# 【数理逻辑】谓词逻辑(个体词 | 个体域 | 谓词 | 全称量词 | 存在量词 | 谓词公式 | 习题 )



### 文章目录

- 一. 谓词逻辑相关概念
  - 1. 个体词
  - 2. 谓词
  - 3. 量词
    - (1)全称量词
    - (2)存在量词
- 二. 命题符号化 技巧
  - 1. 两个基本公式 (重要)
    - (1)有性质 F的个体都有性质 G
    - (2) 存在既有性质 F 又有性质 G 的个体
  - 2. 命题符号化技巧
    - (1)命题符号化方法
    - (2)解题技巧
    - (3) 当且仅当 谓词逻辑方法
  - 3. 谓词公式定义
- 三. 命题符号化 习题
  - 1. 简单量词 示例
    - (1)全称量词示例
    - (2)全称量词示例2
    - (3)存在量词示例
  - 2. 量词位置不同 导致的符号化 结果不同
  - 3. 带 或者 的 命题符号化
    - (1)带或者的命题符号化
    - (2)带或者的命题示例2
  - 4. 复杂命题 示例
    - (1)复杂命题的符号化
    - (2)个体域变化情况的两种分析
    - (3) 当且仅当 转化问题
    - (4)使用全称量词和存在量词两种形式进行命题符号化

# 一. 谓词逻辑相关概念

### 1. 个体词



### 个体 简介:

- **1.个体 来源:**一阶谓词逻辑 中,**将 原子命题 分成 主语 和 谓语**,这里便有了 **个体** 词 与 谓词 的 概念;
- 2.个体 概念:将 独立存在的 客体,具体事物,抽象事物(概念)称为 个体 或 个体 词;
- 3.个体 变元:使用 a, b, c 表示个体变元;
- 4.个体 常元:使用 x, y, z 表示个体常元;
- 5.个体域 概念: 个体 变元 的取值 称为 个体域;
- 6.个体域 取值: 个体域 可以 取值 有穷集合 或 无穷集合;
- 7.全总个体域:宇宙间一切事物 组成的 个体域 称为 全总个体域;

命题是陈述句,其中陈述句由主语,谓语,宾语组成,主语宾语就是个体,谓语就是谓词;

谓词逻辑 由 个体,谓词,量词组成;

# 2. 谓词

### 谓词 简介:

- 1.谓词概念: 将表示 **个体性质** 或 彼此之间关系 的 词 称为 谓词;
- 2.谓词表示:使用 F,G,H 表示谓词 常元 或 变元;
- 3.个体性质谓词表示: F(x)表示x具有性质F,如F(x)表示x是黑的;
- 4.关系性质谓词表示示例: $F\left(x,y\right)$  表示 x,y 具有 关系 F , 如:FG(x,y) 表示 x 大于 y ;

# 3. 量词

### (1)全称量词

全称量词: Any 中的 A 上下颠倒过来;

- 1.语言对应: 对应 自然语言 中 "任意", "所有的", "每一个" 等;
- 2.表示方式:使用符号 ∀ 表示;
- 3.解读1: ∀x 表示个体域中 所有的 x;
- 4.解读2: $\forall x(F\left(x\right))$  表示,个体域中所有的 x 都具有性质 F ;





# (2)存在量词

**存在量词**: Exist 中的 E 左右翻转后倒过来;

• 1.语言对应: 对应 自然语言 中 "有一个","存在着","有的"等;

• 2.表示方式:使用符号 ∃ 表示;

• 3.解读1: ∃x 表示个体域中 存在着的 x;

• 4.解读2: ∃x(F(x))表示,个体域中 存在 x 具有性质 F;

- 二. 命题符号化 技巧
- 1. 两个基本公式(重要)
- (1)有性质 F 的个体 都有性质 G

个体域中 所有 有性质 F 的 个体 , 都 具有 性质 G ;

使用谓词逻辑如下表示:

- ① F(x): x 具有性质 F; ② G(x): x 具有性质 G;
- ③ 命题符号化为:

