PROBLEMES D'AFFECTATION (ALGORITHME DE KÜHN)

Cet algorithme, appelé aussi Méthode Hongroise, sert à résoudre les problèmes d'affectation, problèmes qu'on peut résumer de la manière suivante : considérant une matrice (appelée tableau de coûts), il faut choisir un seul élément par ligne et par colonne de façon à rendre la somme minimale

Exemple:

17	15	9	5	12
16	16	10	5	10
12	15	14	11	5
4	8	14	17	13
13	9	8	12	17

Nous allons exposer la méthode sous la forme d'une succession d'étapes :

ETAPE 0: REDUCTION DU TABLEAU INITIAL

On soustrait à chaque ligne du tableau initial, le plus petit élément de la ligne On fait de même avec les colonnes.

Exemple:

12	10	4	0	7
11	11	5	0	5
7	10	9	6	0
0	4	10	13	9
5	1	0	4	9

12	9	4	0	7
11	10	5	0	5
7	9	9	6	0
0	3	10	13	9
5	0	0	4	9

ETAPE 1 : ENCADRER ET BARRER DES ZEROS

On cherche la ligne comportant le moins de zéros non barrés (en cas d'égalité, choisir arbitrairement la plus haute)

On encadre un des zéros de cette ligne (arbitrairement le plus à gauche)

On barre tous les zéros se trouvant sur la même ligne ou sur la même colonne que le zéro encadré

On recommence l'opération jusqu'à ce qu'on ne puisse plus encadrer, ni barrer de zéros :

Exemple:

12	9	4	0	7
11	10	5	0	5
7	9	9	6	0
0	3	10	13	9
5	0	0	4	9

Si l'on a encadré un zéro par ligne et par colonne, c'est terminé, on a la solution optimale Sinon, on passe à l'étape 2.

ETAPE 2: MARQUER ET BARRER DES LIGNES ET DES COLONNES

- a) On marque d'une croix toutes les lignes ne contenant aucun zéro encadré
- b) On marque toute colonne ayant un zéro barré sur une ligne marquée
- c) On marque toute ligne ayant un zéro encadré dans une colonne marquée

On répète alternativement les opérations b) et c) jusqu'à ne plus pouvoir marquer de rangée

On trace alors un trait sur toute ligne non marquée et sur toute colonne marquée

Exemple:

	X2				
12	9	4	0	7	X3 X1
11	10	5	0	5	X1
7	9	9	6	0	
0	3	10	13	9	
5	0	0	4	9	

ETAPE 3: MODIFICATION DU TABLEAU

Les cases non traversées par un trait constituent un tableau partiel
On retranche à toutes les cases de ce tableau partiel le plus petit élément de celui-ci
On ajoute ce même élément à toutes les cases du tableau initial barrées deux fois
On obtient alors un nouveau tableau sur lequel on pourra répéter la succession des étapes 1 à 3

Exemple:

8	5	0	0	3
7	6	1	0	1
7	9	9	10	0
0	3	10	17	9
5	0	0	8	9

Ainsi, dans l'exemple, la valeur de l'affectation minimale est 9+5+5+4+9=32

Remarquons, pour finir, que la méthode hongroise, telle qu'elle est décrite, permet de résoudre les problèmes d'affectation minimale (on considère le tableau initial comme un tableau de coûts).

Si l'on veut résoudre un problème d'affectation maximale (c'est à dire en considérant les éléments du tableau comme des indices de satisfaction), il faudra transformer le tableau initial en retranchant tous les éléments du tableau au plus élevé d'entre eux.