Nama : Wahyu Ari Y

NIM : 18051204079

Prodi : S1 Teknik Informatika

(1) $T : V \to W$

vektor $v = (v_1, v_2)$ di R^2 $T : R^2 \to R^2$

$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$

Tentukan hasil transformasi linear untuk

a. $v = (-1, 2)$

$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$

$T(-1, 2) = (-1 - 2, -1 + 2 \cdot 2)$

$= (-3, 3)$ //

b. $v = (0, 0)$

$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$

$T(0, 0) = (0 - 0, 0 + 2 \cdot 0)$

$= (0, 0)$ //

c. $v = (v_1, v_2) = ?$, $w = (-1, 11)$

$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) = (-1, 11)$

$\cancel{v_1} - v_2 = -1$

$\cancel{v_1} + 2v_2 = 11$ $-$

$-3v_2 = -12$

$v_2 = \frac{-12}{-3}$

$= 4$ //

$v_1 - v_2 = -1$

$v_1 - 4 = -1$

$v_1 = -1 + 4$

$= 3$ //

$v_1 = 3$, $v_2 = 4$ //

(2) Buktikan $T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$ adalah transformasi linear

$v = (v_1, v_2)$ & $u = (u_1, u_2)$

* Penambahan vektor $v + u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$

$T(v + u) = T(v_1 + u_1, v_2 + u_2)$

$= ((v_1 + u_1) - (v_2 + u_2), (v_1 + u_1) + 2(v_2 + u_2))$

$= (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) + (u_1 - u_2, u_1 + 2u_2)$

$= T(v) + T(u)$ (Terbukti benar) //

* Perkalian dengan skalar

$cv = c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2)$

$T(cv) = (cv_1 - cv_2, cv_1 + 2cv_2)$

$= c(v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$

$= c\,T(v)$ (Terbukti benar) //

(3) Apakah $f(x) = x + 1$ merupakan transformasi linear ?

$f(x) = x + 1$

$f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + 1$

$f(x_1) + f(x_2) = (x_1 + 1) + (x_2 + 1)$

$= x_1 + x_2 + 2$

$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$ (salah) //

$\therefore f(x) = x + 1$ bukan merupakan transformasi linear.

(4) a. Zero transformation / Transformasi NOL

Definisi : untuk setiap vektor $\vec{x} \in R^n$ dimana 0 dinotasikan / menunjukkan $m \times n$ matrik nol dan $\vec{0} = (0, 0, \dots 0)$ menunjukkan vektor n komponen nol, transformasi nol memetakan setiap vektor (titik) $T_0 : R^n \to R^m$, $T_0(x) = 0x = \vec{0}$

Contoh : $T : V \to$, $T(v) = 0$, untuk semua v

$T(0) = T(0 \cdot v)$

$= 0\,T(v)$

$= 0$ //

b. Identity transformation / Transformasi Identitas

Definisi : untuk setiap elemen dari vektor (v) merupakan vektor tersebut (v).

Contoh : $T : V \to V$

$T(v) = v$ → untuk semua v

$-v = (-1)v$

$T(-v) = T((-1) \cdot v)$

$= (-1)\,T(v)$

$= -T(v)$ //

(5) Tentukan Nilai $T(2, 3, -2)$ jika diketahui transformasi linearnya sebagai berikut.

$T(1, 0, 0) = (2, -1, 4)$

$T(0, 1, 0) = (1, 5, -2)$

$T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$

⑤ $T: R^3 \to R^3$

$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)$

$T(2,3,-2) = 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1)$

$= 2(2,-1,4) + 3(1,5,-2) - 2(0,3,1)$

$= (4,-2,8) + (3,15,-6) - (0,6,2)$

$= (7,13,2) - (0,6,2)$

$= (7,7,0)$ //

⑥ Diketahui Transformasi Linear $T: R^2 \to R^3$

$$T(v) = Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

a. Tentukan nilai $T(v)$ dengan $v = (2,-1)$

$T(v) = Av$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+0 \\ 4-1 \\ -2+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ //} \qquad T(2,-1) = (6,3,0) \text{ //}$$

b. Buktikan bahwa T merupakan transformasi Linear dari $R^2 \to R^3$

→ Untuk setiap u dan v dalam R^2,

$T(u+v) = A(u+v)$

$= Au + Av$

$= T(u) + T(v)$

→ Untuk setiap u dalam R^2 dan skalar c,

$T(cu) = A(cu)$

$= c(Au)$

$= cT(u)$

∴ Terbukti bahwa T adalah transformasi Linear dari $R^2 \to R^3$ //

⑦ Transformasi Linear $T: R^n \to R^m$ didefinisikan $T(v) = Av$, Tentukan Dimensi R^n dan R^m

