



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

## **Trabalho Filtros IIR**

PSD129005 - PROCESSAMENTO DE SINAIS DIGITAIS (2025 .1-T01)

Prof. Elen Macedo Lobato

Wagner Flores dos Santos

Julho de 2025

# Sumário

<b>1. Usando a transformação bilinear, projete um filtro passa-baixas Butterworth que atenda as seguintes especificações: .....</b>	<b>3</b>
1.1. Especificações do Filtro Analógico .....	3
1.2. Filtro Passa-Baixas Normalizado .....	3
1.3. Aproximação de Butterworth .....	4
1.4. Desnormalização do Protótipo .....	4
1.5. Código MATLAB .....	5
1.6. Plot da resposta em frequência .....	6
<b>2. Crie, usando MATLAB, um sinal de entrada composto de três componentes senoidais, nas frequências 770 Hz, 852 Hz e 941 Hz, com <math>\Omega_s = 8</math> kHz. Projete, usando o simulink ou o MATLAB, um filtro IIR para isolar cada componente. Documente as especificações utilizadas. Faça comentários. ....</b>	<b>6</b>
2.1. Geração do Sinal .....	6
2.2. Implementação com filterDesigner (FDATool) .....	7
2.2.1. Critérios de Projeto: Banda e Ordem dos Filtros .....	7
2.2.1.1. Definição da Banda de Passagem .....	8
2.2.1.2. Escolha da Ordem do Filtro ( $n = 4$ ) .....	8
2.2.2. Projeto dos Filtros no FDATool .....	8
2.2.2.1. Filtro band-pass para 770 Hz: .....	9
2.2.2.2. Filtro band-pass para 852 Hz: .....	10
2.2.2.3. Filtro band-pass para 852 Hz: .....	11
2.2.2.4. Resultado .....	12
2.2.3. Código MATLAB .....	12
2.3. Conclusão .....	13

# 1. Usando a transformação bilinear, projete um filtro passa-baixas Butterworth que atenda as seguintes especificações:

$$\begin{aligned} 0.9 \leq |H(e^{jw})| \leq 1 \\ 0 \leq w \leq 0.2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq w \leq 0.2\pi \\ 0.3\pi \leq w \leq \pi \end{aligned}$$

Considere  $T_s=2$ .

Faça o mesmo projeto usando o MATLAB ou simulink. Plote a resposta em frequência

## 1.1. Especificações do Filtro Analógico

- Faixa de passagem digital:  $0 \leq w \leq 2\pi$
- Faixa de rejeição digital:  $0, 3\pi \leq w \leq \pi$
- Atenuação máxima na passagem:  $0.9 \leq |H(e^{jw})| \leq 1$
- Atenuação mínima na rejeição:  $0 \leq w \leq 0.2\pi$
- Período de amostragem:  $T_s = 2 \rightarrow f_s = \frac{1}{T_s} = 0, 5$

Convertendo as frequências digitais para frequências analógicas (pré-distorção):

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \cdot \tan \frac{0, 2\pi}{2} = \tan(0, 1\pi) = 0, 3249 \quad (1)$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_s} \cdot \tan \frac{0, 3\pi}{2} = \tan(0, 15\pi) = 0, 5095 \quad (2)$$

Convertendo os limites de atenuação:

$$A_p = -20 \log_{10}(0, 9) = 0, 915dB \quad (3)$$

$$A_s = -20 \log_{10}(0, 2) = 13, 98dB \quad (4)$$

## 1.2. Filtro Passa-Baixas Normalizado

**Tabela 6.2** Transformações na frequência analógica.

Transformação	Normalização	Desnormalização
passa-baixas( $\Omega$ ) $\leftrightarrow$ passa-baixas( $\Omega'$ )	$\Omega'_p = \frac{1}{a}$ $\Omega'_r = \frac{1}{a} \frac{\Omega_r}{\Omega_p}$	$s' \leftrightarrow \frac{1}{a} \frac{s}{\Omega_p}$

- Frequência de corte normalizada:

$$\Omega'_\rho = \frac{\Omega_\rho}{\Omega_\rho} = 1 \quad (5)$$

- Reescalando as frequências:

$$\Omega'_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_\rho} = \frac{0,5095}{0,3249} = 1,568 \quad (6)$$

### 1.3. Aproximação de Butterworth

- Calculando a ordem mínima necessária usando a fórmula:

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10} \left( \frac{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}{10^{\frac{A_\rho}{10}} - 1} \right)}{2 \log_{10}(\Omega'_s)} \right\rceil \quad (7)$$

- Substituindo os valores:

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10}(235)}{2 \log_{10}(1,568)} \right\rceil = 6 \quad (8)$$

Portanto, o protótipo Butterworth de ordem 6 atende às especificações.

