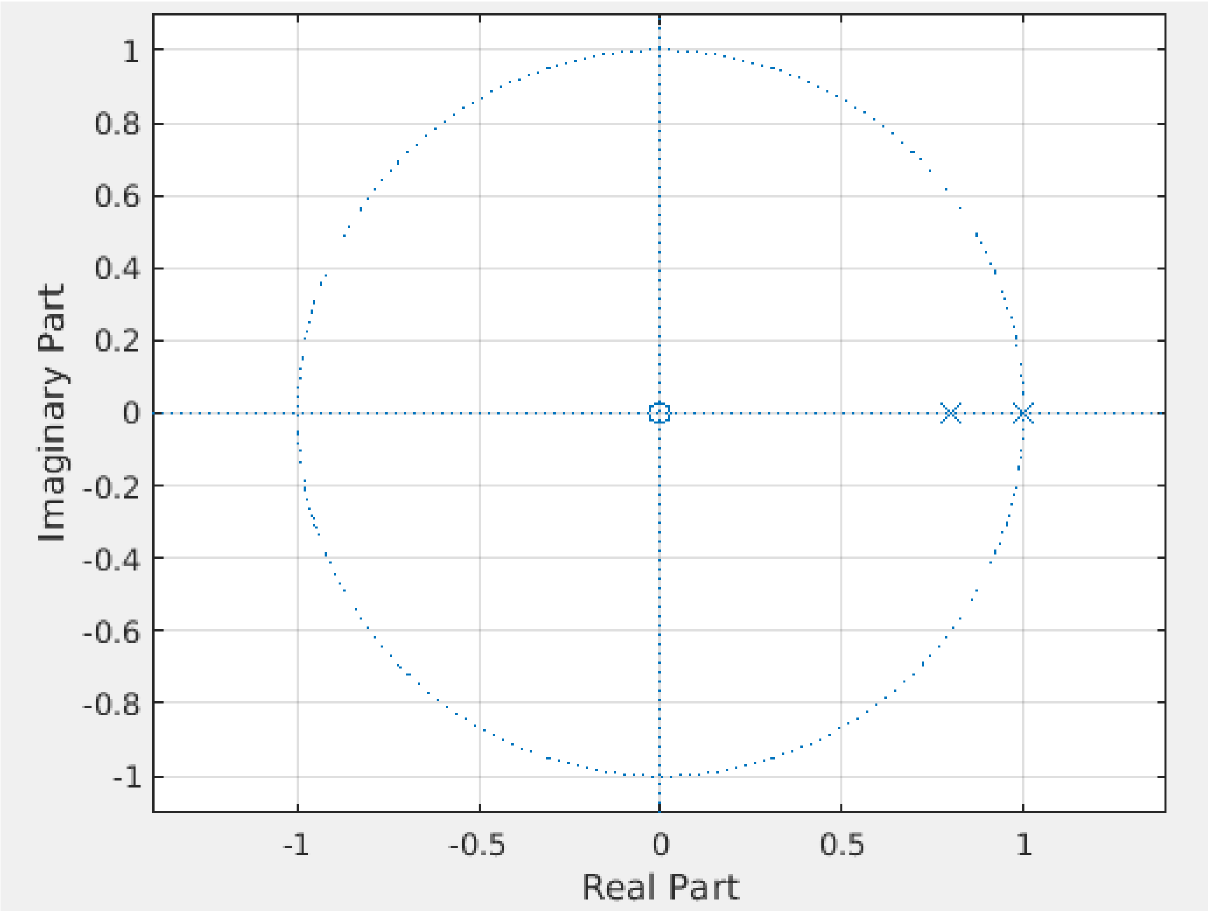

Figure 5: Sinal de entrada no plano Z.

