TG2102 Geomatematika I (3 SKS)

Integral Lipat

Pertemuan ke-11

Tim Dosen Teknik Geofisika ITERA

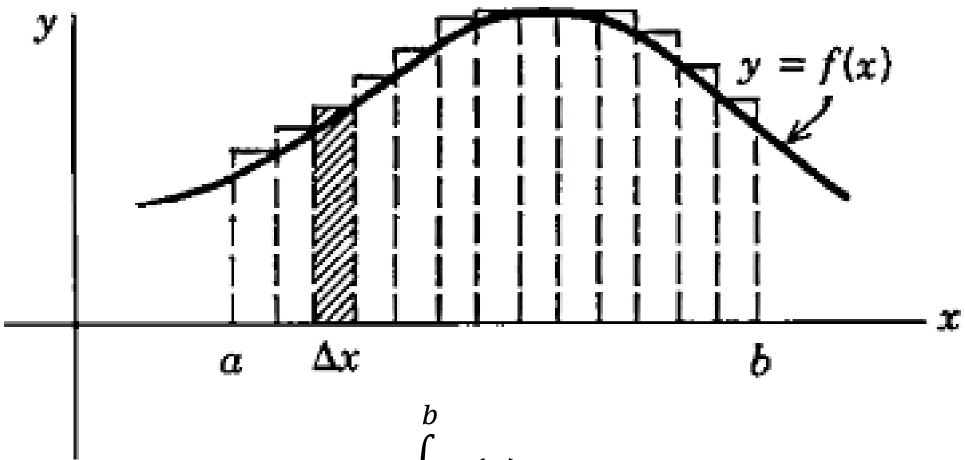
Tujuan

- ❑ Memahami konsep integral lipat
- ❑ Mengerti cara menghitung integralnya

Materi

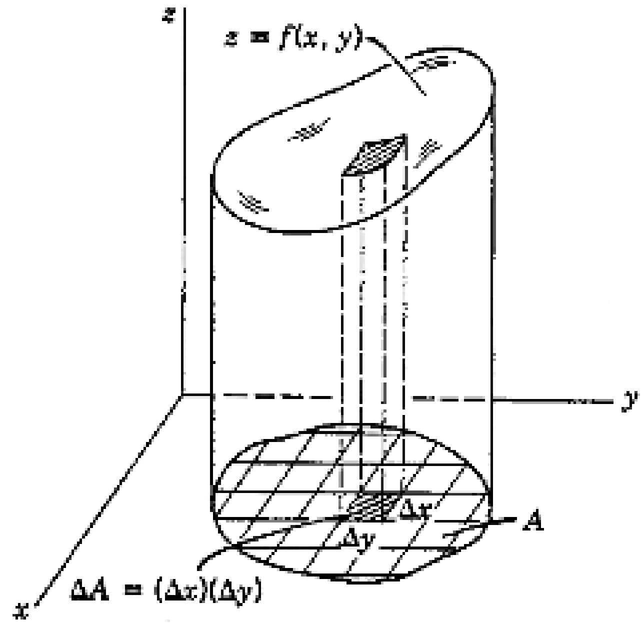
- Integral lipat dua
- Integral lipat tiga

