le 15 Novembre 2012 UTBM MT26

Consignes à lire attentivement

Les projets sont à programmer en maple version 7. Le projet se travaille en binôme, qui ne rendra qu'un projet pour deux etudiants. Le fichier principal se nomme "projet".

Chaque programme doit impérativement proposer une fonction main() offrant une présentation, une aide minimale et éventuellement un menu d'utilisation. Un utilisateur ignorant tout du programme, ne disposant pas du dossier, doit pouvoir en faire une utilisation minimale en tapant

main() ;

Le travail consiste en l'écriture d'un programme et en la confection d'un dossier d'accompagnement sur papier d'une dizaine de pages contenant entre autre le listing du programme. Chaque fonction doit y être proprement et correctement documentée. (Rôle de la fonction, paramètres d'entrées, valeur retournée).

Les dossiers devront être remis à l'enseignant de TP dans son casier ou par voie électronique avant le lundi 14 janvier 2012.

Interpolation d'une fonction.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On cherche dans ce projet à approximer f par des fonctions polynômes ou trigonométriques.

Les applications sont multiples : Calcul numérique de $f(t)$, résolution approchée d'équations où apparaît f, compression d'informations, ...

On a différentes méthodes :

1) Théorie de l'interpolation de Lagrange : pour $n \in \mathbb{N}$, elle consiste à choisir n points $x_1, ..., x_n \in [a, b]$ et à prendre comme approximation de f le polynôme p de degré strictement inférieur à n coïncidant avec f en ces points ;

2) Méthode des moindres carrés : elle reprend l'idée de Lagrange mais en prenant $n, d \in \mathbb{N}$, on cherche un polynôme p de degré strictement inférieur à d minimisant la quantité :

$$\delta(p, f) = \sum_{i=1}^{n} (p(x_i) - f(x_i))^2.$$

Ce problème admet une solution unique lorsque $d \leq n$ qui peut être calculée par résolution d'un système linéaire : celui obtenu en écrivant que les dérivées partielles de $\delta(p, f)$ par rapport aux coefficients de p sont nulles.

4) La méthode des séries de Fourier : elle consiste aussi à minimiser une fonction quadratique à savoir :

$$\Delta(p, f) = \int_{t=a}^{b} (p(t) - f(t))^2 dt$$

où p désigne ici un polynôme trigonométrique de la forme :

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \Big)$$

avec $\theta = 2\pi(t - a)/(b - a)$. On démontre qu'il existe un unique polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n minimisant $\Delta(p, f)$ et que ses coefficients se calculent par les formules :

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_{t=a}^{b} f(t) \cos(k\theta) dt, \quad b_k = \frac{2}{b-a} \int_{t=a}^{b} f(t) \sin(k\theta) dt.$$

Projet.

On prendra pour les essais une fonction non polynômiale (ni trigonométrique) par exemple $f(t) = e^t$ sur $[0, 1]$ ou $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ sur $[-5, 5]$

1 Distributions.

On essaiera deux types de choix pour les points $x_1, ..., x_n$:

1 - Distribution régulière : $x_k = a + \frac{k.(b-a)}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.

2 - Distribution de Tchebychev : $x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}.\cos((k + \frac{1}{2})\pi.\frac{1}{n+1})$ pour $0 \leq k \leq n$.

Définir deux fonctions

$$liste_{reguliere} : (a, b, n) \longrightarrow ...$$
$$et$$
$$liste_{tchebychev} : (a, b, n) \longrightarrow ...$$

qui retournent les listes $x = [x_0, ..., x_n]$ correspondant aux distributions régulière et de Tchebychev pour un segment $[a, b]$.

2 Interpolation de Lagrange.

2.1 Polynôme.

Pour les fonctions indiquées, faire calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange associés et les comparer à f sur l'intervalle $[a, b]$. On fera afficher sur un même dessin la courbe de f et du polynôme d'interpolation choisi, puis sur un dessin à part la courbe de $f - p$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange correspondant aux points (x_k, y_k) s'obtient par l'expression : interp(x,y,t) où x est la liste des x_k, y celle des y_k et t une variable formelle servant à exprimer le polynôme p.

2.2 Erreur.

Observer l'évolution du maximum de $|f(t) - p(t)|$ en fonction de n. La distribution de Tchebychev présente-t-elle un avantage par rapport à la distribution régulière ? Essayer avec d'autres fonctions f que celles indiquées dans le sujet.

2.3 Dérivée.

Comparer de même les fonctions f' et p', p étant un polynôme d'interpolation de Lagrange pour f. Si p est une "bonne approximation" de f est-ce que p' est une bonne approximation de f' ?

3 Interpolation de Hermite.

3.1 Polynôme.

Il n'y a pas de fonction prédéfinie dans Maple pour cela. En écrire une :

$$hermite : (x, y, z, t) - > ...$$

calculant le polynôme p tel que $p(x_i) = y_i$ et $p'(x_i) = z_i$. On pourra utiliser l'une des méthodes suivantes :

Par résolution directe :

Poser $p(t) = a_0 + \ldots + a_{2n-1}t^{2n-1}$ avec $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ coefficients formels, puis résoudre le système d'équations : $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = z_i$.

Par récurrence :

$p_n(t) = p_{n-1}(t) + (at+b).q_{n-1}(t)^2$ où p_{n-1} est le polynôme d'interpolation de Hermite associé aux points $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $q_{n-1}(t) = (t - x_1) \ldots (t - x_{n-1})$ et a, b sont deux inconnues solution du système :

$$p_n(x_n) = y_n$$

$$p'_n(x_n) = y'_n.$$

Par double résolution de Lagrange :

soit p_1 le polynôme de Lagrange associé aux listes x et y et $q(t) = (t - x_1) \ldots (t - x_n)$. Alors $p(t) = p_1(t) + q(t) * p_2(t)$ ou p_2 est le polynôme de Lagrange tel que $p_2(x_i) = (z_i - p'_1(x_i))/q'(x_i)$. On justifiera la validité de cette méthode.

3.2 calculs.

Reprendre les questions 2.1 et 2.3 avec l'interpolation de Hermite.

4 Approximation au sens des moindres carrés.

La procédure suivante calcule le polynôme de degré strictement inférieur à d correspondant aux listes x et y :

```
carres := proc(x,y,d,t) local m,a,i,j,sol;
 m := matrix(nops(x),d);
 for i from 1 to nops(x) do
  for j from 0 to d-1 do
   m[i,j+1] := x[i]^j
  od;
 od;
 sol := leastsqrs(m,y);
```

```
add(sol[i+1]*t^i,i=0..d-1)
end;
```

Expliquer le fonctionnement de cette procédure et tester à nouveau la qualité d'approximation d'une fonction f par cette méthode.

5 Approximation par un polynôme trigonométrique.

Définir une procédure calculant les coefficients a_k et b_k puis le polynôme trigonométrique correspondant. Faire tracer les courbes de f et p sur un intervalle plus grand que $[a, b]$ et expliquer le phénomène observé.