1.10. Determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais nulas. Represente-a no plano z.

A transformada Z da resposta do sistema ao sinal de entrada é obtida multiplicando a função de transferência pelo sinal de entrada:

$$Y(Z) = H(Z)X(Z) \tag{25}$$

Substituindo:

$$Y[Z] = \frac{1}{1 + Z^{-1} + 0,21Z^{-2}} \cdot \left(\frac{1}{1 - Z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0,8Z^{-1}} \right) \tag{26}$$

Simplificando a equação:

$$Y[Z] = \frac{(1 - 0,8Z^{-1}) - (1 - Z^{-1})}{(1 - Z^{-1} + 0,2Z^{-2})(1 - Z^{-1})(1 - 0,8Z^{-1})} \tag{27}$$

$$Y[Z] = \frac{0,2Z^{-1}}{(1 - Z^{-1} + 0,2Z^{-2})(1 - Z^{-1})(1 - 0,8Z^{-1})} \tag{28}$$

Os pólos do sistema podem ser determinados resolvendo a equação característica:

$$Z^2 + Z + 0,21 = 0 \tag{29}$$

As raízes dessa equação são:

$$Z' = 0,3, Z'' = -0,7 \tag{30}$$

Assim, a resposta *Y(Z)* Y(Z) pode ser representada na forma de frações parciais:

$$Y(Z) = \left(\frac{A}{1+0,3Z^{-1}}\right) + \left(\frac{B}{1+0,7Z^{-1}}\right) + \left(\frac{C}{1-Z^{-1}}\right) + \left(\frac{D}{1-0,8Z^{-1}}\right) \tag{31}$$

Código matlab:

```
%1.10)
a = poly([-0.3, -0.7, 1, 0.8]);
b = [0 0.2];

figure;
zplane(b, a);
grid on;
```

