

【数理逻辑】命题逻辑的等值演算与推理演算 (命题逻辑 | 等值演算 | 主合取 (析取) 范式 | 推理演算) ★★

原创

韩曙亮

于 2020-10-22 10:23:11 发布

1739

收藏 19

版权

分类专栏:

数学

数理逻辑

文章标签:

命题逻辑

等值演算

推理演算

主合取范式

主析取范式

 数学 同时被 2 个专栏收录

59 订阅 122 篇文章

订阅专栏

文章目录

- 一、命题逻辑基本概念
- 二、等值演算
- 三、主合取 (析取) 范式
- 四、推理演算
 - 1、附加律
 - 2、化简律
 - 3、假言推理
 - 4、拒取式
 - 5、析取三段论
 - 6、假言三段论
 - 7、等价三段论
 - 8、构造性两难

参考博客：

- 【数理逻辑】命题和联结词 (命题 | 命题符号化 | 真值联结词 | 否 | 合取 | 析取 | 非真值联结词 | 蕴涵 | 等价)
- 【数理逻辑】命题逻辑 (命题与联结词回顾 | 命题公式 | 联结词优先级 | 真值表 可满足式 矛盾式 重言式)
- 【数理逻辑】命题逻辑 (等值演算 | 幂等律 | 交换律 | 结合律 | 分配律 | 德摩根律 | 吸收率 | 零律 | 同一律 | 排中律 | 矛盾律 | 双重否定率 | 蕴涵等值式 ...)
- 【数理逻辑】范式 (合取范式 | 析取范式 | 大项 | 小项 | 极大项 | 极小项 | 主合取范式 | 主析取范式 | 等值演算方法求主析/合取范式 | 真值表法求主析/合取范式)
- 【数理逻辑】命题逻辑 (命题逻辑推理 | 推理的形式结构 | 推理定律 | 附加律 | 化简律 | 假言推理 | 拒取式 | 析取三段论 | 假言三段论 | 等价三段论 | 构造性两难)
- 【数理逻辑】命题逻辑 (命题逻辑推理正确性判定 | 形式结构是永真式 - 等值演算 | 从前提推演结论 - 逻辑推理)

一、命题逻辑基本概念

- 命题逻辑联结词
- 真值表
- 命题逻辑类型: 可满足式, 永真式, 永假式;

1. 命题公式 组成:

- ① 单个 命题变元 / 命题常元 是命题公式;
- ② 如果 A 是命题公式, 则 $(\neg A)$ 也是命题公式;
- ③ 如果 A, B 是命题公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是命题公式;
- ④ 有限次 应用 ① ② ③ 形成的符号串 是命题公式; (无限次不行)

2. 联结词:

原子命题: p, q, r 表示 原子命题, 又称为 简单命题;

- 真: 1 表示 命题真值 为真;
- 假: 0 表示 命题真值 为假;

联结词: 上一篇博客 【数理逻辑】谓词逻辑 (个体词 | 个体域 | 谓词 | 全称量词 | 存在量词 | 谓词公式 | 习题) 三. 联结词 章节讲解了联结词;

- 否定联结词: \neg
- 合取联结词: \wedge , $p \wedge q$, pq 同真, 结果才为真, 其余情况为假;
- 析取联结词: \vee , $p \vee q$, pq 同假, 结果才为假, 其余情况为真;
- 蕴涵联结词: \rightarrow , $p \rightarrow q$, p 真 q 假, 结果才为假, 其余情况为真;
- 等价联结词: \leftrightarrow , $p \leftrightarrow q$, pq 真值相同时为真, 表示等价成立, pq 真值相反时为假, 等价不成立;

联结词优先级:

" \neg " 大于 " \wedge, \vee " 大于 " $\rightarrow, \leftrightarrow$ "

\wedge, \vee 优先级相同;

$\rightarrow, \leftrightarrow$ 优先级相同;

3. 命题逻辑类型:

可满足式: 真值表中, 至少有一个结果为真, 可以都为真;

矛盾式 (永假式): 所有的真值都为假;

可满足式 与 矛盾式, 是 二选一 的, 复合命题 要么是 可满足式, 要么是 矛盾式;

重言式 (永真式) 是可满足式的一种;

4. 简单命题形式化:

参考: 复合命题 与 命题符号化

定义命题: 使用 p, q 代表真假必居其一的陈述句;

