MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS APLICADO EM EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO UNIDIMENSIONAIS

WAGNER QUEIROZ BARROS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

MACAÉ - RJ
Abril - 2014

Sumário

1 Equação da Difusão de Energia

Será aplicado o método dos volumes finitos na equação da difusão como descrito no capítulo 4 de Versteeg e Malalasekera (2007) .

1.1 Volume de Controle

A Fig. 1, ilustra o volume de controle que será adotado para a discretização das equações médias de transporte. O subíndice k representa o elemento discreto de uma tubulação na direção z. As variáveis A_k, S_k e r_k representam, respectimvamente, a área transversal ao escomanto, a superfície lateral e o raio do elemento discreto. O termo $q_{m_{c,p}}$ representa a vazão mássica do componente c na fase p por unidade de volume.

De acordo com a Fig. 1, é possível definir os seguintes termos:

$$dV_k = \pi r_k^2 \Delta z_k \tag{1.1}$$

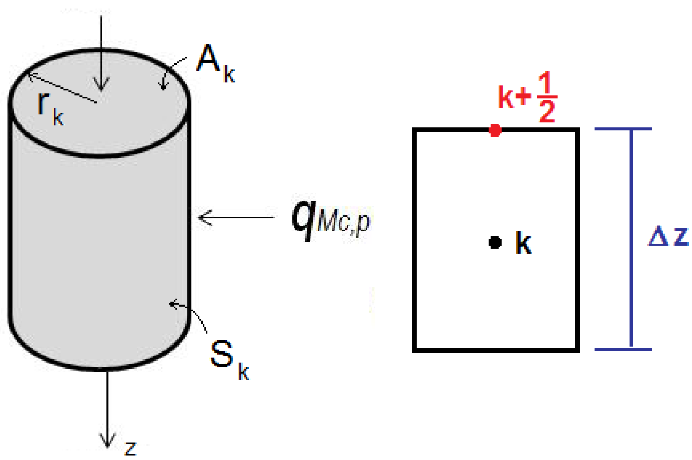

Figura 1: Volume de Controle Unidimensional.

$$A_k = \pi r_k^2 \tag{1.2}$$

$$dS_k = 2\pi r_k \Delta z_k \tag{1.3}$$

1.2 Equação da Difusão

A equação da difusão de energia é dada por:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = S_\phi \tag{1.4}$$

onde κ é a condutividade térmica do fluido, T é a temperatura e S_ϕ é o termo fonte de energia. Integrando no volume de controle:

$$-\iiint_{\text{V.C.}} \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)\, dV = \iiint_{\text{V.C.}} S_\phi dV \tag{1.5}$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint_{\text{S.C.}} (\kappa \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS + \iiint_{\text{V.C.}} S_\phi dV = 0 \tag{1.6}$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$-\left[\left(A\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(A\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{k-\frac{1}{2}}\right] = (AS_\phi \Delta x)_k \tag{1.7}$$

O termo de derivada será calculado utilizando uma aproximação por diferenças simples, assim:

$$-(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} = (AS_\phi \Delta x)_k \tag{1.8}$$

Organizando a equação:

$$
\begin{aligned}
&-(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k+1}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}+(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}\\
&\qquad+(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}-(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}=\left(AS_{\phi}\Delta x\right)_{k}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\,(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k+1}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}+2\,(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}\\
&\qquad+2\,(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}-2\,(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}\,\frac{\phi_{k-1}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}=\left(AS_{\phi}\Delta x\right)_{k}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2\,(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}\phi_{k+1}+\left(\frac{2\,(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}+\frac{2\,(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}\right)\phi_{k}\\
&\qquad-\frac{2\,(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}\phi_{k-1}=\left(AS_{\phi}\Delta x\right)_{k}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

O termo $(A\kappa)_{i\pm\frac{1}{2}}$ será calculado segundo uma interpolação do tipo esquema centrado.