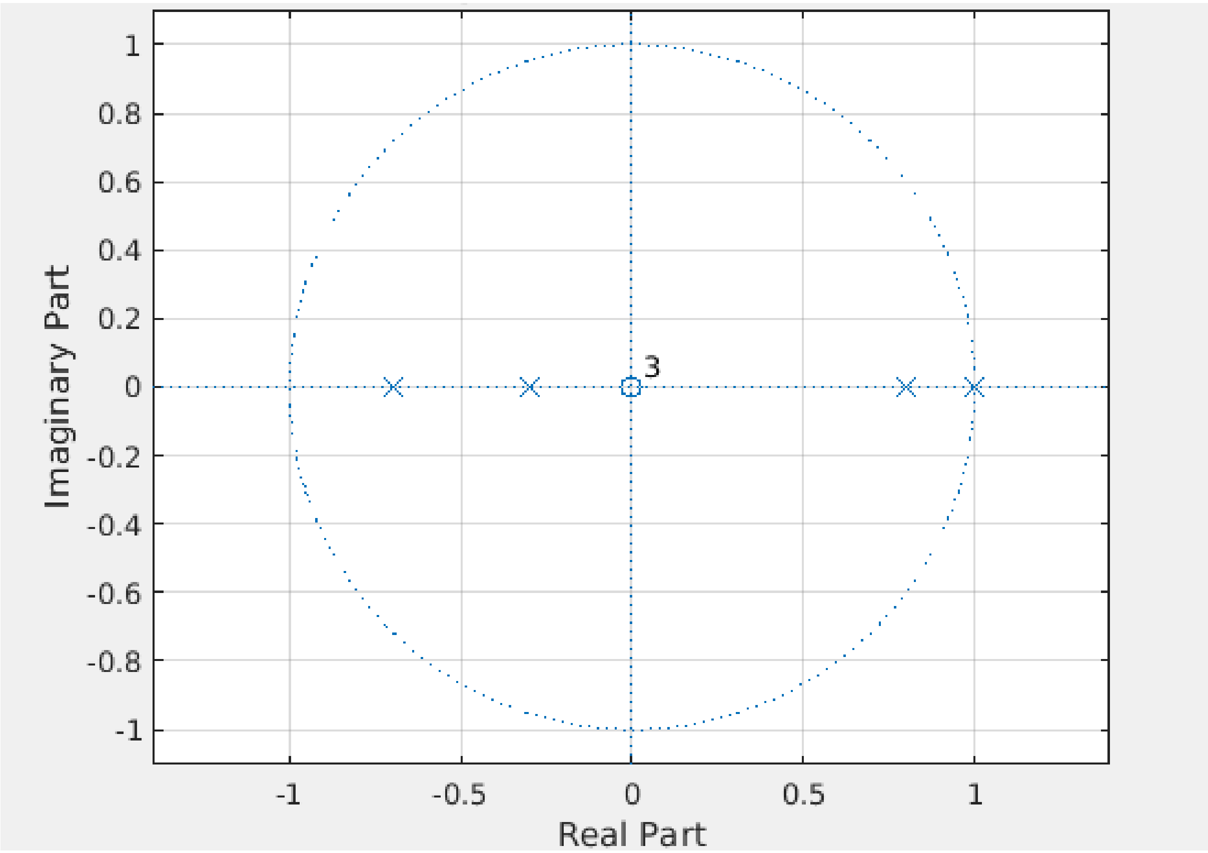

Figure 6: Sinal de entrada no plano Z.

1.11. Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.

$$Y(Z) = \left(\frac{A}{1+0,3Z^{-1}}\right) + \left(\frac{B}{1+0,7Z^{-1}}\right) + \left(\frac{C}{1-Z^{-1}}\right) + \left(\frac{D}{1-0,8Z^{-1}}\right) \tag{32}$$

Calculando A:

$$A = \frac{0,2\left(-\frac{1}{0,3}\right)}{\left(1+0,7\left(-\frac{1}{0,3}\right)\right)\left(1-\left(-\frac{1}{0,3}\right)\right)\left(1-0,8\left(-\frac{1}{0,3}\right)\right)} = 0,03146 \tag{33}$$

Calculando B:

$$B = \frac{0,2\left(-\frac{1}{0,7}\right)}{\left(1+0,3\left(-\frac{1}{0,7}\right)\right)\left(1-\left(-\frac{1}{0,7}\right)\right)\left(1-0,8\left(-\frac{1}{0,7}\right)\right)} = 0,09607 \tag{34}$$

Calculando C:

$$C = \frac{0,2(1)}{(1+0,7(1))(1+0,3(1))(1-0,8(1))} = 0,45248 \tag{35}$$

Calculando D:

$$D = \frac{0,2\left(\frac{1}{0,8}\right)}{(\left(1+0,3\left(\frac{1}{0,8}\right)\right)\left(1+0,7\left(\frac{1}{0,8}\right)\right)\left(1-\left(\frac{1}{0,8}\right)\right) = 0,38787} \tag{36}$$

Realizando a transformada Y[Z] $\leftrightarrow$ y[n] temos que:

$$y[n] = [0,03146(-0,3^n) - 0,09607(-0,7^n) + 0,45248 - 0,38787(0,8^n)]u[n] \tag{37}$$

Código matlab:

```
%1.11)
a = poly([-0.3, -0.7, 1, 0.8]);
b = [0 0.2];

[ r , p, k] = residuez(b, a)
syms z

iztrans(r(1)/(1 - p(1)*z.^(-1)) - r(2)/(1 - p(2)*z.^(-1)) + r(3)/(1 -
p(3)*z.^(-1)) + r(4)/( 1 - p(4)*z.^(-1)))

ans =

(64*(4/5)^n)/165 + (9*(-3/10)^n)/286 - (49*(-7/10)^n)/510 + 100/221
```

1.12. Identifique a componente homogênea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.

Devido a componente homogênea estar associada aos pólos do sistema, e a componente particular estar associada aos polos do sinal de entrada, dessa forma temos:

$$y[n] = 0,03146(-0,3^n)u[n] - 0,09607(-0,7^n)u[n] + 0,45248u[n] - 0,38787(0,8^n)u[n] \tag{38}$$

Homogênea = $0,03146(-0,3^n)u[n] - 0,09607(-0,7^n)u[n]$

Particular = $0,45248u[n] - 0,38787(0,8^n)u[n]$

1.13. Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.