 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 

(2) 存在既有性质 F 又有性质 G 的个体

个体域 中 存在有性质 F 同时有性质 G 的个体;

使用谓词逻辑如下表示:

① F(x): x 具有性质 F ; ② G(x): x 具有性质 G ; ③ 命题符号化为:

 $\exists x (F(x) \land G(x))$ 



# 2. 命题符号化技巧

### (1)命题符号化方法

### 命题符号化方法:

- 1.写出个体域: 先把 个体域 写明白, 即 表明 ∀x, 代表 所有的什么事物, 如果是一切事物, 那么必须注明是全总个体域;
- 2.写出性质个关系 谓词:使用 F,G,H 表明 个体的 性质 或 关系;
- 3.命题符号:将 命题符号化 结果 注明,最好带上详细的解释;

# (2)解题技巧

由 全称量词 或 存在量词 个体词 谓词 组合成的 谓词逻辑,也可以当做 一个 谓词逻辑 F(x) 或 G(x,y) 部件 再次进行组合;

如下 谓词逻辑:

$$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$$

其中  $\forall y(G(y) \to H(x,y))$  是已经组合过的 谓词逻辑,现在将其当做一个 性质,或者 谓词逻辑部件 A,再次组合成 更加 复杂 和 庞大的 谓词逻辑,得到如下:

$$\forall x(F(x) \rightarrow A)$$

因此,上述 谓词逻辑 展开后,就得到了最开始的

$$\forall x (F\left(x\right) \rightarrow \forall y (G(y) \rightarrow H(x,y)))$$

# (3) 当且仅当 谓词逻辑方法

当且仅当 谓词逻辑 符号化方法:

当且仅当 谓词逻辑 符号化:

1> 第三变量:一定要引入 第三方 的变量;

- 2> 性质 或 关系 正向 推演: 一般模式是
- ① 对于所有的 x 与 存在的一个 y 有 某种性质或关系,
- ② 对于所有的 x 和 所有的 z 存在某种性质或关系;
- ③ y 与 z 具有相等的属性;



- 3> 性质 或 关系 反向推演: 一般模式是:
- ① 对于所有的 x 与 存在的一个 y 有 某种性质或关系,
- ② y 与 所有的 z 有另一种性质 或 关系,一般是相等 或 不等 关系,
- ③ 可以推出 x 和 z 有 或者 没有 某种 性质 或 关系;

# 3. 谓词公式定义

#### 谓词公式定义:

- 1.原始谓词公式:n元 谓词 是一个 谓词公式;
- 2.否定式:如果 A 是谓词公式,那么  $(\neg A)$  也是谓词公式;
- 3.两个谓词公式 组合: 如果 A, B 是谓词公式, 那么  $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ B),  $(A \leftrightarrow B)$  四种联结词 组合成的符号, 也是谓词公式;
- 4.谓词公式 与 量词 组合:如果 A 是谓词公式,且含有 个体变元x,且 x 没有被量 词限制,那么 $\forall x A(x)$ ,或 $\exists x A(x)$ 也是谓词公式;
- 5.有限次重复:有限次对谓词公式使用1.~4.方法进行处理得到的也是谓词公 式:

#### 谓词公式拼装:

- 1> 经过若干次 拼装 组合好 的谓词公式, 或者 刚写出的 单个 谓词公式, 可以 作 **为原始 谓词公式** S;
- 2> 在 原始谓词公式 S 前 加上  $\neg$  也是谓词公式,注意外部带上括号;(组合后 该 谓词公式可以当做原始谓词公式 S 使用)
- 3> 使用 联结词 将 两个 原始谓词公式 S 连接起来,整个组合 也是谓词公式;( 组合后 该谓词公式可以当做原始谓词公式 S 使用)
- 4> 在 原始谓词公式 S 前 加上 量词约束  $\forall x A(x)$ , 或  $\exists x A(x)$ , 组合后 也是 谓 词公式; (组合后该谓词公式可以当做原始谓词公式S使用)(注意前提:加入 量词约束的 个体词 不能被 已有量词约束)
- 4> 步骤 的 注意点:
- ① 前提:该谓词中的个体,没有被量词约束,如果有不能重复约束;

# 三. 命题符号化 习题

- 1. 简单量词 示例
- (1)全称量词示例

题目:



2022/10/24 下午5:51 (9条消息) 【数理逻辑】谓词逻辑 ( 个体词 | 个体域 | 谓词 | 全称量词 | 存在量词 | 谓词公式 | 习题 )\_韩曙亮的博客-CSDN博...

