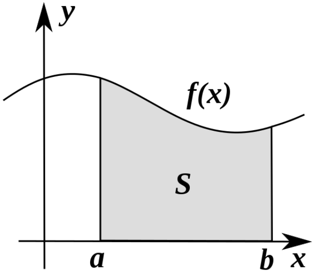
Diverses méthodes d'intégration

SAMER Ahmed Wahid

March 1, 2025

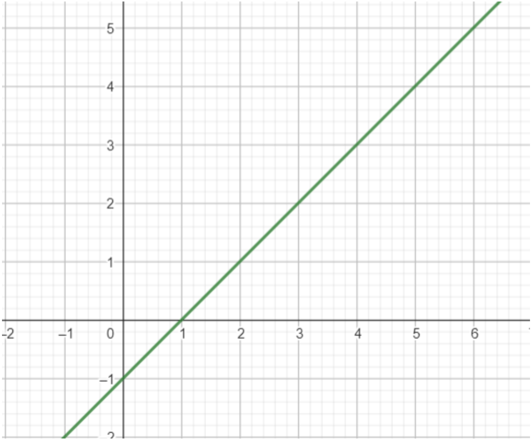
Sommaire

Introduction



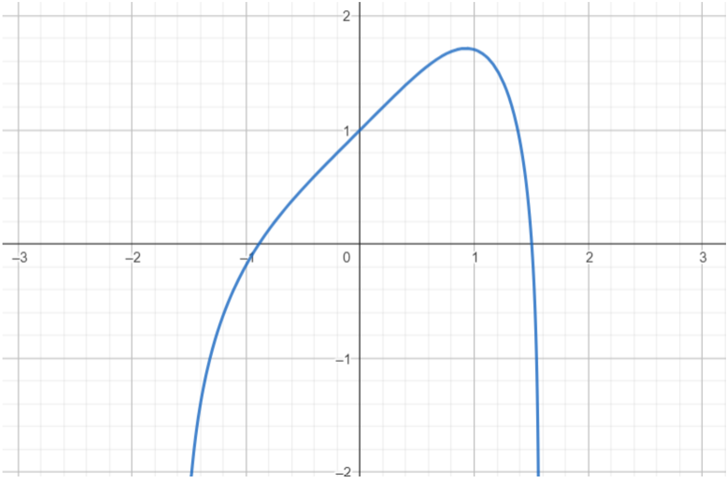
$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Introduction



$$f(x) = x - 1$$

Introduction



$$g(x) = e^{\sin(x)} + \ln(\cos(x))$$

La Méthode de Simpson

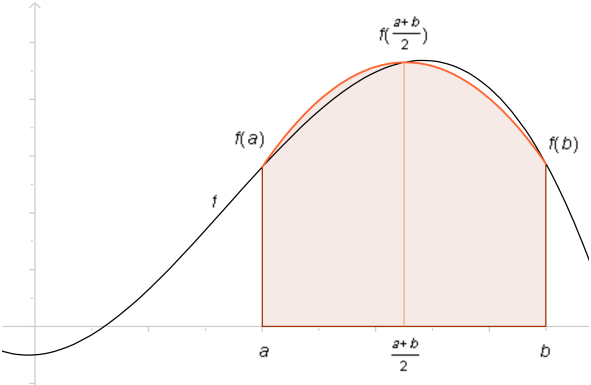
Formule de Simpson

La formule de Simpson pour approximer l'intégrale sur un intervalle $[a, b]$ est donnée par :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

où $h = \frac{b-a}{2}$ est la taille de l'intervalle.

La Méthode de Simpson



La courbe rouge représente le polynôme d'approximation P(x).

La Méthode Simpson

```python
def simpson(f, a, b, n):
    if n % 2 != 0:
        raise ValueError("Le nombre n'est pas pair.")

    h = (b - a) / n
    x = [a + i * h for i in range(n+1)]
    y = [f(x[i]) for i in range(n+1)]

    integral = y[0] + y[-1]

    for i in range(1, n, 2):
        integral += 4 * y[i]

    for i in range(2, n-1, 2):
        integral += 2 * y[i]

    integral *= h / 3
    return integral
```

La Méthode d'Euler

Formule de la Méthode d'Euler

La formule de la méthode d'Euler pour résoudre une EDO du premier ordre de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$ est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

où h est la taille du pas de temps, y_n est l'approximation de la solution à l'instant t_n, et $f(t_n, y_n)$ est la pente de la solution à cet instant.

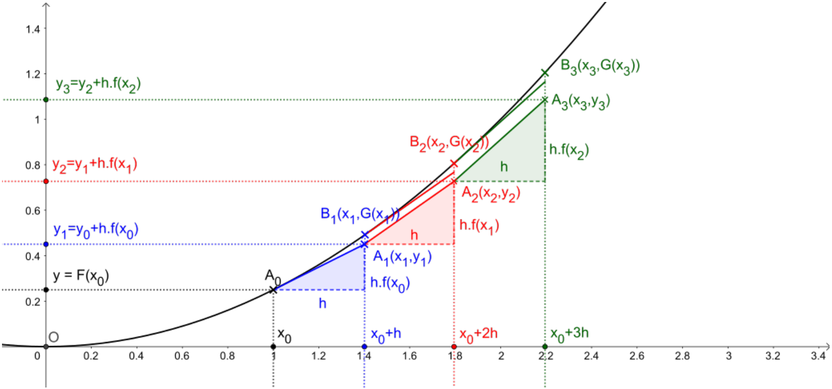


Illustration de la méthode d'Euler

La Méthode d'Euler

```python
def euler(f, x0, y0, h, n):

    x_v = [x0]
    y_v = [y0]

    for i in range(1, n+1):
        x = x0 + i * h
        y = y_v[-1] + h * f(x_v[-1], y_v[-1])
        x_v.append(x)
        y_v.append(y)

    return x_v, y_v
```

Conclusion

Calcul de l'intégrale de $f(x) = x - 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-1)\,dx &= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) \\
&= \frac{1}{2} - 1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion

Pour $f(x)$:

- Méthode de Gauss : -0.5
- Méthode de Simpson : -0.49999999999999983
- Méthode de Monte Carlo : -0.5065533679174838
- Méthode des trapèzes : -0.5000000000000001
- Méthode des rectangles : -0.5005000000000001

Conclusion

$$\int_0^1 e^{\sin(x)} + \ln(\cos(x)) \; dx$$

Cette intégrale n'a pas de solution analytique simple.

Conclusion

Pour $g(x)$:

- Méthode de Gauss : 1.44433143939722
- Méthode de Simpson : 1.4443314393971325
- Méthode de Monte Carlo : 1.4503592007838038
- Méthode des trapèzes : 1.444331330728321
- Méthode des rectangles : 1.4439792555511564

Merci de votre attention !

Références

- wikipedia (Wolfgang Dvorak), https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode$_d e_S impson$, 8.03.2006
- wikipedia (Kelam), https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode$_d$%27$Euler$, 13$avril$2021.
- wikiversity, https://fr.wikiversity.org/wiki/Approche$_t h\%C3\%A9orique_d u_c alcul_i nt\%C$
- SAMER et lechani, Geogebra, f(x) et g(x), 20/04/2024