Devido a componente transitória estar associada aos polos contidos dentro do circulo unitário, enquanto que, a componente estacionária está associada com os polos contidos sobre o circulo, temos que:

Transitória = $0,03146(-0,3^n)u[n] - 0,09607(-0,7^n)u[n]$
Estacionária = $0,45248u[n] - 0,38787(0,8^n)u[n]$
Transitória = $-0,38787(0,8^n)u[n]$

Como é possível notar na Figure 6.

1.14. Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada.

Sinal de entrada:

$$y[n] = 0,03146(-0,3^n)u[n] - 0,09607(-0,7^n)u[n] + 0,45248u[n] - 0,38787(0,8^n)u[n] \quad (39)$$

.

Código matlab:

```
%1.14)
n = 20;
vec = 0:(n-1);

x = 0.03146 * (-0.3).^vec - 0.09607 * (-0.7).^vec + 0.45248 - 0.38787 *
(0.8).^vec;

figure();
stem(vec, x, 'filled', 'LineWidth', 1.5)
grid on;
```

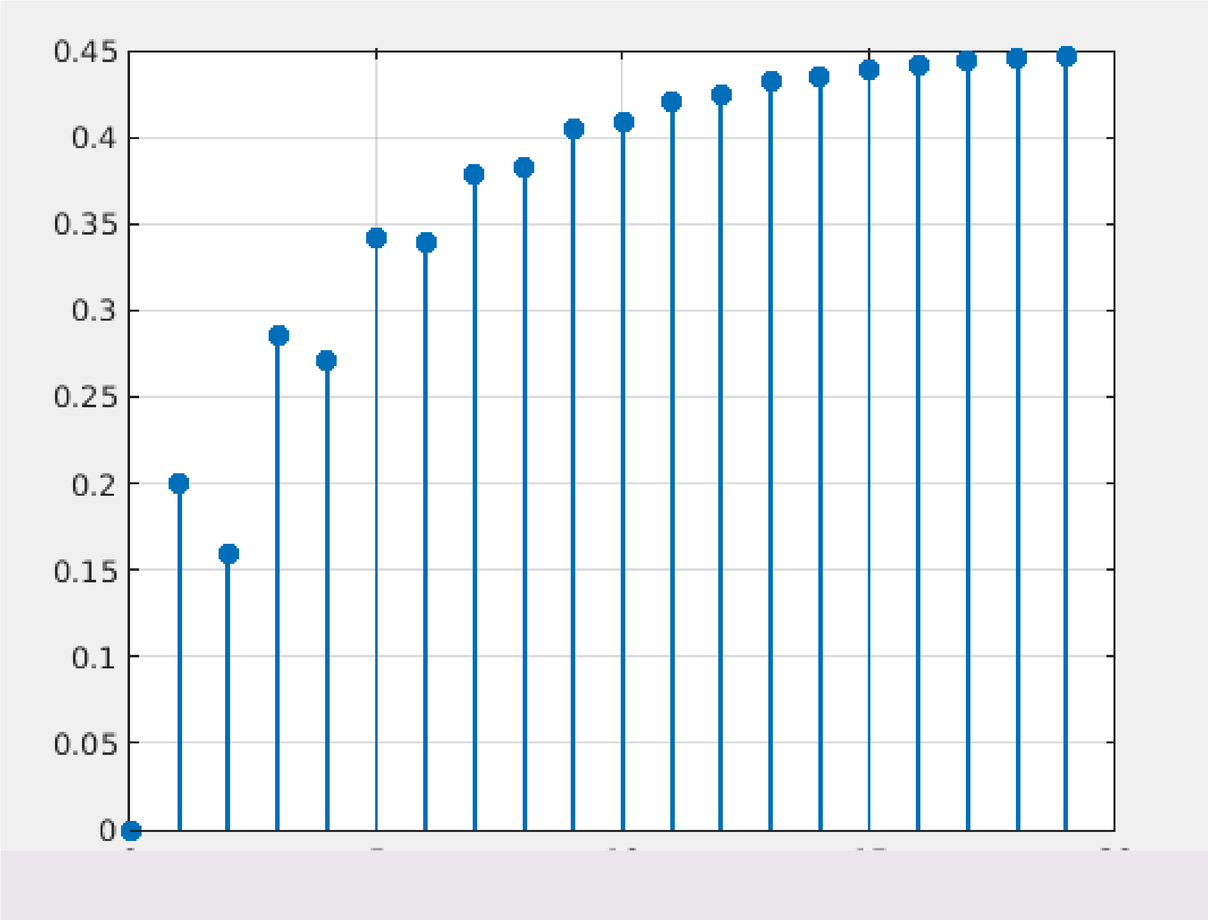

Figure 7: Resposta do sistema ao sinal de entrada.

1.15. Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.

Código matlab:

```
%1.15)

n = 20;
vec = 0:(n-1);

a = [1 1 0.21];
b = [1];
x = 1 - 0.8.^(vec);
% Aplicação da função filter:
y = filter(b, a, x);

figure();
stem(vec, y, 'filled', 'LineWidth', 1.5)
grid on;
```

