TG2102 Geomatematika I (3 SKS)

Integral Lipat (lanjutan)

Pertemuan ke-12

Tim Dosen Teknik Geofisika ITERA

©Wahyu E Junian 2023

Materi

- ❑ Perubahan variabel: Jacobian
- ❑ Integral permukaan

Pengubahan Variabel dalam Integral

1. Dalam penyelesaian suatu persoalan terkadang lebih mudah bila digunakan system koordinat yang berbeda
2. Penggunaan system koordinat yang berbeda membawa dampak pada variable integrasi
3. Misalnya, elemen luas dalam system koordinat kartesian dinyataakan dengan $dA = dxdy$
4. Bagaimana bentuk elemen luas dalam system koordinat yang lainnya?

Cara yang dapat dilakukan untuk menentukan bentuk elemen luas (dan juga elemen volume) dari suatu system koordinat adalah dengan menggunakan **Jacobian**

Pengubahan Variabel dalam Integral

Misalkan terdapat integral lipat tiga dalam system koordinat u, v, w dan dinyatakan dalam bentuk $\iiint f(u, v, w) du dv dw$, system koordinat lain yaitu r, s, t, hubungannya

$$u = u(r, s, t);\ v = v(r, s, t);\ w = w(r, s, t)$$

Jacobian u, v, w terhadap r, s, t

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Pengubahan Variabel dalam Integral

Integral lipat tiga tersebut bila dinyatakan dalam variable r, s, t adalah

$$\iiint f(u, v, w)du\, dv\, dw = \iiint f(r, s, t)|\, J\, |dr\, ds\, dt$$

Catatan: fungsi $f(u, v, w)$ diubah menjadi $f(r, s, t)$; batas integrasi juga diubah menyesuaikan dengan variable integral yang baru

Koordinat Silinder dan Bola

Dua sistem koordinat terpenting (selain koordinat kartesian) dalam tiga dimensi adalah **sistem koordinat bola** dan **koordinat silinder**.

Koordinat silinder hanyalah koordinat kutub pada bidang (x, y) dengan z untuk variabel ketiga.

Koordinat Silinder

(4.4) Cylindrical coordinates:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$$
$$dA = a\,d\theta\,dz$$

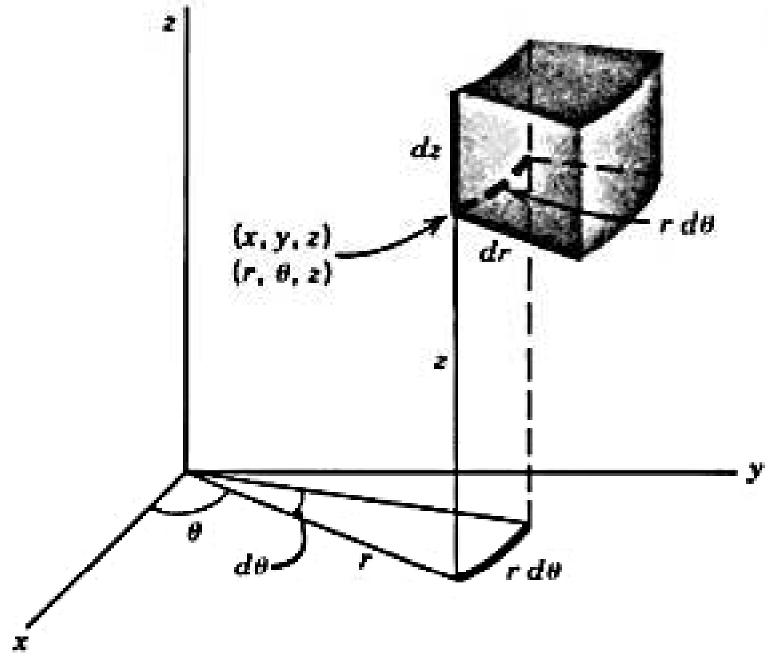
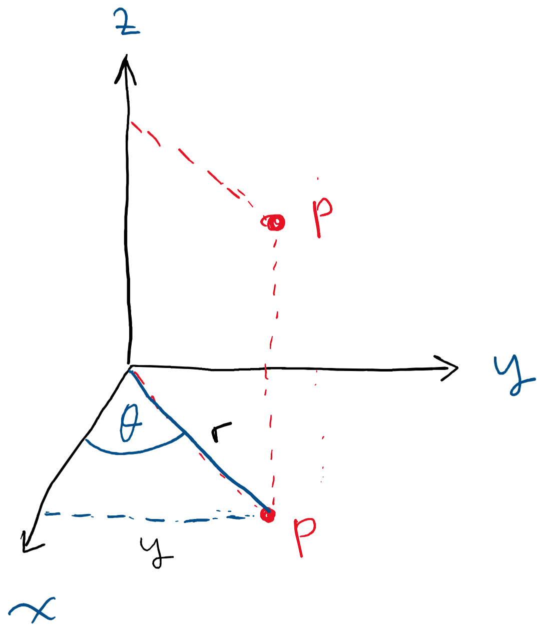
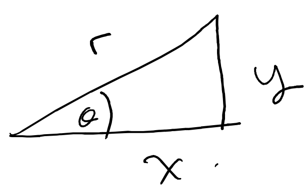


