





# 【集合论】等价关系个数计算问题 (有序对个数计算 | 二元关系个数计算 | 划分 | 等价关系)

原创 韩曙亮 于 2019-07-17 19:20:17 发布 16238 收藏 75 版权

分类专栏: 数学 文章标签: 等价关系 划分 Stirling数

 数学 专栏收录该内容 59 订阅 122 篇文章 订阅专栏

## 文章目录

- 等价关系与划分对应问题
- 第二类斯特林数计算公式
- 4元集等价关系计算
- 6元集等价关系计算

## 等价关系与划分对应问题

等价关系 与 划分 计算：

- 1.等价关于 与 划分 一一对应：非空集合  $A$  上的等价关系 与  $A$  上的划分是一一对应的；  
( $A$  上有多少个不同的等价关系，就产生同样个数的不同的划分)
- 2.数学模型：将  $n$  个不同的球，放入  $r$  个相同的盒子中，并且不能出现空盒， $n \geq r$ ；不同的放球方法对应不同的划分数；
- 3.第二类 Stirling 数：将  $n$  个不同的球，放入  $r$  个相同的盒子中，方案数记做  $S(n, r)$ ，或  $\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$ ；

## 第二类斯特林数计算公式

第二类 Stirling 数计算方法：

- 1.Stirling 数计算公式：
  - ①  $S(n, 0) = 0$
  - ②  $S(n, 1) = 1$
  - ③  $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$
  - ④  $S(n, n-1) = C(n, 2)$
  - ⑤  $S(n, n) = 1$
- 2.Stirling 数递推公式： $S(n, r) = rS(n-1, r) + S(n-1, r-1)$

## 4元集等价关系计算

题目：等价关系

- 条件：集合  $A = \{a, b, c, d\}$ ；
- 问题：上述集合有多少等价关系；

解答：

分析：

- 1.有序对个数：集合  $A$  上有  $4 \times 4 = 16$  个有序对；
- 2.二元关系个数：集合  $A$  上的二元关系个数是  $2^{\text{有序对个数}} = 2^{16}$  个；
  - ① 公式推演：每个二元关系有 0 到 16 个不等的有序对个数，分别统计有 0 个有序对，1 个有序对，2 个有序对， $\dots$ ，16 个有序对的情况；
  - ② 计算过程： $C(16, 0) + C(16, 1) + C(16, 2) + \dots + C(16, 16) = 2^{16}$ ；
- 3.无法直接得出等价关系数： $A$  上有  $2^{16}$  个二元关系，逐个验证等价关系要求的自反，对称，传递性质，肯定行不通，计算量巨大；
- 4.求划分个数：集合  $A$  的等价关系个数与划分个数是一一对应的，因此求其划分个数即可；

分步求解：

① 使用第二类 Stirling 求其不同的划分个数：

$$S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) + S(4, 4)$$

② 根据公式： $S(n, 1) = 1$ ，计算 Stirling 数的值：

$$S(4, 1) = 1$$

③ 根据公式： $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ ，计算 Stirling 数的值：

$$S(4, 2) = 2^{4-1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

④ 根据公式1： $S(n, n-1) = C(n, 2)$  (Stirling 数计算公式)，根据公式2：

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \text{ 计算 Stirling 数的值：}$$

$$S(4, 2) = C(4, 2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 6$$

⑤ 根据公式： $S(n, n) = 1$ ，计算 Stirling 数的值：

$$S(4, 4) = 1$$

⑥ 最终划分结果： $A$  上有 15 个划分；

$$S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) + S(4, 4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

## 6元集等价关系计算

题目：

- 条件： $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 问题：计算  $A$  上的二元关系的个数和  $A$  上等价关系的个数：

解答：



韩曙亮

关注

22

75

## 二元关系个数：

- 1> 集合元素个数：集合  $A$  中有 6 个元素， $|A| = 6$ ；
- 2> 有序对个数： $|A| \times |A| = 6 \times 6 = 36$ ；
- 3> 二元关系个数：
  - ① 推演过程：二元关系包含 0 到 36 不等的有序对，那么需要考虑以上所有情况，分别统计有 0 个有序对，1 个有序对，2 个有序对， $\dots$ ，36 个有序对的情况；
  - ② 计算公式： $C(36, 0) + C(36, 1) + C(36, 2) + \dots + C(36, 36) = 2^{36}$

## 等价关系个数：

- 1> 一一对应：等价关系的个数与集合的划分数是一一对应的，
- 2> 进行划分：将集合  $A$  划分成 1 块，2 块，3 块，4 块，5 块，6 块；
- 3> 写出对应式子：集合的划分数为  $S(6, 1) + S(6, 2) + S(6, 3) + S(6, 4) + S(6, 5) + S(6, 6)$

逐个求出  $S(6, 1) + S(6, 2) + S(6, 3) + S(6, 4) + S(6, 5) + S(6, 6)$  每个 Stirling 数的值；

① 根据公式： $S(n, 1) = 1$ ，计算 Stirling 数的值：

$$S(6, 1) = 1$$

② 根据公式： $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ ，计算 Stirling 数的值：

$$S(6, 2) = 2^{6-1} - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

③ 根据递推公式： $S(n, r) = rS(n-1, r) + S(n-1, r-1)$ ，计算 Stirling 数的值：

$$S(6, 3) = 3S(5, 3) + S(5, 2)$$

拆分成下面两部 进行计算：

(1) 先计算  $S(5, 3) = 3S(4, 3) + S(4, 2)$

- 1> 其中使用公式  $S(n, n-1) = C(n, 2)$  计算  $S(4, 3)$ ：
  - $S(4, 3) = C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 6$
- 2> 使用公式  $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$  计算  $S(4, 2)$ ：
  - $S(4, 2) = 2^{4-1} - 1 = 7$
- 3>  $S(5, 3)$  结果： $S(5, 3) = 3S(4, 3) + S(4, 2) = 3 \times 6 + 7 = 25$