⑦ Jawaban

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A_{3,3}$ $m \downarrow$ $n \rightarrow$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = A_{3,2}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{2;4}$

Penjelasan

Fungsi T didefinisikan sebagai

$T(v) = A \cdot v$

$R^n \to R^m$ untuk menyesuaikan perkalian matriks maka $m \times n$, sehingga vektor $R^n \to m \times 1$, $R^m \to n \times 1$

Pembuktian:

a. $T(v) = A \cdot v \to R^n \to R^m = R^3 \to R^3$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} \text{ //}$$

b. $T(v) = A \cdot v \to R^n \to R^m = R^2 \to R^3$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -5x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -5x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \text{ //}$$

c. $T(v) = A \cdot v \to R^n \to R^m = R^4 \to R^2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 0x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + (-x_3) + 2x_4 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix} \text{ //}$$

⑧ Diketahui $F : R^2 \leftrightarrow R^3$

Tentukan apakah $F(x,y) = (x+y, x-y, 2xy)$

merupakan Transformasi Linear ?

$\forall u, v \in V$, dan k skalar

a. $F(u+v) = F(u) + F(v)$

b. $F(ku) = k\,F(u)$

$\Rightarrow$ Misal $u, v \in R^2$

$u = (x_1, y_1)$

$v = (x_2, y_2)$

k = skalar

a. $F(u+v) = F((x_1,y_1)+(x_2,y_2))$

$= F(x_1+x_2, y_1+y_2)$

$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2), 2(x_1+x_2)\cdot(y_1+y_2))$

$= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), (x_1-y_1)+(x_2-y_2), 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1)$

$= (x_1+y_1, x_1-y_1, 2x_1y_1) + (x_2+y_2, x_2-y_2, 2x_2y_2) + (0, 0, 2x_1y_2 + 2x_2y_1)$

$F(u+v) \neq F(u) + F(v)$ $\Rightarrow$ Tidak Terbukti //

b. $F(ku) = F(k(x_1,y_1))$

$= F(kx_1, ky_1)$

$= (kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1, 2kx_1ky_1)$

$= (kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1, 2k^2x_1y_1)$

$= k(x_1+y_1, x_1-y_1, 2kx_1y_1)$

$= k\,F(x_1,y_1)$

$\neq k\,F(u)$ $\Rightarrow$ Tidak terbukti //

$\therefore$ Jadi F bukan merupakan transformasi Linear //

⑨. Diketahui $F : R^3 \to R^2$

Tentukan apakah $F(x,y,z) = (2x+y, 5y+z)$

merupakan Transformasi Linear ?

Misal $u, v, w \in R^3$

$u = (x_1, y_1, z_1)$

$v = (x_2, y_2, z_2)$

k = skalar

9\. a. $F(u+v) = F(u) + F(v)$

$$
\begin{aligned}
F(u+v) &= F((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\
&= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 5(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\
&= 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2, 5y_1 + z_1 + 5y_2 + z_2 \\
&= (2x_1 + y_1, 5y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2, 5y_2 + z_2) \\
&= F(u) + F(v) \Rightarrow \text{Terbukti benar} //
\end{aligned}
$$

b.
$$
\begin{aligned}
F(ku) &= F(k(x_1, y_1, z_1)) \\
&= F(kx_1, ky_1, kz_1) \\
&= (2kx_1 + ky_1, 5ky_1 + kz_1) \\
&= k(2x_1 + y_1, 5y_1 + z_1) \\
&= kF(u) \Rightarrow \text{Terbukti benar} //
\end{aligned}
$$

∴ Jadi F merupakan transformasi Linear //.

10\. Kernel dan Jangkauan pada transformasi linear

⇒ Kernel

Jika $T : V \to W$ adalah transformasi Linear, maka himpunan vektor di V yang dipetakan ke 0 dinamakan dengan kernel (atau ruang nol) dari T. Himpunan tersebut dinyatakan oleh ker (T)

⇒ Jangkauan (Range)

Himpunan semua vektor di W ($T : V \to W$) yang merupakan bayangan dibawah T dari paling sedikit satu vektor di V dinamakan jangkauan dari T. Himpunan tersebut dinyatakan oleh R(T)

Contoh kernel :

$T : R^3 \to R^2$ didefinisikan $T(x) = Ax$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kernel dari T ialah set semua $x = (x_1, x_2, x_3)$ didalam R^3 $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, t \in R$$

$\ker(T) = \{t(1, -1, 1) : t \in R\}$ //

Contoh Jangkauan / Range :

$T : R^5 \to R$ temukan range dari baris A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Satu basis untuk Jangkauan / Range dari T

$B = \{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 2)\}$ //