Figure 4.4





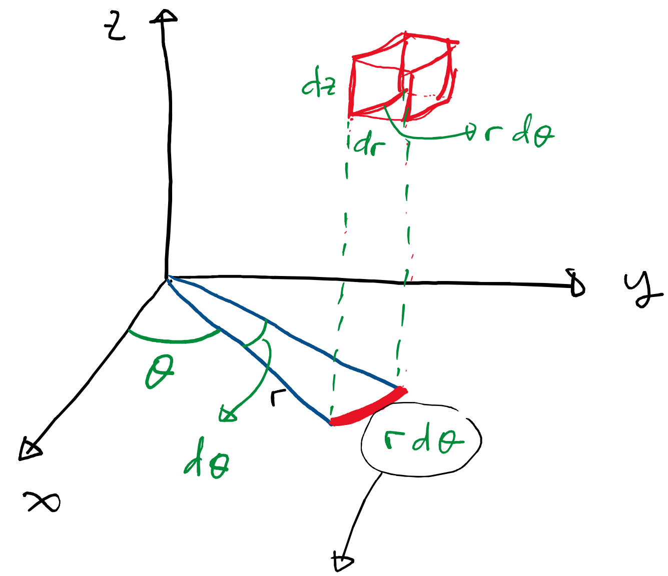
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\boxed{y = r\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\boxed{x = r\cos\theta}$$

$$\boxed{z = z}$$



$$\sin d\theta = \frac{x'}{r}$$

$$x' = r\sin d\theta$$

$$= r\,d\theta$$

Koordinat Bola

(4.5) Spherical coordinates:

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$
$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$
$$dA = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

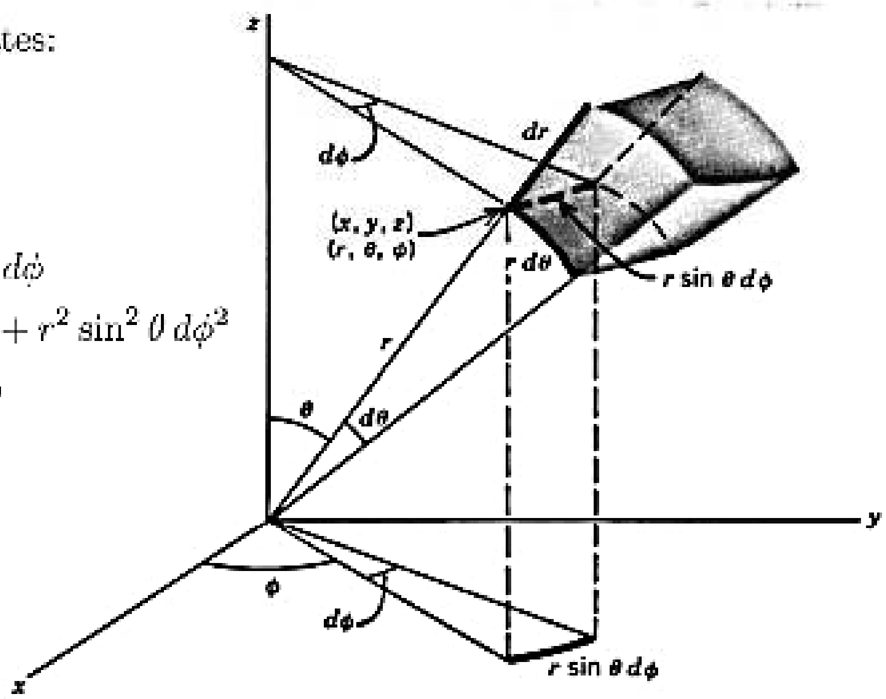
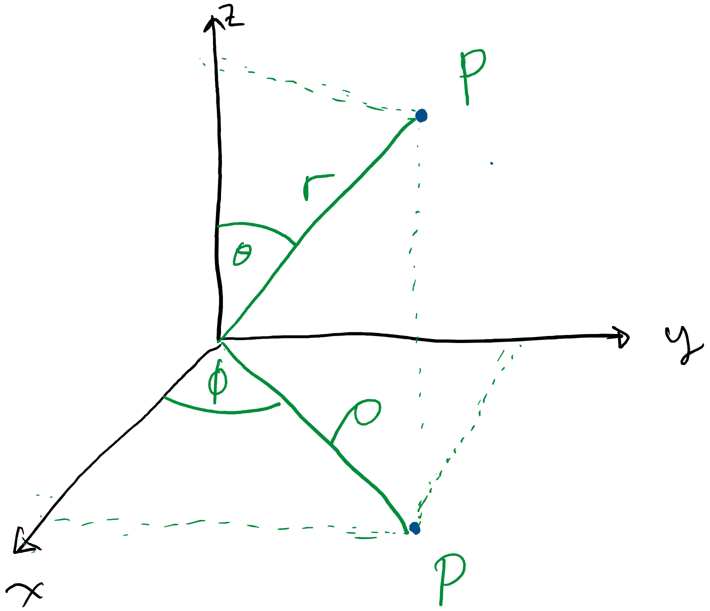
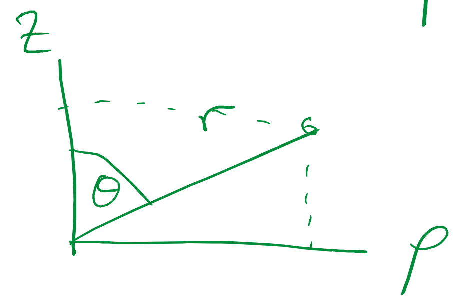