使用联结词: 然后使用联结词联



韩曙亮 关注

👍 9 🗨️ 19

参考博客：

- 【数理逻辑】命题和联结词 (命题 | 命题符号化 | 真值联结词 | 否 | 合取 | 析取 | 非真值联结词 | 蕴涵 | 等价)
- 【数理逻辑】命题逻辑 (命题与联结词回顾 | 命题公式 | 联结词优先级 | 真值表 | 可满足式 | 矛盾式 | 重言式)

二、等值演算

等值式概念： A, B 是两个命题公式，如果 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，那么 A, B 两个命题公式是等值的，记做 $A \leftrightarrow B$ ；

等值演算置换规则： A 和 B 两个命题公式，可以互相代替，凡是出现 A 的地方都可以替换成 B ，凡是出现 B 的地方都可以替换成 A ；

基本运算规律：

- 1. 幂等律： $A \leftrightarrow A \vee A, A \leftrightarrow A \wedge A$
- 2. 交换律： $A \vee B \leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
- 3. 结合律： $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- 4. 分配律： $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

新运算规律：

- 5. 德摩根律： $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
 - 有了与 (\wedge) 非 (\neg), 就可以表示或 (\vee)
 - 有了或 (\vee) 非 (\neg), 就可以表示与 (\wedge)
- 6. 吸收率：
 - 前者将后者吸收了： $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$
 - 后者将前者吸收了： $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$;

0, 1 相关的运算律：

- 7. 零律： $A \vee 1 \leftrightarrow 1, A \wedge 0 \leftrightarrow 0$
 - 1 是或运算的零元，0 是与运算的零元；
 - 与零元进行运算结果是零元；
- 8. 同一律： $A \vee 0 \leftrightarrow A, A \wedge 1 \leftrightarrow A$
 - 0 是或运算的单位元，1 是与运算的单位元
 - 与单位元进行运算结果是其本身
- 9. 排中律： $A \vee \neg A \leftrightarrow 1$
- 10. 矛盾律： $A \wedge \neg A \leftrightarrow 0$

对偶原理适用于上述运算律，将



韩曙亮

关注

👍 9

👎

★ 19

等价蕴含运算规律：

- 11. 双重否定率： $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- 12. 蕴涵等值式： $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
 - 替换蕴含联结词：蕴含联结词 \rightarrow 不是必要的，使用 \neg, \vee 两个联结词可以替换 蕴含联结词；
- 13. 等价等值式： $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
 - 双箭头 (等价联结词) 可以理解成重分必要条件
 - $A \rightarrow B$ (蕴含联结词) 理解成 A 是 B 的充分条件， B 是 A 的必要条件
 - $B \rightarrow A$ (蕴含联结词) 理解成 B 是 A 的充分条件， A 是 B 的必要条件
 - 替换等价联结词：等价联结词 \leftrightarrow 不是必要的，使用 \rightarrow, \vee 两个联结词可以替换 等价联结词；
- 14. 等价否定等值式： $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
- 15. 假言易位 (逆否命题)： $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
 - A 称为 前件， B 称为 后件 (结论)；
- 16. 归谬论 (反证法)： $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$
 - 这是反证法的原理，由 A 推导出 B 和 $\neg B$ ， B 和 $\neg B$ 是矛盾的，则 A 是错的， $\neg A$ 是对的；

参考博客：【数理逻辑】命题逻辑 (等值演算 | 幂等律 | 交换律 | 结合律 | 分配律 | 德摩根律 | 吸收率 | 零律 | 同一律 | 排中律 | 矛盾律 | 双重否定率 | 蕴涵等值式 ...)

三、主合取 (析取) 范式

1. 极小项

极小项：极小项 是一种 简单合取式；

- 1.前提 (简单合取式)：含有 n 个 命题变项 的 简单合取式；
- 2.命题变项出现次数：每个命题变项 均以 文字 的形式 在其中出现，且 仅出现 一次；
- 3.命题变项出现位置：第 i ($1 \leq i \leq n$) 个文字出现在 左起 第 i 个位置；
 - n 是指命题变项个数；
- 4.极小项总结：满足上述三个条件的 简单合取式，称为 极小项；
- 5. m_i 与 M_i 之间的关系：① $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$ ② $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

每个命题 按照指定顺序，且 只出现一次 的 简单合取式，称为极小项；

极小项列出的是成真赋值，因为合取式只有一种情况成真，那就是全真；

2. 极大项

关于 极大项 的说明：



👍 9 🗨️ 19

- 1.极大项个数： n 个命题变元 会产生 2^n 个极大项；
- 2.互不等值： 2^n 个极大项 均 互不等值；
- 3.极大项： m_i 表示 第 i 个极大项，其中 i 是该极大项 成假赋值 的 十进制表示；
- 4.极大项名称：第 i 个极大项，称为 M_i ；
- 5. m_i 与 M_i 之间的关系：① $\neg m_i \iff M_i$ ② $\neg M_i \iff m_i$