2 Equação Convectiva e Difusiva

Será aplicado o método dos volumes finitos em equações de difusão e convecção como descrito no capítulo 5 de Versteeg e Malalasekera (2007) .

2.1 Equação da Difusão e Convecção

A equação da convecção e difusão é dada por:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi) = \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) + S_\phi \tag{2.1}$$

onde κ é o coeficiente de difusão, ϕ é a propriedade transportada, $\vec{v}$ é a velocidade do escoamento e S_ϕ é o termo fonte de energia. Integrando no volume de controle:

$$\iiint\limits_{\text{V.C.}} \nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi)\, dV = \iiint\limits_{\text{V.C.}} \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)\, dV + \iiint\limits_{\text{V.C.}} S_\phi dV \tag{2.2}$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint\limits_{\text{S.C.}} (\rho \vec{v} \phi) \cdot \vec{n} dS = \iiint\limits_{\text{S.C.}} (\kappa \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS + \iiint\limits_{\text{V.C.}} S_\phi dV \tag{2.3}$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$(A\rho\vec{v}\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v}\phi)_{k-\frac{1}{2}} = \left(A\kappa\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(A\kappa\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{k-\frac{1}{2}} + (AS_\phi \Delta x)_k \tag{2.4}$$

O termo de derivada será calculado utilizando uma aproximação por diferenças simples, assim:

$$(A\rho\vec{v}\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v}\phi)_{k-\frac{1}{2}} = (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k \tag{2.5}$$

Para se calcular a Equação 2.5 deverá se utilizar um metodo adequado de interpolação. Para a escolha do método deverá se analizar o número de Peclet, dado por:

$$P_e = \frac{C_{conv.}}{C_{dif}} = \frac{A\rho u}{\frac{A\kappa}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})}} \tag{2.6}$$

Para baixos números de Peclet o esquema de diferenças centrais é apropriado. Para altos números de Peclet o esquema Upwind é o mais apropriado. Ver Capítulo 5 de (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007) para maiores informações.

2.2 Método CDS para $\vec{v}$ e ϕ

O método CDS é recomendado para escoamentos com baixo números de Peclet. Utilizando a interpolação por diferenças simples (CDS) para $\vec{v}$ e ϕ:

$$\begin{aligned}(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} (\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} (\phi)_{k-\frac{1}{2}} &= \\ (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} &- (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} + \phi_k}{2} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k + \phi_{k-1}}{2} &= \\ (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} &- (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k\end{aligned} \tag{2.8}$$

Rearranjando os termos da equação:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_{k+1} + \frac{1}{2}(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_k - \frac{1}{2}(A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_k - \frac{1}{2}(A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_{k-1} \\ = (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\ - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}}-\frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}\right]\phi_{k-1} + \left[\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}}+\frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}+\frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)}\right]\phi_{k} + \left[\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}}-\frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}\right]\phi_{k+1}=\left(AS_{\phi}\Delta x\right)_{k} \quad (2.10)$$

Assim:

$$L_{k}\phi_{k-1}+C_{k}\phi+R_{k}\phi_{k+1}=\left(AS_{\phi}\Delta x\right)_{k} \quad (2.11)$$

onde:

$$L_{k}=-\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}}-\frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)} \quad (2.12)$$

$$R_{k}=\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}}-\frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)} \quad (2.13)$$

$$C_{k}=\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}}+\frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_{k}\right)}+\frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k}+\Delta x_{k-1}\right)} \quad (2.14)$$

