TG2102 Geomatematika I (3 SKS)

Diferensial Parsial (*Partial Differential*)

Pertemuan ke-10

Tim Dosen Teknik Geofisika ITERA

Tujuan

Mengerti metode:

- ❑ Aturan rantai
- ❑ Diferensial implisit dan,
- ❑ Perubahan variable dalam diferensial parsial

Aturan Rantai (*Chain Rule*)

- Dalam persoalan diferensial biasa, jika f merupakan fungsi dari x sedangkan x merupakan fungsi dari variable t, maka laju perubahan fungsi f terhadap variable t dapat diperoleh dengan aturan rantai, yaitu

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

- Misalkan $z = f(x(t), y(t))$, maka

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Dinamakan **aturan rantai**

Aturan Rantai (*Chain Rule*)

Contoh 1: Tentukan $\frac{dz}{dt}$, jika $z = 2t^2 \sin t$

Jawab:

Misalkan $z = xy$, dengan $x = 2t^2$ dan $y = \sin t$ maka

$$\frac{dz}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

Karena

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial x} = y$$

Maka

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \sin t\,.\,4t + 2t^2.\cos t$$

$$\frac{dz}{dt} = 4t\sin t + 2t^2\cos t$$

Aturan Rantai (*Chain Rule*)

- Misalkan $z = f(x, y)$ dengan $x(s, t)$ dan $y(s, t)$. Artinya z juga adalah fungsi dari s dan t

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

- Dapat dinyatakan dalam perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Aturan Rantai (*Chain Rule*)

- Jika $u = f(x, y, z)$ dengan $x(s, t)$, $y(s, t)$, dan $z(s, t)$, maka dapat dituliskan:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Aturan Rantai (*Chain Rule*)

Contoh 2: Tentukan $\frac{dz}{ds}$ dan $\frac{dz}{dt}$, jika $z = xy$ dengan $x = \sin(s+t)$ dan $y = s - t$

Jawab:

$\frac{dz}{dx} = y,$ $\qquad\qquad$ $\frac{dz}{dy} = x$

$\frac{dx}{ds} = \cos(s+t),$ $\qquad\qquad$ $\frac{dx}{dt} = \cos(s+t)$

$\frac{dy}{ds} = 1,$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dt} = -1$

sehingga diperoleh

$$\frac{dz}{ds} = y\cos(s+t) + x(1) = (s-t)\cos(s+t) + \sin(s+t)$$

$$\frac{dz}{dt} = y\cos(s+t) + x(-1) = (s-t)\cos(s+t) - \sin(s+t)$$

Latihan 1

Tentukan $\frac{dx}{dt}$, dari $x = \ln(u^2 - v^2), u = t^2, v = \cos t$ dengan menggunakan aturan rantai.

Diferensial Implisit

- Diferensial (turunan) untuk fungsi yang dinyatakan secara eksplisit, misalnya $y = f(x) = x^2 + 2x$ dapat diperoleh dengan mudah
- Namun terkadang suatu fungsi dinyatakan dalam bentuk implisit, misalnya $x^3 + 3xy + y^3 = 2$
- Untuk memperoleh turunannya $\frac{dy}{dx}$ diperlukan diperlukan cara lain yang disebut **turunan impisit** (*implicit differential*)

$$\frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(3xy) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$3x^2 - \left(3y + 3x\frac{dy}{dx}\right) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 3y}{3x - 3y^2} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

Diferensial Implisit

Contoh 3: Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $ye^{xy} = \sin x$

Jawab:

$$\frac{d}{dx}(ye^{xy}) = \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$e^{xy}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(e^{xy}) = \cos x$$

$$e^{xy}\frac{dy}{dx} + y\left(ye^{xy} + xe^{xy}\frac{dy}{dx}\right) = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(e^{xy} + xye^{xy}) + y^2e^{xy} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - y^2e^{xy}}{e^{xy} + xye^{xy}}$$

Latihan 2

Misal $x + e^x = t$, tentukan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{d^2x}{dt^2}$!

Jawab:

- Menentukan $\frac{dx}{dt}$

$$dx + e^x dx = dt$$

Atau

$$\frac{dx}{dt} + e^x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dx}{dt}(1 + e^x) = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1 + e^x)}$$

Latihan 2

Misal $x + e^x = t$, tentukan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{d^2x}{dt^2}$!

