

MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS APLICADO EM EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO UNIDIMENSIONAIS

WAGNER QUEIROZ BARROS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

MACAÉ - RJ
Abril - 2014

Sumário

1	Equação da Difusão de Energia	1
1.1	Volume de Controle	1
1.2	Equação da Difusão	2
2	Equação Convectiva e Difusiva	1
2.1	Equação da Difusão e Convecção	1
2.2	Método CDS para \vec{v} e ϕ	2
2.3	Método CDS para \vec{v} e UDS para ϕ	3
3	Algoritmo SIMPLE - Equação de Navier-Stokes com formulação semi-implicit	1
3.1	Equação de Navies-Stokes	1
3.2	Malhas Deslocadas (Staggered Grid)	2
3.3	Equações de Navier-Stokes discretizadas	2
3.4	Algoritmo SIMPLE	4
3.5	Conservação da Massa utilizando o método UDS	6
3.6	11
3.7	Quantidade de Movimento utilizando interpolação UDS	11
4	Algoritmo COUPLE - Equação de Navier-Stokes com formulação full-implicit	1
4.1	Método de Newton-Rapson	1
4.2	Derivadas Parciais	2
4.3	Interpolação CDS	6
4.4	Interpolação UDS	6

4.5	Construção da Matriz Jacobiana	7
5	Algoritmo SIMPLER - Equação de Navier-Stokes com formulação semi-implicit	1
5.1	Equação de Navier-Stokes	1
5.2	Algoritmo SIMPLER	2
5.3	Fluxograma do método SIMPLER	12

1 *Equação da Difusão de Energia*

Será aplicado o método dos volumes finitos na equação da difusão como descrito no capítulo 4 de Versteeg e Malalasekera (2007) .

1.1 Volume de Controle

A Fig. 1, ilustra o volume de controle que será adotado para a discretização das equações médias de transporte. O subíndice k representa o elemento discreto de uma tubulação na direção z . As variáveis A_k , S_k e r_k representam, respectivamente, a área transversal ao escoamento, a superfície lateral e o raio do elemento discreto. O termo $q_{m,c,p}$ representa a vazão mássica do componente c na fase p por unidade de volume.

De acordo com a Fig. 1, é possível definir os seguintes termos:

$$dV_k = \pi r_k^2 \Delta z_k \quad (1.1)$$

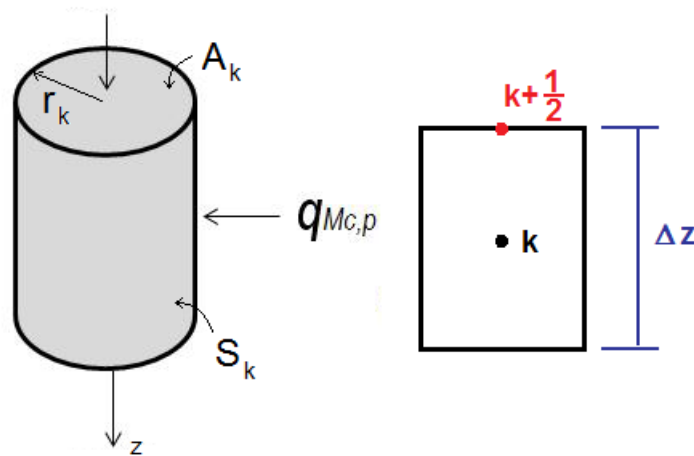


Figura 1: Volume de Controle Unidimensional.

$$A_k = \pi r_k^2 \quad (1.2)$$

$$dS_k = 2\pi r_k \Delta z_k \quad (1.3)$$

1.2 Equação da Difusão

A equação da difusão de energia é dada por:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = S_\phi \quad (1.4)$$

onde κ é a condutividade térmica do fluido, T é a temperatura e S_ϕ é o termo fonte de energia. Integrando no volume de controle:

$$-\iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) dV = \iiint_{V.C.} S_\phi dV \quad (1.5)$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint_{S.C.} (\kappa \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V.C.} S_\phi dV = 0 \quad (1.6)$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$-\left[\left(A\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(A\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{k-\frac{1}{2}} \right] = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (1.7)$$

O termo de derivada será calculado utilizando uma aproximação por diferenças simples, assim:

$$-(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (1.8)$$

Organizando a equação:

$$\begin{aligned}
& - (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\
& + (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (1.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + 2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\
& + 2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} - 2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k-1}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (1.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \phi_{k+1} + \left(\frac{2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + \frac{2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \right) \phi_k \\
& - \frac{2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \phi_{k-1} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (1.11)
\end{aligned}$$

O termo $(A\kappa)_{i\pm\frac{1}{2}}$ será calculado segundo uma interpolação do tipo esquema centrado.

2 *Equação Convectiva e Difusiva*

Será aplicado o método dos volumes finitos em equações de difusão e convecção como descrito no capítulo 5 de Versteeg e Malalasekera (2007) .

2.1 Equação da Difusão e Convecção

A equação da convecção e difusão é dada por:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi) = \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) + S_\phi \quad (2.1)$$

onde κ é o coeficiente de difusão, ϕ é a propriedade transportada, \vec{v} é a velocidade do escoamento e S_ϕ é o termo fonte de energia. Integrando no volume de controle:

$$\iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi) dV = \iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) dV + \iiint_{V.C.} S_\phi dV \quad (2.2)$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iint_{S.C.} (\rho \vec{v} \phi) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S.C.} (\kappa \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V.C.} S_\phi dV \quad (2.3)$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$(A\rho\vec{v}\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v}\phi)_{k-\frac{1}{2}} = \left(A\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(A\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{k-\frac{1}{2}} + (AS_\phi \Delta x)_k \quad (2.4)$$

O termo de derivada será calculado utilizando uma aproximação por diferenças simples, assim:

$$(A\rho\vec{v}\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v}\phi)_{k-\frac{1}{2}} = (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi\Delta x)_k \quad (2.5)$$

Para se calcular a Equação 2.5 deverá se utilizar um metodo adequado de interpolação. Para a escolha do método deverá se analisar o número de Peclet, dado por:

$$P_e = \frac{C_{conv.}}{C_{dif}} = \frac{A\rho u}{\frac{A\kappa}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})}} \quad (2.6)$$

Para baixos números de Peclet o esquema de diferenças centrais é apropriado. Para altos números de Peclet o esquema Upwind é o mais apropriado. Ver Capítulo 5 de (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007) para maiores informações.