Figure 4.5



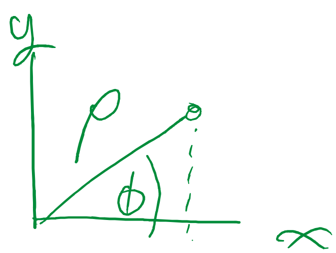
analisis $z\ \rho$



$$z = r\cos\theta$$

$$\rho = r\sin\theta$$

analisis $x\ y$



$$\sin\phi = \frac{y}{\rho}$$

$$y = \rho\sin\phi \ ; \ x = \rho\cos\phi$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

Jacobians

Untuk koordinat kutub, silinder, dan bola, kita telah melihat cara mencari elemen luas dan volume dari geometri. Namun, akan lebih mudah untuk mengetahui cara aljabar untuk menemukannya yang dapat kita gunakan untuk sistem koordinat yang tidak kita kenal atau untuk setiap perubahan variabel dalam integral lipat.

Jacobians

Dalam dua dimensi, misalkan x dan y diberikan sebagai fungsi dari dua variabel baru s dan t. Jacobian dari x, y, terhadap s, t, adalah determinannya

$$J = J\left(\frac{x, y}{s, t}\right) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

$$dA = |J|\, ds\, dt$$

Pada Koordinat Polar

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

the area element is $r\, dr\, d\theta$

Jacobians

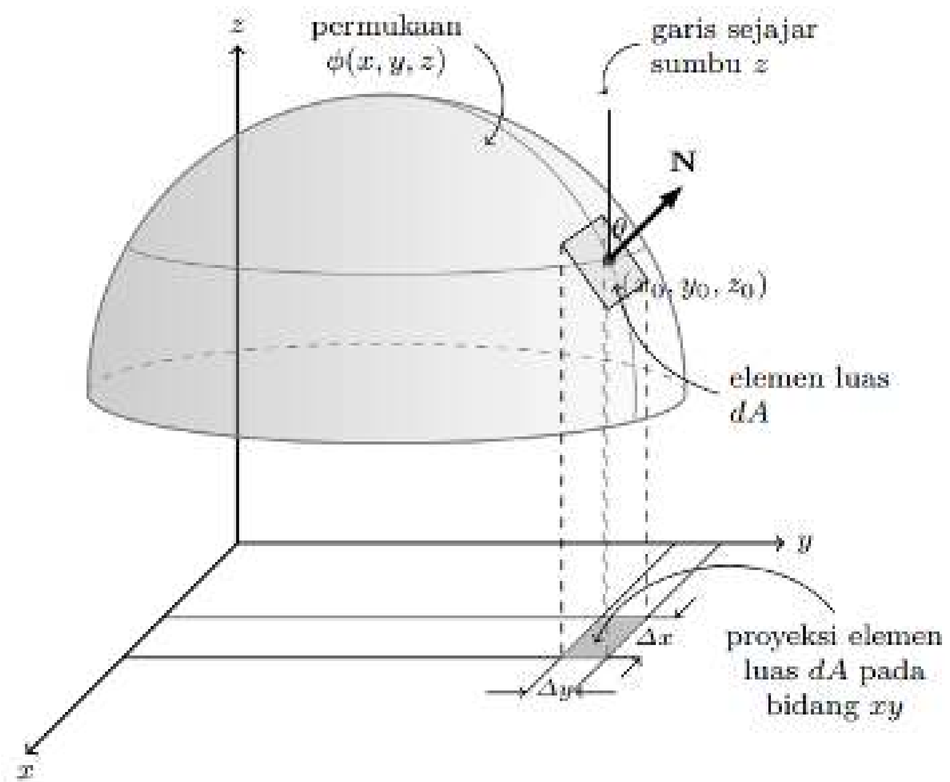
ITERA

Spherical coordinates:

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$
$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$
$$dA = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2 \sin\theta[-\sin^2\phi(-\sin^2\theta - \cos^2\theta) - \cos^2\phi(-\sin^2\theta - \cos^2\theta)]$$
$$= r^2 \sin\theta.$$

Integral Permukaan



Integral Permukaan

Vektor normal $\mathbf{N}$ pada permukaan $\phi(x, y, z) =$ konstan di suatu titik sembarang (x_0, y_0, z_0) dinyatakan dengan [1]

$$\mathbf{N} = \hat{i}\frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \hat{j}\frac{\partial \phi}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \hat{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \tag{5.9}$$

