

# 選択専門科目 機 械 系

2020 大修

時間 13 : 30 ~ 16 : 30

## 注 意 事 項

1. 問題 1 から問題 5 より 4 問を選択して解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題ごとに別々の答案用紙に記入しなさい。  
各問題の解答は裏面も使用できますが、1 枚に収めること。
4. 各答案用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。  
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。  
氏名を書いてはいけません。

## 問題 1（材料力学）

下記の空欄①～⑬のそれぞれに当てはまる適切な数式または語句などを答えよ。

**問 1** 図 1 に示すように、動かない剛体壁に両端が固定された段付丸棒 ABC がある。棒の材料の縦弾性係数は  $E$ 、線膨張係数は  $\alpha$  であり、区間 AB の直径は  $d$  で長さは  $L$ 、区間 BC の直径は  $2d$  で長さは  $L$  である。棒の温度が  $\Delta T$  上昇した場合について考える。ただし、棒の自重により生じる応力や変形は無視せよ。

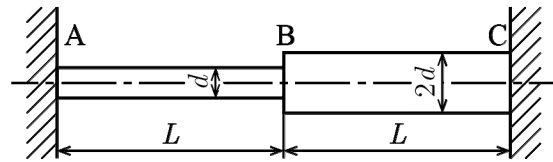


図 1 両端が剛体壁に固定された段付丸棒

- (1) 壁に固定されていない状態で温度が  $\Delta T$  上昇すれば、棒は自由に伸縮できる。このときの区間 AB の伸びは ①、区間 BC の伸びは ② で表される。
- (2) 壁に固定された状態で温度が  $\Delta T$  上昇すれば、棒の両端には壁から反力  $R$  が作用する。壁に固定されていない状態でこれと同じ反力  $R$  が作用する場合、区間 AB の縮みは ③、区間 BC の縮みは ④ で表される。
- (3) 前述した(1)と(2)の結果を用いると、反力  $R$  は ⑤ と求められる。
- (4) 段部 B は ⑥ 方向に ⑦ だけ変位する。

**問 2** 図 2 に示すように、一様長方形断面の片持ちはり（高さ  $h$ 、幅  $b$ 、長さ  $L$ 、縦弾性係数  $E$ ）に、単位長さあたり  $w(x) = w_0 x/L$  で表される分布荷重が作用している。ただし、はりの自重により生じる応力や変形は無視せよ。

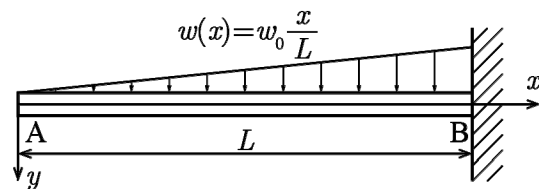


図 2 分布荷重を受ける片持ちはり

- (1) このはりの中立軸に関する断面二次モーメントは ⑧ である。
- (2) はりに生じるせん断力は ⑨、曲げモーメントは ⑩ で表される。
- (3) はりの上面（ $y = -h/2$  の面）に生じる曲げ応力は ⑪ で表され、その最大値は ⑫ で表される。
- (4) はりのたわみは ⑬ で表され、その最大値は ⑭ で表される。
- (5) はりの自由端 A に上向きの集中荷重を作用させて自由端 A のたわみを 0 にするとき、集中荷重の大きさは ⑮ である。

**問 3** 図 3 に示すように、一様な平面応力状態にある単位厚さの微小三角形 OAB に応力成分  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  が作用している。このとき斜面 AB に作用する応力成分  $\sigma$  と  $\tau$  は、三角形 OAB に関する力の釣り合いによって、次式のように表される。

（次ページに続く）



## 問題 2 (機械力学)

問 1 以下の設問に答えよ。

- (1) 図 1 の質量  $m$  の質点, 粘性減衰係数  $c$  のダンパ, 剛性係数  $k$  のばねからなる減衰 1 自由度振動系は不足減衰状態にあり,  $x$  は変位,  $f$  は励振力を表している。以下の(a)~(e)の各文において, 2 つの下線部が両方正しい場合には「正しい」と答え, 下線部に 1 つでも誤りがあれば「誤り」と答えて誤っている部分を訂正せよ。