- 1.要求: <del>命题符号化</del>:
- 2.命题内容: 人都吃饭;
- ① 个体域:全总个体域;
- ② 相关性质 或 关系 谓词 定义:
  - 1>F(x):x是人;
  - 2> G(x): x 吃饭;
- ③ 命题符号化:

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

### (2)全称量词示例2

题目:

- 1.要求: 命题符号化:
- 2.命题内容:某班级所有学生都学过微积分;
- ① 个体域:全总个体域;
- ② 相关性质 或 关系 谓词 定义:
  - 1> F(x): x 是某班级的学生;
  - 2> G(x): x **学过微积分**;
- ③ 命题符号化:

$$\forall x (F\left(x\right) \rightarrow G(x))$$

# (3)存在量词示例

题目:

- 1.要求: 命题符号化:
- 2.命题内容:有人喜欢吃糖;

解答:

- ① 个体域:全总个体域;
- ② 相关性质 或 关系 谓词 定义:
  - 1> F(x): x 是人;
  - 2> G(x): x **喜欢吃糖**;





③ 命题符号化:

 $\exists x (F(x) \land G(x))$ 

另外一种符号化方法:将糖也堪称一个个体:

- ① 个体域:全总个体域
- ② 谓词:性质/关系 定义:
  - F(x)表示 x 是人
  - G(y) 表示 y 是糖
  - H(x,y) 表示 x 喜欢吃 y
- ③ 命题符号化:

 $\exists x (F(x) \land G(x) \land H(x,y))$ 

# 2. 量词位置不同 导致的符号化 结果不同

题目:

- 1.要求: 命题符号化:
- 2.命题内容: 男人都比女人跑得快;

1> 方式 一:

- ① 个体域:全总个体域;
- ② 相关性质 或 关系 谓词 定义:
  - 1> F(x): x 是男人;
  - 2> G(y): y **是女人**;
  - 3> H(x,y): x 比 y 跑得快;
- ③ 命题符号化:

 $\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (G(y) \rightarrow H(x,y)))$ 

该命题符号有等价形式:

 $\forall x \forall y (F(x) \land G(y) \rightarrow H(x,y)))$ 



### 符号化分析:

① 将  $\forall y(G(y) \to H(x,y))$  独立分析,首先 整个 命题都处于  $\forall x$  作用域中,这里 有如下属性,所有的女人,所有的男人比女人跑的快;将其看做一个独立的命题  $\Delta$ 

② 下面分析  $\forall x(F\left(x\right)\to A)$  , 对于所有的男人 来说 , 只要是男人 , 都有 命题 A 的性质 ;

#### 2> 方式 二:

- ① 个体域:全总个体域;
- ② 相关性质 或 关系 谓词 定义:
  - 1>F(x):x 是男人;
  - 2> G(x): x **是女人**;
  - 3> H(x,y): x 比 y 跑得快;
- ③ 命题符号化:

$$\forall x \forall y (F(x) \land G(x) \rightarrow H(x,y))$$

这个命题是假命题,但是不妨碍我们将其符号化;

#### 符号化分析:

将  $F(x) \wedge G(x)$  看做一个整体 A, 即 x 是男人,y 是女人,针对所有的 x,y 有性质 A, 那么 x,y 同时又有性质 或 关系 H(x,y);

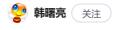
- 3. 带 或者 的 命题符号化
- (1)带 或者的 命题符号化

#### 题目:

- 1.要求: 命题符号化:
- 2.命题内容:某班级中的每个学生都有一台电脑 或者 他有一个拥有电脑的朋友;