variabel tunggal



$$\int_a^b f(x)dx$$

multivariabel

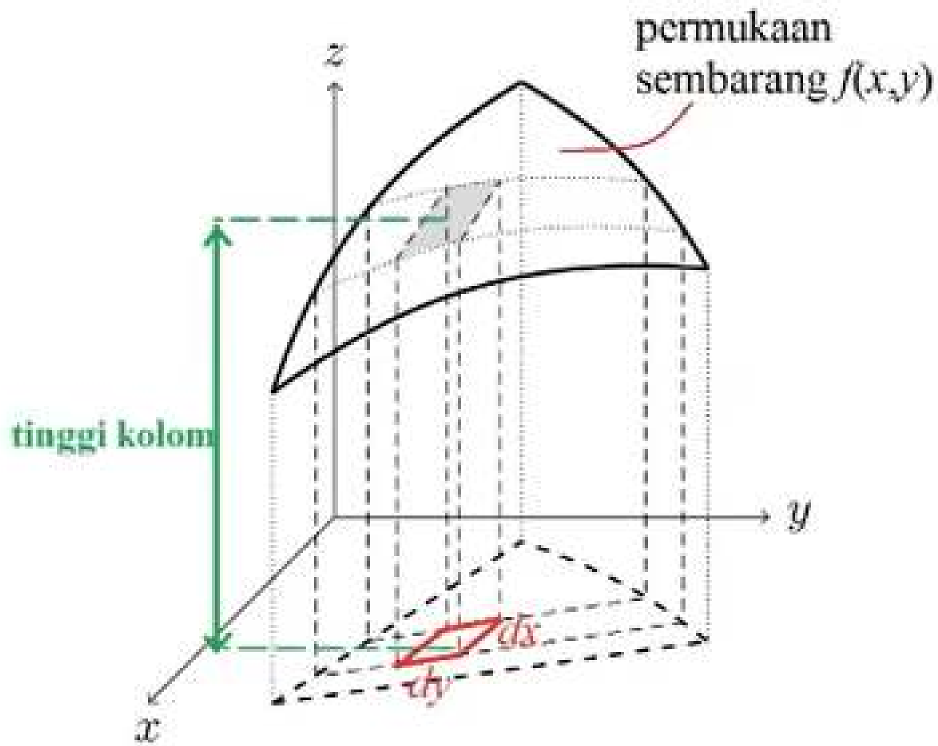


$$\iint_A f(x,y)dxdy$$

Integral lipat dua dan tiga

- Fungsi variabel tunggal $f(x) \rightarrow \int f(x)dx$ menggambarkan luas daerah di bawah kurva $f(x)$.
- Fungsi multivariabel $f(x, y)$ secara geometri menggambarkan suatu permukaan (bidang).
- Dengan pemahaman yang sama untuk fungsi dengan variabel Tunggal, integral lipat dua dari fungsi $f(x, y)$ yaitu $\iint f(x, y)\, dxdy$ menyatakan volume ruang di bawah permukaan yang dibentuk oleh $f(x, y)$ tersebut.

Integral lipat dua dan tiga



Integral lipat dua

- **Integral lipat dua** dari suatu fungsi $f(x,y)$ pada suatu daerah A dalam bidang xy menyatakan volume di bawah fungsi $f(x,y)$ dan dibatasi luasan A
- Ditulis sebagai

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

- Integral lipat dua juga dapat diinterpretasikan sebagai luas suatu daerah yang dibatasi oleh suatu kurva tertentu

Integral lipat dua

- $\iint_A f(x,y)dxdy$ menyatakan volume di bawah suatu permukaan dengan batas luasan A, bila diambil $f(x,y) = 1$ maka integral $\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_A dxdy$ sama dengan luas daerah A itu sendiri
- Jadi integral lipat dua juga dapat diinterpretasikan sebagai luas suatu daerah

Integral lipat tiga

- Integral lipat tiga yang berbentuk

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Dapat diinterpretasikan sebagai “hyper-volume” atau volume dalam ruang berdimensi 4

- Interpretasi lainnya adalah integral lipat tiga $\iiint_V dxdydz$ menyatakan volume suatu objek
- Selain itu $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$ dapat juga dipahami sebagai kuantitas total suatu objek tiga dimensi dengan kerapatan (densitas) yang dinyatakan dengan $f(x,y,z)$

Penyelesaian Integral Lipat

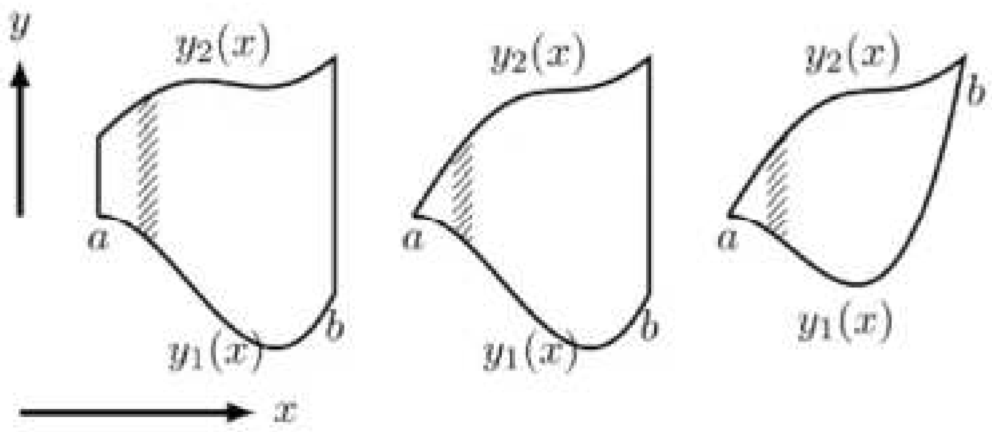
- Integral lipat dapat diselesaikan dengan metode perulangan integral (*iterated integrals*)

$$I = \iint_A f(x,y)dxdy = \int_{y1}^{y2} \left[\int_{x1(y)}^{x2(y)} f(x,y)dx\right] dy$$

atau

$$I = \iint_A f(x,y)dxdy = \int_{x1}^{x2} \left[\int_{y1(x)}^{y2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