### 1.4. Desnormalização do Protótipo

- Seguindo tabela 6.2:

$$s' \leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{s}{\Omega_\rho} \quad (9)$$

- Como na Etapa 1.3 a normalização foi feita por:

$$\Omega'_\rho = \frac{\Omega_\rho}{\Omega_\rho} = 1 \rightarrow a = \Omega_\rho \quad (10)$$

$$s' = \Omega_\rho \cdot s = 0,3249 \cdot s \quad (11)$$

- Neste caso o filtro começa e termina como passa-baixas, então:

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (12)$$

- sendo  $T_s = 2$ , então:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (13)$$

## 1.5. Código MATLAB

```
% Exercício 1 - Filtros IIR

% Especificações digitais
wp = 0.2 * pi;
ws = 0.3 * pi;
Ts = 2;

% Frequências analógicas
Omega_p = tan(wp / 2);
Omega_s = tan(ws / 2);

% Atenuações
Ap = -20 * log10(0.9);
As = -20 * log10(0.2);

% Ordem do filtro
n = ceil(log10((10^(As/10)-1)/(10^(Ap/10)-1)) / (2*log10(Omega_s/Omega_p)));

% Filtro analógico Butterworth
[bs, as] = butter(n, Omega_p, 's');

% Transformação bilinear
[bz, az] = bilinear(bs, as, 1/Ts);

% Resposta em frequência
freqz(bz, az, 1024);
title('Filtro Butterworth IIR - Passa-Baixas');
```

## 1.6. Plot da resposta em frequência

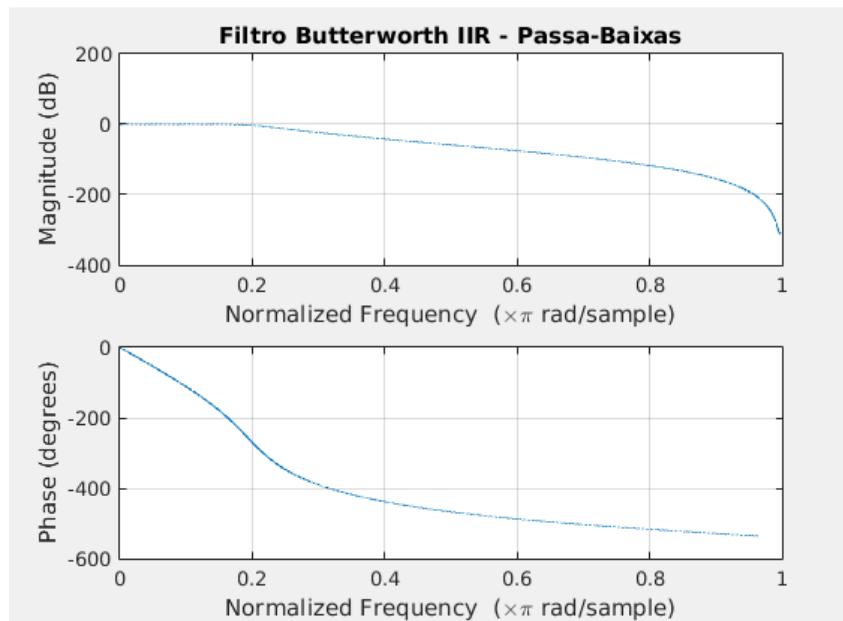


Figure 1: Plot resposta em frequência MATLAB

**2. Crie, usando MATLAB, um sinal de entrada composto de três componentes senoidais, nas frequências 770 Hz, 852 Hz e 941 Hz, com  $\Omega_s = 8$  kHz. Projete, usando o simulink ou o MATLAB, um filtro IIR para isolar cada componente. Documente as especificações utilizadas. Faça comentários.**

### 2.1. Geração do Sinal

Foi criado um sinal no MATLAB, somando três senóides com as seguintes frequências:

- $f_1 = 770$  Hz
- $f_2 = 852$  Hz
- $f_3 = 941$  Hz

O sinal foi amostrado a uma frequência de 8 kHz ( $f_s = 8000$  Hz), com duração de 50 ms:

```
Fs = 8000;  
t = 0:1/Fs:0.05; % 50 ms
```

```
x1 = sin(2*pi*770*t);  
x2 = sin(2*pi*852*t);  
x3 = sin(2*pi*941*t);
```

```
x = x1 + x2 + x3;
```

```

plot(t, x)
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Amplitude')
title('Sinal composto por 770 Hz, 852 Hz e 941 Hz')

```

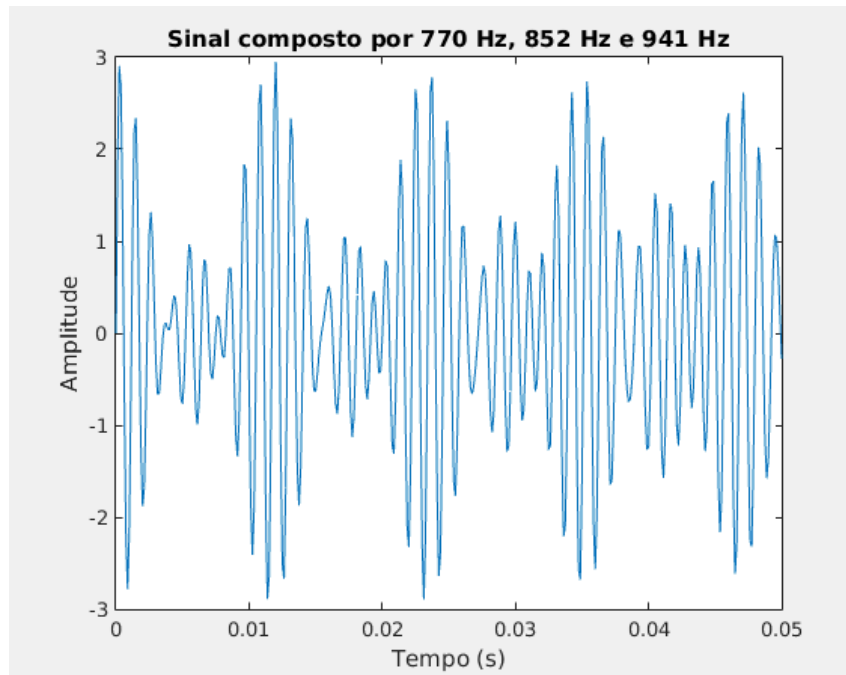


Figure 2: Plot do sinal

## 2.2. Implementação com filterDesigner (FDATool)

Para isolar cada uma das três componentes (770Hz, 852Hz e 941Hz) com máxima seletividade e mínima interferência entre elas, o “filtro ideal” para este experimento é, na verdade, um conjunto de filtros passa-faixa (band-pass) estreitos, cujas bandas de passagem sejam centradas em cada tom e cujas bordas coincidam com os pontos médios às frequências vizinhas.

### 2.2.1. Critérios de Projeto: Banda e Ordem dos Filtros

Para o isolamento eficaz das três componentes senoidais (770Hz, 852Hz e 941Hz), foram adotados critérios bem definidos tanto para a banda de passagem quanto para a ordem do filtro IIR.

### 2.2.1.1. Definição da Banda de Passagem

O objetivo foi garantir que cada filtro band-pass isolasse apenas sua frequência central, minimizando a interferência dos demais tons. Assim, adotou-se uma largura de banda de  $\pm 20$  Hz em torno de cada tom, o que resultou em bandas de passagem de 40 Hz:

- 770 Hz [750, 790]
- 852 Hz [830, 874]
- 941 Hz [920, 962]

Essa escolha é suficiente para captar a senóide desejada, que é uma frequência pura, ao mesmo tempo em que atenua significativamente as vizinhas, que estão separadas entre si por 80 Hz.

### 2.2.1.2. Escolha da Ordem do Filtro ( $n = 4$ )

Foi utilizado o filtro Butterworth, conhecido por sua resposta suave (monotônica) tanto na faixa de passagem quanto na de rejeição. A ordem escolhida foi 4, com base nos seguintes critérios:

- Ordem suficientemente alta para garantir uma transição acentuada entre banda de passagem e rejeição.
- Evita sobrecarga computacional e possível instabilidade numérica associada a ordens elevadas.
- Atende bem à separação entre as frequências (com espaçamento confortável entre os tons), mantendo simplicidade e estabilidade

### 2.2.2. Projeto dos Filtros no FDATool

Para cada filtro:

1. Para abrir: fdatool
2. Respose Type: bandpass
3. Filter Order: 4
4. Fs: 8000
5. Fc1: 750
6. Fc2: 790
7. Clicar em Design Filter
8. Flie → Export → Workspace → Object

- Fc1 e Fc2 para as demais frequências::

852 Hz → [830 874]

941 Hz → [920 962]



### 2.2.2.1. Filtro band-pass para 770 Hz:

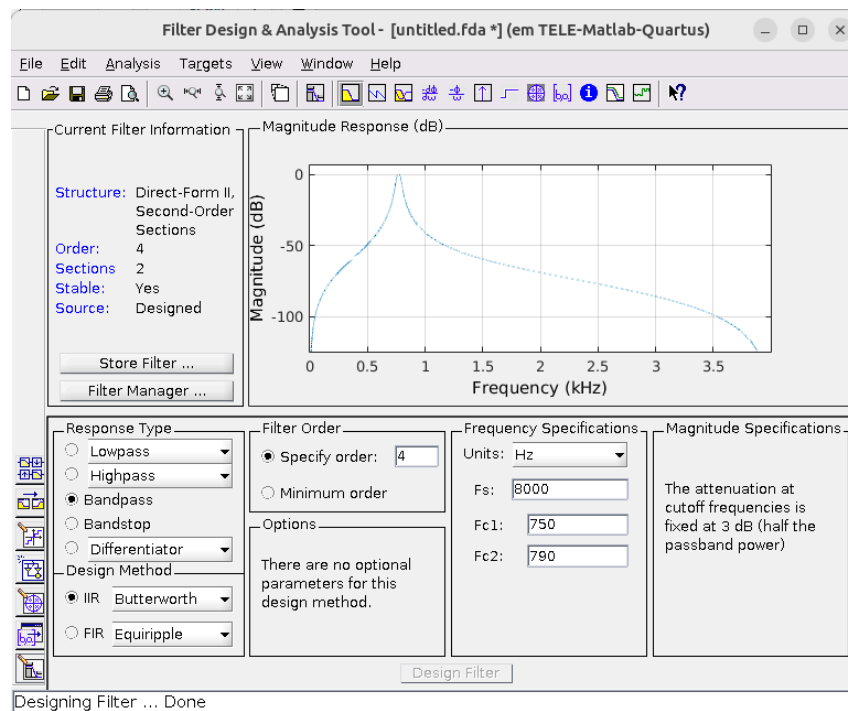


Figure 3: Plot configuração 770 Hz

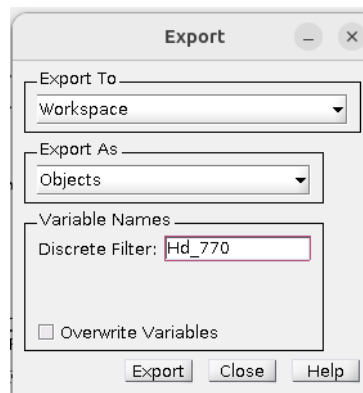


Figure 4: Plot "Export" 770 Hz

### 2.2.2.2. Filtro band-pass para 852 Hz:

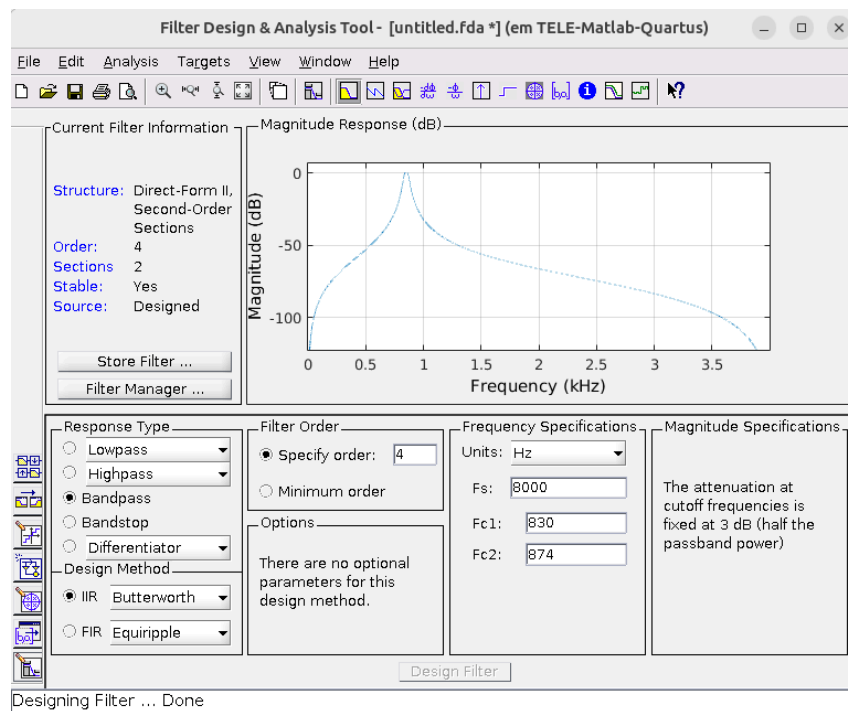


Figure 5: Plot configuração 852 Hz

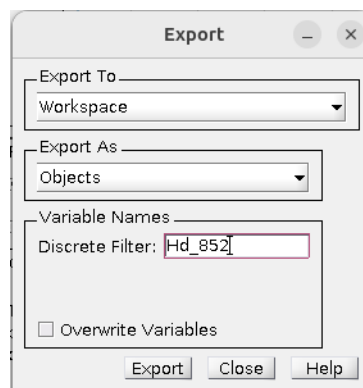


Figure 6: Plot “Export” 852 Hz

### 2.2.2.3. Filtro band-pass para 852 Hz:

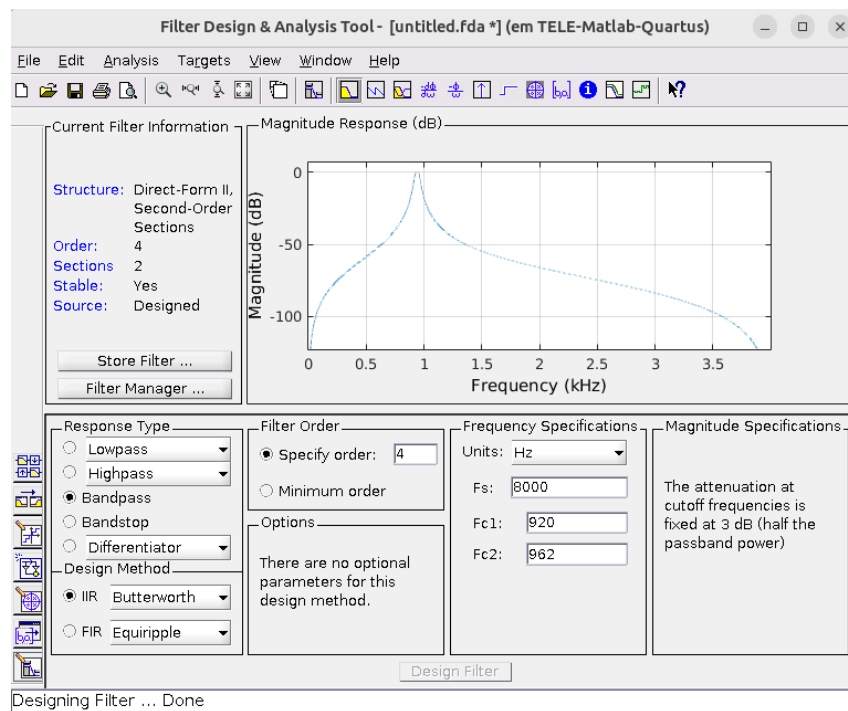


Figure 7: Plot configuração 941 Hz

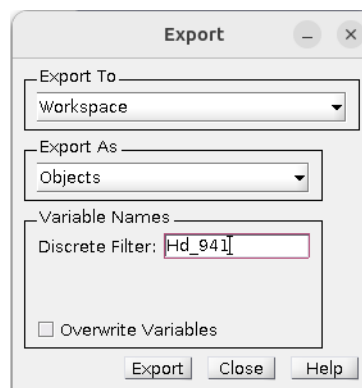


Figure 8: Plot "Export" 941 Hz

