【集合论】划分 (划分 | 划分示例 | 划分与等价关系)

原创 韩曙亮

文章目录

一、划分

划分 :

非空集合 A , $A \neq \varnothing$,
A 集合 的一个 **划分** 是 集族 $\mathscr{A}$,
该 集族 $\mathscr{A}$ 包含于 A 集合的幂集 , $\mathscr{A} \subseteq P(A)$, 集族中的元素都属于 A 集合的幂集 ;

集族 $\mathscr{A}$ 中的元素是 集合 , 称为 划分块 (Block) , 集合中的元素都是 A 集合中的元素 ;

该集族 $\mathscr{A}$ 有以下性质 :

① $\mathscr{A}$ 集族中每个元素都非空

$$\varnothing \notin \mathscr{A}$$

② $\mathscr{A}$ 集族中任意两个元素 (划分块 / 集合) 是不相交的

$$\forall x, y(x, y \in \mathscr{A} \land x \neq y \Rightarrow x \cap y = \varnothing)$$

③ $\mathscr{A}$ 集族中所有的元素 (划分块 / 集合) 的并集是 A 集合

$$\bigcup \mathscr{A} = A$$

商集就是一个划分 , 该集族中的元素是等价类集合 ;

商集参考 : 【集合论】等价类 (等价类概念 | 等价类示例 | 等价类性质 | 商集 | 商集示例) 四、商集

二、划分示例

全集是 $\rm E$,

取 $\rm E$ 的 $\rm n$ 个 非平凡 的 真子集 , 非平凡的含义是既不是空集 , 也不是它自己 ;

$$\varnothing \neq \rm A_1, A_2, \cdots , A_n \subset E$$

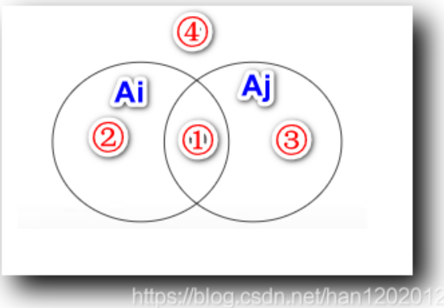
1. 划分 1 基于1 个元素

集族 $\mathscr{A}_{\rm i} = \{ \rm A_i , \sim A_i \}$, $\rm i = 1, 2, \cdots , n$,
$\mathscr{A}_{\rm i}$ 集族中包含 $\rm A_i$ 集合及其补集 $\sim \rm A_i$, 该集族 $\mathscr{A}_{\rm i}$ 满足上述划分的三个性质 , 是一个划分 ;

2. 划分 2基于2 个元素

集族 $\mathscr{A}_{\rm i} = \{ \rm A_i \cap A_j , \sim A_i \cap A_j , A_i \cap \sim A_j , \sim A_i \cap \sim A_j \} - \{ \varnothing \}$, $\rm i, j = 1, 2, \cdots , n \land i \neq j$

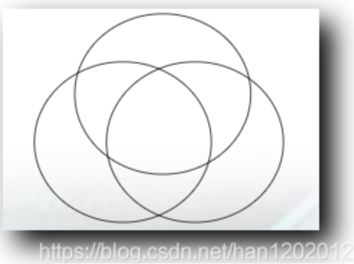
根据如下文氏图进行理解 :



- $\rm A_i \cap A_j$ 对应区域 ①
- $\sim \rm A_i \cap A_j$ 对应区域 ③
- $\rm A_i \cap \sim A_j$ 对应区域 ②
- $\sim \rm A_i \cap \sim A_j$ 对应区域 ④
- 如果 $\rm A_i$ 与 $\rm A_j$ 不相交 , 那么区域 ① 就是空集 , 划分类不能是空集 , 此时就需要减去空集 , 对应 $-\{ \varnothing \}$

3. 划分 3 基于3 个元素

集族 $\mathscr{A}_{\rm ijk} = \{ \rm A_i \cap A_j \cap A_k , A_i \cap \sim A_j \cap \sim A_k , \sim A_i \cap A_j \cap \sim A_k , \sim A_i \cap \sim A_j \cap A_k , \sim A_i \cap \sim A_j \cap \sim A_k \} - \{ \varnothing \}$



4. 划分 4 基于n 个元素

$\mathscr{A}_{1,2,\cdots,n} = \{$

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$

$A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n,$

$\sim A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n,$

$\vdots$

$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n$

$\} - \{\varnothing\}$

规则 :
A_1 到 A_n 的并集 ,
n 个 $\sim A_1$ 到 $\sim A_n$ 的并集 , 其中每个并集中 , 只有一个不是补集 ,
$\sim A_1$ 到 $\sim A_n$ 的并集 ;

三、划分与等价关系定理

划分与等价关系定理 :

前提 : 集合 A 非空 , $A \neq \varnothing$

R 关系是 A 集合上的等价关系 , 可以推导出 , A 集合关于 R 关系的商集 A/R 是 A 的划分 ;

$$R是A上等价关系 \Rightarrow A/R是A的划分$$

集族 $\mathscr{A}$ 是 A 集合上的划分 , 定义一个 二元关系 是 同块关系 $R_{\mathscr{A}}$,
该 同块关系 是 A 集合上的 等价关系 ,
该 同块关系 是 由划分 $\mathscr{A}$ 定义的关系 ;

$$xR_{\mathscr{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z \in \mathscr{A} \land x \in z \land y \in z)$$