Penyelesaian Integral Lipat

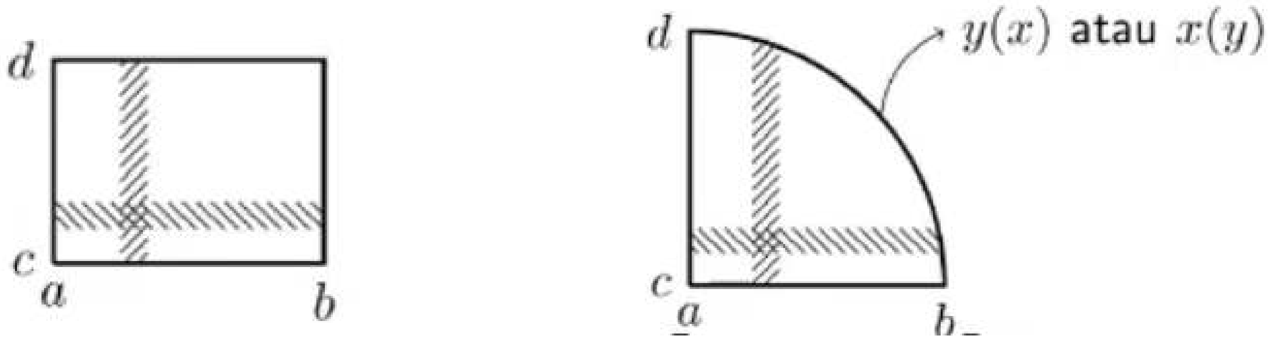


$$\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=y1(x)}^{y2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

Penyelesaian Integral Lipat

$$\int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=x1(y)}^{x2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

Penyelesaian Integral Lipat



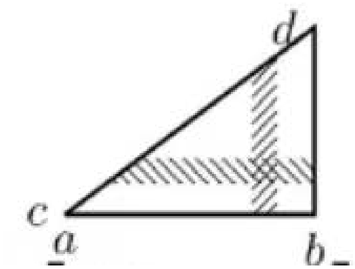
$$\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=c}^{d} f(x,y)dy\right]dx$$

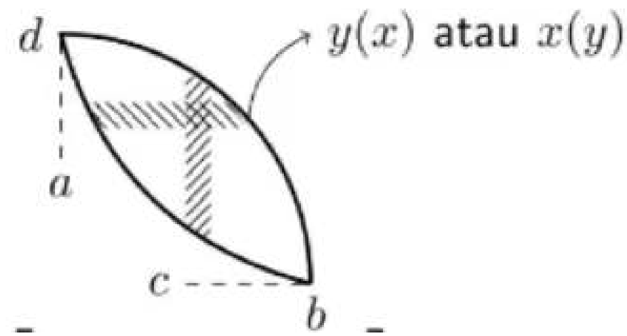
$$\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=c}^{y(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$\int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=a}^{b} f(x,y)dx\right]dy$$

$$\int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=a}^{x(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

Penyelesaian Integral Lipat





$$\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=c}^{y(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=y1(x)}^{y2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$\int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=y(x)}^{b} f(x,y)dx\right]dy$$

$$\int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=x1(y)}^{x2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

Aplikasi Integral Lipat

- Luas dan Volume
- Masa Jenis/ muatan/ energi
- Teorema Green, Divergensi dan Curl
- Penyelesaian masalah pada Teori Medan Potensial (Gravity, Magnetik, Listrik dll.)