- (a) 固有角振動数  $\omega_n$  は  $2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$  で表され, SI 単位系を用いて rad/s の単位で表される。

- (b) 減衰比  $\zeta$  は  $\frac{c}{\sqrt{2mk}}$  で表され,  $\zeta > 1$  である。

- (c) 減衰固有角振動数  $\omega_d$  は  $\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$  で表される。

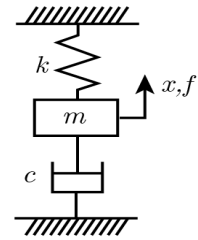


図 1

- (d) 初期変位  $x_0$ , 初期速度  $v_0$  に対する変位  $x$  の自由応答は  $t$  を時間として

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \text{ の形に書け, 式中の係数 } A \text{ は } \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}$$

$$\text{で, 位相角 } \phi \text{ は } \sin^{-1}\left\{\frac{x_0}{A}\right\} = \cos^{-1}\left\{\frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{A\omega_d}\right\} \text{ である。}$$

- (e)  $i$  を虚数単位,  $\omega$  を励振力の角振動数,  $F$  を複素励振力  $f(t) = Fe^{i\omega t}$  の振幅,  $X(i\omega)$  を複素応答  $x(t) = X(i\omega)e^{i\omega t}$  の複素振幅とすれば, 励振力  $f$  から応答  $x$  までの

$$\text{周波数応答関数 } \frac{X(i\omega)}{F} \text{ は } \frac{1}{-m\omega^2 + i c \omega - k} \text{ で表される。}$$

- (2) 以下の(f)~(j)の各々の記述について正しい場合には「正しい」と答え, 誤りの場合には「誤り」と答えて誤っている部分はどこか示せ。

- (f) 多くの場合, 振動系の周囲の流体は系に減衰を与えるが, 流体からの作用力が原因となって振動系が共振現象を起こす場合もある。
- (g) 応答に複数の振動モードの影響が見られる場合, 対象とする系を多モード振動系でモデル化する必要がある。
- (h) ラグランジュの運動方程式で用いられるラグランジアン  $L$  は, 系の運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $U$  の和で定義される。
- (i) 回転体の加速過程において危険速度を通過する必要がある場合には, できるだけゆっくりと回転数を上げて危険速度を通過させる必要がある。
- (j) 系の分数調波共振やリミットサイクル挙動を説明するためには, 非線形振動系モデルを用いる必要がある。

(次ページに続く)

**問 2** 図 2 に示すような，2 本の弾性軸と 2 つの剛体円板で構成され，下端が床面に固定された 2 自由度ねじり振動系を考える。下側の円板 1 の慣性モーメント，角変位をそれぞれ  $J_1$ ， $\theta_1$ ，上側の円板 2 の慣性モーメント，角変位をそれぞれ  $J_2$ ， $\theta_2$  とする。 $\theta_1$ ， $\theta_2$  は床面に固定した座標系で定めた角変位であり，静的平衡位置を原点とする。下側と上側の弾性軸のねじりばね定数をそれぞれ  $k_1$ ， $k_2$  とし，弾性軸の質量は無視する。円板 1，円板 2 をそれぞれ微小な角度だけねじり，静かに離れたところ，系は中心軸周りにねじり振動を始めた。このとき以下の設問に答えよ。