2.2 Método CDS para \vec{v} e ϕ

O método CDS é recomendado para escoamentos com baixo números de Peclet. Utilizando a interpolação por diferenças simples (CDS) para \vec{v} e ϕ :

$$(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} (\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} (\phi)_{k-\frac{1}{2}} = (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi\Delta x)_k \quad (2.7)$$

$$(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} + \phi_k}{2} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k + \phi_{k-1}}{2} = (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi\Delta x)_k \quad (2.8)$$

Rearranjando os termos da equação:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_{k+1} + \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_k - \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_k - \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_{k-1} \\ &= (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\ & - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi\Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \right] \phi_{k-1} \\
& + \left[\frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} + \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \right] \phi_k \\
& + \left[\frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \right] \phi_{k+1} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Assim:

$$L_k \phi_{k-1} + C_k \phi + R_k \phi_{k+1} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (2.11)$$

onde:

$$L_k = -\frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \quad (2.12)$$

$$R_k = \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \quad (2.13)$$

$$C_k = \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} + \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \quad (2.14)$$

2.3 Método CDS para \vec{v} e UDS para ϕ

O método UDS é recomendado para escoamentos com altos valores do número de Peclet. Utilizando a interpolação pos diferenças centradas para \vec{v} e a interpolação pelo esquema Upwind de primeira ordem *UDS* para ϕ , o termo $\phi_{k+\frac{1}{2}}$ pode ser expresso como:

$$\phi_{k+\frac{1}{2}} = \phi_k, \quad v_k \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\phi_{k+\frac{1}{2}} = \phi_{k+1}, \quad v_k < 0 \quad (2.16)$$

Já o termo $\phi_{k-\frac{1}{2}}$ pode ser expresso como:

$$\phi_{k-\frac{1}{2}} = \phi_{k-1}, \quad v_k \geq 0 \quad (2.17)$$

$$\phi_{k-\frac{1}{2}} = \phi_k, \quad v_k < 0 \quad (2.18)$$

2.3.1 Velocidades Positivas ($v_k \geq 0$)

Para velocidades positivas a Equação 2.5 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} (\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} (\phi)_{k-\frac{1}{2}} &= (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\ &\quad - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_k - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_{k-1} &= (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\ &\quad - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.20)$$

Rearranjando os termos da equação:

$$\begin{aligned} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_k - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_{k-1} &= \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \phi_{k+1} - \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \phi_k \\ &\quad - \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \phi_k + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \phi_{k-1} + (AS_\phi \Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &\left[- (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \right] \phi_{k-1} \\ &\quad + \left[(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \right] \phi_k \\ &\quad + \left[- \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \right] \phi_{k+1} \\ &= (AS_\phi \Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ou seja:

$$L_k \phi_{k-1} + C_k \phi + R_k \phi_{k+1} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (2.23)$$

onde:

$$L_k = - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} - \frac{2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \quad (2.24)$$

$$R_k = - \frac{2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \quad (2.25)$$

$$C_k = (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + \frac{2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})}$$

2.3.2 Velocidades Negativas ($\vec{v}_k < 0$)

Para velocidades negativas a Equação 2.5 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} (\phi)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} (\phi)_{k-\frac{1}{2}} &= (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2} (\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\ &\quad - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2} (\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_{k+1} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_k &= (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\frac{1}{2} (\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \\ &\quad - (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\frac{1}{2} (\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} + (AS_\phi \Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.27)$$

Rearranjando os termos da equação:

$$\begin{aligned} (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} \phi_{k+1} - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} \phi_k &= \frac{2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \phi_{k+1} - \frac{2 (A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \phi_k \\ &\quad - \frac{2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \phi_k + \frac{2 (A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \phi_{k-1} + (AS_\phi \Delta x)_k \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \right] \phi_{k-1} \\
& + \left[- (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} + \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \right] \phi_k \\
& + \left[(A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \right] \phi_{k+1} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$L_k \phi_{k-1} + C_k \phi + R_k \phi_{k+1} = (AS_\phi \Delta x)_k \quad (2.30)$$

onde:

$$L_k = -\frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \quad (2.31)$$

$$R_k = (A\rho\vec{v})_{k+\frac{1}{2}} - \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \quad (2.32)$$

$$C_k = - (A\rho\vec{v})_{k-\frac{1}{2}} + \frac{2(A\kappa)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + \frac{2(A\kappa)_{k-\frac{1}{2}}}{(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \quad (2.33)$$

3 *Algoritmo SIMPLE - Equação de Navier-Stokes com formulação semi-implicit*

Como descrito no capítulo 6 de Versteeg e Malalasekera (2007) será aplicado o método SIMPLE para o acoplamento pressão velocidade das equações de Navier-Stokes unidimensionais.

3.1 Equação de Navies-Stokes

A equação de Navier-Stokes unidimensional pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) + S_u \quad (3.2)$$

A Eq. 3.1 representa a equação da conservação da massa sendo uma equação puramente convectiva. A eq. 3.2 é a conservação da quantidade de movimento sendo uma equação difusiva e convectiva. Observa-se dois fatos que tornam a solução numérica desse conjunto de equações difícil:

1. A Eq. da quantidade de movimento é não linear pois apresenta o produto de velocidades na derivada.
2. As equações estão acopladas entre si, o que torna inviável a solução delas de forma separada.

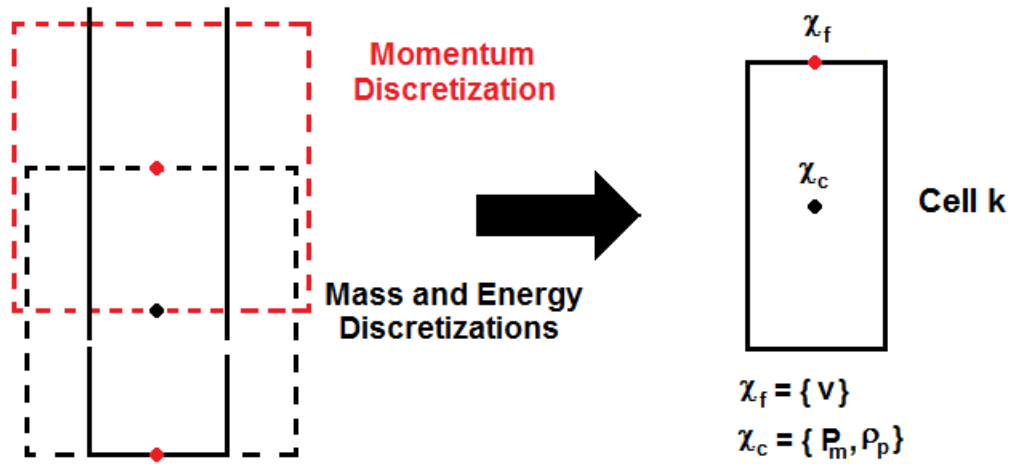


Figura 2: Malha deslocada para solução das equações de Navier-Stokes unidimensionais.

3.2 Malhas Deslocadas (Staggered Grid)

Para facilitar a solução das equações, será adotado o esquema de malhas deslocadas, mostrado na Figura 2. Nesse esquema a pressão é armazenada no centro da célula e a velocidade na face da mesma.