# 解答:

- ① 个体域:某班级的所有学生
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1>F(x): x 有一台电脑;
  - 2> G(x,y): x 和 y 是朋友;
- ③ 命题符号:



### $\forall x(F(x) \vee \exists y(F(y) \wedge G(x,y)))$

#### 解析:

1> 个体域定义: 个体域 定为 "某班级中的所有学生";

- 2> 最外层量词确定: 其都具有性质 "某班级中的每个学生都有一台电脑 或者 他有一个拥有电脑的朋友",因此 最外层必须是 全称量词  $\forall x(A(x))$ ,下面开始分析其中的 A(x);
- 3> 两个性质之间是 或者 的关系:两个性质使用  $\lor$  进行连接,分别是 B(x) ("有一台电脑") 和 C(x) ("有一个拥有电脑的朋友"),当前符号: $\forall x(B(x) \land C(x))$  ;
- **4> "有一台电脑":表示成** F(x); **当前符号:**  $\forall x(F(x) \land C(x))$ ;
- 5> "有一个有电脑的朋友"(这个比较复杂):
- ① 首先 要虚构 一个 学生 y, 这个 y 代表那个有电脑的朋友;
- ② **再确定量词: "有一个" 显然是存在量词**  $\exists y$  (如果用全称量词的话,那班级所有人都是他的朋友);
- ③ 对这个 虚构的 y 的要求是, y 同时满足两个条件, "a. 有电脑" "b. x,y 是朋友", 因此使用  $\wedge$  将其连接起来, 最终表示成  $F(y) \wedge G(x,y)$ ;
- ④ 本句的符号为:  $\exists y(F(y) \land G(x,y))$ ;
- 6> 最终符号为:  $\forall x(F(x) \vee \exists y(F(y) \wedge G(x,y)))$ ;
- (2) 带 或者的 命题 示例 2

### 命题符号化:

某班级中 每个 学生 或者 去过 北京, 或者去过 上海

解答:

#### 命题符号化 结果:

- ① 个体域:某班级全体学生
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1> F(x): x 去过北京;
  - 2> G(x): x 去过上海;
- ③ 命题符号:

 $\forall x (F(x) \lor G(x))$ 

解析:

1> 个体域 量词 分析: ∀x 指的是 某班级全





 $2>F(x)\vee G(x)$  解读:表示x 去过北京或者去过上海;

3>  $\forall x(F(x) \lor G(x))$  解读:所有的学生,要么去过北京,要么去过上海,二者必选其一,且 只能选其一;

### 4. 复杂命题 示例

# (1)复杂命题的符号化

#### 题目:

- 1.要求: 命题符号化:
- 2.命题内容:  $\frac{\mathbf{prec}}{\mathbf{prec}} \mathbf{r}$ , 对所有不同的两个学生  $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{z}$  来说, 如果  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  是 好朋友, 并且  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{z}$  也是好朋友, 那么  $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{z}$  不是好朋友;

#### 题目分析:

- 1.个体域分析:命题中涉及到的个体都是学生,那么将个体域设置为全体学生;
- 2.性质和关系分析:
  - 。 ① "对所有不同的两个学生":涉及到了 两个不同的学生, 因此需要 定义一个 谓词, 表示 两个学生是 不同的 或 相同的;
  - $\circ$  ② "x 与 y 是好朋友": 涉及到 两个 学生 是 或者 不是 好朋友, 因此 这里需要 定义一个谓词,表示 两个学生 是 或者 不是 好朋友;
- 3.主题框架分析:
  - 。 ① 量词约束:" 存在一个学生 x, 对所有不同的两个学生 y 和 z 来说 " 可以写出 最外围 的 量词约束,∃x∀y∀z,然后在对 x,y,z 之间的关系进行描述;
  - 。 ② "如果 x 与 y 是好朋友, 并且 x 和 z 也是好朋友, 那么 y 和 z 不是好朋友;
    - ":这个命题 可以用 蕴涵 联结词 进行表示;
      - a> 命题 A: "如果 x 与 y 是好朋友, 并且 x 和 z 也是好朋友",
      - b> 命题 B: "那么 y 和 z 不是好朋友";
      - $\blacksquare$  c> 命题 A, B 的关系:  $A \to B$ ;