- (1) この自由振動の運動方程式を求めよ。
- (2) 角変位ベクトルを  $\mathbf{x}=(\theta_1, \theta_2)^T$  とおくと，運動方程式は  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\mathbf{x}=\mathbf{0}$  と表せる。行列  $\mathbf{M}$  と  $\mathbf{K}$  を求めよ。
- (3)  $\mathbf{x}=\mathbf{u}e^{i\omega t}$  と表したとき， $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$  である解が存在するための角振動数  $\omega$  に関する多項式を示せ。ここで  $\mathbf{u}$  は初期条件によって決まる定数ベクトル， $i$  は虚数単位， $t$  は時間とする。
- (4) この 2 自由度振動系の 2 つの固有角振動数を  $\omega_1$ ， $\omega_2$  ( $\omega_1<\omega_2$ ) とする。  
 $\mu=\frac{J_1}{J_2}=\frac{3}{4}$ ， $\Omega^2=\frac{k_1}{J_1}=\frac{k_2}{J_2}$  としたとき， $\omega_1^2=\alpha\Omega^2$ ， $\omega_2^2=\beta\Omega^2$  と表せる。定数  $\alpha$ ， $\beta$  を求めよ。
- (5) 上記(4)のパラメータのとき，固有角振動数  $\omega_1$ ， $\omega_2$  のそれぞれに対応する固有振動モード  $\boldsymbol{\phi}_1=(\phi_{11}, \phi_{12})^T$ ， $\boldsymbol{\phi}_2=(\phi_{21}, \phi_{22})^T$  を求めよ。ただし， $\phi_{11}=\phi_{21}=1$  とする。

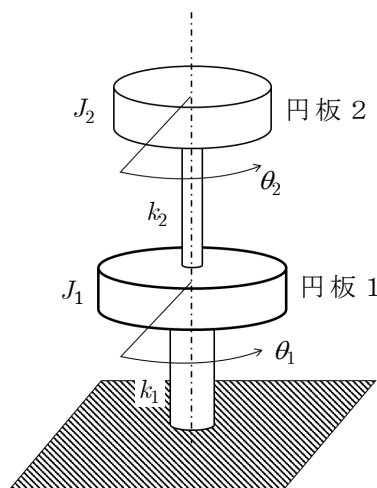


図 2

(問題 2 終わり)

### 問題 3 (熱力学)

**問 1** 以下の記述で、①～⑤については最も適切な用語を答え、⑥と⑦については最も適切なものを選択せよ。

火力発電に用いられる蒸気原動機サイクルは、主にボイラ、タービン、復水器、ポンプより構成されており、水蒸気が有する高温高圧のエネルギーを機械仕事に変換する熱機関である。低圧の液水はポンプで断熱圧縮されて圧縮液になり、ボイラで等圧的に加熱される。( ① ) 液の状態から蒸発が始まり、温度一定で気体と液体が共存した ( ② ) 蒸気を経て、水の蒸発が完了した瞬間に ( ③ ) 蒸気になる。さらに加熱され ( ④ ) 蒸気になった後タービンに入る。タービンの中で蒸気が膨張し出口では ( ⑤ ) 蒸気になる。タービン入口での水蒸気温度を上げるほど熱効率は高くなるが、材料の耐熱性の問題から、現状のタービン入口温度は (⑥ : 600 K, 900 K, 1200 K, 1500 K, 1800 K) 程度が限界である。また、タービン出口での乾き度は (⑦ : 8～10%, 28～30%, 48～50%, 68～70%, 88～90%) の範囲におさまるように設計される。

**問 2** 各文の括弧内の用語から最も適切なものを選択せよ。

- (1) 気体定数, 潜熱, 顕熱, エンタルピーのうち, 比熱と同じ単位を持つものは (気体定数, 潜熱, 顕熱, エンタルピー) である。
- (2) 単原子分子気体, 二原子分子気体, 高分子, 金属のうち, 比熱比が一番大きいものは (単原子分子気体, 二原子分子気体, 高分子, 金属) である。
- (3) 理想気体が等積変化をする際のポリトロプ指数は (0, 1, 比熱比  $\kappa$ ,  $\infty$ ) である。
- (4) 絞り弁を通過する気体の, 絞り弁前後の (エントロピー, エンタルピー, 内部エネルギー, 自由エネルギー) は一定とみなすことができる。
- (5) 容器 A に理想気体を入れ, これを真空の容器と管で繋いで自由膨張させると, 容器 A の圧力が下がり, 気体の温度は (上がる, 下がる, 変わらない)。

**問 3** 外気温が  $3^{\circ}\text{C}$  のとき, 電熱ヒーターを用いて室内を  $23^{\circ}\text{C}$  に保つ暖房を行っている。このとき, 電熱ヒーターの消費電力は  $3600\text{ W}$  であった。以下の問いに答えよ。