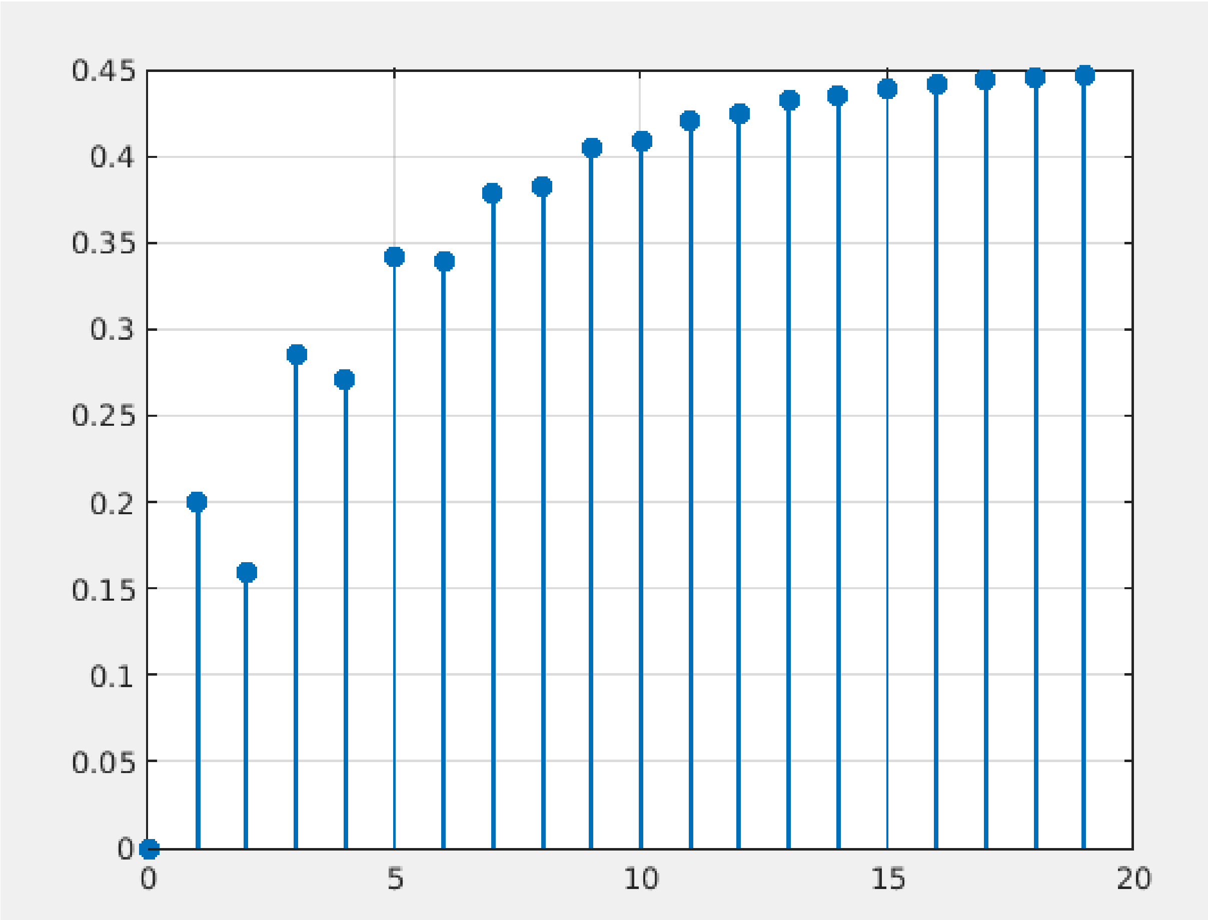

Figure 8: Resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando função filter.

1.16. Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal *xCI*[*n*] que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.

$$Y[Z] + (Y[-1] + Z^{-1}Y[Z]) + 0,21(Y[-2] + Z^{-1} + Y[-1] + Z^{-2}Y[Z]) = X[Z] \tag{40}$$

$$Y[Z] = \frac{X[Z]}{1 + Z^{-1} + 0,21Z^{-2}} + \frac{-1,21 - 0,21Z^{-1}}{1 + Z^{-1} + 0,21Z^{-2}} \tag{41}$$

Portanto:

$$X_{CI}[Z] = -1,21 - 0,21z^{-1} \tag{42}$$

$$X_{CI}[n] = -1,21\delta[n] - 0,21\delta[n-1] \tag{43}$$

Código matlab:

```
%1.16)
a = [1 1 0.21];
b = [1];
% Aplicação da função filter:
y = [1 1];
r = filtic(b, a, y)


r =

   -1.2100   -0.2100
```

1.17. Determine a TZ da resposta do sistema às condições iniciais.

$$Y_{CI}[Z] = \frac{-1,21 - 0,21Z^{-1}}{1 + Z^{-1} + 0,21Z^{-2}} \tag{44}$$

1.18. Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.