# 解答:

#### 命题符号化 结果:

- ① 个体域:全体学生
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1> F(x,y): x 和 y 是好朋友;
- ③ 命题符号:



### 解析:

1> 量词分析: ∃x∀y∀z 对应了 题目中的 "存在一个学生 x, 对所有不同的两个学 y 和 z 来说"

2>  $(\neg G(y,z) \land F(x,y) \land F(x,z))$  分析: isopring "不同的两个学生 y 和 z 来说,如果 x 与 y 是好朋友,并且 x 和 z 也是好朋友"同时满足 这 三个条件;

 $3 > \neg F(y,z)$  分析:对应了结果 "那么 y 和 z 不是好朋友";

4> 同时满足 3 条件 然后退出结果 :  $(\neg G(y,z) \land F(x,y) \land F(x,z)) \to \neg F(y,z)$  ;

5> 加上量词约束 得到最终结果:  $\exists x \forall y \forall z ((\neg G(y,z) \land F(x,y) \land F(x,z)) \rightarrow \neg F(y,z))$ ;

# (2) 个体域变化 情况 的 两种分析

### 题目:

- 1.要求: 命题符号化:
- 2.命题内容: 某班级中 有些学生去过 北京

### 解答:

(1) 方法 一 (个体域 为 某班级全体学生):

# 命题符号化 结果:

- ① 个体域:某班级全体学生
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1> F(x): x 去过北京;
- ③ 命题符号:

 $\exists x(F(x))$ 

解析:直接写出即可,有些学生,使用 存在量词  $\exists x$  表示, $\exists x(F(x))$  表示 有些学生去过  $\imath$  北京;





### 命题符号化 结果:

- ① 个体域:全总个体域
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1> F(x): x 去过北京;
  - 2> G(x): x 是某班级的学生;
- ③ 命题符号:

 $\exists x (F(x) \land G(x))$ 

解析:  $\exists x(F(x) \land G(x))$ 

2>  $F\left(x\right)\wedge G(x)$  : 可以 解读 为 存在某个事物,即是某班级的学生,有去过 北京 ;

3> 完整解读:  $\exists x(F\left(x\right)\wedge G(x))$  , 可以 解读 为 存在某个事物 , 即是某班级的学 生 , 有去过 北京 ;

# (3) 当且仅当 转化问题

### 题目:

- 1.要求: 命题符号化:
- 2.命题内容:每个人有且只有一个好朋友

### 解答:

### 命题符号化 结果:

- ① 个体域:所有的人
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1> F(x,y): x,y 是好朋友;
  - 2>G(x,y):x,y 相等;
- ③ 命题符号 一:

 $\forall x \exists y \forall z ((F(x,y) \land \neg G(y,z)) \rightarrow \neg F(x,z))$ 

解析:每个人仅有一个好朋友,此处 x,y 已经是好朋友了,如果出现一个 z 与 y

不相等,那么 x, z 一定不是好朋友;

量词分析:





对于所有的 x , 存在一个 y 是他的朋友 , 所有的 z 与 x 是好朋友 , 那么 这个 z 就 是 y ;

### ④ 命题符号二:

 $orall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} orall \mathbf{z} ((\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \wedge \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{z})) 
ightarrow \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{z}))$ 

解析:每个人仅有一个好朋友,如果 x,y 是好朋友, x,z 是好朋友, 那么 y,z 肯

定相等; 量词分析:

对于所有的 x, 存在一个 y 是他的朋友, 所有的 z 与 x 是好朋友, 那么 这个 z 就

是y;

当且仅当 谓词逻辑 符号化方法:

当且仅当 谓词逻辑 符号化:

1> 第三变量:一定要引入第三方的变量;

- 2> 性质 或 关系 正向 推演: 一般模式是
- ① 对于所有的 x 与 存在的一个 y 有 某种性质或关系,
- ② 对于所有的 x 和 所有的 z 存在某种性质或关系;
- ③ y 与 z 具有相等的属性;
- 3> 性质 或 关系 反向推演: 一般模式是:
- ① 对于所有的 x 与 存在的一个 y 有 某种性质或关系,
- ② y 与 所有的 z 有另一种性质 或 关系,一般是相等 或 不等 关系,
- ③ 可以推出 x 和 z 有 或者 没有 某种 性质 或 关系;