2.3 Método CDS para $\vec{v}$ e UDS para ϕ

O método UDS é recomendado para escoamentos com altos valores do número de Peclet. Utilizando a interpolação pos diferenças centradas para $\vec{v}$ e a interpolação pelo esquema Upwind de primeira ordem UDS para ϕ, o termo $\phi_{k+\frac{1}{2}}$ pode ser expresso como:

$$\phi_{k+\frac{1}{2}}=\phi_{k}, \quad v_{k}\geq 0 \quad (2.15)$$

$$\phi_{k+\frac{1}{2}}=\phi_{k+1}, \quad v_{k}<0 \quad (2.16)$$

Já o termo $\phi_{k-\frac{1}{2}}$ pode ser expresso como:

$$\phi_{k-\frac{1}{2}} = \phi_{k-1}, \quad v_k \geq 0 \tag{2.17}$$

$$\phi_{k-\frac{1}{2}} = \phi_k, \quad v_k < 0 \tag{2.18}$$

2.3.1 Velocidades Positivas ($\vec{v_k} \geq 0$)

Para velocidades positivas a Equação 2.5 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}}(\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}}(\phi)_{k-\frac{1}{2}} = (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1}-\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)} \\ - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k-\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}}\phi_k - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}}\phi_{k-1} = (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1}-\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)} \\ - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k-\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k\end{aligned} \tag{2.20}$$

Rearranjando os termos da equação:

$$\begin{aligned}(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}}\phi_k - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}}\phi_{k-1} = \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)}\phi_{k+1} - \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)}\phi_k \\ - \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})}\phi_k + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})}\phi_{k-1} + (AS_\phi \Delta x)_k\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}&\left[-(A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})}\right]\phi_{k-1} \\ &\quad + \left[(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)} + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})}\right]\phi_k \\ &\quad + \left[-\frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)}\right]\phi_{k+1} \\ &\quad = (AS_\phi \Delta x)_k\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ou seja:

$$L_k\phi_{k-1} + C_k\phi + R_k\phi_{k+1} = \left(AS_\phi \Delta x\right)_k \tag{2.23}$$

onde:

$$L_k = -\left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}} - \frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k + \Delta x_{k-1}\right)} \tag{2.24}$$

$$R_k = -\frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k\right)} \tag{2.25}$$

$$C_k = \left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k\right)} + \frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k + \Delta x_{k-1}\right)}$$

2.3.2 Velocidades Negativas ($\vec{v_k} < 0$)

Para velocidades negativas a Equação 2.5 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}}\left(\phi\right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}}\left(\phi\right)_{k-\frac{1}{2}} = \left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}\frac{\phi_{k+1}-\phi_k}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)} \\ - \left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}\frac{\phi_k-\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_k+\Delta x_{k-1}\right)} + \left(AS_\phi\Delta x\right)_k\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}}\phi_{k+1} - \left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}}\phi_k = \left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}\frac{\phi_{k+1}-\phi_k}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)} \\ - \left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}\frac{\phi_k-\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_k+\Delta x_{k-1}\right)} + \left(AS_\phi\Delta x\right)_k\end{aligned} \tag{2.27}$$

Rearranjando os termos da equação:

$$\begin{aligned}\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}}\phi_{k+1} - \left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}}\phi_k = \frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)}\phi_{k+1} - \frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)}\phi_k \\ - \frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k+\Delta x_{k-1}\right)}\phi_k + \frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k+\Delta x_{k-1}\right)}\phi_{k-1} + \left(AS_\phi\Delta x\right)_k\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\left[-\frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k + \Delta x_{k-1}\right)}\right]\phi_{k-1} + \left[-\left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}} + \frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k\right)} + \frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k + \Delta x_{k-1}\right)}\right]\phi_k + \left[\left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}} - \frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k\right)}\right]\phi_{k+1} = \left(AS_\phi\Delta x\right)_k \quad (2.29)$$

Ou seja:

$$L_k\phi_{k-1} + C_k\phi + R_k\phi_{k+1} = \left(AS_\phi\Delta x\right)_k \quad (2.30)$$

onde:

$$L_k = -\frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k + \Delta x_{k-1}\right)} \quad (2.31)$$

$$R_k = \left(A\rho\vec{v}\right)_{k+\frac{1}{2}} - \frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k\right)} \quad (2.32)$$

$$C_k = -\left(A\rho\vec{v}\right)_{k-\frac{1}{2}} + \frac{2\left(A\kappa\right)_{k+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k\right)} + \frac{2\left(A\kappa\right)_{k-\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x_k + \Delta x_{k-1}\right)} \quad (2.33)$$

3 Acoplamento entre Pressão e Velocidade - Equação de Navier-Stokes

Como descrito no capítulo 6 de Versteeg e Malalasekera (2007) será aplicado o método SIMPLE para o acoplamento pressão velocidade das equações de Navier-Stokes unidimensionais.