3.3 Equações de Navier-Stokes discretizadas

3.3.1 Conservação da Massa

utilizando o método dos volumes finitos, a equação da conservação da massa pode ser escrita como:

$$\iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = \iiint_{V.C.} S_m dV \quad (3.3)$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint_{S.C.} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V.C.} S_m dV \quad (3.4)$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$(A\rho v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v)_{k-\frac{1}{2}} = (AS_m \Delta x)_k \quad (3.5)$$

3.3.2 Conservação da Quantidade de Movimento

A equação da quantidade de movimento pode ser escrita como:

$$\iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dV = - \iiint_{V.C.} \nabla p dV + \iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) dV + \iiint_{V.C.} S_u dV \quad (3.6)$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint_{S.C.} (\rho \vec{v} \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = - \iiint_{V.C.} \nabla p dV + \iiint_{S.C.} (\mu \nabla \vec{v}) \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V.C.} S_u dV \quad (3.7)$$

Utilizando o volume de controle unidimensional:

$$(A\rho v v)_{k+1} - (A\rho v v)_k = - \left(A\Delta x \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} + \left(A\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{k+1} - \left(A\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_k + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Utilizando diferenças finitas para aproximar os termos das derivadas:

$$\begin{aligned} (A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k = \\ - (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (A\mu)_{k+1} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{k+1} - (A\mu)_k \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_k + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} (A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k = \\ - (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{p_{k+1} - p_k}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

No lado esquerdo da equação existe um produto de velocidades no centro das células que deverá ser calculado utilizando um algoritmo de interpolação, descrito no Capítulo 2.

3.4 Algoritmo SIMPLE

O algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) é um método do tipo previsor-corretor capaz de acoplar as duas equações de Navier-Stokes. Para se utilizar esse método é introduzido uma previsão para a velocidade (v^*) para se obter uma previsão para a pressão (p^*). Separando o produto de velocidades e utilizando a Eq. 3.10:

$$(A\rho v)_{k+1} (v^*)_{k+1} - (A\rho v)_k (v^*)_k = - (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1}^* - p_k^*}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Uma definição importante utilizada no método SIMPLE são os termos de correção, dados por:

$$p = p^* + p' \quad (3.12)$$

$$v = v^* + v' \quad (3.13)$$

onde p' é a correção da pressão e v' da velocidade. Subtraindo a Equação 3.11 da 3.10:

$$(A\rho v)_{k+1} (v)_{k+1} - (A\rho v)_k (v)_k - ((A\rho v)_{k+1} (v^*)_{k+1} - (A\rho v)_k (v^*)_k) = - (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} - \left(- (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1}^* - p_k^*}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho v)_{k+1} [v_{k+1} - v_{k+1}^*] - (A\rho v)_k [v_k - v_k^*] = \\
& -\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} (p_{k+1} - p_k) + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \left(v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}\right) - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \left(v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}\right) + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \\
& + \frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} (p_{k+1}^* - p_k^*) - \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \left(v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*\right) + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \left(v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*\right) - (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho v)_{k+1} [v_{k+1} - v_{k+1}^*] - (A\rho v)_k [v_k - v_k^*] = \\
& -\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} [(p_{k+1} - p_{k+1}^*) - (p_k - p_k^*)] \\
& + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \left[\left(v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{3}{2}}^*\right) - \left(v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}^*\right)\right] \\
& - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \left[\left(v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}^*\right) - \left(v_{k-\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}^*\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

O método SIMPLE utiliza a seguinte aproximação para se definir a equação corretora:

$$\begin{aligned}
& - (A\rho v)_k [v_k - v_k^*] = \\
& + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \left[\left(v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{3}{2}}^*\right) - \left(v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}^*\right)\right] \\
& - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \left[\left(v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}^*\right) - \left(v_{k-\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}^*\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Observa-se que apesar desses termos serem desprezados na equação corretora, essa equação continua respeitando a conservação da massa, como descrito por Versteeg e Malalasekera (2007) . Dessa forma:

$$(A\rho v)_{k+1} [v_{k+1} - v_{k+1}^*] = -\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} [(p_{k+1} - p_{k+1}^*) - (p_k - p_k^*)] \tag{3.18}$$

$$v'_{k+1} = -\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k) (A\rho v)_{k+1}} [(p_{k+1} - p_{k+1}^*) - (p_k - p_k^*)] \tag{3.19}$$

ou em termos do bloco k :

$$v'_k = -\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \quad (3.20)$$

Assim a velocidade real do fluido pode ser escrita como:

$$v_k = v_k^* - \frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \quad (3.21)$$

A equação da massa discretizada ao redor do ponto k foi escrita como (Equação 3.5):

$$(A\rho v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v)_{k-\frac{1}{2}} = (AS_m\Delta x)_k \quad (3.22)$$

É possível perceber que a velocidade real dada pelo método simple (Equação 3.21) é dada no centro da célula, enquanto a velocidade na equação da massa é na face da célula. Dessa forma é necessário se utilizar um método de interpolação para v_k .

3.5 Conservação da Massa utilizando o método UDS

Utilizando o método upwind de primeira ordem para discretizar a velocidade:

3.5.1 Velocidades Positivas ($v_{k+\frac{1}{2}} \geq 0$)

Dessa forma:

$$v_{k+1} = v_{k+\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

$$v_k = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

Substituindo a Equação 3.21 na conservação da massa:

$$(A\rho)_{k+\frac{1}{2}}(v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}}(v)_{k-\frac{1}{2}} = (AS_m\Delta x)_k \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left(v_{k+1}^* - \frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} [p'_{k+1} - p'_k] \right) \\
& - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left(v_k^* - \frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \right) = (AS_m \Delta x)_k \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} [p'_{k+1} - p'_k] \right) \\
& + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \right) = \\
& (AS_m \Delta x)_k - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_{k+1}^* + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_k^* \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} \right) p'_{k+1} + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} \right) p'_k \\
& + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right) p'_k - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right) p'_{k-1} = \\
& (AS_m \Delta x)_k - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_{k+1}^* + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_k^* \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right) p'_{k-1} \\
& - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right) p'_k - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} \right) p'_k \\
& + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} \right) p'_{k+1} = \\
& - (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_{k+1}^* - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_k^* \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Utilizando uma notação simplificada:

$$a_l p'_{k-1} + a_c p'_k + a_r p'_{k+1} = - (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_{k+1}^* - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_k^* \quad (3.30)$$

onde:

$$a_l = (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} \quad (3.31)$$

$$a_r = (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \quad (3.32)$$

$$a_c = -a_l - a_r \quad (3.33)$$

3.5.2 Velocidades Negativas ($v_{k+\frac{1}{2}} < 0$)

Dessa forma:

$$v_{k+1} = v_{k+\frac{3}{2}} \quad (3.34)$$

$$v_k = v_{k+\frac{1}{2}} \quad (3.35)$$

$$v_{k-1} = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

Substituindo na equação da conservação da massa:

$$(A\rho)_{k+\frac{1}{2}} (v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} (v)_{k-\frac{1}{2}} = (AS_m \Delta x)_k \quad (3.37)$$

$$(A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_k - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_{k-1} = (AS_m \Delta x)_k \quad (3.38)$$