- (1) 同じ効果の暖房を成績係数 3 のヒートポンプで行った場合の消費電力  $L$  を答えよ。
- (2) 同じ効果の暖房を可逆ヒートポンプで行った場合の消費電力  $L_R$  を答えよ。
- (3) この条件における, 電熱ヒーターの暖房の成績係数  $\varepsilon_0$  と可逆ヒートポンプの暖房の成績係数  $\varepsilon_R$  を求めよ。

(次ページに続く)

問 4 理想気体に関し、①～⑥にあてはまる答えを「記号群」の記号を用いて書け。

「記号群」  $R$  (気体定数  $[\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$ ),  $\kappa$  (比熱比  $[-]$ ),  $T$  (温度  $[\text{K}]$ ),  $p$  (圧力  $[\text{Pa}]$ ),  $V$  (体積  $[\text{m}^3]$ ),  $m$  (質量  $[\text{kg}]$ ),  $k_B$  (ボルツマン定数  $[\text{J}/\text{K}]$ ),  $N_A$  (アボガドロ数  $[-]$ ),  $\Delta T$  (変化後の温度 - 変化前の温度  $[\text{K}]$ )。

- (1) 単原子分子気体の場合、分子 1 個の並進運動 1 自由度あたりの平均エネルギーは ( ① )  $[\text{J}]$ であり、気体 1 mol がもつ内部エネルギーは ( ② )  $[\text{J}/\text{mol}]$ である。
- (2) 単位質量あたりの定圧比熱  $c_p$  と定積比熱  $c_v$  は、それぞれ ( ③ ), ( ④ ) と表される。
- (3) シリンダとピストンからなる密閉容器に理想気体が保持されており、これを系とする。断熱条件下で内部の気体が準静的に膨張したとき、( ⑤ ) は一定であり、系が外界に対してなす仕事は ( ⑥ )  $[\text{J}]$ になる。必要であれば  $c_p$ ,  $c_v$  の記号を用いてもよい。

問 5 図 1 (a)に示すガスサイクルについて以下の問いに答えよ。作動ガスは単位質量の理想気体とし、 $p$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $s$ ,  $c_p$ ,  $c_v$  は、それぞれ圧力、比体積、絶対温度、比エントロピー、定圧比熱、定積比熱であり、 $q_{\text{in}}$ ,  $q_{\text{out}}$  は当該サイクルにおける受熱量と放熱量を表す。なお、図中の数字は各行程の始状態または終状態を意味し、図 1 (a)中の行程 1-2 と行程 3-4 は断熱変化を表す。以下の問いにおける記号の添え字は、各状態に対応するものとする。

- (1) 図 1 (a)に示したサイクルの名称を答えよ。また、当該サイクルの  $T$ - $s$  線図として正しいものを図 1 (b)～(e)から選べ。
- (2) 当該サイクルの受熱量  $q_{\text{in}}$  を  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $c_p$ ,  $c_v$  のうち必要なものを用いて表せ。
- (3) 当該サイクルの熱効率  $\eta$  を  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  を用いて表せ。

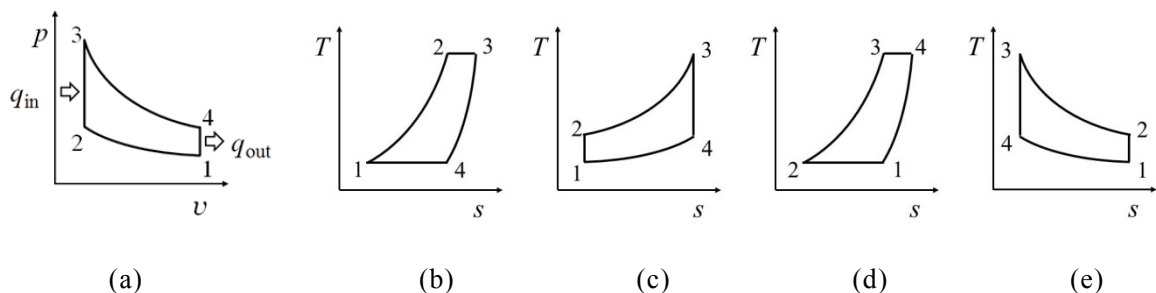


図 1

(問題 3 終わり)