Luas dan Volume

- Luas permukaan di bidang xy

$$L = \iint_A dxdy$$

- Volume ruang di bawah suatu permukaan $f(x,y)$ yang dibatasi oleh luasan A

$$V = \iint_A f(x,y)dxdy$$

- Volume objek dalam ruang xyz

$$V = \iiint_V dxdydz$$

Massa Jenis

Total massa/muatan/energi yang dimiliki suatu objek dengan densitas tertentu :

$$M = \iint_A \rho dxdy$$

$$M = \iiint_V \rho dxdydz$$

ρ menyatakan kerapatan (densitas)→ dapat berupa rapat massa, rapat muatan, rapat energi, dll

$$\oint_s D.n d\sigma = \int_v \rho d\tau$$

Teori Medan Potensial

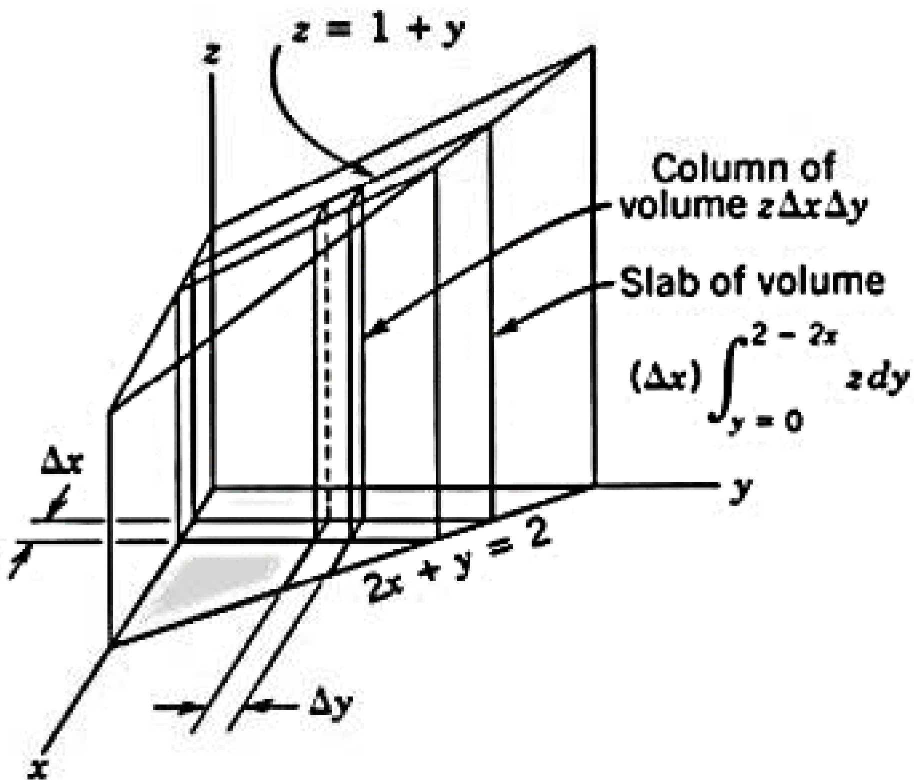
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I = \iint_\sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \qquad \mathbf{J} : \text{current densitiy} \quad \text{cf. } I = \int_\sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

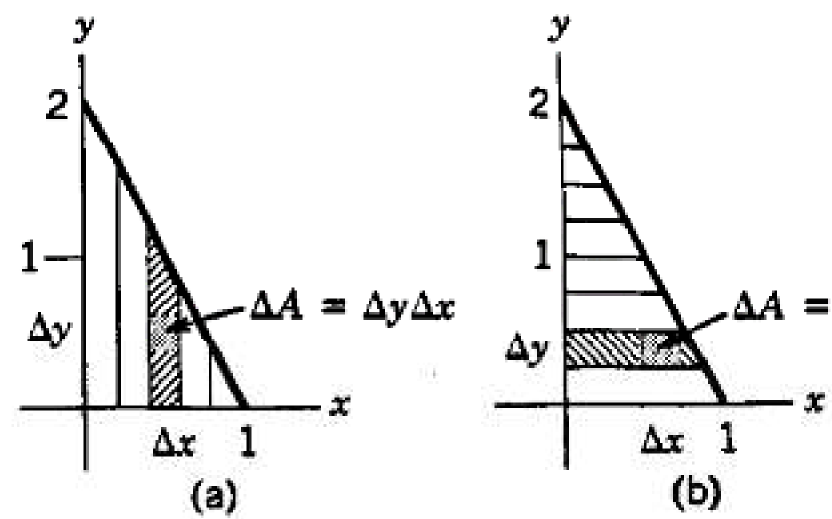
$$\iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_\sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Contoh 1



z = 1 + y
z
Column of
volume zΔxΔy
Slab of volume
(Δx) ∫_{y=0}^{2−2x} z dy
Δx
y
2x + y = 2
Δy
x