每个命题 按照指定顺序，且 只出现一次 的 简单析取式，称为极小项；

极大项列出的是成假赋值，因为析取式只有一种情况成假，那就是全假；

3. 主合取 (析取) 范式

- ① 列出要求 主合取 (析取) 范式 的真值表；
- p, q, r 三个命题真值从 0, 0, 0 到 1, 1, 1，有 $2^3 = 8$ 列，每一列分别对应 $m_0 \sim m_8$ 极小项， $M_0 \sim M_8$ 极大项；
- ② 主析取范式 (取极小项)：真值表中的真值为 1 的列 取 极小项；极小项 成真赋值；根据极小项下标与成真赋值可以列出极小项的命题公式；
- ③ 主合取范式 (取极大项)：真值表中的真值为 0 的列 取 极大项；极大项 成假赋值；根据极大项下标与成假赋值可以列出极大项的命题公式

4. 总结：

极小项：合取式，成真赋值，计算时取真值表 真 列；

极大项：析取式，成假赋值，计算时取真值表 假 列；

参考博客：【数理逻辑】范式 (合取范式 | 析取范式 | 大项 | 小项 | 极大项 | 极小项 | 主合取范式 | 主析取范式 | 等值演算方法求主析/合取范式 | 真值表法求主析/合取范式)

四、推理演算

推理的形式结构

前提： A_1, A_2, \dots, A_k

结论： B

推理的形式结构为： $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$

推理定律： A, B 是两个命题，如果 $A \rightarrow B$ 是永真式，那么 $A \Rightarrow B$ ；

1、附加律

 韩曙亮

关注

附加律: $A \Rightarrow (A \vee B)$

根据 推理定律, $A \rightarrow (A \vee B)$ 蕴含式是 永真式;

前提: A

结论: $A \vee B$

A 是对的, 那么 $A \vee B$ 也是对的, 后者是在前者基础上附加了一个 B ;

2、化简律

化简律: $(A \wedge B) \Rightarrow A, (A \wedge B) \Rightarrow B$

根据 推理定律, $(A \wedge B) \rightarrow A, (A \wedge B) \rightarrow B$ 蕴含式是 永真式;

前提: $A \wedge B$

结论: A 或 B

$A \wedge B$ 是对的, 那么 A 或 B 也是对的, 后者是在前者基础上进行了化简;

3、假言推理

假言推理: $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

根据 推理定律, $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ 蕴含式是 永真式;

前提: $A \rightarrow B, A$

结论: B

这是个典型的小三段论;

4、拒取式

拒取式: $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

根据 推理定律, $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$ 蕴含式是 永真式;

前提: $A \rightarrow B, \neg B$

结论: $\neg A$

可以理解为是反证法;

5、析取三段论

析取三段论: $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

根据 推理定律, $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$



韩曙亮

关注

👍 9

👎

★ 19

前提: $A \vee B, \neg A$

结论: B

$(A \vee B)$ 是正确的, 其中 A 是错误的, 那么 B 肯定是正确的;

$(A \vee B)$ 是正确的, 其中 B 是错误的, 那么 A 肯定是正确的;

警察破案常用推理方式, 逐一排除嫌疑人;

6、假言三段论

假言三段论: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

根据 推理定律, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 蕴含式是 永真式;

前提: $A \rightarrow B, B \rightarrow C$

结论: $A \rightarrow C$

7、等价三段论

等价三段论: $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$

根据 推理定律, $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 蕴含式是 永真式;

前提: $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C$

结论: $A \leftrightarrow C$

8、构造性两难

等价三段论: $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

根据 推理定律, $((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C)) \rightarrow ((B \vee D))$ 蕴含式是 永真式;

前提: $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C$

结论: $B \vee D$

理解方式:

A 是发展经济, B 是污染

C 是不发展经济, D 是贫穷

$A \vee B$ 要么发展经济, 要么不发展经济

结果是 $B \vee D$, 要么产生污染, 要么忍受贫穷

参考博客: 【数理逻辑】命题逻辑 (命题逻辑推理 | 推理的形式结构 | 推理定律 | 附加律 | 化简律 | 假言推理 | 拒取式 | 析取三段论 | 假言三段论 | 等价三段论 | 构造性两难)