3.1 Equação de Navies-Stokes

A equação de Navier-Stokes unidimensional pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) + S_u \tag{3.2}$$

A Eq. 3.1 representa a equação da conservação da massa sendo uma equação puramente convectiva. A eq. 3.2 é a conservação da quantidade de movimento sendo uma equação difusiva e convectiva. Observa-se dois fatos que tornam a solução numérica desse conjunto de equações dificil:

1. A Eq. da quantidade de movimento é não linear pois apresenta o produto de velocidades na derivada.
2. As equações estão acopladas entre sí, o que torna inviável a solução delas de forma separada.

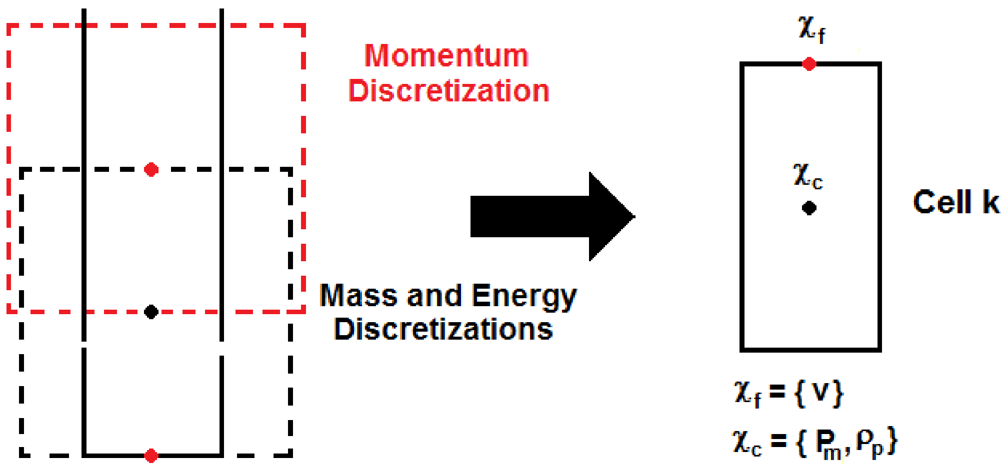

Figura 2: Malha deslocada para solução das equações de Navier-Stokes unidimensionais.

3.2 Malhas Deslocadas (Staggered Grid)

Para facilitar a solução das equações, será adotado o esquema de malhas deslocadas, mostrado na Figura 2. Nesse esquema a pressão é armazenada no centro da célula e a velocidade na face da mesma.

3.3 Equações de Navier-Stokes discretizadas

3.3.1 Conservação da Massa

utilizando o método dos volumes finitos, a equação da conservação da massa pode ser escrita como:

$$\iiint\limits_{\text{V.C.}} \nabla \cdot (\rho \vec{v})\, dV = \iiint\limits_{\text{V.C.}} S_m dV \tag{3.3}$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint\limits_{\text{S.C.}} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \iiint\limits_{\text{V.C.}} S_m dV \tag{3.4}$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$(A\rho v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v)_{k-\frac{1}{2}} = (A S_m \Delta x)_k \tag{3.5}$$