Substituindo a Equação 3.21:

$$\begin{aligned} & (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[v_k^* - \frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \right] \\ & - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[v_{k-1}^* - \frac{(A\Delta x)_{k-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k-1} + \Delta x_{k-2})(A\rho v)_{k-1}} [p'_{k-1} - p'_{k-2}] \right] = (AS_m \Delta x)_k \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_k^* - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \right] \\
& - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_{k-1}^* + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k-1} + \Delta x_{k-2})(A\rho v)_{k-1}} [p'_{k-1} - p'_{k-2}] \right] = (AS_m \Delta x)_k
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \right] \\
& + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k-1} + \Delta x_{k-2})(A\rho v)_{k-1}} [p'_{k-1} - p'_{k-2}] \right] = \\
& (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_{k-1}^* - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_k^* \tag{3.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right] p'_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right] p'_{k-1} \\
& + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k-1} + \Delta x_{k-2})(A\rho v)_{k-1}} \right] p'_{k-1} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k-1} + \Delta x_{k-2})(A\rho v)_{k-1}} \right] p'_{k-2} = \\
& (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_{k-1}^* - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_k^* \tag{3.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k-1} + \Delta x_{k-2})(A\rho v)_{k-1}} \right] p'_{k-2} \\
& + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k-1} + \Delta x_{k-2})(A\rho v)_{k-1}} \right] p'_{k-1} + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right] p'_{k-1} \\
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right] p'_k = \\
& (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_{k-1}^* - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_k^* \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Organizando os índices:

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right] p'_{k-1} \\
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})(A\rho v)_k} \right] p'_k - (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} \right] p'_k \\
& + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \left[\frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)(A\rho v)_{k+1}} \right] p'_{k+1} = \\
& - (AS_m\Delta x)_{k+1} + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} v_{k+1}^* - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_k^* \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Utilizando uma notação simplificada:

$$a_l p'_{k-1} + a_c p'_k + a_r p'_{k+1} = - (AS_m\Delta x)_{k+1} + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} v_{k+1}^* - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_k^* \quad (3.45)$$

onde:

$$a_l = (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} \quad (3.46)$$

$$a_r = (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \quad (3.47)$$

$$a_c = -a_l - a_r \quad (3.48)$$

As Equações 3.30, 3.45 são as expressões para a correção da pressão em cada célula do domínio. Com os valores de correção de pressão é possível corrigir a velocidade do escoamento com a Equação 3.21. A Figura 3 mostra um fluxograma com as etapas de cálculo do método SIMPLE.

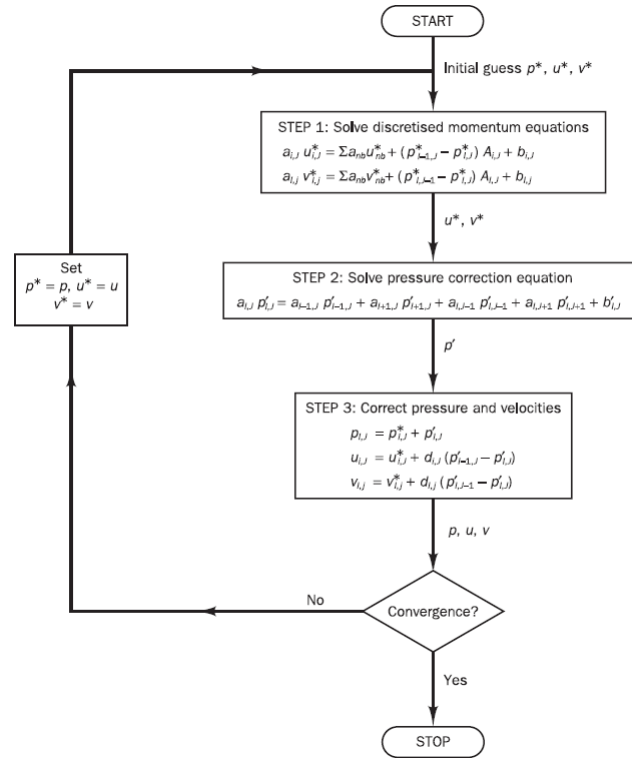


Figura 3: Fluxograma do método SIMPLE.

3.6

3.7 Quantidade de Movimento utilizando interpolação UDS

A equação da conservação da quantidade de movimento (Equação 3.10) foi definida como:

$$\begin{aligned}
 (A\rho v)_{k+1} v_{k+1}^* - (A\rho v)_k v_k^* = \\
 -(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1}^* - p_k^*}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \quad (3.49)$$

O método UDS é recomendado para escoamentos com altos valores do número de Peclet. Utilizando a interpolação pos diferenças centradas para \vec{v} e a interpolação pelo esquema Upwind de primeira ordem *UDS* para ϕ , o termo ϕ_k pode ser expresso como:

$$\phi_k = \phi_{k-\frac{1}{2}}, \quad v_k \geq 0 \quad (3.50)$$

$$\phi_k = \phi_{k+\frac{1}{2}}, \quad v_k < 0 \quad (3.51)$$

3.7.1 Velocidades Positivas ($\vec{v}_k \geq 0$)

$$\begin{aligned} & (A\rho v)_{k+1} v_{k+\frac{1}{2}}^* - (A\rho v)_k v_{k-\frac{1}{2}}^* = \\ & -A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1}^* - p_k^*) + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Rearranjando e desprezando o termo fonte:

$$\begin{aligned} & \left[- (A\rho v)_k - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \right] v_{k-\frac{1}{2}}^* \\ & + \left[(A\rho v)_{k+1} + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{1}{2}}^* \\ & \quad \left[- \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{3}{2}}^* \\ & = \\ & -A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1}^* - p_k^*) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Que pode ser simplificada como:

$$a_{vl} v_{k-\frac{1}{2}}^* + a_{vc} v_{k+\frac{1}{2}}^* + a_{vr} v_{k+\frac{3}{2}}^* = -A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1}^* - p_k^*) \quad (3.54)$$

onde

$$a_{vl} = - (A\rho v)_k - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (3.55)$$

$$a_{vc} = (A\rho v)_{k+1} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (3.56)$$

$$a_{vr} = -\frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (3.57)$$

3.7.2 Velocidades Negativas ($\vec{v}_k < 0$)

$$\begin{aligned} & (A\rho v)_{k+1} v_{k+\frac{3}{2}}^* - (A\rho v)_k v_{k+\frac{1}{2}}^* = \\ & -A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1}^* - p_k^*) + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Rearranjando:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \right] v_{k-\frac{1}{2}}^* \\ & + \left[-(A\rho v)_k + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{1}{2}}^* \\ & \left[(A\rho v)_{k+1} - \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{3}{2}}^* \\ & = \\ & -A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1}^* - p_k^*) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Que pode ser simplificada como:

$$a_{vl} v_{k-\frac{1}{2}}^* + a_{vc} v_{k+\frac{1}{2}}^* + a_{vr} v_{k+\frac{3}{2}}^* = -A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1}^* - p_k^*) \quad (3.60)$$

onde

$$a_{vl} = -\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (3.61)$$

$$a_{vc} = -(A\rho v)_k + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (3.62)$$

$$a_{vr} = (A\rho v)_{k+1} - \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (3.63)$$

4 *Algoritmo COUPLE - Equação de Navier-Stokes com formulação full-implicit*

No Capítulo ?? foi utilizado o método SIMPLE para o acoplamento entre a pressão e velocidade nas equações de Navier-Stokes. Nesse capítulo será utilizada uma formulação totalmente implícita, capaz de resolver essas equações utilizando o método de Newton-Rapson.