## 問題 4 (流体力学)

**問 1** 一般に複素速度ポテンシャルは,  $W(z) = \phi(z) + i\psi(z)$  として表される。ここで,  $i$  は虚数単位であり, 実部の  $\phi(z)$  は速度ポテンシャル, 虚部の  $\psi(z)$  は流れ関数を表している。以下に示す二次元複素速度ポテンシャルを考える。

$$W(z) = z - 4i \ln(z)$$

ここで,  $z = x + iy = re^{i\theta}$  である。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 与えられた複素速度ポテンシャルにおいて, 速度ポテンシャル  $\phi(r, \theta)$  と流れ関数  $\psi(r, \theta)$  を示せ。
- (2) 任意の位置における半径方向と周方向の速度成分  $u_r$  と  $u_\theta$  を求めよ。  
半径方向速度成分および周方向速度成分は速度ポテンシャルから以下のように表される。
$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, \theta), \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi(r, \theta)$$
- (3)  $x$  軸上の 3 点  $x = -2, 1, 4$  における速度ベクトルを,  $x-y$  平面上に各点を始点として図示せよ。ただし, 各点での半径方向速度成分と周方向速度成分も, その大きさとともに示すこと。
- (4) この流れにおいて, よどみ点 ( $u_r = 0, u_\theta = 0$  を満たす点) の位置を求めよ。なお, よどみ点が存在しない場合には“無”と答えよ。
- (5)  $y$  軸上 ( $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ ) の 6 点  $y = -4, -2, -1, 1, 2, 8$  における速度ベクトルを, 上問(3)と同じように  $x-y$  平面上に各点を始点として図示せよ。
- (6) 与えられた複素速度ポテンシャルは, 二つのポテンシャル流れの重ね合わせを表している。それぞれどのような流れか答えよ。

**問 2** 図のように, 速度  $U_\infty$  の一様流中に流れと平行に置かれた平板に沿う二次元定常流れを考える。流体の密度  $\rho$  および粘性係数は一定とし, 動粘性係数を  $\nu$  とする。

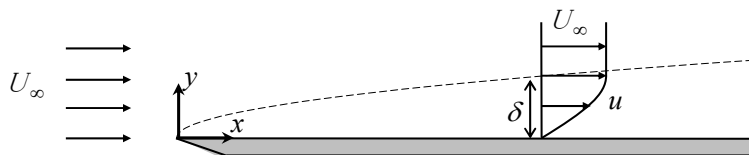


図 一様流中の平板上の境界層

この場合の連続の式とナビエ・ストークス方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

(次ページに続く)



レイノルズ数が大きい場合には、粘性の影響により流れが減速する領域は壁面近くの薄い層となり、その外側は非粘性流れとみなせる。この薄い層を境界層と呼び、式(i)から、次式が近似的に成り立つ。

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{ii})$$

境界層厚さを  $\delta(=\delta(x))$  とし、境界層外縁  $y=\delta$  において  $u=U_\infty$  と近似することとし、以下の問いに答えよ。

(1) 式(i) から式(ii) が導かれる過程で、圧力勾配項と粘性項に関してどのような近似が用いられたかを、理由とともに述べよ。

(2) 次の文章中の ( ① ), ( ② ) に適切な数式, ( ③ ) に適切な語句を答えよ。

式(ii) を  $y=0$  から  $\delta(x)$  まで積分し、壁面で速度ゼロ、および境界層外縁でせん断応力ゼロの条件を用いると次式が導かれる。

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + [uv]_{y=\delta(x)} = -\nu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (\text{iii})$$

一方、連続の式と壁面で速度ゼロの条件より次式が得られる。

$$v = - \int_0^y ( \text{①} ) dy \quad (\text{iv})$$

よって式 (iii), (iv) から、

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x} ( \text{②} ) dy = -\nu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (\text{v})$$

となる。この式をさらに変形して次式を得る。

$$U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} = \nu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (\text{vi})$$

ただし、 $\theta = \int_0^{\delta(x)} \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy$  である。ここで  $\theta$  は ( ③ ) と呼ばれる。