(4)使用 全称量词 和 存在量词 两种形式 进行命题符号化

题目:

• 1.要求: 命题符号化:

• 2.命题内容:并非所有的动物都是猫

解答:

命题符号化 结果 (全程量词): 该方式 属于 正面解答;

- ① 个体域: 全总个体域 宇宙间一切事物
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1> F(x): x 是 动物;
  - 2> G(x): x 是猫;
- ③ 命题符号 一:



解析:命题是"并非所有的动物都是猫",这里我们开始拆解命题:

1> 提取否定: 把并非提取出来 为 ¬, 否定的命题是"并非所有的动物都是猫";

2> 写出"并非所有的动物都是猫"命题:即凡是具有动物性质的事物,都具有是

猫 的性质, 这里符号化为  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ ;

3>最终结果:  $\neg(\forall x(F(x) \rightarrow G(x)))$ ;

命题符号化 结果 (存在量词): 该方式 属于 侧面回答;

转化命题: 存在有的动物 不是猫;

- ① 个体域:全总个体域 宇宙间一切事物
- ② 个体性质 或 关系 谓词定义:
  - 1> F(x): x 是 动物;
  - 2> G(x): x 是猫;
- ③ 命题符号 一:

 $\exists x (F(x) \land \neg G(x))$ 

 $\exists x (F(x) \land \neg G(x))$  解析:存在某个事物,其满足是动物的性质,同时满足其不 是猫 的性质;

【学校课件整理复习使用】人工智能导论(3)第二章数学基础(1) VAN 0 187 本节知识框架 为什么要研究数理逻辑 数理逻辑在知识的表示与处理中占有重要地位。 掌握有关...

谓词的一般形式 P(X1,X2,...,XN)P(X\_1, X\_2, ..., X\_N)P(X1,X2,...,XN) 个体X1,X2,...,XNX\_1, X\_2,...

评论 2条> 写评论

zasd6664 热评 非常有帮助!!!

离散数学 - 第三章 <mark>谓词逻辑</mark>\_qianlin999的博客

如果没有特别指明某个论域,则隐含所指是在全总个体域中进行讨论。 定义1:由一个谓词、一些...

离散数学之二 谓词逻辑\_Bubble\_gsy的博客

1、谓词的概念 2、谓词的表示 3、命题的表示方法 二、命题函数与量词 1、命题函数 2、个体域...

谓词逻辑中量词的符号化

m0 51654746的博客 ① 637

在谓词演算中,最基本的命题符号化就三种类型: 主语是具体个体对象的,用谓词加括号,括号...

离散数学-各种关联词的符号化

yocichen 0 4077

离散数学--关联词的符号化问题 ①如果p那么q p->q; ②只有p才q

q->p;(p是q的必要条件) ...

第2章: 知识表示 发呆的比目鱼 的博客

y表示个体域里的某个个体,yQ(y)表示个体域里存在个体y具有性质Q。 谓词逻辑表示法 用谓词逻...

谓词逻辑基础 左左张的博客 谓词置换

G 叫做<mark>谓词,x是个体词</mark>叫变项,<mark>个体词</mark>的取值范围叫个体域,谓词用P、Q、R表示,变项用x、y、z表...

【数理逻辑】谓词逻辑的等值演算与... 让学习成为一种习惯(韩曙亮の技术博客) ◎ 1710 -、谓词逻辑相关概念、1、个体词、2、谓词、3、量词、二、一阶谓词逻辑公式、三、...

离散数学 (3) ——谓词逻辑

离散数学(3)——谓词逻辑个体将可以独立存在的客体(具体事务或抽象概)称为个体或个体...

…谓词、量词(全称和存在量词、全总个体域和性性温温) memonyO的描

只有将谓词符PPP指定为一个确定的nnn元函数

