【数理逻辑】范式(合取范式 | 析取范式 | 大项 | 小项 | 极大项 | 极小项 | 主合取范式 | 主析取范式 | 等值演算方法求主析/合取范式 | 真值表法求主析/合取范式)

原创 韩曙亮 于 2019-07-16 15:03:31 发布 17884 收藏 158 版权
分类专栏: 数学 # 数理逻辑 文章标签: 主合取范式 主析取范式 真值表法 极大项 极小项

文章目录

一. 相关概念

1. 简单 析取 合取 式

(1)简单合取式

简单合取式:

- **1.组成:命题变元(p)或**

- **2.概念 : 有限个 命题变元 或其 否定式 组成的合取式** , 称为 **简单合取式** ;
- **3.示例 :**
  - **① 单个命题变元 :** p ;
  - **② 单个命题变元否定式 :** $\neg p$
  - **③ 两个 命题变元 或其否定式 构成的合取式 :** $p \wedge \neg q$
  - **④ 三个 命题变元 或其否定式 构成的合取式 :** $p \wedge q \wedge r$

---

(2) 简单析取式

简单析取式 :

- **1.组成 : 命题变元 (** p **)** 或 **命题变元否定式 (** $\neg p$ **)** ;
- **2.概念 : 有限个 命题变元 或其 否定式 组成的析取式** , 称为 **简单析取式** ;
- **3.示例 :**
  - **① 单个命题变元 :** p ;
  - **② 单个命题变元否定式 :** $\neg p$
  - **③ 两个 命题变元 或其否定式 构成的析取式 :** $p \vee \neg q$
  - **④ 三个 命题变元 或其否定式 构成的析取式 :** $p \vee q \vee r$

---

2. 极小项

(1) 极小项 简介

极小项 : 极小项 是 一种 **简单合取式** ;

- **1.前提 (简单合取式) :** 含有 n **个 命题变项** 的 **简单合取式** ;
- **2.命题变项出现次数 :** 每个命题变项 均 **以 文字 的 形式 在其中出现** , 且 **仅出现 一次** ;
- **3.命题变项出现位置 : 第** i **(** $1 \leq i \leq n$ **) 个文字出现在 左起 第** i **个位置** ;
  - n **是指命题变项个数** ;
- **4.极小项总结 : 满足上述三个条件的 简单合取式 , 称为 极小项** ;
- **5.**m_i **与** M_i **之间的关系 : ①** $\neg m_i \iff M_i$ **②** $\neg M_i \iff m_i$

---

(2) 极小项 说明

关于 极小项 的 说明 :

- **1.极小项个数 :** n **个 命题变元 会 产生** 2^n **个 极小项 ;**
- **2.互不等值 :** 2^n **个极小项 均 互不等值 ;**
- **3.极小项 :** m_i **表示 第** i **个极**

- **4.极小项名称 : 第 i 个极小项 , 称为 m_i ;**

---

(3) 两个命题变项 的 极小项

两个命题变项 p, q 的 极小项 :

- **1.先写出 极小项 名称 : 从 0 开始计数 , m_0, m_1, m_2, m_3 ;**
- **2.然后写出成真赋值 : $0, 1, 2, 3$ 对应的二进制形式 , 即 $00, 01, 10, 11$;**
- **3.最后写公式 (简单合取式) :**
  - **① 公式形式 : 公式是简单合取式 , $p \land q$, 其中 每个命题变项 p, q 之前都可能带着 否定符号 $\neg$;**
  - **② 满足成真赋值 : 该公式需要满足 其 上述 $00, 01, 10, 11$ 赋值是成真赋值 , 即根据成真赋值 , 反推出其公式 ;**
  - **③ 分析 : 成真赋值 为 $0, 0$, 合取符号 $\land$ 两边都要为 真 , 赋值为 0 , 那么 对应 命题变项 要带上 $\neg$ 符号 ;**
  - **④ 对应 : 凡是 0 赋值的 , 带 $\neg$ 符号 ; 凡是 1 赋值的 , 对应 正常 命题变项 ;**

公式	成真赋值	名称
$\neg p \land \neg q$	$0 \quad 0$	m_0
$\neg p \land q$	$0 \quad 1$	m_1
$p \land \neg q$	$1 \quad 0$	m_2
$p \land q$	$1 \quad 1$	m_3

---

(4) 三个命题变项 的 极小项

三个命题变项 p, q, r 的 极小项 :