(3) 境界層内の速度分布を次のような相似分布で表すこととする。

$$u(x, y) = U_\infty f(\eta) \quad (\text{vii})$$

ただし、 $\eta = y/\delta(x)$  である。この  $f(\eta)$  にはいろいろな関数形が可能であるが、その一つとして次の二次関数を考える。

$$f(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c \quad (\text{viii})$$

速度  $u$  についての境界条件を考慮して上式の係数  $a, b, c$  を決定せよ。

(4) 式(vii) の  $f(\eta)$  として一次関数  $f(\eta) = \eta$  とした場合、式(vi) を用いて  $\delta(x)$  を求めよ。また局所壁面摩擦応力  $\tau_w$  を求めよ。これらの解答は  $U_\infty, \nu, \rho, x$  の中から適当な記号を用いて表すこと。さらに局所壁面摩擦係数  $c_f$  を  $Re_x$  の関数として表せ。ここで  $Re_x$  は平板先端からの距離  $x$  に基づくレイノルズ数である。

(問題 4 終わり)

## 問題 5 (工業数学)

問 1 以下の各問いに答えよ。

(1)  $y(1+y) + 2x \frac{dy}{dx} = 0$  の一般解を求めよ。

(2)  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$  において,

$x=0$  のとき  $y=3$ ,  $\frac{dy}{dx}=1$  として, 関数  $y(x)$  を求めよ。

問 2 以下の各問いに答えよ。

(1) 3次元空間におけるベクトル場  $\mathbf{A} = (xy^2, 2y^2z, 3yz^2)$ , スカラー場  $f = xy^2z$  のとき, 以下を求めよ。なお,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は  $x, y, z$  軸方向の単位ベクトルであり,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  と定義される。

(i)  $\nabla \cdot \mathbf{A}$

(ii)  $\mathbf{A} \cdot \nabla f$

(iii)  $\nabla \cdot (\nabla f)$

(2) 次の線積分を求めよ。

$$\int_C (x dx + 2y dy + z^2 dz)$$

ただし, 曲線  $C$  は次式で表される。

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

問 3 以下の各問いに答えよ。

(1)  $z^4 = -1$  をみたす複素数  $z$  を全て求めよ。

(2) 実関数の積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$  の値を求めよ。

(次ページに続く)

**問 4** 以下の文章において空欄に入る適切な値を求めよ。

周期関数  $f(x)$  は、その周期を  $2L$  とすると、以下のフーリエ級数に展開できる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

ここで、 $a_0, a_n, b_n$  は、関数  $f(x)$  のフーリエ係数と呼ばれる。

(1) 以下に示す周期  $2L = 2$  の周期関数  $p(x)$  を考える。

$$p(x) = x \quad (-1 < x \leq 1)$$

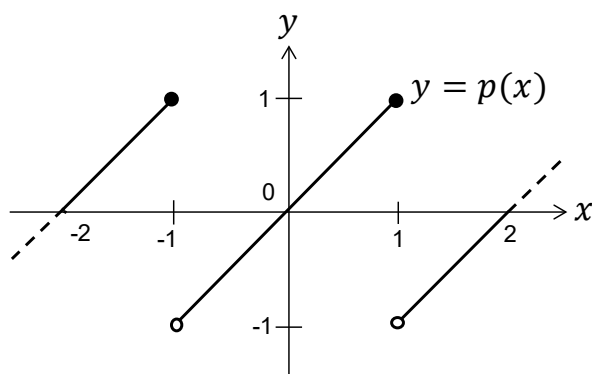


図 周期関数

この関数のフーリエ係数は、以下のように求められる。

$a_0 =$	<input type="text" value="①"/>	
$a_1 =$	<input type="text" value="②"/>	$b_1 =$ <input type="text" value="③"/>
$a_2 =$	<input type="text" value="④"/>	$b_2 =$ <input type="text" value="⑤"/>
$a_3 =$	<input type="text" value="⑥"/>	$b_3 =$ <input type="text" value="⑦"/>

(2) 上記①～⑦のフーリエ係数を用いて関数  $q(x)$  を以下のように定義する。

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 \{ a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) \}$$

このとき、

$$\int_{-1}^1 \{q(x)\}^2 dx = \quad \text{⑧}$$

と求められる。

(問題 5 終わり)