3.3.2 Conservação da Quantidade de Movimento

A equação da quantidade de movimento pode ser escrita como:

$$\iiint\limits_{\mathrm{V.C.}} \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v})\, dV = -\iiint\limits_{\mathrm{V.C.}} \nabla p dV + \iiint\limits_{\mathrm{V.C.}} \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v})\, dV + \iiint\limits_{\mathrm{V.C.}} S_u dV \tag{3.6}$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint\limits_{\mathrm{S.C.}} (\rho \vec{v}\vec{v}) \cdot \vec{n} dS = -\iiint\limits_{\mathrm{V.C.}} \nabla p dV + \iiint\limits_{\mathrm{S.C.}} (\mu \nabla \vec{v}) \cdot \vec{n} dS + \iiint\limits_{\mathrm{V.C.}} S_u dV \tag{3.7}$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$(A\rho vv)_{k+1} - (A\rho vv)_k = -\left(A\Delta x \frac{\partial p}{\partial x}\right)_{k+\frac{1}{2}} + \left(A\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{k+1} - \left(A\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right)_k + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

Utilizando diferenças finitas para aproximar os termos das derivadas:

$$\begin{aligned} &(A\rho)_{k+1}(vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k = \\ &\quad -(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{k+\frac{1}{2}} + (A\mu)_{k+1} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{k+1} - (A\mu)_k \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_k + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &(A\rho)_{k+1}(vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k = \\ &-(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

No lado esquerdo da equação existe um produto de velocidades no centro das células que deverá ser calculado utilizando um algorítimo de interpolação, descrito no Capítulo 2.

3.4 Algorítimo SIMPLE

O algorítimo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) é um método do tipo previsor-corretor capaz de acoplar as duas equações de Navier-Stokes. Para se utilizar esse metodo é introduzido uma previsão para a velocidade (v^*) para se obter uma previsão para a pressão (p^*). Separando o produto de velocidades e utilizando a Eq. 3.10:

$$\begin{gathered}(A\rho v)_{k+1}(v^*)_{k+1} - (A\rho v)_k (v^*)_k = \\ -(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p^*_{k+1} - p^*_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v^*_{k+\frac{3}{2}} - v^*_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v^*_{k+\frac{1}{2}} - v^*_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}}\end{gathered} \tag{3.11}$$

Uma definição importante utilizada no método SIMPLE são os termos de correção, dados por:

$$p = p^* + p' \tag{3.12}$$

$$v = v^* + v' \tag{3.13}$$

onde p' é a correção da pressão e v' da velocidade. Subtraindo a Equação 3.11 da 3.10:

$$\begin{gathered}(A\rho v)_{k+1}(v)_{k+1} - (A\rho v)_k (v)_k - \left((A\rho v)_{k+1}(v^*)_{k+1} - (A\rho v)_k (v^*)_k\right) = \\ -(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \\ -\left(-(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p^*_{k+1} - p^*_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v^*_{k+\frac{3}{2}} - v^*_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v^*_{k+\frac{1}{2}} - v^*_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}}\right)\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$
\begin{aligned}
&(A\rho v)_{k+1}\left[v_{k+1}-v^*_{k+1}\right]-(A\rho v)_k\left[v_k-v^*_k\right]=\\
&-\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)}\left(p_{k+1}-p_k\right)+\frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}}\left(v_{k+\frac{3}{2}}-v_{k+\frac{1}{2}}\right)-\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k}\left(v_{k+\frac{1}{2}}-v_{k-\frac{1}{2}}\right)+\left(A\Delta x S_u\right)_{k+\frac{1}{2}}\\
&+\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)}\left(p^*_{k+1}-p^*_k\right)-\frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}}\left(v^*_{k+\frac{3}{2}}-v^*_{k+\frac{1}{2}}\right)+\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k}\left(v^*_{k+\frac{1}{2}}-v^*_{k-\frac{1}{2}}\right)-\left(A\Delta x S_u\right)_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A\rho v)_{k+1}\left[v_{k+1}-v^*_{k+1}\right]-(A\rho v)_k\left[v_k-v^*_k\right]=\\
&\qquad-\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)}\left[\left(p_{k+1}-p^*_{k+1}\right)-\left(p_k-p^*_k\right)\right]\\
&\qquad+\frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}}\left[\left(v_{k+\frac{3}{2}}-v^*_{k+\frac{3}{2}}\right)-\left(v_{k+\frac{1}{2}}-v^*_{k+\frac{1}{2}}\right)\right]\\
&\qquad-\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k}\left[\left(v_{k+\frac{1}{2}}-v^*_{k+\frac{1}{2}}\right)-\left(v_{k-\frac{1}{2}}-v^*_{k-\frac{1}{2}}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

