

# TG2102 Geomatematika I (3 SKS)

## Diferensial Parsial (*Partial Differential*)

Pertemuan ke-9

# Tujuan

Mengerti filosofi diferensial parsial dan penerapannya dalam diferensial total

# Materi

- Konsep serta filosofi
- Deret pangkat dalam dua variabel
- Diferensial total



# Review diferensial (turunan) fungsi satu variabel

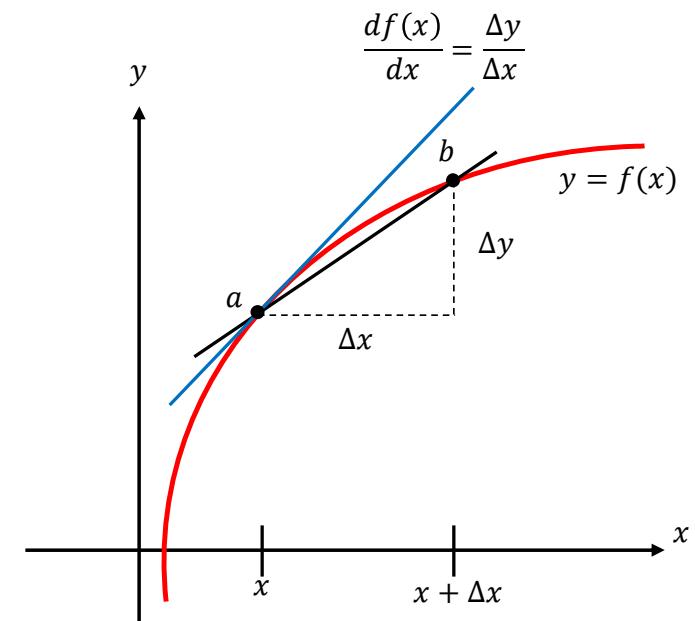
- Turunan suatu fungsi  $f(x)$  terhadap variabel  $x$ :

$$\frac{df(x)}{dx}$$

- Secara geometrik, menyatakan besar *kemiringan atau gradien* fungsi di titik tertentu

- Dari pengertian limit:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



# Diferensial Parsial

- Fungsi multivariabel  $\phi = f(x, y)$  dapat dipahami sebagai suatu permukaan, turunan terhadap salah satu variabel dapat dilakukan dengan menganggap variabel lainnya konstan → **turunan parsial (sebagian)**
- Untuk suatu permukaan  $\phi(x, y)$ , bila diambil  $y$  konstan tertentu, diperoleh kurva hasil perpotongan permukaan  $\phi(x, y)$  dengan bidang  $y$  konstan tersebut.



Turunan parsial menyatakan kemiringan atau gradien kurva hasil perpotongan tersebut

# Diferensial Parsial

- Turunan parsial fungsi  $\phi(x, y)$  terhadap variabel  $x$  (dengan menganggap  $y$  konstan):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ atau } \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_y$$

- Jika  $\phi$  juga mempunyai variabel  $y$ , dapat juga diperoleh turunan parsial  $\phi$  terhadap  $y$  (anggap  $x$  konstan):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ atau } \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_x$$

- Notasi lain yang sering digunakan:  $\phi_x$  yang berarti  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$

- Notasi  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_y$  berarti  $\phi$  mempunyai dua variabel:  $x$  dan  $y$

# Deret Pangkat Multivariabel

- Prinsipnya sama dengan deret pangkat variabel Tunggal
- Misal  $f(x, y) = \sin x \cos y$ , deret pangkat fungsi tersebut diperoleh dengan mengalikan dua deret pangkat masing-masing untuk  $\sin x$  dan  $\cos y$

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \left( x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \dots \right) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{xy^2}{2!} + \dots\end{aligned}$$

- Contoh lain untuk  $f(x, y) = e^{(x-y)}$

$$\begin{aligned}e^{(x-y)} &= 1 + (x - y) + \frac{(x-y)^2}{2!} + \frac{(x-y)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + x - y + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