Jawab:

- Menentukan $\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{dx}{dt} + e^x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(e^x \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{d^2x}{dt^2} + e^x \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-e^x}{1+e^x} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{-e^x}{(1+e^x)^3}$$

Untuk mengetahui nilai turunan di suatu titik, misal $x = 0, t = 1$, maka

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

Dan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{8}$$

Soal 1

1. If $xy = yx$, find dy/dx at (2, 4)
2. If $y^3 - x^2y = 8$ is the equation of a curve, find the slope and the equation of the tangent line at the point (3, -1) and then find d^2y/dx^2 at (3, -1).
3. For the curve $x^{2/3}+y^{2/3} = 4$, find the equations of the tangent lines at $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, at (8, 0), and at (0, 8).

More Chain Rule

- Sebelumya z=f(x,y) dengan x dan y fungsi dari t
- Sekarang z=f(x,y) dengan x dan y fungsi dari dua variable, s dan t → z sebagai fungsi dari s dan t, yang kita cari adalah $\frac{\partial z}{\partial s}$ dan $\frac{\partial z}{\partial t}$

Contoh 4

- Misalkan $z = xy$, dimana $x = \sin(s+t)$, $y = s - t$. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial s}$ dan $\frac{\partial z}{\partial t}$
- Jawab

1. Ketiga persamaan tersebut kita diferensialkan

$$dz = y\,dx + x\,dy; \quad dx = \cos(s+t).(ds+dt); \quad dy = ds - dt$$

2. Substitusikan dx dan dy ke dz

$$dz = y\cos(s+t)(ds+dt) + x(ds-dt)$$
$$dz = [y\cos(s+t) + x]ds + [y\cos(s+t) - x]dt$$

Contoh 4 (lanjutan)

$$dz = [y\cos(s+t) + x]ds + [y\cos(s+t) - x]dt$$

- $\frac{\partial z}{\partial s}$ diperoleh dengan membuat $ds = 0$, jadi

$$\frac{\partial z}{\partial s} = y\cos(s+t) - x$$

- $\frac{\partial z}{\partial t}$ diperoleh dengan membuat $dt = 0$, jadi

$$\frac{\partial z}{\partial t} = y\cos(s+t) + x$$

Soal 2

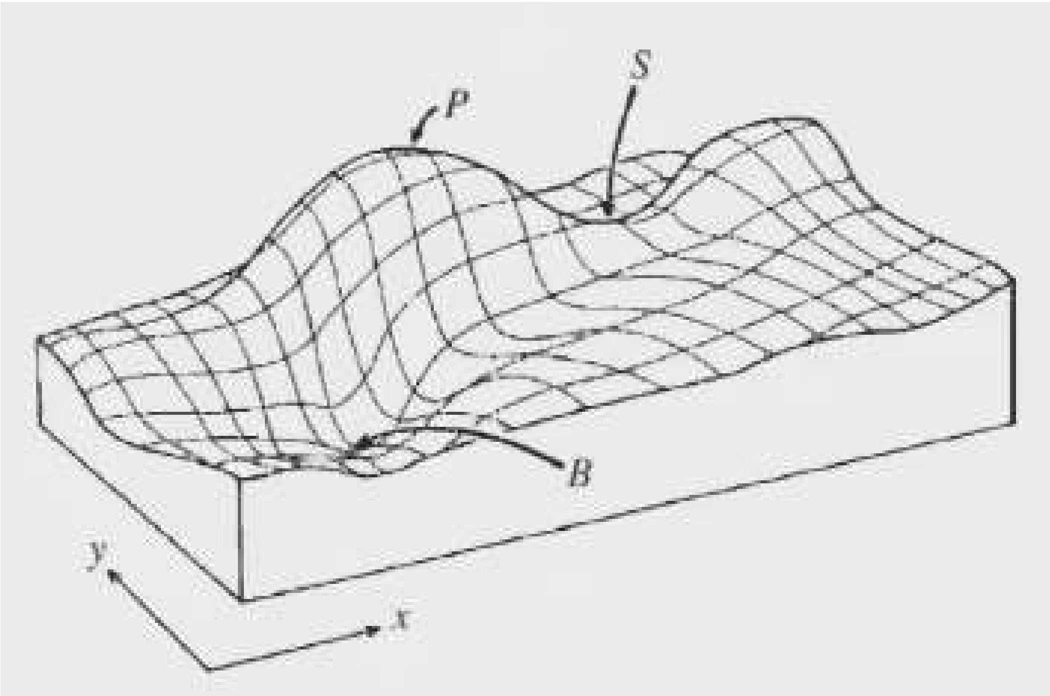
- Tentukan $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ dengan $u = x^2 + 2xy - y\ln z$ dan