- **1.先写出 极小项 名称 : 从 0 开始计数 , $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$;**
- **2.然后写出成真赋值 : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 对应的二进制形式 , 即 $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$;**
- **3.最后写公式 (简单合取式) :**
  - **① 公式形式 : 公式是简单合取式 , $p \land q \land r$, 其中 每个命题变项 p, q, r 之前都可能带着 否定符号 $\neg$;**
  - **② 满足成真赋值 : 该公式需要满足 其 上述 $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$ 赋值是成真赋值 , 即根据成真赋值 , 反推出其公式 ;**
  - **③ 分析 : 成真赋值 为 $0, 0, 0$, 三个命题变项都要为 真 , 赋值为 0 , 那么对应 命题变项要带上 $\neg$ 符号 ;**
  - **④ 对应 : 凡是 0 赋值的 , 带 $\neg$ 符号 ; 凡是 1 赋值的 , 对应 正常 命题变项 ;**

公式	成真赋值	名称
$\neg p \land \neg q \land \neg r$	$0 \quad 0 \quad 0$	m_0
$\neg p \land \neg q \land r$	$0 \quad 0 \quad 1$	m_1
$\neg p \land q \land \neg r$		

公式	成真赋值	名称
$\neg p \land q \land r$	0 1 1	m_3
$p \land \neg q \land \neg r$	1 0 0	m_4
$p \land \neg q \land r$	1 0 1	m_5
$p \land q \land \neg r$	1 1 0	m_6
$p \land q \land r$	1 1 1	m_7

(5) 极小项 成真赋值 公式 名称 之间 的 转化 与 推演

极小项 成真赋值 公式 名称 之间 的 转化 与 推演 :

- **1.成真赋值 到 公式 之间的推演 : 公式 的 成真赋值列出 , 就是成真赋值** ; **根据成真赋值 写出 公式 , 0 对应的 命题变项 带 否定** $\neg$ **, 1 对应 正常的命题变项** ;
- **2.名称 到 成真赋值 之间的 推演** : 这个 最简单 , **直接将 下标 写成 二进制形式 即可** ;
- **3.公式 到 名称 之间的 推演** : 直接推演 比较困难 , **必须通过 成真赋值 过渡一下** , **先写出 成真赋值** , **然后将其当做 二进制数 转为 十进制的下标即可** ;

3. 极大项

(1) 极大项 简介

极大项 : 极大项 是 一种 **简单析取式** ;

- **1.前提 (简单析取式)** : 含有 n **个 命题变项** 的 **简单析取式** ;
- **2.命题变项出现次数** : 每个命题变项 均 **以 文字 的 形式 在其中出现** , 且 **仅出现 一次** ;
- **3.命题变项出现位置 : 第** i **(** $1 \leq i \leq n$ **) 个文字出现在 左起 第** i **个位置** ;
  - n **是指命题变项个数** ;
- **4.极大项总结 : 满足上述三个条件的 简单析取式 , 称为 极大项** ;

(2) 极大项 说明

关于 极大项 的 说明 :

- **1.极大项个数 :** n **个 命题变元 会 产生** 2^n **个 极大项 ;**
- **2.互不等值 :** 2^n **个极大项 均 互不等值 ;**
- **3.极大项 :** m_i **表示 第** i **个极大项 , 其中** i **是该极大项 成假赋值 的 十进制表示 ;**
- **4.极大项名称 : 第** i **个极大**

- 5.m_i 与 M_i 之间的关系 : ① $\neg m_i \iff M_i$ ② $\neg M_i \iff m_i$

(3) 两个命题变项的极大项

两个命题变项 p, q 的 极大项 :

- 1.先写出 极大项 名称 : 从 0 开始计数 , M_0, M_1, M_2, M_3 ;
- 2.然后写出成假赋值 : $0, 1, 2, 3$ 对应的二进制形式 , 即 $00, 01, 10, 11$;
- 3.最后写公式 (简单析取式) :
  - ① 公式形式 : 公式是简单析取式 , $p \wedge q$, 其中 每个命题变项 p, q 之前都可能带着 否定符号 $\neg$;
  - ② 满足成假赋值 : 该公式需要满足 其 上述 $00, 01, 10, 11$ 赋值是成假赋值 , 即根据成假赋值 , 反推出其公式 ;
  - ③ 分析 : 成假赋值 为 $0, 0$, 合取符号 $\wedge$ 两边都要为 假 , 赋值为 0 , 那么对应的命题变项是 正常的命题变项, 不带否定符号 $\neg$;
  - ④ 对应 : 凡是 1 赋值的 , 带 $\neg$ 符号 ; 凡是 0 赋值的 , 对应 正常 命题变项 ;