$$Y_{CI}[Z] = \frac{-1,21-0,21Z^{-1}}{1+Z^{-1}+0,21Z^{-2}} = \frac{-1,21-0,21Z^{-1}}{(1+0,3Z^{-1})(1+0,7Z^{-1})} = \frac{A}{1+0,3Z^{-1}} + \frac{B}{1+0,7Z^{-1}} + \tag{45}$$

$$Y_{CI}[Z] = \frac{A}{1 + 0,3Z^{-1}} + \frac{B}{1 + 0,7Z^{-1}} \tag{46}$$

Calculando A:

$$A = \frac{-1,21 - 0,21\left(-\frac{1}{0,3}\right)}{1 + 0,7\left(-\frac{1}{0,3}\right)} = 0,3825 \tag{47}$$

Calculando B:

$$B = \frac{-1,21 - 0,21\left(-\frac{1}{0,7}\right)}{1 + 0,3\left(-\frac{1}{0,7}\right)} = 1,5925 \tag{48}$$

Portanto:

$$y[n] = 0,3825(-0,3^n)u[n] - 1,5928(-0,7^n)u[n] \quad (49)$$

Código matlab:

```
%1.18)
a = [1, 1, 0.21];
b = [-1.21 -0.21];
[ r , p, k] = residuez(b, a)


r =

  -1.5925
   0.3825


p =

  -0.7000
  -0.3000


k =

     []
```

1.19. Determine a resposta complete do sistema admitindo condições iniciais não nulas.

$$y[n] = [0,031(-0,3^n) - 0,096(-0,7^n) + 0,452 - 0,387(0,8^n)]u[n] + [0,382(-0,3^n) - 1,592(-0,7^n)]u[n]$$

$$. \quad (50)$$

Portanto:

$$y[n] = 0,413(-0,3^n) - 1,688(-0,7^n) + 0,452 - 0,387(-0,8^n) \quad (51)$$

1.20. Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.