O método SIMPLE utiliza a seguinte aproximação para se definir a equação corretora:

$$
\begin{aligned}
&(A\rho v)_k\left[v_k-v^*_k\right]+\frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}}\left[\left(v_{k+\frac{3}{2}}-v^*_{k+\frac{3}{2}}\right)-\left(v_{k+\frac{1}{2}}-v^*_{k+\frac{1}{2}}\right)\right]\\
&\qquad-\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k}\left[\left(v_{k+\frac{1}{2}}-v^*_{k+\frac{1}{2}}\right)-\left(v_{k-\frac{1}{2}}-v^*_{k-\frac{1}{2}}\right)\right]=0
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Dessa forma:

$$
(A\rho v)_{k+1}\left[v_{k+1}-v^*_{k+1}\right]=-\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)}\left[\left(p_{k+1}-p^*_{k+1}\right)-\left(p_k-p^*_k\right)\right]
\tag{3.18}
$$

$$
v'_{k+1}=-\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k\right)(A\rho v)_{k+1}}\left[\left(p_{k+1}-p^*_{k+1}\right)-\left(p_k-p^*_k\right)\right]
\tag{3.19}
$$

ou em termos do bloco k:

$$
v'_k=-\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(\Delta x_k+\Delta x_{k-1}\right)(A\rho v)_k}\left[p'_k-p'_{k-1}\right]
\tag{3.20}
$$

O termo $(A\rho v)_k$ pode ser aproximado por $(A\rho v^*)_k$, assim:

$$v'_k = -\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}\left[p'_k - p'_{k-1}\right] \tag{3.21}$$

Assim a velocidade real pode ser escrita como:

$$v_k = v^*_k - \frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}\left[p'_k - p'_{k-1}\right] \tag{3.22}$$

A equação da conservação da massa discretizada ao redor do ponto $k+\frac{1}{2}$ pode ser escrita como:

$$(A\rho v)_{k+1} - (A\rho v)_k = (AS_m\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

Substituindo a Equação 3.22:

$$\begin{aligned}(A\rho)_{k+1}&\left(v^*_{k+1} - \frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v^*)_{k+1}}\left[p'_{k+1} - p'_k\right]\right)_{k+1}\\ &- (A\rho)_k\left(v^*_k - \frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}\left[p'_k - p'_{k-1}\right]\right)_k = (AS_m\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.24}$$

Organizando a equação:

$$\begin{aligned}(A\rho v^*)_{k+1} &- \frac{(A\rho)_{k+1}(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v^*)_{k+1}}\left[p'_{k+1} - p'_k\right]\\ &- (A\rho v^*)_k + \frac{(A\rho)_k(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}\left[p'_k - p'_{k-1}\right] = (AS_m\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{(A\rho)_{k+1}(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v^*)_{k+1}}p'_{k+1} + \frac{(A\rho)_{k+1}(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v^*)_{k+1}}p'_k\\ &+ \frac{(A\rho)_k(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}p'_k - \frac{(A\rho)_k(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}p'_{k-1}\\ &= (AS_m\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v^*)_{k+1} + (A\rho v^*)_k\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(A\rho)_{k+1}(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)(A\rho v^*)_{k+1}}p'_{k+1}\\
&\qquad+\left[-\frac{(A\rho)_{k+1}(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)(A\rho v^*)_{k+1}}-\frac{(A\rho)_k(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}\right]p'_k\\
&\qquad\qquad+\frac{(A\rho)_k(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k}p'_{k-1}\\
&\qquad\qquad\qquad=-(AS_m\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}+(A\rho v^*)_{k+1}-(A\rho v^*)_k
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Que pode ser escrito como:

$$
a_l p'_{k+1}+a_c p'_k+a_r p'_{k-1}=-(AS_m\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}+(A\rho v^*)_{k+1}-(A\rho v^*)_k \tag{3.28}
$$

onde:

$$
a_l=\frac{(A\rho)_{k+1}(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1}+\Delta x_k)(A\rho v^*)_{k+1}} \tag{3.29}
$$

$$
a_r=\frac{(A\rho)_k(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k+\Delta x_{k-1})(A\rho v^*)_k} \tag{3.30}
$$

$$
a_c=-a_l-a_r \tag{3.31}
$$

A Equação 3.28 é a expressão para a correção da pressão em cada célula do domínio. Com os valores de correção de pressão é possível corrigir a velocidade do escoamento com a Equação 3.22. A Figura 3 mostra um fluxograma com as etapas de cálculo do método SIMPLE.

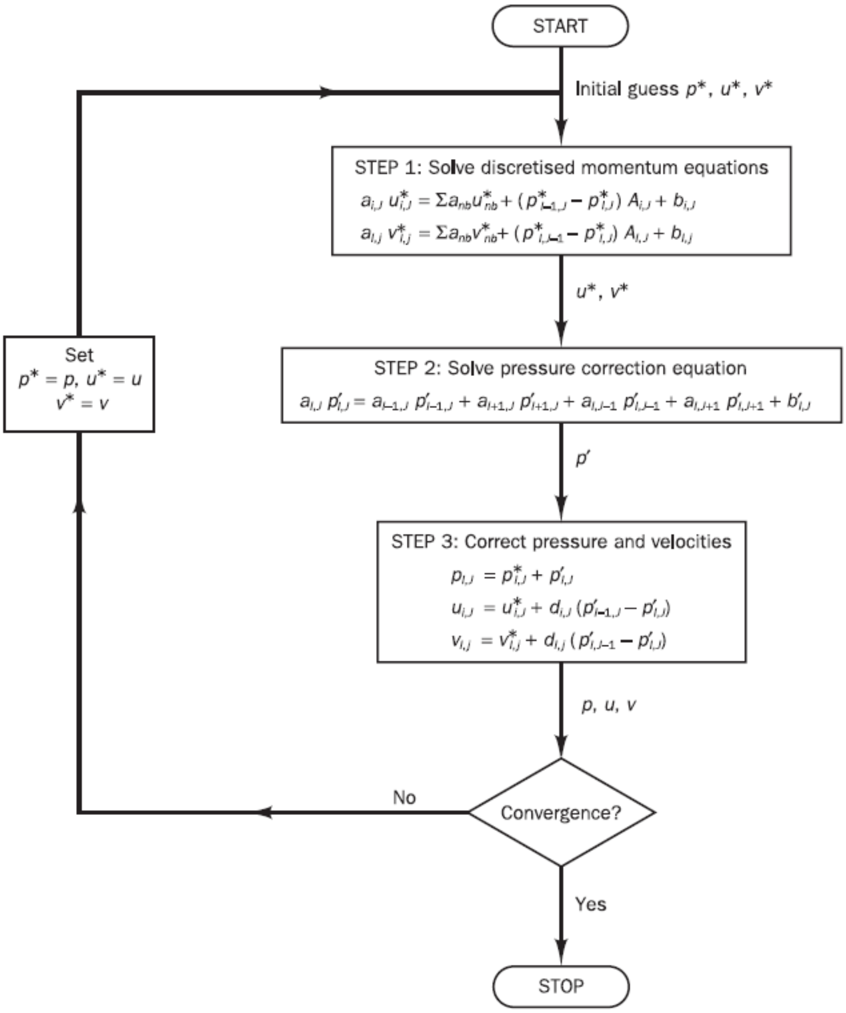

Figura 3: Fluxograma do método SIMPLE.

Referências

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: Pearson Education, 2007.