4.1 Método de Newton-Rapson

A formulação implícita do problema será realizada utilizando-se o método de Newton-Raphson, descrito por:

$$R_k^\nu + \sum_j^{N \text{ Equations}} \frac{\partial R_k^\nu}{\partial x_j} \left(x_j^{(\nu+1)} - x_j^{(\nu)} \right) = 0 \quad (4.1)$$

ou em notação matricial:

$$J^\nu \delta x^{\nu+1} = -R^\nu \quad (4.2)$$

onde J é a matriz Jacobiano do problema, R é o vetor de resíduos e δx é a variação da solução do problema.

Os resíduos para a equação da conservação da massa, Equação 3.5, são dados por:

$$R_k^m = (A\rho v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v)_{k-\frac{1}{2}} - (AS_m \Delta x)_k \quad (4.3)$$

Os resíduos para a equação da quantidade de movimento, Equação 3.10, despre-

zando termos fonte, são dados por:

$$R_k^p = (A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k + (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} + (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \quad (4.4)$$

4.2 Derivadas Parciais

4.2.1 Derivada da Massa em relação a pressão

$$\frac{\partial R_k^m}{\partial p_{k-1}} = \frac{\partial R_k^m}{\partial p_k} = \frac{\partial R_k^m}{\partial p_{k+1}} = 0 \quad (4.5)$$

4.2.2 Derivada da Massa em relação a velocidade

$$\frac{\partial R_k^m}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[(A\rho v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v)_{k-\frac{1}{2}} - (AS_m \Delta x)_k \right] \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial R_k^m}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial R_k^m}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[(A\rho v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v)_{k-\frac{1}{2}} - (AS_m \Delta x)_k \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial R_k^m}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = -(A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

4.2.3 Derivada da Quantidade de Movimento em relação a pressão

4.2.3.1 Derivada em relação ao bloco a esquerda

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial p_{k-1}} &= \frac{\partial}{\partial p_{k-1}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] \\ &+ \frac{\partial}{\partial p_{k-1}} \left[(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} + (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial p_{k-1}} = 0 \quad (4.11)$$

4.2.3.2 Derivada em relação ao bloco ao centro

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] \\ &+ \frac{\partial}{\partial p_k} \left[(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} + (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial R_k^m}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\frac{2(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} (p_{k+1} - p_k) \right] \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial p_k} = -\frac{2(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \quad (4.14)$$

4.2.3.3 Derivada em relação ao bloco a direita

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial p_{k+1}} &= \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] \\ &+ \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \left[(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} + (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial p_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \left[\frac{2 (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} (p_{k+1} - p_k) \right] \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial p_{k+1}} = \frac{2 (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \quad (4.17)$$

4.2.4 Derivada da Quantidade de Movimento em relação a velocidade

4.2.4.1 Derivada em relação ao bloco a esquerda

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} &= \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] \\ &+ \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} + (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] + \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[(A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \right] \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1}] - \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [(A\rho)_k (vv)_k] + \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} (v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}) \right] \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = (A\rho)_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [(vv)_{k+1}] - (A\rho)_k \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [(vv)_k] - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = (A\rho)_{k+1} \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} - (A\rho)_k \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (4.22)$$

4.2.4.2 Derivada em relação ao bloco central

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} &= \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] \\ &+ \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} + (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} &= \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] \\ &+ \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[-\frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} (v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} (v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} &= (A\rho)_{k+1} \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} - (A\rho)_k \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \\ &+ \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} (v_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} (v_{k+\frac{1}{2}}) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = (A\rho)_{k+1} \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} - (A\rho)_k \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (4.26)$$

4.2.4.3 Derivada em relação ao bloco a direita

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k+\frac{3}{2}}} &= \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{3}{2}}} [(A\rho)_{k+1} (vv)_{k+1} - (A\rho)_k (vv)_k] \\ &+ \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{3}{2}}} \left[(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} - (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} + (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial R_k^p}{\partial v_{k+\frac{3}{2}}} = (A\rho)_{k+1} \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{3}{2}}} - (A\rho)_k \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{3}{2}}} - \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (4.28)$$

As derivadas da velocidade devem ser calculadas de acordo com o método de interpolação escolhido.

4.3 Interpolação CDS

Utilizando o método CDS, as derivadas parciais das velocidades são calculadas por:

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[\frac{v_{k+\frac{3}{2}} + v_{k+\frac{1}{2}}}{2} \right] = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[\frac{v_{k+\frac{1}{2}} + v_{k-\frac{1}{2}}}{2} \right] = v_k \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[\frac{v_{k+\frac{3}{2}} + v_{k+\frac{1}{2}}}{2} \right] = v_{k+1} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[\frac{v_{k+\frac{1}{2}} + v_{k-\frac{1}{2}}}{2} \right] = v_k \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[\frac{v_{k+\frac{3}{2}} + v_{k+\frac{1}{2}}}{2} \right] = v_{k+1} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[\frac{v_{k+\frac{1}{2}} + v_{k-\frac{1}{2}}}{2} \right] = v_k \quad (4.34)$$

4.4 Interpolação UDS

Utilizando o método UDS, as derivadas parciais das velocidades são calculadas por:

4.4.0.4 $v_{k+\frac{1}{2}} \geq 0$:

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [v_{k+\frac{1}{2}}] = 0 \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} [v_{k-\frac{1}{2}}] = 2v_k \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{1}{2}} \right] = 2v_{k+1} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{1}{2}} \right] = 2v_{k+1} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (4.40)$$

4.4.0.5 $v_{k+\frac{1}{2}} \geq 0$:

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{3}{2}} \right] = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k-\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{3}{2}} \right] = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{1}{2}} \right] = 2v_k \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_{k+1}}{\partial v_{k+1}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{3}{2}} \right] = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial (vv)_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial (vv)_k}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} = 2v_k \frac{\partial}{\partial v_{k+\frac{1}{2}}} \left[v_{k+\frac{1}{2}} \right] = 2v_k \quad (4.46)$$

4.5 Construção da Matriz Jacobiana

Existem duas formas práticas de se montar a matriz jacobiano, a primeira é se agrupar as equações por tipo para formar o resíduo, e a segunda é se agrupar as equações a partir das células.

