MT26 A 16

Projet : Interpolation

Rapport final

Robin Trioux, William Veal Phan

Introduction

L'interpolation d'une série de points est le processus visant à remplace un nombre fini de points, donc une représentation discrète d'un phénomène sur un segment donné, par une représentation continue, une fonction d'interpolation, sur ce même segment.

Il existe de nombreuses méthodes d'interpolation, utilisées dans de nombreux domaines scientifiques : en physique, avec de nombreuses applications au traitement de signaux, en statistique, mais aussi en informatique. Les courbes de Bézier, par exemple, sont utilisées afin de lisser les polices de caractère.

Dans le cadre de notre projet, nous nous proposons de suivre les instructions d'un sujet du semestre d'automne 2012. Nous étudierons donc l'interpolation de Lagrange, l'interpolation de l'Hermite, la méthode des moindres carrés polynomiaux et, enfin, l'interpolation trigonométrique.

Ces méthodes d'interpolation seront dans un premier temps implémentées sous forme de fonctions Maxima. Nous considèrerons que l'interface de wxMaxima, couplée au présent rapport et à une fonction d'aide, permettront d'utiliser de façon suffisante nos fonctions.

Sommaire

1. Méthodes d'interpolation implémentées

1.1. Interpolation de Lagrange

1.1.1. Principe général

L'interpolation selon Lagrange se propose d'interpoler *n+1* points (x_0,y_0), (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) ... (x_n,y_n) avec les x_i distincts deux à deux. On cherchera alors à construire un polynôme

$$L(X) = \sum_{j=0}^{n} y_j . L_i(X)$$

Avec,

$$\forall i \in [\![0;n]\!];\ L_i(x_i) = \begin{cases} 1\ si\ j = i \\ 0\ sinon \end{cases}$$

1.1.2. Algorithme

1.2. Interpolation de l'Hermite

1.2.1. Principe général

1.2.2. Algorithme

1.3. Méthode des moindres carrés

1.3.1. Principe général

La méthode des moindres carrés polynomiaux consiste cherche à ajuster une série de points par le polynôme du degré choisi minimisant la somme l'erreur quadratique.

Soit n un entier positif, et $\{(x_i, y_i)\ pour\ i \in [\![1; n]\!]\}$ une série de n points que nous souhaitons ajuster par un polynôme P de degré d :

$$\mathrm{P(X)} = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

On se fixe comme condition que P doit minimiser la somme du carré des erreurs, ie.

$$A = (a_0, \dots, a_d) \text{ minimise } \sum_{i=1}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$

On notera la solution

$$\hat{\mathrm{A}} = \arg \min_{\hat{\mathrm{A}} \in \mathbb{R}^{d+1}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$

On détermine Â en posant :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^d \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^d \end{pmatrix}$$

Et on peut montrer (la démonstration est possiblement au programme des UV MT25 et MT27) que

$$\hat{\mathrm{A}} = (T^T T)^{-1} T^T Y$$

1.3.2. Algorithme

```
Arguments :
Lx : liste des abscisses des n points, [x1,x2,…,xn]
Ly : liste des ordonnées des n points, [y1,y2,…,yn]
d : le degré souhaité du polynôme

Résultat :
P(x) : polynôme d'interpolation minimisant l'erreur quadratique.

Fonction moindresCarres(Lx,Ly,d) : fonction
```

```
DEBUT
      n <- taille(Lx)
      T : matrice n x d+1
      Y : matrice n x 1
      P(x) : fonction de x
      P(x) <- 0
      pour k de 1 a n faire
            Y[k][1] <- Ly[k]
            pour j de 1 a d+1 faire
                  T[k][j] <- Lx[k]^(j-1)
            fait
      fait
      A : matrice 1 x d+1
      A <- inverse(transpose(T).T).transpose(T).Y
      pour k de 0 a d faire
            P(x) <- P(x) + A[k] * x^k
      fait
      moindresCarres <- P(x)
FIN
```

1.4. Interpolation trigonométrique

1.4.1. Principe général

1.4.2. Algorithme

2. Étude et comparaison des méthodes d'interpolation

2.1. Listes de points

2.2. Définition du critère d'erreur

2.3. Comparaison Lagrange – l'Hermite

2.4. Fiabilité des moindres carrés polynomiaux

Conclusion