Código matlab:

```
%1.20)
n = 20;
vec = 0:(n-1);
x = 0.413 * (-0.3).^vec - 1.688*(-0.7).^vec + 0.452 - 0.387 * (-0.8).^vec;
figure();
```

```
stem(vec,x,'filled', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
```

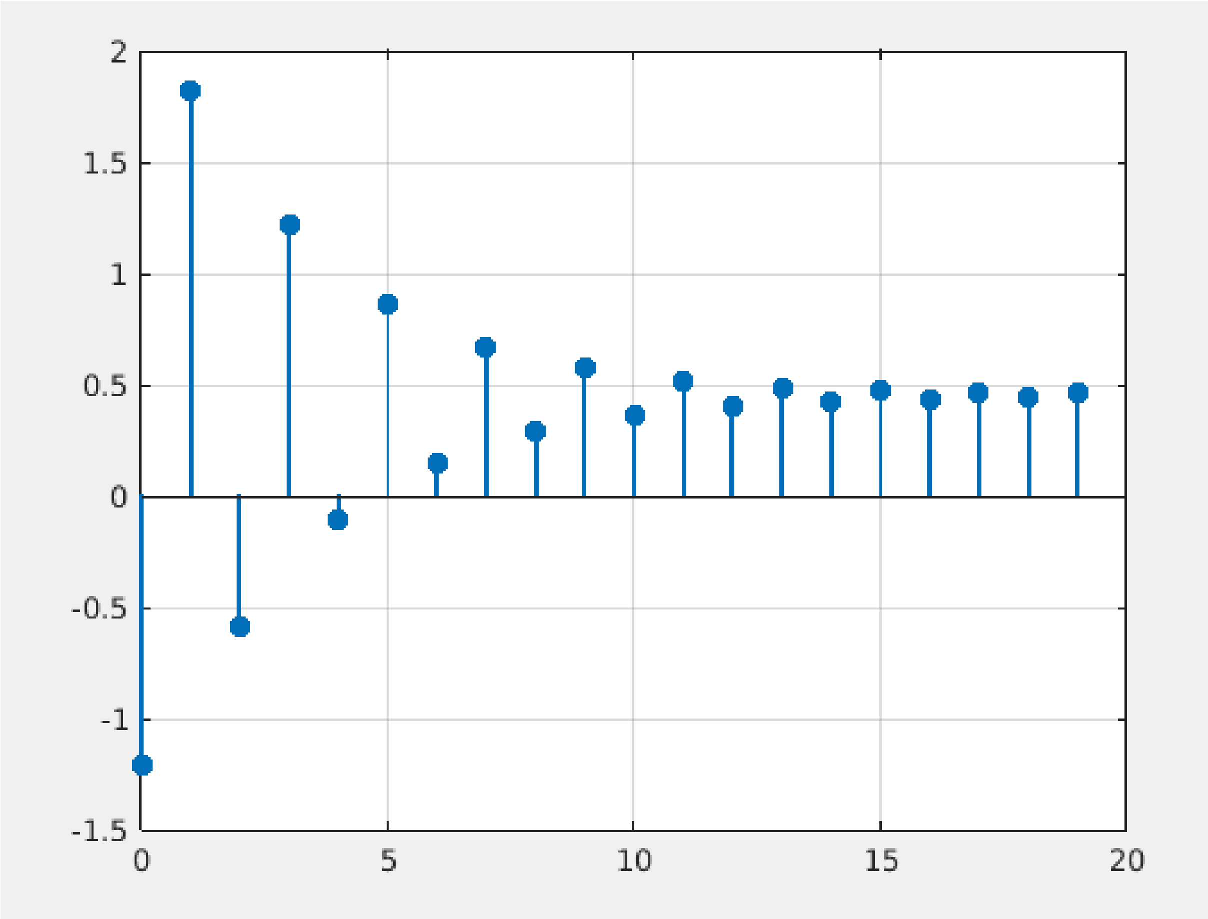

Figure 9: Resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.