# Deret Pangkat Multivariabel

- Terlihat bahwa secara umum diperoleh suku-suku yang jumlah pangkat variabel  $x$  dan  $y$  masing-masing  $0, 1, 2, 3, \dots$
- Sehingga uraian deret MacLaurin untuk fungsi dua variabel:

$$f(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 \\ + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 + \dots$$

dengan semua  $c$  adalah konstanta

# Deret Pangkat Multivariabel

- Uraian deret Taylor fungsi multivariabel  $x$  dan  $y$  di sekitar titik  $(a, b)$

$$f(x, y) = c_{00} + c_{10}(x - a) + c_{01}(y - b) + c_{20}(x - a)^2 \\ + c_{11}(x - a)(y - b) + c_{02}(y - b)^2 + \dots$$

- Koefisien-koefisien  $c$  dapat diperoleh melalui metode yang sama dengan cara memperoleh koefisien deret Taylor untuk fungsi satu variabel yaitu menggunakan turunan (diferensial), tapi dalam hal ini adalah **diferensial parsial**.

# Deret Pangkat Multivariabel

- Bentuk uraian deret pangkat (deret Taylor) di sekitar titik  $(a, b)$  untuk fungsi dua variabel:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( (x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \Big|_{x=a, y=b}$$

- Untuk uraian Maclaurin berarti  $a = b = 0$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \Big|_{x,y=0} \\ \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{x,y=0} &= \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \Big|_{x,y=0} \end{aligned}$$

# Diferensial Total

- Untuk fungsi satu variabel  $y = f(x) \Rightarrow \Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$
- Jika  $z = f(x, y)$ , maka diferensial total dari  $z$ :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$dz$  menyatakan perubahan variabel  $z$  dalam arah bidang singgung Ketika  $x$  berubah sebesar  $dx$  dan  $y$  berubah sebesar  $dy$ .

# Diferensial Total

- Untuk fungsi yang memiliki variabel lebih banyak, cara yang sama juga dapat dilakukan.
- Jika  $u = f(x, y, z, \dots)$ , maka diferensial total dari  $u$ :

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

Secara numerik,  $du$  adalah pendekatan yang baik untuk  $\Delta u$  jika turunan parsial dari fungsi  $f$  kontinu dan  $dx, dy, dz$ , dst cukup kecil.

# Diferensial Total

**Contoh 1:**

□ Tentukan diferensial total dari fungsi  $f(x, y) = y \exp(x + y)$ .

□ Jawab:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \exp(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x + y) + y \exp(x + y)$$

Dengan demikian

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = [y \exp(x + y)]dx + [\exp(x + y) + y \exp(x + y)]dy$$

# Derivatif Total

- Sedangkan turunan total (*total derivative*) atau sering juga disebut sebagai turunan (*derivative*) suatu fungsi  $f(x, y)$  terhadap variabel  $x$  dan  $y$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$$

# Derivatif Total

## Contoh 2:

- Tentukan Turunan total dari fungsi  $f(x, y) = x^2 + 3xy$  terhadap variabel  $x$  jika  
 $y = \arcsin x$
- Jawab:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Jadi,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y + \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

# Hubungan Resiprok

- Misalkan  $x$  adalah fungsi dua variable  $y$  dan  $z \rightarrow x(y, z)$ :

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z dy + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y dz$$

- Umumnya  $y$  dapat dinyatakan sebagai fungsi dari  $x$  dan  $z$

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z dx + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x dz$$

- Diperoleh:

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z dx + \left( \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \right) dz$$

Untuk  $z$  konstan ( $dz = 0$ )

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z dx + 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z^{-1}$$

⇒ hubungan resiprok (kebalikan)

# Hubungan Siklik

- Hal penting lain yang dapat diperoleh dari

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z dx + \left( \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \right) dz$$

bila  $x$  konstan yang berarti  $dx = 0$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \right) dz \\ \Rightarrow 0 &= \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \end{aligned}$$

# Hubungan Siklik

$$0 = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y$$

Dikalikan dengan  $\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = 0$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = - \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y$$

# Hubungan Siklik

Dengan menggunakan hubungan resiprok

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z^{-1} \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 1$$

Dan selanjutnya akan diperoleh

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = - \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$