#### 2.2.2.4. Resultado

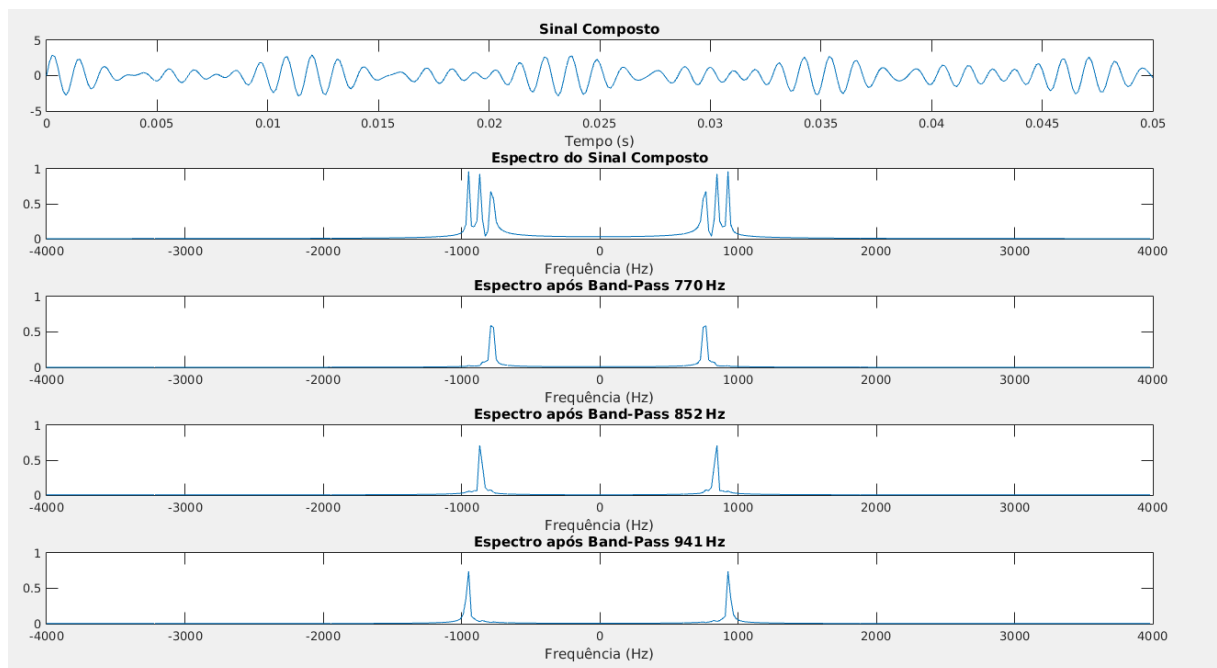


Figure 9: Plot resultado final

#### 2.2.3. Código MATLAB

```
Fs = 8000;
t = 0:1/Fs:0.05; % 50 ms

x1 = sin(2*pi*770*t);
x2 = sin(2*pi*852*t);
x3 = sin(2*pi*941*t);

x = x1 + x2 + x3;

plot(t, x)
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Amplitude')
title('Sinal composto por 770 Hz, 852 Hz e 941 Hz')

% Extrair coeficientes de cada objeto dfilt
[b770, a770] = tf(Hd_770);
[b852, a852] = tf(Hd_852);
[b941, a941] = tf(Hd_941);

% Aplicar filtros band-pass
y770 = filter(b770, a770, x);
y852 = filter(b852, a852, x);
y941 = filter(b941, a941, x);

L = length(x);
```

```

X      = fftshift(abs(2*fft(x)/L));
Y770   = fftshift(abs(2*fft(y770)/L));
Y852   = fftshift(abs(2*fft(y852)/L));
Y941   = fftshift(abs(2*fft(y941)/L));
freq   = Fs*(-L/2:L/2-1)/L;

figure;
subplot(5,1,1)
plot(t, x)
title('Sinal Composto')
xlabel('Tempo (s)')

subplot(5,1,2)
plot(freq, X)
title('Espectro do Sinal Composto')
xlabel('Frequência (Hz)')

subplot(5,1,3)
plot(freq, Y770)
title('Espectro após Band-Pass 770 Hz')
xlabel('Frequência (Hz)')

subplot(5,1,4)
plot(freq, Y852)
title('Espectro após Band-Pass 852 Hz')
xlabel('Frequência (Hz)')

subplot(5,1,5)
plot(freq, Y941)
title('Espectro após Band-Pass 941 Hz')
xlabel('Frequência (Hz)')

```

## 2.3. Conclusão

Cada filtro isolou eficientemente sua frequência central, atenuando componentes fora da banda. As bandas de transição (20Hz de cada lado) foram suficientes para evitar sobreposição de espectros.

O uso de filtros band-pass estreitos de ordem 4 projetados no FDATool atendeu ao objetivo de separar três tons próximos (770Hz, 852Hz e 941Hz) de um sinal composto