4.5.1 Jacobiano com equações agrupadas:

Agrupando as equações do mesmo tipo no Jacobiano:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial R_1^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_1^m}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_1^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_n} \\
 \frac{\partial R_2^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_2^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_2^m}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_2^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_n} \\
 \frac{\partial R_3^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_3^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_3^m}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_3^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \frac{\partial R_n^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_n^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_n^m}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_n^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_n} \\
 \frac{\partial R_1^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_n} \\
 \frac{\partial R_2^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_n} \\
 \frac{\partial R_3^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \frac{\partial R_n^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_3} & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_n}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta p_1 \\
 \delta p_2 \\
 \delta p_3 \\
 \vdots \\
 \delta p_n \\
 \delta v_1 \\
 \delta v_2 \\
 \delta v_3 \\
 \vdots \\
 \delta v_n
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 R_1^m \\
 R_2^m \\
 R_3^m \\
 \vdots \\
 R_n^m \\
 R_1^p \\
 R_2^p \\
 R_3^p \\
 \vdots \\
 R_n^p
 \end{bmatrix}
 \quad (4.47)$$

Substituindo as derivadas calculadas:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_2} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_3} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_n} \\
 \frac{\partial R_1^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_2} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_3} & \dots & 0 & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_3} & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_3} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_n} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_n}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta p_1 \\
 \delta p_2 \\
 \delta p_3 \\
 \vdots \\
 \delta p_n \\
 \delta v_1 \\
 \delta v_2 \\
 \delta v_3 \\
 \vdots \\
 \delta v_n
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 R_1^m \\
 R_2^m \\
 R_3^m \\
 \vdots \\
 R_n^m \\
 R_1^p \\
 R_2^p \\
 R_3^p \\
 \vdots \\
 R_n^p
 \end{bmatrix}
 \quad (4.48)$$

4.5.2 Jacobiano com células agrupadas:

Agrupando as derivadas com relação as células no Jacobiano:

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial R_1^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_3} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_n} \\
\frac{\partial R_1^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_1^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_1^m}{\partial p_3} & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_1^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_n} \\
\frac{\partial R_2^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_3} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_n} \\
\frac{\partial R_2^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_2^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_2^m}{\partial p_3} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_2^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_n} \\
\frac{\partial R_3^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_3} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_n} \\
\frac{\partial R_3^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_3^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_3^m}{\partial p_3} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_3^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial R_n^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_3} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_n} \\
\frac{\partial R_n^m}{\partial p_1} & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_1} & \frac{\partial R_n^m}{\partial p_2} & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_2} & \frac{\partial R_n^m}{\partial p_3} & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial R_n^m}{\partial p_n} & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta p_1 \\
\delta v_1 \\
\delta p_2 \\
\delta v_2 \\
\delta p_3 \\
\delta v_3 \\
\vdots \\
\delta p_n \\
\delta v_n
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
R_1^p \\
R_1^m \\
R_2^p \\
R_2^m \\
R_3^p \\
R_3^m \\
\vdots \\
R_n^p \\
R_n^m
\end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Substituindo as derivadas:

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial R_1^p}{\partial p_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_1^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_1^p}{\partial v_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial R_1^m}{\partial v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_1} & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_2^p}{\partial p_3} & \frac{\partial R_2^p}{\partial v_3} & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_1} & 0 & \frac{\partial R_2^m}{\partial v_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_2} & \frac{\partial R_3^p}{\partial p_3} & \frac{\partial R_3^p}{\partial v_3} & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_2} & 0 & \frac{\partial R_3^m}{\partial v_3} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial p_n} & \frac{\partial R_n^p}{\partial v_n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial R_n^m}{\partial v_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta p_1 \\
\delta v_1 \\
\delta p_2 \\
\delta v_2 \\
\delta p_3 \\
\delta v_3 \\
\vdots \\
\delta p_n \\
\delta v_n
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
R_1^p \\
R_1^m \\
R_2^p \\
R_2^m \\
R_3^p \\
R_3^m \\
\vdots \\
R_n^p \\
R_n^m
\end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Observa-se que o Jacobiano com células agrupadas resulta em uma matriz com maior peso na diagonal, o que facilita os métodos numéricos. Dessa forma esse Jacobiano será implementado.

5 *Algoritmo SIMPLER - Equação de Navier-Stokes com formulação semi-implicit*

Como descrito no capítulo 6 de Versteeg e Malalasekera (2007) o método SIMPLE para o acoplamento entre pressão e velocidade não produz bons resultados para o campo de pressão do escoamento, dessa forma foi introduzido o método SIMPLER (SIMPLE Revised) para tratar as deficiências do método SIMPLE.

5.1 Equação de Navier-Stokes

Conforme descrito anteriormente, a equação de Navier-Stokes unidimensional discretizada pode ser escrita como:

5.1.1 Conservação da Massa

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m \quad (5.1)$$

$$(A\rho v)_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho v)_{k-\frac{1}{2}} = (AS_m \Delta x)_k \quad (5.2)$$

5.1.2 Conservação da Quantidade de Movimento

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) + S_u \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho v)_{k+1} (v)_{k+1} - (A\rho v)_k (v)_k = \\
& - (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2 Algoritmo SIMPLER

O algoritmo SIMPLER (SIMPLE Revised) é um algoritmo melhor que o SIMPLE pois a equação da continuidade é utilizada para se derivar uma equação para a pressão, em vez de uma equação para a correção da pressão. Assim o campo de pressão é encontrado sem a necessidade de utilizar uma equação de correção. A velocidade continua sendo encontrada através de correções como no método SIMPLE. A equação da quantidade de movimento pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
(A\rho v)_{k+1} v_{k+1} = (A\rho v)_k v_k \\
- (A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} \\
- (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \tag{5.5}
\end{aligned}$$

No método SIMPLER utiliza-se a definição de pseudo-velocidades (\hat{v}), dada por:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{k+1} = \frac{(A\rho v)_k}{(A\rho v)_{k+1}} (v)_k + \frac{(A\mu)_{k+1}}{(A\rho v)_{k+1}} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} \\
- \frac{(A\mu)_k}{(A\rho v)_{k+1}} \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} + \frac{(A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Dessa forma a velocidade no ponto $k + 1$ é dada por:

$$v_{k+1} = \hat{v}_{k+1} - \frac{(A\Delta x)_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\frac{1}{2}(\Delta x_{k+1} + \Delta x_k)} \tag{5.7}$$

5.2.1 Cálculo das Pseudo-Velocidades

Utilizando o método de interpolação UDS, e desprezando o termo fonte de quantidade de movimento, as pseudo-velocidades são dadas por:

5.2.1.1 Velocidades Positivas ($v_{k+\frac{1}{2}} \geq 0$):

Para velocidades positivas:

$$\hat{v}_{k+1} = \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

$$v_k = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

assim:

$$\hat{v}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{(A\rho v)_k}{(A\rho v)_{k+1}} v_{k-\frac{1}{2}} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{(A\rho v)_{k+1}} \frac{v_{k+\frac{3}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{k+1}} - \frac{(A\mu)_k}{(A\rho v)_{k+1}} \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} \quad (5.10)$$

5.2.1.2 Velocidades Negativas ($v_{k+\frac{1}{2}} < 0$):

Para velocidades negativas:

$$\hat{v}_k = \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

$$v_{k-1} = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

assim:

$$\hat{v}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{(A\rho v)_{k-1}}{(A\rho v)_k} v_{k-\frac{1}{2}} + \frac{(A\mu)_k}{(A\rho v)_k} \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta x_k} - \frac{(A\mu)_{k-1}}{(A\rho v)_k} \frac{v_{k-\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{3}{2}}}{\Delta x_{k-1}} \quad (5.13)$$

5.2.2 Conservação da Massa

Utilizando o método de interpolação UDS:

5.2.2.1 Velocidades Positivas ($v_{k+\frac{1}{2}} \geq 0$):

Para velocidades positivas:

$$v_{k+1} = v_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

$$\hat{v}_{k+1} = \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

$$v_k = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

$$\hat{v}_k = \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

assim:

$$v_{k+\frac{1}{2}} = \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} (p_{k+1} - p_k) \quad (5.18)$$

$$v_{k-\frac{1}{2}} = \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} - \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} (p_k - p_{k-1}) \quad (5.19)$$

Substituindo na equação da conservação da massa (Equação 5.2)

$$(A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_{k-\frac{1}{2}} = (AS_m \Delta x)_k \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} (p_{k+1} - p_k) \right] \\ - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\hat{v}_{k-\frac{1}{2}} - \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} (p_k - p_{k-1}) \right] = (AS_m \Delta x)_k \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} (p_{k+1} - p_k) \right] \\ - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} (p_k - p_{k-1}) \right] = (AS_m \Delta x)_k \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} p_{k+1} + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} p_k \\
& + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_k - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_{k-1} \\
& = (AS_m \Delta x)_k - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_{k-1} \\
& - \left[(A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \right] p_k \\
& + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} p_{k+1} \\
& = - (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Utilizando uma notação simplificada:

$$a_{pl} p_{k-1} - [a_{pl} + a_{pr}] p_k + a_{pr} p_{k+1} = - (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.25)$$

onde:

$$a_{pl} = (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} \quad (5.26)$$

$$a_{pr} = (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \quad (5.27)$$

$$a_{pc} = -a_{pl} - a_{pr} \quad (5.28)$$

5.2.2.2 Velocidades Negativas ($v_{k+\frac{1}{2}} < 0$):

Para velocidades negativas:

$$v_k = v_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

$$\hat{v}_k = \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.30)$$

$$v_{k-1} = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.31)$$

$$\hat{v}_{k-1} = \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.32)$$

assim:

$$v_{k+\frac{1}{2}} = \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} (p_k - p_{k-1}) \quad (5.33)$$

$$v_{k-\frac{1}{2}} = \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} - \frac{A_{k-\frac{3}{2}}}{(A\rho v)_{k-1}} (p_{k-1} - p_{k-2}) \quad (5.34)$$

Substituindo na equação da conservação da massa (Equação 5.2)

$$(A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_{k-\frac{1}{2}} = (AS_m \Delta x)_k \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} (p_k - p_{k-1}) \right] \\ - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\hat{v}_{k-\frac{1}{2}} - \frac{A_{k-\frac{3}{2}}}{(A\rho v)_{k-1}} (p_{k-1} - p_{k-2}) \right] \\ = (AS_m \Delta x)_k \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \left[\frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} (p_k - p_{k-1}) \right] \\ + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \left[\frac{A_{k-\frac{3}{2}}}{(A\rho v)_{k-1}} (p_{k-1} - p_{k-2}) \right] \\ = (AS_m \Delta x)_k - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned}
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_{k-1} \\
& + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{3}{2}}}{(A\rho v)_{k-1}} p_{k-1} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{3}{2}}}{(A\rho v)_{k-1}} p_{k-2} \\
& = (AS_m \Delta x)_k - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} + (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{3}{2}}}{(A\rho v)_{k-1}} p_{k-2} \\
& - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_{k-1} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{3}{2}}}{(A\rho v)_{k-1}} p_{k-1} \\
& + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_k \\
& = - (AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \hat{v}_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.39)
\end{aligned}$$

organizando os subíndices:

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} p_{k-1} \\
& - \left[(A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \right] p_k \\
& + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} p_{k+1} \\
& = - (AS_m \Delta x)_{k+1} + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \hat{v}_{k+\frac{3}{2}} - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Utilizando uma notação simplificada:

$$a_{pl} p_{k-1} - [a_{pl} + a_{pr}] p_k + a_{pr} p_{k+1} = - (AS_m \Delta x)_{k+1} + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \hat{v}_{k+\frac{3}{2}} - (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \hat{v}_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.41)$$

onde:

$$a_{pl} = (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} \quad (5.42)$$

$$a_{pr} = (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \quad (5.43)$$

$$a_{pc} = -a_{pl} - a_{pr} \quad (5.44)$$

5.2.3 Conservação da Quantidade de Movimento

Com as pressões calculadas com a equação da conservação da massa, utiliza-se a equação da quantidade de movimento para se calcular o campo de velocidades previsto (v^*). Utilizando a interpolação UDS:

5.2.3.1 Velocidades Positivas ($v_{k+\frac{1}{2}} \geq 0$):

Para velocidades positivas:

$$v_{k+1} = v_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.45)$$

$$v_k = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.46)$$

assim, substituindo na Equação 5.4:

$$\begin{aligned} & (A\rho v)_{k+1} v_{k+\frac{1}{2}}^* - (A\rho v)_k v_{k-\frac{1}{2}}^* = \\ & - A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1} - p_k) + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Rearranjando e desprezando o termo fonte:

$$\begin{aligned}
& \left[- (A\rho v)_k - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \right] v_{k-\frac{1}{2}}^* \\
& + \left[(A\rho v)_{k+1} + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{1}{2}}^* \\
& \quad \left[- \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{3}{2}}^* \\
& = \\
& \quad - A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1} - p_k) \quad (5.48)
\end{aligned}$$

Que pode ser simplificada como:

$$a_{vl} v_{k-\frac{1}{2}}^* + a_{vc} v_{k+\frac{1}{2}}^* + a_{vr} v_{k+\frac{3}{2}}^* = -A_{k+\frac{1}{2}} (p_{k+1} - p_k) \quad (5.49)$$

onde

$$a_{vl} = - (A\rho v)_k - \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (5.50)$$

$$a_{vc} = (A\rho v)_{k+1} + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (5.51)$$

$$a_{vr} = - \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (5.52)$$

5.2.3.2 Velocidades Negativas ($\vec{v}_k < 0$)

Para velocidades negativas:

$$v_{k+1} = v_{k+\frac{3}{2}} \quad (5.53)$$

$$v_k = v_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.54)$$

assim, substituindo na Equação 5.4:

$$\begin{aligned}
& (A\rho v)_{k+1} v_{k+\frac{3}{2}}^* - (A\rho v)_k v_{k+\frac{1}{2}}^* = \\
& -A_{k+\frac{1}{2}}(p_{k+1} - p_k) + (A\mu)_{k+1} \frac{v_{k+\frac{3}{2}}^* - v_{k+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_{k+1}} - (A\mu)_k \frac{v_{k+\frac{1}{2}}^* - v_{k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_k} + (A\Delta x S_u)_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Rearranjando:

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \right] v_{k-\frac{1}{2}}^* \\
& + \left[- (A\rho v)_k + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{1}{2}}^* \\
& \left[(A\rho v)_{k+1} - \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right] v_{k+\frac{3}{2}}^* \\
& = \\
& -A_{k+\frac{1}{2}}(p_{k+1} - p_k) \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Que pode ser simplificada como:

$$a_{vl} v_{k-\frac{1}{2}}^* + a_{vc} v_{k+\frac{1}{2}}^* + a_{vr} v_{k+\frac{3}{2}}^* = -A_{k+\frac{1}{2}}(p_{k+1} - p_k) \quad (5.57)$$

onde

$$a_{vl} = -\frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} \quad (5.58)$$

$$a_{vc} = - (A\rho v)_k + \frac{(A\mu)_k}{\Delta x_k} + \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (5.59)$$

$$a_{vr} = (A\rho v)_{k+1} - \frac{(A\mu)_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \quad (5.60)$$

5.2.4 Equação para a correção do campo de velocidades

Como dito anteriormente o metodo SIMPLE consegue prever de forma satisfatória o campo de velocidades, dessa forma, será utilizada a mesma equação corretora para velocidade. A correção do campo de velocidades, utilizando a interpolação UDS, é dado por (Equação 3.21):

5.2.4.1 Velocidades Positivas:

$$v_k = v_{k-\frac{1}{2}} \quad (5.61)$$

$$v_{k+\frac{1}{2}} = v_{k+\frac{1}{2}}^* - \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} [p'_{k+1} - p'_k] \quad (5.62)$$

5.2.4.2 Velocidades Negativas:

$$v_k = v_{k+\frac{1}{2}} \quad (5.63)$$

$$v_{k+\frac{1}{2}} = v_{k+\frac{1}{2}}^* - \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} [p'_k - p'_{k-1}] \quad (5.64)$$

A correção da pressão é dada pelas Equações 3.30 e 3.45:

5.2.4.3 Velocidades Positivas:

$$a_l p'_{k-1} + a_c p'_k + a_r p'_{k+1} = -(AS_m \Delta x)_k + (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} v_{k+1}^* - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_k^* \quad (5.65)$$

onde:

$$a_l = (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} \quad (5.66)$$

$$a_r = (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \quad (5.67)$$

$$a_c = -a_l - a_r \quad (5.68)$$

5.2.4.4 Velocidades Negativas:

$$a_l p'_{k-1} + a_c p'_k + a_r p'_{k+1} = - (AS_m \Delta x)_{k+1} + (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} v_{k+1}^* - (A\rho)_{k-\frac{1}{2}} v_k^* \quad (5.69)$$

onde:

$$a_l = (A\rho)_{k+\frac{1}{2}} \frac{A_{k-\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_k} \quad (5.70)$$

$$a_r = (A\rho)_{k+\frac{3}{2}} \frac{A_{k+\frac{1}{2}}}{(A\rho v)_{k+1}} \quad (5.71)$$

$$a_c = -a_l - a_r \quad (5.72)$$

5.3 Fluxograma do método SIMPLER

O fluxograma de funcionamento do método SIMPLER pode ser visto na Figura 4. Com os valores da iteração anterior calcula-se os valores de pseudo-velocidade, (Equações 5.10 e 5.13). Após isso resolve-se o campo de pressão com as Equações 5.25 e 5.41. Resolve-se a equação da quantidade de movimento para se calcular o campo de velocidades prevista (Equações 5.49 e 5.57). Por último se corrige o campo de velocidades utilizando as Equações 5.62, 5.64, 5.65 e 5.69.

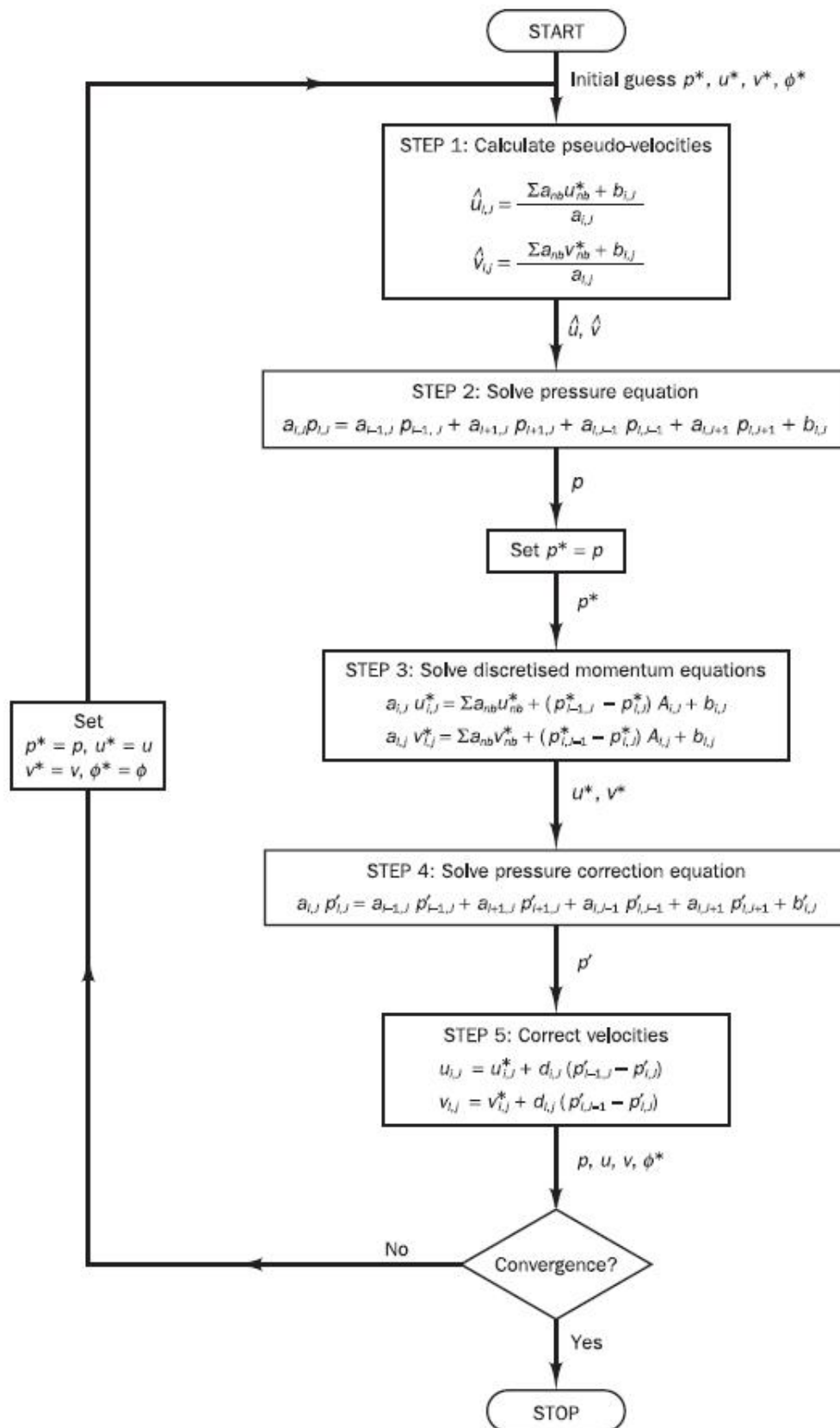


Figura 4: Fluxograma do método SIMPLER.

Referências

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: Pearson Education, 2007.