1.21. Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter

Código matlab:

```
%1.21)
n = 20;
vec = 0:(n-1);
a = [1 1 0.21];
b = [1];
c = [1 1]
x = 1 - 0.8.^(vec);
xic = filtic(b, a, c)
y = filter(b, a, x, xic);
figure()
stem(vec, y, 'filled', 'LineWidth', 1.5)
grid on;
```

```
xic =
   -1.2100   -0.2100
```

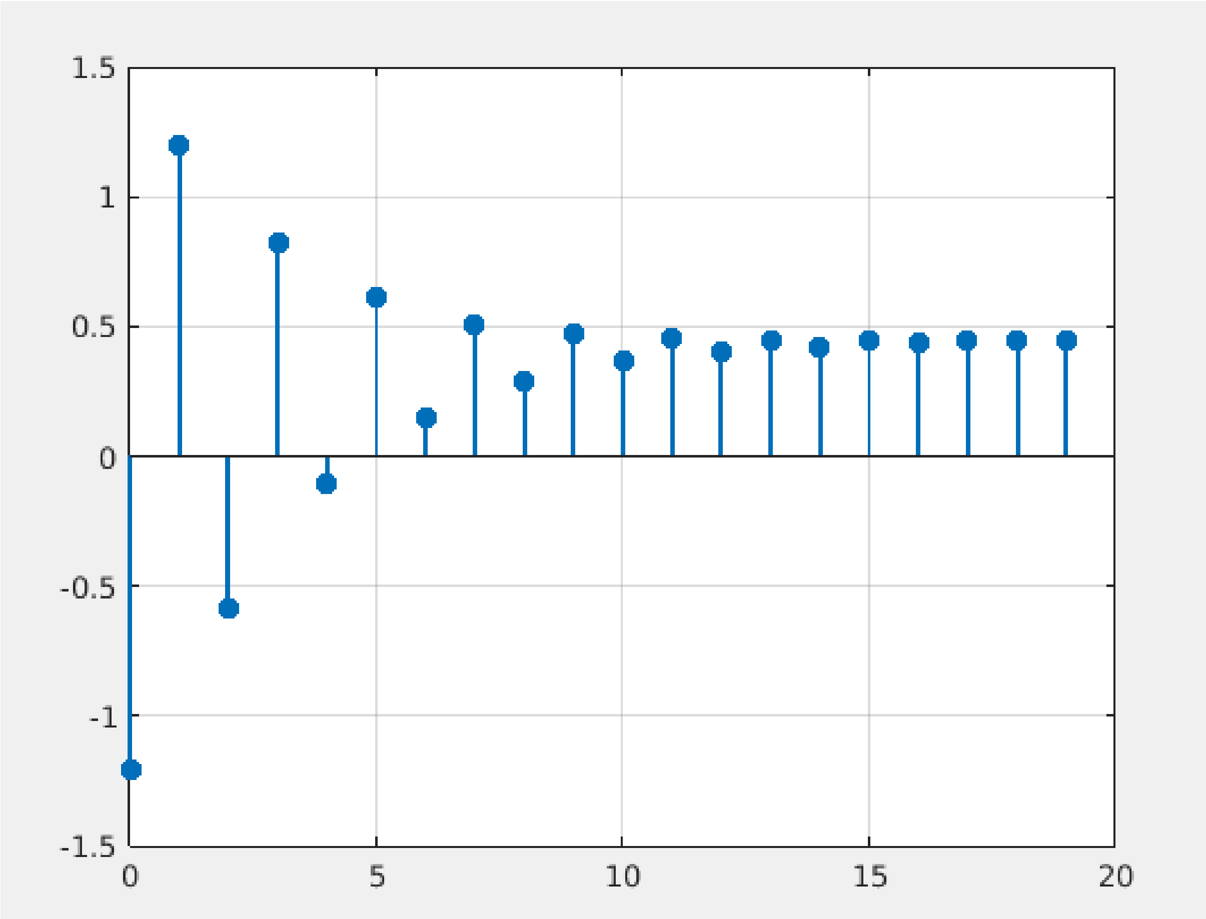

Figure 10: Resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.