公式	成假赋值	名称
$p \vee q$	0 0	M_0
$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

(4) 三个命题变项的极大项

三个命题变项 p, q, r 的 极大项 :

- 1.先写出 极大项 名称 : 从 0 开始计数 , $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$;
- 2.然后写出成假赋值 : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 对应的二进制形式 , 即 $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$;
- 3.最后写公式 (简单析取式) :
  - ① 公式形式 : 公式是简单析取式 , $p \wedge q \wedge r$, 其中 每个命题变项 p, q, r 之前 都 可能 带着 否定符号 $\neg$;
  - ② 满足成假赋值 : 该公式需要满足 其 上述 $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$ 赋值是成假赋值 , 即根据成真赋值 , 反推出其公式 ;
  - ③ 分析 : 成假赋值 为 $0, 0, 0$, 三个命题变项都要为 假 , 赋值为 0 , 那么对应命题变项 是正常的命题变项 , 不带否定符号 $\neg$;
  - ④ 对应 : 凡是 1 赋值的 , 带 $\neg$ 符号 ; 凡是 0 赋值的 , 对应 正常 命题变项 ;

公式	成假赋值	名称
$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$p \vee \neg q \vee r$		

公式	成假赋值	名称
$p \lor \neg q \lor \neg r$	0 1 1	M_3
$\neg p \lor q \lor r$	1 0 0	M_4
$\neg p \lor q \lor \neg r$	1 0 1	M_5
$\neg p \lor \neg q \lor r$	1 1 0	M_6
$\neg p \lor \neg q \lor \neg r$	1 1 1	M_7

(5) 极大项 成假赋值 公式 名称 之间 的 转化 与 推演

极大项 成假赋值 公式 名称 之间 的 转化 与 推演 :

- **1.成假赋值 到 公式 之间的推演 : 公式 的 成假赋值列出 , 就是成假赋值** ; **根据成假赋值 写出 公式 ,** 1 **对应的 命题变项 带 否定** $\neg$ **,** 0 **对应 正常的命题变项** ;
- **2.名称 到 成假赋值 之间的 推演** : 这个 最简单 , **直接将 下标 写成 二进制形式 即可** ;
- **3.公式 到 名称 之间的 推演** : 直接推演 比较困难 , **必须通过 成假赋值 过渡一下** , **先写出 成假赋值** , **然后将其当做 二进制数 转为 十进制的下标即可** ;

二. 题目解析

1. 使用等值演算方式求 主析取范式 和 主合取范式

题目 : 使用等值演算方式求 主析取范式 和 主合取范式 ;

- **条件 :** $A = (p \to \neg q) \to r$
- **问题 1 :** 求 **主析取范式** 和 **主合取 范式** ;

解答 :

① 步骤 一 : 求出一个合取范式 :

$(p \to \neg q) \to r$

(**使用蕴涵等值式 :** $A \to B \iff \neg A \lor B$ **, 消除 外层的 蕴涵符号**)
$\iff \neg(p \to \neg q) \lor r$

(**使用蕴涵等值式 :** $A \to B \iff \neg A \lor B$ **, 消除内层的 蕴涵符号**)
$\iff \neg(\neg p \lor \neg q) \lor r$

(**使用德摩根律 :** $\neg(A \lor B) \iff \neg A \land \neg B$ **, 处理** $\neg(\neg p \lor \neg q)$ **部分**)
$\iff (p \land q) \lor r$

(**使用交换率 :** $A \lor B \iff B \lor A$)
$\iff r \lor (p \land q)$

(**使用分配率 :** $A \lor (B \land C) \iff (A \lor B) \land (A \lor C)$)
$\iff (r \lor p) \land (r \lor q)$

(**使用交换率 :** $A \lor B \iff B \lor A$)
$\iff (p \lor r) \land (q \lor r)$

当前状况分析 :

- **1> 合取范式 : 此时 ,** $(p \lor r) \land (q \lor r)$ **是一个合取范式 , 根据该合取范式 求主合取 范式 ;**
- **2> 拆分 : 分别将** $(p \lor r)$ **和** $(q \lor r)$ **转为 极大项 ;**

② **步骤二 : 将** $(p \lor r)$ **转为 主合取范式 :**

$(p \lor r)$

(**使用 零律 :** $A \lor 0 \iff A$ **, 析取式 , 析取一个** 0 **后 , 其值不变**)
$\iff (p \lor 0 \lor r)$