Dengan demikian jika elemen luas pada suatu permukaan dinyatakan dengan dA, maka proyeksinya pada bidang datar xy dinyatakan dengan $dxdy$ yang dapat diperoleh melalui hubungan berikut

$$dxdy = dA\cos\theta \tag{5.10}$$

Integral Permukaan

dengan θ menyatakan sudut antara garis normal pada permukaan dA dengan arah vertikal (dalam hal ini sumbu z, yang dinyatakan dengan $\hat{k}$).

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}\cdot\hat{k} \\
&= \frac{\hat{i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}\dfrac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}\cdot\hat{k} \\
&= \frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Integral Permukaan

Sehingga diperoleh

$$dA = \frac{1}{\cos\theta} dxdy \tag{5.11}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|} dxdy \tag{5.12}$$

Integral Permukaan

Bila dikaitkan dengan uraian tersebut, maka luas permukaan sembarang yang persamaannya dinyatakan dengan $\phi(x, y, z) = konstan$ adalah

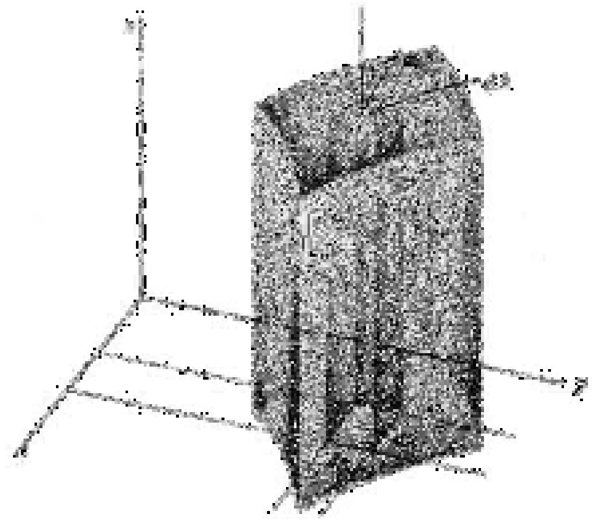
$$A = \iint \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|} \right] dx\, dy$$

Hal tersebut berarti bahwa integral permukaan dA dapat dihitung menggunakan elemen luas pada bidang datar xy, yaitu $dxdy$. Dalam hal ini batas integrasi adalah sesuai dengan batas yang berbentuk oleh proyeksi permukaan tersebut pada bidang datar xy

Integral Permukaan

Let dA (Figure 5.1) be an element of surface area which projects onto $dx\,dy$ in the (x, y) plane and let γ be the acute angle between dA (that is, the tangent plane at dA) and the (x, y) plane. Then we have

$$dx\,dy = dA\cos\gamma \qquad \text{or} \qquad dA = \sec\gamma\,dx\,dy. \tag{5.1}$$



The surface area is then

$$\iint dA = \iint \sec\gamma\,dx\,dy \tag{5.2}$$

where the limits on x and y must be such that we integrate over the projected area in the (x, y) plane.