(2) 在计算  $S(5, 2)$  的结果，使用公式  $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$  进行计算：

$$S(5, 2) = 2^{5-1} - 1 = 15$$

(3) 最终结果： $S(6, 3) = 3S(5, 3) + S(5, 2) = 3 \times 25 + 15 = 90$

④ 根据递推公式： $S(n, r) = rS(n-1, r) + S(n-1, r-1)$ ，计算 Stirling 数的值：

$$S(6, 4) = 4S(5, 4) + S(5, 3) = 4 \times C(5, 2) + 25 = 4 \times \frac{5!}{3! \times 2!} + 25 = 4 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2} + 25 = 65$$

⑤ 根据公式： $S(n, n-1) = C(n, 2)$ ，计算  $S(6, 5)$ ：

$$S(6, 5) = C(6, 2) = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2} = 15$$

⑥ 根据公式： $S(n, n) = 1$ ，计算  $S(6, 6)$ ；  
 $S(6, 6) = 1$

⑦ 将上面计算的 6 个斯特林数相加，得到的结果：  
 $S(6, 1) + S(6, 2) + S(6, 3) + S(6, 4) + S(6, 5) + S(6, 6) = 1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 = 203$

求有限集上等价关系等价类的数目 m0\_51504576的博客 2277  
离散数学的老师布置的实验题目。一开始没懂题目的意思，后来上网查了一下发现是集...

大二（上）离散数学 集合的二元关系 Albirostris 2102  
#include <iostream> #include <string.h> using namespace std; const int MAX ...

离散数学 --- 特殊关系 --- 等价关系与集合的划分\_Metallic Cat的博客... 10-18  
第一部分 --- 等价关系 1.等价关系所需要的三个性质 --- 自反的,对称的,传递的必须同时具...

离散数学·集合论【等价关系和序关系】\_call me by ur name的博客-C... 10-19  
模余同n关系模上相同的数,得出的余数n是相同的(重点在余数n)同余关系模上n,得出来的...

定义在N个元素上的集合A上的等价关系一共有多少种 xizi\_ghq的博客 1万+  
在一个集合定义一个等价关系相当于把这个集合划分成许多子集的集。(这里假如不懂请...

【离散数学】二元关系中的等价关系 最新发布 Sky\*殇的博客 393  
例题：

伯恩赛德定理(集合S的置换群 诱导出来的等价关系 对集合S 划分 得... 10-14  
等价类的个数类似于线性代数里面“秩”这个概念,而不同的等价类则类似于不同的“基向量”...

离散数学 等价关系解释\_xiaoniba1024的博客 10-21  
 $R_4 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ ;  $R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\}$ ; ...

【离散数学】等价关系与等价类，相容关系和偏序关... haohulala的博客 1万+  
目录 集合中的三种关系 等价关系举例 相容关系举例 偏序关系举例 等价类的定义 等价关...

等价关系个数计算 kyle1314608的博客 3930  
<https://blog.csdn.net/shulianghan/article/details/96347307>

算法学习——求一个集合有多少种等价关系-集合划分问... luladuck的博客 6721  
算法学习——求一个集合有多少种等价关系（递归） 等价关系，举个栗子：集合A{1, 2...

【集合论】二元关系（二元关... 让学习成为一种习惯（韩曙亮的技术博客） 1万+  
一、二元关系、二、二元关系记法、三、A到B的二元关系、四、A到B的二元...

计算等价类 sytloveyxj的博客 4095  
首先，什么是等价关系：等价关系是集合元素间的一种代数关系,用字母E来表示，对于...

集合中的等价关系 chengsao5165的博客 5820  
那究竟什么是等价关系呢？很简单，它是集合上的一个二元关系，满足下面三个条件： ...

离散数学之特殊关系之等价关系 weixin\_46200327的博客 7942  
先引进集合的划分：给定非空集合A，若 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ ，且① $S_i \subseteq A$ ，且 $S_i \neq \emptyset$ ...

离散数学基本等价关系 rxy\_66的博客 9744  
离散数学基本等价关系(1) $E1: G \vee G = GE2: G \wedge G = G$ （幂等律）(2) $E3: G \vee H = H \vee GE...$

集合等价类的个数-第二类Stirling数 ResumeProject的博客 672  
(mn) 表示将n个不同地球放入m个相同的盒中的方案个数(没有空盒)，称 (mn) 为第二...

二元关系 松子茶的专栏 9746  
由两个元素x和y（允许x=y）按一定顺序排列成的二元组叫做一个有序对或序偶，记作<x...

离散数学 习题篇 —— 等价关系的计数 weixin\_44941062的博客 4145  
题目：集合A( $1 \leq |A| \leq 100$ )上不同的等价关系一共多少个？输入格式：一行，一个整数n...

【集合论】二元关系（A上二... 让学习成为一种习惯（韩曙亮的技术博客） 8447  
一、A上二元关系、二、A上二元关系个数、三、A上二元关系 示例（集合中有两个...

第四章 二元关系和函数 4.1 集合的笛卡尔积 Deam swan goose的博客 960  
4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