(**使用 矛盾律 :** $A \land A = 0$ **, 引入 命题变元** q **, 即使用** $A \land A$ **替换 式子中的** 0)
$\iff (p \lor (q \land \neg q) \lor r)$

(**使用交换律** $A \lor B \iff B \lor A$ **和 结合律** $(A \lor B) \lor C \iff A \lor (B \lor C)$)
$\iff ((p \lor r) \lor (q \land \neg q))$

(**使用分配律 :** $A \lor (B \land C) \iff (A \land B) \lor (A \land C)$ **, 将** p, q, r **都集合到一个析取式中**)
$\iff (p \lor r \lor q) \land (p \lor r \lor \neg q)$

(**使用交换律**)
$\iff (p \lor q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor r)$

根据 极大项 公式 写出对应序号 :

- **1>** $(p \lor q \lor r)$ **: 成假赋值** $0 \quad 0 \quad 0$ **, 是极大项** M_0 ;
- **2>** $(p \lor \neg q \lor r)$ **: 成假赋值** $0 \quad 1 \quad 0$ **, 是极大项** M_2 ;
- **3>** $(p \lor r)$ **对应的 主合取范式是 :** $(p \lor q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor r) \iff M_0 \land M_2$

③ **步骤三 : 将** $(q \lor r)$ **转为 主合取范式 :**

$(q \lor r)$

(**使用 零律 :** $A \lor 0 \iff A$ **, 析取式 , 析取一个** 0 **后 , 其值不变**)
$\iff (0 \lor q \lor r)$

(**使用 矛盾律 :** $A \land A = 0$ **, 引入 命题变元** q **, 即使用** $A \land A$ **替换 式子中的** 0)
$\iff ((p \land \neg p) \lor q \lor r)$

(**使用分配律 :** $A \lor (B \land C) \iff (A \land B) \lor (A \land C)$ **, 将** p, q, r **都集合到一个析取式中**)
$\iff (p \lor r \lor q) \land (\neg p \lor r \lor q)$

根据 极大项 公式 写出对应序号 :

- **1>** $(p \lor q \lor r)$ **: 成假赋值** $0 \quad 0 \quad 0$ **, 是极大项** M_0 ;
- **2>** $(\neg p \lor q \lor r)$ **: 成假赋值** $1 \quad 0 \quad 0$ **, 是极大项** M_4 ;
- **3>** $(p \lor r)$ **对应的 主合取范式是 :** $(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor r) \iff M_0 \land M_4$

该题目最终结果 :

$(p \rightarrow \neg q)$

(**步骤一 的结论**)
$\iff (p \lor r) \land (q \lor r)$

(**将步骤二 和 步骤三 结果代入到上式中**)
$\iff (M_0 \land M_2) \land (M_0 \land M_4)$

(**根据结合律 可以消去括号 将** $M_0 \land M_0$ **组合起来**)
$\iff (M_0 \land M_0) \land M_2 \land M_4$

(**根据 幂等律 :** $A \land A \iff A$ **, 可以消去 一个** M_0)
$\iff M_0 \land M_2 \land M_4$

---

2. 使用 真值 表法 求 主析取范式 和 主合取范式

题目 : 使用 真值表法 求 主析取范式 和 主合取范式 ;

- **条件 :** $A = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$
- **问题 1 :** 求 **主析取范式** 和 **主合取 范式** ;

解答 :

① 首先列出其真值表 (列的真值表越详细越好 , 算错好几次)

p q r	$(\neg q)$	$(p \rightarrow \neg q)$	$A = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$	极小项	极大项
0 0 0	1	1	0	m_0	M_0
0 0 1	1	1	1	m_1	M_1
0 1 0	0	1	0	m_2	M_2
0 1 1	0	1	1	m_3	M_3
1 0 0	1	1	0	m_4	M_4
1 0 1	1	1	1	m_5	M_5
1 1 0	0	0	1	m_6	M_6
1 1 1	0	0	1	m_7	M_7

② 真值表中 取值为 真 的项 对应的 极小项 m_i **构成 主析取范式 ;**

$$m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$$

③ 真值表中 取值为 假 的项 对应的 极大项 m_i **构成 主合取范式 ;**

$$M_0 \land M_2 \land M_4$$

极小项 - 合取式 - 成真赋值 - 对应条件真值表中的 1 **- 主析取范式 (多个合取式的析取式)**