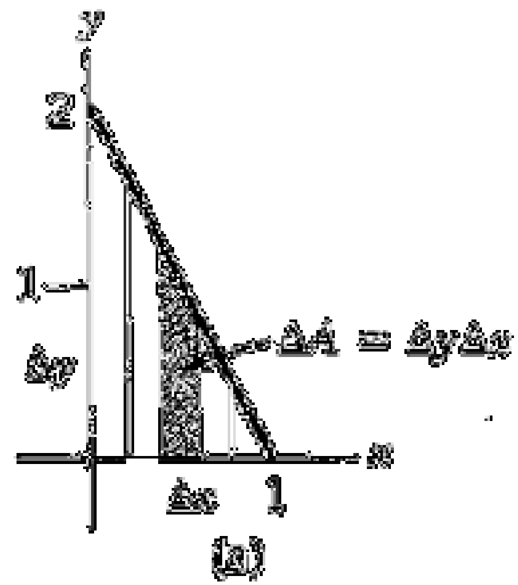
y
2
1
Δy
ΔA = ΔyΔx
x
Δx
1
(a)
y
2
1
Δy
ΔA =
x
Δx
1
(b)

Contoh 1 (Lanjutan)

$$\int_{y=0}^{2-2x} z\,dy = \int_{y=0}^{2-2x} (1+y)\,dy = \left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-2x}$$
$$= (2-2x) + (2-2x)^2/2 = 4 - 6x + 2x^2$$

$$\int_{x=0}^{1} (4 - 6x + 2x^2)\,dx = \frac{5}{3}.$$

$$\boxed{\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{2-2x} (1+y)\,dy\right) dx \quad \text{or} \quad \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} (1+y)\,dy\,dx}$$

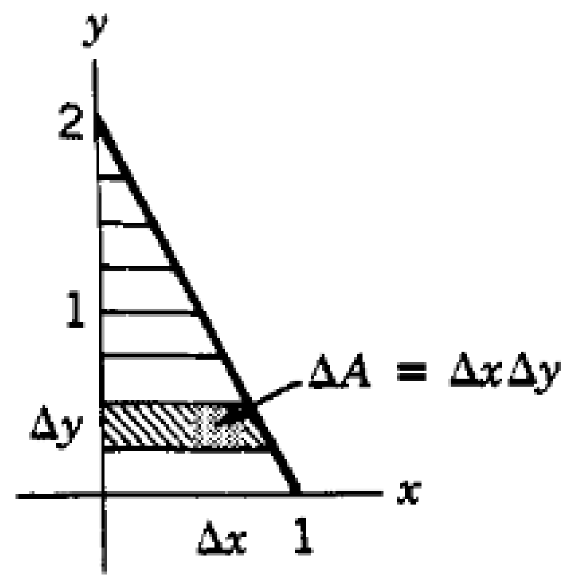


Contoh 1 (Lanjutan)

$$\int_{y=0}^{2}\left(\int_{x=0}^{1-y/2}(1+y)\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{2}(1+y)x\Big|_{x=0}^{1-y/2}\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{2}(1+y)(1-y/2)\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{2}(1+y/2-y^2/2)\,dy = \frac{5}{3}.$$



(b)

