PRE029006 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (2024 .2 - T01)
Avaliação 4
Aluno: Wagner Santos

7. Sejam X1 , X2 ~ Unif([−2, 1]) variáveis aleatórias sorteadas independentemente.
(a) Sejam
Y1 = X1^2 ,
Y2 = X2^2 ,
Y3 = X1 * X2 .
Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Y}$ = [Y1 Y2 Y3]T .

(b) Sejam
Z1 = Y1 ,
Z2 = Y1 + Y2 ,
Z3 = Y1 + Y2 + Y3 .
Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Z}$ = [Z1 Z2 Z3]T . Utilize a formulação matricial.

Parte (a)

Média e variância de X1 e X2:
X1 e X2 são independentes e têm distribuição uniforme no intervalo entre -2 e 1.
E[X] = a+b/2 = (-2 + 1) / 2 = -1/2
E[X^2] = integral de -2 até 1 x^2 fX (x) dx -> integral de -2 até 1 x^2 (1/b-a) dx = 1
Resolução WolframAlpha

Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - (-1/2)^2 = 3/4
E[X1] = E[X2] = -1/2
Var[X1] = Var[X2] = 3/4

Média de Y1, Y2 e Y3:
Y1 = X1^2 Já calculado acima para E[X^2] = 1
Y2 = X2^2 Como X2 tem a mesma distribuição de X1 = 1
Y3 = X1*X2 E[Y3] = E[X1]*E[X2] = (-1/2) * (-1/2) = 1/4

Vetor média de Y:

E[Y] = E[Y1] [1]
E[Y2] [1]
E[Y3] [1/4]

Cov(Y) =

var(Y1)	cov(Y1, Y2)	cov(Y1,Y3)
cov(Y2, Y1)	var(Y2)	cov(Y2, Y3)
cov(Y3, Y1)	cov(Y3, Y2)	var(Y3)

Var(Y1) = Var(Y2) = E[Y1^2] - E[Y1^2]^2
E[Y1^2] = E[X1^4] = integral de -2 até 1 x^4 (1/b-a) dx = 11/5
Resolução WolframAlpha
Var(Y1) = Var(Y2) = 11/5 - 1^2 = 6/5

Var[Y3] = E[Y3^2] - E[Y3]^2
Var[Y3] = 1 - (1/4)^2 = 15/16

Cov(Y1, Y2), Cov(Y1, Y3) e Cov(Y2, Y3)
como Y1, Y2 e Y3 são variáveis independentes = 0

Matriz covariância de Y:

Cov(Y) =

6/5	0	0
0	6/5	0
0	0	15/16

Parte (b)

Definindo Z como uma transformação linear de Y , Z = AY

A =

1	0	0
1	1	0
1	1	1

Vetor média de Z:

Z= AY
Resolução WolframAlpha

E[Z]=

1	0	0		1		1
1	1	0	*	1	=	2
1	1	1		1/4		9/4

Matriz covariância de Z:

CZ = ACY AT
Resolução WolframAlpha

CZ=

1	0	0		6/5	0	0		1	1	1		6/5	6/5	6/5
1	1	0	*	0	6/5	0	*	0	1	1	=	6/5	12/15	12/5
1	1	1		0	0	6/5		0	0	1		6/5	12/5	15/5