$$x = s + t^2, \qquad y = s - t^2, \qquad z = 2t$$

Aplikasi Diferensial Parsial

- Diferensial dapat digunakan untuk mencari nilai ekstrimum (**maksimum atau minimum**) suatu fungsi.
- Untuk mengetahui apakah suatu titik ekstrimum merupakan titik maksimum atau minimum diperlukan informasi tentang **turunan kedua** di titik tersebut

Persoalan Maksimum-Minimum



Titik P: titik maksimum

Titik B: titik minimum

Titik S: titik pelana (sadel)

Persoalan Maksimum-Minimum

- Jika pada suatu permukaan $z = f(x, y)$ terdapat titik puncak ataupun titik lembah, maka kurva $x = konstan$ dan $x = konstan$ yang memotong permukaan tersebut dan melalui titik puncak tersebut juga akan mengalami nilai ekstrimum (**maksimum atau minimum**) di titik tersebut
- Hal ini berarti di titik puncak tersebut berlaku

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

- $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ hanya memberikan informasi tentang nilai variable x dan y yang membuat $z = f(x, y)$ bersifat ekstrimum

Persoalan Maksimum-Minimum

- ❑ Misal suatu fungsi $\phi(x, y)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

akan memberikan posisi titik ekstrimum atau stasioner

- ❑ Titik maksimum atau minimum diperlukan **uji turunan kedua**

Uji Turunan Kedua

- Uji turunan kedua pada fungsi dua variable $f(x, y)$ yang mempunyai titik ekstrimum di (a, b)
  - Titik (a, b) merupakan titik minimum (lokal) jika

  $f_{xx} > 0, f_{yy} > 0$ dan $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$
  - Titik (a, b) merupakan titik maksimum (lokal) jika

  $f_{xx} < 0, f_{yy} < 0$ dan $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$
  - Titik (a, b) merupakan titik pelana jika $f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$
- Jika $f_{xx}f_{yy} = f_{xy}^2$, tidak dapat disimpulkan tipe titik stasioner (a, b) menggunakan uji turunan kedua dan diperlukan cara lain

Persoalan Maksimum-Minimum

Contoh Permasalahan:

- Ingin dibuat suatu kotak (tanpa tutup) yang volumenya $5\ \mathrm{m}^2$. Berapa luas permukaan kotak minimal?
- Tentukan jarak terdekat dari titik pusat koordinat ke permukaan $z = xy + 5$?

Langkah Penyelesaian:

- Identifikasi fungsi yang akan dicari maksimum/minimumnya; adanya kendala/ Batasan/ *constraint* dapat mengurangi jumlah variable bebas

Metode Pengali Lagrange

- Cara lain untuk menyelesaikan persoalan maksimum-minimum dengan kendala adalah menggunakan metode **pengali Lagrange** (*Lagrange multiplier*)
- Ingin dicari maksimum/minimum fungsi $f(x, y)$ dengan kendala yang dinyatakan $\phi(x, y) = konstan$:
  - Tuliskan fungsi baru

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

  - selesaikan persamaan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ dan } \phi(x, y) = konstan$$

Untuk memperoleh nilai x, y, dan λ.

Metode Pengali Lagrange

Misal diberikan $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \phi(x,y) = y + x^2 = 1,$