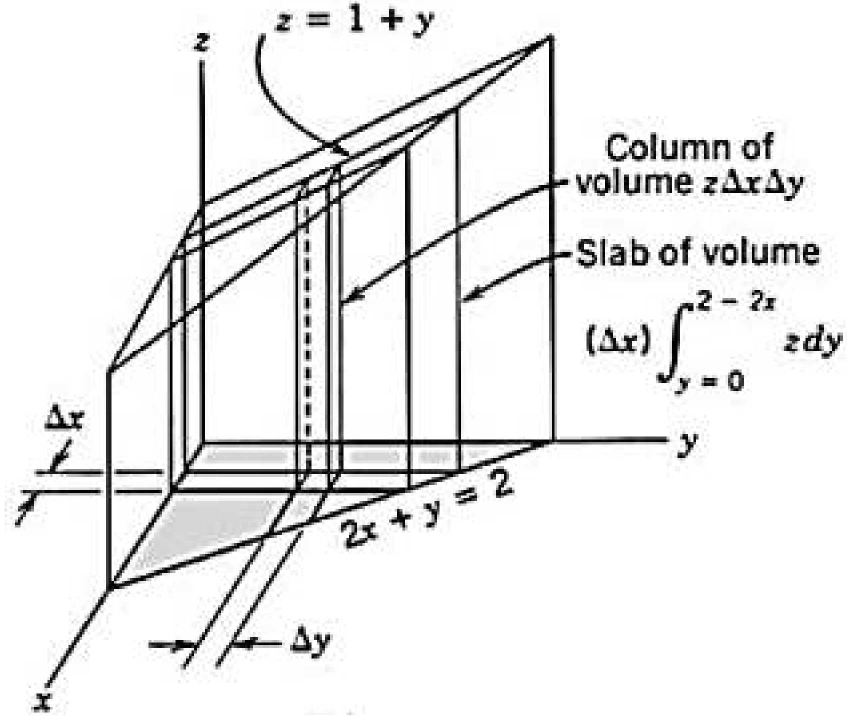
Contoh 2

- Hitung volume dengan menggunakan integral lipat tiga

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} \left(\int_{z=0}^{1+y} dz \right) dy\,dx \quad \text{or} \quad \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} \int_{z=0}^{1+y} dz\,dy\,dx$$

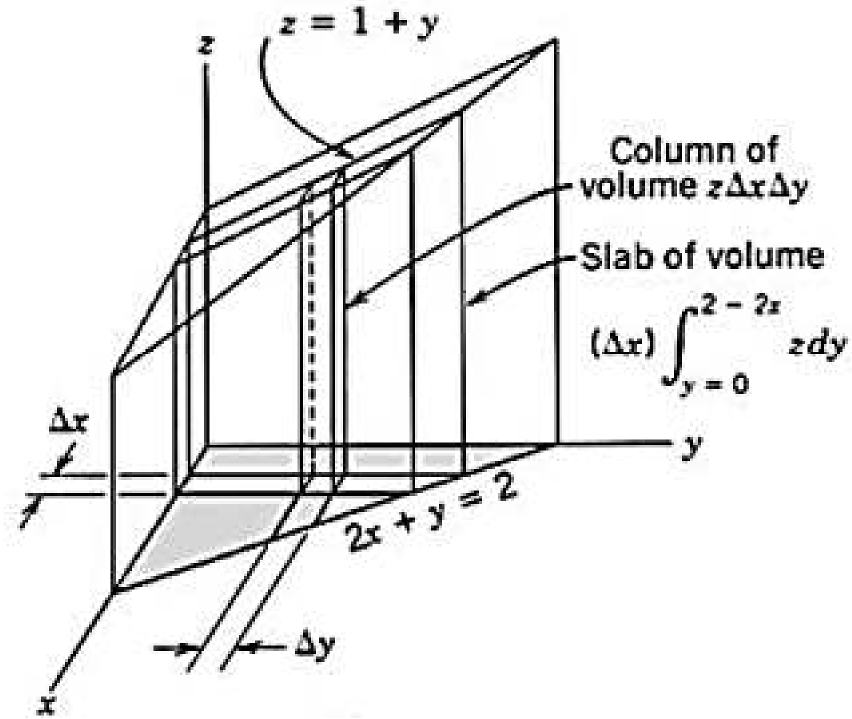
$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} (1+y)\,dy\,dx = \frac{5}{3},$$



Contoh 3

- Temukan massa benda padat jika densitas (massa per satuan volume) adalah x + z.

$$M = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} \int_{z=0}^{1+y} (x+z)\, dz\, dy\, dx = 2$$



Contoh 4

Ketika f(x,y) = g(x).h(y) → Kasus khusus yang penting adalah integral ganda pada persegi panjang (batas x dan y adalah konstan) ketika f(x, y) adalah hasil kali, f (x, y) = g(x)h(y)

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} g(x)h(y)\,dy\,dx$$

$$= \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$$

Contoh 5

Hitunglah massa pelat persegi panjang yang dibatasi oleh x = 0, x = 2, y = 0, y = 1, jika densitasnya (massa per satuan luas) adalah f(x, y) = xy.

$$M = \iint_A xy\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} xy\,dx\,dy$$

$$= \left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y\,dy\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Latihan 1

ITERA

1. $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{x^2} y \, dy \, dx$$

2. $\iint_A (2x - 3y)\, dx\, dy$, where A is the triangle with vertices $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$.