- Diperoleh fungsi baru

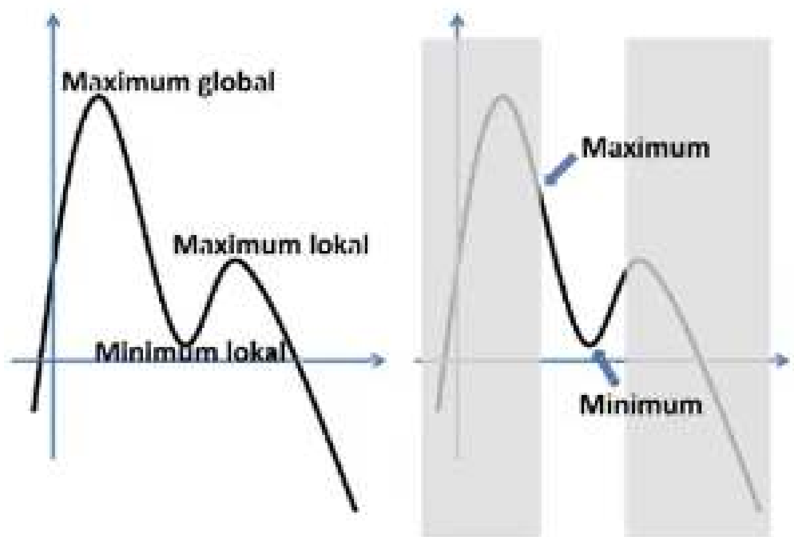
$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$
$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(y + x^2)$$

- sehingga,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda 2x = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$

Maksimum-Minimum di Batas

- Bila daerah (interval variabel) yang ditinjau terbatas bisa jadi nilai maksimum/minimum suatu fugsi tidak diperoleh di titik stasioner di dalam interval tersebut dan sangat tergantung pada batas (*boundary*) daerah yang ditentukan
- Dalam hal ini titik stasioner di dalam daerah **tidak** memberikan nilai maksimum/ minimum. **Harus diuji di daerah batas**

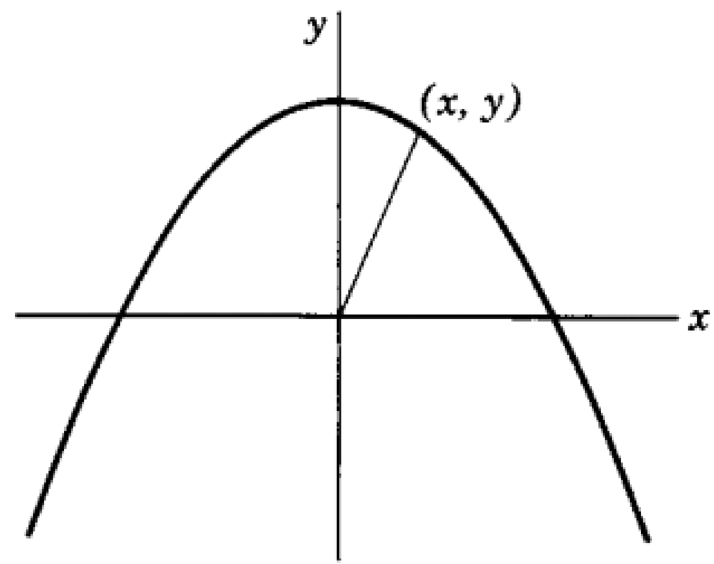


Maksimum-Minimum di Batas

- Periksa ujung-ujung batas (titik ujung)
- Apakah ada titik stasioner pada batas
- Bandingkan nilai-nilai yang diperoleh (titik stasioner dalam daerah ataupun titik stasioner pada batas dan titik-titik ujung)

Contoh 5

Kabel dibengkokan sehingga fit dengan kurva $y = 1 - x^2$. Seutas tali direntangkan Dari titik pusat (0,0) ke kurva. Tentukan titik (x,y) sehingga panjang tali minimum



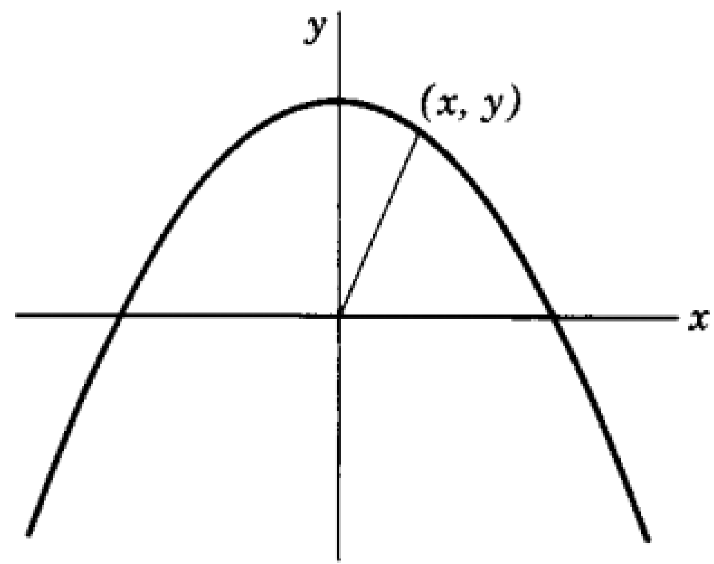
Contoh 5

Penyelesaian:

- Jarak titik (x,y) ke pusat (0,0) adalah $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$
- Meminimumkan d ekivalen dengan meminimumkan d^2

$$d^2 = x^2 + y^2$$

- Terdaapt dua metode untuk menyelesaikannya
  1. Eliminasi
  2. Diferensial Implisit
  3. Pengali Lagrange



Contoh 5

Penyelesaian:

1. Eliminasi

$$f = x^2 + y^2, \qquad y = 1 - x^2$$
$$f = x^2 + (1 - x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1$$

- Masalah kalkulus biasa

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 - 2x = 0$$

$$2x(2x^2 = 1) = 0; \;\; x = 0 \;\text{ or } x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

- Sampai sini belum jelas apakah titik tsb maksimum atau minium
- Gunakan turunan ke-2

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 - 2 = \begin{cases} -2, \text{di } x = 0 \quad \text{(Relative Maksimum)} \\ \\ +4, \text{di } x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{(Minimum)} \end{cases}$$

- Jadi jarak minimum terjadi di titik $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, y = \frac{1}{2}$

Contoh 5

Penyelesaian:

2. Diferensial Implisit

$$f = x^2 + y^2$$

$$df = 2xdx + 2ydy \ \text{ or } \frac{df}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

Perhatikan fungsi $y = 1 - x^2$, maka

$$dy = -2xdx \ \text{ or } \ \frac{dy}{dx} = -2x$$

Sehingga

$$\frac{df}{dx} = 2x - 4xy$$

Contoh 5

Penyelesaian:

2. Diferensial Implisit (Lanjutan)

$$\frac{df}{dx} = 2x - 4xy$$

- Untuk meminimumkan f kita set $\frac{df}{dx} = 0$, artinya

$$2x - 4xy = 0$$

- Substitusi pers. kurva $y = 1 - x^2$ ke pers. di atas

$$2x - 4x(1 - x^2) = 0; \text{kita peroleh } x = 0 \to y = 1 \text{ or} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \to y = \frac{1}{2}$$

Contoh 5

Penyelesaian:

2. Diferensial Implisit (Lanjutan)

- Untuk menguji apakah maxima atau minima, kita cari $\frac{d^2 f}{dx^2}$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2 y}{dx^2}$$

- Perhatikan pers. $y = 1 - x^2$, maka

$$\frac{dy}{dx} = -2x \text{ dan } \frac{d^2 y}{dx^2} = -2$$

- Sehingga

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2 + 2(-2x)^2 - 4y = 2 + 8x^2 - 4y$$

Contoh 5

Penyelesaian:

2. Diferensial Implisit (Lanjutan)

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2 + 2(-2x)^2 - 4y = 2 + 8x^2 - 4y$$

- Di x=0 dan y=1 maka $\frac{d^2f}{dx^2} = -2$ → (0,1) titik maksimum
- Di x= $\sqrt{\frac{1}{2}}$ dan y=1/2 maka $\frac{d^2f}{dx^2} = 2 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 4 - 2 = 4$
- Di x= -$\sqrt{\frac{1}{2}}$ dan y=1/2 maka $\frac{d^2f}{dx^2} = 4$

→ $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$ titik minimum

Contoh 5

Penyelesaian:

3. Pengali Lagrange

$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad \phi(x,y) = y + x^2 = 1,$

- Diperoleh fungsi baru

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(y + x^2)$$

- sehingga,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda 2x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$

Contoh 5

Penyelesaian:

3. Pengali Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda 2x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$

Diperoleh $x = 0$, sehingga $y = 1$ dan $\lambda = -2$ → pada titik $(0,1)$ adalah nilai maksimum

Atau $\lambda = -1$, sehingga $y = \frac{1}{2}$ dan $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ → pada titik $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$ adalah nilai minimum

Pengali Lagrange sangat menyederhanakan pekerjaan dalam permasalahan yang lebih rumit.

Latihan

Gunakan metode pengali Lagrange untuk menentukan jarak minimum dari titik pusat koordinat ke perpotongan antara $xy = 6$ dengan $7x + 24z = 0$.